

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

им. М.В. Келдыша РАН

На правах рукописи

Нуралиева Анна Борисовна

О ДИНАМИКЕ ТРОСА КОСМИЧЕСКОГО ЛИФТА

01.02.01 – теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор Ю.А. Садов

Москва

2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

Г Л А В А 1. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР КОНЦЕПЦИИ КОСМИЧЕСКОГО ЛИФТА.....	11
1.1. Идея космического лифта в XX веке	11
1.2. Углеродные нанотрубки (УНТ), как перспективный материал для троса КЛ.....	13
Г Л А В А 2. СОВРЕМЕННЫЕ КОНЦЕПЦИИ КОСМИЧЕСКОГО ЛИФТА.....	16
2.1. Схема Эдвардса	16
2.2. Альтернативная конструкция	19
Г Л А В А 3. СТАТИКА КОСМИЧЕСКОГО ЛИФТА.....	21
3.1. Трос постоянного сечения.....	21
3.2. Трос переменного сечения	24
3.3. Дополнительная нагрузка.....	25
3.4. Балансировочная масса.....	26
3.5. Полная масса лифта	27
Г Л А В А 4. ПРОСТЕЙШИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ЛИФТА	30
4.1. Одномассовая модель с невесомым тросом	30
4.2. Одномассовая модель с весомым тросом	33
4.3. Двухзвенная модель.....	39
Г Л А В А 5. НЕЛИНЕЙНАЯ НЕПРЕРЫВНАЯ МОДЕЛЬ С ГИБКИМ НЕРАСТЯЖИМЫМ ТРОСОМ.....	49
5.1. Математическая модель	50
5.2. Математическая модель в плоскости экватора	55

5.3. Разностная аппроксимация и некоторые алгоритмы вычислений.....	57
5.4. Программная среда для исследования динамики	58
Основные возможности.....	58
Коррекция и верификация результатов.....	60
5.5. Трехмерные движения троса.....	64
5.6. Движения троса в плоскости экватора.....	67
Ограниченные движения.....	67
<i>Одномодовые колебания, близкие к периодическим</i>	67
<i>Медленное изменение амплитуды</i>	68
<i>Периодическое изменение напряжения</i>	71
<i>Распространение локального возмущения</i>	72
<i>Смена режима</i>	73
Линейные колебания	75
<i>Линеаризация задачи</i>	75
<i>Разделение переменных</i>	77
<i>Вычисление спектра</i>	77
<i>Алгоритм вычисления собственных значений и собственных функций</i> ..	78
<i>Численное исследование малых колебаний</i>	79
<i>Поведение напряжения в линейных колебаниях</i>	81
Нелинейные движения с большой амплитудой, явления неустойчивости, катастрофические режимы.....	87
<i>Пример точного решения нелинейной модельной задачи</i>	88
Г Л А В А 6. ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ.....	92
6.1. Математическая модель	92
6.2. Алгоритм вычислений	94
6.3. Примеры расчетов.....	95
ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ.....	99
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	99
ЛИТЕРАТУРА	100

ВВЕДЕНИЕ

Около 50 лет назад был запущен первый спутник – произошел прорыв человека в космос. С тех пор в космосе побывали множество аппаратов, они изучали ближний и дальний космос, были созданы глобальные системы связи и мониторинга земли, сотни человек были на космических орбитах, 12 человек побывали на Луне. Сейчас сложно представить жизнь без космических технологий. Однако, есть серьезные препятствия, из-за которых космическая деятельность развивается не так быстро, как предсказывали в начале космической эры. По прогнозам ведущих специалистов середины 60-х годов стоимость доставки килограмма груза на низкую орбиту должна была снизиться до 100 долларов, хотя на самом деле до сих пор она держится на уровне 10 000 долларов. Это связано, в том числе, и со спецификой космического транспорта, и с растущим влиянием деятельности человека на околоземную среду. Космическое пространство, за исключением тонкого по космическим меркам атмосферного слоя Земли – безопорная среда. Движение там возможно только за счет выбрасывания рабочего вещества, которым до настоящего времени являются продукты сгорания ракетного топлива. Поэтому при подъеме на орбиту КА (космический аппарат) должен поднимать вместе с собой запас этого рабочего вещества и/или топлива, расходуя на это большую часть топлива. При подъеме тела на геостационар начальная масса ракеты почти в 100 раз превышает массу выводимого на орбиту груза. Большая часть начальной массы – топливо, продукты сгорания которого выбрасываются в атмосферу и загрязняют ее. Остальная часть теряемой при запуске массы – элементы конструкции, часть из которых возвращается на Землю, а часть – переходит на промежуточные орбиты, увеличивая засоренность «космическим мусором». Эти недостатки ракетного способа транспортировки груза неизбежны, т.к. главный показатель эффективности этого способа – скорость истечения рабочего вещества – для ракет на химическом топливе сейчас близок к предельному. Поэтому важно искать альтернативные ракетному способы доставки полезного груза в космос.

Один из таких способов, очень простой принципиально – придание поднимаемому грузу энергии и кинетического момента орбитального движения за счет вращения Земли. То есть протянуть трос от Земли за геостационар и доставлять грузы по нему, при этом у тела, отпущенного с троса, уже будет начальная скорость. Гравитационная и центробежная силы держат конструкцию в натянутом состоянии. На верхнем конце помещена

балансировочная масса для удержания конструкции в равновесии. Это концепция космического лифта. Несмотря на то, что идея не очень нова и, по мнению многих специалистов, не имеет непреодолимых препятствий для реализации, ее проработка продвигается медленно. За первое десятилетие нашего века нет существенного продвижения ни в исходной концепции конструкции КЛ (2000 г.), многие недостатки которой сейчас видны, ни в исследовании динамики. Поэтому данная работа, в которой предлагается развитие современной концепции КЛ и довольно подробное исследование его динамики, представляется **актуальной**.

Диссертация включает в себя 6 глав. Так как тема относительно новая, в 1-й главе дан обзор развития идеи космического лифта вплоть до появления концепции Эдвардса, которая является общепринятой в наше время.

Во 2-й главе подробно описывается концепция Эдвардса. Предложенная им конструкция – минимальная. Ее основа – тонкая лента, по которой перемещается транспортная кабина. Конструкция относительно проста по исполнению, но имеет существенные слабые стороны. Разбираются ее достоинства и недостатки. Предлагается альтернативная концепция, более надежная и обладающая большими возможностями.

В главе 3 – статика КЛ – приводятся частично уже известные данные о требованиях к прочности троса, о распределении натяжения в нем, о профилировании троса и вообще о статических характеристиках конструкции. Изложена мало известная концепция нагруженного лифта. Рассмотрен вопрос о выборе балансировочной массы и длины несущего троса, обеспечивающих минимальную массу всей конструкции.

Остальные главы посвящены исследованию динамики несущего троса космического лифта, как основной и уникальной по своим характеристикам части его конструкции.

В главе 4 рассматриваются упрощенные модели динамики, начиная с простейшей – материальная точка на невесомом стержне. Такая модель использовалась в одной из первых в нашей стране работ по динамике космического лифта В.В. Белецкого [1]. Здесь она несколько расширена по сравнению с [1], т.к. рассматриваются колебания не только в плоскости экватора, но и в меридиональной плоскости. Получены периоды этих колебаний. Показано, что периоды колебаний в плоскости экватора в зависимости от длины троса составляют несколько суток, а в меридиональной плоскости – меньше суток.

Дальше рассмотрена модель с весомым прямым тросом переменной линейной плотности, в плоскости экватора. По сравнению с предыдущей моделью периоды изменяются мало, критические углы (углы отклонения,

при превышении которых трос не возвращается в равновесное вертикальное положение) изменяются заметно. В этой модели также рассмотрено влияние притяжения Луны, но оно оказалось малым.

Более сложная модель – двухзвенная, трос моделируется двумя массами, соединенными невесомыми стержнями, движение происходит в плоскости экватора. Это первое приближение к гибкому тросу. В линеаризованной модели проанализированы частоты колебаний нулевой (маятниковой) и первой моды. Нулевой моде соответствует синфазная форма колебаний, первой – противофазная. Частота маятниковой моды соответствует результатам более простых моделей и составляет несколько суток, частота первой моды – меньше суток. Некоторые свойства нелинейных колебаний изучены с помощью отображения Пуанкаре. Показано, что в фазовом пространстве существует большая область, где орбиты отображения Пуанкаре регулярны, соответствуют системе, близкой к интегрируемой. Сильная хаотизация начинается только при больших, физически нереализуемых отклонениях.

В главе 5 изучается движение троса как непрерывной нерастяжимой весомой нити с грузом на конце, нить переменного сечения в переменном по координате силовом поле. Описывается построение математической модели. Выводятся модели для движения в плоскости экватора и для пространственного движения. Используется довольно необычный для задач динамики троса метод вычисления натяжения. Так как трос нерастяжимый, невозможно использовать механические уравнения состояния напряженной нити типа закона Гука. Натяжение получается из согласования условия нерастяжимости троса и динамических уравнений. При этом получается линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Для вычисления натяжения нужно решать краевую задачу для этого уравнения. Вычисления строятся на основе метода прямых: численно интегрируются эволюционные уравнения, и на каждом шаге по времени численно решается краевая задача для определения натяжения.

Описана программная система. Она позволяет интегрировать уравнения движения КЛ на большом интервале времени, задавать широкий набор характеристик движения и статических параметров, выдает зависимости одних параметров движения от других, может вычислять ряд дополнительных величин: напряжение в каждой точке троса, полную энергию конструкции, разложение в ряд Фурье отклонений точек троса от вертикали. В общем, представляет собой довольно удобный и гибкий инструмент изучения динамики КЛ. Описаны способы коррекции результатов и контроля точности вычислений.

С помощью программ, описанных выше, были проведены численные эксперименты. Меньше вычислений было проведено для 3-х-мерной системы, где были рассчитаны отдельные (показательные) случаи движения. Соотношение периодов экваториальных и меридиональных колебаний в нелинейной модели оказалось примерно таким же, как и в простых моделях.

Колебания в плоскости экватора для той же непрерывной модели более наглядны и изучены более подробно.

Рассмотрены колебания, происходящие в ограниченной по углу области, в частности, колебания, близкие к одномодовым. Обнаружены такие интересные эффекты, как медленное (с периодом порядка 2-х месяцев) изменение амплитуды, смена режимов при свободных колебаниях троса (колебания с относительно большим периодом и большой амплитудой неожиданно сменяются более высокочастотными колебаниями меньшей амплитуды). При ограниченных по амплитуде движениях не наблюдалось значительных (более 30%) изменений напряжения троса.

Рассмотрены колебания не ограниченные по углу, то есть такие, при которых лифт падает. Обнаружены несколько сценариев падения – известные в динамике нити эффект кнута и постепенная раскачка, а также необычная спиральная неустойчивость, которая возникает при превышении некоторого угла наклона троса к вертикали в начале троса. При этом трос провисает (угол наклона к горизонту становится отрицательным), потом изгибается наподобие спирали, потом образует петлю и падает. Для этого случая построена приближенная модельная задача, у которой нашлось аналитическое решение. Ее решение мы рассматриваем как подтверждение численных расчетов.

Подробно рассмотрена линеаризованная система. У нее найдены собственные формы и частоты колебаний. При определенных ограничениях на отклонения, собственные формы линеаризованной системы, заданные как начальные условия для программы, численно интегрирующей полную систему, дают периодические движения. Детально изучено изменение напряжения в малых колебаниях, отмечены некоторые интересные эффекты.

Разные модели, представляющие поперечные колебания, дают похожие результаты (там, где их можно сравнить).

Последняя, 6-я глава посвящена продольным колебаниям, тоже в нелинейной непрерывной модели. Построена математическая модель, рассмотрены различные ее конечно-разностные аппроксимации, из них выбраны наиболее подходящие. Рассмотрены некоторые характерные колебания, а также распространение узкого возмущения вдоль троса.

В заключении подчеркнуто, что динамика космического лифта сложна и разнообразна, и нуждается в дальнейшем изучении.

Практически все содержание работы является **новым** и по постановкам задач (из-за относительной новизны изучаемых объектов), и по основным используемым математическим моделям, и по полученным результатам.

Корректность полученных выводов подтверждается согласованностью результатов, полученных из разных моделей (там, где их можно сравнить), результатов разных вариантов расчета (равномерная сетка, неравномерная сетка), совпадением с найденными аналитически данными в тех случаях, когда это возможно и разумным соответствием их результатам немногочисленных имеющихся работ по этой теме.

Апробация работы

Результаты работы докладывались на

1. 51-й Научной конференции МФТИ, ноябрь 2008 г. Секция динамики и управления движением космических аппаратов.
2. VI Международном аэрокосмическом конгрессе IAC'09, Москва, август 2009 г.
3. XXXIV Академических чтениях по космонавтике, Москва, январь 2010г.
4. XLV Научных чтениях памяти К.Э. Циолковского, Калуга, сентябрь 2010 г. (2 доклада)
5. XXXV Академических чтениях по космонавтике, Москва, январь 2011г.
6. Научном семинаре сектора №4 отдела №5 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, руководитель д.ф.-м. н., проф. Овчинников М.Ю., апрель 2011г.
7. Научном семинаре Мехмата МГУ, руководитель д.ф.-м.н., проф. Сазонов В.В., май 2011 г.
8. V Международной конференции “Математические идеи П.Л. Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания”. Обнинск, май 2011 г.
9. Семинаре “Динамика относительного движения” Мехмата МГУ, руководители чл.-корр. РАН, проф. Белецкий В.В. и д.ф.-м.н., проф. Голубев Ю.Ф., сентябрь 2011 г.
10. Семинаре Института механики МГУ, руководитель д.ф.-м.н., проф. Самсонов В.А., октябрь 2011 г.

11. Семинаре “Математические проблемы технической механики” Мехмата МГУ, руководители д.ф.-м.н., проф. Степанов С.Я., к.ф.-м.н., проф. Буров А.А., ноябрь 2011 г.
12. 54-й Научной конференции МФТИ. Долгопрудный, М.О., ноябрь 2011г.
13. Семинаре им. В.В. Румянцева по аналитической механике и теории устойчивости Мехмата МГУ, руководители чл.-корр. РАН, проф. Белецкий В.В. и д.ф.-м.н., проф. Карапетян А.В., декабрь 2011 г.
14. XXXVI Академических чтениях по космонавтике. Москва, январь 2012 г.
15. Научном семинаре отдела №5 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, руководитель д.ф.-м.н., проф. Голубев Ю.Ф., февраль 2012

Публикации:

1. Нуралиева А.Б. Задачи статики и динамики космического лифта. // Тезисы 51-й научной конференции МФТИ, ноябрь 2008. Секция динамики и управления движением космических аппаратов.
2. Садов Ю.А., Нуралиева А.Б. О концепции и динамике равномерно нагруженного космического лифта. // VI Международный аэрокосмический конгресс IAC'09. П99 Тезисы докладов. – Юбилейный М.О.: Хоружевский А.И., 2009, с. 269-270.
3. Садов Ю.А., Нуралиева А.Б., Ставицкий А.А. Некоторые задачи механики равномерно нагруженного космического лифта. // Актуальные проблемы российской космонавтики. Труды XXXIV академических чтений по космонавтике. Москва, 26-29 января 2010 г. Москва, Комиссия РАН, 2010, с. 133-134.
4. Садов Ю.А., Нуралиева А.Б. О концепции нагруженного космического лифта. // К.Э. Циолковский и современность. Материалы XLV Научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Калуга: «Эйдос», 2010, с. 169-170.
5. Нуралиева А.Б., Садов Ю.А. О задачах динамики космического лифта. // К.Э. Циолковский и современность. Материалы XLV Научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Калуга: «Эйдос», 2010, с. 167-168.
6. Нуралиева А.Б. О задачах динамики космического лифта // Актуальные проблемы российской космонавтики. Материалы XXXV академических чтений по космонавтике. Москва, январь 2011 г. Москва, Комиссия РАН, 2011, с. 132–133.
7. Садов Ю. А., Нуралиева А. Б. Автомодельные решения в модельной задаче о колебаниях троса космического лифта. // Математические

- идеи П.Л. Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания. Материалы V международной конференции. Обнинск: ИАТЭ НИЯУ МИФИ, 2011, с. 60.
8. Нуралиева А. Б. О динамике космического лифта. // Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе. Труды 54-й научной конференции МФТИ, 2011, с 43-44.
 9. Садов Ю.А., Нуралиева А.Б. О концепции нагруженного секционированного космического лифта // Актуальные проблемы российской космонавтики. Материалы XXXVI академических чтений по космонавтике. Москва, 2012. <http://www.ihst.ru/~akm/36t5.htm>
 10. Нуралиева А.Б., Калачев Г.В. О базовой динамике космического лифта. // Актуальные проблемы российской космонавтики. Материалы XXXVI академических чтений по космонавтике. Москва, 2012. <http://www.ihst.ru/~akm/36t5.htm>
 11. Садов Ю.А., Нуралиева А.Б. О концепции нагруженного секционированного космического лифта. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН №39. М., 2011. 24 с.
 12. Садов Ю.А., Нуралиева А.Б. Нелинейные поперечные колебания троса космического лифта // Математическое моделирование, 2011 г., том 23, №12, стр. 3-19.

Г Л А В А 1. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР КОНЦЕПЦИИ КОСМИЧЕСКОГО ЛИФТА

1.1. Идея космического лифта в XX веке

Космический лифт – инженерное сооружение, транспортная магистраль между Землей и околоземными орбитами. Для обеспечения такой связи нужно протянуть материальную (жесткую) конструкцию между конечными пунктами. Тогда сообщение между ними можно организовать обычными техническими средствами, двигаясь вдоль конструкции и опираясь на нее.

Первым подобную идею выдвинул Циолковский. Он рассматривал жесткую башню, достигающую геостационарных высот. Циолковский разобрал достоинства и недостатки этой конструкции в работе «Грезы о Земле и небе» 1895 года. К этому времени уже были примерно известны космические высоты и протяженность земной атмосферы, так что путь опорного движения в атмосфере был отвергнут. Циолковский выделил три основных преимущества конструкции: 1) традиционный опорный способ подъема кабины; 2) достижение космической скорости с небольшими затратами топлива за счет вращения Земли; 3) использование самой конструкции для исследований в космосе. Он не проводил расчетов, относящихся к прочности и механике такой конструкции, но невозможность ее сооружения была очевидна самому КЭЦ. Поэтому развития идея не получила. Позже стало понятно, что «башню Циолковского» невозможно построить из-за катастрофической неустойчивости сооружения огромной высоты, нагруженного вдоль оси сжимающей (гравитационной) силой.

В начале 1910-х Ф. А. Цандер модифицировал идею [2]. Он предложил не жесткую башню, а подвесную конструкцию. Эта конструкция удерживается в равновесии центробежной силой, действующей на верхнюю ее часть, в результате вращения сооружения вместе с Землей. Но Цандер не опубликовал эту идею, возможно, из-за того, что реализация выдвигала бы невыполнимые требования к прочности материала.

Потом идея лифта была надолго отодвинута в сторону. В 20-е годы 20-го века развернулись работы по ракетным двигателями интерес к умозрительным проектам угас. Кроме того, сооружение требовало материалов недоступной тогда прочности и развитой же ракетной техники. О КЛ вспомнили в конце 50-х годов, после первых полетов в космос.

Ю. Н. Арцутанов в 1960 году написал статью «В Космос – на электровозе» [3], которая была опубликована в «Комсомольской правде», где предлагал трос, протянутый с поверхности Земли за геостационар, чтобы перемещать по нему грузы в космос. Арцутанов указал, что трос должен быть чрезвычайно прочный и переменной ширины. Позже он развил свою идею [4,5], изложив ее уже в научно-популярных журналах. Работа Арцутанова не была известна за границей, но идея, видимо, витала в воздухе.

В 1966-м году в журнале “Science” сотрудники Калифорнийского института океанографии John D. Isaaks, Allyn C. Vine, Hugh Bradner и George E. Vachus публикуют статью [6], где описывают конструкцию, близкую к КЛ, и приводят расчеты прочности. В замечании по поводу этой статьи [7], опубликованном в том же томе журнала “Science”, советский писатель и научный обозреватель Владимир Львов отмечает, что идея не новая, и ее уже высказывал Арцутанов. Львов употребляет название “cosmic lift” – что близко к английскому термину “space elevator” и совсем близко к русскому «космический лифт».

Идея постепенно начинает распространяться. В 1967 году студент Харьковского авиационного института Игорь Смульский защищает дипломную работу о космическом лифте, став, видимо, первым в мире дипломированным специалистом по космическому лифту.

В конце 60-х годов американский астрофизик и писатель-фантаст Артур Кларк обратил внимание на статьи Айзекса и Львова. Он был впечатлен этой идеей и после до конца жизни популяризовал ее. Кларк пишет роман «Фонтаны рая» (в 1969) [8] и статьи [9]. Именно с подачи Кларка и по его произведениям идея стала популярной. Он обратил внимание зарубежной научной общественности на статью Арцутанова, которая и на родине не была особенно замечена, а за границей не была известна вообще. «Фонтаны рая» и другие произведения Кларка гораздо больше популяризовали идею, чем все предшествующие научные публикации. Скорее всего, Кларк первый употребляет термин “space elevator”, которым теперь и называют эту концепцию.

«Фонтаны рая» – технически продуманный роман. Кстати, в качестве материала троса Кларк выдумывает «монокристалл алмаза» и почти угадывает. Гораздо позже выхода «Фонтанов рая» были открыты нанотрубки, которые являются единственным пока подходящим материалом для троса. Нанотрубки – аллотропическая модификация углерода, как и алмаз.

В конце 1960-х годов начинается большой цикл исследований астраханского ученого Г.Г. Полякова проектов нестандартных схем вывода

объектов в космос. Среди разных оригинальных методов рассматривается схема космического лифта. В 1972 выходит работа Г.Г. Полякова [10]. Это первая в нашей стране научная работа о КЛ. Затем последовал целый цикл таких работ. Поляков занимался этой задачей систематически. Он рассматривает, в частности, КЛ в поле тяжести несферической планеты, выводит уравнение кривой равновесия неэкваториального космического лифта. Впервые встречается у Полякова лифт с нагруженным тросом. Поляков уже в первой своей статье на эту тему употребляет название «космический лифт». Работы Полякова редко публиковались в распространенных научных изданиях и были мало известны. Позже был издан сборник трудов Полякова, в котором том 1 – «Привязные спутники, космические лифты и кольца» [11]. В своем сборнике Поляков рассматривает и многие другие оригинальные, зачастую фантастические проекты.

В 1975 году выходит работа J. Pearson'a "The Orbital Tower: A Spacecraft Launcher Using the Earth's Rotational Energy" [12]. Это одна из первых научных работ о КЛ за границей. Пирсон, видимо, не знал предыдущих работ. Он называет конструкцию "Orbital Tower". В работе Пирсона еще раз подтверждена необходимость использования сверхпрочных материалов, на несколько порядков прочнее известных к тому времени. Для облегчения проблемы прочности предлагается трос переменного сечения. Но даже в этом варианте требования к прочности оказывались невыполнимыми. В частности поэтому, и на фоне успехов ракетной космонавтики, статья Пирсона, хотя и была замечена, в отличие от работ Полякова, но не вызвала заметных откликов.

После статьи Пирсона наступило затишье в теме КЛ. Интерес к этой идее возродился с открытием нанотрубок.

Дальше, в 80-е, 90-е года, появлялись усложненные и труднореализуемые варианты конструкции КЛ. Подробный список ранних работ о КЛ есть, например, в статьях Н.Л. Шошунова «Космический лифт: надежды и проблемы» [13], А. Первушина «Мифология космического лифта» [2] и в статье "Space Elevator History" [14].

1.2. Углеродные нанотрубки (УНТ), как перспективный материал для троса КЛ

В 1991 годах японским ученым Ииджимой (K.Iijima) были открыты углеродные нанотрубки (УНТ) [15]. Они оказались уникальным материалом. Теоретические вычисления показали прочность на разрыв для продольно приложенной нагрузки свыше 130 ГПа [16], что более, чем в 40 раз,

превышает прочность легированной стали. Плотность нанотрубок примерно в 6 раз меньше плотности стали.

Нанотрубки – длинные, цилиндрические, полые внутри углеродные молекулы (рис. 1, 2). Диаметр их порядка нанометров (отсюда их название), длина может достигать сантиметров. Можно представить их себе как свернутую в цилиндр «выложенную» шестиугольниками графитовую плоскость. Эти длинные цилиндры могут на концах закругляться, например, в виде полусферы из половины молекулы фуллерена C_{60} , но могут оканчиваться и по-другому, например, ветвиться. Очевидно, свернуть плоскость можно по-разному (рис. 1). Параметр, который определяет способ свертки, называется хиральностью. Один из способов задания хиральности – указать угол между направлением сворачивания нанотрубки и направлением, в котором соседние шестиугольники имеют общую сторону. Для рис. 1а этот угол равен 0° , для рис. 1б 30° . Эти молекулы бывают однослойными и многослойными (вложенные друг в друга как матрешки (коаксиально) (рис. 2). В зависимости от однослойности или многослойности и хиральности у молекул УНТ сильно меняются многие физические характеристики, например, теплопроводность и электропроводность.

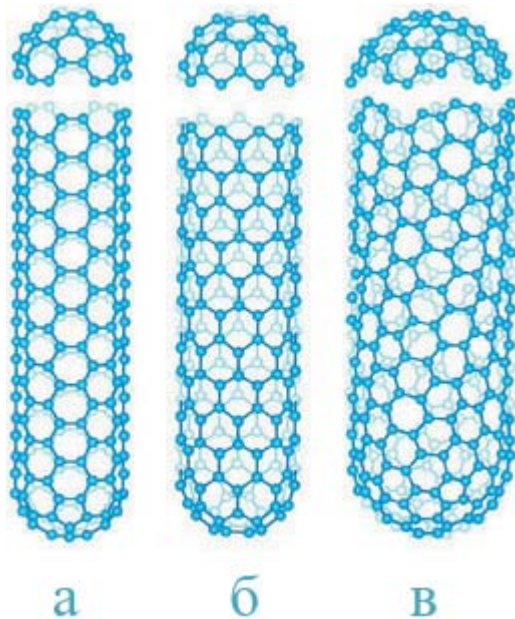


Рис. 1. Нанотрубки разной хиральности

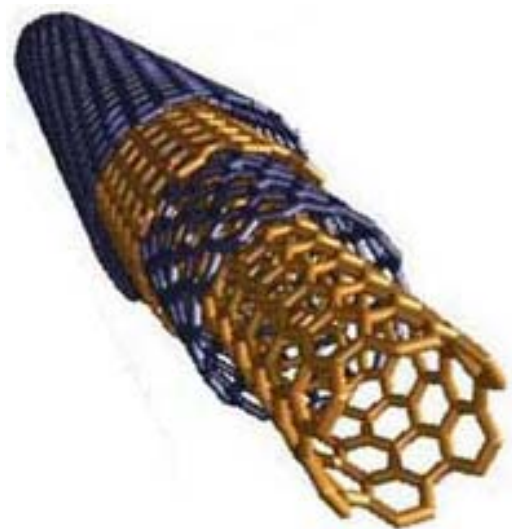


Рис. 2. Многослойная нанотрубка

Нанотрубку (по крайней мере, один ее вид) можно еще представить как модификацию фуллерена C_{60} . Фуллерены – аллотропная форма углерода – представляют собой выпуклые замкнутые многогранники. Возьмем фуллерен C_{60} (рис. 3 а). Он имеет форму усеченного икосаэдра и состоит из 20 шестиугольников и 12 пятиугольников. (Пример усеченного икосаэдра – футбольный мяч). В экваториальную область C_{60} вставим пояс из 10 атомов углерода. Получим немного вытянутый фуллерен C_{70} (рис. 3 б). Повторив ту же операцию (вставку пояса из 10 атомов) много раз, получаем нанотрубку (рис. 3 г).

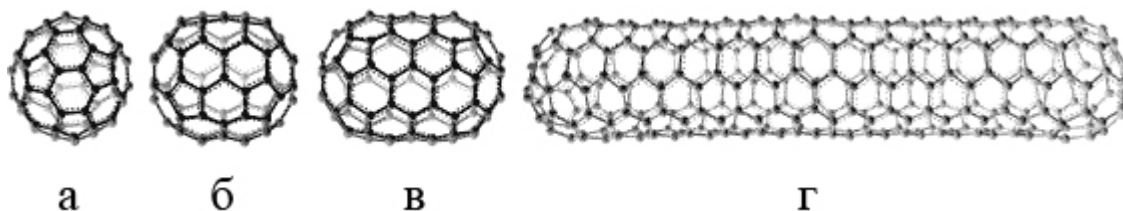


Рис. 3. Надстройка фуллерена C_{60} до нанотрубки

Нанотрубки обладают многими замечательными свойствами, например, высокой теплопроводностью. Это свойство может оказаться полезным для материала троса. В таком материале температура распределяется более равномерно, поэтому у него меньше температурные деформации и больше способность передавать тепло от перегретых участков. Также это полезно для переноса избыточного тепла, образовавшегося из-за торможения кабины о трос на пассивном участке движения. Некоторые модификации УНТ имеют высокую электропроводность (приближающуюся к сверхпроводимости). Это тоже потенциально полезное свойство – сверхлегкие провода очень бы пригодились для КЛ.

Внутри нанотрубки или фуллерена могут содержаться атомы других элементов. Такие примеси влияют, конечно, на свойства трубки. Это тоже расширяет потенциальные возможности УНТ.

Но реализовать эти потенциальные возможности – отдельная задача. В конце первого десятилетия 3-го тысячелетия удалось получить УНТ длиной около 20 см [17]. Измеряемые прочности стали приближаться к теоретическим [18].

Мало просто получить молекулы. Их надо еще выравнять и соединять в волокно. Полученные волокна требуется спрясть в нити или как-нибудь соединить в длинные отрезки материала. Это сложная задача, требуются плохо еще разработанные технологии, и нет гарантии, что полученные материалы тоже будут иметь сверхвысокую прочность. Можно рассчитывать на создание композитных материалов, но и у них прочность ожидается меньше, чем у чистого материала из УНТ. Можно сказать, что пока есть не материал для троса, а возможность получения материала.

Относительно недавно появились сведения, что у пучков нанотрубок обнаружены свойства искусственных мышц, то есть способность сильно изменять длину при приложении электрического напряжения [19, 20]. Такое свойство также может оказаться очень полезным для управления КЛ при соответствующей его конструкции.

Открытие нанотрубок дает основание надеяться на получение в будущем материала для троса КЛ, хотя решение этой задачи требует еще многих усилий и технологических достижений.

Г Л А В А 2. СОВРЕМЕННЫЕ КОНЦЕПЦИИ КОСМИЧЕСКОГО ЛИФТА

2.1. Схема Эдвардса

Открытие нанотрубок инициировало всплеск интереса к космическому лифту. До этого КЛ был чисто умозрительным проектом, а теперь появились материалы, с помощью которых его можно реализовать.

Этой задачей заинтересовалось американское космическое агентство НАСА и выделило деньги на разработку общих технических требований к конструкции КЛ. Грант выдали двум группам: группе Б. Эдвардса (Bradley Edwards) и группе Д. Смитермана (David Smitherman). Обе группы пришли к выводу, что для реализации проекта нет непреодолимых технических трудностей (при условии, что будет создан материал), все может быть

сделано уже на основе существующих или уже разрабатываемых технологий. Смитерман сформулировал выводы более осторожно – проект реализуем в течение нескольких десятилетий [21, 22]. Эдвардс пришел к выводу, что можно построить КЛ при достаточных вложениях за 10 лет. Институт Перспективных Концепций (NIAC NASA) заказал Эдвардсу разработку более детального проекта.

Эдвардс разработал цельную техническую концепцию КЛ, предложил варианты основных компонент его конструкции [23]. Основной элемент конструкции – несущий трос – Эдвардс предложил выполнить в виде ленты из сверхпрочного материала на основе УНТ. Вдоль троса движутся, опираясь на него, подъемники (кабины). Один из самых сложных вопросов – как снабжать подъемники энергией. Проводной способ был отвергнут (наверное, из-за большой массы проводов, протянутых на тысячи километров и большой потери энергии в них). Большие трудности возникают и при использовании солнечных батарей. В результате, Эдвардс остановился на беспроводном пути передачи энергии, с помощью микроволнового или лазерного излучения. Также Эдвардс продумал размещение и состав наземной инфраструктуры. Тросу Эдвардс предлагал придать форму ленты, чтобы сделать его менее уязвимым для мелких метеоритов. Был выпущен большой отчет о работе, статьи и доклады [23, 24, 25], развернута рекламная компания. В результате проект стал широко известен, и почти все последующие работы по механике, функционированию, управлению КЛ базировались на концепции Эдвардса. Ее также называют “современной концепцией” космического лифта.

Далее, с помощью и при финансировании НАСА был организован цикл соревнований по двум направлениям: материал для троса КЛ и конструкция подъемника. Соревнования для подъемника проводились на ленте, подвешенной к воздушному шару. Кабина должна быть снабжена электродвигателями, а питание принимать по лазерному лучу. От кабины требовалось взобраться по тросу определенной высоты за определенное время. В соревнованиях 2010 года одна из 5-килограммовых моделей кабины поднялась на высоту 900 метров, затратив чуть больше, чем 5 минут. Это лучший результат за все время соревнований. В соревнованиях по разработке материала требовалось представить материал на 20% прочнее, чем материал от организаторов конкурса (Zylon). Особых успехов в этой части соревнований достигнуто не было. Соревнования проводились до 2010 года. В Соединенных Штатах были организованы ежегодные конференции по космическому лифту. Примерно к середине первого десятилетия XXI века

волна интереса к космическому лифту достигла Европы. Так же, как и в США, исследования строились в основном на концепции Эдвардса.

Итак, современная концепция КЛ – это концепция, в основном, такая же, как у Эдвардса. Несущим элементом является натянутый трос или лента. По неподвижному тросу перемещается кабина. Энергия передается с помощью лазера. Основные достоинства схемы Эдвардса:

- Впервые создана цельная технически проработанная концепция КЛ. Выделены основные функциональные элементы: несущая конструкция, транспортная компонента, энергетическая компонента, наземные элементы, противовес.
- Предложены технические решения для всех этих компонент. Из наиболее оригинальных: предложение о беспроводной схеме обеспечения КЛ энергией, предложение о подвижном расположении точки закрепления на поверхности Земли (на плавучем основании), предложение о последовательном разворачивании тросовой системы, начиная с минимальной и затем постепенно наращивая несущую способность троса.
- Обнародование этой концепции послужило пропаганде идеи космического лифта в обществе, привлекло внимание научного сообщества к конкретным научным задачам исследования предложенной конструкции, ее свойств и функционирования [27 – 33]. Это содействовало резкому увеличению интенсивности научной и конструкторской работы в ряде направлений (в частности, заметно усилился поток публикаций по беспроводной передаче энергии, интенсифицировалась работа по поиску путей производства волокон из УНТ).

Концепция Эдвардса представляет собой минимальный космический лифт, то есть насколько возможно меньшей массы и максимально легкий для разворачивания. Передача энергии по лучу, чтобы не утяжелять конструкцию проводами или солнечными батареями.

В то же время эта концепция отнюдь не является неуязвимой для критики. Некоторые ее положения выглядят недостаточно продуманными. Среди наиболее заметных недостатков такие:

- Движение кабины требует опоры на ленту, поэтому на ленту, и без того работающую почти на пределе прочности, действуют дополнительные динамические нагрузки. Трение, неизбежно возникающее при контакте кабины с тросом, приводит к износу тонкой ленты, что уменьшает надежность конструкции и срок ее жизни.

- Использование единственного троса не позволяет организовать вдоль лифта постоянное двустороннее движение, что сильно ограничивает его транспортирующие свойства.
- Передача энергии с помощью лазера может создать проблемы из-за рассеивания излучения, экранирования его облаками, а также из-за опасности попадания высокоэнергичного пучка на конструкцию и обитаемые модули лифта в результате ошибок в наведении пучка лучей. Но провода слишком тяжелы, если только из нанотрубок не получится сверхлегких проводов. Последнее выглядит возможным, учитывая, что нанотрубки демонстрируют разные электрические свойства в зависимости от многослойности, хиральности и примесей.
- Отсутствие проводной линии вдоль лифта исключает обмен энергией между отдельными его частями и рекуперацию энергии.
- Практически нет возможности разместить на сильно облегченной конструкции КЛ стационарные отсеки и оборудование для постоянной научной и/или производственной деятельности.

2.2. Альтернативная конструкция

Поэтому в [34] предлагается конструкция не такая легкая, но обладающая большими возможностями. Ее несущий компонент – круговые шпангоуты, соединенные набором тонких, прямолинейных сверхпрочных нитей. Нити идут косо, образуя в каждой секции гиперболоидальную поверхность. Внешне напоминает Шуховскую башню в Москве, только гораздо более узкую, длинную и с одинаковым диаметром всех секций. (На рисунке 4 изображение растянуто в ширину).

Преимущества у этой конструкции такие:

- Не требуется сверхдлинных нитей на тысячи километров. Конструкция может быть собрана из относительно коротких нитей (порядка 100 м). Снимается задача соединения отдельных сверхпрочных элементов в конструкцию длиной в тысячи километров без потери прочности. Прочность такой конструкции не сильно отличается от прочности отдельных нитей, тогда как прочность клееного или тканого материала существенно меньше.
- Если у одного сплошного троса надо было бы менять площадь поперечного сечения, у этой конструкции можно менять количество нитей в секции
- Отдельные секции взаимозаменяемы. Легче заменять поврежденные элементы.

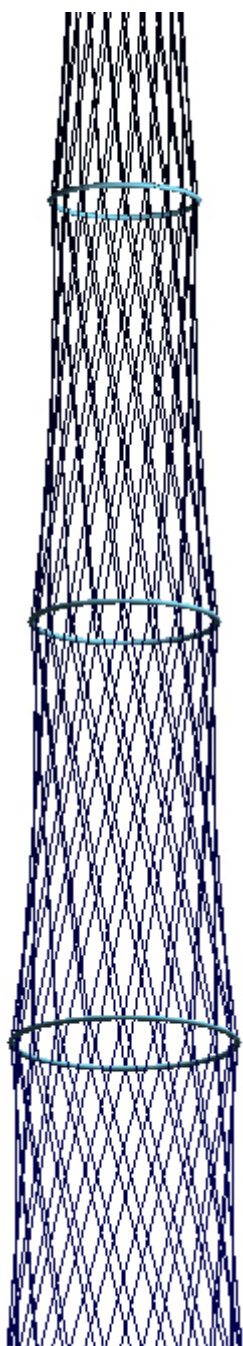


Рис. 4.
Альтернативная
конструкция

- Большая устойчивость к мелким метеоритам. Если в случае одинарного троса небольшой метеорит, перебивший трос, разрушит всю конструкцию, то в случае такой «башни» он перебьет пару нитей, но конструкция останется.
- Новый уровень транспортной системы. В ней разделены несущая и опорная функции конструкции. Подъемник не опирается на саму башню, а движется внутри нее по отдельным тросам. То есть на несущий элемент не действуют дополнительные динамические нагрузки и силы трения из-за движения подъемника. Возможен вариант, когда не кабина карабкается по тросу, а движется сам трос, закрепленный на блоках, как в обычном лифте современного дома. Скорее всего, это будет не один замкнутый трос, длиной в десятки тысяч километров, а много замкнутых тросов, чтобы кабина «переходила» от одного к другому. В этом случае двигатели и источники энергии располагаются не на кабине, а неподвижно в узлах крепления подвижных тросов. При этом можно устроить две шахты и организовать двустороннее движение.
- Большая несущая способность делает возможной проводную передачу электроэнергии между отдельными частями. Даже если это будет передача не по всей конструкции, а локальная, на расстояния около 1000 км, это повысит эффективность за счет рекуперации и более рационального размещения источников (приемников) энергии и потребителей.

Такой космический лифт обеспечивает постоянную экономичную транспортную магистраль между поверхностью Земли и ближним космосом, облегчает вывод КА на высокоэллиптические и гиперболические орбиты, обеспечивает стационарные базы для исследования и производства в условиях космического пространства.

ГЛАВА 3. СТАТИКА КОСМИЧЕСКОГО ЛИФТА

Независимо от конструкции КЛ, его механические свойства хорошо аппроксимируются представлением троса как длинной, абсолютно гибкой нити. Даже для последнего варианта (нити, натянутые между шпангоутами) при диаметре шпангоутов 3 метра, отношение длины конструкции к ширине составляет около 10^7 , как для нити из паутины длиной 50 м.

Итак, рассмотрим сначала вертикальное положение равновесия КЛ в переменном (по координате) гравитационно–центробежном силовом поле $\omega_E^2 r - \frac{\mu_E}{r^2}$ с потенциалом

$$U(r) = -\frac{\mu_E}{r} - \frac{1}{2}\omega_E^2 r^2 \quad (3.1)$$

где r – расстояние от центра Земли. Сила, действующая на единичную массу в точке r : $F = -\frac{dU}{dr}$. Вдоль оси нити действует сила натяжения $T(s)$, где s – координата вдоль троса, отсчитываемая от нижнего конца. Сила T действует в сечении на нижний конец троса со стороны верхнего конца, так что для натянутого троса $T > 0$. Пусть ρ_V – объемная плотность материала троса, $S(s)$ – площадь сечения троса в точке s . Тогда масса dm элемента троса длины ds , находящегося в точке s , равна

$$dm = \rho_V S(s) ds \equiv \rho(s) ds \quad (3.2)$$

Здесь $\rho(s)$ – линейная плотность троса в точке s . Условие равновесия элемента имеет вид:

$$dT + (\omega_E^2 r - \frac{\mu_E}{r^2}) \rho(s) ds = 0 \quad (3.3)$$

Учитывая, что для вертикально расположенного троса $r = R_E + s$ и, выражая силу через потенциал $U(r)$, находим уравнение равновесия троса:

$$\frac{dT}{ds} = \rho(s) \frac{dU}{dr} \Big|_{r=R_E+s} = \rho(s) \frac{dU(R_E+s)}{ds}.$$

Если зависимость линейной плотности от координаты вдоль троса $\rho(s)$ известна, то это уравнение легко проинтегрировать и найти распределение вдоль троса силы натяжения.

3.1. Трос постоянного сечения

В случае троса постоянного сечения, то есть постоянной линейной плотности, $\rho(s) = const$, имеем

$$T(s) = T(0) + \rho(U(R_E + s) - U(R_E)). \quad (3.4)$$

Если полная длина троса L , то при нулевом натяжении $T_0 \equiv T(0) = 0$ в нижней точке натяжение на верхнем конце равно $T_k \equiv T(L) = (U(R_E + L) - U(R_E))\rho = (U(R_E + L) - U(R_E))\rho_V S$

Итак, для свободно висящего троса постоянного сечения сила натяжения на верхнем конце пропорциональна разности гравитационно-центробежного потенциала между концами троса.

Из формулы для потенциала видно, что он стремится к $-\infty$ при $r \rightarrow +0$ и $r \rightarrow +\infty$, а при $r > 0$ имеет единственный максимум при расстоянии от центра Земли $r = r_{gs} = \left(\frac{\mu_E}{\omega_E^2}\right)^{1/3} \cong 42164$ км (соответственно, 35786 км от поверхности).

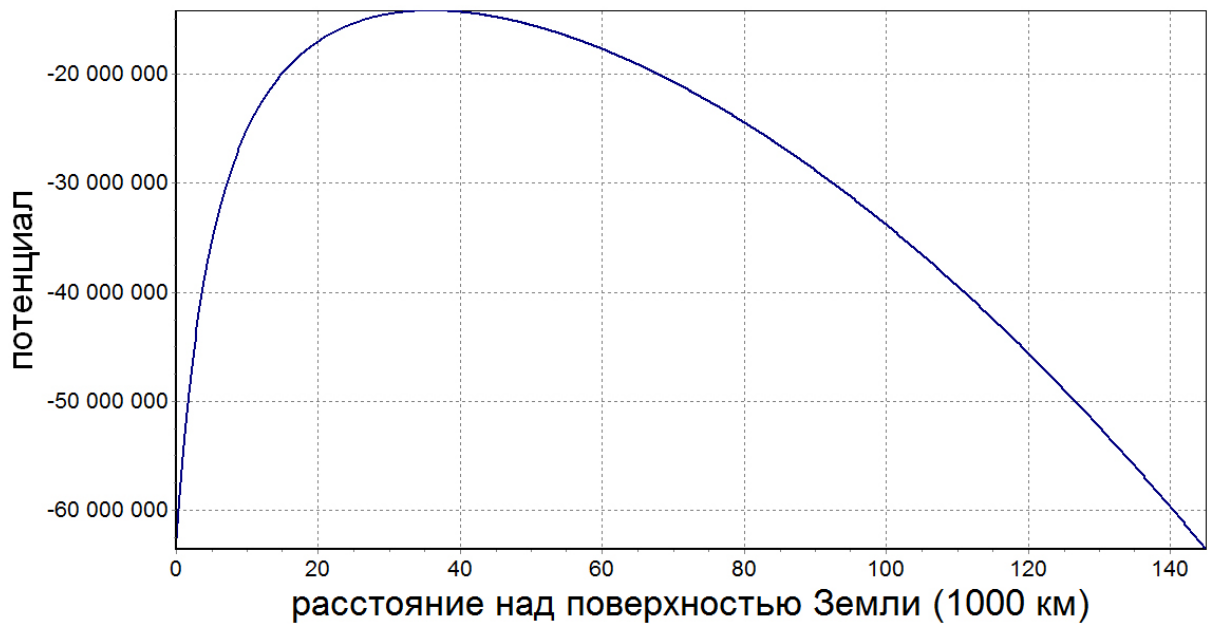


Рис. 5. Гравитационно-центробежный потенциал в зависимости от расстояния от центра Земли

r_{gs} – высота геосинхронной орбиты, угловая скорость движения по которой кругового спутника совпадает с угловой скоростью вращения Земли, так что при движении в плоскости экватора спутник висит над одной точкой. Последний случай геосинхронной орбиты называется геостационарным. Согласно формуле (3.4) с увеличением расстояния от Земли сила натяжения сначала возрастает, достигает максимума на геостационарной высоте, потом убывает, так как на больших высотах центробежная отталкивающая сила больше притягивающей гравитационной. Максимальное натяжение достигается при $r = r_{gs}$, и при нулевом начальном натяжении равно

$$T_{max} = \rho_V S \left(U(r_{gs}) - U(R_E) \right) \equiv \rho_V S \Delta U_{max} \quad (3.5)$$

Чтобы узнать, выдержит ли трос такое натяжение, надо посчитать напряжение $\tau = T/S$ и сравнить его с разрывным напряжением τ_b материала троса. Свободно висящий трос с нулевым натяжением на поверхности Земли разрывается под собственным весом, если

$$\frac{\tau_{max}}{\tau_b} = \frac{T_{max}}{S\tau_b} = \frac{\rho_V}{\tau_b} \Delta U_{max} \geq 1.$$

Заметим, что ΔU_{max} зависит только от геофизических параметров и для Земли составляет примерно $48.39 \text{ км}^2/\text{с}^2$, а $\frac{\tau_b}{\rho_V}$ от материала троса. Величина $\frac{\tau_b}{\rho_V}$, удельная прочность материала, часто встречается в расчетах, связанных с КЛ. Она имеет размерность квадрата скорости. Но удобнее выражать ее через разрывную длину l_b . Разрывная длина материала – это длина, при которой нить постоянного сечения из этого материала, подвешенная в постоянном поле тяжести с ускорением свободного падения g , разрывается под действием собственного веса. Разрывная длина l_b связана с разрывным напряжением τ_b так: $l_b = \frac{\tau_b}{g\rho_V}$. Из этой формулы и (3.5) видно, что разрывная длина материала однородного троса, достигающего геостационара, составляет $l_{bm} = \frac{\Delta U_{max}}{g} \cong 4930 \text{ км}$. Разрывная длина самых прочных сортов стали доходит до 50 км, а некоторых синтетических волокон (кевлар, Spectra-2000, Zylon) – до 200 и почти до 300 км. Понятно, что до открытия нанотрубок трос постоянного сечения был не реализуем. Для нанотрубок теоретическая разрывная длина составляет около 10000 км, что более, чем достаточно для троса. Но для нанотрубок достигнуть этого теоретического значения – отдельная задача. Кроме того, конструкция не должна работать на пределе прочности, должен быть запас прочности $k = \frac{\tau_b}{\tau_p} > 1$. Поэтому в данной работе разрывная длина для большей части расчетов была принята $l_b = 3000 \text{ км}$, что близко к разрывной длине однородного троса, достигающего геостационара, l_{bm} .

Если разрывная длина материала $l_b \geq l_{bm}$, то однородный трос из этого материала может быть протянут на любую высоту, так как на высотах, превышающих геостационарную, сила натяжения убывает с высотой.

Подсчитаем массу однородного троса длиной $L > h_{gs}$, если сила натяжения в его начале равна T_0 . Максимальное натяжение соответствует высоте h_{gs} и равно: $T_{max} = T_0 + \rho_V S \Delta U_{max}$. Сечение, соответствующее такому натяжению: $S = T_{max}/\tau_m = T_{max}/(\rho_V g l_m)$. τ_m и l_m здесь – максимальное допустимое напряжение и соответствующая длина. Поэтому

$$\rho_V S g l_m = T_0 + \rho_V S \Delta U_{max},$$

откуда $\rho_V S = \frac{T_0}{g l_m - \Delta U_{max}} = \frac{T_0}{g(l_m - l_{bm})}$ и, следовательно,

$$m = \rho_V S L = \frac{T_0}{g} \frac{L}{l_m - l_{bm}}. \quad (3.6)$$

Из этой формулы видно, что l_m должно быть больше l_{bm} , и $m \rightarrow \infty$ при $l_m \rightarrow l_{bm} + 0$. Для принятой здесь разрывной длины l_b материала из нанотрубок, и для других доступных материалов $l_m < l_{bm}$. Поэтому однородный трос из существующих материалов нереализуем.

3.2. Трос переменного сечения

Есть возможность уменьшить нагрузку на трос. Для этого надо при изменении s увеличивать поперечное сечение троса с увеличением натяжения. При этом требования к прочности материала снижаются. Это идея троса переменного сечения. Идея давняя, уже в статье Арцутанова упоминается переменность сечения троса, а в работах [12, 35] приводятся формулы для сечения троса $S(s)$. Понятно, что рациональнее менять сечение так, чтобы напряжение вдоль троса оставалось постоянным.

$$T(s) = \tau_p S(s) = \frac{\tau_b}{k} S(s), \quad (3.7)$$

где τ_p – постоянное допустимое напряжение, k – запас прочности. Такой трос называется *равнонапряженным*. Подставляя (3.7) в уравнение равновесия троса (3.4), находим

$$\frac{dT}{ds} = \rho(s) \frac{dU(R_E + s)}{ds} = \frac{k \rho_V}{\tau_b} T \frac{dU(R_E + s)}{ds}.$$

Переменные T и s в этом уравнении разделяются, и, интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} T(s) &= T(0) \exp\left(\frac{k \rho_V}{\tau_b} (U(R_E + s) - U(R_E))\right) = \\ &= T(0) \exp\left(\frac{k}{l_b g} (U(R_E + s) - U(R_E))\right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Отсюда следует аналогичная формула для S :

$$S(s) = S_0 \exp\left(\frac{k}{l_b g} (U(R_E + s) - U(R_E))\right) \quad (3.9)$$

и для линейной плотности

$$\rho(s) = \rho_V S_0 \exp\left(\frac{k}{l_b g} (U(R_E + s) - U(R_E))\right) \quad (3.10)$$

3.3. Дополнительная нагрузка

Если в конструкцию, кроме несущего троса, входят другие элементы, их масса составляет дополнительную нагрузку на трос. Учтем эту нагрузку в виде добавки к линейной плотности $\rho_a(s)$, т.е. придадим полученным выше формулам более обобщенный вид. Вместо (3.2) имеем

$$dm = (\rho_V S(s) + \rho_a(s)) ds, \quad T(s) = \tau_p S(s). \quad (3.11)$$

Такую модель троса будем называть *нагруженным* тросом. Уравнение для площади сечения нагруженного троса имеет вид:

$$\frac{dS(s)}{ds} = \frac{k}{\tau_b} (\rho_V S + \rho_a(s)) \frac{dU(R_E + s)}{ds}$$

Это линейное (относительно S) дифференциальное уравнение первого порядка с переменными коэффициентами. Его решение можно найти квадратурами. Но здесь рассмотрим только частный случай равномерно распределенной дополнительной нагрузки $\rho_a(s) = const$. В этом случае

$$S(s) = \left(S(0) + \frac{\rho_a}{\rho_V} \right) \exp \left[\frac{k \rho_V}{\tau_b} (U(R_E + s) - U(R_E)) \right] - \frac{\rho_a}{\rho_V}, \quad (3.12)$$

Эта формула имеется уже в работах Г.Г. Полякова [36].

Для полной линейной плотности $\rho = \rho_V S + \rho_a$ имеем

$$\rho(s) = \rho(0) \exp \left[\frac{k}{l_b g} (U(R_E + s) - U(0)) \right], \quad (3.13)$$

где $\rho(0)$ – линейная плотность в начальной точке троса.

Интересно, что в виде (3.13) распределение линейной плотности вдоль троса не зависит от ρ_a и совпадает с формулой для ненагруженного троса. Как и в (3.10), характеристика прочности (разрывная длина) входит под экспоненту. То есть изменение прочности сильно влияет на изменение сечения по сравнению с начальным. Наибольшая площадь сечения, согласно формуле (3.12), достигается на геостационарной орбите. В этой работе разрывная длина была взята 3000 км, что находится на пределе возможностей перспективных технологий сверхпрочных материалов. Для такой разрывной длины отношение максимальной площади сечения к начальной около 5. Для стали это отношение составляло бы примерно $4 \cdot 10^{53}$.

На графике ниже приведена зависимость отношения площади сечения троса в точке к начальной площади сечения от координаты вдоль троса для следующих параметров: объемная плотность материала троса 1300 кг/м^3 , разрывная длина 3000 км, линейная плотность дополнительной нагрузки 0.

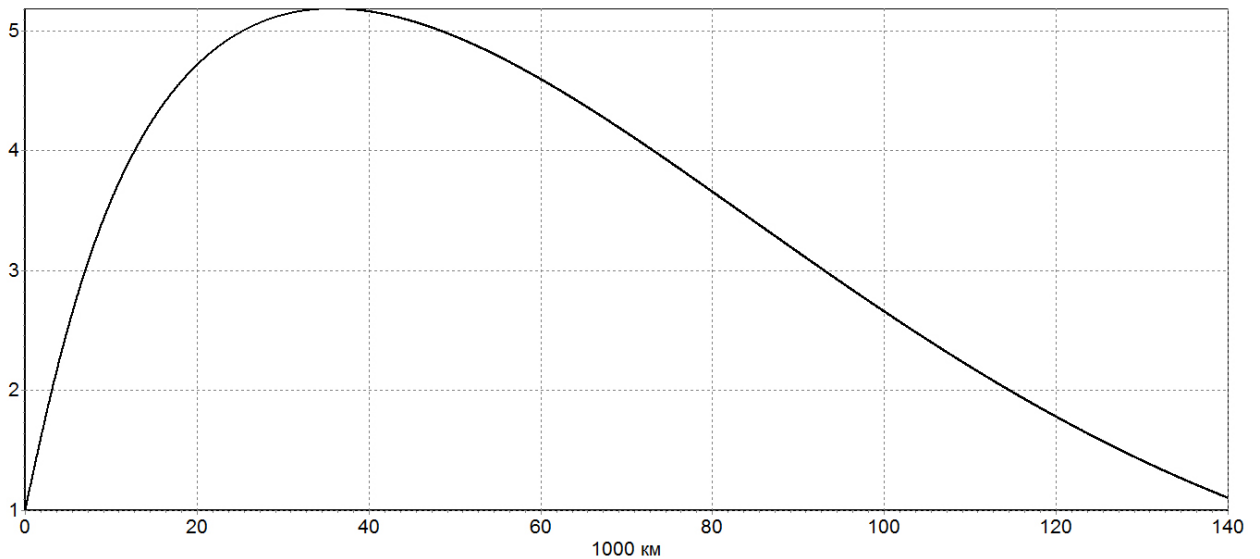


Рис. 6. Изменение площади сечения вдоль троса.

3.4. Балансировочная масса

Другой существенной частью лифта является концевая масса (также ее называют балансировочной или конечной, в этой работе она будет чаще называться конечной). Для удержания вертикального троса в равновесии в гравитационно-центробежном силовом поле нужна дополнительная сила. Такую силу можно обеспечить, поместив на верхнем конце троса достаточно большую массу. Гравитационно-центробежная сила, действующая на эту балансировочную массу, обеспечивает нужное натяжение на верхнем конце троса. Натяжение выражается из формул (3.11) и (3.12), откуда конечная масса равна

$$M_K = \frac{T(L)}{\omega_E^2(R_E + L) - \frac{\mu_E}{(R_E+L)^2}} = \frac{\exp\left[\frac{k}{l_b g}(U(R_E + L) - U(R_E))\right] \left(T_0 + \frac{\rho_a l_b g}{k}\right) - \frac{\rho_a l_b g}{k}}{\omega_E^2(R_E + L) - \frac{\mu_E}{(R_E+L)^2}}, \quad (3.14)$$

где L – длина троса, T_0 – натяжение в начальной точке троса.

Из этой формулы видно, что конечная масса может обращаться в 0. Например, при $T_0 = 0$ это происходит при длине троса около 144 000 км, где гравитационно-центробежный потенциал равен потенциалу на поверхности Земли. Если T_0 не равно 0, то M_K обращается в 0 на большей высоте. При приближении длины троса к высоте геостационарной орбиты над поверхностью Земли масса M_K стремится к бесконечности.

3.5. Полная масса лифта

Подсчитаем теперь массу лифта. Полная масса троса (с учетом дополнительной нагрузки) равна

$$M_T = \int_0^L \rho(s) ds = \rho(0) \int_0^L \Phi(\chi, R_E + s) ds \quad (3.15)$$

Здесь через $\Phi(\chi, r)$ для краткости обозначена функция

$$\Phi(\chi, r) = \exp \frac{1}{\chi} (U(r) - U(R_E)) , \quad (3.16)$$

а χ – характеристика допустимой прочности

$$\chi = \frac{\tau_b}{\rho_V} = \frac{l_b g}{k} .$$

Прибавляя M_K (3.14), получаем полную массу лифта

$$\begin{aligned} M_L &= M_K + M_T \\ &= \frac{\exp \left[\frac{k}{l_b g} \left((U(L)) - U(0) \right) \right] \left(T_0 + \frac{\sigma_a l_b g}{k} \right) - \frac{\sigma_a l_b g}{k}}{\omega_E^2 (R_E + L) - \frac{\mu_E}{(R_E + L)^2}} \\ &\quad + \int_0^L \rho(s) ds \end{aligned} \quad (3.17)$$

M_T возрастает с увеличением длины троса L . M_K (3.14) убывает с увеличением L , при $L > s_{gs}$ (для $L < s_{gs}$, то есть ниже геостационара, лифт не существует). Так что интересно посмотреть, как ведет себя полная масса M_L

$$M_L(L) = M_T(L) + M_K(L).$$

Вычислим производную

$$\frac{dM_L}{dL} = \frac{dM_T}{dL} + \frac{dM_K}{dL}$$

$$\frac{dM_T}{dL} = \rho(0) \Phi(\chi, r_1) = (\rho_V S(0) + \rho_a) \Phi(\chi, r_1) = \left(\frac{T_0}{\chi} + \rho_a \right) \Phi(\chi, r_1) , \quad (3.18)$$

$$\frac{dM_K}{dL} = \frac{d}{dL} \frac{T_0 \Phi + \rho_a \chi (\Phi - 1)}{U'} = (T_0 + \rho_a \chi) \frac{d\Phi}{dL} U'^{-1} - M_K U'' U'^{-1} \quad (3.19)$$

В формуле (3.18) $r_1 = R_E + L$, в формуле (3.19) $\Phi = \Phi(\chi, r_1)$, $U' = \left. \frac{dU}{dr} \right|_{r=r_1}$, аналогично U'' . Складывая (3.18) и (3.19) и учитывая, что

$$\frac{d\Phi}{dL} = -\frac{1}{\chi} U' \Phi(\chi, r_1),$$

Находим

$$\frac{dM_L}{dL} = -M_K U'' U'^{-1} . \quad (3.20)$$

Так как при $r > r_{gs}$

$$U' = \omega_E^2 r - \frac{\mu_E}{r^2} > 0, \text{ и } U'' > 0,$$

то, согласно (3.18), M_L с возрастанием r_1 , а, следовательно, и L , убывает, если только $M_K > 0$. Но M_K , согласно (3.14), тоже зависит от L и может обратиться в нуль. По формуле (3.14) это происходит, когда

$$(T_0 + \rho_a \chi) \Phi(\chi, r_1) = \rho_a \chi . \quad (3.21)$$

Это уравнение для r_1 имеет решение при $0 \leq \Phi(\chi, r_1) \leq 1$, то есть по (3.16) при $U(r_1) > U(R_E)$. Наименьшее такое решение получается при $T_0 = 0$, когда $\Phi(\chi, r_1) = 1$, то есть $U(r_1) = U(R_E)$. Отсюда, если $r_1 \neq R_E$, то $r_1 = r_p$, где r_p – эквипотенциальное поверхности Земли расстояние

$$r_p = -\frac{1}{2} r_E + \sqrt{\frac{R_E^2}{4} + \frac{2\mu_E}{\omega_E^2 R_E}} \approx 150159 \text{ км} \quad (3.22)$$

или от поверхности Земли

$$s_p = 143781 \text{ км}. \quad (3.23)$$

Это наименьшая длина троса, который может держаться неподвижно у поверхности при отсутствии балансирующей массы.

Минимум массы системы M_S получается при $M_K = 0$ поэтому

$$(M_L)_{min} = M_T = \left(\frac{T_0}{\chi} + \rho_a \right) \int_{r_E}^{r_1} \Phi(\chi, r) dr \quad (3.24)$$

Если в (3.21) $\rho_a = 0$, то есть отсутствует дополнительная нагрузка, а $T_0 \neq 0$, то $\Phi(\chi, r_1) = 0$, что соответствует $r_p \rightarrow \infty$. Таким образом, масса ненагруженной системы монотонно уменьшается с увеличением длины троса за пределами геостационарной орбиты.

Итак, полная масса лифта убывает с увеличением длины конструкции (рис. 7). Это происходит потому, что с увеличением длины конечная масса (рис. 8) убывает гораздо быстрее, чем возрастает масса троса (рис. 9). Примерно до 80 000 км полная масса убывает быстро, потом медленнее.

Поэтому оптимальным представляется лифт длиной около 60 000 – 100 000 км.

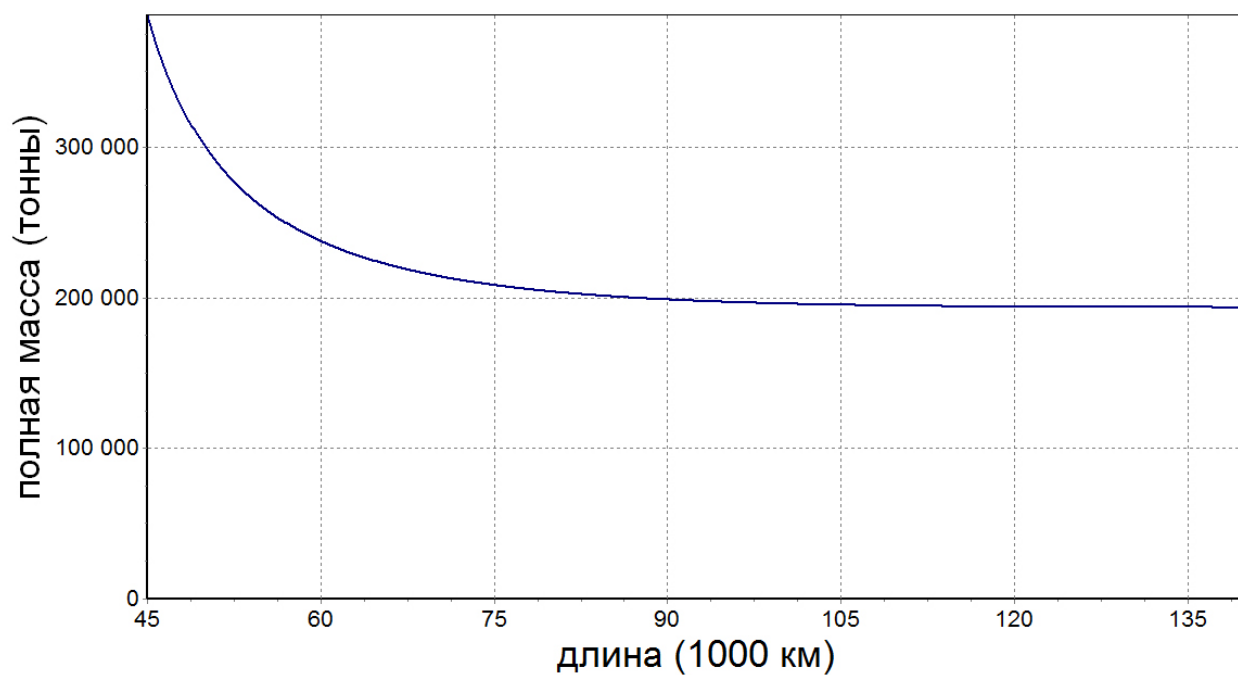


Рис. 7. Зависимость полной массы лифта от его длины

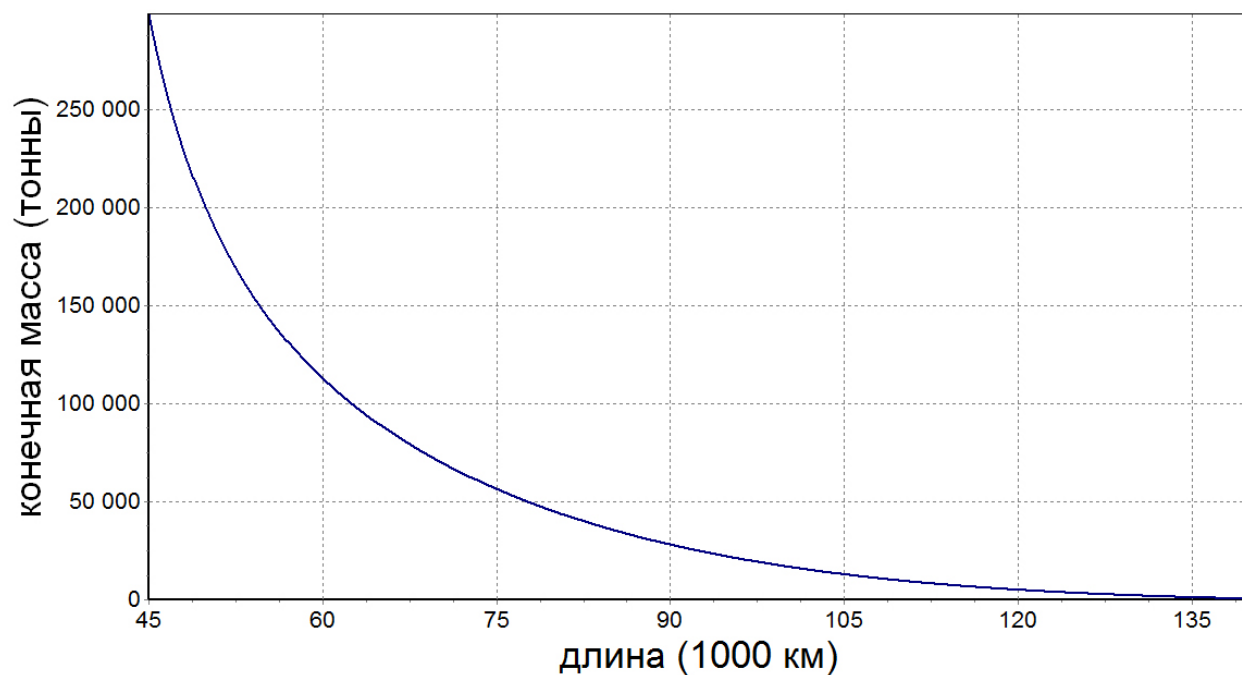


Рис. 8. Зависимость конечной массы лифта от длины

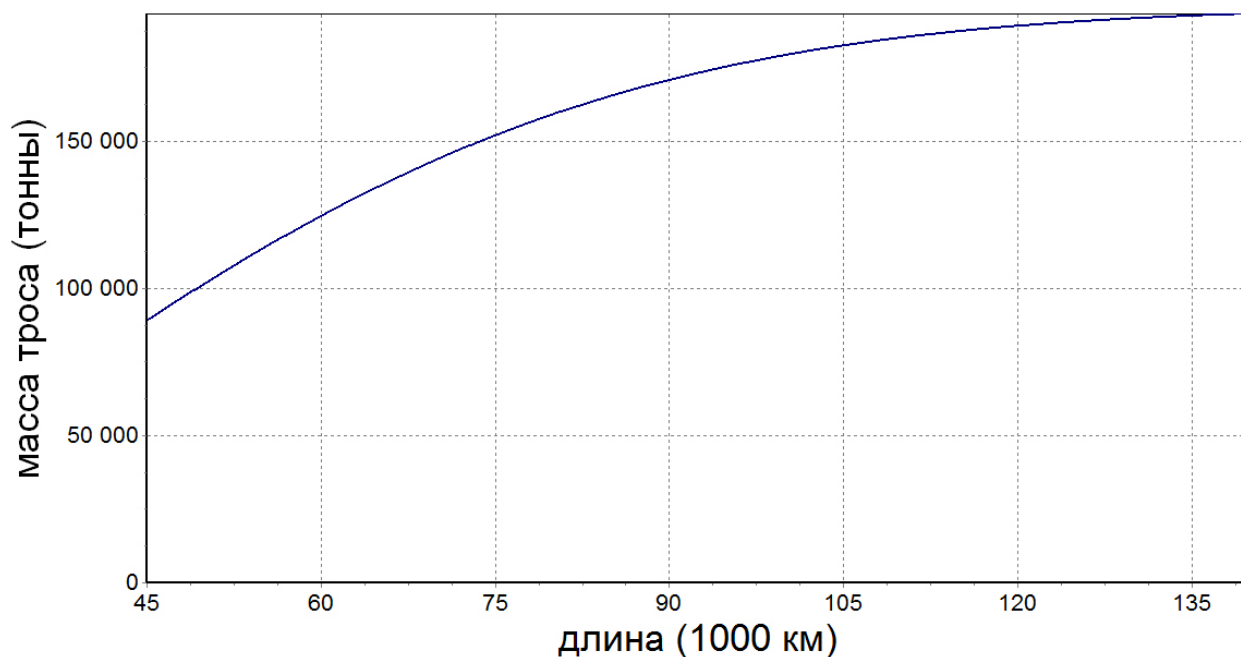


Рис. 9. Зависимость массы троса от длины

Далее рассматривается динамика КЛ, состоящего из троса с переменной линейной плотностью (в соответствии с (3.13)), включающей в себя дополнительную равномерно распределенную нагрузку, и конечной балансировочной массы (3.14). Большинство расчетов проведено для длины троса 80 000 км.

При изучении динамики троса можно для разной степени детализации использовать разные математические модели. Некоторые перечислены в этой работе, начиная с самых простых.

ГЛАВА 4. ПРОСТЕЙШИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ЛИФТА

4.1. Одномассовая модель с невесомым тросом

Простейшая модель, на которой можно изучать некоторые свойства динамики лифта, – модель с прямым невесомым тросом. Лифт фактически состоит из одной конечной массы, привязанной невесомым тросом к поверхности Земли. Выведем уравнения его движения, как уравнения Лагранжа 2-го рода. Выберем координатную систему. Пусть начало координат – в центре Земли, ось x направлена к точке привязки, ось y – на восток, а ось z – на северный полюс, по вектору угловой скорости вращения Земли.

Перейдем к сферическим координатам. Возьмем в качестве независимых переменных углы α (угол в плоскости экватора) и β (угол в меридиональной плоскости), так что

$$x = L \cos \alpha \cos \beta, \quad y = L \sin \alpha \cos \beta, \quad z = L \sin \beta \quad (4.1)$$

Компоненты скорости концевой точки:

$$v_x = \dot{x} - \omega_E y, \quad v_y = \dot{y} + \omega_E (R_E + x), \quad v_z = \dot{z}, \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -L(\dot{\alpha} \sin \alpha \cos \beta + \dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta) \\ \dot{y} &= L(\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta - \dot{\beta} \sin \alpha \sin \beta) \\ \dot{z} &= L\dot{\beta} \cos \beta \end{aligned} \quad (4.3)$$

Уравнения Лагранжа для этих координат:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0, \quad (4.4)$$

где $L = K - U$. Здесь U – потенциальная энергия $U = -\frac{M\mu_E}{r} - \frac{1}{2}M_K\omega_E^2 r^2$ (M_K – масса концевой точки, r – расстояние от центра Земли до точки), K – кинетическая энергия $K = \frac{1}{2}M_K v^2$.

Имеем

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \\ &= (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + 2\omega_E(R_E\dot{y} + x\dot{y} - \dot{x}y) + \omega_E^2((R_E + x)^2 + y^2) \\ &= L^2(\dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta + \dot{\beta}^2) \\ &\quad + 2\omega_E R_E L(\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta - \dot{\beta} \sin \alpha \sin \beta) + 2\omega_E L^2 \dot{\alpha} \cos^2 \beta \\ &\quad + \omega_E^2 R_E^2 + 2\omega_E^2 R_E L \cos \alpha \cos \beta + \omega_E^2 L^2 \cos^2 \beta \end{aligned}$$

где ω_E – частота суточного вращения Земли.

Уравнения Лагранжа (4.4) дают

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - 2(\dot{\alpha} + \omega_E)\dot{\beta} \tan \beta + \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r^3} \right) \frac{R_E \sin \alpha}{L \cos \beta} &= 0 \\ \ddot{\beta} + (\dot{\alpha} + \omega_E)^2 \sin \beta \cos \beta + \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r^3} \right) \frac{R_E \cos \alpha \sin \beta}{L} &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Система уравнений (4.5) имеет частное решение $\alpha = 0, \beta = 0$, что соответствует вертикальному тросу. Существует инвариантное множество $\dot{\beta} = 0, \beta = 0$, которое соответствует движению в плоскости экватора.

Линеаризуем систему (4.5) в окрестности вертикального положения (учтем, что линейная часть вариации r при этом равна 0):

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{(R_E + L)^3} \right) \frac{R_E}{L} \alpha &= 0 \\ \ddot{\beta} + \omega_E^2 \beta + \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{(R_E + L)^3} \right) \frac{R_E}{L} \beta &= 0\end{aligned}\quad (4.6)$$

Уравнения разделяются и видны частоты. Частота экваториальных колебаний из первого уравнения (4.6) записывается так:

$$\omega_{eq}^2 = \omega_E^2 \frac{R_E}{L} \left(1 - \left(\frac{r_{gs}}{R_E + L} \right)^3 \right) \quad (4.7)$$

из второго уравнения (4.6) видно, что частота меридиональных колебаний связана с частотой экваториальных колебаний простой формулой

$$\omega_M^2 = \omega_E^2 + \omega_{eq}^2. \quad (4.8)$$

В формулах (4.7), (4.8) ω_{eq} , ω_M – частоты экваториальных и меридиональных колебаний, ω_E – частота вращения Земли вокруг своей оси, r_{gs} – расстояние до геостационара от центра Земли, R_E – радиус Земли, L – длина троса.

Как следует из формул (4.6), малые (близкие к линейным) колебания распадаются на суперпозицию независимых друг от друга экваториальных и меридиональных. Их частоты можно примерно оценить из (4.7) и (4.8). Поскольку для космического лифта $L > R_E$, то из (4.7) следует $\omega_{eq} < \omega_E$, а из (4.8) $\omega_M > \omega_E > \omega_{eq}$, то есть период экваториальных колебаний всегда больше суток, а меридиональных – меньше суток.

Колебания в плоскости экватора ($\beta = 0$, $\dot{\beta} = 0$) описываются уравнением с одной степенью свободы:

$$\ddot{\alpha} + \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r^3} \right) \frac{R_E}{L} \sin \alpha = 0, \quad r^2 = R_E^2 + L^2 + 2R_E L \cos \alpha. \quad (4.9)$$

Это уравнение совпадает с уравнением, использованным в статье В. В. Белецкого с соавторами [1] для изучения областей ослабления троса в модели с безмассовым тросом. В этой статье рассматривается, в основном, натяжение троса. Указано, что есть области в фазовом пространстве, где натяжение троса отрицательное, т.е. конечная масса движется, как свободное тело, и может перескочить на другую фазовую траекторию.

Уравнение (4.9) имеет первый интеграл (интеграл энергии):

$$\frac{1}{2} L^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{\mu_E}{r} - L R_E \omega_E^2 \cos \alpha = H = const \quad (4.10)$$

Оно, конечно, интегрируемое. Но нас интересует более общая оценка характеристик колебания: период, максимальная амплитуда. Из (4.9) видно, что состоянием покоя $\dot{\alpha} \equiv 0$ является вертикальное равновесие $\alpha = 0$. Но

покой может получиться и в случае, когда обращается в 0 выражение в скобках в (4.9). В этом случае центробежная сила, действующая на концевую массу, уравнивает гравитационную, и конечная масса находится на высоте геостационарной орбиты $r = r_{gs} = \left(\frac{\mu_E}{\omega_E^2}\right)^{1/3}$. При этом α удовлетворяет уравнению $r_{gs}^2 = R_E^2 + L^2 + 2L R_E \cos \alpha$. То есть эти дополнительные формы равновесия возможны только при $L < r_{gs} + R_E$, а если потребовать, чтобы линия троса не пересекала поверхность земли, то при $L < \sqrt{r_{gs}^2 - R_E^2}$. Впрочем, в любом случае такое “косое” положение равновесия неустойчиво. Оно определяет критический угол, при котором лифт не возвращается в вертикальное положение равновесия.

Расчетами определялись периоды колебаний в плоскости экватора. Периоды малых колебаний оказались не меньше 3.5 суток, причем минимальные периоды получаются при длине троса около 60000 км.

4.2. Одномассовая модель с весомым тросом

Учтем теперь, что трос тоже имеет массу и его линейная плотность переменна. Но пока будем считать его прямым.

Рассмотрим движение такой системы в плоскости экватора. Уравнение колебаний запишем, как уравнение движения твердого тела

$$\frac{dL}{dt} = M, \quad L = J(\dot{\beta} + \omega_E) \quad (4.11)$$

Здесь L кинетический момент троса, M – момент внешних сил (гравитационно-центробежный), J – момент инерции, β – угол отклонения троса от вертикали. Кинетический момент, моменты внешних сил и инерции берутся относительно точки закрепления.

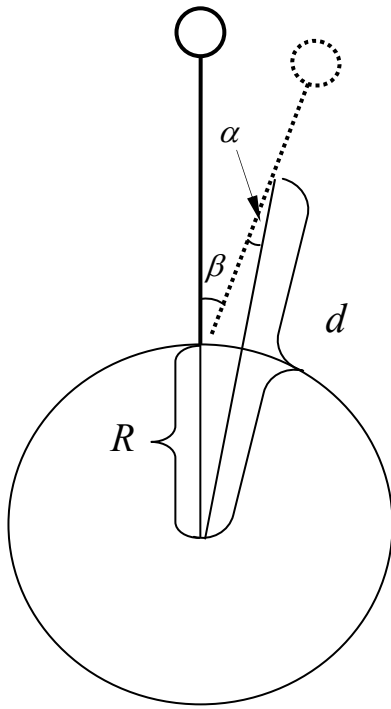


Рис 10. Схема системы с тяжелым тросом

Момент инерции

$$J = \int_0^L \rho(s) s^2 ds + M_K L^2 = F_2(L) + M_K L^2 \quad (4.12)$$

не зависит от состояния системы.

Момент внешних сил

$$\begin{aligned} M(\beta) &= \int_0^L \rho(s) \sin \alpha \left(\frac{\mu}{d(s, \beta)^2} - \omega_E^2 d(s, \beta) \right) s ds \\ &+ M_K \left(\frac{\mu}{d_K^2} - \omega_E^2 d_K \right) L \sin \alpha_K \\ &= F_1(s, \beta) - M_K \left(\frac{\mu}{d_K^2} - \omega_E^2 d_K \right) L \sin \alpha_K, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $d(s, \beta)$ – расстояние от центра Земли до точки с координатой s на тросе, $\rho(s)$ – линейная плотность троса в рассматриваемой точке, α – угол между тросом и прямой, соединяющей центр Земли и точку на тросе, α_K – он же для концевой массы, β – угол отклонения троса от вертикали, M_K – масса на конце троса, d_K – расстояние конца троса до центра Земли.

Для того, чтобы вычислить интеграл в формуле (4.13), надо выразить через s угол α и функцию $d(s, \beta)$. Для этого используем геометрические соотношения в изображенном на рис. 10 треугольнике:

$$d \sin \alpha = R_E \sin \beta \quad \text{– теорема синусов}$$

$$d^2 = R_E^2 + s^2 + 2sR_E \cos \beta \quad - \text{теорема косинусов}$$

Тогда d и α определяются как функции β и s . d_k и α_k вычисляются так же:

$$\begin{aligned} d_k^2 \sin \alpha_k &= R_E \sin \beta \\ d_k^2 &= R_E^2 + L^2 + 2LR_E \cos \beta. \end{aligned}$$

После этого интеграл в (4.13) (момент сил) может быть вычислен численно, и полностью определяется уравнение колебаний по β :

$$\ddot{\beta} = \frac{M(\beta)}{J}. \quad (4.14)$$

Это уравнение можно численно интегрировать, например, методом Рунге-Кутты и получить движение (угол β и угловую скорость $\dot{\beta}$ как функции времени). Единственная особенность – правую часть надо вычислять, тоже численным интегрированием, на каждом шагу интегрирования по времени. Для интегрирования правой части по s применялся двенадцатиточечный метод Гаусса. Трос разбивается на несколько десятков кусков, и для интегрирования по каждому куску применяется двенадцатиточечная формула Гаусса. Для линейной плотности $\rho(s)$ использовалась формула (3.13).

Так проводились расчеты в одномассовой модели с тяжелым тросом. Интересно сравнить результаты этой модели и модели с невесомым тросом. Результаты похожи. Например, периоды для весоного троса от 3.5 до 10 суток, как и для невесомого троса, зависимости периода от длины троса тоже очень похожи. На рис. 11 приведена такая зависимость для лифта с нулевой дополнительной нагрузкой и начальным натяжением 100 Н. Период колебаний с увеличением длины троса сначала уменьшается, потом увеличивается. Минимума он достигает при длине троса около 60 000 км. Это происходит из-за того, что для лифта с тросом, длина которого близка к расстоянию до геостационара, основная масса сосредоточена вблизи геостационарной орбиты, где равнодействующая гравитационной и центробежной силы мала, следовательно, возвращающий момент сил мал. Примерно после 60 000 км период увеличивается, так как с увеличением длины троса увеличивается момент инерции.

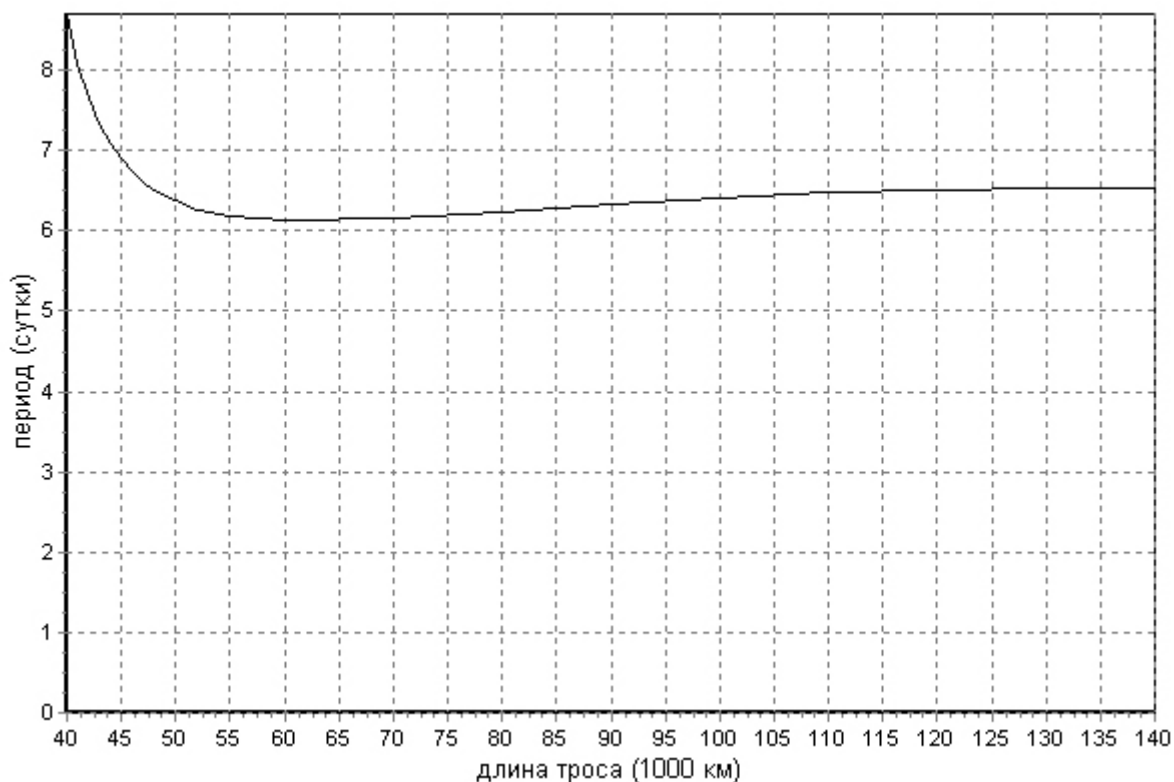


Рис. 11. Период колебаний лифта с тяжелым тросом

Критический угол отклонения в этой модели, то есть угол, соответствующий неустойчивому положению равновесия, считается из условия обращения в ноль момента внешних сил. График зависимости критического угла для такой модели от длины троса приведен на рис. 12. Этот угол меньше критического угла модели с невесомым тросом, так как центр масс для модели с тяжелым тросом находится ниже, чем концевая масса, а нулевой момент соответствует обращению в нуль силы, действующей в точке, близкой к центру масс.

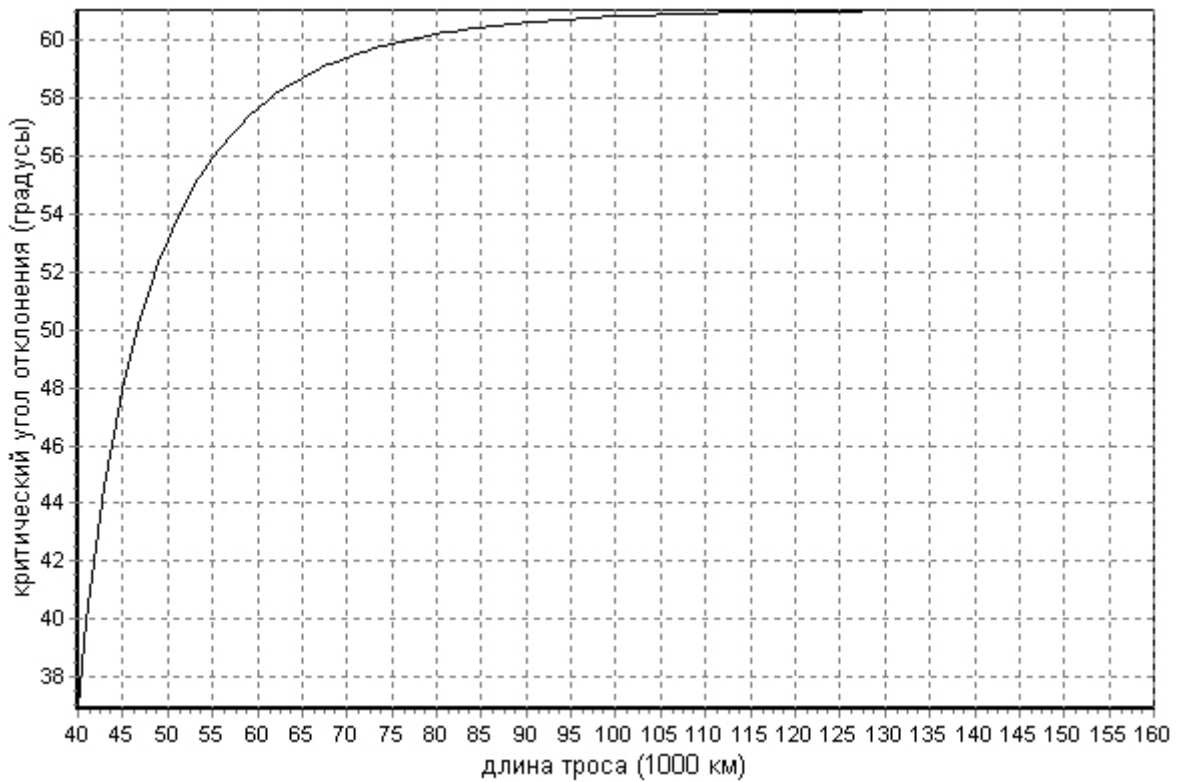


Рис. 12. Критический угол отклонения для модели с тяжелым тросом.

Влияние силы Лунной гравитации

В модели с тяжелым тросом исследовалось еще влияние силы притяжения Луны на колебания лифта. Использовалась простая модель движения Луны: Луна движется вокруг Земли по круговой орбите в плоскости экватора.

Возмущение от Луны в связанной с центром Земли системе координат учитывалось, как приливная сила. Если \vec{d} – радиус-вектор некоторой точки относительно центра Земли, \vec{r}_M – радиус-вектор Луны относительно центра Земли, то приливное (относительное) ускорение этой точки относительно центра Земли

$$\vec{a}_M = -\mu_M \left(\frac{\vec{r}_M}{r_M^3} - \frac{\vec{r}_M - \vec{d}}{|\vec{r}_M - \vec{d}|^3} \right)$$

Здесь μ_M – гравитационный параметр Луны.

Уже из этой формулы видно, что влияние Луны мало. Например, на высоте 80 000 км над поверхностью Земли лунное приливное ускорение равно $2,2 \cdot 10^{-5} \text{ M}/\text{c}^2$, а гравитационно-центробежное $0,36 \text{ M}/\text{c}^2$. Т.е. ускорение, создаваемое Луной, меньше гравитационно-центробежного примерно в 16 363 раза.

Для точки, находящейся на тросе с координатами $\vec{d} = (d_1, d_2)$ и вектора Луны $\vec{r}_M = (r_{M1}, r_{M2})$, имеем:

$$d_1 = R_E + s \cos \beta, \quad d_2 = s \sin \beta,$$

$$r_{M1} = r_M \cos(\omega_M - \omega_E)t, \quad r_{M2} = r_M \sin(\omega_M - \omega_E)t,$$

где ω_M – угловая скорость вращения Луны вокруг Земли.

Момент лунной приливной силы относительно точки закрепления с радиусом-вектором \vec{R}_0 : $\vec{M}_M = (\vec{d} - \vec{R}_0) \times \vec{F}_M$, $\vec{F}_M = \vec{a}_M \cdot dm$. Так как и сила, и плечо лежат в плоскости e_1, e_2 , то, подставляя $d_1 = R + s \cos(\beta)$ и $d_2 = s \cdot \sin(\beta)$, получаем момент силы \vec{M}_M , действующей на участок троса массой dm

$$\vec{M}_M = -\mu_M dm \left\{ \begin{aligned} & -s \cdot \cos(\beta) \\ & \cdot \left[\frac{\sin(\omega_M t - \omega_E t)}{r_M^2} - \frac{(r_M \sin(\omega_M t - \omega_E t) - s \cdot \sin(\beta))}{|\vec{r}_M - \vec{d}|^3} \right] \\ & - s \cdot \sin(\beta) \\ & \cdot \left[\frac{\cos(\omega_M t - \omega_E t)}{r_M^2} \right. \\ & \left. - \frac{(r_M \cos(\omega_M t - \omega_E t) - R - s \cdot \cos(\beta))}{|\vec{r}_M - \vec{d}|^3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

Для того чтобы вычислить момент силы, действующей со стороны Луны на весь трос, нужно проинтегрировать это выражение по длине троса.

Дополним предыдущее уравнение колебаний (4.14) моментом сил лунного притяжения. Теперь оно выглядит так:

$$\ddot{\beta} = \frac{\int_0^L \left[\rho(s) s \frac{R_E \sin(\beta)}{d(s, \beta)} \left(\frac{\mu}{d(s, \beta)^2} - \omega_E^2 d(s, \beta) \right) \right] ds + \int_0^L [M_M(s, \beta)] ds}{\int_0^L \rho(s) s^2 ds + M_K L^2} + \frac{M_K \left(\frac{\mu}{d(L, \beta)^2} - \omega_E^2 d(L, \beta) \right) L \frac{R_E \sin(\beta)}{d(L, \beta)} + M_{MK}}{\int_0^L \rho(s) s^2 ds + M_K L^2}, \quad (4.16)$$

где M_{MK} – момент лунной приливной силы, действующей на конечную массу.

Заметим, что теперь в правую часть явно входит время.

Для примера величины лунных возмущений укажем, что для лифта с длиной троса 80 000 км, линейной плотностью дополнительной нагрузки $10^7/\text{м}$, разрывной длиной материала троса 3 000 км, плотностью материала троса $1,3 \text{ кг}/\text{дм}^3$, запасом прочности 2, начальным натяжением 100 Н, отклоненного на 30° , момент лунных сил равен $-106 \cdot 10^8 \text{ Н} \cdot \text{м}$, а гравитационно центробежный момент $-304 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{м}$; то есть лунный момент составляет 0,0035 от гравитационно-центробежного.

Луна мало влияет на лифт. Больше сказывается ее влияние на лифте с коротким тросом, так как большая часть его массы расположена у геостационара, где равнодействующая гравитационно-центробежной силы мала, что делает влияние Луны относительно более заметным.

Однако, в окрестности точек неустойчивого равновесия (вблизи углов сепаратрисы фазовой траектории) лунные возмущения могут сильно изменить движение системы.

4.3. Двухзвенная модель

В предыдущих моделях трос рассматривался как прямой стержень. Самая простая модель, которая позволяет учесть изгибность троса – модель с двумя массами. Лифт моделируется двумя материальными точками, которые соединены невесомыми стержнями. Одна точка соответствует тросу, другая – конечной массе. Первую точку поместим на высоту геостационара, где линейная плотность троса максимальна. Такая модель дает возможность увидеть и исследовать первую (изгибную) моду колебаний.

Запишем уравнения движения. Величины, относящиеся к ближайшей к Земле точке, имеют индекс 1: координаты x_1, y_1 , длина ближайшего к Земле стержня L_1 , масса m_1 ; к верхней точке – индекс 2: координаты x_2, y_2 , масса m_2 , длина стержня L_2 . Здесь x – координата по вертикали, y – по горизонтали.

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_1 = 2\omega_E \dot{y}_1 + \omega_E^2 (R_E + x_1) - \frac{\mu_E (R_E + x_1)}{r_1^3} - \frac{T_1}{L_1 m_1} x_1 \\ \quad + \frac{T_2}{L_2 m_1} (x_2 - x_1), \\ \ddot{y}_1 = -2\omega_E \dot{x}_1 + \omega_E^2 y_1 - \frac{\mu_E y_1}{r_1^3} - \frac{T_1}{L_1 m_1} y_1 + \frac{T_2}{L_2 m_1} (y_2 - y_1), \\ \ddot{x}_2 = 2\omega_E \dot{y}_2 + \omega_E^2 (R_E + x_2) - \frac{\mu_E (R_E + x_2)}{r_2^3} - \frac{T_2}{L_2 m_2} (x_2 - x_1), \\ \ddot{y}_2 = -2\omega_E \dot{x}_2 + \omega_E^2 y_2 - \frac{\mu_E y_2}{r_2^3} - \frac{T_2}{L_2 m_2} (y_2 - y_1); \end{array} \right. \quad (4.17)$$

где $r_1^2 = (R_E + x_1)^2 + y_1^2$, $r_2^2 = (R_E + x_2)^2 + y_2^2$ – расстояния точек от центра Земли. T_1 и T_2 – силы натяжения, соответственно, первого и второго тросов.

Физический смысл отдельных слагаемых в правых частях понятен: кориолисова сила, центробежная сила, гравитационная сила и разница сил натяжений.

Для вычисления сил натяжения тросов используем уравнения нерастяжимости:

$$x_1^2 + y_1^2 = L_1^2, (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = L_2^2$$

Продифференцируем их два раза по времени

$$x_1 \ddot{x}_1 + y_1 \ddot{y}_1 + \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = 0$$

$$(x_2 - x_1)(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + (y_2 - y_1)(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) + (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 = 0$$

Теперь подставим значения вторых производных из уравнений (4.17). Получим

$$A_{11}T_1 + A_{12}P_2 = B_1, \quad A_{21}P_1 + A_{22}T_2 = B_2,$$

где

$$A_{11} = 1, \quad A_{12} = A_{21} = -\frac{(x_1(x_2 - x_1) + y_1(y_2 - y_1))}{L_1 L_2}, \quad A_{22} = 1 + \frac{m_1}{m_2},$$

$$B_1 = \frac{2m_1 \Omega_E}{L_1} (x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1) + \frac{m_1}{L_1} \left(\Omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r_1^3} \right) (R_E x_1 + L_1^2) + \frac{m_1}{L_1} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2),$$

$$B_2 = \frac{2m_1 \Omega_E}{L_2} ((x_2 - x_1)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - (y_2 - y_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)) + m_1 \Omega_E^2 L_2 + \frac{\mu_E m_1}{L_2} \left(-\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + ((R_E + x_1)(R_E + x_2) + y_1 y_2) \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3} \right) \right) + \frac{m_1}{L_2} ((\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2)$$

так что

$$T_1 = \frac{A_{22}B_1 - A_{12}B_2}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, \quad T_2 = \frac{-A_{21}B_1 + A_{11}B_2}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \quad (4.18)$$

Вычисленные по этим формулам значения P_1 и P_2 нужно подставить в уравнения (4.17), тогда система будет замкнутой относительно своих переменных.

Вертикальное положение равновесия ($x_1 = L_1$, $x_2 = L_1 + L_2$, $y_1 = y_2 = 0$) – частное решение динамических уравнений. Линеаризуем уравнения около этого положения равновесия. Введем в окрестности равновесия вариации переменных δx_1 , δx_2 , δy_1 , δy_2 и их скоростей и ускорений.

Из условий нерастяжимости тросов δx и $\delta \dot{x}$ зануляются.

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 = L_1^2 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = L_2^2 \Rightarrow L_1 \delta x_1 = 0 \Rightarrow \delta x_1 = \delta x_2 \equiv 0 \end{aligned}$$

Остаются уравнения для вариаций по y :

$$\delta \ddot{y}_1 = \left(\frac{T_1}{m_1} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{L_1} \right) - \frac{T_2}{m_1} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{L_2} \right) \right) \delta y_1 + \frac{T_2}{m_1 L_2} \delta y_2,$$

$$\delta \ddot{y}_2 = \frac{T_2}{m_2 L_2} \delta y_1 + \frac{T_2}{m_2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{L_2} \right) \delta y_2.$$

Переобозначим для наглядности коэффициенты

$$\delta \ddot{y}_1 = A_{11} \delta y_1 + A_{12} \delta y_2$$

$$\delta \ddot{y}_2 = A_{21} \delta y_1 + A_{22} \delta y_2$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{T_1}{m_1} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{L_1} \right) - \frac{T_2}{m_1} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{L_2} \right) = -\frac{T_1 R_E}{m_1 r_1 L_1} - \frac{T_2 r_2}{m_1 r_1 L_2}, \\ A_{12} &= \frac{T_2}{m_1 L_2}, \quad A_{21} = \frac{T_2}{m_2 L_2}, \quad A_{22} = \frac{T_2}{m_2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{L_2} \right) = -\frac{T_2 r_1}{m_2 r_2 L_2} \end{aligned}$$

Ищем решение в виде $\delta y_k = C_k e^{i\Omega t}$, где квадраты частот Ω^2 – собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ с обратным знаком.

Собственные формы колебаний определяются соотношением

$$\left. \frac{\delta y_2}{\delta y_1} \right|_{t=0} = \frac{C_2}{C_1} = -\frac{(A_{11} + \Omega^2)}{A_{12}}$$

Из характеристического уравнения

$$\Omega^2 + \Omega(A_{11} + A_{22}) + A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} = 0$$

имеем

$$\Omega_{1,2}^2 = -\frac{(A_{11} + A_{22})}{2} \pm \sqrt{\frac{(A_{11} - A_{22})^2}{4} + A_{12}A_{21}} \quad (4.19)$$

По физическому смыслу задачи $A_{11} < 0$, $A_{22} < 0$, $A_{12} > 0$, $A_{21} > 0$.

Преобразуем (4.19):

$$A_{11} + \Omega^2 = \frac{(A_{11} - A_{22})}{2} \pm \sqrt{\frac{(A_{11} - A_{22})^2}{4} + A_{12}A_{21}} \quad (4.20)$$

Из (4.20) следует, что отношение $\frac{\delta y_2}{\delta y_1}$ положительно для нижнего знака, то есть для меньшей частоты колебаний (большого периода), и отрицательно для верхнего знака, то есть для большей частоты (меньшего периода). Первый случай – синфазная мода, второй – противофазная.

Из условия положительности квадратов частот следует, что противофазные колебания существуют всегда. Хотя при отсутствии синфазных колебаний само движение быстро выходит за пределы области линейности и, следовательно, применимости полученных формул. Для существования синфазных колебаний необходимо, чтобы детерминант $\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ был больше нуля. Но в нашей задаче он равен $\frac{T_1 T_2 R_E}{m_1 m_2 r_2 L_1 L_2}$, то есть всегда положителен, и синфазные колебания тоже существуют всегда.

Вернемся от линеаризованной модели к нелинейной. Так как система консервативна, есть 3-х-мерная поверхность постоянной энергии и можно использовать метод отображения Пуанкаре. Подобные исследования (с некоторыми ошибками) были проведены А. Ставицким. Автор благодарит А. В. Ставицкого за предоставленный рисунок 14 и Г. В. Калачева за программу, с помощью которой были получены рисунки 15-19.

$$\begin{aligned}
(m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1))\ddot{\varphi}_1 &= -m_1 \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r_1^3} \right) \frac{R_E}{L_1} \sin \varphi_1 \\
&+ m_2 \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r_2^3} \right) \frac{R_E}{L_1} \cos \varphi_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\
&+ \frac{m_2 L_2}{L_1} \left((\omega_E + \dot{\varphi}_2)^2 - \frac{\mu_E}{r_2^3} \right) \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\
&+ m_2 \left((\omega_E + \dot{\varphi}_1)^2 - \frac{\mu_E}{r_2^3} \right) \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (4.21) \\
\frac{L_1}{L_2} \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \ddot{\varphi}_2 \\
&= -\frac{L_1}{L_2} (\dot{\varphi}_1^2 + 2\omega_E \dot{\varphi}_1) \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\
&- \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r_2^3} \right) \frac{(R_E \sin \varphi_2 + L_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1))}{L_2}
\end{aligned}$$

Где φ_1, φ_2 – углы, составляемые с вертикалью соответственно первым и вторым тросами, так что

$$\begin{aligned}
x_1 &= L_1 \cos \varphi_1, \\
x_2 &= L_1 \cos \varphi_1 + L_2 \cos \varphi_2, \\
y_1 &= L_1 \sin \varphi_1, \\
y_2 &= L_1 \sin \varphi_1 + L_2 \sin \varphi_2
\end{aligned}$$

Интеграл энергии в этих переменных имеет вид:

$$\begin{aligned}
E = T + U = & \left(\frac{1}{2} L_1^2 \dot{\varphi}_1^2 - \frac{\mu_E}{r_1} - \frac{1}{2} \Omega_E^2 r_1^2 \right) \\
& + m_2 \left(\frac{1}{2} (L_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + L_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2L_1 L_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)) - \frac{\mu_E}{r_2} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \omega_E^2 r_2^2 \right) \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Так как есть интеграл энергии, на каждой траектории угловую скорость $\omega_2 \equiv \dot{\varphi}_2$ можно выразить через три оставшиеся фазовые переменные φ_1 , φ_2 и $\omega_1 \equiv \dot{\varphi}_1$ и изображать траекторию в этом трехмерном пространстве. В верхней части рис. 13 показана такая траектория в трех ракурсах.

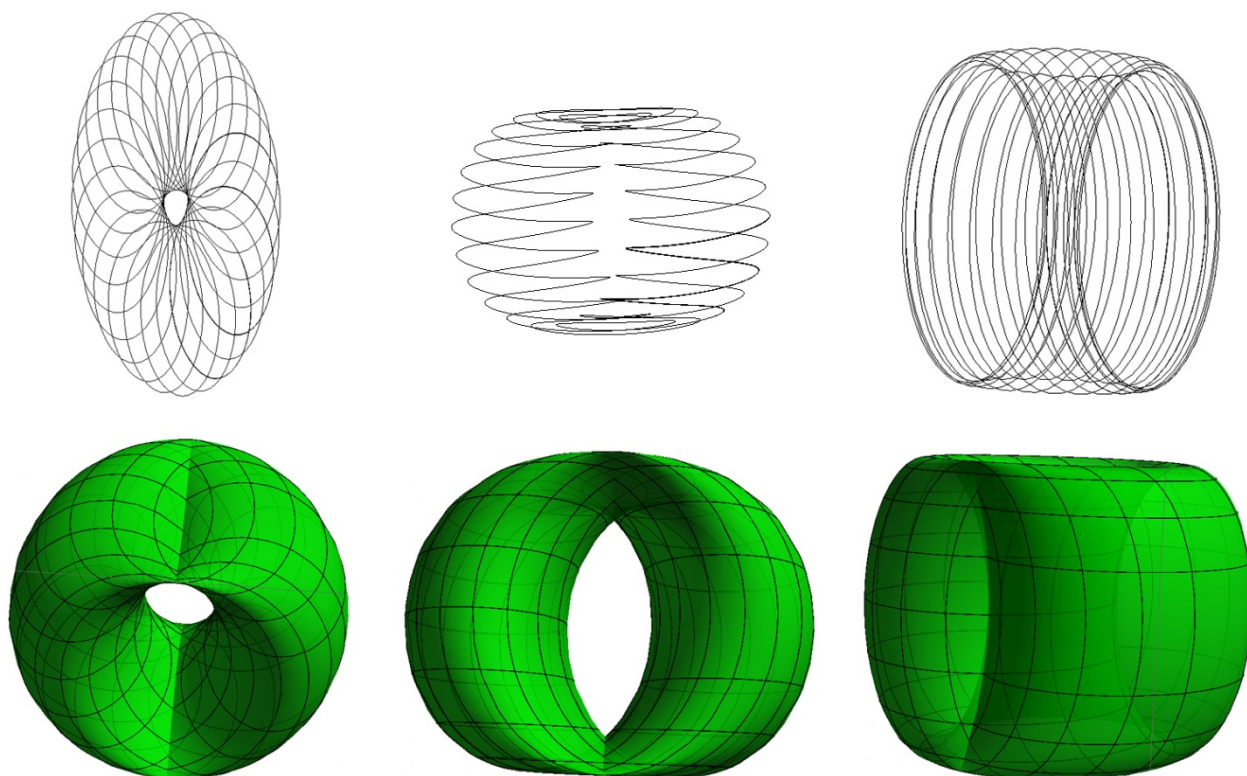


Рис. 13. Траектория системы в трехмерном пространстве постоянной энергии и проекции на это пространство двумерного тора, вложенного в R^4 .

Видно, что траектория имеет вид спирали, обматывающей похожую на тор поверхность. Эта поверхность – проекция расположенного в 4-мерном пространстве двумерного тора в 3-мерное пространство. В нижней части рисунка приведены проекции на трехмерное пространство стандартно вложенного в R^4 двумерного тора.

При таком изображении траекторий, даже расположенных в одном изоэнергетическом пространстве (то есть соответствующих одной энергии), их проекции будут хаотически пересекаться. Что будет делать картину

запутанной. Поэтому воспользуемся отображениями Пуанкаре. Вместо целой траектории будем изображать точки пересечения ее с некоторой двумерной поверхностью. Так гораздо нагляднее. Лучше видно взаимное расположение траекторий. Видны и свойства траекторий. Если траектория периодическая, она пересекает поверхность в конечном числе точек. Соответственно, непериодическая – в бесконечном. Точки пересечения регулярной траектории с секущей плоскостью располагаются на одномерной кривой, а нерегулярной – заполняют двумерную область. Отображение Пуанкаре может дать ценную информация о поведении системы.

На рис. 14 показан пример сечения Пуанкаре траектории плоскостью $\varphi_1 = 0$. Разными цветами обозначены разные движения, но они подобраны так, что полная энергия у них одинакова. Видно, что все движения регулярны (лежат на окружностях). Это необычно, но в данном случае все движения регулярны потому, что отклонения малы, и движения близки к линейным. Большинство движений не периодичны (точки равномерно заполняют окружность), но встречаются близкие к периодическим (ближайшая к наружному краю красная траектория) и периодические (точка в центре соответствует противофазным периодическим колебаниям). Если бы счет продолжился дальше, окружности, соответствующие непериодическим движениям, были бы заполнены равномерно. «Закрученность» линий объясняется тем, что при увеличении амплитуды число вращения (т.е. доля траектории между последовательными точками в данном сечении) зависит от начальной амплитуды. При получении нового движения начальные условия меняются (амплитуда хотя бы одного из углов), и число вращения постепенно меняется.

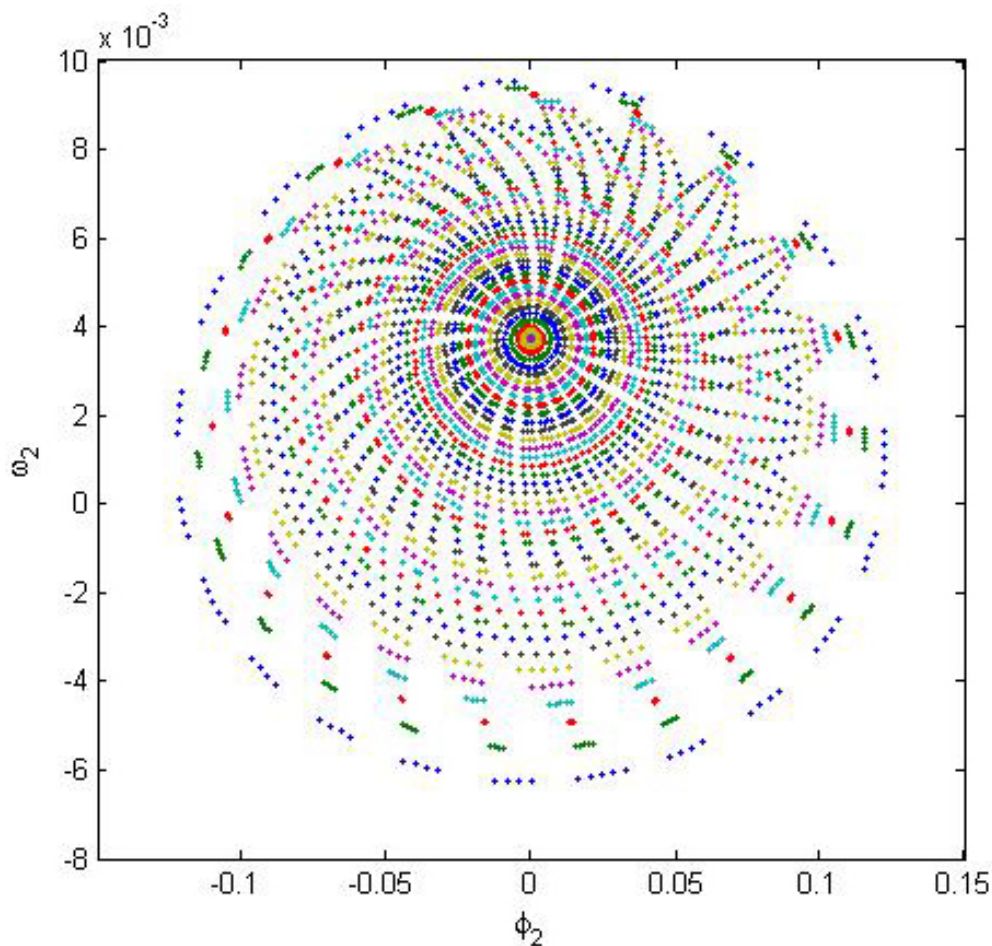


Рис. 14. Пример отображения Пуанкаре с плоскостью сечения $\varphi_1 = 0$.

На сечении, которое представлено на рис. 14, точки лежат на кривых, очень близких к окружностям. Это значит, что изоэнергетические траектории лежат на торообразной поверхности. Такое поведение типично для интегрируемых гамильтоновых систем с 2 степенями свободы. В данном случае эта регулярность объясняется тем, что отклонения малы и система близка к интегрируемой.

При увеличении амплитуды регулярность нарушается. Большая часть траекторий по-прежнему лежит на инвариантных торах. Но появляются узкие щели шириной порядка малого параметра, который характеризует отклонение от интегрируемости (в данном случае величина нелинейных членов). В щелях поведение траекторий более хаотическое.

На нерезонансном торе траектория непериодическая, т.е. не замкнутая и плотно обматывает тор. Нерезонансные торы сохраняются. Щели появляются на месте резонансных торов, траектории на которых являются замкнутыми. Для таких торов некоторые периодические траектории сохраняются, на их месте остаются изолированные точки (в сечении). А в окрестности сохранившихся движений возникают новые инвариантные торы

из периодических движений распавшегося тора. Оставшиеся точки могут образовать хаотические множества на месте распавшегося тора. При дальнейшем увеличении амплитуды нелинейность возрастает и щели занимают все большую часть пространства. Т.к. нерезонансные торы не разрушаются, траектории, бывшие на резонансных торах, остаются зажатыми между нерезонансными торами.

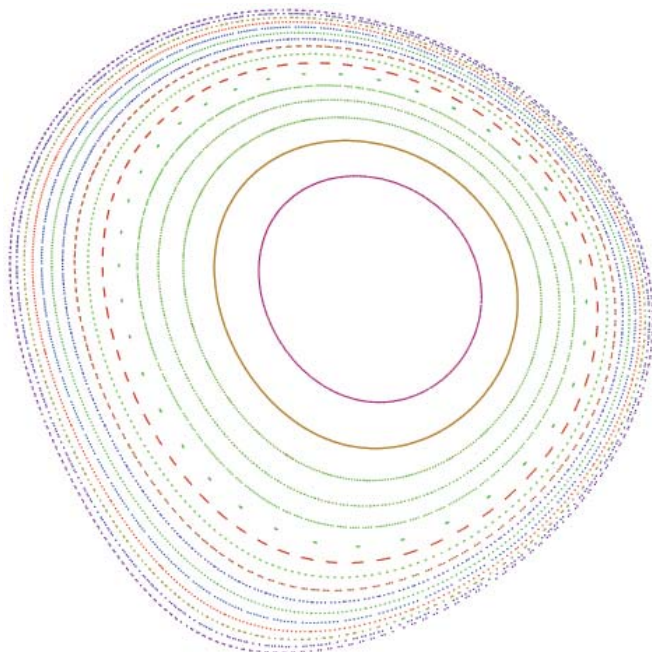


Рис. 15.

На рис. 15 изображены регулярные движения с разным числом вращения. Есть периодические.

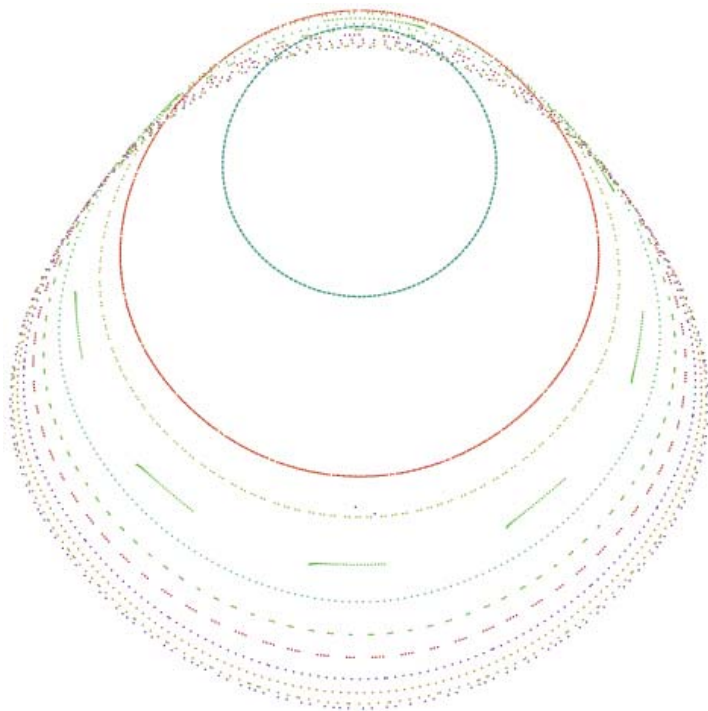


Рис. 16. Большая окрестность периодической точки и большее возмущение. Появление щелей. Здесь надо объяснить, почему вдруг

траектории «пересекаются». Дело в том, что изоэнергетическая поверхность – не плоскость, следовательно, сечение Пуанкаре в этом случае не плоское. При проекции его на плоскость иногда получается так, что проекции траектории пересекаются, хотя сами траектории не пересекаются.

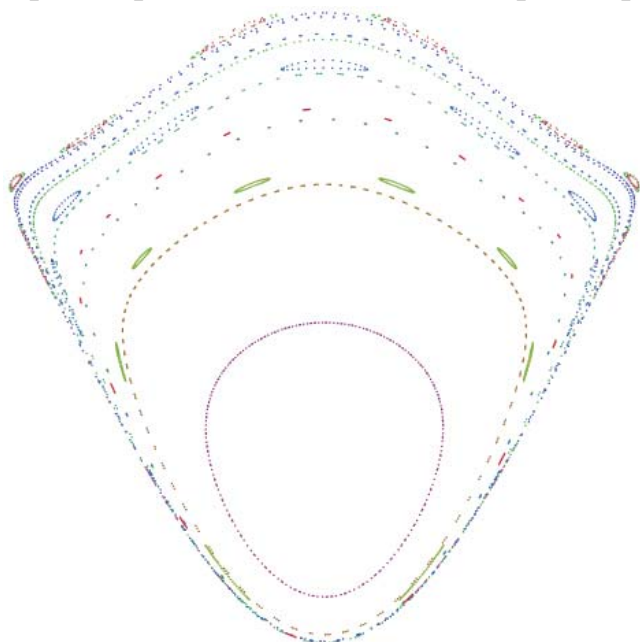


Рис. 17. Щели занимают большой объем. Видна их внутренняя структура.

Затем появляются признаки хаотических движений – точки, которые трудно связать с непрерывными кривыми.

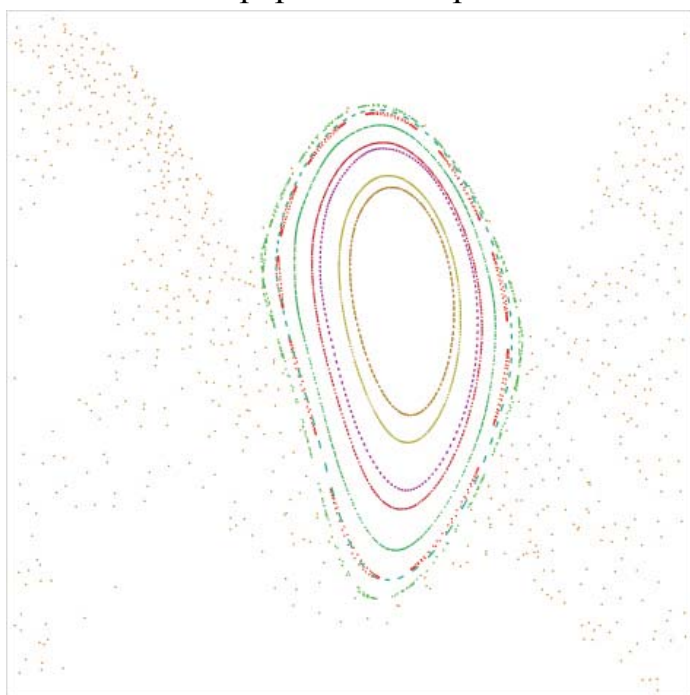


Рис. 18. Большая область хаотических движений, где каждая точка сама по себе (Большой набор точек справа и слева от группы замкнутых кривых). Также щели становятся еще заметнее.

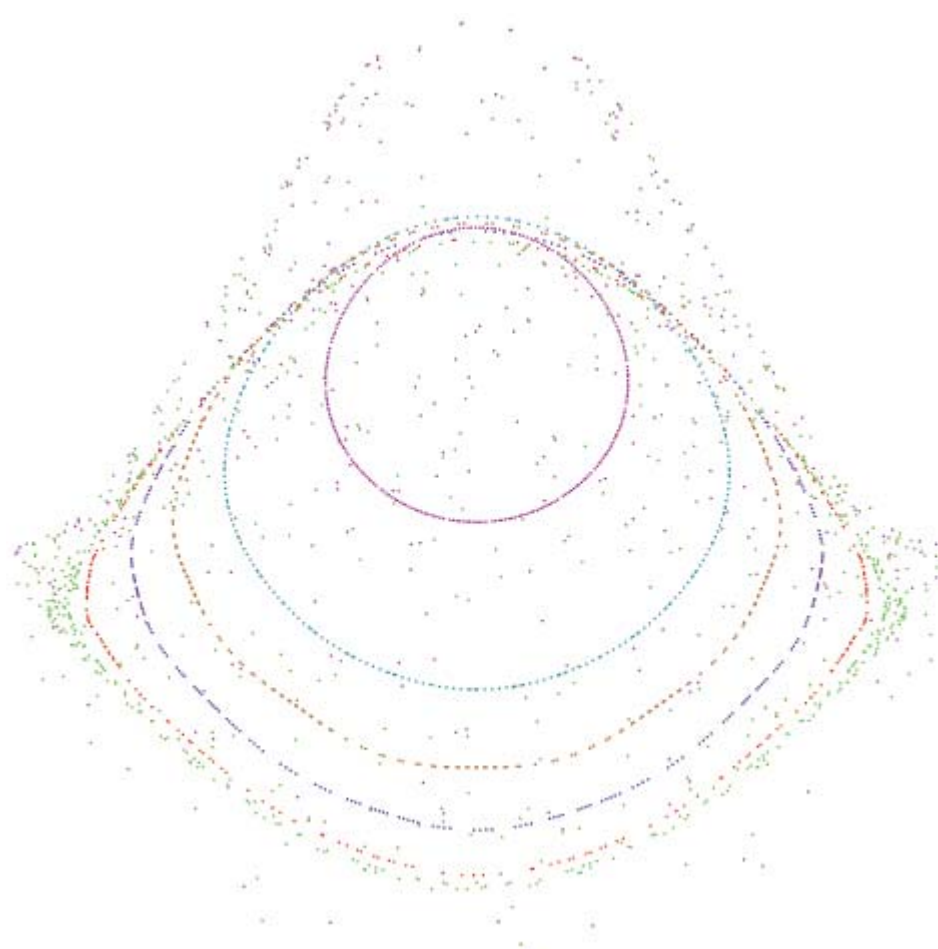


Рис. 19. Большая область хаотических движений. Так как это проекция сечения Пуанкаре на плоскость, набор хаотических точек, видимо, лежит на противоположной стороне сечения, чем набор замкнутых примерно concentрических кривых.

Основные выводы:

Малые колебания двухзвенного маятника представлены двумя модами. Нулевая (маятниковая) мода соответствует синфазным колебаниям двух звеньев. Первая мода – противофазным колебаниям. Первая мода является первым приближением к гибкому тросу. Периоды движений для синфазных колебаний от 3 суток и более, для противофазных – меньше суток, отношение периодов чаще всего 7–8.

В общем случае колебания не периодические. Но есть начальные условия, при которых возникают периодические синфазные и противофазные колебания. Малые колебания, которые можно считать линейными, всегда представимы как комбинация синфазных и противофазных. Для линейных движений синфазные и противофазные колебания существуют всегда.

Собственные частоты не близки к частотам лунных и солнечных возмущений, поэтому, скорее всего, Луна и Солнце мало влияют на систему.

Построение сечений Пуанкаре позволяет судить о периодичности и регулярности отдельных траекторий и взаимном их расположении в фазовом пространстве. Сечения Пуанкаре дают возможность находить периодические движения в области нелинейности.

Г Л А В А 5. НЕЛИНЕЙНАЯ НЕПРЕРЫВНАЯ МОДЕЛЬ С ГИБКИМ НЕРАСТЯЖИМЫМ ТРОСОМ

Движения космического лифта очень разнообразны. Главная и наиболее весомая (во многих смыслах) часть КЛ – трос. В наиболее рациональных вариантах конструкции его масса составляет до 80% от полной массы лифта. Из-за огромной длины, почти отсутствующей изгибной жесткости, своеобразия внешнего силового поля, переменного сечения и др. его динамика представляет наибольший интерес, но она меньше всего исследована. Многие работы посвящены вопросам управления и движения кабины [37 – 43]. Хотя это важные темы, их мы касаться не будем и сосредоточимся на динамике троса.

Основные виды движений троса – продольные и поперечные колебания.

Для моделирования динамики троса будем использовать непрерывную модель нерастяжимой гибкой нити. В большинстве известных работ по динамике космического лифта используется модель дискретных точечных масс [44 – 48], и только в работах японских авторов используется непрерывная модель [49, 50]. Здесь непрерывная модель выбрана по нескольким причинам: 1) она ближе к реальности с механической точки зрения; 2) она дает возможность при расчетах выбирать из большого числа численных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных; 3) хотя в некоторых вариантах вычислений схемы, используемые для непрерывных моделей, похожи на схемы с дискретными массами, нет полной уверенности, что они дают одинаковые результаты для непрерывной задачи. Так, в работе [51] исследуется так называемый парадокс Курчанова–Мышкиса–Филимонова “...одномерную сплошную среду на неограниченных временных интервалах при анализе так называемых локальных свойств нельзя рассматривать как предельный случай одномерной цепочки точечных масс при неограниченном увеличении количества таких точек” и подчеркиваются дефекты прямолинейного использования такой аппроксимации. Хотя нет полной уверенности в правоте автора, сам факт публикации такой работы примечателен.

Здесь отдельно рассматриваются поперечные и продольные колебания. Это делается, чтобы подробнее рассмотреть влияние на динамику отдельных факторов. Включение в модель поперечных и продольных движений, вызываемых разными механическими причинами, затрудняет понимание найденных при расчетах особенностей. К тому же возрастает вычислительная сложность, в связи с сильной разницей в частотах продольных и поперечных движений. Поэтому мы использовали модель нерастяжимого троса для расчета поперечных колебаний, а продольные колебания изучались на вертикальном тросе, для чего пришлось пренебречь действием кориолисовых сил при продольных деформационных смещениях.

5.1. Математическая модель

Напомним, что точка закрепления лифта находится на экваторе. Движение системы рассматривается во вращающейся географической системе координат с началом в центре Земли. Ось x направлена по радиусу Земли, проходящему через точку закрепления троса, ось z – на северный полюс, ось y дополняет систему координат до правой, то есть расположена в плоскости экватора горизонтально и направлена на восток. \vec{r} – радиус-вектор рассматриваемой точки троса, $\vec{r} = \vec{r}(s, t)$, s – расстояние вдоль троса от точки закрепления до данной точки, t – время. На элемент троса действуют гравитационное притяжение Земли, разность натяжений со стороны верхней и нижней границ элемента, инерционные силы.

Выведем уравнение движения i -го элемента троса. Пусть \vec{R} – его радиус-вектор в инерциальной СО, \vec{r} – в неинерциальной, вращающейся вместе с Землей. Масса элемента троса – линейная плотность в точке, умноженная на длину элемента $\rho(s)\Delta s$. Натяжение направлено по касательной к тросу $\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}$ в точках $i-1$ и i , где индекс “ $i-1$ ” относится к начальной точке элемента, индекс “ i ” – к конечной.

$$\rho(s)\Delta s \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial t^2} = -\rho(s)\Delta s \frac{\mu_E}{r^3} \vec{r} + \left(T \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right)_i - \left(T \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right)_{i-1}$$

(μ_E – гравитационный параметр Земли). Делим на линейную плотность и переходим к пределу по $\Delta s \rightarrow 0$

$$\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial t^2} = -\frac{\mu_E}{r^3} \vec{r} + \frac{1}{\rho(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right)$$

Ускорение в инерциальной СО, как известно из кинематики относительного движения,

$$\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial t^2} = \vec{R}_0 + [\vec{\omega}_E, [\vec{\omega}_E, \vec{r}]] + [\dot{\vec{\omega}}_E, \vec{r}] + 2 \left[\vec{\omega}_E, \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right] + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2},$$

где \vec{R}_0 – вектор из начала координат инерциальной СО в начало координат неинерциальной СО, в нашем случае он равен 0. $\dot{\vec{\omega}}_E$, производная по времени от угловой скорости вращения Земли, также равна 0. Уравнение движения принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = -2 \left[\vec{\omega}_E, \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right] - [\vec{\omega}_E, [\vec{\omega}_E, \vec{r}]] - \frac{\mu_E}{r^3} \vec{r} + \frac{1}{\rho(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right) \quad (5.1)$$

Трос, как указано выше, считаем нерастяжимым, изгибная и крутильная жесткости равны 0. Условие нерастяжимости записывается так:

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right| = 1 \quad (5.2)$$

Запишем теперь динамическое уравнение (5.1) в проекциях на введенные выше оси координат. Обозначим u, v, w проекции скорости рассматриваемой точки. $[\vec{\omega}_E, [\vec{\omega}_E, \vec{r}]]$ из (5.1) можно разложить по формуле ВАС–САВ. Учитывая, что у вектора угловой скорости Земли есть компонента только по Z

$$[\vec{\omega}_E, [\vec{\omega}_E, \vec{r}]] = \vec{\omega}_E(\vec{\omega}_E, \vec{r}) - \vec{r}(\omega_E^2) = \begin{vmatrix} 0 & & \\ 0 & & \\ \omega_E^2 & z & \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x\omega_E^2 & & \\ y\omega_E^2 & & \\ z\omega_E^2 & & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x\omega_E^2 & & \\ y\omega_E^2 & & \\ 0 & & 0 \end{vmatrix}$$

Динамическое уравнение (5.1) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 2\omega_E v + \omega_E^2 x - \frac{\mu_E}{r^3} x + \frac{1}{\rho(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial x}{\partial s} \right) & \dot{x} &= u \\ \dot{v} &= -2\omega_E u + \omega_E^2 y - \frac{\mu_E}{r^3} y + \frac{1}{\rho(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial y}{\partial s} \right) & \dot{y} &= v \\ \dot{w} &= -\frac{\mu_E}{r^3} z + \frac{1}{\rho(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial z}{\partial s} \right) & \dot{z} &= w \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ясен физический смысл отдельных слагаемых в этих формулах: кориолисова сила, центробежная сила, гравитационная сила и разница натяжений со стороны верхней и нижней «соседок» точки.

Условие нерастяжимости записывается так:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 = 1 \quad (5.4)$$

Итак, наша математическая модель представляет собой систему из шести дифференциальных уравнений в частных производных (5.3),

дифференциального соотношения (5.4) и включает 7 неизвестных (x, y, z, u, v, w, T) . Для того чтобы завершить формулировку задачи, запишем еще краевые условия для уравнений (5.3).

Первое краевое условие означает, что нижняя точка неподвижна и закреплена в начале координат, то есть

$$\text{При } s = 0 \quad x = R_E, \quad y = z = 0, \quad u = v = w = 0. \quad (5.5)$$

Краевым условием для верхней точки является совпадение движений конца троса с движением концевой массы, уравнения для которой таковы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_K &= 2\omega_E v_K + \omega_E^2 x_K - \frac{\mu_E}{r_K^3} x_K - \frac{1}{M_K} T_K \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)_K & \dot{x}_K &= u_K \\ \dot{y}_K &= -2\omega_E u_K + \omega_E^2 y_K - \frac{\mu_E}{r_K^3} y_K - \frac{1}{M_K} T_K \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)_K & \dot{y}_K &= v_K \\ \dot{z}_K &= -\frac{\mu_E}{r_K^3} z_K - \frac{1}{M_K} T_K \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)_K & \dot{z}_K &= w_K \end{aligned} \quad (5.6)$$

здесь индексом «К» отмечены значения переменных для концевой массы.

Таким образом, второй набор краевых условий:

$$\text{при } s = L \quad x = x_K, \quad y = y_K, \quad z = z_K, \quad u = u_K, \quad v = v_K, \quad w = w_K \quad (5.7)$$

Итак, мы имеем смешанную систему уравнений, включающую систему (5.3) дифференциальных уравнений в частных производных для распределенной компоненты, систему (5.6) обыкновенных дифференциальных уравнений для конечной точки, дифференциально-алгебраическое соотношение (5.4) и набор граничных и краевых условий (5.5) – (5.7). Эволюционная часть системы, то есть набор уравнений, явно определяющих производные от искомых переменных по времени [52], содержит 12 уравнений (для $x, y, z, u, v, w, x_K, y_K, z_K, u_K, v_K, w_K$). Для одной величины – натяжения троса T – явного определяющего уравнения нет. Обычно в задачах динамики троса используется модель растяжимого троса, которая позволяет вычислять натяжение через механические уравнения состояния типа закона Гука [53]. Здесь выведем уравнение для натяжения, используя условие нерастяжимости (5.4).

Последовательное дифференцирование этого соотношения по s дает

$$\begin{aligned} x'x'' + y'y'' + z'z'' &= 0, \\ x'x''' + y'y''' + z'z''' &= -(x'')^2 - (y'')^2 - (z'')^2 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Теперь продифференцируем условие нерастяжимости два раза по времени. (Точкой над буквой будем обозначать производную по времени, штрихом – производную по s)

$$\begin{aligned} (\dot{x}')^2 + (\dot{y}')^2 + (\dot{z}')^2 + x'\ddot{x}' + y'\ddot{y}' + z'\ddot{z}' = \\ = u'^2 + v'^2 + w'^2 + x'\ddot{x}' + y'\ddot{y}' + z'\ddot{z}' = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Найдем \ddot{x}' , \ddot{y}' , \ddot{z}' , продифференцировав по s уравнения движения (5.3)

$$\ddot{x}' = 2\omega_E v' + \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r^3}\right) x' + 3x' \frac{\mu_E}{r^4} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial x}{\partial s} \right) \right)$$

$$\ddot{y}' = -2\omega_E u' + \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r^3}\right) y' + 3y' \frac{\mu_E}{r^4} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial y}{\partial s} \right) \right)$$

$$\ddot{z}' = -\frac{\mu_E}{r^3} z' + 3z' \frac{\mu_E}{r^4} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial y}{\partial s} \right) \right)$$

Подставим их в уравнение (5.9)

$$\begin{aligned} u'^2 + v'^2 + w'^2 + 2\omega_E (v'x' - u'y') + \omega_E^2 (x'x' + y'y') \\ - \frac{\mu_E}{r^3} ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2) + 3 \frac{\mu_E}{r^4} \frac{\partial r}{\partial s} (xx' + yy' + zz') \\ + x' \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial x}{\partial s} \right) \right) + y' \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial y}{\partial s} \right) \right) \\ + z' \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial y}{\partial s} \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

С учетом условия нерастяжимости (5.4) и того, что $\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{xx' + yy' + zz'}{r}$

$$\frac{\mu_E}{r^3} ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2) = \frac{\mu_E}{r^3}$$

$$3 \frac{\mu_E}{r^4} \frac{\partial r}{\partial s} (xx' + yy' + zz') = 3 \frac{\mu_E}{r^3} \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2$$

Разберем отдельно выражение с натяжением.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial x}{\partial s} \right) \right) &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{1}{\rho} T \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial s} \right) \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{T}{\rho} \right) \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{1}{\rho} T \frac{\partial^3 x}{\partial s^3} \end{aligned}$$

Аналогично получается по y и z . Учитывая соотношения (5.8) получаем:

$$\begin{aligned}
& x' \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial x}{\partial s} \right) \right) + y' \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial y}{\partial s} \right) \right) + z' \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial z}{\partial s} \right) \right) \\
& = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial s} \right) - \frac{1}{\rho} T ((x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2)
\end{aligned}$$

Уравнение для натяжения принимает вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho(s)} \frac{\partial T}{\partial s} \right) - \frac{1}{\rho(s)} T ((x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2) \\
& = -v'^2 - u'^2 - w'^2 - 2\omega_E (v'x' - u'y') + \omega_E^2 (z'^2 - 1) \quad (5.10) \\
& + \frac{\mu_E}{r^3} \left(1 - 3 \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

Соотношение (5.10) представляет собой линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка для T . В каждый момент времени коэффициенты этого уравнения зависят от переменных x, y, z, u, v, w и их производных по s , то есть являются известными функциями от s . Поэтому (5.10) является обыкновенным дифференциальным уравнением, и функция $T(s)$ – решением краевой задачи для этого уравнения. Краевые условия для этой задачи получаются следующим образом.

для начальной точки приравнивается нулю продольная компонента скорости и ускорения точек троса, близких к точке закрепления, откуда

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_0 = \rho(0) \left(\frac{\mu_E}{R_E^2} - \omega_E^2 R_E \right) \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)_0 \quad (5.11)$$

на верхнем (свободном) конце краевое условие выводится из требования совпадения продольной компоненты ускорений концевой массы и верхней точки троса

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_K = -\frac{\rho(L)}{M_K} T_K \quad (5.12)$$

Полученная система решалась так: для определения T в текущий момент времени решается краевая задача (5.10) – (5.12), которая, если ее решать численно, сводится к решению линейной системы с трехдиагональной матрицей. Найденное значение $T(s)$ используется для выполнения шага интегрирования системы эволюционных уравнений (5.3). Таким образом оказывается возможным вычислять движение КЛ на большом интервале времени.

5.2. Математическая модель в плоскости экватора

Тем не менее, 3-х мерное движение троса не очень наглядно. Сам объект более сложный и разобраться в деталях его поведения труднее. Поэтому есть смысл отдельно рассмотреть плоское движение.

Двумерное движение в плоскости экватора ($z = 0, w = 0$) более наглядно и исследовалось более подробно. Большинство его результатов можно представить на плоских рисунках и графиках.

В двумерном случае динамические уравнения (5.4) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 2\omega_E v + \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r^3}\right)x + \frac{1}{\rho(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial x}{\partial s}\right) & \dot{x} &= u \\ \dot{v} &= -2\omega_E u + \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r^3}\right)y + \frac{1}{\rho(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial y}{\partial s}\right) & \dot{y} &= v \end{aligned} \quad (5.13)$$

Уравнения для концевой массы:

$$\begin{aligned} \dot{u}_K &= 2\omega_E v_K + \omega_E^2 x_K - \frac{\mu_E}{r_K^3} x_K - \frac{1}{M_K} T_K \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)_K & \dot{x}_K &= u_K \\ \dot{v}_K &= -2\omega_E u_K + \omega_E^2 y_K - \frac{\mu_E}{r_K^3} y_K - \frac{1}{M_K} T_K \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)_K & \dot{y}_K &= v_K \end{aligned} \quad (5.14)$$

Условие нерастяжимости

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1 \quad (5.15)$$

В данном случае удобно ввести угол α – угол между касательной к тросу в точке и вертикалью.

$$x' = \cos(\alpha), \quad y' = \sin(\alpha) \quad (5.16)$$

Условие нерастяжимости при этом выполняется тождественно.

Через угол α легко выражаются кривизна κ троса в точке и угловая скорость ω элемента троса:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} = \kappa, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \omega \quad (5.17)$$

Продифференцировав (5.15) по t и по s , можно вывести следующие выражения для величин κ и ω :

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial s} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2} \quad (5.18)$$

$$\kappa = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right)^2} \quad (5.19)$$

Уравнение для натяжения выводится таким же образом, что в трехмерном случае.

$$\ddot{x}' = 2\omega_E v' + \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r^3}\right) x' + 3\left(\frac{\mu_E}{r^4}\right) x \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial x}{\partial s} \right) \right)$$

$$\ddot{y}' = -2\omega_E u' + \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r^3}\right) y' + 3\left(\frac{\mu_E}{r^4}\right) y \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial y}{\partial s} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} & (\dot{x}')^2 + x' \ddot{x}' + (\dot{y}')^2 + y' \ddot{y}' \\ &= (u')^2 + (v')^2 + 2\omega_E (v'x' - u'y') + \omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r^3} \left(1 - 3 \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 \right) \\ &+ x' \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial x}{\partial s} \right) \right) + y' \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial y}{\partial s} \right) \right) \end{aligned}$$

Члены с T преобразуются так же, как и трехмерном случае.

Учитывая условие нерастяжимости (5.15), соотношение $x''x' + y''y' = 0$, а также то, что в двухмерном случае

$$\begin{aligned} x'''x' + y'''y' \\ &= -\cos^2(\alpha)\alpha'\alpha' - \sin^2(\alpha)\alpha'\alpha' - \sin(\alpha)\cos(\alpha)\alpha'' \\ &+ \sin(\alpha)\cos(\alpha)\alpha'' = -(\alpha')^2 = -\kappa^2 \end{aligned}$$

$$x' \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial x}{\partial s} \right) \right) + y' \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial y}{\partial s} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial s} \right) - \frac{1}{\rho} T \kappa^2$$

Уравнение на натяжение принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial s} \right) - \frac{1}{\rho} T \kappa^2 + (u')^2 + (v')^2 + 2\omega_E (v'x' - u'y') + \omega_E^2 \\ &= \frac{\mu_E}{r^3} \left(1 - 3 \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Учтем соотношение $(u')^2 + (v')^2 = (v'x' - u'y')^2$ (легко выводится из (5.15)). Получим, что $(u')^2 + (v')^2 + 2\omega_E (v'x' - u'y') + \omega_E^2 = (\omega_E + v'x' - u'y')^2$. С учетом (5.18) $(\omega_E + v'x' - u'y')^2$ принимает вид $(\omega_E + \omega)^2$.

В результате уравнение для силы натяжения T в двумерном случае имеет гораздо более красивый и лаконичный вид, чем в трехмерном

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial s} \right) - \frac{1}{\rho} T k^2 + (\omega_E + \omega)^2 = \frac{\mu_E}{r^3} \left(1 - 3 \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 \right) \quad (5.20)$$

Напоминаем, что T, k, ω, r зависят от t и s , а ρ от s .

Краевые условия для двумерного случая выглядят так же, как и для трехмерного.

Эта модель и некоторые результаты расчетов по ней описаны также в статье [54].

5.3. Разностная аппроксимация и некоторые алгоритмы вычислений

Эволюционные уравнения решаются численно методом прямых (method of lines [55]): областью интегрирования является полуполоса $t > 0$, $0 \leq s \leq L$. Отрезок $0 \leq s \leq L$ разбивается на интервалы, и значения x, y, z, u, v, w вычисляются интегрированием по времени вдоль прямых $s = const$ (в данном случае использовался метод Рунге-Кутты). Для вычисления производных по s применялись разностные аппроксимации 2-го порядка. При этом решение краевой задачи для T сводится к решению системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей.

В качестве сетки по s чаще всего использовалась сетка с постоянным шагом, но применялась и сетка с уменьшением шага у краев. Для вычисления производных по s 1-го и 2-го порядков использовалась аппроксимация центральными разностями.

Можно несколько улучшить вычисления, заменив натяжение T на переменную $Q = \frac{T}{\rho}$. Последняя величина более гладко меняется по s (например, в вертикальном равновесном положении она постоянна), поэтому можно ожидать лучшей аппроксимации ее производных на сетках. Кроме того, упрощаются и некоторые формулы. Вот как это получается:

Так как $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s}(\rho) = \frac{\partial}{\partial s}(\ln(\rho))$, уравнения движения (5.13) принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega_E v + \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r^3} \right) x + Q' x' + Q x'' + Q x' \frac{\partial}{\partial s}(\ln(\rho)) \\ \ddot{y} &= -2\omega_E u + \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r^3} \right) y + Q' y' + Q y'' + Q y' \frac{\partial}{\partial s}(\ln(\rho)) \end{aligned} \quad (5.21)$$

А уравнение для натяжения (5.20) выглядит так:

$$\begin{aligned} Q'' + Q' \frac{\partial}{\partial s}(\ln(\rho)) + Q \frac{\partial^2}{\partial s^2}(\ln(\rho)) - (\alpha')^2 Q \\ = -(\omega_E + (v'x' - u'y'))^2 + \frac{\mu_E}{r^3} \left(1 - 3 \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Краевые условия:

для точки $s = 0$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial s}\right)_0 + Q(0) \frac{\partial}{\partial s}(\ln(\rho)) \Big|_0 = \left(\frac{\mu_E}{R_E^2} - \omega_E^2 R_E\right) \left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)_0 \quad (5.23)$$

для точки $s = L$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial s}\right)_K + Q_K \frac{\partial}{\partial s}(\ln(\rho)) \Big|_K + \frac{\rho(L)}{M_K} Q_K = 0 \quad (5.24)$$

А $\frac{\partial}{\partial s}(\ln(\rho))$ и $\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\ln(\rho))$, как видно из формулы (3.13), имеют простые выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}(\ln(\rho)) &= \frac{k}{l_b g} \left(\frac{\mu_E}{(s + R_E)^2} - \omega_E^2 (s + R_E) \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial s^2}(\ln(\rho)) &= -\frac{k}{l_b g} \left(\frac{2\mu_E}{(s + R_E)^3} + \omega_E^2 \right) \end{aligned}$$

Эта замена разностной аппроксимации некоторых производных аналитическими формулами заметно увеличивает точность и устойчивость вычислений.

5.4. Программная среда для исследования динамики

Основные возможности

Для численного исследования динамики троса в рамках разработанной математической модели были созданы программные комплексы (для 2-мерного и 3-мерного случаев). С помощью этих программ можно моделировать движения троса для разных параметров конструкции (начального натяжения, плотности материала, разрывной длины материала, длины троса, запаса прочности, дополнительной нагрузки), разных начальных условий (задавая разные начальные профили возмущения по координатам и скоростям, чаще по координатам), разных параметров численного интегрирования (количество точек разбиения троса, равномерное или неравномерное разбиение троса на отрезки). Кроме того, в процессе интегрирования можно следить, как изменяются по времени и/или вдоль троса следующие величины:

- 1) напряжение в каждой точке троса для проверки, не вышел ли лифт за пределы ограничений на напряжение и для контроля вычислений в случае использования переменной Q . При большинстве ограниченных по углу движений лифт не выходил за пределы ограничений на напряжение.

- 2) полная энергия всей конструкции. Ее полезно вычислять для проверки сохранения энергии (так как система без диссипации). Если движение не приводит к падению троса, изменение энергии составляет небольшую долю процента
- 3) (в двухмерном случае) коэффициенты разложения в ряд Фурье отклонения точек от вертикали или энергии троса. Разложение проводится с помощью быстрого преобразования Фурье в случае, если число точек – степень 2, или обычным преобразованием Фурье в противном случае. Можно включить и оба метода. Спектр разложения в ряд Фурье по пространственной переменной отображается на том же экране, где и картинка профиля троса в каждый момент времени.

В отдельных окнах можно посмотреть графики изменения полной энергии от времени, координат конечной точки от времени (это бывает полезно), графики амплитуд Фурье от времени для всех или части мод, распределения амплитуд Фурье по модам в текущий момент времени, распределения напряжения вдоль троса в текущий момент, максимальное ускорение за время данного движения и по всем точкам троса.

Если перечисленные выше дополнительные вычисления не нужны, их можно выборочно отключать.

И, конечно, можно задавать разные начальные положения троса. Программа позволяет задавать несколько форм: прямая, часть окружности, синусоида, степенные кривые, смешанная – трос, часть которого занимает окружность, а остальную часть – прямая, и другие формы. Конечно, для каждого вида кривой можно менять параметры: угол отклонения (для прямой), кривизну (для части окружности), период (для синусоиды), место размещения окружности и ее кривизну (для смешанной) и т.п. Каждая функция домножается на задаваемую константу, так регулируется отклонение троса. Все перечисленные кривые – плоские. Для трехмерного варианта в основном, использовались те же плоские кривые, повернутые на задаваемый пользователем угол вокруг вертикальной оси.

Созданные программы дают возможность не только наблюдать движения троса для разных его параметров, но и отслеживать связь динамических параметров движения, зависимость динамических параметров от свойств конструкции, и, следовательно, более подробно исследовать наблюдаемые явления.

Коррекция и верификация результатов

Интеграл энергии

Так же, как и в дискретных моделях, непрерывная модель описывает консервативную систему, в ней сохраняется полная энергия (интеграл Якоби во вращающейся системе координат), которая имеет вид

$$E(t) = K_T + U_T + K_K + U_K =$$

$$= \int_0^L \rho(s) \left(\frac{1}{2} (u(s,t)^2 + v(s,t)^2 + w(s,t)^2) - \frac{\mu_E}{r(s,t)} - \frac{1}{2} \omega_E^2 d(s,t)^2 \right) ds$$

$$+ M_K \left(\frac{1}{2} (u_K^2 + v_K^2 + w_K^2) - \frac{\mu_E}{r_K} - \frac{1}{2} \omega_E^2 d_K^2 \right)$$

где индекс «Т» относится к точкам троса, «К» – к массе на конце. Здесь \vec{d} – проекция вектора координат \vec{r} на плоскость xu , т.к. для центробежной силы важна только компонента \vec{r} в плоскости экватора.

Проверим, что это выражение действительно сохраняет свою величину при движениях системы. Продифференцируем его по t .

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^L \rho(s) \left(u\dot{u} + v\dot{v} + w\dot{w} + \frac{\mu_E}{r^2} \dot{r} - \omega_E^2 d\dot{d} \right) ds$$

$$+ M_K \left(u_K \dot{u}_K + v_K \dot{v}_K + w_K \dot{w}_K + \frac{\mu_E}{r_K^2} \dot{r}_K - \omega_E^2 d_K \dot{d}_K \right)$$

Рассмотрим сначала производную от энергии точек троса E_T

Подставим сюда $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ и $\dot{u}_K, \dot{v}_K, \dot{w}_K$ из уравнений (5.3). Учтем при этом, что

$$\dot{r} = \frac{x}{r} u + \frac{y}{r} v + \frac{z}{r} w, \quad \dot{d} = \frac{x}{d} u + \frac{y}{d} v$$

$$\frac{dE_T}{dt} = \int_0^L \rho(s) \left(u \left[2\omega_E v + \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r^3} \right) x + \frac{1}{\rho(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial x}{\partial s} \right) \right] \right.$$

$$+ v \left[-2\omega_E u + \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r^3} \right) y + \frac{1}{\rho(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial y}{\partial s} \right) \right]$$

$$+ w \left[-\frac{\mu_E}{r^3} z + \frac{1}{\rho(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial z}{\partial s} \right) \right] + \frac{\mu_E}{r^3} (xu + yv + zw) - \omega_E^2 (xu$$

$$+ yv) \Big) ds$$

Члены, не содержащие T , взаимно уничтожаются. Остается:

$$\frac{dE_T}{dt} = \int_0^L \left[u \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial x}{\partial s} \right) + v \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial y}{\partial s} \right) + w \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial z}{\partial s} \right) \right] ds$$

Подынтегральное выражение

$$\begin{aligned} u \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial x}{\partial s} \right) + v \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial y}{\partial s} \right) + w \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial z}{\partial s} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial s} \left(uT \frac{\partial x}{\partial s} + vT \frac{\partial y}{\partial s} + wT \frac{\partial z}{\partial s} \right) - \left(T \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial s} + T \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial s} + T \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial s} \right) \end{aligned}$$

$\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial s} = 0$ как производная по t от условия нерастяжимости ().

Остается

$$\frac{dE_T}{dt} = \left(uT \frac{\partial x}{\partial s} + vT \frac{\partial y}{\partial s} + wT \frac{\partial z}{\partial s} \right)_0^L$$

Теперь рассмотрим производную от энергии конечной массы E_K .

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_K = M_K \left(u_K \dot{u}_K + v_K \dot{v}_K + w_K \dot{w}_K + \frac{\mu_E}{r_K^2} \dot{r}_K - \omega_E^2 d_K \dot{d}_K \right)$$

Аналогично предыдущей производной, подставим сюда $\dot{u}_K, \dot{v}_K, \dot{w}_K$ из (5.6). Учтем при этом, что

$$\dot{r}_K = \frac{x_K}{r_K} u_K + \frac{y_K}{r_K} v_K + \frac{z_K}{r_K} w_K, \quad \dot{d}_K = \frac{x_K}{d_K} u_K + \frac{y_K}{d_K} v_K$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE}{dt} \right)_K = M_K \left(u_K \left[2\omega_E v_K + \omega_E^2 x_K - \frac{\mu_E}{r_K^3} x_K - \frac{1}{M_K} T_K \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)_K \right] \right. \\ + v_K \left[-2\omega_E u_K + \omega_E^2 y_K - \frac{\mu_E}{r_K^3} y_K - \frac{1}{M_K} T_K \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)_K \right] \\ + w_K \left[-\frac{\mu_E}{r_K^3} z_K - \frac{1}{M_K} T_K \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)_K \right] + \frac{\mu_E}{r_K^3} (x_K u_K + y_K v_K + z_K w_K) \\ \left. - \omega_E^2 (x_K u_K + y_K v_K) \right) \end{aligned}$$

Члены, не содержащие натяжение, снова уничтожились. Осталось

$$\frac{dE_K}{dt} = - \left(u_K T_K \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)_K + v_K T_K \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)_K + w_K T_K \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)_K \right)$$

Производная от полной энергии

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \frac{dE}{dt_T} + \frac{dE}{dt_K} \\
&= \left(uT \frac{\partial x}{\partial s} + vT \frac{\partial y}{\partial s} + wT \frac{\partial z}{\partial s} \right)_0^L \\
&\quad - \left[u_K T_K \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)_K + v_K T_K \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)_K + w_K T_K \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)_K \right] \\
&= \left(uT \frac{\partial x}{\partial s} + vT \frac{\partial y}{\partial s} + wT \frac{\partial z}{\partial s} \right)_{s=0} = 0
\end{aligned}$$

в силу краевого условия в начальной точке.

Полная энергия считалась для контроля на каждом шагу интегрирования. Хотя колебания наблюдались, но они были ограничены малыми долями процента от начальной энергии. Начальной точкой отсчета энергии считается энергия вертикального покоящегося троса. Видимо, колебания энергии связаны с погрешностями сеточной аппроксимации. Пример такой кривой приведен на рисунке 20.

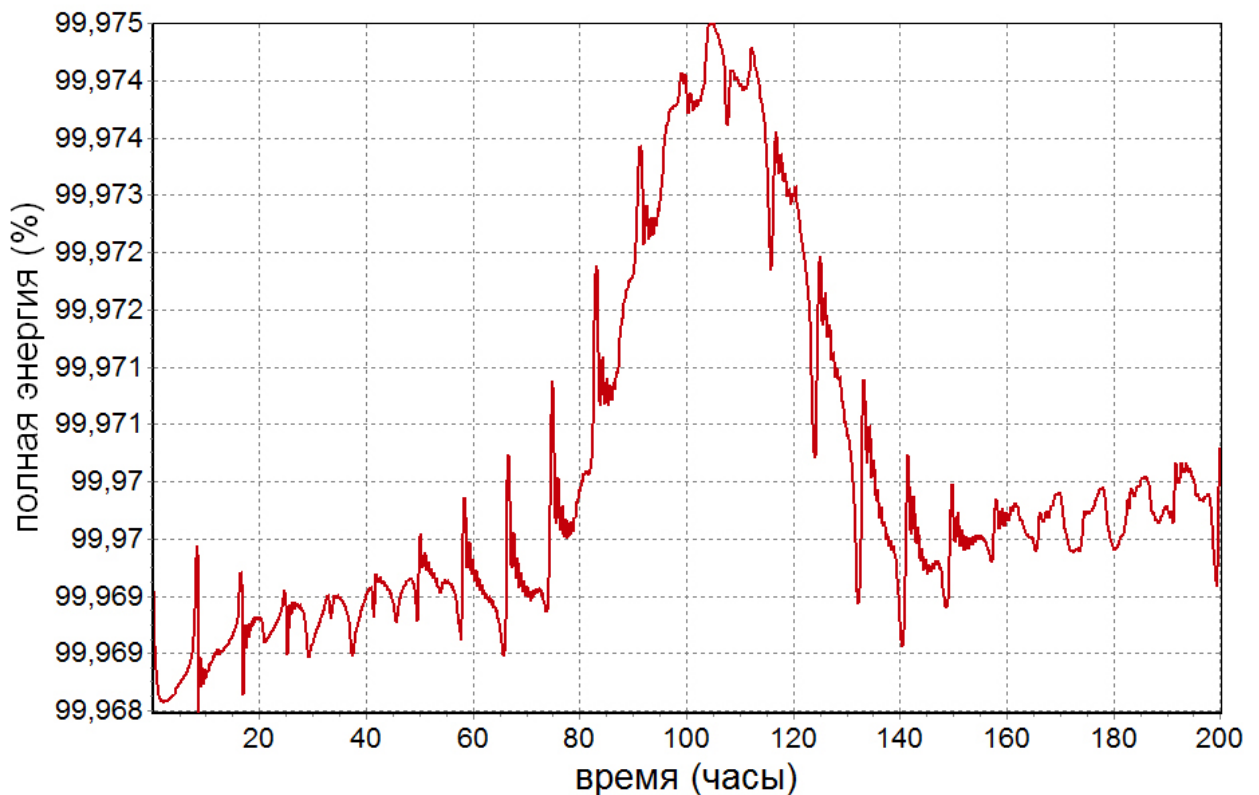


Рис 20. Изменение энергии со временем.

Коррекция скорости и длины

Для повышения устойчивости счета проводилась коррекция длины троса. Хотя в самой процедуре условие нерастяжимости использовалось для

того, чтобы получить уравнение для натяжения, но из-за ошибок дискретизации и округления длины отдельных участков слегка «едут». И накопление этих изменений чрезвычайно вредно для точности расчетов, т.к. сохранение длины отдельных участков необходимо для согласованности самих уравнений. Коррекция проводилась таким образом.

Сохранение длины получается в результате двукратного интегрирования выражений для ускорения по времени. Соответственно, корректировать нужно 2 величины – координату и скорость. Поэтому кроме коррекции длины проводилась еще и коррекция по скорости для близких точек троса.

Условие нерастяжимости троса

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 = 1$$

Нулевую производную по времени от него учитываем, когда корректируем отрезок по длине, вторую – когда выводим уравнение для натяжения, а сейчас учтем и первую, корректируя скорость. Возьмем первую производную по времени от условия нерастяжимости.

$$\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial s} = 0$$

Это конус в пространстве производных по s от переменных.

Если рассчитанные величины не удовлетворяют этому условию, значит, точка не лежит на этом конусе. Нужно ее вернуть на конус. Для этого выбираем на этом конусе ближайшую к рассчитанной точку (т.е. опускаем из рассчитанной точки перпендикуляр на конус).

Индекс «т» – требуемое значение скорости, индекс «в» – вычисленное.

Штрих–производная по s .

$$x' u'_t + y' v'_t + z' w'_t = 0$$

$$x' u'_v + y' v'_v + z' w'_v = a$$

Вычисленные и требуемые скорости лежат на одной нормали к конусу, если

$$\begin{aligned} u'_t &= u'_v + \alpha x' \\ v'_t &= v'_v + \alpha y' \\ w'_t &= w'_v + \alpha z' \end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned} x' u'_t + y' v'_t + z' w'_t &= x' (u'_v + \alpha x') + y' (v'_v + \alpha y') + z' (w'_v + \alpha z') = \\ &= x' u'_v + \alpha (x')^2 + y' v'_v + \alpha (y')^2 + z' w'_v + \alpha (z')^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\alpha = - \frac{x' u'_v + y' v'_v + z' w'_v}{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$$

Или, если длина отрезка сохраняется или коррекция длины проведена, то

$$\alpha = x'u'_B + y'v'_B + z'w'_B$$

Имея α , по формулам (5.25) вычисляем скорректированные значения производных скоростей, а из них последовательно сами скорости.

5.5. Трехмерные движения троса

Трехмерные движения рассматривались довольно бегло из-за названных выше причин (трудная обозримость возникающих при этом возможностей, сложности наглядного изображения результатов). Внимание уделялось, в основном, проверке работоспособности алгоритмов. Из динамических характеристик исследовались только основные: амплитуда колебаний конечной точки, период главной моды таких колебаний, возможная взаимосвязь с колебаниями в плоскости экватора.

Колебания в меридиональной плоскости более высокочастотные, чем в экваториальной плоскости. (В меридиональной плоскости около 23 часов, в экваториальной плоскости – около 3 суток, как и обещали более простые модели.)

В качестве примера покажем траекторию конечной точки для движения троса, близкого к маятниковому. На рис. 21 траектория конечной точки в плоскости yz , y – отклонение в плоскости орбиты, z – отклонение из плоскости орбиты. (График похож на фигуры Лиссажу). Видна разница между частотами. Амплитуда колебаний в меридиональной плоскости почти не меняется. Вообще, траектория конечной точки в осях yz вписывается в прямоугольник.

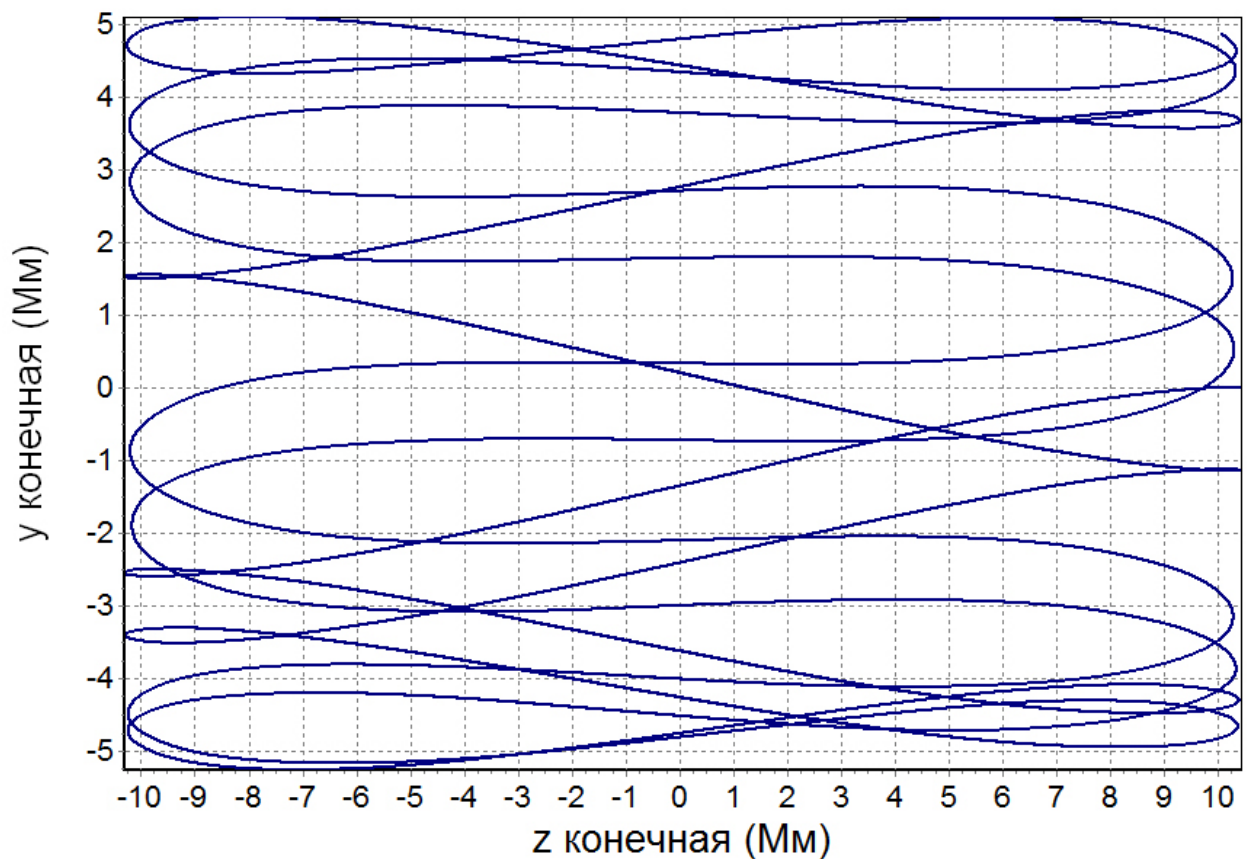


Рис. 21. Траектория конечной точки

Как видно из уравнений (5.3) колебания в плоскости экватора xu не инициируют колебаний вне плоскости экватора. А вот колебания в меридиональной плоскости zx «перетекают» частично в плоскость xu из-за кориолисова ускорения.

Приведем еще пример движения. На рисунке 22 положения троса в разные моменты времени, слева – начальное, чем правее, тем больше t . Сверху положение троса в плоскости xu , прямо под ним – в плоскости xz для тех же моментов времени

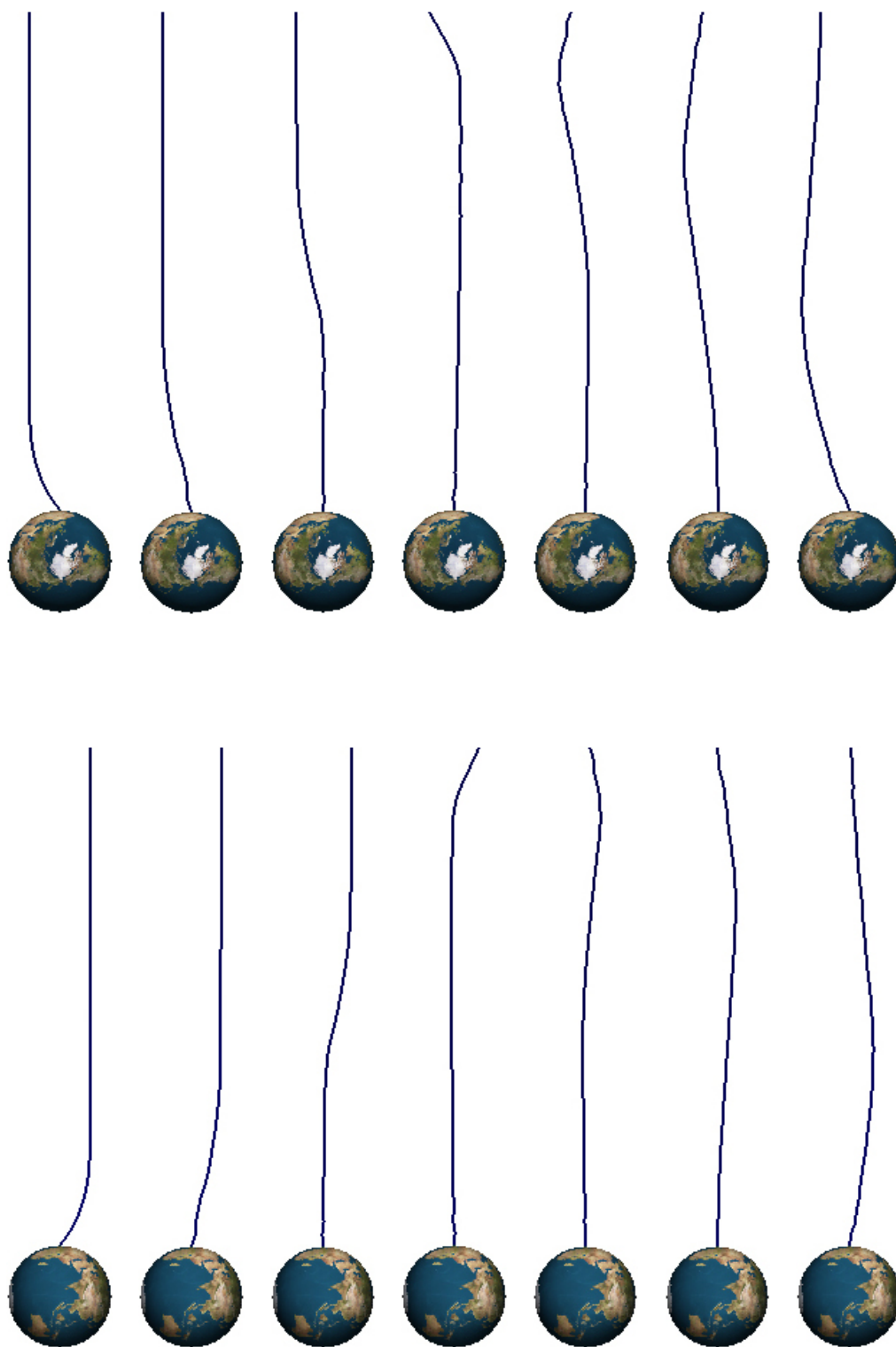


Рис. 22. Положения троса в разные моменты времени. Верхний ряд – колебания в плоскости xy , нижний – в плоскости xz .

5.6. Движения троса в плоскости экватора

Ограниченные движения

Существенно подробнее исследовались движения в плоскости экватора. Рассматривалось большое разнообразие начальных форм троса. Искались, в том числе, такие начальные формы, при которых поперечные колебания ограничены по амплитуде.

Конечно, движения троса зависят не только от формы начального отклонения троса, но и от длины троса, дополнительной нагрузки, прочности материала и многих других параметров.

Одномодовые колебания, близкие к периодическим

При некоторых начальных условиях получаются колебания, очень близкие к одномодовым. Примеры приведены на рис. 23. На каждой фигуре рисунка изображены положения троса в разные моменты времени для наглядности. Фигуры на рисунке соответствуют низшим модам колебаний, а) – нулевой, б) – первой и т.д.

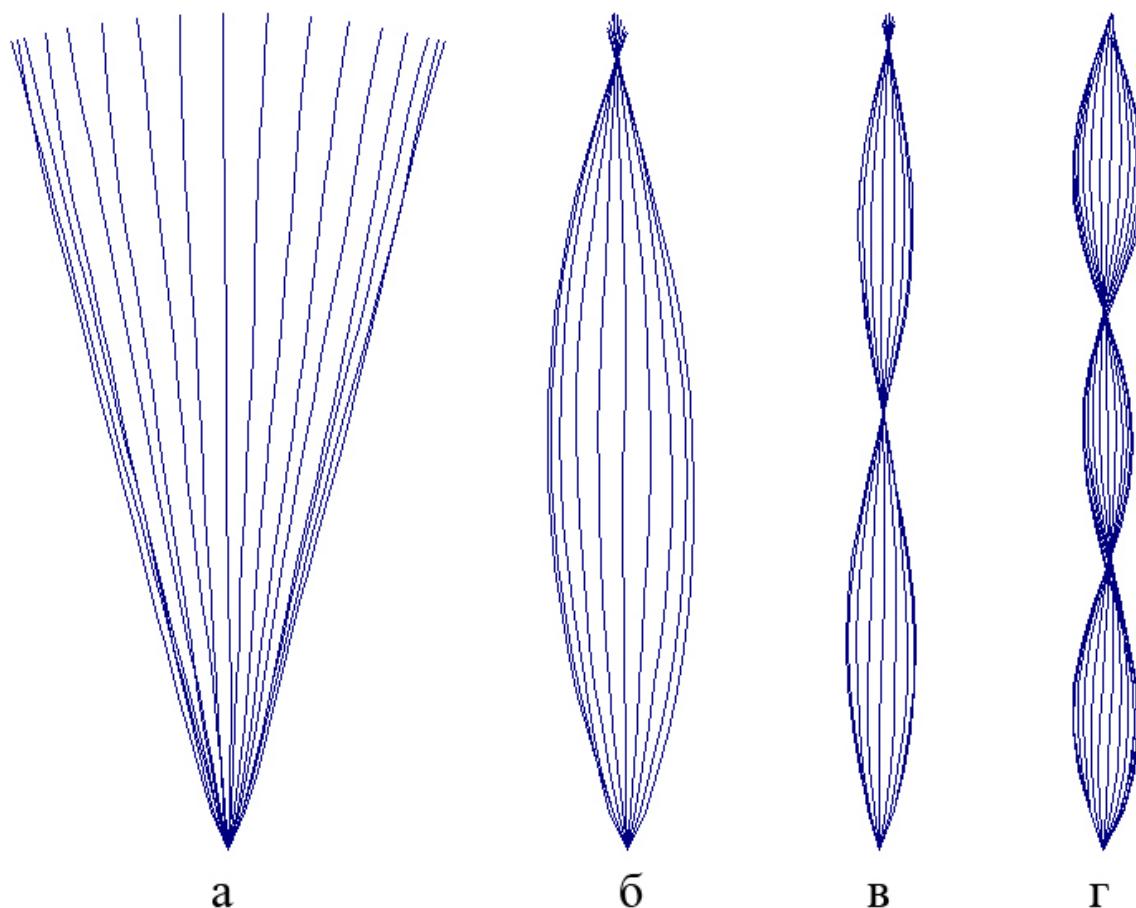


Рис. 23. Примеры колебаний, близких к одномодовым.

Нулевая мода колебаний, т.е. колебания, при которых форма троса близка к прямолинейной, изучалась неоднократно на более простых моделях жесткого прямого троса. Полученные разными авторами периоды таких колебаний близки. Они составляют от 3.5 суток до недели в зависимости, главным образом, от длины троса. Представления о первой моде колебаний тоже получались раньше, в частности, в дипломных работах студентов, использовавших дискретную двухмассовую модель, но такие результаты имели частный характер и не публиковались. Периоды колебаний первой моды порядка 8 часов. Для второй моды периоды колебаний около 5 часов. Колебания более высоких мод (рис. 23б, в, г) изучены гораздо меньше [41, 49].

При относительно малых амплитудах (до 20 градусов) и на относительно небольших интервалах времени формы колебаний оказались близки к колебаниям линейной струны, с почти равномерным чередованием по длине троса узлов и пучностей, и с определенной частотой. Учитывая неоднородность троса и переменность по координате силового поля, это неочевидный результат.

Медленное изменение амплитуды

В общем случае движения троса сложные, трудно выделить отдельные периоды и определенные формы. На рис. 24 показаны колебания конечной точки троса (зависимость от времени отклонения от вертикали), где четко видны маятниковые колебания, и на их фоне практически неизменные по амплитуде более высокочастотные колебания по первой моде.

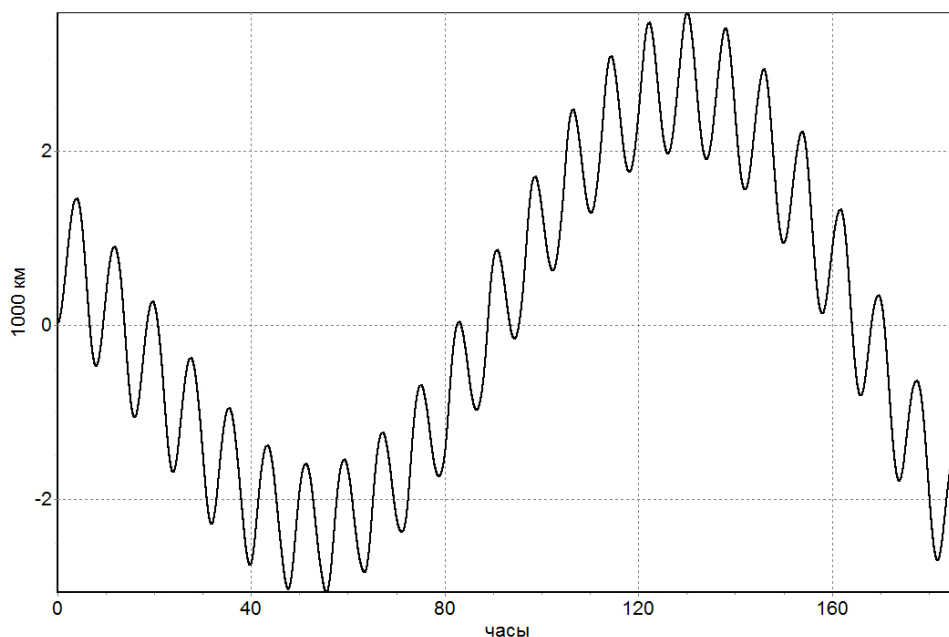


Рис. 24. Положение конечной точки в зависимости от времени.

При некоторых начальных данных на больших интервалах времени возникают интересные эффекты. Рассмотрим близкое к маятниковому движение, начинающееся из искривленного у точки привязки положения лифта, на большом интервале времени. Так, на рис. 25 показаны положения троса в разные моменты времени (фигура кажется сплошной, потому что положения лифта так плотно заполнили область). На рис. 26 показано отклонение конечной точки от вертикали в зависимости от времени.



Рис. 25.
Положения троса.

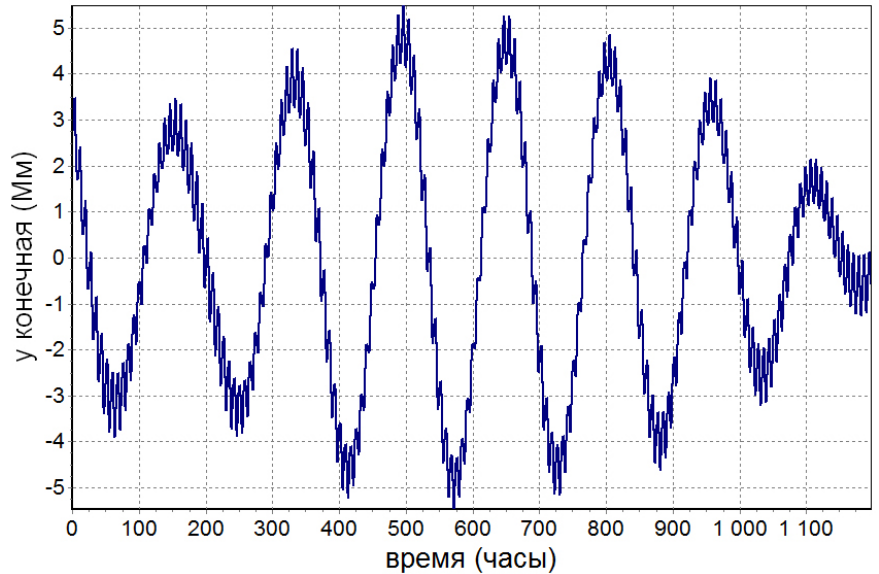


Рис. 26. Положение конечной точки от времени.

Наиболее выражены маятниковые колебания с периодом около 150 часов, амплитуда которых изменяется с периодом порядка 2-х месяцев. Такой характер движений пока трудно объяснить. Картина похожа на картину биений (т.е. наложения колебаний с близкими частотами) или на картину модуляции колебаний внешней частотой. Но в данной задаче нет внешних сил, действующих с таким периодом. И не видно механизмов возникновения колебаний с частотой, близкой к маятниковой, наложение которых на маятниковые могло бы вызвать биения.

Можно посмотреть за изменением амплитуд разложения в ряд Фурье отклонений точек от вертикали. Это позволит судить, есть ли перекачка энергии в более высокочастотные по s колебания. Ведь полная энергия

практически сохраняется. Ниже приведен график изменения амплитуд от времени для таких колебаний (рис. 27) и график амплитуд от времени только для младших гармоник (высокочастотных) (рис. 28). Справа на графике приведена шкала, где указаны номер гармоники и цвет, которым она отмечена на графике. Видна периодичность, когда все гармоники синхронно достигают своих минимумов, это соответствует прямолинейному вертикальному положению. Графики красивые, но положение дел не прояснили, т.к. перекачки энергии не видно, амплитуды более высоких гармоник возрастают и убывают синхронно с амплитудами более низких. Хотя энергия может «уходить» в промежуточные гармоники.

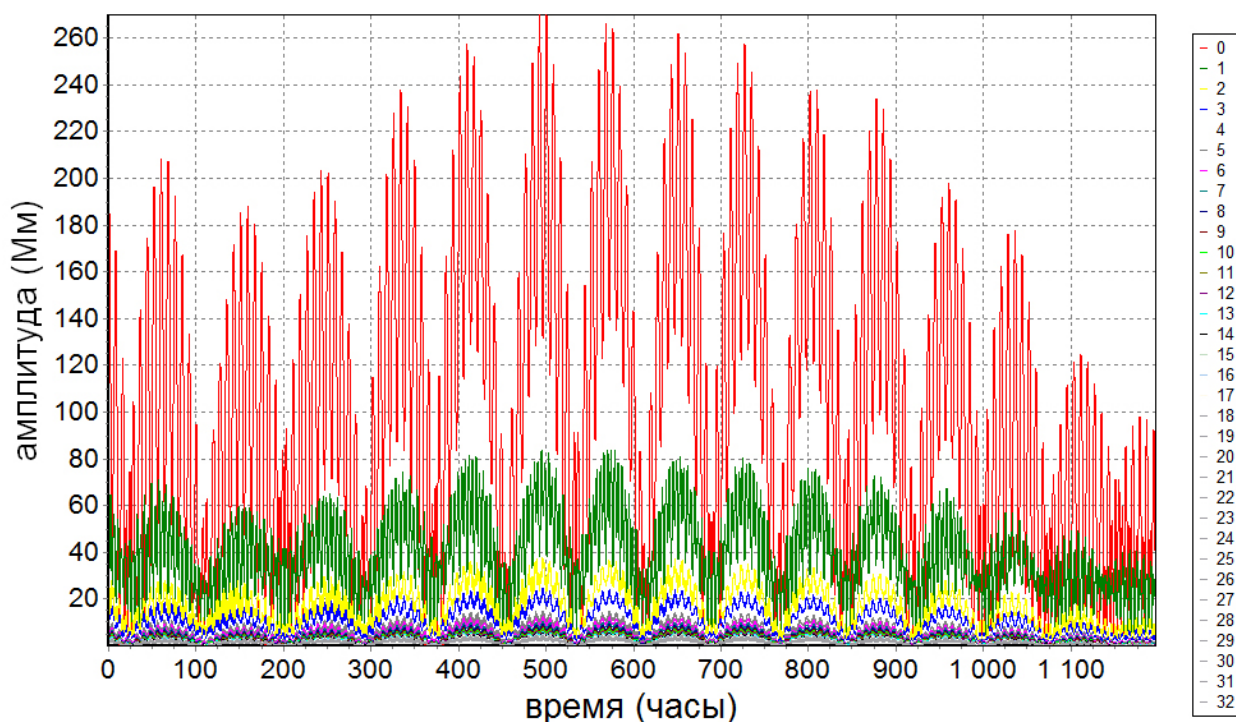


Рис. 27. Зависимость амплитуд разложения Фурье от времени.

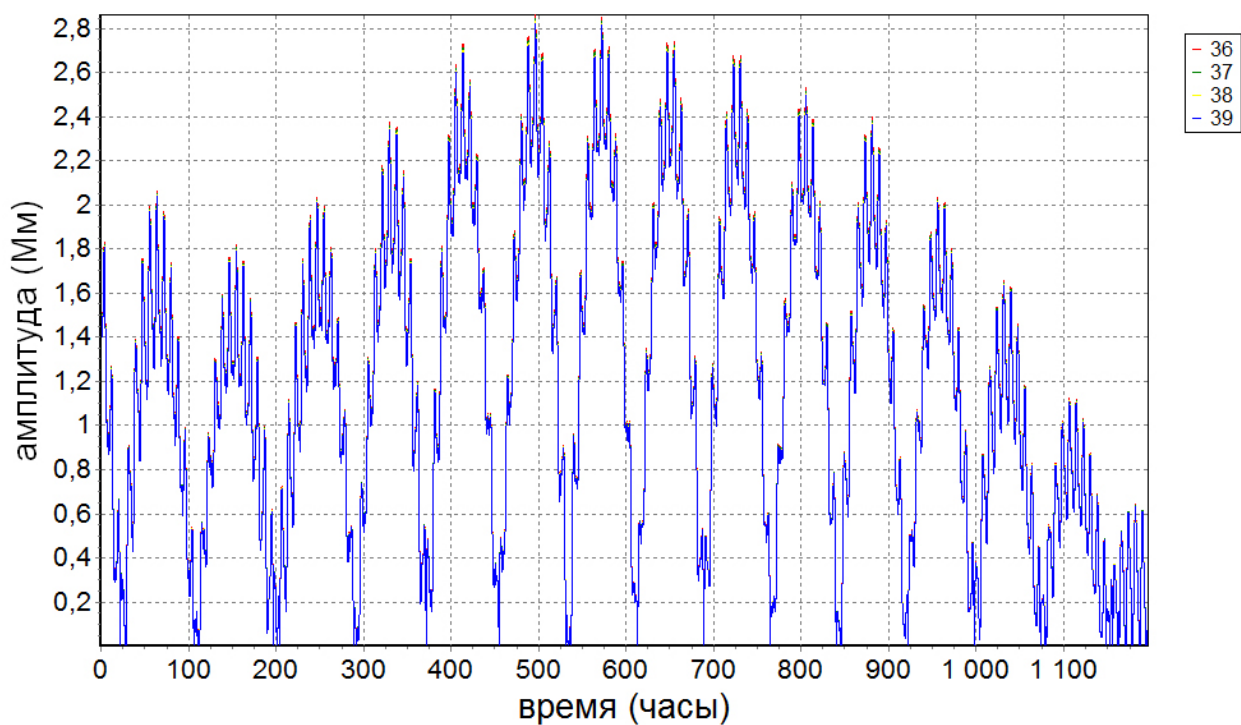


Рис. 28. Зависимость младших амплитуд разложения Фурье от времени.

Периодическое изменение напряжения

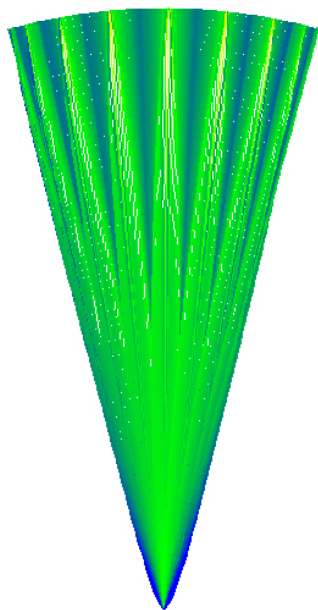


Рис. 29. Изменение напряжения при колебании, близком к маятниковому.

На рис. 29 изображены колебания близкие к маятниковым, из прямолинейного отклоненного начального положения. Рисунок «сплошной», т.к. положения троса отрисовывались довольно часто. Цвет точки троса отражает напряжение в этой точке. Номинальное – зеленый, чем меньше, тем синее, чем больше, тем желтее. На верхнем крае рисунка цвет изменяется волнами, то есть напряжение изменяется периодически. Это происходит

потому, что на фоне колебаний нулевой моды происходят колебания более высокой моды, которые и обуславливают изменения напряжения, более заметные. Видно, что на конце троса вариация напряжения больше.

Распространение локального возмущения

Отдельная узкая волна может возникнуть, например, из-за удара метеорита, резкого отсоединения балансировочной массы, рывка подъемника.

Зададим на прямом тросе параболическое возмущение. Эволюция такого возмущения показана на рисунке 10, для возмущения амплитуды 4 километра и ширины 8 000 км, центр его находится на середине троса. Масштаб по оси абсцисс увеличен в 600 раз. Волна не распадается на две, как можно было бы ожидать, а расширяется и становится плоской (рис. 30б, в, г), затем отражается от краев (рис. 30д), идет обратно, сужаясь (30е, ж), и перегибается в другую сторону (30и). (Если начальное возмущение располагалось не в середине троса, а, например, на высоте 80% от длины троса, то возмущение, обращенное в другую сторону, возникает на высоте, симметричной высоте начального возмущения относительно середины троса, то есть приблизительно на высоте 20% от длины троса.) На другой стороне повторяется примерно то же самое. Фронт волны доходит от середины до края примерно за 2 часа. Примерно за 4.5 часов образуется волна, похожая на начальную, но выгнутая в другую сторону. То есть полный период составляет около 9 часов. Скорость движения фронта волны составляет около 5.5 км/с.

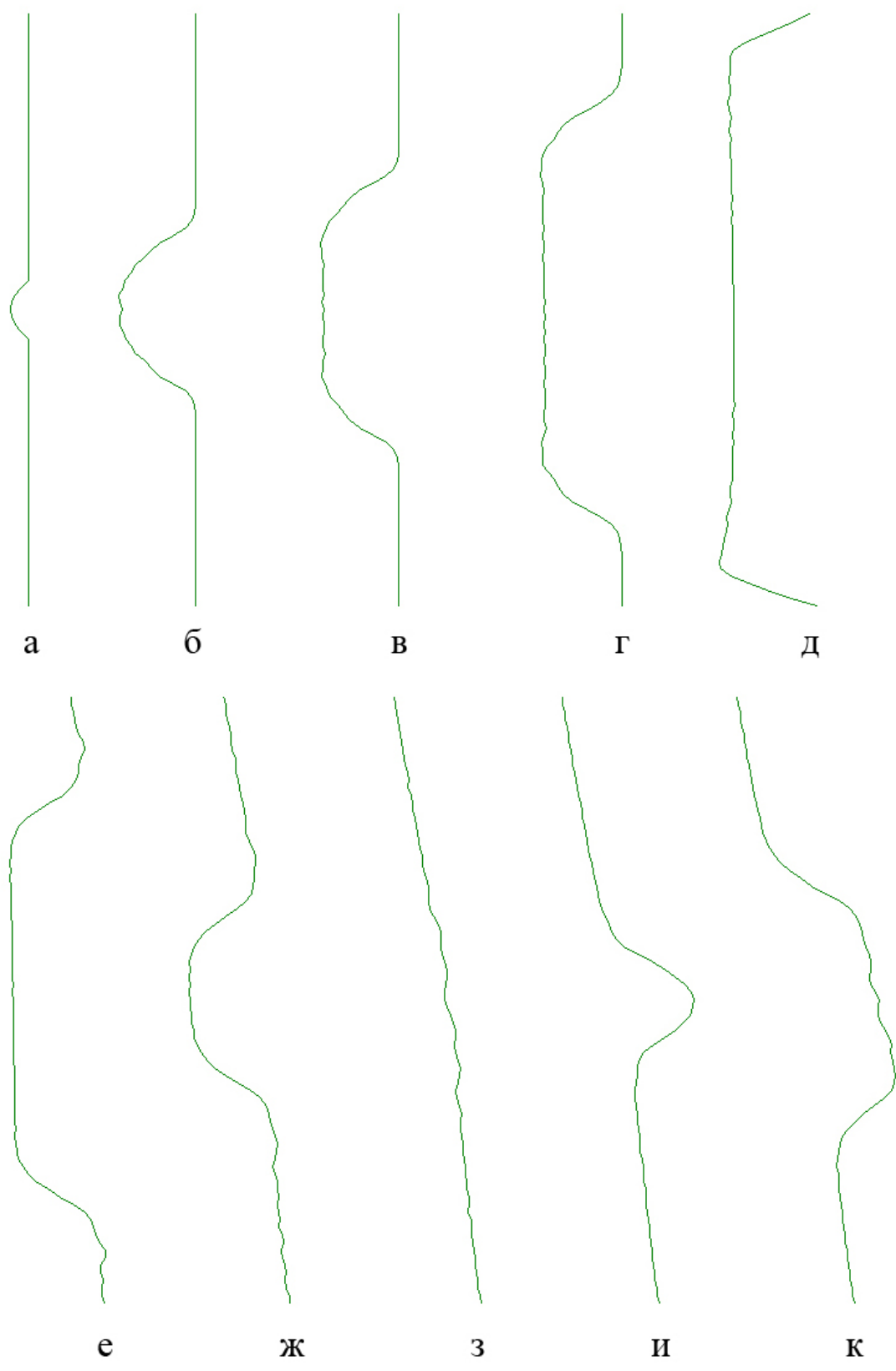


Рис. 30. Перемещение локального возмущения

Смена режима

Движения троса очень разнообразны и зависят от начального состояния. Классифицировать их трудно, но некоторые отличаются своими

специфическими особенностями. Например, движение, при котором концевая масса ведет себя так (рис. 31). Есть заметная смена характеристик движения при $t \approx 55$ часов. Колебания большой амплитуды и сравнительно небольшой частоты после непродолжительного периода довольно хаотичных колебаний переходят в более высокочастотные колебания с меньшей амплитудой. Такой характер движений напоминает переход к другому резонансному режиму в системах невысокого порядка (2-го, 3-го). (изменение режима движения вблизи резонансов, когда происходит вход или выход из резонансной зоны. Неясным остается, какие резонансы здесь взаимодействуют, если это взаимодействие резонансов.) Такие явления показывают, что динамика троса сложна и ее необходимо изучать дальше.

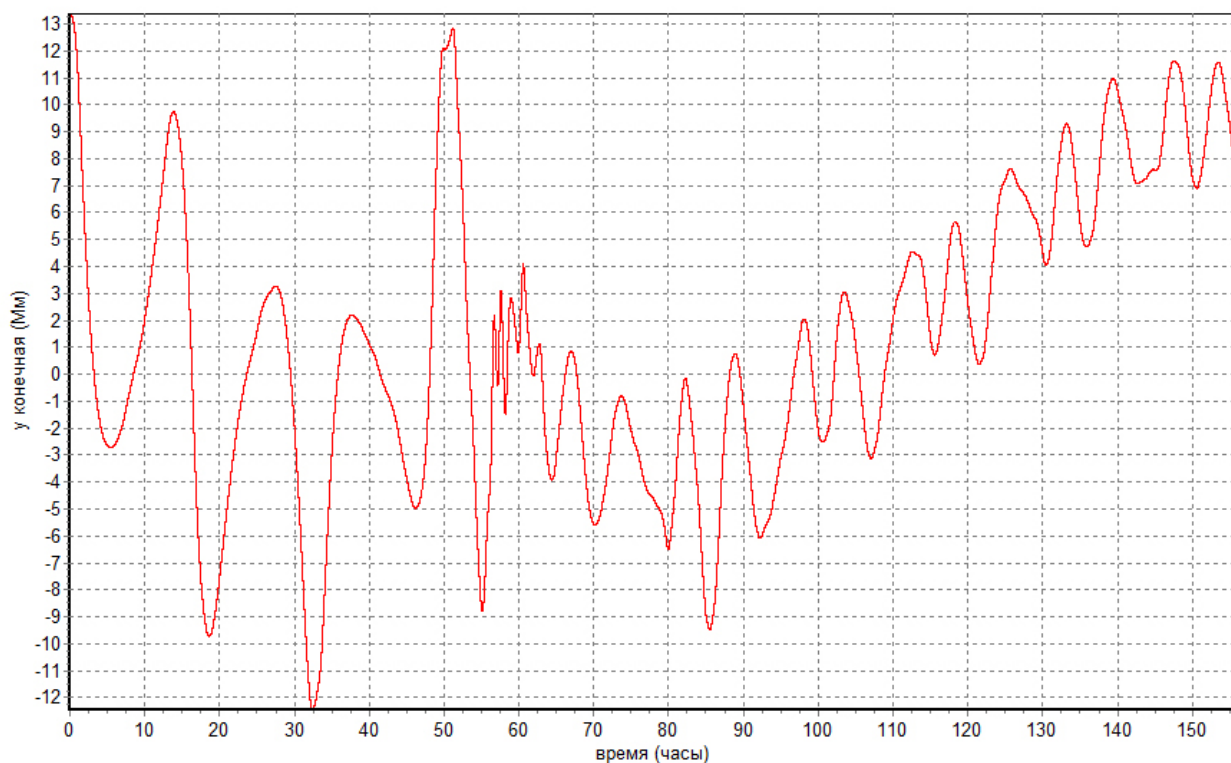


Рис. 31. Поведение концевой точки. Смена режима

Смена режима встречается и в других системах. Например, на рис. 32 показано аналогичное поведение в системе 3-го порядка, близкой к используемой в [56] системе для спутника с магнитным демпфером.

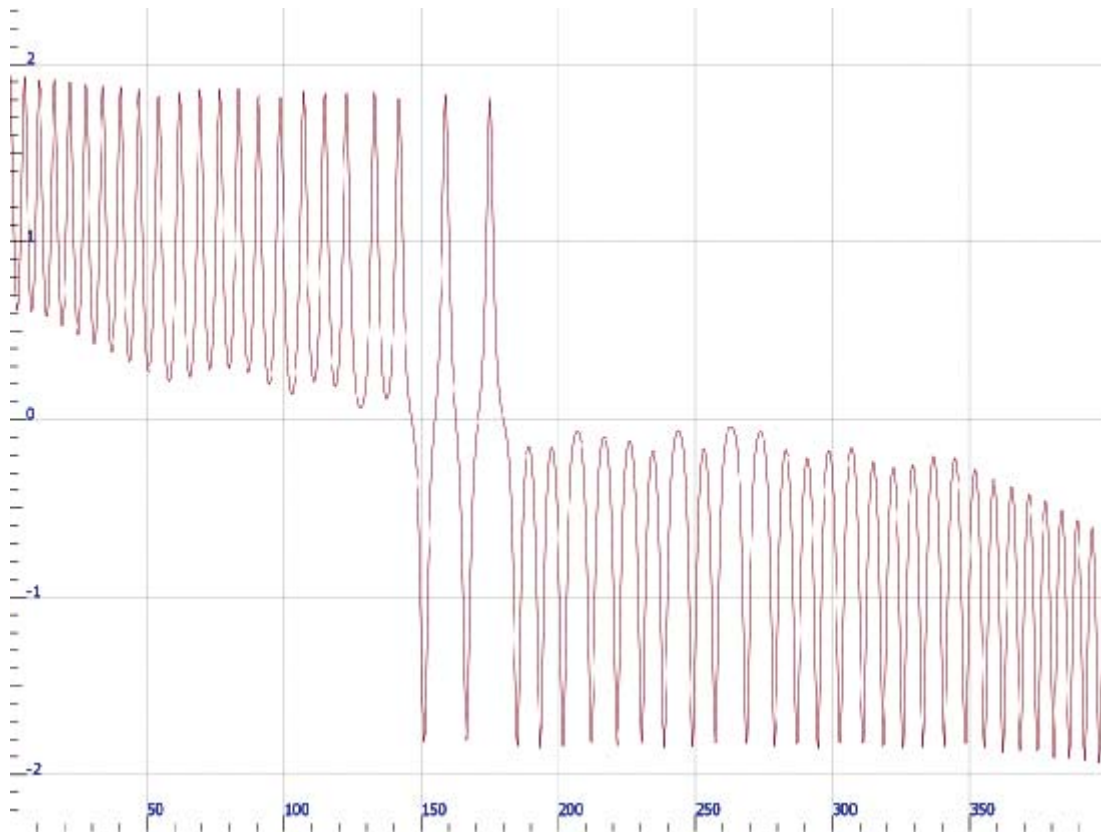


Рис. 32. Смена режима у спутника с магнитным демпфером

Линейные колебания

Движения предельно малой амплитуды можно описывать как линейные колебания, в линеаризованной задаче. В этом случае можно написать аналитическое решение. Это полезно и для проверки численных алгоритмов, и для проверки аналитического решения линеаризованной задачи. Аналитическое решение помогает понять смысл полученных численно закономерностей.

Для построения линейных колебаний рассмотрим линеаризованную задачу.

Линеаризация задачи

Нелинейную непрерывную задачу можно линеаризовать. У линеаризованной задачи найдутся собственные частоты и формы колебаний. Напоминаем, что уравнения движения имеют вид (5.13),

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 2\omega_E v + \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r^3}\right) x + \frac{1}{\rho(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial x}{\partial s} \right) & \dot{x} &= u \\ \dot{v} &= -2\omega_E u + \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r^3}\right) y + \frac{1}{\rho(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial y}{\partial s} \right) & \dot{y} &= v \end{aligned} \quad (5.13)$$

а краевые условия к ним (5.14)

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= 2\omega_E v + \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r^3}\right)x - \frac{1}{M_K} T \frac{\partial x}{\partial s} & \dot{x} &= u \\
\dot{v} &= -2\omega_E u + \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r^3}\right)y - \frac{1}{M_K} T \frac{\partial y}{\partial s} & \dot{y} &= v
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Линеаризуем их около вертикального положения равновесия. Введем вариации переменных $\delta x, \delta y, \delta u, \delta v$, так что $x = x_0 + \delta x$, $u = u_0 + \delta u$, т.д. где $x_0 = R_E + s$, $y_0 = u_0 = v_0 = 0$. Из условия нерастяжимости (5.15) следует $\delta x = 0$, $\delta u = 0$.

Действительно, для любого момента времени $(x'_0 + \delta x')^2 + (\delta y')^2 = 1$, оставляя только линейные по вариациям члены, получим $1 + 2\delta x' = 1 \Rightarrow \delta x = const$, а т.к. $\delta x(0) = 0$, то $\delta x(s, t) = 0$.

$\rho(s)$ зависит от конструкции лифта, а не от движения, поэтому не варьируется. Для T введем вариацию δT . $\delta\left(T \frac{\partial x}{\partial s}\right) = (T_0 + \delta T) \frac{\partial(x_0 + \delta x)}{\partial s} - T_0 \frac{\partial x_0}{\partial s} = T_0 \frac{\partial \delta x}{\partial s} + \delta T + \delta T \frac{\partial \delta x}{\partial s}$. Членами второго порядка малости пренебрегаем, $\delta x = 0$, остается $\delta\left(T \frac{\partial x}{\partial s}\right) = \delta T$. По y : $\delta\left(T \frac{\partial y}{\partial s}\right) = (T_0 + \delta T) \frac{\partial(y_0 + \delta y)}{\partial s} - T_0 \frac{\partial y_0}{\partial s} = T_0 \frac{\partial \delta y}{\partial s}$.

Получаем из (5.13):

$$\begin{aligned}
0 &= 2\omega_E \frac{\partial \delta y}{\partial t} + \frac{1}{\rho(s)} \frac{\partial \delta T}{\partial s} \\
\frac{\partial^2 \delta y}{\partial t^2} &= \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r^3}\right) \delta y + \frac{1}{\rho(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left(T_0 \frac{\partial \delta y}{\partial s}\right)
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Из (5.14) краевые условия при $s = L$

$$\begin{aligned}
0 &= 2\omega_E \frac{\partial \delta y}{\partial t} - \frac{1}{M_K} \delta T(L) \\
\frac{\partial^2 \delta y}{\partial t^2} &= \left(\omega_E^2 - \frac{\mu_E}{L^3}\right) \delta y - \frac{1}{M_K} \left(T_0 \frac{\partial \delta y}{\partial s}\right)
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Уравнения для δy отделяются. Рассмотрим их отдельно. Для краткости опустим символ δ . До конца раздела y будет обозначать вариацию y , а T – начальное натяжение T_0 . Конечную массу временно (до конца раздела) назовем M , т.к. индекс “ k ” понадобится для номера моды.

$$\left\{ \begin{aligned}
\ddot{y} &= Fy + \frac{(Ty')'}{\rho} \\
y(0, t) &= 0 \\
((T(L)y'(L, t))' M + T(L)y'(L, t)\rho(L) &= 0
\end{aligned} \right. \tag{5.28}$$

Здесь $F \equiv F(r) = \omega_E^2 - \frac{\mu_E}{r^3}$

Третье уравнение в (5.28), т.е. новое условие на конце, получилось, когда приравняли $\delta\ddot{y} - \omega_E^2\delta y + \frac{\mu_E}{r^3}\delta y$ из динамического уравнения (5.26) и из краевого условия (5.27).

Разделение переменных

Применим метод разделения переменных. Представим δy в виде ряда $\delta y(s, t) = \sum_k Y_k(s)\theta_k(t)$, где $Y_k(s)\theta_k(t)$ – частные решения, представимые произведением функции от t и функции от s . Для каждого k задача «распадается» на временную и пространственную части

$$\rho Y_k \ddot{\theta}_k = \rho F Y_k \theta_k + (T Y_k')' \theta_k \Rightarrow \frac{\ddot{\theta}_k}{\theta_k} = \frac{\rho F Y_k + (T Y_k')'}{\rho Y_k} = -\lambda_k \quad (5.29)$$

Если $\lambda_k > 0$ (а дальше будет показано, что это так), то временная часть имеет решение $\theta_k = A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t$, а для пространственной части (Y_k) получается задача Штурма-Лиувилля, причем неклассическая, с параметром в краевых условиях. Решением линеаризованной задачи занимались аспирант МФТИ Чернов А. В. и студент МехМата МГУ Калачев Г. В. [57]. Чернов нашел начальный член асимптотики по k для λ_k , а также формальное выражение в виде ряда для собственных функций Y_k . Вычисление собственных значений и собственных функций провел другим способом Калачев. Далее кратко изложено решение Калачева. Подробнее и с доказательствами лемм это решение можно найти в [57].

Вычисление спектра

Индекс k опустим. Из последней части (5.29) получаем

$$(T Y')' + (F + \lambda)\rho Y = 0. \quad (5.30)$$

Разделим краевые условия (5.28) на $\theta(t)$ и $T(L)$ соответственно.

$$\begin{cases} Y(0) = 0 \\ (T Y')'(L) \frac{M}{\rho(L)} + T(L) Y'(L) = 0 \end{cases} \quad (5.31)$$

Выразим $(T Y')'(L)$ из (5.30) и подставим в (5.31), таким образом избавляясь от второй производной в краевом условии. Получим систему

$$\begin{cases} (T Y')' + (F + \lambda)\rho Y = 0, \\ Y(0) = 0, \\ T(L) Y'(L) - (F(L) + \lambda) Y(L) M = 0 \end{cases} \quad (5.32)$$

Будем интерпретировать задачу как поиск спектра дифференциального оператора D :

$$DY = \frac{(TY)'}{\rho} + FY, \text{ так что } DY = -\lambda Y$$

Этот оператор действует на функции из $C^2[0, L]$, удовлетворяющие краевым условиям (5.31), множество этих функций – линейное пространство. Введем на нем скалярное произведение

$$(u, v) := \int_0^L u(s)v(s)d\mu_p := \int_0^L \rho(s)u(s)v(s)ds + Mu(L)v(L) \quad (5.33)$$

D – симметричный и отрицательно определенный относительно этого скалярного произведения (доказательство в [57]).

Из симметричности следует вещественность собственных значений и ортогональность собственных функций с разными собственными значениями.

Из отрицательной определенности следует отрицательность всех собственных значений, т.е. положительность λ_k , как и было упомянуто выше.

Алгоритм вычисления собственных значений и собственных функций

Сделаем замену – преобразование Прюфера, по аналогии с тем, как было сделано в похожей задаче С.Ю. Садовым в [58]

$$\begin{aligned} T(s)Y'(s) &= d(s) \cos \varphi(s) \\ M(\lambda + F(L))Y(s) &= d(s) \sin \varphi(s) \end{aligned} \quad (5.34)$$

Конец лифта выше геостационарной орбиты, то есть $F(L) > 0$ и $\lambda + F(L) > 0$. Также нужно, чтобы $T(s) > 0$, и $Y(s)$ и $Y'(s)$ одновременно не обращались в 0.

Задача приводится к виду

$$\begin{cases} \varphi' = \frac{\rho}{M} \frac{F(s) + \lambda}{F(L) + \lambda} \sin^2 \varphi + M \frac{\lambda + F(L)}{T} \cos^2 \varphi \\ \varphi(0) = 0 \\ \text{tg} \varphi(L) = 1 \end{cases} \quad (5.35)$$

В [57] доказано, что если $\varphi_\lambda(s)$ – решение задачи (5.35) без второго краевого условия, то $\varphi_\lambda(L)$ возрастает по λ и существует бесконечное число значений $\lambda_k (k = 0, 1, 2, \dots)$, для которых краевая задача (32) имеет решение.

Для нахождения λ_k нужно численно проинтегрировать (5.35). И, пользуясь монотонностью $\varphi(L)$ по λ , находить λ_k , при которых $\varphi(L)$ принимает значения $\frac{\pi}{4} + \pi k (k = 0, 1, 2, \dots)$, где удовлетворяется последнее краевое условие (5.35).

Соответствующая собственному значению собственная функция находится совместным интегрированием уравнений в переменных d и φ :

$$\varphi' = \frac{\rho}{M} \frac{F(s) + \lambda}{F(L) + \lambda} \sin^2 \varphi + M \frac{\lambda + F(L)}{T} \cos^2 \varphi,$$

$$d' = d \left(M \frac{\lambda + F(L)}{T} - \varphi' \right) \operatorname{ctg} \varphi = d \left(M \frac{\lambda + F(L)}{T} - \frac{\rho}{M} \frac{F(s) + \lambda}{F(L) + \lambda} \right) \sin \varphi \cos \varphi$$

Затем от этих переменных нужно вернуться к исходным (5.34).

Пользуясь этим методом, была написана программа, вычисляющая собственные функции, и она была оформлена в виде динамически подгружаемой библиотеки dll. Пользуясь этим методом, Калачев написал программы для вычисления собственных форм и частот. Полученные результаты использовались здесь для исследования малых колебаний в нелинейной модели.

Численное исследование малых колебаний

Полученные собственные функции $Y(s)$ и собственные значения $-\lambda_k$ определяют моды периодических колебаний.

Эти результаты использовались в программах, численно моделирующих движение лифта в нелинейной модели. Это обоюдная проверка численных методов и аналитических результатов. Численные расчеты показывают также границы применимости линеаризованной модели.

Собственные формы линеаризованной задачи задаем как начальные формы троса в программе, численно интегрирующей нелинейную модель. Результаты расчетов показаны на рис. 33 на примере первых 8 мод колебаний. При достаточно малом отклонении колебания получаются периодическими. Узлы остаются на месте на протяжении десятков периодов. Масштаб по оси абсцисс сильно увеличен, иначе поперечные движения не были бы видны.

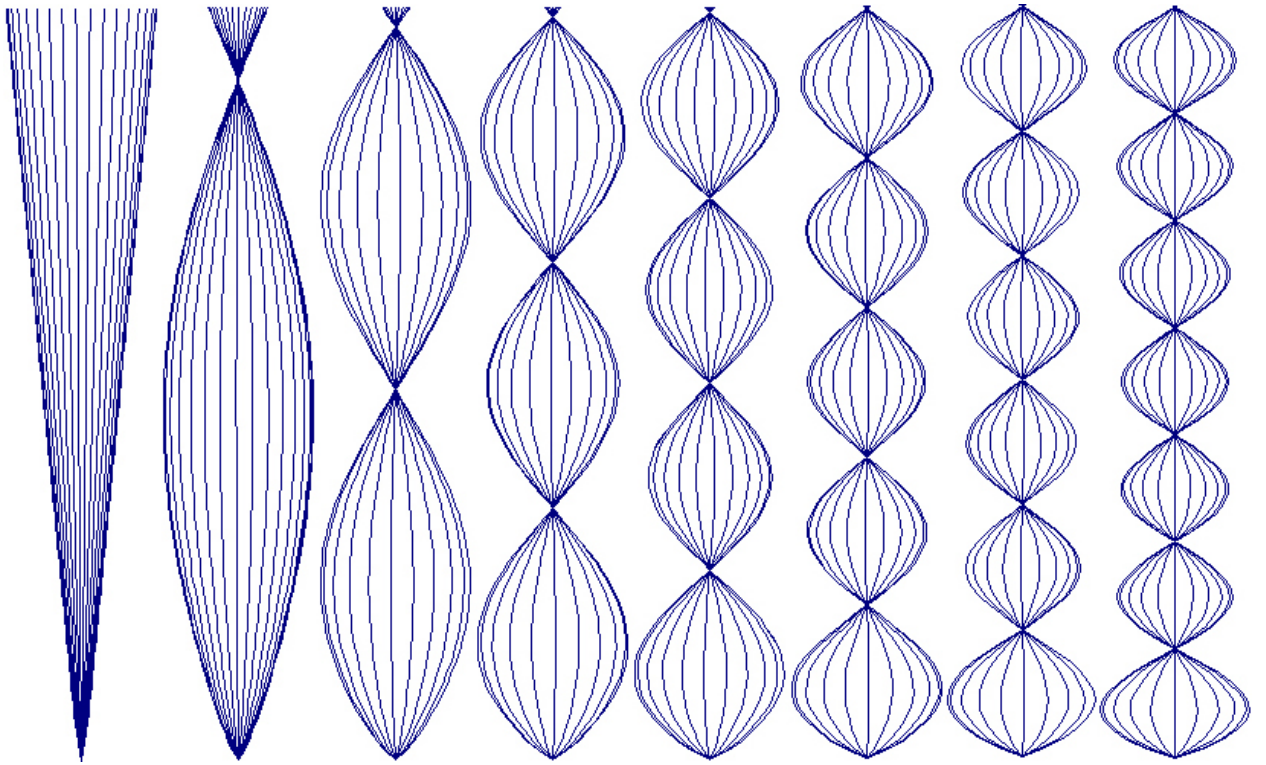


Рис. 33. Первые собственные моды колебаний

Как можно заметить на рисунке, собственные функции напоминают синусоиды. На самом деле они, конечно, не синусоиды (особенно это видно на более высоких модах, пучности не одинаковой амплитуды).

n -я собственная форма имеет n пучностей и $n + 1$ узел и близка к синусоиде, у которой на длине троса располагаются $\frac{n}{2}$ периодов.

В нашей программе предусмотрено разложение в ряд Фурье отклонений от вертикали на каждом шагу по времени. Можно посмотреть на график коэффициентов Фурье от времени. Для каждого собственного движения моды $2n$ ведущей на графике будет n -я мода Фурье. На рис. 34 для начальной формы колебаний (рис. 34а) изображена зависимость коэффициентов Фурье от времени (рис. 34б), на протяжении семи периодов движения. Для 2-й собственной моды главная мода на графике Фурье – 1-ая, которая показана зеленым цветом на рис. 34б. То, что периодов 7 видно из того, что коэффициент первой моды Фурье 14 раз обращается в 0, а это происходит при выпрямлении троса, т.е. 2 раза за период.

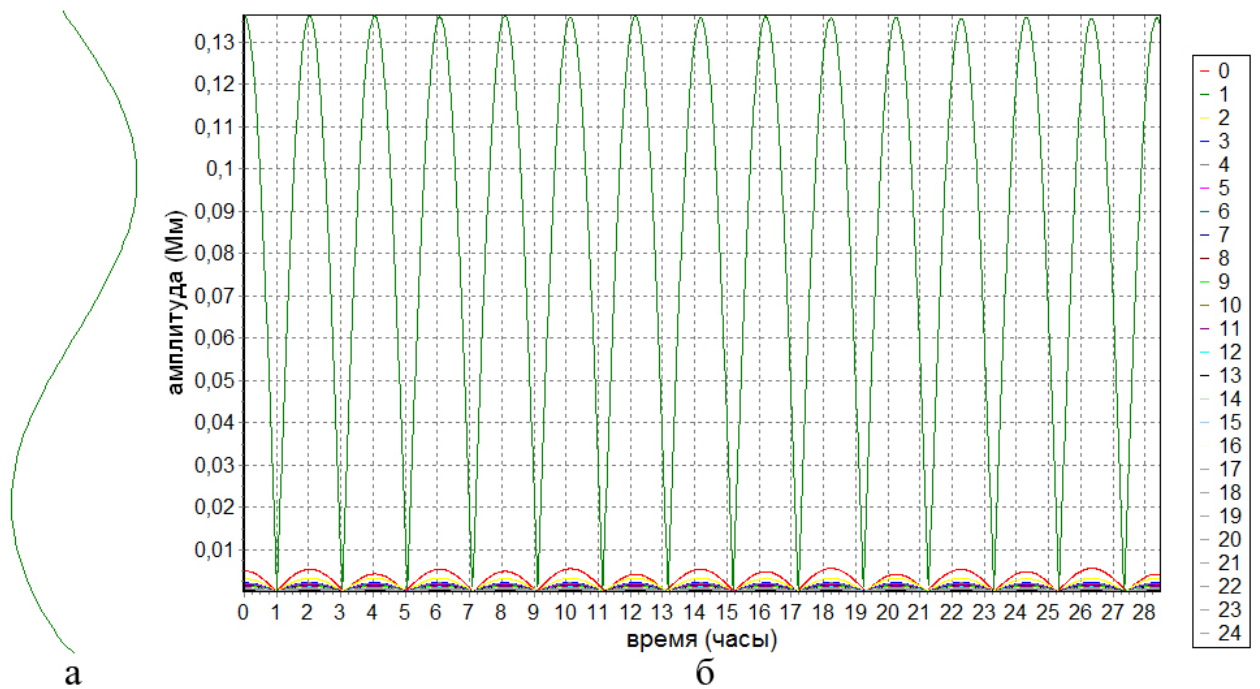


Рис. 34. Коэффициенты Фурье от времени (б) для собственной формы (а)

Для нечетной собственной моды $2n + 1$ главными на графике коэффициентов Фурье от времени будут две моды Фурье – с номерами n и $n + 1$.

Поведение напряжения в линейных колебаниях

Натяжение и особенно напряжение троса – важные характеристики движения.

Рассмотрим подробнее напряжение в линеаризованной модели. Найдем сначала натяжение в линеаризованной модели.

Используем первые формулы из (5.26) и (5.27)

$$\frac{\partial \delta T}{\partial s} + 2\omega_E \rho \delta v = 0, \quad \delta T(L, t) - 2\omega_E M \delta v(L, t) = 0 \quad (5.36)$$

для вычисления вариации $\delta T(s, t)$, то есть для определения поправки первого порядка к силе натяжения троса в невозмущенном положении.

$\delta T(s, t)$ находится квадратурой

$$\begin{aligned} \delta T(s, t) &= \delta T(L, t) + 2\omega_E \int_s^L \rho(\xi) \delta v(\xi, t) d\xi \\ &= 2\omega_E \left(\int_s^L \rho(\xi) \delta v(\xi, t) d\xi + M \delta v(L, t) \right) \end{aligned} \quad (5.37)$$

Линейная плотность $\rho(s)$ и конечная масса M постоянны во времени и определяются формулами (3.13), (3.14). Вариация скорости $\delta v(s, t)$

определяется дифференцированием по времени решения линейризованной задачи.

$$\delta v = \delta \dot{y} = \sum_k A_k Y_k(s) \dot{\theta}_k(t) \quad (5.38)$$

Выражение (5.37) приобретает следующий вид:

$$\delta T(s, t) = 2\omega_E \left(M \sum_k A_k Y_k(L) \dot{\theta}_k(t) + \sum_k A_k \dot{\theta}_k(t) \int_s^L \rho(\xi) Y_k(\xi) d\xi \right)$$

Для одномодовых колебаний формула выглядит проще

$$\delta T(s, t) = 2\omega_E \dot{\theta}_k(t) A_k \left(M Y_k(L) + \int_s^L \rho(\xi) Y_k(\xi) d\xi \right) \quad (5.39)$$

Если при $t = 0$ трос неподвижен, и форма его соответствует k -й моде колебаний, то

$$\delta y(s, t) = A_k Y_k(s) \cos \sqrt{\lambda_k} t, \quad \delta v(s, t) = -A_k Y_k(s) \sqrt{\lambda_k} \sin \sqrt{\lambda_k} t, \quad (5.40)$$

где A_k – амплитуда колебаний k -й моды.

Формула (5.37) принимает вид:

$$\delta T(s, t) = -2\omega_E A_k \sqrt{\lambda_k} \sin \sqrt{\lambda_k} t \left(M Y_k(L) + \int_s^L \rho(\xi) Y_k(\xi) d\xi \right) \quad (5.41)$$

Напомним, что $T(s, t) = T_0(s) + \delta T(s, t)$. Из (5.41) видно, что сила натяжения изменяется периодически и достигает экстремумов со сдвигом по фазе на четверть периода по сравнению с поперечным отклонением δy . T совпадает с T_0 , когда фаза $\sqrt{\lambda_k} t = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, т.е. когда отклонения троса принимают амплитудные значения. Заметим, что вариация силы натяжения в точке синфазна или противофазна скорости $\delta v(s, t)$ в (5.40), в зависимости от знака выражения в скобках (5.41). Вообще, знак этого выражения может меняться вдоль троса. Оно может обращаться в 0, и тогда натяжение в этой точке остается постоянным во время движения. Видно еще, что вариация натяжения пропорциональна амплитуде A_k , которая определяется из начального отклонения.

Для вычисления напряжения $\sigma(s, t)$ поделим натяжение в точке на площадь сечения в точке.

$$\sigma(s, t) = \frac{T_0(s) + \delta T(s, t)}{S(s)} = \sigma_0 + \frac{\delta T(s, t)}{S(s)}$$

где σ_0 – напряжение в вертикальном неподвижном тросе. Для равнонапряженного троса σ_0 – константа.

Подставив $\delta T(s, t)$ из (5.39) имеем

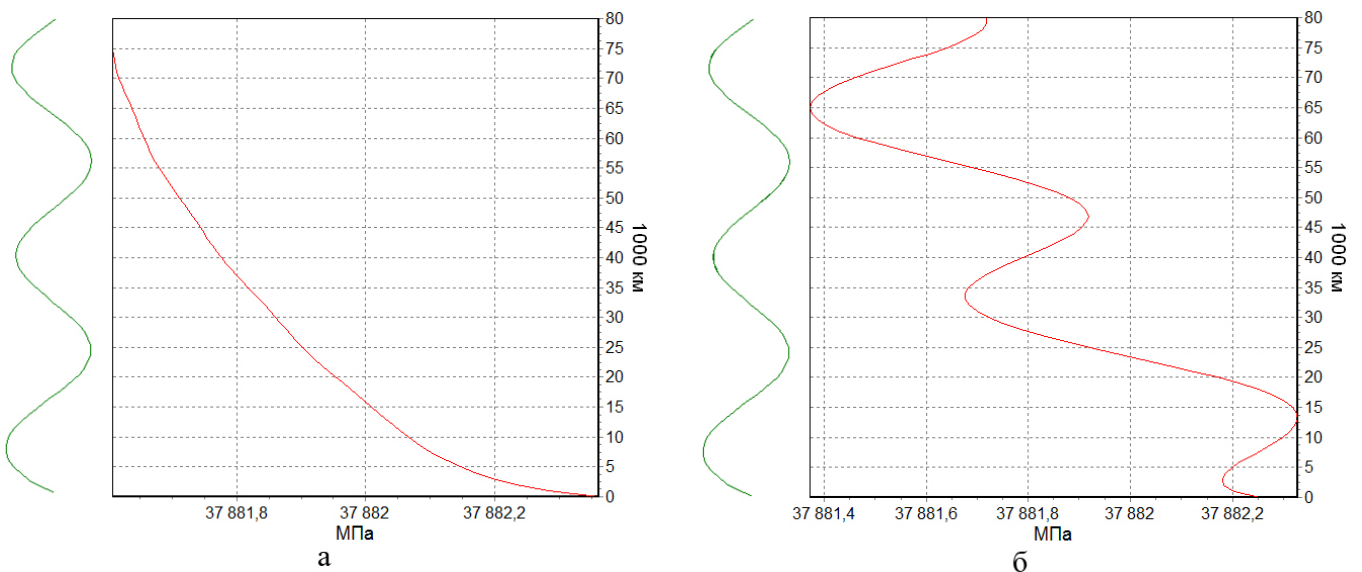
$$\sigma(s, t) = \sigma_0 + \delta\sigma(s, t) = \sigma_0 + 2\omega_E \dot{\theta}_k(t) A_k \frac{MY_k(L) + \int_s^L \rho(\xi) Y_k(\xi) d\xi}{S(s)} \quad (5.42)$$

Или, в другой форме

$$\sigma(s, t) = \sigma_0 + \delta\sigma(s, t) = \sigma_0 + 2\omega_E \frac{\int_s^L \rho(\xi) \delta v(\xi, t) d\xi + M\delta v(L, t)}{S(s)} \quad (5.43)$$

Напряжение ведет себя в таких движениях достаточно интересно. Хотя меняется мало – на 0.1% – 0.01% от начальной величины.

Например, на рис. 35 представлены парами профиль троса и напряжение в один и тот же момент. Начинается движение с гладкой кривой напряжения, в которой напряжение монотонно убывает (35а), потом быстро образует волнообразную кривую, у которой столько экстремумов, сколько у собственной формы троса узлов (35б). Такая примерно форма кривой напряжения держится до половины периода. Амплитуда колебаний напряжения увеличивается по мере движения от крайнего положения до среднего, т.е. при фазе от $2n\frac{\pi}{2}$ до $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ (35в – четверть периода) и уменьшается при движении от среднего положения к крайнему, т.е. при фазе от $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ до $(2n+2)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. (35г – незадолго до половины периода, амплитуда колебаний напряжения заметно уменьшилась). Потом на половине периода она образует монотонную кривую (35д), и перегибается в обратную сторону, т.е. образует волнообразную кривую с тем же количеством экстремумов, но направленную «зеркально», т.е. минимумы и максимумы поменялись местами. И держится в таком виде еще полпериода (35е – немного после половины периода, 35ж – три четверти периода).



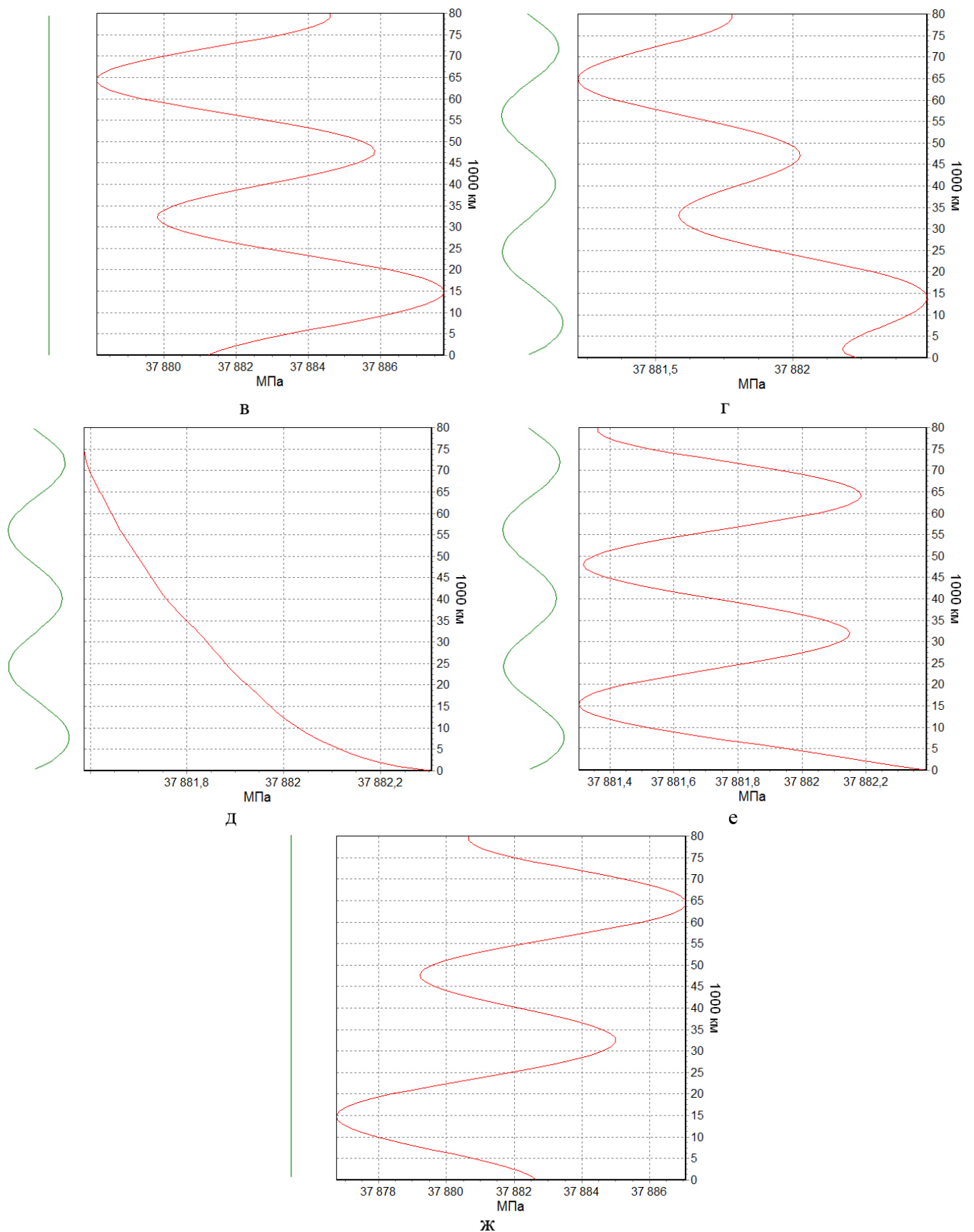


Рис. 35. Пары – профиль троса и напряжение в один момент времени.

Чтобы нагляднее показать изменение напряжения во время движения, на следующих рисунках участки троса с разным напряжением будем

рисовать разным цветом. (Напоминаем, что рисунок растянут по оси абсцисс, т.к. отклонение составляет порядка 0.001 от длины)

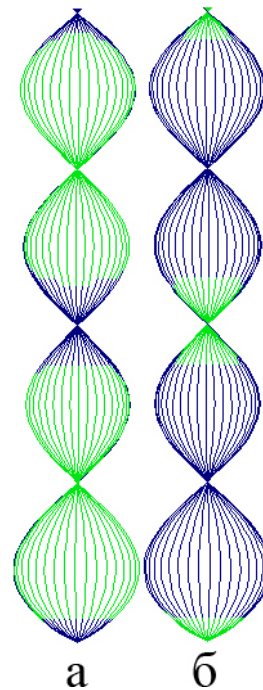


Рис. 36. Напряжение для первой и второй половин периода.

На рис. 36 участки троса с напряжением больше номинального σ_0 закрашивались зеленым цветом, меньше – синим. 36а – первая половина периода, когда $\sin \sqrt{\lambda_k} t > 0$, и 36б – вторая половина периода того же движения. Видно, что рисунки а и б «инвертированы» по напряжению.

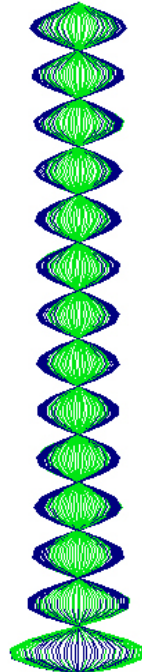


Рис. 37. Напряжение для высокой моды.

На рис. 37 принцип окраски тот же: зеленые – участки троса с большим напряжением, синие – с меньшим. Видно, что напряжение при более прямом тросе больше, чем на участках больших амплитуд. Этот эффект наблюдается на высоких модах. Движение здесь, конечно, нелинейное, но, т.к. отклонения малы и близки к линейным, на них распространяются закономерности линеаризованного движения. Скорее всего, большее напряжение при прямом тросе объясняется большей скоростью (5.43). То, что максимальная для движения скорость больше для более высоких гармоник, с одной стороны, интуитивно понятно: амплитуда примерно та же, что для низких гармоник, а частота колебаний выше, а с другой – видно из формулы (5.40), где λ_k – собственное число и растет с номером гармоники.

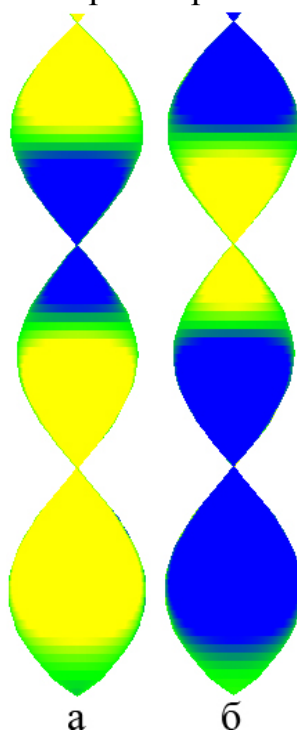


Рис. 38. Напряжение для 3-й моды. Есть участки, где напряжение сохраняется.

Иногда на протяжении всего движения напряжение на одном участке троса почти не меняется. На рисунке 38а изображена первая половина периода, на рисунке 38б – вторая, дальше все продолжается периодически. Рисунок выглядит сплошным, потому что положения троса отрисовывались часто. Окраска градиентная: номинальное напряжение обозначено зеленым, чем напряжение больше, тем цвет желтее, чем меньше, тем синее. Видны две зеленые полосы, на которых напряжение практически сохраняется. Остальные участки троса кажутся синими или желтыми потому, что вариация напряжения на них, хотя в абсолютном значении мала, значительно больше вариации напряжения на зеленых участках, которая почти равна нулю. Существование же участков, на которых напряжение почти не

меняется, связано с тем, что для этой формы троса находятся координаты s , при которых $MY_k = -\int_s^L Y_k(s) \rho(s) ds$, т.е. $\delta\sigma = 0$ (5.42).

На рисунке 39 изображено размытие узлов за 14.5 периодов при начальном отклонении около 0.0024 от длины троса. (Окраска троса здесь градиентная, в зависимости от напряжения, как и для рис. 38, но цвета с изменением напряжения меняются медленнее).

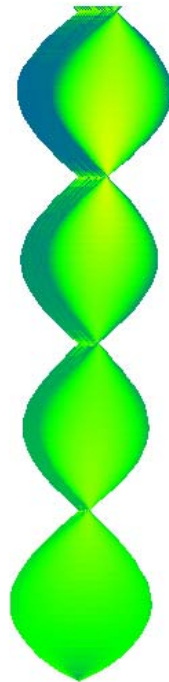


Рис. 39. Нарушение периодичности.

Нелинейные движения с большой амплитудой, явления неустойчивости, катастрофические режимы

Кроме колебаний в ограниченной области, есть движения, приводящие к падению лифта. (Падением лифта назовем катастрофически большое отклонение от вертикали, после которого лифт уже не возвращается в начальное положение). Наблюдалось несколько сценариев такого развития событий.

Например, постепенное увеличение амплитуды, вплоть до падения. На рис. 40 показаны три этапа эволюции такого движения.

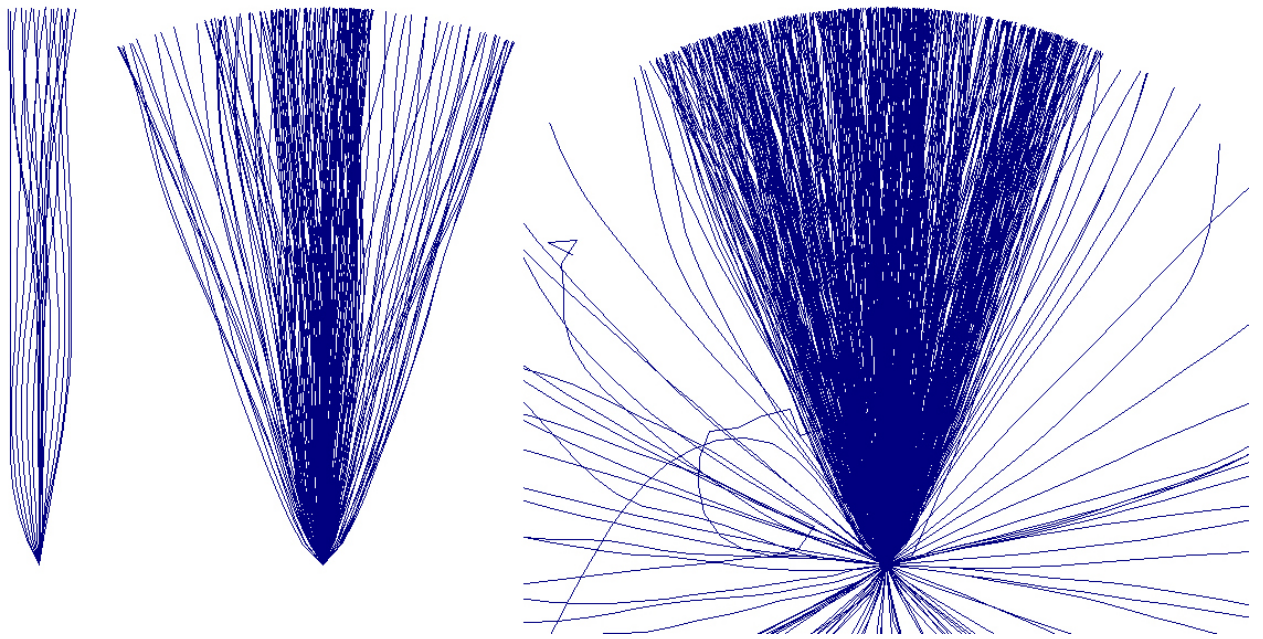


Рис. 40. Постепенное увеличение амплитуды.

Кроме того, есть движения, в которых процессы, приводящие к падению лифта, начинаются в некоторой области троса. Например, наблюдается известный «эффект кнута», когда большие отклонения от вертикали начинаются с незакрепленного конца. В этом случае принято считать, что часть энергии, сосредоточенная в окрестности свободного конца, вызывает его значительную скорость при относительно малой массе на этом конце. Плотность троса космического лифта также существенно убывает к концу, но наличие концевой массы делает эту гипотезу довольно сомнительной. Есть также специфическая «спиральная» неустойчивость, начинающаяся в нижнем, закрепленном конце троса.

Мы назвали ее спиральной, т.к. как в некоторый момент времени трос закручивается в дугу спирали. Сначала участок троса провисает (опускается ниже горизонтального положения), потом образует часть спирали, затем перегибается в петлю, дальше движется хаотически. Это довольно неожиданный способ возникновения неустойчивости. Он мог бы быть связан с недостатками математической модели или численного алгоритма. Поэтому желательно рассмотреть его более подробно. Уравнения колебаний лифта не имеют аналитического решения. Но оказывается возможным построить некоторую модельную задачу, для которой удастся найти семейство точных частных решений.

Пример точного решения нелинейной модельной задачи

Для построения приближенной задачи рассмотрим нижнюю часть троса. Будем считать, что на этом участке линейная плотность троса постоянна,

гравитационно-центробежное поле постоянно. На верхнюю точку рассматриваемой части троса действует следящая (то есть направленная по касательной к тросу) сила, она представляет натяжение со стороны верхней, не рассматриваемой части троса.

Динамические уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial x}{\partial s} \right) & \frac{\partial x}{\partial t} &= u \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial y}{\partial s} \right) & \frac{\partial y}{\partial t} &= v \end{aligned} \quad (5.44)$$

Введем снова α – угол между касательной к тросу в точке и вертикалью; $x' = \cos(\alpha)$, $y' = \sin(\alpha)$ и запишем уравнение для натяжения. Оно выводится тем же образом, что и уравнение (5.20) в исходной задаче, т.е. двойным дифференцированием условия нерастяжимости по времени и подстановкой \ddot{x}' и \ddot{y}' , найденных из уравнений движения.

Получаем

$$\frac{\partial^2 T}{\partial s^2} - T\kappa^2 + \rho\omega^2 = 0 \quad (5.45)$$

Для рассматриваемой задачи можно найти еще эволюционное уравнение для величины угловой скорости и получить автономную систему уравнений, не содержащую координат. Для этого продифференцируем по времени выражение для угловой скорости из (5.18) $\dot{\omega} = \dot{v}'x' + v'\dot{x}' - \dot{u}'y' - u'\dot{y}'$. Учтем, что $v'\dot{x}' - u'\dot{y}' = 0$, а \dot{v}' и \dot{u}' найдем из динамических уравнений (5.44). Тогда

$$\rho\dot{\omega} = 2 \frac{\partial T}{\partial s} \kappa + T \frac{\partial \kappa}{\partial s} \quad (5.46)$$

Из определения ω и κ (5.17) следует

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = \frac{\partial \kappa}{\partial t} \quad (5.47)$$

Уравнения (5.45), (5.46), (5.47) образуют систему для трех переменных ω, κ, T . Число переменных можно уменьшить, выразив ω и κ через α . Тогда остаются 2 уравнения для переменных T и α

$$T'' - T\alpha'^2 + \rho\dot{\alpha}^2 = 0 \quad (5.48)$$

$$\rho\ddot{\alpha} = 2T'\alpha' + T\alpha'' \quad (5.49)$$

Теперь введем переменную $\phi = \frac{s}{t}$ и будем искать решение системы (5.48), (5.49) вида $T = T(\phi)$, $\alpha = \alpha(\phi)$.

Для произвольной функции $F(\phi) = F\left(\frac{s}{t}\right)$ верно:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial s} = F' \frac{1}{t}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -F' \frac{s}{t^2} = -F' \frac{\phi}{t}$$

Здесь и до конца главы штрих означает дифференцирование по ϕ .

Используя эти соотношения, получим

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{1}{t} \alpha'(\phi), & \omega &= \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\frac{\phi}{t} \alpha'(\phi) \\ \frac{\partial T}{\partial s} &= \frac{1}{t} T'(\phi), & \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} &= \frac{1}{t^2} T''(\phi) \\ \frac{\partial \kappa}{\partial s} &= \frac{1}{t^2} \alpha''(\phi), & \frac{\partial \omega}{\partial t} &= 2 \frac{\phi}{t^2} \alpha'(\phi) + \frac{\phi^2}{t^2} \alpha''(\phi) \end{aligned}$$

В результате уравнения (5.48, 5.49) приводятся к виду

$$T'' - T(\alpha')^2 + \rho \phi^2 (\alpha')^2 = 0 \quad (5.50)$$

$$\rho(\phi^2 \alpha'' + 2\phi \alpha') = 2T' \alpha' + T \alpha'' \quad (5.51)$$

(5.50), (5.51) образуют уже систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Введем функцию $\beta(\phi)$: $\beta(\phi) = (\alpha'(\phi))^2$ и заменим T на приведенную переменную \bar{T}

$$\bar{T} = \frac{T}{\rho}$$

Уравнения (5.50, 5.51) примут вид

$$\bar{T}'' = (\bar{T} - \phi^2) \beta \quad (5.52)$$

$$(\bar{T} - \phi^2) \beta' = 4(\phi - \bar{T}') \beta \quad (5.53)$$

Отсюда

$$\bar{T}''' = (-3\bar{T}' + 2\phi) \beta$$

Это уравнение имеет частное решение: $\bar{T}' = \frac{2}{3} \phi$, или $\bar{T} = \frac{1}{3} \phi^2 + \bar{T}_0$.

Подставляем в уравнение (5.53)

$$\left(\bar{T}_0 - \frac{2}{3} \phi^2\right) \beta' = \frac{4}{3} \phi \beta$$

Интегрируя, получаем

$$\beta = \frac{C}{(2\phi^2 - 3\bar{T}_0)},$$

где \bar{T}_0 и C – постоянные интегрирования.

Учитывая, что $\beta(\phi) = (\alpha'(\phi))^2 \geq 0$

$$\beta = \frac{c}{|2\phi^2 - 3\bar{T}_0|}, \quad C \geq 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{|2\phi^2 - 3\bar{P}_0|}}$$

Отсюда можно найти α как функцию от ϕ , а затем с помощью соотношений (5.16) получить выражения для x и y .

Введем параметры $\phi_* = \sqrt{\frac{3\bar{P}_0}{2}}$ и $b = \sqrt{\frac{C}{2}}$. Вид интеграла для α и дальнейших формул для x и y зависит от отношения $\frac{\phi}{\phi_*}$.

При $\phi \leq \phi_*$ удобно ввести параметр $\zeta = \arcsin\left(\frac{\phi}{\phi_*}\right)$. Тогда

$$\begin{aligned} x(\phi, t) &= \phi_* t \left(\frac{b}{b^2 - 1} \sin(b\zeta + \alpha_0) \cos(\zeta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{b^2 - 1} \cos(b\zeta + \alpha_0) \sin(\zeta) + x_0 \right) \\ y(\phi, t) &= -\phi_* t \left(\frac{b}{b^2 - 1} \cos(b\zeta + \alpha_0) \cos(\zeta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b^2 - 1} \sin(b\zeta + \alpha_0) \sin(\zeta) + y_0 \right) \end{aligned} \quad (5.54)$$

Где α_0 , x_0 и y_0 – константы интегрирования

При $\phi > \phi_*$ вводим параметр $\eta = \operatorname{arch}\left(\frac{\phi}{\phi_*}\right)$

$$\begin{aligned} x(\phi, t) &= \phi_* t \left(\frac{b}{b^2 + 1} \sin(b\eta + \alpha_1) \operatorname{sh}(\eta) + \frac{1}{b^2 + 1} \cos(b\eta + \alpha_1) \operatorname{ch}(\eta) \right. \\ &\quad \left. + x_1 \right) \\ y(\phi, t) &= \phi_* t \left(-\frac{b}{b^2 + 1} \cos(b\eta + \alpha_1) \operatorname{sh}(\eta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b^2 + 1} \sin(b\eta + \alpha_1) \operatorname{ch}(\eta) + y_1 \right) \end{aligned} \quad (5.55)$$

Для того чтобы удовлетворить условию сопряжения кривых в точке $\phi = \phi_*$, нужно выбрать такие значения: $\alpha_1 = b + \frac{\pi}{2} \alpha_0$, $x_1 = x_0 - \frac{2b^2}{b^4 - 1} \cos(\alpha_1)$, $y_1 = y_0 - \frac{2b^2}{b^4 - 1} \sin(\alpha_1)$.

Формулы (5.54), (5.55) определяют частное автомодельное семейство решений модельной задачи, которое показывает возможность существования довольно искривленных форм троса вблизи точки закрепления. На рис. 41 показан пример одной из полученных по этим формулам кривых – форма троса для некоторого момента времени.

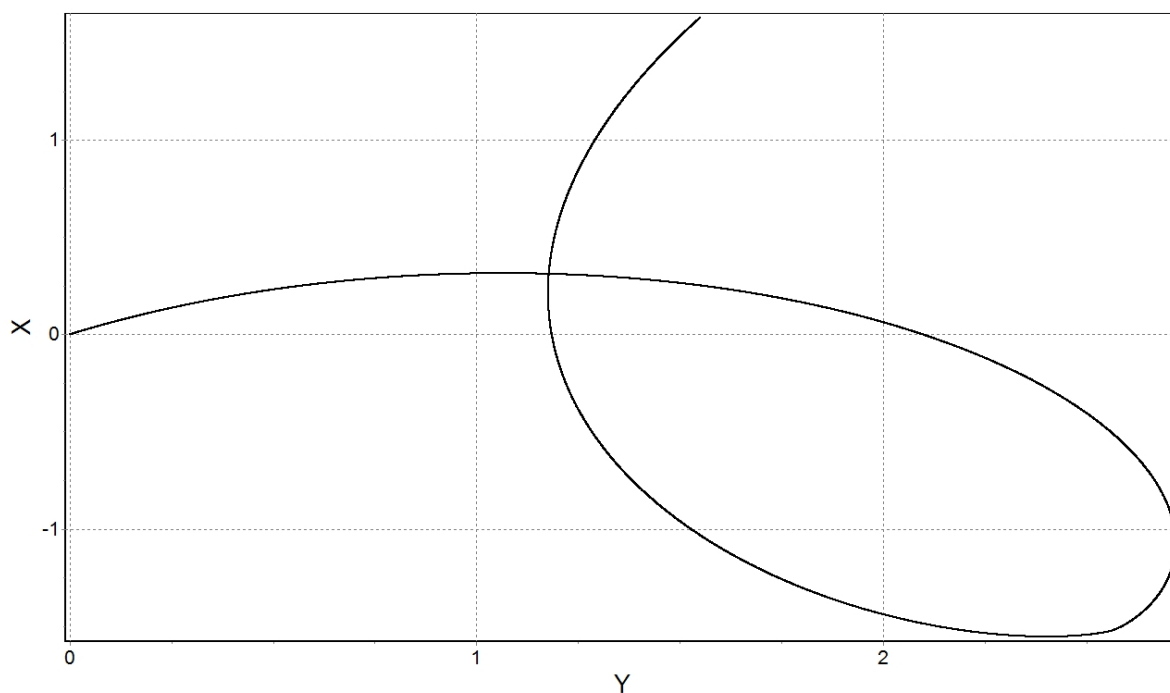


Рис. 41. Форма начального участка троса, модельная задача.

Это качественно похоже на численно полученные формы начального участка троса после возникновения спирали и перед падением. Это сходство является доводом в пользу того, что спиральная неустойчивость обусловлена механикой задачи, а не есть артефакт метода.

Г Л А В А 6. ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ

Механические характеристики материалов на основе УНТ точно не известны. В большинстве работ предполагается, что модуль Юнга 1–2 ТПа, а предел прочности (разрывное напряжение) – 130–150 ГПа. Материал при этом достаточно растяжимый, однородная нить из него может растянуться на 6–13 % до разрыва. Это немало, т.е. продольные колебания тоже нужно рассматривать.

6.1. Математическая модель

Здесь продольные колебания рассматриваются изолированно, без учета поперечных, в предположении, что трос вертикален. Хотя при таких движениях возникает кориолисова сила, которая стремится отклонить трос от вертикального положения. Но этими силами пренебрегаем, так как они малы из-за малости скоростей отдельных элементов при продольной деформации.

Итак, рассматриваются продольные деформационные движения вертикально расположенного сверхдлинного растяжимого троса космического лифта с линейной упругостью. Введем координаты. s – расстояние рассматриваемой точки вдоль троса от начальной точки в недеформированном (нерастянута) тросе. Тогда все физические свойства точки троса будут определяться только координатой s , поскольку они не зависят от перемещения этой точки в пространстве. В процессе движения реальное положение точки будет меняться. Введем $x = x(t, s)$ – величину смещения точки вдоль троса относительно исходного ее положения в нерастянута тросе. Т.е. расстояние точки s от начальной точки равно $s + x(t, s)$. Расстояние ее от центра Земли, соответственно

$$r = R_E + s + x(t, s). \quad (6.1)$$

Рассматриваем простую механическую модель материала троса: упругий материал с линейной зависимостью деформации от напряжения (закон Гука)

$$T = ES \frac{\Delta l}{l}$$

где длина участка $l = s_2 - s_1$, а изменение длины $\Delta l = x_2 - x_1$. Индекс «2» относится к конечной точке участка, «1» – к начальной.

Выпишем уравнение для колебания точки троса. Возьмем элемент троса с координатой s и длиной по этой координате ds . Масса этого элемента $dm = \rho(s)ds$. Физическая координата r , выражается приведенной выше формулой (6.1). Внешняя сила на этот элемент $\rho(s) \left(\omega^2 r - \frac{\mu}{r^2} \right) ds$. Относительное удлинение элемента в сечении s : $\frac{dl}{l} = \frac{dx}{ds}$, следовательно, упругая сила в этом сечении $T(s) = ES(s) \frac{dx}{ds}$. Полная упругая сила на элемент длины ds : $dT = T(s + ds) - T(s) = \frac{d}{ds} \left(ES(s) \frac{dx}{ds} \right) ds$. В результате получаем уравнение движения элемента троса s :

$$\rho(s) \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(ES(s) \frac{\partial x}{\partial s} \right) + \rho(s) \left(\omega^2 r - \frac{\mu}{r^2} \right) \quad (6.2)$$

Для концевой массы уравнение движения будет выглядеть так:

$$M_K \frac{\partial^2 r_K}{\partial t^2} = -ES(s) \frac{\partial x}{\partial s} + M_K \left(\omega^2 r_K - \frac{\mu}{r_K^2} \right) \quad (6.3)$$

(где, в соответствии с (3.12),

$$S(s) = \exp \left[\frac{k}{lbg} \left((U(r_E) - U(r)) \right) \right] \left(S_0 + a \frac{lbg}{\rho_V} \right) - a \frac{lbg}{\rho_V}.$$

В отличие от уравнения колебания простого стержня $\rho_V \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}$, здесь переменное сечение и переменное по координате внешнее поле сил.

6.2. Алгоритм вычислений

Уравнение интегрировалось численно. Использовались как метод прямых, так и интегрирование уравнения на двумерной сетке. В последнем случае брались шаблоны в виде креста (рис. 42а) и шаблон Кранка-Николсона (рис. 42б). Интегрирование по времени в методе прямых проводилось методами Эйлера и Рунге-Кутты 4 порядка. Метод Эйлера и крестовидный шаблон оказались непригодны из-за заметной неустойчивости. Для успешного интегрирования требовался малый шаг по времени, т.е. малое значение числа Куранта. Методы Кранка-Николсона и Рунге-Кутты показали хорошие результаты. Метод Кранка-Николсона неявный и абсолютно устойчивый [59].

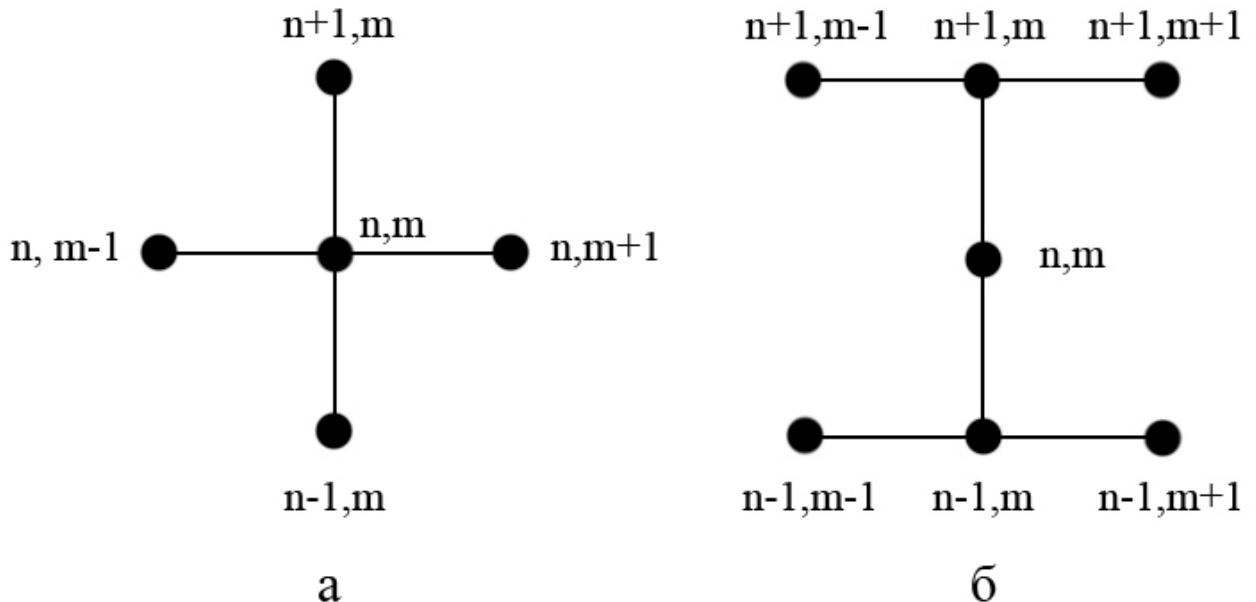


Рис. 42. Шаблоны «крест» и Кранка-Николсона

При расчете методом Кранка-Николсона производная по пространству считается как среднеарифметическая производных по пространству на предыдущем и следующем слоях по времени (рис. 42б). Вторая производная по времени считалась по 3-м точкам: на предыдущем временном слое, текущем и следующем.

$$\begin{aligned}
& \rho_V S_m \frac{x_{n+1,m} + x_{n-1,m} - 2x_{n,m}}{\Delta t^2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{E}{\Delta l} \left(S_{m+1} \frac{x_{n+1,m+1} - x_{n+1,m}}{\Delta l} - S_m \frac{x_{n+1,m} - x_{n+1,m-1}}{\Delta l} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{E}{\Delta l} \left(S_{m+1} \frac{x_{n-1,m+1} - x_{n-1,m}}{\Delta l} - S_m \frac{x_{n-1,m} - x_{n-1,m-1}}{\Delta l} \right) \\
&+ \rho_V S_m \left(\omega^2 (r_E + s + x_{n,m}) - \frac{\mu}{(r_E + s + x_{n,m})^2} \right)
\end{aligned}$$

(n – текущий узел по времени, $n - 1$ – предыдущий, $n + 1$ – следующий, m – узел по координате s). Таким образом, получается система линейных уравнений с трехдиагональной матрицей (неизвестные – параметры на следующем временном слое).

6.3. Примеры расчетов

Колебания троса, конечно, не периодические, как видно из уравнения колебаний. Будучи возмущенным, трос не возвращается точно в начальное положение. Но в какой-то мере возврат к начальной картине есть, какая-то периодичность прослеживается. На рис. 43 по оси абсцисс отложена координата точки вдоль троса, по оси ординат – продольное смещение от невозмущенного положения, бирюзовым изображен начальный профиль возмущения, синим – профиль в момент времени, когда он максимально вернулся к начальному положению.

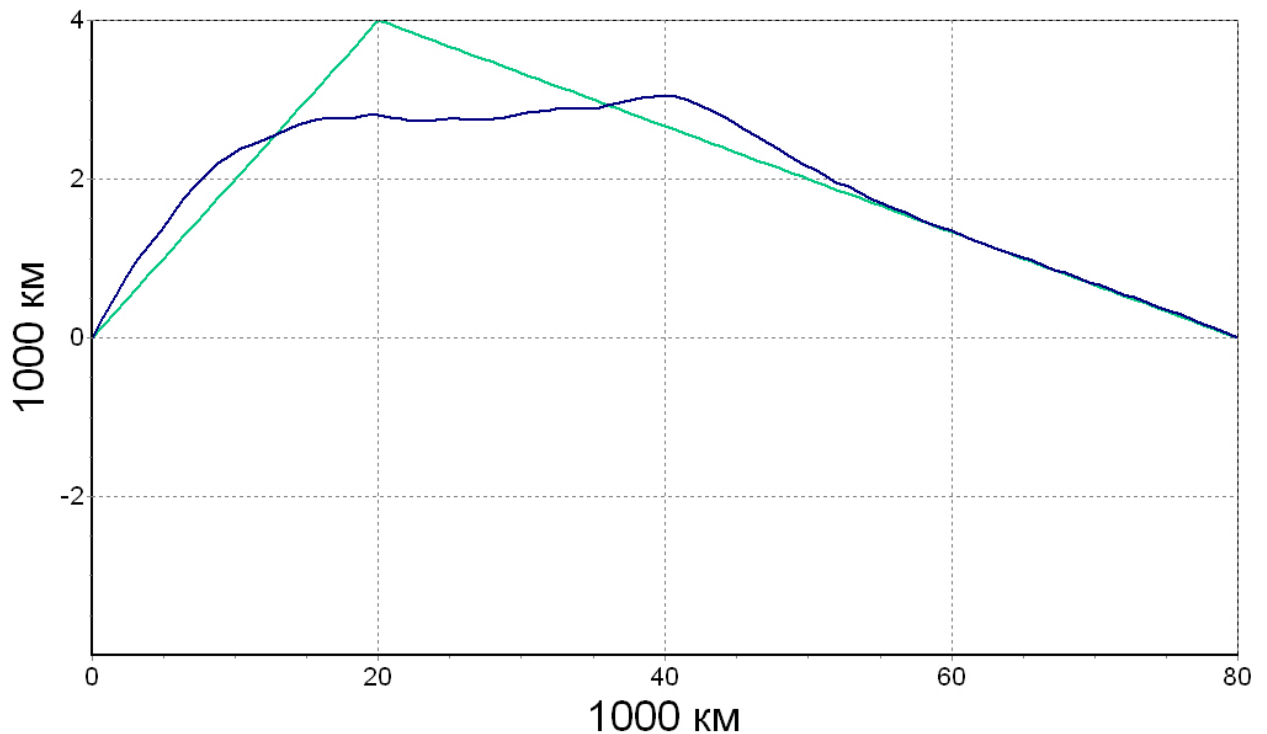


Рис. 43. Профили возмущения: начальный и максимально близкий к начальному

Продольные колебания более высокочастотные, чем поперечные. Если период поперечных колебаний порядка суток, то продольных – порядка часов.

Если трос подвесить и предоставить самому себе, он тем не менее будет растянут из-за действия гравитационно-центробежных сил. Профиль растяжения легко посчитать. Нужно взять ускорение точки в уравнении (6.2) за 0,

$$0 = E \frac{\partial}{\partial s} \left(S(s) \frac{\partial x}{\partial s} \right) + \rho_V S(s) \left(\omega^2 (r_E + s + x) - \frac{\mu}{(r_E + s + x)^2} \right) \quad (6.4)$$

и решить численно (6.4) (оно дает 3-х-диагональную матрицу), то получаем профиль растяжения

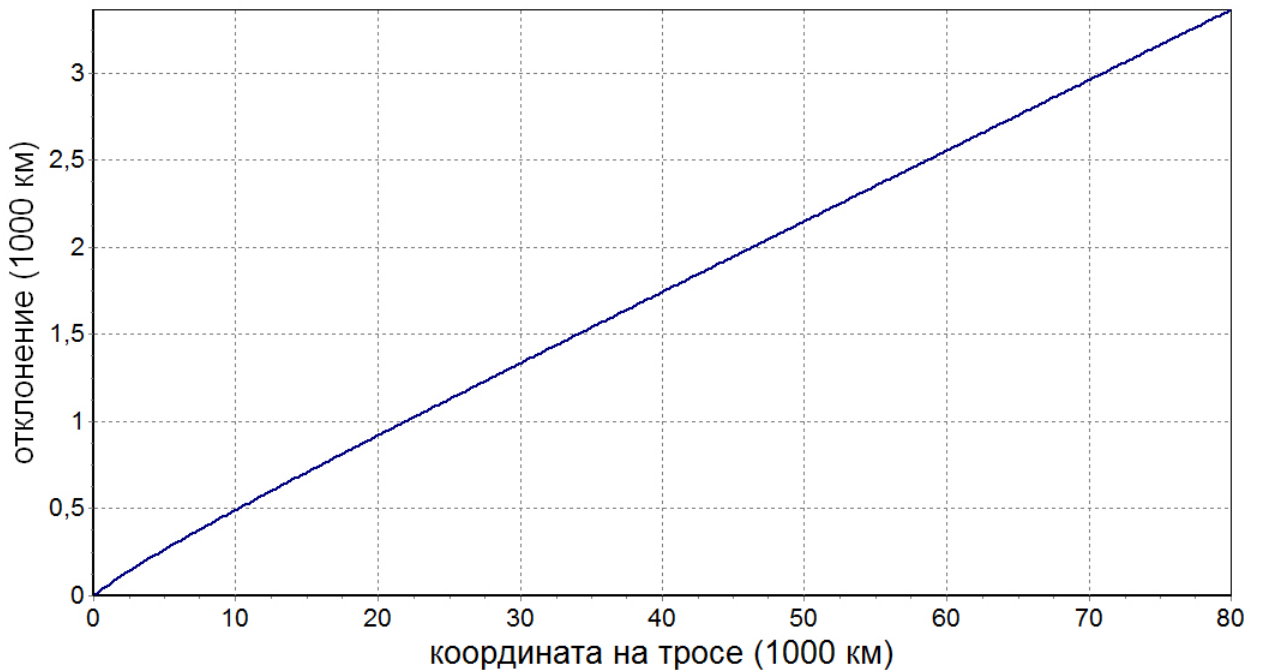


Рис. 44. Профиль стационарного растяжения.

Видно, что он близок к линейному. Такой результат можно приближенно получить и аналитически.

Линеаризуем уравнение колебаний (6.2). Учтем, dx по модулю значительно меньше длины элемента ds , так как мы рассматриваем мало растяжимые материалы. С другой стороны, величина $E dx$, конечно, не является пренебрежимо малой, поэтому, вводя асимптотически малый коэффициент ε , можно перейти к нормированным величинам \bar{x} и \bar{E} , которые остаются конечными при $\varepsilon \rightarrow 0$, заменой

$$x = \varepsilon \bar{x}, \quad \bar{E} = \varepsilon E.$$

Сделав аналогичную замену в краевом условии, перейдем от (6.2), (6.3) к задаче

$$\varepsilon\rho(s)\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\bar{E}S(s)\frac{\partial\bar{x}}{\partial s}\right) + \rho(s)\left(\omega^2r_0 - \frac{\mu}{r_0^2}\right) + \varepsilon\rho(s)\left(\omega^2 + \frac{2\mu}{r_0^3}\right)\bar{x} \quad (6.5)$$

$$\varepsilon M_K \frac{\partial^2\bar{x}_K}{\partial t^2} = -\bar{E}S(L)\frac{\partial\bar{x}_K}{\partial s} + M_K\left(\omega^2r_{K0} - \frac{\mu}{r_{K0}^2}\right) + \varepsilon M_K\left(\omega^2 + \frac{2\mu}{r_{K0}^3}\right)\bar{x}_K \quad (6.6)$$

Здесь $r_0 = R_E + s$, $r_{K0} = R_E + L$.

Задача (6.5), (6.6) линейная, но неоднородная. Следовательно, ее решение можно представить в виде частного решения такой задачи и линейной комбинации решений однородной задачи.

В данном случае частное решение задачи (6.5) можно искать в виде $x = x(s)$, то есть, как не зависящее от времени. Обозначим такое решение $x_0(s)$. Для $x_0(s)$ имеем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\bar{E}S(s)\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial s}\right) + \rho(s)\left(\omega^2r_0 - \frac{\mu}{r_0^2}\right) + \varepsilon\rho(s)\left(\omega^2 + \frac{2\mu}{r_0^3}\right)\bar{x}_0 = 0$$

Разложим \bar{x}_0 в ряд по ε : $\bar{x}_0(s) = \bar{x}_{00}(s) + \varepsilon\bar{x}_{01}(s)$ и получим в 0-м приближении

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(ES(s)\frac{\partial\bar{x}_{00}}{\partial s}\right) = -\rho(s)\left(\omega^2r_0 - \frac{\mu}{r_0^2}\right)$$

Это уравнение можно один раз проинтегрировать

$$\begin{aligned} ES(s)\frac{\partial\bar{x}_{00}}{\partial s} &= ES(0)\frac{\partial\bar{x}_{00}}{\partial s}(0) - \int_0^s \rho(s)\left(\omega^2r_0 - \frac{\mu}{r_0^2}\right) ds \\ &= T(0) + \int_0^s \rho(s)\frac{\partial U(R_E + s)}{\partial s} ds = T(0) + \frac{\tau_b}{k}S(s). \end{aligned}$$

Отсюда

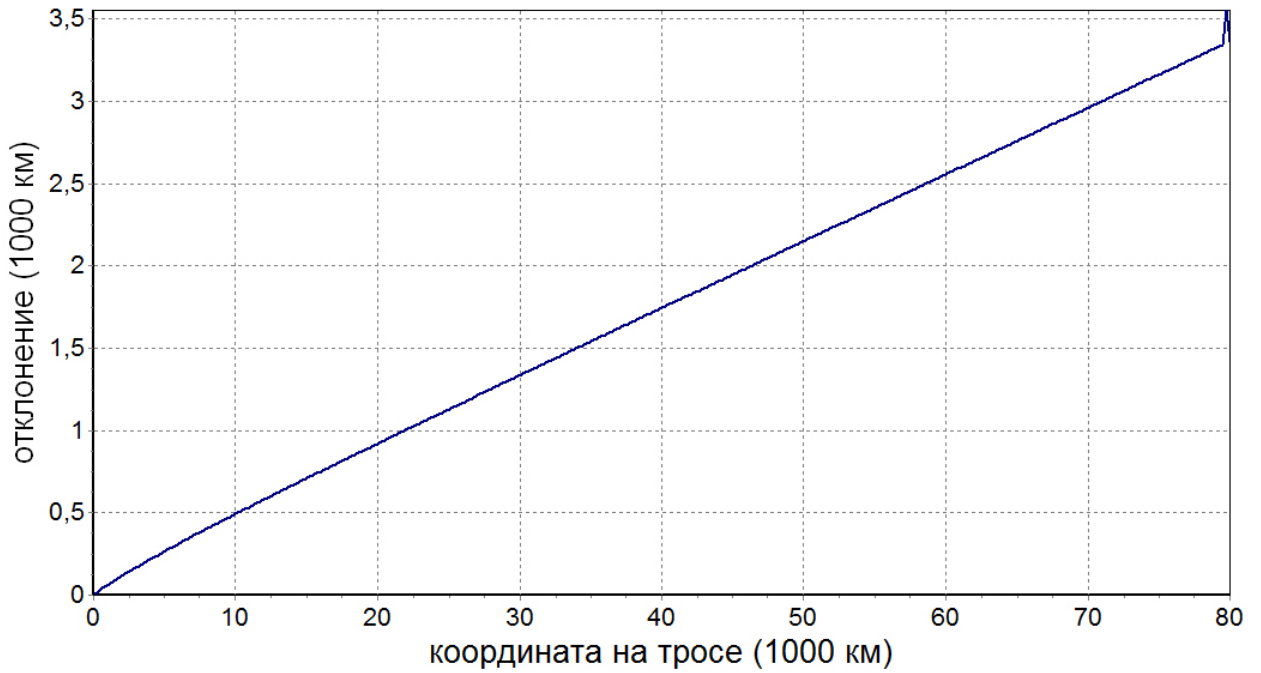
$$\frac{\partial\bar{x}_{00}}{\partial s} = \frac{\tau_b}{kE} + \frac{T(0)}{ES(s)}$$

Проинтегрировать в явном виде это уравнение уже сложнее. Заметим только, что при $T(0) = 0$, то есть для свободно висящего троса удлинение меняется с s линейно

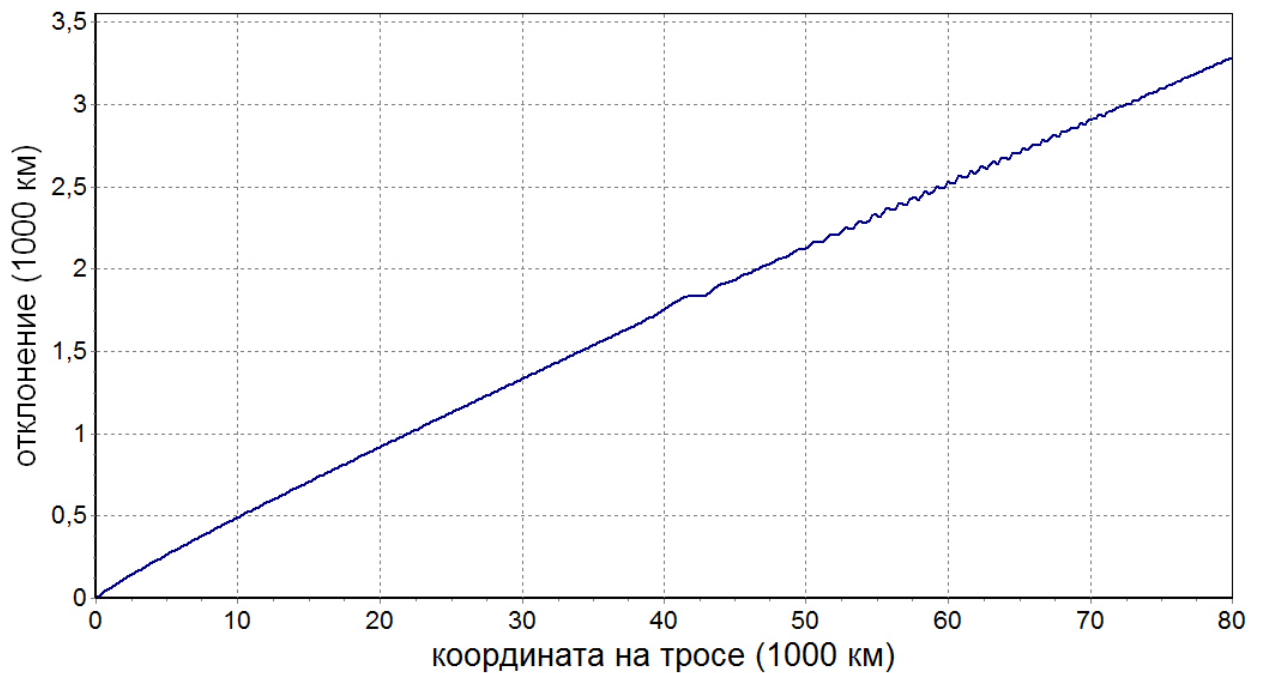
$$\bar{x}_{00} = \frac{\tau_b}{kE} s.$$

Видно, что и в линеаризованной задаче равновесная конфигурация близка к прямой, как и в численном расчете для нелинейной задачи.

Приведем для оценки скоростей распространения узкого возмущения. Например, на равновесной конфигурации троса параболическое возмущение шириной 500 км и амплитудой 200 км (рис. 45а) проходит от одного конца троса длиной 80 000 км до другого примерно за 47 минут. При этом оно не остается одной волной, и не распадается на две, а образует волновой пакет (рис. 45б), который со временем размывается еще больше.



а



б

Рис. 45. Распространение узкого возмущения

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

- Разработана концепция нагруженного КЛ, обладающего по сравнению с распространенной концепцией Эдвардса большими возможностями и повышенной надежностью
- Проведен обзор упрощенных моделей, известные ранее дополнены. Упрощенные модели использованы для получения базовых характеристик движения.
- Создана оригинальная математическая модель для изучения поперечных колебаний нерастяжимого троса переменной линейной плотности в неоднородном силовом поле. Модель включает эволюционную часть и уравнение для вычисления натяжения без использования механического уравнения состояния напряженной нити. Непрерывная модель и более простые динамические модели дают похожие результаты там, где их можно сравнить. Создан программный комплекс, позволяющий исследовать динамику троса КЛ на большом интервале времени.
- Из многочисленных расчетов выделено несколько характерных движений троса. Ограниченные по углу: близкие к одномодовым, близкие к собственным формам линеризованной задачи, колебания со сверхмедленным изменением амплитуды, распространение поперечной волны. Движения, приводящие к падению троса: постепенная раскачка, раскачка незакрепленного конца, необычная «спиральная» неустойчивость в окрестности закрепленного конца (для нее найдено автомодельное решение приближенной задачи)
- Построена математическая модель продольных колебаний длинного переменного в сечении растяжимого троса в переменном по координате внешнем поле. Проведены численные расчеты, найдена скорость распространения продольных волн.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа демонстрирует, что динамика космического лифта даже без учета многих факторов, вроде движения кабины, сложна и разнообразна.

Так как создание протяженных космических систем важно, а полная экспериментальная их отработка на Земле невозможна, нужны дальнейшие исследования, численные и теоретические.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В.В., Иванов М.Б., Отставнов Е.И. Модельная задача о космическом лифте. // Космические исследования. 2005. Т.43, №3. С.157-160.
2. Первушин А.И. Мифология космического лифта (Эссе из цикла “Космическая экспансия: от фантастики к реальности”) // Полдень. XXI век. 2009, № 53 (май). С. 161-170.
3. Арцутанов Ю.Н. В космос на электровозе // Комсомольская правда, 31 июля 1960.
4. Арцутанов Ю.Н. В космос без ракет // Знание – сила. 1969, № 7. С. 25.
5. Арцутанов Ю.Н. Железная дорога Луна – Земля // Техника – молодежи. 1976, № 4. С.21.
6. Isaacs J.D., Vine A.C., Bradner H., Bachus G.E. Satellite Elongation into a True “Sky-Hook” // Science. 1966, 151:682.
7. Lvov V. Sky-Hook: Old Idea. // Science. 1967. V.158, Nov. 17. P.946-947.
8. Clarke A.C. The fountains of paradise. NY: Ballantine Books, 1978. (Русский перевод: Кларк А. Фонтаны рая // Техника – молодежи, 1980. № 1-12).
9. Clarke A.C. The Space Elevator: ‘Thought Experiment’, or Key to the Universe? // Advances in Earth Oriented Applied Space Technologies, 1981.
10. Поляков Г.Г. Обобщенные задачи о космическом лифте // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1972, №6. С. 54-59.
11. Поляков Г.Г. Собрание трудов. Т.1. Привязные спутники, космические лифты и кольца (1967-1974). Астрахань: Изд-во Астраханского педагогического университета. 1999.
12. Pearson J. The orbital tower: a spacecraft launcher using the Earth’s potential energy // Acta Astronautica. 1975, V. 2, No. 10. P. 785-799.
13. Шошунов Н.Л. Космический лифт: надежды и проблемы // Полет. 2006, №3. С. 53-60.
14. Space Elevator History. URL: <http://www.star-tech-inc.com/id4.html>
15. Iijima S. Helical microtubules of graphitic carbon // Nature. 1991. V. 354, №6348. P. 56-58.
16. Demczyk B.G., Wang Y.M., Cumings J. a o. // Mater. Sci. Eng. A334. 2002, 173

17. Wang X., Li Q., Xie J. a o. Fabrication of Ultralong and Electrically Uniform Single-Walled Carbon Nanotubes on Clean Substrates // Nano Letters. 2009. V. 9(9). P. 3137-3141.
18. Chang C.-C., Hsu I-K., Aykol M. a o. A New Lower Limit for the Ultimate-Breaking Strain of Carbon Nanotubes // ACS Nano. 2010. V. 4(9). P. 5095-5100.
19. Бакаткин А. Искусственные мышцы на основе нанотрубок. URL: http://www.3dnews.ru/news/iskusstvenie_mishti_na_osnove_nanotrubok
20. Шеппард Г. Искусственные мышцы // Вокруг света. 2007, №6 (2801).
21. Smitherman D.V. Jr., Space Elevator: An Advanced Earth-Space Infrastructure for the New Millenium. // NASA/CP-2000-210429. 2000.
22. Audacious & Outrageous: Space Elevators // NASA Science.
23. Edwards B.C. The Space Elevator // NIAC Phase II Final Report. 2003. 43 p.
24. Edwards B.C. Design and Development of a Space Elevator // Acta Astronautica. 2000. V. 47. №10, Nov., P. 735-744.
25. Edwards B.C. The Space Elevator Development Program. // 55th IAC 2004, Vancouver, Canada. IAC-04-IAA.3.8.2.01.
26. Avnot M.S. The space elevator in the context of current space exploration policy // Space policy. 2006. V. 22. № 2, May. P. 133-139.
27. Shelef B. The Space Elevator Feasibility Condition. // The Spaceward Foundation, 2006.
28. Fujii H. A., Ohta M., Watanabe T. a o. Study of Feasibility and Characteristic of Space Elevator // 25th International Symposium on Space Technology and Science (Selected Paper). 2006. 2006-g-07.
29. Perek L. Space elevator: Stability // Acta Astronautica. 2008. V.62. № 8-9, Apr.-May. P. 514-520.
30. Quine B.M., Seth R.K., Zhu Z.H. A free-standing space elevator structure: A practical alternative to the space tether // Acta Astronautica. 2009. V.65, № 3-4, Aug.-Sep. P. 365-375.
31. Steindl A., Troger H. Is the Sky-Hook Configuration Stable? // Nonlinear Dynamics. 2005. V.40, N 4. S. 419-431.
32. Schwarzbart M., Steindl A., Troger H. On Stability problems of the space elevator // Sixth International Congress on Industrial Applied Mathematics

- (ICIAM07) and GAMM Annual Meeting, Zürich 2007. R.Jeltsch (Hrg.). Zürich: AMM/Wiley – VCH. 2007, 2 S.
33. Pugno N., Schwarzbart M., Steindl A. a o. On the Stability of the Track of the Space Elevator // *Acta Astronautica*. 2009. V.64. P.524-537.
 34. Садов Ю.А., Нуралиева А.Б. О концепции нагруженного секционированного космического лифта. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН №39. М., 2011. 24 с.
 35. Artuković R. The Space Elevator – physical principles // Patent No. 02-1712-29122000 HAA.
 36. Поляков Г.Г. Неэкваториальный космический лифт. (1969) // *Собрание трудов. Астрахань: Изд-во Астраханского педагогического университета*. 1999. С. 117.
 37. Cohen S.S., Misra A.K. The Effect of Climber Transit on the Space Elevator Dynamics // *Acta Astronautica*. 2009. V.64. P. 538-553
 38. Lang D. D. Space Elevator Dynamic Response to In-Transit Climbers // 1st International Conference on Science, Engineering, and Habitation in Space. Albuquerque, NM: Space Engineering and Science Inst. 2006. Paper 10152148
 39. McInnes C.R. Dynamics of a Particle Moving Along an Orbital Tower // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. V.28. N 2. 2005.
 40. McInnes C. R., C. Davis. Novel Payload Dynamics on Space Elevators System // 56th International Astronautical Congress. Fukuoka. 2005. IAC-05-D4.2.07
 41. Williams P., Wubbo O. Climber Motion Optimization for the tether Space Elevator // AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit. 18-21 August, 2008. AIAA 2008-7383.
 42. Woo P., Misra A. K. Dynamics of a Partial Elevator with Multiple Climbers // *Acta Astronautica*. 2010. V.67. P. 753-763.
 43. Lorenzini E. C., Cosmo M. Wave progration in the tether elevator/Crawler system // *ActaAstronautica*, 1990. V.21, N 8. P. 545-552.
 44. Cohen S.S., Misra A.K. Elastic Oscillations of the Space Elevator Ribbon // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2007. V.30, N 6. P.1711-1717.
 45. Blaise G. Linear Dynamics of the Space Elevator in the Absense of Climber.

46. Williams P. Dynamic Multibody Modeling for Tethered Space Elevators // *Acta Astronautica*. 2009. V.65. P. 399-422.
47. Kristiansen K.U., Palmer P., Roberts M. A Unification of Models of Tethered Satellites // *SIAM Journal. Appl. Dyn. Syst.* 2011. 10, 1042. 28 p. ; doi. 1137/090779887
48. Lang D.D. Space Elevator Dynamics Reference Manual : in behalf of Institute for Scientific Research, Inc. 12 Apr. 2006.
49. Ohkawa R., Uchiyama K., Fujii H.A. The effect of disturbances on space elevator dynamics with flexibility. // 61st International Astronautical Congress. 2010. Prague, CZ. IAC-10-D4.4.5.
50. Satoh K., Fujii H.A., Iijima K. a o. Study on Fundamental Dynamics of Very Long Tether System // 5th Asian Conference on Multibody Dynamics, 2010.
51. Андрианов И.В. Об особенностях предельного перехода от дискретной упругой среды к непрерывной // *Прикладная математика и механика*. 2002. Т. 66, вып. 2 С. 271-275.
52. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Пер. с фр. URSS. 2010. 586 с. ISBN 978-5-354-01331-9
53. Белецкий В.В., Левин Е.М. Динамика космических тросовых систем. М.: Наука. 1990. 329 с.
54. Садов Ю.А., Нуралиева А.Б. Нелинейные поперечные колебания троса космического лифта // *Математическое моделирование*. 2011. Т.23, № 12. С. 3-19.
55. Ames W.F. Numerical Methods for Partial Differential Equations. Academic Press Inc. 1977. 378 p.
56. Садов Ю.А. Периодические движения спутника с магнитным демпфером в плоскости круговой орбиты // *Космические исследования*. 1969. Т. 7. Вып. 1. С. 51-60.
57. Калачев Г.В., Нуралиева А.Б., Чернов А.В. Малые колебания троса космического лифта. // *Сборник трудов МФТИ 2011, в печати*
58. Петров А.Л., Садов С.Ю. Исследование близких к маятниковым движений тяжелой нити на круговой орбите // *Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР*. 1989. № 11. 27 с.
59. Р.П. Федоренко. Введение в вычислительную физику. М.: МФТИ. 1994. 528 с.