

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

На правах рукописи

**ТУЧИН Андрей Георгиевич**

**Баллистико-навигационное  
проектирование полётов к Луне, планетам  
и малым телам Солнечной системы**

Специальность 01.02.01 – Теоретическая механика

Диссертация  
на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Москва – 2010

# Содержание

Обозначения и сокращения .....	7
Введение .....	10
<b>Глава 1 Проектирование квазисинхронных орбит КА вокруг Фобоса для решения задачи посадки на его поверхность ...</b>	<b>18</b>
1.1 Численный алгоритм построения множества КСО с минимальным дрейфом ..	20
1.1.1 Формализация постановки задачи .....	21
1.1.2 Упрощённая модель движения КА относительно Фобоса .....	22
1.1.3 Область перебора .....	23
1.1.4 Переменные перебора .....	24
1.1.5 Численный анализ .....	26
1.1.6 Результаты численного анализа .....	28
1.1.7 Сравнение характеристик движения в полной и упрощённой моделях .....	31
1.2 Начальное приближение для расчёта множества КСО .....	32
1.2.1 Упрощённые уравнения движения .....	33
1.2.2 Предварительный численный анализ. Постановка задачи аналитических исследований .....	39
1.2.3 Подготовка системы (1.19-1), (1.19-2) к усреднению .....	43
1.2.4 Частный случай плоского кругового движения задачи Хилла ( $\rho = 1$ ) .....	44
1.2.5 Вычисление значения интеграла $\int_0^{2\pi} \frac{d\nu}{r}$ .....	46
1.2.6 Вычисление производных $\frac{\partial I}{\partial A}, \frac{\partial I}{\partial a}, \frac{\partial I}{\partial \xi}$ .....	47
1.2.7 Усреднённые уравнения движения .....	48
1.2.8 Условие для поиска начального приближения начальных условий. Выбор параметра $\kappa$ .....	49
1.2.9 Алгоритм формирования начального приближения .....	50
1.2.10 Вычислительная процедура поиска минимума .....	51
1.2.11 Результаты расчётов .....	55

1.2.12 Алгоритм проектирования КСО .....	65
--	----

## **Глава 2 Баллистика, навигация и управление движением КА на этапе его посадки на поверхность Фобоса .....**

69

2.1 Сближение с Фобосом и посадка на его поверхность: общая схема .....	69
2.1.1 Сближение с Фобосом .....	69
2.1.2 Условия посадки .....	70
2.1.3 Навигационные приборы обеспечения посадки .....	71
2.1.4 Схема управляемой посадки .....	72
2.1.5 Управление включением двигателей .....	76
2.2 Алгоритмы управления движением КА .....	78
2.2.1 Бортовые алгоритмы навигации и управления .....	78
2.2.2 Уравнения движения КА относительно Фобоса .....	80
2.2.3 Расчёт коррекций на участке перелёта от момента схода с КСО до точки начала вертикального спуска .....	82
2.2.4 Определение вектора состояния КА по измерениям лазерного высотомера и доплеровской системы .....	83
2.3 Реализация алгоритмов посадки в среде операционной системы реального времени .....	88

## **Глава 3 Определение параметров движения КА по результатам измерений при наличии немоделируемых ускорений .....**

93

3.1 Алгоритм оценки вектора состояния и суммарных воздействий возмущений между измерениями .....	96
3.1.1 Постановка задачи .....	96
3.1.2 Линейный случай .....	98
3.1.3 Нелинейный случай .....	101
3.1.4 Проверка качества измерений с использованием приведённого среднеквадратического отклонения .....	104
3.2 Алгоритм оценки вектора состояния в случае отсутствия шума .....	105

3.3	Алгоритм оценки вектора состояния и средних значений приращений возмущений .....	107
3.4	Алгоритм оценки вектора состояния с использованием метода мешающих параметров .....	109
3.4.1	Мешающие параметры в форме белого шума .....	109
3.4.2	Мешающие параметры в форме случайных величин, постоянных на всем интервале .....	112
3.5	Оценка вектора состояния и возмущений дискретной динамической системы и свойства этих оценок .....	113

## **Глава 4 Вопросы баллистики и навигации в проектах полётов к Луне, планетам и малым телам Солнечной системы ..... 126**

4.1	Проблемы баллистики и навигации в проектах полётов к Луне, точке $L_2$ системы Солнце – Земля, планетам и малым телам Солнечной системы .....	126
4.1.1	Проект «Фобос-Грунт» .....	126
4.1.2	Российские проекты полёта к Луне .....	133
4.1.3	Полёт к точке $L_2$ системы Солнце – Земля .....	135
4.1.4	Проект полёта к Венере с целью доставки на её поверхность долгоживущей станции, баллонов в атмосферу Венеры и выхода орбитальной станции на орбиту искусственного спутника Венеры .....	135
4.1.5	Проект полёта к Юпитеру с целью посадки КА на поверхность Европы, естественного спутника Юпитера (проект «Лаплас»).....	136
4.1.6	Особенности баллистико-навигационного обеспечения полётов к дальним планетам.....	137
4.1.7	Подготовка и проведение гравитационного маневра КА «Розетта».....	142
4.1.8	Проект полёта к Солнцу .....	143
4.2	Методы обеспечения навигации и управления КА дальнего космоса .....	143
4.2.1	Управление и навигация на участках перелёта к планетам с использованием ЖРД .....	144

4.2.2	Управление и навигация на участках перелёта к планетам с использованием ЭРДУ .....	147
4.2.3	Управление и навигация при проведении гравитационных маневров .....	148
4.2.4	Автономная навигация по изображениям планет на участках перелёта от Земли к планете-цели .....	153
4.2.5	Управление и навигация на орбитах искусственных спутников планет.....	156
4.3	Обобщённая баллистическая задача .....	159
<b>Глава 5 Анализ точности приведения КА к Луне и планетам .....</b>		<b>161</b>
5.1	Методика и вычислительный алгоритм оценки точности определения и прогнозирования параметров движения КА по наземным траекторным измерениям .....	163
5.1.1	Расчёт ковариационной матрицы ошибок определения вектора состояния, обусловленных неучтёнными ускорениями и случайными составляющими ошибок измерений .....	165
5.1.2	Поправки на ошибки, обусловленные систематическими составляющими ошибок измерений .....	169
5.1.3	Поправки на ошибки, обусловленные ошибками привязки фазового центра антенны .....	171
5.1.4	Поправки на ошибки, обусловленные тропосферными составляющими ошибок измерений .....	172
5.1.5	Поправки на ошибки, обусловленные ионосферными составляющими ошибок измерений .....	173
5.1.6	Прогнозирование ковариационной матрицы .....	173
5.2	Методика выбора схемы проведения коррекций при перелётах к Луне и планетам .....	175
5.3	Примеры расчётов определения точности приведения КА к Луне и планетам с использованием жидкостных реактивных двигателей .....	175
5.3.1	Определение точности приведения КА к Марсу (на примере проекта «Фобос-Грунт») .....	176

5.3.2	Определение точности приведения КА к Луне (на примере проекта «Луна-Глоб»)	186
5.3.3	Определение точности приведения КА к Венере (на примере проекта «Венера-Д»)	194
5.4	Определение точности приведения КА с ЭРДУ к Юпитеру в проекте «Лаплас»	200
5.4.1	Моделирование определения орбиты	200
5.4.2	Модель ошибок ЭРДУ	202
5.4.3	Расширенная система	205
5.4.4	Оценка ошибок определения вектора состояния и параметров линейных функций	206
5.4.5	Технология управления КА на участке перелёта	208
5.4.6	Расчёт ошибок приведения КА к Юпитеру и оценки дополнительного расхода топлива	208
5.5	Требования по точности наземных и бортовых траекторных измерений	212
5.5.1	Требования к точности наземных траекторных измерений	214
5.5.2	Требования к точности бортовых акселерометров	215
5.5.3	Требования к точности бортовых измерений направления на планеты, их спутники и астероиды	215
	Заключение	220
	Список использованных источников	223

## Обозначения и сокращения

### Структура диссертации

Текст диссертации разбит на главы. Главы делятся на разделы, разделы на пункты. В пятой главе используются подпункты. Формулы, рисунки и таблицы имеют сквозную нумерацию в пределах каждой главы.

### Система обозначений

Для скалярных переменных используется курсивный шрифт, для векторов и матриц – прямой шрифт, при этом матрицы обозначены прописными буквами, а векторы – строчными. Исключение составляют греческие буквы, которые всегда представлены в прямом начертании. Матрица для преобразования из системы координат  $p$  в систему координат  $q$  обозначается, как  $C_p^q$ .

### Библиографические ссылки

Список использованных источников упорядочен в алфавитном порядке. В тексте диссертации ссылки на источники даны в квадратных скобках. Сначала приводится номер в списке, а через тире – фамилия автора и год издания. Для ссылок на научно-технические отчёты, выпущенные ИПМ им. М.В. Келдыша, (в их подготовке участвовал автор диссертации) используется сокращение НТО и инвентарный номер. Последние две цифры инвентарного номера указывают год выпуска отчёта.

### Перечень сокращений

CCSDS	– The Consultative Comitee for Space Data Systems;
Delta-DOR	– Delta Differencial One-way Ranging measurement;
DSN	– Deep Space Network;
ESA	– European Space Agency;
GPS	– Global Positioning System;
RNB	– Radial – Normal (=Transversal) – Binormal reference frame;
АОНС	– автономная оптическая навигационная система;

АСП	– автономная система посадки;
БИБ	– бесплатформенный инерциальный блок;
БКУ	– бортовой комплекс управления;
БНО	– баллистико-навигационное обеспечение;
БОКЗ-МФ	– блок определения координат звёздный, модифицированный;
ВА	– возвращаемый аппарат;
ДИСД	– доплеровский измеритель скорости и дальности;
ДМТ	– двигатель малой тяги;
ДУ	– двигательная установка;
ЖРД	– жидкостный реактивный двигатель;
ЗГ	– задающий генератор;
ИП	– измерительный пункт;
ИСЗ	– искусственный спутник Земли;
ИСМ	– искусственный спутник Марса;
КА	– космический аппарат;
КСО	– квазисинхронная орбита;
ЛВ	– лазерный высотомер;
ЛКИ	– лётно-конструкторские испытания;
МДУ	– маршевая двигательная установка;
НТО	– научно-технический отчёт;
ОИСМ	– орбита искусственного спутника Марса;
ОНА	– остронаправленная антенна;
ПА	– посадочный аппарат;
ПМ	– перелётный модуль;
ПСК	– приборная система координат;
ПСО	– постоянная солнечная ориентация;
РН	– ракета-носитель;
РСДБ	– радиоинтерферометрические измерения со сверхдлинной базой;
РЭ	– референц-эллипсоид;
СК	– система координат;

СКО	– среднеквадратичная ошибка;
ТВ	– телевидение;
ТМИ	– телеметрическая информация;
ЦМ	– центр масс;
ЦПФ	– цифровая поверхность Фобоса;
ЭМИО	– электромаховичные исполнительные органы;
ЭРДУ	– электроракетная двигательная установка.

### **Сокращения в индексах**

E	– Земля (Earth);
grad	– градиент;
M	– Марс (Mars);
obs	– измеренный (observed)
Ph	– Фобос (Phobos);
prog	– программный;
rcv	– приёмник (receiver);
real	– реальный;
RF	– вращающаяся система координат (rotating frame);
S	– Солнце (Sun);
sc	– космический аппарат (spacescraft);
snd	– передатчик (sender);
td	– «сухая» (dry) поправка;
tw	– «мокрая» (wet) поправка.

## Введение

Диссертация посвящена теоретико-механическим вопросам проектирования полетов космических аппаратов (КА) к планетам Солнечной системы и их естественным спутникам. Разработан метод проектирования квазисинхронных орбит КА вокруг Фобоса, предназначенных для обеспечения посадки КА на его поверхность. Разработаны методы определения параметров движения КА по траекторным измерениям на фоне работы двигательной установки; разработаны методы расчета точности приведения КА к планете цели при использовании химических и электроракетных двигателей с учетом ошибок прогноза движения КА, ошибок исполнения маневров и коррекций и различных возмущений, вносимых в движение центра масс КА. Разработанные методы опираются на опыт баллистико-навигационного обеспечения полетов к Венере КА «Венера-15,16», «Вега-1,2», к Марсу КА «Фобос-2» и нашли применение в проекте «Фобос-Грунт», при проектировании полетов к Луне в проектах «Луна-Ресурс» и «Луна-Глоб», к Венере (проект «Венера-Д»), в систему Юпитера с целью посадки КА на его естественный спутник Европу. Это определяет актуальность и практическую значимость диссертации.

Цель работы состоит в разработке теоретико-механических и математических методов, обеспечивающих баллистику и навигацию в проекте «Фобос-Грунт» и распространению этих методов на решение задач навигации и управления в перспективных отечественных проектах полётов к Луне (проекты «Луна-Ресурс» и «Луна-Глоб»), к Венере (проект «Венера-Д»), и в систему Юпитера (проект «Лаплас»).

Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором на 16-м симпозиуме ИФАС по автоматическому управлению (Санкт-Петербург, июнь 2004 г.); на 17-м (Москва, июнь 2003г) и 18-м (Мюнхен, октябрь 2004г.) Международных симпозиумах по динамике космического полёта, на Общероссийском семинаре «Современные методы навигации и управления движением» (Институт проблем Управления РАН, 31 марта 2009 г.), на семинаре «Солнечная система и смежные проблемы физики и механики» (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 18 марта 2008 г.).

Список основных публикаций по теме диссертации состоит из 18 работ; 7 работ из этого списка опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК; 5 из них в соавторстве. Из работ, выполненных с соавторами, в диссертацию включены только результаты, полученные автором.

Основные результаты, полученные в диссертации, приведены в заключении.

В первой главе рассмотрены методы проектирования квазисинхронных орбит КА вокруг Фобоса для решения задачи посадки на его поверхность. Результаты, представленные в этой главе, описаны в работах: [112 – Tuchin, 2003; 57 – Тучин, 2007; 60 – Тучин, 2008; 61 – Тучин, 2009; 59 – Тучин, 2008]

Одним из основных этапов проекта «Фобос-Грунт» является этап непосредственного сближения КА с Фобосом. На этом этапе должны быть получены навигационные данные, необходимые для успешной работы автономной системы посадки. Для решения этой задачи необходима такая орбита КА, двигаясь по которой КА не удалялся бы более, чем на 70 км от Фобоса. К классу таких орбит в терминологии ограниченной задачи трёх тел относятся квазиспутниковые орбиты [37 – Лидов, 1994]. Это орбиты с обратным движением, охватывающие тело меньшей массы и расположенные вне сферы его действия. Ниже будем называть такие орбиты квазисинхронными. Двигаясь по такой орбите, КА облетает Фобос за интервал времени, который примерно равен периоду обращения Фобоса вокруг Марса.

Моделирование показало, что требуются четыре дня полёта КА на КСО для определения параметров движения с необходимой точностью [67 – Тучин, 2002; 66 – Тучин, 2010]. Поэтому интервал пребывания на КСО оценивается пятью сутками. К номинальной КСО предъявляется ряд требований. За время пребывания на КСО с борта КА должно быть получено телевизионное изображение предполагаемого района посадки и проверена работоспособность лазерного высотомера автономной системы посадки. В момент начала сеанса посадки, при получении изображения района посадки и проверки работоспособности лазерного высотомера, удаление от поверхности Фобоса не должно превосходить 60 км и должны выполняться условия по освещённости и радиосвязи со станциями

слежения в Евпатории и Уссурийске. Если в штатном сеансе работы автономной системы посадка не будет осуществлена и КА останется на прежней орбите, должна быть обеспечена возможность повторения попытки посадки на Фобос.

Выбор КСО предполагается проводить по следующей схеме. Из условий освещенности, обеспечения радиосвязи со станциями слежения, возможно, других условий выбирается точка над поверхностью Фобоса и момент времени, в который КСО должна пройти через эту точку. В первой главе диссертации разработан метод, позволяющий найти такую квазисинхронную орбиту, проходящую через заданную точку в заданное время, которая при других прохождении долготы выбранной точки удаляется от неё на минимальное расстояние. Это свойство обеспечивает выполнение условия по максимальному удалению КА от поверхности Фобоса при каждом прохождении над районом посадки. Тем самым возможность телевизионной съёмки предполагаемого участка посадки и условия проверки работоспособности лазерного высотомера будут обусловлены только условиями освещённости и радиосвязи со станциями слежения.

Вторая глава посвящена алгоритмам навигации и управления в схеме посадки на Фобос. Результаты, представленные в этой главе, описаны в работах [114 – Tushin, 2004; 63 – Тучин, 2009]. В этой главе содержится модель движения КА относительно Фобоса, которая достаточно проста для бортовых вычислений, обеспечивает требуемую точность и позволяет рассчитывать коррекции и решать навигационные задачи. Далее строится алгоритм оценки вектора состояния КА по измерениям лазерного высотомера и доплеровского измерителя скорости и дальности с использованием цифровой модели поверхности Фобоса, разработанной специалистами Института геохимии и аналитической химии им. В.И. Вернадского РАН. В этой главе анализируется схема посадки и условия ее выполнения.

В третьей главе рассмотрены вопросы определения параметров движения КА по результатам траекторных измерений при наличии немоделируемых действующих ускорений.

Задача определения параметров движения космического аппарата (КА) является одной из основных задач, решаемых в ходе управления его полётом. При

решении этой задачи часто возникает ситуация, в которой определение параметров движения КА надо выполнять на фоне работы двигателей. В качестве примера можно привести следующие задачи: контроль участка выведения КА на орбиту искусственного спутника; оперативная оценка исполнения импульсов по измерениям наземных средств на фоне работы двигательной установки; определение параметров движения КА с электроракетной двигательной установкой (ЭРДУ).

К вопросам, которые рассматриваются в диссертации, в первую очередь, относятся проблемы решения задач навигации и управления полётом с включённым ЭРДУ. Фактическое ускорение, создаваемое ЭРДУ, отличается от модели этого ускорения, заложенного в расчёты. Имеются ошибки величины и ориентации вектора тяги ЭРДУ в пространстве.

Решение указанных выше задач основано на применении моделей динамических систем, в которых помехи имеются не только в измерениях, но и влияют на поведение самого объекта. Такие модели обычно исследуются в рамках линейных моделей в общей теории систем. Применение этих методов в задачах определения движения КА требует развития соответствующих нелинейных моделей и учёта особенностей уравнений динамики и измеряемых данных.

Результаты, представленные в данной главе, описаны в работе [62 – Тучин, 2009] в части алгоритмов определения параметров движения КА и в работе [58 – Тучин, 2004].

При решении указанных выше задач применяются различные модели шума и, соответственно, используются различные методы и алгоритмы оценки вектора состояния. Могут применяться комбинированные методы осреднения.

В настоящее время для определения параметров движения космических аппаратов используются два типа алгоритмов:

- метод наименьших квадратов;
- расширенный фильтр Калмана.

Многолетняя практика показала, что метод наименьших квадратов является очень надёжным методом определения параметров. Оценка получается в результате

поиска минимума функционала, представляющего собой сумму взвешенных невязок между измеренными значениями и их расчётными аналогами. При этом расчётные аналоги функционально зависят от уточняемых параметров. Особенностью метода является то, что модель движения КА должна быть достаточно точной. Не допускается наличие больших возмущений, которые не задаются в виде зависимостей от уточняемых параметров. Поэтому применение метода наименьших квадратов в случае неизвестных интервалов работы двигателя малой тяги в данном случае вызывает определённые проблемы. Метод наименьших квадратов может быть успешно использован на этапе, когда уже имеется оценка моментов включения и выключения двигателя и создаваемого им ускорения.

Расширенный фильтр Калмана является эмпирическим расширением фильтра Калмана для линейных систем на нелинейный случай. Расширенный фильтр Калмана предполагает наличие неизвестного фазового шума, воздействующего на систему. Характеристики шума задаются его ковариационной матрицей. Особенностью этого метода является то, что текущие значения оцениваемых параметров должны находиться в достаточно близкой окрестности относительно их истинных значений. Кроме того, метод требует, чтобы не было длительных интервалов времени, в которых нет измерений.

В диссертации для оценки вектора состояния в условия воздействия шума разработан метод, который обеспечивает оценку вектора состояния и суммарные возмущения между измерениями. Предполагается, что фазовый шум, воздействующий на систему, является белым или может быть получен из белого шума формирующими фильтрами. Пример использования формирующих фильтров для формирования шума, вызванного ошибками исполнения программы ЭРДУ, рассмотрен в пятой главе.

Суть предложенного метода состоит в том, что оценка определяется из условия минимизации функционала, зависящего как от невязок измеренных значений и их расчётных аналогов, так и от величин определяемых возмущений. Минимизация функционала выполняется итерационно. На каждом шаге итерационного процесса определяется поправка к искомым параметрам.

Определение поправки производится из условия минимума функционала для линейной системы. Поиск минимума функционала для линейной системы приводит к двум последовательностям рекуррентных формул. Первая последовательность рекуррентных формул идёт от первого измерения к последнему измерению и позволяет определить поправку на момент последнего измерения. Вторая последовательность рекуррентных формул идёт от последнего значения к первому и позволяет восстановить возмущения. Первая последовательность рекуррентных формул эквивалентна рекуррентным формулам фильтра Калмана для линейной системы.

В четвёртой главе рассмотрены вопросы баллистики и навигации в проектах полётов к Луне, планетам и малым телам Солнечной системы, в которых принимал участие автор диссертации. Цель главы состоит в изучении особенностей проектов с точки зрения баллистики и навигации и сведению частных задач проектов к некоторой обобщённой задаче.

Четвертая глава содержит анализ проблем баллистики и навигации в проектах полётов к Луне, точке  $L_2$  системы Солнце – Земля и планетам Солнечной системы. Рассмотрены отечественные проекты «Фобос-Грунт», полёты к Луне, в окрестность точки  $L_2$  системы Солнце – Земля, к Венере и Юпитеру, а также проекты «Кассини», «New Horizons» и «Пионер-10, -11» (США).

Конкретные задачи проектов, рассмотренных в четвёртой главе, соответствуют следующей обобщённой задаче.

После выполнения динамических операций имеется область ошибок приведения КА к цели, например, приведение КА к планете или выход над заданной точкой спутника планеты в заданное время для начала сеанса посадки. В связи с этим следует определить требования к средствам наземных траекторных измерений: их точности и их размещение на оси времени полёта. Далее следует выбрать интервалы проведения навигационных сеансов, число коррекций, моменты проведения коррекций с учётом ошибок их исполнения и навигационных ошибок.

Ключевым моментом решения баллистической задачи является гарантированная оценка погрешностей знания параметров движения. При этом

ошибки приведения КА к цели и затраты характеристической скорости должны удовлетворять заданным ограничениям.

Например, увеличение интервала выполнения траекторных измерений позволяет уменьшить навигационную ошибку, но приводит к увеличению затрат характеристической скорости. Заблаговременное проведение коррекции при подлёте к планете-цели, позволяет сократить затраты характеристической скорости, но может привести к большим ошибкам прилёта, т. к. с течением времени возрастает отклонение от идеальной траектории, получаемое от ошибок исполнения коррекции. Следует также отметить эффект уменьшения навигационных ошибок по мере приближения к планете-цели, который обусловлен повышением информативности наземных траекторных измерений при достижении КА сферы действия планеты. Предлагаемый метод гарантированной оценки точности решения обобщённой баллистической задачи рассмотрен в пятой главе.

Результаты, представленные в пятой главе, описаны в разделах анализа точности определения и прогнозирования параметров движения КА в проекте «Фобос-Грунт» [61 – Тучин, 2009; 66 – Тучин, 2010; 67 – Тучин, 2002, 113 – Tuchin, 2004]. Эти методы применимы для анализа точности определения и прогнозирования параметров движения КА в полётах к Луне, планетам и малым телам Солнечной системы и были использованы при подготовке научно-технических отчётов [122 – НТО 5-14-04; 124 – НТО 5-04-06; 132 – НТО 5-31-07] по проекту «Фобос-Грунт»; [128 – НТО 5-06-08; 135 – НТО 5-02-09] по проектам полёта к Луне; [141 – НТО 5-013-09] по проекту «Венера-Д».

Фактическая точность приведения КА к планете-цели определяется ошибками прогнозирования параметров движения, ошибками исполнения маневров или коррекций, а также неучтёнными возмущениями в движении центра масс КА.

Предложенный в пятой главе метод гарантированной оценки точности решения обобщённой баллистической задачи основан на комбинированном применении метода ковариационного анализа и метода статистических испытаний. Для оценки навигационных ошибок применяется ковариационный анализ. Влияние ошибок исполнения определяется методом статистических испытаний. Пусть

заданы моменты проведения коррекций и исходное множество ошибок, например, после выхода на отлётную траекторию от Земли или после выхода на орбиту искусственного спутника Луны или планеты. Выполним расчет навигационных ошибок на момент проведения первой коррекции с использованием опорной траектории. Свяжем каждую реализацию ошибки по целевым параметрам с отклонением вектора скорости от вектора скорости опорной траектории на момент задания исходного множества ошибок. Разобьём множество ошибок на ячейки по значениям ошибок целевых параметров. Каждую ячейку будем представлять одной или несколькими реализациями. Выполним прогноз движения КА на момент проведения первой коррекции по выбранным представителям каждой ячейки, далее выполним расчет коррекции и искадим его навигационными ошибками и ошибками исполнения. В результате получено множество ошибок на момент проведения первой коррекции и максимальные затраты характеристической скорости на её проведение. Далее переходим ко второй коррекции и последующим коррекциям. После выполнения расчётов по последней коррекции получаем суммарные максимальные затраты характеристической скорости и оценку ошибок приведения. Выполняя расчёты по описанному выше методу, получаем характеристики рассматриваемой схемы проведения коррекций: точность приведения и затраты характеристической скорости. Далее, варьируя числом коррекций и моментами их исполнения, получаем приемлемую схему.

Для применения метода необходимо иметь функциональную связь ошибок по целевым параметрам с отклонением вектора скорости от его значения по опорной траектории. Например, при решении задачи приведения КА к Луне или планете – эта функциональная связь определяется зависимостью значений параметров картинной плоскости от компонент вектора скорости. При решении задач приведения КА на гало-орбиту вокруг точки  $L_2$  эта зависимость определяется зависимостью от вектора скорости параметров, определяющих геометрию гало-орбиты. Работа метода показана на задачах приведения КА к Луне или планете.

# **Глава 1 Проектирование квазисинхронных орбит КА вокруг Фобоса для решения задачи посадки на его поверхность**

Эта глава посвящена вопросам выбора множества квазисинхронных орбит (КСО), с которых обеспечивается посадка на Фобос. Результаты, представленные в этой главе, описаны в работах [112 – Tuchin, 2003; 57 – Тучин, 2007; 60 – Тучин, 2008; 61 – Тучин, 2009; 59 – Тучин, 2008].

Одним из основных этапов проекта «Фобос-Грунт» является этап непосредственного сближения КА с Фобосом. На этом этапе должны быть получены навигационные данные, необходимые для успешной работы автономной системы посадки. Для решения этой задачи необходима такая орбита КА, двигаясь по которой КА не удалялся бы более, чем на 70 км от Фобоса. К классу таких орбит в терминологии ограниченной задачи трёх тел относятся квазиспутниковые орбиты [37 – Лидов, 1994]. Это орбиты с обратным движением, охватывающие тело меньшей массы и расположенные вне сферы его действия. Ниже будем называть такие орбиты квазисинхронными. Двигаясь по такой орбите, КА облетает Фобос за интервал времени, который примерно равен периоду обращения Фобоса вокруг Марса.

Моделирование показало, что требуются четыре дня полёта КА на КСО для определения параметров движения с необходимой точностью [67 – Тучин, 2002; 66 – Тучин, 2010]. Поэтому интервал пребывания на КСО оценивается пятью сутками. К номинальной КСО предъявляется ряд требований. За время пребывания на КСО с борта КА должно быть получено телевизионное изображение предполагаемого района посадки и проверена работоспособность лазерного высотомера автономной системы посадки. В момент начала сеанса посадки, при получении изображения района посадки и проверки работоспособности лазерного высотомера, удаление от поверхности Фобоса не должно превосходить 60 км и должны выполняться условия по освещённости и радиосвязи со станциями слежения в Евпатории и Уссурийске. Если в штатном сеансе работы автономной

системы посадки не будет осуществлена и КА останется на прежней орбите, должна быть обеспечена возможность повторения попытки посадки на Фобос.

Выбор КСО предполагается проводить по следующей схеме. Из условий освещенности, обеспечения радиосвязи со станциями слежения, возможно, других условий выбирается точка над поверхностью Фобоса и момент времени, в который КСО должна пройти через эту точку. Из семейства квазисинхронных орбит, проходящих через заданную точку в заданное время, выбирается такая КСО, которая при других прохождении долготы выбранной точки удаляется от неё на минимальное расстояние. Это требование должно обеспечить выполнение ограничения на максимальное удаление КА от поверхности Фобоса при каждом прохождении над районом посадки. Тем самым возможность телевизионной съёмки предполагаемого участка посадки и условия проверки работоспособности лазерного высотомера будут обусловлены только условиями освещенности и радиосвязи со станциями слежения.

Специалисты Института геохимии и аналитической химии им. М.В. Вернадского РАН указали несколько интересных для исследования точек поверхности Фобоса. Координаты точек посадки задаются в системе координат, центр которой находится в центре фигуры Фобоса. Положение точек местности определяется сферическими координатами. Широты считаются положительными к северу от экватора. Долгота измеряется в экваториальной плоскости к западу от нулевого меридиана. Сеанс посадки целесообразно начинать с упреждением достижения КА долготы точки посадки. Величина этого упреждения может находиться в диапазоне от  $1^\circ$  до  $60^\circ$ . В момент начала сеанса посадки должны быть обеспечены условия освещённости и радиосвязи с наземными станциями слежения. По моменту времени прохождения над заданной долготой всегда можно определить момент времени прохождения долготы  $270^\circ$ . Поэтому рассмотрим задачу построения такой КСО, которая проходит в заданное время над точкой с долготой  $270^\circ$  и удалена от поверхности на расстояние в диапазоне от 50 до 60 км. Потребуем от этой КСО, чтобы при других прохождении КА долготы  $270^\circ$  его удаление от начальной точки было минимальным.

Движение по КСО представлено как облёт Фобоса по дрейфующему эллипсу. Такое описание уже использовано в работах [94 – Henon, 1970; 84 – Benest, 1976; 31 – Коган, 1988; 38 – Лидов, 1994] для получения качественных результатов. В диссертации это представление развивается для получения инструмента для проектирования посадки на Фобос. Большая полуось дрейфующего эллипса ориентирована вдоль орбитального движения Фобоса. КА обегает эллипс в направлении, обратном к орбитальному движению Фобоса, с периодом, близким к периоду обращения Фобоса вокруг Марса. Дрейф эллипса также проходит вдоль оси, ориентированной по орбитальному движению Фобоса.

Для обеспечения успешной посадки нужна такая КСО, дрейф которой был бы минимален. Искомые КСО с минимальным дрейфом обладают тем важным свойством, что прохождение над точкой посадки всегда происходит на одной и той же высоте. Это позволит при необходимости, если процесс посадки не был начат, начать его в одном из следующих прохождений над районом посадки, повторить посадку, произвести телевизионную съёмку района посадки, выполнить измерения высоты до поверхности Фобоса при его облёте.

Вначале рассмотрим численный алгоритм построения КСО, с помощью которого были найдены КСО для удалений на 50 км, 55 км и 60 км. Затем рассмотрим аналитический метод, позволяющий найти начальное приближение. Этот метод позволил ускорить процесс расчёта множества КСО и вычислить КСО для удалений от поверхности Фобоса в диапазоне от 50 до 200 км.

## **1.1 Численный алгоритм построения множества КСО с минимальным дрейфом**

В данном разделе рассмотрен численный алгоритм, позволяющий вычислить три множества КСО, обладающих свойством минимального дрейфа, для удалений от поверхности Фобоса на 50, 55 и 60 км в начальный момент. Каждое такое множество содержит параметры орбиты в зависимости от истинной аномалии Фобоса, которая соответствует моменту времени, в который КА проходит долготу  $270^\circ$ . При поиске КСО в качестве упрощённой модели движения используется

плоская эллиптическая задача Хилла в безразмерных переменных. Для ограничения области перебора используются диапазон значений интеграла Якоби и диапазон значений разности угловых скоростей обращения КА вокруг Фобоса и Фобоса вокруг Марса.

### 1.1.1 Формализация постановки задачи

Требуется предложить такой метод выбора начальных условий, который позволил бы для любого заданного момента времени получать КСО, проходящую в этот момент времени на высоте  $h$  (50 – 60 км) над точкой поверхности Фобоса с широтой  $0^\circ$  и долготой  $270^\circ$  и обладающую свойством минимального разброса высот относительно  $h$  при предыдущих и последующих прохождении над этой точкой. Задача в такой постановке требует учёта вращения Фобоса вокруг своей оси.

Постановку задачи можно упростить, воспользовавшись тем, что нулевой меридиан Фобоса постоянно обращён к Марсу. Рассмотрим движение КА относительно Фобоса в его орбитальной системе координат. Центр этой системы координат совпадает с центром масс Фобоса. Ось  $X$  направлена по линии визирования Марс – Фобос. Ось  $Y$  ортогональна оси  $X$ , лежит в плоскости орбиты Фобоса и направлена в сторону его орбитального движения. Так как нулевой меридиан Фобоса постоянно обращён в сторону Марса, точкам, расположенным на отрицательной части оси  $Y$ , в этой системе координат соответствуют подспутниковые точки с долготой, близкой к  $270^\circ$ . Поэтому будем рассматривать задачу в следующей постановке. Задано положение КА в орбитальной системе координат Фобоса  $T: X = 0, Y = -(\rho_{270} + h), Z = 0$ , где  $\rho_{270}$  — расстояние от центра масс Фобоса до точки экватора Фобоса с долготой  $270^\circ$ . Задавая различные значения вектора скорости, будем получать различные орбиты. При этом только в части случаев КА будет оставаться на КСО [112 – Tuchin, 2003].

Рассмотрим семейство КСО, проходящих через заданную точку  $T$ . Для каждой КСО определим множество точек пересечения с отрицательной частью оси  $y$  и максимальное удаление точек этого множества от точки  $T$ . Будем искать такую КСО, для которой минимально максимальное удаление.

### 1.1.2 Упрощённая модель движения КА относительно Фобоса

Если бы эксцентриситетом орбиты Фобоса (0.015) можно было бы пренебречь, то движение КА относительно Фобоса описывалось бы задачей Хилла [21 – Дубошин, 1975; 53 – Себехей, 1982]. Однако вычислительные эксперименты показали, что в этом случае модельные и реальные орбиты сильно различаются [112 – Tschin, 2003]. Поэтому в качестве упрощённой модели движения используется модель движения, аналогичная задаче Хилла, но с учётом эксцентриситета орбиты Фобоса. В безразмерных переменных уравнения движения имеют вид:

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + \rho \left( 3x - \frac{x}{r^3} \right), \quad \ddot{y} = -2\dot{x} - \rho \frac{y}{r^3}, \quad \rho = \frac{1}{1 + e \cos \upsilon}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1.1)$$

где  $e$  – эксцентриситет орбиты Фобоса,  $\upsilon$  – истинная аномалия Фобоса, а точка обозначает производную по  $\upsilon$ .

Безразмерные переменные  $x$  и  $y$  связаны с положением КА относительно Фобоса  $X, Y, Z$  следующими соотношениями:

$$X = x p_{\text{Ph}} \rho \cdot \sqrt[3]{\frac{\mu_{\text{Ph}}}{\mu_{\text{Ph}} + \mu_{\text{M}}}}, \quad Y = y p_{\text{Ph}} \rho \cdot \sqrt[3]{\frac{\mu_{\text{Ph}}}{\mu_{\text{Ph}} + \mu_{\text{M}}}}, \quad Z = 0,$$

где

$p_{\text{Ph}}$  – фокальный параметр орбиты Фобоса,

$\mu_{\text{Ph}}$  – гравитационный параметр Фобоса,

$\mu_{\text{M}}$  – гравитационный параметр Марса..

Уравнения движения (1.1) могут быть получены из уравнений движения ограниченной задачи трёх тел в форме Нехвила [20 – Дубошин, 1968].

Рассмотрим решения системы дифференциальных уравнений (1.1), проходящие через точку:  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = -b_0$  при заданном  $\upsilon_0$ . В качестве  $b_0$  будем рассматривать три значения: 2.456423, 2.654142 и 2.851861, соответствующие удалениям на 50, 55 и 60 км при  $\upsilon_0 = \pi/2$ . Эти решения будем рассматривать на интервале изменения истинной аномалии от  $\upsilon_0$  до  $\upsilon_0 + 2\pi \cdot 10^4$ .

Из всего множества решений, проходящих через заданную точку, оставим только такие, для которых на рассматриваемом интервале справедливо неравенство:  $0.5 < r < 10$ .

Пусть  $x(\nu, b_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \nu_0)$  и  $y(\nu, b_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \nu_0)$  — решение системы (1.1), проходящее через точку:  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = -b_0$  при некоторых значениях производных:  $\dot{x}_0$  и  $\dot{y}_0$  в момент, соответствующий значению истинной аномалии  $\nu_0$ . Рассмотрим точки пересечения траектории на плоскости  $xu$  с отрицательной частью оси  $y$ . Среди этих точек найдем точку с максимальным удалением от точки  $x_0, y_0$ . Таким образом, определена функция:

$$\Delta(\nu_0, b_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0) = \max \left\{ |y(\nu) - y_0| : x(\nu) = 0, y(\nu) < 0, \nu_0 \leq \nu \leq 2\pi \cdot 10^4 \right\}$$

Требуется найти значения  $\dot{x}_0$  и  $\dot{y}_0$ , при которых значение  $\Delta(\nu_0, b_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0)$  достигает минимума.

### 1.1.3 Область перебора

Для ограничения области перебора используем аналог интеграла Якоби для системы (1.1) и относительную разность угловых скоростей обращения КА вокруг Фобоса и Фобоса вокруг Марса.

Используя стандартный приём, получим аналог интеграла Якоби для системы (1.1). Перейдем к каноническим переменным, а затем введём две вспомогательные сопряжённые переменные, обеспечивающие переход к автономной системе.

Уравнения движения (1.1) преобразуются к каноническому виду заменой переменных:  $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$ ,  $p_1 = \dot{x} - y$ ,  $p_2 = \dot{y} + x$ , в результате которой получим:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (i=1,2),$$

$$G(q, p, \nu) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + p_1 q_2 - p_2 q_1 + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) - \frac{3}{2}\rho(\nu)q_1^2 - \frac{\rho(\nu)}{r}, \quad (1.2)$$

$$r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}.$$

Введём вспомогательные переменные:  $q_3 = \nu$  и  $p_3$ . Положим  $G^*(q, p, q_3) = G(q, p, q_3) + p_3$ . Очевидно, что при этом первые две пары уравнений

(1.2) не изменятся, а уравнения для переменных  $q_3$  и  $p_3$  имеют вид:

$$\dot{q}_3 = \frac{\partial G^*}{\partial p_3} = 1, \quad \dot{p}_3 = -\frac{\partial G^*}{\partial q_3}.$$

Каноническая система с гамильтонианом  $G^*(q, p, q_3)$  является автономной, и поэтому  $G(q, p, q_3) + p_3 = \text{const}$ . Не ограничивая общности, положим  $p_3(v_0) = 0$ . В этом случае  $G^*(q, p, q_3) = G(q_0, p_0, v_0)$ . Область анализа можно ограничить, если оценить диапазон изменения  $G(q, p, v)$  на интересующем нас множестве траекторий. Это можно сделать, если получить оценки  $G^*(q, p, v)$  и  $p_3(v)$ . В результате численного анализа класса КСО, рассмотренного в [112 – Tuchin, 2003], было получено, что  $0.8 < G^* < 2.2$ ,  $|p_3| < 0.25$ .

Под средним значением относительной разности угловых скоростей обращения КА вокруг Фобоса и Фобоса вокруг Марса понимается отношение разности числа оборотов КА вокруг Фобоса и Фобоса вокруг Марса к числу оборотов Фобоса вокруг Марса.

Среднее значение относительной разности угловых скоростей обращения КА вокруг Фобоса и Фобоса вокруг Марса было также получено в результате численного анализа, выполненного в [112 – Tuchin, 2003]. Для КСО, удаляющихся от Фобоса в диапазоне от 50 до 150 км, эта величина изменяется в диапазоне от 0.05 до 0.3 оборота за один оборот Фобоса вокруг Марса.

Таким образом, для КСО, удаляющихся от Фобоса в диапазоне от 50 до 150 км, выполняется двойное неравенство  $0.55 < G(q, p, v) < 2.45$ , а среднее значение относительной разности угловых скоростей не превосходит 0.3.

#### **1.1.4 Переменные перебора**

Чтобы учесть ограничения области перебора по разности угловых скоростей обращения КА вокруг Фобоса и Фобоса вокруг Марса, следует перейти к переменным, которые содержат этот параметр. Это достигается переходом к

полярным координатам  $Q_1$  и  $Q_2$ , где  $Q_1$  — радиус, а  $Q_2$  — угол. Координаты  $q_1$  и  $q_2$  связаны с  $Q_1$  и  $Q_2$  соотношениями

$$q_1 = Q_1 \cos Q_2, \quad q_2 = Q_1 \sin Q_2. \quad (1.3)$$

Для нахождения обобщённых импульсов  $P_1$  и  $P_2$ , соответствующих  $Q_1$  и  $Q_2$ , используем производящую функцию  $S(p_1, p_2, Q_1, Q_2) = p_1 Q_1 \cos Q_2 + p_2 Q_1 \sin Q_2$ .

По теореме Якоби [21 – Дубошин, 1975] каноническая форма уравнений сохранится, если справедливо

$$P_1 = \frac{\partial S}{\partial Q_1}, \quad P_2 = \frac{\partial S}{\partial Q_2} \quad (1.4)$$

Из этого соотношения следует система уравнений:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos Q_2 & \sin Q_2 \\ -Q_1 \sin Q_2 & Q_1 \cos Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Разрешая эту систему относительно  $p_1$  и  $p_2$ , получим зависимости  $p_1(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$  и  $p_2(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ . Очевидно, что

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos Q_2 & \sin Q_2 \\ -\sin Q_2 & \cos Q_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ Q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos Q_2 & -\sin Q_2 \\ \sin Q_2 & \cos Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ Q_1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Поскольку  $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$ , представление гамильтониана в канонических переменных  $Q_1, Q_2, P_1, P_2$  может быть получено подстановкой найденных зависимостей  $p_1(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$  и  $p_2(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$  в выражение для  $G(q, p, v)$ . С учётом того, что

$$p_1^2 + p_2^2 = P_1^2 + \frac{P_2^2}{Q_1^2}, \quad p_1 q_2 - p_2 q_1 = -P_2$$

гамильтониан системы в переменных  $Q_1, Q_2, P_1, P_2$  примет вид:

$$G(Q, P, v) = \frac{1}{2} \left( P_1^2 + \frac{P_2^2}{Q_1^2} \right) - P_2 + \frac{1}{2} Q_1^2 - \frac{3}{2} \rho(v) Q_1^2 \cos^2 Q_2 - \frac{\rho(v)}{Q_1} \quad (1.7)$$

Рассмотрим интерпретацию сопряжённых переменных  $P_1$  и  $P_2$ . Сопряжённая переменная  $P_1$  является радиальной скоростью, так как  $\dot{Q}_1 = \frac{\partial G}{\partial P_1} = P_1$ .

Рассмотрим уравнение  $\dot{Q}_2 = \frac{\partial G}{\partial P_2} = \frac{P_2}{Q_1^2} - 1$ , из которого следует, что  $P_2 = Q_1^2 \frac{d}{d\nu}(Q_2 + \nu)$ , где  $\nu$  — истинная аномалия Фобоса. С учётом того, что обращение КА вокруг Фобоса происходит в обратном направлении по отношению к движению Фобоса вокруг Марса, величина  $\frac{1}{2\pi} \frac{P_2}{Q_1^2}$  представляет собой скорость, с которой накапливается разность числа оборотов КА вокруг Фобоса и Фобоса вокруг Марса. Среднее значение относительной разности угловых скоростей обращения КА вокруг Фобоса и Фобоса вокруг Марса равно  $\frac{Q_2 - Q_{02}}{\nu - \nu_0} + 1$ , где  $Q_{02}$  — начальное значение обобщённой переменной  $Q_2$ , соответствующее начальному значению истинной аномалии  $\nu_0$ .

Определение функции  $\Delta$  в канонических полярных переменных имеет вид:

$$\Delta(\nu_0, Q_{01}, P_{01}, P_{02}) = \max \left\{ |Q_1(\nu) - Q_{01}| : Q_2(\nu) = \frac{3\pi}{2}, \nu_0 \leq \nu \leq \nu_0 + 2\pi \cdot 10^4 \right\}$$

Требуется найти такие начальные обобщённые импульсы  $P_{01}$  и  $P_{02}$ , при которых значение функции  $\Delta(\nu_0, Q_{01}, P_{01}, P_{02})$  достигает минимума. Здесь  $Q_{01}$  — начальное значение обобщённой переменной  $Q_1$ .

### 1.1.5 Численный анализ

Значение функции  $\Delta(\nu_0, Q_{01}, P_{01}, P_{02})$  определялось численным интегрированием системы (1.4) на интервале изменения истинной аномалии  $\nu$  от  $\nu_0$  до  $\nu_0 + 2\pi \cdot 10^4$ . Всякий раз, когда  $Q_2(\nu) = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ , где  $k$  — целое, определялся модуль разности  $|Q_{01} - Q_1(\nu)|$ . Из полученных значений выбиралось максимальное.

Так как гамильтониан – чётная функция  $\upsilon$ , поиск минимума функции  $\Delta(\upsilon_0, Q_{01}, P_{01}, P_{02})$  проводился для  $\upsilon_0$  в интервале:  $[0, \pi]$ .

Поиск минимума функции  $\Delta(\upsilon_0, Q_{01}, P_{01}, P_{02})$  выполнялся в два этапа. На первом этапе производился перебор по диапазону значений гамильтониана и диапазону изменения разности угловых скоростей обращения КА вокруг Фобоса и Фобоса вокруг Марса. На этом этапе обобщённые импульсы  $P_{01}$  и  $P_{02}$  определялись из решения квадратного уравнения, коэффициенты которого зависят от значения гамильтониана  $G$ , начальных значений обобщённых координат  $Q_{01}$ ,  $Q_{02}$  и истинной аномалии в начальный момент  $\upsilon_0$ . Квадратное уравнение имеет вид:

$$G = \frac{1}{2} \left( P_{01}^2 + \frac{P_{02}^2}{Q_{01}^2} \right) - P_{02} + B, \quad (1.8)$$

где  $B = \frac{1}{2} Q_{01}^2 - \frac{3}{2} \rho(\upsilon_0) Q_{01}^2 \cos^2 Q_{02} - \frac{\rho(\upsilon_0)}{Q_{01}}$ .

Разрешая квадратное уравнение относительно  $P_{02}$ , получим

$$P_{02} = Q_{01}^2 \pm Q_{01} \sqrt{Q_{01}^2 - P_{01}^2 - 2B + 2G}. \quad (1.9)$$

Из условия неотрицательности дискриминанта вытекает неравенство

$$-\sqrt{Q_{01}^2 - 2B + 2G} \leq P_{01} \leq \sqrt{Q_{01}^2 - 2B + 2G}.$$

Это неравенство определяет область перебора для обобщённого импульса  $P_{01}$ .

Для всех трёх начальных значений  $Q_{01}$ , соответствующих удалению от поверхности Фобоса на 50, 55 и 60 км, перебор проводился по диапазону значений гамильтониана от 0.55 до 2.45.

Для сокращения объёма вычислений при интегрировании контролировалось значение величины  $\left| \frac{Q_2 - Q_{02}}{\upsilon - \upsilon_0} + 1 \right|$ , которая не должна превосходить 0.3.

Найденные на первом этапе значения обобщённых импульсов  $P_{01}$  и  $P_{02}$  уточнялись методом градиентного спуска на втором этапе.

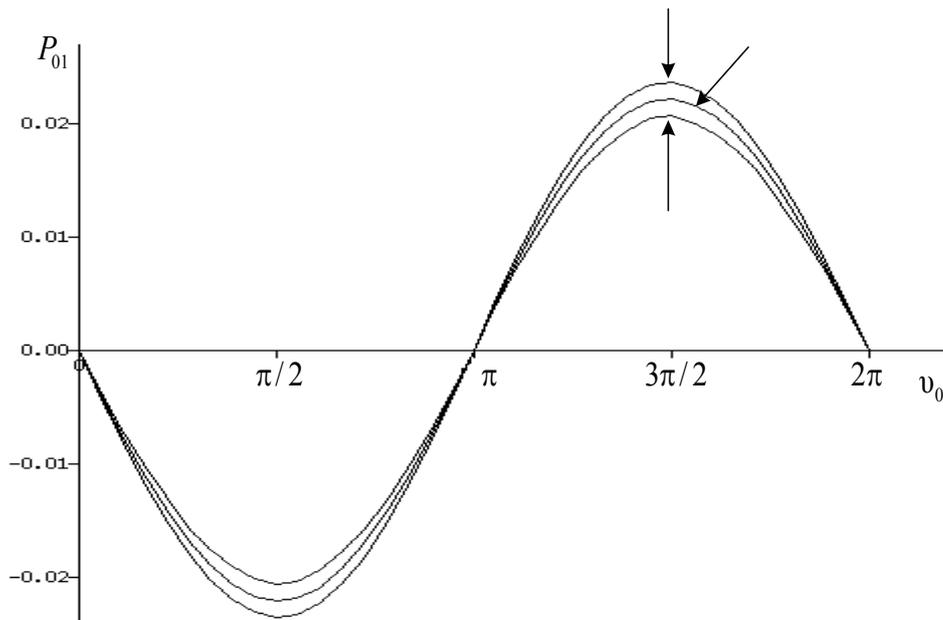
### 1.1.6 Результаты численного анализа

Зависимость начальных обобщённых импульсов от начального значения истинной аномалии представлена на рис. 1.1 – 1.4. На рис. 1.1 представлена зависимость начального обобщённого импульса от начального значения истинной аномалии для всех трёх вариантов начального удаления от Фобоса: на 50, 55 и 60 км. На рис. 1.2 – 1.4 представлены зависимости начального значения разности угловых скоростей КА вокруг Фобоса и Фобоса вокруг Марса от начального значения истинной аномалии для варианта 50, 55 и 60 км соответственно.

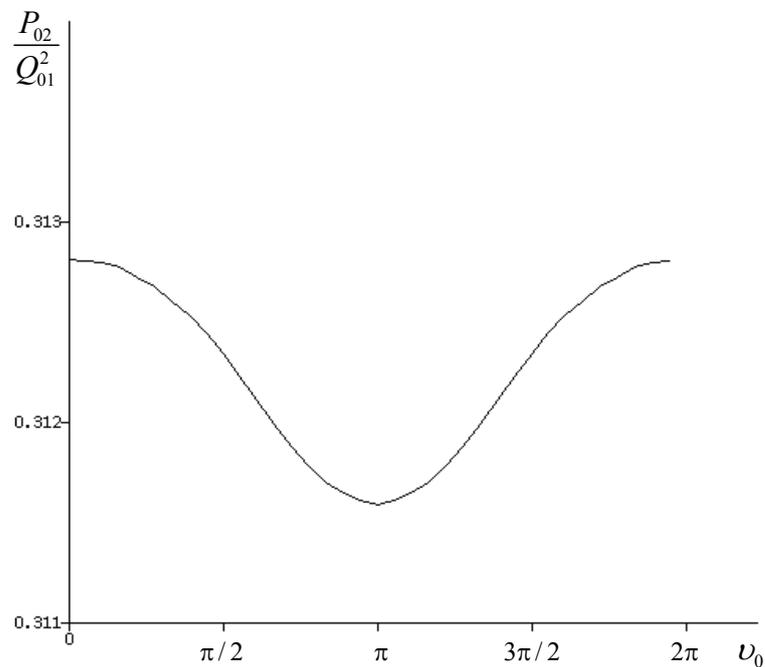
В таблице 1.1 показаны диапазоны изменения функции  $\Delta(\nu_0, Q_{01}, P_{01}, P_{02})$ ,  $0 \leq \nu_0 \leq \pi$  при найденных значениях обобщённых импульсов  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для трёх вариантов значений  $Q_1$ .

**Таблица 1.1** – Диапазоны изменения функции  $\Delta$

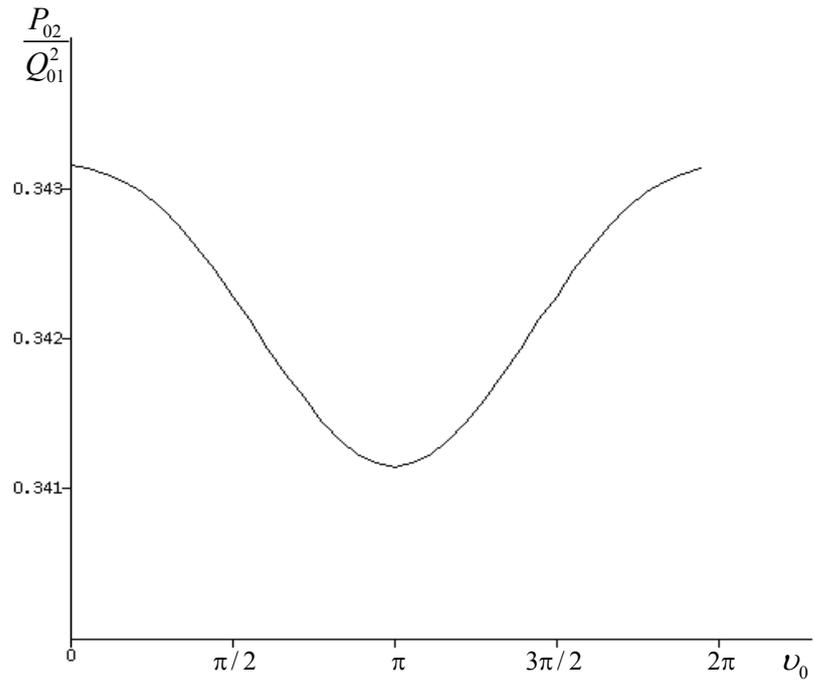
Удаление от поверхности Фобоса, км	$Q_1$	Диапазон изменения функции $\Delta$
50	2.456423	0.101 — 0.109
5	2.654142	0.114 — 0.121
60	2.851861	0.125 — 0.133



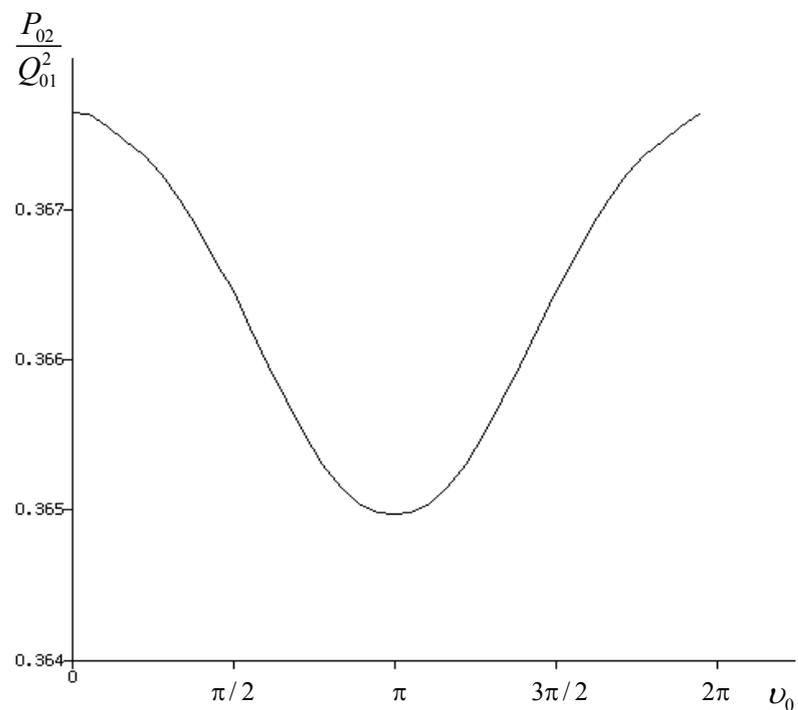
**Рисунок 1.1** – Зависимость  $P_{01}$  от начального значения истинной аномалии: *a* – вариант 60 км, *b* – вариант 55 км, *c* – вариант 50 км



**Рисунок 1.2** – Зависимость  $\frac{P_{02}}{Q_{01}^2}$  от начального значения истинной аномалии для варианта удаления от поверхности Фобоса на 50 км.



**Рисунок 1.3** – Зависимость  $\frac{P_{02}}{Q_{01}^2}$  от начального значения истинной аномалии для варианта удаления от поверхности Фобоса на 55 км.



**Рисунок 1.4** – Зависимость  $\frac{P_{02}}{Q_{01}^2}$  от начального значения истинной аномалии для варианта удаления от поверхности Фобоса на 60 км.

### 1.1.7 Сравнение характеристик движения в полной и упрощённой моделях

Были проведены расчёты параметров движения КА и Фобоса в полной модели сил. Найденные зависимости обобщённых импульсов от истинной аномалии Фобоса и начального удаления от его поверхности были использованы для формирования векторов состояния КА, пригодных для работы с полной моделью. Расчёты проводились для диапазона изменения начальной истинной аномалии Фобоса от 0 до  $2\pi$  с шагом  $\frac{\pi}{18}$ . Интегрирование уравнений движения выполнялось на интервале 100 оборотов Фобоса вокруг Марса. Результаты сравнения характеристик движения в полной и упрощённой моделях приведены в таблице 1.2. Эта таблица содержит следующие характеристики:

- максимальное удаление от поверхности Фобоса в км;
- ширина кольца – длина отрезка, содержащего точки пересечения орбиты КА с отрицательной частью оси  $Y$  орбитальной системы координат Фобоса в км;
- средняя относительная разность угловых скоростей – отношение разности числа оборотов КА вокруг Фобоса и Фобоса вокруг Марса к числу оборотов Фобоса вокруг КА, безразмерная величина.

Характеристики, приведённые в таблице 1.2, показывают, что построенное множество квазисинхронных орбит решает поставленную задачу. Если КА будет двигаться по любой из этих КСО, то при прохождении над районом посадки условие по максимальному удалению от поверхности всегда выполняется.

Кольцеобразные области, в которых находятся КСО, имеют ширину: 5.3, 6.7 и 8.3 км для начальных удалений 50, 55 и 60 км соответственно. Облёт КА вокруг Фобоса на таких орбитах происходит быстрее по отношению к периоду обращения Фобоса вокруг Марса. Средняя относительная разность угловых скоростей находится в диапазонах: 0.215 – 0.234, 0.182 – 0.199 и 0.154 – 0.170 для КСО с удалениями 50, 55 и 60 км соответственно.

**Таблица 1.2** – Результаты сравнения характеристик движения в полной и упрощённой моделях

Начальное удаление от поверхности, км	Модель	Максимальное удаление от поверхности, км	Ширина кольца, км	Средняя относительная разность угловых скоростей
50	полная	51.1 – 53.7	4.1 – 5.3	0.215 – 0.234
50	упрощённая	50.0 – 52.8	2.6 – 2.8	0.215 – 0.235
55	полная	56.7 – 59.7	5.3 – 6.7	0.182 – 0.199
55	упрощённая	55.0 – 58.1	2.9 – 3.1	0.182 – 0.200
60	полная	62.4 – 65.6	6.1 – 8.3	0.154 – 0.170
60	упрощённая	60.0 – 63.4	3.2 – 3.4	0.155 – 0.171

## 1.2 Начальное приближение для расчёта множества КСО

Быстродействие алгоритма расчёта КСО достигнуто за счёт использования начального приближения, формируемого из эволюционных уравнений.

При получении эволюционных уравнений исходные уравнения плоской эллиптической задачи Хилла были преобразованы к системе уравнений, связывающих четыре переменные: полуоси двух эллипсов (внутреннего и внешнего), фазу движения по внешнему эллипсу и разность фаз движения по внешнему и внутреннему эллипсам. Центр внешнего эллипса находится на внутреннем эллипсе. Движение происходит по часовой стрелке. Разность фаз движения по внутреннему и внешнему эллипсам близка к  $\pi$ . Ищутся такие начальные условия, при которых движение КА и центра эллипса происходит в узких кольцеобразных областях. Усреднение системы дифференциальных уравнений в указанных выше переменных позволяет получить уравнение, связывающее средние значения полуосей внутреннего и внешнего эллипсов.

Алгоритм формирования начального приближения по заданному положению КА относительно Фобоса и значению истинной аномалии Фобоса, соответствующей

заданному моменту времени, позволяет получить значения четырёх указанных переменных, обеспечивающих характеристики движения, близкие к искомым. При формировании начального приближения используется уравнение, связывающее средние значения полуосей внутреннего и внешнего эллипсов, и то, что среднее значение разности фаз движения по внешнему и внутреннему эллипсам должно быть близко к  $\pi$ .

Сформированное приближение используется численным алгоритмом, определяющим начальные условия. Численный алгоритм построен на основе комбинированного применения методов градиентного спуска и золотого сечения.

В результате вычислены таблицы начальных условий для максимальных удалений от поверхности Фобоса в диапазоне от 50 до 200 км.

При разработке алгоритма были использованы идеи и методы, изложенные в работах [38 – Лидов, 1994; 37 – Лидов, 1994; 42 – Лидов, 1977; 40 – Лидов, 1979; 41 – Лидов, 1982; 39 – Лидов, 1993].

### 1.2.1 Упрощённые уравнения движения

Рассмотрена система дифференциальных уравнений, приближённо описывающая движение КА относительно Фобоса в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{y} &= v, \\ \dot{u} &= 2v + \rho \left( 3x - \frac{x}{r^3} \right), \\ \dot{v} &= -2u - \rho \frac{y}{r^3}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\rho = \frac{1}{1 + e \cos \nu}$ ,  $\nu$  – истинная аномалия Фобоса, точка означает

дифференцирование по истинной аномалии. При  $e = 0$  система имеет интеграл

$$\text{Якоби: } u^2 + v^2 - 3x^2 - \frac{2}{r}.$$

Безразмерные переменные  $x$  и  $y$  связаны с положением КА относительно Фобоса в км  $X, Y$  следующими соотношениями:

$$X = \rho \cdot k_H \cdot x, Y = \rho \cdot k_H \cdot y, \text{ где } k_H = p_{Ph} \sqrt{\frac{\mu_{Ph}}{\mu_{Ph} + \mu_M}} \approx 25.287.$$

Здесь,  $p_{Ph}$  – фокальный параметр орбиты Фобоса,  $\mu_{Ph}, \mu_M$  – гравитационные параметры Фобоса и Марса.

Невозмущённое движение  $\left(\frac{1}{r^3} \ll 1\right)$  с нулевым эксцентриситетом  $e$  описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{y} &= v, \\ \dot{u} &= 2v + 3x, \\ \dot{v} &= -2u. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Решение уравнения (1.11) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} x &= 2k_3 + k_1 \cos \nu + k_2 \sin \nu, \\ y &= -3k_3 \nu + k_4 - 2k_1 \sin \nu + 2k_2 \cos \nu, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где  $k_1, k_2, k_3, k_4$  – постоянные.

Решение уравнения (1.10) можно рассматривать как движение по эллипсу, центр которого имеет координаты:  $X = 2k_3$  и  $Y = -3k_3 \nu + k_4 = -\frac{3}{2}X \nu + k_4$ .

Используя координаты центра эллипса, (1.12) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} x &= X + \frac{1}{2}A \cos(\nu - \varphi), \\ y &= Y - A \sin(\nu - \varphi), \end{aligned} \quad (1.13)$$

где  $A = 2\sqrt{k_1^2 + k_2^2}$  – большая полуось оскулирующего эллипса,  $\varphi$  – разность фаз между движением КА вокруг Фобоса и Фобоса вокруг Марса, определяемая из условий:  $\sin \varphi = \frac{k_1}{2A}$ ,  $\cos \varphi = \frac{k_2}{2A}$ .

Используя (1.13), найдем, что

$$u = -\frac{1}{2}A \sin(\nu - \varphi), \quad v = -\frac{3}{2}X - A \cos(\nu - \varphi). \quad (1.14)$$

Соотношения (1.13) и (1.14) описывают замену переменных в уравнении (1.1), в результате которой происходит переход от переменных  $x, y, u, v$  к новым переменным  $X, Y, A, \varphi$ . Полученная в результате система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{X} &= \rho \frac{2A \sin(v - \varphi) - 2Y}{r^3}, \\
 \dot{Y} &= -\frac{3}{2}X + \rho \frac{2X + A \cos(v - \varphi)}{r^3} + (6X + 3A \cos(v - \varphi))(1 - \rho), \\
 \dot{A} &= \rho \frac{2X \sin(v - \varphi) + 4Y \cos(v - \varphi) - 3A \sin(v - \varphi) \cos(v - \varphi)}{r^3} + \\
 &\quad + (6X + 3A \cos(v - \varphi))(1 - \rho) \sin(v - \varphi), \\
 \dot{\varphi} &= \rho \frac{4Y \sin(v - \varphi) - 2X \cos(v - \varphi) - 3A \sin^2(v - \varphi) - A}{Ar^3} - \\
 &\quad - \frac{(6X + 3A \cos(v - \varphi))(1 - \rho) \cos(v - \varphi)}{A},
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

где  $r = \sqrt{\frac{3}{4}A^2 \sin^2(v - \varphi) + AX \cos(v - \varphi) - 2AY \sin(v - \varphi) + \frac{1}{4}A^2 + X^2 + Y^2}$ .

Вычисляя производные от  $\frac{1}{r}$  по  $X, Y, A, \varphi$ , получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{1}{r} \right) &= -\frac{A \cos(v - \varphi) + 2X}{2r^3}, \\
 \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{1}{r} \right) &= \frac{A \sin(v - \varphi) - 2Y}{2r^3}, \\
 \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{1}{r} \right) &= \frac{4Y \sin(v - \varphi) - 3A \sin^2(v - \varphi) - 2X \cos(v - \varphi) - 2A}{4r^3}, \\
 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \right) &= \frac{3A^2 \sin(v - \varphi) \cos(v - \varphi) - 2AX \sin(v - \varphi) - 4AY \cos(v - \varphi)}{4r^3}.
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Упростим (1.15) с использованием (1.16):

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= 2\rho \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{1}{r} \right), \\
\dot{Y} &= -\frac{3}{2} X - 2\rho \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{1}{r} \right) + (6X + 3A \cos(\nu - \varphi))(1 - \rho), \\
\dot{A} &= -\frac{4\rho}{A} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \right) + (6X + 3A \cos(\nu - \varphi)) \sin(\nu - \varphi)(1 - \rho), \\
\dot{\varphi} &= \frac{\rho}{4A} \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{(6X + 3A \cos(\nu - \varphi)) \cos(\nu - \varphi)(1 - \rho)}{A}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Эволюционное движение системы (1.17) изучено в работе [84 – Benest, 1976] для случая плоского кругового движения задачи Хилла ( $\rho = 1$ ) в условиях удаления тела нулевой массы от тела меньшей массы на расстояния, значительно превышающие радиус сферы Хилла. В этой работе получены эволюционные уравнения движения центра эллипса вдоль оси  $Y$ . Найдены два интеграла эволюционных уравнений: большая полуось орбиты и результат преобразования интеграла Якоби к новым координатам. Получено соотношение для периода либрации и его предельные значения для малых амплитуд либрации. Пространственный случай эволюционного движения в аналогичных условиях исследован в работе [31 – Коган, 1988]. В этих работах с целью изучения эволюции вдоль оси  $Y$  при упрощении системы уравнений была исключена составляющая, описывающая эволюционное движение вдоль  $X$ . Тем самым, в них отброшено множество движений, представляющих практический интерес. Это множество решений рассмотрено в диссертации. Решая задачу построения системы эволюционных уравнений для поиска решений системы (1.10), обладающих заданным свойством, нужно специальным образом выбрать фазовые переменные.

Одним из основных элементов при построении системы эволюционных уравнений является представление интеграла  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\nu}{r}$  через выбранные фазовые параметры. Такие представления с использованием полных эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода найдены в работах [84 – Benest, 1976; 31 – Коган, 1988; 38 – Лидов, 1994; 37 – Лидов, 1994].

Рассмотрим теперь уравнение (1.10) и представим движение вокруг Фобоса с использованием двух эллипсов. КА движется по эллипсу, полуоси которого равны  $A(\nu)$  и  $\frac{1}{2}A(\nu)$ . Разность фаз между движением КА вокруг Фобоса и Фобоса вокруг Марса составляет  $\varphi(\nu)$ . Центр эллипса, по которому движется КА, также движется по эллипсу, полуоси которого равны  $ka(\nu)$  и  $a(\nu)$ ;  $k$  – константа. Разность фаз между движением КА и движением центра эллипса составляет  $\xi$ . Такому представлению движения КА соответствует замена переменных:

$$\begin{aligned}
 x &= a \cos(\nu - \varphi + \xi) + \frac{1}{2} A \cos(\nu - \varphi), \\
 y &= -ak \sin(\nu - \varphi + \xi) - A \sin(\nu - \varphi), \\
 u &= -\frac{1}{2} A \sin(\nu - \varphi), \\
 v &= -\frac{3}{2} a \cos(\nu - \varphi + \xi) - A \cos(\nu - \varphi).
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$

После выполнения замены переменных (1.18) уравнение (1.10) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
\dot{a} = & \frac{3}{4} \frac{a}{\kappa} \sin(2(\nu - \varphi + \xi)) + \\
& + \frac{\rho}{r^3} \left( A \left( 2 \sin(\nu - \varphi) \cos(\nu - \varphi + \xi) - \frac{1}{\kappa} \cos(\nu - \varphi) \sin(\nu - \varphi + \xi) \right) \right) + \\
& + \frac{\rho}{r^3} \left( a \left( \kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \sin(2(\nu - \varphi + \xi)) \right) - \\
& - \frac{3}{\kappa} \left( a \sin(2(\nu - \varphi + \xi)) + A \cos(\nu - \varphi) \sin(\nu - \varphi + \xi) \right) (1 - \rho),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} = & -1 + \frac{3}{2\kappa} \cos^2(\nu - \varphi + \xi) - \\
& - \frac{\rho}{r^3} \left( 1 + 2\kappa + 3 \sin^2(\nu - \varphi) + 2 \left( \frac{1}{\kappa} - \kappa \right) \cos^2(\nu - \varphi + \xi) \right) - \\
& - \frac{\rho}{r^3} \left( \left( 2\kappa \frac{a}{A} + \frac{A}{a} \right) \left( 2 \sin(\nu - \varphi + \xi) \sin(\nu - \varphi) + \frac{1}{\kappa} \cos(\nu - \varphi + \xi) \cos(\nu - \varphi) \right) \right) - \\
& - (1 - \rho) \left( \frac{3}{\kappa} \left( 2\kappa \frac{a}{A} + \frac{A}{a} \right) \cos(\nu - \varphi + \xi) \cos(\nu - \varphi) + \right. \\
& \left. + 3 \cos^2(\nu - \varphi) + \frac{6}{\kappa} \cos^2(\nu - \varphi + \xi) \right)
\end{aligned} \tag{1.19-1}$$

$$\begin{aligned}
\dot{A} = & \frac{\rho}{r^3} \left( 2a \cos(\nu - \varphi + \xi) \sin(\nu - \varphi) - 4a\kappa \sin(\nu - \varphi + \xi) \cos(\nu - \varphi) \right) - \\
& - \frac{\rho}{r^3} \left( \frac{3}{2} A \sin(2(\nu - \varphi)) \right) + \\
& + \left( 6a \cos(\nu - \varphi + \xi) + 3A \cos(\nu - \varphi) \right) \sin(\nu - \varphi) (1 - \rho),
\end{aligned} \tag{1.19-2}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} = & \frac{\rho}{r^3} \left( -4\kappa \frac{a}{A} \sin(\nu - \varphi + \xi) \sin(\nu - \varphi) - 2 \frac{a}{A} \cos(\nu - \varphi) \cos(\nu - \varphi + \xi) \right) - \\
& - \frac{\rho}{r^3} \left( 3 \sin^2(\nu - \varphi) - 1 \right) - \\
& - \left( 6 \frac{a}{A} \cos(\nu - \varphi + \xi) + 3 \cos(\nu - \varphi) \right) \cos(\nu - \varphi) (1 - \rho).
\end{aligned}$$

Интеграл Якоби, для системы (1.19.1, 19.2) при  $e = 0$ , ( $\rho = 1$ ), имеет вид:

$$\frac{1}{4} A^2 - \frac{3}{8} a^2 \cos(2(\nu - \varphi + \xi)) - \frac{3}{8} a^2 - \frac{2}{r}.$$

## 1.2.2 Предварительный численный анализ. Постановка задачи аналитических исследований

В результате численного интегрирования системы уравнений (1.19-1) и (1.19-2) по начальным условиям, найденным в первом разделе этой главы, получены траектории, имеющие вид, показанный на рис. 1.3. Положение центра эллипса  $X, Y$  определяется формулами:

$$\begin{aligned} X &= a \cos(\nu - \varphi + \xi), \\ Y &= -a \sin(\nu - \varphi + \xi). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Положение точки нулевой массы определяется формулами (1.13). Траектории, показанные на рис. 1.4, получены при  $k=2$  по следующим начальным условиям:  $\nu=0$ ,  $a=0.459800$ ,  $\xi=3.141593$ ,  $A=3.376023$ ,  $\varphi=4.712389$ .

Как видно из рис. 1.4, при начальных условиях, найденных в первом разделе данной главы, движение КА (точки нулевой массы) и центра эллипса происходит в узких кольцеобразных областях, внешней и внутренней. КА имеет обратное движение по отношению к движению Фобоса вокруг Марса. Внешнее кольцо – это кольцо, в которое попадает траектория КА. КА движется по перемещающемуся эллипсу, центр которого движется в противофазе по отношению к КА. Поэтому КА всегда находится в области пересечения перемещающегося эллипса и внешнего кольца. Большая полуось эллипса практически не меняется. Перемещение эллипса происходит за счёт движения его центра в пределах внутреннего кольца. При этом значения  $a$  и  $A$  близки к своим средним значениям, а значение  $\xi$  близко к  $\pi$ .

Рассмотрим  $a_m, \xi_m, A_m, \dot{a}_m, \dot{\xi}_m, \dot{A}_m$  – средние значения величин  $a, \xi, A$  и их производных  $\dot{a}, \dot{\xi}, \dot{A}$ :

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{2\pi n} \int_{\nu_0}^{\nu_0+2\pi n} a \, d\nu, & A_m &= \frac{1}{2\pi n} \int_{\nu_0}^{\nu_0+2\pi n} A \, d\nu, & \xi_m &= \frac{1}{2\pi n} \int_{\nu_0}^{\nu_0+2\pi n} \xi \, d\nu, \\ \dot{a}_m &= \frac{1}{2\pi n} \int_{\nu_0}^{\nu_0+2\pi n} \dot{a} \, d\nu, & \dot{A}_m &= \frac{1}{2\pi n} \int_{\nu_0}^{\nu_0+2\pi n} \dot{A} \, d\nu, & \dot{\xi}_m &= \frac{1}{2\pi n} \int_{\nu_0}^{\nu_0+2\pi n} \dot{\xi} \, d\nu. \end{aligned} \quad (1.21)$$

В таблицах 1.3, 1.4 и 1.5 приведены результаты расчётов величин  $a_m, \xi_m, A_m, \dot{a}_m, \dot{\xi}_m, \dot{A}_m$  для трёх вариантов начальных условий (удаления начальной точки от

поверхности Фобоса), найденных в первом разделе данной главы. Таблицы содержат по три строки. Первая строка соответствует удалению на 50 км, вторая – на 55 км, третья – на 60 км. Из этих таблиц видно, что с удалением орбиты от поверхности Фобоса среднее значение полуоси внешнего эллипса  $A_m$  возрастает, а внутреннего  $a_m$  убывает. Средние значения производных  $\dot{A}_m$ ,  $\dot{a}_m$  близки к нулю. Среднее значение разности фаз  $\xi$  близко к  $\pi$ , а среднее значение производной  $\dot{\xi}_m$  – к нулю.

Из приведённых выше рассмотрений следует постановка задачи для аналитических исследований. Нужно построить осреднённую систему уравнений для исходной системы (1.19.1) и (1.19.2) и найти её решения, обладающие свойствами:  $\dot{A}_m = 0$ ,  $\dot{a}_m = 0$ ,  $\xi_m = \pi$ ,  $\dot{\xi}_m = 0$ .

Далее, используя найденное аналитическим способом решение и разбросы мгновенных значений относительно средних, можно сканированием в достаточно узкой области найти искомое решение системы (1.19-1), (1.19-2), обладающее свойством попадания орбиты в узкую кольцеобразную область вокруг Фобоса (тела меньшей массы).

**Таблица 1.3** – Диапазоны изменения средних и мгновенных значений полуоси внешнего эллипса и её производной

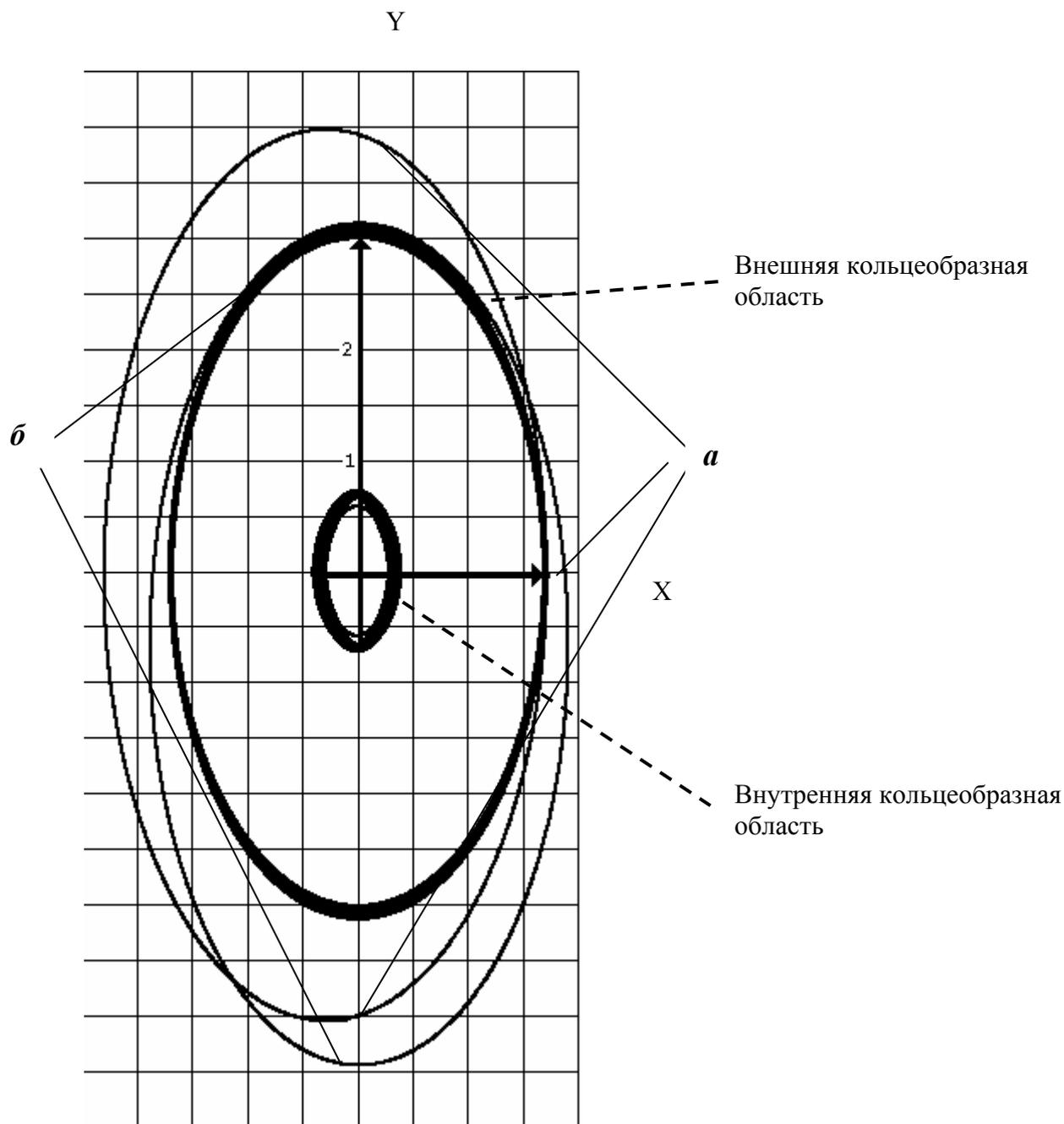
	$\min A_m$	$\max A_m$	$\min A$	$\max A$	$\min \dot{A}_m$	$\max \dot{A}_m$	$\min \dot{A}$	$\max \dot{A}$
1	3.5224	3.5687	3.3286	3.8763	0.0000	0.0006	-0.6894	0.6894
2	3.6130	3.6720	3.4318	3.9590	0.0000	0.0007	-0.6237	0.6237
3	3.7150	3.7867	3.5444	4.0555	0.0000	0.0005	-0.5681	0.5681

**Таблица 1.4** – Диапазоны изменения средних и мгновенных значений полуоси и внутреннего эллипса и её производной

	$\min a_m$	$\max a_m$	$\min a$	$\max a$	$\min \dot{a}_m$	$\max \dot{a}_m$	$\min \dot{a}$	$\max \dot{a}$
1	0.4416	0.4656	0.3929	0.5310	-0.0001	0.0000	-0.1570	0.1572
2	0.3984	0.4217	0.3464	0.4850	-0.0001	0.0001	-0.1501	0.1502
3	0.3607	0.3832	0.3054	0.4450	-0.0001	0.0000	-0.1460	0.1459

**Таблица 1.5** – Диапазоны изменения средних и мгновенных значений разности фаз в движении по внутреннему и внешнему эллипсам и производной разности фаз

	$\min \xi_m$	$\max \xi_m$	$\min \xi$	$\max \xi$	$\min \dot{\xi}_m$	$\max \dot{\xi}_m$	$\min \dot{\xi}$	$\max \dot{\xi}$
1	3.1413	3.1416	2.8364	3.4468	-0.0003	0.0004	-0.4886	0.7620
2	3.1413	3.1416	2.8041	3.4793	-0.0004	0.0004	-0.4947	0.8404
3	3.1412	3.1416	2.7703	3.5127	-0.0005	0.0004	-0.5007	0.9262



**Рисунок 1.4** – Траектории движения точки нулевой массы (КА) и центра перемещающегося эллипса. Мгновенные положения эллипсов, по которым движется КА, показаны для двух моментов времени, когда  $\nu + \varphi = 0$  (*a*) и  $\nu + \varphi = \frac{3\pi}{2}$  (*б*). Центры этих эллипсов находятся в точках внутреннего кольца, из которых начинаются стрелки.

### 1.2.3 Подготовка системы (1.19-1), (1.19-2) к усреднению

Используя зависимость  $r$  от  $a, \xi, A, \varphi$ , преобразуем систему (1.19-1), (1.19-2).

$$\begin{aligned} r^2 = & \frac{3}{4} A^2 \sin^2(\nu - \varphi) + Aa \cos(\nu - \varphi + \xi) \cos(\nu - \varphi) + \\ & + 2Aa\kappa \sin(\nu - \varphi + \xi) \sin(\nu - \varphi) + \\ & + \frac{A^2}{4} + a^2 \cos^2(\nu - \varphi + \xi) + a^2 \kappa^2 \sin^2(\nu - \varphi + \xi) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Вычислим производные  $r^2$  по переменным  $a, \xi, A, \varphi$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial r^2}{\partial a} = & a\kappa \left( \frac{A}{a\kappa} \cos(\nu - \varphi + \xi) \cos(\nu - \varphi) + 2 \frac{A}{a} \sin(\nu - \varphi + \xi) \sin(\nu - \varphi) \right) + \\ & + a\kappa \left( 2\kappa + \left( \frac{1}{\kappa} - \kappa \right) \cos^2(\nu - \varphi + \xi) \right), \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r^2}{\partial \xi} = & a\kappa A \left( 2 \cos(\nu - \varphi + \xi) \sin(\nu - \varphi) - \frac{1}{\kappa} \sin(\nu - \varphi + \xi) \cos(\nu - \varphi) \right) + \\ & + a\kappa \left( \left( a\kappa - \frac{a}{\kappa} \right) \sin(2(\nu - \varphi + \xi)) \right), \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r^2}{\partial A} = & \frac{A}{2} \left( 3 \sin^2(\nu - \varphi) + 2 \frac{a}{A} \cos(\nu - \varphi + \xi) \cos(\nu - \varphi) + \right. \\ & \left. + \frac{4a\kappa}{A} \sin(\nu - \varphi + \xi) \sin(\nu - \varphi) + 1 \right) \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r^2}{\partial \varphi} = & \frac{A}{2} \left( 2a \cos(\nu - \varphi + \xi) \sin(\nu - \varphi) - 4a\kappa \sin(\nu - \varphi + \xi) \cos(\nu - \varphi) \right) - \\ & - \frac{A}{2} \left( \frac{3}{2} A \sin(2(\nu - \varphi)) + \frac{\partial r^2}{\partial \xi} \right). \end{aligned} \quad (1.26)$$

В каждом из четырёх уравнений (1.19-1) и (1.19-2) выделим сумму членов в скобках, которые умножаются на  $\frac{\rho}{r^3}$ . Заметим, что эта сумма в уравнении для  $\dot{a}$

равна  $\frac{1}{\kappa a} \frac{\partial r^2}{\partial \xi}$ , в уравнении для  $\dot{\xi}$  —  $-\left( \frac{2}{A} \frac{\partial r^2}{\partial A} + \frac{1}{a\kappa} \frac{\partial r^2}{\partial a} \right)$ , в уравнении для  $\dot{A}$  —

$\frac{2}{A} \left( \frac{\partial r^2}{\partial \varphi} + \frac{\partial r^2}{\partial \xi} \right)$ , в уравнении для  $\dot{\varphi} = -\frac{2}{A} \frac{\partial r^2}{\partial A}$ . Используя это, преобразуем систему

(1.19-1) и (1.19-2) к виду:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{3a}{4\kappa} \sin(2(\nu - \varphi + \xi)) - \frac{2\rho}{a\kappa} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \right) - \\ &\quad - \left( \frac{3a}{\kappa} \sin(2(\nu - \varphi + \xi)) + \frac{3A}{\kappa} \cos(\nu - \varphi) \sin(\nu - \varphi + \xi) \right) (1 - \rho), \\ \dot{\xi} &= -1 + \frac{3}{2\kappa} \cos^2(\nu - \varphi + \xi) + \rho \left( \frac{4}{A} \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{2}{a\kappa} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{r} \right) \right) - \\ &\quad - \left( \frac{6a}{A} \cos(\nu - \varphi + \xi) \cos(\nu - \varphi) + 3 \cos^2(\nu - \varphi) + \frac{6}{\kappa} \cos^2(\nu - \varphi + \xi) \right) (1 - \rho) + \\ &\quad + \frac{3A}{a\kappa} \cos(\nu - \varphi) \cos(\nu - \varphi + \xi) (1 - \rho), \end{aligned} \quad (1.27-1)$$

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\frac{4\rho}{A} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \right) \right) + \\ &\quad + \left( 6a \cos(\nu - \varphi + \xi) + 3A \cos(\nu - \varphi) \right) \sin(\nu - \varphi) (1 - \rho), \end{aligned} \quad (1.27-2)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{4\rho}{A} \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{1}{r} \right) - \left( \frac{6a}{A} \cos(\nu - \varphi + \xi) + 3 \cos(\nu - \varphi) \right) \cos(\nu - \varphi) (1 - \rho).$$

Правильность тождественных преобразований системы (1.19-1), (1.19-2) к виду (1.27-1), (1.27-2) подтверждена численной проверкой, при которой одновременно интегрировались указанные выше системы уравнений и сопоставлялись полученные результаты.

### 1.2.4 Частный случай плоского кругового движения задачи Хилла ( $\rho = 1$ )

В случае плоской круговой задачи система (1.27-1), (1.27-2) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= \frac{3a}{4\kappa} \sin(2(\nu - \varphi + \xi)) - \frac{2}{a\kappa} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \right), \\
\dot{\xi} &= -1 + \frac{3}{2\kappa} \cos^2(\nu - \varphi + \xi) + \left( \frac{4}{A} \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{2}{a\kappa} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{r} \right) \right), \\
\dot{A} &= -\frac{4}{A} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \right) \right), \\
\dot{\varphi} &= \frac{4}{A} \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{1}{r} \right).
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Усредним систему (1.28) на интервале от 0 до  $2\pi$ . Обозначим среднее значение  $\frac{1}{r}$ ,

умноженное на  $2\pi$ , как  $I$ , т.е.  $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\nu}{r}$ , а средние значения переменных как  $a_m$ ,  $\xi_m$ ,

$A_m$ ,  $\varphi_m$ . Эти средние значения удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot{a}_m &= -\frac{1}{\pi a_m \kappa} \frac{\partial I}{\partial \xi}, \\
\dot{\xi}_m &= -1 + \frac{3}{4\kappa} + \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{A} \frac{\partial I}{\partial A} + \frac{1}{a_m \kappa} \frac{\partial I}{\partial a} \right), \\
\dot{A}_m &= -\frac{2}{\pi A_m} \left( \frac{\partial I}{\partial \varphi} + \frac{\partial I}{\partial \xi} \right), \\
\dot{\varphi}_m &= \frac{2}{\pi A_m} \frac{\partial I}{\partial A}.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Очевидно, что  $I$  не зависит от фазы  $\varphi$ . Поэтому  $\frac{\partial I}{\partial \varphi} = 0$ . Отсюда следует, что

справедливо равенство:  $\kappa a_m \dot{a}_m = \frac{1}{2} A_m \dot{A}_m$ . Поэтому  $A_m^2 - 2\kappa a_m^2$  – интеграл системы

(1.29). Интеграл Якоби для усреднённой системы (1.29) имеет вид:  $\frac{\pi}{2} A_m^2 - \frac{3\pi}{4} a_m^2 - 2I$ .

### 1.2.5 Вычисление значения интеграла $\int_0^{2\pi} \frac{d\upsilon}{r}$

Введем обозначения:  $s = \upsilon - \varphi$ ,  $w_1 = \sin \xi$ ,  $w_2 = \cos \xi$ . Используя эти обозначения, преобразуем (1.22) к виду:

$$r^2 = c_0 + c_1 \cos 2s + c_2 \sin 2s \quad (1.30)$$

где

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{5}{8} A^2 + \frac{1}{2} a^2 (1 + \kappa^2) + Aa \left( \kappa + \frac{1}{2} \right) w_2, \\ c_1 &= \frac{1}{2} \left( -\frac{3}{4} A^2 - Aa(2\kappa - 1)w_2 + a^2(1 - \kappa^2)(w_2^2 - w_1^2) \right), \\ c_2 &= -\frac{1}{2} \left( Aa(1 - 2\kappa)w_1 + 2a^2(1 - \kappa^2)w_1w_2 \right). \end{aligned}$$

Обозначим  $d = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ . Пусть  $\eta$  определяется как  $\cos \eta = \frac{c_1}{d}$ ,  $\sin \eta = \frac{c_2}{d}$ , тогда

(1.30) преобразуется к виду:

$$r^2 = c_0 + d \cos(2s - \eta), \quad (1.31)$$

где  $c_0 > d$ , т. к. в рассматриваемом множестве решений  $r > 0$ .

Рассмотрим:

$$\int_0^{2\pi} \frac{ds}{r} = \int_0^{2\pi} \frac{ds}{\sqrt{c_0 + d \cos(2s - \eta)}} = 2 \int_0^{\pi} \frac{ds}{\sqrt{c_0 + d \cos 2s}}. \quad (1.32)$$

Т.к.  $c_0 > d$ , для  $0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$  применима формула 2.571 п. 4 из [19 – Градштейн, 1971],

которая позволяет представить неопределённый интеграл  $\int \frac{ds}{\sqrt{c_0 + d \cos 2s}}$  через

неполный эллиптический интеграл первого рода:

$$\int \frac{ds}{\sqrt{c_0 + d \cos 2s}} = \frac{2}{\sqrt{c_0 + d}} F \left( s, \sqrt{\frac{2d}{c_0 + d}} \right), \quad (1.33)$$

где  $F(s, k)$  – эллиптический интеграл первого рода,  $k = \sqrt{\frac{2d}{c_0 + d}}$  – модуль интеграла.

Используя (1.33), преобразуем (1.32) к виду:

$$\int_0^{2\pi} \frac{ds}{r} = \frac{4}{\sqrt{c_0 + d}} K\left(\sqrt{\frac{2d}{c_0 + d}}\right), \quad (1.34)$$

где  $K(k)$  – полный эллиптический интеграл первого рода.

Таким образом, найдено новое представление этого интеграла через выбранные фазовые переменные  $a, \xi, A, \varphi$  и свободный параметр  $k$ .

### 1.2.6 Вычисление производных $\frac{\partial I}{\partial A}, \frac{\partial I}{\partial a}, \frac{\partial I}{\partial \xi}$

Представим  $\frac{\partial I}{\partial A}, \frac{\partial I}{\partial a}, \frac{\partial I}{\partial \xi}$  в виде:

$$\frac{\partial I}{\partial A} = \frac{\partial I}{\partial c_0} \frac{\partial c_0}{\partial A} + \frac{\partial I}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial A}, \quad \frac{\partial I}{\partial a} = \frac{\partial I}{\partial c_0} \frac{\partial c_0}{\partial a} + \frac{\partial I}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial a}, \quad \frac{\partial I}{\partial \xi} = \frac{\partial I}{\partial c_0} \frac{\partial c_0}{\partial \xi} + \frac{\partial I}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial \xi} \quad (1.35)$$

Используя формулу 8.123 п. 2 [19 – Градштейн, 1971] дифференцирования полного эллиптического интеграла по его модулю и представление производной через полные эллиптические интегралы первого и второго рода, получим:

$$\frac{\partial I}{\partial c_0} = -\frac{2}{\sqrt{c_0 + d}(c_0 - d)} E(k), \quad \frac{\partial I}{\partial d} = \frac{2(c_0 E(k) - (c_0 - d)K(k))}{\sqrt{c_0 + d}d(c_0 - d)}. \quad (1.36)$$

Далее вычислим производные  $c_0$  и  $d$  по переменным  $a, \xi$  и  $A$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_0}{\partial a} &= a(1 + \kappa^2) + A\left(\kappa + \frac{1}{2}\right)\cos\xi, \\
\frac{\partial c_0}{\partial \xi} &= -Aa\left(\kappa + \frac{1}{2}\right)\sin\xi, \\
\frac{\partial c_0}{\partial A} &= \frac{5}{4}A + a\left(\kappa + \frac{1}{2}\right)\cos\xi, \\
\frac{\partial d}{\partial a} &= \frac{1}{a}\left(d + \frac{1}{2}a^2(1 - \kappa^2)\cos(2\xi + \eta)\right) + \frac{3}{8}\frac{A^2c_1}{da}, \\
\frac{\partial d}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2}a^2(1 - \kappa^2)\sin(2\xi + \eta) - \frac{3}{8}\frac{A^2c_2}{d}, \\
\frac{\partial d}{\partial A} &= \frac{1}{A}\left(d - \frac{1}{2}a^2(1 - \kappa^2)\cos(2\xi + \eta)\right) + \frac{3}{8}\frac{Ac_1}{d}.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

### 1.2.7 Усреднённые уравнения движения

Усредняя систему (1.27-1) и (1.27-2) и используя приближение  $\rho = 1 - e\cos\upsilon + o(e^2)$ , получим:

$$\begin{aligned}
\dot{a}_m &= -\frac{1}{a_m\kappa\pi}\frac{\partial I}{\partial \xi_m}, \\
\dot{\xi}_m &= -1 + \frac{3}{4\kappa} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{A_m}\frac{\partial I}{\partial A_m} + \frac{2}{a_m\kappa}\frac{\partial I}{\partial a_m}\right), \\
\dot{A}_m &= -\frac{2}{A_m\pi}\frac{\partial I}{\partial \xi_m}, \\
\dot{\phi}_m &= \frac{2}{A_m\pi}\frac{\partial I}{\partial A_m}.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Система (1.38) имеет интеграл:  $\kappa a_m^2 - \frac{A_m^2}{2}$ .

Усреднённая система (1.38) совпадает с усреднённой системой (1.29) для нулевого эксцентриситета.

## 1.2.8 Условие для поиска начального приближения начальных условий. Выбор параметра $\kappa$

Условие для поиска начального приближения параметров КСО, обладающих искомым свойством, позволяет получить уравнение для  $\dot{\xi}_m$  из системы (1.38). Потребуем, чтобы  $\xi_m = \pi$ ,  $\dot{\xi}_m = 0$ . Тогда условие превращается в уравнение, связывающее  $a_m$  и  $A_m$ :

$$g(a_m, A_m) = 0 \quad (1.39)$$

где

$$g(a_m, A_m) = -1 + \frac{3}{4\kappa} + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{4}{A_m} \frac{\partial I}{\partial A_m} + \frac{2}{a_m \kappa} \frac{\partial I}{\partial a_m} \right) \quad (1.40)$$

Используя (1.35), представим функцию  $g(a_m, A_m)$  в виде:

$$g(a_m, A_m) = -1 + \frac{3}{4\kappa} + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial I}{\partial c_0} f_1 + \frac{\partial I}{\partial d} f_2 \right) \quad (1.41)$$

где  $f_1 = \frac{4}{A_m} \frac{\partial c_0}{\partial A_m} + \frac{2}{\kappa a_m} \frac{\partial I}{\partial a_m}$ ,  $f_2 = \frac{4}{A_m} \frac{\partial d}{\partial A_m} + \frac{2}{\kappa a_m} \frac{\partial d}{\partial a_m}$ .

Заметим, что при  $\xi_m = \pi$  и  $\kappa = 2$  величину  $c_1$  можно было представить полным квадратом:  $c_1 = -\frac{3}{8}(A_m - 2a_m)^2$ . Тогда модуль эллиптического интеграла становится равным  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , а функция  $g(a_m, A_m)$  принимает вид:

$$g(a_m, A_m) = \frac{-5\pi a A^2 + 10a^2 A + 32K \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{8\pi(A - 2a)aA} \quad (1.42)$$

Для определения зависимости  $a(A)$  нужно решить квадратное уравнение

$$10Aa^2 - 5A^2a + \frac{32}{\pi} K \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0. \quad (1.43)$$

Корни этого уравнения вычисляются по формуле

$$a_{1,2} = \frac{5\pi A^2 \pm \sqrt{25\pi^2 A^4 - 1280\pi AK \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}{20\pi A} \quad (1.44)$$

и имеют действительные значения при выполнении условия

$$A \geq \sqrt[3]{\frac{256K \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{5\pi}}.$$

Расчёты показали, что движение по КСО можно получить только при использовании меньшего корня, т.е. при знаке минус перед радикалом в (1.44).

### 1.2.9 Алгоритм формирования начального приближения

Компоненты вектора положения  $x_0, y_0$  связаны с параметрами  $a$  и  $A$  следующим соотношением:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\nu - \varphi + \xi) & \frac{1}{2}\cos(\nu - \varphi) \\ -2\sin(\nu - \varphi + \xi) & -\sin(\nu - \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ A \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

Решая эту систему линейных уравнений при  $\xi \neq \pi$  относительно переменных  $a$  и  $A$ , получим:

$$\begin{pmatrix} a \\ A \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin \xi} \begin{pmatrix} -\sin(\nu - \varphi) & -\frac{1}{2}\cos(\nu - \varphi) \\ 2\sin(\nu - \varphi + \xi) & \cos(\nu - \varphi + \xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

При  $\xi = \pi$  система (1.45) имеет решение, если выполняется условие:

$$\sin(\nu - \varphi) = \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + 4x_0^2}}, \quad \cos(\nu - \varphi) = -\frac{2x_0}{\sqrt{y_0^2 + 4x_0^2}}.$$

В этом случае  $a$  и  $A$  определяются из решения уравнения:  $2a(A) - A = \sqrt{y_0^2 + 4x_0^2}$ .

Пусть теперь известно, что КСО должна пройти через точку с координатами  $x_0, y_0$  в момент времени, в который истинная аномалия Фобоса равна  $\nu$ . Тогда, при заданных  $\varphi$  и  $\xi$ , определяем  $a$  и  $A$ .

Определение начального приближения при поиске начальных условий КСО с искомыми свойствами определяется сканированием по  $\varphi$  и  $\xi$ . Сканирование

выполняется в два прохода. На первом проходе сканирование по  $\varphi$  выполняется на интервале от 0 до  $2\pi$  с шагом  $\frac{\pi}{180}$ . На втором проходе сканирование выполняется на интервале  $\left[ \varphi_0 - \frac{\pi}{120}, \varphi_0 + \frac{\pi}{120} \right]$ , где  $\varphi_0$  – точка, в которой была достигнута минимальная ширина кольца на первом проходе. Шаг сканирования на втором проходе составляет  $\frac{1}{100}$  от длины интервала перебора. Интервал сканирования по  $\xi$  на первом и втором проходах одинаковый: от  $\pi - \Delta\xi$  до  $\pi + \Delta\xi$ , где  $\Delta\xi = 0.3$ . Шаг сканирования составляет  $\frac{1}{100}$  от размера интервала сканирования.

На каждом шаге сканирования определяются  $a$  и  $A$ . Если  $A > 0$ ,  $a(A) > 0$  и  $|a - a(A)| < \Delta a$ , формируется начальное приближение и вычисляется ширина кольца.

Указанный алгоритм за время расчёта ~15 минут на Pentium 4 позволяет определить начальное приближение с высокой точностью.

### 1.2.10 Вычислительная процедура поиска минимума

Вычислительная процедура поиска минимума построена на основе комбинированного применения метода градиентного спуска и метода золотого сечения [51 – Растрингин, 1974]. Сначала применяется градиентный спуск, а затем метод золотого сечения. Алгоритм градиентного спуска дополнен возможностями выхода из локального минимума и идентификации попадания в овраг по одной из переменных.

При использовании градиентного спуска КСО исследуется на небольшом интервале времени, который соответствует интервалу истинной аномалии от  $\nu_0$  до  $\nu_0 + 2\pi N$ , где  $N=100$ . Локальный минимум, найденный методом градиентного спуска, уточняется методом золотого сечения для большего значения  $N=10000$ .

Вычислительные эксперименты показали, что искомые КСО являются почти периодическими (квазипериодическими) с ошибкой, не превосходящей  $10^{-4}$  по

каждой канонической полярной переменной. Квазипериод не превосходит 10000 оборотов Фобоса вокруг Марса.

Рассмотрим алгоритм градиентного спуска. Как и в [57 – Тучин, 2007] будем рассматривать задачу в следующей постановке. Задано начальное положение КА  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = -b$  в момент времени, в который истинная аномалия Фобоса равна  $\nu_0$ . Рассмотрим множество КСО, проходящих через заданную точку, при различных значениях вектора скорости. Для каждой такой КСО определим множество точек пересечения с отрицательной частью оси  $y$  и максимальное удаление  $\Delta$  точек этого множества от начальной точки. Найдём вектор начальной скорости, для которого минимально значение максимального удаления  $\Delta$ . Численные эксперименты показали, что при использовании градиентного спуска для поиска КСО с минимальным значением  $\Delta$  целесообразно использовать уравнения в канонических полярных переменных:  $Q_1, Q_2, P_1, P_2$  :

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= P_1, \\ \dot{Q}_2 &= \frac{P_2}{Q_1^2} - 1, \\ \dot{P}_1 &= \frac{P_2^2}{Q_1^3} - Q_1 + \rho(\nu) \left( 3Q_1 \cos^2 Q_2 - \frac{1}{Q_1^2} \right), \\ \dot{P}_2 &= -\frac{3}{2} \rho(\nu) Q_1^2 \sin 2Q_2.\end{aligned}\tag{1.47}$$

Начальное положение задается условием:

$$Q_1(\nu_0) = Q_{01}, \quad Q_2(\nu_0) = -\frac{\pi}{2}.\tag{1.48}$$

Определим функцию  $\Delta(P_{10}, P_{20})$ , которая каждой паре  $P_{10}, P_{20}$  начальных значений обобщённых скоростей ставит в соответствие максимальную по абсолютной величине разность между значениями  $Q_1(\nu)$  и  $Q_{01}$  в точках, удовлетворяющих условию  $Q_2(\nu) = -\frac{\pi}{2}$  на интервале:  $\nu \in [\nu_0, \nu_0 + 2\pi N]$ , где  $N > 0$  – заданная целая константа:

$$\Delta(P_{10}, P_{20}) = \max \left\{ |Q_1(v) - Q_{10}| : Q_2(v) = -\frac{\pi}{2}, v \in [v_0, v_0 + 2\pi N] \right\}. \quad (1.49)$$

Поиск минимума функции  $\Delta(P_{10}, P_{20})$  выполним методом градиентного спуска. Начальные значения обобщённых скоростей определим алгоритмом формирования начального приближения. Производные вычислим разностным методом:

$$\begin{aligned} \Delta_{P_{10}} &= \frac{\partial}{\partial P_{10}} \Delta(P_{10}, P_{20}) = \frac{1}{2h} (\Delta(P_{10} + h, P_{20}) - \Delta(P_{10} - h, P_{20})), \\ \Delta_{P_{20}} &= \frac{\partial}{\partial P_{20}} \Delta(P_{10}, P_{20}) = \frac{1}{2h} (\Delta(P_{10}, P_{20} + h) - \Delta(P_{10}, P_{20} - h)), \end{aligned} \quad (1.50)$$

где  $h = 4 \cdot 10^{-5}$ .

При вычислении производных должны проверяться условия попадания в локальный минимум или овраг. Если одновременно выполнены условия:

$$\begin{aligned} \Delta(P_{10}, P_{20}) &< \Delta(P_{10} + h, P_{20}), & \Delta(P_{10}, P_{20}) &< \Delta(P_{10}, P_{20} + h), \\ \Delta(P_{10}, P_{20}) &< \Delta(P_{10} - h, P_{20}), & \Delta(P_{10}, P_{20}) &< \Delta(P_{10}, P_{20} - h) \end{aligned} \quad (1.51)$$

точка  $(P_{10}, P_{20})$  попала в локальный экстремум.

При попадании текущей точки в локальный экстремум вычисляются значения функции в следующих четырёх точках:  $\Delta(P_{01} + h_{P_1}, P_{02})$ ,  $\Delta(P_{01} - h_{P_1}, P_{02})$ ,  $\Delta(P_{01}, P_{02} + h_{P_2})$ ,  $\Delta(P_{01}, P_{02} - h_{P_2})$ , где  $h_{P_1} = 4 \cdot 10^{-3}$ ,  $h_{P_2} = 3 \cdot 10^{-2}$ . Если минимальное значение из этих четырёх значений меньше, чем  $\Delta(P_{01}, P_{02})$ , происходит переход в соответствующую точку.

Если все четыре значения больше, чем  $\Delta(P_{01}, P_{02})$ , считается, что текущий локальный экстремум и есть искомый глобальный экстремум, а значения  $P_{01}, P_{02}$  – искомые значения.

Если одновременно выполняются условия:  $\Delta(P_{10}, P_{20}) < \Delta(P_{10} + h, P_{20})$  и  $\Delta(P_{10}, P_{20}) < \Delta(P_{10} - h, P_{20})$ , текущая точка попала в овраг по переменной  $P_{10}$ . В этом случае при переходе к следующей точке должны использоваться только производные по переменной  $P_{20}$ , значение  $\Delta_{P_1}$  обнуляется.

При одновременном выполнении условий:  $\Delta(P_{10}, P_{20}) < \Delta(P_{10}, P_{20} + h)$  и  $\Delta(P_{10}, P_{20}) < \Delta(P_{10}, P_{20} - h)$  точка попадает в овраг по переменной  $P_{20}$ . В этом случае обнуляется значение  $\Delta_{P_2}$ . Одновременное попадание в овраг по переменным  $P_{10}$  и  $P_{20}$  означает, что текущая точка попадает в локальный экстремум. Этот случай уже рассмотрен выше.

Вычисляется величина:  $m = \sqrt{\Delta_{P_1}^2 + \Delta_{P_2}^2}$ . Если эта величина меньше, чем  $\varepsilon_{\text{grad}} = 10^{-12}$ , считается, что достигнут минимум по малому модулю градиента, а значения  $P_{01}, P_{02}$  — искомые.

Дальше ищется значение шага  $h$ , при котором

$$\Delta\left(P_{10} + \Delta_{P_1} \cdot \frac{h}{m}, P_{20} + \Delta_{P_2} \cdot \frac{h}{m}\right) < \Delta(P_{10}, P_{20})$$

Для этого выполняется цикл по величине шага  $h$ , начиная со значения, использованного при численном нахождении производных. При каждом новом проходе цикла величина шага  $h$  уменьшается вдвое. Если найдено искомое значение шага  $h$ , происходит переход к новым значениям обобщённых скоростей  $P_{10}, P_{20}$  и повторение действий, начиная с вычисления производных.

Если величина шага  $h$  стала меньше, чем  $10^{-6}$ , считается, что искомый минимум найден, а значения  $P_{01}, P_{02}$  — искомые значения обобщённых скоростей.

Особенность использования метода золотого сечения [51 – Растрингин, 1974] состоит в том, что он применяется к функции двух переменных  $P_1$  и  $P_2$ . Сначала фиксируется  $P_1$  и поиск выполняется по переменной  $P_2$ . После того, как минимум найден, фиксируется  $P_2$  и выполняется поиск по  $P_1$ . Затем выполняется поиск по  $P_2$  и т. д. Другой особенностью применения метода золотого сечения является то, что поиск начинается из точки текущего найденного минимума. Для того чтобы попасть в условия поиска по методу золотого сечения, границы интервала поиска задаются асимметрично относительно текущего минимума. Если  $\xi_c$  — точка, с которой начинается поиск, то поиск минимума выполняется в интервале:

$\left[ \xi_c - r_0, \xi_c + r_0 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]$ , где  $r_0$  — радиус поиска. При поиске минимума методом

золотого сечения использованы следующие значения параметров: величины интервалов поиска 0.1 и 0.4 по  $P_1$  и  $P_2$  соответственно, порог прекращения поиска 0.001 (одинаковый по  $P_1$  и  $P_2$ ).

### 1.2.11 Результаты расчётов

Значения начальных удалений от точки  $T$ , средняя ширина кольца, средняя разность относительных угловых скоростей и квазипериод приведены в таблице 1.6.

Таблица 1.6 – Параметры КСО

Начальное удаление $Q_{10}$	Средняя ширина кольца	Средняя разность относительных угловых скоростей	Квазипериод (число оборотов)
2.456423	0.10 – 0.11	0.215 – 0.235	65 – 787
2.654142	0.11 – 0.12	0.182 – 0.200	5 – 568
2.851861	0.13	0.155 – 0.171	19 – 547
3.0	0.13 – 0.14	0.137 – 0.153	7 – 866
3.5	0.16 – 0.17	0.095 – 0.107	19 – 870
4.0	0.19 – 0.20	0.067 – 0.077	14 – 915
4.5	0.20 – 0.25	0.049 – 0.057	18 – 756
5.0	0.24 – 0.25	0.037 – 0.043	26 – 968
5.5	0.27 – 0.29	0.028 – 0.033	31 – 1403
6.0	0.29 – 0.33	0.022 – 0.026	39 – 1223
6.5	0.32 – 0.34	0.017 – 0.021	49 – 1670
7.0	0.34 – 0.37	0.014 – 0.017	61 – 1014
7.5	0.36 – 0.39	0.011 – 0.014	74 – 2137
8.0	0.39 – 0.42	0.009 – 0.011	89 – 2122

В таблицах 1.7–1.20 приведены значения обобщённых скоростей на начальный момент для начальных удалений от 2.456423 до 8. Значения приводятся с учётом свойства симметрии рассматриваемой системы. Система уравнений (1.10) обладает свойством симметрии: если  $(x(\nu), y(\nu))$  — решение системы (1.10), то  $(-x(-\nu), y(-\nu))$  — тоже решение системы (1.10). В канонических полярных переменных:  $Q_1, Q_2, P_1, P_2$  симметричные решения уравнения (1.10)  $Q_1^{(1)}(\nu), Q_2^{(1)}(\nu), P_1^{(1)}(\nu), P_2^{(1)}(\nu)$  и  $Q_1^{(2)}(\nu), Q_2^{(2)}(\nu), P_1^{(2)}(\nu), P_2^{(2)}(\nu)$  связаны соотношениями:  $Q_1^{(2)}(\nu) = Q_1^{(1)}(-\nu), Q_2^{(2)}(\nu) = \pi - Q_2^{(1)}(-\nu), P_1^{(2)}(\nu) = -P_1^{(1)}(-\nu), P_2^{(2)}(\nu) = P_2^{(1)}(-\nu)$ .

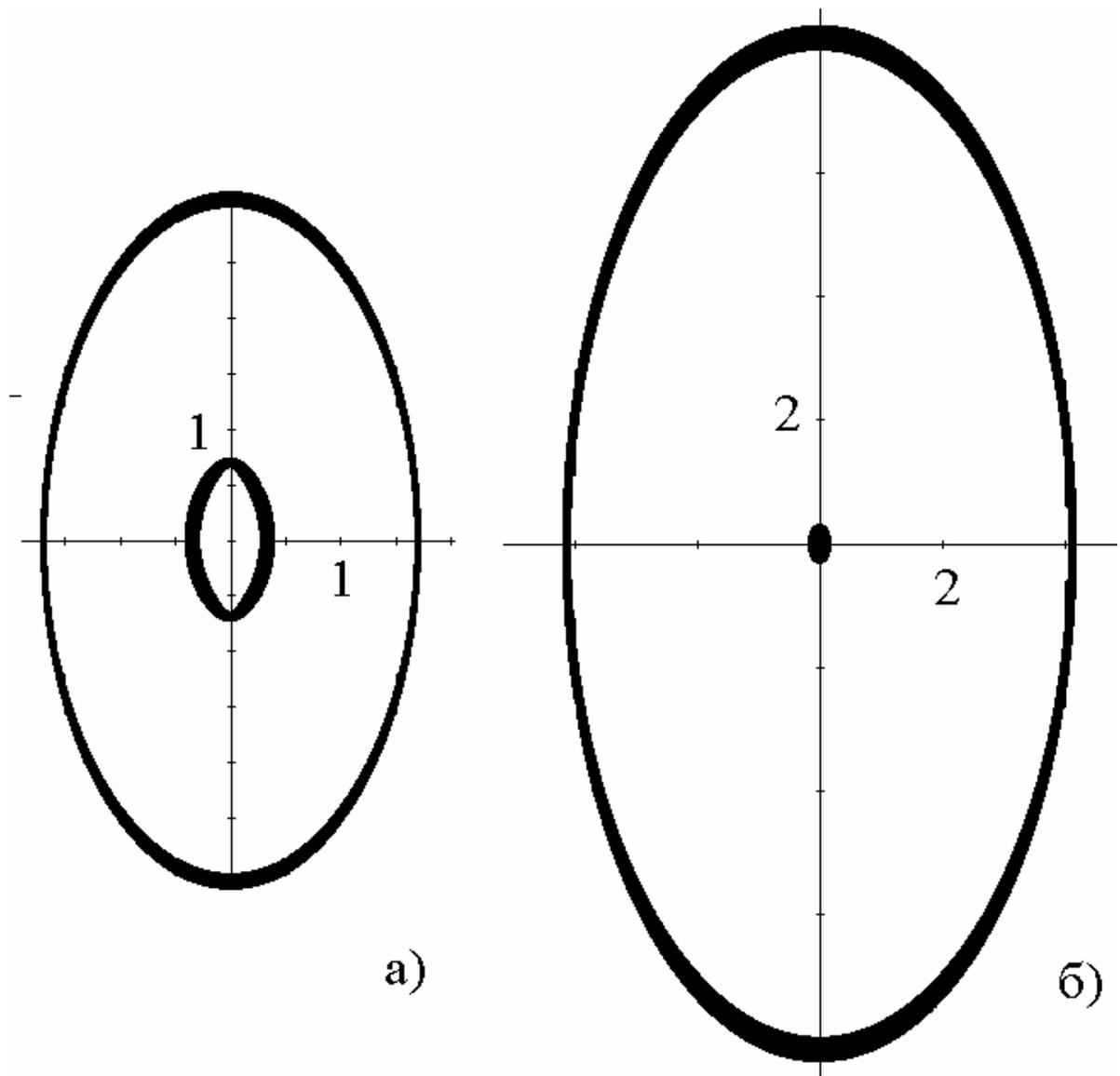
При поиске начальных условий рассматривается семейство КСО, проходящее через точку  $T$  с полярными координатами:  $Q_1 = Q_{10}, Q_2 = -\frac{\pi}{2}$  в момент времени, соответствующий значению истинной аномалии  $\nu_0$ . Для каждой КСО определяется множество точек пересечения с отрицательной частью оси  $Y$  и максимальное удаление точек этого множества от точки  $T$ . Для каждого начального значения истинной аномалии  $\nu_0$  ищется КСО, для которой максимальное удаление минимально. Начальные значения обобщённых скоростей обозначим:  $P_{01}(\nu_0)$  и  $P_{02}(\nu_0)$ .

Решению уравнения (1.10) с начальными условиями:  $Q_{01}, -\frac{\pi}{2}, P_{01}, P_{02}$  будет соответствовать симметричное решение с начальными условиями:  $Q_{01}, -\frac{\pi}{2}, -P_{01}, P_{02}$ . Очевидно, что максимальные удаления симметричных решений равны между собой. При этом в одном из симметричных решений истинная аномалия  $\nu$  растёт, в другом убывает. Для периодических решений максимальное удаление от точки  $T$  не должно зависеть от направления движения по траектории (вперед или назад). Поэтому, если бы найденные симметричные решения были бы периодическими, максимальные удаления от точки  $T$  должны совпадать.

Найденные решения являются квазипериодическими. Поэтому найденные значения начальных обобщённых скоростей связаны приближённой зависимостью:

$P_{01}(v_0) \approx -P_{01}(-v_0)$ ,  $P_{02}(v_0) \approx P_{02}(-v_0)$ , а в таблицах, содержащих результаты расчётов, приведены одинаковые значения  $|P_{01}|$  и  $P_{02}$  для начальных значений истинной аномалии:  $v_0$  и  $2\pi - v_0$ .

На рис. 1.5 показаны найденные КСО для начальных удалений 3 и 8.



**Рисунок 1.5** – Движение по КСО и движение центра эллипса: а) – начальное удаление  $Q_{10} = 3$ , б) – начальное удаление  $Q_{10} = 8$

**Таблица 1.7** – Значения обобщённых скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 2.456423$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	1.888	
10	0.004	1.888	350
20	0.007	1.887	340
30	0.010	1.887	330
40	0.013	1.887	320
50	0.016	1.887	310
60	0.018	1.886	300
70	0.019	1.886	290
80	0.020	1.885	280
90	0.021	1.885	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.020	1.884	260
110	0.020	1.883	250
120	0.018	1.883	240
130	0.016	1.882	230
140	0.013	1.881	220
150	0.010	1.881	210
160	0.007	1.880	200
170	0.004	1.880	190
180	0.000	1.880	

**Таблица 1.8** – Значения обобщённых скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 2.654142$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	2.417	
10	0.004	2.417	350
20	0.007	2.417	340
30	0.011	2.417	330
40	0.014	2.416	320
50	0.017	2.415	310
60	0.019	2.415	300
70	0.021	2.414	290
80	0.022	2.412	280
90	0.022	2.411	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.022	2.410	260
110	0.021	2.409	250
120	0.019	2.408	240
130	0.017	2.406	230
140	0.014	2.405	220
150	0.011	2.404	210
160	0.008	2.404	200
170	0.004	2.403	190
180	0.000	2.403	

**Таблица 1.9** – Значения обобщённых скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 2.851861$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	2.990	
10	0.004	2.990	350
20	0.008	2.989	340
30	0.012	2.989	330
40	0.015	2.988	320
50	0.018	2.987	310
60	0.020	2.985	300
70	0.022	2.984	290
80	0.023	2.982	280
90	0.024	2.980	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.023	2.978	260
110	0.022	2.976	250
120	0.021	2.975	240
130	0.018	2.973	230
140	0.015	2.971	220
150	0.012	2.970	210
160	0.008	2.969	200
170	0.004	2.968	190
180	0.000	2.968	

**Таблица 1.10** – Значения обобщённых скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 3.0$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	3.447	
10	0.004	3.447	350
20	0.008	3.446	340
30	0.012	3.445	330
40	0.016	3.444	320
50	0.019	3.442	310
60	0.021	3.440	300
70	0.023	3.438	290
80	0.024	3.436	280
90	0.025	3.434	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.024	3.431	260
110	0.023	3.429	250
120	0.022	3.426	240
130	0.019	3.424	230
140	0.016	3.422	220
150	0.013	3.420	210
160	0.009	3.419	200
170	0.004	3.418	190
180	0.000	3.418	

**Таблица 1.11** – Значения обобщённых скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 3.5$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	5.157	
10	0.005	5.157	350
20	0.010	5.156	340
30	0.014	5.154	330
40	0.018	5.152	320
50	0.021	5.149	310
60	0.024	5.145	300
70	0.027	5.141	290
80	0.028	5.136	280
90	0.028	5.131	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.028	5.127	260
110	0.027	5.122	250
120	0.025	5.117	240
130	0.022	5.113	230
140	0.019	5.109	220
150	0.015	5.106	210
160	0.010	5.104	200
170	0.005	5.102	190
180	0.000	5.101	

**Таблица 1.12** – Значения обобщённых скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 4.0$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	7.123	
10	0.005	7.123	350
20	0.011	7.121	340
30	0.016	7.117	330
40	0.020	7.113	320
50	0.024	7.108	310
60	0.027	7.102	300
70	0.030	7.095	290
80	0.032	7.087	280
90	0.032	7.080	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.032	7.072	260
110	0.030	7.064	250
120	0.028	7.057	240
130	0.025	7.050	230
140	0.021	7.044	220
150	0.016	7.039	210
160	0.011	7.035	200
170	0.006	7.033	190
180	0.000	7.032	

**Таблица 1.13** – Значения обобщённых скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 4.5$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	9.338	
10	0.006	9.337	350
20	0.012	9.334	340
30	0.018	9.330	330
40	0.023	9.323	320
50	0.027	9.317	310
60	0.031	9.308	300
70	0.034	9.296	290
80	0.036	9.285	280
90	0.036	9.274	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.036	9.253	260
110	0.034	9.255	250
120	0.031	9.241	240
130	0.028	9.231	230
140	0.023	9.223	220
150	0.018	9.215	210
160	0.012	9.211	200
170	0.006	9.207	190
180	0.000	9.206	

**Таблица 1.14** – Значения обобщённых скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 5.0$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	11.800	
10	0.007	11.799	350
20	0.013	11.795	340
30	0.019	11.789	330
40	0.025	11.781	320
50	0.030	11.770	310
60	0.034	11.758	300
70	0.037	11.744	290
80	0.039	11.730	280
90	0.040	11.714	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.039	11.698	260
110	0.038	11.683	250
120	0.035	11.668	240
130	0.031	11.655	230
140	0.026	11.643	220
150	0.020	11.634	210
160	0.014	11.626	200
170	0.007	11.622	190
180	0.000	11.621	

**Таблица 1.15** – Значения обобщённых скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 5.5$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	14.508	
10	0.007	14.506	350
20	0.015	14.502	340
30	0.021	14.494	330
40	0.027	14.482	320
50	0.033	14.469	310
60	0.037	14.452	300
70	0.040	14.436	290
80	0.043	14.418	280
90	0.043	14.394	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.043	14.376	260
110	0.041	14.357	250
120	0.038	14.335	240
130	0.034	14.320	230
140	0.028	14.305	220
150	0.022	14.293	210
160	0.015	14.282	200
170	0.008	14.277	190
180	0.000	14.279	

**Таблица 1.16** – Значения обобщённых скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 6.0$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	17.463	
10	0.008	17.461	350
20	0.016	17.454	340
30	0.023	17.444	330
40	0.030	17.431	320
50	0.036	17.414	310
60	0.040	17.394	300
70	0.044	17.371	290
80	0.046	17.348	280
90	0.047	17.322	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.047	17.294	260
110	0.045	17.272	250
120	0.041	17.249	240
130	0.037	17.227	230
140	0.031	17.208	220
150	0.024	17.194	210
160	0.017	17.182	200
170	0.008	17.175	190
180	0.000	17.173	

**Таблица 1.17** – Значения обобщённых скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 6.5$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	20.663	
10	0.009	20.661	350
20	0.017	20.653	340
30	0.025	20.641	330
40	0.032	20.624	320
50	0.039	20.604	310
60	0.044	20.579	300
70	0.047	20.556	290
80	0.050	20.521	280
90	0.051	20.497	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.050	20.466	260
110	0.048	20.432	250
120	0.045	20.401	240
130	0.040	20.348	230
140	0.034	20.370	220
150	0.026	20.346	210
160	0.018	20.323	200
170	0.009	20.316	190
180	0.000	20.312	

**Таблица 1.18** – Значения обобщённых скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 7.0$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	24.113	
10	0.009	24.108	350
20	0.018	24.101	340
30	0.027	24.084	330
40	0.034	24.066	320
50	0.041	24.041	310
60	0.047	24.012	300
70	0.051	23.981	290
80	0.054	23.940	280
90	0.055	23.906	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.054	23.869	260
110	0.052	23.839	250
120	0.048	23.804	240
130	0.043	23.774	230
140	0.036	23.744	220
150	0.028	23.721	210
160	0.019	23.705	200
170	0.010	23.696	190
180	0.000	23.692	

**Таблица 1.19** – Значения обобщённых скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 7.5$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	27.808	
10	0.010	27.803	350
20	0.020	27.794	340
30	0.029	27.779	330
40	0.037	27.753	320
50	0.044	27.726	310
60	0.050	27.688	300
70	0.055	27.652	290
80	0.058	27.607	280
90	0.059	27.567	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.058	27.530	260
110	0.056	27.480	250
120	0.052	27.444	240
130	0.046	27.410	230
140	0.039	27.377	220
150	0.030	27.352	210
160	0.020	27.333	200
170	0.010	27.320	190
180	0.000	27.317	

**Таблица 1.20** – Значения обобщённых скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 8.0$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	31.753	
10	0.011	31.747	350
20	0.021	31.736	340
30	0.031	31.717	330
40	0.039	31.688	320
50	0.047	31.656	310
60	0.053	31.618	300
70	0.058	31.570	290
80	0.061	31.526	280
90	0.063	31.476	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.062	31.430	260
110	0.059	31.380	250
120	0.055	31.335	240
130	0.049	31.292	230
140	0.041	31.252	220
150	0.032	31.227	210
160	0.022	31.205	200
170	0.011	31.192	190
180	0.000	31.184	

## 1.2.12 Алгоритм проектирования КСО

Исходными данными для проектирования являются следующие величины:  $h_{270}$  – максимальное удаление КА от поверхности Фобоса на долготе  $270^\circ$ ,  $t$  – момент времени и  $\lambda_L$  – долгота, которую должен проходить КА в этот момент времени. Сначала по максимальному удалению  $h_{270}$  выбирается одна из таблиц 1.7 – 1.20. Для этого заданное максимальное удаление пересчитывается в безразмерную величину  $y$  по формуле:

$$y = \frac{h_{270} + r_{270}}{p_{Ph} \sqrt[3]{\frac{\mu_{Ph}}{\mu_{Ph} + \mu_M}}},$$

где

$h_{270}$  – заданное максимальное удаление КА в диапазоне от 50 до 200 км;

$r_{270}$  – расстояние от центра Фобоса до точки на его экваторе с долготой  $270^\circ$ , (11.1 км);

В ходе выполнения работ по баллистико-навигационному обеспечению полёта КА «Фобос-Грунт» по измерениям, полученным на орбите наблюдения, будут уточнены эфемериды Фобоса и его гравитационный параметр. При проектировании КСО будут использованы уточнённые значения  $\mu_{Ph}$  и  $p_{Ph}$ .

По найденной безразмерной величине  $y$  и значениям  $Q_{10}$  максимальных удалений выбирается таблица. Выбор выполняется из условия близости  $y$  к  $Q_{10}$ . Таблицы построены так, что диапазон удалений от 50 до 60 км, номинального случая в проекте «Фобос-Грунт», покрыт с шагом 5 км, а остальной диапазон от 60 до 200 км, предназначенный для работы при отклонениях от номинального случая, – с шагом 12.5 км.

По заданному моменту времени  $t$  определяется  $v_t$  – истинная аномалия Фобоса на этот момент времени. Эта величина используется для выбора строки со значениями обобщённых скоростей из выбранной таблицы. Для этого по начальным условиям, соответствующим строке таблицы, определим долготу  $\lambda(v_t)$ , которую проходит КА при истинной аномалии  $v_t$ . Следует отметить, что каждой строке

таблицы соответствует пара начальных условий. Выбирается такая строка таблицы, которой соответствует минимальная величина  $|\lambda_L - \lambda(v_i)|$ , и формируются начальные условия.

По выбранным начальным условиям вычисляется вектор состояния КА в канонических полярных переменных на истинную аномалию  $v_i : Q_1, Q_2, P_1, P_2$ . На момент времени  $t$  по полной модели движения Фобоса в инерциальной системе координат, в которой выполняются проектные расчёты, вычисляются оскулирующие элементы его орбиты.

С использованием оскулирующих элементов орбиты Фобоса вектор состояния КА из канонических полярных переменных пересчитывается в орбитальную систему координат Фобоса, определённую в пункте 1.1.1, а затем в инерциальную систему координат.

Проектные расчёты [67 – Тучин, 2002] выполняются в системе координат, центр которой совпадает с центром масс системы Марс – Фобос, плоскость  $XU$  совпадает с плоскостью среднего экватора Земли эпохи J2000, ось  $X$  направлена в точку весеннего равноденствия Земли этой эпохи, ось  $Z$  направлена ортогонально плоскости  $XU$  в сторону северного полюса, ось  $Y$  дополняет систему координат до правой.

Вектор состояния КА  $(\mathbf{r}_{\text{RNB}}^T \quad \mathbf{v}_{\text{RNB}}^T)^T$  в орбитальной системе координат Фобоса вычисляется по формулам:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_{\text{RNB}} \\ \mathbf{v}_{\text{RNB}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_t p_{\text{Ph}} \mathbf{E}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \frac{c_{\text{Ph}} e_{\text{Ph}} \sin v_t \mathbf{E}_3}{p_{\text{Ph}}} & \frac{c_{\text{Ph}}}{\rho_t p_{\text{Ph}}} \mathbf{E}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\text{N}} \\ \dot{\mathbf{x}}_{\text{N}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_{\text{N}} = \begin{pmatrix} Q_1 \cos Q_2 \\ Q_1 \sin Q_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}_{\text{N}} = \begin{pmatrix} P_1 \cos Q_2 - \frac{P_2}{Q_1^2} \sin Q_2 + Q_1 \sin Q_2 \\ P_1 \sin Q_2 + \frac{P_2}{Q_1^2} \cos Q_2 - Q_1 \cos Q_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$O_3$  – нулевая матрица  $3 \times 3$ ,

$E_3$  – единичная матрица  $3 \times 3$ ,

$\rho_t$  – переменная, вычисляемая по формуле:  $\rho_t = \frac{1}{1 + e_{ph} \cos v_t}$ ,

$c_{ph}$  – оскулирующий интеграл площадей орбиты Фобоса,

$p_{ph}$  – оскулирующий фокальный параметр орбиты Фобоса,

$e_{ph}$  – оскулирующий эксцентриситет орбиты Фобоса.

Вектор состояния КА в инерциальной системе координат вычисляется по формулам:

$$\mathbf{r}_{J2000} = \left( \mathbf{C}_{J2000}^{RNB} \right)^T \left( \mathbf{r}_{RNB} + \begin{pmatrix} r_{ph} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$
$$\mathbf{v}_{J2000} = \left( \mathbf{C}_{J2000}^{RNB} \right)^T \left( \mathbf{v}_{RNB} + \begin{pmatrix} \dot{r}_{ph} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left( \frac{d}{dt} \mathbf{C}_{J2000}^{RNB} \right) \mathbf{r}_{J2000} \right),$$

где

$r_{ph}$  – расстояние от центра масс системы Марс – Фобос до центра масс Фобоса на момент времени  $t$ ,

$\dot{r}_{ph}$  – радиальная скорость Фобоса на этот же момент времени.

Матрица  $\mathbf{C}_{J2000}^{RNB}$  и её производная по времени вычисляются по формулам:

$$\mathbf{C}_{J2000}^{RNB} = \begin{pmatrix} \cos v_t & \sin v_t & 0 \\ -\sin v_t & \cos v_t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{M}_{PQR}^T,$$
$$\frac{d}{dt} \mathbf{C}_{J2000}^{RNB} = \frac{c_{ph}}{r_{ph}^2} \begin{pmatrix} -\sin v_t & \cos v_t & 0 \\ -\cos v_t & -\sin v_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{M}_{PQR}^T,$$

где  $\mathbf{M}_{PQR}$  – матрица, составленная из векторов Гаусса: P, Q и R.

Векторы Гаусса вычисляются по формулам:

$$P = \begin{pmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \cos i \sin \Omega \\ \cos \omega \sin \Omega - \sin \omega \cos i \cos \Omega \\ \sin \omega \sin i \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \cos i \sin \Omega \\ -\sin \omega \sin \Omega - \cos \omega \cos i \cos \Omega \\ \cos \omega \sin i \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} \sin i \sin \Omega \\ -\sin i \cos \Omega \\ \cos i \end{pmatrix},$$

где

- $i$  – оскулирующее наклонение орбиты Фобоса,
- $\Omega$  – оскулирующая долгота восходящего узла орбиты Фобоса,
- $\omega$  – оскулирующий аргумент перицентра орбиты Фобоса.

Алгоритм проектирования КСО позволяет получить начальные условия, которые обеспечивают прохождение над заданной долготой Фобоса в заданное время. Таблицы начальных условий покрывают интервал от 50 до 200 км.

## **Глава 2 Баллистика, навигация и управление движением КА на этапе его посадки на поверхность Фобоса**

Настоящая глава посвящена проблемам навигации и управления в схеме посадки на Фобос. Результаты, представленные в этой главе, описаны в работах [114 – Tuchin, 2004; 63 – Тучин, 2009].

В этой главе содержится модель движения КА относительно Фобоса, которая достаточно проста для бортовых вычислений, обеспечивает требуемую точность и позволяет рассчитывать коррекции и решать навигационные задачи. На основе этой модели построен алгоритм оценки вектора состояния КА по измерениям лазерного высотомера и доплеровского измерителя скорости и дальности. Алгоритм оценки вектора состояния использует цифровую модель поверхности Фобоса, разработанную специалистами Института геохимии и аналитической химии им. В.И. Вернадского РАН. Выполнен анализ схемы посадки и условий ее выполнения.

### **2.1 Сближение с Фобосом и посадка на его поверхность: общая схема**

#### **2.1.1 Сближение с Фобосом**

Для сближения с Фобосом и посадки на его поверхность используются два типа орбит: орбита наблюдения и квазисинхронная орбита (КСО). На первой из орбит выполняются телевизионные наблюдения Фобоса с целью получения точности его эфемерид, которая необходима для выполнения посадки [75 – Шишов, 2008; 76 – Шишов, 2008].

В качестве орбиты наблюдения выбрана орбита со следующими параметрами: период обращения 8.3 ч; расстояние периария от центра Марса 9905 км; наклонение к плоскости орбиты Фобоса  $0^\circ$ , периодичность сближений с Фобосом – 4 суток; периодичность сближений с Фобосом, обеспечивающих возможность проведения

автономных навигационных измерений – 8 суток; минимальный временной интервал, при котором расстояние от КА до Фобоса менее 1000 км, – 1.7 ч.

После перехода на орбиту наблюдения выполняются следующие операции:

- проведение научных экспериментов; выполнение маневров фазирования;
- за один месяц до перехода на КСО выполнение измерений по программе, обеспечивающей высокоточный прогноз движения КА относительно Фобоса;
- двухимпульсный маневр перехода с орбиты наблюдения на КСО.

Вопросы выбора КСО рассмотрены в первой главе диссертации. Переход с орбиты наблюдения на КСО, в общем случае, может быть осуществлён тремя маневрами. Суммарная характеристическая скорость маневров перевода КА с исходной орбиты наблюдения на КСО не превышает 150 м/с. При этом сумма модулей двух заключительных импульсов ~70 м/с. На КСО выполняется следующая программа:

- четыре дня измерений для прогноза относительного движения на момент начала сеанса посадки;
- один день подготовки к сеансу посадки;
- сеанс посадки или маневр в нештатной ситуации;
- повторный сеанс посадки.

### **2.1.2 Условия посадки**

Для обеспечения условий посадки КА должен быть приведён в точку, которая находится на высоте не более 60 км над предполагаемым районом посадки. Должны быть выполнены следующие условия при подготовке и на интервале посадки:

- получение телевизионного изображения района посадки за несколько суток до начала сеанса посадки;
- нахождение угла Солнце – Фобос – КА в диапазоне от 20° до 70° в течение сеанса посадки;
- радиовидимость КА со станций слежения в Уссурийске и Медвежьих Озёрах;
- радиовидимость Земли в допустимом диапазоне углов привода остронаправленной антенны (ОНА);

- прогноз движения КА относительно Фобоса на момент схода с КСО с ошибками, не превосходящими 3 км по положению и 1 м/с по скорости;
- проверка работоспособности основных бортовых систем, обеспечивающих посадку, до её начала;
- возможность повторения сеанса посадки, если он не был начат в назначенное время;
- реализация схода с КСО, сближение и мягкая посадка в рамках тяговооруженности и запасов топлива КА.

### **2.1.3 Навигационные приборы обеспечения посадки**

Для управления движением при посадке предлагается использовать следующие измерительные средства:

- бесплатформенный инерциальный блок (БИБ);
- звёздный прибор (БОКЗ-МФ);
- лазерный высотомер (ЛВ);
- доплеровский измеритель скорости и дальности (ДИСД);
- телевизионная система.

Бесплатформенный инерциальный блок имеет в своем составе три акселерометра и три датчика угловых скоростей. Измерения приращений кажущейся скорости в направлении осей чувствительности акселерометров и приращения углов поворота вокруг осей чувствительности датчиков угловых скоростей используются для определения ориентации, угловых скоростей и вектора состояния КА методом счисления пути.

Звёздный прибор обеспечивает определение ориентации КА по звёздам с высокой точностью. Параметры ориентации, получаемые звёздным прибором, используются для коррекции параметров ориентации, получаемых методом счисления пути.

Лазерный высотомер обеспечивает измерения расстояния до поверхности по четырем лучам. Он выполняет навигационные измерения на участке от момента схода с КСО до высоты 500 м. Доплеровский измеритель скорости и дальности

выполняет измерения дальности до подстилающей поверхности в направлении четырёх лучей и проекции вектора скорости КА относительно Фобоса на направления этих лучей. Доплеровская система работает с высоты 3 км. Измерения лазерного высотомера и доплеровской системы используются навигационной задачей, входящей в бортовой комплекс управления посадкой, для определения вектора состояния КА, которым корректируется вектор состояния, получаемый методом счисления пути. Измерения дальностей по лучам, получаемые ЛВ и ДИСД, используются также для определения нормали к подстилающей поверхности.

Основной задачей телевизионной системы является определение района в окрестности номинальной точки посадки, в которой рельеф поверхности максимально подходит для посадки. Телевизионная камера позволяет получать навигационные измерения, в том числе скорость движения КА относительно поверхности. Эти измерения являются резервными на случай отказа доплеровской системы.

#### **2.1.4 Схема управляемой посадки**

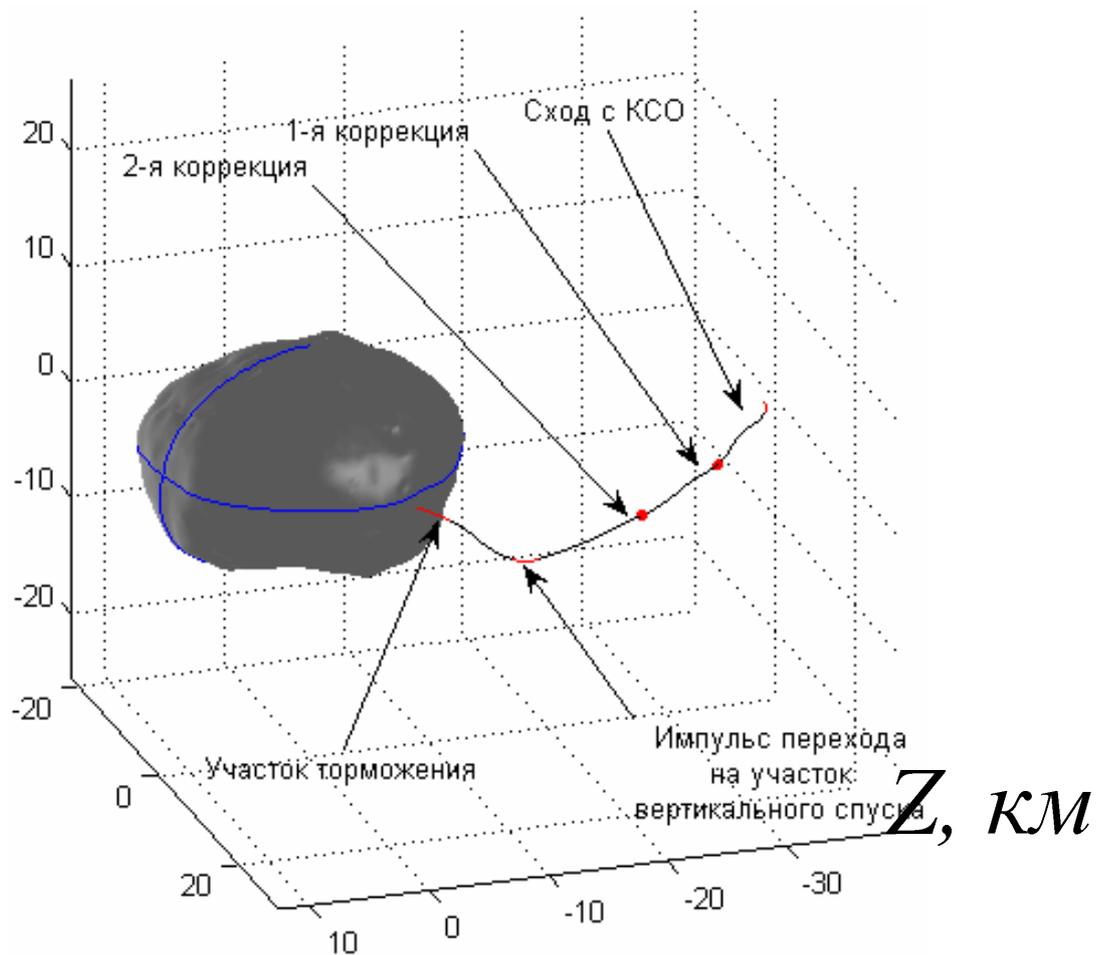
Схема посадки на Фобос (рис. 2.1) потребовала анализа траектории с использованием четырёх участков:

- схода с КСО;
- перелёта с КСО в точку, расположенную над районом посадки;
- вертикального спуска;
- прецизионного торможения.

Участок перелёта с КСО в точку, расположенную над районом посадки, начинается с маневра схода с КСО и завершается в момент попадания в заданную точку. В ходе перелёта предусмотрены коррекции траектории.

При движении КА на участке вертикального спуска предложено использовать простой метод компенсации горизонтальной составляющей скорости. Если она превосходит пороговое значение, включается двигатель, который её компенсирует. При этом в горизонтальной плоскости накапливается ошибка по положению.

Поэтому скорость спуска должна быть достаточно велика, чтобы за время спуска не накопилась большая величина ошибки.



**Рисунок 2.1** – Схема управляемой посадки в СК, связанной с фигурой Фобоса

На участке прецизионного торможения постепенно гасится вертикальная составляющая скорости до величины, с которой допускается соприкосновение с поверхностью: 1.5 – 2 м/с. При этом боковая составляющая вектора скорости не должна превосходить 1 м/с.

Управление ориентацией КА должно быть организовано следующим образом. До начала сеанса посадки выполняется разворот, обеспечивающий заданную ориентацию. Она определяется из условий:

- «захвата» поверхности Фобоса лучами ЛВ;
- освещённости солнечных батарей в ходе и после посадки;

– работы привода ОНА, обеспечивающей связь с Землей.

В ходе посадки необходимо обеспечить совмещение средней нормали к поверхности Фобоса с продольной осью ( $OX$ ) связанной системы координат (СК) КА. Это позволяет привести КА на поверхность Фобоса так, чтобы его ось  $OX$  была направлена по нормали к поверхности, и при этом избежать больших разворотов, которые могут создать сложности в работе ЛВ, ДИСД и привода ОНА.

При разработке схемы управляемой посадки учитывались следующие ограничения:

- по длительности всей операции посадки;
- по максимальным значениям остаточных величин вертикальной и горизонтальной составляющих скорости в момент посадки (порядка единиц м/с);
- по высоте, начиная с которой нельзя включать вертикальный двигатель, чтобы не испортить оптические условия наблюдения поверхности;
- по энергетическим затратам.

С точки зрения надёжности работы бортовой аппаратуры, чем короче сеанс посадки, тем лучше, так как в сеансе посадки используется большое число аппаратных средств, и надёжность всей системы падает с увеличением времени. Основная часть времени сеанса посадки приходится на перелёт с КСО в точку, расположенную над выбранным районом. С точки зрения затрат характеристической скорости, чем больше это время, тем меньше суммарные затраты на импульс схода с КСО и импульс гашения продольной составляющей скорости в момент перехода в заданную точку.

Разработанная система управления посадкой обеспечивает два варианта схода с КСО: при прохождении долготы траверза точки посадки и с упреждением прохождения долготы точки посадки. В любом из этих вариантов импульс схода с КСО в номинальном случае обеспечивает приведение КА в прицельную точку, находящуюся на заданной высоте (около 10 км) над точкой предполагаемой посадки. С этой прицельной точки начинается участок вертикального спуска.

Моделирование процесса посадки показало, что длительность перелёта от момента схода с КСО до начала участка вертикального спуска составляет ~30 мин.

При получении от телевизионной системы достоверных данных о неровности рельефа подстилающей поверхности допускается горизонтальный маневр КА в направлении более благоприятной точке посадки.

Выбор точки посадки, варианта схода с КСО, высоты приведения над точкой посадки, расчёт импульса схода с КСО выполняется на Земле. Перед выполнением сеанса посадки на борт передаются следующие данные:

- момент схода с КСО и длительность перелёта от момента схода до прицельной точки;
- импульс схода и положение прицельной точки;
- заданная ориентация КА, векторы состояния КА и Фобоса на момент схода с КСО;
- моменты возможных коррекций на интервале перелёта.

Кроме того предусмотрена возможность изменения служебных параметров системы управления посадкой, к которым, в том числе, относятся граничные значения релейного закона управления и веса измерений в навигационной задаче. Значения этих параметров могут быть уточнены непосредственно перед посадкой при моделировании на стенде с учетом состояния бортовых систем.

## 2.1.5 Управление включением двигателей

Управление движением КА на участке посадки обеспечивают 20 двигателей. Они используются для управления движением центра масс КА и его движением вокруг центра масс. Разворот, обеспечивающий заданную начальную ориентацию, выполняется общей программой разворота системы управления. Для совмещения оси  $OX$  связанной СК КА с нормалью к поверхности необходимы небольшие повороты. Они обеспечивают текущее слежение за измеренной нормалью к подстилающей поверхности.

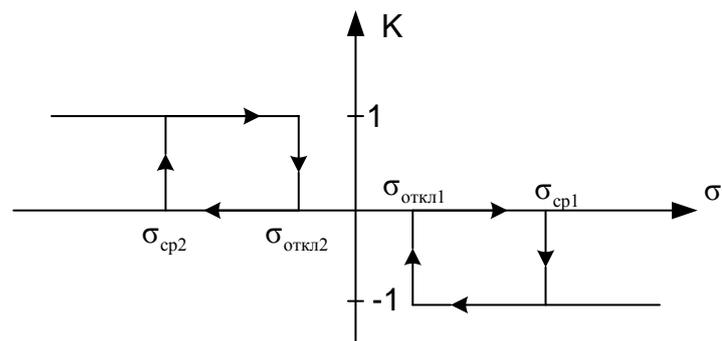
Имеется шесть каналов управления, которые обеспечивают создание ускорений вдоль определённых направлений, а также моментов вокруг соответствующих осей. Каждому каналу управления и направлению (плюс или минус) соответствует список номеров двигателей, которые нужно включить для реализации соответствующего управляющего воздействия.

Двигатели на КА установлены так, что управляющие ускорения можно создавать вдоль направления оси  $OX$  (в положительном и отрицательном направлениях) и вдоль осей, которые лежат в плоскости  $OYZ$  КА и проходят близко к биссектрисам координатных углов. Моменты создаются вокруг этих же осей. В связи с этим управление рассматривается не в связанной, а в «повёрнутой» системе координат.

Заданный импульс и набранная характеристическая скорость преобразуются к «повёрнутой» системе координат. Наличие невязки между компонентой вектора характеристической скорости и соответствующей ей компонентой заданного импульса означает, что необходимо создать ускорение вдоль соответствующей оси «повёрнутой» системе координат. Это ускорение создаётся включением определённых двигателей.

Заданная и текущая ориентации также рассматриваются в «повёрнутой» системе координат. Ориентация определяется углами Эйлера. Наличие невязки между текущим и заданным значениями углов означает, что КА нужно повернуть относительно соответствующей оси.

Таким образом, управление движением КА по каждому каналу реализует обратную связь по невязке. Закон управления представляет собой релейное управление с гистерезисом (чтобы избежать скользящего режима). Такой закон определяется двумя порогами по каждому направлению. Большой по абсолютной величине порог  $\sigma_{\text{ср}}$  – порог на включение (срабатывание), меньший  $\sigma_{\text{откл}}$  – на отключение (рис. 2.2).



**Рисунок 2.2** – Вид нелинейности в цепи обратной связи

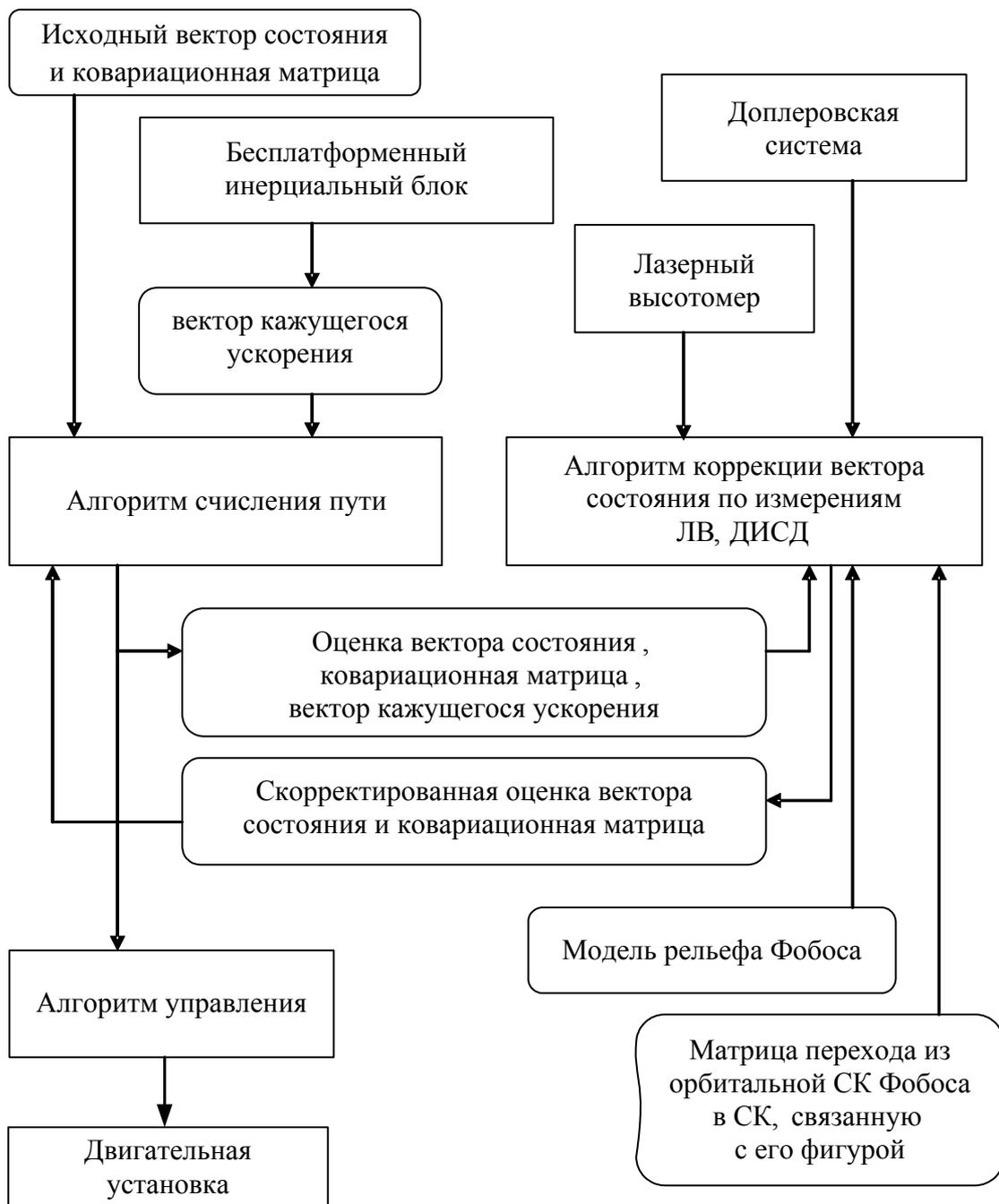
## **2.2 Алгоритмы управления движением КА**

### **2.2.1 Бортовые алгоритмы навигации и управления**

Основными бортовыми алгоритмами навигации и управления являются алгоритмы счисления пути, определяющие вектор состояния КА, его ориентацию и вектор угловой скорости, алгоритмы навигационной задачи и алгоритм расчёта коррекции.

Функциональная схема работы алгоритмов навигационного обеспечения управления посадкой показана на рис. 2.3. Вектор состояния КА и соответствующая ему ковариационная матрица на начало сеанса посадки рассчитываются на Земле по данным наземных и бортовых траекторных измерений. Эти данные передаются на борт и являются исходными для алгоритма счисления пути.

Алгоритм счисления пути по измерениям векторов кажущихся ускорений интегрированием уравнений движения КА в ограниченной задаче трёх тел (Марс, Фобос, КА) определяет оценку вектора состояния КА на текущий момент времени. Эта оценка заведомо будет включать ошибку по положению и скорости КА относительно Фобоса, содержащуюся в начальных условиях движения КА, полученных с Земли.



**Рисунок 2.3** – Навигационное обеспечение управления посадкой

По мере сближения КА с Фобосом от лазерного высотомера и доплеровской системы поступает более точная информация о положении и скорости КА относительно Фобоса. По этой информации решается навигационная задача и корректируется оценка вектора состояния КА, полученная методом счисления пути: алгоритм счисления пути получает новые начальные условия.

## 2.2.2 Уравнения движения КА относительно Фобоса

Алгоритм решения навигационной задачи и алгоритм расчёта коррекций используют уравнения движения КА относительно Фобоса. Уравнения записаны в его орбитальной СК, центр которой совпадает с центром масс Фобоса. Ось  $Ox_1$  направлена по линии визирования Марс – Фобос. Ось  $Ox_2$  ортогональна оси  $Ox_1$ , лежит в плоскости орбиты Фобоса и направлена в сторону его орбитального движения. Ось  $Ox_3$  дополняет систему до правой. Орбитальная СК Фобоса ещё удобна и тем, что переход из неё в СК, связанную с фигурой Фобоса, выполняется линейным преобразованием, коэффициенты которого постоянны на интервале посадки. Коэффициенты этого линейного преобразования вычисляются на Земле при подготовке сеанса посадки

Далее будем использовать обозначения, введённые в первой главе. Для орбиты Фобоса:  $e$  – эксцентриситет,  $p_{ph}$  – фокальный параметр,  $c_{ph}$  – интеграл площадей,  $v$  – истинная аномалия. Гравитационные параметры Марса и Фобоса обозначим  $\mu_M, \mu_{ph}$ . Для КА введём два вектора:  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  – вектор положения относительно Фобоса в нормированных переменных,  $|x|$  – норма вектора;  $a = (a_1, a_2, a_3)^T$  – вектор кажущегося ускорения в орбитальной СК Фобоса. Используя обозначения  $\rho = \frac{1}{1 + e \cos v}$ ,  $\mu = \frac{\mu_{ph}}{\mu_M + \mu_{ph}}$ ,  $k_a = \frac{p_{ph}^3}{c_{ph}^2}$ , выпишем уравнения движения КА относительно Фобоса в его орбитальной СК и нормированных переменных:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dv^2} &= 2 \frac{dx_2}{dv} + \rho \left( 3x_1 - \mu \frac{x_1}{|x|^3} \right) + k_a \rho^3 (a_1 \cos v + a_2 \sin v), \\ \frac{d^2 x_2}{dv^2} &= -2 \frac{dx_1}{dv} - \rho \mu \frac{x_2}{|x|^3} + k_a \rho^3 (-a_1 \sin v + a_2 \cos v), \\ \frac{d^2 x_3}{dv^2} &= -\rho x_3 (e \cos v + 1) - \rho \mu \frac{x_3}{|x|^3} + k_a \rho^3 a_3, \end{aligned} \quad (2.1)$$

Векторы положения  $x_{RF}$  и скорости  $\dot{x}_{RF}$  КА в орбитальной СК связаны с векторами положения и скорости в нормированных переменных следующими соотношениями:

$$\dot{x}_{RF} = p\rho x, \quad \dot{x}_{RF} = \frac{c}{p} \left( \frac{1}{\rho} \frac{dx}{dv} + e \sin v \cdot x \right) \quad (2.2)$$

Методические ошибки модели движения (2.1), (2.2) на участке схода длительностью ~40 минут не превышают 100 м по положению и 0.05 м/с по скорости.

Для расчёта импульса схода с КСО и решения навигационной задачи необходим расчёт частных производных текущего вектора состояния КА по начальному вектору состояния. Для этого нужно интегрировать уравнения в вариациях, которые для системы (2.1) имеют вид:

$$\frac{d\Phi(v)}{dt} = A(v)\Phi(v) \quad (2.3)$$

$$A(v) = \begin{pmatrix} 0_3 & & & E_3 \\ 3\rho - \rho\mu \frac{|x|^2 - 3x_1^2}{|x|^5} & 3\rho\mu \frac{x_1x_2}{|x|^5} & 3\rho\mu \frac{x_1x_2}{|x|^5} & 0 & 2 & 0 \\ 3\rho\mu \frac{x_1x_2}{|x|^5} & -\rho\mu \frac{|x|^2 - 3x_2^2}{|x|^5} & 3\rho\mu \frac{x_2x_3}{|x|^5} & -2 & 0 & 0 \\ 3\rho\mu \frac{x_1x_3}{|x|^5} & 3\rho\mu \frac{x_2x_3}{|x|^5} & -\rho(e \cos v + 1) - \rho\mu \frac{|x|^2 - 3x_3^2}{|x|^5} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где матрица  $A(v)$  вычисляется вдоль решения системы (2.1),  $E_3$  и  $0_3$  – единичная и нулевая квадратные матрицы размерности три.

Решение уравнения (2.3)  $\Phi(v)$  представляет собой матрицу частных производных текущего вектора состояния по начальному вектору в нормированных переменных.

Матрица частных производных текущего вектора состояния КА в орбитальной СК Фобоса по начальному вектору состояния в этой же системе координат вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial(\mathbf{x}_{\text{RF}}^{\text{T}}(t), \dot{\mathbf{x}}_{\text{RF}}^{\text{T}}(t))}{\partial(\mathbf{x}_{\text{RF}}^{\text{T}}(t_0), \dot{\mathbf{x}}_{\text{RF}}^{\text{T}}(t_0))} = \mathbf{D}(t)\Phi(\upsilon)\mathbf{D}^{-1}(t_0), \quad (2.4)$$

где  $\mathbf{D}(t)$  – матрица частных производных вектора состояния в орбитальной СК на момент времени  $t$  по компонентам вектора состояния в нормированных переменных. В формуле (2.4) моменту времени  $t$  соответствует значение истинной аномалии  $\upsilon$ , а моменту времени  $t_0$  – значение  $\upsilon_0$ . Матрицы  $\mathbf{D}(t)$  и  $\mathbf{D}^{-1}(t_0)$  вычисляются по формулам:

$$\mathbf{D}(t) = \begin{pmatrix} p\rho(\upsilon)\mathbf{E}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \frac{ce}{p}\sin\upsilon\mathbf{E}_3 & \frac{c}{p\rho(\upsilon)}\mathbf{E}_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^{-1}(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{p\rho(\upsilon_0)}\mathbf{E}_3 & \mathbf{O}_3 \\ -\frac{e}{p}\sin\upsilon_0\mathbf{E}_3 & \frac{p\rho(\upsilon_0)}{c}\mathbf{E}_3 \end{pmatrix}.$$

### 2.2.3 Расчёт коррекций на участке перелёта от момента схода с КСО до точки начала вертикального спуска

Матрица (2.4) позволяет выполнить расчёт коррекции на участке перелёта после схода с КСО в точку начала участка вертикального спуска. Если моменту времени  $t_0$  соответствует момент проведения коррекции, а моменту времени  $t$  момент выхода в точку начала вертикального спуска, то матрица (2.4) позволяет связать в линейном приближении невязки по компонентам положения на момент  $t$  с поправками к вектору скорости на момент времени  $t_0$ , которыми компенсируются невязки по положению. Расчёт импульса коррекции производится итерационно. На каждом шаге итерационного процесса уточняется вектор приращения скорости, обеспечивающий приведение КА в точку, заданную в орбитальной СК Фобоса. Для расчёта коррекции необходимо не более трёх итераций. Первая итерация позволяет определить вектор приращения скорости с точностью до единиц сантиметров в секунду, а третья – с точностью до долей миллиметров в секунду.

## 2.2.4 Определение вектора состояния КА по измерениям лазерного высотомера и доплеровской системы

Навигационная задача (определение вектора состояния КА по измерениям лазерного высотомера и доплеровской системы) решается классическим методом наименьших квадратов [12 – Аким, 1963]. Измеряемыми функциями являются расстояние до поверхности Фобоса вдоль заданного направления и проекция вектора скорости на заданное направление.

Введём обозначения:  $x$  – искомый вектор состояния КА на момент времени  $t_0$ ;  $x_0$  – априорный вектор состояния КА, полученный методом счисления пути на момент времени  $t_0$ ;  $C_0$  – ковариационная матрица ошибок оценки вектора состояния  $x_0$ ;  $N$  – число измерений;  $w_i$  – вес измерения;  $\psi_i^{\text{meas}}$  – измеренное значение расстояния до поверхности в заданном направлении  $\psi_{i,D}^{\text{meas}}$  или проекции скорости КА относительно Фобоса на заданное направление  $\psi_{i,V}^{\text{meas}}$ ;  $\psi_i^{\text{calc}}$  – расчётный аналог измерения:  $\psi_{i,D}^{\text{calc}}$  или  $\psi_{i,V}^{\text{calc}}$ . Алгоритм решения навигационной задачи основан на минимизации функции, представляющей собой сумму квадратов взвешенных невязок расчётных и измеренных значений:

$$Z(x) = (x - x_0)^T C_0^{-1} (x - x_0) + \sum_{i=1}^N w_i (\psi_i^{\text{meas}} - \psi_i^{\text{calc}})^2$$

Поиск минимума функции приводит к решению нелинейной системы уравнений методом Ньютона, который сводится к серии последовательных приближений. На каждом приближении для определения поправок  $\delta x^{(s)}$ , прибавляемых к оценке вектора состояния  $x_0^{(s-1)}$ , полученной на предыдущем приближении, решается система нормальных уравнений:

$$(B^T B) \delta x_0^{(s)} = D.$$

Матрица и правые части этой системы формируются для приближения с номером  $s$  по следующим формулам:

$$\mathbf{f}_i = \frac{\partial \Psi_i^{\text{calc}}}{\partial \mathbf{x}_{\text{Ph}}} \cdot \mathbf{M}_{\text{RF\_Ph}}(t_i) \cdot \frac{\partial(\mathbf{x}_{\text{RF}}(t_i))}{\partial(\mathbf{x}_{\text{RF}}(t_0))},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}_0^{-1} + \sum_{i=1}^N w_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_i,$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}_0^{-1}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^{(s-1)}(t_0)) + \sum_{i=1}^N (\Psi_i^{\text{meas}} - \Psi_i^{\text{calc}}(t_i))^2 w_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_i,$$

где  $\mathbf{x}^{(s-1)}(t_0)$  – вектор состояния на момент  $t_0$ , определяемый параметрами предыдущего приближения  $s-1$ ;  $\frac{\partial \Psi_i^{\text{calc}}}{\partial \mathbf{x}_{\text{Ph}}}$  – вектор-строка частных производных измеренного значения по вектору состояния КА в СК, связанной с фигурой Фобоса;  $\frac{\partial(\mathbf{x}_{\text{RF}}(t_i))}{\partial(\mathbf{x}_{\text{RF}}(t_0))}$  – матрица частных производных вектора положения на момент  $t_i$  по вектору положения на момент  $t_0$ , вычисляемая по формуле (2.4). Матрица  $\mathbf{M}_{\text{RF\_Ph}}(t_i)$  для пересчета вектора положения из орбитальной СК Фобоса в СК, связанную с его фигурой, имеет простой вид:  $\mathbf{M}_{\text{RF\_Ph}}(t_i) = \text{diag}(-1, -1, 1) + \mathbf{G}_\varepsilon$ , где  $\mathbf{G}_\varepsilon$  – матрица поправок, которая задаётся постоянной на участке посадки.

Матрицы системы нормальных уравнений  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$  формируются для каждого приближения из производных и рассогласований между наблюдаемыми значениями измеряемых величин и их расчётными значениями, причем производные и рассогласования считаются для траектории, определяемой параметрами предыдущего приближения. Поправка на приближении с номером  $s$  вычисляется по формуле  $\delta \mathbf{x}_0^{(s)} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{D}$ . Ковариационная матрица  $\mathbf{C}$ , полученная в результате оценки вектора состояния, равна  $(\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1}$ . Для решения навигационной задачи требуется не более пяти итераций.

Расчётный аналог измеренного значения проекции вектора скорости на заданное направление вычисляется по формуле:

$$\Psi_{i,V}^{\text{calc}} = (\mathbf{M}_{\text{RF\_Ph}}^T \mathbf{k}_i, \mathbf{M}_{\text{RF\_Ph}}^T \dot{\mathbf{x}}_{\text{RF}}(t_i)) = (\mathbf{k}_i, \dot{\mathbf{x}}_{\text{RF}}(t_i)),$$

где  $k_i$  – единичный вектор заданного направления луча в орбитальной СК Фобоса;  
 $t_i$  – момент времени измерения  $i$ .

Рассмотрим расчёт дальности  $\psi_{i,D}^{\text{calc}}$  в направлении луча лазерного высотомера или доплеровской системы до поверхности Фобоса, задаваемой цифровой моделью, и частных производных этой дальности по компонентам вектора состояния.

Для поверхности Фобоса используются две аппроксимации: референц-эллипсоид (РЭ) с длинами полуосей  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и цифровая поверхность Фобоса (ЦПФ), которая задаётся таблицей с шагом по широте  $\varphi$  и долготе  $\lambda$ . Для каждого узла дана величина радиус-вектора от центра Фобоса до его поверхности.

Основная идея алгоритма построена на представлении ЦПФ в виде отклонений от поверхности РЭ в направлении нормали к ней.

Пусть  $r_e = (x_e, y_e, z_e)$  – точка, лежащая на поверхности РЭ. Тогда уравнение нормали к поверхности:  $r = r_e + pn$ ,  $n = \left( \frac{x_e}{a^2}, \frac{y_e}{b^2}, \frac{z_e}{c^2} \right)$ ,  $p$  – коэффициент. Пусть теперь  $r_s = (x_s, y_s, z_s)$  – точка на ЦПФ. Точки  $r_e$  и  $r_s$  лежат на нормали к поверхности РЭ. Требуется получить координаты точки  $r_e$  на поверхности РЭ. Из параметрического

уравнения нормали находим, что  $x_e = \frac{x_s}{1 + \frac{p}{a^2}}$ ,  $y_e = \frac{y_s}{1 + \frac{p}{b^2}}$ ,  $z_e = \frac{z_s}{1 + \frac{p}{c^2}}$ . Подставляя эти

выражения в уравнение эллипсоида, получим уравнение:

$$1 - \frac{x_s^2}{\left(1 + \frac{p}{a^2}\right)^2 a^2} - \frac{y_s^2}{\left(1 + \frac{p}{b^2}\right)^2 b^2} - \frac{z_s^2}{\left(1 + \frac{p}{c^2}\right)^2 c^2} = 0. \quad (2.5)$$

Это уравнение нужно разрешить относительно параметра  $p$ .

В алгоритме, который будет изложен ниже, несколько раз производится переход от точки на РЭ к точке на ЦПФ, причем обе точки лежат на нормали к РЭ. Мы можем заранее найти значения коэффициента  $p$  для точек, координаты которых известны из цифровой модели. Эти значения образуют матрицу  $P$ . Тогда можно вычислять значения  $p$  для других точек, используя линейную интерполяцию.

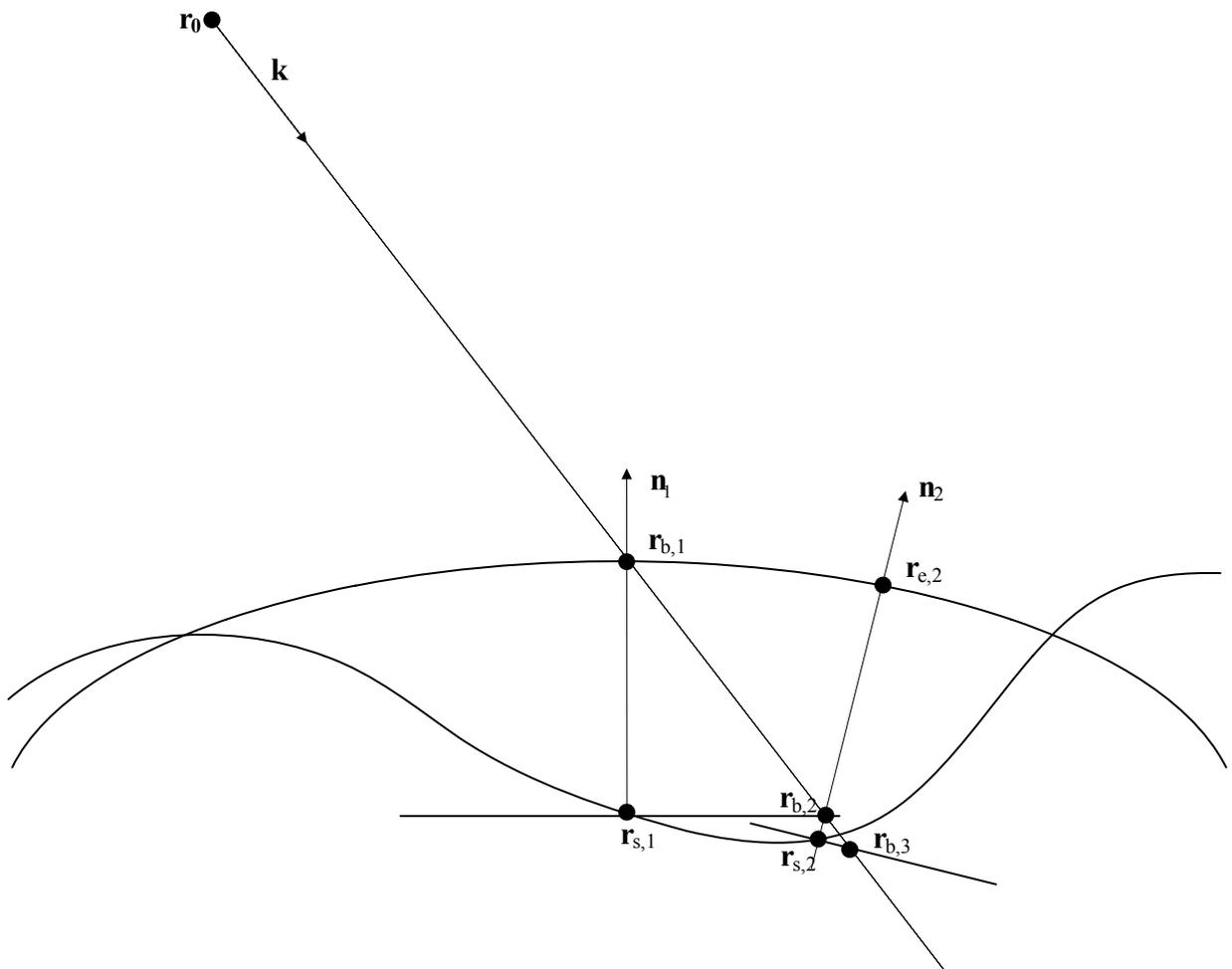
1. После нахождения матрицы  $P$  вычисляются узловые точки на поверхности РЭ. Их угловые координаты  $\varphi_e$  и  $\lambda_e$  распределены неравномерно (в отличие от угловых координат ЦПФ). Так как в реальном времени для вычисления промежуточных значений коэффициента  $p$  будет использоваться линейная интерполяция, нужно вычислить новую матрицу  $P_{\text{ун}}$  коэффициентов для перехода от точек РЭ к точкам ЦПФ в равномерной сетке угловых координат. Для этой цели использована так называемая триангуляция Делоне [55 – Скворцов, 2002].

Сначала изложим основную идею алгоритма. Пересечение луча с ЦПФ ищется итерационно. Первая точка  $r_{b,1}$  на луче определяется как пересечение луча с РЭ. Вторая и последующие точки  $r_{b,i+1}, i \geq 1$  вычисляются при выполнении следующих действий:

- на ЦПФ определяется точка  $r_{s,i}$ , лежащая на нормали к РЭ, проходящей через точку  $r_{b,i}$ ;
- через найденную точку  $r_{s,i}$  проводится плоскость, ортогональная нормали к РЭ;
- находится точка  $r_{b,i+1}$  пересечения луча с этой плоскостью.

Приведём вспомогательный алгоритм нахождения точки на ЦПФ, лежащей на нормали к точке на РЭ. Пусть  $r_e = (x_e, y_e, z_e)$  – координаты точки, лежащей на РЭ. Вычисляем для  $r_e$  угловые координаты  $(\varphi_e, \lambda_e)$ . По матрице  $P_{\text{ун}}$  вычисляем для узла  $(\varphi_e, \lambda_e)$  коэффициент перехода  $p$ . Для этого используем линейную интерполяцию. Тогда  $r_s = r_e + pn$ .

Теперь мы готовы изложить итеративный алгоритм нахождения точки пересечения луча ЛВ с ЦПФ (рис. 2.3). Исходные данные:  $r_0$  – положение КА в системе координат, связанной с Фобосом,  $k$  – направляющий вектор лазерного луча в этой же системе координат. Требуется найти  $r_s$  – точку пересечения поверхности Фобоса и лазерного луча.



**Рисунок 2.3** – Нахождение точки пересечения лазерного луча и поверхности Фобоса

*1-й шаг.* Вычисление  $r_{b,1}$  – точки пересечения луча и РЭ. Точка  $r_{b,1}$  является первым приближением к точке  $r_s$ . Здесь может возникнуть особая ситуация: пересечение с эллипсоидом не найдено. Тогда алгоритм аварийно завершает работу.

*2-й шаг.* Обозначим  $r_{s,1}$  – точку ЦПФ, лежащую на нормали к РЭ, проходящей через точку  $r_{b,1}$ . По вспомогательному алгоритму найдём вектор  $d$ , соединяющий  $r_{b,1}$  с точкой  $r_{s,1}$ . Через  $r_{s,1}$  проведём плоскость, ортогональную вектору нормали. Эта плоскость пересекает луч в точке  $r_{b,2} = r_{b,1} + \frac{(d,d)}{(d,k)}k$ , которая является вторым приближением к искомой точке.

3-й и последующие шаги. Зная точку  $r_{b,i}, i \geq 2$ , лежащую на лазерном луче, найдём её ортогональную проекцию на РЭ – точку  $r_{e,i}$ . Для этого решаем уравнение (5) относительно  $p$  итерационным численным методом. По вспомогательному алгоритму отыскиваем точку  $r_{s,i}$ , лежащую на ЦПФ. Проведём через  $r_{s,i}$  плоскость, ортогональную нормали к эллипсоиду в точке  $r_{e,i}$ . Пересечение этой плоскости с лазерным лучом даёт точку  $r_{b,i+1} = r_0 + \frac{(r_{s,i} - r_0, d)}{(d, k)} k$  – очередное  $i + 1$ -е приближение к искомой точке.

Численные эксперименты показали, что на точке  $r_{b,4}$  итерации можно остановить, т.к. последующие точки лишь незначительно от неё отличаются.

Частные производные дальности от  $r_0$  до  $r_{b,i}$  по компонентам вектора  $r_0$  приближённо находятся как частные производные дальности от  $r_0$  до  $r_{e,1}$  по компонентам вектора  $r_0$ , которые, в свою очередь, вычисляются по аналитическим формулам.

Матрица  $P_{un}$  представляется в памяти бортового компьютера в компактном виде. Так как разброс её элементов невелик (от  $-13.6$  до  $18.2$ ), они могут быть представлены в формате `short int`. Общий объём памяти, занимаемой  $P_{un}$ , составляет 32942 байта.

## **2.3 Реализация алгоритмов посадки в среде операционной системы реального времени**

Алгоритмы и методы, описанные в главе 2, были реализованы в результате совместной работы специалистов ИПМ им. М.В. Келдыша и НПО им. С.А. Лавочкина при непосредственном участии автора диссертации в системе управления КА «Фобос-Грунт», разрабатываемой в НПО им. С.А. Лавочкина. Эти алгоритмы описаны в научно-технических отчётах [131 – НТО 5-07-05; 133 – НТО 5-036-07; 134 – НТО 5-11-04; 136 – НТО 5-12-06; 137 – НТО 5-026-07; 138 – НТО 5-016-08; 140 – НТО 5-11-05].

Программное обеспечение системы управления посадкой реализовано в среде операционной системы реального времени в виде двух задач: основной и фоновой. Основная задача работает в рамках такта управления КА. Фоновая задача выполняет расчёты, распределённые по тактам управления.

Основная задача по измерениям акселерометров и датчиков угловых скоростей методом счисления пути определяет вектор состояния КА, его ориентацию и угловые скорости. Основная задача управляет включением двигателей на участках отработки импульсов, обеспечивает поддержание заданной ориентации, управляет включением лазерного высотомера и доплеровской системы, обеспечивает переход с одного режима управления на другой при смене участков управления.

Фоновая задача определяет вектор состояния КА по измерениям лазерного высотомера и доплеровской системы, выполняет расчёт коррекций на участке перелёта от момента схода до начала участка вертикального спуска.

Тестирование программного обеспечения управления посадкой выполнялось на стенде ИПМ им М.В. Келдыша. Стенд содержит макет бортовой машины и персональный компьютер для моделирования внешней среды и систем КА. В систему управления на макете бортовой машины поступают измерения, получаемые моделями измерительных приборов: БИБ, ЛВ, ДИСД, БОКЗ-МФ. Система управления определяет номера включаемых двигателей. В персональном компьютере моделируется работа двигательной установки с учётом переходных процессов и определяются векторы тяги и момента, создаваемые двигателями. Далее интегрируются уравнения движения центра масс КА, Фобоса и уравнения движения КА вокруг центра масс. Полученные параметры используются для моделирования выхода измерительных приборов.

Схема работы системы моделирования сближения и посадки КА на Фобос показана на рис. 2.5. Система состоит из блоков, моделирующих работу систем КА, и блоков, моделирующих внешнюю среду.

В ходе моделирования процесса посадки КА на Фобос моделируется работа следующих систем КА: измерительных систем (БИБ, ЛВ, ДИСД, БОКЗ-МФ), привода остронаправленной антенны (ОНА), двигательной установки (ДУ).

Модель внешней среды содержит блоки:

- интегрирования движения центра масс (ЦМ) КА и вокруг ЦМ;
- модели движения ЦМ Фобоса и его движение вокруг ЦМ;
- модели рельефа Фобоса.

Система управления посадкой, реализуемая на макете бортовой машины, получает информацию от моделей БИБ, ЛВ и ДИСД. От модели БИБ поступают приращения углов поворота относительно осей приборной системы координат (ПСК) и приращения кажущейся скорости вдоль осей ПСК за интервал времени между опросами. Система управления посадкой восстанавливает ориентацию осей связанной СК относительно J2000 с использованием начальной ориентации, определённой звёздным прибором БОКЗ-МФ. От модели ЛВ поступают измерения дальности по лучам ЛВ в приборной СК. От модели ДИСД в систему управления поступают измерения дальности и скорости по лучам ДИСД в приборной СК.

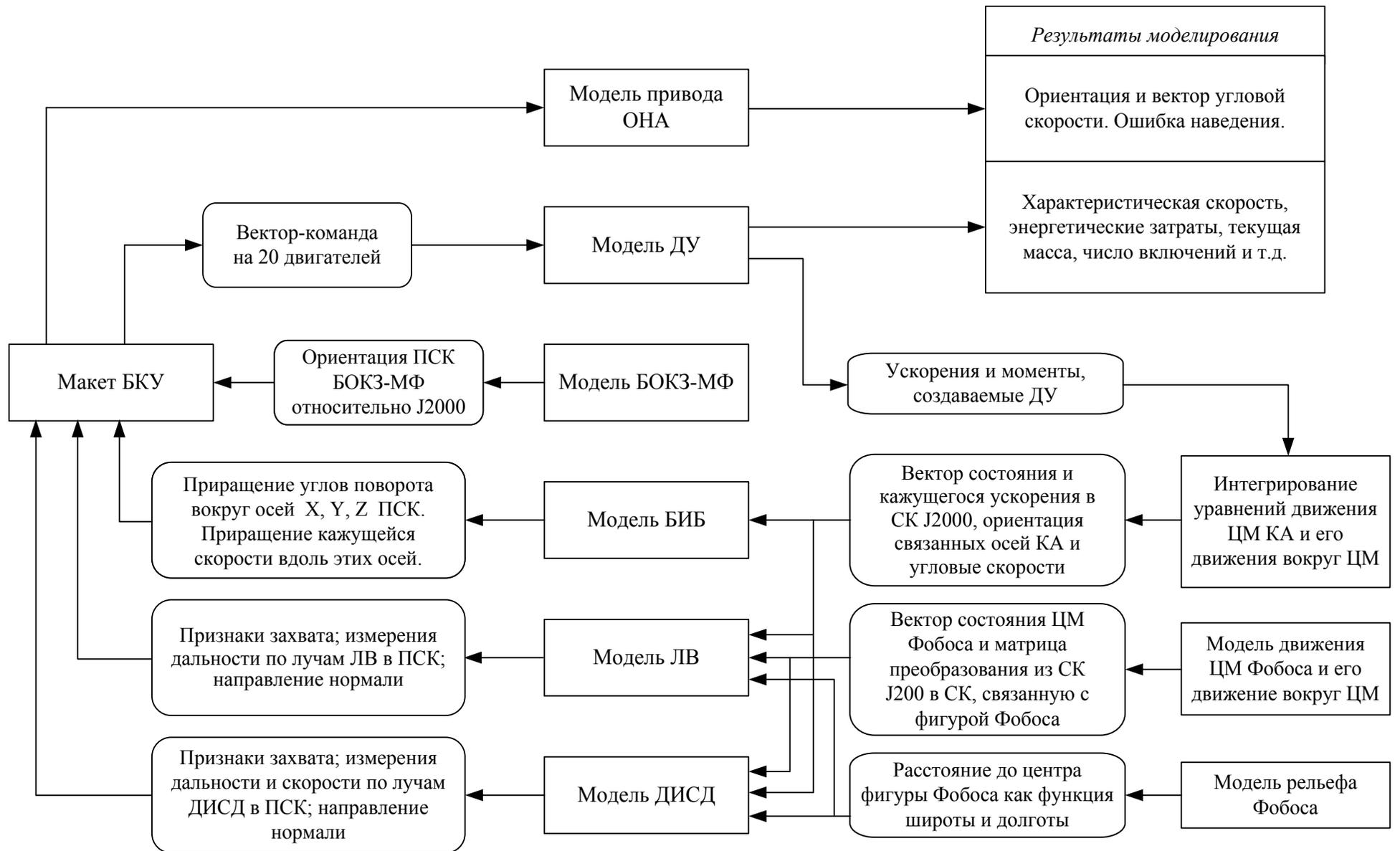
Система управления решает навигационную задачу, определяет отклонение продольной оси КА от нормали к поверхности, вырабатывает управляющие воздействия для 20 двигателей и рассчитывает управление для привода ОНА.

Модель ДУ получает на вход шкалу из 20 бит, каждый бит которой соответствует двигателю: 1 означает, что двигатель должен быть включен, а 0 – выключен. В результате работы модели ДУ определяются ускорения и моменты в связанной СК.

Блок интегрирования уравнений движения ЦМ КА и его движения вокруг центра масс получает ускорения и моменты, создаваемые ДУ, как входную информацию. Выходом этого блока являются вектор состояния и вектор кажущихся ускорений в марсоцентрической СК J2000, ориентация связанных осей КА и угловые скорости. Эта информация поступает на вход моделей измерительных систем: БИБ, ЛВ и ДИСД.

Блок, моделирующий рельеф Фобоса, обеспечивает расчёт расстояния до центра фигуры Фобоса как функцию широты и долготы. Эта информация используется моделями ЛВ и ДИСД.

Разработаны методы, алгоритмы и программы, обеспечивающие управление КА на этапе сближения с Фобосом и посадки на его поверхность. Навигация и ориентация КА обеспечиваются бесплатформенным инерциальным блоком, лазерным высотомером, доплеровской измерительной системой, звёздным прибором и телевизионной системой. Измерения, получаемые от акселерометров и датчиков угловой скорости, используются для определения положения и ориентации КА методом счисления пути. Коррекция вектора состояния КА производится по измерениям лазерного высотомера и доплеровской системы. Рассмотрены схемы посадки, предусматривающие различные варианты схода с КСО. Предусмотрена возможность коррекции траектории посадки. Приведён алгоритм расчёта импульса коррекции. Для управления двигательной установкой используется релейный закон управления с гистерезисом. В результате моделирования показано, что разработанные методы, алгоритмы и программы обеспечивают необходимую точность посадки. Разработанные модели и алгоритмы достаточно универсальны, и их можно использовать при создании систем посадки КА на малые спутники планет и астероиды. Полученный опыт может быть использован при разработке системы посадки на Луну и другие небесные тела.



**Рисунок 2.5** – Схема работы моделирования сближения с Фобосом и посадки на его поверхность

### **Глава 3    Определение параметров движения КА по результатам измерений при наличии немоделируемых ускорений**

Задача определения параметров движения КА является одной из основных задач, решаемых в ходе управления его полётом. При решении этой задачи часто возникает ситуация, в которой определение параметров движения КА надо выполнять на фоне работы двигателей. В качестве примера можно привести следующие задачи:

- контроль участка выведения КА на орбиту искусственного спутника Земли [79 – Аким, 1999; 10 – Аким, 1999; 28 – Тучин, 1991; 69 – Тучин, 1993; 70 – Тучин, 1991];
- оперативная оценка исполнения импульсов и прогноза падения орбитального комплекса по измерениям наземных средств на фоне работы двигательной установки [125 – НТО 5-01-02];
- определение параметров движения КА с электроракетной двигательной установкой (ЭРДУ) [68 – Тучин, 2010].

К вопросам, которые рассматриваются в диссертации, в первую очередь, относятся проблемы решения задач навигации и управления полётом с включённой ЭРДУ. Фактическое ускорение, создаваемое ЭРДУ, отличается от модели этого ускорения, заложенного в расчёты. Имеются ошибки величины и ориентации вектора тяги ЭРДУ в пространстве.

Решение указанных выше задач основано на применении моделей динамических систем, в которых помехи имеются не только в измерениях, но и влияют на поведение самого объекта. Такие модели исследованы в основном в рамках линейных моделей в общей теории систем [13 – Аоки, 1967; 35 – Красовский, 1968; 43 – Льюнг, 1991; 47 – Острём, 1973; 36 – Ли, 1966; 27 – Калман, 1971; 93 – Нурт, 1995] Применение этих моделей и методов в задачах определения движения КА требует использования соответствующих нелинейных моделей и учёта особенностей уравнений динамики и измеряемых функций.

Результаты, представленные в данной главе, описаны в работе [62 – Тучин, 2009] в части алгоритмов определения параметров движения КА и в работе [58 – Тучин, 2004].

При решении указанных выше задач применяются различные модели шума и соответственно используются различные методы и алгоритмы оценки вектора состояния. Могут применяться комбинированные методы.

В предположении, что шум близок по своим характеристикам к белому шуму, а количество аномальных измерений невелико, целесообразно применять алгоритм, который обеспечивает оценку вектора состояния и суммарные возмущения между измерениями.

В настоящее время для определения параметров движения космических аппаратов используются два типа алгоритмов:

- метод наименьших квадратов;
- расширенный фильтр Калмана.

Многолетняя практика показала, что метод наименьших квадратов является очень надёжным методом определения параметров. Оценка получается в результате поиска минимума функционала, представляющего собой сумму взвешенных невязок между измеренными значениями и их расчётными аналогами. При этом расчётные аналоги функционально зависят от уточняемых параметров. Особенностью метода является то, что модель движения КА должна быть достаточно точной. Не допускается наличие больших возмущений, которые не задаются в виде зависимостей от уточняемых параметров. Поэтому применение метода наименьших квадратов в случае неизвестных интервалов работы двигателя малой тяги вызывает определённые проблемы. Метод наименьших квадратов может быть успешно использован на этапе, когда уже имеется оценка моментов включения и выключения двигателя и создаваемого им ускорения.

Расширенный фильтр Калмана является эмпирическим расширением фильтра Калмана для линейных систем на нелинейный случай. Расширенный фильтр Калмана предполагает наличие неизвестного шума, воздействующего на систему. Характеристики шума задаются его ковариационной матрицей. Особенностью этого

метода является то, что текущие значения оцениваемых параметров должны находиться в достаточно близкой окрестности относительно их истинных значений. Кроме того, метод требует, чтобы не было длительных интервалов времени, в которых нет измерений.

Суть предложенного алгоритма состоит в том, что оценка определяется из условия минимизации функционала, зависящего как от невязок измеренных значений и их расчётных аналогов, так и от величин определяемых возмущений. Минимизация функционала выполняется итерационно. На каждом шаге итерационного процесса определяется поправка к искомым параметрам. Определение поправки производится из условия минимума функционала для линейной системы. Поиск минимума функционала для линейной системы приводит к двум последовательностям рекуррентных формул. Первая последовательность рекуррентных формул идёт от первого измерения к последнему измерению и позволяет определить поправку на момент последнего измерения. Вторая последовательность рекуррентных формул идёт от последнего значения к первому и позволяет восстановить возмущения. Первая последовательность рекуррентных формул эквивалентна рекуррентным формулам фильтра Калмана для линейной системы. Вторая последовательность рекуррентных формул в литературе называется сглаживанием. Алгоритм минимизации функционала рассмотрен в первом разделе главы.

Во втором разделе приведён алгоритм оценки вектора состояния в случае отсутствия возмущений.

Если шум близок к постоянным систематическим воздействиям, целесообразно применять алгоритм, позволяющий оценивать средние значения приращений этих воздействий на мерном интервале. Алгоритм оценки вектора состояния и средних значений возмущений рассмотрен в третьем разделе главы.

В тех случаях, когда точность и состав измеряемых функций не позволяют оценить параметры шума, целесообразно применять метод мешающих параметров. Если в качестве оцениваемого вектора состояния выбрать вектор состояния на конец мерной базы, то неучтённый шум будет приводить к увеличивающимся ошибкам

модели по мере перемещения от конца мерной базы к её началу. Суть метода мешающих параметров состоит в учёте этой нарастающей ошибки модели в весовой матрице измерений. Алгоритм оценки вектора состояния с использованием метода мешающих параметров рассмотрен в четвёртом разделе главы. Рассмотрены варианты алгоритма для двух типов возмущений: белого шума и случайных величин, постоянных на всем интервале. Алгоритм оценки вектора состояния с использованием метода мешающих параметров целесообразно применять при решении задач оценки точности определения параметров движения КА. Этот алгоритм позволяет оценить воздействие шума при приближённых представлениях о его статистических характеристиках.

В пятом разделе главы рассмотрен алгоритм оценки вектора состояния и возмущений дискретной динамической системы. Задача в такой постановке решается на каждом шаге итерационного процесса в алгоритме оценки вектора состояния и суммарных воздействий возмущений между измерениями. В качестве критерия качества оценки использована функция, содержащая квадрат взвешенного отклонения априорно заданного вектора состояния от его расчётного значения, а также квадраты взвешенных невязок измеренных и расчётных значений и взвешенных возмущений. Рассмотрены свойства этих оценок, включая рекуррентные соотношения между оценками, полученными по различным мерным базам, и рекуррентные соотношения для получения оценки вектора состояния и возмущения внутри мерной базы.

### **3.1 Алгоритм оценки вектора состояния и суммарных воздействий возмущений между измерениями**

#### **3.1.1 Постановка задачи**

Представим модель движения КА на интервале  $[t_0, t_N]$  в виде суммы опорного движения и движения относительно опорного:

$$x_A(t) = x_D(t) + x_P(t), \quad (3.1)$$

где

$x_D$  – вектор состояния опорного детерминированного движения;

$x_P$  – вектор состояния движения относительно опорного.

Опорное движение и движение относительно опорного описываются следующими системами дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_D}{dt} = F(t, x_D), \quad dx_P = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=x_D(t)} x_P(t) dt + B(t) dw, \quad (3.2)$$

где

$F(t, x)$  – вектор-функция;

$B(t)$  – матрица, описывающая воздействие шума на систему;

$w(t)$  – случайный процесс с независимыми приращениями.

Пусть белый шум  $\xi(t)$  с матрицей интенсивности  $Q(t)$  является производной случайного процесса  $w(t)$ .

Начальные условия для (3.1) задаются априорным вектором  $\bar{x}_0$  и его ковариационной матрицей  $P_0$ .

Математическая модель в форме (3.1), (3.2) проще, чем модель в форме нелинейного стохастического векторного дифференциального уравнения. При этом математические ожидания случайных процессов, являющихся реализациями этой модели, имеют такие же математические ожидания, как и для модели, представляемой стохастическим дифференциальным уравнением.

В моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_N$  производятся измерения функций  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N$ . Измеренное значение функции  $\Psi_i$  обозначим как  $(\Psi_i)_{\text{obs}}$ . Для каждого момента времени  $t_i$  справедливо

$$(\Psi_i)_{\text{obs}} = \Psi_i(t_i, x(\cdot)) + \eta_i, \quad (3.3)$$

где  $\eta_i$  – случайный вектор, имеющий нулевое математическое ожидание и ковариационную матрицу  $R_i$ .

Запись в качестве параметра  $x(\cdot)$  функции  $\Psi_i$  означает, что функция  $\Psi_i$  зависит не от мгновенного значения вектора состояния, а от функции  $x(t)$ , которая может быть представлена в виде (3.1), (3.2).

Рассмотрим задачу в линейной постановке.

### 3.1.2 Линейный случай

В линейной постановке модель движения (3.1), (3.2) примет вид линейного стохастического дифференциального уравнения

$$dx = A(t)x dt + B(t)dw, \quad (3.4)$$

где  $A(t)$  – квадратная матрица порядка  $n \times n$ , элементы которой являются непрерывными функциями времени  $t$ .

Измеряемые функции  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N$  в линейной постановке являются линейными функциями вектора состояния  $x(t)$ . В каждый момент времени  $t_i$  справедливо соотношение

$$z_i = H_i(t_i) \cdot x(t_i) + \eta_i, \quad (3.5)$$

где

- $z_i$  – вектор параметров размерности  $r_i$ , измеряемых в момент времени  $t_i$ ;
- $H_i(t_i)$  – матрица размерности  $r_i \times n$ ;
- $\eta_i$  – последовательность независимых случайных векторов, имеющих нулевое математическое ожидание и ковариационную матрицу  $R_i$ .

Зависимость между векторами состояния системы в дискретные моменты времени  $t_i$ , определяемая дифференциальным уравнением (3.4), может быть выражена при помощи его разностного аналога, определяемого соотношениями

$$x(t_{i+1}) = \Phi(t_{i+1}, t_i) x(t_i) + v(t_i). \quad (3.6)$$

Здесь  $\Phi(t_{i+1}, t_i)$  – фундаментальная матрица, удовлетворяющая матричному уравнению

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_i) = A(t)\Phi(t, t_i), \quad (3.7)$$

при начальном условии  $\Phi(t_i, t_i) = E$ , где  $E$  — единичная матрица размерности  $n$ .

$\{v(t_i), i = 0, 1, 2, \dots, N\}$  — последовательность случайных векторов с нулевым математическим ожиданием и ковариационными матрицами  $Q_i$ , вычисляемыми по формуле

$$Q_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau) B(\tau) Q(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_{i+1}, \tau) d\tau. \quad (3.8)$$

Случайный вектор  $v(t_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  связан с шумом  $\xi(t)$  соотношением

$$v(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau) B(\tau) \xi(\tau) d\tau \quad (3.9)$$

Этот случайный вектор  $v(t_i)$  интерпретируется, как суммарное воздействие возмущений на интервале времени от  $t_i$  до  $t_{i+1}$ , т.е. между измерениями с индексами  $i$  и  $i + 1$ .

Введем следующие обозначения

$$x_i = x(t_i), \Phi_i = \Phi(t_{i+1}, t_i), Q_i = Q(t_{i+1}, t_i), v_i = v(t_i). \quad (3.10)$$

С учётом соотношения (3.5) и полученной системы разностных уравнений задача оценивания может далее рассматриваться в дискретной постановке. Требуется получить оценку вектора состояния  $x_i$  дискретной динамической системы, которая описывается следующим соотношением

$$x_{i+1} = \Phi_i x_i + v_i, \quad i = 0, \dots, N \quad (3.11)$$

при априорно заданной оценке начального вектора состояния  $\bar{x}_0$  и ковариационной матрице этой оценки  $P_0$ . Измеряемые векторы  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, N, \dots$  связаны с векторами состояния уравнениями

$$z_i = H_i x_i + \eta_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.12)$$

где  $\eta_i$  — случайный вектор размерности  $r_i$  с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $R_i$ .

Построим оценку вектора состояния и суммарных возмущающих воздействий дискретной динамической системы (3.11, 3.12) по мерной базе, содержащей  $N$  измерений. Используем метод наименьших квадратов. Критерием качества оценки является квадратичная форма следующего вида

$$\begin{aligned}
 J = & \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{x}}_{0,N} - \bar{\mathbf{x}}_0)^T \mathbf{P}_0^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_{0,N} - \bar{\mathbf{x}}_0) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (\mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{H}_{i+1} \hat{\mathbf{x}}_{i+1,N})^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{H}_{i+1} \hat{\mathbf{x}}_{i+1,N}) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \hat{\mathbf{v}}_{i,N}^T \mathbf{Q}_i^{-1} \hat{\mathbf{v}}_{i,N},
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

где

$\hat{\mathbf{x}}_{i,N}$  – оценка вектора состояния на момент  $t_i, i = 0, \dots, N$  с использованием  $N$  измерений  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N$ ;

$\hat{\mathbf{v}}_{i,N}$  – оценка вектора суммарных возмущений  $\mathbf{v}_i$  при использовании  $N$  измерений  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N$ .

Квадратичная форма содержит члены трёх типов:

- квадраты невязок измеренных и расчётных значений, отнесённые к априорно известным среднеквадратическим отклонениям ошибок измерений;
- квадраты суммарных возмущений на интервалах между измерениями, отнесённые к априорно известным средним значениям суммарных возмущений на тех же интервалах;
- квадрат взвешенного отклонения априорно заданного вектора состояния от его расчётного значения.

В пятом разделе этой главы показано, что оценки  $\hat{\mathbf{x}}_{N,N}$  и  $\hat{\mathbf{x}}_{N-1,N-1}$ , т.е. оценки векторов состояния на момент последнего измерения, полученные по  $N$  и  $N-1$  измерениям, связаны следующим рекуррентным соотношением

$$\hat{\mathbf{x}}_{N,N} = \Phi_{N-1} \hat{\mathbf{x}}_{N-1,N-1} + \mathbf{P}_{N,N} \mathbf{H}_N^T \mathbf{R}_N^{-1} (\mathbf{z}_N - \mathbf{H}_N \Phi_{N-1} \hat{\mathbf{x}}_{N-1,N-1}), \tag{3.14}$$

где матрица  $\mathbf{P}_{N,N}$  вычисляется по рекуррентным формулам



$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_D(t)} \Phi(t, t_0) \quad (3.19)$$

при начальном условии  $\Phi(t_0, t_0) = E$ .

Покажем, что  $x_A(t)$  находится в окрестности решения следующего стохастического дифференциального уравнения

$$dx = F(t, x)dt + B(t)dw. \quad (3.20)$$

Для этого рассмотрим соотношение:

$$\frac{dx_A}{dt} = F(t, x_D) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_D(t)} \Phi(t, t_N) x_P(t_N) + B(t)\xi(t) - \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_D(t)} \int_t^{t_N} \Phi(t, \tau) B(\tau)\xi(\tau) d\tau$$

Группируя члены, содержащие  $\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_D(t)}$  и используя соотношение (3.18), получим

$$\frac{dx_A}{dt} = F(t, x_D) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_D(t)} x_P(t) + B(t)\xi(t).$$

Так как  $F(t, x_A) = F(t, x_D + x_P) \approx F(t, x_D) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_D(t)} x_P(t)$ , то  $x_A(t)$  находится в окрестности решения уравнения (3.20).

Зависимость между векторами состояния  $x_A(t_i)$  в дискретные моменты времени  $t_0, t_1, \dots, t_N$  может быть выражена разностным уравнением

$$x_A(t_{i+1}) = x_D(t_{i+1}) + \Phi(t_{i+1}, t_i) x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau) B(\tau)\xi(\tau) d\tau. \quad (3.21)$$

Обозначим случайный вектор  $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau) B(\tau)\xi(\tau) d\tau$  как  $v_i$ . Этот случайный

вектор имеет нулевое математическое ожидание и ковариационную матрицу

$$Q_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau) B(\tau) Q(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_{i+1}, \tau) d\tau. \quad (3.22)$$

Положим  $x_p(t_N) = 0$ . Тогда вектор начальных условий  $x_D(t_N) = x_A(t_N) = x(t_N)$  однозначно определяет значения вектор функции  $x_A(t)$  в дискретных точках:  $t_0, t_1, \dots, t_N$ . Однако при вычислении значений функции  $\Psi_i(t_i, x_A(\cdot))$  нужно знать зависимость  $x_A(t)$  в окрестности каждого момента времени  $t_i$ . Представим эту зависимость в виде

$$x_A(t) = \begin{cases} x_D(t_N) = x_N, & \text{если } t = t_N, \\ x_D(t_i) + \Phi(t, t_i)(x_A(t_i) - x_D(t_i)) + v_{i-1}, & \text{если } t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ x_D(t_0) + \Phi(t, t_0)(x_A(t_0) - x_D(t_0)), & \text{если } t_0 \leq t < t_1. \end{cases} \quad (3.23)$$

Таким образом, построена параметрическая зависимость  $x_A(t, q)$ , где  $q$  - вектор уточняемых параметров, состоящий из компонент векторов:  $x(t_N), v_0, \dots, v_{N-1}$ .

Критерием качества оценки, как и в линейном случае, является функционал, содержащий квадрат взвешенного отклонения априорно заданного вектора состояния от его расчётного значения, а также квадраты взвешенных невязок измерений и взвешенных суммарных возмущений между измерениями. Этот функционал можно представить в виде

$$J = \frac{1}{2} \left( (x_A(t_0, q) - \bar{x}_0)^T P_0^{-1} (x_A(t_0, q) - \bar{x}_0) \right) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( (\Psi_i)_{\text{obs}} - \Psi_i(t_i, x_A(t, q)) \right)^T R_i^{-1} \left( (\Psi_i)_{\text{obs}} - \Psi_i(t_i, x_A(t, q)) \right) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} v_i^T Q_i^{-1} v_i. \quad (3.24)$$

Если минимум функционала (3.24) искать методом Ньютона, то поправки каждого шага итерации минимизируют квадратичную форму, полученную из (3.24) заменой нелинейных зависимостей линейными членами ряда Тейлора. Это означает, что на шаге итерации  $s$  решается задача оптимальной оценки состояния линейной системы (3.3, 3.4). Матрицы  $A^{(s)}(t)$  и  $H_i^{(s)}(t)$ ,  $i = 1, \dots, N$  этой системы вычисляются по следующим формулам

$$\begin{aligned}
A^{(s)}(t) &= \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=x_A(t, q^{(s-1)})}, \\
H_i^{(s)}(t) &= \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \Big|_{x=x_A(t, q^{(s-1)})}.
\end{aligned}
\tag{3.25}$$

### 3.1.4 Проверка качества измерений с использованием приведённого среднеквадратического отклонения

Приведённым СКО случайного вектора  $\xi$  с математическим ожиданием  $E[\xi]$  и ковариационной матрицей  $K_\xi$  назовём величину

$$S = \sqrt{(\xi - E[\xi])^T K_\xi^{-1} (\xi - E[\xi])}.$$

В одномерном случае эта величина равна  $\frac{\xi - E[\xi]}{\sqrt{D[\xi]}}$ , где  $D[\xi]$  – дисперсия  $\xi$ . Так как

для нормально распределённой случайной величины справедливо правило трёх сигм, т.е.  $|\xi - E[\xi]| \leq 3\sqrt{D[\xi]}$  с вероятностью 0.997, то  $S \leq 3$  с той же вероятностью.

Оценка качества измерений и отбраковка аномальных измерений выполняется после завершения итерационного процесса. В результате итерационного процесса будет получена оценка вектор функции  $\hat{x}_A(t)$  и ковариационные матрицы оценок вектора состояния на моменты времени измерений  $P_i$ . При оценке качества измерений под случайной величиной  $\xi$  будем понимать остаточную невязку измерения  $\Delta z_i$ , соответствующую полученной оценке вектора состояния

$$\Delta z_i = (\Psi_i)_{\text{obs}} - \Psi_i(t_i, x(\cdot)) \tag{3.26}$$

Ковариационная матрица невязок измерения  $K_{\Delta z_i}$  вычисляется по формуле

$$K_{\Delta z_i} = H_i^T P_i H_i. \tag{3.27}$$

Таким образом, при проверке качества измерения вычисляется величина  $\sqrt{\Delta z_i^T K_{\Delta z_i}^{-1} \Delta z_i}$  и сравнивается с заданным пороговым значением. Если для всех измерений условие выполнено, процесс получения оценки считается завершённым.

В противном случае имеются некачественные измерения. Эти измерения должны быть исключены из обработки, а итерационный процесс повторен.

### 3.2 Алгоритм оценки вектора состояния в случае отсутствия шума

В этом разделе показано, что в случае отсутствия шума алгоритм получения оценки совпадает с классическим алгоритмом [12 – Аким, 1963]. Когда нет шума и не используется априорная информация, функция (3.13) примет вид

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left( z_{i+1} - H_{i+1} \hat{x}_{i+1,N} \right)^T R_i^{-1} \left( z_{i+1} - H_{i+1} \hat{x}_{i+1,N} \right). \quad (3.28)$$

Будем искать оценку вектора состояния на момент последнего измерения. Обозначим эту оценку как  $\hat{x}_N$ . Тогда  $\hat{x}_{N,N} = \hat{x}_N$ , а оценки векторов состояния  $\hat{x}_{i,N}$  на моменты времени  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  выражаются через  $\hat{x}_N$  с использованием переходной матрицы

$$\hat{x}_{i,N} = \Phi(t_i, t_N) \hat{x}_N. \quad (3.29)$$

После подстановки (3.29) в (3.28) и некоторых преобразований, получим:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( H_i \Phi(t_i, t_N) \hat{x}_N - z_i \right)^T R_i^{-1} \left( H_i \Phi(t_i, t_N) \hat{x}_N - z_i \right). \quad (3.30)$$

Требуется найти  $\hat{x}_N$  из условия минимума (3.30). Функция (3.30) является квадратичной формой метода наименьших квадратов. Оценка  $\hat{x}_N$  находится из решения системы нормальных уравнений по формуле

$$\hat{x}_N = \left( B^T W B \right)^{-1} B^T W d, \quad (3.31)$$

где

$$B = \begin{bmatrix} H_1 \Phi(t_1, t_N) \\ H_2 \Phi(t_2, t_N) \\ \dots \\ H_N \Phi(t_N, t_N) \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_N \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2^{-1} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & R_N^{-1} \end{bmatrix}$$

Следует отметить, что

$$\mathbf{B}^T \mathbf{W} = \left[ \Phi^T(t_1, t_N) \mathbf{H}_1^T \mathbf{R}_1^{-1}, \Phi^T(t_2, t_N) \mathbf{H}_2^T \mathbf{R}_2^{-1}, \dots, \Phi^T(t_N, t_N) \mathbf{H}_N^T \mathbf{R}_N^{-1} \right]. \quad (3.32)$$

Соотношение (3.32) целесообразно использовать при вычислениях, а именно

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B} &= \sum_{i=1}^N \Phi^T(t_i, t_N) \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{H}_i \Phi(t_i, t_N), \\ \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{d} &= \sum_{i=1}^N \Phi^T(t_i, t_N) \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{z}_i. \end{aligned} \quad (3.33)$$

В ходе обработки проводится селекция аномальных измерений. Разделение измерений производится с использованием заданного порогового значения по приведённому СКО. Измерения, приведённые СКО которых превышают заданный порог, отбрасываются, т.е. вычисление сумм (3.33) происходит только по тем значениям индекса  $i$ , для которых приведённые СКО измерений меньше заданного порога. С учётом этого, целесообразно вычислить и запомнить матрицы  $\mathbf{H}_i \Phi(t_i, t_N)$  на этапе подготовки к обработке. В ходе обработки вычисляется матрица  $\mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B}$  и вектор-столбец  $\mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{d}$  по формулам (3.33). Далее получается оценка  $\hat{\mathbf{x}}_N$  по формулам (3.31). Ковариационной матрицей оценки  $\hat{\mathbf{x}}_N$  является матрица  $\mathbf{P}_{N, \text{sq2}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B})^{-1}$ . На основе полученной оценки вычисляется множество невязок измерений и их ковариационных матриц

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{z}_i &= \mathbf{H}_i \Phi(t_i, t_N) \hat{\mathbf{x}}_N - \mathbf{z}_i, \\ \mathbf{K}_{\Delta \mathbf{z}_i} &= \mathbf{H}_i^T \Phi(t_i, t_N) \mathbf{P}_{N, \text{sq2}} \Phi(t_i, t_N) \mathbf{H}_i, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Приведённое СКО вычисляется с использованием вектора невязок и ковариационной матрицы по тому же алгоритму, что и в п. 3.1.4. Если оценка  $\hat{\mathbf{x}}_N$  построена только по измерениям, приведённое СКО которых меньше заданного порога, то оценка считается достоверной. Если это не так, необходима селекция аномальных измерений. После селекции аномальных измерений, вновь происходит вычисление матрицы  $\mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B}$  и вектор-столбца  $\mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{d}$  и процесс повторяется. При отбраковке аномальных измерений производится контроль на отношение исключённых к общему числу измерений. Если это отношение превосходит заданный порог, увеличивается пороговое значение приведённого СКО.

### 3.3 Алгоритм оценки вектора состояния и средних значений приращений возмущений

Пусть  $\xi(t)$  в системе (3.3) представляет собой не белый шум, а некоторое постоянное воздействие, которое необходимо определить наряду с вектором состояния. В этом случае

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)\xi, \quad (3.35)$$

где  $\xi$  – неизвестный  $m$ -мерный вектор.

Вектора состояния на моменты  $t_i$  и  $t_N$  связаны между собой соотношением

$$x(t_N) = \Phi(t_N, t_i)x(t_i) + \int_{t_i}^{t_N} \Phi(t_N, s)B(s)\xi ds. \quad (3.36)$$

После умножения (3.36) слева на матрицу  $\Phi(t_i, t_N)$ , получим

$$\Phi(t_i, t_N)x(t_N) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_N} \Phi(t_i, s)B(s)\xi ds. \quad (3.37)$$

Из (3.37) получим зависимость  $x(t_i)$  от  $x(t_N)$  и  $\xi$

$$x(t_i) = \Phi(t_i, t_N)x(t_N) + \left( \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s)B(s) ds \right) \xi. \quad (3.38)$$

Рассмотрим расширенный вектор состояния  $(\hat{x}_i, \xi)^T$ , состоящий из  $n$  компонент вектора  $x$  и  $m$  компонент вектора  $\xi$ . Тогда уравнение (3.38) переписывается в виде

$$\begin{bmatrix} x(t_i) \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(t_i, t_N) & 0_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s)B(s) ds \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_N) \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

где  $0_{n \times m}$  и  $0_{m \times n}$  – нулевые матрицы  $n \times m$  и  $m \times n$ .

При получении оценки будем искать минимум функционала (3.28) такого же, как для случая отсутствия возмущений. Под искомым вектором оценки будем

понимать расширенный вектор состояния, а под переходной матрицей – расширенную переходную матрицу

$$\begin{bmatrix} \Phi(t_i, t_N) & \mathbf{0}_{n \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times n} & \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s) \mathbf{B}(s) ds \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Искомая оценка  $(\hat{x}_N, \xi)^T$  находится по формуле

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_N \\ \xi \end{bmatrix} = (\mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{d}, \quad (3.41)$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \Phi(t_1, t_N), & \mathbf{H}_1 \int_{t_N}^{t_1} \Phi(t_1, s) \mathbf{B}(s) ds \\ \mathbf{H}_2 \Phi(t_2, t_N), & \mathbf{H}_2 \int_{t_N}^{t_2} \Phi(t_2, s) \mathbf{B}(s) ds \\ \dots & \dots \\ \mathbf{H}_N \Phi(t_N, t_N), & \mathbf{H}_N \int_{t_N}^{t_N} \Phi(t_N, s) \mathbf{B}(s) ds \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^{-1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_2^{-1} & \dots & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{R}_N^{-1} \end{bmatrix}.$$

Аналогом формулы (3.32) является соотношение

$$\mathbf{B}^T \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \Phi^T(t_1, t_N) \mathbf{H}_1^T \mathbf{R}_1^{-1} & \Phi^T(t_2, t_N) \mathbf{H}_2^T \mathbf{R}_2^{-1} & \dots & \mathbf{H}_N^T \mathbf{R}_N^{-1} \\ \left( \int_{t_N}^{t_1} \Phi(t_1, s) \mathbf{B}(s) ds \right)^T \mathbf{H}_1^T \mathbf{R}_1^{-1} & \left( \int_{t_N}^{t_2} \Phi(t_2, s) \mathbf{B}(s) ds \right)^T \mathbf{H}_2^T \mathbf{R}_2^{-1} & \dots & \mathbf{0}_{m \times 1} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Матрица  $\mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B}$  и вектор-столбец  $\mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{d}$  представляются аналогично (3.33) в виде

$$\mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B} = \sum_{i=1}^N \left( \Phi(t_i, t_N) \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{H}_i \Phi(t_i, t_N) + \left( \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s) \mathbf{B}(s) ds \right)^T \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{H}_i \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s) \mathbf{B}(s) ds \right), \quad (3.43)$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{d} = \sum_{i=1}^N \left( \Phi^T(t_i, t_N) + \left( \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s) \mathbf{B}(s) ds \right)^T \right) \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{z}_i.$$

Вычисление интегралов  $\int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s) \mathbf{B}(s) ds$  в соотношении (3.41) удобно

проводить с использованием следующего рекуррентного соотношения

$$\int_{t_N}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, s) \mathbf{B}(s) ds = \Phi(t_{i+1}, t_i) \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s) \mathbf{B}(s) ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, s) \mathbf{B}(s) ds. \quad (3.44)$$

### 3.4 Алгоритм оценки вектора состояния с использованием метода мешающих параметров

Метод мешающих параметров [12 – Аким, 1963; 77 – Эльясберг, 1976] целесообразно применять, когда точность и состав измеряемых функций не позволяют оценить параметры шума. В качестве оцениваемого вектора состояния выбран вектор состояния на конец мерной базы. Неучтённый шум приводит к увеличению ошибок модели по мере перемещения от конца мерной базы к её началу. Суть метода состоит в учёте этой нарастающей ошибки модели в весовой матрице измерений. Рассмотрим варианты алгоритма для двух типов возмущений: белого шума (п. 3.4.1.) и случайных величин, постоянных на всем интервале измерений (п. 3.4.2.).

#### 3.4.1 Мешающие параметры в форме белого шума

Поиск минимума функции (3.13) ведётся по  $n + N \cdot m$  уточняемым параметрам, состоящим из  $n$ -мерного вектора  $\hat{x}_N$  и  $N$  векторов  $\hat{v}_{i,N}$ , имеющих размерность  $m$ . Чтобы избежать увеличения размерности решаемой задачи, можно

рассмотреть  $\hat{v}_{i,N}$  как мешающие параметры. При таком рассмотрении следует уменьшать вес измерений по мере их удаления по времени от момента  $t_N$ . Для расчёта весовой матрицы измерения  $i$  необходимо знать ковариационную матрицу вектора состояния на момент  $t_i$  при известной ковариационной матрице вектора состояния на момент  $t_N$  и заданных статистических характеристиках шума. В этом разделе будет рассмотрен случай, когда шум  $\xi(t)$  в уравнении (3.2) представляет собой белый шум с постоянной матрицей интенсивности  $Q$ .

Пусть известен вектор состояния  $\hat{x}_N$  на момент  $t_N$ . Тогда при сделанных ранее предположениях, вектор состояния  $\hat{x}_i$  на момент  $t_i$  связан с  $\hat{x}_N$  следующим соотношением

$$\hat{x}_i = \Phi(t_i, t_N) \hat{x}_N + \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s) B(s) \xi(s) ds. \quad (3.45)$$

Невязка  $i$ -го измерения  $\Delta z_i$  равна

$$\begin{aligned} \Delta z_i &= z_i - H_i \hat{x}_i = z_i - H_i \Phi(t_i, t_N) \hat{x}_N - H_i \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s) B(s) \xi(s) ds = \\ &= \eta_i - H_i \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s) B(s) \xi(s) ds \end{aligned} \quad (3.46)$$

и содержит наряду с ошибкой измерения  $\eta_i$  вектор методической ошибки

$H_i \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s) B(s) \xi(s) ds$ . Это приводит к тому, что возникает корреляция между

измерениями на моменты времени  $t_i$  и  $t_j$ . Найдем ковариационную матрицу

методической ошибки  $C_m(i, j)$ , соответствующую измерениям  $i$  и  $j$ . Не

ограничивая общности, положим  $t_i < t_j$ . Тогда

$$\begin{aligned}
C_m(i, j) &= \\
&= E \left[ H_i \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s_1) B(s_1) \xi(s_1) ds_1 \left( \int_{t_N}^{t_j} \Phi(t_j, s_2) B(s_2) \xi(s_2) ds_2 \right)^T H_j^T \right] = \\
&= H_i \int_{t_N}^{t_i} \int_{t_N}^{t_j} \Phi(t_i, s_1) B(s_1) E \left[ \xi(s_1) \xi^T(s_2) \right] B^T(s_2) \Phi^T(t_j, s_2) ds_1 ds_2 H_j^T.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Так как  $\xi(s)$  представляет собой  $m$ -мерный белый шум с матрицей интенсивности  $Q$ , справедливо соотношение:

$$E \left[ \xi(s_1) \xi^T(s_2) \right] = \begin{cases} Q, & \text{если } s_1 = s_2 \\ 0, & \text{если } s_1 \neq s_2 \end{cases}.$$

Тогда

$$C_m(i, j) = H_i \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s) B(s) Q B^T(s) \Phi^T(t_j, s) ds H_j^T. \tag{3.48}$$

С учётом того, что  $\Phi^T(t_j, s) = \Phi^T(t_i, s) \Phi^T(t_j, t_i)$ , получим:

$$C_m(i, j) = H_i \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s) B(s) Q B^T(s) \Phi^T(t_j, s) ds H_j^T. \tag{3.49}$$

Обозначим

$$I_i = \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s) B(s) Q B^T(s) \Phi^T(t_i, s) ds.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
C_m(i, j) &= H_i I_i \Phi^T(t_j, t_i) H_j^T, \\
C_m(j, i) &= C_m^T(i, j) = H_j \Phi(t_j, t_i) I_i H_i^T.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Для вычисления интеграла  $I_i$  целесообразно использовать рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned}
I_{i+1} &= \int_{t_N}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, s) B(s) Q B^T(s) \Phi^T(t_{i+1}, s) ds = \\
&= \Phi(t_{i+1}, t_i) \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s) B(s) Q B^T(s) \Phi^T(t_i, s) ds \Phi^T(t_{i+1}, t_i) + \\
&\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, s) B(s) Q B^T(s) \Phi^T(t_{i+1}, s) ds = \\
&= \Phi(t_{i+1}, t_i) I_i \Phi^T(t_{i+1}, t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, s) B(s) Q B^T(s) \Phi^T(t_{i+1}, s) ds .
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Используя соотношения (3.50) и (3.51), построим ковариационную матрицу измерений  $K$  в виде следующей блочной матрицы

$$K = \begin{bmatrix} C_m(1,1) + R_1 & C_m(1,2) & \dots & C_m(1,N) \\ C_m^T(1,2) & C_m^T(2,2) + R_2 & \dots & C_m^T(2,N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_m^T(1,N) & C_m^T(2,N) & \dots & C_m^T(N,N) + R_N \end{bmatrix}. \tag{3.52}$$

В случае коррелированных измерений для нахождения оценки  $\hat{x}_N$  минимизируется функция, представляющая собой квадратичную форму

$$(d - B\hat{x}_N)^T K^{-1} (d - B\hat{x}_N). \tag{3.53}$$

Вектор-столбец  $d$  и матрица  $B$  вычисляются так же, как и в (3.31). Оценка находится по следующей формуле

$$\hat{x}_N = (B^T K^{-1} B)^{-1} B^T K^{-1} d \tag{3.54}$$

а её ковариационная матрица  $K_{\hat{x}}$  равна  $(B^T K^{-1} B)^{-1}$ .

### 3.4.2 Мешающие параметры в форме случайных величин, постоянных на всем интервале

Рассмотрим теперь случай, когда  $\xi(t)$  в уравнении (3.2) представляет собой не белый шум, а случайный вектор  $\xi$ , постоянный на всем интервале. Обозначим ковариационную матрицу этого вектора как  $Q$ . Оценка вектора состояния  $\hat{x}_i$  на момент  $t_i$  связана с оценкой вектора состояния на момент последнего измерения  $\hat{x}_N$  следующим соотношением

$$\hat{x}_i = \Phi(t_i, t_N) \hat{x}_N + \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s) B(s) ds \cdot \xi. \quad (3.55)$$

Ковариационная матрица методической ошибки, соответствующая измерениям на моменты  $t_i$  и  $t_j$ , в этом случае будет равна

$$C_m(i, j) = H_i \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s) B(s) ds \cdot Q \cdot \left( \int_{t_N}^{t_j} \Phi(t_j, s) B(s) ds \right)^T H_j^T. \quad (3.56)$$

Ковариационная матрица измерений  $K$  представляется формулой (3.52), в которой под блоками  $C_m(i, j)$  понимаются матрицы, вычисленные по формуле (3.56).

Оценка вектора состояния и ковариационная матрица этой оценки находятся по формуле (3.54).

Следует отметить, что рассмотренный случай имеет значение для получения оценок и моделирования, так как если возмущения, вносимые вектором  $\xi$ , приводят к невязкам  $\Delta z_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , которые сопоставимы с точностью измерений, то для оценки вектора состояния и возмущений можно использовать методику, изложенную в третьем разделе этой главы.

### **3.5 Оценка вектора состояния и возмущений дискретной динамической системы и свойства этих оценок**

Итерационный процесс оценки вектора состояния и суммарных воздействий возмущений между измерениями непрерывной динамической системы, рассмотренный в первом разделе этой главы, на каждом шаге итерационного процесса использует алгоритм оценки вектора состояния и возмущения дискретной динамической системы. Оценка строится на основе критерия качества, который содержит квадрат взвешенного отклонения априорно заданного вектора состояния от его оценки, а так же квадраты взвешенных невязок измерений и взвешенных возмущений.

Рассмотрим задачу оценки  $n$ -мерного вектора состояния  $x_i$  на моменты времени  $i = 0, 1, \dots, N$  дискретной динамической системы

$$x_{i+1} = \Phi_i x_i + \Gamma_i w_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

где

$\Phi_i$  – невырожденная матрица  $n \times n$ ;

$w_i$  –  $k$ -мерный вектор, описывающий шум, действующий на систему;

$\Gamma_i$  –  $k \times n$  матрица.

Канал измерений описывается соотношением

$$z_i = H_i x_i + v_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

где

$z_i$  –  $m$ -мерный вектор измеряемых величин;

$H_i$  –  $m \times n$  матрица, описывающая связь измеренного значения с вектором состояния;

$v_i$  –  $m$ -мерный вектор, описывающий шум измерительного канала.

Обозначим оценку вектора состояния на момент  $i$  по  $N$  измерениям  $z_1, z_2, \dots, z_N$ , как  $\hat{x}_{i,N}$ , а оценку вектора шума, действующего на систему в этот же момент, как  $\hat{w}_{i,N}$ .

Рассмотрим свойства оценок  $\hat{x}_{0,N}, \hat{x}_{1,N}, \dots, \hat{x}_{N,N}, \hat{w}_{0,N}, \dots, \hat{w}_{N-1,N}$ , полученных в результате минимизации функции

$$J(\hat{x}_{0,N}, \hat{x}_{1,N}, \dots, \hat{x}_{N,N}, \hat{w}_{0,N}, \dots, \hat{w}_{N-1,N}) = \frac{1}{2} (\hat{x}_{0,N} - \bar{x})^T P_0^{-1} (\hat{x}_{0,N} - \bar{x}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (z_{i+1} - H_{i+1} \hat{x}_{i+1,N})^T R_{i+1}^{-1} (z_{i+1} - H_{i+1} \hat{x}_{i+1,N}) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \hat{w}_{i,N}^T Q_i^{-1} \hat{w}_{i,N},$$

где

$\bar{x}$  – априорно заданный вектор состояния на начальный момент;

$P_0$  – положительно определённая  $n \times n$  – матрица;

$R_i, i = 1, \dots, N$  – положительно определённые  $m \times m$  – матрицы;

$Q_i, i = 0, \dots, N-1$  – положительно определённые  $k \times k$  – матрицы.

*Свойство 1.* Оценки  $\hat{x}_{N,N}$  и  $\hat{x}_{N-1,N-1}$  связаны рекуррентным соотношением



*Свойство 3.* Обозначим как  $\tilde{x}_0$  невязку между истинным и априорно заданным векторами на начальный момент. Если  $\tilde{x}_0, v_1, \dots, v_N, w_0, \dots, w_{N-1}$  интерпретировать как некоррелированные между собой случайные векторы с нулевыми математическими ожиданиями и ковариационными матрицами:  $P_0, R_1, \dots, R_N, Q_0, \dots, Q_{N-1}$ , то  $P_{N,N}$  является ковариационной матрицей оценки  $\hat{x}_{N,N}$ .

Свойство 3 фактически показывает, при каких условиях рекуррентное соотношение, связывающее оценки  $\hat{x}_{N,N}$  и  $\hat{x}_{N-1,N-1}$ , становится уравнением фильтра Калмана.

Свойства 1 – 3 следуют из лемм 1 – 6, сформулированных и доказанных ниже. Свойство 1 непосредственно вытекает из леммы 4, свойства 2 – из леммы 5, а свойство 3 – из леммы 6.

*Лемма 1.* Пусть заданы:

$\bar{x}$  – вектор размерности  $n$ ;

$\bar{w}$  – вектор размерности  $k$ ;

$P_0$  – положительно определённая  $n \times n$  матрица;

$z_i$  – векторы размерности  $m$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;

$R_i$  – положительно определённые  $m \times m$  матрицы,  $i = 1, \dots, N$ ;

$\Phi_i$  –  $n \times n$  матрицы,  $i = 0, \dots, N-1$ ;

$\Gamma_i$  –  $n \times k$  матрицы,  $i = 0, \dots, N-1$ ;

$Q_i$  – положительно определённые  $k \times k$  матрицы,  $i = 0, \dots, N-1$ ;

$H_i$  –  $m \times n$  матрицы,  $i = 1, \dots, N$ .

Тогда значения переменных  $\hat{x}_{0,N}, \hat{x}_{1,N}, \dots, \hat{x}_{N,N}, \hat{w}_{0,N}, \dots, \hat{w}_{N-1,N}$ , для которых достигается минимум функции

$$\begin{aligned} J(\hat{x}_{0,N}, \hat{x}_{1,N}, \dots, \hat{x}_{N,N}, \hat{w}_{0,N}, \dots, \hat{w}_{N-1,N}) = \\ = \frac{1}{2} (\hat{x}_{0,N} - \bar{x})^T P_0^{-1} (\hat{x}_{0,N} - \bar{x}) + \\ + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left( (z_{i+1} - H_{i+1} \hat{x}_{i+1,N})^T R_{i+1}^{-1} (z_{i+1} - H_{i+1} \hat{x}_{i+1,N}) + \hat{w}_{i,N}^T Q_i^{-1} \hat{w}_{i,N} \right), \end{aligned} \quad (3.57)$$

при ограничениях

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1,N} = \Phi_i \hat{\mathbf{x}}_{i,N} + \Gamma_i \hat{\mathbf{w}}_{i,N}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.58)$$

удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{0,N} &= \mathbf{P}_0 \Phi_0^T \lambda_0 + \bar{\mathbf{x}}, \\ \hat{\mathbf{x}}_{i+1,N} &= \Phi_i \hat{\mathbf{x}}_{i,N} + \Gamma_i \mathbf{Q}_i \Gamma_i^T \lambda_i, \\ \hat{\mathbf{w}}_{i,N} &= \mathbf{Q}_i \Gamma_i^T \lambda_i, \\ \lambda_i &= \Phi_{i+1}^T \lambda_{i+1} + \mathbf{H}_{i+1}^T \mathbf{R}_{i+1}^{-1} (z_{i+1} - \mathbf{H}_{i+1} \hat{\mathbf{x}}_{i+1,N}) \text{ для } i = 0, \dots, N-1, \\ \lambda_N &= 0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Доказательство. Для получения необходимых условий экстремума функции (3.57) при ограничениях (3.58) воспользуемся правилом множителей Лагранжа. Введем векторные множители размерности  $n$ :  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}$  и функцию

$$\tilde{J} = J + \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i^T (\hat{\mathbf{x}}_{i+1,N} - \Phi_i \hat{\mathbf{x}}_{i,N} - \Gamma_i \hat{\mathbf{w}}_{i,N}). \quad (3.60)$$

Сначала вычислим строки частных производных:  $\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{0,N}}$ ,  $\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \hat{\mathbf{w}}_{0,N}}$  и  $\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \lambda_0}$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{0,N}} \right)^T &= \mathbf{P}_0^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_{0,N} - \bar{\mathbf{x}}) - \Phi_0^T \lambda_0, \\ \left( \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \hat{\mathbf{w}}_{0,N}} \right)^T &= \mathbf{Q}_0^{-1} \hat{\mathbf{w}}_{0,N} - \Gamma_0^T \lambda_0, \\ \left( \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \lambda_0} \right)^T &= \hat{\mathbf{x}}_{1,N} - \Phi_0 \hat{\mathbf{x}}_{0,N} - \Gamma_0 \hat{\mathbf{w}}_{0,N}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Теперь вычислим строки частных производных:  $\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{i,N}}$ ,  $\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \hat{\mathbf{w}}_{i,N}}$  и  $\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \lambda_i}$  при

$$i = 1, \dots, N-1$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \hat{x}_{i,N}}\right)^T &= \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{z}_i - \mathbf{H}_i \hat{x}_{i,N}) + \lambda_{i-1} - \Phi_i^T \lambda_i, \\
\left(\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \hat{w}_{i,N}}\right)^T &= \mathbf{Q}_i^{-1} \hat{w}_{i,N} - \Gamma_i^T \lambda_i, \\
\left(\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \lambda_i}\right)^T &= \hat{x}_{i+1,N} - \Phi_i \hat{x}_{i,N} - \Gamma_i \hat{w}_{i,N}.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Наконец, вычислим строку частных производных  $\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \hat{x}_{N,N}}$

$$\left(\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \hat{x}_{N,N}}\right)^T = \mathbf{H}_N^T \mathbf{R}_N^{-1} (\mathbf{z}_N - \mathbf{H}_N \hat{x}_{N,N}) + \lambda_{N-1}. \tag{3.63}$$

Получим систему уравнений, приравнявая нулю строки частных производных

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_0^{-1} (\hat{x}_{0,N} - \bar{x}) - \Phi_0^T \lambda_0 &= 0, \\
\mathbf{Q}_0^{-1} \hat{w}_{0,N} - \Gamma_0^T \lambda_0 &= 0, \\
\hat{x}_{1,N} - \Phi_0 \hat{x}_{0,N} - \Gamma_0 \hat{w}_{0,N} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{z}_i - \mathbf{H}_i \hat{x}_{i,N}) + \lambda_{i-1} - \Phi_i^T \lambda_i &= 0, \\
\mathbf{Q}_i^{-1} \hat{w}_{i,N} - \Gamma_i^T \lambda_i &= 0, \\
\hat{x}_{i+1,N} - \Phi_i \hat{x}_{i,N} - \Gamma_i \hat{w}_{i,N} &= 0 \text{ для } i = 1, \dots, N-1.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\mathbf{H}_N^T \mathbf{R}_N^{-1} (\mathbf{z}_N - \mathbf{H}_N \hat{x}_{N,N}) + \lambda_{N-1} = 0. \tag{3.66}$$

Из первого уравнения системы (3.64) получим

$$\hat{x}_{0,N} = \bar{x} + \mathbf{P}_0 \Phi_0^T \lambda_0. \tag{3.67}$$

Из второго уравнения системы (3.64) следует, что

$$\hat{w}_{0,N} = \mathbf{Q}_0 \Gamma_0^T \lambda_0. \tag{3.68}$$

После подстановки (3.68) в третье уравнение (3.64), получим

$$\hat{x}_{1,N} = \Phi_0 \hat{x}_{0,N} + \Gamma_0 \mathbf{Q}_0 \Gamma_0^T \lambda_0. \tag{3.69}$$

Преобразуем теперь систему (3.65). Из второго уравнения получим

$$\hat{w}_{i,N} = \mathbf{Q}_i \Gamma_i^T \lambda_i. \tag{3.70}$$

После подстановки (3.70) в третье уравнение системы (3.65) получим

$$\hat{x}_{i+1,N} = \Phi_i \hat{x}_{i,N} + \Gamma_i Q_i \Gamma_i^T \lambda_i. \quad (3.71)$$

Введём дополнительный вектор  $\lambda_N$  и свяжем его уравнением  $\lambda_N = 0$ . Это позволяет объединить уравнения (3.65) и (3.66)

$$\lambda_i = \Phi_i^T \lambda_{i+1} - H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} (z_{i+1} - H_{i+1} \hat{x}_{i+1,N}), \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (3.72)$$

Соединяя (3.67), (3.69), (3.71), (3.68), (3.70) и (3.72), получим искомую систему уравнений (3.59). Лемма доказана.

Введём обозначения для матриц, которые потребуются при дальнейшем изложении

$$\begin{aligned} P_{1,0} &= \Phi_0 P_0 \Phi_0^T + \Gamma_0 Q_0 \Gamma_0^T, \\ P_{1,1} &= (P_{1,0}^{-1} + H_1^T R_1^{-1} H_1)^{-1}, \\ P_{2,1} &= \Phi_1 P_{1,1} \Phi_1^T + \Gamma_1 Q_1 \Gamma_1^T, \\ P_{2,2} &= (P_{2,1}^{-1} + H_2^T R_2^{-1} H_2)^{-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ P_{N,N-1} &= \Phi_{N-1} P_{N-1,N-1} \Phi_{N-1}^T + \Gamma_{N-1} Q_{N-1} \Gamma_{N-1}^T, \\ P_{N,N} &= (P_{N,N-1}^{-1} + H_N^T R_N^{-1} H_N)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Заметим, что матрицы  $P_{1,0}, P_{1,1}, \dots, P_{N,N-1}, P_{N,N}$  положительно определены, если матрица  $P_0$  – положительно определена, так как операции добавления неотрицательно определённой матрицы и обращения матрицы сохраняют положительную определённость.

Лемма 2. При  $N = 1$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{1,1} &= \Phi_0 \bar{x} + P_{1,1} H_1^T R_1^{-1} (z_1 - H_1 \Phi_0 \bar{x}), \\ \hat{w}_{0,1} &= Q_0 \Gamma_0^T H_1^T R_1^{-1} (z_1 - H_1 \hat{x}_{1,1}). \end{aligned}$$

Доказательство. Из системы уравнений (3.59) следует

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{0,1} &= P_0 \Phi_0^T \lambda_0 + \bar{x}, \\
\hat{x}_{1,1} &= \Phi_0 \hat{x}_{0,1} + \Gamma_0 Q_0 \Gamma_0^T \lambda_0, \\
\hat{w}_{0,1} &= Q_0 \Gamma_0^T \lambda_0, \\
\lambda_0 &= H_1^T R_1^{-1} (z_1 - H_1 \hat{x}_{1,1}).
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Получим уравнение для  $\hat{x}_{1,1}$ , подставив выражения для  $\lambda_0$  и  $\hat{x}_{0,1}$  во второе уравнение системы (3.74)

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{1,1} &= \Phi_0 \bar{x} + (\Phi_0 P_0 \Phi_0^T + \Gamma_0 Q_0 \Gamma_0^T) \lambda_0 = \\
&= \Phi_0 \bar{x} + (\Phi_0 P_0 \Phi_0^T + \Gamma_0 Q_0 \Gamma_0^T) H_1^T R_1^{-1} (z_1 - H_1 \hat{x}_{1,1}).
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Используя обозначение для матрицы  $P_{1,0}$  из (3.73), запишем уравнение (3.75) в виде

$$\hat{x}_{1,1} = P_{1,0} H_1^T R_1^{-1} z_1 - P_{1,0} H_1^T R_1^{-1} H_1 \hat{x}_{1,1} + \Phi_0 \bar{x}. \tag{3.76}$$

Разрешив (3.76) относительно  $\hat{x}_{1,1}$ , получим

$$\hat{x}_{1,1} = (E + P_{1,0} H_1^T R_1^{-1} H_1)^{-1} (P_{1,0} H_1^T R_1^{-1} z_1 + \Phi_0 \bar{x}), \tag{3.77}$$

так как

$$(E + P_{1,0} H_1^T R_1^{-1} H_1)^{-1} = (P_{1,0} (P_{1,0}^{-1} + H_1^T R_1^{-1} H_1))^{-1} = (P_{1,0}^{-1} + H_1^T R_1^{-1} H_1)^{-1} P_{1,0}^{-1}.$$

Используя представление  $P_{1,1}$  через  $P_{1,0}$ , преобразуем (3.77)

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{1,1} &= P_{1,1} P_{1,0}^{-1} (P_{1,0} H_1^T R_1^{-1} z_1 + \Phi_0 \bar{x}) = \\
&= P_{1,1} H_1^T R_1^{-1} z_1 + P_{1,1} P_{1,0}^{-1} \Phi_0 \bar{x} - P_{1,1} H_1^T R_1^{-1} H_1 \Phi_0 \bar{x} + P_{1,1} H_1^T R_1^{-1} H_1 \Phi_0 \bar{x} = \\
&= P_{1,1} (P_{1,0}^{-1} + H_1^T R_1^{-1} H_1) \Phi_0 \bar{x} + P_{1,1} H_1^T R_1^{-1} (z_1 - H_1 \Phi_0 \bar{x}) = \\
&= \Phi_0 \bar{x} + P_{1,1} H_1^T R_1^{-1} (z_1 - H_1 \Phi_0 \bar{x}).
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Выражение для  $\hat{w}_{0,1}$  получается подстановкой соотношения для  $\lambda_0$  (последнее уравнение (3.74)) в предпоследнее уравнение (3.74). Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть для всех  $1 < j < N$  справедливо

$$\hat{x}_{j,j} = \Phi_{j-1} \hat{x}_{j-1,j-1} + P_{j,j} H_j^T R_j^{-1} (z_j - H_j \Phi_{j-1} \hat{x}_{j-1,j-1}),$$

тогда из системы уравнений (3.59) следует, что

$$\hat{x}_{i,N} = \hat{x}_{i,i} + P_{i,i} \Phi_i^T \lambda_i, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (3.79)$$

Доказательство. Используем индукцию по  $i$ . Сначала докажем, что (3.79) справедливо для  $i = 1$ . Преобразуем выражения для  $\hat{x}_{1,N}$  и  $\lambda_0$  системы (3.59)

$$\begin{aligned} \hat{x}_{1,N} &= \Phi_0 \hat{x}_{0,N} + \Gamma_0 Q_0 \Gamma_0^T \lambda_0 = \Phi_0 (\bar{x} + P_0 \Phi_0^T \lambda_0) + \Gamma_0 Q_0 \Gamma_0^T \lambda_0 = \\ &= \Phi_0 \bar{x} + (\Phi_0 P_0 \Phi_0^T + \Gamma_0 Q_0 \Gamma_0^T) \lambda_0 = \Phi_0 \bar{x} + P_{1,0} \lambda_0, \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \Phi_1^T \lambda_1 + H_1^T R_1^{-1} (z_1 - H_1 \hat{x}_{1,N}) = \\ &= \Phi_1^T \lambda_1 - H_1^T R_1^{-1} H_1 \hat{x}_{1,N} + H_1^T R_1^{-1} z_1. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Получим выражение для  $H_1^T R_1^{-1} z_1$ , используя лемму 2

$$\begin{aligned} \hat{x}_{1,1} &= \Phi_0 \bar{x} + P_{1,1} H_1^T R_1^{-1} (z_1 - H_1 \Phi_0 \bar{x}), \\ H_1^T R_1^{-1} z_1 &= P_{1,1}^{-1} \hat{x}_{1,1} - P_{1,1}^{-1} \Phi_0 \bar{x} + H_1^T R_1^{-1} H_1 \Phi_0 \bar{x} = \\ &= P_{1,1}^{-1} \hat{x}_{1,1} - (P_{1,1}^{-1} - H_1^T R_1^{-1} H_1) \Phi_0 \bar{x} = P_{1,1}^{-1} \hat{x}_{1,1} - P_{1,0}^{-1} \Phi_0 \bar{x}. \end{aligned}$$

После подстановки полученного выражения для  $H_1^T R_1^{-1} z_1$  в (3.81), получим:

$$\lambda_0 = \Phi_1^T \lambda_1 - H_1^T R_1^{-1} H_1 \hat{x}_{1,N} + P_{1,1}^{-1} \hat{x}_{1,1} - P_{1,0}^{-1} \Phi_0 \bar{x}. \quad (3.82)$$

Подставляя (3.82) в (3.80), получим уравнение для  $\hat{x}_{1,N}$

$$\hat{x}_{1,N} = \Phi_0 \bar{x} + P_{1,0} (\Phi_1^T \lambda_1 - H_1^T R_1^{-1} H_1 \hat{x}_{1,N} + P_{1,1}^{-1} \hat{x}_{1,1} - P_{1,0}^{-1} \Phi_0 \bar{x}).$$

После преобразований получим

$$(E + P_{1,0} H_1^T R_1^{-1} H_1) \hat{x}_{1,N} = P_{1,0} \Phi_1^T \lambda_1 + P_{1,0} P_{1,1}^{-1} \hat{x}_{1,1}.$$

Так как  $E + P_{1,0} H_1^T R_1^{-1} H_1 = P_{1,0} P_{1,1}^{-1}$ , то  $\hat{x}_{1,N} = P_{1,1} \Phi_1^T \lambda_1 + \hat{x}_{1,1}$ . Следовательно, для  $i = 1$  равенство выполняется.

Предположим теперь, что равенство (3.79) выполняется для  $i - 1$ , и докажем, что равенство выполняется для  $i$ . Используя предположение индукции, преобразуем выражение для  $\hat{x}_{i,N}$  системы (3.59)

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i,N} &= \Phi_{i-1} \hat{x}_{i-1,N} + \Gamma_{i-1} Q_{i-1} \Gamma_{i-1}^T \lambda_{i-1} = \\ &= \Phi_{i-1} (\hat{x}_{i-1,i-1} + P_{i-1,i-1} \Phi_{i-1}^T \lambda_{i-1}) + \Gamma_{i-1} Q_{i-1} \Gamma_{i-1}^T \lambda_{i-1} = \\ &= \Phi_{i-1} \hat{x}_{i-1,i-1} + (\Phi_{i-1} P_{i-1,i-1} \Phi_{i-1}^T + \Gamma_{i-1} Q_{i-1} \Gamma_{i-1}^T) \lambda_{i-1} = \\ &= \Phi_{i-1} \hat{x}_{i-1,i-1} + P_{i,i-1} \lambda_{i-1}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Из системы (3.59) имеем выражение для  $\lambda_{i-1}$

$$\lambda_{i-1} = \Phi_i^T \lambda_i + H_i^T R_i^{-1} z_i - H_i^T R_i^{-1} H_i \hat{x}_{i,N}. \quad (3.84)$$

Используя предположение леммы, выразим  $H_i^T R_i^{-1} z_i$  через  $\hat{x}_{i,i}$  и  $\hat{x}_{i-1,i-1}$

$$\begin{aligned} H_i^T R_i^{-1} z_i &= P_{i,i}^{-1} \hat{x}_{i,i} - P_{i,i}^{-1} \Phi_{i-1} \hat{x}_{i-1,i-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i \Phi_{i-1} \hat{x}_{i-1,i-1} = \\ &= P_{i,i}^{-1} \hat{x}_{i,i} - (P_{i,i}^{-1} - H_i^T R_i^{-1} H_i) \Phi_{i-1} \hat{x}_{i-1,i-1} = P_{i,i}^{-1} \hat{x}_{i,i} - P_{i,i-1}^{-1} \Phi_{i-1} \hat{x}_{i-1,i-1}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

После подстановки (3.84) и (3.85) в (3.83), получим

$$\hat{x}_{i,N} = \Phi_{i-1} \hat{x}_{i-1,i-1} + P_{i,i-1} (\Phi_i^T \lambda_i + P_{i,i}^{-1} \hat{x}_{i,i} - P_{i,i-1}^{-1} \Phi_{i-1} \hat{x}_{i-1,i-1} - H_i^T R_i^{-1} H_i \hat{x}_{i,N}).$$

После преобразований имеем

$$(E + P_{i,i-1} H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i,N} = P_{i,i-1} \Phi_i^T \lambda_i + P_{i,i-1} P_{i,i}^{-1} \hat{x}_{i,i},$$

откуда следует

$$\hat{x}_{i,N} = \hat{x}_{i,i} + P_{i,i} \Phi_i^T \lambda_i.$$

Лемма доказана.

Лемма 4 (Свойство 1). Векторы  $\hat{x}_{N-1,N-1}$  и  $\hat{x}_{N,N}$  связаны соотношением

$$\hat{x}_{N,N} = \Phi_{N-1} \hat{x}_{N-1,N-1} + P_{N,N} H_N^T R_N^{-1} (z_N - H_N \Phi_{N-1} \hat{x}_{N-1,N-1}). \quad (3.86)$$

Доказательство. Используем индукцию по  $N$ . Справедливость равенства (3.86) для  $N=1$  доказана в лемме 2. Предположим, что для всех  $i \leq N-1$  равенство (3.86) выполняется. Тогда по лемме 3

$$\hat{x}_{N-1,N} = \hat{x}_{N-1,N-1} + P_{N-1,N-1} \Phi_{N-1}^T \lambda_{N-1}. \quad (3.87)$$

Уравнение для  $\hat{x}_{N,N}$  системы (3.59) имеет вид

$$\hat{x}_{N,N} = \Phi_{N-1} \hat{x}_{N-1,N} + \Gamma_{N-1} Q_{N-1} \Gamma_{N-1}^T \lambda_{N-1}.$$

После подстановки в него (3.87) получим

$$\begin{aligned} \hat{x}_{N,N} &= \Phi \hat{x}_{N-1,N-1} + (\Phi_{N-1} P_{N-1,N-1} \Phi_{N-1}^T + \Gamma_{N-1} Q_{N-1} \Gamma_{N-1}^T) \lambda_{N-1} = \\ &= \Phi \hat{x}_{N-1,N-1} + P_{N,N-1} \lambda_{N-1}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Получим уравнение для  $\hat{x}_{N,N}$ , подставив в (3.88) выражение для  $\lambda_{N-1}$  из системы (3.59)

$$\hat{x}_{N,N} = \Phi \hat{x}_{N-1,N-1} + P_{N,N-1} H_N^T R_N^{-1} (z_N - H_N \hat{x}_{N,N}). \quad (3.89)$$

Разрешая (3.89) относительно  $\hat{x}_{N,N}$ , получим

$$(E + P_{N,N-1} H_N^T R_N^{-1} H_N) \hat{x}_{N,N} = \Phi_{N-1} \hat{x}_{N-1,N-1} + P_{N,N-1} H_N^T R_N^{-1} z_N.$$

Так как в соответствии с (3.73)  $P_{N,N}^{-1} = P_{N,N-1}^{-1} + H_N^T R_N^{-1} H_N$ , решение уравнения (3.89) имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{x}_{N,N} &= P_{N,N} P_{N,N-1}^{-1} (\Phi_{N-1} \hat{x}_{N-1,N-1} + P_{N,N-1} H_N^T R_N^{-1} z_N) = \\ &= (E - P_{N,N} H_N^T R_N^{-1} H_N) \Phi_{N-1} \hat{x}_{N-1,N-1} + P_{N,N} H_N^T R_N^{-1} z_N = \\ &= \Phi_{N-1} \hat{x}_{N-1,N-1} + P_{N,N} H_N^T R_N^{-1} (z_N - H_N \Phi_{N-1} \hat{x}_{N-1,N-1}). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 5 (Свойство 2). Векторы  $\hat{x}_{i,N}$  и  $\hat{w}_{i,N}$ ,  $i = 0, \dots, N-1$  связаны с  $\hat{x}_{N,N}$  следующими рекуррентными формулами

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \Phi_{i+1}^T \lambda_{i+1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} (z_{i+1} - H_{i+1} \hat{x}_{i+1,N}), \\ \hat{x}_{i,N} &= \Phi_{i+1}^{-1} (\hat{x}_{i+1,N} - \Gamma_i Q_i \Gamma_i^T \lambda_i), \\ \hat{w}_{i,N} &= Q_i \Gamma_i^T \lambda_i \text{ для } i = 0, \dots, N-1, \\ \lambda_N &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство следует из леммы 1 (система уравнений (3.59)).

Обозначим истинное значение  $x$  при  $i = 0$  как  $x_0$ , а разность между  $\bar{x}$  и  $x_0$  как  $\tilde{x}_0$ .

Лемма 6 (свойство 3). Если  $\tilde{x}_0, v_1, \dots, v_N, w_0, \dots, w_{N-1}$  — попарно некоррелированные случайные векторы такие, что

$$\begin{aligned} E[\tilde{x}_0 \tilde{x}_0^T] &= P_0, \quad E[v_1 v_1^T] = R_1, \dots, E[v_N v_N^T] = R_N, \\ E[w_0 w_0^T] &= Q_0, \dots, E[w_{N-1} w_{N-1}^T] = Q_{N-1}, \end{aligned}$$

то справедливо равенство

$$E\left[\left(\mathbf{x}_N - \hat{\mathbf{x}}_{N,N}\right)\left(\mathbf{x}_N - \hat{\mathbf{x}}_{N,N}\right)^T\right] = \mathbf{P}_{N,N}. \quad (3.90)$$

Доказательство. Обозначим невязку между истинным значением  $\mathbf{x}_N$  и оценкой  $\hat{\mathbf{x}}_{N,N}$  как  $\tilde{\mathbf{x}}_{N,N}$ . Истинные значения  $\mathbf{x}_N$  и  $\mathbf{x}_{N-1}$  связаны между собой соотношением

$$\mathbf{x}_N = \Phi_{N-1}\mathbf{x}_{N-1} + \Gamma_{N-1}\mathbf{w}_{N-1}, \quad (3.91)$$

а вектор измеренных значений  $\mathbf{z}_N$  связан с этими векторами соотношением

$$\mathbf{z}_N = \mathbf{H}_N\mathbf{x}_N + \mathbf{v}_N = \mathbf{H}_N\Phi_{N-1}\mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{H}_N\Gamma_{N-1}\mathbf{w}_{N-1} + \mathbf{v}_N. \quad (3.92)$$

Введём матрицу  $\mathbf{K}_N = \mathbf{P}_{N,N}\mathbf{H}_N^T\mathbf{R}_N^{-1}$ . Вычитая из (3.91) равенство, связывающее оценки  $\hat{\mathbf{x}}_{N,N}$  и  $\hat{\mathbf{x}}_{N-1,N-1}$  получим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{N,N} &= \Phi_{N-1}\mathbf{x}_{N-1} + \Gamma_{N-1}\mathbf{w}_{N-1} - \Phi_{N-1}\hat{\mathbf{x}}_{N-1,N-1} - \mathbf{P}_{N,N}\mathbf{H}_N^T\mathbf{R}_N^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \left(\mathbf{H}_N\Phi_{N-1}\mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{H}_N\Gamma_{N-1}\mathbf{w}_{N-1} + \mathbf{v}_N - \mathbf{H}_N\Phi_{N-1}\hat{\mathbf{x}}_{N-1,N-1}\right) = \\ &= \Phi_{N-1}\tilde{\mathbf{x}}_{N-1,N-1} + \Gamma_{N-1}\mathbf{w}_{N-1} - \mathbf{K}_N\left(\mathbf{H}_N\Phi_{N-1}\tilde{\mathbf{x}}_{N-1,N-1} + \mathbf{H}_N\Gamma_{N-1}\mathbf{w}_{N-1} + \mathbf{v}_N\right) = \\ &= \left(\Phi_{N-1} - \mathbf{K}_N\mathbf{H}_N\Phi_{N-1}\right)\tilde{\mathbf{x}}_{N-1,N-1} + \left(\Gamma_{N-1} - \mathbf{K}_N\mathbf{H}_N\Gamma_{N-1}\right)\mathbf{w}_{N-1} - \mathbf{K}_N\mathbf{v}_N. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Докажем (3.90), используя индукцию по  $N$ . Докажем сначала (3.90) для  $N=1$ . При  $N=1$  соотношение (3.93) примет вид

$$\tilde{\mathbf{x}}_{1,1} = \left(\Phi_0 - \mathbf{K}_1\mathbf{H}_1\Phi_0\right)\tilde{\mathbf{x}}_{0,0} + \left(\Gamma_0 - \mathbf{K}_1\mathbf{H}_1\Gamma_0\right)\mathbf{w}_0 - \mathbf{K}_1\mathbf{v}_1. \quad (3.94)$$

Так как по условию  $E\left[\tilde{\mathbf{x}}_{0,0}\tilde{\mathbf{x}}_{0,0}^T\right] = \mathbf{P}_0$  и  $\tilde{\mathbf{x}}_{0,0}$ ,  $\mathbf{w}_0$  и  $\mathbf{v}_1$  – некоррелированы, то

$$\begin{aligned} E\left[\tilde{\mathbf{x}}_{1,1}\tilde{\mathbf{x}}_{1,1}^T\right] &= \left(\Phi_0 - \mathbf{K}_1\mathbf{H}_1\Phi_0\right)\mathbf{P}_0\left(\Phi_0 - \mathbf{K}_1\mathbf{H}_1\Phi_0\right)^T + \\ &\quad + \left(\Gamma_0 - \mathbf{K}_1\mathbf{H}_1\Gamma_0\right)\mathbf{Q}_0\left(\Gamma_0 - \mathbf{K}_1\mathbf{H}_1\Gamma_0\right)^T + \mathbf{K}_1\mathbf{R}_1\mathbf{K}_1^T = \\ &= \left(\mathbf{E} - \mathbf{K}_1\mathbf{H}_1\right)\left(\Phi_0\mathbf{P}_0\Phi_0^T + \Gamma_0\mathbf{Q}_0\Gamma_0^T\right)\left(\mathbf{E} - \mathbf{K}_1\mathbf{H}_1\right)^T + \mathbf{K}_1\mathbf{R}_1\mathbf{K}_1^T = \\ &= \left(\mathbf{E} - \mathbf{K}_1\mathbf{H}_1\right)\mathbf{P}_{1,0}\left(\mathbf{E} - \mathbf{K}_1\mathbf{H}_1^T\right)^T + \mathbf{K}_1\mathbf{R}_1\mathbf{K}_1^T. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Рассмотрим

$$\mathbf{E} - \mathbf{K}_1\mathbf{H}_1 = \mathbf{E} - \mathbf{P}_{1,1}\mathbf{H}_1^T\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{H}_1 = \mathbf{P}_{1,1}\left(\mathbf{P}_{1,1}^{-1} - \mathbf{H}_1^T\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{H}_1\right) = \mathbf{P}_{1,1}\mathbf{P}_{1,0}^{-1}. \quad (3.96)$$

Подставляя (3.96) в (3.95), получим

$$\begin{aligned}
E\left[\tilde{\mathbf{x}}_{1,1}\tilde{\mathbf{x}}_{1,1}^T\right] &= \mathbf{P}_{1,1}\mathbf{P}_{1,0}^{-1}\mathbf{P}_{1,0}\mathbf{P}_{1,0}^{-1}\mathbf{P}_{1,1} + \mathbf{P}_{1,1}\mathbf{H}_1^T\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1\mathbf{H}_1\mathbf{P}_{1,1} = \\
&= \mathbf{P}_{1,1}\left(\mathbf{P}_{1,0}^{-1} + \mathbf{H}_1^T\mathbf{R}_1\mathbf{H}_1\right)\mathbf{P}_{1,1} = \mathbf{P}_{1,1}.
\end{aligned}$$

Для  $N=1$  утверждение доказано. Предположим теперь, что утверждение леммы справедливо для  $N-1$ , т.е.  $E\left[\tilde{\mathbf{x}}_{N-1,N-1}\tilde{\mathbf{x}}_{N-1,N-1}^T\right] = \mathbf{P}_{N-1,N-1}$ . Оценка  $\hat{\mathbf{x}}_{N-1,N-1}$  получена при использовании случайных векторов  $\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{N-1}, \mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_{N-2}$ , которые не коррелированы со случайными векторами  $\mathbf{v}_N$  и  $\mathbf{w}_{N-1}$ . Поэтому невязка  $\tilde{\mathbf{x}}_{N-1,N-1}$  не коррелирована со случайными векторами  $\mathbf{v}_N$  и  $\mathbf{w}_{N-1}$ . Используя это и соотношение (3.93), вычислим:

$$\begin{aligned}
E\left[\tilde{\mathbf{x}}_{N,N}\tilde{\mathbf{x}}_{N,N}^T\right] &= (\Phi_{N-1} - \mathbf{K}_N\mathbf{H}_N\Phi_{N-1})\mathbf{P}_{N-1,N-1}(\Phi_{N-1} - \mathbf{K}_N\mathbf{H}_N\Phi_{N-1})^T + \\
&\quad + (\Gamma_{N-1} - \mathbf{K}_N\mathbf{H}_N\Gamma_{N-1})\mathbf{Q}_{N-1}(\Gamma_{N-1} - \mathbf{K}_N\mathbf{H}_N\Gamma_{N-1})^T + \mathbf{K}_N\mathbf{R}_N\mathbf{K}_N^T = \\
&= (\mathbf{E} - \mathbf{K}_N\mathbf{H}_N)(\Phi_{N-1}\mathbf{P}_{N-1,N-1}\Phi_{N-1}^T + \Gamma_{N-1}\mathbf{Q}_{N-1}\Gamma_{N-1}^T)(\mathbf{E} - \mathbf{K}_N\mathbf{H}_N)^T + \mathbf{K}_N\mathbf{R}_N\mathbf{K}_N^T = \\
&= \mathbf{P}_{N,N}\mathbf{P}_{N,N-1}^{-1}\mathbf{P}_{N,N-1}\mathbf{P}_{N,N-1}^{-1}\mathbf{P}_{N,N} + \mathbf{P}_{N,N}\mathbf{H}_N^T\mathbf{R}_N^{-1}\mathbf{R}_N\mathbf{R}_N^{-1}\mathbf{H}_N\mathbf{P}_{N,N} = \mathbf{P}_{N,N}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

## **Глава 4 Вопросы баллистики и навигации в проектах полётов к Луне, планетам и малым телам Солнечной системы**

Глава содержит обзор проблем баллистики и навигации в проектах полётов к Луне, точке  $L_2$  системы Солнце – Земля и планетам Солнечной системы. Описаны основные динамические операции на участках перелёта к планетам с использованием ЖРД и ЭРДУ, при проведении гравитационных маневров и на орбитах искусственных спутников планет. Приведены соответствующие требования по точности навигации.

Описание динамических операций проекта «Фобос-Грунт» содержится в работах [66 – Тучин, 2010; 67 – Тучин, 2002].

### **4.1 Проблемы баллистики и навигации в проектах полётов к Луне, точке $L_2$ системы Солнце – Земля, планетам и малым телам Солнечной системы**

Подраздел содержит анализ проблем баллистики и навигации в проектах полётов к Луне и планетам Солнечной системы. Рассмотрены отечественные проекты «Фобос-Грунт», полёты к Луне, в окрестность точки  $L_2$  системы Солнце-Земля, к Венере и Юпитеру, а также проекты «Кассини», «New Horizons» и «Пионер-10, -11» (США).

#### **4.1.1 Проект «Фобос-Грунт»**

Проект «Фобос-Грунт» имеет фундаментальное научное значение, основной его целью является доставка на Землю образцов грунта малого небесного тела – естественного спутника Марса Фобоса [44 – Маров, 1986 ; 54 – Сейделмен, 1981 ]

Схема экспедиции включает четыре последовательных этапа:

- старт космического комплекса и выведение КА на отлётную от Земли траекторию;

- перелёт КА от Земли к Марсу, завершаемый переходом на орбиту искусственного спутника Марса (ИСМ);
- орбитальное движение КА в сфере действия Марса и маневрирование, обеспечивающее тесное сближение КА с Фобосом, посадку КА на его поверхность, забор образцов грунта, старт с Фобоса возвращаемого аппарата (ВА) и его полёт по околомарсианской орбите ожидания;
- старт с орбиты ожидания возвращаемого КА и перелёт к Земле, завершаемый входом в её атмосферу и посадкой в заданный район территории нашей страны.

Схема выведения КА на траекторию перелёта от Земли к Марсу предполагает использование двух околоземных орбит: опорную орбиту, на которую РН выводит КА, и промежуточную орбиту, на которую КА переходит после первого включения своей маршевой двигательной установки (МДУ). Погрешности выведения РН на опорную орбиту и погрешности исполнения импульсов перехода на отлётную траекторию приводят к отклонению вектора асимптотической скорости отлёта от его расчётного значения. Модуль этого отклонения может достигать величины 70 м/с. Эта характеристика практически полностью определяет величину требуемого импульса первой коррекции межпланетной траектории, при условии проведения коррекции не позднее 10 суток после перехода на траекторию перелёта. Ошибки приведения КА в картинную плоскость Марса в результате перехода КА на перелётную траекторию составляют ~1.5 млн. км.

Перелёт Земля – Марс по гелиоцентрической траектории начинается с момента выхода КА на отлётную от Земли траекторию и завершается подлётом к Марсу на минимальное расстояние.

Основная задача навигации на этом этапе полёта – обеспечить выведение КА к Марсу так, чтобы ошибки по координатам в картинной плоскости Марса не превышали 300 км. На межпланетной траектории необходимо проведение коррекций. Коррекции проводятся по результатам определения траектории КА.

Определение параметров перелётной траектории КА производится по данным высокоточных наземных радиотехнических измерений. На всех этапах экспедиции

измерения выполняются пунктами дальней космической радиосвязи (Медвежьё Озёра и Уссурийск), оснащёнными большими антеннами (64 – 70 м). В запросном режиме проводятся измерения наклонной дальности и радиальной скорости (доплеровского смещения частоты сигнала) КА с предельными аппаратными ошибками  $\pm 20$  м и  $\pm 0,5$  мм/с соответственно (без учёта влияния среды распространения сигнала). Наряду с запросными траекторными измерениями используются беззапросные измерения радиальной скорости и более сложный тип измерений доплеровского сдвига частоты, в котором одновременно участвуют два измерительных пункта при проведении запросных измерений: один измерительный пункт излучает и принимает сигнал, а другой только принимает сигнал, излучаемый с борта КА.

Беззапросный режим измерения радиальной скорости используется на участках проведения коррекций и маневров. Особенность проведения траекторных измерений после включения двигательной установки состоит в том, что ошибки исполнения заданных импульсов могут приводить к таким ошибкам прогноза движения КА, при которых ошибка по частоте запросного сигнала превосходит ширину полосы пропускания бортового приёмника. В особенности, это существенно при выполнении маневра торможения и выполнении других больших импульсов при маневрировании в сфере действия Марса. Чтобы избежать таких ситуаций, на участках работы с КА непосредственно после включения двигательной установки предусмотрены сеансы измерений радиальной скорости в беззапросном режиме, проведение которых не требует вхождения в связь с КА по запросному сигналу. Несмотря на то, что ошибки измерений радиальной скорости в беззапросном режиме значительно больше аналогичных измерений в запросном режиме (из-за неточного знания частоты бортового задающего генератора), точность прогноза параметров движения КА, полученного с использованием беззапросных измерений, такова, что обеспечиваются условия проведения запросных измерений.

На наиболее ответственных участках полёта траекторные измерения проводятся по следующей схеме. Один измерительный пункт (например, Уссурийск) проводит сеанс запросных измерений. Другой измерительный пункт (в

данном примере это Медвежьи Озёра) измеряет доплеровский сдвиг сигнала, излучаемого с борта КА. Совместная обработка измерений с двух измерительных пунктов позволит получить измерения доплеровского сдвига по двум трассам, в данном примере, Уссурийск – КА – Уссурийск и Уссурийск – КА – Медвежьи Озёра. Наличие двух трасс позволяет измерить скорость КА не только в радиальном направлении, но и в плоскости, ортогональной радиальному направлению, если использовать разность измеряемых величин доплеровского сдвига, полученных на разных измерительных пунктах. Такой тип измерений называют трёхпутевым доплером (по числу путей, пройденным сигналом между измерительными пунктами и КА).

С учётом приведённых характеристик траекторных измерений и заданных ошибок исполнения маневров на трассе перелёта планируется проведение трёх коррекций. Время проведения первой коррекции выбирается из минимального времени, необходимого для надёжного определения параметров движения КА. Это время определяется не только по результатам априорной оценки точности, но и наличия избыточности измерений, чтобы обеспечить возможность идентификации возможных аномальных сеансов траекторных измерений. При наличии измерений с двух измерительных пунктов первая коррекция проводится на 10-е сутки полёта по перелётной траектории. Вторую коррекцию целесообразно проводить за 80 дней до подлёта на минимальное расстояние. Третью, заключительную коррекцию целесообразно проводить за 2 – 4 недели до подлёта на минимальное расстояние к Марсу. Суммарная характеристическая скорость всех импульсов коррекций не превосходит 100 м/с. Меньшие значения характеристической скорости соответствуют более ранним датам проведения третьей коррекции. Однако более ранние варианты проведения третьей коррекции приводят к большим ошибкам приведения. Ошибки приведения по минимальному расстоянию между КА и Марсом составляют 150 – 500 км, а по наклонению  $1.4^\circ - 3.3^\circ$ . При использовании для проведения 3-й заключительной коррекции двигателей малой тяги КА (ДМТ), работающих на химическом топливе, можно привести КА к Марсу с большей точностью, за счет более высокой точности исполнения импульса коррекции. При

использовании этих двигателей третью коррекцию целесообразно проводить в интервале 10 – 14 суток до подлёта на минимальное расстояние от Марса. При проведении третьей коррекции за 10 суток до подлёта на минимальное расстояние ошибка приведения по высоте перицентра подлётной гиперболы не превысит 30 км, а по наклонению  $1.5^\circ$ . Однако в этом случае возрастет на 15 м/с необходимая характеристическая скорость на проведении третьей коррекции по сравнению с временем её проведения за 14 дней до подлёта КА к Марсу на минимальное расстояние.

В районе перицентра подлётной гиперболы выполняется маневр торможения ( $\sim 800$  м/с), после которого КА выводится на эксцентрическую орбиту ИСМ с периодом  $\sim 3$  суток.

Основной навигационной задачей, которая решается на орбитальном участке полёта, является высокоточное прогнозирование движения КА относительно Фобоса в области, расположенной на высоте 40 – 80 км над его поверхностью (в районе предполагаемой точки посадки). Ошибки прогнозирования движения КА относительно Фобоса не должны превышать величину 3 км по положению и 1 м/с по скорости КА, что совершенно необходимо для успешного функционирования автономной системы посадки (АСП). При этом должны выполняться условия освещённости и радиосвязи с Землей. Для решения этой сложной навигационной задачи используются телевизионные наблюдения Фобоса на фоне звёздного неба (они дают измерения направления линии визирования КА – Фобос в инерциальной системе) и лазерные измерения расстояния между КА и Фобосом, выполняемые лазерным высотомером на этапе сближения КА с Фобосом перед посадкой. Данные этих измерений передаются на Землю и обрабатываются совместно с наземными радиотехническими траекторными измерениями для уточнения и прогнозирования движения КА относительно Фобоса.

Для сближения с Фобосом используются две орбиты: орбита наблюдения, на которую переходит КА после своего пребывания на «начальной» трёхсуточной орбите ИСМ, и квазисинхронная орбита, с которой происходит посадка на Фобос.

Плоскость номинальной орбиты наблюдения совпадает с плоскостью орбиты Фобоса. Номинальная орбита наблюдения выбиралась исходя из следующих требований:

- исключить возможность столкновения КА с Фобосом из-за ошибок прогнозирования, исполнения маневров и ошибок эфемерид Фобоса;
- обеспечить возможность периодического проведения телевизионных сеансов наблюдения Фобоса.

В качестве орбиты наблюдения выбрана орбита, полуось которой превышает полуось орбиты Фобоса на 500 км. Период обращения КА по этой орбите ~8.3 часа.

Переход с трёхсуточной орбиты ИСМ на орбиту наблюдения осуществляется двумя маневрами. Первый маневр обеспечивает подъем перицентра орбиты до орбиты наблюдения и изменение наклона орбиты (~110 м/с). Вторым маневром понижается апоцентр полученной орбиты до высоты орбиты наблюдения (~710 м/с).

На орбите наблюдения решается важная навигационная задача уточнения параметров траекторий КА и Фобоса, а также гравитационного параметра Фобоса с целью обеспечения перехода на КСО с необходимой точностью. Для оценки точности прогнозирования использовалась мерная база протяженностью 23 дня. Полученная ошибка прогноза относительного движения на момент сближения КА и Фобоса не превосходит 1.5 км по относительному положению и 0.4 м/с по относительной скорости, ошибка определения гравитационного параметра Фобоса не превышает 10% от его величины.

Для непосредственного сближения КА с Фобосом и обеспечения АСП высокоточными навигационными и баллистическими данными специальным образом выбрана КСО. Вопросы её выбора рассмотрены в первой главе диссертации.

Для определения и прогнозирования параметров относительного движения КА и Фобоса на КСО используется следующий состав навигационных измерений:

- доплеровские измерения радиальной скорости с измерительных пунктов в Уссурийске и Медвежьих Озёрах (по одному сеансу каждого измерительного пункта на каждом из 10 витков);

- три сеанса бортовых телевизионных наблюдений Фобоса;
- три сеанса измерения расстояния с борта КА до Фобоса с помощью лазерного высотомера.

Определение параметров относительного движения КА и Фобоса по указанному составу измерений на 4-суточном интервале позволяют прогнозировать относительное движение КА и Фобоса на сутки вперёд с ошибками 3 км по положению и 0.5 м/с по скорости.

Эти орбитальные данные движения КА по КСО, полученные Баллистическим центром, используются для расчёта параметров маневра перехода КА с КСО на траекторию спуска и посадки на поверхность Фобоса. Результаты расчёта закладываются с Земли на борт КА и реализуются в автономном режиме в сеансе спуска и посадки КА на поверхность Фобоса.

Посадка на Фобос отдельно рассмотрена во второй главе диссертации.

Старт с Фобоса представляет собой сложную динамическую операцию. Эскизным проектом предусмотрено, что он должен выполняться автоматически в заданное время. Это время задаётся перед началом сеанса посадки и может быть изменено в сеансе связи с КА, находящемся на поверхности Фобоса. При старте с Фобоса возвращаемый аппарат (ВА) не должен повредить станцию, остающуюся на поверхности Фобоса, должна быть исключена возможность столкновения с Фобосом. При выполнении таких динамических операций возрастает ошибка прогноза движения ВА. Поэтому должна быть предусмотрена возможность поиска ВА наземными станциями слежения после его старта с Фобоса. Вопросы старта с Фобоса рассмотрены в НТО [127 – НТО 5-10-05].

После старта с Фобоса возвращаемый аппарат (ВА) выходит на орбиту, именуемую базовой. На базовой орбите ВА должен безопасно существовать до начала маневров для отлёта к Земле. С учётом места посадки КА в качестве базовой орбиты выбрана круговая орбита, высота которой на 300 – 350 км ниже высоты орбиты Фобоса, а период обращения составляет 7.23 часа (на ~26 мин. меньше периода обращения Фобоса вокруг Марса). На поверхности Фобоса остается работающий аппарат, выполняющий научную программу исследования Фобоса.

Переход с базовой орбиты на траекторию полёта к Земле производится по трёхимпульсной схеме. Суммарная характеристическая скорость перехода с базовой орбиты на траекторию возврата к Земле составляет  $\sim 1770$  м/с, в том числе: 1-й импульс – 740 м/с, 2-й импульс – 120 м/с, 3-й импульс – 910 м/с.

Основной задачей, решаемой на участке полёта возвращаемого аппарата к Земле, является приведение спускаемого аппарата на заданный полигон посадки на территории страны и надёжное обнаружение этого аппарата. Схема полёта предполагает проведение пяти коррекций траектории.

Заключительная, пятая коррекция траектории проводится в диапазоне от 12 до 72 часов до встречи ВА с Землей. Ошибки приведения ВА к Земле не превышают по положению 30 км, ошибки прогнозирования точки посадки не превышают 3 км. Выбранная схема полёта ВА с учётом ошибок определения траектории ВА по данным наземных радиотехнических траекторных измерений, ошибок исполнения маневра перехода с орбиты ИСМ на траекторию перелёта к Земле и ошибок исполнения коррекций траектории решает поставленную задачу посадки спускаемого аппарата на заданный полигон.

Реализацию проекта планируется начать в окне стартов 2011 г. (октябрь – ноябрь).

Вопросы баллистики и навигации проекта «Фобос-Грунт» рассмотрены в работах [66 – Тучин, 2010; 67 – Тучин, 2002], а также в [124 – НТО 5-04-06; 127 – НТО 5-10-05].

#### **4.1.2 Российские проекты полёта к Луне**

Рассмотрим два проекта полёта к Луне, предусмотренные Федеральной космической программой России: проект «Луна-Ресурс» и проект «Луна-Глоб». В современном состоянии оба эти проекта предусматривают посадку на Луну. Динамические операции, необходимые для реализации проектов, с точки зрения баллистики и навигации, примерно одинаковые. Поэтому рассмотрим более подробно один проект: «Луна-Ресурс».

Проект «Луна-Ресурс» предполагает доставку лунохода на Луну в район Южного полюса. Схема экспедиции состоит из следующих этапов:

- выведение российского КА «Луна-Ресурс» и индийского орбитального КА на траекторию перелёта к Луне индийской РН;
- проведение траекторных измерений на траектории перелёта, определение параметров движения, расчёт и выполнение одной или двух (при необходимости) коррекций;
- торможение у Луны и переход КА на околокруговую полярную орбиту ИСЛ с высотой около 100 км над поверхностью;
- проведение на околокруговой орбите с высотой 100 км траекторных измерений, определение по ним параметров движения КА, расчёт и выполнение двух связанных коррекций, обеспечивающих выполнение посадки в заданную область;
- проведение траекторных измерений на околокруговой орбите ИСЛ после выполнения коррекций, определение параметров движения по этим измерениям, расчёт и выполнение орбитального маневра, обеспечивающего переход на предпосадочную орбиту с высотами апоселения и периселения 100 и 18 км соответственно, с угловой дальностью 8 – 10 градусов от периселения до точки посадки;
- проведение траекторных измерений на предпосадочной орбите ИСЛ, определение параметров движения и расчёт уставок на посадку;
- торможение и приведение КА в точку, расположенную примерно на высоте 2 км над точкой посадки, движение КА на участке прецизионного торможения, достижение поверхности Луны со скоростью, не превосходящей 3 м/с по вертикальной составляющей и 1 м/с — по горизонтальной;
- функционирование лунохода на поверхности Луны.

Масса посадочного аппарата (ПА) перед началом сеанса посадки составляет около 880 кг, перед прецизионным торможением — около 515 кг. Сухая масса ПА составляет около 450 кг. В [129 – НТО 5-018-09; 135 – НТО 5-02-09] рассмотрены вопросы баллистики и навигации проекта «Луна-Ресурс».

### **4.1.3 Полёт к точке $L_2$ системы Солнце – Земля**

Российский проект «Спектр-РГ» предусматривает полёт к точке  $L_2$  системы Солнце – Земля. Возможны две схемы полёта: с гравитационным маневром у Луны и прямой перелёт. Использование гравитационного маневра у Луны позволяет привести КА на гало-орбиту в окрестности точки  $L_2$  радиуса 330 тыс. км. Однако при этом протяжённость окна стартов невелика. Например, в декабре 2012 г. она составит всего 15 часов. Особенностью КА «Спектр-РГ» является использование двигательной установки, которая обеспечивает малую величину тяги. В результате создаваемые ускорения имеют столь малые величины, что нельзя использовать акселерометры для определения момента выключения двигательной установки по величине набранной характеристической скорости. Баллистико-навигационные вопросы проекта рассмотрены в [126 – НТО 5-05-09; 139 – НТО 5-02-10].

### **4.1.4 Проект полёта к Венере с целью доставки на её поверхность долгоживущей станции, баллонов в атмосферу Венеры и выхода орбитальной станции на орбиту искусственного спутника Венеры**

Проект полёта к Венере «Венера-Д» включен в Федеральную космическую программу. В задачи проекта входит комплексное исследование атмосферы облаков и взаимодействие атмосферы с поверхностью [23 – Засова, 2006 ; 24 – Засова, 2006 ]. Собранные зондом данные позволят получить информацию об эволюции Венеры и её климата и сопоставить эти процессы с аналогичными процессами на Земле и других планетах. Выведение космического аппарата в космос предполагается осуществить в 2016 – 2018 году. Планируется, что в состав КА войдут европейский орбитальный модуль, созданный на базе межпланетной станции «Venus Express», новый российский посадочный аппарат, который, возможно, будет содержать долгоживущий элемент с научной аппаратурой. На космическом аппарате предполагается установить небольшие зонды для исследования в атмосфере планеты. В состав КА также может быть включён японский аэростат. Этот аппарат

будет работать в подоблачной зоне на высоте около 35 км, где атмосфера имеет высокую температуру, и давление также достигает высоких значений.

Научные задачи проекта предъявляют высокие требования к навигационному обеспечению. На этапе подлёта к Венере КА должен выполнить ряд динамических операций: выполнить коррекцию траектории, чтобы обеспечить точное наведение зондов, далее отделить их и выполнить маневр перехода на пролётную траекторию с целью последующего торможения и перехода на орбиту искусственного спутника Венеры. В качестве рабочей орбиты КА предполагается полярная орбита с периодом около одних земных суток и высотой перицентра около 300 км.

Результаты исследований условий сброса японского аэростата [120 – Yamada, 2007] показали, что на высоте 200 км скорость входа должна составлять 11.5 км, а угол входа –  $15^\circ$ .

Чтобы обеспечить выполнение указанных выше динамических операций на участке подлёта к планете, определение орбиты КА после коррекции и маневра увода должно выполняться по короткой мерной базе (несколько дней). Для этого необходимо наряду с траекторными измерениями радиальной скорости и наклонной дальности иметь РСДБ измерения. Вопросы баллистики и навигации проекта «Венера-Д» рассмотрены в [141 – НТО 5-013-09].

#### **4.1.5 Проект полёта к Юпитеру с целью посадки КА на поверхность Европы, естественного спутника Юпитера (проект «Лаплас»)**

Целью проекта является посадка космического аппарата на поверхность естественного спутника Юпитера Европы. Полуось орбиты Европы составляет 670.9 тыс. км, период обращения вокруг Юпитера – 3.551810 земных суток, эксцентриситет – 0.0101, наклонение к экваториальной плоскости Юпитера –  $0.407^\circ$ . Экваториальный радиус Европы -  $1565 \pm 8$  км, масса –  $479.7 \pm 1.5 \cdot 10^{20}$  кг.

Перелёт к Юпитеру планируется осуществить с использованием ЭРДУ. Проектируемая траектория состоит из двух частей, разделяемых гравитационным маневром у Земли. Различные варианты параметров схемы перелёта рассмотрены в [33 – Константинов, 2002; 72 – Федотов, 2007]. Например, имеется вариант, в

котором первая часть перелёта Земля – Земля имеет длительность 450 суток, а вторая часть перелёта Земля – Юпитер 1030 суток. Пролёт над поверхностью Земли происходит на высоте около 800 км. В результате гравитационного маневра величина гелиоцентрической скорости КА увеличивается на 5.71 км/с. Асимптотическая скорость приведения в сферу действия Юпитера составляет около 5 км/с. Масса КА после отделения ЭРДУ – 4000 кг. Окна старта по этой схеме повторяются с периодом 399 суток.

Следует отметить, что Юпитер обладает мощным радиационным поясом, что необходимо учитывать при маневрах КА в поле его тяготения.

В [130 – НТО 5-012-09] и [68 – Тучин, 2010] рассмотрены вопросы баллистики и навигации этого проекта. В главе 6 на примере этого проекта рассмотрены вопросы навигации и управления при постоянно работающей электроракетной двигательной установке.

#### **4.1.6 Особенности баллистико-навигационного обеспечения полётов к дальним планетам**

К сожалению, в практике отечественной космонавтики нет полётов к дальним планетам. Поэтому воспользуемся опытом полётов, реализованных и реализуемых в США. Рассмотрим полёты космических аппаратов «Кассини», «New Horizons» и «Пионер-10, -11».

КА «Кассини» стартовал с Земли 15.10.1997 г. Совершив ряд гравитационных маневров у Земли, Венеры и Юпитера, КА (см. табл. 4.1) достиг Сатурна 01.07.2004. Спускаемый аппарат «Гюйгенс» отделился от основного КА 25.12.2004 и совершил посадку на поверхность Титана 14.01.2005.

**Таблица 4.1** – Гравитационные маневры на траектории перелёта КА «Кассини» к Сатурну

26.04.1998	–	гравитационный маневр в поле тяготения Венеры.
24.06.1999	–	гравитационный маневр в поле тяготения Венеры.
18.08.1999	–	гравитационный маневр в поле тяготения Земли.
30.12.2000	–	гравитационный маневр в поле тяготения Юпитера.

В работе [99 – Mitchell, 2007] рассматривается полёт КА «Кассини» на интервале с октября 2007 по июль 2008 г. В этот период времени КА «Кассини» выполнял научные измерения на орбите Сатурна. На интервале с 01.10.2007 г. по 01.08.2008 г. было выполнено 9 сближений с Титаном. В результате гравитационных маневров орбита КА была сильно изменена. Наклонение увеличено до  $75^\circ$ . Это сделано в интересах научных экспериментов, требующих пролётов вблизи полюса.

Вопросы навигационного обеспечения орбитального полёта КА «Кассини» рассмотрены в работе [103 – Pelletier, 2009]. Многократные сближения КА с Титаном поставили новые задачи в области навигации. Для достижения целей миссии КА должен был многократно сближаться с Титаном на расстояние менее 1300 км. Близкие прохождения КА от Титана позволили получить ряд важных научных данных о строении поверхности Титана, его атмосфере и гравитационном поле. Близкие сближения с Титаном позволили изменять орбиту КА так, как этого требовала научная программа. За счёт гравитационного маневра при близком прохождении от Титана скорость КА изменялась на величину около 800 м/с, что эквивалентно 800 кг затрат двухкомпонентного топлива (для сравнения: после выполнения маневра торможения и выхода на орбиту вокруг Сатурна запасы топлива составили 1200 кг).

После каждого сближения с Титаном выполнялось высокоточное определение орбиты КА с использованием всех данных о полученных возмущениях в процессе сближения. Это делалось в интересах управления полётом КА (наведение на новое сближение) и в интересах навигационной привязки научных данных. Отличительной особенностью навигационного обеспечения полёта КА «Кассини» являлась необходимость моделирования динамики Титана. Для достижения необходимых результатов в определении орбиты было необходимо моделировать и оценивать все известные возмущающие силы, действующие на КА. Для этих целей использовались измерения как служебных систем, так и научных приборов. Учитывались следующие гравитационные и негравитационные возмущения: гравитационное притяжение Сатурна и Титана с учётом их сжатия, гравитационное

притяжение Солнца и Юпитера, гравитационное притяжение других спутников Сатурна, атмосферное торможение Титана, возмущения, создаваемые работой системы управления, радиационное давление, создаваемое радиоизотопным термоэлектрическим генератором, давление солнечной радиации.

Определение параметров движения КА после сближения с Титаном выполнялось по наземным траекторным измерениям, выполняемым станциями DSN, расположенными в Голдстоуне, Канберре и Мадриде. Использовались когерентные измерения наклонной дальности и радиальной скорости в X-диапазоне. Для учёта негравитационных возмущающих сил бортовой компьютер сохранял измерения бортовых акселерометров в виде накопленных приращений скорости по трём осям. Разрешение передаваемых на Землю данных составляло 0.04 мм/с. При этом точность бортовых акселерометров была на уровне  $10^{-8}$  м/с<sup>2</sup>. Эти данные использовались на Земле при определении орбиты. В ходе полёта уточнялась плотность атмосферы, гравитационное сжатие Титана и другие параметры.

Проект «New Horizons» был выбран первым в новой космической программе, целью которой является изучение системы Плутон – Харон. Проектом предусмотрено после пролёта системы Плутон – Харон исследование объектов пояса Койпера на фазе расширенного проекта. КА «New Horizons» стартовал с Земли 19.01.2006. Систему Плутон – Харон планируется достичь 14.07.2015. Полёт предусматривал уже успешно выполненный гравитационный маневр при пролёте Юпитера 28.02.2007. После гравитационного маневра КА перешёл в дежурный режим. Ориентация обеспечивается пассивной закруткой. В этом режиме КА должен находиться до подлёта к системе Плутон – Харон.

Для навигации используются радиотехнические наземные траекторные измерения DSN и получаемые на борту навигационные изображения планет, мимо которых пролетает КА. В настоящее время КА находится на перелётной траектории в режиме закрутки. Для контроля состояния КА используются беззапросные доплеровские измерения. Эти измерения не используются в целях определения орбиты. Для определения орбиты с периодом 50 дней выполняются запросные

измерения. Проведение запросных измерений выполняется в сеансе контроля бортовых систем КА.

Во время сближения с Плутоном КА должен получить детальные научные наблюдения Плутона и его естественных спутников: Харона, Гидры и Никты. Навигационные проблемы при пролёте включают получение необходимой точности для привязки результатов научных измерений с учётом планирования затенений Плутоном и Хароном. Сближение будет происходить на расстоянии 32 а.е. от Земли. Для определения положения КА относительно системы Плутон – Харон должны быть использованы изображения Плутона и его естественных спутников. Первый интервал оптических наблюдений Плутона намечен в интервале от 350 до 343 суток до момента подлёта. По этим оптическим наблюдениям планируется уточнить эфемериды Плутона и Харона. Измерения проводятся дважды в сутки. В цикле измерений планируется получать до пяти изображений Плутона. Второй интервал оптических наблюдений начинается за 170 суток до подлёта. На этом интервале должны быть получены измерения для уточнения эфемерид Плутона и Харона и выполнены попытки получить засечки Гидры и Никты. Заключительный участок оптических наблюдений начинается за 100 дней до подлёта. На этом участке предусмотрено выполнение двух коррекций траектории. Наряду с навигационными изображениями Плутона используются навигационные изображения Харона и Гидры. Выполненный в [119 – Williams, 2009] ковариационный анализ показал, что ожидаемая среднеквадратическая ошибка приведения в картинной плоскости составляет около 80 км, а среднеквадратическая ошибка по времени достижения минимального расстояния – 100 с.

Космические аппараты «Пионер-10» и «Пионер-11» были запущены 2 марта 1972 г. и 5 апреля 1973 г. КА «Пионер-10» вышел на гиперболическую орбиту относительно Солнца после гравитационного маневра в сфере действия Юпитера. Научная программа была завершена 31 марта 1997 г., последние телеметрические данные с борта КА были получены 31 марта 1997 г. на расстоянии около 80 а.е. Последний сеанс связи с аппаратом состоялся 7 февраля 2003 г.

КА «Пионер-11» после двух гравитационных маневров при пролётах Юпитера и Сатурна вышел на гиперболическую орбиту относительно Солнца. Научная программа была завершена 30 сентября 1995 г. Последние телеметрические данные с борта КА были получены 1 октября 1990 г. на расстоянии 30 а.е. Связь с КА была потеряна в ноябре 1995 г. Космические аппараты «Пионер-10» и «Пионер-11» вышли за пределы Солнечной системы в различных направлениях. КА «Пионер-10» вышел за пределы Солнечной системы в направлении, противоположном направлению на центр Галактики со скоростью 12.2 км/с. КА «Пионер-11» покинул Солнечную систему со скоростью 11.6 км/с.

При обработке траекторных измерений космических аппаратов «Пионер-10» и «Пионер-11» был обнаружен эффект, названный «Аномалия “Пионеров”». Этот эффект рассмотрен в работах [117 – Turyshev, 2005; 116 – Turyshev, 2007].

КА «Пионер-10, -11» имели бортовое оборудование, способствующее проведению небесно-механических экспериментов. Это оборудование включало одноосную систему ориентации, которая не вносила возмущения в движение центра масс КА, надёжные источники электропитания на радиоизотопах и бортовой радиокomплекс, обеспечивающий высокоточные доплеровские траекторные измерения. Следует отметить, что КА «Вояджер-1, -2» и «Кассини» имели другую, трёхосную систему ориентации.

Для навигации КА «Пионер-10, -11» использовалась самая точная навигационная система на момент их запуска. Использовались запросные доплеровские измерения и измерения по схеме трёхпутевого Доплера. Использовался S-диапазон. Частота сигнала, передаваемого с наземной станции на борт КА, составляла  $\sim 2.11$  ГГц. Принятый на борту КА сигнал преобразовывался, его частота умножалась на коэффициент  $240/221$  так, что частота сигнала, излучаемого на Землю, составляла  $\sim 2.29$  ГГц. Стабильность частоты наземного генератора, используемого при измерениях доплеровского сдвига, составляла  $10^{-12}$ .

Анализ траекторных измерений, полученных с КА «Пионер-10, -11», показал наличие аномалии в доплеровском сдвиге частоты. Уход частоты от ожидаемого значения имеет вид линейной зависимости от времени с коэффициентом около

$-6 \cdot 10^{-9}$  Гц/с. Эта аномалия может быть интерпретирована, как наличие дополнительного ускорения, направленного в сторону Солнца, составляющего величину около  $(8.74 \pm 1.33) \cdot 10^{-10}$  м/с<sup>2</sup>. Наличие аномалии было подтверждено обработкой траекторных измерений четырьмя различными и независимыми навигационными программами.

Остается неясным, на каком расстоянии проявляется аномалия. Для КА «Пионер-10» аномалия имела место вплоть до расстояния 70 а.е. Для КА «Пионер-11» аномалия имела место на расстоянии 20 а.е.

Аномалия не была подтверждена при обработке информации других космических аппаратов: «Вояджер», «Галилео», «Улисс», «Кассини». Многие космические проекты дальнего космоса, которые рассматриваются в настоящее время, не предусматривают необходимую навигационную точность.

#### **4.1.7 Подготовка и проведение гравитационного маневра КА «Розетта»**

В работе [91 – Ferri, 2007] подробно рассмотрена подготовка к гравитационному маневру при пролёте Марса в феврале 2007 г КА «Rosetta». Полёт КА «Rosetta» начался 2 марта 2004 г. Целью полёта является полёт к комете «Герасимов-Герасименко». По расчётам КА должен сблизиться с кометой летом 2014 г. Должно быть обеспечено сближение с кометой и посадка модуля на её поверхность. Полёт КА «Rosetta» предусматривает выполнение четырёх гравитационных маневров: трёх у Земли и одного у Марса. Гравитационный маневр у Марса выполнялся на высоте 250 км от его поверхности. Маневр направлял движение КА в сторону Земли для следующего гравитационного маневра. От успеха выполнения этого маневра зависело успешное выполнение программы полёта. В результате гравитационного маневра скорость КА была уменьшена по модулю на 2.191 км/с и повернута на угол 1.857°. Гелиоцентрическая скорость после пролёта составила 21.883 км/с. Выполнение маневра предъявило высокие требования к навигации, т.к. пролёт происходил на высоте 250 км над поверхностью Марса. Были рассмотрены возможные моменты времени проведения коррекций: за две недели до

пролёта, за одну неделю, за три дня, за один день и, в случае нештатной ситуации, за 6 часов до пролёта. По результатам определения пролётной траектории точность приведения составила 8.3 км в картинной плоскости. Высота пролёта составила 250.6 км над сферой с радиусом, равным экваториальному радиусу Марса. Предельная ошибка определения высоты составила 1.1 км. Момент времени максимального сближения был определен как 01:57:59.28 25.02.2007 UTC с предельной ошибкой 0.02 с.

Ключевым моментом навигационной стратегии было использование измерений Delta-DOR (Delta Differential One-way Ranging measurement). Использовались станции DSN и ESA на интервале нескольких месяцев. СКО ошибок измерений станций DSN составило 0.5 наносекунды, а станций ESA 1 наносекунду.

#### **4.1.8 Проект полёта к Солнцу**

В качестве примера разработки перспективного КА можно рассмотреть КА, который создаётся с целью изучения Солнца [104 – Ронсу, 2007]. КА должен сблизиться с Солнцем на расстояние 0.22 а.е. При сближении не будет видимости с Земли, но научной аппаратурой должны быть проведены измерения, результаты которых позже должны быть переданы на Землю. Предусмотрено множество гравитационных маневров. Проект интересен тем, что вместе с его реализацией ESA рассчитывает получить новые технологии в космической технике.

### **4.2 Методы обеспечения навигации и управления КА дальнего космоса**

Этот раздел содержит описание основных динамических операций на участках перелёта к планетам с использованием ЖРД и ЭРДУ, при проведении гравитационных маневров и на орбитах искусственных спутников планет. Приведены соответствующие требования по точности навигации. Рассмотрены возможности автономной навигация по изображениям планет на участках перелёта от Земли к планете-цели.

При баллистико-навигационном проектировании космических полётов выполняется моделирование полёта и выполнения динамических операций.

#### **4.2.1 Управление и навигация на участках перелёта к планетам с использованием ЖРД**

Участок перелёта к планете начинается после перевода КА с промежуточной орбиты ИСЗ на гелиоцентрическую траекторию и заканчивается в сфере действия планеты. Цель БНО на участке перелёта КА к планете – обеспечить приведение аппарата в сферу действия планеты с заданными значениями параметров сближения. В ходе полёта выполняется ряд коррекций траектории с использованием ЖРД. Задача коррекции межпланетной траектории рассмотрена в работах [49 – Платонов, 1966; 50 – Платонов, 1967]. Отклонения фактических значений параметров сближения КА с планетой от значений, установленных программой полёта, и затраты характеристической скорости не должны превышать заданной величины.

В качестве параметров сближения КА с планетой, как правило, выбираются время  $\tau$  прохождения минимального расстояния КА от планеты и координаты вектора  $V$  – точки пересечения асимптотической скорости аппарата с картинной плоскостью [48 – Охоцимский, 1990]. Картинная плоскость определяется как плоскость, ортогональная входной асимптоте гиперболической траектории КА, построенной в момент прохождения минимального расстояния до планеты. Начало вектора  $V$  находится в центре масс планеты, а конец в точке пересечения входной асимптоты с картинной плоскостью.

Направления осей  $\xi$  и  $\eta$  картинной плоскости определяются единичными векторами  $e_\xi$  и  $e_\eta$ , которые определены формулами:

$$e_\eta = \frac{e_n \times v_\infty}{|e_n \times v_\infty|}, \quad e_\xi = e_n \times \frac{v_\infty}{|v_\infty|}, \quad (5.20)$$

где  $e_n$  – единичный вектор, направленный от центра планеты (или Луны) к её северному полюсу.

Координаты вектора  $B$  в этой системе координат обозначаются, как  $\xi = (B, e_\xi)$ ,  $\eta = (B, e_\eta)$ .

Предельные значения допустимых ошибок координат  $\xi, \eta$  обычно устанавливаются от 200 км до нескольких десятков км в зависимости от задач полёта. Если при переходе КА на орбиту искусственного спутника используется аэродинамическое торможение в атмосфере планеты, то требования к точности резко возрастают (для сближения с Марсом 3 – 5 км).

Ошибки приведения КА в сферу действия планеты складываются из ошибок определения и прогнозирования параметров движения КА и ошибок исполнения корректирующих маневров. Ошибки определения орбитальных параметров на траектории гелиоцентрического полёта существенно зависят от протяженности пассивного участка полёта между маневрами. Чем больше интервал измерений на пассивном участке измерений, тем выше точность определения параметров движения КА. В то же время затраты характеристической скорости возрастают по мере приближения времени проведения маневра к моменту сближения с планетой. Это учитывается при выборе времени проведения маневров.

Как правило, при полётах отечественных КА к Венере и Марсу на участке перелёта проводилось по три маневра. Самая большая, первая коррекция траектории устраняет ошибки, возникшие после выведения КА на промежуточную орбиту и его перевода на траекторию перелёта к планете. При прогнозировании в картинную плоскость эти ошибки обычно составляют сотни тысяч км. Величина корректирующего импульса составляет несколько десятков м/с. Время проведения 1-й коррекции – 7 – 10 суток после перехода на траекторию перелёта. Более позднее проведение приводит к возрастанию энергетических затрат, а более раннее – к снижению точности определения параметров движения. Время проведения второй коррекции может сильно варьироваться в зависимости от орбиты, сформированной в результате выполнения 1-й коррекции. В отдельных случаях необходимость проведения 2-й коррекции может отпасть. Третья коррекция проводится незадолго (от четырёх до десяти суток) до сближения с планетой.

Измерения траектории КА на гелиоцентрическом участке полёта проводятся двумя или тремя наземными измерительными станциями. Состав измерений: дальность, радиальная скорость (доплеровское смещение частоты сигнала), радиоинтерферометрические измерения со сверхдлинной базой (РСДБ).

На большом удалении от гравитирующих тел имеются два основных источника ошибок при моделировании движения КА – возмущающие ускорения, вызванные работой двигателей системы ориентации, и неопределённость величины воздействия давления солнечного излучения. В настоящее время для большинства КА заданная ориентация обеспечивается системой маховиков (электромаховичных исполнительных органов – ЭМИО), которая в рабочем режиме не оказывает возмущающего воздействия на поступательное движение КА. Однако в ходе полёта давление солнечного излучения по-разному действует на различные элементы поверхности КА, что приводит к возникновению моментов сил относительно центра масс аппарата. Длительное воздействие возмущающих моментов одного направления приводит к постоянному увеличению угловой скорости маховиков, что, в свою очередь, вызывает необходимость их разгрузки – уменьшения угловой скорости вращения путем включения реактивных двигателей системы ориентации. Отсутствие моментной схемы ориентации приводит к возмущению движению центра масс КА. Продолжительность сеанса разгрузки невелика (предположительно, менее пяти минут), поэтому возмущающие воздействия на движение центра масс аппарата могут рассматриваться как мгновенные импульсы изменения скорости, приложенные к середине интервала времени проведения сеанса. Для построения адекватной модели движения КА параметры этих импульсов необходимо возможно более точно оценивать с использованием всей доступной информации. Такой информацией могут служить как внешнетраекторные радиотехнические измерения дальности и радиальной скорости и РСДБ, так и оценки величины и направления импульсов, полученные в результате обработки телеметрической информации (ТМИ), полученной с борта аппарата. При этом наиболее важными для БНО являются данные об ориентации аппарата в ходе полёта, данные об угловой скорости вращения маховиков, данные о работе двигателей системы ориентации.

#### **4.2.2 Управление и навигация на участках перелёта к планетам с использованием ЭРДУ**

При управлении КА, оснащённом ЭРДУ, на участках перелёта к планетам планируется следующая технология управления КА. Управление тягой ЭРДУ выполняется бортовым компьютером по программе, передаваемой из наземного центра управления полётом. В центре управления полётом определяются параметры движения КА по данным наземных и бортовых траекторных измерений. По результатам определения параметров движения рассчитывается программа работы ЭРДУ на оставшийся участок полёта. Эта программа при необходимости может быть изменена на борту КА.

Траекторные измерения выполняются российскими станциями слежения в Медвежьих Озёрах и Уссурийске. Возможно привлечение станции слежения в Евпатории, которая должна в этом случае иметь такое же оборудование, как станции в Медвежьих Озёрах и Уссурийске. Используется X-диапазон. Выполняются запросные измерения радиальной скорости и наклонной дальности. Предельные ошибки измерений составляют 20 м по наклонной дальности и 0.2 мм/с по радиальной скорости. Предполагалось, что каждая станция может проводить до двух сеансов в сутки при наличии видимости.

Для определения орбиты могут быть использованы высокоточные акселерометры, установленные на борту КА в составе бесплатформенной инерциальной системы (БИБ). Измерения, получаемые от БИБ, обрабатываются на борту. В результате получается накопленная характеристическая скорость в направлении номинального вектора тяги и в направлениях, ортогональных ему. Результаты передаются на Землю и используются при определении орбиты. Оценки точности приведения КА к Юпитеру при использовании подобной технологии приведены в разделе 5.4.

#### 4.2.3 Управление и навигация при проведении гравитационных маневров

Проблемы управления и навигации рассмотрим на примере проектируемого полёта КА «Solar Orbiter», запуск которого намечен на 22.05.2015 [104 – Ponsy, 2007]. Полёт этого КА предусматривает ряд гравитационных маневров. Первый гравитационный маневр должен быть выполнен при пролёте Венеры 26.11.2015. Затем следует маневр, выполняемый 28.05.2016 двигателями КА. После этого выполняются четыре гравитационных маневра: два при пролёте Земли (08.10.2016 и 08.08.2018) и два при пролёте Венеры (09.10.2018 и 02.01.2020).

Для получения требований по точности к управлению и навигации на участке гравитационного маневра автором диссертации было выполнено моделирование полёта КА на участке от второго пролёта Земли (08.08.2018) до третьего пролёта Венеры (09.10.2018). В результате определены требуемые точности приведения КА к Венере, необходимые для успешного выполнения гравитационного маневра при её втором пролёте 09.10.2018. Цель этого гравитационного маневра состоит в увеличении наклона КА по отношению к эклиптике и уменьшении периода до величины, которая составляет  $2/3$  от периода обращения Венеры вокруг Солнца. Такие элементы орбиты КА должны обеспечить гравитационный маневр при следующем пролёте Венеры через три оборота КА вокруг Солнца. Элементы орбиты КА до и после гравитационного маневра в гелиоцентрической СК, оси которой направлены в соответствии с СК J2000, приведены в таблице 4.2.

В результате гравитационного маневра скорость КА должна быть уменьшена до расчётной величины. Для этого КА должен пройти через точку пересечения орбит КА и Венеры перед Венерой. Высота перицентра пролётной гиперболы должна составлять 1122 км. В результате гравитационного маневра КА сообщается импульс 4.148 км/с. Проекция вектора импульса на направление скорости в гелиоцентрической СК составляет  $-3.903$  км/с.

**Таблица 4.2** – Изменение элементов орбиты в гелиоцентрической СК, полученное вследствие гравитационного маневра при втором пролёте Венеры 2018/10/09

	До гравитационного маневра	После гравитационного маневра
Полуось, тыс. км	97334.959233	82579.749803
Эксцентриситет	0.559384	0.614306
Наклонение, град	20.55	17.70
Долгота восходящего узла, град	8.69	9.38
Аргумент перицентра, град	129.22	144.18
Период, сутки	191.696236	149.803049

Из-за ошибок приведения при пролёте КА Венеры его скорость будет изменена не на расчётную величину. Из-за этого не будут выполняться условия, необходимые для исполнения гравитационного маневра при следующем пролёте. Поэтому ошибки исполнения гравитационного маневра должны быть компенсированы коррекцией, выполняемой двигательной установкой КА. Величина характеристической скорости, необходимой для выполнения этой коррекции, зависит от ошибок исполнения гравитационного маневра, которые в свою очередь зависят от ошибок приведения.

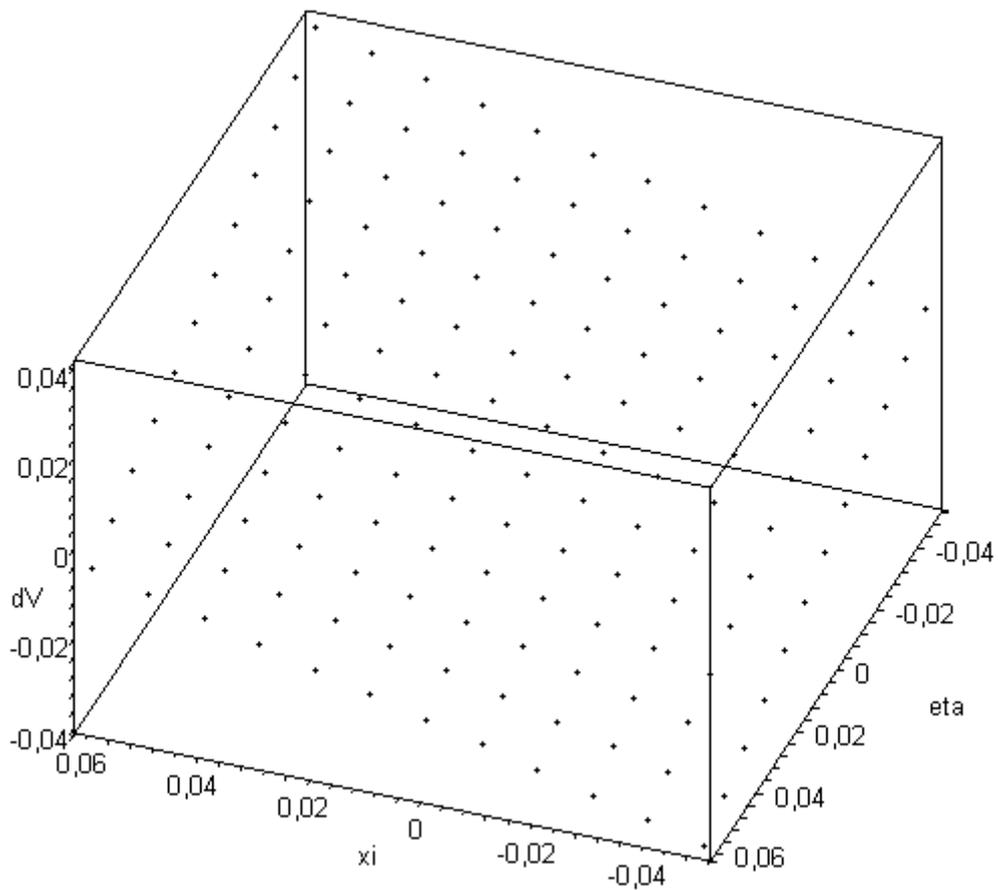
Ошибки приведения будем рассматривать в картинной плоскости [48 – Охоцимский, 1990]. На рис. 4.1 показаны разбросы дополнительных затрат характеристической скорости, необходимой для компенсации ошибок исполнения гравитационного маневра в зависимости от ошибок приведения. В случае если предельная ошибка приведения не превосходит 50 км, требуется не более 40 м/с дополнительной характеристической скорости на её исправление. Это составляет 1% от сообщаемого КА импульса и соответствует средним ошибкам исполнения импульсов, выполняемых двигателями КА. Предельные навигационные ошибки могут составлять лишь часть от ошибок приведения. Примем, что эта часть составляет не более половины всей ошибки. Тогда предельные навигационные ошибки не должны превосходить в картинной плоскости 25 км.

В случае если предельные ошибки приведения в картинной плоскости не превосходят 10 км, для их компенсации потребуется не более 15 м/с характеристической скорости. В свою очередь это потребует точности навигации, при которой ошибки в картинной плоскости не превзойдут величину 5 км.

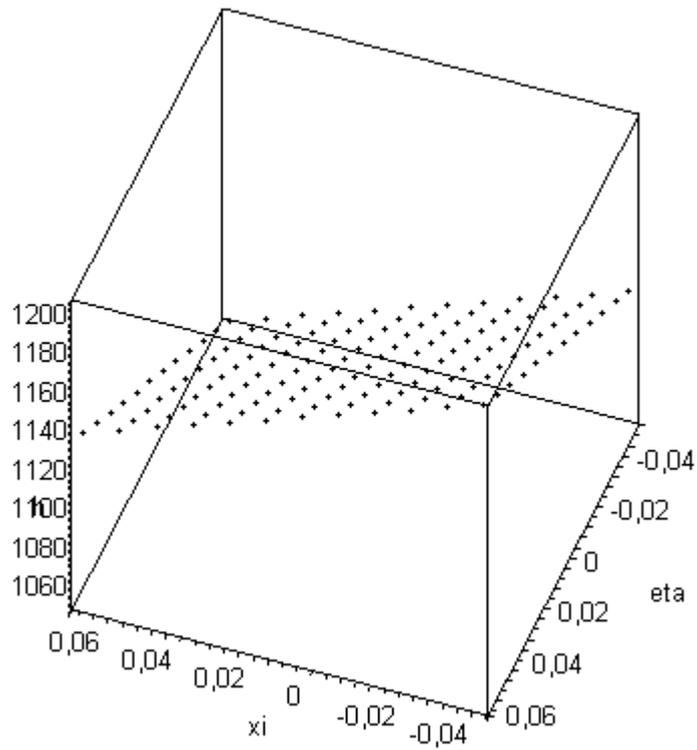
Разбросы значений высоты перицентра пролётной гиперболы в зависимости от ошибок приведения показаны на рис. 4.2. Если ошибки приведения по координатам картинной плоскости не превосходят величины 50 км, высота перицентра пролётной гиперболы лежит в диапазоне от 1046 км до 1200 км.

Разбросы значений расстояния перицентра при следующем, третьем пролёте КА Венеры в зависимости от ошибок приведения при втором пролёте показаны на рис. 4.3. Расстояние перицентра при третьем пролёте Венеры лежит в диапазоне от 3600 км до 2475000 км, если приведения по координатам картинной плоскости не превосходят величины 50 км.

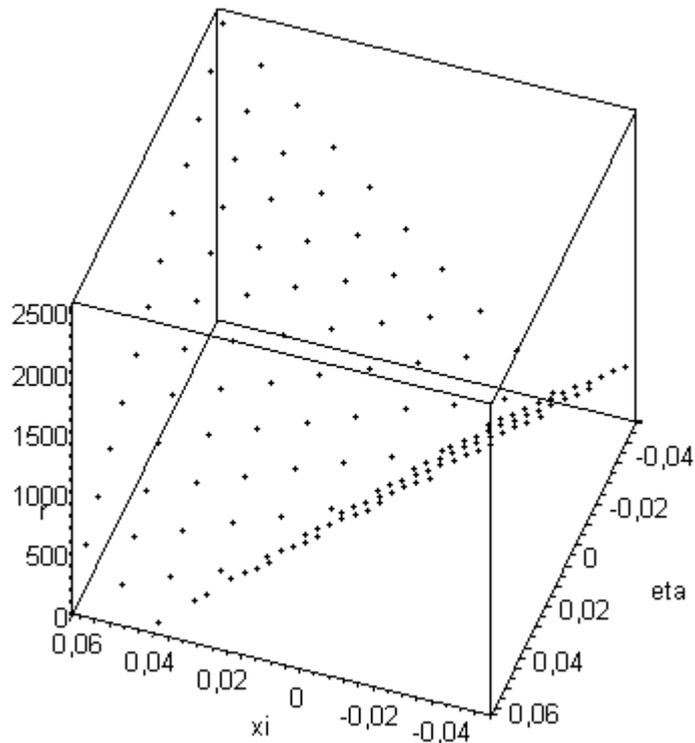
Следует отметить, что анализируемый гравитационный маневр предполагается проводить на достаточно большом расстоянии от поверхности планеты. Поэтому не учитываются ограничения по высоте атмосферы. При использовании Марса для выполнения гравитационного маневра, т.к. его масса меньше массы Венеры и Земли, требуется прохождение на высоте, сопоставимой с высотой атмосферы. Например, КА «Rosetta» в феврале 2007 г. выполнил гравитационный маневр на высоте 250 км над поверхностью Марса [91 – Ferri, 2007]. Исполнение подобных гравитационных маневров предъявляет ещё более высокие требования к навигации.



**Рисунок 4.1** – Разброс значений характеристической скорости (по оси  $Z$ , км/с) в зависимости от ошибок приведения в картинной плоскости по  $\xi$  и  $\eta$  в тыс. км



**Рисунок 4.2** – Разброс значений высоты перицентра при втором пролёте Венеры (по оси  $Z$ , км) в зависимости от ошибок приведения в картинной плоскости по  $\xi$  и  $\eta$  в тыс. км



**Рисунок 4.3** – Разброс значений расстояния перицентра при третьем пролёте Венеры (по оси  $Z$  в тыс. км) в зависимости от ошибок приведения в картинной плоскости (по  $\xi$  и  $\eta$ , тыс. км) при втором пролёте Венеры

#### **4.2.4 Автономная навигация по изображениям планет на участках перелёта от Земли к планете-цели**

На гелиоцентрическом участке траектории при большом удалении от планеты цели для навигации можно использовать наблюдения астероидов.

Точность определения углового положения астероида относительно звёзд составляет приблизительно 1 угловую секунду. Одновременное наблюдение двух астероидов, расположенных на расстоянии 20 млн км, позволяет определить положение КА в пространстве с точностью приблизительно 100 км. С учётом плотности заполнения окосолнечного пространства астероидами можно ожидать точности определения положения КА от 50 до 500 км, если предположить, что орбиты астероидов известны абсолютно точно. Наличие ошибок определения положения астероидов приводит к увеличению ошибок определения положения КА.

В качестве примера можно привести навигацию полёта американского экспериментального космического аппарата «Deep Space-1». «Deep Space-1» был

запущен 24 октября 1998 года ракетой-носителем Delta II, в рамках программы NASA «Новое Тысячелетие». Основной целью полёта было испытание образцов новых технических решений, способных значительно снизить стоимость и риски космических проектов.

С точки зрения навигации и управления наибольший интерес представляют ионный двигатель электростатического типа (ионизированный газ разгоняется в электростатическом поле, создавая реактивную тягу) и автономная система навигации Autonav, сводящая к минимуму необходимость корректировки движения аппарата с Земли, а также способная нацеливать на цель фотоаппаратуру зонда.

Аппарат «Deep Space-1» успешно выполнил основную цель полёта и начал выполнение дополнительных задач: сближение с астероидом Брайль и кометой Борелли, передав на Землю значительный объём ценных научных данных и изображений. Программа Deep Space завершилась 18 декабря 2001 года.

Двигатель аппарата «Deep Space-1» даёт в 10 раз больший удельный импульс (отношение импульса к массе использованного топлива), чем химический двигатель.

Система автоматической навигации Autonav, разработанная в Лаборатории реактивного движения NASA, работает с изображениями известных ярких астероидов. Астероиды во внутренней части Солнечной системы перемещаются относительно других тел с известными и предсказуемыми скоростями. Поэтому КА может определить их относительное положение путём отслеживания подобных астероидов на фоне звезд, которые, в используемом масштабе времени, считаются неподвижными. Два или более астероида позволяют КА определить свое положение при помощи триангуляции; два или более положениц во времени позволяют КА определить свою траекторию. Параметры движения КА в дальнем космосе в настоящее время определяются с использованием станций слежения сети Deep Space Network (DSN), которая перегружена. Поэтому использование системы Autonav снижает стоимость проектов и требования к DSN. Система автоматической навигации Autonav может использоваться и для отслеживания расположения тел относительно КА.

За время работы «Deep Space-1» был проверен в реальной работе ионный двигатель, который проработал 670 дней, и который может быть использован для возвращения образцов с Марса. Была проверена система автономной навигации, программное обеспечение которой смогло без вмешательства человека корректировать курс аппарата, пользуясь изображениями звёзд и астероидов, передаваемыми бортовой камерой слежения.

Особенностью такого рода навигации является возможность практически мгновенного получения положения КА в пространстве с относительно невысокой точностью. Фазовый вектор КА (шестимерный вектор, определяющий положение КА в пространстве и вектор его скорости) можно получить по данным измерений на коротком интервале. Учитывая сказанное, навигацию с использованием телевизионных изображений астероидов целесообразно применять в условиях полёта КА с двигателем малой тяги, при наличии значительных непредсказуемых возмущений, не позволяющих проводить обработку измерений на протяжённом интервале времени. При этом система обеспечения навигации должна иметь наряду с автономной оптической навигационной системой (АОНС) не менее одной наземной станции слежения, способной принимать телеметрическую информацию, выдавать на борт аппарата команды и проводить траекторные измерения дальности и радиальной скорости, обеспечивающие надёжное резервирование АОНС.

При сближении КА с планетой, её спутником, астероидом или кометой основное требование, предъявляемое к навигации, – обеспечить высокую точность определения и прогнозирования положения КА относительно центра масс планеты-цели (её спутника, астероида или кометы). Во многих случаях возможность выполнения этого требования определяет успешное решение задачи всего проекта.

На изображениях, полученных бортовой телевизионной камерой с относительно небольшого расстояния, небесное тело имеет конечные размеры (в отличие от точечных изображений удалённых объектов). В этих условиях существенным фактором, влияющим на точность навигации, является адекватное моделирование фигуры тела и характерных точек его поверхности. Определение параметров движения КА относительно небесного тела проводится в два этапа.

На первом этапе осуществляется предварительная обработка телевизионных (ТВ) снимков: моделируются условия проведения ТВ-снимка и формируется расчётное изображение небесного тела. Модель изображения может быть полной, то есть давать расчётную яркость каждой точки (пикселя) цифрового представления ТВ-снимка, или содержать только характерные, то есть наиболее существенные и информативные элементы изображения – контур небесного тела, терминатор, опорные точки поверхности (вершины гор, кратеры и т.п.). Как правило, в первом случае обработка проводится автоматически, а во втором – интерактивно с участием оператора. В результате первичной обработки, проведённой в интерактивном или автоматическом режиме, для каждого ТВ-изображения определяется прямое восхождение  $\alpha$  и склонение  $\delta$  центра масс небесного тела относительно осей инерциальной системы координат, начало которой совпадает с центром масс КА.

На втором этапе проводится совместное определение параметров движения КА и небесного тела по совокупности траекторных измерений дальности, радиальной скорости, проведённых наземными станциями слежения и автономных ТВ измерений, представленных угловыми координатами прямого восхождения  $\alpha$  и склонения  $\delta$ , полученными в результате первичной обработки изображений. Наряду с этими видами измерений к обработке могут быть привлечены измерения высоты КА над поверхностью цели, выполненные с борта КА лазерным локатором. Определение указанных параметров проводится методом максимального правдоподобия путем минимизации функционала, представляющего собой сумму взвешенных невязок бортовых оптических, лазерных и наземных траекторных измерений.

#### **4.2.5 Управление и навигация на орбитах искусственных спутников планет**

Основная задача навигации на орбитах искусственных спутников планет – обеспечение высокой точности определения и прогнозирование параметров движения КА. От точности прогнозирования параметров движения КА зависит безопасность полёта, длительность активного существования КА (возможность

выполнения маневров и поддержание заданных значений орбитальных параметров), высокоточная привязка данных телеметрии научных экспериментов.

Наличие негравитационных возмущений, связанных с работой двигателей системы ориентации, большая удалённость КА от наземных измерительных средств, неточность знания параметров модели движения, в частности нецентрального поля тяготения и эфемерид планеты, затрудняет решение задачи высокоточного определения орбитальных параметров движения КА.

В настоящее время эфемериды внутренних планет Солнечной системы: Меркурия, Венеры, Земли и Марса – известны с высокой точностью. Ошибки гелиоцентрического положения центров масс этих планет, полученные на основе наиболее точных теорий движения, разработанных в Лаборатории реактивного движения США (DE421 и более поздние версии), не превышают 1 – 2 км. Ошибки определения гелиоцентрического вектора скорости не превышают сотых долей мм/сек. Из-за большой удалённости возмущающих тел (Солнца и планет) эти ошибки практически не влияют на расчёт планетоцентрического движения КА. Тем не менее, неточность знания эфемерид планеты может оказаться одним из источников ошибок при определении параметров планетоцентрического движения КА. Причина этого состоит в том, что вектор состояния планеты относительно Земли непосредственно используется при вычислениях расчётных значений измерений. Поэтому ошибки эфемерид искажают расчётные значения измерений наклонной дальности и радиальной скорости. Для измерений радиальной скорости это искажение складывается из двух источников – ошибки вычисления скорости планеты относительно Земли и ошибки вычисления единичного вектора Земля – планета. Оба эти фактора малы по сравнению с ошибками измерений радиальной скорости.

Для измерений дальности ошибки относительного положения Земли и планеты на два порядка превышают ошибки измеренных значений, составляющих 20 м. Это делает невозможным использование измерений дальности на участке ареоцентрического движения КА.

Изложенные обстоятельства давно обнаружены и учитываются при БНО полётов искусственных спутников Луны, Венеры и Марса: Как правило, для определения орбитального движения этих КА используются только измерения радиальной скорости, а измерения дальности отбрасываются. Следует отметить, что измерения дальности имеют значительно более высокую информационную ценность, чем измерения радиальной скорости. Поэтому в мировой практике они широко используются для определения орбитальных параметров планет по данным траекторных измерений искусственных спутников.

Учитывая сказанное, на орбитах искусственных спутников планет должна быть предусмотрена возможность одновременного уточнения параметров планетоцентрического движения КА, гелиоцентрического движения Земли и гелиоцентрического движения планеты. Включение в число уточняемых параметров шести дополнительных параметров, определяющих гелиоцентрическое движение Земли, и шести параметров, определяющих гелиоцентрическое движение планеты, приводит к необходимости привлечения радиолокационных измерений планеты с наземных антенн в период пребывания КА на орбите искусственного спутника планеты.

Следует отметить, что из-за большого удаления планеты от Земли определение орбиты КА должно проводиться по достаточно протяжённой базе измерений, поскольку для определения всех шести параметров орбитального движения линия визирования Земля – планета должна ощутимо изменить свое направление. Как показывает практика, для надёжного определения орбиты протяжённость пассивного движения спутника должна составлять не менее 1 – 2 недель. В то же время увеличение мерной базы приводит к накоплению ошибок модели (ошибки модели нецентрального гравитационного поля планеты, неучтённые микроускорения, вызванные работой двигателей системы ориентации, и т.п.). Одновременное уточнение орбитального движения КА и гелиоцентрических параметров Земли и планеты дает возможность привлечь для определения орбиты КА измерения РСДБ, что снимает необходимость ожидать смещения направления линии визирования.

Таким образом, на орбите искусственного спутника планеты возможны два варианта решения задачи определения параметров орбитального движения КА:

1) Определение шести элементов орбиты КА и необходимых дополнительных параметров используемой модели движения (например, коэффициент светового давления, параметры микроускорений и т.п.). В этом случае можно использовать только измерения радиальной скорости.

2) Одновременное уточнение шести элементов орбиты КА, дополнительных параметров модели, параметров гелиоцентрического движения Земли и параметров гелиоцентрического движения планеты. В этом случае наряду с измерениями радиальной скорости КА, возможно использование измерений дальности и измерений РСДБ. Такая схема обеспечивает возможность значительного повышения точности определения планетоцентрического положения КА, но требует привлечения данных радиолокации планеты с Земли в период пребывания КА на орбите искусственного спутника.

### **4.3 Обобщённая баллистическая задача**

Конкретные задачи проектов, рассмотренных в этой главе, соответствуют следующей обобщённой задаче.

После выполнения динамических операций имеется область ошибок приведения КА к цели, например, приведение КА к планете или выход над заданной точкой спутника планеты в заданное время для начала сеанса посадки. В связи с этим следует определить требования к средствам наземных траекторных измерений: точности, которые должны обеспечивать средства, и их территориальное размещение. Далее следует выбрать интервалы проведения навигационных сеансов, число коррекций, моменты проведения коррекций с учётом ошибок их исполнения и навигационных ошибок.

Ключевым моментом решения баллистической задачи является гарантированная оценка погрешностей знания параметров движения. При этом ошибки приведения КА к цели и затраты характеристической скорости должны удовлетворять заданным ограничениям.

Например, увеличение интервала выполнения траекторных измерений позволяет уменьшить навигационную ошибку, но приводит к увеличению затрат характеристической скорости. Заблаговременное проведение коррекции при подлете к планете-цели, позволяет сократить затраты характеристической скорости, но может привести к большим ошибкам прилёта, т. к. с течением времени возрастает отклонение от идеальной траектории, получаемое от ошибок исполнения коррекции. Следует также отметить эффект уменьшения навигационных ошибок по мере приближения к планете-цели, который обусловлен повышением информативности наземных траекторных измерений при достижении КА сферы действия планеты. Предлагаемый метод гарантированной оценки точности решения обобщённой баллистической задачи рассмотрен в пятой главе.

## **Глава 5    Анализ точности приведения КА к Луне и планетам**

Успешное выполнение задач полёта во многом определяется тем, насколько точно выполнены заданные требования по приведению КА к планете-цели. Требования по точности приведения определяются задачами проекта и рассмотрены в четвертой главе. Фактическая точность приведения КА к планете-цели определяется ошибками прогнозирования параметров движения, ошибками исполнения маневров или коррекций, а также неучтёнными возмущениями в движении центра масс КА.

Разработанные методы опираются на опыт баллистико-навигационного обеспечения полетов к Луне [5 – Аким, 1966], [6 – Аким, 1984], [7 – Аким, 1983], [8 – Аким, 1977], [22 – Егоров, 1980], к Венере [1 – Абрамович, 1976], [2 – Абрамович, 1979], [4 – Агеева, 1983], [11 – Аким, 1979], [34 – Котельников, 1989] и Марсу [26 – Иванов, 1987].

Результаты, представленные в данной главе, получены на основе общего метода и описаны в разделах анализа точности определения и прогнозирования параметров движения КА в проекте «Фобос-Грунт» [61 – Тучин, 2009; 66 – Тучин, 2010; 67 – Тучин, 2002, 113 – Tuchin, 2004]. Эти методы применимы для анализа точности определения и прогнозирования параметров движения КА в полётах к Луне, планетам и малым телам Солнечной системы и были использованы при подготовке научно-технических отчётов [122 – НТО 5-14-04; 124 – НТО 5-04-06; 132 – НТО 5-31-07] по проекту «Фобос-Грунт»; [128 – НТО 5-06-08; 135 – НТО 5-02-09] по проектам полёта к Луне; [141 – НТО 5-013-09] по проекту «Венера-Д».

Метод основан на комбинированном применении метода ковариационного анализа и метода статистических испытаний. Для оценки навигационных ошибок применяется ковариационный анализ. Влияние ошибок исполнения определяется методом статистических испытаний. Пусть заданы моменты проведения коррекций и исходное множество ошибок, например, после выхода на отлётную траекторию от

Земли или после выхода на орбиту искусственного спутника Луны или планеты. Выполним расчет навигационных ошибок на момент проведения первой коррекции с использованием опорной траектории. Свяжем каждую реализацию ошибки по целевым параметрам с отклонением вектора скорости реализовавшейся траектории от вектора скорости опорной траектории на момент задания исходного множества ошибок. Разобьем множество ошибок на ячейки по значениям ошибок целевых параметров. Каждую ячейку будем представлять одной или несколькими реализациями. Выполним прогноз движения КА на момент проведения первой коррекции по выбранным представителям каждой ячейки, далее выполним расчёт коррекции и искадим его навигационными ошибками и ошибками исполнения. В результате получено множество ошибок на момент проведения первой коррекции и максимальные затраты характеристической скорости на её проведение. Далее переходим ко второй коррекции и последующим коррекциям. После выполнения расчётов по последней коррекции получаем суммарные максимальные затраты характеристической скорости и оценку ошибок приведения. Выполняя расчёты по описанному выше методу, получаем характеристики рассматриваемой схемы проведения коррекций: точность приведения и затраты характеристической скорости. Далее, варьируя числом коррекций и моментами их исполнения, получаем приемлемую схему.

Для применения метода необходимо иметь функциональную связь ошибок по целевым параметрам с отклонением вектора скорости от его значения по опорной траектории. Например, при решении задачи приведения КА к Луне или планете – эта функциональная связь определяется зависимостью значений параметров картинной плоскости от компонент вектора скорости. При решении задач приведения КА на гало-орбиту вокруг точки  $L_2$  эта зависимость определяется зависимостью от вектора скорости параметров, определяющих геометрию гало-орбиты. Далее работа метода показана на задачах приведения КА к Луне или планете.

## **5.1 Методика и вычислительный алгоритм оценки точности определения и прогнозирования параметров движения КА по наземным траекторным измерениям**

При построении моделей и выполнении расчётов предполагалось, что для определения параметров движения в случае КА с ЖРД используется классический метод, описанный в работе [12 – Аким, 1963], а в случае КА с ЭРДУ – методы, описанные в главе 3.

При построении моделей и выполнении расчётов предполагалось, что измеряемыми параметрами являются наклонная дальность и радиальная скорость [3 – Агаджанов, 1969; 9 – Аким, 1996; 123 – НТО 5-016-09; 15 – Берке, 1985; 16 – Брумберг, 1979; 17 – Брумберг, 1972; 18 – Брумберг, 1981; 30 – Кислик, 1980; 45 – Молотов, 2004; 64 – Тучин, 2002; 65 – Тучин, 2002; 73 – Чаплинский, 1985].

Для космических полётов КА с ЖРД имеются следующие источники ошибок прогноза параметров движения КА:

- случайная составляющая ошибок измерений радиальной скорости и наклонной дальности;
- систематическое смещение величины радиальной скорости и наклонной дальности за время сеанса измерений;
- неопределённость знания положения наземного измерительного пункта;
- неопределённость знания параметров ионосферы и тропосферы в принятых моделях измерений для случаев работы с учётом и без учёта калибровки по сигналам навигационных спутников;
- неопределённость коэффициента светового давления.

Модели движения КА с ЖРД и ЭРДУ отличаются моделями шума, воздействующего на движение КА. В случае ЖРД – этот шум обусловлен наличием небольших по величине ( $10^{-9} - 10^{-7}$  мм/с<sup>2</sup>) негравитационных ускорений, вызванных неконтролируемыми реактивными силами. В случае ЭРДУ – это ошибки по направлению ( $1^\circ$ ) и величине вектора тяги (5% от величины).

Ковариационная матрица ошибок определения вектора состояния вычисляется по формуле:

$$K(t) = K_0(t) + \Delta K_b(t) + \Delta K_a(t) + \Delta K_t(t) + \Delta K_i(t), \quad (5.1)$$

где

- $K_0(t)$  – ковариационная матрица ошибок, обусловленная неучтёнными ускорениями и случайными составляющими ошибок измерений;
- $\Delta K_b(t)$  – поправка на ошибки, обусловленные систематическими составляющими ошибок измерений;
- $\Delta K_a(t)$  – поправка на ошибки, обусловленные ошибками привязки фазового центра антенны;
- $\Delta K_t(t)$  – поправка на ошибки, обусловленные тропосферной составляющей ошибок измерений;
- $\Delta K_i(t)$  – поправка на ошибки, обусловленные ионосферной составляющей ошибок измерений.

Ковариационная матрица  $K(t)$  используется для расчёта ковариационной матрицы ошибок прогноза. Расчёт составляющих ковариационной матрицы ошибок определения рассмотрен в пунктах 5.1.1. – 5.1.5. Алгоритм расчёта ковариационной матрицы ошибок прогноза рассмотрен в п. 5.1.6.

### 5.1.1 Расчёт ковариационной матрицы ошибок определения вектора состояния, обусловленных неучтёнными ускорениями и случайными составляющими ошибок измерений

Движение КА в условиях неопределённости возмущающих ускорений, обусловленных ошибками модели давления солнечной радиации и наличием негравитационных ускорений, описывается стохастическим дифференциальным уравнением:

$$dx = F(t, x)dt + B(t)dw, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{xs}(t) & 1 & 0 & 0 \\ a_{ys}(t) & 0 & 1 & 0 \\ a_{zs}(t) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

где

- $x$  – вектор состояния КА в СК J2000;
- $F(t, x)$  – шестимерная вектор-функция, описывающая модель сил, действующих на КА, включая центральную и нецентральную составляющие гравитационного поля Земли, притяжение Луны, Солнца и планет, номинальное давление солнечной радиации;
- $B(t)$  – матрица порядка  $6 \times 4$ , описывающая воздействие неучитываемых возмущающих ускорений;
- $(a_{xs}(t), a_{ys}(t), a_{zs}(t))$  – вектор номинальных ускорений, обусловленных давлением солнечной радиации;
- $w(t)$  – четырехмерный случайный процесс с независимыми приращениями, производная которого представляет белый шум  $\xi(t)$  с нулевым

математическим ожиданием и заданной матрицей интенсивности  $Q(t)$

Матрица интенсивности  $Q$  имеет вид:

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_s^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{wx}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{wy}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{wz}^2 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

где  $\sigma_s$  – отношение неучтённой части давления солнечной радиации к его номинальному значению;  $\sigma_{wx}, \sigma_{wy}, \sigma_{wz}$  – СКО негравитационных ускорений.

Начальные условия для системы (5.2) задаются априорным вектором  $x_A$  и его ковариационной матрицей  $K_A$ .

В моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_N$  производятся измерения функций  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$ . Измеренное значение функции  $\psi_i$  обозначим через  $(\psi_i)_{\text{obs}}$ . Для каждого момента времени  $t_i$  справедливо:

$$(\psi_i)_{\text{obs}} = \psi_i(t_i, x(\cdot)) + \eta_i \quad (5.4)$$

где  $\eta_i$  – случайная величина, имеющая нулевое математическое ожидание и СКО  $\sigma_i$ ;  $\psi_i(t_i, x(\cdot))$  – расчётный аналог измерения  $i$ .

Запись в качестве параметра  $x(\cdot)$  функции  $\psi_i$  означает, что функция  $\psi_i$  зависит не от мгновенного значения вектора состояния, а от функции  $x(t)$ , которая является решением уравнения (5.2).

Измеряемые функции наклонной дальности  $\psi_D(\cdot)$  и радиальной скорости  $\psi_V(\cdot)$  [65 – Тучин, 2002] представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi_D &= \frac{1}{2} \left( |r(t_2) - r_S(t_1)| + |r(t_2) - r_R(t_3)| \right), \\ \psi_V &= \frac{1}{2} \left( \frac{(r(t_2) - r_S(t_1), v(t_2) - \dot{r}_S(t_1))}{|r(t_2) - r_S(t_1)|} + \frac{(r(t_2) - r_R(t_3), v(t_2) - \dot{r}_R(t_3))}{|r(t_2) - r_R(t_3)|} \right), \end{aligned} \quad (5.5)$$

где

- $t_3$  – момент регистрации сигнала на приёмной антенне;
- $t_1$  – момент излучения сигнала с передающей антенны;
- $t_2$  – момент переизлучения сигнала с борта КА;
- $r_{\text{rcv}}(t_3), \dot{r}_{\text{rcv}}(t_3)$  – векторы положения и скорости приёмной антенны в момент регистрации сигнала  $t_3$ ;
- $r_{\text{snd}}(t_1), \dot{r}_{\text{snd}}(t_1)$  – векторы положения и скорости передающей антенны в момент излучения сигнала  $t_1$ ;
- $(r(t_2), v(t_2))^T = x(t_2)$  – вектор состояния КА в момент переизлучения сигнала  $t_2$ .

Моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  определяются из уравнений:

$$t_2 = t_3 - \frac{|r(t_2) - r_{\text{snd}}(t_1)|}{c} - \Delta D_{2R}, \quad t_1 = t_2 - \frac{|r(t_2) - r_{\text{rcv}}(t_1)|}{c} - \Delta D_{1R},$$

где релятивистские поправки  $\Delta D_{1R}$  и  $\Delta D_{2R}$  вычисляются по формулам:

$$\Delta D_{1R} = \frac{\mu_S}{c^2} \ln \frac{|r(t_2)| + |r_{\text{snd}}(t_1)| + |r(t_2) - r_{\text{snd}}(t_1)|}{|r(t_2)| + |r_{\text{snd}}(t_1)| - |r(t_2) - r_{\text{snd}}(t_1)|},$$

$$\Delta D_{2R} = \frac{\mu_S}{c^2} \ln \frac{|r(t_2)| + |r_{\text{rcv}}(t_3)| + |r(t_2) - r_{\text{rcv}}(t_3)|}{|r(t_2)| + |r_{\text{rcv}}(t_3)| - |r(t_2) - r_{\text{rcv}}(t_3)|}.$$

Для расчёта ковариационной матрицы оценки вектора состояния используем метод мешающих параметров, описанный в главе 3 и который целесообразно применять, когда точность и состав измеряемых функций не позволяют оценивать параметры шума. В качестве оцениваемого вектора состояния выбран вектор состояния на конец мерной базы. Неучтённый шум приводит к увеличению ошибок модели по мере перемещения от конца мерной базы к её началу. Нарастающие ошибки модели учитываются в весовой матрице измерений. Расчёт ковариационной матрицы ошибок определения вектора состояния  $K_0(t_N)$  производится методом, изложенным в четвёртом разделе четвёртой главы. По формулам (4.52–54):

$$K(t_N) = (B^T K^{-1} B)^{-1}, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \Phi(t_1, t_N) \\ \mathbf{H}_2 \Phi(t_2, t_N) \\ \dots \\ \mathbf{H}_N \Phi(t_N, t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} c_{11} + \sigma_1 & c_{12} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} + \sigma_2 & \dots & c_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{NN} + \sigma_N \end{bmatrix},$$

где

$\mathbf{H}_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}$  – вектор-строка частных производных измеряемой функции по вектору состояния на момент времени  $t_2$ , соответствующему моменту времени измерения  $t_3$ ;

$\Phi(t, \tau)$  – матричная функция, являющаяся решением уравнения в вариациях для уравнения (5.2):  $\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \Phi(t, t_0)$ ,  $\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{E}$ ; (где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица;

$$c_{ij} = \mathbf{H}_i \mathbf{I}_i \Phi^T(t_j, t_i) \mathbf{H}_j^T;$$

$$\mathbf{I}_i = \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s) \mathbf{B}(s) \mathbf{Q} \mathbf{B}^T(s) \Phi^T(t_i, s) ds;$$

Вектор-строка частных производных измеряемой функции и решение уравнения в вариациях вычисляются вдоль опорного решения уравнения (5.2), полученного в условиях отсутствия шума, т.е.  $\xi \equiv 0$ .

Для вычисления интеграла  $\mathbf{I}_i$  используется следующее рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{i+1} &= \int_{t_N}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, s) \mathbf{B}(s) \mathbf{Q} \mathbf{B}^T(s) \Phi^T(t_{i+1}, s) ds = \\ &= \Phi(t_{i+1}, t_i) \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s) \mathbf{B}(s) \mathbf{Q} \mathbf{B}^T(s) \Phi^T(t_i, s) ds \Phi^T(t_{i+1}, t_i) + \\ &+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, s) \mathbf{B}(s) \mathbf{Q} \mathbf{B}^T(s) \Phi^T(t_{i+1}, s) ds = \\ &= \Phi(t_{i+1}, t_i) \mathbf{I}_i \Phi^T(t_{i+1}, t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, s) \mathbf{B}(s) \mathbf{Q} \mathbf{B}^T(s) \Phi^T(t_{i+1}, s) ds. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Частные производные измеряемой функции наклонной дальности и радиальной скорости вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi_D}{\partial(\mathbf{r}(t_2))} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}_{\text{snd}}(t_1)}{\Psi_{D1}} + \frac{\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}_{\text{rcv}}(t)}{\Psi_{D2}} \right), \\ \frac{\partial \Psi_D}{\partial(\mathbf{v}(t_2))} &= (0, 0, 0),\end{aligned}\tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi_v}{\partial(\mathbf{r}(t_2))} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\Psi_{D1}} \left( (\mathbf{v}(t_2) - \dot{\mathbf{r}}_{\text{snd}}(t_1)) - \frac{\Psi_{v1}}{\Psi_{D1}} (\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}_{\text{snd}}(t_1)) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Psi_{D2}} \left( (\mathbf{v}(t_2) - \dot{\mathbf{r}}_{\text{rcv}}(t)) - \frac{\Psi_{v1}}{\Psi_{D2}} (\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}_{\text{rcv}}(t)) \right) \right), \\ \frac{\partial \Psi_v}{\partial(\mathbf{v}(t_2))} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}_{\text{snd}}(t_1)}{\Psi_{D1}} + \frac{\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}_{\text{rcv}}(t)}{\Psi_{D2}} \right),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Psi_{D1} &= |\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}_{\text{snd}}(t_1)|, \quad \Psi_{D2} = |\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}_{\text{rcv}}(t)|, \\ \Psi_{v1} &= \frac{(\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}_{\text{snd}}(t_1), \mathbf{v}(t_2) - \dot{\mathbf{r}}_{\text{snd}}(t_1))}{\Psi_{D1}}, \quad \Psi_{v2} = \frac{(\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}_{\text{rcv}}(t), \mathbf{v}(t_2) - \dot{\mathbf{r}}_{\text{rcv}}(t))}{\Psi_{D2}}.\end{aligned}$$

### 5.1.2 Поправки на ошибки, обусловленные систематическими составляющими ошибок измерений

Матрица поправок  $\Delta \mathbf{K}_b(t_N)$  на ошибки, обусловленные систематическими составляющими ошибок измерений, вычисляется как разность между ковариационной матрицей ошибок оценки вектора состояния, обусловленных систематической и случайной составляющими ошибок измерений, и ковариационной матрицей ошибок оценки вектора состояния, обусловленных только случайными составляющими ошибок измерений.

Для вычисления ковариационной матрицы оценки вектора состояния, обусловленных систематической и случайной составляющими ошибок измерений, рассмотрим расширенный вектор состояния:  $\mathbf{y}(t) = (\mathbf{x}^T(t), b_1, b_2, \dots, b_N)$ . Этот вектор наряду с вектором состояния КА содержит  $N$  компонент – систематические



Ковариационная матрица  $K_p$  оценки вектора состояния, обусловленная только случайными ошибками измерений, вычисляется по известной формуле:

$$K_p = \left( \Phi(t_N, t_0) K_A \Phi^T(t_N, t_0) + \sum_{i=1}^N \sigma_i \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x(t_N)} \right)^T \cdot \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x(t_N)} \right) \right)^{-1}. \quad (5.12)$$

Матрица поправок  $\Delta K_b(t_N)$  вычисляется как:

$$\Delta K_b(t_N) = K_b - K_p. \quad (5.13)$$

### 5.1.3 Поправки на ошибки, обусловленные ошибками привязки фазового центра антенны

Матрица поправок  $\Delta K_a(t_N)$  на ошибки оценки вектора состояния, обусловленные ошибками привязки фазового центра антенны, вычисляется как разность между ковариационной матрицей оценки вектора состояния, полученной при условии наличия ошибок привязки фазового центра и случайных ошибок измерений, и ковариационной матрицей оценки вектора состояния, полученной с учётом только случайных составляющих ошибок измерений.

Рассмотрим расширенный вектор состояния  $y(t)$ , который наряду с вектором состояния КА содержит векторы ошибок привязки фазового центра антенн. Например, для приёмных и передающих антенн в Уссурийске, Медвежьих Озёрах и Евпатории:  $\Delta r_{1snd}, \Delta r_{1rcv}, \Delta r_{2snd}, \Delta r_{2rcv}, \Delta r_{3snd}, \Delta r_{3rcv}$ . Таким образом,

$$y(t) = \left( x^T(t), \Delta r_{1snd}, \Delta r_{1rcv}, \Delta r_{2snd}, \Delta r_{2rcv}, \Delta r_{3snd}, \Delta r_{3rcv} \right) \quad (5.14)$$

Производные измеряемой функции  $\psi_i$  по первым шести компонентам расширенного вектора состояния  $y(t_N)$  на момент времени  $t_N$  вычисляются по формуле (5.9).

Заметим, что векторы положения передающей  $r_S(t_1)$  и приёмной  $r_R(t_3)$  антенн входят в формулы (5.5) для расчёта  $\psi_D$  и  $\psi_V$  в виде разности с вектором положения КА  $r(t_2)$  в момент переизлучения сигнала. Поэтому

$$\frac{\partial \psi_{T1,i}}{\partial r_{\text{snd}}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \psi_{T1,i}}{\partial r(t_{2i})}, \quad \frac{\partial \psi_{T1,i}}{\partial r_{\text{rcv}}} = 0, \quad \frac{\partial \psi_{T2,i}}{\partial r_{\text{snd}}} = 0, \quad \frac{\partial \psi_{T2,i}}{\partial r_{\text{rcv}}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \psi_{T2,i}}{\partial r(t_{2i})},$$

где  $T$  принимает значения  $D$  для измерений наклонной дальности и  $v$  для измерений радиальной скорости.

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial (\Delta r_{\text{snd}j})} = \begin{cases} -\frac{\partial \psi_{T1i}}{\partial (r(t_{2i}))} \cdot C_{\text{GS}}^{\text{J2000}}(t_{1i}), & \text{если использовалась передающая антенна } j, \\ (0, 0, 0), & \text{если передающая антенна } j \text{ не использовалась.} \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial (\Delta r_{\text{rcv}j})} = \begin{cases} -\frac{\partial \psi_{T2i}}{\partial (r(t_{2i}))} \cdot C_{\text{GS}}^{\text{J2000}}(t_{3i}), & \text{если использовалась приёмная антенна } j, \\ (0, 0, 0), & \text{если приёмная антенна } j \text{ не использовалась.} \end{cases} \quad (5.15)$$

где  $C_{\text{GS}}^{\text{J2000}}(t)$  – матрица перехода из гринвичской системы координат в инерциальную систему координат J2000.

Матрица системы нормальных уравнений оценки расширенного вектора состояния  $V_a$  вычисляется по формуле:

$$V_a = \begin{bmatrix} \Phi(t_N, t_0) K_A \Phi^T(t_N, t_0) & 0_{6 \times 9} & & & \\ & \sigma_{r1} E_3 & 0_3 & 0_3 & \\ & 0_{9 \times 6} & 0_3 & \sigma_{r2} E_3 & 0_3 \\ & & 0_3 & 0_3 & \sigma_{r3} E_3 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^N \sigma_i \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial y(t_N)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial y(t_N)} \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

где  $0_{6 \times 9}$  – прямоугольная нулевая матрица  $6 \times 9$ ;  $0_{9 \times 6}$  – прямоугольная нулевая матрица  $9 \times 6$ .

Левая верхняя квадратная подматрица 6-го порядка матрицы  $V_a^{-1}$  – это ковариационная матрица оценки вектора состояния с учётом ошибок привязки фазового центра антенны и случайных ошибок измерений.

Матрица  $\Delta K_a(t_N)$  вычисляется по формуле:

$$\Delta K_a(t_N) = K_a - K_p, \quad (5.17)$$

где ковариационная матрица  $K_p$  вычисляется по формуле (5.12).

#### 5.1.4 Поправки на ошибки, обусловленные тропосферными составляющими ошибок измерений

Расширенный вектор состояния для расчёта матрицы поправок  $\Delta K_t(t_N)$  вводится так же, как и в случае оценок влияния систематических составляющих ошибок (см. п. 5.1.2.). Вместо значений систематических ошибок в вектор состояния включаются тропосферные составляющие ошибок. Формула расчёта матрицы системы нормальных уравнений, соответствующая оценке расширенного вектора состояния, полностью аналогична (5.11), но вместо СКО систематических составляющих ошибок измерений  $\sigma_{bi}$  содержит СКО тропосферных составляющих ошибок измерений  $\sigma_{ii}$  [64 – Тучин, 2002; 65 – Тучин, 2002].

$$\sigma_{ii} = \begin{cases} \frac{\sigma_{\Delta R_{ti}}}{\sin \gamma}, & \text{если измерение } i \text{ – наклонная дальность,} \\ \frac{|\dot{\gamma}| \cdot \cos \gamma \cdot \sigma_{\Delta R_{ti}}}{\sin^2 \gamma}, & \text{если измерение } i \text{ – радиальная скорость,} \end{cases} \quad (5.18)$$

где

$\sigma_{\Delta R_{ti}}$  – СКО ошибки, с которой известна величина тропосферной поправки к наклонной дальности  $\Delta R_t$  в случае, когда КА находится в направлении зенита для средних климатических условий;

$\gamma, \dot{\gamma}$  – угол места и его производная на середину сеанса.

В остальном алгоритм расчёта матрицы поправок  $\Delta K_t(t_N)$  полностью совпадает с алгоритмом, описанном в п. 5.1.2.

#### 5.1.5 Поправки на ошибки, обусловленные ионосферными составляющими ошибок измерений

Алгоритм расчёта поправок  $\Delta K_i(t_N)$  полностью совпадает с алгоритмом расчёта поправок  $\Delta K_t(t_N)$ , но вместо СКО тропосферных составляющих ошибок  $\sigma_{ii}$  следует использовать СКО ионосферных составляющих [64 – Тучин, 2002; 65 – Тучин, 2002].

### 5.1.6 Прогнозирование ковариационной матрицы

Ковариационная матрица прогноза вектора состояния на момент  $t > t_N$  вычисляется по следующей формуле:

$$K(t) = \Phi(t, t_N)K(t_N)\Phi(t, t_N) + \int_{t_N}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)QB^T(\tau)\Phi^T(t, \tau)d\tau \quad (5.19)$$

### 5.2 Методика выбора схемы проведения коррекций при перелётах к Луне и планетам

При выборе схемы проведения коррекций рассматривались ошибки по положению в картинной плоскости  $(\xi, \eta)$  и ошибка по времени приведения  $(\tau)$ . Направления осей  $\xi$  и  $\eta$  картинной плоскости определяются формулами (4.1).

Сопоставление схем маневрирования между собой проводится по соответствующим им максимально возможным затратам характеристической скорости и максимальным ошибкам приведения КА к планете.

Оценка максимальных затрат характеристической скорости и максимальных ошибок приведения проводится по следующему алгоритму. Трёхмерное пространство ошибок  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\tau$  разделяется на прямоугольные параллелепипеды в соответствии с заданным шагом. Множество возможных ошибок после каждой коррекции покрывалось набором этих параллелепипедов. Полагалось, что если в некоторый параллелепипед попала хотя бы одна точка, то при оценке коррекции нужно рассматривать все точки этого параллелепипеда.

Если на этапе коррекции  $k$  нужно устранить ошибки, оцениваемые вектором  $f = (\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\tau)^T$ , то поставим в соответствие этому вектору множество  $V_f$  в пространстве ошибок. Это множество получается после расчёта корректирующего импульса и формирования множества ошибок, обусловленных ошибками исполнения и ошибками прогноза. Расчет корректирующего импульса выполняется с использованием матрицы частных производных:

$$D = \frac{\partial(\xi, \eta, \tau)}{\partial(v_x, v_y, v_z)}$$

Множество  $V_f$  вычисляется по формуле:

$$V_f = \bigcup_{j=1}^N \left( (\alpha_j D R_j D^{-1} - E_{(3)}) \mathbf{f} + D K_v D^T \right), \quad (5.20)$$

где

$\alpha_j$  – коэффициент, определяющий ошибку по модулю импульса в реализации  $j$ ;

$R_j$  – матрица поворота, определяющая ошибку по направлению импульса в реализации  $j$ ;

$E_{(3)}$  – единичная матрица третьего порядка;

$K_v$  – ковариационная матрица ошибок определения вектора скорости;

$N$  – число реализаций.

Пусть  $E_k$  – результат построения покрытия прямоугольными параллелепипедами множества ошибок до проведения  $k$ -й коррекции

$$E_k = \bigcup_{j \in J_k} U_j, \quad (5.21)$$

где  $U_j$  – прямоугольный параллелепипед с индексом  $j$ ;  $J_k$  – множество индексов, соответствующих параллелепипедам, в которых содержатся ошибки.

Для каждого  $U_j$ ,  $j \in J_k$  построим множество  $W_{k,j}$ :

$$W_{k,j} = \left\{ \bigcup_{m=1}^M V_{f_m} \mid \mathbf{f}_m \in U_j \right\}. \quad (5.22)$$

Множество  $W_{k,j}$  состоит из прямоугольных параллелепипедов, в которые попали ошибки, полученные при исправлении ошибок  $\mathbf{f}_m$ ,  $m=1, \dots, M$ . Эти ошибки обусловлены ошибками исполнения и ошибками прогноза. В качестве векторов исправляемых ошибок  $\mathbf{f}_m$ ,  $m=1, \dots, M$  можно выбрать вершины параллелепипеда  $U_j$  и его среднюю точку.

Рассмотрим объединение множеств  $W_{k,j}$  для индексов  $j \in J_k$ . Построим покрытие этого множества системой параллелепипедов  $\{U_j\}$  и обозначим множество индексов параллелепипедов, которые вошли в покрытие, как  $J_{k+1}$ . В результате получим множество  $E_{k+1}$ :

$$E_{k+1} = \bigcup_{j \in J_{k+1}} U_j. \quad (5.23)$$

Оценка максимальных затрат характеристической скорости получается автоматически, если при построении  $V_{k,j}$  определить максимальную характеристическую скорость, а затем выбрать максимальное значение по всем параллелепипедам  $U_j$ ,  $j \in J_k$ .

### **5.3 Примеры расчётов определения точности приведения КА к Луне и планетам с использованием жидкостных реактивных двигателей**

В разделе рассмотрены три примера расчёта точности приведения КА: к Марсу, Луне и Венере для КА, оснащённых жидкостными реактивными двигателями.

#### **5.3.1 Определение точности приведения КА к Марсу (на примере проекта «Фобос-Грунт»)**

Первоначально проект «Фобос-Грунт» был ориентирован на применение РН среднего класса типа «Союз», исходя из чего были разработаны основные проектно-компоновочные решения по КА и соответствующая им схема полёта. Но в процессе дальнейшей работы возникло предложение – и оно было принято – доставить на начальную трёхсуточную орбиту ИСМ в качестве попутной, полезной нагрузки китайский спутник «УН-1». Однако массовый резерв КА «Фобос-Грунт» при этом оказался недостаточным, и в связи с этим начата проработка запуска с помощью более мощной РН «Зенит-2SLБ».

Раздел написан по материалам научно-технических отчётов [122 – НТО 5-14-04; 124 – НТО 5-04-06; 132 – НТО 5-31-07].

Рассмотрим для примера анализ схемы приведения для этих двух вариантов в окне стартов 2009 г. с использованием методов и алгоритмов, приведённых в разделах 5.1 и 5.2. Следует отметить, что по результатам анализа схемы выведения с

использованием РН «Зенит-2SLБ» было принято решение об изменении схемы выведения в окне стартов 2011 г.

**5.3.1.1 Вариант выведения РН «Союз-2б».** Рассмотрим вариант, который был предусмотрен эскизным проектом и нацелен на решение основной задачи проекта. Выведение КА на опорную орбиту выполняет РН «Союз-2б». Опорная орбита представляет собой околокруговую 200-км орбиту.

Перелёт Земля – Марс начинается с момента выхода КА на отлётную от Земли траекторию и завершается подлётом к Марсу на минимальное расстояние. Длительность перелёта составляет 10 – 11.5 месяцев. Вследствие ошибок выведения на отлётную траекторию, складывающихся из погрешностей выполнения разгона с промежуточной орбиты и ошибок определения её параметров, отклонения координат КА от расчётных при подлёте к Марсу могут достигать нескольких сотен тысяч километров. Поэтому на межпланетной траектории необходимо проведение коррекций.

Точность выведения на отлётную траекторию определяется ошибками выдачи последнего разгонного импульса и погрешностями определения параметров промежуточной орбиты ИСЗ. Предельные ошибки исполнения не должны превышать  $\pm 0.15\%$  по модулю и  $\pm 0.7^\circ$  по направлению сообщаемого вектора скорости. Такие погрешности вместе с ошибками определения параметров промежуточной орбиты приводят к отклонению вектора асимптотической скорости отлёта от его расчётного значения на величину до 35 м/с. Данная характеристика практически полностью определяет величину потребного импульса 1-й коррекции межпланетной траектории.

Разработка схемы проведения коррекций должна быть произведена, исходя из следующих условий:

- коррекции проводятся по результатам наземных радиотехнических измерений, измерения производятся не менее чем с двух пунктов дальней космической радиосвязи (Евпатория, Уссурийск, Медвежьи Озёра), и при этом измеряются запросным методом наклонная дальность и радиальная скорость с

предельными аппаратными ошибками (без учёта влияния среды распространения сигнала)  $\pm 20$  м и  $\pm 0.2$  мм/с соответственно;

- коррекции проводятся с помощью тормозной ДУ КА с предельными ошибками  $\pm 0.5$  м/с по модулю и  $\pm 0.7^\circ$  по направлению вектора сообщаемой КА скорости.

Подлёт к Марсу происходит по пролётной гиперболической траектории с высотой перицентра 700 – 1000 км и с наклоном к плоскости марсианского экватора близким к нулю. Высота перицентра выбрана предварительно из условия непопадания КА в верхние слои атмосферы Марса. Исследование характера эволюции начальной орбиты искусственного спутника Марса (ОИСМ) может привести к необходимости повышения высоты перицентра. Линия апсид начальной ОИСМ лежит в плоскости орбиты Фобоса.

Для надёжного и точного определения параметров перелётной траектории на участках между коррекциями и перед подлётом к Марсу необходимо минимизировать возмущающие ускорения, действующие на центр масс КА (например, от сопел системы стабилизации), или предусмотреть мероприятия по их высокоточному прогнозированию для учёта в математической модели движения КА.

Выбранные для экспедиции перелётные траектории Земля – Марс характеризуются следующими основными параметрами, перечисленными в таблице 5.1.

**Таблица 5.1** – Основные параметры перелётных траекторий Земля – Марс

Наименование	Значение
стартовое окно	октябрь 2009 г.
длительность полёта до Марса	10 – 11.5 месяцев
прилёт к Марсу	август-сентябрь 2010 г.
асимптотическая скорость отлёта от Земли	3.3 км/с
склонение вектора асимптотической скорости отлёта к	$20^\circ$

экватору Земли	
асимптотическая скорость подлёта к Марсу	2.5 км/с
склонение вектора асимптотической скорости подлёта к экватору Марса	до 5°
суммарная скорость разгона с опорной орбиты ИСЗ	3745 м/с

Оценка точности прогнозирования выполнялась методом ковариационного анализа с учётом возмущающего шума в виде мешающих параметров, изложенного в разделе 5.1. В качестве возмущающих воздействий рассматривались световое давление и возмущающие ускорения, обусловленные действием неконтролируемых реактивных сил. Эти возмущающие ускорения возникают из-за неполной компенсации работы двигателей системы ориентации, непредвиденной утечкой газов и др. СКО неопределённости давления солнечной радиации в расчётах полагалось равным 5% от его номинального значения. СКО возмущающих ускорений полагались равными:

$10^{-9} \text{ м/с}^2$  – в радиальном направлении;

$1.5 \cdot 10^{-9} \text{ м/с}^2$  – в плоскости орбиты, в направлении, ортогональном радиальному;

$3 \cdot 10^{-9} \text{ м/с}^2$  – в направлении, ортогональном плоскости орбиты.

Выбор схемы проведения коррекций проводился в соответствии с методикой, описанной в разделе 5.1.

В качестве номинальной траектории была выбрана траектория перелёта Земля – Марс длительностью 330.5 суток. Начальные условия в геоцентрической системе координат с осями, направленными по осям СК J2000, на дату 09.10.2009 17:42:18.394

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.5362292768763 \\ 4.6263144844161 \\ 9.1236575714075 \\ -1.2527420812180 \\ 7.1004799764962 \\ 5.2071539870710 \end{pmatrix}.$$

Компоненты положения даны в тыс. км, а компоненты скорости – в км/с.

Время прохождения минимального расстояния до Марса: 05.09.2010 11:57:29.

Минимальное расстояние до центра Марса составляет 4.3 тыс. км. Подлёт к Марсу происходит в условиях радиовидимости из Евпатории, Уссурийска и Медвежьих Озёр.

Траектория перелётного модуля будет определяться по результатам наземных радиотехнических измерений наклонной дальности и радиальной скорости с помощью бортового радиоконкомплекса.

На перелётной траектории проводятся запросные измерения радиальной скорости и наклонной дальности с точностями не хуже 0.2 мм/с по скорости и 20 м по дальности без учёта ошибок среды распространения.

Определение параметров движения на всех рассматриваемых этапах экспедиции производится по измерениям, которые проводят станции в Медвежьих Озёрах и Уссурийске с использованием больших антенн, диаметром 64 и 70 м.

Точность выведения на отлётную траекторию определяется ошибками выдачи последнего разгонного импульса и погрешностями определения параметров промежуточной орбиты ИСЗ. Погрешности исполнения импульса и ошибки определения параметров промежуточной орбиты приводят к отклонению вектора асимптотической скорости отлёта от его расчётного значения на величину до 35 м/с. Данная характеристика практически полностью определяет величину потребного импульса 1-й коррекции межпланетной траектории.

Разработка вариантов схем проведения коррекций произведена, исходя из следующих условий:

- коррекции проводятся по результатам наземных радиотехнических измерений, измерения производятся не менее, чем с двух пунктов дальней космической радиосвязи (Медвежье Озеро Уссурийск), и при этом измеряются запросным методом наклонная дальность и радиальная (доплеровская) скорость с предельными аппаратурными ошибками (без учёта влияния среды распространения сигнала)  $\pm 20$  м и  $\pm 0.2$  мм/с соответственно;

– коррекции проводятся с помощью тормозной ДУ КА с предельными ошибками  $\pm 0.5$  м/с по модулю и  $\pm 0.7^\circ$  по направлению вектора сообщаемой КА скорости.

С учётом приведённых характеристик траекторных измерений и исполнения маневров на трассе перелёта планируется провести три коррекции.

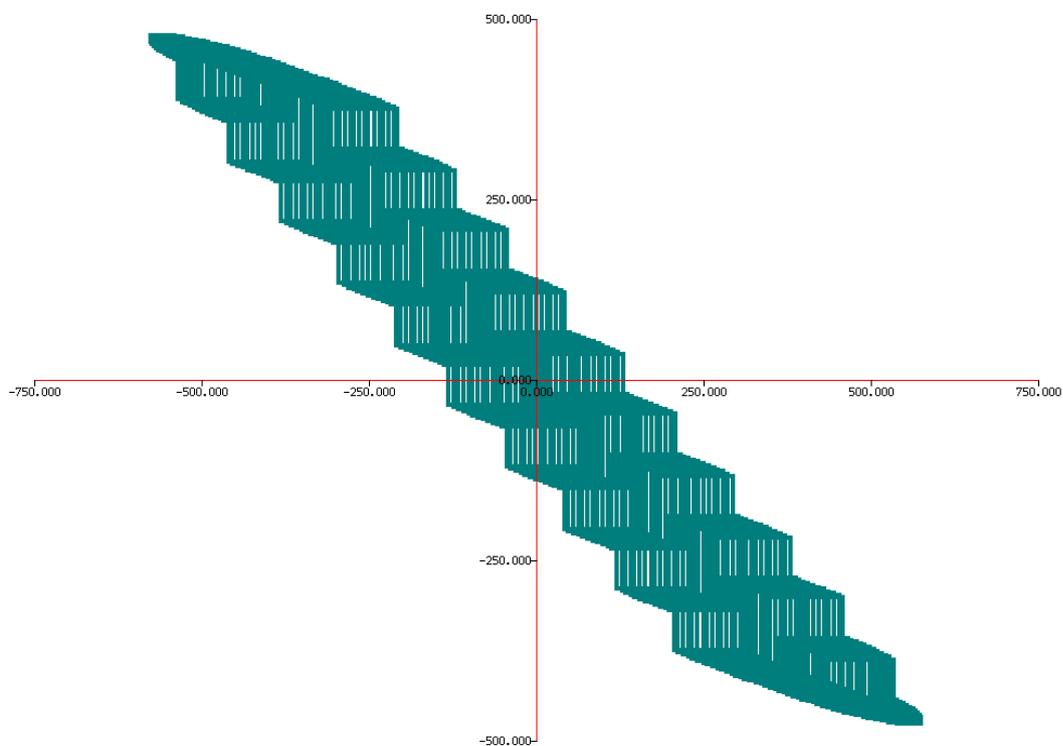
Выбор схемы проведения коррекций выполнялся так, что при фиксированных датах проведения 1-й и 3-й коррекций варьировалась дата проведения 2-й коррекции. Рассмотрено четыре варианта. Во всех вариантах 1-я коррекция всегда проводилась на 10-е сутки полёта. При более позднем проведении 1-й коррекции её импульс возрастает, более раннему проведению коррекции препятствует недостаточная точность определения параметров отлётной траектории. Проекция результатов аппроксимации прямоугольными параллелепипедами области ошибок приведения после импульса перехода на отлётную траекторию перелёта показана на рис. 5.1. Оси абсцисс соответствует ось  $\xi$ , а оси ординат – ось  $\eta$ . Размерность – тыс. км. Проекция результатов аппроксимации области ошибок приведения после первой коррекции показана на рис. 5.2. Обозначения осей и размерность такие же, как и на рис. 5.1.

В случае проведении всех коррекций тормозной ДУ КА 3-ю заключительную коррекцию целесообразно проводить в интервале: 2 недели до подлёта на минимальное расстояние до Марса – 4 дня до подлёта. Вторую коррекцию целесообразно проводить за 80 дней до подлёта на минимальное расстояние. Суммарная характеристическая скорость всех импульсов коррекции составляет от 45 до 60 м/с. Меньшие значения характеристической скорости соответствуют более ранним датам проведения 3-й коррекции. С другой стороны, более ранние варианты проведения 3-й коррекции приводят к большим ошибкам приведения. Ошибки приведения по минимальному расстоянию между КА и Марсом составляют 150 – 500 км, а по наклонению  $1.4^\circ$  –  $3.3^\circ$ .

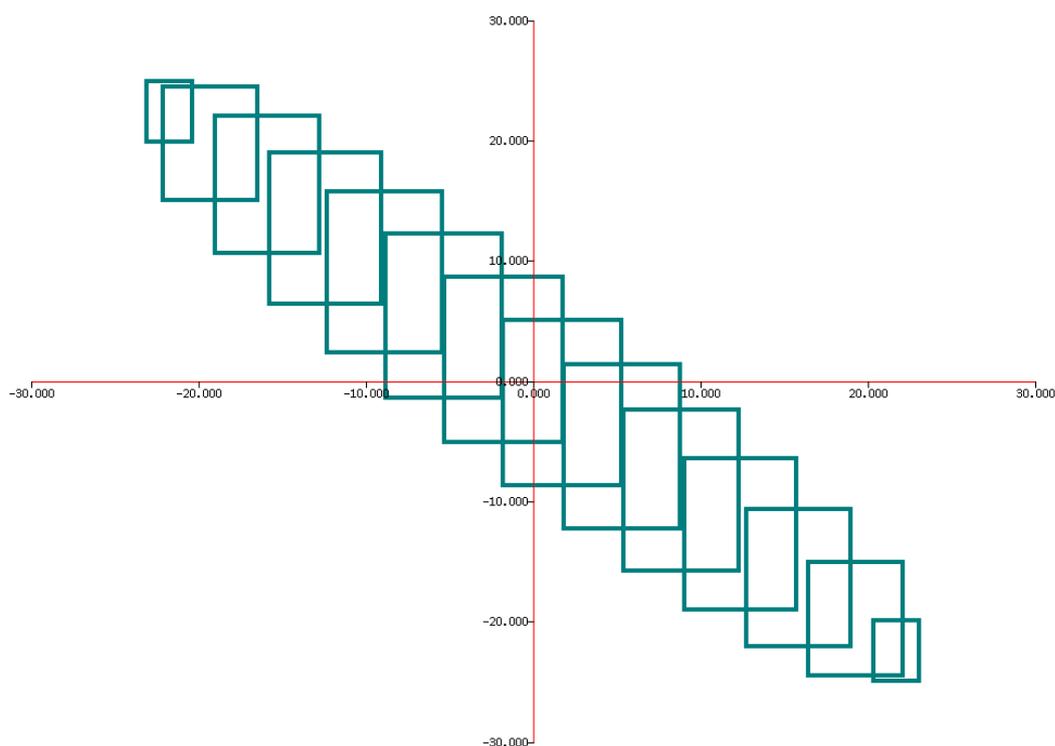
Во всех четырёх рассмотренных вариантах ошибки приведения определялись ошибками исполнения и интервалом времени от момента проведения 3-й коррекции до момента достижения перицентра подлётной гиперболы. Точность приведения

можно повысить за счет уменьшения ошибок исполнения 3-й коррекции. Этого можно достичь, если использовать четыре двигателя (по 5 КГс каждый), установленных по оси  $OX$  перелётного модуля (ПМ). Разработчики КА называют эти двигатели двигателями малой тяги (ДМТ)

При использовании для проведения 3-й заключительной коррекции ДМТ ПМ её целесообразно проводить за 2 – 4 недели до подлёта на минимальное расстояние до Марса. Вторую коррекцию целесообразно проводить за 80 суток до подлёта на минимальное расстояние. Суммарная характеристическая скорость проведения всех коррекций составит  $\sim 45$  м/с. В этом случае ошибка приведения по высоте перицентра подлётной гиперболы не превысит 30 км, а по наклонению  $1.5^\circ$ .



**Рисунок 5.1** – Ошибка приведения после перехода на перелётную траекторию.



**Рисунок 5.2** – Ошибка приведения после первой коррекции.

**5.3.1.2 Вариант выведения РН «Зенит-SLB».** Запуск КА «Фобос-Грунт» производится с помощью РН «Зенит-SLB» из Байконура по трассе с азимутом  $\sim 64.2^\circ$ , соответствующей наклонению  $51.4$  град. Разгон на отлётную от Земли траекторию осуществляется с помощью МДУ КА.

Выведение включает в себя следующие элементы:

- старт и выведение КА при помощи двух ступеней РН на 300-км круговую опорную орбиту ИСЗ с наклонением  $51.4^\circ$  и периодом обращения 90.4 мин;
- пассивный полёт в течение  $\sim 2.8$  часа по опорной орбите ( $\sim 2$  витка) в режиме постоянной солнечной ориентации (ПСО);
- первое включение ДУ КА и отработка в течение  $\sim 8.2$  минут характеристической скорости  $0.88$  км/с для перехода на промежуточную орбиту с периодом обращения 2.3 часа, высотой апогея 4.43 тыс. км и аргументом перигея в диапазоне от  $0^\circ$  до  $15^\circ$ ;

- пассивный полёт по промежуточной орбите в течение  $\sim 2.3$  часа (1 виток) в режиме ПСО, проведение сеансов связи с Землей с передачей ТМИ и траекторными измерениями;
- второе включение МДУ КА и отработка в течение  $\sim 15$  минут характеристической скорости  $\sim 2.89$  км/с для выхода на гиперболическую траекторию отлёта от Земли с асимптотической скоростью  $\sim 3.37$  км/с, отделение МДУ, проведение траекторных измерений для определения параметров сформированной траектории отлёта.

С целью оценки влияния момента времени выполнения первой коррекции выполнены расчёты для начала, середины и окончания окна стартов. Расчёты выполнялись для моментов времени проведения коррекции, отстоящих от момента старта на 5, 10, 20, 30 и 45 суток. Расчёты выполнялись для двух вариантов ошибок выведения КА на опорную орбиту. Вариант 0 соответствует использованию ковариационной матрицы ошибок выведения, равной ковариационной матрице ошибок выведения на орбиту с минимальной и максимальной высотами 170 и 400 км. Вариант 1 соответствует использованию ковариационной матрицы, построенной с использованием указанной выше ковариационной матрицы: ошибки выхода из плоскости орбиты положены равными случаю  $170 \times 400$ , ошибки в плоскости орбиты положены одинаковыми по компонентам и равными значению максимальной ошибки. Эти ошибки предполагаются некоррелированными. Ковариационные матрицы задаются в начальной стартовой системе координат.

По каждой схеме, получаемой при фиксированных датах проведения всех трёх коррекций, формируется таблица, содержащая три строки, соответствующие импульсам коррекций. По каждой коррекции приводятся:

- максимальный модуль импульса;
- максимальная ошибка приведения по  $\xi$  после импульса;
- максимальная ошибка приведения по  $\eta$  после импульса;
- максимальная ошибка по времени приведения;
- предельная ошибка прогноза по  $\xi$  ;

- предельная ошибка прогноза по  $\eta$  ;
- предельная ошибка по времени приведения.

Для каждой схемы определяется суммарная характеристическая скорость всех импульсов, ошибка приведения по высоте перицентра и ошибка приведения по наклонению. Например, в таблице 5.2 приведены характеристики схемы для начала окна стартов при условии, что ошибки выведения КА на опорную орбиту РН «Зенит-SLB» приняты такими же, как и при выведении на орбиту 170×400 и первая коррекция проводится на 10-е сутки полёта.

**Таблица 5.2** – Характеристики схемы для начала окна стартов

№ импульса	модуль импульса	ошибка приведения по $\xi$ , км	ошибка приведения по $\eta$ , км	ошибка по времени приведения, с	ошибка прогноза по $\xi$ , км	ошибка прогноза по $\eta$ , км	ошибка прогноза по времени приведения, с
1	96.55	53072.8	38848.8	55605.4	75.0	44.0	74.0
2	6.77	7521.6	10886.1	5885.5	18.0	24.0	16.0
3	17.95	445.0	453.8	204.6	75.0	20.0	8.0

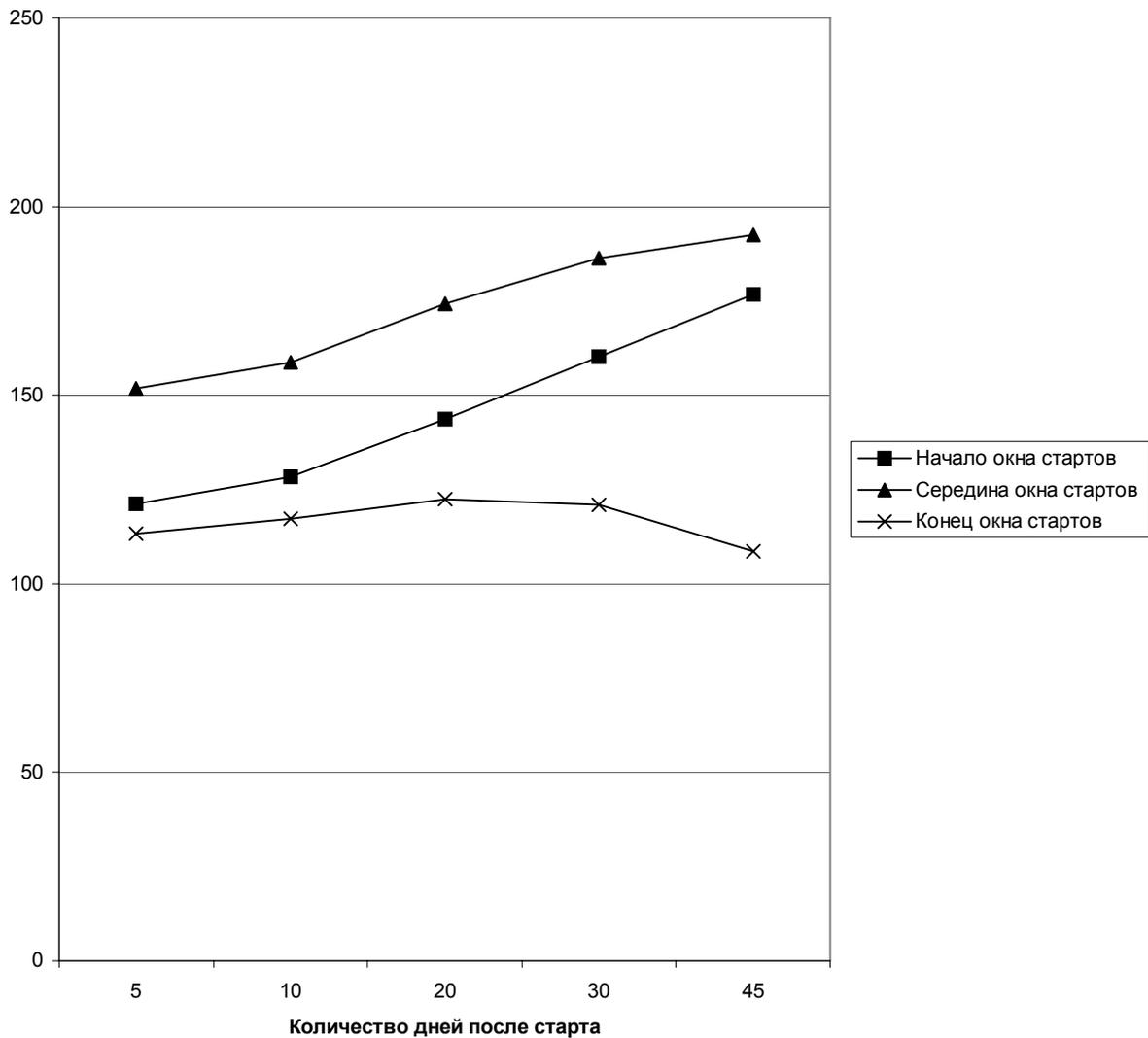
Суммарная характеристическая скорость всех импульсов: 121.27 м/с

Ошибка приведения по высоте перицентра: 369.28 км.

Ошибка приведения по наклонению: 2.92°.

В результате выполненных расчётов были получены зависимости суммарных затрат характеристической скорости от времени проведения первой коррекции для случаев начала, середины и конца окна стартов. Эти зависимости показаны на рис. 5.3.

Вариант 0



**Рисунок 5.3** – Зависимость суммарной характеристической скорости от времени проведения первой коррекции для варианта таких ошибок выведения на опорную орбиту, как и для выведения на орбиту  $170 \times 400$  км.

### 5.3.2 Определение точности приведения КА к Луне (на примере проекта «Луна-Глоб»)

Раздел написан по материалам, представленным в [128 – НТО 5-06-08]. Ракета-носитель «Союз 2-1а» выводит разгонный блок «Фрегат» с КА «Луна-Глоб1» на опорную орбиту с высотой  $\sim 200$  км. Выведение на траекторию перелёта к Луне выполняется по двухимпульсной схеме с использованием промежуточной эллиптической орбиты. На интервале полёта по промежуточной орбите

определяются её параметры, которые используются для уточнения маневра перехода на траекторию перелёта. Поэтому ошибки перехода на траекторию перелёта будут определяться ошибками исполнения второго манёвра.

В расчётах было положено, что промежуточная орбита имеет период 3 часа. Такому периоду при высоте перицентра 200 км соответствует высота апоцентра 8220 км. Величина импульса перехода на промежуточную орбиту составляет  $\sim 1350$  м/с, а величина импульса перехода на траекторию перелёта –  $\sim 1780$  м/с.

В ходе анализа схемы полёта требуется получить:

- оценки точности определения и прогнозирования параметров движения на участке до первой коррекции;
- оценки точности определения и прогнозирования параметров движения на участке между первой и второй коррекциями;
- оценки точности определения и прогнозирования параметров движения на участке после второй коррекции, оценку ошибок прогноза параметров движения на момент достижения периселения;
- оценки затрат характеристической скорости, необходимой для выполнения 1-й и 2-й коррекций с учётом ошибок исполнения импульсов и навигационных ошибок;
- оценки точности приведения КА к Луне.

**5.3.2.1 Оценка точности определения и прогнозирования параметров движения на участке до первой коррекции.** На интервале до первой коррекции рассмотрены два варианта условий определения параметров движения КА: при высоком и низком уровне неконтролируемых возмущений.

Программа измерений предусматривает выполнение измерений каждый час с измерительных пунктов в Медвежьих Озёрах и Уссурийске при наличии видимости.

Примеры оценок ошибок определения и прогнозирования параметров движения представлены на рис. 5.4 и 5.5. На этих рисунках показана зависимость от времени ошибок определения и прогнозирования параметров движения в

орбитальной СК RNB. Интервал определения отделён от интервала прогноза вертикальной линией.

Предельные ошибки прогноза на интервале до первой коррекции представлены в таблице 5.3.

**Таблица 5.3** – Предельные ошибки прогноза на интервале до первой коррекции

Мерная база, сутки	Высокий уровень неконтролируемых возмущений		Низкий уровень неконтролируемых возмущений	
	ошибка прогноза положения, м	ошибка прогноза скорости, мм/с	ошибка прогноза положения, м	ошибка прогноза скорости, мм/с
1	1000	5	1000	5

Оценка влияния навигационных ошибок на величину первого импульса на интервале до первой коррекции выполнена методом статистических испытаний. Для формирования выборки использована ковариационная матрицы ошибок прогноза на момент выполнения первой коррекции. Была использована выборка, содержащая 64 варианта возможных навигационных ошибок. Для каждого варианта навигационных ошибок формировался вектор состояния КА и выполнялся расчёт импульса коррекции. Так как при движении по номинальной траектории коррекция не нужна, рассчитанный вектор коррекции является мерой влияния навигационных ошибок на величину импульса первой коррекции.

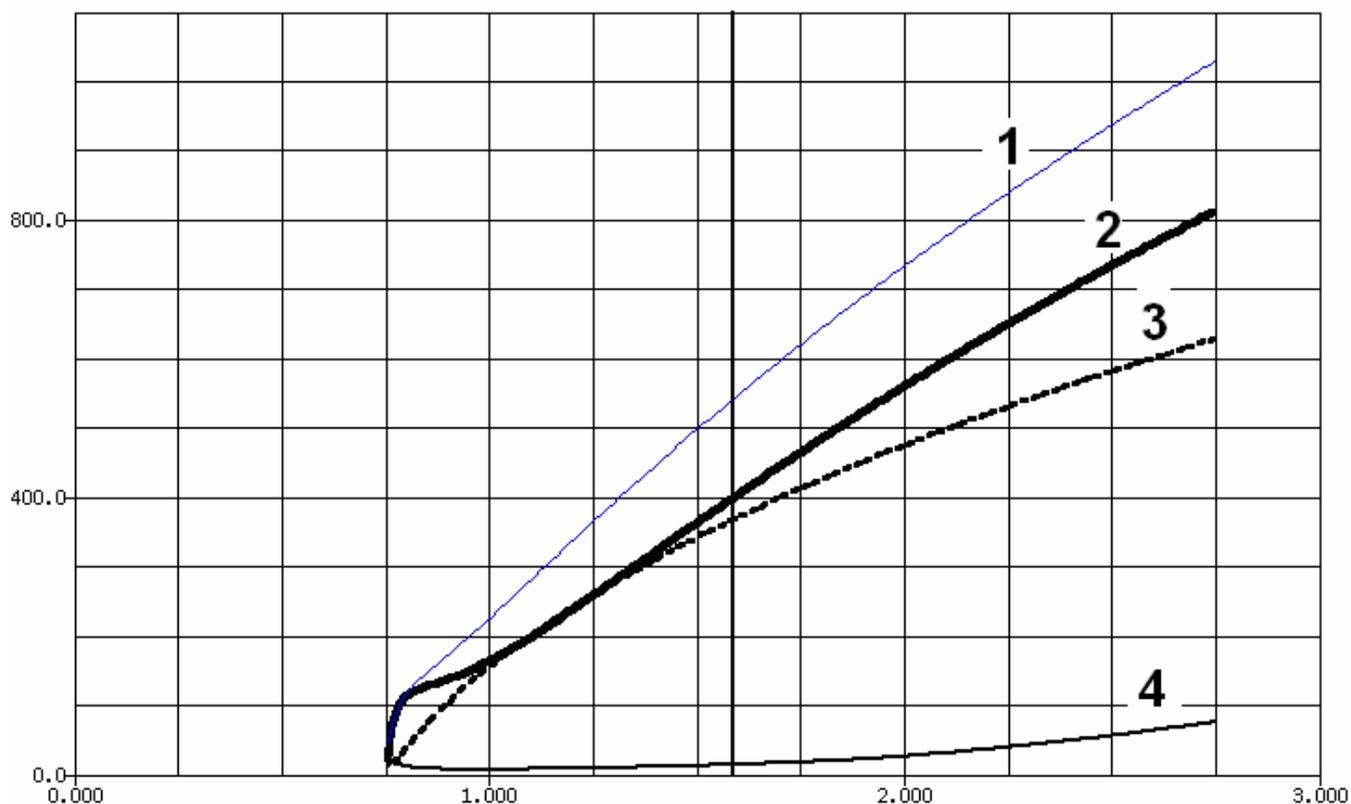
Максимальное значение модуля вектора первой коррекции не вышло за границу 5 мм/с. Таким образом, навигационные ошибки практически не влияют на величину импульса первой коррекции.

Приведем таблицу 5.4, показывающую влияние различных составляющих ошибок траекторных измерений на предельную ошибку прогноза. При этом предельные величины систематических ошибок были положены равными 20 м по

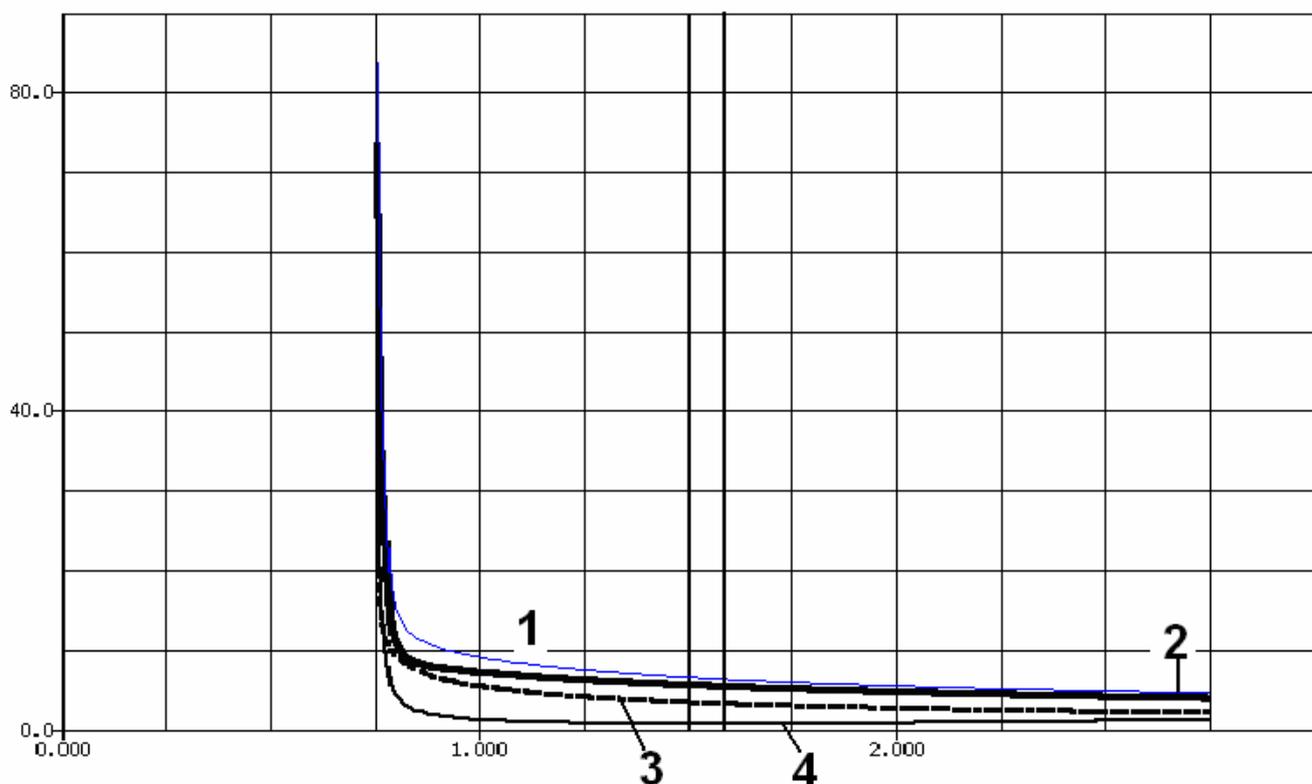
наклонной дальности и 0.2 мм/с по радиальной скорости. Ошибка определения фазового центра антенны была положена 1 м. Предполагалось, что не исключались тропосферная и ионосферная составляющие ошибки.

**Таблица 5.4** – Влияние составляющих ошибок траекторных измерений

Источник ошибки	Ошибка прогноза положения в направлении R, м	Ошибка прогноза положения в направлении N, м	Ошибка прогноза положения в направлении В, м	Ошибка прогноза скорости в направлении R, мм/с	Ошибка прогноза скорости в направлении N, мм/с	Ошибка прогноза скорости в направлении В, мм/с
Bias	25.9	401.1	498.8	14.9	16.8	52.5
Pos	4.1	47.4	76.7	1.4	2.3	5.1
Trop	14.8	180.5	275.4	4.3	7.8	16.2
Ion	1.0	11.3	19.2	0.3	0.5	1.3



**Рисунок 5.4** – Ошибка определения и прогноза положения в СК RNB, в м. По оси абсцисс – время в сутках, по оси ординат – ошибка прогноза в м: 1 – модуль вектора ошибки, 2 – ошибка в радиальном направлении, 3 – ошибка в направлении орбитального движения, 4 – ошибка в направлении, ортогональном плоскости орбиты.



**Рисунок 5.5** – Ошибка определения и прогноза скорости в RNB, мм/с. По оси абсцисс – время в сутках, по оси ординат – ошибка прогноза в мм/с: 1 – модуль вектора ошибки, 2 – ошибка в радиальном направлении, 3 – ошибка в направлении орбитального движения, 4 – ошибка в направлении, ортогональном плоскости орбиты.

**5.3.2.2 Оценка точности определения и прогнозирования параметров движения на участке между первой и второй коррекциями.** На интервале между первой и второй коррекциями выполнены расчёты оценки точности определения и прогнозирования параметров движения в условиях высокого и низкого уровней неконтролируемых возмущений. Программа измерений предусматривает выполнение измерений каждые 3.5 часа с измерительных пунктов в Медвежьих Озёрах и Уссурийске при наличии видимости.

Предельные ошибки прогноза на интервале между первой и второй коррекциями представлены в таблице 5.5.

**Таблица 5.5** – Предельные ошибки прогноза на интервале между первой и второй коррекциями

Мерная база, сутки	Высокий уровень неконтролируемых возмущений		Низкий уровень неконтролируемых возмущений	
	ошибка прогноза положения, м	ошибка прогноза скорости, мм/с	ошибка прогноза положения, м	ошибка прогноза скорости, мм/с
2	3000	1400	2400	1100

Оценка влияния навигационных ошибок на величину второго импульса выполнена методом статистических испытаний с использованием ковариационной матрицы ошибок прогноза вектора состояния на моменты первой и второй коррекций. Была использована выборка, содержащая 64 варианта навигационных ошибок на момент первой коррекции и 64 варианта навигационных ошибок на момент второй коррекции, всего  $64 \times 64 = 4096$  вариантов. Для каждого варианта навигационных ошибок 1-й и 2-й коррекций формировался вектор состояния КА на момент первой коррекции, искажённый навигационными ошибками. Полученный вектор состояния использовался для расчёта импульса коррекции. После добавления импульса коррекции к компонентам вектора скорости, выполнялось интегрирование уравнений движения на момент второй коррекции и вычислялся вектор состояния на этот же момент времени. К этому вектору состояния добавлялись навигационные ошибки второй коррекции. В результате получался вектор, в котором учтены навигационные ошибки при расчёте 2-й коррекции. Этот вектор использовался для расчёта импульса 2-й коррекции. Рассчитанный импульс является мерой влияния навигационных ошибок на величину 2-й коррекции, так как при движении по номинальной траектории коррекции не нужны. Максимальное значение модуля вектора 2-й коррекции не вышло за пределы 14 мм/с и тем самым показало, что навигационные ошибки практически не влияют на величину 2-й коррекции.

Оценка влияния навигационных ошибок на точность приведения КА к Луне также выполнена методом статистических испытаний. Для каждого из 4096

вариантов навигационных ошибок, рассмотренных выше, к вектору состояния, полученному в результате добавления навигационных ошибок на моменты 1-й и 2-й коррекций, добавлялся импульс второй коррекции. Далее выполнялся расчёт параметров пролётной гиперболы: расстояние периселения, наклонение, время прохождения периселения. Эти значения сравнивались с соответствующими величинами, полученными на номинальной траектории. Невязка по расстоянию перицентра не вышла за пределы  $\pm 150$  м, невязка по наклонению не вышла за коридор  $\pm 0.009^\circ$ , а невязка по времени достижения перицентра – за коридор  $\pm 0.5$  с. Таким образом, навигационные ошибки практически не влияют на точность приведения КА к Луне.

**5.3.2.3 Оценка точности определения и прогнозирования параметров движения на участке после второй коррекции.** На интервале после второй коррекции расчёты оценки точности определения и прогнозирования параметров движения также проводились в условиях высокого и низкого уровней неконтролируемых возмущений. Программа измерений предусматривает выполнение измерений каждые 2 часа с измерительных пунктов в Медвежьих Озёрах и Уссурийске при наличии видимости.

Предельные ошибки прогноза на интервале между 2-й коррекцией и подлётом представлены в таблице 5.6.

**Таблица 5.6** – Предельные ошибки прогноза на интервале между 2-й коррекцией и подлётом

Мерная база, сутки	Высокий уровень неконтролируемых возмущений		Низкий уровень неконтролируемых возмущений	
	ошибка прогноза положения, м	ошибка прогноза скорости, мм/с	ошибка прогноза положения, м	ошибка прогноза скорости, мм/с
1	3200	210	2800	180

Предельные ошибки прогноза параметров пролётной гиперболы на момент достижения периселения по мерной базе после 2-й коррекции составляют:

- по расстоянию периселения 1.5 км;
- по наклонению 0.05°;
- по времени прохождения периселения 2 с.

**5.3.2.4 Оценка затрат характеристической скорости на импульсы первой и второй коррекций.** Величина импульса первой коррекции зависит от ошибок исполнения импульса перехода на траекторию перелёта и навигационных ошибок на участке полёта до первой коррекции.

Величина импульса второй коррекции зависит от ошибок исполнения импульса первой коррекции и навигационных ошибок на участке полёта от первой до второй коррекций.

При сделанных предположениях о качестве траекторных измерений навигационные ошибки практически не влияют на величины импульсов первой и второй коррекций.

В расчётах было принято, что ошибки исполнения импульса перехода на траекторию перелёта составляют: 0.1% по модулю импульса и 0.7° по его направлению, а ошибки исполнения коррекций – 0.2% по модулю импульса и 0.7° по его направлению.

Оценка затрат характеристической скорости на импульсы первой и второй коррекций выполнялась методом статистических испытаний. Были выполнены массовые расчёты по совокупности вариантов, каждый из которых содержал ошибки исполнения импульса перехода на траекторию перелёта и ошибки исполнения импульсов коррекций. По каждому варианту выполнялся прострел, начиная с момента перехода на траекторию перелёта и кончая моментом достижения минимального расстояния до Луны. В ходе каждого прострела выполнялся расчёт импульсов первой и второй коррекций. При расчёте импульса коррекции решается краевая задача. Краевые условия на левом конце определялись вектором состояния на момент проведения коррекции, а на правом конце – параметрами пролётной гиперболы: расстоянием перицентра, временем его достижения и наклонением.

В результате выполненных расчётов получены следующие значения максимальных затрат характеристической скорости:

- 38 м/с для первой коррекции,
- 10 м/с для второй коррекции.

**5.3.2.5 Оценка точности приведения КА к Луне.** Оценка точности приведения КА к Луне выполнялась методом статистических испытаний по алгоритму, изложенному в разделе 5.2. При этом рассчитанный импульс второй коррекции искажался ошибками исполнения этой коррекции, предусмотренными вариантом, и вычислялись невязки параметров пролётной гиперболы по отношению к их номинальным значениям.

В результате выполненных расчётов получены следующие значения ошибок приведения КА к Луне:

- по расстоянию периселения 5 км,
- по наклонению 0.15°,
- по времени прохождения периселения 6 с.

### **5.3.3 Определение точности приведения КА к Венере (на примере проекта «Венера-Д»)**

Раздел написан по материалам [141 – НТО 5-013-09]. Результаты расчёта предельных ошибок приведения КА и баллона к Венере приведены в таблицах 5.7 и 5.8. Расчёты выполнены в предположении, что при движении КА на промежуточной орбите искусственного спутника Земли выполняются траекторные измерения. По полученным измерениям уточняются параметры движения КА. Уточнённые параметры движения КА используются при расчёте импульса перехода на траекторию перелёта Земля – Венера. Таким образом, ошибки выведения и ошибки исполнения импульса перехода на промежуточную орбиту компенсируются.

Первая коррекция выполняется на седьмые сутки полёта. Вторая коррекция выполняется за четыре дня до подлёта к Венере. После выполнения коррекции выполняется маневр увода КА. В строке таблицы 5.7, соответствующей второй коррекции приведены суммарные затраты характеристической скорости на

собственно коррекцию и маневр увода. Ошибки приведения в картинной плоскости также соответствуют суммарному импульсу. Строка в таблице 5.8, соответствующая второй коррекции, содержит составляющую импульса до отделения баллона от основного КА и маневра увода основного КА.

Третья коррекция движения основного КА проводится за одни сутки до подлёта. Её проведение обусловлено тем, что необходимо исправить ошибку по высоте перицентра пролётной гиперболы. Без проведения третьей коррекции ошибка по высоте перицентра составляет величину около 500 км, что превосходит высоту перицентра номинальной траектории.

Точность приведения КА к Венере определяется ошибкой исполнения импульса коррекции по его направлению, которая составляет величину 0.7 градуса. Если конструкция аппарата, его двигательной установки и системы управления обеспечит более точное исполнение импульса, то проведение третьей коррекции может не потребоваться.

При проведении расчётов предполагалась следующая программа траекторных измерений. При подготовке коррекций траекторные измерения наклонной дальности и радиальной скорости выполняются ежедневно с трёх измерительных пунктов: Уссурийска, Медвежьих Озёр и Евпатории. Подготовка к проведению первой коррекции начинается после выхода КА на траекторию перелёта. Подготовка ко второй коррекции начинается за две недели до её проведения. На участке перелёта выполнения первой коррекции и до начала подготовки ко второй коррекции траекторные измерения выполняются один раз в четыре дня.

Из таблицы 5.7 видно, что самая плохая точность определения параметров движения КА имеет место на участке между второй и третьей коррекциями. Точность определения можно повысить, если обеспечить передачу на Землю показаний бортовых акселерометров при исполнении коррекции.

На рисунках 5.8 – 5.9 показаны области ошибок приведения КА к Венере в её картинной плоскости после перехода на траекторию перелёта, после первой коррекции, после второй коррекции и импульса увода, а также после третьей коррекции.

**Таблица 5.7** – Точность приведения основного КА к Венере

Номер коррекции	Затраты характеристической скорости, м/с	Ошибка приведения после коррекции			Ошибка прогноза на момент выполнения коррекции		
		$\xi$ , км	$\eta$ , км	$\tau$ , с	$\xi$ , км	$\eta$ , км	$\tau$ , с
1	36.83	1560.9	7387.3	9501.7	10.0	79.0	39.0
2	223.82	1084.2	1068.5	204.5	2.0	1.0	0.0
3	18.17	116.6	126.5	55.5	94.0	106.0	53.0

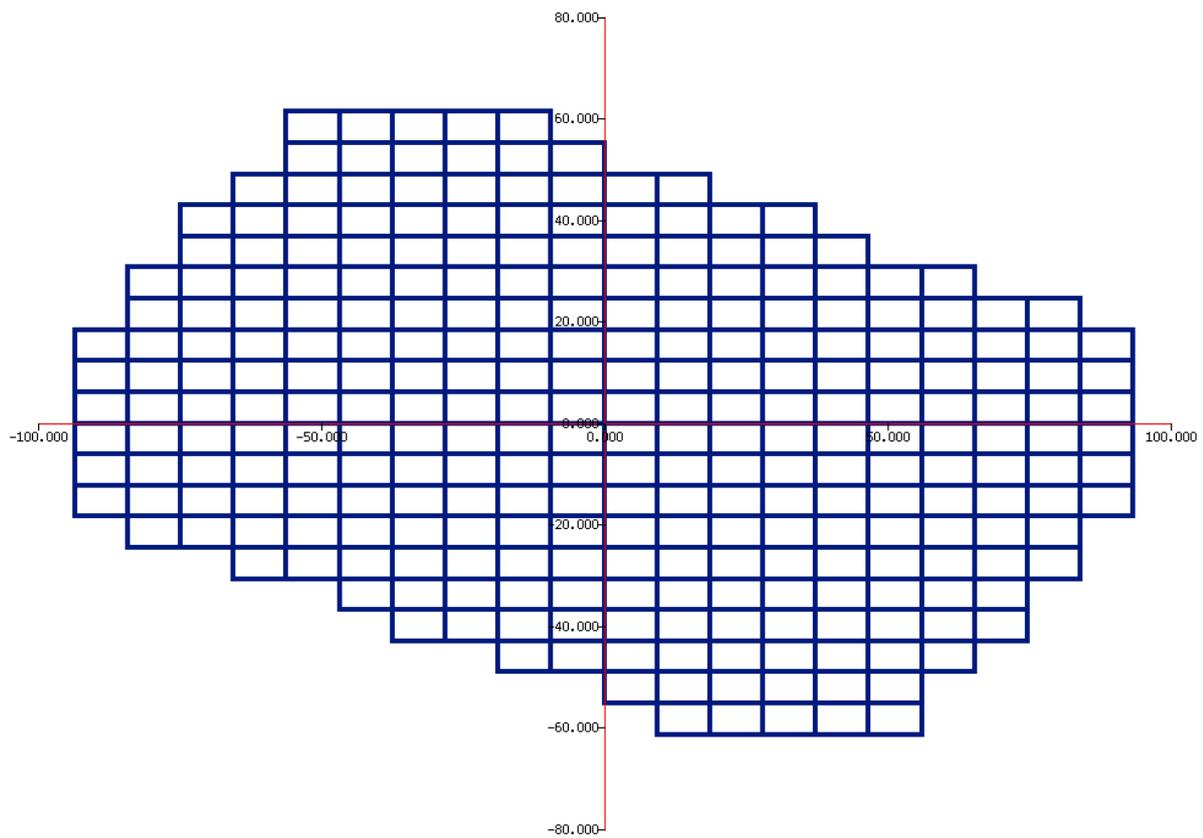
Предельная ошибка приведения основного КА по высоте перицентра 65 км;

Предельная ошибка приведения основного КА по наклонению 0.3°.

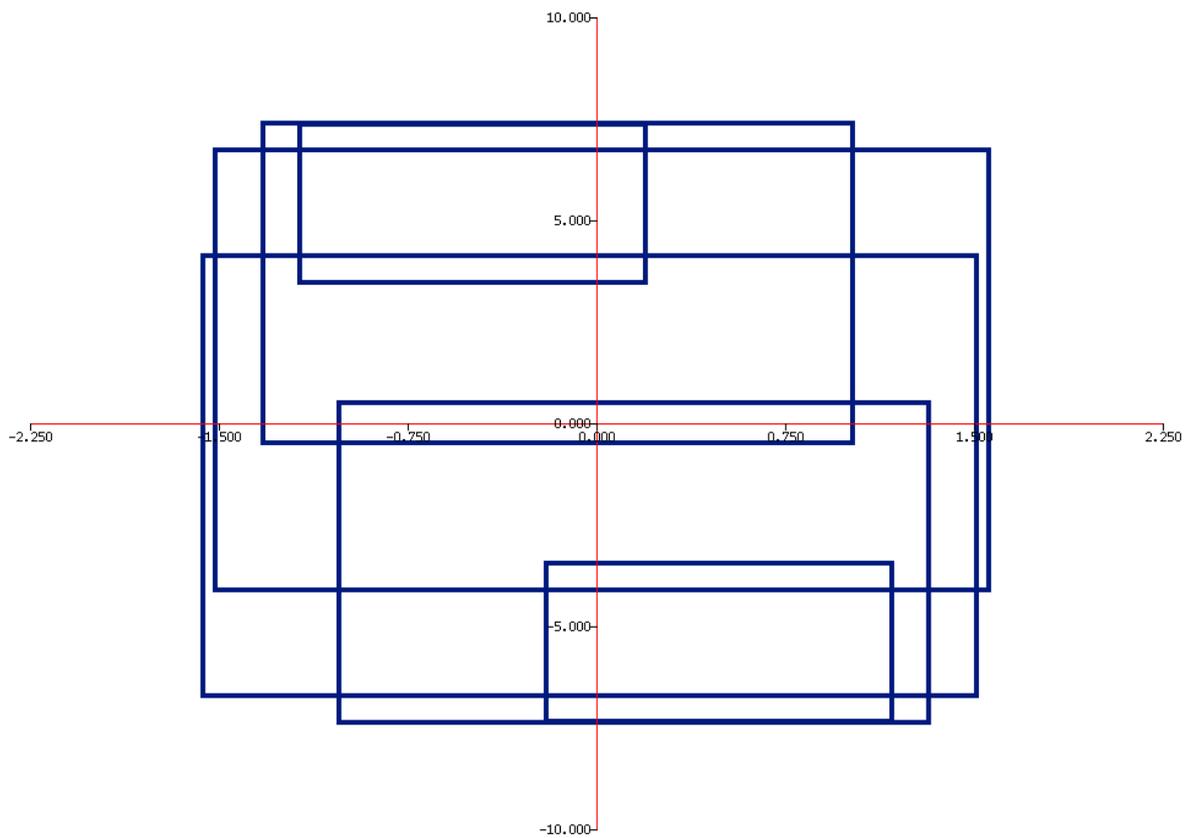
**Таблица 5.8** – Точность приведения баллона со спускаемым аппаратом к Венере

Номер коррекции	Затраты характеристической скорости, м/с	Ошибка приведения после коррекции			Ошибка прогноза на момент выполнения коррекции		
		$\xi$ , км	$\eta$ , км	$\tau$ , сек	$\xi$ , км	$\eta$ , км	$\tau$ , сек
2	100.66	486.9	511.0	139.3	2.0	1.0	0.0

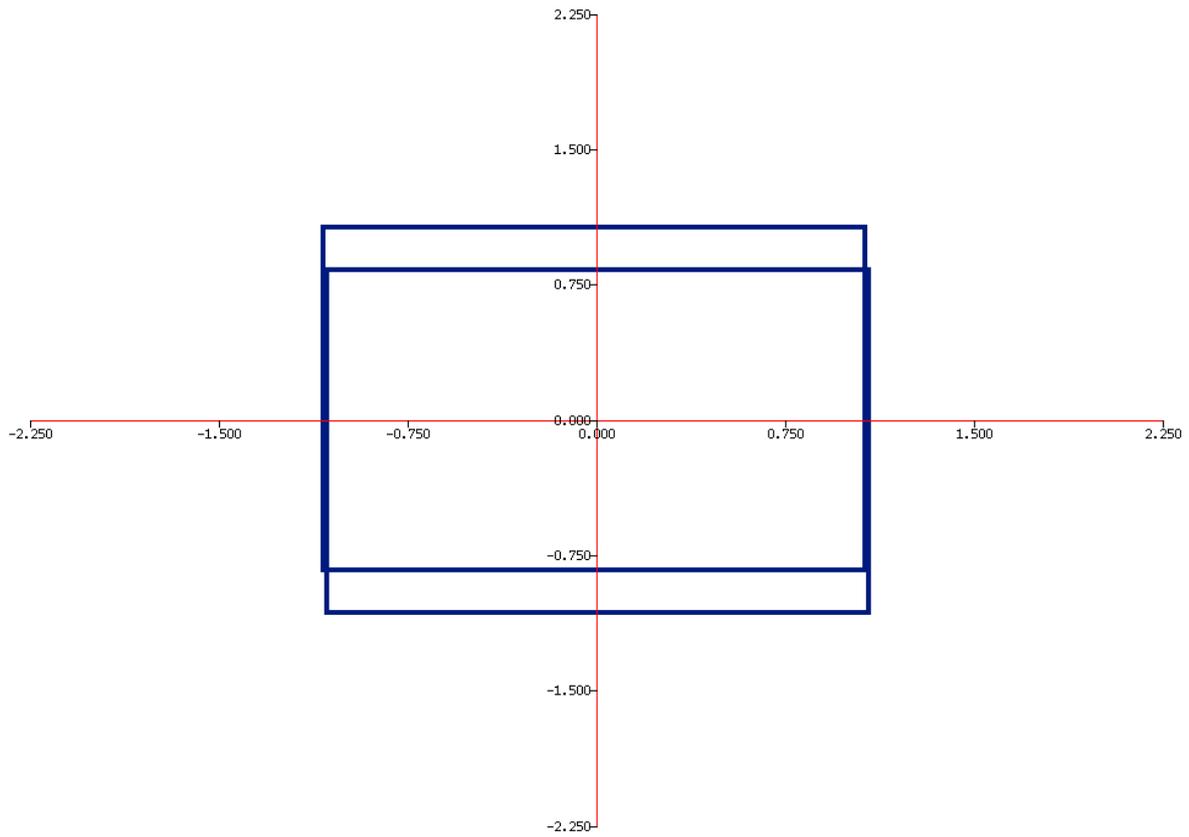
Предельная ошибка приведения баллона по углу входа составляет 1.37°.



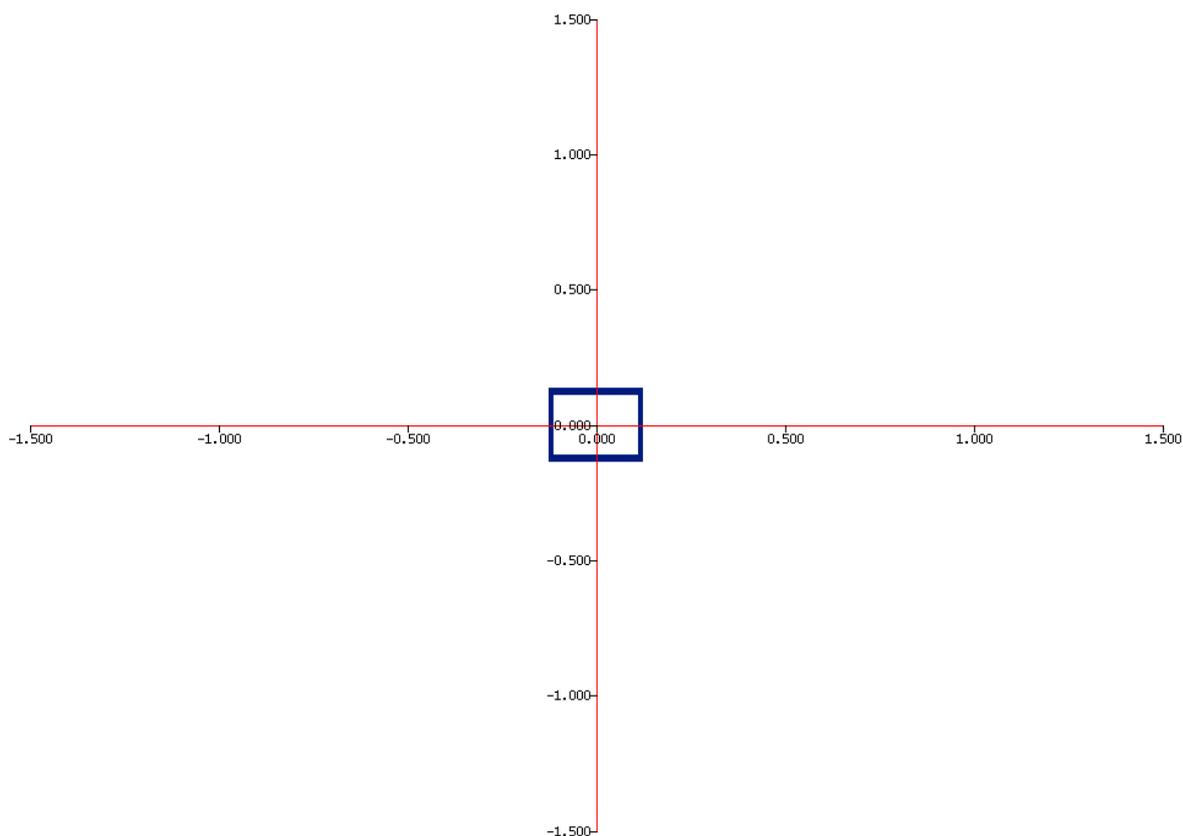
**Рисунок 5.6** – Ошибки приведения КА к Венере в её картинной плоскости после перехода на траекторию перелёта. По оси абсцисс  $\xi$  в тыс. км, по оси ординат –  $\eta$  в тыс. км.



**Рисунок 5.7** – Ошибки приведения КА к Венере в её картинной плоскости после проведения первой коррекции. По оси абсцисс  $\xi$  в тыс. км, по оси ординат –  $\eta$  в тыс. км.



**Рисунок 5.8** – Ошибки приведения основного КА к Венере в её картинной плоскости после проведения второй коррекции и маневра увода. По оси абсцисс  $\xi$  в тыс. км, по оси ординат –  $\eta$  в тыс. км.



**Рисунок 5.9** – Ошибки приведения основного КА к Венере в её картинной плоскости после проведения третьей коррекции. По оси абсцисс  $\xi$  в тыс. км, по оси ординат –  $\eta$  в тыс. км.

## **5.4 Определение точности приведения КА с ЭРДУ к Юпитеру в проекте «Лаплас»**

В этом разделе рассмотрены вопросы навигации и управления при постоянно работающей электроракетной двигательной установке. Раздел написан по результатам, представленным в [68 – Тучин, 2010] и [130 – НТО 5-012-09]. Цели и задачи проекта «Лаплас» рассмотрены в пункте 4.1.5.

### **5.4.1 Моделирование определения орбиты**

Определение параметров движения КА с целью управления его полётом будет выполняться методом, описанном в разделе 3.1. Определение параметров движения КА с ЭРДУ имеет свою специфику, поскольку рассогласование между реальной

тягой, создаваемой ЭРДУ, и номинальной тягой, предписываемой законом управления, представляет собой случайную функцию времени. Модель движения КА с ЭРДУ содержит шумовую составляющую, которую необходимо учитывать при определении параметров движения.

Рассмотрим два варианта состава траекторных измерений, на основе которых будет выполняться определение параметров движения КА с ЭРДУ:

- только наземные траекторные измерения радиальной скорости и наклонной дальности,
- наземные траекторные измерения и измерения бортового акселерометра.

Измерения бортового акселерометра будут использованы при определении ускорений, создаваемых ЭРДУ. В этом случае шумовая составляющая в уравнениях движения КА определяется ошибками измерений акселерометра.

При обработке одних лишь наземных траекторных измерений нужна модель средних рассогласований номинального и фактического векторов ускорений КА. Параметры этой модели должны уточняться наряду с фазовым вектором КА при решении задачи определения параметров движения. Ниже рассогласования между номинальным и фактическим ускорениями КА аппроксимируются разрывными кусочно-линейными функциями времени. Интервал времени с траекторными измерениями, по которым определяются параметры движения КА, – мерная база – разбивается на более мелкие интервалы одинаковой длительности. На каждом таком подынтервале каждая компонента невязок вектора ускорений представляется линейной функцией. В этом случае функционал метода наименьших квадратов наряду с суммой взвешенных квадратов рассогласований между данными измерений и их расчётными аналогами должен содержать квадраты коэффициентов линейных функций, умноженные на соответствующие веса. Шумовая составляющая модели движения КА с ЭРДУ определяется разбросами мгновенных значений ошибок ЭРДУ относительно средних значений, полученных методом линейного сглаживания.

Оцениваемыми параметрами являются фазовый вектор КА на конец мерной базы и коэффициенты линейных функций времени для каждого подынтервала

мерного интервала. Для учёта шумовой составляющей ошибок ЭРДУ делаются предположения об её среднеквадратичном отклонении (СКО) и интервале корреляции. По известным значениям указанных параметров строится формирующий фильтр, обеспечивающий генерацию шума с заданными характеристиками из белого шума. В результате получаем расширенную систему, описывающую движение КА с ЭРДУ. Возмущения в этой системе представлены в виде белого шума. Алгоритм определения вектора состояния для систем такого типа рассмотрен в пункте 3.1.3. Вектор состояния определяется итерациями из условия минимизации функционала, содержащего квадраты взвешенных невязок измеренных и расчётных значений, взвешенных возмущений, а также квадрат взвешенного отклонения априорно заданного вектора состояния от его расчётного значения. Для определения поправки на каждом шаге итерационного процесса используется фильтр Калмана для линейной системы, получаемой в результате линеаризации исходной нелинейной системы в окрестности решения, найденного на предыдущей итерации.

Описанная выше модель определения параметров движения только по траекторным измерениям формально применима и в случае, когда имеются измерения бортового акселерометра. Разбиение мерной базы на подынтервалы при этом определяется частотой передачи результатов измерений акселерометра с борта КА в наземный центр обработки. Функционал метода наименьших квадратов дополняется суммой квадратов взвешенных невязок измеренных и расчётных значений приращений характеристической скорости.

#### **5.4.2 Модель ошибок ЭРДУ**

Программа ускорения, создаваемого ЭРДУ, задается в виде зависимости от времени его модуля  $a(t) = a_0(1 - \beta t)r^{-\alpha}$  и двух углов  $A = A(t)$  и  $B = B(t)$ ,  $0 \leq A(t) \leq 2\pi$ ,  $|B(t)| \leq \pi/2$ , которые определяют орт ускорения в эклиптической системе координат  $e = (\cos A \cos B, \sin A \cos B, \sin B)^T$ .

Отклонение создаваемого ЭРДУ реального ускорения  $a_{\text{real}}$  от программного значения  $a_{\text{prog}} = a(t)e$  будем рассматривать в правой декартовой системе координат  $XYZ$ , связанной с ЭРДУ. Ось  $X$  этой системы направлена по вектору  $e$ , ось  $Y$  лежит в плоскости эклиптики и составляет угол  $A$  с осью  $y$ , причем направление отсчёта этого угла согласовано с направлением оси  $z$ . Матрица перехода из системы координат ЭРДУ в эклиптическую систему имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} \cos B \cos A & -\sin A & -\sin B \cos A \\ \cos B \sin A & \cos A & -\sin B \sin A \\ \sin B & 0 & \cos B \end{pmatrix}.$$

Отличие реального ускорения от программного разобьем на ошибку модуля и ошибку направления:  $a_{\text{real}} - a_{\text{prog}} = e \delta a + a \delta e$  (рис. 5.10). Имеют место оценки  $|\delta a| < 0.06a$ ,  $|\delta e| < 0.0173$ . Иными словами, ошибка модуля не превосходит 6% его значения, ошибка направления лежит в конусе с углом полураствора  $1^\circ$ . Ошибки ориентации КА будем считать пренебрежимо малыми по сравнению с ошибками формирования вектора ускорения, создаваемого ЭРДУ.

Пример зависимости от времени ошибки модуля вектора тяги показан на рис. 5.11. При проведении расчётов предполагалось, что каждая из ошибок  $\delta a$  и  $\delta e$  содержит систематическую и флуктуационную составляющие с интервалами корреляции 5 и 0.5 сут. Величина флуктуационной составляющей ошибки – 30% от суммарной ошибки.

Рассмотрим интервалы корреляции систематических ошибок и примем, что на этих интервалах систематическую составляющую можно представить в виде линейной функции времени, коэффициенты которой будем уточнять. Разобьем интервал работы ЭРДУ на подынтервалы, длительность которых  $\Delta t_L$  равна интервалу корреляции систематической составляющей ошибки ( $\Delta t_L = 5$  сут). На каждом таком подынтервале вектор  $\delta a = a_{\text{real}} - a_{\text{prog}}$  представим в виде (компоненты указаны в системе  $XYZ$ ):

$$\delta a = (\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3), \quad \delta a_i = p_i + q_i(t - t_L) + u_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.24)$$

Здесь  $p_i$  и  $q_i$  – уточняемые коэффициенты зависимости, аппроксимирующей систематическую составляющую отклонения вектора ускорений от его программного значения;  $t_{Li}$  – начальная точка подынтервала;  $u_{ij}$  – случайные (высокочастотные) составляющие ошибок.

В системе XYZ  $a_{\text{prog}} = (a, 0, 0)$ , поэтому указанные выше оценки ошибок принимают вид  $|\delta a_{i1}| \leq 0.06 a_{\text{max}}$ ,  $\sqrt{(\delta a_{i2})^2 + (\delta a_{i3})^2} \leq 0.0173 a_{\text{max}}$ . Положим, что случайные величины  $\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3$  имеют нормальное распределение с нулевыми средними значениями и стандартными отклонениями:

$$\sigma_1 = 0.02 a_{\text{max}}, \dots, \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{0.0173}{3\sqrt{2}} a_{\text{max}}. \quad (5.25)$$

Средние значения ошибок  $u_i$  примем равными нулю, их стандартные отклонения обозначим  $\sigma_{ui}$ . Интервал корреляции этих ошибок обозначим  $\Delta t_N$ .

Рассмотрим модель флуктуационных составляющих ошибок. Для этого введем коэффициенты:  $k_1$  – отношение длины интервалов корреляции систематической (низкочастотной) и флуктуационной (высокочастотной) составляющих ошибок ускорений, создаваемых ЭРДУ;  $k_2$  – отношение стандартного отклонения высокочастотной составляющей ошибки к соответствующему значению стандартного отклонения ускорения от заданного значения.

Известно [13 – Аоки, 1967], что ошибка с нулевым средним и заданными значениями интервала корреляции  $\Delta \tau$  и стандартного отклонения  $\sigma_y$  описывается стохастическим дифференциальным уравнением (формирующим фильтром) следующего вида:

$$\dot{y} = -\frac{1}{\Delta \tau} y + \sqrt{\frac{2}{\Delta \tau}} \sigma_y \xi \quad (5.26)$$

где  $\xi$  – белый шум с единичной интенсивностью. Используя этот факт, случайные составляющие ошибок  $u_i$  представляются в виде решения следующих стохастических дифференциальных уравнений

$$\dot{u}_i = -\frac{1}{\Delta\tau_N} u_i + \sqrt{\frac{2}{\Delta t_N}} \sigma_{ui} \xi_i, \quad (i=1,2,3), \quad (5.27)$$

где  $\xi_i$  – три независимых единичных белых шума,  $\sigma_{ui}$  и  $\Delta\tau_N$  вычисляются по формулам

$$\sigma_{u1} = k_2 \sigma_1, \quad \sigma_{u2} = \sigma_{u3} = k_2 \sigma_2, \quad \Delta\tau_N = \frac{\Delta\tau_L}{k_1}. \quad (5.28)$$

### 5.4.3 Расширенная система

Рассмотрим расширенную систему уравнений движения КА. Вектор состояния этой системы включает координаты и скорости КА в эклиптической системе координат и величины  $p_i, q_i, u_i$  ( $i=1,2,3$ ). расширенную систему можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{B}(t)\mathbf{z} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{z}} = 0, \quad \dot{\mathbf{u}} = -\frac{k_1}{\Delta t_L} \mathbf{u} + \sqrt{\frac{2k_1}{\Delta t_L}} \mathbf{G}\xi. \quad (5.29)$$

Здесь  $\mathbf{x} = (\mathbf{r}^T, \mathbf{v}^T)^T$ ,  $\mathbf{z} = (p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3)^T$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ ,

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = \left( \mathbf{v}, -\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} + \frac{a}{\xi} \mathbf{e} + \mathbf{w} \right), \quad \mathbf{G} = \text{diag}(\sigma_{u1}^2, \sigma_{u2}^2, \sigma_{u3}^2), \quad (5.30)$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{C} & (t-t_L)\mathbf{C} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 \\ e^{-\frac{k_1(t-t_L)}{\Delta t_L}} \mathbf{C} \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

$\mathbf{w}$  – возмущающие ускорения, обусловленные гравитационными полями планет Солнечной системы,  $\mathbf{0}_3$  – нулевая квадратная матрица порядка 3.

При  $t_1, t_2 \in [t_L, t_L + \Delta t_L]$  переходная матрица уравнений в вариациях для расширенной системы (матрица частных производных компонент вектора состояния на момент времени  $t_2$  по компонентам вектора состояния на момент времени  $t_1$ ) имеет вид:

$$\Psi(t_2, t_1) = \frac{\partial [x(t_2), z(t_2), u(t_2)]}{\partial [x(t_1), z(t_1), u(t_1)]} = \begin{pmatrix} \Phi(t_2, t_1) & \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2, s) B(s) ds & \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2, s) D(s) ds \\ 0_6 & E_6 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & e^{\frac{k_1(t_2-t_1)}{\Delta t_L}} E_3 \end{pmatrix},$$

где  $\Phi(t_2, t_1) = \partial x(t_2) / \partial x(t_1)$  – переходная матрица уравнений в вариациях для системы  $\dot{x} = F(t, x)$ ,  $E_3$  и  $E_6$  – единичные матрицы порядков 3 и 6,  $0_6$  – нулевая квадратная матрица порядка 6. Входящие в выражение для  $\Psi(t_2, t_1)$  однотипные интегралы вычисляются с помощью соотношений вида

$$\int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2, s) B(s) ds = \int_{t_L}^{t_2} \Phi(t_2, s) B(s) ds - \Phi(t_2, t_1) \int_{t_L}^{t_1} \Phi(t_1, s) B(s) ds, \quad (5.32)$$

$$\Phi(t, s) = \Phi(t, t_L) \Phi^{-1}(s, t_L).$$

Если  $t_1$  и  $t_2$  принадлежат разным отрезкам (интервалам корреляции)  $[t_L, t_L + \Delta t_L]$ , то вычисление  $\Psi(t_2, t_1)$  сводится к произведению матриц, отвечающих отдельным отрезкам. Пусть между точками  $t_1$  и  $t_2$  лежат граничные точки отрезков  $t_{L,i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $t_{L,i+1} = t_{L,i} + \Delta t_L$ ,  $t_1 < t_{L,1}$ ,  $t_{L,n} < t_2$ . Тогда

$$\Psi(t_2, t_1) = \Psi(t_2, t_{L,n} + 0) \Psi(t_{L,n} - 0, t_{L,n-1} + 0) \dots \Psi(t_{L,1} - 0, t_1). \quad (5.33)$$

#### 5.4.4 Оценка ошибок определения вектора состояния и параметров линейных функций

При расчёте ошибок оцениваемых параметров принималось, что обработка траекторных измерений выполняется методом наименьших квадратов по следующей схеме. Параметры определяются на конец каждого подынтервала  $[t_L, t_L + \Delta t_L]$ . Определение параметров текущего подынтервала происходит с использованием в качестве априорной информации вектора состояния КА, полученного на предыдущем подынтервале. Весовая матрица априорной информации формируется на начало подынтервала по ковариационной матрице ошибок определения вектора состояния, полученного на предыдущем подынтервале. Параметры линейных функций, описывающих ошибку ускорений,

создаваемых ЭРДУ, определяются на каждом подынтервале независимо от значений параметров, полученных на предыдущих подынтервалах. Ковариационная матрица на начало каждого подынтервала представляется блочной матрицей вида

$$C_{0,j} = \text{diag}(C_{x,j-1}, C_{z0}, C_{u0}), \quad (5.34)$$

где  $C_{x,j-1}$  – ковариационная матрица ошибок определения компонент вектора состояния, полученная на предыдущем интервале  $j-1$ , для самого первого интервала – это ковариационная матрица ошибок определения на пассивном участке полёта;  $C_{z0}$  – ковариационная матрица возможных значений коэффициентов линейных функций:

$$C_{z0} = (1 - k_2^2) \text{diag} \left( \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \frac{\sigma_1^2}{\Delta t_L^2}, \frac{\sigma_2^2}{\Delta t_L^2}, \frac{\sigma_3^2}{\Delta t_L^2} \right) \quad (5.35)$$

$C_{u0} = \text{diag}(\sigma_{u1}^2, \sigma_{u2}^2, \sigma_{u3}^2)$  – ковариационная матрица начальных значений высокочастотного шума.

Оценка точности определения и прогнозирования параметров движения выполнялась в предположении, что траекторные измерения выполняются двумя российскими станциями слежения в Медвежьих Озёрах и Уссурийске. Используется X-диапазон частот. Выполняются запросные измерения радиальной скорости и наклонной дальности. Предельные ошибки измерений составляют 20 м по наклонной дальности и 0.2 мм/с по радиальной скорости. Предполагалось, что каждая станция может проводить до двух сеансов в сутки при наличии видимости. Такая схема обеспечивает три сеанса траекторных измерений в сутки: либо один из Медвежьих Озёр и два из Уссурийска, либо два из Медвежьих Озёр и один из Уссурийска.

Также предполагалось, что для определения орбиты может быть использован высокоточный акселерометр, установленный на борту КА в составе бесплатформенного инерциального блока (БИБ). Измерения, получаемые от БИБ, обрабатываются на борту. В результате получают приращения характеристической скорости в направлении номинального вектора тяги и в

направлениях, ортогональных ему. Результаты каждые шесть часов передаются на Землю и используются при определении орбиты.

На рис. 5.12 – 5.15 представлены предельные ошибки определения компонент вектора состояния КА в радиальном, трансверсальном и ортогональном плоскости орбиты направлениях. Предельные ошибки определения параметров движения для случая использования только наземных траекторных измерений приведены на рис. 5.12 и 5.13. Оценка ошибок определения параметров движения КА при совместном использовании наземных траекторных измерений и измерений бортового акселерометра выполнялась для трёх значений точности измерений акселерометра:  $10^{-6}$ ,  $5 \cdot 10^{-7}$  и  $10^{-7}$  м/с<sup>2</sup>. На рис. 5.14 и 5.15 приведены предельные ошибки определения параметров движения для случая совместного использования наземных траекторных измерений и измерений акселерометра с точностью  $10^{-7}$  м/с<sup>2</sup>.

#### **5.4.5 Технология управления КА на участке перелёта**

При проведении анализа предполагалось, что будет использована следующая технология управления КА. Управление тягой ЭРДУ выполняется бортовым компьютером по программе, передаваемой из наземного центра управления полётом. В центре управления полётом определяются параметры движения КА по данным наземных и бортовых траекторных измерений. По результатам определения параметров движения рассчитывается программа работы ЭРДУ на оставшийся участок полёта. Каждые 10 суток при необходимости программа работы ЭРДУ может быть изменена на борту КА.

#### **5.4.6 Расчёт ошибок приведения КА к Юпитеру и оценки дополнительного расхода топлива**

Расчёт оценки приведения КА к Юпитеру и оценки дополнительного расхода топлива выполнялся методом статистических испытаний. В начале рассчитывается номинальная траектория перелёта. В течение первых 10 суток полёта моделируется движение КА по номинальной программе. При моделировании используется

некоторая реализация ошибок работы ЭРДУ. В результате на десятые сутки КА приводится в заданную точку пространства с ошибками по положению и скорости. Полученный вектор состояния КА используется для расчёта программы работы ЭРДУ на оставшемся участке. Однако в реальном полёте вектор состояния КА будет известен неточно, а с ошибками навигации. Поэтому в ходе моделирования при расчёте программы работы ЭРДУ вектор состояния КА искажается навигационными ошибками. Далее моделируются следующие десять суток полёта. Цикл продолжается до приведения КА на сферу действия Юпитера. В результате оценивается ошибка приведения и дополнительные затраты ксенона. Расчёты повторяются для нескольких реализаций ошибок тяги ЭРДУ.

Результаты расчётов представлены в табл. 5.9 и 5.10. Предельные ошибки приведения в заданную точку сферы влияния составляют 1410 км по положению и 2.3 м/с по скорости в случае, когда используются только траекторные измерения. Вклад ошибок прогноза параметров движения составляет 74% в ошибки по положению и 87% в ошибки по скорости. В случае использования акселерометра предельные ошибки приведения составляют ~1000 км по положению и 1.2 м/с по скорости. В этом случае вклад ошибок прогноза составляет ~35% по положению и 40% по скорости.

Описанная схема управления позволяет привести КА в сферу действия Юпитера с предельными ошибками, которые не превосходят 1410 км по положению и 2.3 м/с по скорости. Программа управления работой ЭРДУ должна обновляться каждые 10 суток.

Управление КА на участке перелёта обеспечивают две станции в Медвежьих Озёрах и Уссурийске. Должен использоваться X-диапазон частот. Предельные ошибки траекторных измерений не должны превышать 0.2 мм/с по радиальной скорости и 20 м по наклонной дальности.

Бортовые акселерометры позволяют повысить точность определения параметров движения и уменьшить ошибки приведения КА в сферу действия Юпитера.

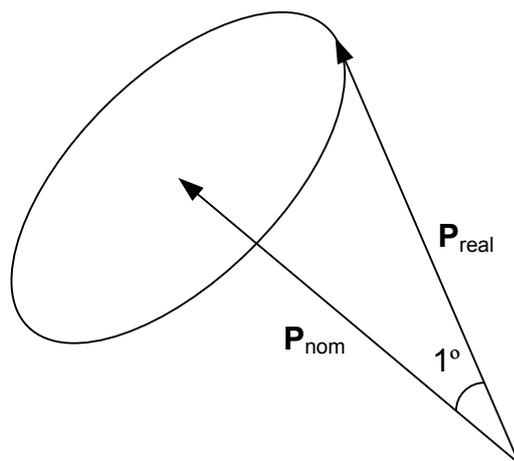
Можно сделать вывод: управление КА в сфере действия Юпитера должно строиться на основе химических двигателей.

**Таблица 5.9** – Предельные ошибки приведения в заданную точку сферы влияния Юпитера

Вариант	Предельная ошибка по положению, км	Предельная ошибка по скорости, м/с
Используются только наземные траекторные измерения	1410	2.3
Используются наземные траекторные измерения и измерения акселерометра с СКО $10^{-7}$ м/с <sup>2</sup>	990	1.2
Используются наземные траекторные измерения и измерения акселерометра с СКО $5 \cdot 10^{-7}$ м/с <sup>2</sup>	1000	1.2
Используются наземные траекторные измерения и измерения акселерометра с СКО $10^{-6}$ м/с <sup>2</sup>	1010	1.2

**Таблица 5.10** – Вклад навигационных ошибок в ошибки приведения в заданную точку небесной сферы

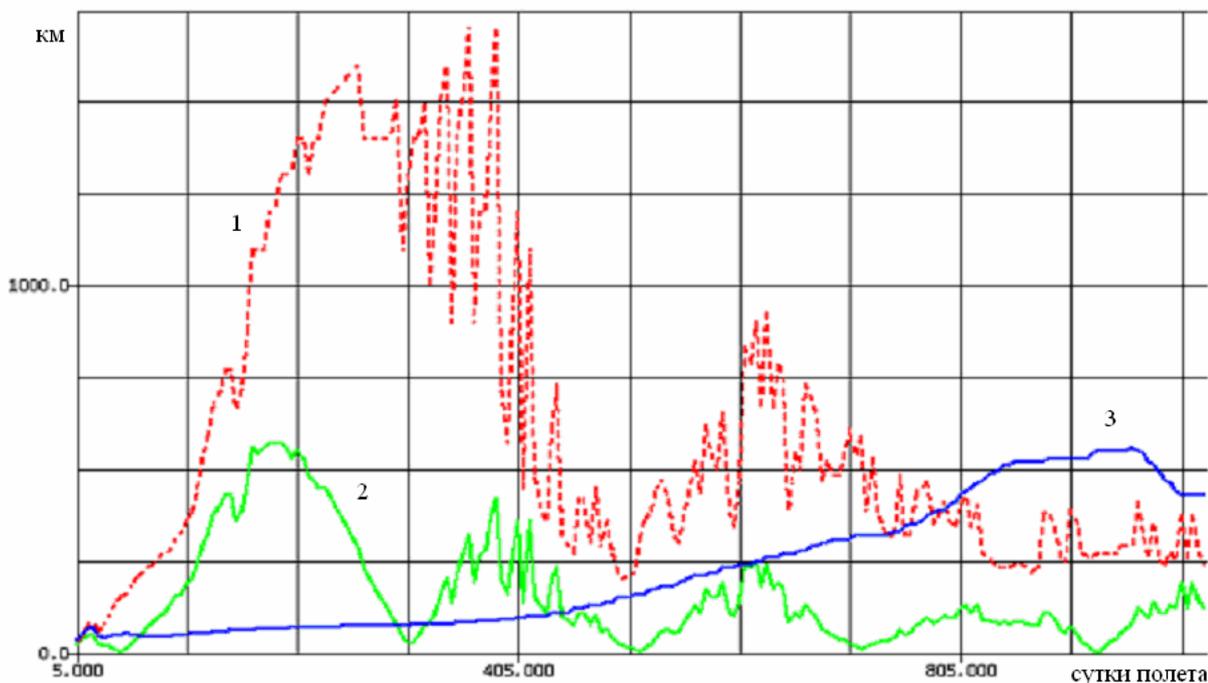
Вариант	Вклад в ошибку (предельную) по положению, км	Вклад в ошибку (предельную) по скорости, м/с
Используются только наземные траекторные измерения	1045	2.0
Используются наземные траекторные измерения и измерения акселерометра с СКО $10^{-7}$ м/с <sup>2</sup>	290	0.38
Используются наземные траекторные измерения и измерения акселерометра с СКО $5 \cdot 10^{-7}$ м/с <sup>2</sup>	320	0.43
Используются наземные траекторные измерения и измерения акселерометра с СКО $10^{-6}$ м/с <sup>2</sup>	340	0.47



**Рисунок 5.10 – Ошибки исполнения ЭРДУ**



**Рисунок 5.11 – Пример зависимости модуля вектора тяги от времени. По оси абсцисс отложено время в часах. По оси ординат тяга в процентах по отношению к номинальному значению**



**Рисунок 5.12** – Зависимость от времени предельных значений ошибок определения положения КА при использовании только траекторных измерений: 1 – ошибка определения вдоль трансверсали орбиты (Т), 2 – радиальная составляющая ошибки (R), 3 – составляющая ошибки в направлении нормали к плоскости орбиты (В). Максимальные значения ошибок составляют: 570, 1700 и 560 км в направлениях R, T и В соответственно.

## 5.5 Требования по точности наземных и бортовых траекторных измерений

Основными измерениями, обеспечивающими определение орбит КА дальнего космоса, являются наземные траекторные измерения. Для навигационного обеспечения различных динамических операций состав траекторных измерений дополняется бортовыми траекторными измерениями, состав которых зависит от типа динамической операции. Следует отметить, что любой тип бортовых траекторных измерений требует точного знания ориентации КА, которая обеспечивается звёздным прибором.

Рассмотрим следующие динамические операции:

- сброс зонда при подлёте к Марсу или Венере;

- гравитационный маневр в сфере действия Венеры, Земли или Юпитера;
- перелёт с ЭРДУ;
- сближение с малым телом и посадка на его поверхность;
- сближение со спутником планет-гигантов;
- пролёт сферы действия планет-гигантов;
- выполнение небесно-механических экспериментов на границах Солнечной системы.

Сброс зонда при подлёте к Марсу или Венере предъявляет высокие требования к точности приведения зонда на границу атмосферы. Сброс зонда происходит по следующей схеме. С упреждением в несколько дней до отделения зонда выполняется маневр его наведения в заданную точку планеты, а затем коррекция для исправления ошибок исполнения маневра наведения. Такие динамические операции требуют определения орбиты по короткой мерной базе. Для этого измерения наклонной дальности и радиальной скорости должны быть дополнены РСДБ измерениями. Кроме этого для определения орбиты после выполнения маневра будут эффективны измерения бортовых акселерометров, выполненные в ходе работы двигательной установки КА, с точностями не хуже  $10^{-7}$  м/с<sup>2</sup>.

Гравитационный маневр в сфере действия Земли, Венеры или Юпитера также требует высокой точности приведения КА к планете. Судя по опыту управления полётами иностранными КА, для обеспечения точности наведения КА проводится одна или две коррекции. В свою очередь это требует возможности определения орбиты КА по короткой мерной базе. Поэтому наземные траекторные измерения должны быть дополнены РСДБ измерениями и измерениями бортовых акселерометров.

Определение орбиты на участке полёта работы ЭРДУ требует наряду с наземными траекторными измерениями измерения бортовых акселерометров.

Выполнение сближения с малым небесным телом и посадки на его поверхность требует следующих типов бортовых траекторных измерений:

- телевизионных навигационных изображений малого небесного тела, необходимых для определения направления на объект при совместном определении орбиты КА и эфемерид малого небесного тела;
- лазерных измерений дальности от КА до поверхности небесного тела;
- радиотехнических измерений дальности и скорости по направлениям лучей для определения нормали к поверхности, расстояния и скорости сближения КА и малого небесного тела.

По опыту работы с КА «Кассини» восстановление траектории полёта при сближении КА с Титаном потребовало точности бортовых акселерометров не хуже  $10^{-8} \text{ м/с}^2$ .

Судя по опыту проектирования полёта КА «New Horizons», необходимая для управления при пролёте точность ( $\sim 100 \text{ км}$ ) достигается при дополнительном использовании бортовых навигационных изображений планеты и её спутников.

На основе анализа требований по точности прогноза движения КА при проведении указанных выше динамических операций в [123 – НТО 5-016-09] сформулированы требования к точности наземных и бортовых траекторных измерений. Они представлены в следующем пункте.

### **5.5.1 Требования к точности наземных траекторных измерений**

В качестве наземных траекторных измерений рассматриваются измерения наклонной дальности, радиальной скорости и РСДБ измерения в диапазонах X и Ka. Проведённый анализ показал, что для выполнения перспективных задач исследования дальнего космоса необходимо обеспечить следующую точность наземных траекторных измерений (см. таблицу 5.11).

Для обеспечения РСДБ измерений стабильность ЗГ бортового генератора должна быть не хуже  $10^{-8}$ .

**Таблица 5.11** – Точность наземных траекторных измерений

Тип измерений	Предельная ошибка измерений без учёта среды распространения	
	В ближайшей перспективе	При дальнейшем развитии
наклонная дальность	20 м	5 м
запросные доплеровские измерения радиальной скорости	0.2 мм/с	0.05 мм/с
беззапросные доплеровские измерения радиальной скорости	0.5 мм/с без учёта ухода бортового ЗГ	0.1 мм/с без учёта ухода бортового ЗГ
измерения по схеме трёхпутевого доплера	0.1 мм/с	0.025 мм/с
РСДБ измерения	3 временные наносекунды	1.5 временных наносекунд

### 5.5.2 Требования к точности бортовых акселерометров

Бортовые акселерометры эффективно дополняют наземные траекторные измерения в случае определения орбиты КА на участке работы ЭРДУ, а также при сближениях со спутниками планет, имеющих атмосферу.

Как показали результаты моделирования, приведённые в [68 –Тучин, 2010], измерения бортовых акселерометров для их использования при определении параметров движения КА на участках работы ЭРДУ должны иметь точность не хуже  $10^{-6}$  м/с<sup>2</sup>.

Как показал опыт обработки информации, полученной КА «Кассини» в ходе пролётов Титана, бортовые акселерометры должны иметь точность не хуже  $10^{-8}$  м/с<sup>2</sup>.

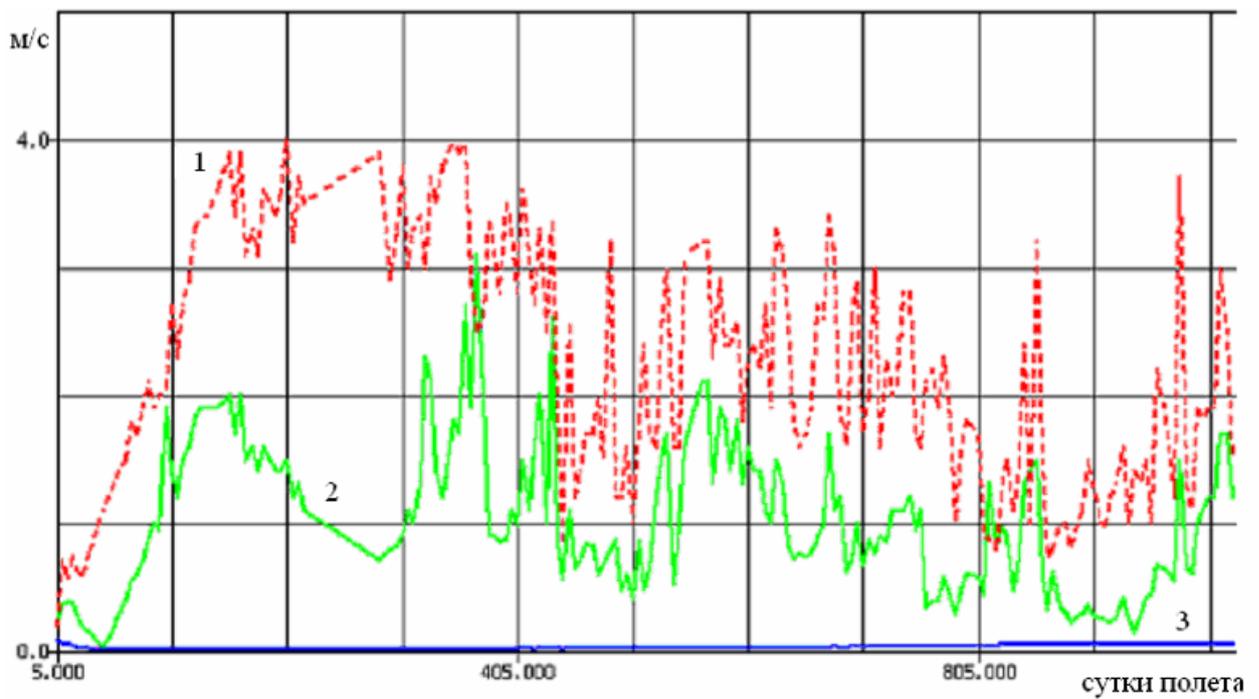
### 5.5.3 Требования к точности бортовых измерений направления на планеты, их спутники и астероиды

Измерения направления на объект эффективны при подготовке посадки на малое небесное тело и при навигационном обеспечении пролётов дальних планет

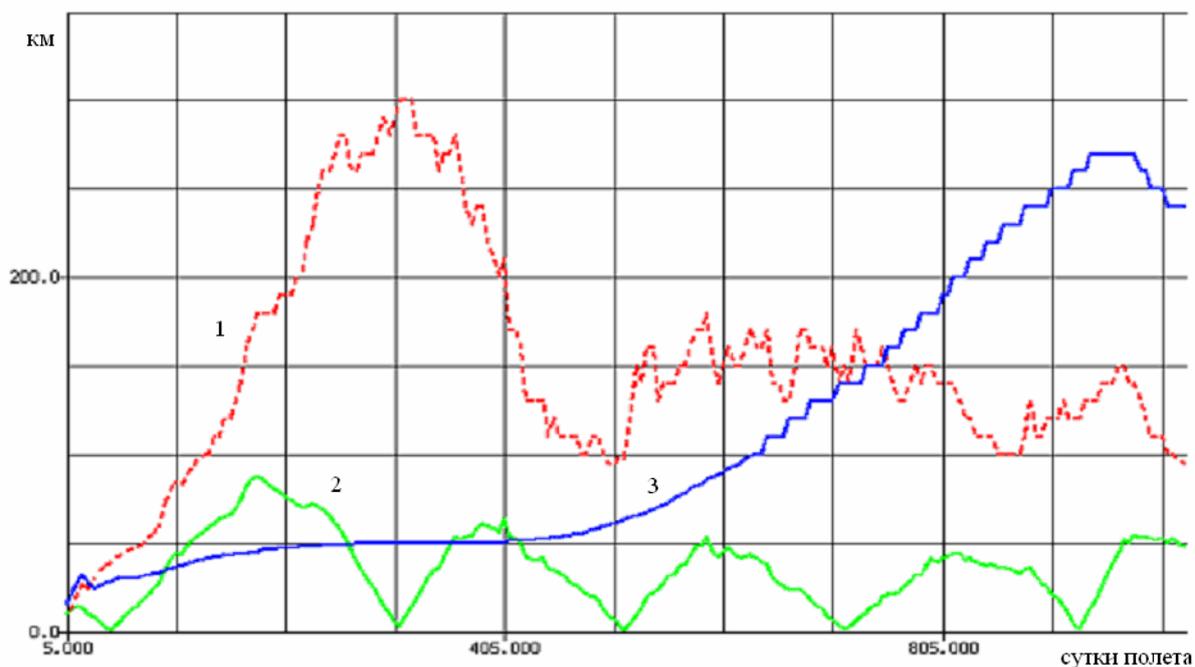
Нептуна, Урана и Плутона и их спутников, эфемериды которых пока не определены с точностью, необходимой для учёта возмущающих сил при определении орбиты.

При подготовке посадки на малое небесное тело измерения направления на объект, получаемые по изображениям этого небесного тела, используются для уточнения эфемерид небесного тела. Как показал опыт проектирования посадки КА на поверхность Фобоса, если предельная ошибка определения направления на Фобос не превосходит 15 угловых минут с расстояния 50 км, этого достаточно, чтобы по совокупности с наземными траекторными измерениями определить взаимное положение КА и Фобоса с предельными ошибками не более трёх км по положению и 0.5 м/с по скорости, что соответствует требованиям автономной системы управления посадкой [63 – Тучин, 2009].

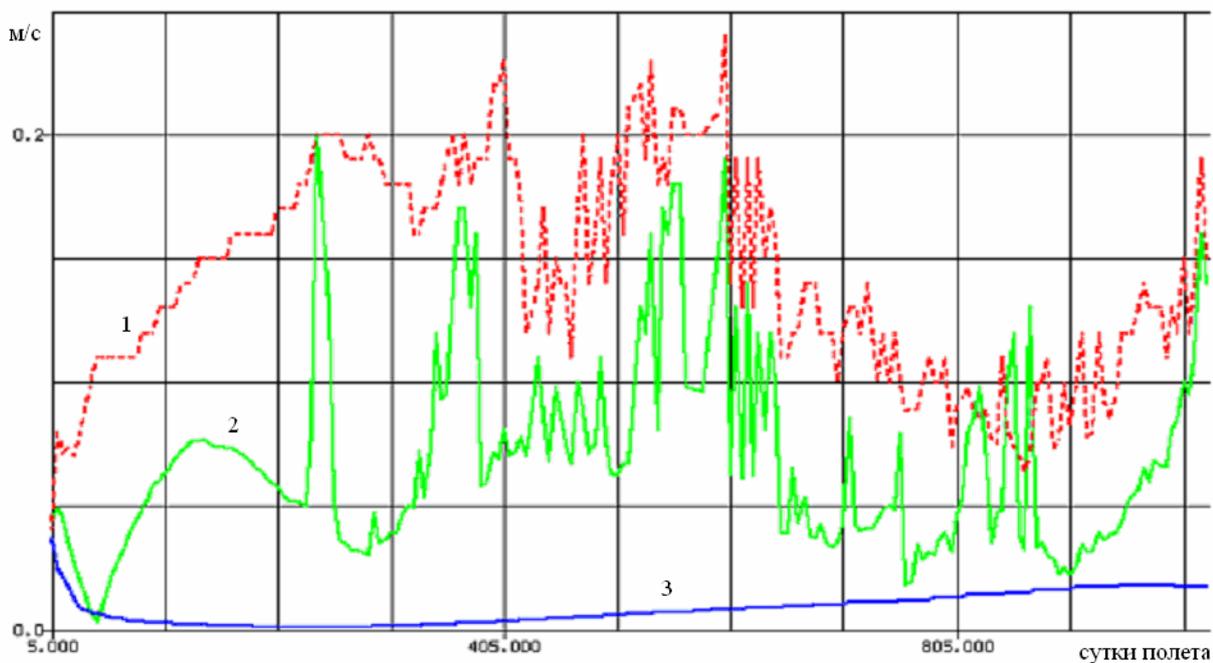
Опыт проектирования полёта КА «New Horizons» [119 – Williams, 2009] показал, что определение пролётной орбиты КА и уточнение эфемерид планет и их спутников нужно выполнять с использованием навигационных изображений. Точность определения направления на объект, получаемая по этим изображениям должна быть не хуже 18 угловых минут (5 Мрад).



**Рисунок 5.13** – Зависимость от времени предельных значений ошибок определения скорости КА при использовании только траекторных измерений: 1 – ошибка определения вдоль трансверсали орбиты (Т), 2 – радиальная составляющая ошибки (R), 3 – составляющ 3 ошибки в направлении нормали к плоскости орбиты (B). Максимальные значения ошибок составляют: 3.1, 4.1 и 0.1 м/с в направлениях R,Т и B соответственно.



**Рисунок 5.14** – Зависимость от времени предельных значений ошибок определения положения КА при использовании наземных траекторных измерений и измерений бортовых акселерометров с СКО  $10^{-7}$  м/с<sup>2</sup>: 1 – ошибка определения вдоль трансверсали орбиты (Т), 2 – радиальная составляющая ошибки (R), 3 – составляющая ошибки в направлении нормали к плоскости орбиты (В). Максимальные значения ошибок составляют: 87, 300 и 270 км в направлениях R,Т и В соответственно.



**Рисунок 5.15** – Зависимость от времени предельных значений ошибок определения скорости КА при использовании наземных траекторных измерений и измерений бортовых акселерометров с СКО  $10^{-7}$  м/с<sup>2</sup>: 1 – ошибка определения вдоль трансверсали орбиты (Т), 2 – радиальная составляющая ошибки (R), 3 – составляющая ошибки в направлении нормали к плоскости орбиты (В). Максимальные значения ошибок составляют: 0.2, 0.25, 0.04 м/с в направлениях R, Т и В соответственно.

## Заключение

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Разработан метод проектирования квазисинхронных орбит КА вокруг Фобоса, позволяющий вычислить параметры орбиты КА, которая в заданное время проходит над заданной долготой поверхности Фобоса и обладает свойством минимального дрейфа, т.е. проходит заданную долготу примерно на одинаковом расстоянии от поверхности Фобоса. Метод позволил предварительно вычислить набор таблиц, каждая из которых соответствует значению максимального удаления от поверхности Фобоса. На основе этих таблиц простой вычислительный алгоритм определяет параметры орбиты КА, которая обладает свойством минимального дрейфа и в заданное время проходит над заданной долготой поверхности Фобоса.

2. Разработаны методы бортовой навигации, обеспечивающие сближение с малым небесным телом и посадку на его поверхность. Методы предназначены для их реализации на бортовом компьютере, предполагают использование цифровой модели поверхности небесного тела, используют измерения дальности и скорости в направлении лучей навигационных приборов и позволяют работать на фоне работающих двигателей. Алгоритмы и бортовые программы навигационного обеспечения участка посадки проекта «Фобос-Грунт» разработаны на основе этих методов.

3. Разработан метод определения параметров движения КА в условиях воздействия шума. Метод основан на представлении модели движения КА в виде композиции опорного движения и движения относительно опорного. Движение относительно опорного представляет собой случайный процесс с нулевым средним и описывается линейным стохастическим дифференциальным уравнением. Оценка вычисляется из условия минимизации функционала, содержащего квадраты взвешенных невязок между измеренными значениями и их расчётными моделями, а также взвешенные нормы векторов суммарных возмущений между измерениями. Метод применён в алгоритмах определения параметров движения КА на

фоне работы двигательной установки. На основе этих методов разработаны алгоритмы определения параметров движения КА с электроракетными двигательными установками (ЭРДУ).

4. Разработан метод оценки точности приведения КА в заданную область в пространстве целевых параметров с учётом ошибок исполнения и навигационных ошибок. В качестве целевых параметров могут быть выбраны параметры картинной плоскости при решении задачи приведения КА к планете или Луне; высота над поверхностью, вертикальная и горизонтальная составляющая вектора скорости при решении задачи обеспечения условий начала сеанса посадки на поверхность Луны; параметры, определяющие геометрию гало-орбиты, при решении задачи перелёта на гало-орбиту. Метод использован при оценке точности приведения КА в проектах «Фобос-Грунт», «Луна-Ресурс», «Луна-Глоб», «Венера-Д».

Научная новизна разработанных методов заключается в следующем:

1. Новизна разработанного метода проектирования квазисинхронных орбит КА вокруг Фобоса состоит в том, что усреднённая система учитывает дрейф эллипса, по которому совершается облёт КА вокруг Фобоса, в направлении, которое ортогонально орбитальному движению Фобоса. Наличие этого уравнения позволило найти начальные приближения для орбит с минимальным дрейфом, а затем построить искомые семейства орбит.

2. Новизна методов бортовой навигации на участке посадки состоит в том, что найдены такие модели движения КА и построены такие модели измерений, которые, с одной стороны, обладают простотой, позволяющей реализовать их на бортовом компьютере, а с другой стороны, точностью, позволяющей решить поставленную задачу.

3. Научная новизна метода оценки параметров движения КА в условиях воздействия шума состоит в предложенной модели движения, представляющей собой композицию детерминированного опорного движения и случайного процесса, который описывается линейным стохастическим дифференциальным уравнением, а также в методе, который

обеспечивает одновременное получение оценки вектора состояния КА и векторов суммарных возмущений между измерениями.

## Список использованных источников

1. Абрамович С.К., Агеева Т.Д., Аким Э.Л. и др. Баллистика и навигация автоматических межпланетных станций «Венера-9» и «Венера-10». // Космические исследования. – 1976. – Т. 14. № 5. – С. 667-676.
2. Абрамович С.К., Агеева Т.Д., Аким Э.Л. и др. Баллистика и навигация автоматических межпланетных станций «Венера-11» и «Венера-12». // Космические исследования. – 1979. – Т. 17. № 5. – С. 670-680.
3. Агаджанов П.А., Дулевич В.Е., Коростелев А.А. Космические траекторные измерения. Радиотехнические методы измерений и математическая обработка данных. – М.: Советское радио, 1969. – 504 с.
4. Агеева Т.Д., Аким Э.Л., Иванов Н.М. и др. Баллистика и навигация автоматических межпланетных станций «Венера-13» и «Венера-14» // Космические исследования. – 1983. – Т. 21. № 2. – С. 160-169.
5. Аким Э.Л. Определение поля тяготения Луны по движению искусственного спутника Луны «Луна-10» // ДАН СССР. – 1966. – Т. 170, № 4. – С.799-802.
6. Аким Э.Л., Бажинов И.К., Павлов В.П., Почукаев В.Н. Поле тяготения Луны и движение её искусственных спутников. – М.: Машиностроение, 1984. – 288 с.
7. Аким Э.Л., Власова З.П. Исследования гравитационного поля Луны по данным измерений траекторий советских ИСЛ. // Космические исследования. – 1983. – Т. 21, Вып. 4.
8. Аким Э.Л., Власова З.П. Модель гравитационного поля Луны по наблюдениям за движением ее искусственных спутников Луны «Луна-10, -12, -14, -19 и -22» // ДАН СССР. – 1977. – Т. 235, № 1. – С.38-41.
9. Аким Э.Л., Горохова А.А., Киселева И.П., Степаньянц В.А., Тучин А.Г. Небесно-механическая интерпретация и первичная обработка измерений КА «Гранат» и «Интербол». // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 1996. – № 83. – 21 с.

10. Аким Э.Л., Горохова А.А., Степаньянц В.А., Тучин А.Г. Контроль траектории выведения по данным траекторных измерений. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 1999. – № 10. – 26 с.
11. Аким Э.Л., Степаньянц В.А. Численная теория движения Венеры по результатам радиолокационных наблюдений // ДАН СССР. – 1979. – Т. 233. – С. 314-318.
12. Аким Э.Л., Энеев Т.М. Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений // Космические исследования. – 1963.–Т. 1, Вып. 1. – С.5-50
13. Аоки М. Оптимизация стохастических систем. – М.: Наука, 1967. – 424 с.
14. Бакитько Р.В., Васильев М.Б., Винницкий А.С. и др. Радиосистемы межпланетных космических аппаратов. – М.: Радио и связь, 1993. – 328 с.
15. Берке У. Пространство-время, геометрия, космология. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
16. Брумберг В.А., Финкельштейн А.М. Проблема сопоставления результатов наблюдений и теоретических данных при проверке релятивистских эффектов в Солнечной системе. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1979. – Т. 76, Вып. 5.
17. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. – М.: Наука, 1972. – 382 с.
18. Брумберг В.А. Релятивистские эффекты при радиолокационных, оптических и радиоинтерферометрических измерениях. // Астрономический журнал. – 1981. – Т. 58, Вып. 1. – С.181-183
19. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
20. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. – М: Наука, 1968. – 456 с.

21. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. – М.: Наука, 1975. – 800 с.
22. Егоров В.А., Гусев Л.И. Динамика перелётов между Землей и Луной. – М., «Наука», 1980. – 543 с.
23. Засова Л.В., Мороз В.И., Линкин В.М. и др. Строение атмосферы Венеры от поверхности до 100 км. // Космические исследования. – 2006. – Т. 44. № 4. – С. 381-400.
24. Засова Л.В., Мороз В.И., Формизано В. и др. Исследование Венеры с помощью ИК Фурье-спектрометра на Венере-15 и Планетного Фурье-спектрометра на борту Венеры-Экспресс. // Космические исследования. – 2006. – Т. 44. № 4. – С. 365-380.
25. Зельманов А.Л., Агаков В.Г. Элементы общей теории относительности. – М.: Наука, 1989. – 240 с.
26. Иванов Н.М., Поляков В.С. Наведение автоматических межпланетных станций. – М.: «Машиностроение», 1987. – 312 с.
27. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971 – 400 с.
28. Квашнин А.Г., Тучин А.Г. Априорная гарантированная оценка точности определения параметров динамической системы. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 1991 – № 104 – 23 с.
29. Квашнин А.Г., Тучин А.Г. Баллистическое обеспечение радиоинтерферометрических измерений. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 1992. – № 98. – 26 с.
30. Кислик М.Д. Релятивистские возмущения при астрометрических наблюдениях планет. // Письма в АЖ. – 1980. – Т. 6, № 12.
31. Коган А.Ю. Далёкие спутниковые орбиты в ограниченной круговой задаче трёх тел. // Космические исследования. – 1988. – Т. 26, № 6. – С. 813-818.
32. Колосов М.А., Арманд Н.А., Яковлев О.И. Распространение радиоволн при космической связи. – М.: Связь, 1969. – 155 с.

33. Константинов М.С., Попов Г.А., Федотов Г.Г. Оценка использования солнечной электрореактивной установки для выведения спутника Юпитера. // Космические исследования. – 2002. – Т. 40, № 2. – С. 201-208.
34. Котельников В.А., Барсуков В.Л., Аким Э.Л. и др. Атлас поверхности Венеры. – М.: Главное управление геодезии и картографии при Совете Министров СССР, 1989. – 328 с.
35. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
36. Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. – М.: Наука, 1966. – 176 с.
37. Лидов М.Л., Вашковьяк М.А. О квазиспутниковых орбитах в ограниченной эллиптической задаче трёх тел. // Письма в АЖ. – 1994. – Т. 20, № 10. – С. 781-795.
38. Лидов М.Л., Вашковьяк М.А. О квазиспутниковых орбитах для эксперимента по уточнению гравитационной постоянной. // Письма в АЖ. – 1994. – Т. 20, № 3. – С. 229-240.
39. Лидов М.Л., Вашковьяк М.А. Теория возмущений и анализ эволюции квазиспутниковых орбит в ограниченной задаче трёх тел. // Космические исследования. – 1993. – Т. 31, № 2. – С. 75-99.
40. Лидов М.Л., Рабинович В.Ю. Исследование семейств пространственных периодических орбит задачи трёх тел. // Космические исследования. – 1979. – Т. 17. № 3.
41. Лидов М.Л. Метод построения семейств пространственных периодических орбит в задаче Хилла. // Космические исследования. – 1982. – Т. 20, № 6. – С. 787-807.
42. Лидов М.Л. Об одном семействе пространственных периодических орбит около Луны и планет. // ДАН СССР. – 1977. – Т. 233, № 6. – С. 1068-1071.

43. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. – М.: Наука, 1991. – 432 с.
44. Маров М.Я. Планеты Солнечной системы. – М: Наука, 1986. – 320 с.
45. Молотов Е.П. Наземные радиотехнические системы управления космическими аппаратами. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 256 с.
46. Мюррей К., Дермотт С. Динамика солнечной системы – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 588 с.
47. Острём К. Введение в стохастическую теорию управления. – М.: Мир, 1973. – 322 с.
48. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полёта. – М., Наука, 1990. – 448 с.
49. Платонов А.К. Исследование свойств корректирующих маневров в межпланетных полётах // Космические исследования. – 1966. – Т. 4, Вып. 5. – С. 670-693.
50. Платонов А.К. Оптимальные свойства корректирующих маневров при использовании двигателя с ограниченной тягой // Космические исследования. – 1967. – Т. 5, Вып. 2.
51. Растрюгин Л.А. Системы экстремального управления. – М.: Наука, 1974. – 632 с.
52. Решетнев М.Ф., Лебедев А.А., Бартенев В.А. и др. Управление и навигация искусственных спутников Земли на околокруговых орбитах. – М.: Машиностроение, 1988, – 336 стр.
53. Себехей В. Теория орбит. Ограниченная задача трёх тел. – М: Наука, 1982. – 656 с.
54. Сейделмен П. Спутники Марса. – М.: Мир, 1981. – 100 с.
55. Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и её применения. – Томск.: Изд-во Томского ун-та, 2002. – 128 с.
56. Титов Д.В., Сведхем Х., МкКой Д. и др. Венера-Экспресс: научные задачи, аппаратура и сценарий миссии. // Космические исследования. – 2006. – Т. 44, № 4. – С. 349-364.

57. Тучин А.Г. Квазисинхронные орбиты и их использование для сближения космического аппарата с Фобосом. // Космические исследования. – Т. 45, № 2. – 2007. – С. 144-149.
58. Тучин А.Г. Определение параметров движения КА по результатам измерений при наличии шума в динамической системе. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2004. – № 2. – 32 с.
59. Тучин А.Г. Проектирование квазисинхронных орбит КА вокруг Фобоса для решения задачи посадки на его поверхность. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2008 – №15. – 30 с.
60. Тучин А.Г. Проектирование квазисинхронных орбит космического аппарата вокруг Фобоса для решения задачи посадки на его поверхность. // Космические исследования. – Т. 46, № 6. – 2008. – С.536-546.
61. Тучин А.Г., Аким Э.Л. Проект “Фобос-Грунт» и прикладная математика // Будущее прикладной математики: Лекции для молодых исследователей. Поиски и открытия / Под ред. Г.Г. Малинецкого. – М.: Книжный дом «Либроком», 2009. – С.363-390.
62. Тучин А.Г., Аким Э.Л., Астахов А.П., Бакитько Р.В., Польщиков В.П., Степаньянц В.А., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. Автономная навигационная система околоземного космического аппарата. // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – №2.– С.139-156.
63. Тучин А.Г., Аким Э.Л., Архангельский Р.Н., Зайко Ю.К., Лавренов С. М., Порошин А.Л., Рузский Е.Г., Степаньянц В.А., Тучин Д.А., Федотов В.П., Ярошевский В.С. Баллистика, навигация и управление движением КА на этапе его посадки на поверхность Фобоса. // Космические исследования. – 2009. – Т. 47, № 4. – С.332-342.
64. Тучин А.Г., Аким Э.Л., Горохова А.А., Киселева И.П., Степаньянц В.А.. Локальная обработка измерений радиосистемы межпланетных космических аппаратов. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2002. – № 11. – 20 с.

65. Тучин А.Г., Аким Э.Л., Горохова А.А., Киселева И.П., Степаньянц В.А. Небесно-механическая интерпретация измерений радиосистемы межпланетных космических аппаратов «Квант-Д». // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2002. – № 2. – 20 с.
66. Тучин А.Г., Аким Э.Л., Заславский Г.С., Морской И.М., Рузский Е.Г., Степаньянц В.А. Доставка на землю реликтового вещества с Фобоса – проект «Фобос-грунт». Баллистика, навигация и управление полетом. // *Астрономический вестник*. – 2010. – Т. 44, № 1. – С.29-40.
67. Тучин А.Г., Аким Э.Л., Заславский Г.С., Морской И.М., Степаньянц В.А. Баллистика, навигация и управление полётом космического аппарата в проекте «Фобос-Грунт» // *Известия РАН. Теория и системы управления*. – 2002. – № 5, – С.153-161.
68. Тучин А.Г., Аким Э.Л., Сазонов В.В., Степаньянц В.А. Управление и навигация в перелёте КА с малой тягой от Земли к Юпитеру. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2010. – № 36.
69. Тучин А.Г., Квашнин А.Г. Построение вычислительной схемы алгоритма оценивания параметров динамической системы. // *Автоматизация проектирования, информатика*. – 1993. – Вып. 4. – С.88-94.
70. Тучин А.Г., Квашнин А.Г. Синтез вычислительной схемы алгоритма оценивания параметров динамической системы. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 1991. – № 126 – 19 с.
71. Тучин А.Г., Шатаев В.В. Реализация реляционной СУБД с языком данных типа SQL. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 1990. – № 54. – 28 с.
72. Федотов Г.Г. Об использовании гравитационного потенциала Земли для межпланетных полётов // *Космические исследования*. – 2007. – Т. 45, № 2. – с.169-179.

73. Чаплинский В.С. Приложение релятивистской теории к задачам траекторных измерений космических аппаратов. // Космические исследования. – 1985. – Т. 23, Вып. 1.
74. Чёрный Ф.Б. Распространение радиоволн. – М.: Советское радио, 1972 – 464 с.
75. Шишов В.А. Модель движения Фобоса и методика уточнения параметров в проекте «Фобос-Грунт». // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2008. – № 10. – 27 с.
76. Шишов В.А. Определение параметров движения КА и Фобоса в проекте «Фобос-Грунт». // Астрономический вестник. – 2008. – Т. 42, № 4. – С.341-350.
77. Эльясберг П.Е. Определение движения по результатам измерений. – М.: Наука, 1976. – 416 с.
78. Akim E.L., Stepaniants V.A., Tuchin A.G. “INTERBALL-1” and “INTERBALL-2” spacecrafts orbit determination tacking into account non-modeled small accelerations (MS00/47) // International Symposium Space Dynamics, 26-30 June, 2000, Biarritz, France. – [7 с.]
79. Akim E.L., Stepaniants V.A., Tuchin A.G. Tracking of the launch-vehicle during the insertion to Earth orbit // RBCM – J. of the Braz. Soc. Mecanical Sciences. – Vol. XXI. – Special Issue – 1999. – P. 387-399.
80. Akim E.L., Zaslavsky G.S., Zharov V.G., Chernov A.V. Interplanetary Flight Control With Electric Engine In View Of Thrust Errors // The Proceedings of the 18th International Symposium on Space Flight Dynamics, 11-15 October 2004, Munich, Germany.
81. Berman A.L. A New Approach to the Evaluation and Prediction of Wet Tropospheric Zenith Wet Refraction. JPL DEEP SPACE Progress Report 42-25.
82. Berman A.L. The Prediction of Zenith Range Refraction From Surface Measurements of Meteorological Parameters. JPL Technical Report 32-1602, 1976. – 40 p.

83. Amoozegar F. Applications and Operation Concepts of Large Transmit Phased Array of Parabolic Reflectors. // IEEEAC paper #1570, 2006.
84. Benest D. Libration effects for retrograde satellites in the restricted three-body problem. // *Celestial Mechanics*. – 1976. – V. 13, № 2. – P. 203-215.
85. Bhaskaran S. The application of noncoherent Doppler data types for deep space navigation. // TDA Progress Report 42-121. JPL, 1995.
86. Biele J., Ulamec S., Richter L., Knollenberg J., Kührt E., Möhlmann D. The putative mechanical strength of comet surface material applied to landing on a comet. // IAC-07- A.3.5.03. [Доклад на 58-м международном конгрессе по астронавтике. Индия. 24-28 сентября 2007.]
87. Carpenter J.D., Folta D.C., Moreau M.C., Quinn D.A. Libration Point Navigation Concepts Supporting the Vision for Space Exploration. // AIAA 2004-4747, AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, Providence, Rhode Island, August 2004.
88. Crouse B., Zanetti R., D'Souza C., Spanos P.D. Autonomous optical lunar navigation // AAS 09-122, Savannah, GA, February 2009.
89. D'Souza C., Clark F. Linear covariance analysis techniques applied to Orion cislunar operations // AAS-08-100, Galveston, TX, January 2008.
90. Estefan J.A., Folkner W.M. Sensitivity of Planetary Cruise Navigation to Earth Orientation Calibration Errors. TDA Progress Report 42-123.
91. Ferri P., Accomazzo A., Montagnon E., Morales J. Rosetta in the year of the swing-bys // IAC-07-A3.5.02. [Доклад на 58-м международном конгрессе по астронавтике. Индия. 24-28 сентября 2007.]
92. Getchius J., Crain T., D'Souza C. Optical navigation for the Orion vehicle. // AAS-08-105, Galveston, TX, January 2008.
93. Haupt G., Kasdin N., Keiser G., Parkinson B. An optimal recursive iterative algorithm for discrete nonlinear least-square estimation. // AIAA-95-3218. AIAA Guidance, navigation, and control conference. August 7-10, 1995. Baltimore, P. 404-417

94. Hénon M. Numerical Exploration of the Restricted Problem // VI. Hill's Case: Non-Periodic Orbits. *Astronomy and Astrophysics*. – 1970. – V. 24, № 9. – P. 24-36.
95. Hofmann P., von Heise-Rotenburg R., Schulte W., Widani C. Sample preparation and handling system & payload aspects for the european Exomars mission // IAC-07-A3.3.04. [Доклад на 58-м международном конгрессе по астронавтике. Индия. 24-28 сентября 2007.]
96. Hoofs R.M.T., Titov D., Svedhem H., Koschny D., Witass O., Tanco I. Venus-Express – science observations experience at Venus // IAC-07-A3.2.03. [Доклад на 58-м международном конгрессе по астронавтике. Индия. 24-28 сентября 2007.]
97. Jones B.A. Surface feature navigation in low lunar orbit // AAS 08-104, Galveston, TX, January 2008.
98. McNutt R.L., Solomon S.C., Grant D.G., Finnegan E.J., Bedini P.D. The MESSENGER Mission on to Mercury: Status after the Venus Flybys // IAC-07-A3.2.02. [Доклад на 58-м международном конгрессе по астронавтике. Индия. 24-28 сентября 2007.]
99. Mitchell R.T. The Cassini Mission Exploring Saturn // IAC-07-A3.2.01. [Доклад на 58-м международном конгрессе по астронавтике. Индия. 24-28 сентября 2007.]
100. Moyer. T.D. Formulation for Observed and Computed Values of Deep Space Network Data Types for Navigation. – Jet Propulsion Laboratory California Institute of Technology. – 2000.
101. Opperman B.D.L. Reconstructing ionospheric TEC over South Africa using signals from a Regional GPS network. – A thesis submitted in fulfillment of the requirements for the degree Doctor of philosophy of Rhodes University. 28 Nov. 2007.
102. Osenar M., Clark F., D'Souza C. Performance of an automated feature tracking lunar navigation system // AAS 08-101, Galveston, TX, January 2008.

103. Pelletier F.J., Antreasian P.G., Ardalan S.M., Criddle K.E., Ionasescu R., Jacobson R.A., Jones J.B., Parcher D.W., Roth D.C., Thompson P.F. Flying by Titan // AAS 09-225. 19th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, Savannah, GA, February 8-12, 2009.
104. Poncy J., Jubineau F., Perotto V., D'Angelo F., Juillet J.J. Solar orbiter – heat shield and system technology // IAC-07-A3.2.06. [Доклад на 58-м международном конгрессе по астронавтике. Индия. 24-28 сентября 2007.]
105. Prado J.-Y., Perret A., Boisard O., Bertrand R.. The shadow mission deflecting apophis with a flotilla of solar shields // IAC-07-A 3.4.08. [Доклад на 58-м международном конгрессе по астронавтике. Индия. 24-28 сентября 2007.]
106. Seidelmann P.K., Abalakin V.K. et al. Report of the IAU/IAG Working Group on cartographic coordinates and rotational elements of the planets and satellites: 2000 // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2002, 82(1).
107. Shor V.A. The motion of the Martian satellites // Celestial Mechanics, Vol. 12, 1975.
108. Stanbridge D.R., Miller J.K., Carranza E., Williams K.E., Williams B.G., Wolff P.J. New Horizons Pluto approach navigation: The effect of Nix and Hydra on time of flight knowledge // AAS 09-174, 19th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, Savannah, GA, February 8-12, 2009.
109. Takayuki Sugano and Kosuke Heki. High resolution lunar gravity anomaly map from the lunar prospector line-of-sight acceleration data. // Earth Planets Space, 56, 2004.
110. Chao C.C. The Tropospheric Calibration Model for Mariner Mars 1971. // JPL Technical Report 32-1587. – P.61-76.
111. Thurman S.W. Deep space navigation with differenced data types. Part 1: Differenced range information content // The telecommunications and data acquisition progress report 42-103, JPL, 15, 1990. – P. 47-60.

112. Tuchin A.G., Akim E.L., Botkin A.V., Stepaniants V.A., Shishov V.A., Ruzskiy E.G. Orbit Selection, Navigation and Maneuvers before the Landing on the Phobos Surface for Phobos Sample Return Project. // Proc. 17<sup>th</sup> ISSFD. 16-20 June 2003. Moscow. Russia. V. 1.
113. Tuchin A.G., Akim E.L., Popov G.A. Mechanics and Motion Control of a Space Vehicle in the Project of Relict Substance Delivery on Earth (The Project “Phobos-Grunt”). // Proc. 16<sup>th</sup> IFAC Symposium on automatic control in Aerospace. 2004. Preprints. Saint Petersburg. Russia. V. 1.
114. Tuchin A.G., Akim E.L., Stepaniants V.A., Shishov V.A., Ruzskiy E.G. Ballistics, navigation and motion control of the SC on stages of the Phobos surface approaching and landing // Proc. 18<sup>th</sup> ISSFD, Munich. Germany, 11-15 October 2004.
115. Tuchin A.G., Akim E.L., Stepaniants V.A., Vlasova Z.P. Orbit determination for a radar mapping satellite of Venus. Earth, Moon, and Planets (ISSN 0167-9295), vol. 50-51, July-Dec. 1990, P. 559-578.
116. Turyshev S.G., Nieto M.M., Anderson J.D. Lessons Learned from the Pioneers 10/11 for a Mission to Test the Pioneer Anomaly. // Adv. Space Res. 39(2), 2007. – P. 291-296.
117. Turyshev S.G., Nieto M.M., Anderson J.D. Study of the Pioneer anomaly: A problem set. // American J. Phys. 73(11), 2005. – P. 1033-1044.
118. Mendes V.B., Langley R.B. Revised Refractive Index Formulae and Their Effect in Zenith Delay Prediction and Estimation.
119. Williams K.E., Carranza E., Wolff P.J. Navigation analysis of the trajectory correction maneuvers on approach to the Pluto encounter for the New Horizons mission, using LORRI only. // AAS 09-173, 19th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, Savannah, GA, February 8-12, 2009.
120. Yamada T., Izutsu N., Fujita K., Hirose K., Ishii N. Venus Entry Capsule and Balloon Observation. // IAC-07-A3.2.09. [Доклад на 58-м международном конгрессе по астронавтике. Индия. 24-28 сентября 2007.]

121. Zaslavskiy G.S., Zharov V.G., Chernov A.V. Optimal transfer from earth satellite orbit to mars satellite orbit with using electric propulsion system at cruising phase. // The Proceedings of the 17th International Symposium on Space Flight Dynamics, 16-20 June, Moscow, Russia, P. 305-311.
122. Автоматический космический комплекс по доставке на Землю образцов грунта Фобоса. Технический проект. Книга 2. Баллистико-навигационное обеспечение полета КА «Фобос-грунт». : отчёт о НИР / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2004. – 95 с. – Инв. № 5-14-04.
123. Анализ и дальнейшее развитие принципов обеспечения навигации и управления КА дальнего космоса. : отчёт о НИР / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2009. – 78 с. – Инв. № 5-016-09.
124. Баллистико-навигационное обеспечение выведения КА «Фобос-Грунт» на траекторию отлёта от Земли. : отчёт о НИР / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2006. – 116 с. – Инв. № 5-04-06.
125. Баллистико-навигационное обеспечение заключительного этапа полета орбитальной станции «МИР» (БЦ ИПМ). : отчёт о НИР / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2001. – Инв. № 5-01-02.
126. Баллистико-навигационное обеспечение проекта «Спектр-РГ». : отчёт о НИР / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2009. – 137 с. – Инв. № 5-05-09.
127. Баллистико-навигационное обеспечение старта с Фобоса и выхода на базовую орбиту. : отчёт о НИР / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2005. – 116 с. – Инв. № 5-10-05.
128. Навигационное обеспечение проекта «Луна-Глоб1». : отчёт о НИР / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2008. – 120 с. – Инв. № 5-06-08.
129. Оптимизация баллистического построения экспедиции с луноходом и околослунным орбитальным аппаратом (Проект «Луна – Ресурс»). : отчёт о НИР / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2009. – 105 с. – Инв. № 5-018-09.

130. Проработка предложений по схеме полёта к Юпитеру и проведению работ по баллистической поддержке миссии к Юпитеру и Европе на участке перелёта Земля – Юпитер. : отчёт о НИР / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2009. – 58 с. – Инв. № 5-012-09.
131. Разработка алгоритмов математической модели сближения и посадки КА на Фобос с квазисинхронной орбиты. : отчёт о НИР / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2005. – 99 с. – Инв. № 5-07-05.
132. Разработка алгоритмов, аппаратно-программных средств и высокоточной теории движения Фобоса для БНО управления полетом КА проекта «Фобос-Грунт» по ОИСМ. Подготовка БНО к ЛКИ КА на участках отлета от Земли и перелета Земля – Марс. БНО управления полетом КА в 2009 г. Этап 2. Разработка технологии баллистико-навигационного обеспечения (БНО) участка выведения на отлётную траекторию. : отчёт о НИР / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2007. – 90 с. – Инв. № 5-31-07.
133. Разработка бортовых алгоритмов навигации и управления движением КА на участках спуска и посадки на Фобос. Отработка бортовых алгоритмов на программном имитаторе бортовой ЭВМ и выдача заказчику исходных данных для разработки первой версии программного обеспечения БВК. : отчёт о НИР / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2007. – 273 с. – Инв. № 5-036-07.
134. Разработка динамических моделей движения КА и Фобоса на участках: движения по КСО, схода с КСО, сближения с Фобосом и посадки на его поверхность для моделирования бортовых навигационных алгоритмов и алгоритмов управления. : отчёт о НИР / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2004. – 116 с. – Инв. № 5-11-04.
135. Разработка и выдача материалов в ЭП по баллистико-навигационному обеспечению экспедиции с луноходом (Проект «Луна – Ресурс»). : отчёт о НИР / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2009. – 135 с. – Инв. № 5-02-09.

136. Разработка математической модели сближения и посадки КА на Фобос. Разработка программных модулей основных алгоритмических блоков для системы управления КА, работы ДУ, движения КА около центра масс. Выполнение расчетов и набор статистики. Этап 1. Разработка алгоритмов бортовой навигации, ориентации и управления ПМ на участке схода с КСО, сближения и посадки КА на Фобос. : отчёт о НИР / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2006. – 110 с. – Инв. № 5-12-06.
137. Разработка математической модели сближения и посадки КА на Фобос. Разработка бортовых алгоритмов навигации и управления движением КА на участках спуска и посадки на поверхность Фобоса. Отработка бортовых алгоритмов на программном имитаторе и макете бортовой ЭВМ. Этап 1. Выполнение расчетов на математическом стенде моделирования процессов спуска и посадки КА на поверхность Фобоса при моделировании внешней среды с целью отработки алгоритмов бортовой навигации и управления на этом участке. Набор статистики и ее анализ. : отчёт о НИР / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2007. – 99 с. – Инв. № 5-026-07.
138. Разработка математической модели сближения и посадки КА на Фобос. Разработка бортовых алгоритмов навигации и управления движением КА на участках спуска и посадки на поверхность Фобоса. Отработка бортовых алгоритмов на программном имитаторе и макете бортовой ЭВМ. Этап 2.1. Разработка контрольных задач и расчетных случаев и их отработка на моделирующих стендах для оценки идентичности процесса спуска и посадки на стенде с имитатором реальной аппаратуры (НПО им. С.А. Лавочкина) и стенде математического моделирования в ИПМ РАН на основе сопоставления основных параметров спуска и посадки. : отчёт о НИР / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2008. – 133 с. – Инв. № 5-016-08.
139. Разработка методики проведения коррекций траектории полета КА «Спектр-РГ» в район либрационной точки  $L_2$  системы Солнце – Земля в

условиях больших погрешностей исполнения коррекции по модулю. : отчёт о НИР / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2010. – 191 с. – Инв. № 5-02-10.

140. Разработка программных модулей основных алгоритмических блоков для модели сближения и посадки КА на поверхность Фобоса с использованием цифровых моделей Фобоса. : отчёт о НИР / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2005. – 80 с. – Инв. № 5-11-05.
141. Разработка технических предложений по схеме перелёта Земля-Венера, маневрирования в сфере действия гравитационных сил Венеры и баллистико-навигационному обеспечению полета. : отчёт о НИР / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2009. – 68 с. – Инв. № 5-013-09.