

На правах рукописи

Багдасаров Геннадий Алексеевич

**ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
МАГНИТОУСКОРЕННОЙ ИМПУЛЬСНОЙ ПЛАЗМЫ  
С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ  
ОБОБЩЕННЫМ ЗАКОНОМ ОМА**

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2012

Диссертационная работа выполнена в Институте прикладной математики  
им. М. В. Келдыша РАН

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,  
Ольховская Ольга Гургеновна

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор Лобанов Алексей Иванович  
доктор технических наук,  
Валько Виктор Васильевич

Ведущая организация: Государственный научный центр РФ  
Троицкий институт инновационных  
и термоядерных исследований

Защита состоится “\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2012 г. в \_\_\_ час. \_\_\_ мин.  
на заседании диссертационного совета Д002.024.03 при Институте при-  
кладной математики им. М. В. Келдыша РАН, расположенного по адресу:  
125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4.

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный печатью ор-  
ганизации, просим высылать по адресу: 125047, г. Москва, Миусская пл.,  
д. 4, ученому секретарю совета Д002.024.03.

С диссертационной работой можно ознакомиться в библиотеке Инсти-  
тута прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН.

Автореферат разослан “\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2012 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета: доктор физико-математических наук,  
Змитренко Николай Васильевич

## Общая характеристика работы

**Актуальность диссертационной работы** определяется необходимостью создания программных средств для эффективного решения задач импульсной плазменной энергетики методами математического моделирования и выполнения вычислительных экспериментов с целью прогнозирования, оптимизации и анализа натуральных экспериментов с плазмой мощных электрических разрядов. Такие эксперименты ведутся в настоящее время в России на установках АНГАРА-5-1 (ГНЦ РФ Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований, ТРИНИТИ), С-300 (НИЦ “Курчатовский институт”) и за рубежом (установки Z/ZR и Saturn в США, SPHINX во Франции, MAGPIE в Великобритании).

Магнитное поле, порождаемое электрическим током, сжимает проводящее ток вещество. Это явление получило название пинч-эффект. Самосжимаемые сильным токовым импульсом электрические разряды являются эффективным средством получения плотной высокотемпературной плазмы. Электромагнитное (ЭМ) сжатие вещества позволяет получать и исследовать в лабораторных экспериментах плотную горячую плазму, а также сверхсильные магнитные поля, действие которых на хорошо проводящие среды эквивалентно давлению в десятки миллионов атмосфер. Экстремально высокие значения параметров вещества и поля определяют перспективы подобных исследований, которые физики видят прежде всего в решении проблемы управляемого термоядерного синтеза (УТС). Именно в связи с проблемой УТС в СССР, США, Англии и Франции в 50-х годах прошлого столетия начались широкомасштабные исследования пинчей.

В настоящее время использование пинчей на основе проволочныхборок (Z-пинчей) в фундаментальных и прикладных исследованиях связано с тем, что они являются одним из самых мощных и ярких лабораторных источников рентгеновского излучения. Перспективным направлением этих исследований является повышение компактности сжатия плазмы за счет выбора конструкции сборки, обеспечивающей квазисферическое сжатие, в отличие от радиального сжатия в цилиндрических сборках.

Оптимизация условий экспериментов на современных сильноточных генераторах заключается в основном в определении параметров нагрузки (пинча) с целью лучшего согласования с параметрами генератора и обеспечения условий, когда в нагрузку может быть передана максимальная доля вырабатываемой генератором электроэнергии.

Другим направлением оптимизации является повышение мощности импульса, подаваемого на нагрузку. Конечной ступенью обострения импульса в генераторах является плазменный прерыватель тока (ППТ). Выход на оптимальный режим работы ППТ требует некоторого количества наладочных пусков, которые на крупных установках достаточно дороги. Поэтому проблема выхода на режим с первого раза без предварительных импульсов по подбору оптимальных параметров плазмы, т.е. проблема первого “выстрела”, является актуальной. Она особенно важна при обострении мощности взрывоманитных генераторов, где первый “выстрел” является и последним.

Необходимой частью такой оптимизации является вычислительный эксперимент. Основой компьютерного моделирования импульсной магнитоускоренной плазмы служит модель магнитной гидродинамики (МГД).

Идеальная МГД (ИМГД) модель может применяться для изучения поведения низкочастотной плазмы ( $\omega \ll \omega_{ci}$ ), когда электроны и ионы могут реагировать на воздействие внешнего электрического поля, и двигаться со скоростями порядка  $\vec{E} \times \vec{B}/B^2$ . На расстояниях больше дебаевского радиуса никаких значительных электрических полей в системе отсчета, движущейся с плазмой, существовать не может, электроны и ионы перемещаются вместе. Множество электронов и ионов совместно ведут себя практически как незаряженная (квазинейтральная) жидкость. Любое магнитное поле в идеальном случае (т.е. в отсутствие диссипации в плазменном потоке) становится “захваченным” жидкостью и движется вместе с ней. В этом частотном диапазоне движение плазмы преимущественно связано с инерционностью ионов и магнитными силами натяжения. Движение электронов поддерживает нейтральность заряда, т.е. они могут быть исключены из системы уравнений задачи.

При исследовании следующего по высоте частотного диапазона ( $\omega \sim \omega_{ci}$ ) рассматривается область, где ионы начинают двигаться сквозь магнитное поле, связанное с электронами, а электроны по-прежнему текут вдоль магнитного поля, поддерживая нейтральность по заряду. Таким образом, электронный и ионный потоки больше не движутся вместе, и требуется рассматривать двухжидкостную плазму. Такой подход применим к анализу многих ситуаций, однако, если в уравнениях удерживаются все действующие на электроны силы, наивысшими частотами являются частоты электронная циклотронная и плазменная. Это приводит к необходимости использовать соответствующие кратковременные шкалы, что сильно ограничивает по времени продолжительность моделирований.

Многие важные эффекты во втором частотном диапазоне ( $\omega \sim \omega_{ci}$ ) могут быть исследованы с помощью МГД-кода. Для этого необходимо учесть добавку Холла в уравнении закона Ома. Соответствующие уравнения получаются с использованием двухжидкостной модели в приближении нулевой электронной массы, при которой электроны всегда находятся в состоянии силового равновесия. Так как высокочастотные электронные колебания не принимаются во внимание, вычисления могут быть выполнены с достаточно большим шагом интегрирования по времени.

Физически слагаемое Холла отвечает за относительное смещение ионов по сравнению с электронами в магнитном поле. Замкнутые линии тока поддерживаются течением ионов поперек, а электронов — вдоль магнитного поля. Таким образом, добавление одного слагаемого Холла в МГД-модель частично позволит электронам и ионам течь отдельно, в то время как плазма будет оставаться квазинейтральной. Данная аппроксимация расширяет МГД-модель новыми вариантами плазменных колебаний.

Физика пинчей чрезвычайно разнообразна, в ней переплетаются нелинейные волновые процессы, движение плазмы подвержено всевозможным тепловым и гидродинамическим неустойчивостям. Состояние плазмы в пинчах существенно неоднородно, масштабы плазменных структур различаются в десятки и сотни раз. В целом эти проблемы столь сложны, что могут быть всесторонне исследованы только с использованием параллельных

или распределенных вычислений терафлопного уровня производительности. Программные коды, моделирующие поведение импульсной плазмы, пока не развиты в такой степени, чтобы давать надежные прогнозы разнообразных экспериментов, и создание универсальных “прогнозирующих” кодов — это основная проблема в данной области вычислительной физики.

**Цели диссертационной работы:** разработка численных методов и алгоритмов решения уравнений МГД с учетом обобщенного закона Ома, их реализация в рамках программного комплекса радиационной МГД (РМГД) и решение методом вычислительного эксперимента актуальных задач импульсной плазменной энергетики, а именно моделирование работы ППТ, образованного электровзрывом проволоочки во внешнем магнитном поле, и сжатия многопроволочной сборки с профилированными электродами собственным магнитным полем. Для достижения поставленных целей потребовалось решить следующие основные задачи:

- разработать и исследовать семейство проекционно-сеточных схем повышенного порядка точности для решения начально-краевой задачи для уравнений параболического типа на трехмерных сетках нерегулярной структуры с элементами различного типа;
- разработать алгоритм расчета ЭМ поля на основе уравнений Максвелла и обобщенного закона Ома в МГД-модели высокоскоростных течений плазмы, проанализировать влияния эффектов, определяемых обобщенным законом Ома, в диапазоне параметров плазмы сильноточных Z-пинчей и других конструкций импульсной плазменной энергетики на основе проволочныхборок.
- реализовать предложенные численные схемы и алгоритмы в рамках программного комплекса РМГД;
- исследовать средствами созданного программного обеспечения работу ППТ, образованного электровзрывом проволоочки во внешнем магнитном поле, сжатие Z-пинча с профилированными электродами.

Основным методом исследования задач, поставленных в диссертационной работе, является вычислительный эксперимент.

**Научная новизна** работы заключается в построении нового семейства проекционно-сеточных схем повышенного порядка точности для решения начально-краевых задач для уравнений параболического типа на трехмерных неструктурированных сетках и разработке алгоритма расчета ЭМ поля на основе уравнений Максвелла и обобщенного закона Ома в МГД-модели высокоскоростных течений плазмы.

Для аппроксимации пространственных дифференциальных операторов на трехмерной сетке нерегулярной структуры с элементами различного типа использовался вариант метода Галеркина для конечных элементов с разрывными базисными функциями. Особенность построенных схем состоит в том, что для неизвестных функций вычисляются средние значения по трехмерной ячейке, а не значения в узлах или на гранях расчетной сетки, как это делается в распространенных конечно-элементных схемах.

Предложенный алгоритм расчета ЭМ поля на основе уравнений Максвелла и обобщенного закона Ома позволяет в рамках МГД-модели учесть относительное смещение ионов по сравнению с электронами в магнитном поле, в то время как плазма в целом остается квазинейтральной.

Развитые соискателем численные схемы и алгоритмы включены в созданный при его активном участии программный комплекс РМГД, предназначенный для параллельных вычислений сильноизлучающей импульсной плазмы в трехмерных областях сложной геометрической формы на сетках нерегулярной структуры, в том числе блочных, состоящих из элементов разного типа.

Средствами созданного программного обеспечения (ПО) исследованы новые задачи импульсной плазменной энергетики. Исследовано квазисферическое сжатие проволочныхборок. Моделирование показало, что специальный выбор формы электродов, конструкции сборки и распределения массы вдоль проволочек позволяют получить компактный яркий источник рентгеновского излучения в центре сборки. Показано влияние эффекта Холла на формирование пинча на основе многопроволочной сборки. Определены параметры плазмы ППТ на основе электровзрыва металлической проволочки и исследованы режимы его работы.

**Практическая значимость** диссертационной работы заключается в реализации предложенных автором численных схем и алгоритмов в рамках программного комплекса MARPLE, созданного и развиваемого при активном участии автора, и использовании созданного ПО для прогнозирования и анализа результатов экспериментов в области физики излучающей импульсной плазмы, в частности, проводимых на сильноточных генераторах АНГАРА-5-1 и С-300.

**Положения, выносимые на защиту:**

- проекционные схемы повышенного порядка точности для решения начально-краевой задачи для уравнений параболического типа на трехмерных сетках нерегулярной структуры с элементами различного типа;
- алгоритмы расчета ЭМ поля на основе уравнений Максвелла и обобщенного закона Ома в МГД-модели высокоскоростных течений плазмы;
- реализация предложенных численных схем и алгоритмов в рамках программного комплекса MARPLE;
- результаты моделирования ППТ и сжатия проволочных сборок.

**Достоверность результатов** гарантируется строгостью используемого математического аппарата и подтверждается сравнением результатов численного моделирования с известными экспериментальными данными, а также данными вычислительных экспериментов, выполненных известными численными методами.

**Апробация результатов.** Основные результаты были представлены на следующих конференциях и семинарах:

1. XXXV–XXXIX Международная (Звенигородская) конференция по физике плазмы и УТС, г. Звенигород, Россия, 2008–2012.
2. XXIII–XXV Международная конференция “Уравнения состояния вещества”, п. Эльбрус, Кабардино-Балкария, Россия, 2008–2010.
3. 15–16 Международный симпозиум по сильноточной электронике, г. Томск, Россия, 2008, 2010.



4. 6th, 8th–10th International Seminar “Mathematical Models & Modeling in Laser-Plasma Processes”, Montenegro, 2009–2012.
5. 5-я Международная конференция “Параллельные вычислительные технологии”, г. Москва, Россия, 28 марта – 1 апреля 2011 г.
6. 8th International conference on Dense Z-pinch (DZP-2011), Biarritz, France, 4–9 June 2011.
7. International Conference “Parallel Computing - ParCo 2011”, Ghent, Belgium, 30 August – 2 September 2011.
8. 7th Int. PhD & DLA Symposium, Pécs, Hungary, 24–25 October 2011.
9. 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012), Vienna, Austria, 10–14 Sept. 2012.
10. 4th Euro-Asian Pulsed Power Conference, 19th International Conference on High-Power Particle Beams (EAPPC-2012 / BEAMS-2012), Karlsruhe, Germany, 30 September – 4 October, 2012.
11. Семинар отдела №13 ИПМ им. М. В. Келдыша РАН; 26 июня 2012.
12. Семинар отделения физики токонесущей плазмы ТРИНИТИ; 19 апреля 2012.

**Личный вклад автора.** Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит автору, заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

**Публикации.** По результатам диссертационной работы опубликовано девять статей, список которых приведен в конце автореферата, из них две — в рецензируемых научных журналах.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, общих выводов и списка литературы. Работа изложена на xxx страницах, содержит uu иллюстраций и z таблиц. Список литературы включает pp наименований.

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель и ставятся задачи, раскрывается научная новизна и практическая значимость работы, приводится развернутое описание содержания работы.

Математическое моделирование сильноизлучающей импульсной плазмы в сильноточных установках основано на одножидкостной двухтемпературной МГД-модели, включающей теплопроводность, электрон-ионную релаксацию, перенос лучистой энергии на основе многогруппового по спектру диффузионного приближения. Основная система МГД уравнений дополнена обобщенным законом Ома, описывающим эффекты смещения электронов относительно ионов при сохранении квазинейтральности плазмы в целом в соответствии с работами [Боброва Н. А., Сасоров П. В. Об уравнениях электронной гидродинамики в пинчах малой плотности. Физика плазмы, т. 16, 1990] и [Bobrova N. A., Lazzaro E., Sasorov P. V. Magnetohydrodynamic Two-Temperature Equations For Multicomponent Plasma. Physics of Plasmas, v. 12, 2005]. Закон Ома записывается следующим образом:

$$\vec{E} = -\frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} - \frac{\nabla P_e}{en_e} + \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{en_e c} + \frac{\vec{R}_{ei}}{en_e}, \quad (1)$$

$$\frac{\vec{R}_{ei}}{en_e} = \frac{\vec{j}_{\parallel}}{\sigma_{\parallel}} + \frac{\vec{j}_{\perp}}{\sigma_{\perp}} + \sigma_{\Lambda} \vec{B} \times \vec{j}. \quad (2)$$

В уравнении (1) пренебрегают эффектами электронной вязкости, а в уравнении (2) — термосилой, т.е. слагаемыми, вызванными  $\nabla T_e$ .

Эффект Холла может иметь первостепенную важность:

- для динамики плазмы вблизи испаряемых импульсом тока проволок в многопроволочной сборке,
- на периферии пинча (“увлеченные массы”, граница плазма-вакуум),
- для динамики плазмы вблизи поверхности электродов в передающих линиях с магнитной изоляцией,
- для динамики плазмы в ППТ.

Эффект термо-эдс сравнительно с эффектом Холла имеет порядок отношения  $\beta = 8\pi P_e/B^2$ , т.е. в случае  $\beta \sim 1$  этот эффект сильный и сравним с эффектом Холла. Для плазменной струи с проволочки в много-проволочной сборке обычно  $\beta \ll 1$ .

Для численного решения системы уравнений РМГД с обобщенным законом Ома применяется схема суммарной аппроксимации. Принятый порядок решения уравнений:

1. идеальная МГД,
2. диффузия магнитного поля,
3. электронная, ионная теплопроводность, электрон-ионная релаксация,
4. джоулев нагрев и лучистый перенос энергии.

Кроме требования суммарной аппроксимации к схеме решения уравнений РМГД предъявляются требования консервативности и устойчивости.

Аддитивная схема РМГД реализована в программном комплексе MARPLE, предназначенном для параллельных вычислений сильноизлучающей импульсной плазмы в трехмерных областях сложной геометрической формы на сетках нерегулярной структуры, в том числе блочных, состоящих из элементов разного типа.

Программный комплекс MARPLE создавался коллективом авторов в ИММ РАН – ИПМ РАН. Начиная с этапа согласования принципов коллективной разработки кода автор принимал активное участие в создании программного комплекса: проектировании, реализации, тестировании и использовании созданного ПО для решения задач из предметной области.

Геометрическая подсистема программного комплекса MARPLE создавалась для развитой поддержкой трехмерных неструктурированных расчетных сеток: разработанные структуры данных позволяют эффективно хранить и работать со смешанными сетками из правильно примыкающих друг к другу ячеек (поддерживаются шестигранники, треугольные призмы, пирамиды с треугольным и четырехугольным основаниями).

Для решения задач на многопроцессорной технике используется геометрический параллелизм, суть которого заключается в разбиении исходной расчетной сетки на множество подсеток, каждая из которых обрабаты-

вается на отдельном вычислительном ядре. Для замыкания шаблонов аппроксимации пространственных операторов в приграничных элементах подсеток, каждая содержит фиктивные элементы, являющиеся образами реальных элементов с топологически соседних подсеток. Обновление расчетных данных в фиктивных ячейках осуществляется посредством межпроцессорных обменов.

Структуры данных MARPLE позволяют учесть симметрии в расчетной области путем задания специальных периодических граничных условий. Реализация этих условий основана на той же идее, что и распределение по параллельным процессам: построением фиктивных ячеек около границы.

Значения искомых функций в MARPLE хранятся в виде средних значений величин по трехмерной ячейке. Такой выбор сеточных функций обусловлен необходимостью согласовать аппроксимацию диссипативных членов с TVD и ENO/WENO схемами, применяемыми для решения уравнений ИМГД, и по возможности избежать переинтерполяции сеточных величин во время вычислений.

Перечисленные особенности — смешанные расчетные сетки, геометрический параллелизм и периодические граничные условия, использование средних по ячейкам значений величин — обуславливают необходимость построения и реализации новых разностных схем повышенного порядка точности для решения уравнений диссипативного блока.

**Первая глава** посвящена построению методом Галеркина с разрывными базисными функциями семейства проекционно-сеточных схем для смешанной начально-краевой задачи для уравнений параболического типа.

Рассмотрено модельное квазилинейное уравнение параболического типа

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\kappa \cdot \operatorname{grad} u) + f \cdot u, \quad (3)$$

где  $u = u(\vec{r}, t)$  — искомая функция,  $\kappa = \kappa(\vec{r}, t)$  — скалярный или тензорный коэффициент диффузии,  $c = c(\vec{r})$ ,  $f = f(\vec{r}, t)$ .

Решение уравнения (3) необходимо искать в области  $\Omega \times [0, T]$ , где  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma(\Omega)$ , при начальных и граничных условиях  $u(\vec{r}, t = 0) = u_0(\vec{r})$  и  $u(\Gamma) = F(u)$  соответственно.

Дискретизация расчетной области задается в виде множества правильно примыкающих многогранников и обозначается  $\Omega_h = \{\omega_i\}$ . Шагом сетки  $\Omega_h$  называется максимальный линейный размер ее ячеек  $h = \max_{\omega_i \in \Omega_h} (h_i)$ , где  $h_i$  — линейный размер ячейки  $\omega_i$ . Рассматриваются локально квазиравномерные сетки, для которых существует не зависящая от  $h$  постоянная  $q > 0$ , такая, что  $\forall i \Rightarrow q \cdot h_i \leq \min_{k \in \delta_i} (h_k)$ , где  $\delta_i$  — множество соседних с  $\omega_i$  ячеек (имеющих с ней хотя бы один общий узел).

Для построения проекционной схемы вводится вспомогательная функция  $\vec{v} = \text{grad}u$  и уравнение (3) записывается в виде системы

$$\begin{cases} \vec{v} = \text{grad}u \\ c \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(\kappa \cdot \vec{v}) + f \cdot u \end{cases} \quad (4)$$

Для интерполяции функций  $\vec{v}$  и  $u$  вводятся два конечномерных базиса  $\{\varphi_i, 0 < i \leq N\}$  и  $\{\psi_i, 0 < i \leq M\}$ :  $u_h = \sum_i u_i \varphi_i$ ,  $\vec{v}_h = \sum_i \vec{v}_i \psi_i$ . Эти же функции можно использовать в качестве проверочных при проецировании уравнений (4) на область  $\Omega_h$ .

В качестве базиса  $\{\psi_i\}$  для искомой функции  $u$  фиксируется система кусочно-постоянных в ячейках  $\omega_i$  функций. Тогда неизвестный коэффициент  $u_i$  — среднее значение  $u_h$  в ячейке  $\omega_i$ .

Выбор базисных функций  $\{\varphi_i\}$  определяет окончательный вид и свойства схемы: сеточный шаблон, порядок аппроксимации, свойства матрицы сеточного оператора и др. В работе построены два варианта данной схемы.

**Вариант 1:** в качестве базисных функций  $\{\varphi_i\}$  используются узловые функции формы для соответствующих многогранников [Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике — М.: Мир, 1975]. Функции  $\varphi_i$  отличны от 0 только в ячейках, содержащих узел  $i$ , равны 1 в узле  $i$  и 0 во всех остальных узлах. В качестве проверочных функций используются эти же функции формы. Из полученной системы сеточных уравнений исключаем  $\vec{v}_i$  и получаем двухслойную разностную схему для  $u_i$ :  $\mathbf{V}u_t = \mathbf{A}u$ , где  $\mathbf{A} \leq 0$  и  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ , а  $\mathbf{V}$  — диагональная матрица,  $V_{ii} > 0$ . Методом дифференциального приближения показано, что на регулярных сетках сеточный оператор  $\mathbf{A}$  аппроксимирует оператор Лапласа с погрешностью  $O(h^2)$ .

Сеточный шаблон оператора  $\mathbf{A}$  для ячейки  $\omega_i$  включает все ячейки, имеющие с нею общий узел, и может состоять из нескольких десятков ячеек (например, на тетраэдральной сетке). Поэтому был рассмотрен также вариант схемы, приводящий к более компактному шаблону.

**Вариант 2:**  $\varphi_i$  отлична от 0 только в ячейках, содержащих грань  $i$ , равна 1 на грани  $i$  и 0 на всех остальных гранях;  $\vec{v}_i$  можно интерпретировать как  $\text{grad} u$  на грани  $i$ . В качестве проверочных функций используется система функций  $\{\varphi_i^*\}$ , отличающихся от  $\{\varphi_i\}$  нормировкой. Нормировочный множитель, зависящий от типа сеточных элементов, находим методом неопределенных коэффициентов из условия аппроксимации на регулярной сетке оператора Лапласа сеточным оператором  $\mathbf{A}$  с погрешностью  $O(h^2)$ . Построенная схема представляет собой аналог разностной схемы “крест” и может быть рекомендована для расчетов на регулярных сетках.

Аналогичным образом строятся проекционно-сеточные схемы для уравнений, содержащих операторы  $\text{grad}(\kappa \cdot \text{div} \vec{u})$  и  $\text{rot}(\kappa \cdot \text{rot} \vec{u})$ .

Аппроксимирующие свойства предложенного семейства проекционно-разностных схем исследовались в численных экспериментах на двух модельных задачах нелинейной теплопроводности, имеющих автомодельное аналитическое решение. Это решение сравнивалось в норме  $L_2$  с численным решением, полученным на последовательности сеток с уменьшающимся шагом ( $h, h/2, h/4$ ). Практические оценки порядка аппроксимации были получены для сеток, состоящих из кубических элементов, произвольных гексаэдров, полученных путем псевдослучайного смещения координат узлов кубической сетки не более чем на 50%, прямоугольных призм с треугольным основанием, пирамид с квадратным и треугольным основаниями. Исследовались также блочные сетки (объединение блока сетки треугольных призм и блока кубической сетки) и сетки, в которых призматические и гексаэдральные элементы перемешаны. Порядок аппроксимации, в предположении, что погрешность численного решения  $\varepsilon = c \cdot h^n$ , вычислялся по формуле:  $n = \log_2 \left( \frac{L_2^h / N^h}{L_2^{h/2} / N^{h/2}} \right)$ , где  $L_2$  — ошибка в норме  $L_2$ ,  $N$  — количество расчетных ячеек, верхний индекс — шаг сетки. Построенные схемы обеспечивают повышенный порядок аппроксимации на квазиравномерных

сетках ( $q \approx 1$ ), в том числе и для нелинейных уравнений. На пирамидах с четырехугольным основанием вариант 2 обеспечивает порядок аппроксимации  $O(h)$ , что согласуется с теоретическими оценками.

Во **второй главе** описывается построение алгоритма расчета ЭМ поля на основе уравнений Максвелла и обобщенного закона Ома; представлены результаты тестирования алгоритма на модельных задачах.

Алгоритм предназначен для решения уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \operatorname{rot} \vec{E}_m = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\vec{B}$  — индукция магнитного поля,  $\vec{j}$  — плотность тока,  $c$  — скорость света,  $\vec{w}$  — скорость плазмы,  $\vec{E}_m = \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{w} \times \vec{B}$  — напряженность электрического поля в движущейся вместе с плазмой системе координат (без учета слагаемых порядка  $w^2/c^2$ ).

В первом уравнении системы (5), в силу специфики решаемых задач, не учитывается ток смещения. Второе уравнение записано с учетом общей схемы суммарной аппроксимации (учет вмороженности магнитного поля в плазму производится при решении подсистемы ИМГД).

Замыкающий систему (5) обобщенный закон Ома рассматривается для изотропной и анизотропной проводимостей плазмы. Итоговая система решаемых уравнений, записанная для случая анизотропной проводимости:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \left( \left( \frac{c^2}{4\pi\sigma_{\perp}} - \frac{c \cdot m_i [\vec{B}]_{\times}}{4\pi\rho Z e} \right) \operatorname{rot} \vec{B} \right) \\ \quad + \operatorname{rot} \left( \frac{c^2}{4\pi} \frac{\sigma_{\perp} - \sigma_{\parallel}}{\sigma_{\perp}\sigma_{\parallel}} \frac{(\operatorname{rot} \vec{B}, \vec{B})}{B^2} \vec{B} \right) = \operatorname{rot} \left( \frac{c \cdot m_i}{\rho Z e} \operatorname{grad} P_e \right), \\ \vec{E}_m = \frac{c}{4\pi\sigma_{\perp}} \operatorname{rot} \vec{B} + \frac{m_i}{4\pi\rho Z e} \operatorname{rot} \vec{B} \times \vec{B} \\ \quad + \frac{c}{4\pi} \frac{\sigma_{\perp} - \sigma_{\parallel}}{\sigma_{\perp}\sigma_{\parallel}} \frac{(\operatorname{rot} \vec{B}, \vec{B})}{B^2} \cdot \vec{B} - \frac{m_i}{\rho Z e} \operatorname{grad} P_e, \end{array} \right. \quad (6)$$

где  $[\ ]_{\times}$  — оператор:  $\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}]_{\times} \cdot \vec{b}$ .

Условие соленоидальности магнитного поля обеспечивается исключением из насчитанной по формуле (6) индукции магнитного поля градиента магнитного потенциала. Магнитный потенциал  $\varphi$  находится по формуле:

$$\beta \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \operatorname{div} \vec{B}, \quad (7)$$

где  $\beta$  — численный регуляризатор.

Алгоритм решения системы (5) представляется в виде трех этапов:

1. Вычисление  $\vec{B}^{n+1}$ .
2. Калибровка  $\vec{B}^{n+1}$ .
3. Вычисление  $\vec{E}_m^{n+1}$ .

На первом этапе для решения (6) применяется неявная по времени проекционно-сеточная схема, построенная в первой главе. Полученные значения  $\vec{B}^{n+1}$  затем калибруются с целью обеспечения условия  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ . На последнем шаге по формуле (6) вычисляются значения электрического поля  $\vec{E}_m^{n+1}$  по скорректированным значениям  $\vec{B}^{n+1}$ .

Для проверки построенных алгоритмов решалась тестовая задача моделирования нелинейной волны проникновения магнитного поля в плазму (КМС-волна) [Кингсеп А. С. Введение в нелинейную физику плазмы — М.: Изд-во МФТИ, 1996]. Полученные в расчетах скорости КМС-волны хорошо согласуется с теорией.

**Третья глава** посвящена программной реализации разработанных автором численных методик в рамках программного комплекса MARPLE. Кратко излагаются основные идеи современных технологий разработки ПО. Описаны этапы разработки ПО, при этом основное внимание уделено проектированию и реализации применительно к программному комплексу MARPLE. Описаны применяемые инструментальные средства коллективной разработки ПО и сам процесс разработки.

Представлен результат этапа проектирования MARPLE — его архитектура в виде диаграммы основных классов. Рассказано об основных идеях, заложенных в архитектуру кода, и о реализации этих идей в виде иерархий взаимодействующих классов. Проектирование комплекса осуществлялось коллективом разработчиков при активном участии соискателя.



Описывается процесс организации численного эксперимента с помощью программного комплекса MARPLE. Рассматриваются средства подготовки данных, настройки солверов и способы анализа полученных результатов.

Подробно описаны разработанные автором классы и их место в общей архитектуре MARPLE, а именно: иерархии классов солверов диффузии магнитного поля и калибровки, аппроксимаций пространственных производных 1-го и 2-го порядков и ряда вспомогательных классов, а также подсистема вывода расчетных данных для последующего анализа.

**В четвертой главе** представлены результаты исследования методом вычислительного эксперимента актуальных задач импульсной плазменной энергетики, в частности прогнозирования и анализа результатов экспериментов в области физики излучающей импульсной плазмы, проводимых на сильноточных генераторах. Для компьютерного моделирования использовалось созданное автором ПО. Данные по уравнениям состояния, электрофизическим и оптическим свойствам вещества были предоставлены д.ф.-м.н., проф. В. Г. Новиковым, к.ф.-м.н. А. Д. Соломянной и И. Ю. Вичевым (расчет по программе ТЕРМОС, ИПМ РАН).

1. Моделирование ППТ на основе взорванной проволоки (НИЦ КИ).

В эксперименте ППТ образуется в коаксиальном канале электровзрывом одной вольфрамовой проволоки диаметром 4 мкм и длиной 2 см. Через проволоку пропускается синусоидальный импульс тока с амплитудой 64 кА и периодом 24 мкс. Внешнее аксиальное магнитное поле  $B_z = 30$  кГс распределяет вещество по всему сечению канала, образуя плазменную перемычку. Внутренний и внешний радиусы электродов равны, соответственно, 2 и 4 см. Схема эксперимента изображена на рис. 1. Целью моделирования является определение времени образования перемычки, определение параметров плазмы в ней, в том числе степени однородности плазменного кольца, а также режимов работы ППТ с такими параметрами.

Задача моделирования ППТ рассматривалась в двух постановках. На первом этапе моделировалось заполнение сечения канала веществом проволоки. На втором анализировалось движение плазменного кольца вдоль

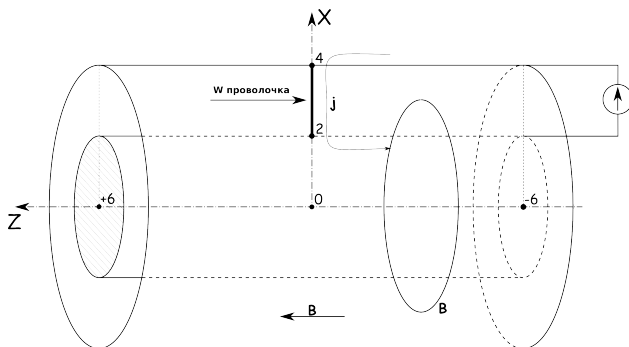


Рис. 1: Схема эксперимента по исследованию ППТ на основе взорванной проволочки.

канала под действием внешнего и собственного магнитных полей. В этих процессах существенную роль играет эффект Холла.

Результаты моделирования находятся в хорошем соответствии с теоретическими оценками и экспериментальными данными. На рис. 2 приведены распределения плотности в промежутке ППТ в последовательные моменты времени. Равномерное заполнение промежутка плазмой занимает примерно 2 мкс и результирующая плотность составляет порядка  $10^{-7}$  г/см<sup>3</sup>.

Второй этап моделирования выполнялся в расчетной области, представляющей собой сектор  $30^\circ$ , вырезанный из цилиндрического кольца с периодическими граничными условиями при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/6$ . В качестве начального состояния задавалось состояние плазмы, определенное в результате первого этапа моделирования.

Разрыв тока происходит в момент времени около 80 нс от начала второй стадии (2.08 мкс общего времени моделирования от начала токового импульса). На рис. 3 показано распределение плотности плазмы в момент размыкания тока и линии электрического тока, искривление которых подтверждает существенное влияние эффекта Холла на работу ППТ.

2. Моделирование квазисферического сжатия током плазменных лайнеров, образованных многопроволочными сборками на установке АНГАРА-5-1 с током разряда до 3.5 МА и временем нарастания 100 нс.

На рис. 4 приведена схема квазисферической проволочной сборки с профилированными электродами. Сборка состоит из 40 вольфрамовых проволочек толщиной 7.5 мкм, перераспределение массы вдоль проволочки достигается напылением слоя вольфрама вблизи электродов.

Цель моделирования — изучение влияния на процесс сжатия геометрии сборки и начального распределения массы. В численных экспериментах сравнивалось сжатие сборок из однородных проволочек и с дополнительным напылением, а также с плоскими и с коническими электродами. Определялось распределение плотности и температуры плазмы в момент максимального сжатия пинча и мощность излучения.

Расчеты выполнялись в цилиндрическом секторе  $45^\circ$  с периодически граничными условиями при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/4$ . Сектор соответствует  $1/8$  части разрядной камеры, на которую приходится 5 проволочек сборки. Образование плазмы из вещества проволочной сборки учитывается в модели затянутого плазмообразования. На рис. 5 приведены результаты моделирования для сборок с дополнительным напылением массы. Видны значительно более компактный центральный пинч и двукратное увеличение мощности излучения в конфигурации с коническими электродами.

Квазисферическое сжатие плазмы достигается за счет перераспределения начальной массы проволочек и использования электродов, имеющих форму усеченного конуса. В этом случае достигается существенное увеличение плотности энергии сжатого пинча. Увлеченные массы оказываются заметно меньше по сравнению с цилиндрическими и однородными квазисферическими лайнерами. Эти результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными, полученными на установке АНГАРА-5-1.

Было исследовано влияние эффекта Холла на симметрию сжатия пинча. Показано, что катодный зиппер-эффект, наблюдающийся в экспериментах, может быть следствием ускоренного проникновения магнитного поля в плазму на начальных стадиях испарения проволочек (рис. 4).

**В заключении** приведены основные результаты работы, сделаны необходимые комментарии и выводы, обозначены перспективы дальнейших исследований по теме настоящей диссертации.

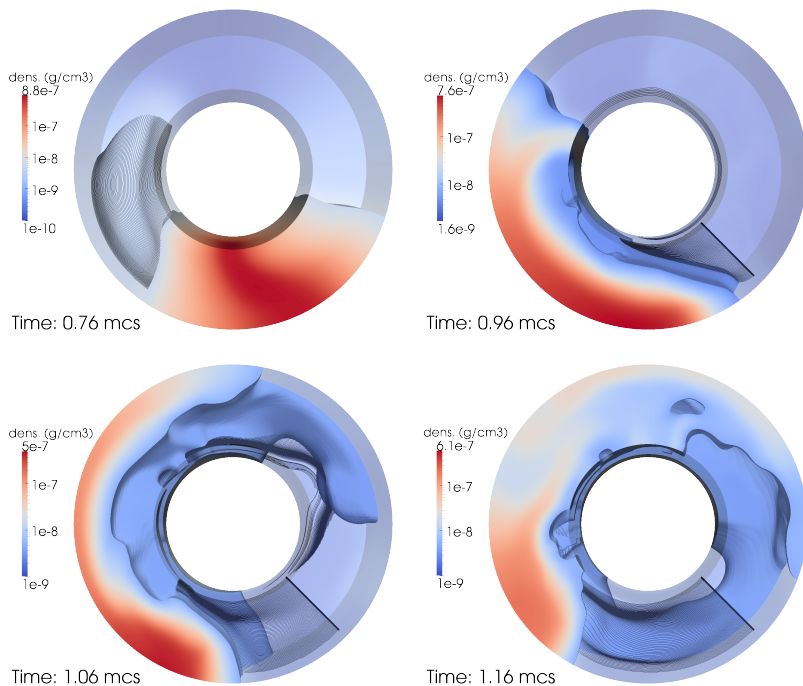


Рис. 2: Распределение плазмы в промежутке ППТ.

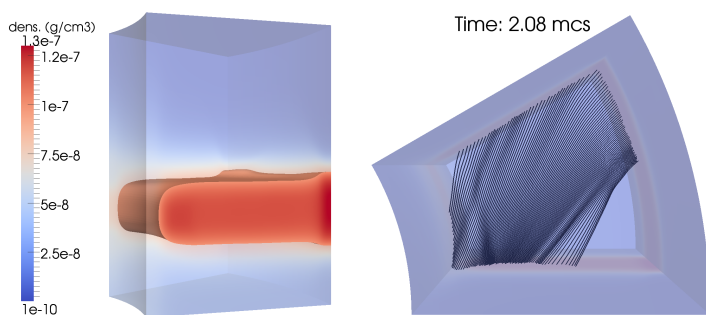


Рис. 3: Слева: распределение плотности плазмы в ППТ в момент прерывания тока. Справа: линии электрического тока в момент срабатывания ППТ.

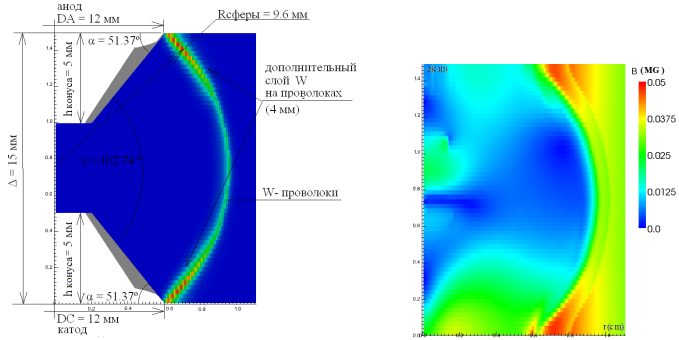


Рис. 4: Схема эксперимента по исследованию сжатия квазисферических проволоочных сборок с профилированными электродами (слева) и распределение индукции магнитного поля к 30 нс от начала импульса тока.

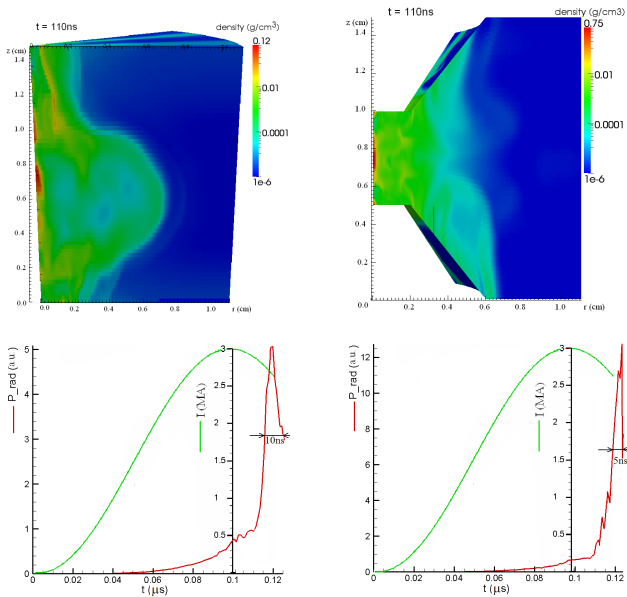


Рис. 5: Распределение плотности плазмы в момент максимального сжатия и мощность излучения для профилированных по массе сборок с плоскими (слева) и коническими (справа) электродами.

## Основные результаты работы

- Построено и исследовано семейство проекционно-сеточных схем повышенного порядка точности для решения начально-краевой задачи для уравнений параболического типа на трехмерных сетках нерегулярной структуры с элементами различного типа;
- разработан и реализован алгоритм расчета электромагнитного поля на основе уравнений Максвелла и обобщенного закона Ома в МГД-модели высокоскоростных течений плазмы в диапазоне параметров плазмы сильнооточных Z-пинчей и других конструкций импульсной плазменной энергетики на основе проволочных сборок;
- разработанные численные схемы и алгоритмы реализованы в рамках программного комплекса MARPLE;
- средствами созданного ПО методом вычислительного эксперимента исследованы актуальные задачи физики плазмы. Выполнено моделирование работы ППТ на основе взорванной металлической проволочки. Определены параметры плазмы прерывателя и время его срабатывания. Выполнено моделирование формирования Z-пинча в результате сжатия токовым импульсом проволочной сборки. Определены условия формирования компактного яркого источника излучения.

### Публикации в **рецензируемых научных журналах:**

- Багдасаров Г. А. и др. Современные методы разработки программ для 3D-моделирования задач плазмотоники (плазменной мультифизики). Вестник УГАТУ, т. 15, н. 4 (44), сс. 120–129, 2011.
- Багдасаров Г. А. и др. Пакет прикладных программ MARPLE для моделирования на высокопроизводительных ЭВМ импульсной магнитоускоренной плазмы. Мат. моделирование, т. 24, н. 1, сс. 55–87, 2012.

### **электронных журналах:**

- Багдасаров Г. А. и др. Визуализации данных вычислительных экспериментов в области 3D моделирования излучающей плазмы, выполняемых на многопроцессорных вычислительных системах с помощью пакета MARPLE. Научная визуализация, т. 2, н. 1, 2010.

**сборниках:**

- Bagdasarov G. A. et al. Experimental and numerical study of distribution of plasmas in the discharge channel upon aluminum wire explosion. Physics of Extreme States of Matter, pp. 213–215, Chernogolovka, Russia, 2010.
- Bagdasarov G. et al. Towards an Application of HPC Systems to 3D Simulations of HEDP in Z-Pinches. Applications, Tools and Techniques on the Road to Exascale Computing, v. 22, pp. 235–242, 2012.
- Bagdasarov G. A. et al. Object-oriented code MARPLE: simulations of radiative HD/MHD effects at high-performance computer systems. CD-ROM Proceedings of the 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Vienna, Austria, 2012.

**препринтах:**

- Багдасаров Г. А. и др. Пакет прикладных программ MARPLE для моделирования на высокопроизводительных ЭВМ импульсной магнитоускоренной плазмы. Препринт н. 20 ИПМ РАН, 36 стр., 2011.
- Багдасаров Г. А., Дьяченко С. В., Ольховская О. Г. Измерение производительности и масштабируемости программного комплекса MARPLE. Препринт н. 37 ИПМ РАН, 22 стр., 2012.
- Дьяченко С. В., Багдасаров Г. А., Ольховская О. Г. Средства профилирования и анализа многопоточных приложений Oracle (Sun) Studio Performance Analyzer. Препринт н. 38 ИПМ РАН, 15 стр., 2012.
- Багдасаров Г. А. и др. Экспериментальные и численные исследования динамики плазмы в ППТ на основе взорванной проволоочки. Препринт ИПМ РАН, 16 стр., 2012.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по государственному контракту от 06.10.2011 г. № 07.514.12.4018 в рамках ФЦП “Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы”, гранта РФФИ 09-02-01532-а и программы фундаментальных исследований № 3 (3.6) ОМН РАН. Расчеты выполнялись на суперкомпьютерах МВС-100К (МСЦ РАН), СКИФ “Чебышев” и “Ломоносов” (НИВЦ МГУ) и К-100 (ИПМ РАН).