

На правах рукописи

**СБЫТОВА ЕКАТЕРИНА СЕРГЕЕВНА**

**ДИНАМИКА МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА  
С РЕЗОНАТОРОМ В ВИДЕ УПРУГИХ ПЛАСТИН**

Специальность 01.02.01 – Теоретическая механика

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2014 г.

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет «МЭИ»

**Научный руководитель:** **Подалков Валерий Владимирович**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры теоретической механики и мехатроники ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский университет «МЭИ»

**Официальные оппоненты:** **Басараб Михаил Алексеевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры ИУ8 «Информационная безопасность», ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет техники и технологий)»

**Каленова Наталья Валерьевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Физика», ФГБОУ ВПО «МАТИ – Российский государственный технологический университет имени К.Э. Циолковского»

**Ведущая организация:** **Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН)**

Защита состоится 25 марта 2014 г., в 13<sup>00</sup> часов на заседании диссертационного совета Д 002.024.01, созданного на базе Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН по адресу: 125047, г. Москва, Миусская пл., 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН.

Автореферат разослан « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета  
доктор физ.-мат. наук

Полилова Т.А.

**Актуальность проблемы.** Микросистемная техника – перспективное направление современного приборостроения. Благодаря новым технологиям изготовления на базе кремниевых структур, удастся создать датчики инерциальной информации, имеющие малые габаритные размеры, малый вес и низкое энергопотребление.

В настоящее время все большее развитие получают микромеханические гироскопы (ММГ) – одноосные вибрационные гироскопы, эксплуатационным преимуществом которых является отсутствие вращающихся частей.

ММГ находят применение в различных областях техники: в медицине в качестве приборов для позиционирования микроинструментов, в интеллектуальных системах протезирования, в автомобилестроении, в оборонной промышленности в системах управления боеприпасами и боевыми роботами и др. При этом проблема повышения точности этих датчиков является актуальной для прецизионного приборостроения. Решение ее заключается в применении новых технологических методов, в создании точных математических моделей движения чувствительного элемента, а также алгоритмов аналитической компенсации погрешностей.

В настоящей работе объектом исследования является новый микромеханический гироскоп с резонатором в виде четырех упругих пластин. Особенность его конструкции позволяет решить ряд перечисленных выше проблем. При этом предложенные алгоритмы повышения точности могут быть применены для других гироскопов класса *обобщенный маятник Фуко*<sup>1</sup>.

**Целью работы** является разработка динамической модели нового микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих пластин в различных режимах работы с учетом нелинейных эффектов, связанных с геометрией его чувствительного элемента.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **основные задачи**:

- разработка математической модели колебаний чувствительного элемента осцилляторного вибрационного гироскопа;
- исследование влияния медленно меняющихся условий функционирования на динамику прибора в различных режимах работы;
- анализ влияния геометрической нелинейности на точностные характеристики микромеханического гироскопа.

Цели диссертации соответствуют «Приоритетным направлениям развития науки, технологий и техники в Российской Федерации» по направлению «Транспортные и космические системы»; работа направлена на развитие технологий, входящих в «Перечень критических технологий Российской Федерации» по направлениям «Технологии информационных, управляющих, навигационных систем» и «Технологии наноустройств и микросистемной техники». Работа выполнена при поддержке Российского фонда

---

<sup>1</sup> Журавлев В.Ф. Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. РАН. МТТ. 1997. №6. С. 27–35.

фундаментальных исследований (проекты 09-01-00756-а, 09-08-01184-а, 12-01-00939-а, 12-08-01255-а), а также Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере (программа «Участник молодежного научно-инновационного конкурса», 2011-2012 гг.).

**Методы исследования** определялись спецификой изучаемого объекта и его математической модели. В работе использовались методы теоретической механики, многих масштабов, аналитических вычислений и математического моделирования, теория дифференциальных уравнений и специальных функций.

**Достоверность полученных результатов** обеспечивается корректным применением методов теоретической механики, теории дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр, теории специальных функций, а также сопоставлением полученных результатов с результатами, полученными другими исследователями.

**Научная новизна** результатов, полученных в диссертационной работе, заключается в следующем:

- получена математическая модель нового микромеханического осцилляторного вибрационного гироскопа с резонатором в виде упругих пластин;
- установлено влияние медленно меняющихся параметров математической модели, таких как частота собственных колебаний, угловая скорость основания, амплитуда и частоты вынуждающей силы на динамику и точность гироскопа в режимах свободных и вынужденных колебаний;
- получены аналитические формулы для угла прецессии гироскопа с учетом нелинейных эффектов и даны оценки точности;
- исследовано влияние нелинейности на устойчивость стационарных режимов и вид амплитудно-частотных характеристик.

**Практическая значимость результатов работы** заключается в разработке новой конструктивной схемы микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих пластин, в оценке влияния нелинейных эффектов и медленно меняющихся параметров системы на динамические и точностные характеристики прибора. Модели, алгоритмы и обобщения, содержащиеся в диссертации, могут быть полезны для проектирования новых датчиков инерциальной информации и улучшения характеристик уже существующих приборов.

**Апробация работы и публикации.** Результаты работы докладывались и обсуждались на

- международной научно-технической конференции "Радиоэлектроника, электротехника и энергетика" (Москва, МЭИ, 2010-2013 гг.);
- I всероссийской научно-практической конференции молодых ученых «Инновационные подходы к развитию вооружения, военной специальной техники» (Москва, Академия Генерального Штаба Вооруженных Сил России, 2010 г.);
- международной конференции "Седьмые Окуневские чтения" (Санкт-Петербург, БГТУ, 2011 г.);

- академических чтениях по космонавтике «Актуальные проблемы российской космонавтики» (Москва, МГТУ им. Баумана, 2011, 2013 гг.);
- международной молодежной научно-практической конференции «Мобильные роботы и мехатронные системы» (Москва, НИИ Механики МГУ, 2011);
- XIII конференции молодых ученых «Навигация и управление движением» (Санкт-Петербург, 2011 г.);
- конкурсе «Участник молодежного научно-инновационного конкурса (У.М.Н.И.К.)» (2011-2012 гг.);
- XII всероссийской выставке научно-технического творчества молодежи НТТМ-2012 (Москва, 2012 г.);
- XIX Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам (Санкт-Петербург, 2012 г.);
- 695-ом заседании семинара «Механика систем» имени академика А.Ю. Ишлинского при Научном совете РАН по механике систем под руководством акад. В.Ф. Журавлева и акад. Д.М. Климова (Москва, ИПМех РАН, 2013 г.).

**Публикации.** По результатам исследований, проведенных в рамках диссертации, опубликовано 15 работ, в том числе 2 статьи в издании, рекомендованном ВАК Минобрнауки РФ, 2 реферата и 10 тезисов докладов на конференциях, получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

**Личный вклад автора** заключается в разработке математической модели движения чувствительного элемента осцилляторного вибрационного гироскопа, проведении аналитических преобразований, а также в реализации численных экспериментов.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 108 наименований. Общий объем работы составляет 128 страниц и содержит 22 иллюстрации.

### **Содержание работы**

**Во введении** сформулирована общая характеристика круга задач, отраженных в диссертации, и обоснована их актуальность. Поставлена цель диссертационной работы и дан обзор предшествующих исследований в области микромеханических устройств. Приведено краткое описание результатов работ, посвященных моделированию и проектированию микромеханических и волновых твердотельных гироскопов.

**В первой главе** в §1.1 разработана динамическая модель микромеханического осцилляторного вибрационного гироскопа (рис. 1), чувствительный элемент которого – четыре одинаковые упругие пластины 1, закрепленные в рамке 2, соединенной упругими торсионами 3 с основанием гироскопа. Геометрические размеры прямоугольных пластин обозначены через  $a$  и  $b$ .

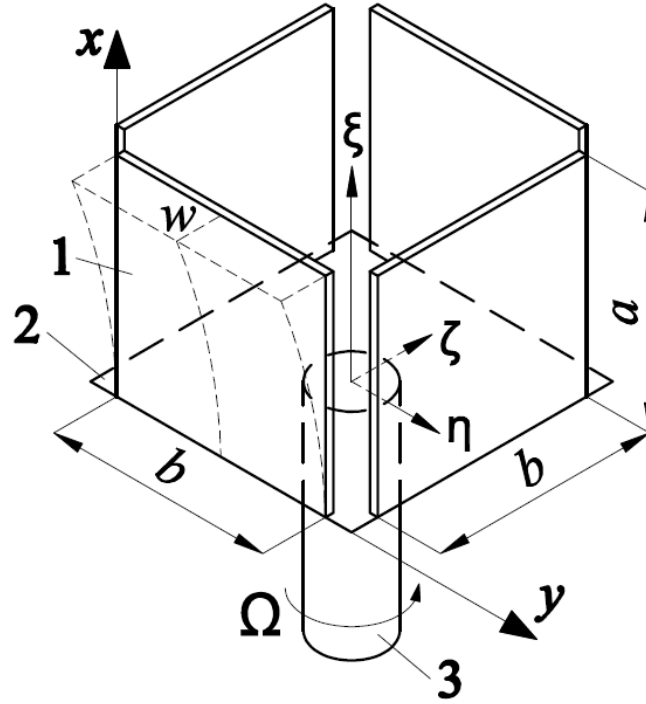


Рис. 1. Конструктивная схема микромеханического гироскопа

Под действием электростатической системы управления резонатор совершает периодическое движение, измерение которого позволяет определить вращение основания гироскопа в инерциальном пространстве.

С подвижной рамкой связана система координат  $\xi\eta\zeta$ , при этом ось  $\xi$  является осью чувствительности гироскопа. Предполагается, что основание вращается вокруг оси  $\xi$  с угловой скоростью  $\Omega$ , малой по сравнению с характерной частотой собственных колебаний чувствительного элемента и, в общем случае, являющейся некоторой функцией времени.

Для описания колебаний чувствительного элемента введены функция прогиба поверхности тонкой упругой пластины  $w = w(t, x, y)$ , зависящая от времени  $t$  и координат  $x$  и  $y$ , связанных с пластиной, и малый угол  $\beta$  поворота рамки относительно основания гироскопа.

После применения вариационного принципа Гамильтона-Остроградского, были получены интегро-дифференциальные уравнения, описывающие динамику гироскопа

$$\begin{aligned} \rho h \ddot{w} + D_* \nabla^4 \dot{w} + D \nabla^4 w + \rho h y (\dot{\Omega} + \dot{\beta}) - \rho h (\Omega + \beta)^2 \left( w + \frac{b}{2} \right) &= 0, \\ J(\dot{\Omega} + \dot{\beta}) + \kappa \beta + c_0 \beta + 4 \rho h \iint_S \left[ 2 \dot{w} \left( w + \frac{b}{2} \right) (\Omega + \beta) + \right. & \\ \left. + w(w + b)(\dot{\Omega} + \dot{\beta}) + y \ddot{w} \right] dS &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность материала пластины,  $h$  – ее толщина,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu_0^2)}$  – цилиндрическая жесткость пластины,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu_0$  – коэффициент Пуассона,  $c_0$  – жесткость упругих торсионов рамки,  $J = J_0 + 4\rho h a b^3 / 3$  –

обобщенный момент инерции системы,  $J_0$  – момент инерции рамки относительно оси  $\xi$ ,  $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$  – бигармонический оператор.

В (1) учтено внутреннее трение по модели Кельвина-Фойгта и введены обозначения  $D_* = \frac{E_* h^3}{12(1-\nu_0^2)}$  – коэффициент внутренних потерь при колебаниях пластин,  $E_*$  – вязкоупругий модуль материала пластин, характеризующий внутреннее трение в материале,  $\kappa$  – коэффициент вязкого трения торсионов.

Функция прогиба  $w$  задается в виде

$$w = \alpha(t)W(x, y), \quad (2)$$

где  $\alpha(t)$  – искомая функция формы колебаний,  $\alpha^2 \ll 1$ ;  $W(x, y)$  определяется видом граничных условий для пластин. В работе рассматривались три типа граничных условий: заделка по четырем сторонам, шарнирное опирание по четырем сторонам и консольное закрепление пластин.

После применения процедуры Бубнова-Галеркина получены дифференциальные уравнения для обобщенных координат  $\alpha, \beta$

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \omega_1^2 \alpha &= -d_* \dot{\alpha} + 2b_1 \Omega \dot{\beta} + b_1 \dot{\beta}^2 + \alpha \dot{\beta}^2, \\ \ddot{\beta} + \omega_2^2 \beta &= -\kappa_* \dot{\beta} - 2b_2 \Omega \dot{\alpha} - 2b_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} - 2b_2 \alpha \dot{\beta} - \frac{b_2}{b_1} \alpha^2 \ddot{\beta} - 2 \frac{b_2}{b_1} \alpha \dot{\alpha} \dot{\beta}. \end{aligned} \quad (3)$$

В (3) введены следующие обозначения:  $\omega_1^2, \omega_2^2 = c_0/J$  – квадраты собственных частот колебаний резонатора на неподвижном основании;  $d_*, \kappa_* = \kappa/J$  – коэффициенты демпфирования;  $b_1, b_2$  – коэффициенты при гироскопических слагаемых в математической модели движения.

В работе показано, что с точки зрения практической реализации наиболее приемлемым оказывается консольное закрепление пластин. Для квадратных пластин размером  $a = b = 10$  мм и толщиной  $h = 1$  мм, изготовленных из плавленного кварца ( $\rho = 2201$  кг/м<sup>3</sup>,  $E = 7.3 \cdot 10^{10}$  Па,  $\nu_0 = 0.17$ ), и обобщенного момента инерции  $J = 6 \cdot 10^{-8}$  кг·м<sup>2</sup> с учетом совмещения частот собственных колебаний имеем  $c_0 = 206.5$  Н·м,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 59317$  рад/с (9441 Гц),  $b_1 = 1.566$ ,  $b_2 = 0.147$ .

В §1.2 установлено, что даже без учета нелинейных слагаемых в математической модели (3) на неподвижном основании при неточном совмещении собственных частот, а именно при  $\omega_1 = \omega$ ,  $\omega_2 = \omega + \tilde{\Delta}$ , где  $\tilde{\Delta} \ll \omega$ , возникает прецессия гироскопа, что приводит к дополнительным погрешностям в измерении угла поворота основания в режиме свободных колебаний. Вязкое трение при этом не влияет на прецессию гироскопа, а приводит к медленному изменению амплитуд колебаний.

В §1.3 получена одночастотная система линейных нестационарных уравнений, описывающая собственные колебания чувствительного элемента гироскопа

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + \omega^2(\tau)\alpha &= -2\gamma\dot{\alpha} + 2b_1\Omega(\tau)\dot{\beta}, \\ \ddot{\beta} + \omega^2(\tau)\beta &= -2\gamma\dot{\beta} - 2b_2\Omega(\tau)\dot{\alpha}.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь собственная частота  $\omega = \omega(\tau)$  и угловая скорость вращения основания  $\Omega = \Omega(\tau)$  являются функциями медленного времени  $\tau = \varepsilon t$ , где  $\varepsilon \ll 1$  – малый положительный параметр;  $\gamma \ll \omega$  – коэффициент вязкого трения.

Решение системы (4) в первом приближении имеет вид

$$\begin{aligned}\alpha &= p_1(\tau) \sin \eta(\tau) + q_1(\tau) \cos \eta(\tau), \\ \beta &= p_2(\tau) \sin \eta(\tau) + q_2(\tau) \cos \eta(\tau),\end{aligned}\quad (5)$$

где  $\dot{\eta} = \omega(\tau)$ .

Применив метод двух масштабов, для  $p_1, q_1, p_2, q_2$  были получены дифференциальные уравнения, решение которых имеет вид:

$$\begin{aligned}q_1(\tau) &= \sqrt{\omega(0)/\omega(\tau)} e^{-\gamma t} (\sqrt{b_2} q_{10} \cos \theta - \sqrt{b_1} q_{20} \sin \theta) / \sqrt{b_2}, \\ p_1(\tau) &= \sqrt{\omega(0)/\omega(\tau)} e^{-\gamma t} (\sqrt{b_2} p_{10} \cos \theta - \sqrt{b_1} p_{20} \sin \theta) / \sqrt{b_2}, \\ q_2(\tau) &= \sqrt{\omega(0)/\omega(\tau)} e^{-\gamma t} (\sqrt{b_1} q_{20} \cos \theta + \sqrt{b_2} q_{10} \sin \theta) / \sqrt{b_1}, \\ p_2(\tau) &= \sqrt{\omega(0)/\omega(\tau)} e^{-\gamma t} (\sqrt{b_1} p_{20} \cos \theta + \sqrt{b_2} p_{10} \sin \theta) / \sqrt{b_1}.\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь  $p_{i0} = p_i(0), q_{i0} = q_i(0)$  ( $i = 1, 2$ ) – начальные условия для медленных переменных,  $\dot{\theta} = -\sqrt{b_1 b_2} \Omega(\tau)$ .

В работе показано, что для определения угла прецессии гироскопа  $\theta$  из (6) можно записать дробно-рациональное выражение из полученных медленных переменных  $p_1, q_1, p_2, q_2$ . Таким образом, в режиме свободных колебаний гироскоп является интегрирующим.

§1.4 посвящен вынужденным колебаниям резонатора при гармоническом возбуждении колебаний пластин. Получена следующая система линейных нестационарных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + \omega^2(\tau)\alpha &= -2\gamma\dot{\alpha} + 2b_1\Omega(\tau)\dot{\beta} + \hat{A}(\tau) \sin \sigma(\tau), \\ \ddot{\beta} + \omega^2(\tau)\beta &= -2\gamma\dot{\beta} - 2b_2\Omega(\tau)\dot{\alpha},\end{aligned}\quad (7)$$

где  $\hat{A}(\tau)$  – амплитуда внешнего воздействия,  $\hat{A}(\tau) \ll [\omega(\tau)]^2$ ;  $\sigma(\tau)$  – настраиваемая фаза внешнего воздействия. В режиме мягкого резонансного возбуждения частота внешнего воздействия  $\omega_B(\tau) = \dot{\sigma}$  близка к собственной частоте колебаний гироскопа.

Решение системы (7) в первом приближении имеет вид

$$\begin{aligned}\alpha &= p_1(\tau) \sin \sigma(\tau) + q_1(\tau) \cos \sigma(\tau), \\ \beta &= p_2(\tau) \sin \sigma(\tau) + q_2(\tau) \cos \sigma(\tau).\end{aligned}\quad (8)$$

Применив метод двух масштабов, для медленных переменных  $p_1, q_1, p_2, q_2$  были получены дифференциальные уравнения, решение которых представимо в аналитическом виде. При  $\Omega = 25$  рад/с и постоянных собственной частоте колебаний и амплитуде внешнего воздействия, в случае когда частота вынуждающей силы меняется по закону  $\omega_B = \omega(0.979 + \sigma_0 t)$ , где  $\sigma_0 = 2.4 \cdot 10^{-6}$  1/с, амплитудно-частотные характеристики имеют вид, представленный на рис. 2



(тонкая сплошная линия – стационарный режим, полужирная линия – при  $\omega_B = \omega(0.979 + \sigma_0 t)$ ).

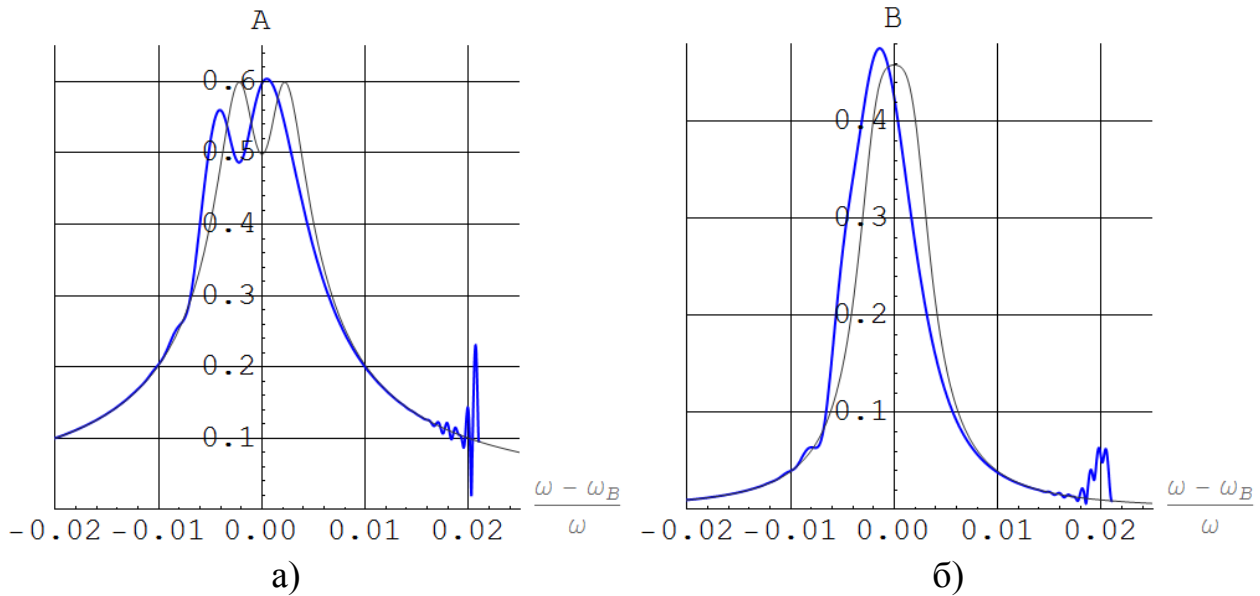


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики: а – по первой обобщенной координате; б – по второй обобщенной координате

Из численного эксперимента видно, что наличие угловой скорости основания приводит к раздвоению кратной собственной частоты на две близкие частоты. На стационарной кривой для амплитуды первичных колебаний  $A$  отчетливо видны два пика, в то время как амплитуда вторичных колебаний  $B$  оказывается менее чувствительной к раздвоению частот. Для амплитуды  $A$  наблюдается увеличение первого максимума на 1.5 % и уменьшение второго на 6.6 % («движение» по графику справа налево). Для амплитуды  $B$  наблюдается увеличение максимума амплитуды на 4.4 %. Максимумы амплитуд на обоих графиках смещены относительно максимумов стационарной кривой. До первого максимума и после прохождения второго максимума наблюдаются биения амплитуд. Было установлено, что при медленно меняющейся частоте вынуждающей силы имеют место существенные ошибки измерения угловой скорости основания.

**Во второй главе** исследуется нелинейная модель колебаний резонатора микромеханического гироскопа без учета демпфирования

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \alpha &= 2b_1\mu\dot{\beta} + b_1\dot{\beta}^2 + \alpha\dot{\beta}^2, \\ \ddot{\beta} + \beta &= -2b_2\mu\dot{\alpha} - 2b_2\dot{\alpha}\dot{\beta} - 2b_2\alpha\dot{\beta} - \frac{b_2}{b_1}\alpha^2\dot{\beta} - 2\frac{b_2}{b_1}\alpha\dot{\alpha}\dot{\beta}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\mu = \Omega/\omega$  – нормализованная угловая скорость основания; точкой обозначена производная по безразмерному времени.

В §2.1 решение системы дифференциальных уравнений (9) описывалось в переменных Ван-дер-Поля  $p_1, q_1, p_2, q_1$ . При этом начальные условия заданы в виде  $p_{10} = r_0, q_{10} = 0, p_{20} = 0, q_{20} = -k_0$ , где  $k_0 > 0, r_0 > 0, k_0 \ll r_0$  ( $r_0 = r(0)$ ),

$k_0 = k(0)$ ). Далее осуществлен переход к новым переменным<sup>2</sup>  $x_1, x_2, y_1, y_2$  по формулам

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{4}(p_{10}^2 + q_{10}^2 + p_{20}^2 + q_{20}^2), & y_2 &= \frac{1}{2}(p_1 p_2 + q_1 q_2), \\ x_1 &= \frac{1}{2} \left[ \arcsin \frac{q_1 + q_2}{2\sqrt{y_1 + y_2}} + \arcsin \frac{q_1 - q_2}{2\sqrt{y_1 - y_2}} \right], \\ x_2 &= \frac{1}{2} \left[ \arcsin \frac{q_1 + q_2}{2\sqrt{y_1 + y_2}} - \arcsin \frac{q_1 - q_2}{2\sqrt{y_1 - y_2}} \right]. \end{aligned}$$

Получена система дифференциальных уравнений для новых переменных

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 0, & \dot{x}_1 &= v \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 - y_2^2}} \sin(2x_2) - \frac{3j}{4} y_1 \sin^2(2x_2), \\ \dot{x}_2 &= -v \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 - y_2^2}} \sin(2x_2) + \frac{3j}{8} y_2 \left( \frac{1}{3} - \cos(4x_2) \right), & (10) \\ \dot{y}_2 &= -2v \sqrt{y_1^2 - y_2^2} \cos(2x_2) + \frac{3j}{4} (y_1^2 - y_2^2) \sin(4x_2) \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$y_1(0) = (r_0^2 + k_0^2)/4, y_2(0) = 0, x_1(0) = 0, x_2(0) = -\arcsin \left( k_0 / \sqrt{r_0^2 + k_0^2} \right).$$

Здесь введены обозначения  $j = b_2/b_1, v = \sqrt{b_1 b_2} \mu$ .

В §2.2 решена система (10) в линейной постановке исходной задачи.

В §2.3 изучено влияние нелинейных эффектов на прецессию гироскопа, установленного на неподвижном основании ( $v = 0$ ). В этом случае показано, что тангенс угла прецессии имеет аналитическое представление вида

$$\operatorname{tg} 2\theta = - \frac{\hat{a} \sqrt{3} \operatorname{sn} \left( \frac{j \hat{b}}{\sqrt{2}} t, \frac{\hat{a}}{\hat{b}} \right)}{\hat{b} \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{\hat{a}^2}{\hat{b}^2} \operatorname{sn}^2 \left( \frac{j \hat{b}}{\sqrt{2}} t, \frac{\hat{a}}{\hat{b}} \right)}}, \quad (11)$$

где для констант  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  при  $k_0 \ll r_0$  справедливо соотношение  $\hat{a} < \hat{b}$  и в соответствии с начальными условиями  $\hat{a}^2 = 3r_0^2 k_0^2/4, \hat{b}^2 = 3(r_0^2 - k_0^2)^2/32$ .

Для начальных условий  $r_0 = 3 \cdot 10^{-3}, k_0 = 3 \cdot 10^{-6}$  на интервале наблюдения 1 минута уход гироскопа составляет 3.94 угл. мин., что оказывает существенное влияние на точность гироскопа.

В §2.4 изучено влияние нелинейных эффектов на прецессию гироскопа, установленного на подвижном основании. Введя новую переменную  $f = \sqrt{y_1^2 - y_2^2} \sin(2x_2)$ , осуществлен переход к новой системе уравнений для переменных  $f, y_2$

<sup>2</sup> Журавлев В.Ф. Исследование нелинейных колебаний составного маятника // Изв. РАН. МТТ. 1996. №3. С. 160–166.

$$\begin{aligned} \dot{f} &= -\frac{j}{2}y_2\sqrt{y_1^2 - y_2^2 - f^2}, \\ \dot{y}_2 &= \frac{3}{2}j\left(f - \frac{4\nu}{3j}\right)\sqrt{y_1^2 - y_2^2 - f^2} \end{aligned} \quad (12)$$

с начальными условиями  $y_1(0) = (r_0^2 + k_0^2)/4$ ,  $y_2(0) = 0$ ,  $f(0) = -r_0k_0/2$ .

Решение данной системы сводится к вычислению эллиптического интеграла. При этом вид преобразований зависит от величины  $\nu/j$ . Возможны случаи

1<sup>0</sup>.  $\nu/j \in (0, (r_0^2 - k_0^2)/(8\sqrt{2}) - r_0k_0/4)$ . Тогда

$$\operatorname{tg}2\theta = -A_1 \frac{\operatorname{sn}(B_1t, k_1)}{(1 - k_1^2 \operatorname{sn}^2(B_1t, k_1))^{1/2}}. \quad (13)$$

2<sup>0</sup>.  $\nu/j \in ((r_0^2 - k_0^2)/(8\sqrt{2}) - r_0k_0/4, 3(r_0 - k_0)^2/32)$ . Тогда

$$\operatorname{tg}2\theta = -A_2 \frac{\operatorname{sn}(B_2t, k_2)}{(1 - k_2^2 \operatorname{sn}^2(B_2t, k_2))^{1/2} \operatorname{cn}(B_2t, k_2)}. \quad (14)$$

3<sup>0</sup>.  $\nu/j > 3(r_0 - k_0)^2/32$ . Тогда

$$\operatorname{tg}2\theta = -A_3 \frac{(1 - k_3^2 \operatorname{sn}^2(B_3t, k_3))^{1/2} \operatorname{sn}(B_3t, k_3)}{\operatorname{cn}(B_3t, k_3)}. \quad (15)$$

В (13)-(15) константы  $A_i$ ,  $B_i$  и модули эллиптического интеграла  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) определяются начальными условиями  $r_0$ ,  $k_0$  и величиной  $\nu/j$ .

Для начальных условий  $r_0 = 3 \cdot 10^{-3}$ ,  $k_0 = 3 \cdot 10^{-6}$  приведенные выше интервалы для  $\nu/j$  соответствуют интервалам для угловой скорости основания  $\Omega \in (0, 0.0102)$  рад/с,  $\Omega \in (0.0102, 0.0109)$  рад/с,  $\Omega > 0.0109$  рад/с.

Например, при угловой скорости основания 3.5 рад/с, что соответствует случаю 3<sup>0</sup>, абсолютная погрешность измерения угла прецессии за минуту наблюдений составляет 1.45°, относительная погрешность – 0.025 %.

**Третья глава** посвящена вынужденным колебаниям микромеханического гироскопа в нелинейной постановке задачи. Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \omega^2\alpha &= -2\gamma_0\omega\dot{\alpha} + 2b_1\Omega\dot{\beta} + b_1\dot{\beta}^2 + \alpha\dot{\beta}^2 + \check{A}\omega^2 \sin \omega_B t, \\ \ddot{\beta} + \omega^2\beta &= -2\gamma_0\omega\dot{\beta} - 2b_2\Omega\dot{\alpha} - 2b_2\dot{\alpha}\dot{\beta} - 2b_2\alpha\dot{\beta} - \frac{b_2}{b_1}\alpha^2\dot{\beta} - 2\frac{b_2}{b_1}\alpha\dot{\alpha}\dot{\beta}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь  $\gamma_0 \ll 1$  – коэффициент вязкого трения;  $\check{A}$ ,  $\omega_B$  – амплитуда и частота внешнего воздействия.

В §3.1 при  $\Omega = 0$  получены выражения для стационарных значений амплитуд колебаний по первой и второй обобщенной координате.

Для параметров  $\check{A} = \varepsilon$ ,  $\gamma_0 = 0.05\varepsilon$ , где  $\varepsilon = 10^{-5}$  – малый положительный параметр, соответствующий максимальному прогибу пластин 16 мкм, проведено исследование асимптотической устойчивости стационарных режимов. Результаты исследования представлены на рис. 3. Разные типы линий

обозначают соответствующие стационарные режимы. Темным фоном выделены асимптотически устойчивые стационарные режимы. Введено обозначение  $\Delta\omega = \omega_B/\omega - 1$ ,  $\Delta\omega \ll 1$ .

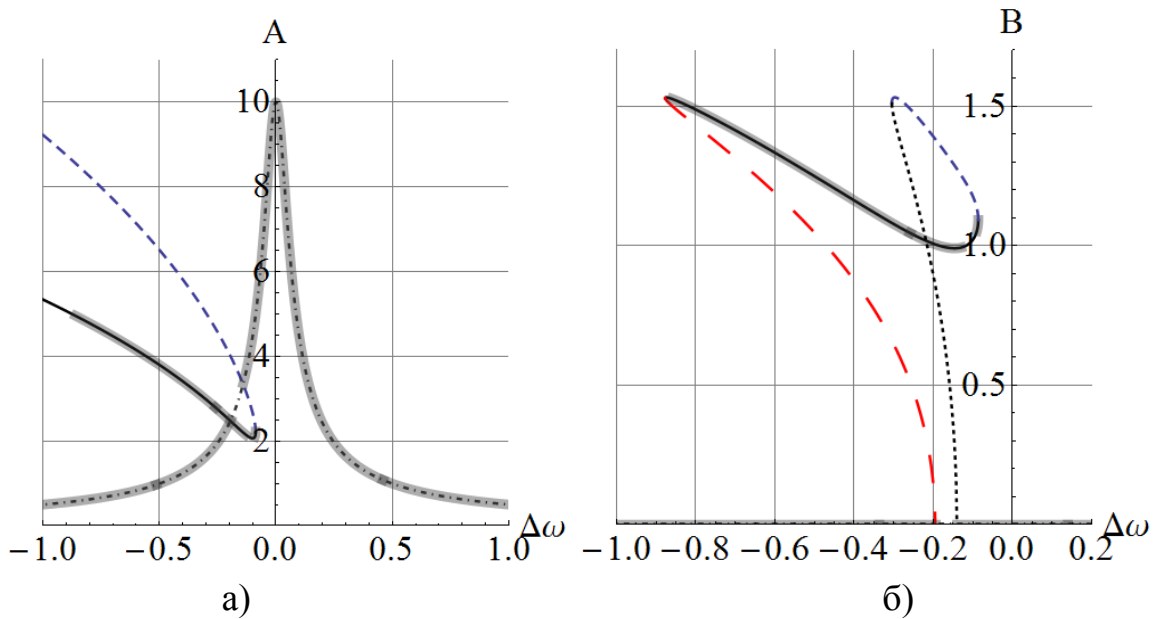


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики при  $\Omega = 0$ : а – по первой обобщенной координате; б – по второй обобщенной координате

В §3.2 проведено численное исследование асимптотической устойчивости стационарных режимов на подвижном основании. На рис. 4 приведены амплитудно-частотные характеристики: при угловой скорости основания 0.6 рад/с, на рис. 5 – при угловой скорости основания 6 рад/с.

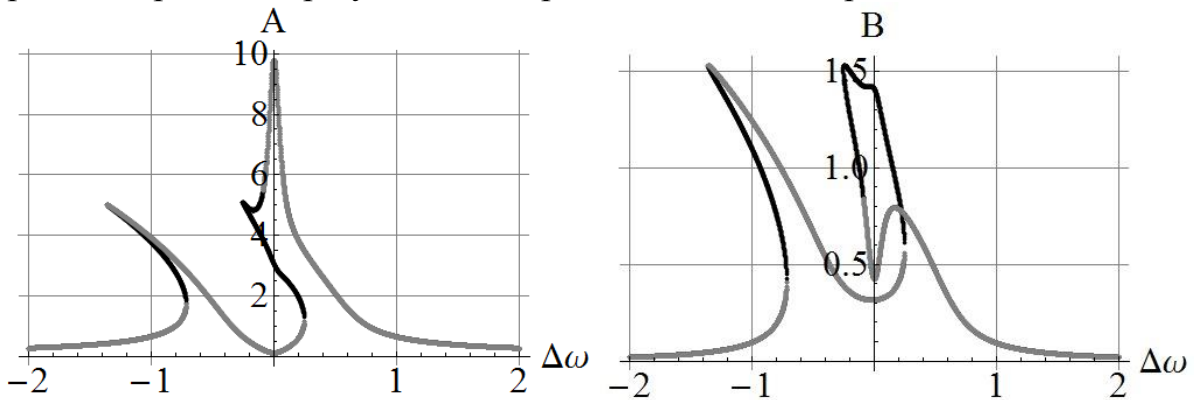


Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики при  $\Omega = 0.6$  рад/с

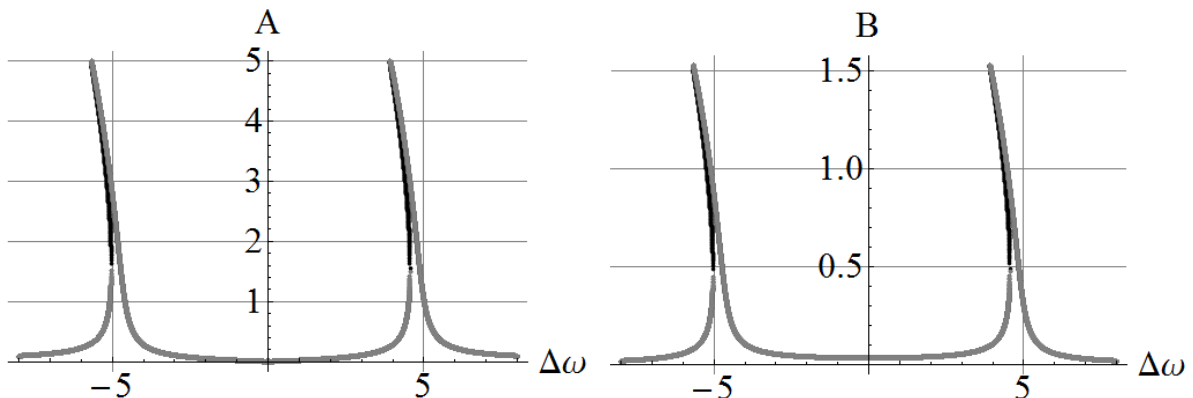


Рис. 5. Амплитудно-частотные характеристики при  $\Omega = 6$  рад/с

Из приведенных графиков можно сделать вывод, что в системе существуют как асимптотически устойчивые (выделены серым цветом), так и неустойчивые стационарные режимы. При этом наблюдаются явления срыва колебаний и скачков амплитуд. Наличие угловой скорости основания приводит к раздвоению кратной собственной частоты на две близкие частоты.

**В четвертой главе** исследуются свободные колебания микромеханического гироскопа на подвижном основании, вращающемся с достаточно большой постоянной угловой скоростью. Рассматриваются следующие динамические уравнения движения чувствительного элемента в новых переменных

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha}_0 + 2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \dot{\alpha}_1 + \omega^2 \alpha_0 &= -2\gamma_0 \omega \dot{\alpha}_0 - \frac{b_2}{b_1} \ddot{\alpha}_0 \alpha_1^2 - 2 \frac{b_2}{b_1} \dot{\alpha}_0 \alpha_1 \dot{\alpha}_1, \\ \ddot{\alpha}_1 - 2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \dot{\alpha}_0 + \omega^2 \alpha_1 &= -2\gamma_0 \omega \dot{\alpha}_1 + \frac{b_2}{b_1} \dot{\alpha}_0^2 \alpha_1.\end{aligned}\quad (17)$$

Здесь  $\alpha \equiv \alpha_1$ ,  $\alpha_0 = \sqrt{J/(0.249\rho h a b^3)} \beta$ .

В §4.1 система (17) приведена к «нормальным» координатам. Для этого введены новые переменные

$$\alpha_2 = \dot{\alpha}_0 + 2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \alpha_1, \quad \alpha_3 = \dot{\alpha}_1 \quad (18)$$

с соответствующей им новой системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\omega^2 \alpha_0 + \frac{d\alpha_2}{dt} &= \hat{Q}_0, \\ (\omega^2 + 4b_1 b_2 \Omega^2) \alpha_1 - 2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \alpha_2 + \frac{d\alpha_3}{dt} &= \hat{Q}_1, \\ -\frac{d\alpha_0}{dt} - 2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ -\frac{d\alpha_1}{dt} + \alpha_3 &= 0,\end{aligned}\quad (19)$$

где  $\hat{Q}_0, \hat{Q}_1$  есть правые части системы (17) с учетом (18).

Переход от исходных переменных  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  к «нормальным» координатам  $u_1, u_2, v_1, v_2$  осуществляется по формулам<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= [v_1 + v_2]/\sqrt{2\omega_0}, \quad \alpha_1 = -[u_1 + u_2]/\sqrt{2\omega_0}, \\ \alpha_2 &= \frac{\omega^2}{\sqrt{2\omega_0}} \left[ \frac{1}{\lambda_1} u_1 + \frac{1}{\lambda_2} u_2 \right], \quad \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} [\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2].\end{aligned}\quad (20)$$

В (20) введены обозначения  $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + b_1 b_2 \Omega^2}$ ,  $\lambda_1 = \sqrt{b_1 b_2} \Omega - \omega_0$ ,  $\lambda_2 = \sqrt{b_1 b_2} \Omega + \omega_0$ .

<sup>3</sup> **Митропольский Ю.А.** Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. Под ред. академика Н.Н. Боголюбова – Издательство Академии Наук Украинской ССР, Киев, 1955. – 284 с.

Система дифференциальных уравнений для «нормальных» координат имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 + \lambda_1 v_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \tilde{Q}_0, & \dot{u}_2 + \lambda_2 v_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \tilde{Q}_0, \\ \dot{v}_1 - \lambda_1 u_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \tilde{Q}_1, & \dot{v}_2 - \lambda_2 u_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \tilde{Q}_1. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь  $\tilde{Q}_0, \tilde{Q}_1$  получены из  $\hat{Q}_0, \hat{Q}_1$  подстановкой в них замены (20).

В §4.2 решение системы (21) в первом приближении представлено в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= A(\tau) \sin(\lambda_1 t + \varphi(\tau)), & u_2 &= B(\tau) \sin(\lambda_2 t + \psi(\tau)) \\ v_1 &= -A(\tau) \cos(\lambda_1 t + \varphi(\tau)), & v_2 &= -B(\tau) \cos(\lambda_2 t + \psi(\tau)). \end{aligned} \quad (22)$$

Используя метод двух масштабов, получены аналитические выражения для амплитуд  $A(\tau), B(\tau)$  и фаз  $\varphi(\tau), \psi(\tau)$  и угла прецессии гироскопа.

Для численного анализа были выбраны значения параметров системы и начальные условия:  $\Omega = 10$  рад/с,  $\gamma_0 = 10^{-5}$  1/с,  $\alpha(0) = 3 \cdot 10^{-3}$ ,  $\beta(0) = 3 \cdot 10^{-6}$ . Установлено, что за 10 минут наблюдений уход гироскопа составляет  $0.19^\circ$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации изложены научно-обоснованные решения, имеющие существенное значение для проектирования осцилляторных вибрационных гироскопов, а также для повышения уровня технических характеристик систем на их основе.

Основные результаты данной работы:

1. Получена новая математическая модель, описывающая динамику микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих пластин, учитывающая нелинейные эффекты.

2. В рамках принятой модели установлено, что на неподвижном основании при неточном совмещении частот колебаний по двум обобщенным координатам возникает прецессия волновой картины колебаний гироскопа, приводящая к дополнительным погрешностям в измерении угла поворота основания.

3. Показано, что медленное изменение собственной частоты колебаний чувствительных элементов в линейной постановке задачи приводит к медленному изменению амплитуд и фаз колебаний резонатора и не влияет на угол прецессии гироскопа.

4. Установлено, что нелинейные эффекты оказывают существенное влияние на уход гироскопа. Показано, что их аналитическое представление определяется величиной угловой скорости основания и начальными условиями.

5. Численным моделированием показано, что в режиме вынужденных колебаний микромеханического гироскопа в нелинейной постановке задачи при определенных частотах внешнего воздействия существуют несколько асимптотически устойчивых стационарных режимов. Увеличение угловой скорости основания, на которое помещен прибор, приводит к изменению вида

амплитудно-частотной характеристики, при этом наблюдается срыв колебаний и скачки амплитуд.

6. Получено выражение для угла прецессии гироскопа с учетом влияния угловой скорости основания на частоты собственных колебаний нелинейной системы. Установлено, что погрешность из-за нелинейных эффектов носит систематический характер.

**Основное содержание диссертации опубликовано в работах:**

1. Меркурьев И.В., Подалков В.В., Сбытова Е.С. Динамика микромеханического вибрационного гироскопа с резонатором в виде упругих пластин // Вестник МЭИ. 2013. №1. С. 5–8.

2. Меркурьев И.В., Панкратьева Г.В., Подалков В.В., Сбытова Е.С. Нелинейные колебания микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих пластин // Вестник МЭИ. 2013. №4. С. 13–18.

3. Идентификация параметров математической модели вибрационного микромеханического гироскопа (iMMG): а. с. программы для ЭВМ 2011615862 Рос. Федерация / Гавриленко А.Б., Меркурьев И.В., Сбытова Е.С.; заявитель и правообладатель: ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский университет «МЭИ». – № 2011614031; заявл. 02.06.2011; опубл. 27.07.2011.

4. Меркурьев И.В., Михайлов Д.В., Сбытова Е.С. Влияние инструментальных погрешностей изготовления на точность микромеханического гироскопа // Международная конференция "Седьмые Окуневские чтения": Материалы докладов / Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., 2011. С. 110–111.

5. Меркурьев И.В., Михайлов Д.В., Сбытова Е.С. Разработка микромеханической интегрированной системы ориентации и навигации автономного транспортного средства // Сборник расширенных тезисов Международной научно-практической конференции «Мобильные роботы и мехатронные системы», посвященной 300-летию со дня рождения М.В. Ломоносова и 90-летию со дня рождения акад. Д.Е. Охоцимского – М.: Изд-во Московского университета, 2011. С. 105–106.

6. Меркурьев И.В., Подалков В.В., Сбытова Е.С. Вынужденные колебания микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих пластин // РАДИОЭЛЕКТРОНИКА, ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА: XIX Междунар. науч.-техн. конф. студентов и аспирантов: Тез. докл. В 4 т. Т.4. М.: Издательский дом МЭИ 2013. С. 232.

7. Меркурьев И.В., Подалков В.В., Сбытова Е.С. Динамика микромеханического гироскопа с монокристаллическим дисковым резонатором // XIX Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Сборник материалов. 28-30 мая 2012 г. С. 27–28.

8. Меркурьев И.В., Подалков В.В., Сбытова Е.С. Исследование вынужденных нелинейных колебаний микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих пластин // Актуальные проблемы российской космонавтики: Труды XXXVII Академических чтений по космонавтике.

Москва, январь – февраль 2013 г./ Под общей редакцией А.К. Медведевой. М.: Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, 2013. С. 638–639.

9. **Меркурьев И.В., Подалков В.В., Сбытова Е.С.** Исследование динамики микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих пластин // РАДИОЭЛЕКТРОНИКА, ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА: XVIII Междунар. науч.-техн. конф. студентов и аспирантов: Тез. докл. В 4 т. Т.4. М.: Издательский дом МЭИ, 2012. С. 324.

10. **Меркурьев И.В., Родионова Н.А., Сбытова Е.С.** Разработка методики динамических испытаний и алгоритмов компенсации инструментальных погрешностей изготовления кольцевого микромеханического гироскопа // Сборник докладов I всероссийской научно-практической конференции молодых ученых «Инновационные подходы к развитию вооружения, военной специальной техники» (Москва, Академия Генерального Штаба ВС РФ, 2010 г.). С.197–200.

11. **Меркурьев И.В., Родионова Н.А., Сбытова Е.С.** Разработка методики стендовых калибровочных испытаний микромеханического гироскопа // РАДИОЭЛЕКТРОНИКА, ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА: XVI Междунар. науч.-техн. конф. студентов и аспирантов: Тез. докл. В 3 т. Т.3. М.: Издательский дом МЭИ, 2010. С. 332–333.

12. **Меркурьев И.В., Сбытова Е.С., Соловьев В.М., Соломатин А.К.** Влияние инструментальных погрешностей изготовления на погрешности измерений микромеханического гироскопа – акселерометра // Актуальные проблемы российской космонавтики: Труды XXXV Академических чтений по космонавтике. Москва, январь 2011 г. – М.: Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, 2011. С. 143.

13. **Меркурьев И.В., Сбытова Е.С., Устинов В.Ф.** Влияние неравножесткости упругого подвеса кольцевого резонатора на точность микромеханического гироскопа // РАДИОЭЛЕКТРОНИКА, ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА: XVII Междунар. науч.-техн. конф. студентов и аспирантов: Тез. докл. В 3 т. Т.3. М.: Издательский дом МЭИ, 2011. С. 300–301.

14. **Михайлов Д.В., Сбытова Е.С.** Разработка алгоритмического и программного комплекса для стендовых испытаний микромеханического гироскопа // Гироскопия и навигация. Материалы XIII конференции молодых ученых «Навигация и управление движением». 2011. №2 (73). С. 78–122.

15. **Сбытова Е.С., Устинов В.Ф.** Влияние средства сборки на динамику компенсационного маятникового микроакселерометра // РАДИОЭЛЕКТРОНИКА, ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА: XVI Междунар. науч.-техн. конф. студентов и аспирантов: Тез. докл. В 3 т. Т.3. М.: Издательский дом МЭИ, 2010. С. 333–334.