

ОТЗЫВ

официального оппонента, доктора физико-математических наук

Колдобы Александра Васильевича

на диссертационную работу Алексева Михаила Владиславовича

«Математическое моделирование термомеханических процессов в многофазных средах»,
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

по специальности 1.2.2. – Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ.

Актуальность. В настоящее время известно множество физико-математических моделей, сформулированных в рамках эйлерова описания, позволяющих термодинамически согласованно учитывать такие процессы, как фрагментация среды, поверхностные силы, контактные разрывы, а также фазовые переходы. При этом известно крайне ограниченное число работ, касающихся разработки и обоснования многоскоростных и многофазных математических моделей указанного типа, сформулированных в виде системы гиперболических уравнений первого порядка и описывающих динамику среды с гиперупругим поведением.

Характерной особенностью таких моделей является наличие неконсервативных слагаемых, которые усложняют определение обобщенного решения задачи, и, соответственно, приводят к необходимости использования специальных вычислительных алгоритмов. Разработка таких алгоритмов активно ведется в настоящее время.

В своей работе автор затрагивает оба указанных вопроса. В работе рассматривается как разработка, обоснование и применение чисто эйлеровых математических моделей для описания термодинамически согласованного поведения многофазных гиперупругих сред, так и создание эффективных вычислительных алгоритмов для решения задач указанного класса. Таким образом, тематика работы является актуальной.

Новизна работы. В диссертационной работе предложена полностью неравновесная физико-математическая модель типа Баера-Нунциато для описания многофазной среды с учетом гиперупругого поведения фаз, а также новых вычислительных алгоритмов, включающих в себя использование неконсервативных схем на основе разрывного метода Галеркина и комплексное лимитирование решения консервативных и простых переменных. Помимо этого, в работе представлена параллельная программная реализация представленных моделей и алгоритмов.

Содержание работы.

Работа состоит из введения, 6 глав, заключения и списка литературы. Объем работы составляет 128 страниц.

Во **введении** сформулированы цели и задачи исследования, обосновывается его актуальность.

В **первой главе** диссертации представлен анализ современных подходов к моделированию многофазных сред: приведены несколько видов классификаций существующих на данный момент моделей поведения многофазных и многоматериальных сред. Первой выполнена классификация моделей по характеру деформаций среды: «гидродинамический», «упругий» и «смешанный» типы моделей. Второй выполнена квалификация по методу построения моделей: модели, метод вывода которых основан на усреднении мезоскопических моделей поведения среды, и модели, основанные на методах феноменологической рациональной механики сплошных сред.

Вторая глава посвящена выводу гиперупругого обобщения модели Баера-Нунциато в рамках методов рациональной термодинамики (механики сплошной среды). Построение модели существенно опирается на аксиомы Труделла. В качестве отправной точки выбрана однофазная модель Годунова-Роменского. Результирующая модель представлена системой гиперболических уравнений первого порядка, соответствующих законам сохранения массы, импульса и энергии, дополненная замыкающими соотношениями в виде уравнений состояния для каждой из фаз, уравнением, описывающим динамику объемных долей фаз, а также соотношениями на интерфейсные слагаемые. Особенностью полученной модели является наличие в законах сохранения неконсервативных слагаемых, что характерно для всех моделей типа Баера-Нунциато.

В **третьей главе** приведены известные частные случаи представленной модели в том виде, в котором они использованы в дальнейшем. В частности, рассмотрена модель Годунова-Роменского, а также ее модификация на случай наличия неоднородностей в среде. Полученная неоднородная модель содержит характерные неконсервативные слагаемые. Также представлена модель Баера-Нунциато как наиболее простой частный случай многофазной модели, тем не менее, сохраняющей основные физико-математические свойства более общей модели (неконсервативность, многофазность, гиперболичность).

Четвертая глава посвящена вычислительным алгоритмам для решения систем гиперболических уравнений. В качестве основы для дальнейшего развития выбран разрывный метод Галеркина на трехмерных ортогональных декартовых сетках. Рассмотрена процедура включения в вычислительную схему неконсервативных слагаемых. Схема решения системы уравнений, включающей в себя релаксационные слагаемые, основана на методе расщепления по физическим процессам. Интегрирование по времени производится методом Рунге-Кутты необходимого порядка. Сформулирована общая схема лимитирования численного решения в поставленных задачах. В качестве составных частей используется три вида лимитеров: лимитер Кривоносовой, лимитер WENO-S и лимитер, обеспечивающий положительность объемных долей и плотностей. Общая схема лимитирования зависит от конкретной математической модели и типа решаемых задач. Наиболее сложная схема лимитирования с дополнительным уточнением положительности давления используется для многофазных многоматериальных задач, физическая постановка которых включает в себя близкие к нулевым объемные доли каждой из фаз, распределенные в пространстве.

В **пятой главе** описана программная реализация исследуемых математических моделей, а также соответствующих вычислительных алгоритмов. Все виды изучаемых математических моделей решаются в рамках единого программного комплекса DIMP-MULTIPHASE, основанного на программной платформе DIMP. Языком реализации является C++, используется интерфейс параллельного программирования MPI, за разбиение декартовой ортогональной сетки отвечает библиотека Metis. Конфигурирование системы выполнено с помощью языка Lua. Программный комплекс предполагает возможность задания алгебраического восполнения решения любого порядка, а также интегрирование методом Рунге-Кутты с помощью таблицы Бутчера.

В **шестой главе** представлены результаты вычислительных экспериментов для модели Годунова-Роменского как для однородной среды, так и для неоднородной, в одномерных и трехмерных геометрических постановках. Помимо этого, представлены результаты расчета для модели Баера-Нунциато как без учета релаксационных процессов, так и с их учетом. Продемонстрирована возможность решения одномерных, двумерных и трехмерных задач с использованием разрывного метода Галеркина на сетках больших размерностей, в том числе с использованием суперкомпьютерных технологий.

В **заключении** формулируются выводы и основные результаты работы.

Практическая и научная ценность результатов работы заключается в разработанных математических моделях, соответствующих вычислительных алгоритмах и их параллельной программной реализации, которая может быть использована для решения задач в реалистичных постановках.

Достоверность результатов обеспечена использованием в работе современных представлений механики, а также валидацией и верификацией разработанных подходов.

Замечания по работе:

1. Обзор литературы можно было бы сократить за счет устранения повторов.
2. Вывод уравнений модели представляется излишне формальным. Было бы полезно, по возможности, прокомментировать физический смысл неконсервативных слагаемых. Не ясно, в частности, какие из них отвечают за моделирование поверхностных эффектов (энергию, энтропию и пр. межфазных границ).
3. Для верификационных расчетов не проводится исследование численной сходимости. Целесообразным было бы продемонстрировать фактический порядок разрывного метода Галеркина при расчете гладких решений.
4. Автор использует алгоритмы на основе лимитирования простых и консервативных переменных моделей. Вместе с тем, в значительном числе работ, посвященных численному решению гиперболических систем уравнений, используется лимитирование характеристических переменных. В работе отсутствуют результаты, явно демонстрирующие сравнительные достоинства и недостатки указанных подходов.
5. Работа содержит опечатки (см. стр. 14, 22, 29, 30 и др.).

Общая оценка работы. Приведенные замечания относятся скорее к форме представления результатов, и не снижают ценности работы. Работа выполнена на высоком научном уровне, тематика работы является актуальной, а результаты обладают научной новизной и практической ценностью. Автор продемонстрировал глубокое понимание в области разработки термодинамически обоснованных физико-математических моделей многофазных среды и соответствующих вычислительных алгоритмов. Автореферат адекватно отражает содержание диссертации в части её основных результатов.

Основные результаты работы опубликованы в 11 печатных работах, в том числе 9 в изданиях, индексируемых в РИНЦ, 5 – в изданиях, индексируемых в Scopus, 1 – в изданиях, индексируемых в Web of Science, 1 в сборниках трудов конференций.

Диссертация Алексева Михаила Владиславовича на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук является научно-квалификационной работой, в которой содержится решение ряда задач, имеющих важное значение с точки зрения развития методов математического моделирования и вычислительного эксперимента для анализа задач термомеханики многофазных сред, что соответствует требованиям п. 9 Положения о присуждении ученых степеней, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2. – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Официальный оппонент,

Колдоба Александр Васильевич,

доктор физико-математических наук (05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»),

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»,

заведующий кафедрой моделирования и технологий разработки нефтяных месторождений, 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.,
адрес эл.почты: koldoba@rambler.ru

«17» октября 2023 г.



А.В. Колдоба

Подпись Колдобы Александра Васильевича удостоверяю.

Ученый секретарь ученого совета МФТИ
(НИУ), к.ф.-м.н.



Евсеев Е.Г.

«17» октября 2023 г.