ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М.В.КЕЛДЫША
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

ЗАХВАТКИН МИХАИЛ ВИТАЛЬЕВИЧ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С УЧЕТОМ ВОЗМУЩЕНИЙ, ВЫЗВАННЫХ РАБОТОЙ БОРТОВЫХ СИСТЕМ

Специальность 01.02.01 —
Теоретическая механика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
Сазонов В. В.

Москва – 2013

Содержание

Введение

Одним из приоритетных пунктов Стратегии развития космической деятельности России до 2030 года являются фундаментальные космические исследования. К способам реализации подобных исследований в текущем десятилетии в первую очередь относится развертывание внеатмосферных астрофизических обсерваторий, а также запуск орбитальных зондов и посадочных аппаратов для исследование Луны. Большинство космических аппаратов (КА), призванных решать описанные исследовательские задачи, разрабатывается в НПО им. С. А. Лавочкина, к ним относится запущенная астрофизическая обсерватория «Спектр-Р» (проект Радиоастрон[30; 36]), а также предусмотренные федеральной космической программой миссии «Спектр-РГ», «Луна-Глоб», «Спектр-УФ», «Гамма-400» и «Спектр-М». Перечисленные КА имеют различную научную нагрузку и требования к баллистико-навигационному обеспечению. Обсерватории на базе аппаратов «Спектр-Р» и «Спектр-М» в числе прочего могут работать в режиме наземно-космического интерферометра. Для успешной корреляции научных данных, полученных в таком режиме, требуется высокоточное знание движения этих аппаратов. Доставка КА «Луна-Глоб» на рабочую орбиту спутника Луны требует уточнения орбиты перелета и расчета необходимых параметров маневра в сжатые сроки. КА «Спектр-РГ» должен быть доставлен в окрестность точки либрации L_2 системы Солнце–Земля и удерживаться на квазиустойчивой орбите при помощи реактивных двигателей. От точности баллистико-навигационного обеспечения (БНО) аппарата зависит величина корректирующих импульсов и, как следствие, время его активного существования.

Перечисленные аппараты обладают рядом особенностей, которые не могут быть проигнорированы при расчете их движения. В первую очередь, к таким особенностям относится работа системы ориентации, вызывающая возмущение движения центра масс. Проектируемые НПО им. С. А. Лавочкина крупные научные аппараты базируются на платформе модуля «Навигатор» и имеют схожие системы ориентации, основанные на работе маховичных электромеханических исполнительных органов (ЭМИО), управление которыми позволяет компенсировать внешние возмущающие моменты и менять ориентацию аппарата в пространстве. С течением времени маховики ЭМИО достигают ограничений по скорости вращения, вследствие чего возникает необходимость разгрузки системы — значительного сокращения угловой скорости маховиков и компенсации суммарного кинетического момента КА при помощи реактивных двигателей стабилизации (ДС). Поскольку двигатели являются частью базового модуля, то в общем случае они не позволяют реализовать моментную схему разгрузки, поэтому каждая разгрузка маховиков создает небольшое возмущение в движении центра масс. Для запущенного в 2011 году КА «Спектр-Р» средняя величина приращения скорости в результате разгрузки составляет 5 мм/с. Игнорирование подобных возмущений при реконструкции движения КА даже на коротких интервалах приводит к ошибкам, выходящим за рамки технического задания.

Для космических обсерваторий, аппаратов серии «Спектр», чья ориентация в пространстве и относительно Солнца не может считаться постоянной, немаловажным возмущающим фактором является световое давление. Изменение силы светового давления в зависимости от ориентации определяется формой и свойствами поверхности КА. Это влияние должно быть отражено в динамической модели аппарата. Точность модели светового давления особенно важна для космических обсерваторий «Спектр-Р» и «Спектр-М», оборудованных десятиметровыми параболическими антеннами для наблюдений в радиодиапазоне. Отношение эффективной площади сечения к массе этих аппаратов достигает 0.03 м^2/кг, а соответствующее возмущение от светового давления всего на 1–2 порядка меньше гравитационного возмущения. Помимо этого, в зависимости от ориентации относительно Солнца световое давление создает момент относительно центра масс, действие которого компенсируется работой ЭМИО. Таким образом, световое давление также косвенно определяет возмущения от разгрузок маховиков.

В работе производится построение параметризованной модели светового давления КА, учитывающей его форму и характеристики поверхности. Данный подход имеет ряд преимуществ по сравнению эмпирическим и аналитическим, основанным на точных априорных оценках формы и поверхности КА, поскольку с одной стороны позволяет избавиться от ошибок априорного определения параметров и эффектов, связанных со старением материалов поверхности, с другой — будучи основанным на физическом взаимодействии потока излучения и поверхности КА, позволяет описать динамику не менее точно, чем эмпирические модели. Эффективность данного подхода была продемонстрирована в ряде работ, например [2; 11; 21]. Однако, описанные в работах модели используют простую форму поверхности КА ("box-wing"), что делает ее неприменимой для аппаратов сложной формы или со сложной структурой возникающей тени.

Движение аппаратов с указанными особенностями не может быть достаточно хорошо описано стандартным набором орбитальных параметров. Для точного восстановления движения центра масс необходимо иметь представление о процессах, происходящих на борту аппарата, таких как изменение ориентации и включение двигателей стабилизации. Такое представление можно получить из анализа телеметрической информации, поступающей с борта. В состав телеметрии входят данные системы ориентации и системы стабилизации.

Данная диссертация посвящена особенностям баллистико-навигационного обеспечения научных КА, построенных на основе платформы «Навигатор», в части определения и прогнозирования параметров движения. Существующие модели возмущений, действующих на КА, вкупе с совершенствующимися измерительными системами позволяют получать для достаточно компактных и пассивных объектов решения уравнений движения, которые хорошо согласуются с измерениями. Космические миссии, для которых удается добиться такого согласования, проектируются так, чтобы немоделируемые возмущения имели как можно более слабое влияние на движение. Однако в общем случае влияние функциональных и конструкционных особенностей на движение КА может приводить к ошибкам, выходящим за допустимые границы. Следовательно, такое влияние должно быть промоделировано надлежащим образом.

Цель диссертации состоит в разработке такой модели движения КА и таких методик определения и прогнозирования параметров этого движения, которые учитывают возмущения, возникающие из-за особенностей аппарата, описанных выше.

Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором на симпозиуме Radioastron International Science Council (RISC) (Пущино, июнь 2012 г.), на 5-й Международной конференции «Наблюдение околоземных космических объектов» (Москва, ноябрь 2011 г.) и на съезде RISC (Москва, август 2013 г.).

Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 статьях, опубликованных печатных изданиях из перечня ВАК [32; 33; 35; 37; 38], 4 из них в соавторстве. Из работ, выполненных в соавторстве, в диссертацию включены только результаты, полученные автором.

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения, содержащего основные результаты, полученные в ходе исследования. Полный объем диссертации составляет 120 страниц с 46 рисунками и 13 таблицами. Список литературы содержит 44 наименования.

В первой главе дается описание модели движения центра масс КА, учитывающей основную часть внешних возмущений: от нецентральности гравитационного поля Земли, от твердых и океанических приливов Земли, от гравитационного влияние Солнца и планет солнечной системы, а также релятивистские поправки, связанные с движением в гравитационном поле. Помимо этого, модель движения учитывает процессы, проходящие на борту аппарата, используя в качестве главного источника информации поступающую телеметрию. Так номинальное приращение скорости центра масс в результате разгрузки маховиков (импульс разгрузки) рассчитывается из массы отработанного топлива и ориентации КА относительно звезд. Действительное приращение включается в набор параметров согласования и допускает малое отклонение от номинального значения как по направлению, так и по величине. Возмущения, вызванные световым давлением, рассчитываются исходя из формы поверхности КА и знания его ориентации в пространстве. При этом свойства поверхности аппарата, важные для описания светового давления, характеризуются набором коэффициентов, которые вносятся в число уточняемых параметров.

Построение модели светового давления производится на примере КА «Спектр-Р». Для аппарата вводится упрощенная форма поверхности, согласно которой рассчитывается, какие участки поверхности освещены Солнцем в зависимости от ориентации. Элементы поверхности КА наделяются параметрами, при помощи которых производится расчет силы и момента светового давления.

В первой главе также рассматривается уравнение движения относительно центра масс и дается описание основных возмущающих моментов. Определяется связь между возмущающими моментами и параметрами работы ЭМИО, а также между разгружаемым кинетическим моментом ЭМИО и импульсом разгрузки.

Вторая глава посвящена орбитальным данным, при помощи которых происходит уточнение движения КА. Основным источником таких данных являются внешнетраекторные измерения. К измерениям, рассматриваемым в работе, относятся радиотехнические измерения дальности и радиальной скорости, оптические астрометрические наблюдения, беззапросные доплеровские измерения и лазерные измерения дальности. Особое внимание уделяется точному моделированию расчетных значений измерений, которое необходимо для достижения требуемой высокой точности определения орбиты.

В дополнение к внешнетраекторным измерениям дается описание измерений импульсов разгрузок маховиков и внешних возмущающих моментов, получаемых из телеметрии. Измерения импульсов разгрузок производятся по данным включения ДС, содержащим момент включения, длительность работы и массу отработанного рабочего тела. Измеренные значения внешних моментов получаются из скоростей вращения маховиков и данных об ориентации КА.

В третьей главе приводится методика определения орбиты КА с использованием внешнетраекторных измерений и измерений, полученных из телеметрии аппарата. Формулируется набор уточняемых параметров и приводится алгоритм поиска оптимальных согласно данной методике значений этих параметров.

Для практической проверки работы предложенной методики в третьей главе рассматривается движение КА «Спектр-Р» на двух соседних временных интервалах, продолжительностью по 50 суток каждый. Параметры движения на выбранных интервалах определяются согласно предложенной методике, а также с использованием более простых моделей и способов уточнения для сравнения качества полученных орбит. Мерой качества полученных орбит выступает согласование внешнетраекторных измерений.

Четвертая глава является заключительной и посвящена прогнозирования параметров движения рассматриваемых КА. В силу того, что задача прогнозирования движения ставится в условиях знания будущей ориентации КА, центральное место в главе занимает предсказание возмущений, связанных с разгрузкой ЭМИО. На примере телеметрических данных КА «Спектр-Р» исследуется зависимость разгружаемого кинетического момента ЭМИО и величины приращения скорости КА в результате разгрузки. Формулируются базовые правила, на основании которых предлагается предсказывать моменты времени, соответствующие проведению разгрузок.

Точность прогнозного движения оценивается на примере КА «Спектр-Р». Для этого с помощью параметров, уточненных на одном из интервалов в третьей главе, движение КА прогнозируется на второй интервал, не пересекающийся с первым. Рассматривается прогнозное движение, полученное при помощи классической пассивной модели и модели, учитывающей сложное световое давление и возмущения от разгрузок ЭМИО. Для сложной модели предлагается несколько вариантов предсказания разгрузок маховиков.

Наряду с прогнозированием движения центра масс КА в четвертой главе дается методика, позволяющая рассчитывать видимый блеск аппарата, основываясь на его ориентации в пространстве и удаленности от наблюдателя. В основе методики лежит модель светового давления, использованная в динамической модели рассматриваемых КА. Она позволяет предсказывать блеск аппаратов и тем самым более эффективно планировать оптические астрометрические наблюдения удаленных КА, находящихся, например, в точке либрации L_2 системы Солнце–Земля. Для КА «Спектр-Р» на основе фотометрических измерений найдены параметры модели, позволяющие прогнозировать видимый блеск.

Задача уточнения орбиты с возмущениями от разгрузок маховиков и описанной моделью светового давления была реализована в рамках баллистико-навигационного обеспечения КА «Спектр-Р». Восстановленные таким образом параметры движения «Спектра-Р» на интервалах проведения научных экспериментов успешно используется Астрокосмическим центром ФИАН им. П. Н. Лебедева для корреляции интерферометрических наблюдений. Реализована задача моделирования блеска и внедрена в расчет целеуказаний обсерваториям, проводящим астрометрические наблюдения.

Глава 1

Модель движения

1.1 Системы координат и времени

Перед рассмотрением движения КА, обозначим системы координат и времени, которые при этом понадобятся, а также необходимые преобразования, эти системы связывающие. Определенность в выборе используемых систем также понадобится в главе 2, посвященной моделированию измерений, поскольку все траекторные измерения зависят от координат КА и наблюдателя и их шкал времени, как правило, хорошо известных в различных системах отсчета.

Оси инерциальной или близкой к ней системы отсчета, в которой будут записываться и интегрироваться уравнения движения КА, направим параллельно осям международной небесной системе координат (ICRS [1]), а точнее, её реализации ICRF2, построенной по набору наиболее стабильных внегалактических радиоисточников. Экватор системы и начало отсчета прямого восхождения ICRS размещены на расстоянии в сотые доли угловой секунды от среднего экватора и равноденствия J2000. Начало системы поместим в центр масс тела, вокруг которого происходит движение аппарата. Для аппарата «Спектр-Р» и «Луна-Глоб» на перелетной траектории это будет геоцентрическая система координат, совпадающая в координатной части с геоцентрической небесной системой координат (GCRS). При изучении движения аппаратов в окрестности точки либрации системы Солнце–Земля начало системы координат поместим в барицентр солнечной системы, так что система будет совпадать с координатной частью ICRS.

В качестве координатного времени, которое будет выступать аргументом в уравнениях движения, в геоцентрической системе координат будем использовать земное время TT, в барицентрической системе координат будем использовать барицентрическое время TDB. Земное время напрямую связано со шкалой UTC, в которой как правило фиксируются наземные траекторные измерения, барицентрическое время является аргументом в эфемеридах тел солнечной системы и используется при расчете движения КА. Для задачи определения движения аппарата потребуется преобразование между этими шкалами. Обе шкалы в среднем совпадают, неравномерности возникают из-за отличия орбиты Земли от круговой и носят периодический характер. В задачах, которые рассматриваются в работе, не возникает необходимости в точном преобразовании между TT и TDB, при этом можно воспользоваться приближенным выражением

$$\mathsf{TDB} - \mathsf{TT} = 1.657 \cdot 10^{-3} \sin E, \quad [\text{c}]$$

где эксцентрическая аномалия барицентра Земля–Луна E приблизительно выражается через среднюю аномалию, линейно зависящую от времени

$$\begin{aligned} E &= M + 0.01671 \sin M, \\ M &= 6.239996 + 0.017201969(JD - JD_{2000}). \end{aligned}$$

При переходе между геоцентрической и барицентрической системами из-за вариаций скорости движения Земли и напряженности гравитационного поля в районе геоцентра будет претерпевать изменения также их координатная часть. Связь между радиус-векторами точки в системе со шкалой TT и системе со шкалой TDB, с миллиметровой точностью описывается выражением [19]

$$\mathbf{r}_{TDB} = \mathbf{r}_{TT} \left(1 - \frac{\mathcal{U}}{c^2} - L_c\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{TT}}{c^2}\right) \mathbf{V}, \tag{1.1}$$

где

$\mathcal{U}$ — величина гравитационного потенциала в геоцентре (без учета потенциала Земли), $\mathcal{U} > 0$;

c — скорость света;

L_c — константа, характеризующая среднее изменение временной шкалы из-за движения в гравитационном поле Солнца, $L_c = \dfrac{1}{c^2}\langle \mathcal{U} + \dfrac{1}{2}V^2 \rangle$;

$\mathbf{V}$ — скорость геоцентра относительно барицентр солнечной системы.

Выражение (1.1) описывает преобразование, связанное с переходом к системе с другой шкалой времени, но с тем же началом координат, при переходе между геоцентрической и барицентрической системой факт различия начал координат учитывается отдельно.

Координаты наземных объектов, в том числе станций, участвующих в траекторных измерениях КА, задаются в одной из реализаций международной земной системы координат (ITRS) — ITRF. При необходимости переход между различными реализациями ITRF осуществляется при помощи параметров, данных в разделе 4.3 [19]. Высокая точность определения координат измерительных пунктов важна при моделировании лазерных измерений и радиоинтерферометрических измерений со сверхдлинной базой (РСДБ). В то же время ошибки измерений штатных радиотехнических средств значительно превышают миллиметровую точность реализации ITRF, при моделировании этих измерений тонкие эффекты, связанные с различными реализациями ITRF могут быть проигнорированы. Следует также отметить, что согласно конвенции Международного астрономического союза (МАС) система ITRS имеет своей временной частью геоцентрическое координатное время (TCG), которое освобождено от гравитации Земли, а следовательно, течет чуть быстрее чем земное время TT. Эта разница приводит к небольшому масштабированию ITRF координат при переходе ко времени TT, соответствующему поправке в несколько миллиметров.

Преобразование между неподвижными осями ICRS и связанными с Землей осями ITRS представляется в виде произведения трех матриц

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_{PM}\mathbf{R}_z(\theta)\mathbf{R}_{NPB}, \tag{1.2}$$

где

$\mathbf{R}_{NPB}$ — матрица поворота к промежуточному полюсу началу отсчета прямого восхождения, реализующая малое постоянное смещение от ICRS, прецессию и нутацию;

$\mathbf{R}_z(\theta)$ — матрица поворота на угол θ вокруг оси z, θ получается линейным преобразованием из всемирного времени $\mathsf{UT1}$;

$\mathbf{R}_{PM}$ — матрица учитывающая движение полюсов.

Каждая из входящих в (1.2) матриц зависит также от поправок, определяемых Международной службой вращения Земли (IERS) — параметров ориентации Земли. Для матрицы прецессии–нутации это поправки δX и δY к координатам направления на промежуточный полюс (CIP), для матрицы вращения Земли это разница $\mathsf{UTC} - \mathsf{UT1}$, для матрицы движения полюсов — координаты истинного полюса относительно промежуточного x_p, y_p. Параметры ориентации Земли определяются по высокоточным измерениям (РСДБ, лазерная дальнометрия, GPS/ГЛОНАСС) и предоставляются в виде таблицы с шагом в сутки. При определении матрицы перехода эти параметры интерполируются на нужный момент времени.

Для описания явлений, виляющих на движение аппарата, в частности светового давления, будем пользоваться строительной системой координат. Начало такой системы, если не оговорено отдельно, будем считать совпадающим с центром масс КА, а оси фиксированными относительно его корпуса. Как правило, направление осей системы выбирается таким, что в них достаточно просто описывается геометрия КА. Для аппаратов, обладающих симметрией, оси строительной системы часто оказываются близки по направлению к главным осям инерции. Некоторые аппараты оснащены высокостабильными стандартами частоты, позволяющие проводить дополнительные траекторные измерения. Эти измерения напрямую зависят от собственной шкалы времени аппарата. Из-за наличия собственной скорости и напряженности гравитационного поля отношение собственного времени аппарата к эфемеридному (TT или TDB), в котором записаны уравнения движения, можно записать с точностью до членов порядка $1/c^2$ в виде

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - \frac{\mathcal{U}}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} + L, \tag{1.3}$$

где

$\mathcal{U}$ — величина гравитационного потенциала в окрестности аппарата;

v — скорость аппарата в той системе, время которой используется в качестве эфемеридного;

L — константа, зависящая от выбранной системы.

Влияние хода собственного времени аппарата на траекторные измерения будет более подробно рассмотрено в разделе 2.5.

1.2 Движение центра масс

Штатный полет КА на платформе «Навигатор» проходит по пассивной траектории, прерывающейся сеансами проведения разгрузок ЭМИО, сопровождающихся включением двигателей стабилизации. Разгрузки могут происходить несколько раз за сутки и представляют собой попеременное включение двигателей стабилизации с целью погасить суммарный кинетический момент аппарата вместе с маховиками. Процесс длится 1–3 минуты, за которые происходит несколько десятков включений двигателей. Поскольку длительность разгрузки существенно меньше характерного времени движения КА принятая модель учитывает влияние разгрузки на движение аппарата как мгновенное приращение скорости в средневзвешенный момент времени. Приращение скорости КА в результате единичного включения ДС может быть рассчитано при помощи телеметрической информации, содержащей ориентацию КА, длительность работы двигателя и массу отработанного рабочего тела. Ориентация аппарата определяет направление приращения, а длительность включения и расход топлива — тягу двигателя и величину приращения скорости. Для очередного сеанса разгрузки с индексом i вектор приращения скорости обозначается $\Delta\mathbf{v}_i$. Момент времени его приложения t_i определяется формулой

$$t_i = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} \Delta v_i^j t_i^j}{\sum\limits_{j=1}^{N} \Delta v_i^j}, \tag{1.4}$$

где

t_i^j — момент времени j-го включения двигателя в i-м сеансе разгрузки;

$\Delta\mathbf{v}_i^j$ — вектор приращения скорости КА после j-го включения ДС в i-й разгрузке, полученный с использованием телеметрической информации.

Измеренное значение импульса разгрузки, определяемое по телеметрическим данным, равно

$$\Delta\mathbf{v}_i^0 = \sum_{i=1}^{N} \Delta\mathbf{v}_i^j. \tag{1.5}$$

Движение КА между соседними разгрузками пассивно и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{f_g} + \mathbf{f_{ng}}$$

где

$\mathbf{r}$ — радиус-вектор аппарата, проведенный из основного притягивающего центра;

μ — гравитационная постоянная основного притягивающего центра.

Первое слагаемое в уравнении описывает ускорение от центрального поля, $\mathbf{f_g}$ — возмущающие ускорения гравитационной природы, $\mathbf{f_{ng}}$ — возмущающие ускорения негравитационной природы. При дальнейшем рассмотрении возмущений будем предполагать, что движения происходит в сфере действия Земли. Такое предположение вводится для конкретики, к тому же современная гравитационная модель Земли является наиболее изощренной.

1.2.1 Модель гравитационных возмущений

Возмущения гравитационного происхождения можно разбить не следующие составляющие:

$$\mathbf{f_g} = \mathbf{f_{harm}} + \mathbf{f_{tb}} + \mathbf{f_{tide}} + \mathbf{f_{rel}},$$

где

$\mathbf{f_{harm}}$ — возмущение, вызванное нецентральностью гравитационного поля Земли;

$\mathbf{f_{tide}}$ — возмущение от твердых приливов, изменение гравитационного поля Земли, под действием гравитации Луны и Солнца;

$\mathbf{f_{tb}}$ — прямое гравитационное возмущение от сторонних Луны, Солнца и планет солнечной системы;

$\mathbf{f_{rel}}$ — релятивистская поправка, возникающие из-за возникающая из-за движения в гравитационном поле.

Нецентральность гравитационного поля Земли

В системе координат, связанной с вращающейся Землей, гравитационный потенциал может быть разложен по сферическим функциям

$$U = \frac{\mu}{r_g}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{R^n}{r_g^n}P_{nm}(\sin\varphi)(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda),$$

где

μ — гравитационный постоянная Земли;

R — экваториальный радиус Земли;

$\mathbf{r_g}$ — положение аппарата в связанной с Землей системе координат;

P_{nm} — присоединенные функции Лежандра степени m порядка n;

φ, λ — долгота и широта положения аппарата.

Значения коэффициентов C_{nm} и S_{nm} определяют распределение массы внутри Земли и, как следствие, ее гравитационное поле. Ускорение КА, обусловленное нецентральностью гравитационного поля Земли, определяется формулой

$$\mathbf{f_{harm}}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}(t)\left(-\nabla U(\mathbf{r_g})\right)^{\mathsf{T}}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{A^T}\mathbf{r_g}$$

где $\mathbf{A}(t)$ — матрица перехода из инерциальной системы координат в систему, связанную с Землей. Дифференцирование потенциала по одной из координат (в данном случае не важно, по какой именно) дает

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\mu}{R_e}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R_e}{r}\right)^{n+1} P_{nm}(\sin\varphi)\Big[&-\frac{n+1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda) - \\ &- m\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\frac{\partial\sin\varphi}{\partial x}(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda) + \\ &+ \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial\sin\varphi}{\partial x}(C_{nm-1}\cos(m-1)\lambda + S_{nm-1}\sin(m-1)\lambda) + \\ &+ m\frac{\partial\lambda}{\partial x}(S_{nm}\cos m\lambda - C_{nm}\sin m\lambda)\Big].\end{aligned}$$

Пренебрежем в разложении потенциала гармониками степени, превышающей (N, N). Запишем вспомогательные суммы

$$W_1 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} (n+1) \left(\frac{R_e}{r} \right)^n P_{nm}(\sin\varphi)(C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda),$$
$$W_2 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} m \left(\frac{R_e}{r} \right)^n P_{nm}(\sin\varphi)(C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda),$$
$$W_3 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} m \left(\frac{R_e}{r} \right)^n P_{nm}(\sin\varphi)(-C_{nm} \sin m\lambda + S_{nm} \cos m\lambda),$$
$$W_4 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{R_e}{r} \right)^n P_{nm}(\sin\varphi)(C_{nm-1} \cos(m-1)\lambda + S_{nm-1} \sin(m-1)\lambda).$$

Компоненты искомого ускорения будут иметь вид

$$f_x = \frac{\mu}{r^2} \left(W_1 \frac{x}{r} - W_2 \frac{x}{r} \frac{z^2}{x^2+y^2} + W_3 \frac{yr}{x^2+y^2} + W_4 \frac{x}{r} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \right),$$
$$f_y = \frac{\mu}{r^2} \left(W_1 \frac{y}{r} - W_2 \frac{y}{r} \frac{z^2}{x^2+y^2} - W_3 \frac{xr}{x^2+y^2} + W_4 \frac{y}{r} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \right),$$
$$f_z = \frac{\mu}{r^2} \left(W_1 \frac{z}{r} + W_2 \frac{z}{r} - W_4 \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r} \right).$$

В работе использовались коэффициенты разложения C_{nm} и S_{nm}, соответствующие модели EGM-96 [10], принятой стандартом IERS 2003 [13]. При моделировании движения учитывались гармоники вплоть до степени 75 и порядка 75.

Твердые приливы Земли

Гравитационное воздействие сторонних тел, таких как Луна и Солнце, приводит к деформации Земли и, как следствие, к изменению её гравитационного поля. Рассмотрим приливный потенциал создаваемый сторонним телом в точке P на поверхности Земли

$$U_{TGP} = \frac{\mu}{|\mathbf{s} - \mathbf{r}|} + \frac{(nd)^2}{2},$$

где μ — гравитационный параметр возмущающего тела, $\mathbf{s}$ — геоцентрический радиус-вектор возмущающего тела, $\mathbf{r}$ — геоцентрический радиус-вектор точки P, n — среднее движение возмущающего тела вокруг оси, проходящей через центр масс системы Земля–тело, d — расстояние от точки P до этой оси. При рассмотрении возмущений от Луны и Земли справедливым можно считать соотношение $r \ll s$, поэтому

$$\frac{1}{|\mathbf{s}-\mathbf{r}|} \approx \frac{1}{s}\left(1 + P_1(\cos\gamma) + P_2(\cos\gamma)\right), \ \gamma = \arccos\frac{\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}}{s\cdot r}.$$

Расстояние d может быть выражено следующим образом:

$$d^2 = d_c^2 + r^2\cos\varphi - 2d_c r\cos\gamma,$$

где d_c — расстояние от центра Земли до центра масс системы, φ — широта точки P. Используя $n^2 s^3 = \mu + \mu_E$, получаем выражение для возмущающего потенциала в точке P в виде

$$U_{TGP} = \frac{\mu}{s}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\mu}{\mu+\mu_E}\right) + \frac{\mu r^2}{2s^3}(3\cos^2\gamma - 1) + \frac{n^2 r^2}{2}\cos\varphi.$$

Первое слагаемое с хорошей точностью можно считать постоянным, а последним можно пренебречь из-за малости среднего движения системы. Приливный потенциал приводит к упругой деформации Земли, изменяющей потенциал её гравитационного поля, причем изменение потенциала линейным образом связано с приливным потенциалом через число Лява κ. Поскольку приливной потенциал ведет себя как гармоника второго порядка, возмущающий потенциал, возникающий из-за деформации Земли, должен убывать пропорционально кубу расстояния

$$U_T = \frac{1}{2}\kappa\frac{\mu R_e^5}{s^3 r^3}\left(3\cos^2\gamma - 1\right),$$

здесь $\mathbf{r}$ — геоцентрический радиус-вектор точки, в которой рассматривается возмущающий потенциал, а R_e — экваториальный радиус Земли. Дифференцируя выражение для возмущающего потенциала, получаем возмущающее ускорение

$$\mathbf{f_{tide}} = \sum_{j=1}^{2}\frac{3}{2}\kappa\frac{\mu_j R_e^5}{s_j^3 r^5}(3\cos^2\gamma_j - 1)\mathbf{r} - 3\kappa\frac{\mu_j R_e^5}{s_j^3 r^4}\cos\gamma_j\left(\frac{\mathbf{s_j}}{s_j} - \frac{\mathbf{r}}{r}\cos\gamma_j\right).$$

Индексы j соответствуют возмущающим телам: Луне и Солнцу. Номинальное значение числа Лява для главной зональной гармоники $\kappa \approx 0.3$

В более общем случае влияние приливов может быть выражено в терминах поправок к коэффициентам геопотенциала C_{nm}, S_{nm} [4; 23], учитывающих неупругие деформации и периодические вариации чисел Лява. Но в данной работе использовалась представленная упрощенная модель, поскольку движение рассматриваемых аппаратов происходит большую часть времени вдали от Земли. Отметим, что для расчета геопотенциала используется модель EGM-96, коэффициенты которой освобождены от приливных эффектов согласно более сложной модели [4; 12], поэтому описанное упрощенное действие твердых приливов не требует дополнительных преобразований для согласования с моделью геопотенциала.

Гравитационное влияние Солнца и планет Солнечной системы

Гравитационное влияние Луны, Солнца и планет солнечной системы в Ньютоновском приближении описывается возмущающим ускорением

$$\mathbf{f_{tb}} = \sum_{i=1}^{11} \mu_i \left(\frac{\mathbf{R_i} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R_i} - \mathbf{r}|^\mathbf{3}} - \frac{\mathbf{R_i}}{|\mathbf{R_i}|^\mathbf{3}} \right),$$

где

$\mathbf{R_i}$ — геоцентрический вектор i-го возмущающего тела;

r — геоцентрический вектор аппарата;

μ_i — гравитационная постоянная i-го возмущающего тела.

В качестве источника координат центров масс тел Солнца, Земли, Луны и планетарных систем в работе используются эфемериды DE421 [6].

Эффекты общей теории относительности

Траектория движения частицы с нулевой массой покоя в гравитационном поле является геодезический, т.е. доставляет экстремум интегралу интервала между двумя точками M_1 и M_2

$$\delta \int\limits_{M_1}^{M_2} ds = 0,$$

где интервал ds в пространстве с метрикой, представленной тензором $\{g_{ik}\}$, выражается через координаты пространства-времени следующим образом:

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik} dx^i dx^k.$$

Введение функции Лагранжа вида $L = \frac{ds}{dt}$, где t — координатное время, позволяет записать уравнения Эйлера-Лагранжа и получить выражения для вторых производных координат пространства по координатному времени [18]. Эти же уравнения можно считать верными с достаточной точностью, если рассматривается движение тела малой массы, чье собственное гравитационное поле не влияет на движение массивных тел и не влияет на метрику в окрестности тела малой массы.

Точный вид уравнений движения зависит от выбранной метрики пространства. Для случая слабых гравитационных полей метрики, удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна, могут быть выражены через набор параметров [26][27]. Согласно [20] выражение для добавки к ньютоновскому ускорению аппарата, движущемуся в центральном невращающемся гравитационном поле, с точностью до членов порядка c^{-2}

$$\mathbf{f_{rel}} = \frac{\mu_E}{c^2 r^3}\left[\left(2(\beta+\gamma)\frac{\mu_E}{r} - \gamma\dot{r}^2\right)\cdot\mathbf{r} + 2(1+\gamma)(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})\cdot\dot{\mathbf{r}}\right]$$

где

μ_E — гравитационный параметр Земли;

$\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ — геоцентрическое положение и скорость аппарата, заданные в абсолютной системе координат;

β, γ — параметры пост-ньютоновского формализма, далее полагаемые равными единице.

1.2.2 Модель негравитационных возмущений

В динамической модели будем учитывать следующие возмущения негравитационной природы:

$$\mathbf{f_{ng}} = \mathbf{f_{sp}} + \mathbf{f_{alb}} + \mathbf{f_{atm}},$$

где

$\mathbf{f_{sp}}$ — возмущение, вызванное давлением прямого солнечного света;

$\mathbf{f_{alb}}$ — возмущение от отраженного света и теплового излучения Земли;

$\mathbf{f_{drag}}$ — возмущение, вызванное влиянием атмосферы.

Давление солнечного излучения

Точная динамическая модель КА не может быть построена без адекватного учета давления солнечного излучения, поскольку оно сопровождает все функционирующие аппараты. Для рассматриваемых миссий вопрос моделирования светового давления стоит особенно остро. Их движения существенную часть времени проходит вдали от Земли, где гравитационное возмущение слабее и лишь не несколько порядков отличается от светового.

Для достаточно точной оценки влияния солнечного излученя на динамику аппаратов, чья ориентация относительно Солнца может меняться, необходимо учитывать как форму освещаемой поверхности, так и характеристики этой поверхности, отвечающие за отражение света. В данному разделе будут рассмотрена модель давления солнечного излучения на плоскую поверхность. Форма поверхности будет рассматриваться в главе 1.3.

Поток солнечного излучения на определенном расстоянии практически постоянен во времени и лишь немного изменяется с одиннадцатилетним циклом солнечной активности [28]. Суммарную энергию потока солнечного излучения, перпендикулярно проходящего через единицу площади за единицу времени, описывается солнечной постоянной, усредненное значение которой равно $S_0 = 1361$ Вт/м^2 [8]. Солнечная постоянная характеризует суммарную по всем частотам мощность потока на расстоянии одной астрономической единицы (AU). Мощность потока на произвольном расстоянии r выражается так:

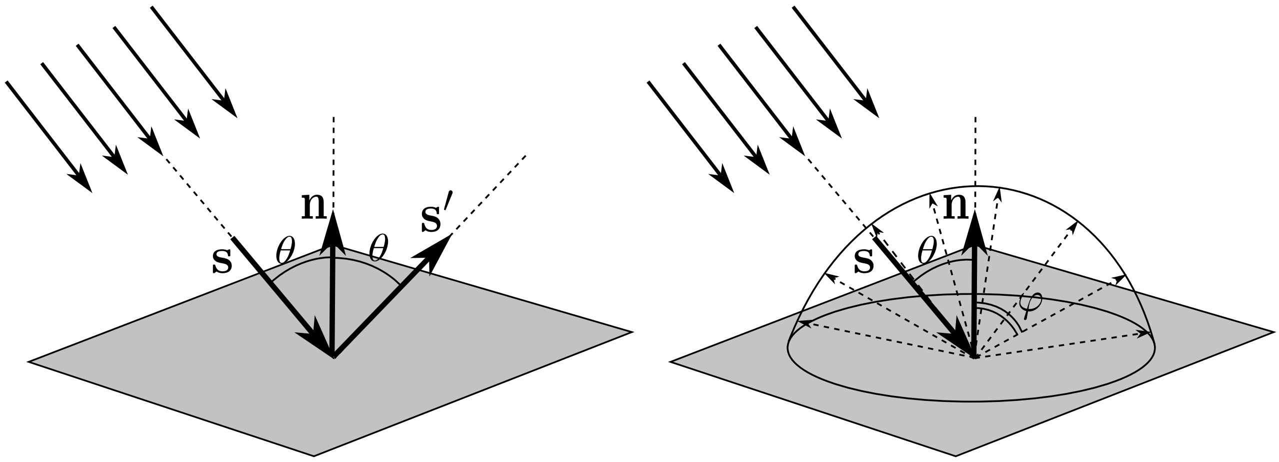
$$S(r) = \left(\frac{AU}{r}\right)^2 S_0.$$

Импульс единичного фотона p связан с его энергией E выражением $E = c \cdot p$, где c — скорость света. Следовательно, давление потока на абсолютно черную пластину, расположенную перпендикулярно к нему, будет равно изменению потока импульса за единицу времени

$$P = \frac{S_0}{c}\left(\frac{AU}{r}\right)^2. \tag{1.6}$$

Для точного описания возмущений, вызванных световым давлением, поток достаточно разбить на три составляющие в зависимости от того, как он поведет себя после падения на поверхность: поглотится, отразится зеркально или отразится диффузно (рис. 1.1). Под диффузным отражением будем понимать отражение по закону косинусов Ламберта, при котором интенсивность отраженного света пропорциональна косинусу угла отражения. При этом суммарный импульс отраженных фотонов будет направлен по нормали к поверхности, а его величина будет составлять $2/3$ от импульса падающего света. Реальное поведение отраженного света описывается более сложными законами, однако такого разбиения оказывается достаточно для описания передаваемого светом импульса и результирующей силы [5; 9; 39].

Рассмотрим плоскую поверхность прощади A и единичным вектором нормали $\mathbf{n}$, на которую в направлении $\mathbf{s}$ падает свет. Пусть поверхность обладает коэффициентами отражения α и зеркальности μ. Иными словами $(1-\alpha)$ всего света (по энергии) поглощается поверхностью, оставшаяся часть отражается, часть μ отраженного света отражается зеркально, $(1-\mu)$ — по закону косинусов Ламберта. Используя (1.6) можно записать выраженая для сил давления



зеркальное диффузное

Рисунок 1.1: Отражение света

различных составляющих падающего света: поглощенного (1.7), зеркально отраженного (1.8) и диффузно отраженного (1.9).

$$\mathbf{F}_0 = \Phi_o A \cdot (1-\alpha)\cos\theta \cdot \mathbf{s}, \tag{1.7}$$

$$\mathbf{F}_s = \Phi_0 A \cdot 2\alpha\mu\cos^2\theta \cdot (-\mathbf{n}), \tag{1.8}$$

$$\mathbf{F}_d = \Phi_0 A \cdot \alpha(1-\mu)\cos\theta(\mathbf{s} - \frac{2}{3}\cdot\mathbf{n}), \tag{1.9}$$

где

$$\Phi_0 = \frac{S_0}{c}\left(\frac{AU}{r}\right)^2.$$

Возмущающее ускорение от давления солнечного света, действующего на аппарат, поверхность которого состоит из N плоских элементов, представляется в виде

$$\mathbf{f_{sp}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \eta_i \mathbf{F_{sp}^{(i)}}(A_i, \theta_i, \alpha_i, \mu_i), \tag{1.10}$$

где

M — масса аппарата,

η_i — функция освещенности элемента, равная нулю, если элемент находит в тени, единице при полном освещении солнцем, и промежуточной величине, характеризующей ослабление светового потока, при нахождении в полутени,

A_i — площадь элемента,

θ_i — угол падения света на элемент,

α_i — коэффициент отражения элемента,

μ_i — коэффициент зеркальности элемента.

Приближение поверхности при помощи плоских элементов и расчет входящих в (1.10) величин проведен на примере аппарата «Спектр-Р» в разделе 1.3. На практике оказывается удобным разделить все элементы поверхности на m групп, каждая из которых обладает своим набором коэффициентов α_j и μ_j. Суммарное количество параметров, описывающих отражающую способность всей поверхности аппарата, в этом случае достигает $2m$. Ускорение светового давления записывается в виде

$$\mathbf{f}_{sp} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{m} \left[(1-\alpha_j)\mathbf{F}_0^j + \alpha_j \mu_j \mathbf{F}_s^j + \alpha_j (1-\mu_j) \mathbf{F}_d^j \right], \tag{1.11}$$

где $\mathbf{F}_o^j, \mathbf{F}_s^j, \mathbf{F}_d^j$ — силы, которые действовали бы на j-ю группу, если бы элементы, входящие в ее состав, поглощали свет, отражали свет зеркально или отражали свет диффузно соответственно

$$\mathbf{F}_0^j = \sum_{i\in S_j} \eta_i \mathbf{F}_0(A_i, \theta_i),$$
$$\mathbf{F}_s^j = \sum_{i\in S_j} \eta_i \mathbf{F}_s(A_i, \theta_i),$$
$$\mathbf{F}_d^j = \sum_{i\in S_j} \eta_i \mathbf{F}_d(A_i, \theta_i),$$

где S_j — индексное множество элементов, входящих в j-ю групп, функции под знаком суммы описываются выражениями (1.7–1.9).

Влияние излучения Земли

Помимо рассмотренного выше прямого солнечного излучения на околоземные аппараты действует излучение Земли. Это излучение представлено в двух диапазонах частот: оптическом и инфракрасном. Оптическое излучение представляет собой отраженный от поверхности солнечный свет и составляет в среднем $\kappa = 34\%$ от мощности потока солнечного излучения, попадающего на Землю. Большая часть оставшейся энергии переизлучается в инфракрасном диапазоне практически равномерно во всех направлениях. Суммарное действие оптического и инфракрасного излучения можно описать, разбив поверхность Земли на диффузно излучающие элементы [7].

$$\mathbf{f_{alb}} = \sum_{i=1}^{N} (1+\alpha)\left(\nu_i a_i \cos\theta_i + \frac{1}{4}\lambda_i \kappa\right) \Phi_0 \frac{A}{M} \cos\varphi_i \frac{A_i}{\pi r_i^2} \mathbf{e_i},$$

где

α — средний коэффициент отражения обращенной к Земле поверхности аппарата ($\alpha \in [0, 1]$);

ν_i — теневая функция элемента поверхности Земли;

a_i — коэффициент альбедо элемента поверхности Земли;

θ_i — угол падения солнечных лучей на элемент поверхности Земли;

λ_i — коэффициент видимости элемента поверхности Земли с аппарата;

Φ_0 — плотность потока солнечного излучения около Земли;

A — эффективная площадь сечения аппарата;

M — масса аппарата;

φ_i — угол, под которым виден элемент на поверхности Земли с КА;

A_i — площадь элемента поверхности Земли;

r_i — расстояние от элемента до КА;

$\mathbf{e_i}$ — единичный вектор направленный от центра элемента на КА.

Влияние этого возмущения на движение изучаемых КА достаточно слабо, поскольку это движение происходит вдали от Земли. Поэтому нет необходимости в учете формы аппарата, как это сделано в разделе 1.2.2. При моделировании возмущения в работе Земля разбивалась на 162 участка равномерным шагом 20° по широте и долготе. Средние коэффициенты альбедо рассчитывались исходя из данных Службы контроля баланса излучения поверхности и атмосферы Земли (SARB) [22], их значения приведены в таблице 1.1.

Сопротивление атмосферы

Большую часть времен рассматриваемые аппараты должны двигаться вне атмосферы, однако на тех участках траектории, где расстояние до поверхности Земли становится менее 1500 км, её влияние должно быть учтено. В частности, минимальная высота перицентра КА «Спектр-Р» в ходе полета составляет 600 км. Ускорение, возникающее при движении в верхних слоях атмосферы записывается в виде

$$\mathbf{f_{atm}} = -\frac{1}{2}\sigma\rho v_{rel}\mathbf{v}_{rel},$$

где

ρ — плотность атмосферы в в окрестности аппарата;

$\mathbf{v}_{rel}$ — скорость аппарата относительно атмосферы;

σ — баллистический коэффициент, пропорциональный эффективной площади сечения аппарата, и обратно пропорциональный массе.

Плотность атмосферы рассчитывалась согласно стандарту ГОСТ Р 25645.166-2004 [43].

Таблица 1.1: Альбедо участков Земли, %

θ, λ	80°	60°	40°	20°	0°	−20°	−40°	−60°	−80°
10°	18.0	14.3	18.6	29.8	14.3	12.1	7.4	28.0	69.0
30°	19.8	18.6	18.3	28.5	20.4	20.3	8.7	25.8	68.9
50°	21.6	20.9	22.9	21.3	10.2	9.2	7.0	25.4	69.0
70°	34.7	26.7	30.9	16.3	7.2	7.0	7.0	22.9	69.0
90°	54.5	37.7	50.4	17.9	7.7	7.0	7.0	24.5	69.0
110°	58.0	35.2	27.5	15.9	11.0	8.7	8.0	24.6	69.0
130°	52.0	35.0	14.0	8.1	9.0	17.3	9.7	19.5	69.0
150°	49.2	32.4	7.7	7.0	8.2	12.4	10.8	17.2	69.0
170°	49.0	25.8	7.0	7.0	7.0	7.2	8.1	15.7	57.5
190°	44.5	12.8	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	14.7	54.2
210°	44.7	23.5	7.0	7.1	7.0	7.0	7.0	17.6	56.7
230°	45.2	26.4	8.3	7.0	7.0	7.0	7.0	15.7	60.4
250°	50.5	20.6	20.1	10.2	7.0	7.0	7.0	12.5	60.5
270°	51.1	19.7	19.4	11.1	7.5	7.0	7.0	14.1	63.4
290°	45.7	20.4	10.7	8.2	15.8	16.9	16.3	21.9	66.4
310°	59.9	19.5	7.2	7.0	13.4	19.3	9.2	22.2	57.0
330°	60.9	12.5	7.0	7.0	8.0	7.5	7.0	27.6	58.5
350°	27.3	10.3	12.4	24.3	9.0	7.0	7.0	28.7	66.4

1.2.3 Сбалансированность модели

При описании модели движения особое внимание уделялось световому давлению и возмущениям от разгрузок ДМ. В то же время используемые модели некоторых возмущений не являются наиболее точными и изощренными на сегодняшний день. Для объяснения того, почему используются определенные модели возмущений, в таблице 1.2 приведены максимальные и средние значения этих возмущений, рассчитанный на орбите КА «Спектр-Р», а также максимальная неопределенность используемых моделей.

Природа ускорения	Максимум, м/с^2	Среднее[1], м/с^2	Неопределенность,	
			%	м/с^2
Центрально поле Земли	4.85	$2.10{\cdot}10^{-2}$	10^{-8}	$2.1{\cdot}10^{-12}$
Несферичность Земли	$3.86{\cdot}10^{-3}$	$3.39{\cdot}10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-7}$	$1.4{\cdot}10^{-14}$
Притяжение сторонних тел	$2.35{\cdot}10^{-5}$	$4.13{\cdot}10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$1.4{\cdot}10^{-11}$
Световое давление	$\mathbf{1.93 \cdot 10^{-7}}$	$\mathbf{1.52 \cdot 10^{-7}}$	**10**	$\mathbf{1.5 \cdot 10^{-8}}$
Разгрузки ЭМИО[2]	$\mathbf{5.87 \cdot 10^{-8}}$	$\mathbf{5.87 \cdot 10^{-8}}$	**10**	$\mathbf{5.9 \cdot 10^{-9}}$
Приливы	$6.62{\cdot}10^{-8}$	$2.36{\cdot}10^{-11}$	20	$4.7{\cdot}10^{-12}$
Альбедо	$2.14{\cdot}10^{-8}$	$1.13{\cdot}10^{-10}$	20	$2.2{\cdot}10^{-11}$
Эффекты ОТО	$5.60{\cdot}10^{-9}$	$8.40{\cdot}10^{-12}$	10	$8.4{\cdot}10^{-13}$

Таблица 1.2: Возмущения, описываемые принятой моделью движения, на орбите КА «Спектр-Р» за период с 07.2011 по 12.2013

Вклад ошибок моделей движения рассчитывался, исходя из среднего значений соответствующего возмущения. Как видно из таблицы, наибольшая неопределенность модели движения обусловлена световым давлением и разгрузками маховиков. Ошибки моделирования остальных возмущений как минимум на 1–2 порядка меньше. Максимальные значения ошибок из-за моделирования приливного потенциала и влияния излучения Земли может достигать сопоставимых величин, однако это происходит только в особо низких перицентрах и длится несколько десятков минут за виток. Этот вывод справедлив не только для аппаратов со схожими с КА «Спектр-Р» орбитальными характеристиками, но и для КА на перелетной траектории к Луне или в точке L_2 системы Солнце–Земля. Возмущения от гармоник Земли, приливного

[1] Среднее значение по модулю величины возмущения

[2] Условное ускорение, равное среднему отношению величины приращения скорости к интервалу между разгрузками.

Рисунок 1.2: Изображение КА «Спектр-Р»

потенциала, излучения Земли и пр., которые сильно убывают с расстоянием, будут иметь в этом случае такой же или меньший вклад в отличие от возмущений от разгрузок и светового давления.

1.3 Модель поверхности КА

Создание модели поверхности космического аппарата, которая бы с одной стороны достаточно точно соответствовала действительной поверхности, а с другой — обладала простотой при реализации вычислительных задач, является важной частью работы. Одновременное знание коэффициентов отражения и формы поверхности позволяет рассчитать как суммарную возмущающую силу светового давления, так и момент сил светового давления относительно центра масс. Момент сил, действующих на аппарат, в свою очередь, тесно связан с работой системы стабилизации: скоростью раскрутки маховиков, временем и величиной импульса ближайшей разгрузки. Благодаря этой связи телеметрическую информацию о работе системы стабилизации можно использовать для нахождения в общем случае неизвестных коэффициентов отражения поверхности.

Рассмотрим получение такой модели поверхности на примере КА «Спектр-Р» (рис. 1.2). Модель должны включать в себя ключевые элементы аппарата с точки зрения формирования сил и моментов светового давления.

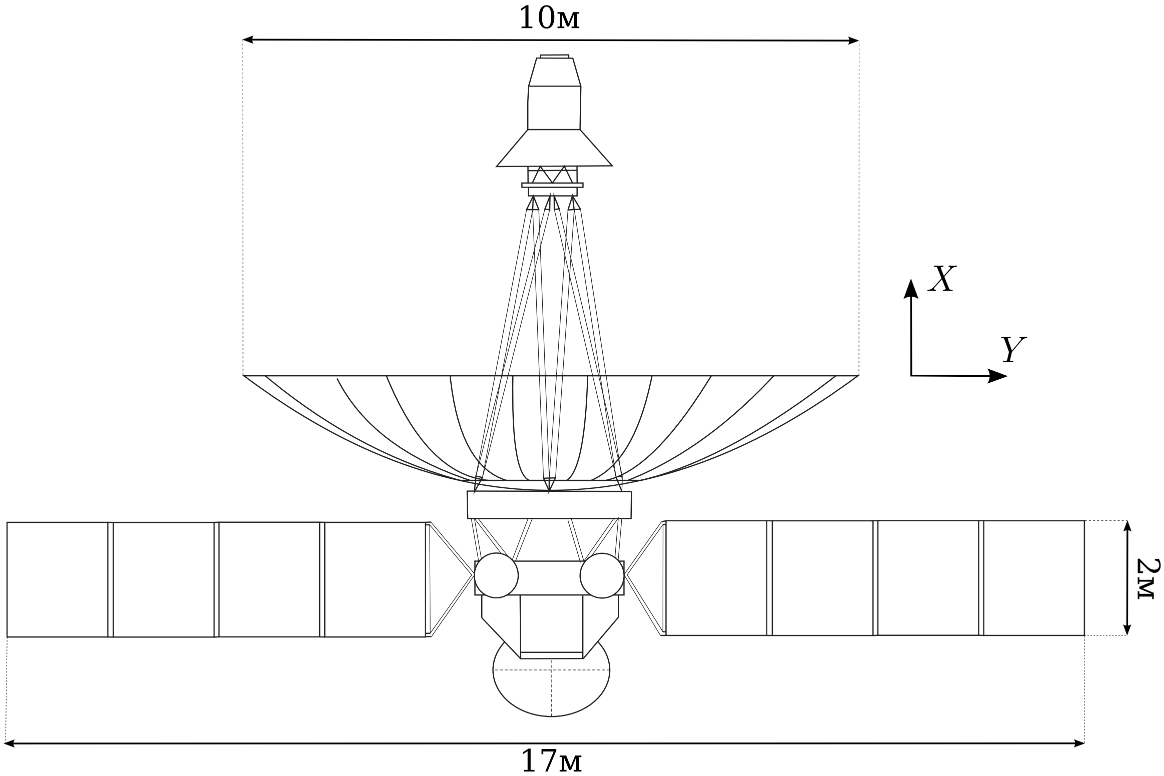


Рисунок 1.3: Схематическое изображение КА «Спектр-Р»

В случае «Спектра-Р» к таким элементам следует отнести антенну космического радиотелескопа (КРТ), панели солнечных батарей и центральный модуль «Навигатор».

Для более детального описания составляющих элементов опишем строительную систему координат, связанную с аппаратом. Ось OX системы совпадает с осью симметрии антенны КРТ и направлена в сторону наблюдаемого источника, ось OY совпадает с осью, вокруг которой могут вращаться панели солнечных батарей, ось OZ дополняет систему до правой. На рисунке 1.3 схематически изображен аппарата в плоскости OXY строительной системы координаты.

Параболическую поверхность антенны КРТ для простоты заменим частью поверхности сферы. Поверхность сферы, в свою очередь, разобьем на множество треугольных элементов. Такое разбиение можно получить, например, последовательным делением граней правильного тетраэдра. Пусть $\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{r_3}$ — радиус-векторы вершин грани, лежащие на единичной сфере ($\|r_i\| = 1, i = 1, 2, 3$). Введем новые вершины

$$\mathbf{r_{ij}} = \frac{\mathbf{r_i} + \mathbf{r_j}}{\|\mathbf{r_i} + \mathbf{r_j}\|}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j,$$

соответствующие проекциям центров ребер на сферу. В результате получим четыре треугольный грани с вершинами $\{\mathbf{r_i}, \mathbf{r_{ij}}, \mathbf{r_{ik}}\}, i \neq j, i \neq k$ и $\{\mathbf{r_{12}}, \mathbf{r_{23}}, \mathbf{r_{31}}\}$, которые также можно разбивать на более мелкие элементы. Представление поверхности КРТ в виде множества более мелких элементов необходимо для последующего расчета тени, которая должна быть учтена при моделировании влияния светового давления.

Поверхность панелей солнечных батарей представим двумя прямоугольными элементами, которые могут вращаться вокруг оси OY строительной системы координат, нормаль к плоскости, содержащей панели, всегда лежит в плоскости OXZ. Текущая ориентация панелей солнечных батарей телеметрируется, однако в дальнейшем будем считать, что они всегда повернуты вокруг оси OY таким образом, чтобы поток проходящего через них светового излучения был максимальным. Отметим, что в штатных ориентациях Солнце выходит из плоскости OXZ не более чем на 5 градусов, значит плоскость панелей солнечных батарей всегда практически ортогональна направлению на Солнца.

Центральный блок «Навигатор», на базе которого построен КА, представим параллелепипедом с ребрами, параллельными осям строительной системы координат. Совокупная модель поверхности, состоящая из трех перечисленных элементов, изображена на рисунке 1.4. Полученная модель поверхности будет в дальнейшем использована для расчета сил и моментов светового давления, действующего на аппарат.

При расчете действия светового давления на элемент поверхности аппарата, необходимо знать освещен ли этот элемент или находится в тени. Для аппаратов простой формы это определяется углом между нормалью к поверхности элемента $\mathbf{n}$ и направлением солнечных лучей $\mathbf{s}$. Если $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} < 0$, то элемент освещен, в противном случае элемент находится в тени. Однако, возможны случаи, когда элемент поверхности попадает в тень другого элемента, и описанное условие освещенности перестает работать, и условия возникновения тени приобретают более сложную форму.

Штатные ориентации КА «Спектр-Р» таковы, что угол между направлением на Солнце и осью OX строительной системы лежит в интервале от 90° до 165°. Это значит, что Солнце освещает антенну КРТ снизу, следовательно поверхность антенны частично находится в тени солнечных батарей и центрального блока. При нахождении аппарата в штатной ориентации также нет взаимного затенения центрального блока и панелей солнечных батарей. Та-

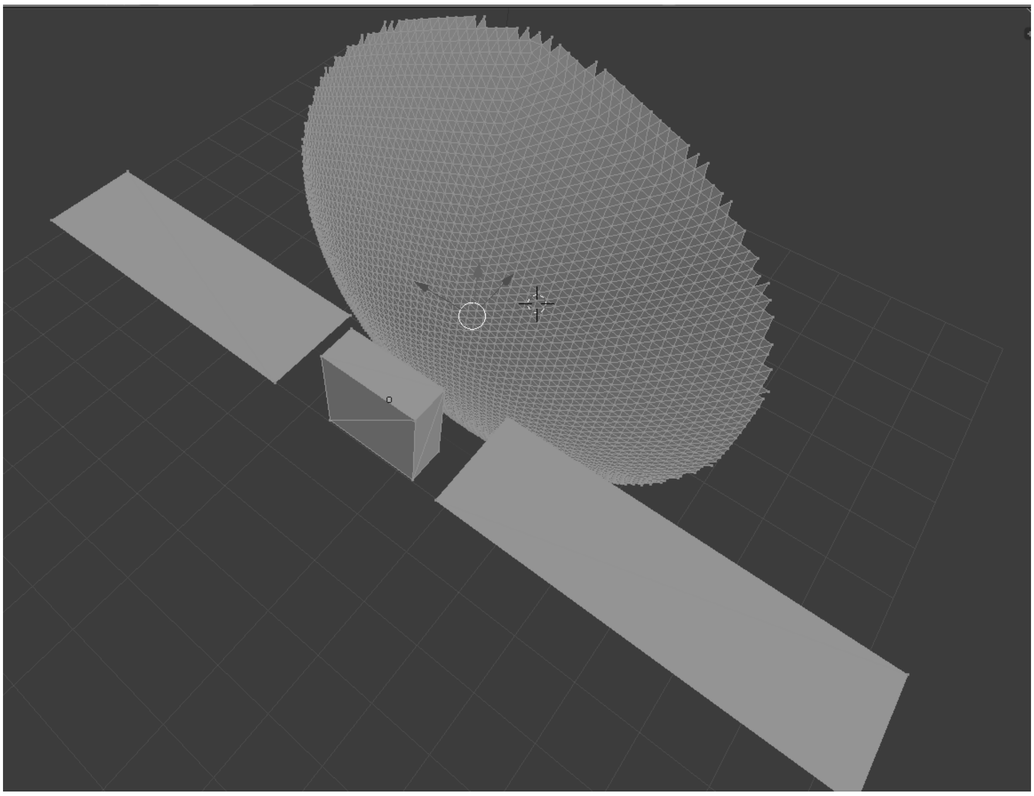


Рисунок 1.4: Трехмерная модель поверхности КА «Спектр-Р»

ким образом, детальную оценку освещенности необходимо проводить только для поверхности космического радиотелескопа.

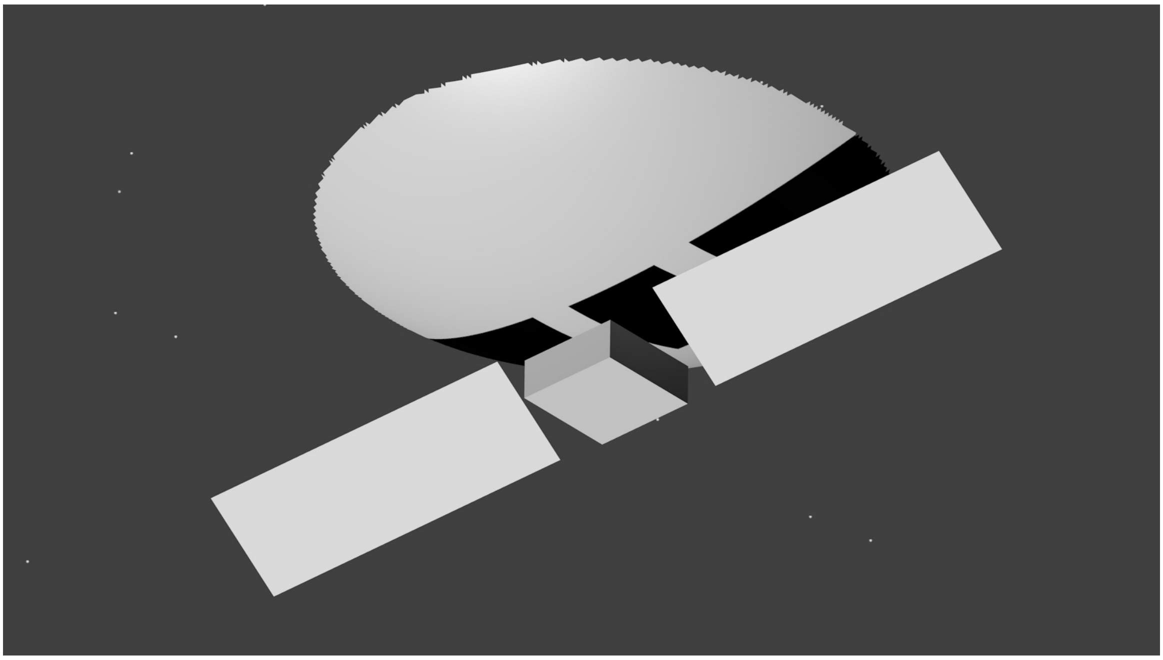


Рисунок 1.5: Пример рассчитанной тени

Рассмотрим треугольный элемент поверхности КРТ с центром **r** и внешней нормалью **n**. Он может попадать в тень одного из прямоугольных элементов конструкции, принадлежащего либо панелям солнечных батарей, либо центральному блоку. Пусть плоскость, содержащая прямоугольный элемент, описывается уравнением

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n_i}) = C_i,$$

где $\mathbf{n_i}$ — нормаль к плоскости, а C_i — некоторая константа. Определим прямоугольник в плоскости. Пусть $\mathbf{r_i}$ — радиус-вектор центра прямоугольника, a_i, b_i — длины его сторон, $\mathbf{x_i}, \mathbf{y_i}$ — единичные векторы параллельные сторонам прямоугольника. Будем считать, что элемент находится в тени целиком, если в тени находится его центр. Такой подход оправдан для достаточно мелкого разбиения поверхности КРТ. Для нахождения центра элемента в тени прямоугольника, заданного описанными параметрами необходимо выполнение следующих условий:

$$t = \frac{C_i - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n_i}}{\mathbf{s} \cdot \mathbf{n_i}} < 0,$$
$$|(\mathbf{r} + t\mathbf{s}) \cdot \mathbf{x_i}| \leq \frac{a_i}{2},$$
$$|(\mathbf{r} + t\mathbf{s}) \cdot \mathbf{y_i}| \leq \frac{b_i}{2}.$$

Первое условие соответствует тому, что солнечные лучи сначала проходят через плоскость, содержащую прямоугольник, а затем через рассматриваемый элемент, второе и третье условие обеспечивают нахождение проекции центра элемента в направлении солнечных лучей внутри прямоугольника. При расчете совокупной тени каждый треугольный элемент поверхности КРТ проверяется на затенение одним из 8 прямоугольных элементов. Пример тени, рассчитанной по описанному алгоритму приведен на рисунке 1.5.

1.4 Движение вокруг центра масс

Основные направления исследования, излагаемого в диссертации, связаны с движением центра масс КА, базирующихся на платформе «Навигатор». Однако в силу особенностей платформы, движение центра масс частично зависит от движения вокруг центра масс, следовательно последнее должно быть также рассмотрено. Упомянутое влияние движения вокруг центра масс связано с совместной работой систем ориентации и стабилизации аппарата. Эти системы включают в себя комплекс управления двигателями-маховиками (КУДМ), обеспечивающий переориентацию аппарата и компенсацию внешних возмущающих моментов во время поддержания точной ориентации, и набор двигателей стабилизации (ДС), роль которых в данной работе ограничивается разгрузками двигателей-махвиков.

При длительном поддержании аппаратом заданной ориентации и противодействии моменту внешних сил, направление которого постоянно, кинетический момент, накопленный двигателями-маховиками, монотонно возрастает. Следовательно к определенному момент времени скорости одного или нескольких маховиков достигнут предельных значений, при которых вся энергия двигателя будет тратится на поддержание вращения, а дальнейшая раскрутка невозможна. В этом случае маховики останавливаются, а двигатели стабилизации компенсируют возникающее вращение КА. Схема работы двигателей стабилизации не является моментной, следовательно во время разгрузки скорость центра масс аппарата получает некоторое приращение. Таким образом, движение аппарата вокруг центра масс косвенно оказывает влияние на движения самого центра масс.

Кинетический момент аппарата с маховиками, оси которых фиксированы относительно корпуса, выражается следующим образом в связанной системе координат:

$$\mathbf{K} = \mathcal{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{a_i} I_i \Omega_i, \tag{1.12}$$

где

$\mathcal{J}$ — тензор инерции аппарата вместе с маховиками в связанной системе координат;

$\boldsymbol{\omega}$ — мгновенная скорость вращения аппарата;

$\mathbf{a_i}$ — направляющие косинусы оси i-го маховика;

I_i — момент инерции i-го маховика относительно своей оси вращения;

Ω_i — угловая скорость i-го маховика относительно корпуса аппарата.

Кинетический момент в неподвижных осях, переход к которым из связанной системы осуществляется матрицей $\mathbf{A}$, имеет вид

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \mathcal{J} \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{A} \cdot \sum_{i=1}^{N} \mathbf{a_i} I_i \Omega_i. \tag{1.13}$$

Векторы $\mathbf{K}$ и $\boldsymbol{\omega}$ в выражениях (1.12) и (1.13) записаны в связанных и неподвижных осях соответственно. Движение такого тела в связанной системе описывается динамическим уравнением Эйлера

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M},$$

$$\mathcal{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{a_i} I_i \dot{\Omega}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathcal{J}\boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a_i}) I_i \Omega_i = \mathbf{M}, \tag{1.14}$$

где $\mathbf{M}$ — действующий на аппарат внешний возмущающий момент, точкой обозначено дифференцирование по времени.

В работе не рассматривается задача определения движения вокруг центра масс с заданным управлением $\{\Omega_i\}$, или поиск управления, обеспечивающего определенные режимы движения. Данные об ориентации рассматриваемых аппаратов в инерциальном пространстве (относительно звезд) и о скоростях вращения маховиков телеметрируются, т.е. могут быть восстановлены с определенной точностью. К тому же, в силу специфики научных миссий, выполняемых аппаратами, основным режимом работы системы является высокоточное поддержание ориентации в инерциальном пространстве ($\boldsymbol{\omega} \approx 0$), что существенно упрощает уравнения движения. Таким образом, неизвестным является не движение аппарата вокруг центра масс, а действующий на него момент, который тесно связан с возмущениями от светового давления. Зная параметры работы двигателей-маховиков и текущее движение аппарата вокруг центра масс можно измерить момент внешних сил как функцию неизвестных параметров светового давления.

1.4.1 Возмущающие моменты

Основную часть времени рассматриваемые аппараты должны находиться вдали от гравитирующих тел, где возмущающий момент мал по величине и вызван, в основном, световым давлением. Отсутствие необходимости в больших управляющих моментах и требование высокой точность наведения и стабилизации являются основными предпосылками к использованию ЭМИО. Рассмотрим основные действующие на КА возмущающие моменты.

Момент гравитационных сил

Пусть $\mathbf{R}$ — радиус вектор аппарата, проведенный из центра основного притягивающего тела и заданный в связанной строительно системе координат $OXYZ$. Обозначим $Oxyz$ систему, оси которой параллельны главным центральным осям инерции аппарата. Диагональные элементы тензора инерции аппарата в $Oxyz$ равны соответственно A, B и C. Переход от этой системы к $OXYZ$ осуществляется при помощи постоянной матрицы $\mathbf{S}$. Гравитационный момент в $Oxyz$ имеют вид [31]

$$\mathbf{M}_{Oxyz} = \frac{3\mu}{R^3} \begin{pmatrix} (C-B)\rho_y\rho_z \\ (A-C)\rho_x\rho_z \\ (B-A)\rho_x\rho_y \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

где μ — гравитационный параметр притягивающего тела, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{S}^{\mathsf{T}} \dfrac{\mathbf{R}}{\|\mathbf{R}\|}$. Результирующий гравитационный момент в осях строительной системы равен

$$\mathbf{M}_g = \mathbf{S} \cdot \mathbf{M}_{Oxyz}.$$

Момент сил светового давления

В рамках модели светового давления, описанной в разделе 1.2.2. Момент сил, действующих на аппарат складывается из моментов сил светового давления, действующих на отдельные его элементы, и представляется по аналогии с выражением (1.10)

$$\mathbf{M}_{sp} = \sum_{i=1}^{N} \eta_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{sp}(A_i, \theta_i, \alpha_i, \mu_i) \tag{1.16}$$

Обозначения, приведенные в разделе 1.2.2 сохранены, $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор центра i-го элемента поверхности. В случае, если все элементы поверхности распределены на m групп, каждая из которых имеет одинаковые параметры (α, μ), сумму в (1.16) также можно сгруппировать:

$$\mathbf{M}_{sp} = \sum_{j=1}^{m} \left[(1-\alpha_j)\mathbf{M}_0^j + \alpha_j\mu_j\mathbf{M}_s^j + \alpha_j(1-\mu_j)\mathbf{M}_d^j \right], \tag{1.17}$$

где $\mathbf{M}_0^j, \mathbf{M}_s^j, \mathbf{M}_d^j$ — базисные моменты сил, действующих на элементы j-й группы в предположении, что они полностью поглощают, зеркально отражают или диффузно отражают свет. Выражения для базисных моментов имеют вид

$$\mathbf{M}_0^j = \sum_{i \in S_j} \eta_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_0(A_i, \theta_i),$$
$$\mathbf{M}_s^j = \sum_{i \in S_j} \eta_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_s(A_i, \theta_i),$$
$$\mathbf{M}_d^j = \sum_{i \in S_j} \eta_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_d(A_i, \theta_i),$$

где S_j — индексное множество элементов, отнесенных к j-й группе. Полезным свойством этих выражений является то, что базисные моменты зависят только от ориентации относительно Солнца, определяющей освещенность η_i и угол падения лучей θ_i и не зависят от параметров (α_i, μ_i). Следовательно зависимость результирующего момента от параметров (α_i, μ_i) является достаточно простой и определена выражением (1.17).

1.4.2 Режим движения с неизменной ориентацией

Частным случаем движения, востребованного космическими обсерваториями серии «Спектр», является нахождение в постоянной ориентации относительно осей инерциальной системы координат. Такой режим работы системы ориентации и стабилизации для этих КА является основным и занимает большую часть времени полета. Уравнения движения относительно центра масс в этом случае существенно упрощаются, позволяя получать интегральные характеристики действующего момента, обладающие большей точностью, чем локальное измерение момента, описанное выражением (1.14)

Предположим, что аппарат находится в неизменной ориентации относительно звезд на отрезке времени $[t_1, t_2]$. В проекциях на оси инерциальной системы координат дифференциал кинетического момента аппарата равен

$$d\mathbf{K} = \mathbf{M}dt,$$

а изменение кинетического момента за время $t_2 - t_1$

$$\mathbf{K}\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}(\mathbf{s}, \mathbf{R})dt, \tag{1.18}$$

где

$\mathbf{s}$ — направление солнечных лучей;

$\mathbf{R}$ — радиус-вектор аппарата в строительной системе координат.

Учитывая, что аппарат не вращается, а также предполагая, что за время $t_2 - t_1$ ориентация относительно Солнца изменяется незначительно, можно представить выражение (1.18) виде

$$\mathbf{A}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{a_i}I_i\Omega_i\Big|_{t1}^{t2} = \mathbf{M}_{sp}(t_2 - t_1) + \int_{t_1}^{t_2}\mathbf{M}_g dt, \tag{1.19}$$

где $\mathbf{A}$ — матрица перехода от строительной к инерциальной системе координат. Если гравитационный момент пренебрежимо мал, то выражение (1.18) упрощается окончательно

$$\frac{\mathbf{K}_\Omega(t_2) - \mathbf{K}_\Omega(t_2)}{t_2 - t_1} = \mathbf{M}_{sp}(\mathbf{s}, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \mu_1, \ldots, \mu_m), \tag{1.20}$$

где $\mathbf{K}_\Omega(t) = \sum\limits_{i=1}^{N}\mathbf{a}_i I_i \Omega_i(t)$ — кинетический момент, накопленный маховиками. Момент сил светового давления в правой части (1.20) записан в осях строительной системы координат.

Пример зависимости скоростей вращения маховиков, полученных из телеметрической информации КА «Спектр-Р», от времени изображен на рисунке 1.6. На том же рисунке изображен график изменения кинетического момента маховиков в проекциях на оси связанной системы координат. На графике изменения кин. момента более четко видны линейные интервалы, соответствующие поддержанию постоянной ориентации. При этом наклон каждой из кривых равен проекции возмущающего момента светового давления на соответствующую ось связанной системы координат. Участки всплесков, заметные на обоих графиках соответствуют момент переориентации аппарата, во время которых маховики раскручиваются до предельной скорости, чтобы обеспечить максимально быстрое вращение аппарата из одного положения аппарата в другое. После завершения переориентации скорости маховиков возвращаются к значениям, обеспечивающим нулевую скорость вращения аппарата. Если пренебречь действием возмущающих моментов во время переориентации, то кинетический момент маховиков сохраняет свою величину после переориентации, а также направление в осях инерциальной системы, в осях связанной системы направление вектора кинетического момента маховиков изменяется. Еще одно важное с точки зрения анализа движения аппарата явление, заметное на графике — разгрузка маховиков — резкое измене-

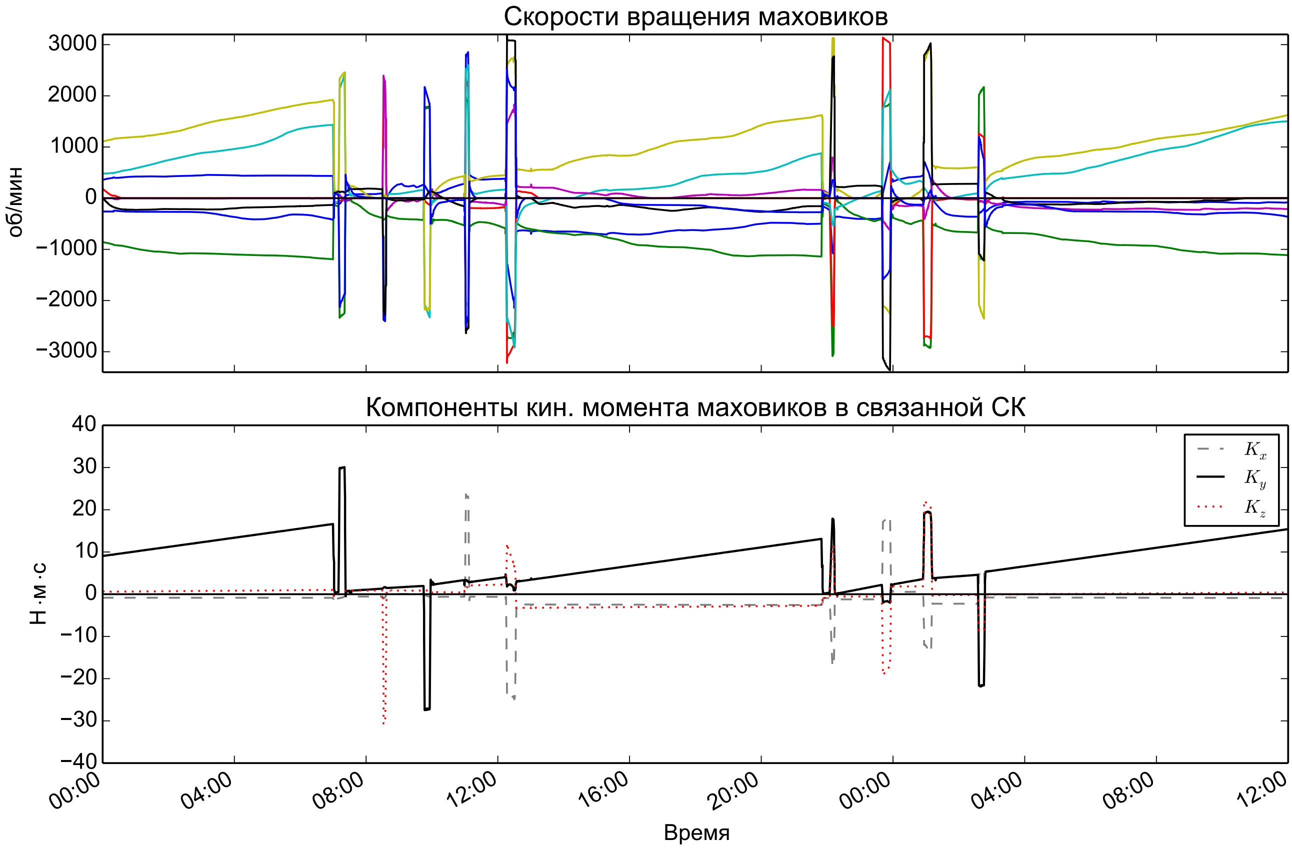


Рисунок 1.6: График изменения скоростей вращения маховиков КА «Спектр-Р» и их кинетического момента в связанной СК (22–23 февраля 2013 г.)

ние величины кинетического момента ЭМИО, за которым следует включение двигателей стабилизации.

1.4.3 Разгрузка маховиков

Цель раздела состоит в описании модели проведения разгрузки маховиков, используемой при расчете соответствующих возмущений движения центра масс КА. Данные о работе двигателей стабилизации, по которым можно восстановить приращение скорости аппарата, содержатся в телеметрии, а, значит, доступны для всех проведенных разгрузок. Однако, знание того, как связан накопленный маховиками кинетический момент с импульсом разгрузки, оказывается полезным при прогнозировании движения, когда времена и величины предстоящих разгрузок приходится рассчитывать наперед.

Двигатели стабилизации модуля «Навигатор», образующие немоментную схему, расположены плоскости, параллельной OYZ, как это показано на рисунке 1.7. Направление импульсов, выдаваемых этими двигателями, противо-

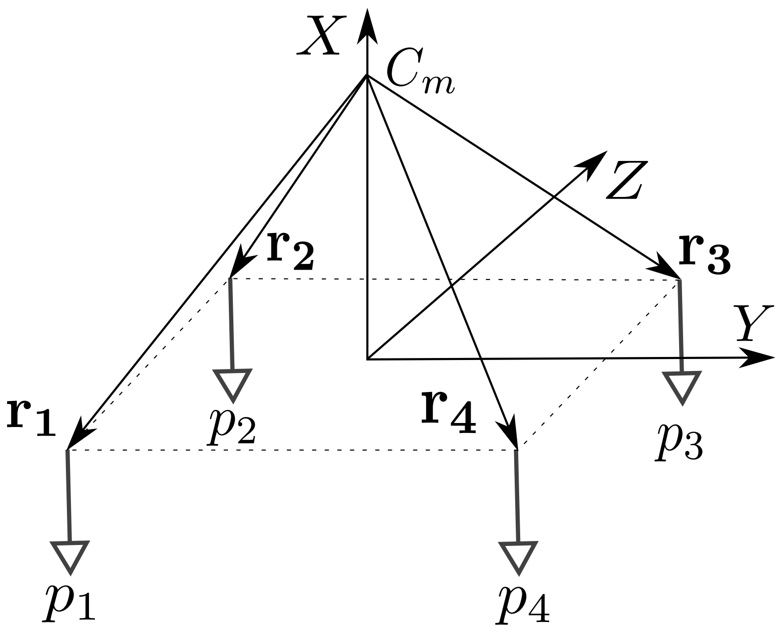


Рисунок 1.7: Схема расположения двигателей стабилизации

положно направлению оси OX строительной системы координат. Центр масс аппарата расположен практически на оси OX, включения описанных двигателей стабилизации может управлять вращением вокруг осей OY и OZ. Дополнительные двигатели позволяют управлять вращением вокруг оси OX, однако они реализуют моментную схему и не возмущают движение КА. В дальнейшем работу этих двигателей учитывать не будем.

Рассмотрим разгрузку маховиков, проходящую при постоянной ориентации КА за непродолжительное время. В начальный момент времени t_0 непосредственно перед разгрузкой аппарат сохранял постоянную ориентацию относительно звезд, а маховики имели некоторые скорости $\{\Omega_i\}_{i=1}^N$, кинетический момент аппарата в проекциях на оси связанной системы координат равен

$$\mathbf{K}(t_0) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{a}_i I_i \Omega_i,$$

Через непродолжительное время δt двигатели-маховики остановлены, а КА благодаря работе ДС находится в изначальной ориентации неподвижно относительно звезд. Изменение количества движения аппарата в осях, совпадающих с осями связанной системы координат в момент t_0 равно

$$\mathbf{K}(t_0 + \delta t) + \Delta\mathbf{K} - \mathbf{K}(t_0) = \mathbf{M}\delta t, \tag{1.21}$$

где $\mathbf{M}$ — действующий на КА возмущающий момент, $\Delta\mathbf{K}$ — момент количества движения отработанного топлива. Подставляя значения кин. момента маховиков, получим

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{a}_i I_i \Omega_i + \mathbf{M}\delta t = \Delta\mathbf{K}. \tag{1.22}$$

Разгружаемый кинетический момент маховиков сопоставим с действием возмущающего момента в течении 12 часов, поэтому при длительности средней разгрузки 1–3 минуты, вторым слагаемым в (1.22) можно пренебречь. Вместе с этим считая, что положение двигателей стабилизации относительно центра масс задается векторами $\{\mathbf{r}_i\}$, величины импульсов израсходованного топлива равны $\{p_i\}$, а направление их истечения — $\{\mathbf{e}_i\}$, выразим $\Delta\mathbf{K}$ и подставим в (1.21)

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{a}_i I_i \Omega_i \approx \sum_{j=1}^{4} \mathbf{r}_j \times \mathbf{e}_j p_j. \tag{1.23}$$

Приращение скорости, которое получит центр масс аппарата в результате разгрузки равен

$$\Delta\mathbf{v} = -\frac{\sum_{j=1}^{4} p_j \mathbf{e}_j}{M}, \tag{1.24}$$

где M — текущая масса аппарата. Уравнения (1.21) и (1.24) описывают связь между импульсом разгрузки и накопленным кинетическим моментом. Более подробно эта связь будет рассмотрена в главе 4, посвященной долгосрочному прогнозирования. В ней же будет рассмотрен вопрос о неоднозначности определения импульса разгрузки.

Глава 2

Моделирование траекторных измерений

В данной главе формулируются правила, по которым формируются расчетные значения наблюдаемых величин, используемые при уточнении параметров движения. Отдельно рассматриваются внешнетраекторные измерения и бортовые измерения, передающиеся по телеметрическому каналу. В числе внешнетраекторных измерений рассматриваются базовые двухпутевые радиотехнические измерения наклонной дальности и радиальной скорости. беззапросные доплеровские измерения, лазерные измерения дальности и оптические измерения положения КА на небесной сфере. К рассматриваемым бортовым измерениям отнесены импульсы разгрузок маховиков и кинетический момент, накопленный двигателями-маховиками.

2.1 Решение светового уравнения

Расчетные значения всех внешнетраекторных измерения основываются на решении световых уравнений, связывающих между собой события передачи сигнала от наземной станции к аппарату, передачи сигнала от КА обратно на станцию и регистрации принятого сигнала на наземной станции. Обозначим времена наступления этих событий t_1, t_2 и t_3 соответственно. Будем считать, что времена заданы в шкале той системы, в которой интегрируются уравнения движения. Указанные времена описываются следующими выражениями с точностью до поправок распространения в среде

$$t_3 - t_2 = \frac{r_{23}}{c} + \sum_j \frac{2\mu_j}{c^3} \ln\left(\frac{r_{j2} + r_{j3} + r_{23}}{r_{j2} + r_{j3} - r_{23}}\right), \tag{2.1}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{r_{12}}{c} + \sum_j \frac{2\mu_j}{c^3} \ln\left(\frac{r_{j1} + r_{j2} + r_{12}}{r_{j1} + r_{j2} - r_{12}}\right), \tag{2.2}$$

где

r_{23} — расстояние между фазовым центром антенны аппарата в момент передачи t_2 и фазовым центром наземной антенны в момент приема t_3;

r_{12} — расстояние между фазовым центром неземной антенны в момент передачи t_1 и фазовым центром антенны аппарата в момент передачи t_2;

r_{ji} — расстояние между центром масс j-го тела Солнечной системы и фазовым центром соответствующей антенны в момент времени t_i;

μ_j — гравитационный параметр j-го тела Солнечной системы;

c — скорость света в вакууме;

В общем случае суммирование в выражениях (2.1) и (2.2) ведется по всем телам Солнечной системы, однако, для рассматриваемых аппаратов достаточно учесть влияние Земли и Луны. Все используемые расстояния рассчитываются в той же системе, что и времена t_i. Привязка траекторных измерений на наземной станции как правило осуществляется к моменту t_1 или t_3, измеренному по часам станции. При этом неизвестные времена из тройки восстанавливаются благодаря знанию расчетного движения КА и наземной станции. Пусть для определенности известен момент t_3. Момент t_2 находится путем последовательных при, в качестве нулевого приближения используется момент прием сигнала

$$t_2^{(0)} = t_3,$$

следующее приближение получается из предыдущего

$$t_2^{(i+1)} = t_3 - \frac{|\mathbf{r}_2(t_2^{(i)}) - \mathbf{r}_3(t_3)|}{c} - \sum_j \frac{2\mu_j}{c^3} \ln\left(\frac{r_{j2} + r_{j3} + r_{23}}{r_{j2} + r_{j3} - r_{23}}\right),$$

где $\mathbf{r}_2$ — положение КА, $\mathbf{r}_3$ — положение антенны в момент t_3, для рассматриваемых КА релятивистская поправка, описываемая третьим членом, может считаться постоянной в силу малости времени распространения сигнала и не пересчитываться на каждой итерации. Процесс прекращается, когда разность времен на соседних шагах становится меньше наперед заданного значения

$$|t_2^{(i)} - t_2^{(i-1)}| \leq \varepsilon_{\text{св}}.$$

Поиск времени t_1 осуществляется аналогично. Начальным приближением для t_1 является полученное значение t_2, а выражение для последовательного приближения имеет вид

$$t_1^{(i+1)} = t_2 - \frac{|\mathbf{r}_1(t_1^{(i)}) - \mathbf{r}_2(t_2)|}{c} - \sum_j \frac{2\mu_j}{c^3} \ln\left(\frac{r_{j1} + r_{j2} + r_{12}}{r_{j1} + r_{j2} - r_{12}}\right).$$

Аналогичная процедура проводится, в том случае, если измерение привязывается к моменту передачи t_1. Полученные таким образом значения t_i используются в дальнейшем для формирования расчетных величин траекторных измерений.

2.2 Задержки распространения в среде

Изменения времени распространения электромагнитного сигнала при прохождении через атмосферу Земли в основной степени связано с преломляющей способностью нейтральной тропосферы и влиянием заряженных частиц ионосферы

$$\Delta_m \rho = \Delta_t \rho + \Delta_i \rho. \tag{2.3}$$

Задержка распространения через нейтральную тропосферу описывается суммой сухой (гидростатической) и влажной составляющей

$$\Delta_t \rho = m_d(\gamma) z_d + m_w(\gamma) z_w, \tag{2.4}$$

где z_d и z_w — зенитные задержки сухой и влажной составляющих, $m_d(\gamma)$ и $m_w(\gamma)$ — функции отображений для сухой и влажной тропосферы, γ — угол места распространения луча в вакууме. Зенитная задержка гидростатической составляющей для сигналов радиодиапазона описывается формулой

$$z_d = \frac{0.0022768 P}{1 - 0.00266 \cos 2\phi - 2.8 \cdot 10^{-7} H} \quad [\text{м}],$$

где P — атмосферное давление в районе фазового центра антенны, ϕ — широта положения станции, H — высота положения станции над уровнем моря в метрах. Зенитная задержка мокрой составляющей z_w для сигналов радиодиапазона обычно составляет 10% от z_d и плохо поддается априорной оценке [14]. Для целей работы достаточно взять номинальное значение зенитной задержки. При расчете зенитных задержек волн оптического диапазона модель [15] обеспечивает субмиллиметровую точность.

Функции отображения позволяют пересчитать задержку распространения на заданный угол места. Для измерений в радиодиапазоне использовалась глобальная функция отображения (GMF)[3], для лазерных измерений использовалась функция предложенная Мендесом и др. [16].

Основная часть ионосферной задержка при прохождении сигнала в зените описывается формулой

$$\Delta_i \rho = \pm M \frac{40.309V}{f^2} \quad [\text{м}],$$

где $V = \int_{H_1}^{H_2} N_e dh$ — вертикальная полная концентрация электронов на пути сигнала, f — частота сигнала. M — функция отображения. Знак поправки зависит от того, к каким измерениям применяется поправка: положительный для измерений дальности, отрицательный для доплеровских измерений [17]. Функция отображения имеет вид

$$M = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2 \cos^2 E}{(r+h)^2}}},$$

где r — геоцентрическое расстояние до станции, $h = 450$ км — эффективная высота ионосферы, E — сферический угол места луча сигнала. Для расчета полной концентрации может быть использована эмпирическая модель, например International Reference Ionosphere (IRI). Более достоверным источником являются апостериорные карты IONEX[24], построенные по измеренным задержкам двухчастотных сигналов GPS.

2.3 Радиотехнические измерения дальности

При двухпутевых измерениях наклонной дальности наблюдаемой величиной является разность фаз между излучаемым станцией сигналом и сигналом, принятым со спутника. Дальномерный сигнал представляет собой либо набор гармонических колебаний разной частоты, либо сигнал, полученный из псевдослучайной последовательности. Измеренная разность фаз является функцией ρ — временного интервала, измеренного часами станции между излучением сигнала и его приемом. В качестве измерения дальности используется следующая величина

$$\rho = T(t_3) - T(t_1) + \tau_U + \tau_D, \tag{2.5}$$

где

$T(t)$ — время по часам станции, соответствующее моменту координатного времени t;

τ_U — инструментальные задержки в восходящем канале станция–аппарат;

τ_D — инструментальные задержки в нисходящем канале аппарат–станция.

Выражая время станции через координатное время и подставляя (2.1), (2.2) с учетом поправок, получим выражение

$$\begin{aligned}\rho = \frac{r_{32}}{c} + \frac{r_{12}}{c} &+ \sum_j \frac{2\mu_j}{c^3} \ln\left(\frac{r_{j2}+r_{j3}+r_{23}}{r_{j2}+r_{j3}-r_{23}}\right) + \\ &+ \sum_j \frac{2\mu_j}{c^3} \ln\left(\frac{r_{j1}+r_{j2}+r_{12}}{r_{j1}+r_{j2}-r_{12}}\right) + \\ &+ \frac{1}{c}\left(\Delta_A(t_1) + \Delta_A(t_3) + \Delta_m(t_1) + \Delta_m(t_3)\right) + \\ &+ (T(t_3) - t_3) - (T(t_1) - t_1) + \tau_U + \tau_D.\end{aligned} \tag{2.6}$$

где

Δ_A — геометрическая поправка для наземной антенны, обусловленная разностью между расчетным положением антенны, фиксированным относительно Земли, и положением ее фазового центра;

Δ_m — поправка на прохождение лучей через атмосферу и ионосферу;

каждая из этих поправок применяется к восходящему и нисходящему тракту сигнала.

При малом значении инструментальных поправок слагаемое, обусловленное разностью времени станции и координатного времени, можно упростить

$$(T(t_3) - t_3) - (T(t_1) - t_1) = (T(t_3) - T(t_1)) - (t_3 - t_1) \approx L(t)\rho,$$

где $L(t) = dT/dt - 1$.

Радиотехнические измерения дальности привязываются к моменту t_3 регистрации переизлученного аппаратом сигнала. Времена передачи сигнала со станции t_1 и с аппарата t_2 получаются из решения светового уравнения. При помощи этих времен рассчитываются координаты аппарата и станции, входящие в выражение (2.6) для расчетного значения дальности.

Поскольку время t_3 в измерениях дальности фиксировано, производную от измеренной двухпутевой задержки по уточняемому параметру можно рассчитать следующим образом

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{\partial (t_3 - t_1)}{\partial \mathbf{Q}} = -\frac{\partial t_1}{\partial \mathbf{Q}}.$$

Для выражения частной производной от t_1 продифференцируем по $\mathbf{Q}$ выражение

$$r_{12}^2 = (\mathbf{r}_2(t_2) - \mathbf{r}_1(t_1))^{\mathsf{T}}(\mathbf{r}_2(t_2) - \mathbf{r}_1(t_1)),$$

получим

$$\frac{\partial r_{12}}{\partial \mathbf{Q}} = \left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}\right)^{\mathsf{T}} \left[\frac{\partial \mathbf{r}_2(t_2)}{\partial \mathbf{Q}} - \frac{\partial \mathbf{r}_1(t_1)}{\partial \mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{r}}_2(t_2)\frac{\partial t_2}{\partial \mathbf{Q}} - \dot{\mathbf{r}}_1(t_1)\frac{\partial t_1}{\partial \mathbf{Q}}\right].$$

Пользуясь приблизительным выражением $(t_2 - t_1)c = r_{12}$ получим

$$\frac{\partial t_1}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{\dfrac{\partial t_2}{\partial \mathbf{Q}}\left(1 - \dfrac{\dot{r}_{12} + \dot{p}_{12}}{c}\right) + \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}\right)^{\mathsf{T}}\left[\dfrac{\partial \mathbf{r}_1(t_1)}{\partial \mathbf{Q}} - \dfrac{\partial \mathbf{r}_2(t_2)}{\partial \mathbf{Q}}\right]}{1 - \dfrac{\dot{p}_{12}}{c}}, \tag{2.7}$$

в выражении использовано обозначение $\dot{p}_{12} = \dfrac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}\dot{\mathbf{r}}_1$. Проделывая аналогичные выкладки для r_{23}, учитывая, что время t_3 фиксировано, получим выражение для частной производной от t_2

$$\frac{\partial t_2}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{\dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}}\right)^{\mathsf{T}}\left[\dfrac{\partial \mathbf{r}_2(t_2)}{\partial \mathbf{Q}} - \dfrac{\partial \mathbf{r}_3(t_3)}{\partial \mathbf{Q}}\right]}{1 - \dfrac{\dot{p}_{23}}{c}}, \tag{2.8}$$

где применено обозначение $\dot{p}_{23} = \dfrac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}}\dot{\mathbf{r}}_2$. Выражения (2.7) и (2.8) позволяют получить частную производную двухпутевой задержки распространения света по вектору уточняемых параметров. Менее точное выражение производной, не учитывающее, изменение решения светового уравнения, можно получить, продифференцировав $r_{12} + r_{23}$, считая, что положение пункта не зависит от $\mathbf{Q}$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{1}{c} \left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} - \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}} \right)^{\mathsf{T}} \frac{\partial \mathbf{r}_2(t_2)}{\partial \mathbf{Q}}. \tag{2.9}$$

Точность определения производных влияет сходимость процесса уточнения вектора $\mathbf{Q}$.

2.4 Радиотехнические измерения радиальной скорости

Для определения параметров движения используются двухпутевые доплеровские измерения, в ходе которых на станции формируется сигнал частоты $f_T(t)$ и посылается на КА, на борту аппарата частота принятого сигнала умножается на постоянный коэффициент M_2 и отправляется обратно. На станции фиксируется изменение фазы принятого сигнала на интервале накопления $T_c = t_{3_e} - t_{3_s}$ по отношению к опорной частоте. Измеренное значение сдвига частоты представляется в виде

$$F = \frac{1}{T_c} \int_{t_{3_s}}^{t_{3_e}} \left[f_{ref}(t_3) - f_R(t_3) \right] dt_3, \tag{2.10}$$

где f_{ref} — опорная частота, с которой происходит сравнение, f_R — частота принятого сигнала. Обозначим $T'_c = t_{1_e} - t_{1_s}$ интервал времени, на котором излучался сигнал, зафиксированный станцией позже на интервале T_c. Измеренное значение можно переписать в виде [17]

$$F = \frac{1}{T_c} \int_{t_{3_s}}^{t_{3_e}} f_{ref}(t_3) dt_3 - \frac{M_2}{T_c} \int_{t_{1_s}}^{t_{1_e}} f_T(t_1) dt_1. \tag{2.11}$$

Первое слагаемое в (2.11) является известной величиной, ее значение зависит от того, что взято в качестве опорной частоты. Второе слагаемое распишем в предположении постоянства передаваемой со станции частоты, что справедливо для используемых на текущий момент измерительных комплексов «Клен-Д» и «Кобальт-М»,

$$\frac{M_2}{T_c} \int_{t_{1_s}}^{t_{1_e}} f_T dt_1 = \frac{T'_c}{T_c} M_2 f_T = \frac{T_c + \rho_e - \rho_s}{T_c} M_2 f_T, \tag{2.12}$$

здесь ρ_e и ρ_s — двухпутевые запаздывания, связанные с распространением сигнала от станции к аппарату и обратно, между началами интервалов t_{1_s}, t_{3_s} и их концами t_{1_e}, t_{3_e}. Таким образом, для получения расчетных значений доплеровских измерений необходимо рассчитать две двухпутевые задержки согласно выражению (2.6) для моментов приема t_{3_s} и t_{3_e}. Привязка измерений t_3 как правило осуществляется к середине интервала накопления, при этом

$$t_{3_s} = t_3 - \frac{T_c}{2}, \qquad t_{3_e} = t_3 + \frac{T_c}{2}.$$

Частные производные по вектору уточняемых параметров выражаются через производные двухпутевых задержек ρ, получение которых описано в предыдущем разделе. Для систем, используемых для измерений КА «Спектр-Р», использующих постоянную частоту передачи, производная имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{M_2 f_T}{T_c}\left(\frac{\partial \rho_e}{\partial \mathbf{Q}} - \frac{\partial \rho_s}{\partial \mathbf{Q}}\right). \tag{2.13}$$

По аналогии с (2.9) выражение для частной производной можно заменить более простым, но менее точным выражением

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}} = M_2 F_T \frac{\partial(\dot{r}_{12} + \dot{r}_{23})}{\partial \mathbf{Q}}, \tag{2.14}$$

в которое непосредственно входят производные от координат по уточняемым параметрам.

2.5 Беззапросные измерения радиальной скорости

В данном типе измерений в отличие от двухпутевых доплеровских измерений изначальный сигнал формируется на борту КА и передается на наземную станцию. Измеряемой величиной, как и в случае двухпутевого доплеровских измерений, является количество колебаний за время интервала накопления T_c

$$\begin{aligned} F =& \frac{1}{T_c}\int_{t_{3_s}}^{t_{3_e}} f_R dt_3 = \\ =& \frac{1}{T_c}\int_{t_{2_s}(\text{КА})}^{t_{2_e}(\text{КА})} \left[f_T + \Delta f_T + f_{T_1}(t_2 - t_0) + f_{T_2}(t_2 - t_0)^2\right] dt_2(\text{КА}), \end{aligned} \tag{2.15}$$

где

f_T — номинальная частота передаваемого сигнала;

Δf_T — постоянный сдвиг частоты;

f_{T_1} — линейный уход частоты;

f_{T_2} — квадратичный уход частоты.

Неизвестные величины, определяющие отличие генерируемой на борту частоты от номинального значения, обычно вносятся в число параметров согласования. Моменты времени t_{2_s} и t_{2_e}, определяющие пределы интегрирования рассчитываются в шкале времени КА и соответствуют началу и концу интервала излучения, который в свою очередь соответствует интервалу накопления наземной станции. Они связываются между собой следующими выражениями:

$$
\begin{aligned}
t_{3_s} &= t_{2_s}(\text{КА}) + [t_{2_s} - t_{2_s}(\text{КА})] + \rho_{1_s},\\
t_{3_e} &= t_{2_e}(\text{КА}) + [t_{2_e} - t_{2_e}(\text{КА})] + \rho_{1_e},
\end{aligned}
$$

где ρ_{1_s} и ρ_{1_e} — однопутевые задержки распространения, определяющиеся выражением

$$
\begin{aligned}
\rho_1 = \frac{r_{23}}{c} &+ \sum_j \frac{2\mu_j}{c^3} \ln\left(\frac{r_{j2} + r_{j3} + r_{23}}{r_{j2} + r_{j3} - r_{23}}\right)\\
&+ \frac{1}{c}\left(\Delta_A(t_3) + \Delta_m(t_3)\right) + (T(t_3) - t_3) + \tau_D,
\end{aligned}
$$

где обозначения совпадают с используемыми в выражении (2.6). Таким образом, интервал времени, измеренный по часам аппарата, соответствующий интервалу накопления, измеренному наземной станции имеет вид

$$
\begin{aligned}
t_{2_e}(\text{КА}) - t_{2_s}(\text{КА}) = (t_{3_e} - t_{3_s}) - (\rho_{1_e} - \rho_{1_s}) -&\\
- \left([t_2 - t_2(\text{КА})]_e - [t_2 - t_2(\text{КА})]_s\right).& \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

Введем обозначение для накопленной разности хода бортовых часов и координатного времени

$$\Delta = [t_2 - t_2(\text{КА})]_e - [t_2 - t_2(\text{КА})]_s.$$

Разность хода можно представить в виде

$$\Delta = \int_{t_{2_s}}^{t_{2_e}} (1 - \frac{dt(\text{КА})}{dt}) dt.$$

Подынтегральное выражение, в свою очередь, выражается следующим образом [17]:

$$1 - \frac{dt(\text{КА})}{dt} = \frac{1}{c^2}\left(\mathcal{U} + \frac{1}{2}v^2\right) - L,$$

где $\mathcal{U}$ — величина гравитационного потенциала в окрестности аппарата, v — величина скорости аппарата в неподвижной системе отсчета, L — постоянная величина, являющаяся характеристикой системы отсчета, упоминаемая в разделе 1.1. От величины L зависит то, при каких условиях ход бортовых часов будет совпадать с ходом координатного времени. Так, при использовании геоцентрической системы отсчета и времени TT, в потенциал $\mathcal{U}$ удобно включать только действие Земли и разность от действий Луны и Солнца на аппарат и Землю, постоянная системы равна $L = L_G = 6.969290134 \cdot 10^{-10}$. При использовании барицентрической системы и времени TDB в потенциал $\mathcal{U}$ входят все тела Солнечной системы, постоянная системы равна $L = L_B = 1.550519768 \cdot 10^{-8}$ [19].

Беззапросные доплеровские измерения сигнала, передаваемого с борта КА «Спектр-Р», ведутся с интервалом накопления в 0.04 секунды. При таком небольшом интервале элементы, входящие в правую часть (2.16), можно выразить через производные, взяв первые члены разложения в ряд,

$$\begin{aligned}
&\rho_{1_e} - \rho_{1_s} \approx \frac{\dot{r}_{23}}{c - \dot{p}_{23}}(t_{3_e} - t_{3_s}),\\
&\Delta = \left[\frac{1}{c^2}\left(\mathcal{U} + \frac{1}{2}v^2\right) - L\right](t_{3_e} - t_{3_s} - (\rho_{1_e} - \rho_{1_s})),
\end{aligned}$$

где обозначение $\dot{p}_{23}$ совпадает с используемым в (2.8), эта добавка возникает в знаменателе из-за разложения ρ по времени приема t_3, и является существенной при выражении измеренной величины через скорость, а не через разницу задержек распространения. Временной интервал на борту КА, соответствующий интервалу накопления измеренному на Земле будет равен

$$t_{2_e}(\text{КА}) - t_{2_s}(\text{КА}) = \left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\mathcal{U} + \frac{1}{2}v^2\right) + L\right]\left(1 - \frac{\dot{r}_{23}}{c - \dot{p}_{23}}\right)T_c, \qquad (2.17)$$

При моделировании сигналов с КА «Спектр-Р» изменение генерируемой частоты сигнала со временем предполагалось нулевым ($f_{T_1} = f_{T_2} = 0$). Расчетная частота измеренного сигнал в этом случае выгляди следующим образом:

$$F = \left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\mathcal{U} + \frac{1}{2}v^2\right) + L\right]\left(1 - \frac{\dot{r}_{23}}{c - \dot{p}_{23}}\right)(f_T + \Delta f_T). \qquad (2.18)$$

Значение скорости бортовых часов v и величины гравитационного потенциала $\mathcal{U}$ рассчитываются на середину интервала передачи сигнала $[t_{2_s}, t_{2_e}]$. Более подробное описание расчета сдвига частоты беззапросного сигнала с КА «Спектр-Р» дается в статье [41].

Для расчета частных производных по уточняемым параметрам можно воспользоваться приблизительным выражением

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}} = -\frac{f_T}{c}\frac{\partial \dot{r}_{23}}{\partial \mathbf{Q}}. \tag{2.19}$$

2.6 Лазерные измерения дальности

Лазерные измерения являются наиболее точными и информативным типом траекторных измерений, используемых в работе. Принцип их получения схож с радиотехническими измерениями дальности. Сформированный сигнал в виде лазерного луча передается на КА, достигнув аппарата, отражается от установленных на нем уголковых отражателей, отраженный сигнал фиксируется приемным телескопом станции. Измеряемой величиной является двухпутевая задержка распространения сигнала

$$\begin{aligned}\rho = \frac{r_{12}}{c} + \frac{r_{23}}{c} &+ \sum_j \frac{2\mu_j}{c^3}\ln\left(\frac{r_{j2}+r_{j3}+r_{23}}{r_{j2}+r_{j3}-r_{23}}\right) + \\ &+ \sum_j \frac{2\mu_j}{c^3}\ln\left(\frac{r_{j1}+r_{j2}+r_{12}}{r_{j1}+r_{j2}-r_{12}}\right) + \\ &+ (\Delta_A(t_1)+\Delta_A(t_3)+\Delta_m(t_3)+\Delta_m(t_1)) + \\ &+ (T(t_3)-t_3)-(T(t_1)-t_1) \quad .\end{aligned} \tag{2.20}$$

обозначения совпадают с теми, что использовались в выражении (2.6). Следует отметить, что геометрические поправки $\Delta_A(t)$ связаны только с различием положения отражателей и центра масс КА. Геометрические коррекции, связанные с изменяющимися положениями излучающей и приемной аппаратуры, применяются самой станцией ко всем полученным измерениям. Аналогичный подход осуществляется при учете аппаратурных задержек, которые связаны только с наземной станцией. Эти поправки тщательно калибруются и учитываются самими станциями, проводящими наблюдения. При расчете задержек распространение в среде $\Delta_m(t)$ используется модели зенитной задержки и функция отображения, отличные от тех, что использовались в радиодиапазоне. Задержка, связанная с ионосферой, пренебрежимо мала из-за высоких частот используемого сигнала, и не учитывается при построении расчетного значения измерений.

Еще одной отличительной особенностью лазерных измерений является привязка ко времени, которая осуществляется не к моменту приема сигнала t_3, а к моменту его излучения t_1. Поиск неизвестных времен t_2 и t_3 осуществляется тем же способом, что описан в разделе 2.1. Уравнения, связывающие последовательные приближения принимают вид

$$\begin{aligned} t_2^{(i+1)} = t_1 + \frac{|\mathbf{r}_1(t_1) - \mathbf{r}_2(t_2^{(i)})|}{c} + \\ + \sum_j \frac{2\mu_j}{c^3} \ln\left(\frac{r_{j1}+r_{j2}+r_{12}}{r_{j1}+r_{j2}-r_{12}}\right), \quad t_2^{(0)} = t_1, \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} t_3^{(i+1)} = t_2 + \frac{|\mathbf{r}_2(t_2) - \mathbf{r}_3(t_3^{(i)})|}{c} + \\ + \sum_j \frac{2\mu_j}{c^3} \ln\left(\frac{r_{j2}+r_{j3}+r_{23}}{r_{j2}+r_{j3}-r_{23}}\right), \quad t_3^{(0)} = t_2. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Выражение для вычисления частных производных по уточняемым параметрам $\mathbf{Q}$ претерпевает небольшие изменения по сравнению с (2.7)

$$\frac{\partial t_3}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{\dfrac{\partial t_2}{\partial \mathbf{Q}}\left(1 - \dfrac{\dot{p}_{23}}{c}\right) + \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}}\right)^{\mathsf{T}}\left[\dfrac{\partial \mathbf{r}_3(t_1)}{\partial \mathbf{Q}} - \dfrac{\partial \mathbf{r}_2(t_2)}{\partial \mathbf{Q}}\right]}{1 - \dfrac{\dot{p}_{23} + \dot{r}_{23}}{c}}, \tag{2.23}$$

где производная времени отражения t_2 по $\mathbf{Q}$ равна

$$\frac{\partial t_2}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{\dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}\right)^{\mathsf{T}}\left[\dfrac{\partial \mathbf{r}_2(t_2)}{\partial \mathbf{Q}} - \dfrac{\partial \mathbf{r}_1(t_1)}{\partial \mathbf{Q}}\right]}{1 - \dfrac{\dot{p}_{12} + \dot{r}_{12}}{c}}. \tag{2.24}$$

Менее точная формула, не учитывающая изменение решения светового уравнения не отличается от (2.9), использованной для радиотехнических измерений.

2.7 Оптические астрометрические измерения

Наземные обсерватории фиксируют изображение аппарата на фоне звезд. По попавшим в кадр звездам строится локальная карта звездного неба, по которой определяются координаты объекта. Координаты попавших в кадр звезд определяются из каталога (например UCAC2). Номинальное значение направления от обсерватории к аппарату равно

$$\mathbf{L}_0 = -\frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}},$$

где $\mathbf{r}_{23}$ — описанная выше разница между положением аппарата в момент передачи света и положением обсерватории в момент измерения, значение вектора определяется в ходе решения светового уравнения. Поправка к направлению, учитывающая звездную аберрацию из-за движения наблюдателя, описывается выражением

$$\Delta\mathbf{L} = \frac{\dot{\mathbf{r}}_3}{c},$$

где $\dot{\mathbf{r}}_3$ — скорость наблюдателя в используемой системе координат, геоцентрической или барицентрической. Направление на КА с учетом звездной аберрации равно

$$\mathbf{L} = \frac{\mathbf{L}_0 + \Delta\mathbf{L}}{|\mathbf{L}_0 + \Delta\mathbf{L}|}.$$

Для наблюдателя данное направление совпадает с направлением на точку небесной сферы с координатами, восстановленным по идентифицированным в кадре звездам. Для простоты будем считать эту точку звездой, направление на которую в барицентрической системе координат постоянно и равно $\mathbf{L}^*$. Для наблюдателя в силу звездной аберрации это направление имеет вид

$$\mathbf{L}' = \frac{\mathbf{L}^* + \dfrac{\dot{\mathbf{r}}_3^C}{c}}{\left|\mathbf{L}^* + \dfrac{\dot{\mathbf{r}}_3^C}{c}\right|},$$

где $\mathbf{r}_3^C$ — барицентрическая скорость наблюдателя в момент приема. Направление на КА и условную звезду совпадают

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}',$$

что позволяет рассчитать измеряемую наблюдателем величину $\mathbf{L}^*$.

Поправки в силу звездной аберрации могут быть выражены более точно при помощи преобразований Лоренца, однако отличие от приведенного простого представления в этом случае составит тысячные доли угловой секунды, что пренебрежимо мало по сравнению с точностью используемых астрометрических измерений.

Из-за рефракции в атмосфере видимые наблюдателю направления на КА и на локальные звезды изменяются. Если аппарат находится относительно близко к наблюдателю, эти изменения становятся различны, что приводит к рефракционному параллаксу — небольшому сдвигу видимого положения КА относительно звезд. Для учета этого эффекта достаточно сделать поправку угла места расчетного направления $\mathbf{L}$ согласно [25]

$$\gamma' = \gamma - \frac{c_r \cos\gamma}{r_{23}\sin^2\gamma}, \tag{2.25}$$

где γ — угол места КА до поправки, r_{23} — расстояние между КА и наблюдателем, c_r — параметр, зависящий от текущего состояния атмосферы, значение которого в данном случае можно считать постоянным $c_r = 2.2$ м. Азимут КА и исправленный угол места γ' пересчитывается в расчетное направление $\mathbf{L}$ поправленное на эффект рефракционного параллакса.

Измеренное направление на аппарат представляется в виде прямого восхождения α и склонения δ

$$\alpha = \operatorname{atan2}(L_y, L_x),$$
$$\delta = \arcsin L_z,$$

где atan2 — функция, возвращающая угол поворота вектора от положительного направления от абсцисс по координатам вектора.

Частные производные от α и δ по вектору состояния аппарата, необходимые для расчета производных по вектору $\mathbf{Q}$, представляются в виде

$$\frac{\partial(\alpha,\delta)^\mathsf{T}}{\partial\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} -\dfrac{L_y}{r_{23}(L_x^2+L_y^2)} & \dfrac{L_x}{r_{23}(L_x^2+L_y^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{L_xL_z}{r_{23}\sqrt{L_x^2+L_y^2}} & -\dfrac{L_yL_z}{r_{23}\sqrt{L_x^2+L_y^2}} & \dfrac{\sqrt{L_x^2+L_y^2}}{r_{23}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

производные $\operatorname{atan2}(y, x)$ по аргументам равны производных функции $\arctan(\dfrac{y}{x})$.

2.8 Измерения импульсов разгрузок

Данные измерения проводятся на борту КА и содержат в себе информацию о возмущении движения центра масс аппарата в результате разгрузок. Эта информация может быть использована при уточнении орбиты.

Разгрузка состоит из нескольких включений двигателей стабилизации. Информация по включениям, которая содержит время включения, длительность включения и расход топлива, заносится в телеметрию. Эффективность работы двигателя зависит от длительности включения и выражается в росте удельной тяги, эта зависимость приведена в таблице 2.1. Расчетные значения приращения скорости от j-го включения двигателя во время i-й разгрузки представляется в виде

$$\Delta v_i^{(j)} = \frac{\Delta m_i^{(j)} I_{\text{у}}(\tau_i^{(j)}) g}{M},$$

где

$\Delta m_i^{(j)}$ — масса отработанного рабочего тела, известная из телеметрии;

$I_{\text{у}}$ — удельная тяга двигателя;

$\tau_i^{(j)}$ — время работы двигателя;

g — ускорение свободного падения;

M — масса аппарата, слабо изменяющаяся во времени величина.

Удельная тяга ДС определялась линейной интерполяции данных таблицы 2.1, отражающей характеристики ДС КА «Спектр-Р». Масса аппарата считается постоянной в ходе всей разгрузки. Расход топлива всех двигателей телеметрируется, поэтому изменение массы за длительный промежуток времени известен.

Измеренный импульс i-й разгрузки получается суммированием всех включений двигателей с учетом их ориентации относительно корпуса КА

$$\Delta \mathbf{v}_i^0 = \sum_j \Delta \mathbf{v}_i^{(j)} = \sum_j \Delta v_i^{(j)} \mathbf{e}_i^{(j)},$$

где $\mathbf{e}_i^{(j)}$ — направление тяги соответствующего двигателя в абсолютной системе координат.

Время работы τ, с	Удельная тяга $I_{\text{у}}$, с
$0.08 \le \tau < 0.4$	170 – 190
$0.4 \le \tau < 1.2$	190 – 205
$1.2 \le \tau < 2.4$	205 – 210
$\tau \ge 2.4$	215

Таблица 2.1: Характеристики двигателей стабилизации модуля «Навигатор»

Измерение импульса разгрузки определяет вектор из трех компонент. Для использования этих измерений в уточнении орбиты определим соответствующую ковариационную и весовую матрицы. Для этого определим ошибки измерения единичного приращения скорости $\Delta\mathbf{v}_i^{(j)}$. Ошибка содержится как в измерении величины $\Delta v_i^{(j)}$ так и в определении направления $\mathbf{e}_i^{(j)}$. Будем, однако, предполагать, что ошибки определения направления малы, а их распределение зависит только от угла между номинальным и фактическим направлением. Подходящим образом ошибки описывает случайный вектор, имеющий ковариационную матрицу вида

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \sigma_v^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_d^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_d^2 \end{pmatrix}, \qquad (2.26)$$

в ортогональной системе координат, ось X которой направлена вдоль $\mathbf{e}_i^{(j)}$. В этом случае σ_v является среднеквадратичной ошибкой определения величины $\Delta v_i^{(j)}$, а σ_d задает ортогональную ошибку, т.е. ошибку направления $\mathbf{e}_i^{(j)}$. Источниками ортогональных ошибок являются неточное положение двигателя относительно корпуса аппарата и измеряемая ориентация. Несмотря на то, что во время научных наблюдений система ориентации и стабилизации позволяет поддерживать ориентацию с точностью до долей угловой минуты, во время проведения разгрузок ошибки могут на несколько порядков превышать достигаемую предельную точность. Телеметрическая информация не позволяет отследить колебания ориентации, возникающие во время разгрузки.

Покажем, к какому виду преобразуется ковариационная матрица, при переходе к строительной системе координат. Произвольное направление тяги обозначим через $\mathbf{e}$. В связанной системе ковариационная матрица изменится на

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{A}^{\mathsf{T}},$$

где $\mathbf{A}$ — матрица перехода от системы с простой ковариационной матрицей (2.26) к строительной системе. Матрица $\mathbf{A}$ является ортогональной, и в общем случае не определяется однозначно, т.к. зависит от положения осей Y и Z системы с матрицей (2.26), положение который определено с точностью до плоскости. Взяв частный случай ориентации осей и переходной матрицы $\mathbf{A}$, легко показать, что ковариационная матрица преобразуется к виду

$$\mathbf{K}_b = \sigma_d^2(\mathbf{E} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^{\mathsf{T}}) + \sigma_v^2 \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^{\mathsf{T}}, \tag{2.27}$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

Весовая матрица импульса разгрузки получается обращением суммы ковариационных матриц отдельных включений. Отдельно следует отметить случай, когда тяга всех включающихся двигателей направлена в одну сторону $\mathbf{e}_i^{(j)} = \mathbf{e}_i^{(k)}, \forall j, k$. В этом случае весовая матрица принимает простой вид

$$\mathbf{P}_i = \frac{1}{\sigma_d^2}(\mathbf{E} - \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i^{\mathsf{T}}) + \frac{1}{\sigma_v^2}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i^{\mathsf{T}}, \tag{2.28}$$

где σ_v и σ_d суммарные продольные и поперечные ошибки. Подобное включение двигателей реализовано в работе системы ориентации и стабилизации КА «Спектр-Р»: поворот вокруг оси OX строительной СК осуществляется моментной схемой двигателей, не влияющей на движение центра масс, а поворот вокруг оставшихся осей осуществляется двигателями, тяга которых направлена вдоль оси OX.

При решении реальной задачи уточнения предполагалось, что ошибки исполнения по величине составляют 10%, квадратичная ошибка в ортогональном направлении соответствует отклонению в пол градуса.

Частные производные по уточняемым параметрам $\mathbf{Q}$ имеют тривиальный вид, поскольку импульсы разгрузок входят в состав $\mathbf{Q}$ и не зависят от других параметров движения.

2.9 Измерения возмущающих моментов

Действующий на аппарат момент внешних сил связан со скоростями вращения самого аппарата и его подвижных частей, в частности, маховиков.

В общем случае момент можно выразить локально при помощи динамического уравнения Эйлера. Для этого потребуется знание скоростей вращения аппарата и маховиков, а также их первых производных по времени. Ориентация и скорости вращения маховиков постоянно измеряются, и необходимые величины могут быть найдены при помощи интерполяции. Для КА на платформе «Навигатор» характерен частный случай движения, в ходе которого двигателями–маховиками поддерживается постоянная ориентация аппарата относительно звезд. В этом случае, как было показано в разделе 1.4.2, действующий на аппарат возмущающий момент равен скорости изменения кинетического момента системы маховиков

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{a}_i I_i \dot{\Omega}_i = \mathbf{M}_{sp} + \mathbf{M}_g, \tag{2.29}$$

где $\mathbf{M}_{sp}$ и $\mathbf{M}_g$ — возмущающие моменты от гравитации Земли и давления солнечного света, посчитанные в связанной системе координат. Кинетический момент маховиков и скорость его изменения являются измеряемыми величинами, соответствующие им расчетные значения — моменты внешних сил, зависящие от уточняемых параметров $\mathbf{Q}$. Как следует из (2.29), измерения действующего момента сил в конкретный момент времени требуют знания производных $\dot{\Omega}_i$. Поскольку бортовой системой измеряются непосредственно скорости вращения маховиков Ω_i, для получения производной в конкретный момент времени необходимо использовать соседние точки

$$\dot{\Omega}(t_i) \approx \frac{\Omega(t_i)}{t_i - t_{i+1}} + \frac{\Omega(t_i)}{t_i - t_{i-1}} + \frac{\Omega(t_{i-1})(t_i - t_{i+1})}{(t_{i-1} - t_i)(t_{i-1} - t_{i+1})} + \frac{\Omega(t_{i+1})(t_i - t_{i-1})}{(t_{i+1} - t_i)(t_{i+1} - t_{i-1})}.$$

Таким образом, измеренные величины в левой части (2.29) получаются интерполяцией телеметрических данных, расчетные значения моментов сил вычисляются согласно (1.15) и (1.17). Введем обозначение для рассогласования измеренного и расчетного момента внешних сил

$$\boldsymbol{\xi}_j = \dot{\mathbf{K}}_\Omega(t_j) - \mathbf{M}_{sp}(\Lambda(t_j), \alpha_1, \mu_1, \ldots, \alpha_m, \mu_m, \mathbf{X}) - \mathbf{M}_g(\Lambda(t_j), \mathbf{X}), \tag{2.30}$$

где $\Lambda(t)$ — описывает ориентацию аппарата в момент времени t.

Способ локального определения возмущающего момента, основанный на поиске производной кинетического момента маховиков по нескольким соседним точкам, сильно зависит от ошибок измерения скоростей вращения маховиков. Эта проблема решается использованием избыточного набора соседних точек и построением регрессии $\Omega(t)$ в окрестности рассматриваемой точки для расчета производной.

Если на временном интервале (t_1, t_2), длина которого много меньше одного года, ориентация аппарата относительно звезд не изменяется, то действующий момент сил светового давления можно считать постоянным. Выбрав неподвижную систему таким образом, чтобы она совпадала со связанной на рассматриваемом интервале, можно переписать выражение (1.19)

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{a_i} I_i(\Omega_i(t_2) - \Omega_i(t_1)) = \mathbf{M}_{sp}(t_2 - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_g dt. \tag{2.31}$$

В общем случае интеграл от гравитационного момента можно рассчитать численно. Для аппаратов, планируемых к запуску в окрестность L_2 системы Солнце–Земля, влияние гравитационного момента пренебрежимо мало. Для запущенного на орбиту КА «Спектр-Р» максимальный гравитационный момент сравнивается со средним моментом от светового давления на высотах около 30 тыс. км., поэтому на расстояниях между Землей и КА превышающих 100 тыс. км. интегралом в правой части (2.31) можно пренебречь. Учитывая, что это условие выполняется в среднем 90% времени, большую часть измерений можно представить в виде

$$\boldsymbol{\xi}_j = \frac{\mathbf{K}_\Omega(t_2) - \mathbf{K}_\Omega(t_1)}{t_2 - t_1} - \mathbf{M}_{sp}(\Lambda(t_2), \alpha_1, \mu_1, \ldots, \alpha_m, \mu_m, \mathbf{X}). \tag{2.32}$$

Для описания весовой матрицы $\mathbf{P}_j^{sp}$, которая понадобится при уточнении орбиты, выведем ковариационную матрицу величины $\mathbf{K}_\Omega$. Предположим, что направления $\mathbf{a}_i$ заданы точно, и ошибки присутствуют только в определении скоростей вращения маховиков Ω_i. Тогда совокупность скоростей вращения маховиков является случайным вектором с независимыми нормально распределенными элементами. В предположении, что моменты инерции всех маховиков равны, их суммарные кинетический момент в осях строительной системы координат можно представить в виде

$$\mathbf{K}_\omega = I\mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}, \tag{2.33}$$

где I — момент инерции маховика относительно его оси вращения, $\mathbf{A}$ — матрица направляющих косинусов осей вращения маховиков. Схема реализации маховичных органов управления, используемых в КА «Спектр-Р», приведены на рисунке 2.1, угол α составляет 20 градусов. Матрица направляющих косинусов имеет вид

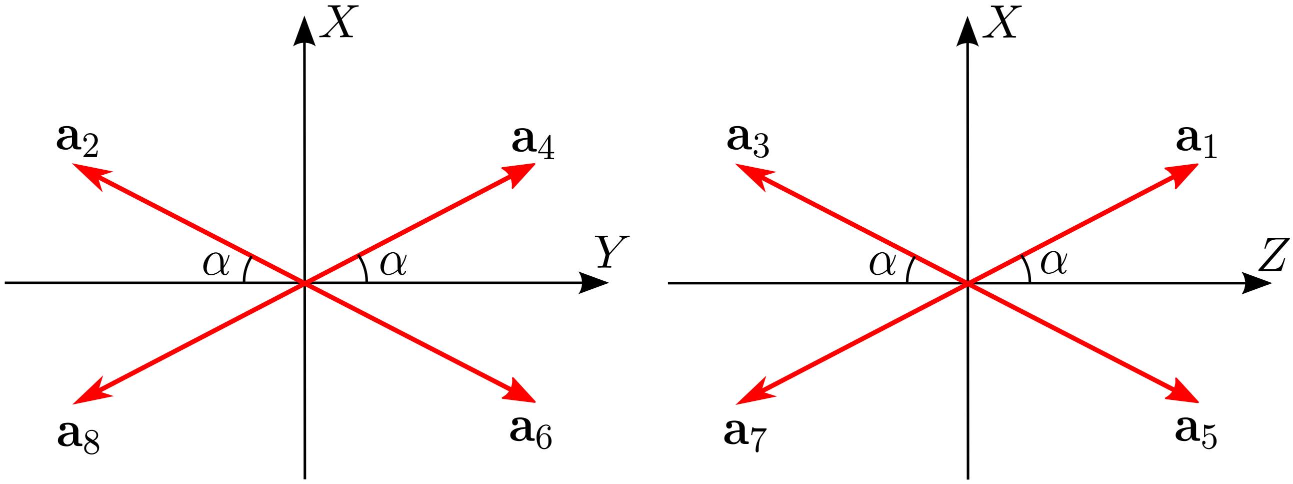


Рисунок 2.1: Направление осей вращения двигателей-маховиков

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \sin\alpha & \sin\alpha & \sin\alpha & -\sin\alpha & -\sin\alpha & -\sin\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & -\cos\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & 0 & -\cos\alpha & 0 & -\cos\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть среднеквадратичные ошибки определения Ω_i равны σ_v, тогда ковариационная матрица кинетического момента равна

$$\mathbf{K}_{K_\Omega} = I^2\sigma_v^2\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T} = I^2\sigma_v^2 \begin{pmatrix} 8\sin^2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 4\cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4\cos^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что если направления $\mathbf{a}_i$ имеют небольшие ошибки σ_d, как в случае с импульсами разгрузок, искомая ковариационная матрица также будет иметь диагональный вид

$$\mathbf{K}_{K_\Omega} = I^2\sigma_d^2\mathbf{E} + I^2(\sigma_v^2 - \sigma_d^2)\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}, \tag{2.34}$$

что облегчает расчет весовой матрицы

$$\mathbf{P}_j^{sp} = \mathbf{K}_{K_\Omega}^{-1}(t_2 - t_1)^2. \tag{2.35}$$

При расчете частных производных моментов сил по уточняемым параметрам $\mathbf{Q}$ пренебрежем зависимостью светового давления от положения аппарата на орбите. Действительно, использование сложной модели движения подразумевает наличие хорошего начального приближения, следовательно, вариации в координатах аппарата не окажут существенного влияния на расстояние между аппаратом и Солнцем. Таким образом, ненулевыми будут только производные по коэффициентам светового давления, которые получаются непосредственно из (1.17)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{M}_{sp}}{\partial \alpha_j} &= (\mathbf{M}_d^j - \mathbf{M}_0^j) + \mu_j(\mathbf{M}_s^j - \mathbf{M}_d^j),\\ \frac{\partial \mathbf{M}_{sp}}{\partial \mu_j} &= \alpha_j(\mathbf{M}_s^j - \mathbf{M}_d^j),\end{aligned}$$

где $\mathbf{M}_0^j$, $\mathbf{M}_s^j$ и $\mathbf{M}_d^j$ — моменты сил светового давления, которые действовали бы на j-ю группу элементов, если бы те поглощали, зеркально отражали или диффузно отражали падающий на них свет.

Глава 3

Определение орбиты

В настоящей главе ставится задача определения орбиты КА, чье движение подвергается возмущениям детально описанными в первых главах, по набору траекторных измерений и телеметрической информации об ориентации аппарата, скоростях вращения двигателей-маховиков и работе двигателей стабилизации. Описывается алгоритм решения и вычисления всех вспомогательных величин. Приводится пример решения задачи для КА «Спектр-Р», построенного по реальным траекторным и телеметрическим данным.

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим движение КА на временном интервале $[t_{\text{н}}, t_{\text{к}}]$. В течение этого интервала произошло n разгрузок маховиков. Из телеметрии известны времена и номинальные значения импульсов разгрузок

$$(t_1, \Delta\mathbf{v}_1^0), (t_2, \Delta\mathbf{v}_2^0), \ldots, (t_n, \Delta\mathbf{v}_n^0), \qquad t_i \in [t_{\text{н}}, t_{\text{к}}], i = 1, \ldots, n \tag{3.1}$$

Световое давление описывается набором из $2m$ параметров

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \quad \mu_1, \ldots, \mu_m, \tag{3.2}$$

Предположим, что на заданном интервале времени были проведены траекторные измерения $\boldsymbol{\Psi}$, в общем случае включающие в себя измерения дальности, радиальной скорости и угловых положения КА.

$$\boldsymbol{\Psi} = \{\mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\delta}\}.$$

Предположим, что на протяжении рассматриваемого временного интервала аппарат N раз находился в неизменной ориентации. Для каждого из таких событий определим временные рамки $[t_1^j, t_2^j]$ и величины рассогласований, полученных из (2.32)

$$\boldsymbol{\xi}_j = \frac{\mathbf{K}_\Omega(t_2^j) - \mathbf{K}_\Omega(t_1^j)}{t_2^j - t_1^j} - \mathbf{M}_{sp}(\mathbf{s}, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \mu_1, \ldots, \mu_m).$$

Зададим следующий расширенный вектор параметров, определяющих движение КА:

$$\mathbf{Q} = \{\mathbf{X}_0(t_0), \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \quad \mu_1, \ldots, \mu_m, \Delta\mathbf{v}_1, \ldots, \Delta\mathbf{v}_n\},$$

где $\mathbf{X}_0(t_0)$ — вектор состояния аппарата на момент $t_0 \in [t_\text{н}, t_\text{к}]$, в качестве вектора состояния будем использовать координаты и скорость КА в инерциальном пространстве, $\{\alpha_i, \mu_i\}_{i=1}^m$ — коэффициенты светового давления, $\{\Delta\mathbf{v}_j\}_{j=1}^n$ — мгновенные приращения скорости аппарата в моменты времени из (3.1). Используя введенные обозначения, определим функционал

$$\begin{aligned}\Phi =& (\boldsymbol{\Psi}_o - \boldsymbol{\Psi}_c)^\mathsf{T}\mathbf{P}(\boldsymbol{\Psi}_o - \boldsymbol{\Psi}_c) + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\xi}_j^\mathsf{T}\mathbf{P}_j^{sp}\boldsymbol{\xi}_j + \\ &+ \sum_{i=1}^{n}(\Delta\mathbf{v}_i^0 - \Delta\mathbf{v}_i)^\mathsf{T}\mathbf{P}_i(\Delta\mathbf{v}_i^0 - \Delta\mathbf{v}_i),\end{aligned} \tag{3.3}$$

где

- $\boldsymbol{\Psi}_o$ — полученные (измеренные) значения траекторных измерений;
- $\boldsymbol{\Psi}_c$ — расчетные значения траекторных измерений, зависящие от движения аппарата $\boldsymbol{\Psi}_c = \boldsymbol{\Psi}_c(\mathbf{Q})$;
- $\mathbf{P}$ — весовая матрица траекторных измерений;
- $\mathbf{P}_j^{sp}$ — весовая матрица моментов светового давления;
- $\mathbf{P}_i$ — весовая матрица измерений импульсов разгрузок;

Выражение (3.3) отличается от функционала, используемого в классическом варианте определения орбиты по траекторным измерениям методом максимального правдоподобия [29], наличием двух дополнительных слагаемых. Каждое из этих слагаемых содержит рассогласования между функциями от измеренных величин, предоставляемых телеметрической системой, и расчетных значений, зависящих от элементов $\mathbf{Q}$. В этом смысле отделение их от траекторных измерений является условным. Описание весовых матриц $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{P}_j^{sp}$, входящих в (3.3), давалось в разделах 2.8 и 2.9. Далее везде будем предполагать, что ошибки рассогласований как траекторных измерений, так и измерений импульсов разгрузок и моментов светового давления, распределены нормально с нулевым математическим ожиданием.

Будем искать такие параметры движения $\mathbf{Q}$, которые доставляют максимум функции правдоподобия $\mathcal{L}(\mathbf{\Psi}|\mathbf{Q}) = P(\mathbf{Q}|\mathbf{\Psi})$. Что эквивалентно

$$\mathbf{Q} = \arg\min \Phi(\mathbf{Q}), \tag{3.4}$$

в том случае, если невязки из (3.3) распределены по стандартному нормальному закону с ковариационными матрицами, равными обращенным весовым матрицам из того же выражения. В силу положительной определенности ковариационных и, следовательно, весовых матриц условие глобального минимума (3.3) эквивалентно условию экстремума

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{Q}} = \mathbf{0}. \tag{3.5}$$

Таким образом, поиск оценки параметров движения, доставляющих максимум функции правдоподобия в конкретной реализации измерений, равносилен поиску стационарных точек функционала Φ.

3.2 Алгоритм решения

Будем искать вектор $\mathbf{Q}$, удовлетворяющий системе (3.5), итерационным методом обобщенных касательных Ньютона. Решение методом Ньютона сводится к серии последовательных приближений. Скорость сходимости метода зависит от качества начального приближения $\mathbf{Q}^{(0)}$. При высокоточном определении орбиты справедливо предполагать, что некоторое начальное приближение получено, например, с использованием более простых моделей движения. Точности такого начального приближения как правило хватает для того, чтобы избежать проблем со сходимостью.

Имея некоторое приближение $\mathbf{Q}^{(i)}$ на i-м шаге, рассчитаем поправки $\mathbf{\Delta Q}$ для получения приближения не следующем шаге. Эти поправки должны удовлетворять системе нормальных уравнений [29]

$$\mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{Q} = \mathbf{B}, \tag{3.6}$$

где матрица системы и правые части представляются в виде

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_c}{\partial \mathbf{Q}}\right)^{\mathsf{T}} \mathbf{P} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_c}{\partial \mathbf{Q}}\right) + \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}_j}{\partial \mathbf{Q}}\right)^{\mathsf{T}} \mathbf{P}_j^{sp} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}_j}{\partial \mathbf{Q}}\right) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{Q}}\right)^{\mathsf{T}} \mathbf{P}_i \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{Q}}\right), \tag{3.7}$$

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_c}{\partial \mathbf{Q}}\right)^{\mathsf{T}} \mathbf{P}(\boldsymbol{\Psi}_o - \boldsymbol{\Psi}_c) - \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}_j}{\partial \mathbf{Q}}\right)^{\mathsf{T}} \mathbf{P}_j^{sp} \boldsymbol{\xi}_j + \\ + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{Q}}\right)^{\mathsf{T}} \mathbf{P}_i (\Delta \mathbf{v}_i^0 - \Delta \mathbf{v}_i). \tag{3.8}$$

Матрица системы $\mathbf{A}$ и вектор правых частей $\mathbf{B}$ являются функциями $\mathbf{Q}$ их значения на i-м шаге метода Ньютона вычисляются исходя из значений приближения $\mathbf{Q}^{(i)}$

$$\Delta \mathbf{Q}^{(i)} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Q}^{(i)}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{Q}^{(i)}), \qquad \mathbf{Q}^{(i+1)} = \mathbf{Q}^{(i)} + \Delta \mathbf{Q}^{(i)}.$$

Основными составляющими системы нормальных уравнений являются частные производные моделируемых величин, входящих в (3.3) по уточняемым параметрам $\mathbf{Q}$. Опишем процедуру их получения. Для внешнетраекторных измерений $\boldsymbol{\Psi}_c$ с необходимой точностью можно считать справедливым выражение

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_c}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_c}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{Q}}, \tag{3.9}$$

Частные производные, входящие в правую часть (3.9) рассчитываются на момент участия аппарата в измерении. Этот момент времени как правило определяется из решения светового уравнения, и в общем случае тоже претерпевает изменения при вариациях $\mathbf{Q}$. Частные производные измерений по вектору состояния определяются типом измерения, способ их получения изложен в главе 2.

Опишем получение частных производных текущего вектора состояния от элемента Q_i вектор уточняемых параметров. Пусть изменение вектора состояния аппарата $\mathbf{X} = (\mathbf{r}^{\mathsf{T}}, \mathbf{v}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$ описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}), \qquad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \tag{3.10}$$

где первые 3 компоненты вектора $\mathbf{F}$, очевидно, совпадают со скоростью $\mathbf{v}$, а вторая тройка описывает ускорения, действующие на КА, согласно модели, описанной в главе 1. Помимо шести уравнений движения (3.10) введем в систему дополнительные 6 уравнений в вариациях

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial Q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial Q_i}\left(\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right) = \frac{\partial \mathbf{F}(t,\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial Q_i} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial Q_i}. \tag{3.11}$$

Таким образом, для расчета производных по вектору $\mathbf{X}_0$, входящему в $\mathbf{Q}$, необходимо дополнительно интегрировать 36 уравнений в вариациях. Дополнительные $12m$ уравнений потребуются для расчета производных по параметрам светового давления. Следует отметить, что расчет производных по импульсам разгрузок не требует введения дополнительных уравнений, поскольку

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Delta \mathbf{v}_i} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{v}(t_i)},$$

а частная производная от вектора состояния по скорости аппарата в момент времени t_i (последние три столбца матрицы $\dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}(t_i)}$) может быть получена из частных производных по вектору начальных условий

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}(t_i)} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial \mathbf{X}(t_i)} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}_0} \cdot \left(\left.\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}_0}\right|_{t_i}\right)^{-1}. \tag{3.12}$$

Для этого необходимо знать частные производные по начальному вектору состояния в текущий момент и момент времени t_i. Разгрузки маховиков, проведенная в момент времени t_i, не оказывает влияние на вектор состояния КА в моменты времени, предшествующие разгрузке, поэтому конечное выражение для частных производных вектора состояния по импульсу разгрузки будет выглядеть так

$$\frac{\partial \mathbf{X}(t)}{\partial \Delta \mathbf{v}_i} = \begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}_0} \cdot \left(\left.\dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}_0}\right|_{t_i}\right)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{E}} & , t \geq t_i, \\ 0 & , t < t_i. \end{cases} \tag{3.13}$$

где

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}.$$

Конечная система дифференциальных уравнений, обеспечивающая необходимые данные для расчета частных производных вектора состояния аппарата на момент времени t по уточняемым параметра $\mathbf{Q}$, имеет размерность $42 + 12m$ и представляются в виде

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{d\mathbf{X}}{dt} & = & \mathbf{F}(t, \mathbf{X}), \\ & \ldots & \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial X_0^{(i)}}\right) & = & \dfrac{\partial \mathbf{F}(t, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial X_0^{(i)}} \\ & \ldots & \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial \alpha_j}\right) & = & \dfrac{\partial \mathbf{F}(t, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial \alpha_j} + \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha_j}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mu_j}\right) & = & \dfrac{\partial \mathbf{F}(t, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mu_j} + \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mu_j}, \\ & \ldots & \end{array}\right. , \quad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, 6, \\ j = 1, \ldots, m. \end{array} \tag{3.14}$$

Полная система (3.14), включающая уравнения в вариациях, интегрируется от начальных условий

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \quad \left.\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}_0}\right|_{t_0} = \mathbf{E}, \quad \left.\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \alpha_j}\right|_{t_0} = \left.\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mu_j}\right|_{t_0} = 0. \tag{3.15}$$

Как и в системе (3.10), для каждой шестерки уравнений из (3.14) последние три компоненты вектора $\dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial Q_i}$ являются правыми частями для первых трех компонент: $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial Q_i} = \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial Q_i}$. Существенными остаются уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial Q_i} = \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial Q_i} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial Q_i}, \tag{3.16}$$

где $\mathbf{f}(t, \mathbf{X})$ — ускорение аппарата. Явная зависимость ускорения от параметра, возникающая в том случае, если Q_i является одним из коэффициентов светового давления, может быть выражена при помощи (1.11)

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha_j} = \frac{1}{m}\left[\mu_j \mathbf{F}_s^j + (1 - \mu_j)\mathbf{F}_d^j - \mathbf{F}_0^j\right], \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mu_j} = \frac{1}{m}\left[\alpha_j \mathbf{F}_s^j - \alpha_j \mathbf{F}_d^j\right]. \tag{3.18}$$

Выражения частных производных по $\mathbf{Q}$ других слагаемых, входящих в Φ, имеют более простой вид из-за отсутствия явной зависимости от текущего положения аппарата. Производные $\dfrac{\partial \Delta \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{Q}}$ имеют тривиальный вид. Отметим, что момент светового давления, входящий в $\boldsymbol{\xi}_j$ зависит от координат аппарата, поскольку поток солнечной энергии зависит от расстояния до Солнца, однако этой зависимостью можно пренебречь при расчете вариаций. Для измеренных моментов сил светового давления ненулевыми будут только производные по коэффициентам α и μ

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & & & & & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dfrac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mu_1} & \dots & \dfrac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \alpha_m} & \dfrac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mu_m} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & & & & & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

вектор-столбцы, входящие в матрицу выражаются при помощи (1.17)

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \alpha_j} = \mathbf{M}_o^j - \mu_j \mathbf{M}_s^j - (1 - \mu_j)\mathbf{M}_d^j, \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mu_j} = \alpha_j \mathbf{M}_d^j - \alpha_j \mathbf{M}_s^j. \tag{3.20}$$

3.3 Уточнение орбиты КА «Спектр-Р»

В данном разделе исследуется влияние приведенных выше моделей и методик на качество получаемой в результате уточнения орбиты. Объектом исследования является КА «Спектр-Р», входными данными для получения орбиты являются реальные траекторные измерения и телеметрическая информация.

Для уточнения орбиты было выбрано два временных интервала в 2013-м году: с 20 февраля по 10 апреля и с 10 апреля по 30 мая. Выбранные интервалы с одной стороны находятся в зоне интенсивных наблюдений, с другой — максимально удалены от момента вывода на орбиту, во избежание ошибок, связанных с отработкой новых измерительных систем.

3.3.1 Модели движения

Будем рассматривать четыре модели движения, в различной степени учитывающие функциональные и конструкционные особенности аппарата. Первая модель движения — классическая, она учитывает все внешние возмущения пассивного движения, описанные в главе 1, кроме светового давления, которое рассчитывается согласно простой модели [42], справедливой для равномерно окрашенной сферы. В работе использовалась следующая реализация простой модели ускорения от светового давления:

$$\mathbf{f}_{sp} = -\varkappa \frac{\mu_{\text{C}}}{|\mathbf{R}_{\text{C}} - \mathbf{r}|^3} (\mathbf{R}_{\text{C}} - \mathbf{r}), \tag{3.21}$$

где

μ_{C} — гравитационная постоянная Солнца;

$\mathbf{R}_{\text{C}}$ — радиус-вектор Солнца;

$\mathbf{r}$ — радиус-вектор КА.

Световое давление при этом никак не зависит от ориентации аппарата и характеризуется одним неизвестным коэффициентом $\varkappa$, который вносится в число уточняемых параметров.

Вторая модель описывает классическое пассивное движение, но с добавлением разгрузок моховиков. Световое давление также описывается одним коэффициентом, который уточняется. Импульсы разгрузок имеют фиксированные значения, восстановленные из телеметрии.

Третья модель отличается от второй более изощренным световым давлением, которое зависит от ориентации КА относительно Солнца (раздел 1.2.2). Описание поверхности, используемой при расчете светового давления было дано в разделе 1.3. По свойствам отражения света поверхность поделена на две части: антенна радиотелескопа с центральным блоком и панели солнечных батарей. Идентичность отражающих свойств поверхностей антенны КРТ и центрального блока обусловлена тем, что перед запуском обе поверхности были покрыты одинаковой многослойной тепловой изоляцией. Вместо четырех коэффициентов (α_1, μ_1) и (α_2, μ_2), соответствующих двум типам поверхностей, использовались только три коэффициента: (α_1, μ_1) и α_2. В силу того, что панели солнечных батарей ориентированы нормально с точностью в несколько градусов по отношению к направлению на Солнце, коэффициенты α_2 и μ_2 не будут независимыми. Для определенности коэффициент μ_2 полагался равным единице, что эквивалентно отсутствию диффузного отражения от панелей солнечных батарей. Данное значение μ_2 было выбрано волевым

№	Наименование	Световое давление	Разгрузки
1	К	Классическое, $\varkappa$	Не учитываются
2	КР	Классическое, $\varkappa$	Учитываются
3	СР	Сложное, $\alpha_1, \mu_1, \alpha_2$	Учитываются
4	СР+	Сложное, $\alpha_1, \mu_1, \alpha_2$	Уточняются

Таблица 3.1: Сравниваемые модели

образом, описанный случай $\alpha_2 = k$, $\mu_2 = 1$ будет динамически эквивалентен случаю $\alpha_2 = 1.5k$, $\mu_2 = 0$.

Четвертая модель, также как и третья, использует сложное световое давление, зависящее от ориентации и трех коэффициентов (α_1, μ_1) и α_2. Помимо этого импульсы разгрузок вносятся в число уточняемых параметров. Функционал, минимум которого ищется в ходе уточнения орбиты, получает соответствующую добавку, зависящую от невязок номинальных и уточненных импульсов разгрузок.

В таблице 3.1 приводятся сводные данные по всем четырем моделям, а также их краткие обозначения, которые будут использоваться далее по тексту.

3.3.2 Траекторные измерения

В таблицах 3.2 и 3.3 перечислены все измерительные пункты, наблюдавшие КА с момента запуска, а также типы измерений, ими предоставляемые. Радиотехнические системы на базе антенн в Уссурийске и Медвежьих озерах, работающие в S–диапазоне, составляют штатную измерительную систему. Спустя некоторое время после запуска аппарата эти комплексы были оснащены оборудованием для приема сигнала высокоинформативного радиоканала (ВИРК), используемого для передачи больших объемов данных с КА на Землю. Поскольку несущая частота сигнала ВИРК генерируется при помощи водородного стандарта на борту КА и, как следствие, имеет высокую стабильность, измеренная на Земле частота принятого сигнала содержит в себе достаточно точную информацию о радиальной скорости аппарата. Основным приемником сигнала ВИРК является Пущинская радиоастрономическая обсерватория, через которую в режиме реального времени осуществляется передача измерений с аппарата на Землю. Частота сигнала, измеренная в Пущино, также используется в качестве беззапросных измерений радиальной скорости.

Лазерные измерения являются одним из самых информативных источников орбитальной информации. Однако в случае «Спектра-Р» получение измерений сопряжено с рядом трудностей. Поскольку панель уголковых отражателей фиксирована относительно корпуса КА, проведение измерений требует определенной ориентации аппарата в пространстве. Помимо этого на расстояниях полета КА способно работать лишь малое число станций, а успешное проведение сеанса сильно зависит от погодных условий. Лазерные измерений аппарата удалось провести российскому лазерному оптическому локатору, расположенному на Кавказе, и французской обсерватории Grasse. Не смотря на то, что на рассматриваемых временных интервалах лазерные измерения не проводились, они имели важное значение при калибровке радиотехнических средств.

Основная часть оптических измерений положения аппарата относительно звезд проводится участниками проекта НСОИ АФН [40], а также средствами, привлекаемыми АКЦ ФИАН. Данный вид измерений имеет относительно невысокую точность в пересчете на расстояние по сравнению с традиционными радиотехническими измерениями дальности, однако дает оценку направления, т.е. положения КА в плоскости, ортогональной радиальному направлению. Эта оценка может быть получена также из радиальных измерений, накопленных на временном интервале, при помощи динамики аппарата. Тем не менее, для аппаратов, долгое время находящихся вдали от притягивающих тел, результаты от использования подобного подхода сомнительны, т.к. из-за слабо выраженной динамики приходится использовать протяженные мерные интервалы, на которых существенными становятся ошибки модели движения. Астрометрические измерения позволяют получить более точные орбиты на коротких интервалах, и позволяют контролировать качество орбит, полученных на больших мерных базах.

При уточнении орбиты использовались постоянные значения среднеквадратичных ошибок измерений и соответствующие им значения весов и весовых матриц. Ошибка измерения дальности полагалась равной 100 метрам. Ошибка запросных измерений радиальной скорости была установлена на уровне 10 мм/с, беззапросных измерений — 5 мм/с. Предполагалось также, что ошибки

[a] Беззапросные измерения

[b] Лазерные измерения

	Измерительная система	Рабочий диапазон	D	$\dot{D}$	$\dot{D}_{1w}$[a]
1	Уссурийск РТ-70, "Клён-Д"	C	✓	✓	
2	Уссурийск РТ-70, "Фобос"	X			✓
3	Медвежьи озера РТ-64, "Кобальт-М"	C	✓	✓	
4	Медвежьи озера РТ-64, "Cortex"	X			✓
5	Пущино РТ-22	X, Ku			✓

Таблица 3.2: Измерительные средства радио диапазона

	Обсерватория	апертура, м	α, δ	D[b]
1	Кавказ (г. Чапалы)	1.3	✓	✓
2	Grasse (OCA)	1.54		✓
3	Китаб (КМШС)	0.4	✓	
4	Научный (КРАО)	0.25–2.6	✓	
5	Благовещенск (БШС)	0.25	✓	
6	Евпатория (НЦУИКС)	0.7	✓	
7	Краснодар (КубГУ)	0.5	✓	
8	Монды (ИСЗФ)	0.8, 1.6	✓	
9	Ужгород (ЛКИ УжНУ)	0.25	✓	
10	Звенигород (ИНАСАН)	0.5	✓	
10	New Mexico (MPC:H15)	0.4	✓	
11	New Mexico (MPC:H06)	0.1	✓	
12	Australia (MPC:Q62)	0.32	✓	

Таблица 3.3: Измерительные средства оптического диапазона

измерения прямого восхождения и склонения равны одной угловой секунде и не имеют между собой корреляции.

3.3.3 Телеметрическая информация

Модели движения, в которых учитывается сложное световое давление или разгрузки маховиков, должны сопровождаться информацией об ориентации аппарата и импульсах разгрузок. Источником информации является телеметрия, записываемая на бортовое устройство хранения данных и передаваемая на Землю во время сеансов связи.

Информация со звездных датчиков аппарата о текущей ориентации в абсолютном пространстве записывается в телеметрию в виде кватерниона раз в минуту. Кватернион ориентации, соответствующий произвольному моменту времени t, получался линейной интерполяцией поворота двух соседних по времени точек t_1 и t_2 ($t \in [t_1, t_2]$), ориентация $\Lambda(t_1) = \Lambda_1$ и $\Lambda(t_2) = \Lambda_2$ в которых известна. Для этого вычисляется кватернион поворота между известными ориентациями

$$\Lambda_0 = \Lambda_1^{-1} \circ \Lambda_2, \quad \Lambda_0 = \left\{ \cos \frac{\varphi_0}{2}, \sin \frac{\varphi_0}{2} \mathbf{e} \right\},$$

линейно интерполируется на момент t

$$\Delta\Lambda(t) = \left\{ \cos \frac{\varphi_0 (t - t_1)}{2(t_2 - t_1)}, \sin \frac{\varphi_0 (t - t_1)}{2(t_2 - t_1)} \mathbf{e} \right\},$$

откуда получается искомый кватернион ориентации

$$\Lambda(t) = \Lambda_1 \circ \Delta\Lambda(t).$$

Номинальные величины импульсов разгрузок также восстанавливаются из телеметрической информации. Для каждого включения известна длительность работы двигателя и масса отработанного топлива, из которых, согласно разделу 2.8, находится искомый модуль приращения скорости. Направление импульса разгрузки в инерциальном пространстве получается из известной ориентации аппарата и известного направления тяги двигателей в связанной системе координат.

При уточнении импульсов разгрузок весовая матрица рассчитывается, исходя из ошибок исполнения, принятых равными 10%, и ошибок в отклонении тяги 0.5 градуса. Обозначенные величины переводятся в продольную и поперечную ошибки σ_v и σ_d из (2.27).

3.3.4 Результаты уточнения орбиты

Уточнение орбиты КА «Спектр-Р» было проведено на двух временных интервалах с использованием четырех описанных моделей. Так, для моделей “К” и “КР” осуществлялся поиск 6 параметров, характеризующих вектор состояния $\mathbf{X}_0$ в начальный момент времени t_0 (этот момент фиксировался на середине интервала уточнения), и одного параметра светового давления, минимизирующий функционал из невязок траекторных измерений. Для модели “СР” осуществлялся поиск начального вектора $\mathbf{X}_0$ и трех параметров светового давления α_1, μ_1 и α_2. При использовании модели “СР+” уточнялось 6 параметров $\mathbf{X}_0$, коэффициенты светового давления α_1, μ_1, α_2 и $3n$ параметров, определяющих векторы импульсов разгрузок $\{\Delta\mathbf{v}_i\}_{i=1}^{N}$. Однако в качестве дополнительных измерений использовались номинальные значения импульсов разгрузок, поэтому дополнительные $3n$ параметров не являются полностью независимыми.

Результаты согласования измерений на разных временных интервалах, полученные после сходимости процесса уточнения, приведены в таблицах 3.4 и 3.5. Мерой согласования выбрана безразмерное среднеквадратичное отклонение $\sigma = \sqrt{\Phi/N_{\text{изм}}}$. Следует отметить, что при расчете σ для модели “СР+” использовалась только часть функционала, соответствующая траекторным измерениям.

Модель	Световое давление	Разгрузки	σ
К	Классическое	Не учитываются	12.43677
КР	Классическое	Учитываются	4.72914
СР	Сложное	Учитываются	1.20896
СР+	Сложное	Уточняются	0.36210

Таблица 3.4: Безразмерное СКО траекторных измерений
20.02.2013–10.04.2013

На рисунках с 3.1 по 3.6 изображены графики невязок траекторных измерений при использовании пассивной модели “К”. Невязки радиальных по радиальной скорости на обоих интервалах имеют четко выраженную систематическую составляющую с периодом, равным периоду обращения аппарата. Наибольшие отклонения достигают 25 см/с и проявляются вблизи перицентра, где аппарат имеет наибольшее ускорение. Отклонения по дальности и направлению сопоставимы друг с другом, учитывая заданные им веса, и

Модель	Световое давление	Разгрузки	σ
К	Классическое	Не учитываются	9.18588
КР	Классическое	Учитываются	6.78832
СР	Сложное	Учитываются	0.63767
СР+	Сложное	Уточняются	0.31607

Таблица 3.5: Безразмерное СКО траекторных измерений 10.04.2013–30.05.2013

достигают 5 км и 40 угловых секунд соответственно. Отклонения астрометрических измерений носят более систематический характер. Точность измерений дальности гораздо выше той точности, с которой простая пассивная модель движения может описать изменение этого параметра со временем. Для компенсации ошибок модели движения уточненная орбита изменяется относительно истинной в направлении, ортогональном линии визирования, поворачивая плоскость орбиты. Эти отклонения фиксируются астрометрическими наблюдениями.

Невязки траекторных измерений, полученные при уточнении орбиты по модели "КР", приведены на рисунках с 3.7 по 3.12. Качественных изменений в согласовании измерений по сравнению с моделью "К" не наблюдается, заметные систематические отклонения остаются во всех типах измерений. Однако добавленные возмущения, вызванные разгрузками маховиков, значительно понизили среднюю ошибку: в 2.62 раза для первого интервала и 1.35 раза для второго интервала. Предполагается, что существенное различие между уменьшением ошибки на двух интервалах, вызвано различием в количестве проведенных разгрузок и свойствах самой орбиты. За время между 20 февраля и 10 апреля было проведено 79 разгрузок, в то время как с 10 апреля по 30 мая было проведено 64 разгрузки. Таким образом, изменение модели с "К" на "КР" на первом интервале позволяет учесть больше возмущений, чем на втором. Помимо этого орбита на втором интервале имеет больший эксцентриситет, следовательно КА проходит перицентр на более низких высотах. На первом интервале высота перицентра изменяется от 52 до 40 тыс. км, на втором интервале — от 40 до 30 тыс. км При прохождении аппаратом перицентра на более низкой высоте орбитальные ошибки в большей степени трансформируются, следовательно, согласовать измерения на втором участке при наличии немоделируемых возмущений сложнее, чем на первом.

Графики, изображенные на рисунках с 3.13 по 3.18, показываются согласование измерений при использовании модели “СР”. Как видно из графиков и изменения σ в таблицах 3.4,3.5, введение модели светового давления, зависящего от формы аппарата и его ориентации относительно Солнца, существенным образом улучшило качество полученной орбиты. На первом интервале модель светового давления позволила уменьшить среднюю ошибку более чем в три раза по сравнению с моделью “КР”, на втором интервале средняя ошибка уменьшилась практически на порядок. Достаточно хорошего согласования на первом интервале предположительно не удалось получить из-за серий оптических наблюдений вблизи перицентра, проведенных в Краснодаре в ночь с 27 на 28 февраля и Китабе в ночь с 3 на 4 апреля. Подобные измерения очень чувствительны к продольным (временным) ошибками орбиты из-за высокой скорости в перицентре, поэтому их наличие усложнило согласование остальных траекторных измерений. Отклонения по радиальной скорости в основном не превышают 2 см/сек. даже на критических участках, близких к перицентру. Отклонения оптических измерений свидетельствуют о хорошем определении плоскости орбиты, значительная систематика порядка 4 угловых секунд наблюдается только на первом интервале. Отклонения дальностей лежат внутри 500 метров за исключением сеанса, проведенного станцией в Медвежьих озерах 9 марта.

Согласование измерений с применением модели “СР+” приведены на рисунках с 3.19 по 3.21 и с3.24 по 3.26. Согласование измерений на обоих интервалах лучше априорных значений ошибок, заложенных в веса измерений. Траекторные измерения дальности, проведенные в Уссурийске на обоих интервалах лежат внутри проектной точности 20 м за исключением единичных выбросных измерений. Измерения дальности Медвежьих озер согласуются немного хуже, однако большая часть лежит внутри 50 метров. Систематические отклонения по радиальной скорости не превышают 2 мм/сек. Оптические измерений согласуются с полученной орбитой с точностью превосходящей одну угловую секунду.

На рисунках 3.22 и 3.27 представлены величины номинальных (измеренных) и уточненных (расчетных) значений импульсов разгрузок. Формулируя более точно, на графиках изображено не само значение расчетного импульса, а его проекция на направление номинального импульса. При малых углах отклонения расчетного импульса это значение действительно приближается к величине, однако оно может быть отрицательным, если направление уточненного импульса противоположно номинальному. На рисунках 3.23 и 3.28 изображены рассогласования между величинами измеренных и расчетных импульсов разгрузок, а также отклонения направлений расчетных импульсов. Среднеквадратичная ошибка определения величины импульсов разгрузок на первом интервале составила 0.5928 мм/сек., на втором интервале — 0.6566 мм/сек. Угловые отклонения не превышают 0.7 градуса.

В таблицах 3.6 и 3.7 приведены сводные значения параметров движения, уточненных на двух мерных интервалах и приведенных к одинаковому времени t_0, соответствующему полуночи по всемирному времени между 9 и 10 апреля 2013 года. Векторы состояния для удобства представлены в оскулирующих элементах. Из таблиц видно, что коэффициенты светового давления, полученные в результате использования одинаковых моделей на разных мерных интервалах согласуются друг с другом. При это коэффициент $\varkappa$ убывает при переходе от модели "K" к модели "KP" на обоих интервалах. Это связано с тем, что в силу допустимой ориентации КА «Спектр-Р» возмущение от разгрузки маховиков всегда будет иметь ненулевую составляющую в направлении от Солнца, а повышенный коэффициент светового давления частично учитывает регулярное влияние от этих возмущений. Параметры движения, уточненные при помощи модели "CP+" на двух интервалах хорошо согласуются друг с другом как в координатной части, так и в коэффициентах α_1 и α_2, различие которых не превышает 5%.

Параметр	"K"	"KP"	"CP"	"CP+"
a, тыс. км	176.814766841	176.814968720	176.815074330	176.815048801
e	0.738340958	0.738333302	0.738330424	0.738329467
i, град	70.927401302	70.928335431	70.926823804	70.925978782
ω, град	2.678520144	2.686516018	2.689478581	2.689175151
Ω, град	291.810779777	291.805612874	291.801806993	291.803042599
M, град	263.781697920	263.782355379	263.782236339	263.782140582
$\varkappa$	$2.665864 \cdot 10^{-5}$	$2.117495 \cdot 10^{-5}$		
α_1			0.79055313	0.85658688
μ_1			0.05319324	0.07669267
α_2			0.00463014	0.07236052

Таблица 3.6: Параметры, уточненные на интервале 20.02.2013 – 10.04.2013, приведенные к 10.04.2013 00:00:00 UT

Параметр	“K”	“KP”	“CP”	“CP+”
a, тыс. км	176.817134121	176.816037584	176.815114242	176.815074736
e	0.738350970	0.738327793	0.738329609	0.738330220
i, град	70.928685124	70.924122602	70.925521172	70.926031934
ω, град	2.693601490	2.692458506	2.689089394	2.689208150
Ω, град	291.808505413	291.807847533	291.803134632	291.803084043
M, град	263.787776530	263.783246435	263.782256506	263.782273595
$\varkappa$	$2.793778 \cdot 10^{-5}$	$2.060516 \cdot 10^{-5}$		
α_1			0.83780732	0.86560409
μ_1			0.07362764	0.13378616
α_2			0.04705272	0.08974724

Таблица 3.7: Параметры, уточненные на интервале 10.04.2013 – 30.05.2013, приведенные к 10.04.2013 00:00:00 UT

Пусть $(\mathbf{r}_1(t_0), \mathbf{v}_1(t_0))$ и $(\mathbf{r}_2(t_0), \mathbf{v}_2(t_0))$ определяют положение и скорость КА в момент t_0 на орбитах, уточненных соответственно на первом и втором мерных интервалах. Поскольку временные интервалы, на которых проводится уточнение, не пересекаются и не имеют никаких общих измерений, то разность $(\Delta\mathbf{r}, \Delta\mathbf{v}) = (\mathbf{r}_1(t_0) - \mathbf{r}_2(t_0), \mathbf{v}_1(t_0) - \mathbf{v}_2(t_0))$ косвенно характеризует точность определения орбиты. Значения $(\Delta\mathbf{r}, \Delta\mathbf{v})$, полученные при использовании различных моделей, представлены в таблице 3.8. Модель “CP+” показывает расхождение в положении, равное 200 м, основная часть которого сосредоточена в плоскости, ортогональной радиальному направлению, отклонение по скорости составляет 2.2 мм/с. Из-за высокого веса радиальных измерений дальности наблюдается хорошее согласование двух соседних орбит в радиальном направлении. Однако отклонения в ортогональной плоскости при изменении модели от “CP+” к “K” растут гораздо быстрее, чем полученные выше среднеквадратичные отклонения.

Оценки, проведенные на двух мерных интервалах, показывают, что использование сложной модели светового давления и учет возмущений, вызванных разгрузками маховиков, позволяет улучшить согласование измерений в 7 и 13 раз по сравнению с классической пассивной моделью движения. Дополнительное уточнение импульсов разгрузок позволяют улучшить этот показатель соответственно до 34 и 29 раз. Важным также видится тот факт, что в модели “CP+” импульсы разгрузок уточнились к непротиворечивым значе-

Модель	Δr_r, км	Δr_n, км	Δr_b, км	Δv_r, мм/с	Δv_n, мм/с	Δv_b, мм/с
“К”	2.227	-70.799	11.232	237.737	161.251	-21.675
“КР”	0.422	-32.908	-16.386	92.569	65.232	0.811
“СР”	0.101	-0.448	-7.559	1.161	-0.245	8.810
“СР+”	-0.002	-0.198	-0.066	1.733	1.249	0.926

Таблица 3.8: Разница в положении и скорости на орбитах, уточненных на соседних интервалах, представленная в проекциях на радиальное нормальное и бинормальное направления

ниям, близким к измеренным, а их отклонения не имеют ярко выраженной систематики, которая бы свидетельствовала о существенных возмущениях, не учитываемых моделью движения.

Предложенная модель светового давления адекватно описывает возмущения движения центра масс КА. В пользу этого говорят значения уточненных коэффициентов α_1, μ_1 и α_2, которые находятся в области допустимых значений, а также находятся относительно близко друг к другу при использовании различных схем уточнения. Помимо этого сами значения коэффициентов соответствуют поверхностям, к которым они были отнесены. Антенна и центральный блок покрыты многослойной изоляцией, хорошо отражающей свет, а панели солнечных батарей как и положено поглощают большую часть падающего света.

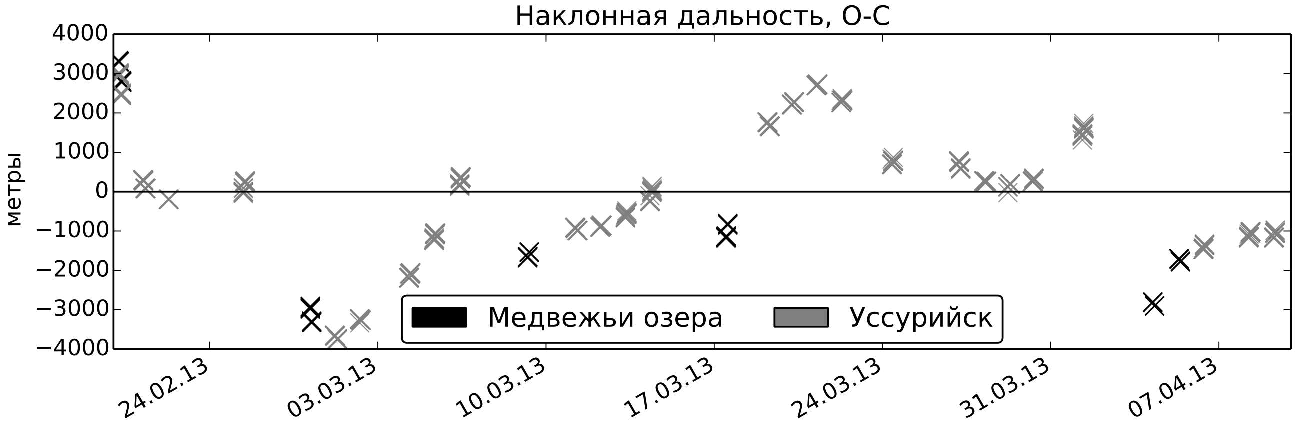


Рисунок 3.1: Модель "К", расстояние 20.02.2013 – 10.04.2013

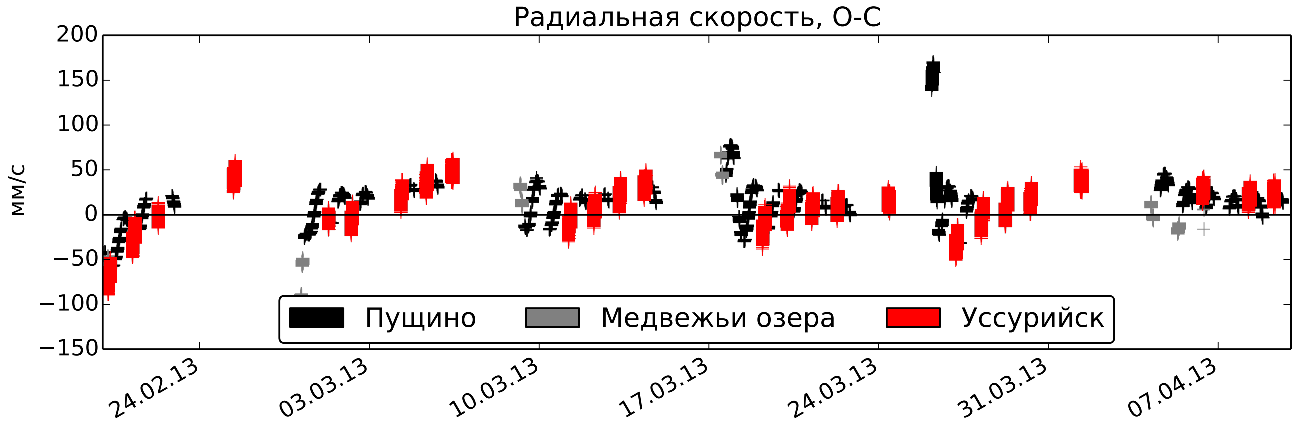


Рисунок 3.2: Модель "К", радиальная скорость 20.02.2013 – 10.04.2013

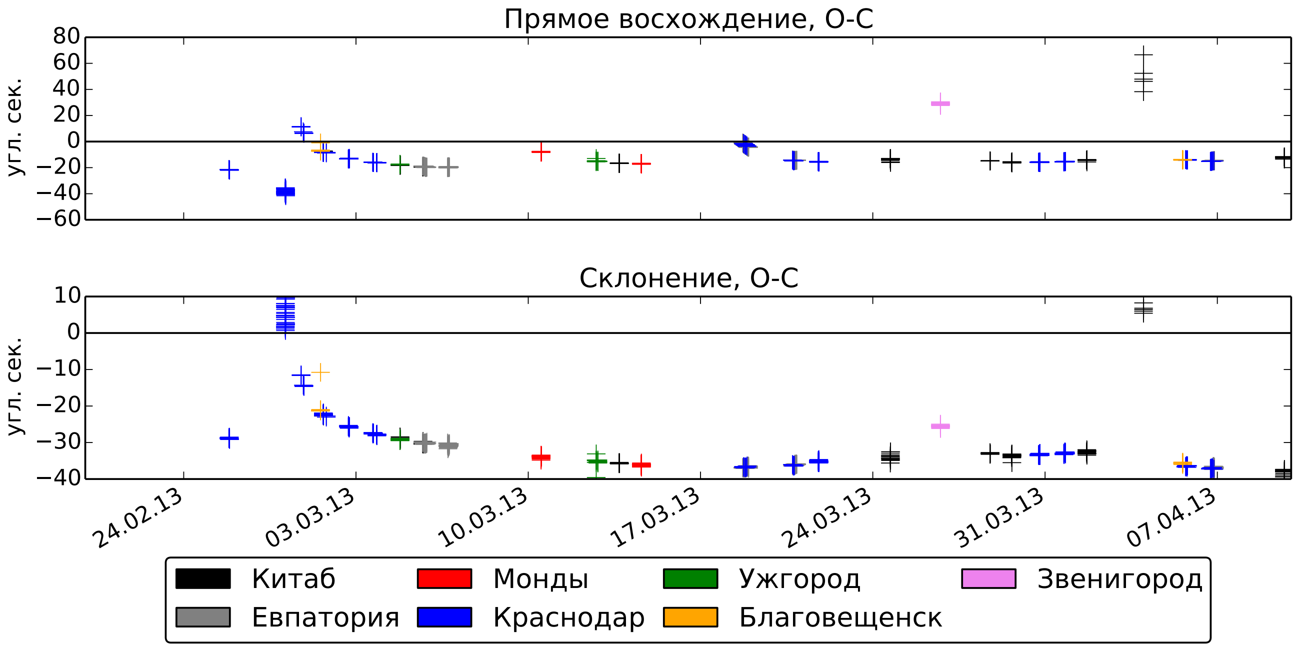


Рисунок 3.3: Модель "К", направление 20.02.2013 – 10.04.2013

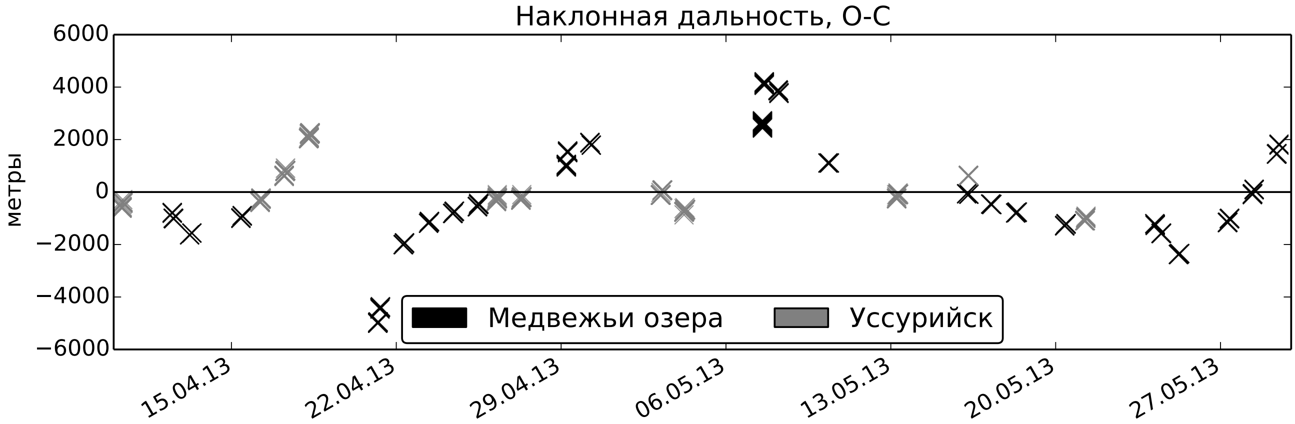


Рисунок 3.4: Модель "К", расстояние 10.04.2013 – 30.05.2013

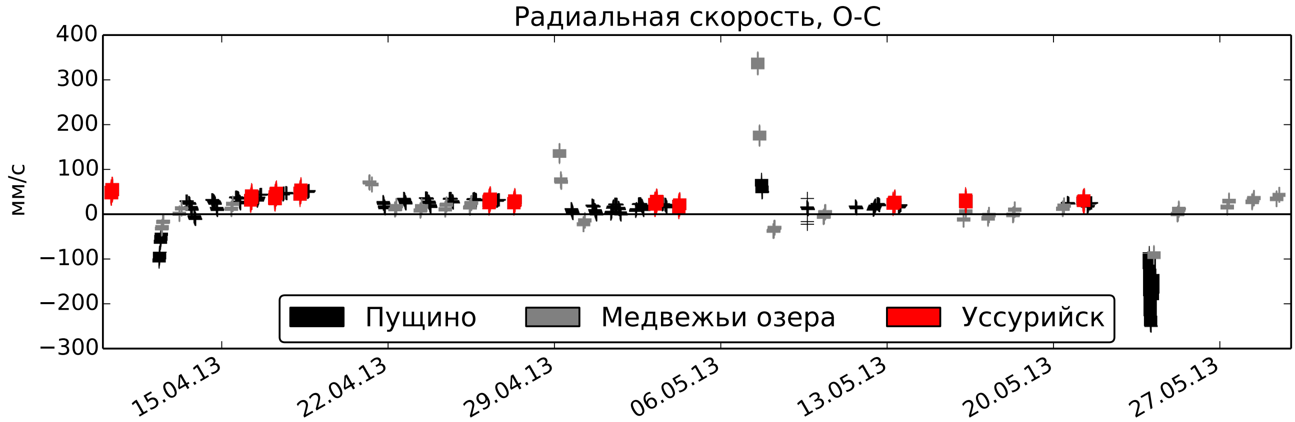


Рисунок 3.5: Модель "К", радиальная скорость 10.04.2013 – 30.05.2013

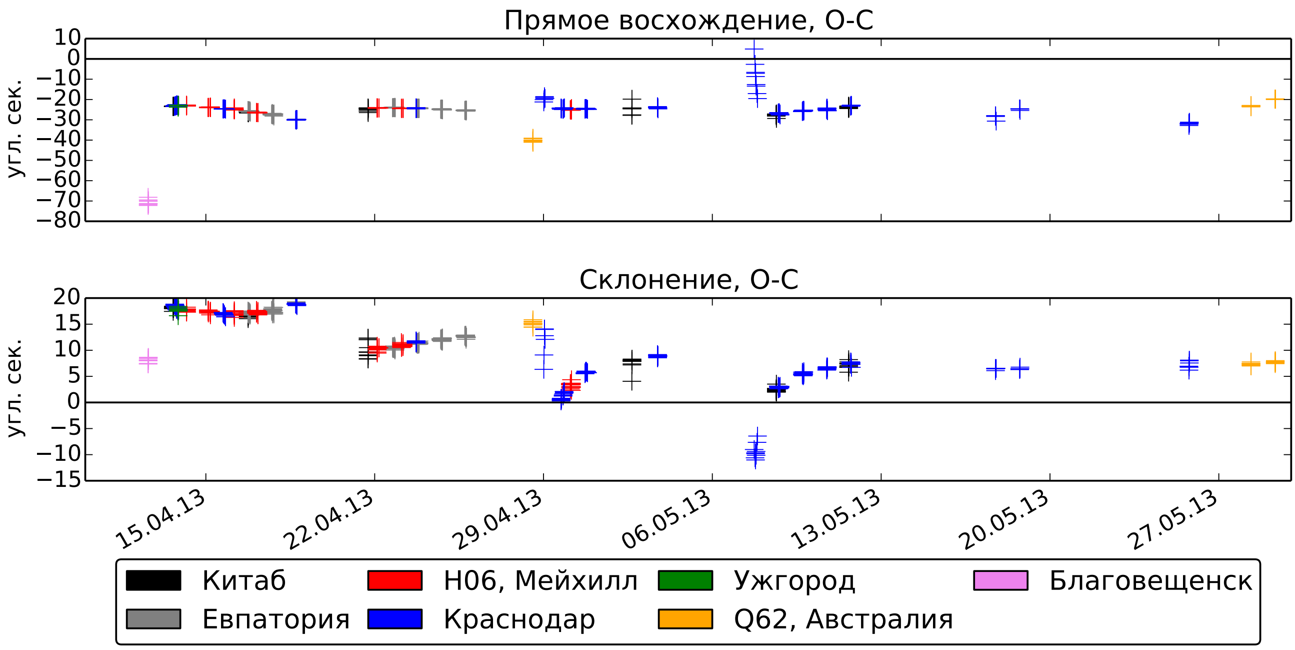


Рисунок 3.6: Модель "К", направление 10.04.2013 – 30.05.2013

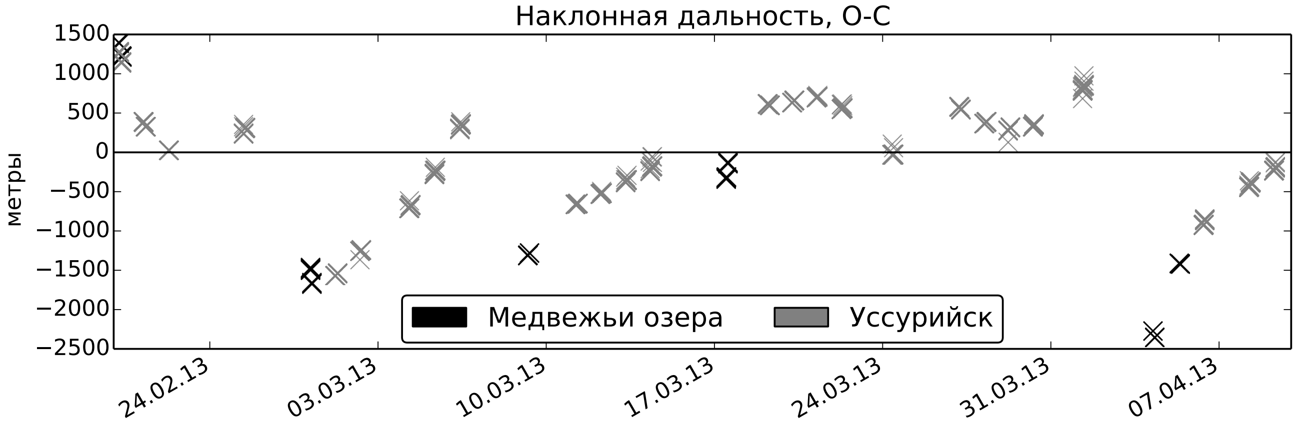


Рисунок 3.7: Модель “КР”, расстояние 20.02.2013 – 10.04.2013

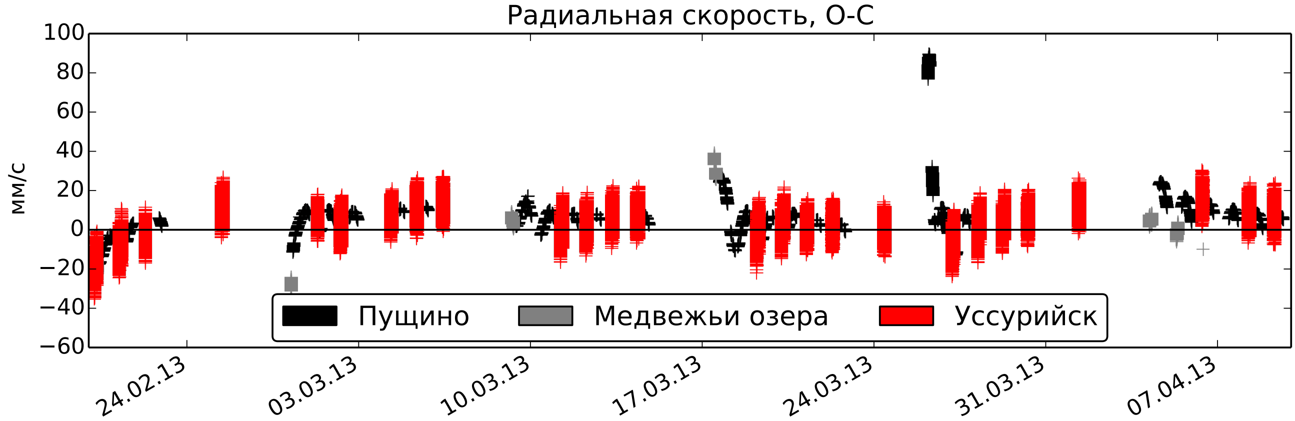


Рисунок 3.8: Модель “КР”, радиальная скорость 20.02.2013 – 10.04.2013

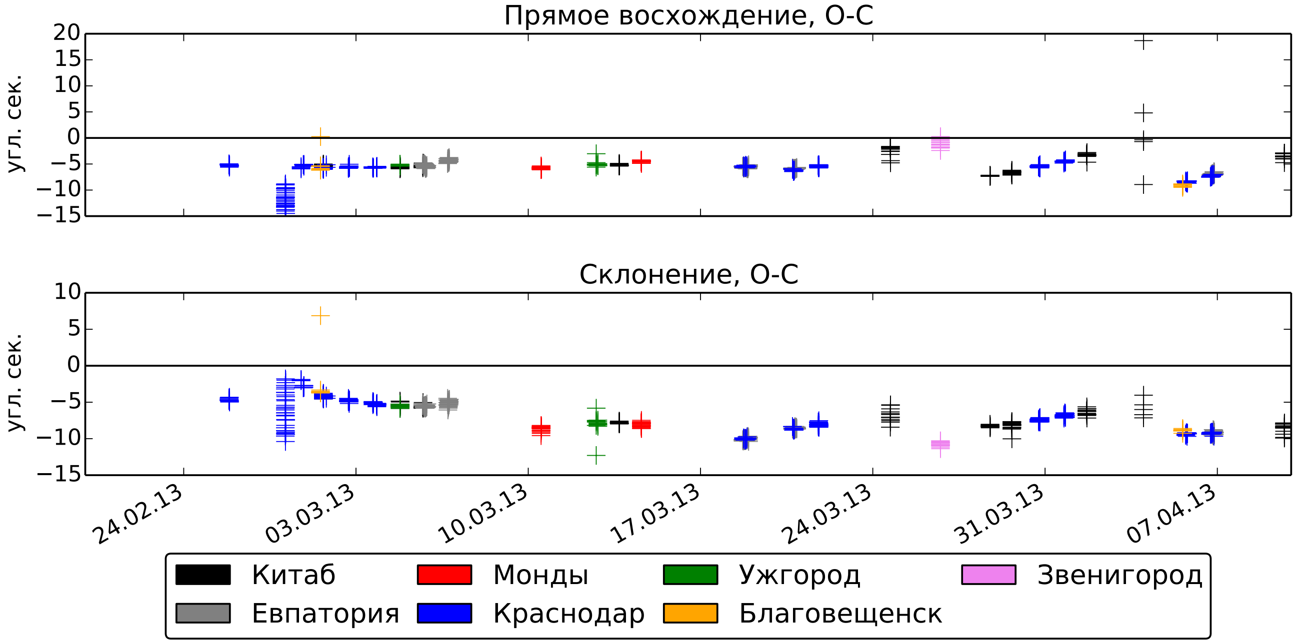


Рисунок 3.9: Модель “КР”, направление 20.02.2013 – 10.04.2013

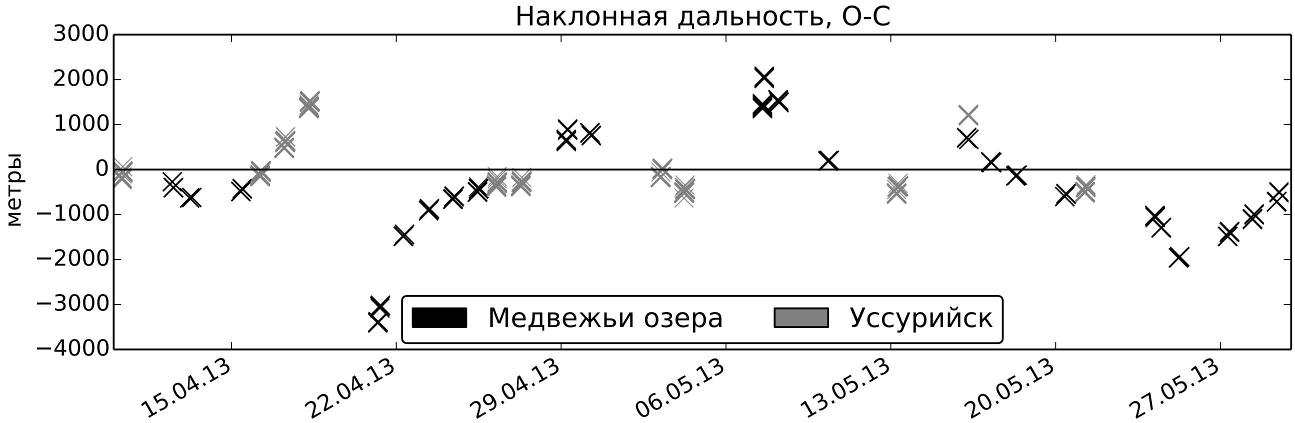


Рисунок 3.10: Модель “KP”, расстояние 10.04.2013 – 30.05.2013

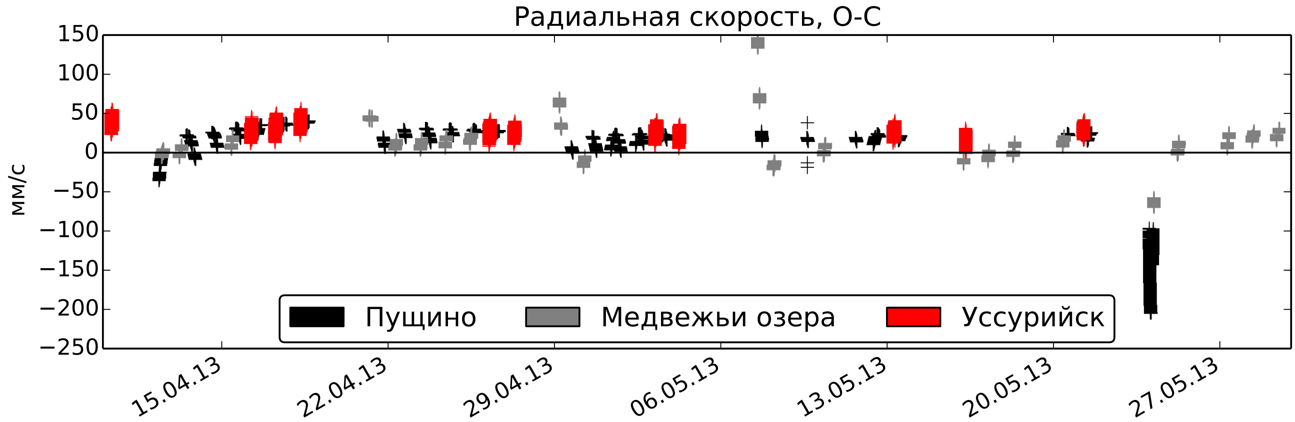


Рисунок 3.11: Модель “KP”, радиальная скорость 10.04.2013 – 30.05.2013

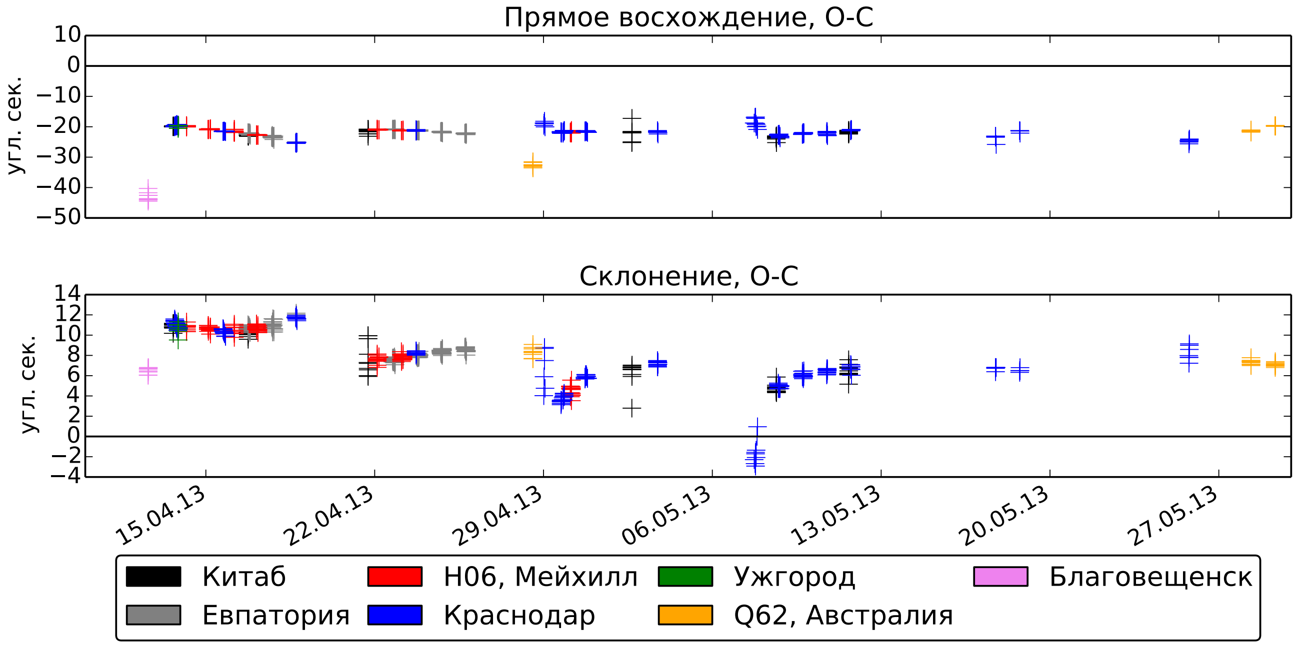


Рисунок 3.12: Модель “KP”, направление 10.04.2013 – 30.05.2013

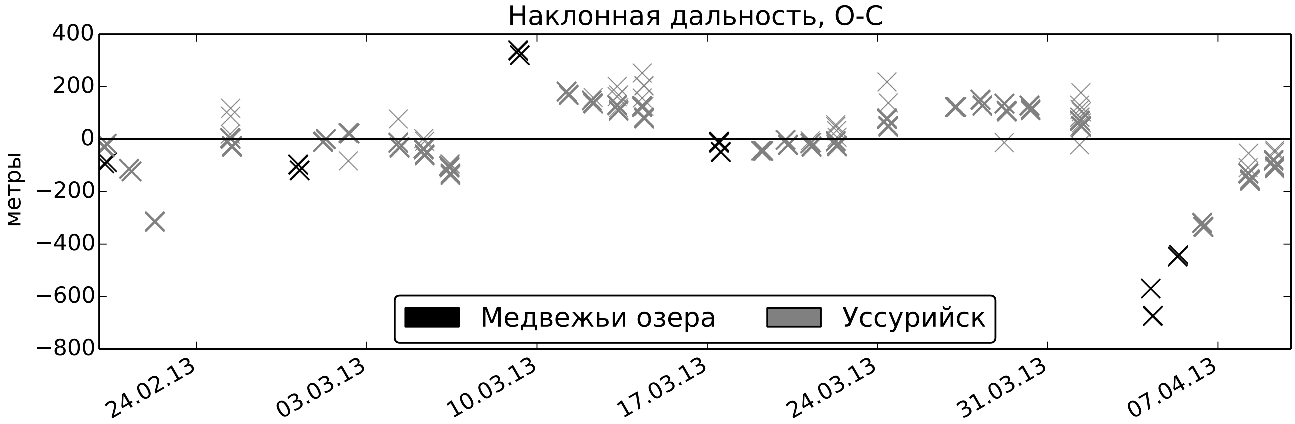


Рисунок 3.13: Модель “CP”, расстояние 20.02.2013 – 10.04.2013

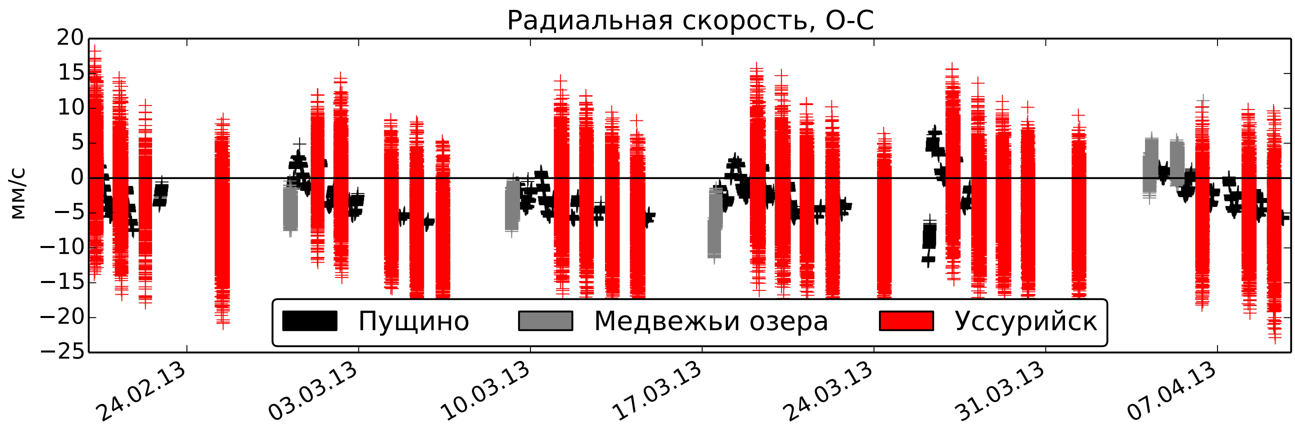


Рисунок 3.14: Модель “CP”, радиальная скорость 20.02.2013 – 10.04.2013

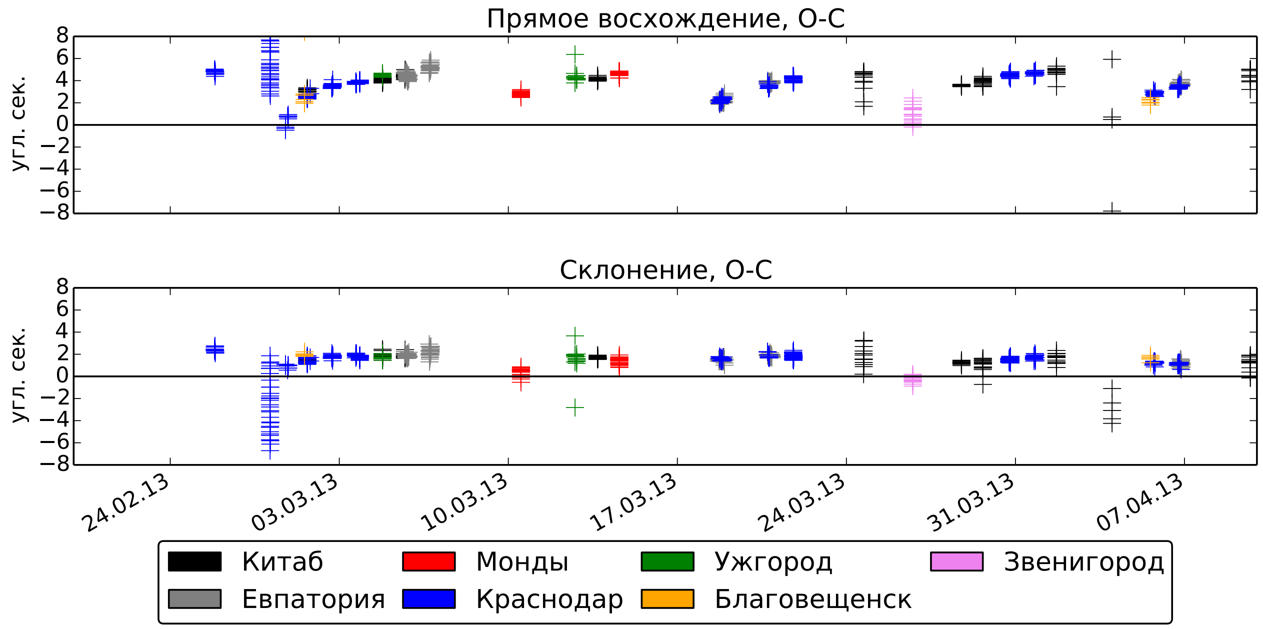


Рисунок 3.15: Модель “CP”, направление 20.02.2013 – 10.04.2013

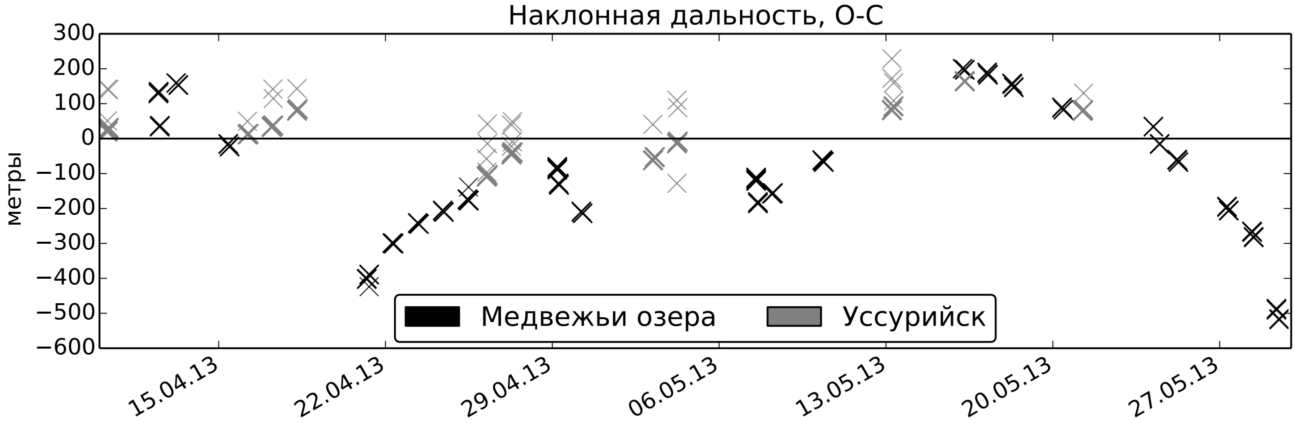


Рисунок 3.16: Модель “CP”, расстояние 10.04.2013 – 30.05.2013

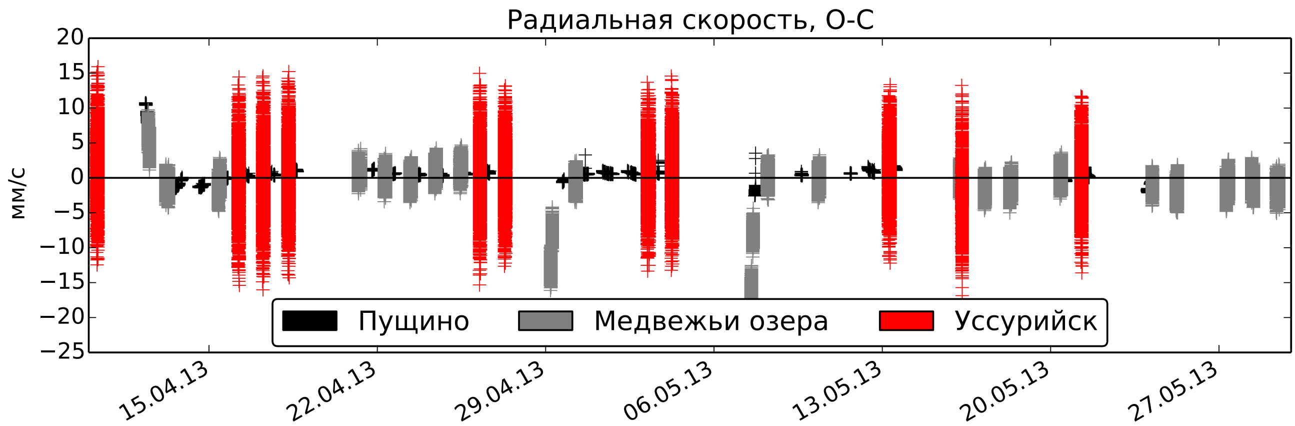


Рисунок 3.17: Модель “CP”, радиальная скорость 10.04.2013 – 30.05.2013

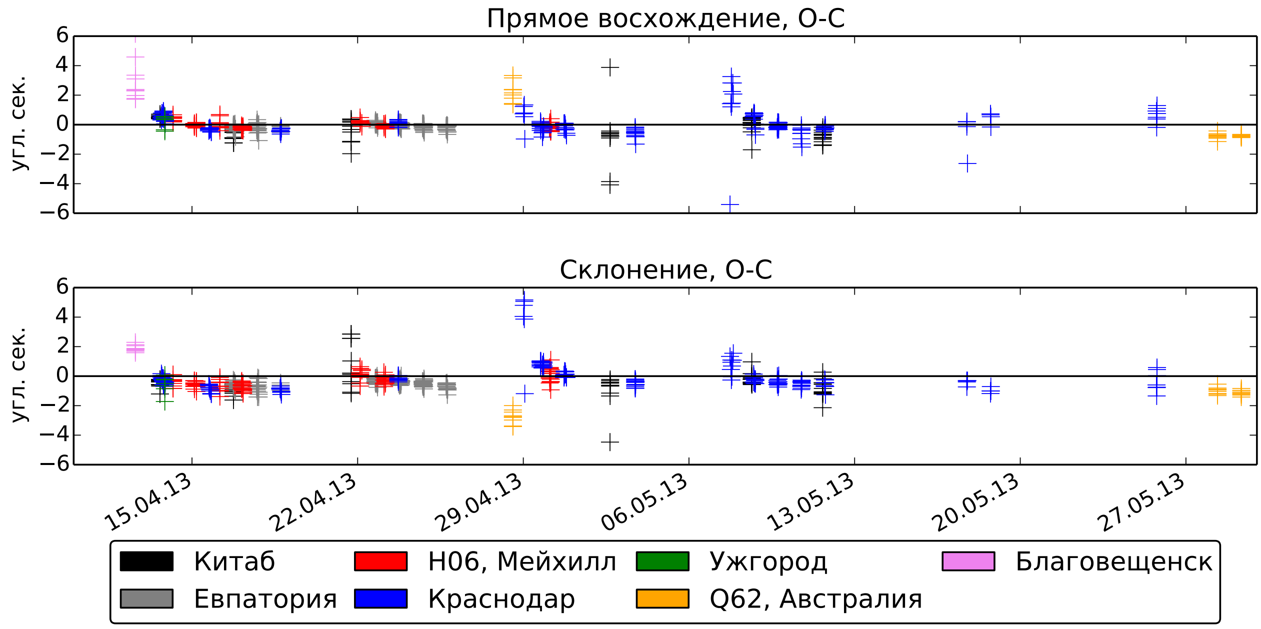


Рисунок 3.18: Модель “CP”, направление 10.04.2013 – 30.05.2013

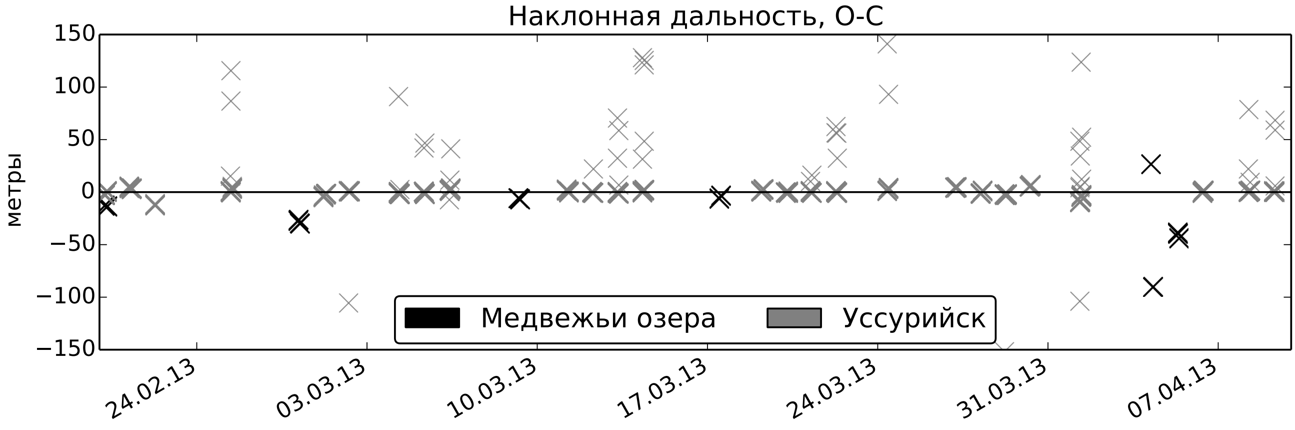


Рисунок 3.19: Модель “CP+”, расстояние 20.02.2013 – 10.04.2013

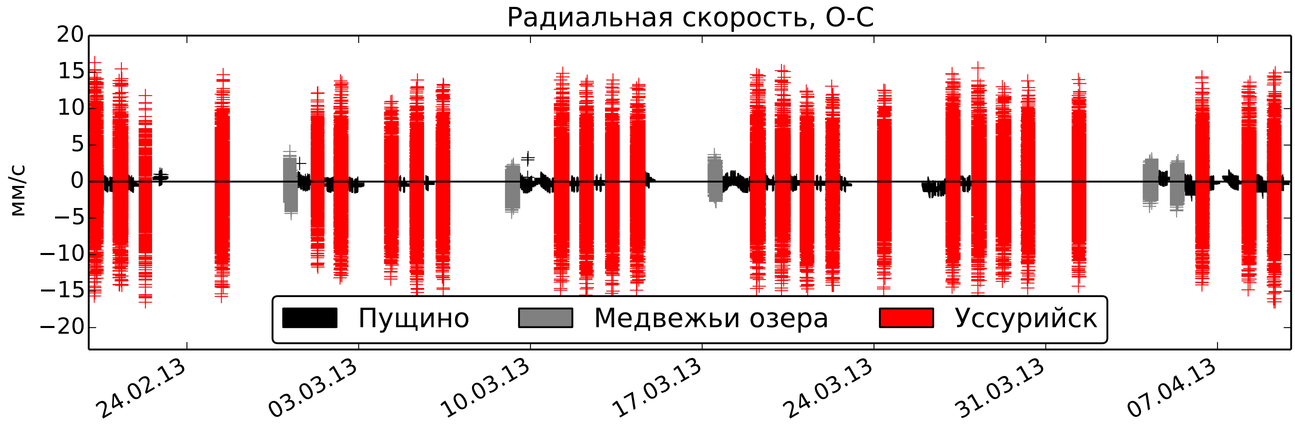


Рисунок 3.20: Модель “CP+”, радиальная скорость 20.02.2013 – 10.04.2013

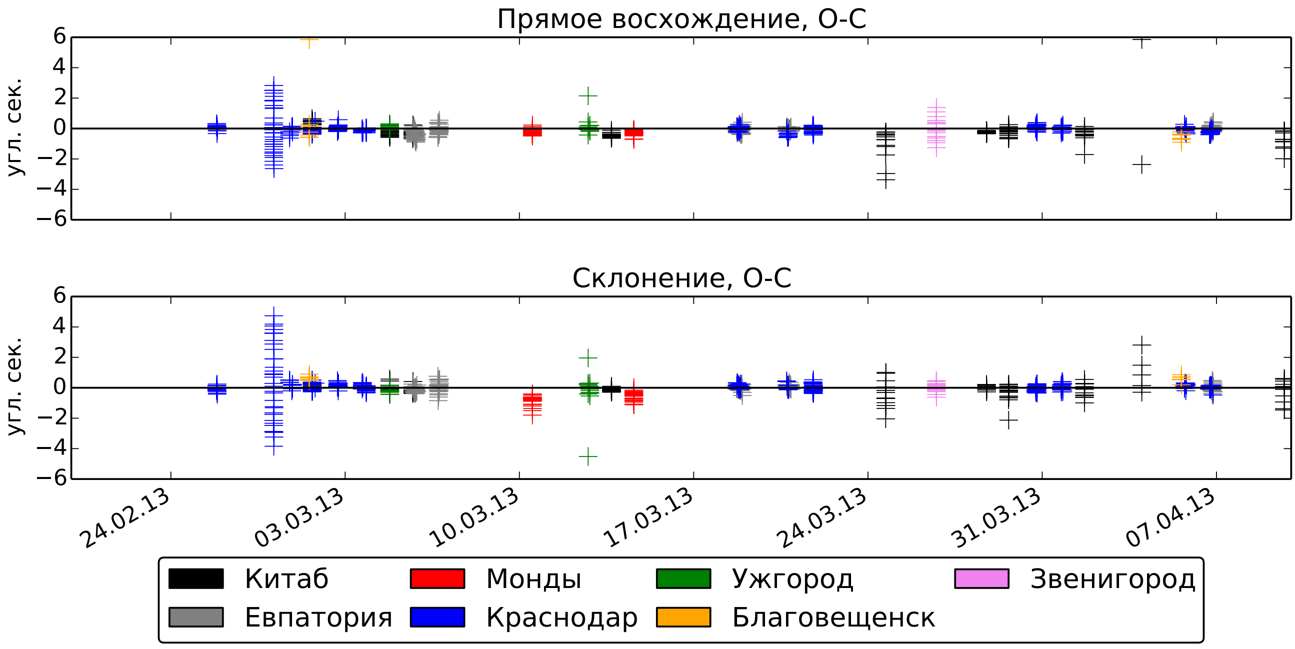


Рисунок 3.21: Модель “CP+”, направление 20.02.2013 – 10.04.2013

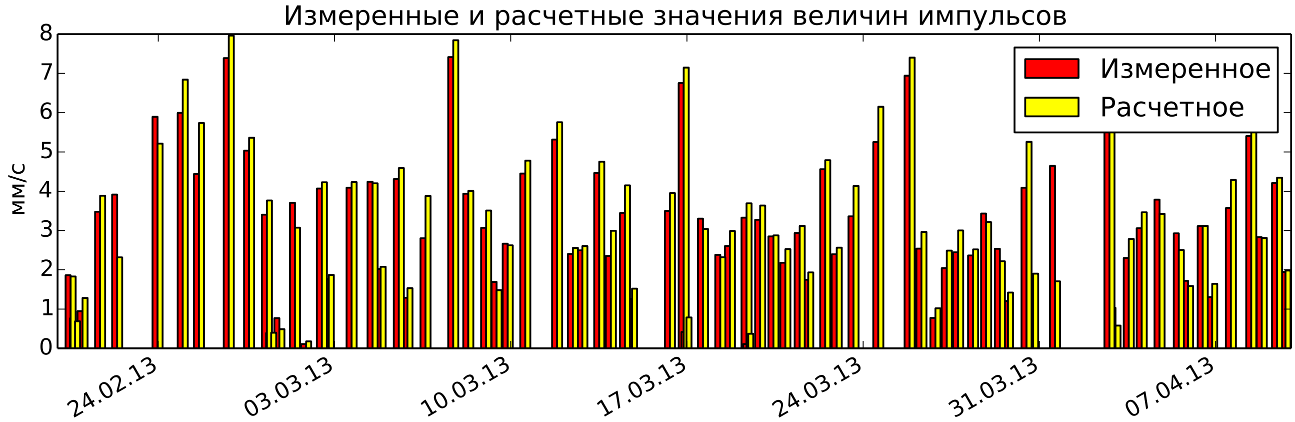


Рисунок 3.22: Модель "CP+", величины импульсов 20.02.2013 – 10.04.2013

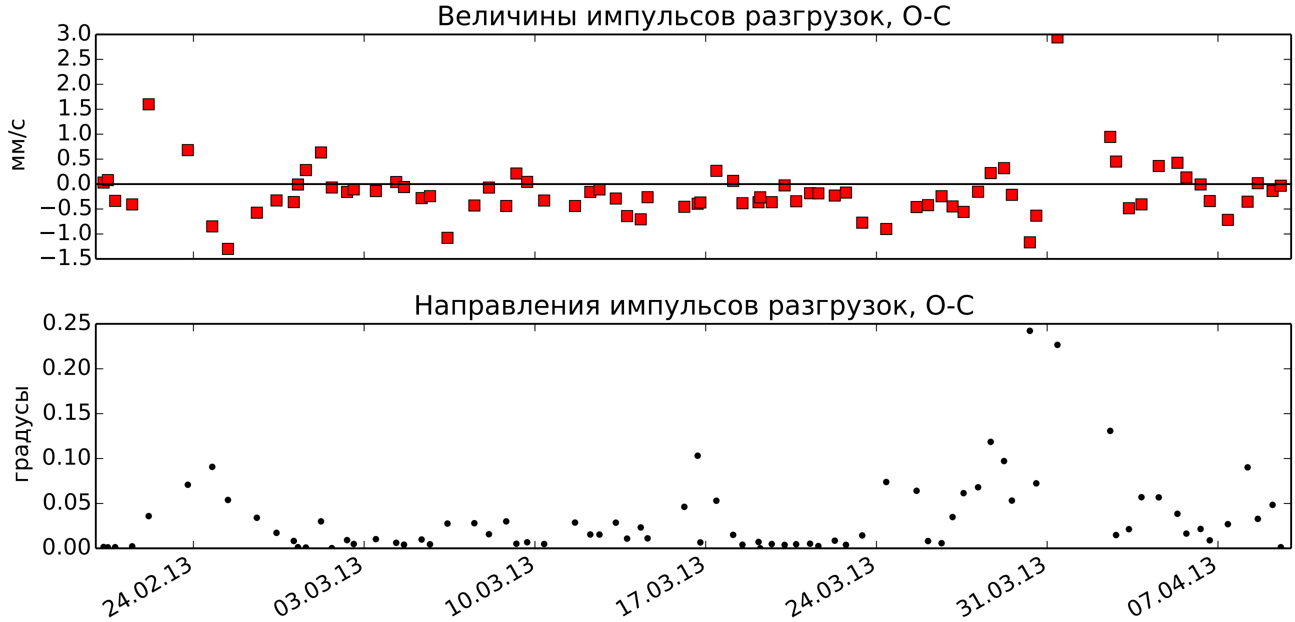


Рисунок 3.23: Модель "CP+", импульсы разгрузок 20.02.2013 – 10.04.2013

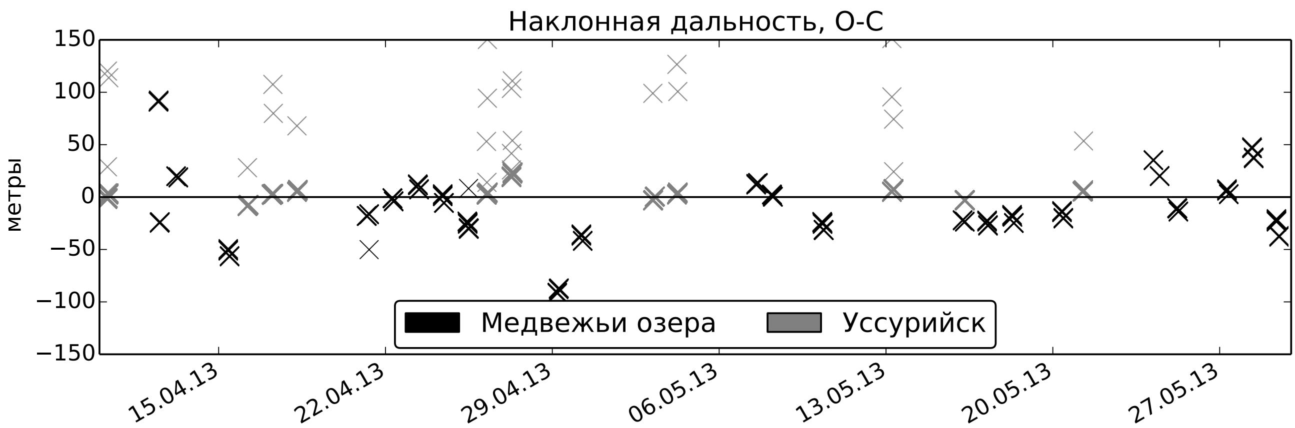


Рисунок 3.24: Модель "CP+", расстояние 10.04.2013 – 30.05.2013

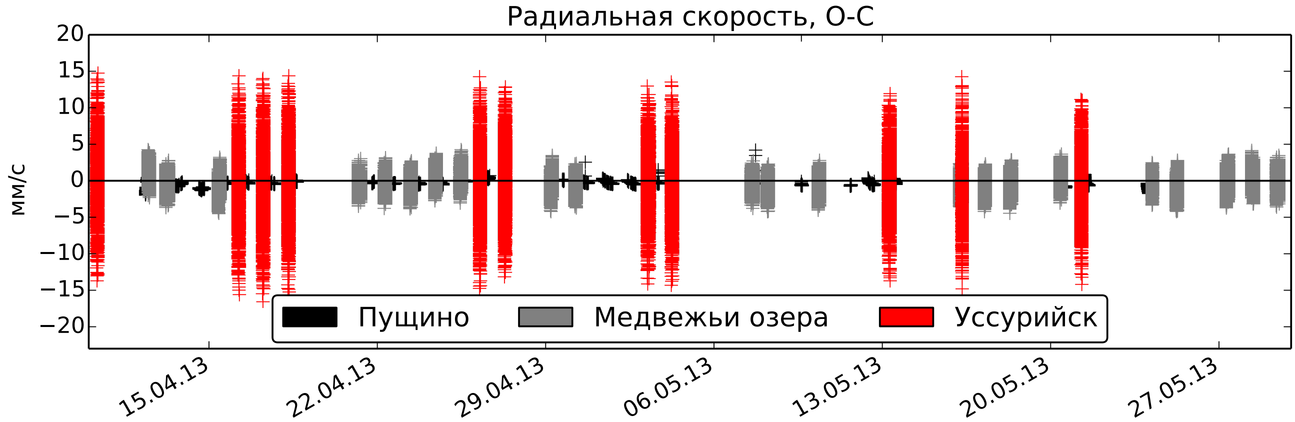


Рисунок 3.25: Модель "СР+", радиальная скорость 10.04.2013 – 30.05.2013

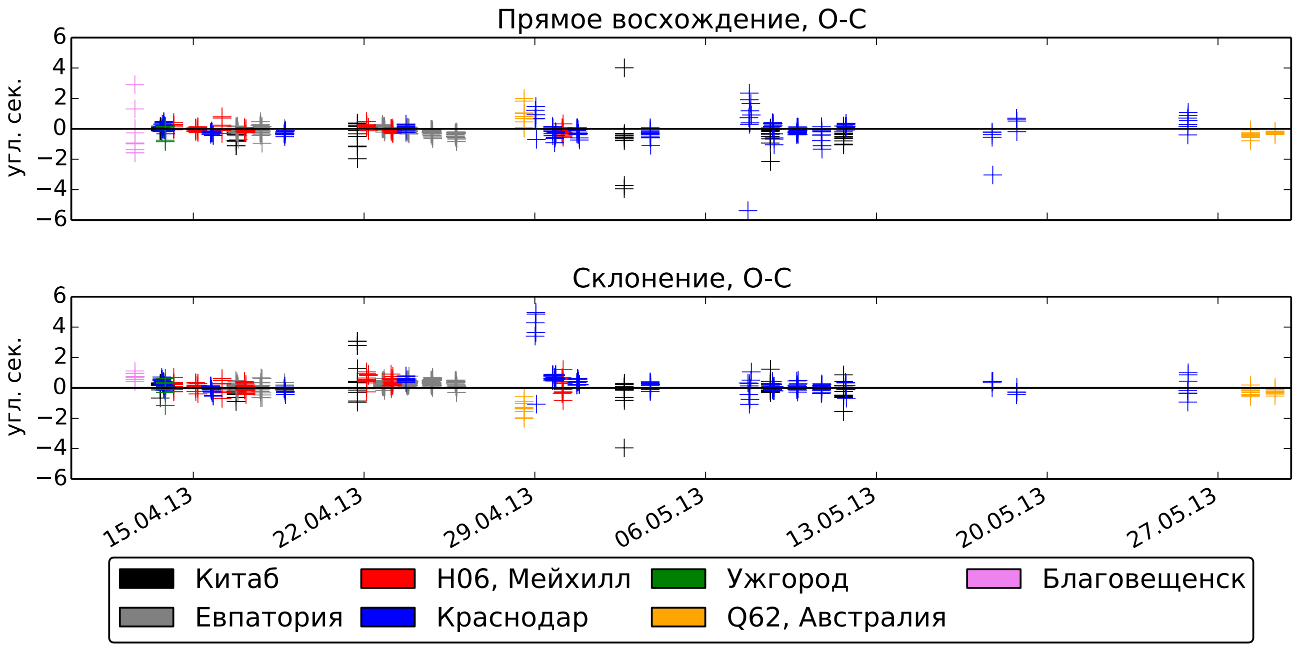


Рисунок 3.26: Модель "СР+", направление 10.04.2013 – 30.05.2013

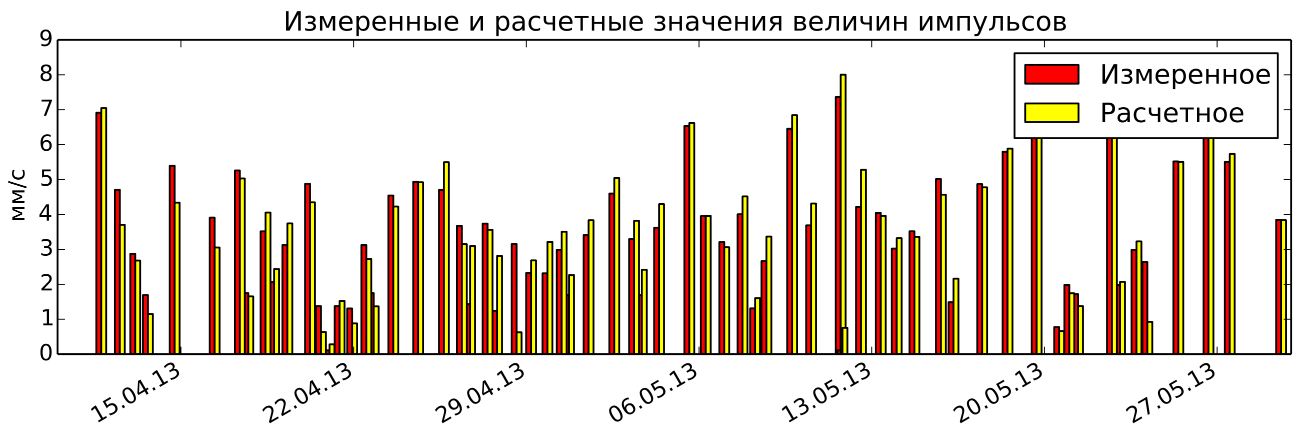


Рисунок 3.27: Модель "СР+", величины импульсов 10.04.2013 – 30.05.2013

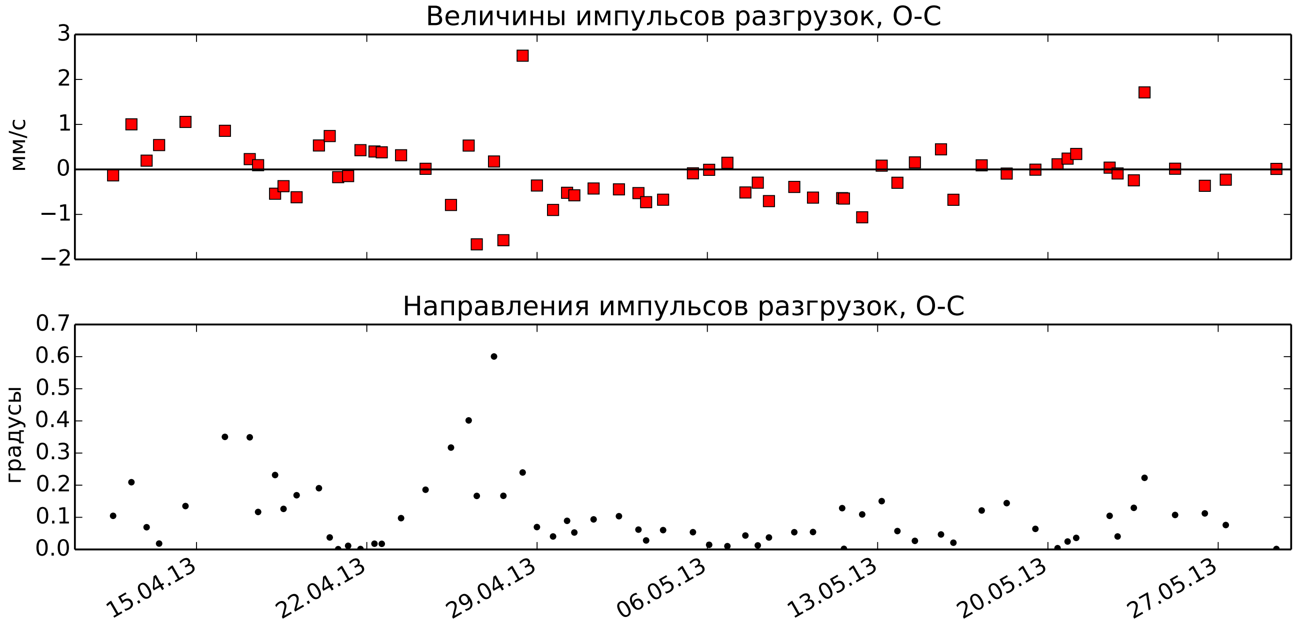


Рисунок 3.28: Модель “CP+”, имульсы разгрузок 10.04.2013 – 30.05.2013

3.3.5 Проверка лазерными измерениями

Лазерные измерения дальности помимо высокой точности характеризуются хорошо определяемыми инструментальными погрешностями, поскольку станции лазерного слежения могут калибровать свои измерения на множестве КА с установленными уголковыми отражателями, орбиты которых известны с высокой точностью. Поэтому лазерные измерения с учтенными поправками на распространение сигнала и положение уголковых отражателей относительно центра масс КА практически не содержат систематических ошибок.

Данное свойство позволяет проверять качество полученных орбит путем сравнения измеренных лазерными средствами дальностей с их расчетными аналогами, зависящими от полученных орбитальных параметров. Такого рода проверка была проведена для орбиты КА «Спектр-Р», полученной при уточнении импульсов разгрузок и трех параметров светового давления на мерном интервале с 01.11.2013 по 20.11.2013. Орбита аппарата была получена по имеющейся траекторной и телеметрической информации без участия лазерных измерений. Полученные в результате уточнения рассогласования радиотехнических измерений дальности изображены на рисунке 3.29, угловых оптических измерений — на рисунке 3.30.

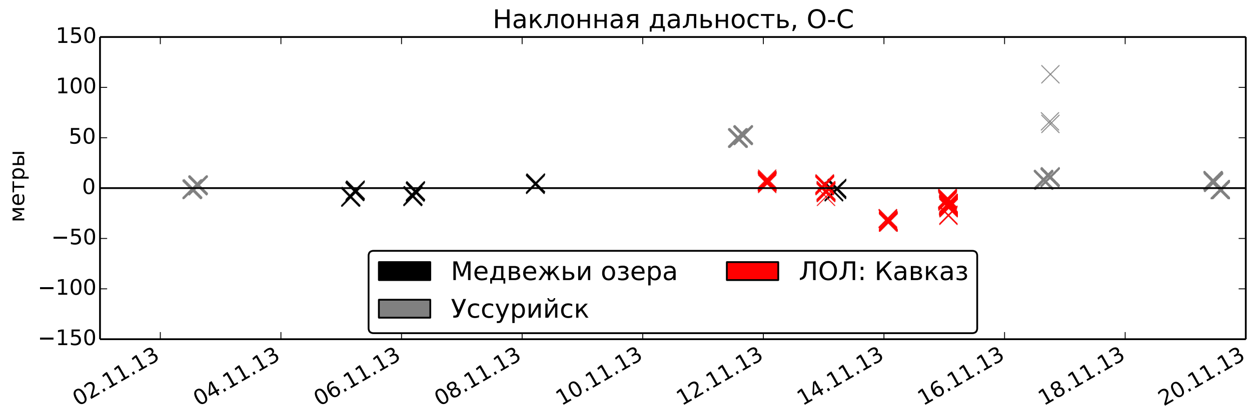


Рисунок 3.29: Рассогласования по дальности

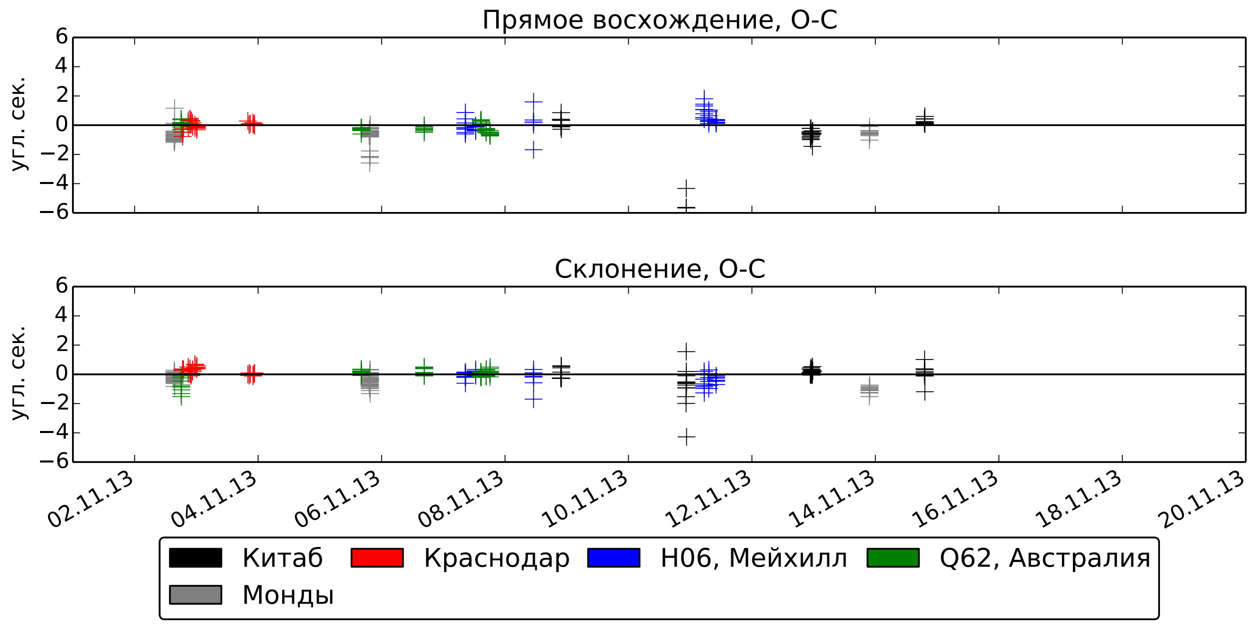


Рисунок 3.30: Рассогласования по направлению

Кавказский лазерный оптический локатор провел 4 сеанса измерений КА «Спектр-Р» на рассматриваемом временном интервале. Для полученных лазерных измерений на основании уточненных параметров движения КА были построены расчетные аналоги. Разница между измеренными и расчетными лазерными дальностями также изображена на рисунке 3.29. Стандартное отклонение лазерных измерений от проверяемой орбиты составило 13.4 метра, максимальное отклонение достигло 34 метров. Полученные результаты говорят о достаточно высокой точности полученной без использования лазерных измерений орбиты, а также об адекватности используемой модели движения.

Глава 4

Прогнозирование параметров движения

В данной главе рассматривается задача прогнозирования движения КА на базе модуля «Навигатор» , подверженного возмущениям со стороны работы бортовых систем. Основную часть этих возмущений составляют разгрузки маховиков системы ориентации и стабилизации, а также световое давления изменяющееся вместе с ориентацией КА. Исследуется связь действующего светового давления с разгрузками маховиков на примере фактических данных КА «Спектр-Р». Предлагается методика прогнозирования движения с учетом указанных возмущающих факторов, а также исследуется ее эффективность на примере реального движения КА «Спектр-Р»

Вопрос прогнозирования движения имеет высокую важность. Для околоземные аппаратов вроде «Спектра-Р», существенное отличие прогнозного движения от реального может повлиять на зоны видимости КА и тем самым сдвинуть время проведения того или иного эксперимента. Поскольку интерферометрические наблюдения требуют задействования крупных наземных телескопов, чье время распланировано вперед, сдвиг зон видимости приведет к уменьшению эффективного времени наблюдения. Более важное значение точность прогноза имеет для аппаратов, чей запуск запланирован в окрестность лагранжевой точки L_2 системы Солнце–Земля, поскольку от него зависит расход топлива, необходимый для удержания КА на заданной траектории.

Помимо этого в главе дается методика предсказания видимого блеска аппарата на основе имеющихся фотометрических наблюдений и знания будущей ориентации. Оценка блеска необходима для эффективного планирования астрометрических наблюдений удаленных КА, наблюдаемых на границе проницания оптических средств.

4.1 Моделирование будущих возмущений

В предыдущей главе было показано что наибольшую неопределенность в динамическую модель рассматриваемых КА привносят световое давление и разгрузки двигателей-маховиков. Эти возмущения взаимосвязаны: световое давление создает не только ускорение центра масс КА, но также является основным источников возмущающего момента, от которого зависят параметры разгрузок.

Необходимым элементом в предсказании этих возмущений является ориентация аппарата, поскольку непосредственно от нее зависят сила и момент светового давления. При описании теоретических основ моделирования будущих возмущений будем полагать, что ориентация КА известная на всем интервале прогнозирования. Подобное предположение правомерно, т.к. рассматриваемая платформа не предусматривает незапланированные изменения ориентации в штатном режиме полета, а аппараты, имеющие ее в качестве основы, являются космическими обсерваториями, чьи наблюдения и, соответственно, ориентация должны планироваться заранее.

Со знанием будущей ориентации и набора коэффициентов (α_i, μ_i), полученных в результате уточнения орбиты, мы можем рассчитывать соответствующую поправку (1.11) к уравнению движения центра масс. Кинетический момент, накапливаемый двигателями-маховиками, в общем случае можно выразить при помощи уравнения Эйлера:

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M}_{sp} + \mathbf{M}_g - \mathcal{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathcal{J}\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}, \tag{4.1}$$

где $\mathbf{K} = \sum\limits_{i=1}^{N} \mathbf{a}_i I_i \Omega_i$ — кинетический момент маховиков, $\mathbf{M}_g$ и $\mathbf{M}_{sp}$ — возмущающие моменты от гравитации Земли и светового давления, посчитанные в связанной с КА системой координат, остальные обозначения совпадают используемыми в выражении (1.14). Поскольку программа ориентации аппарата известна, кинетический момент маховиков может быть получен интегрированием (4.1) от момента последнего измерения скорости маховиков. Наиболее простой вид уравнения накопления кинетического момента маховиками принимает в случае, если аппарат поддерживает текущую ориентацию

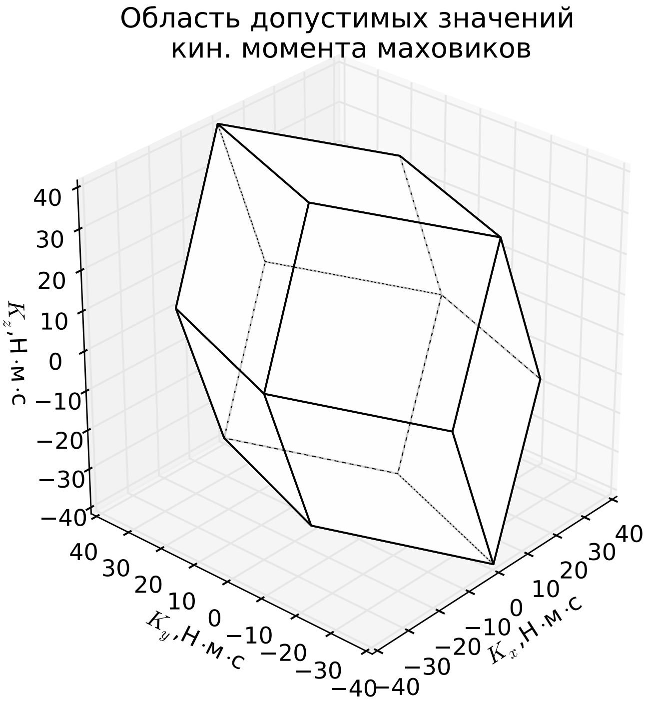


Рисунок 4.1: Множество U для КА «Спектр-Р»

в абсолютном пространстве и $\boldsymbol{\omega} \equiv 0$. В таком случае кинетический момент маховиков будет накапливаться линейно на протяжении интервала постоянной ориентации. Информацию о том, как должен изменяться кинетический момент маховиков, может быть использована для предсказания времени проведения разгрузок и величин полученных в результате приращений скорости КА.

4.1.1 Расчет времен разгрузок

Решение о проведении разгрузки маховиков не принимается произвольно, а должно подчиняться ряду правил. Среди таких правил, очевидно, должно находиться такое, что требует разгрузки, если $\mathbf{K} \notin U$, где U — некоторая известная область допустимых значений кинетического момента маховиков, которая может быть задана, например, при помощи ограничений на скорости вращения маховиков

$$U = \{\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{a}_i I_i \Omega_i : |\Omega_i| \leq \Omega_{max}, i = \overline{1, N}\}. \tag{4.2}$$

Пример U для КА «Спектр-Р» изображен на рисунке 4.1. Следствием этого правила является то, что разгрузка может оказаться необходима перед тем, как КА изменит свой режим движения вокруг центра масс. Простейшим примером является переход из одной постоянной ориентации в другую заданным способом за короткое время $t_2 - t_1$. Накопленное количество движения маховиков может не позволить совершить поворот за требуемое время, т.к. скорость вращения КА напрямую зависит от того, как сильно может изменяться кинетический момент маховиков в пределах ограничений U. Изменение суммарного момента количества движения КА между моментами постоянной ориентации t_1 к t_2 будет равно

$$\mathbf{A}(t_2)\mathbf{K}(t_2) - \mathbf{A}(t_1)\mathbf{K}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt, \tag{4.3}$$

где $\mathbf{A}(t)$ — матрица перехода от связанной системы координат к инерциальной, описывающая ориентацию аппарата, $\mathbf{M}$ — момент внешних сил. Если изменение ориентации происходит за короткое время, момент количества движения в неподвижных практически не изменится

$$\mathbf{K}(t_2) \approx \mathbf{A}^{\mathsf{T}}(t_2)\mathbf{A}(t_1)\mathbf{K}(t_1).$$

Если $\mathbf{K}(t_1) \in U$, при смене ориентации может оказаться, что $\mathbf{K}(t_2) \notin U$.

Помимо правил, непосредственно связанных с техническими характеристиками ЭМИО, могут существовать такие, что определяются организацией управления КА. Разгрузки могут проводиться, к примеру, в технологические часы вне зависимости от накопленного маховиками кинетического момента или перед серией научных наблюдений, требующих частой переориентации. Организационная составляющая в выборе времени разгрузок добавляет большую неопределенность в моделирование работы системы ориентации и стабилизации. В то же время возмущения от разгрузок достаточно чувствительны к выбору времени, т.к. от него зависит ориентация КА в момент разгрузки и, как следствие, направление приращения скорости.

4.1.2 Расчет величин импульсов разгрузок

Предположим, что принято решение в момент времени t_p провести разгрузку маховиков. К этому времени маховиками будет накоплен кинетический момент $\mathbf{K}(t_p) = \mathbf{K}_p$. Будем считать, что процесс разгрузки происходит при постоянной ориентации, а его целью является уменьшение кинетического момента маховиков до нуля. Система стабилизации КА имеет $m \geq 3$ реактивных двигателей, чьи центры истечения имеют координаты $\{\mathbf{r}_i\}_{i=1}^m$ в связанной системе координат, центр которой совпадает с центром масс аппарата.

Направления истечения описываются нормированными векторами $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^m$. Запишем изменение момента количества движения аппарата вместе с топливом от момента t_p до момента завершения работы двигателей $t_p+\delta t$ в осях неподвижной системы, которые в момент t_p совпадают с осями связанной системы

$$\mathbf{K}_{\text{a}}(t_p+\delta t)+\mathbf{K}(t_p+\delta t)+\sum_{i=1}^{m}\mathbf{r}_i\times\mathbf{e_i}p_i-\mathbf{K}_{\text{a}}(t)-\mathbf{K}(t_p)=\mathbf{M}\delta t, \tag{4.4}$$

где p_i — величина импульса топлива отработанная i-м ДС, $\mathbf{K}_{\text{a}}(t)$ — момент количества движения КА с неподвижными маховиками, $\mathbf{M}$ — момент внешних сил. Поскольку ориентация КА сохраняется во время разгрузки, длительность и возмущающие моменты малы, а конечный кинетический момент маховиков принят равным нулю, выражение (4.4) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{Cp}=\mathbf{K_p}, \tag{4.5}$$

где $\mathbf{C}=(\mathbf{r}_1\times\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{r}_m\times\mathbf{e}_m)$, $\mathbf{p}=(p_1,\ldots,p_m)^{\mathsf{T}}$. Полученное равенство можно дополнить очевидными ограничениями

$$p_i\geq 0,\quad i=1,\ldots,m \tag{4.6}$$

Будем искать оценку $\mathbf{p}$, удовлетворяющую описанным условиям и доставляющую минимум форме

$$\sum_{i=1}^{m}p_i\to\min. \tag{4.7}$$

Ограничения (4.5), (4.6) и условие минимума (4.7) соответствует канонической форме задачи линейного программирования, а искомая оценка $\mathbf{p}$ может быть найдена одним из множества разработанных алгоритмов [44]. Полученный в результате решения оптимальный вектор обозначим $\mathbf{p}^*$. Работа двигателей с найденными импульсами включения $\mathbf{p}^*$ в хорошей степени соответствует оптимальной реализации разгрузки маховиков в плане затрат топлива.

Приращение скорости КА в результате подобной оптимальной разгрузки обозначим следующим образом:

$$\Delta\mathbf{v}_{\text{опт}}=-\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{m}\mathbf{e_i}p_i. \tag{4.8}$$

где M — масса КА. Оценку реального импульса разгрузки будем искать в виде функции $\Delta\mathbf{v}(\Delta\mathbf{v}_{\text{опт}})$. При отсутствии информации о фактических разгрузкой может быть использована тождественная функция.

На примере разгрузок КА «Спектр-Р» покажем поиск линейной зависимости между импульсом оптимального включения и фактическим. Тяга ДС, не участвующих в моментной схеме и, как следствие, возмущающих движение центра масс, направлена в одну сторону (рис. 1.7), следовательно направления оптимального и фактического импульса разгрузки буду совпадать. Линейная связь импульсов разгрузок будет выражаться в линейной зависимости величинами этих импульсов, которую будем искать в виде

$$\Delta v = a\Delta v_{\text{опт}} + b. \tag{4.9}$$

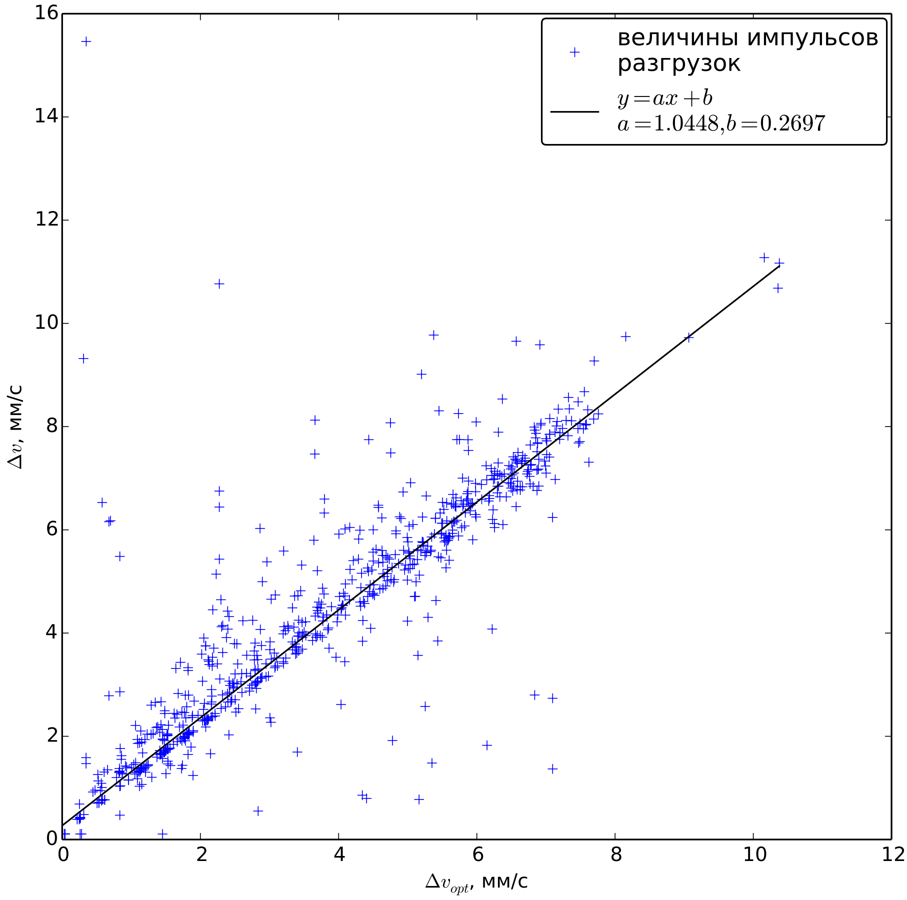


Рисунок 4.2: Связь фактических импульсов разгрузок с минимальными, рассчитанными исходя из изменения кинетического момента

Для поиска неизвестных параметров a и b рассмотрим разгрузки КА «Спектр-Р» с июля 2011 по сентябрь 2013 года. В качестве фактических Δv

будем использовать телеметрические данные о включениях ДС. По данным о скоростях вращения маховиков восстановим изменения кинетического момента маховиков в результате разгрузок и вычислим приращения скорости при оптимальном включении двигателей $\Delta v_{\text{опт}}(\Delta \mathbf{K})$. Зависимость $\Delta \mathbf{v}$ от $\Delta \mathbf{v}_{\text{опт}}$ приведена на рисунке 4.2. После отсева выбросных точек и проведения регрессии были получены следующие значения коэффициентов: $a = 1.0448$, $b = 0.2697$ мм/с.

4.2 Результаты прогнозирования движения КА «Спектр-Р»

Для проверки описанных выше методик предсказания движения воспользуемся двумя участками движения КА «Спектр-Р», рассмотренными в разделе 3.3.4. В качестве интервала прогнозирования выберем второй временной интервал $(t_{\text{н}}, t_{\text{к}})$, имеющий границы $t_{\text{н}}$ = 2013-04-10 00:00:00 UT и $t_{\text{к}}$ = 2013-05-30 00:00:00 UT. Будем считать, что движение КА, полученное в ходе уточнения на втором интервале 10.04.2013 – 30.05.2013 при помощи модели "СР+" является истинным движением. Действительно, согласование измерений свидетельствует о максимальной ошибке определения положения в несколько сот метров, что гораздо меньше ошибок, ожидаемых при прогнозировании движения, и сравнение прогноза с уточненной орбитой будет практически эквивалентно сравнению прогноза с истинной орбитой. Прогнозное движение будем рассчитывать от вектора состояния и параметров светового давления, уточненных на первом временном интервале с 20.02.2013 по 10.04.2013.

Прогнозное движение будем рассчитывать от параметров движения, полученных с помощью классической модели "К" движения и модели "СР+". Соответствующие начальные условия содержатся во втором и пятом столбцах таблицы (3.6). При расчете прогнозного движения будем считать ориентацию КА известной и равной фактической ориентации, восстановленной из телеметрии на интервале прогнозирования. Знание ориентации позволяет адекватно прогнозировать возмущения, связанные со световым давлением, учитываемые моделью "СР+". Очевидно, что прогнозирование от начальных условий, полученных при помощи этой модели, требует учета разгрузок маховиков. Для этого, как было показано выше, необходимо знать, как со временем изменяется кинетический момент маховиков. Летная программа КА

«Спектр-Р» подразумевает нахождение аппарата в фиксированной ориентации относительно осей неподвижной системы координат все время за исключением момент переориентации КА. Тогда вместо (4.1) можно использовать более простое уравнение в неподвижных осях

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M}_g(\mathbf{X}, \Lambda) + \mathbf{M}_{sp}(\mathbf{X}, \Lambda, \alpha_1, \mu_1, \alpha_2), \quad \mathbf{K}(t_{\text{н}}) = \mathbf{K}_0. \tag{4.10}$$

Правая часть выражения зависти от ориентации, которая считается известной, коэффициентов светового давления и от положения КА. Последнее можно рассчитывать менее по точному прогнозу, т.к. интегральный вклад гравитационного момента мал, а момент светового давления слабо зависит от положения аппарата относительно Земли. Интегрируя (4.10), мы можем определить, каким образом накапливался бы кинетический момент маховиков, если бы те не разгружались и имели бы бесконечный запас по скорости вращения. Используя эту зависимость, постараемся определить, в какое время на интервале прогнозирования будут проходить разгрузки маховиков, а также какое приращение скорости КА эти разгрузки будут вызывать.

Будем полагать, что разгрузки обнуляют кинетической момент маховиков. Для определения времени разгрузки зададим правило

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}(\mathbf{K}(t) - \mathbf{K}(t_{i-1})) \in U, \tag{4.11}$$

где U — задается правилом (4.2) (см. рис. 4.1), $\mathbf{A}$ — матрица перехода из связанной системы координат в неподвижную, $\mathbf{K}$ — накопленный кинетический момент маховиков в неподвижных осях, полученный из выражения (4.10), t_{i-1} — момент предыдущей разгрузки. Словами правило выражается в том, что накопленный маховиками кинетический момент с момент последней разгрузки должен находиться внутри множества допустимых значений U, заданного в связанной СК. Имея предсказанное накопление кин. момента маховиков $\mathbf{K}$ на интервале $(t_{\text{н}}, t_{\text{к}})$, последовательно определим при помощи (4.11) моменты разгрузок маховиков $\{t_i^{\text{вын}}\}_{i=1}^{n_1}$. Между двумя разгрузками с индексами $i-1$ и i маховиками будет накоплен кин. момент $\Delta\mathbf{K}_i = \mathbf{K}(t_i^{\text{вын}}) - \mathbf{K}(t_{i-1}^{\text{вын}})$, который переводится в импульс разгрузки $\Delta\mathbf{v}_i^{\text{вын}}$ согласно разделу 4.1.2. Рассчитанный таким образом набор $\{t_i^{\text{вын}}, \Delta\mathbf{v}_i^{\text{вын}}\}_{i=1}^{n_1}$ определяет разгрузки маховиков на интервале прогнозирования, которые будем называть «вынужденными».

В действительности разгрузки маховиков, обусловленные достижением предельной скорости вращения, крайне маловероятны. Моменты времени, в которые КА должен провести разгрузку маховиков, как правило задаются

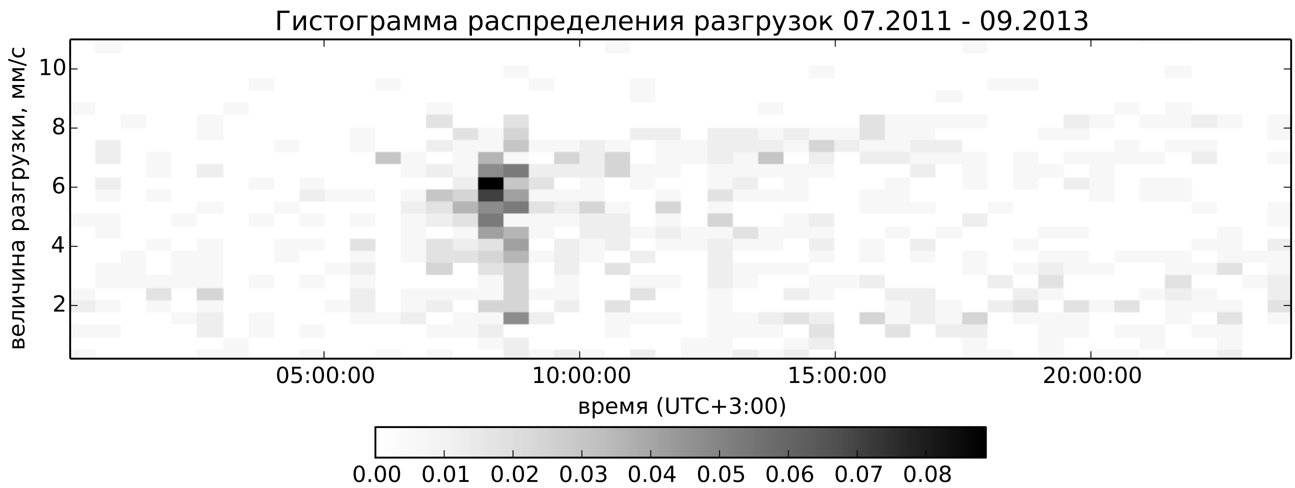


Рисунок 4.3: Распределение разгрузок «Спектра-Р» по времени проведения и величине

центром управления полетом. Эти моменты определятся таким образом, чтобы разгрузка по мере возможности попадала в технологическое время, когда КА не ведет никаких научных наблюдений. Набор правил, согласно которому ЦУП определяет времена разгрузок, зависит от множества факторов, часть которых носит организационный характер. Не будем задаваться целью определить этот набор, а постараемся сформулировать простое правило, частично определяющее время реально проводимых разгрузок. Рассмотрим гистограмму времен проведения разгрузок и величин соответствующих импульсов разгрузок КА «Спектр-Р» с момента запуска по сентябрь 2013 года (рис. 4.3). Согласно гистограмме в интервале с 8:00 до 9:00 московского декретного времени наблюдается повышенная частота проведения разгрузок. Такое распределение связано с тем, что этот интервал времени часто попадает в технологические сеансы.

Спрогнозируем будущие разгрузки маховиков следующим образом. Пусть в 8:30 МДВ каждых суток, на которые осуществляется прогноз, проводится разгрузка маховиков вне зависимости от того, какой кинетический момент накоплен маховиками. Кроме того разгрузка проводится при выходе кин. момента маховиков из области U, как в случае «вынужденных» разгрузок. Набор времен проведения и соответствующих им импульсов разгрузок, посчитанных исходя из вычисленного на прогнозном интервале накопления кин. момента маховиков $\mathbf{K}(t)$, $\{t_i^{\text{рег}}, \Delta\mathbf{v}_i^{\text{рег}}\}_{i=1}^{n_2}$ будем называть «регулярными» разгрузками маховиков на интервале прогнозирования.

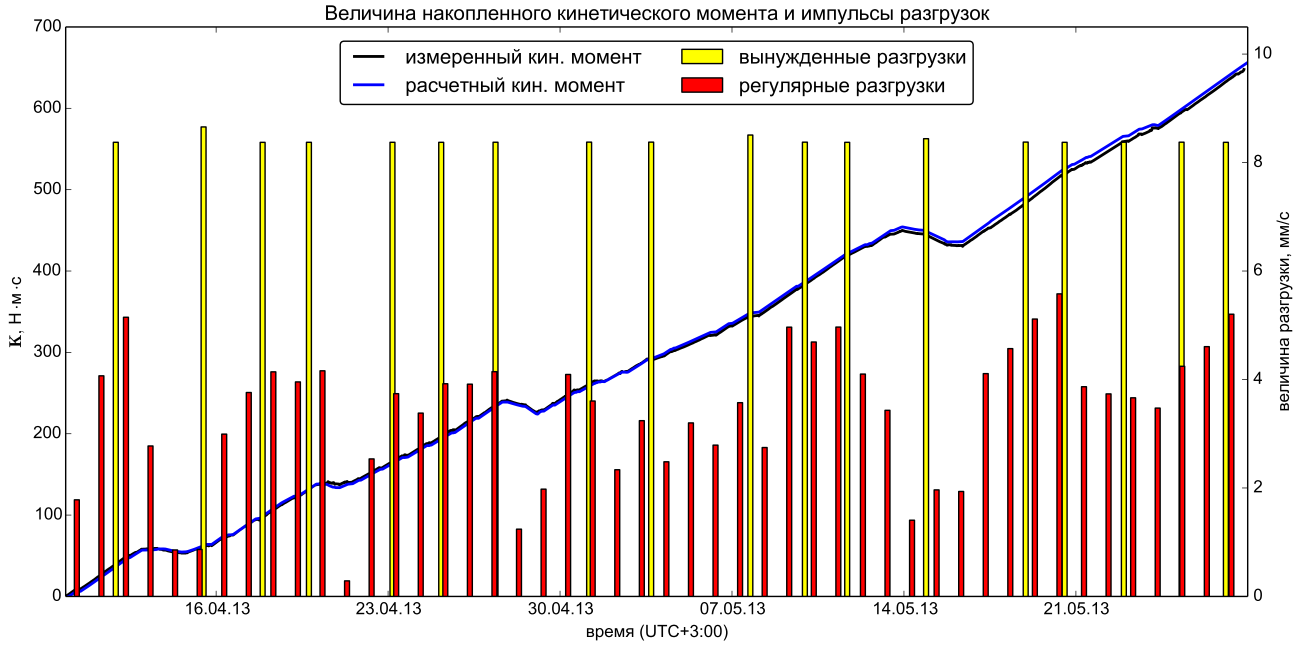


Рисунок 4.4: График предсказанного накопления кин. момента маховиков и двух вариантов прогноза импульсов разгрузок

На рисунке 4.4 синей линией показано изменение величины кинетического момента маховиков $\mathbf{K}(t)$ на рассматриваемом интервале прогнозирования в отсутствие разгрузок, полученное из ориентации КА и моделей момента сил светового давления и гравитационного момента. Черной линией на том же рисунке показано, как накапливался кин. момент маховиков согласно данным телеметрии. Как видно из графика, прогнозное изменение кин. момента очень близко к фактическому. Красными и желтыми полосками на рисунке 4.4 показаны времена проведения и соответствующие величины «вынужденных» и «регулярных» разгрузок маховиков, предсказанных при помощи прогноза $\mathbf{K}(t)$. Направление импульсов разгрузок в случае «Спектра-Р» определяется прогнозной ориентацией аппарата в соответствующий момент времени и совпадает с направлением оси OX связанной СК.

Сравним четыре прогнозных движения КА «Спектр-Р» на интервале уточнения 10.04.2013 – 30.05.2013 с фактическим движением на этом же интервале, полученным в ходе уточнения орбиты. Первое движение рассчитывается от начальных условий, полученных при помощи классической модели “K”, разгрузки маховиков при расчете движения не учитываются. Оставшиеся три прогноза рассчитываются от начальных условий, полученных в рамках модели “CP+”, и отличаются только прикладываемыми импульсами разгрузок маховиков. В первом варианте прогнозное движение возмущается

Модель	Разгрузки	ΔR_t, км.	ΔR_n, км.	ΔR_b, км.
“К”	не учитываются	382.858	34.654	49.543
“СР+”	«вынужденные» (прогноз)	92.367	6.526	6.112
“СР+”	«регулярные» (прогноз)	51.264	6.251	6.772
“СР+”	фактические	3.514	0.876	1.131

Таблица 4.1: Величина максимального отклонения прогноза от фактического движения по положению

«вынужденными» разгрузками $\{t_i^{\text{вын}}, \Delta\mathbf{v}_i^{\text{вын}}\}_{i=1}^{n_1}$, во втором — «регулярными» $\{t_i^{\text{рег}}, \Delta\mathbf{v}_i^{\text{рег}}\}_{i=1}^{n_2}$, в третьем — фактическими разгрузками $\{t_i, \Delta\mathbf{v}_i^0\}_{i=1}^{n}$, которые произошли на рассматриваемом временном интервале.

Максимальные отклонения прогнозных положений КА от фактического в проекциях на тангенциальное, нормальное и бинормальное направление приведены в таблице 4.1. Изменение этих отклонений со временем приведены в разных масштабах на рисунках 4.5 и 4.6. Отклонения классической модели прогноза существенно изменяются только в продольной составляющей. Максимальные отклонения наблюдаются при прохождении перицентров, что свидетельствует о временной ошибке. С каждым витком продольная ошибка прогноза увеличивается, достигая 380 км на последнем витке. При прогнозировании от начальных условий модели “СР+” с учетом сложного светового давления и будущей ориентации КА наблюдаются гораздо меньшие отклонения от фактического движения. Эти отклонения, как и в случае классической модели, в основном сосредоточены в продольной составляющей. При этом изменение тангенциальной ошибки носит неравномерный характер, поскольку связано с тем, насколько хорошо прогнозные разгрузки описывают возмущения от реальных разгрузок.

Отметим, что прогнозы с «вынужденными» и «регулярными» разгрузками являются реальными прогнозами движения, поскольку в них предсказываются возмущения от разгрузок на основании прогноза о накоплении кин. момента маховиков. В то же время прогнозное движение с возмущениями от фактических разгрузок, полученных из телеметрии и, очевидно, недоступных при составлении реального прогноза, показывает, какой точности можно добиться, если свести к минимуму неопределенность предсказании импульсов разгрузок.

Предложенный способ прогноза движения на основе «регулярных» разгрузок позволил сократить максимальную ошибку в предсказании положения в 7.5 раза по сравнению с классической пассивной моделью движения. Большой разброс в отклонениях прогнозного движения модели “CP+” говорит о том, что способ предсказания разгрузок маховиков существенным образом влияет на точность прогнозного движения. Если достаточно примитивный способ прогноза разгрузок позволяет уменьшить максимальное отклонение в положении до 52 км., то более близкое к реальности предсказание разгрузок может улучшить точность прогноза движения в несколько раз. Тем не менее, нахождение такого способа предсказания разгрузок не видится возможным без взаимодействия с ЦУПом.

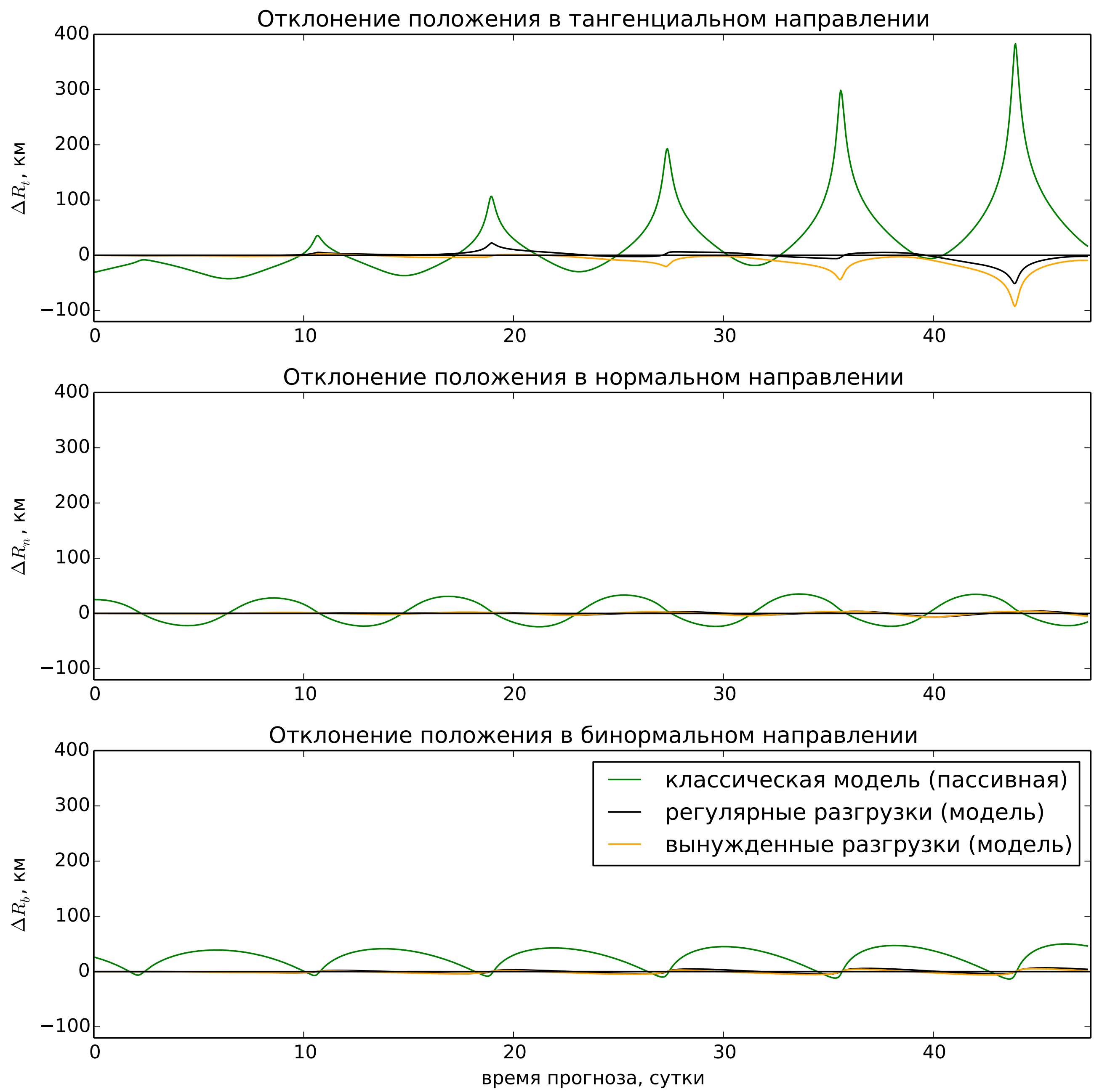


Рисунок 4.5: Изменение отклонения прогноза по положению со временем

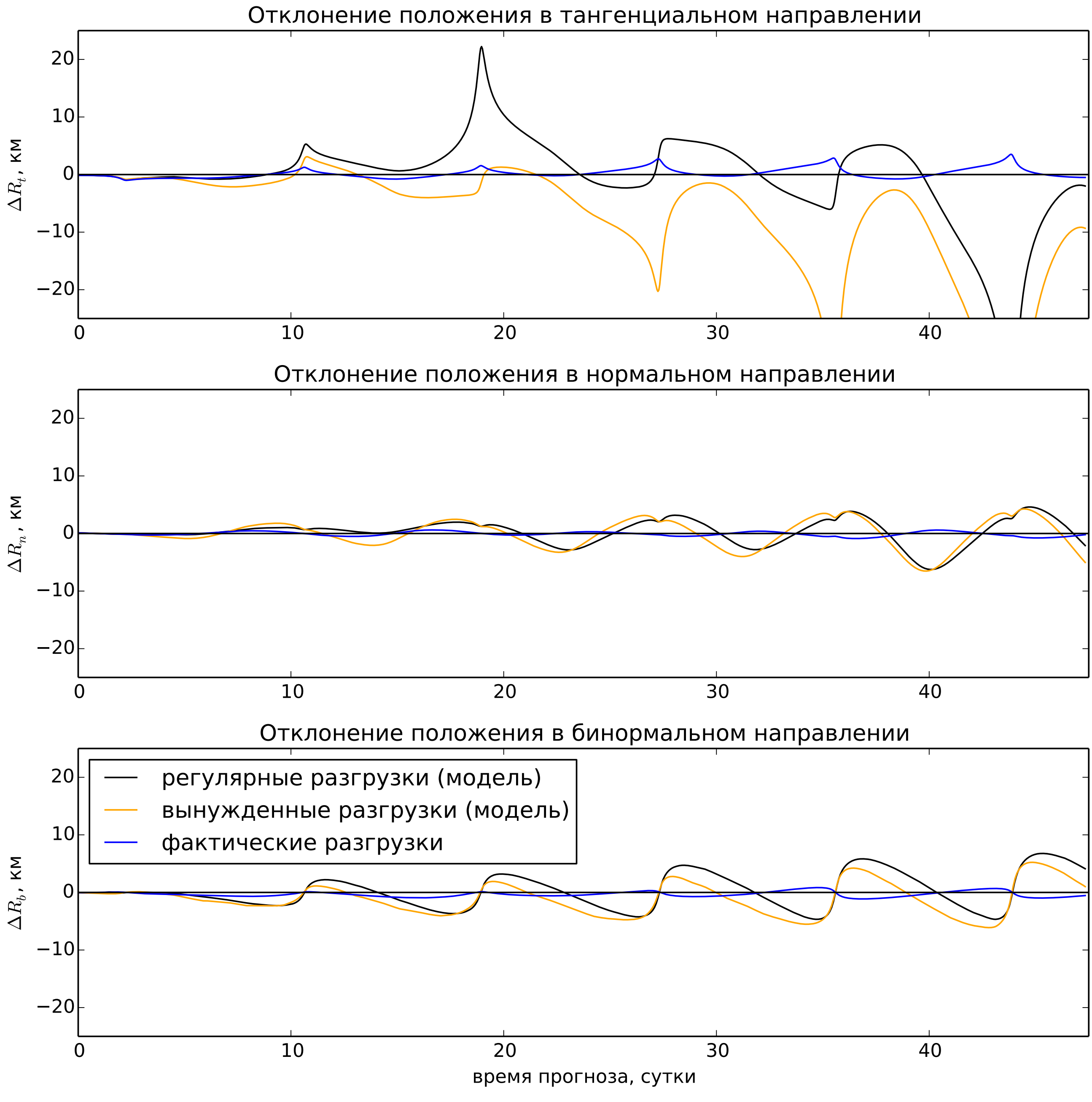


Рисунок 4.6: Изменение отклонения прогноза по положению со временем

4.3 Прогноз видимого блеска

На примере КА «Спектр-Р» оптические астрометрические наблюдения показали свою полезность при изучении движения КА, подверженного сложно моделируемым возмущениям. Относительно невысокая точность измерений компенсируется простотой проведения, т.к. в отличие от радиотехнических или лазерных траекторных измерений, такой тип измерений не требует наличия на борту КА специального оборудования.

Для успешного проведение оптических наблюдений как привило требуется выполнение ряда условий, которые можно формализовать в следующем виде

- Угол места аппарата над горизонтом φ должен быть не меньше определенного значения: $\varphi \geq E(a)$, где $E(a)$ — функция, в общем случае зависящая от азимута и определяемая индивидуально для каждого измерительного пункта.

- Угол места Солнца над горизонтом $\varphi_\odot$ не должен превышать $-10°$: $\varphi_\odot < -10°$.

- Должна отсутствовать засветка от Луны: $\theta_m \geq M(t)$, где θ_m — угол между центром Луны, наблюдателем и аппаратом, $M(t)$ — предельное угловое расстояние от центра Луны, на котором возможно проведение наблюдений, зависящее от текущей фазы Луны, то есть в общем случае от времени.

- Видимый блеск аппарата m должен быть достаточным для его обнаружения обсерваторией: $m \leq m_0$, где m_0 — индивидуальная характеристика инструмента, при помощи которого производятся наблюдения.

Выполнение всех условий, кроме последнего, связано с взаимным положением КА, Солнца и наблюдателя. Видимый блеск КА характеризует плотность светового потока Φ от аппарата, который фиксируется наблюдателем, и описывается выражением

$$m = -2.5 \log_{10} \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} \right), \tag{4.12}$$

где Φ_0 — некоторый постоянных поток. Поэтому условие, ограничивающее видимый блеск, можно переформулировать следующим образом: от КА в сторону наблюдателя должно отражаться достаточное количество света, чтобы быть зафиксированным приемной аппаратурой телескопа наблюдателя.

Для объектов простой формы блеск часто связывают с площадью освещенной поверхности, которая видна наблюдателю, и описывают в виде зависимости от фазового угла — угла между наблюдателем, КА и Солнцем. Для сферы, например, чем меньше фазовый угол, тем больше освещенной части поверхности видно наблюдателю, тем выше видимый блеск. Однако, для КА сложной формы возможны случаи, когда наблюдатель не видит освещенных частей поверхности даже при фазовых углах, далеких от 180 градусов.

Поскольку световой поток обратно пропорционален квадрату расстояния, то для КА, значительно удаленных от Земли, более остро стоит проблема проницания наблюдательного средства. При определенных ориентациях КА отраженного от его поверхности света будет достаточно для наблюдений конкретным оптическим средством. Наблюдение КА в другой ориентации, но на том же расстоянии, будет либо невозможно, либо сопряжено с рядом трудностей, понижающих точность астрометрических наблюдений. Знание того, насколько ярким должен быть наблюдаемый КА, позволяет наблюдателю подбирать оптимальные параметры съемки или принимать решение о невозможности наблюдения КА в текущих условиях, иными словами более эффективно планировать наблюдения.

При постановке задачи о прогнозе движения мы условились, что ориентация КА известна на всем интервале прогнозирования. С использованием этой информации, а также при помощи моделей, которые были использованы при расчете возмущений от светового давления, оценим, как распределен поток отраженного от поверхности КА света, и вместе с тем получим оценку видимого блеска аппарата для наблюдателя.

4.3.1 Модель блеска

Рассмотрим освещенную плоскую поверхность площади S, которая видна наблюдателю. Единичным вектором $\mathbf{s}$ обозначим направлением Солнце–КА, единичным вектором $\mathbf{v}$ — направление наблюдатель–КА, единичным вектором $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности. В единицу времени на поверхность падает свет, общей энергией

$$F = -\Phi_s(\mathbf{n} \cdot \mathbf{s})S, \tag{4.13}$$

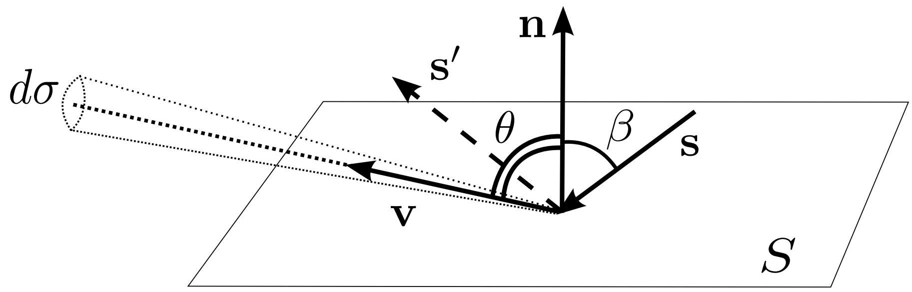


Рисунок 4.7: Освещенная поверхность S

где Φ_s — плотность оптической составляющей солнечного светового потока в окрестности КА. Падающий поток частично отражается от поверхности. Как и при описании давления света, будем предполагать, что доля $\alpha\mu$ от падающего потока отражается зеркально, доля $\alpha(1-\mu)$ отражается диффузно по Ламберту, а коэффициенты α и μ характеризуют отражающую способность поверхности и ее зеркальность соответственно. Согласно [34], мощность отраженного потока, проходящего через элемент $d\sigma$, можно представить в виде

$$F_{d\sigma} = \rho(\mathbf{v}) F d\sigma, \tag{4.14}$$

где F — совокупная мощность отраженного от поверхности света, $\rho(\mathbf{v})$ — функция отображения, определяющая, сколько света в каком направлении отражается. Поскольку мы рассматриваем два типа отражения, то мощность потока через элемент $d\sigma$ представляется в виде суммы мощностей от каждого типа отражения

$$F_{d\sigma} = \left[\alpha(1-\mu)\rho_1(\mathbf{v}) + \alpha\mu\rho_2(\mathbf{v})\right] F d\sigma, \tag{4.15}$$

функции $\rho_1(\mathbf{v})$ и $\rho_2(\mathbf{v})$ характеризуют поведение отраженного света в случае зеркального и диффузного отражения соответственно.

Для диффузного отражения мощность отраженного потока пропорциональна косинусу угла отражения θ, т.е. функция отображения имеет вид

$$\rho_2(\mathbf{v}) = P_2 \cos\theta,$$

где неизвестный нормировочный коэффициент P_2 определяется из соображений сохранения суммарной мощности отраженного потока. Пусть расстояние от рассматриваемой поверхности до элемента $d\sigma$ по линии визирования составляет R. Используя (4.14) распишем суммарную мощность отраженного света, проходящего через полусферу радиус R

$$R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} F P_2 \cos\theta \sin\theta d\theta = F,$$

откуда находится $P_2 = \dfrac{1}{\pi R^2}$.

Рассмотрим зеркальное отражение от поверхности S. Если отражение происходит идеально, то мощность отраженного светового потока будет нулевая в во всех направлениях $\mathbf{v}$ кроме направления зеркального отражения $\mathbf{s}'$. Следовательно расчетное значение потока в направлении $\mathbf{v}$ будет сильно чувствительно по отношению к ошибкам определения векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{s}$ и $\mathbf{n}$, которые могут возникнуть из-за ошибок знания ориентации КА, ошибок определения положения наблюдателя относительно КА и неточностей модели поверхности. Вместо идеального зеркального отражения введем отражение, близкое к зеркальному. Потребуем, чтобы мощность светового потока имела максимум при совпадении $\mathbf{v}$ и $\mathbf{s}'$ и быстро убывала при отклонении $\mathbf{v}$ от $\mathbf{s}'$. Таким условиям удовлетворяет следующий закон отражения:

$$\rho_1(\mathbf{v}) = \begin{cases} P_1 \cos^k \theta', & \theta' \le \pi/2, \\ 0, & \theta' > \pi/2, \end{cases} \tag{4.16}$$

где $\theta' = \arccos(\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}')$ — угол между направлением зеркального отражения $\mathbf{s}'$ и направлением на наблюдателя $\mathbf{v}$, k — параметр, определяющий, насколько быстро падает мощность отраженного света при отклонении от $\mathbf{s}'$, чем больше этот параметр, тем ближе отражение к идеально зеркальному. Величина P_1 находился аналогично из суммарной мощности отраженного света

$$R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} F P_1 \cos^k \theta' \sin \theta' d\theta' = F, \tag{4.17}$$

Откуда получаем $P_1 \approx \dfrac{k+1}{2\pi R^2}$. Выражение для нормировочного коэффициента носит приближенный характер, поскольку в общем случае пределы интегрирования не совпадают с тем, что использовались в (4.17), однако, для углов падения, далеких от 90°, эта разница несущественна. При предельных углах падения нормировочный коэффициент увеличивается до двух раз, однако эти случаи не изменяют общей картины, поскольку описывают отражение близкого к нулю светового потока.

Плотность светового потока, отраженного от поверхности S и прошедшего через $d\sigma$, описывается выражением

$$\Phi_{d\sigma} = \frac{\Phi_s S \cos \beta}{2\pi R^2} \left(2\alpha(1-\mu) \cos \theta + \alpha\mu(k+1) \cos^k \theta' \right), \tag{4.18}$$

где β — угол падения света на поверхность. Предполагая, что поверхность КА описывается множество таких элементарных поверхностей, запишем выражение для плотности суммарного светового потока прошедшего через $d\sigma$

$$\Phi_{d\sigma} = \frac{2\Phi_s}{2\pi R^2} \sum_{i\in\Sigma} \alpha_i(1-\mu_i) S_i \cos\beta_i \cos\theta_i + \\ + \frac{(k+1)\Phi_s}{2\pi R^2} \sum_{i\in\Sigma} \alpha_i \mu_i \cos^k \theta'_i, \quad (4.19)$$

где Σ — индексное множество освещенных Солнцем и видимых наблюдателю поверхностей КА.

Плотности потока солнечного излучения Φ_s на расстоянии в одну астрономическую единицу соответствует видимый блеск $m_s = -26.74$. Следовательно плотности потока $\Phi_{d\sigma}$ будет соответствовать блеск

$$m = m_s - 2.5 \log_{10} \frac{AU^2}{R_s^2} \frac{\Phi_{d\sigma}}{\Phi_s}, \quad (4.20)$$

где AU — одна астрономическая единица, R_s — расстояние между КА и Солнцем. Выражения (4.19) и (4.20) позволяют рассчитать видимый блеск КА, если известны параметры отражения света от его поверхности. Знание этих параметров отражения позволяет предсказывать яркость аппарата в зависимости от его ориентации в пространстве.

4.3.2 Моделирование видимого блеска КА «Спектр-Р»

Построим модель блеска КА «Спектр-Р», используя приведенные выше выражения для отраженного светового потока и модель поверхности КА, описанную в разделе 1.3. Как и в случае моделирования светового давления обозначим отражающую способность освещаемой поверхности КРТ и центрально блока коэффициентом α_1, зеркальность этих поверхностей обозначим коэффициентом μ_1. Отражающую способность панелей солнечных батарей зададим следующим образом

$$\alpha_2 = 0.1\alpha_1, \quad \mu_2 = 0.1\mu_1.$$

Такое допущение примерно соответствует действительности, панели солнечных батарей отражают мало солнечного света и играют незначительную роль в формировании блеска КА.

Согласно введенным коэффициентам отраженный световой поток из (4.19), отраженный от КА будет выражается следующим образом

$$\Phi_{\text{КА}} = \frac{\Phi_s}{2\pi R^2}(2\alpha_1(1-\mu_1)A + (k+1)\alpha_1\mu_1 B + \\ +0.2\alpha_1(1-0.1\mu_1)C + 0.01(k+1)\alpha_1\mu_1 D),$$

где A, B, C и D выражают соответствующие суммы из (4.19) и рассчитываются согласно принятой модели поверхности. При расчетах будем использовать показатель $k = 100$. При таком показателе почти 80% светового потока отражается в конусе с углом раствора в 20°, осью симметрии которого служит направление зеркального отражения $\mathbf{s}'$. Видимый блеск КА равен

$$m = -2.5\log_{10}\frac{1}{2\pi R^2}(2\alpha_1(1-\mu_1)A + (k+1)\alpha_1\mu_1 B + \\ +0.2\alpha_1(1-0.1\mu_1)C + 0.01(k+1)\alpha_1\mu_1 D) + \\ +m_s + 5\log_{10}\frac{R_s}{AU} \tag{4.21}$$

Блеск зависит от неизвестных параметров α_1 и μ_1. В качестве начального приближения значения параметров могут быть взяты равными значениям соответствующих параметров, задействованных в модели сил светового давления. Однако, при наличии фотометрических измерений, значения параметров можно скорректировать таким образом, чтобы измеренные значения блеска наилучшим образом совпадали с рассчитанными по (4.21).

Воспользуемся фотометрическими измерениями, которые сопутствовали астрометрическим измерениям КА «Спектр-Р» на интервале с июля 2011 года по декабрь 2012 года. По фотометрическим измерениям определим параметры α_1 и μ_1, доставляющих минимум сумме квадратов разностей измеренных и расчетных величин блеска. Уточненные значения коэффициентов и среднеквадратичное отклонение измерений видимого блеска приведены в таблице 4.2. В той же таблице указано согласование фотометрических измерений при использовании средних значений коэффициентов α_1 и μ_1, полученных в результате уточнения орбиты КА «Спектр-Р» в главе 3.

На рисунке 4.8 изображены рассогласования измерений блеска КА, полученные до ноября 2013 года. Расчетные значения строились по коэффициентом, уточненным по фотометрическим измерениям 2011 и 2012 годов. Среднеквадратичное рассогласование на участке предсказания составляет 0.65 звездной величины.

Источник	α_1	μ_1	σ, зв. вел.
Уточнение по фотометрическим измерениям	0.57219	0.17931	0.6448
Модель сил светового давления	0.86109	0.10523	0.7894

Таблица 4.2: Согласование измерений блеска при различных коэффициента отражения

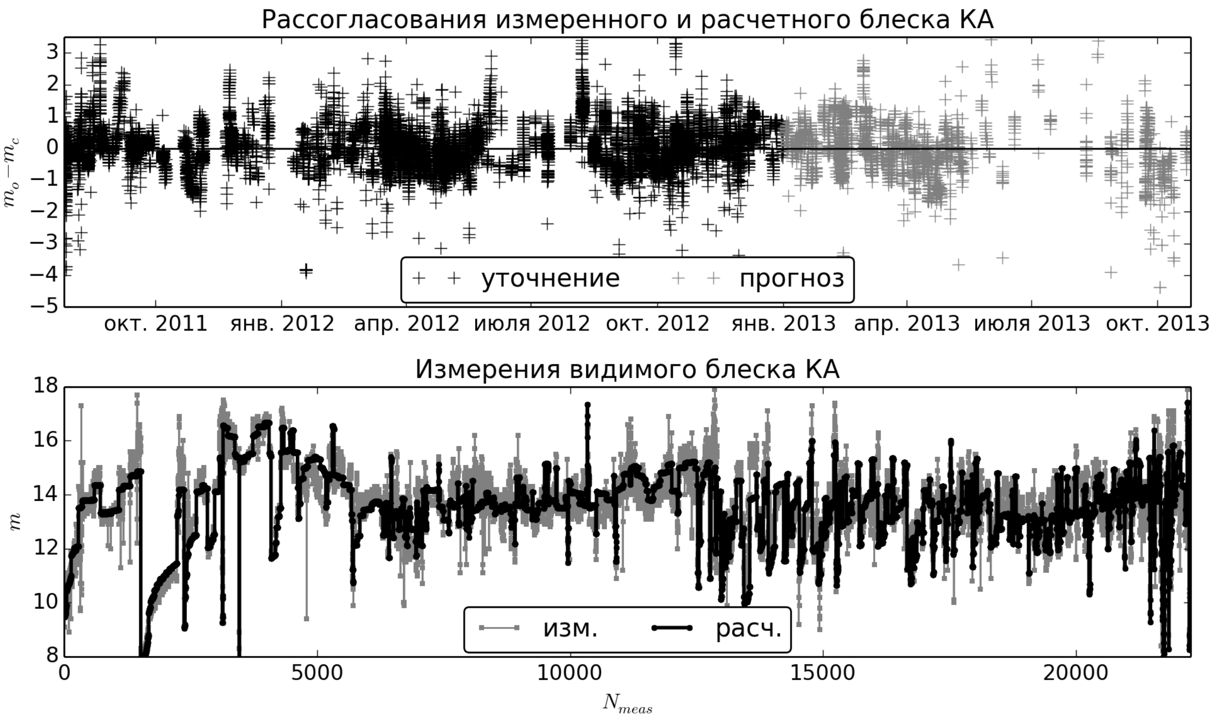


Рисунок 4.8: Измеренные и расчетные значения видимого блеска КА «Спектр-Р»

Представленная модель расчета блеска КА «Спектр-Р» с полученными коэффициентами отражения используется для расчета целеуказаний обсерваториям, проводящим наблюдения аппарата. Не смотря на то, что относительная точность предсказания видимого блеска не велика, модель позволяет оценить, на каких участках траектории понижение блеска КА затруднит наблюдения, и принять соответствующие меры.

Заключение

Разработана параметризованная модель силы и момента светового давления, действующего на КА «Спектр-Р». Модель учитывает форму поверхности аппарата, его ориентацию относительно Солнца, а также возникновение тени на поверхности КА. Параметры модели определяют отражающую способность и зеркальность тепловой изоляции, которой покрыты основные элементы КА, а также отражающую способность панелей солнечных батарей.

Реализована методика определения параметров движения в рамках разработанной модели путем совместной обработки внешнетраекторных и телеметрических данных. На основе методики была решена задача уточнения орбиты КА «Спектр-Р». Проведенные апостериорные оценки показали, что ошибка определения координат КА на мерном интервале уменьшилась в результате применения разработанной методики в 20–30 раз.

Разработана методика прогнозирования движения аппарата с учетом будущих возмущений от разгрузок маховиков. Расчет возмущений от будущих разгрузок строится на основании прогноза накопления двигателями-маховиками кинетического момента, который рассчитывается при помощи определенных параметров светового давления и известной ориентации КА. Сравнение прогнозного движения КА «Спектр-Р», рассчитанного разными способами, с его фактическим движением на временном интервале длиной в 50 суток, показало, что методика позволяет сократить максимальную ошибку определения прогнозного положения КА в 7.5 раз по сравнению с прогнозом, основанным на пассивной модели движения.

На основании модели светового давления разработана математическая модель видимого блеска аппарата. Согласование модели блеска и модели светового давления показана на примере попутных фотометрических измерений КА «Спектр-Р». Разработанная модель позволяет в 1.5–1.9 раз лучше согласовывать фотометрические измерения по сравнению с моделью, не учитывающей форму и ориентацию аппарата.

Список рисунков

Список таблиц

Литература

1. *Arias E. F., Charlot P., Feissel M., Lestrade J.-F.* The extragalactic reference system of the International Earth Rotation Service, ICRS. // Astronomy and Astrophysics. — 1995. — Нояб. — Т. 303. — С. 604—608.

2. *Berthias J., Broca P., Ferrier C., Gratton S.* JASON-1: a New Reference for Precise Orbit Determination // IAF abstracts, 34th COSPAR Scientific Assembly. — 2002.

3. *Boehm J., Niell A., Tregoning P., Schuh H.* Global Mapping Function (GMF): A new empirical mapping function based on numerical weather model data // Geophysical Research Letters. — 2006. — Апр. — Т. 33, вып. 7. — DOI: 10.1029/2005GL025546.

4. *Eanes R. J., Schutz B., Tapley B.* Earth and ocean tide effects on Lageos and Starlette // Earth and ocean tide effects on Lageos and Starlette / под ред. J. T. Kuo. — E. Sckweizerbart'sche Verlagabuchhandlung, окт. 1983. — С. 239—250.

5. *Fliegel H. F., Gallini T. E., Swift E. R.* Global Positioning System Radiation Force Model for geodetic applications // J. Geophys. Res. — 1992. — Янв. — Т. 97, B1. — С. 559—568. — DOI: 10.1029/91JB02564.

6. *Folkner W. M., Williams J. G., Boggs D. H.* The Planetary and Lunar Ephemeris DE 421 // Interplanetary Network Progress Report. — 2009. — Авг. — Т. C1. — С. 42—178.

7. *Knocke P. C., Ries J. C., Tapley B. D.* Earth radiation pressure effects on satellites. — American Institute of Aeronautics, Astronautics, 1988.

8. *Kopp G., Lean J. L.* A new, lower value of total solar irradiance: Evidence and climate significance // Geophysical Research Letters. — 2011. — Янв. — Т. 38. — С. 7. — DOI: 10.1029/2010GL045777.

9. *Kubo-oka T.*, *Sengoku A.* Solar radiation pressure model for the relay satellite of SELENE // Earth Planets and Space. — 1999. — Т. 51, № 9. — С. 979—986.
10. *Lemoine F. G.*, *Kenyon S. C.*, *Factor J. K.*, *Trimmer R. G.* [и др.] The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96 // NASA. — 1998. — Т. 1, № 07. — С. 575.
11. *Marshall J.*, *Luthcke S.* Modeling radiation forces acting on Topex/Poseidon for precision orbit determination // Journal of Spacecraft and Rockets. — 1994. — Т. 31. — С. 99—105. — ISSN 0022-4650. — DOI: `10.2514/3.26408`.
12. *Mathews P. M.*, *Herring T. A.*, *Buffett B. A.* Modeling of nutation-precession: New nutation series for nonrigid Earth, and insights into the Earth's interior // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. — 2002. — Т. 107, B4. — С. 1—27.
13. *McCarthy D. D.*, *Petit G. (* IERS Conventions (2003): тех. отч. ; Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie. — 2004. — С. 127. — IERS Technical Note ; 32.
14. *Mendes V. B.*, *Langley R. B.* Tropospheric zenith delay prediction accuracy for high-precision GPS positioning and navigation // Navigation, Journal of the Institute of Navigation. — 1999. — Т. 46, № 1. — ISSN 00281522.
15. *Mendes V. B.*, *Pavlis E. C.* High-accuracy zenith delay prediction at optical wavelengths // Geophysical Research Letters. — 2004. — Т. 31, № 14. — DOI: `10.1029/2004GL020308`.
16. *Mendes V. B.*, *Prates G.*, *Pavlis E. C.*, *Pavlis D. E.*, *Langley R. B.* Improved mapping functions for atmospheric refraction correction in SLR // Geophysical Research Letters. — 2002. — Т. 29, № 10. — DOI: `10.1029/2001GL014394`.
17. *Moyer T. D.* Formulation for Observed and Computed Values of Deep Space Network Data Types for Navigation. — John Wiley & Sons, 2005. — (JPL Deep-Space Communications and Navigation Series). — ISBN 9780471726173.

18. *Moyer T. D.*, *(U.S.) J. P. L.* Mathematical Formulation of the Double-Precision-Orbit-Determination-Program (DPODP). — Jet Propulsion Laboratory, California Inst. of Technology, 1971. — (Technical report // Jet Propulsion Laboratory).

19. *Petit G.*, *Luzum B. (* IERS Conventions (2010): тех. отч. ; Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie. — 2010. — С. 179. — IERS Technical Note ; 36.

20. *Ries J. C.*, *Huang C.*, *Watkins M. M.* Effect of General Relativity on a Near-Earth Satellite in the Geocentric and Barycentric Reference Frames // Physical Review Letters. — 1988. — Авг. — Т. 61, вып. 8. — С. 903—906. — DOI: `10.1103/PhysRevLett.61.903`.

21. *Rodriguez-Solano C. J.*, *Hugentobler U.*, *Steigenberger P.* Adjustable box-wing model for solar radiation pressure impacting GPS satellites // Advances in Space Research. — 2012. — Апр. — Т. 49, № 7. — С. 1113—1128. — ISSN 0273-1177. — DOI: `10.1016/j.asr.2012.01.016`.

22. *Rutan D.*, *Rose F.*, *Roman M.*, *Manalo-Smith N.* [и др.] Development and Assessment of Broadband Surface Albedo from Clouds and the Earth's Radiant Energy System Clouds and Radiation Swath Data Product // Journal of Geophysical Research: Atmospheres. — 2009. — Апр. — Т. 114. — С. 19.

23. *Sanchez B. V.* Rotational dynamics of mathematical models of the nonrigid earth: дис. ... канд. / Sanchez B. V. — Texas Univ., Austin., дек. 1975.

24. *Schaer S.*, *Gurtner W.*, *Feltens J.* IONEX: The IONosphere Map EXchange Format Version 1: тех. отч. ; International GNSS Service. — 1998.

25. *Schmid H.* The influence of atmospheric refraction on directions measured to and from a satellite: Research Note ; Geodesy, Intelligence ; Mapping Research ; Development Agency. — Февр. 1963. — № 10.

26. *Will C. M.* Theoretical Frameworks for Testing Relativistic Gravity. II. Parametrized Post-Newtonian Hydrodynamics, and the Nordtvedt Effect // Astrophysical Journal. — 1971. — Февр. — Т. 163. — С. 611. — DOI: `10.1086/150804`.

27. *Will C. M.*, *Nordtvedt Jr. K.* Conservation Laws and Preferred Frames in Relativistic Gravity. I. Preferred-Frame Theories and an Extended PPN Formalism // Astrophysical Journal. — 1972. — Нояб. — Т. 177. — С. 757. — DOI: `10.1086/151754`.

28. *Willson R. C.*, *Hudson H. S.* The sun's luminosity over a complete solar cycle // Nature. — 1991. — Май. — Т. 351. — С. 42—44. — DOI: `10.1038/351042a0`.

29. *Аким Э.*, *Энеев Т.* Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений // Космические исследования. — 1963. — Т. 1, № 1. — С. 5—50.

30. *Андриянов В.*, *Кардашев Н.* Проект наземно-космического радиоинтерферометра с длиной базы до 1 млн. км и когерентной радиосвязью между телескопами // Космические исследования. — 1981. — Т. XIX, № 5. — С. 763—772.

31. *Белецкий В.* Движение искусственного спутника относительон центра масс / под ред. Д. Абашева. — Наука, 1965.

32. *Боровин Г.*, *Захваткин М.*, *Степаньянц В.*, *Тучин А.* [и др.] Идентификация маневров, выполненных двигателями малой тяги космического аппарата // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. — 2012. — Спец. выпуск №3 «Математическое моделирование». — С. 27—36.

33. *Боровин Г.*, *Захваткин М.*, *Степаньянц В.*, *Тучин А.* [и др.] Определение параметров орбиты и маневра космического аппарата при заданном времени приложения импульса // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. — 2012. — Спец. выпуск №4 «Математическое моделирование». — С. 76—86.

34. *Гершун А.* Избранные труды по фотометрии и светотехнике. — Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1958. — (Библиотека русской науки: математика, механика, физика, астрономия).

35. *Захваткин М.* Моделирование видимого блеска космического аппарата «Спектр-Р» для планирования астрометрических наблюдений // Наука и образование. — 2013. — Май. — № 3. — С. 10. — DOI: `10.7463/0513.0571011`.

36. *Кардашев Н.*, *Парийский Ю.*, *Соколов А.* Космическая радиоастрономия // Успехи физических наук. — 1971. — Т. 104, № 6. — С. 328—331. — DOI: 10.3367/UFNr.0104.197106i.0328.

37. *Кардашев Н.*, *Хартов В.*, ..., *Захваткин М.* [и др.] Космическая миссия «Радиоастрон». Первые результаты // Вестник НПО им. С.А.Лавочкина. — 2012. — Т. 3, № 14. — С. 4—21. — ISSN 2075-6941.

38. *Кардашев Н.*, *Хартов В.*, ..., *Захваткин М.* [и др.] “Радиоастрон” – телескоп размером 300 000 км: основные параметры и первые результаты наблюдений // Астрономический Журнал. — 2013. — Т. 90, № 3. — С. 179—222. — DOI: 10.7868/S000462991303002X.

39. *Комаров М. М.*, *Сазонов В. В.*, *Климович Д. Н.* Расчет сил и моментов светового давления, действующих на роторный солнечный парус // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. — 1995. — № 59. — С. 18.

40. *Молотов И.*, *Агапов В.*, *Куприянов В.*, *Титенко В.*, *Хуторовский З.* Научная сеть оптических инструментов для астрометрических и фотометрических наблюдений // Известия Главной астрономической обсерватории в Пулково. — 2008. — Нояб. — Т. 219, № 1. — С. 233—248.

41. *Сажин М. В.*, *Власов И. Ю.*, *Сажина О. С.*, *Турышев В. Г.* РадиоАстрон: Релятивистское изменение частоты и сдвиг шкалы времени // Астрономический журнал. — 2010. — Т. 87, № 11. — С. 1—16. — ISSN 0004-6299.

42. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / под ред. Г. Н. Дубошин. — Наука, 1976. — С. 864.

43. *Федорова Р. С.* Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полетов искусственных спутников Земли: тех. отч. ; 4 ЦНИИ Минобороны России. — 2004. — ГОСТ Р 25645.166-2004.

44. *Юдин Д. Б.*, *Гольштейн Е. Г.* Линейное программирование (теория, методы и проложения). — Наука, 1969. — С. 424.