

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

На правах рукописи

Блонский Артём Вадимович

Математическое моделирование течений в системах трещин

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

по специальности 05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
Савенков Евгений Борисович

Москва — 2018

Оглавление

Введение	4
1 Модели течения в системах трещин	9
1.1 Обзор существующих подходов	9
1.1.1 Модели микроуровня	9
1.1.2 Модели мезоуровня	10
1.1.3 Модели макроуровня	11
1.2 Геометрическая модель среды	16
1.3 Модель однофазного течения в трещинах	17
1.4 Модель двухфазного течения в трещинах	19
1.4.1 Уравнения в переменных давления и насыщенности воды	22
1.4.2 Относительные фазовые проницаемости	24
1.4.3 Капиллярное давление и смачиваемость	25
1.5 Модель однофазного течения в трещинах с кавернами	26
1.5.1 Условия согласования и граничные условия	27
1.6 Модель двухфазного течения в трещинах с кавернами	29
2 Вычислительные алгоритмы	32
2.1 Построение расчетной сетки	32
2.2 Пространства базисных и пробных функций	34
2.3 Алгоритмы расчета однофазного течения в трещинах	38
2.3.1 Аппроксимации по времени	38
2.3.2 Аппроксимации методом Петрова-Галеркина	39
2.4 Алгоритмы расчета двухфазного течения в трещинах	47
2.4.1 Аппроксимация по времени	47
2.4.2 Аппроксимации методом Петрова-Галеркина	48
2.4.3 Расчет функций относительных фазовых проницаемостей	50

2.4.4	Расчет градиента функции капиллярного давления	51
2.4.5	Решение уравнения давления	52
2.4.6	Решение уравнения насыщенности	52
2.4.7	Алгоритмы сборки матриц линеаризованных систем уравнений	53
2.5	Алгоритмы расчета двухфазного течения в трещинах с кавернами	60
2.5.1	Конечномерные аппроксимации	60
3	Комплекс программ	66
4	Результаты моделирования	70
4.1	Моделирование течений в трещинах	70
4.1.1	Влияние смачиваемости на течение в трещине с переменным раскрытием	71
4.1.2	Влияние отношения вязкостей нефти и воды на коэффициент извлечения нефти	74
4.1.3	Влияние перепада давления на коэффициент извлечения нефти	75
4.1.4	Изменение уровня ВНК под действием капиллярных сил в трещине с переменным раскрытием	76
4.1.5	Влияние смачиваемости на характер вытеснения нефти водой в трещине с переменным раскрытием	81
4.2	Моделирование течений в трещинах с кавернами	83
4.2.1	Влияние диаметра канала на течение	83
4.2.2	Влияние капиллярных сил в каверне на течение	84
4.2.3	Влияние течения в каверне на переток между трещинами	86
4.2.4	Влияние каверн на динамику течения в системе трещин	89
	Заключение	94

Введение

В настоящее время математическое моделирование является одним из основных инструментов анализа процесса разработки нефтегазовых месторождений. Сложность строения коллекторов нефти и газа и многообразие физических эффектов, сопровождающих процесс вытеснения, приводят к необходимости рассмотрения различных математических моделей, описывающих течение.

Значительное количество углеводородов в мире добывается из трещиноватых и трещиновато-поровых коллекторов. Характерной особенностью трещиноватых коллекторов является существенная анизотропия проницаемости, которая обусловлена наличием системы гидродинамически связанных или несвязанных трещин, расположенных в проводящей или непроводящей вмещающей среде — матрице.

Геологическая трещиноватость характеризуется существенной разномасштабностью. С точки зрения задач анализа процессов, сопровождающих разработку нефтегазовых месторождений, можно выделить три типа трещин: макротрещины, мезотрещины, микротрещины. В свою очередь трещины могут быть проводимыми и непроводимыми. Проводимые трещины вносят дополнительный вклад в течение жидкости, а непроводимые представляют собой барьеры для течения и создают дополнительное гидродинамическое сопротивление.

Трещиноватость на различных масштабах оказывает различное влияние на течение в коллекторе. В случае чисто трещиноватых коллекторов макротрещины образуют основные каналы течения, а мезотрещины и микротрещины, связанные с макротрещинами, являются источником притока жидкости.

В случае трещиновато-поровых коллекторов наиболее распространена ситуация, когда трещиноватая система представляет собой сеть высокопроводимых каналов, а пористая матрица содержит основные запасы углеводородов. При этом трещины образуют путь течения жидкости, а пористая матрица является её источником. Также возможна ситуация, когда трещины и матрица коллектора имеют сравнимую проницаемость — в этом случае трещины вносят дополнительный вклад в течение и увеличивают общую проницаемость системы.

Процесс течения жидкости как в трещинах, так и в матрице, может быть описан по-разному в зависимости от масштаба рассматриваемой сре-

ды. Обычно выделяют три различных масштаба среды: микромасштаб (керна до 0.1 м), мезомасштаб (порядка 1 м), макромасштаб (ячейка гидродинамической сетки порядка 50 м), см. рисунок 1.

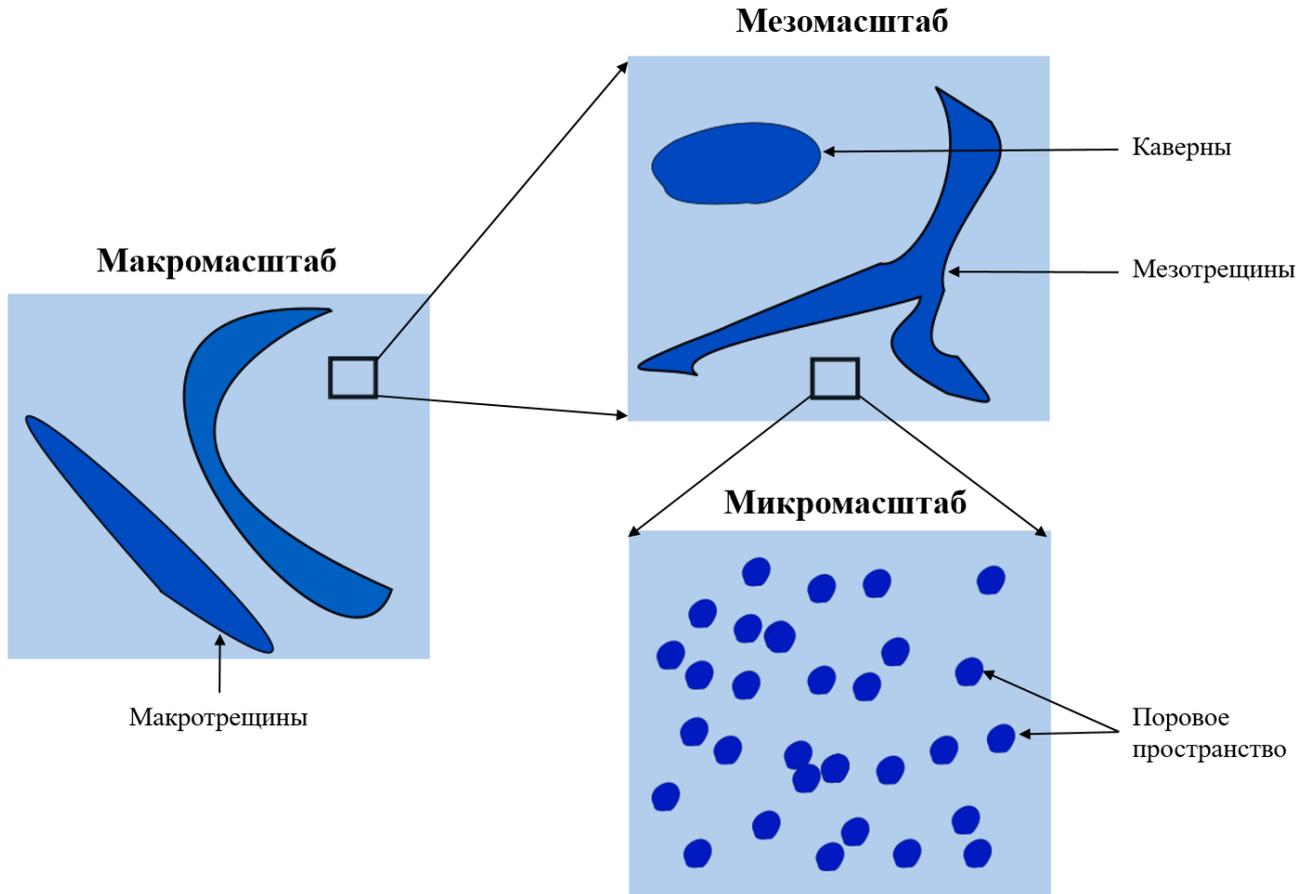


Рис. 1. Различные пространственные масштабы среды.

Каждый из указанных масштабов имеет свои особенности, которые необходимо учитывать при исследовании свойств породы и течений, и соответствующие методы моделирования течений. Модели течений макромасштаба являются упрощенными, но при этом могут быть применены для расчета моделей месторождений и построения прогнозов добычи углеводородов. Модели течений микроуровня учитывают наибольшее количество физико-химических эффектов, однако их использование даже на мезомасштабе не представляется возможным из-за высокой вычислительной сложности. Важной задачей при моделировании течений на масштабе месторождения является перенос свойств с микромасштаба на мезо- и макромасштабы и подготовка данных для моделей макроуровня. Модели мезомасштаба в основном играют роль средства для определения параметров моделей макромасштаба. И если в случае чисто поровых коллекторов можно определить размеры представительного объема среды и, проведя на нём экспериментальные исследования, ремасштабировать результаты на больший масштаб, то в случае трещиноватых пород представительный объем может в принципе отсутствовать [1].

В настоящее время большая часть добываемых углеводородов относит-

ся к категории трудноизвлекаемых и содержится в трещиноватых коллекторах, поэтому разработка математической модели, соответствующих численных методов и комплексов программ для моделирования течений жидкости в системах трещин пород коллекторов является актуальной задачей.

Среди моделей применяемых для описания течений в трещиноватых коллекторах модель дискретных систем трещин (Discrete Fracture Network, DFN) является одной из наиболее корректных, поскольку позволяет явно учитывать геометрию трещин и поверхностные эффекты на границе раздела подвижных и твердых фаз, такие как смачиваемость породы и капиллярные эффекты. Модель DFN была взята за основу в данной работе.

Целями и задачами работы являются разработка математических моделей, вычислительных алгоритмов и комплексов программ для анализа течения жидкостей в дискретных системах трещин.

Научной новизной данной работы являются физико-математические модели однофазных и двухфазных течений в системе трещин и каверн, алгоритмы расчета уравнений модели, а также программный комплекс и результаты моделирования, которые показывают, что структура проводящих каналов в трещинах, капиллярные силы, смачиваемость породы и наличие каверн на пересечениях трещин могут оказывать существенное влияние на характер и показатели вытеснения в трещиноватых коллекторах.

Теоретическая ценность и практическая значимость диссертационной работы состоит в разработанных физико-математических моделях течения однофазной и двухфазной жидкости с учётом капиллярных сил и смачиваемости породы, разработанных вычислительных алгоритмах и программном комплексе, который позволяет моделировать течения в системах трещин с кавернами. Практическая ценность работы обусловлена тем, что результаты работы, в том числе и разработанное программное обеспечение, могут быть применены для анализа течений в трещиноватых коллекторах.

Методология и методы исследования, использованные в данной работе, включают в себя методы математического анализа, теории дифференциальных уравнений в частных производных, численные методы решения дифференциальных уравнений, а также современные практики программирования.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Разработаны математические модели однофазных и двухфазных течений в системах трещин с кавернами, которые учитывают течение в трещинах, кавернах, переток между ними, сжимаемость жидкости, капиллярные и гравитационные силы, а также смачиваемость породы.
2. Разработаны вычислительные алгоритмы для расчета течений по системам трещин с кавернами.
3. Создан программный комплекс для расчета течений в системах трещин с кавернами, который может быть применен для анализа течений в трещиноватых коллекторах.

4. Получены результаты расчетов, которые показывают корректность разработанных математических моделей, вычислительных алгоритмов и программной реализации, а также влияние капиллярных сил, переменного раскрытия трещин, наличия каверн на пересечениях трещин на процесс течения жидкости.

Основными результатами выполненной работы являются:

1. Физико-математические модели течения однофазной и двухфазной жидкости в дискретных системах трещин с учетом перетоков флюида вдоль каверн, отнесенных к их пересечениям; сжимаемости флюидов, капиллярных сил и смачиваемости породы.
2. Вычислительные алгоритмы расчета динамики однофазных и двухфазных течений в рамках разработанных математических моделей с использованием метода конечных элементов/конечных объемов на неструктурированных сетках.
3. Программный комплекс для моделирования течений в дискретных системах трещин с кавернами с учётом сжимаемости жидкости, гравитационных и капиллярных сил с использованием разработанных математических моделей и вычислительных алгоритмов.
4. Результаты расчетов, демонстрирующие корректность предложенных моделей и вычислительных алгоритмов, значимость учитываемых в разработанной модели эффектов и применимость разработанного программного обеспечения для решения прикладных задач.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечены строгостью используемого математического аппарата и подтверждаются сравнением результатов вычислительных экспериментов с известными в литературе аналитическими решениями.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы апробированы на 60-й научной конференции Московского физико-технического института (университета) (г. Долгопрудный, 2017); Российской нефтегазовой технической конференции SPE (г. Москва 2017); Научной конференции молодых ученых и аспирантов Института физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН (г. Москва 2018); семинаре «Вычислительные методы и математическое моделирование» им. Ю. П. Попова, Института прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук, семинаре «Математическое моделирование» Института прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 8 печатных работах ([2]-[9]), в том числе в 7 печатных работах в изданиях из перечня ВАК.

Личный вклад соискателя. Соискатель самостоятельно разработал физико-математические модели течения в системах трещин с кавернами, вычислительные алгоритмы, а также программный комплекс для моделирова-

ния течений. Исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены соискателем в процессе научной деятельности.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа представлена на 99 страницах, содержит 43 иллюстрации и 3 таблицы. Список литературы содержит 50 наименований.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение №14.581.21.0027 от 03.10.2017 г., уникальный идентификатор RFMEFI58117X0027).

Глава 1

Модели течения в системах трещин

В данной главе описаны существующие подходы к моделированию течения жидкости в трещиноватых коллекторах на различных пространственных масштабах. Приведены разработанные трехмерные модели однофазных и двухфазных течений как в чисто трещиноватой среде, так и в системе трещин с кавернами, образованных на линиях пересечения трещин. Описанные модели учитывают произвольное расположение трещин в пространстве, пересечения трещин, течение в трещинах, течение вдоль каверн, переток между трещинами и кавернами, сжимаемость жидкостей, гравитационные и капиллярные силы. Описанные в данной главе результаты диссертационной работы опубликованы в работах [2, 4].

1.1 Обзор существующих подходов

1.1.1 Модели микроуровня

Данный уровень детализации соответствует явному пространственному разрешению геометрии пустотного пространства породы. В качестве геометрической модели образца породы обычно используется его микротомограмма, позволяющая описать структуру поровых каналов и трещиноватости с микрометрическим и выше разрешением.

В этом случае для описания течения флюида используются не усредненные фильтрационные модели (основанные на законе Дарси), а уравнения классической гидродинамики (уравнения Навье-Стокса).

Распространёнными моделями на данном пространственном масштабе являются модели на основе решеточных уравнений Больцмана (Lattice Boltzman Method/LBM) [10], модели поровых сетей (pore-network models) [11], модели на основе уравнений гидродинамики, включая метода функционала плотности [12], метода сглаженных частиц (smoothed particle

hydrodynamics/SPH) или уравнений классической гидродинамики многофазных течений с учетом динамик межфазных границ [13] и т. д.

Все упомянутые подходы с той или иной степенью успешности можно применять для решения ряда частных задач моделирования течения флюида в поровом пространстве. Однако ни один из них не лишен недостатков как в части корректности математической модели и степени ее полноты, так и в части устойчивости вычислительных алгоритмов и возможности эффективной программной реализации.

Основное назначение моделей данного класса: определение методами вычислительного эксперимента параметров математических моделей мезоуровня, а также анализ степени влияния различных физико-химических механизмов, сопровождающих течение, на свойства макроскопического процесса течения.

1.1.2 Модели мезоуровня

Модель Дарси–Стокса

Модель Дарси–Стокса описывает трещиновато-кавернозно-поровую среду в виде объединения двух сред — поровой среды, в которой течение описывается стандартными уравнениями фильтрации (законами сохранения массы компонент, дополненных определяющими соотношениями в виде, например, закона Дарси), и трещин с кавернами, в которых течение описывается моделью Стокса [14].

На границе между средами задаются дополнительные условия согласования, которые имеют вид условий непрерывности потоков массы, импульса и энергии [14]. Среди данных условий особенно выделяется условие непрелипания жидкостей на границе, которое содержит в себе безразмерный коэффициент, характеризующий свойства породы на микроуровне, который определяется из результатов лабораторного эксперимента.

Модель Дарси–Стокса применяется на мезо- и макромасштабах. При этом для данной модели существуют методы ремасштабирования, которые позволяют в рамках модели перейти от мезо- к макроуровню [14].

Модель Стокса–Бринкмана

Данная модель, также как и модель Дарси–Стокса, предназначена для моделирования течений в трещиновато-кавернозно-поровой среде. Течение, как в поровой среде, так и в трещинах с кавернами, описывается так называемым уравнением Стокса–Бринкмана. Качественное отличие течений в указанных средах заключается в том, что в поровой среде вязкие силы преобладают над инерционными, а в трещиноватой среде напротив инерционные силы преобладают над вязкими. Данное отличие выражается в выборе различных коэффициентов в уравнении Стокса–Бринкмана [14, 15].

Стоит отметить, что рассматриваемая модель легко может быть сведена к модели Дарси–Стокса. Но в отличие от модели Дарси–Стокса, в данной модели нет необходимости в дополнительных условиях согласования, так как течение во всех типах сред описывается единой группой уравнений.

При этом в уравнении Дарси–Стокса, слагаемое, отвечающее за влияние трения слоев жидкости друг о друга содержит коэффициент «эффективной вязкости», который оказывает сильное влияние при моделировании течений в коллекторах с высоким значением пористости 0.5–0.8 [14]. Определение данного коэффициента в указанном типе коллекторов также представляет собой отдельную задачу.

Модель Стокса–Бринкмана, также как и модель Дарси–Стокса, может быть использована на мезо– и макромасштабах. Вопросы ремасштабирования данной модели рассмотрены в работе [14].

1.1.3 Модели макроуровня

Модель эффективной среды

В модели эффективной среды (в англоязычной литературе модель *single porosity*), происходит переход от рассмотрения двух различных по сути объектов — трещин и пористой матрицы к единой эффективной поровой среде, которую описывают осредненные параметры, учитывающие процессы течения как в матрице, так и в трещинах [16]. Течение в данной модели описывается стандартными уравнениями фильтрации [17], [18]. Модель эффективной среды предназначена для моделирования течений в трещиновато-поровых коллекторах на макромасштабе, но при этом данная модель может также быть использована при моделировании течения на образце керна, как показано в работе [19].

Сложность перехода к модели эффективной среды заключается в необходимости корректного определения ее макроскопических свойств (абсолютная проницаемость, относительные фазовые проницаемости (ОФП)). Поскольку исходная трещиновато-поровая среда является анизотропной из-за наличия трещин, для сохранения особенностей течения необходимо использовать тензорные абсолютные и ОФП.

Существует два типа подходов осреднения абсолютной проницаемости и ОФП трещиновато-поровой среды. В первом случае основное внимание уделяется методу вычисления эффективных параметров трещиноватой среды, в то время как свойства матрицы считаются известными.

- Тензор абсолютной проницаемости для трещиноватой среды может быть вычислен как аналитически [20], так и с помощью численного моделирования течения в дискретной системе трещин в рамках модели DFN (раздел 1.1.3) [21, 22]. Заметим, что подход численного модели-

рования является более корректным, с точки зрения учета связности трещин.

- В качестве относительных фазовых проницаемостей в трещинах обычно используются линейные приближения. Тензор ОФП в трещиноватой среде может быть вычислен с помощью численного моделирования течения в рамках модели DFN (раздел 1.1.3) [23].

Эффективное значение проницаемости для трещиновато-поровой среды вычисляется как сумма проницаемостей поровой среды и эффективного значения трещиноватой среды, взвешенных по их объёму [16]. Эффективные кривые ОФП вычисляются в виде взвешенных сумм кривых в матрице и трещиноватой среде, где в качестве весов выступают абсолютные проницаемости и объёмы рассматриваемых сред.

Во втором случае тензор абсолютной проницаемости и ОФП могут быть определены в результате численного моделирования совместного течения в матрице и трещинах [22, 23]. Численное моделирование совместного течения может быть выполнено либо в рамках модели DFM (раздел 1.1.3), либо в рамках модели DFN (раздел 1.1.3). Применение данного метода, с вычислительной точки зрения, осложняется необходимостью построения сложных неструктурированных трёхмерных сеток, а также большим количеством расчетных ячеек.

Основным недостатком модели эффективной среды является невозможность детального описания перетоков жидкости между трещинами и поровой матрицей. Область применения данной модели ограничена классом трещиновато-поровых коллекторов, в которых проницаемость трещин сопоставима с проницаемостью поровой матрицы.

Модель «Discrete fracture and matrix» (DFM)

В моделях данного класса геометрические свойства трещин (их форма и размер, положение и ориентация в пространстве, раскрытие и т. д.) задаются непосредственно. При этом трещины имеют конечное раскрытие и рассматриваются как трехмерные подобласти, наделенные соответствующими фильтрационно-емкостными свойствами. Течение как в трещинах, так и в матрице описывается трехмерными уравнениями фильтрации, при этом для определения проницаемости трещин используется приближение смазочного слоя [1, 24].

Данная модель позволяет детально описать течение как в матрицах, так и в системе трещин, а также корректно учитывать перетоки между ними. Модель DFM не имеет ограничений на геометрию, степень гидродинамической связности и пространственную плотность системы трещин.

Основным недостатком модели является ее вычислительная сложность: так как трещины рассматриваются как трехмерные объекты, то для аппрок-

симации всей системы (трещины и матрица) необходимо использовать расчетные сетки, разрешающие трещины по толщине. Вместе с тем, геометрия таких сеток должна быть согласована с геометрией системы трещин.

На практике трещины описываются с помощью трехмерных ячеек гибридных неструктурированных сеток, состоящие из тетраэдров, призм, пирамид и шестигранников. Применение столь сложных сеток, вместо стандартных тетраэдных обусловлено тем, что алгоритмы построения тетраэдных сеток плохо работают в узких областях (в рассматриваемом случае — трещинах). Тетраэдная сетка для трещины становится сильно искривленной и, обычно, не обладает хорошими геометрическими свойствами, что может приводить к задачам с плохо обусловленными матрицами. В работе [24] показано, что использование гибридных сеток также приводит к уменьшению числа ячеек в модели на 15–20%. Численное моделирование течений на таким образом построенной сетке осложняется отличием свойств ячеек на несколько порядков и необходимостью построения аппроксимаций дифференциальных уравнений модели для сеток произвольной структуры.

Модель двойной пористости

В модели двойной пористости трещиновато–поровый коллектор рассматривается в виде системы двух взаимопроникающих сред: чисто трещиноватой, которая представляется в виде эффективной пористой среды, и чисто пористой, соответствующей проводящей матрице. Перетоки между трещинами и матрицей описываются с помощью функции перетока, входящей в уравнения модели.

Ключевыми особенностями данной модели являются:

- разделение течения в матрице и трещинах;
- наличие перетока между матрицей и трещинами;
- требование к связности и плотности трещин.

Функции перетока, описывающие механизмы миграции флюида, содержат параметр — геометрический фактор (*shape factor*), который учитывает связность трещин и поровой матрицы и, по сути, контролирует величину потока флюидов между средами. Параметры эффективной трещиноватой среды могут быть вычислены способами описанными в разделе 1.1.3.

Наибольшую сложность, связанную с применением модели двойной пористости, представляет идентификация корректного значения геометрического фактора, для определения которого необходимо проведение гидродинамических исследований скважин и адаптация модели на историю разработки месторождения. Неправильная идентификация геометрического фактора и других параметров функции перетока может приводить к существенным ошибкам при моделировании [24].

Исходя из соотношения между проницаемостями трещин и матрицы, модель двойной пористости разделяется на две модели:

- *Модель двойной пористости/одинарной проницаемости*: в данной модели полагается, что скорость фильтрации по трещинам намного выше скорости фильтрации в матрице. И по этой причине течением флюида в пористой матрице можно пренебречь. Таким образом, течение флюида во всем резервуаре определяется проницаемостью трещин. Поровые блоки лишь поставляют жидкость в трещины.
- *Модель двойной пористости/двойной проницаемости*: в данной модели, в отличие от предыдущей, также учитывается течение в пористой матрице.

Модель двойной пористости может быть применена для решения задач моделирования течений в трещиновато–поровых коллекторах на макромасштабе.

Модель «Discrete fracture network» (DFN)

Модель DFN является, по сути, идеализацией реальной трещиноватой среды, в которой трещины предстают в виде двумерных объектов, например плоскостей. Данная модель может быть использована для описания как чисто трещиноватых, так и трещиновато–поровых коллекторов. В качестве модели течения в трещинах в данной концепции используется модель смазочного слоя [25], а в матрице — стандартные уравнения фильтрации.

Ключевыми особенностями моделей данного класса являются:

- прямой расчет многофазных течений по системе трещин и матрице коллектора;
- явный расчет перетоков между трещинами и пористой матрицей;
- отсутствие ограничений на геометрию, связность и плотность систем трещин;
- возможность учета капиллярных эффектов как феноменологически, путем задания кривых капиллярных давлений, так и на основе моделей, учитывающих угол смачиваемости флюида и породы (модели Юнга–Лапласа).

Основное ограничение, которое накладывает данная модель на геометрию трещин — характерная длина трещин намного больше величины характерного раскрытия.

В случае трещиновато–поровых коллекторов на практике для геометрического описания среды используется тетраэдная сетка. Тетраэдры описывают

пористую матрицу, а грани тетраэдров — трещины. В случае чисто трещиноватых коллекторов трещины описываются двумерной треугольной сеткой, согласованной на линиях пересечения трещин.

Для описания перетока двухфазной жидкости между трещинами через линии их пересечения в моделях типа DFN изначально были предложены две различные модели. Разделение данных моделей основано на анализе числа Пекле, которое описывает отношение конвективного переноса к диффузионному. Модель *complete-mixing* [26] описывает течение при очень низких значениях числа Пекле. В рамках данной модели флюиды смешиваются на пересечениях трещин и из пересечения трещин вытекают жидкости с одинаковыми долями фаз. Модель *streamline-routing* [26] описывает течение при очень высоких значениях числа Пекле. В рамках данной модели доля фазы флюида вдоль преобладающего направления течения постоянна, а в остальных направлениях течения происходит смешивание флюидов.

В случае трещиновато-поровой среды на границе матрица-трещина накладываются соответствующие условия согласования. Для двухфазных течений особенностью модели является условие непрерывности функции капиллярного давления на границе между средами [27].

Модель DFN может быть использована при моделировании течений на различных пространственных масштабах, с учетом различных по характерному размеру систем трещин (микро-, мезо- и макротрещин), однако эффективно работает только тогда, когда все трещины относятся к одному пространственному масштабу.

Данное ограничение связано с тем, что вычислительная ресурсоемкость используемых алгоритмов напрямую зависит от количества рассматриваемых трещин. Кроме того, от рассматриваемого пространственного масштаба зависит и используемая физико-математическая модель. Например, для макротрещин учитывается их переменное раскрытие и капиллярные эффекты внутри трещин, в то время как для мезотрещин и макротрещин обычно используется постоянное вдоль всей поверхности трещины раскрытие, а капиллярными силами пренебрегают. Модель DFN может быть применена при решении задачи определения эффективных абсолютных и относительных фазовых проницаемостей образца керна и для определения параметров макроскопических моделей течения на масштабе ячейки гидродинамической сетки.

Модель «Fracture-only»

Модель «Fracture-only» [28] представляет упрощенный вариант модели DFM. В рамках данного подхода трещины и течение в них описываются также как и в модели DFN, а матрица описывается некоторыми объемами среды, которые окружают трещины. Течение в матрице явно не разрешается, однако учитывается поток массы из матрицы в трещины. Для учета указан-

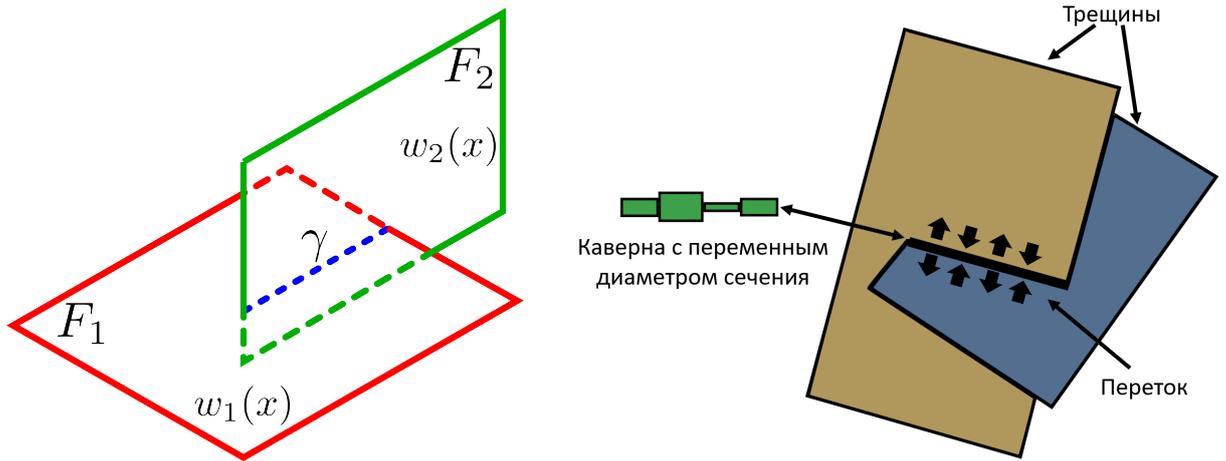


Рис. 1.1. Пример расчетной области. Слева: две трещины $\mathcal{F}_{1,2}$ и линия их пересечения γ . Справа: две трещины $\mathcal{F}_{1,2}$ и каверна на линии их пересечения γ .

ного перетока предполагается, что каждая трещина связана с определенным объемом матрицы («виртуальной ячейкой»), из которого происходит дренирование флюида в трещину. Взаимодействие сред определяется функцией перетока, которая используется в моделях двойной пористости. Подробное описание модели приведено в работах [28, 29].

1.2 Геометрическая модель среды

В качестве геометрической модели среды будет рассматриваться локально двумерная связная область \mathcal{F} , которая представляет собой объединение некоторого числа (пересекающихся) трещин:

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{N_f} \mathcal{F}_n,$$

где N_f — число трещин. Каждая отдельная трещина \mathcal{F}_n представляет собой двумерное многообразие (поверхность) с краем. Пример множества \mathcal{F} для случая двух трещин показан на рисунке 1.1. Предполагается, что:

- трещины плоские, либо слабо искривлены (средний радиус кривизны существенно больше характерного линейного размера трещины). При описании течения в трещине справедливо приближение смазочного слоя (см. ниже);
- поверхности \mathcal{F}_n представляют собой срединные поверхности трещин, то есть математические поверхности, равноудаленные от берегов трещин. Раскрытие трещины является функцией точки срединной поверхности трещины,

$$w = w_0(x), \quad x \in \mathcal{F},$$

где \mathcal{F} — срединная поверхность трещины;

- любые две трещины \mathcal{F}_i и \mathcal{F}_j либо не имеют общих точек, либо пересекаются по отрезку $\gamma_{ij} = \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j$ конечной длины;
- два отрезка пересечения γ_{ij} и γ_{kl} имеют не более одной общей точки;
- отрезок γ_{ij} будем называть «каверной» или «каналом» переменного сечения с известным диаметром $d_{ij}(x)$, $x \in \gamma_{ij}$ (рисунок 1.1);
- в дальнейшем будем рассматривать отрезки только из множества $\mathcal{A} = \{\gamma_{ij} : \gamma_{ij} = \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j \neq \emptyset\}$.

Сформулированные выше ограничения являются естественными при представлении трещин в виде плоских полигонов в модели дискретной системы трещин. Другие виды взаимного расположения трещин (например пересечение 3 отрезков γ_{ij} в одной точке) являются геометрически неустойчивыми, то есть исчезают при малых «шевелениях» срединной поверхности.

1.3 Модель однофазного течения в трещинах

Уравнение однофазной фильтрации в трещине имеет вид [17]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(w\rho) + \operatorname{div}[w\rho\vec{v}_f] = 0, \quad \vec{v}_f = -\frac{k_f}{\mu}(\nabla p_f + \rho\vec{g}_n), \quad (1.1)$$

где p_f — давление в трещине, $w = w(x)$ — раскрытие трещины, $\vec{g}_n = \Pi_n\vec{g}$ — проекция вектора ускорения свободного падения на плоскость трещины, $\Pi_n = I - \vec{n} \otimes \vec{n}$ — соответствующий проектор, I — единичная матрица, \vec{n} — единичный вектор нормали к трещине, \vec{g} — вектор ускорения свободного падения, \vec{v}_f — скорость течения жидкости в трещине, k_f — абсолютная проницаемость, выражение для которой, в соответствии с моделью смазочного слоя, имеет вид:

$$k_f(x) = \frac{w^2(x)}{12}, \quad (1.2)$$

где x — точка расчетной области. Можно отметить, что раскрытие трещины w , вообще говоря, есть функция от давления, но в данной работе этой зависимостью пренебрежём.

Уравнение (1.1) решается в замкнутой ограниченной области \mathcal{F} с границей Γ . Для уравнения (1.1) задаются начальные и граничные условия. Граничные условия могут быть заданы либо в виде заданного давления, либо в виде заданного потока на границе:

- граничное условие Дирихле:

$$p|_{\Gamma_D} = p_D, \quad (1.3)$$

где $\Gamma_D \subset \Gamma$ — граница области, на которую наложено условие Дирихле, p_D — давление, заданное на границе;

- граничное условие Неймана:

$$-\rho w \frac{K}{\mu} (\nabla p + \rho \vec{g}) \cdot \vec{n}|_{\Gamma_N} = Q_N, \quad (1.4)$$

где $\Gamma_N \subset \Gamma$ — граница области, на которую наложено условие Неймана, Q_N — поток массы, заданный на границе, \vec{n} — единичный вектор внешней нормали к границе.

Начальное условие представляет собой распределение давления в области расчета на начальный момент времени:

$$p(x, t = 0) = p_0(x), \quad x \in \mathcal{F}. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.1), заданное во внутренних точках трещин \mathcal{F}_n , должно быть дополнено условиями согласования на отрезках пересечений трещин γ_{ij} (индексами i и j обозначены параметры, отнесенные к трещинам \mathcal{F}_i и \mathcal{F}_j , соответственно):

- непрерывность полей давления:

$$p_i(x) = p_j(x), \quad \forall x \in \gamma_{ij}.$$

- непрерывность потоков массы:

$$\vec{Q}_i^{(+)} \cdot \vec{n}_i^{(+)} + \vec{Q}_i^{(-)} \cdot \vec{n}_i^{(-)} = \vec{Q}_j^{(+)} \cdot \vec{n}_j^{(+)} + \vec{Q}_j^{(-)} \cdot \vec{n}_j^{(-)}, \quad \forall x \in \gamma_{ij}.$$

где $\vec{n}_i^{(+)}$, $\vec{n}_i^{(-)}$ — вектора единичных нормалей к линии γ_{ij} , касательные к поверхности трещины \mathcal{F}_i , $\vec{Q}_i^{(+)}$, $\vec{Q}_i^{(-)}$ — вектора плотности потока массы флюида в трещине \mathcal{F}_i :

$$\vec{Q} = -\rho w \frac{K}{\mu} (\nabla p + \rho \vec{g}_n).$$

Уравнение (1.1) имеет дивергентный вид. Для удобства записи данного уравнения производная по времени преобразуется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}(w\rho) = w \frac{\partial \rho}{\partial t} = w \rho' \frac{\partial p}{\partial t} = \rho w \left(\frac{\rho'}{\rho} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = \rho w c_t(p) \frac{\partial p}{\partial t},$$

где $c_t(p) = \rho'(p)/\rho(p)$ — коэффициент сжимаемости флюида. Введем обозначения:

$$M(p) = \rho w c_t(p), \quad T(p) = w \rho(p) \frac{K}{\mu(p)}. \quad (1.6)$$

С использованием определенных выше величин уравнение (1.1) записывается в виде:

$$M(p) \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} [-T(p)(\nabla p + \rho \vec{g}_n)] = 0 \quad (1.7)$$

Таким образом, система уравнений (1.8) вместе с условиями согласования на пересечениях трещин и уравнениями состояния для плотности $\rho = \rho(p)$ и вязкости $\mu = \mu(p)$ образуют замкнутую систему уравнений относительно давления в области \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} M(p) \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} [-T(p)(\nabla p + \rho \vec{g}_n)] &= 0, \quad x \in \mathcal{F}, \\ -T(p)(\nabla p + \rho \vec{g}) \cdot \vec{n}_{\Gamma_N} |_{\Gamma_N} &= Q_N, \quad x \in \Gamma_N, \\ p|_{\Gamma_D} &= p_D, \quad x \in \Gamma_D, \\ p(x, t = 0) &= p_0(x), \quad x \in \mathcal{F}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

1.4 Модель двухфазного течения в трещинах

Будем считать, что:

- флюид состоит из двух несмешивающихся фаз, то есть каждая фаза $\alpha = W, O$ (« W » — жидкая водная фаза, « O » — жидкая углеводородная фаза) состоит из единственного (псевдо) компонента (« w » — вода, « o » — нефть). В дальнейшем фаза будет отождествляться с соответствующим компонентом.
- фазы являются сжимаемыми, массовая плотность фазы является функцией ее давления p_α :

$$\rho_\alpha = \rho_\alpha(p_\alpha), \quad \alpha = W, O.$$

- давления фаз не равны, они связаны капиллярным давлением, которое определяется локально (в точке пространства) моделью, учитывающей раскрытие трещины и эффекты смачиваемости:

$$(p_O - p_W)(x) = p_c(w(x), \gamma(x), \sigma), \quad (1.9)$$

где w — раскрытие, γ — контактный угол (является функцией взаимных свойств флюидов и скелета), σ — поверхностное натяжение.

На пересечениях трещин накладываются условия согласования по аналогии с однофазным течением:

- непрерывность полей давления:

$$p_{\alpha,i}(x) = p_{\alpha,j}(x), \quad \forall x \in \gamma_{ij}, \quad \alpha = W, O$$

- непрерывность потоков массы компонент:

$$\vec{Q}_{\alpha,i}^{(+)} \cdot \vec{n}_i^{(+)} + \vec{Q}_{\alpha,i}^{(-)} \cdot \vec{n}_i^{(-)} = \vec{Q}_{\alpha,j}^{(+)} \cdot \vec{n}_j^{(+)} + \vec{Q}_{\alpha,j}^{(-)} \cdot \vec{n}_j^{(-)}, \quad \forall x \in \gamma_{ij}, \quad \alpha = W, O$$

Дифференциальные уравнения законов сохранения масс компонент в рассматриваемых допущениях имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(w\rho_\alpha S_\alpha) + \operatorname{div} \vec{Q}_\alpha = 0, \quad \alpha = W, O, \quad (1.10)$$

где S_α — насыщенность фазы, \vec{Q}_α — вектор плотности потока массы компонента, для которых справедливы следующие соотношения:

$$S_W + S_O = 1, \quad (1.11)$$

$$\vec{Q}_\alpha = -\rho_\alpha w \frac{K K_{r,\alpha}}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha + \rho_\alpha \vec{g}), \quad \alpha = W, O, \quad (1.12)$$

где K — абсолютная проницаемость, которая определяется выражением (1.2), $K_{r,\alpha} = K_{r,\alpha}(S_w)$ — относительные фазовые проницаемости фаз, $\mu_\alpha = \mu_\alpha(p_\alpha)$ — вязкость фазы, \vec{g} — определяется аналогично случаю однофазного течения.

При рассмотрении двухфазных течений обычно вводятся термины подвижность фазы и проводимость фазы:

$$\lambda_\alpha = \frac{K K_{r,\alpha}}{\mu_\alpha}, \quad T_\alpha = w\rho_\alpha \lambda_\alpha, \quad \alpha = W, O.$$

С использованием введенных обозначений определяющее соотношение для потока принимает вид:

$$\vec{Q}_\alpha = -\lambda_\alpha w\rho_\alpha (\nabla p_\alpha + \rho_\alpha \vec{g}) = -T_\alpha (\nabla p_\alpha + \rho_\alpha \vec{g}).$$

Скорость Дарси фазы α определяется следующим выражением:

$$\vec{v}_\alpha = -\lambda_\alpha (\nabla p_\alpha + \rho_\alpha \vec{g}), \quad \alpha = W, O,$$

откуда выражение для потока принимает вид:

$$\vec{Q}_\alpha = w\rho_\alpha\vec{v}_\alpha, \quad \alpha = W, O.$$

Введем величину v_T , которую будем называть полной скоростью смеси (*total velocity*):

$$\vec{v}_T = \vec{v}_W + \vec{v}_O.$$

Система уравнений (1.10) совместно с нормировочным соотношением (1.11) и определяющим уравнением для давлений (1.9) (всего — 4 уравнения) является системой уравнений относительно 4-х неизвестных S_α, p_α .

Рассматриваемая система уравнений дополняется начальными и граничными условиями. Начальные условия имеют вид:

$$S_W|_{\mathcal{F}} = S_{W,0}, \quad P_W|_{\mathcal{F}} = P_{W,0}. \quad (1.13)$$

Поле нефтенасыщенности и давление нефтяной фазы на начальный момент времени могут быть вычислены по формулам (1.9), (1.11).

В качестве граничных условий могут быть заданы либо условие Неймана (заданный поток массы), либо условие Дирихле (заданное давление). Граничное условие Дирихле имеет вид:

$$P_W|_{\Gamma_D} = P_D, \quad (1.14)$$

где Γ_D — граница расчетной области, на которой задано граничное условие Дирихле, P_D — заданное давление водной фазы.

Граничное условие Неймана имеет вид:

$$(Q_O + Q_W)|_{\Gamma_N} = Q_N, \quad (1.15)$$

где Γ_N — граница расчетной области, на которой задано граничное условие Неймана, Q_N — заданный поток смеси.

Совместно с граничными условиями Дирихле/Неймана (кроме граничного условия непротекания) на границе также должны быть заданы насыщенности фаз:

$$S_\alpha|_{\Gamma} = S_\alpha, \quad \alpha = W, O \quad (1.16)$$

Таким образом, в описанных допущениях относительно пространственного положения трещин и условий согласования на пересечениях, с учетом определения проницаемости по модели смазочного слоя, система дифференциальных уравнений (1.9) – (1.12) относительно 4-х неизвестных S_α, p_α , совместно с начальными и граничными условиями (1.13) – (1.16) и уравнениями состояния фаз $\rho_\alpha = \rho_\alpha(p_\alpha)$, $\mu_\alpha = \mu_\alpha(p_\alpha)$ описывает модель двухфазного течения по системе пересекающихся трещин.

1.4.1 Уравнения в переменных давления и насыщенности воды

В данном разделе будет описан процесс приведения уравнений (1.10) к уравнениям с неизвестными p_W , S_W — давление и насыщенность водной фазы.

Для получения уравнения для давления водной фазы в каждом из уравнений (1.10) вычисляются производные по времени, после чего уравнения (1.10) принимают вид:

$$w\rho_\alpha \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} + S_\alpha w \frac{d\rho_\alpha}{dp_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{Q}_\alpha) = 0, \quad \alpha = W, O.$$

Затем уравнение для фазы α умножается на ρ_α^{-1} :

$$w \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} + w S_\alpha \frac{1}{\rho_\alpha} \frac{d\rho_\alpha}{dp_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{\rho_\alpha} \operatorname{div}(\vec{Q}_\alpha) = 0, \quad \alpha = W, O.$$

Полученные уравнения складываются с учетом условия нормировки для насыщенностей (1.11):

$$w \sum_{\alpha=W,O} S_\alpha \left[\frac{1}{\rho_\alpha} \frac{d\rho_\alpha}{dp_\alpha} \right] \frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \sum_{\alpha=W,O} \frac{1}{\rho_\alpha} \operatorname{div}(\vec{Q}_\alpha) = 0. \quad (1.17)$$

Выражения в квадратных скобках в последнем уравнении являются сжимаемостями фаз:

$$c_\alpha = \frac{1}{\rho_\alpha} \frac{d\rho_\alpha}{dp_\alpha}, \quad \alpha = W, O.$$

Таким образом, с учетом последних обозначений, уравнение (1.17) принимает вид:

$$w \sum_{\alpha=W,O} S_\alpha c_\alpha \frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \sum_{\alpha=W,O} \frac{1}{\rho_\alpha} \operatorname{div}(\vec{Q}_\alpha) = 0. \quad (1.18)$$

Из уравнения (1.9) следует, что скорости изменения давлений фаз равны:

$$\frac{\partial p_O}{\partial t} = \frac{\partial p_W}{\partial t}. \quad (1.19)$$

Тогда уравнение (1.18) принимает следующий вид:

$$w c_t \frac{\partial p_W}{\partial t} + \sum_{\alpha=W,O} \frac{1}{\rho_\alpha} \operatorname{div} \vec{Q}_\alpha = 0, \quad (1.20)$$

где $c_t = \sum_{\alpha=W,O} c_\alpha S_\alpha$ — полная сжимаемость.

Выражение для потока фазы ($\alpha = O$) с учетом (1.9) преобразуется к

следующему виду:

$$\vec{Q}_O = -T_O(\nabla p_O - \rho_O \vec{g}) = -T_O(\nabla p_W + \nabla p_c - \rho_O \vec{g}).$$

С учетом всех полученных выше выражений уравнение для давления фазы p_W принимает вид:

$$w c_t \frac{\partial p_W}{\partial t} + \frac{1}{\rho_W} \operatorname{div} [-T_W(\nabla p_W - \rho_W \vec{g})] + \frac{1}{\rho_O} \operatorname{div} [-T_O(\nabla p_W + \nabla p_c - \rho_O \vec{g})] = 0. \quad (1.21)$$

Уравнение (1.21) не является дивергентным и имеет смысл уравнения баланса объёма. Далее предполагается, что сжимаемость фаз учитывается в коэффициенте c_t , а при рассмотрении конвективных членов уравнения (1.21) изменением плотностей ρ_O , ρ_W можно пренебречь. Тогда уравнение (1.21) можно переписать в виде:

$$w c_t \frac{\partial p_W}{\partial t} + \operatorname{div} [-\lambda_T \nabla p_W - w \lambda_O \nabla p_c - \rho_T \vec{g}] = 0, \quad (1.22)$$

где

$$\lambda_T = w(\lambda_O + \lambda_W), \quad \rho_T = w(\lambda_O \rho_O + \lambda_W \rho_W).$$

Вторым уравнением, как уже отмечалось, является уравнение для насыщенности водной фазы, которое, с использованием введенных соотношений, принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(w \rho_W S_W) + \operatorname{div} [w \rho_W \vec{v}_W] = 0. \quad (1.23)$$

Таким образом модель течения двухфазного флюида в трещинах, записанная в форме IMPES («Implicit Pressure Explicit Saturation») (опорное давление — давление водной фазы, опорная насыщенность — насыщенность водной фазы), имеет вид:

$$\begin{aligned} c_t \frac{\partial p_W}{\partial t} + \operatorname{div} [-\lambda_T \nabla p_W - w \lambda_O \nabla p_c - \rho_T \vec{g}] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(w \rho_W S_W) + \operatorname{div} [w \rho_W \vec{v}_W] &= 0, \\ S_W + S_O &= 1, \\ (p_O - p_W)(x) &= p_c(w(x), \gamma(x), \sigma), \end{aligned} \quad (1.24)$$

При моделировании течений в трещиноватых коллекторах важным является корректное определение свойств жидкостей и породы. Такие свойства флюидов, как плотность или вязкость, определяются точно также, как и при моделировании течений в поровых коллекторах [17]. Ниже будут рассмотрены определяющие соотношения свойств жидкостей и породы, которые явля-

ются характерными для трещиноватых коллекторов и подчеркивают особенности течения в трещинах.

1.4.2 Относительные фазовые проницаемости

В абсолютном большинстве работ, посвященных моделям DFN, считается, что кривые относительных фазовых проницаемостей в трещинах являются линейными. В частности, в [30] отмечается, что для достаточно широких трещин (сотни микрон и более), экспериментальные данные указывают на то, что:

- в пределах одной трещины флюиды препятствуют движению друг друга, и относительные проницаемости в этом случае должны описывать снижение общей подвижности;
- в системе связанных трещин флюиды быстро (по сравнению с характерными временами течения в поровой матрице) разделяются и текут по разным каналам.

Этими фактами обосновывается выбор кривых относительных фазовых проницаемостей в виде прямых линий — подвижность одной фазы меняется линейно при изменении второй, присутствующей в течении. В силу того, что для трещин размера сто микрон и более считается, что капиллярные эффекты малы и ими можно пренебречь, считается, что значения связанной водонасыщенности и остаточной нефтенасыщенности близки к нулю. Отличающиеся от нуля значения остаточной нефтенасыщенности могут быть использованы для учета «защемления» нефти вследствие особенностей структуры системы трещины (переменное раскрытие, цементирование отдельных протоков, наличие мелкомасштабной «закрытой» трещиноватости, не разрешенной геометрической моделью системы трещин и т. д.).

В ряде экспериментов по определению кривых ОФП [31, 32, 33] отмечается, что кривые ОФП не являются линейными и хорошо описываются распространенными степенными корреляциями типа Брукса и Кори или ван Генухтена ([34, 35, 36]):

- модель Брукса и Кори:

$$k_{rw} = \left(\hat{S}_w\right)^{3+2/\lambda}, \quad k_{ro} = \left(1 - \hat{S}_w\right)^2 \left[1 - \left(\hat{S}_w\right)^{1+2/\lambda}\right],$$

где λ — заданный параметр,

$$\hat{S}_w = \frac{S_w - S_{w,cr} - S_{or}}{1 - S_{w,cr} - S_{or}}$$

— так называемая эффективная водонасыщенность, $S_{w,cr}$ — остаточная насыщенность воды, S_{or} — остаточная насыщенность нефти;

- модель ван Генухтена:

$$k_{rw} = \hat{S}_w^2 \left[1 - \left(1 - \hat{S}_w^m \right)^{1/m} \right], k_{ro} = \left(1 - \hat{S}_w^2 \right) \left(1 - \hat{S}_w^m \right)^{1/m},$$

где m — заданный параметр.

Отметим, что для использования описанных моделей необходимо определить значения соответствующих параметров (λ или m), которые могут быть получены из лабораторных экспериментов на образце керна, содержащего уединенную трещину.

1.4.3 Капиллярное давление и смачиваемость

Для трещин с большим раскрытием (сотни микрометров и более) часто принимается, что капиллярными давлениями можно пренебречь (в этом случае давления фаз совпадают) [30]. В том случае, когда это необходимо, разница в давлении водной и нефтяной фаз может быть учтена двумя основными способами. В первом из них считается, что функция капиллярного давления в пределах одной трещины может с хорошей точностью описываться стандартными для пористых сред корреляциями типа Брукса-Кори или ван Генухтена [36]:

- модель Брукса и Кори:

$$p_c = p_{c,\min} \hat{S}_w^{-1/\lambda},$$

где λ — заданный параметр, $p_{c,\min}$ — минимальное капиллярное давление;

- модель ван Генухтена:

$$p_c = \frac{1}{\alpha} \left(\hat{S}_w^{\frac{n}{1-n}} - 1 \right)^{1/n}$$

где α и n — заданные параметры.

Как и в случае относительных фазовых проницаемостей, данный подход требует проведения соответствующих лабораторных экспериментов с целью определения параметров корреляций.

При использовании второго подхода капиллярное давление вычисляется локально (в точке) в зависимости от свойств флюидов и породы, а также величины раскрытия на основе аналитических моделей, например, классического уравнения Юнга-Лапласа [25]:



Рис. 1.2. Типы смачиваемости породы (θ — угол смачиваемости).

$$p_c(w) = \frac{2\sigma \cos(\theta)}{w},$$

где σ — величина поверхностного натяжения (является свойством пары флюидов, находящихся в контакте), θ — величина контактного угла (определяется взаимными свойствами подвижных фаз и стенок трещины, рисунок 1.2), w — величина раскрытия трещины в заданной точке. Необходимые для использования такого подхода параметры σ и θ должны быть определены, например, в лабораторных экспериментах. Пример использования такого подхода приведен в [37].

Отметим, что анализу вида кривых ОФП и капиллярных давлений для течения многофазного флюида в уединенных трещинах посвящено достаточно мало работ (среди которых см., например, [31, 32, 33, 38]).

Оба представленных способа вычисления функции капиллярного давления учитывают эффекты смачиваемости и поверхностного натяжения. В том случае, когда кривые относительных фазовых проницаемостей и капиллярных давлений задаются исходя из результатов лабораторного эксперимента (для одной трещины), указанные эффекты учитываются неявно (именно они определяют вид кривой, получаемой в эксперименте). В другом случае, в ходе лабораторного эксперимента определяется величина непосредственно контактного угла (угла смачиваемости) θ и коэффициент поверхностного натяжения σ (определяется свойствами пары флюидов). Предпочтительность той или иной модели определяется различными факторами, в том числе доступностью информации об углах смачиваемости или возможностью проведения соответствующих лабораторных экспериментов.

1.5 Модель однофазного течения в трещинах с кавернами

В предыдущем разделе была рассмотрена физико-математическая модель, в которой предполагалось, что течение вдоль пересечений трещин отсутствует. В настоящем разделе описывается модель, которая его учитывает.

Пусть $\gamma = \gamma(s)$ — каверна конечной длины $L_\gamma = |\gamma|$; s — координата вдоль линии, проходящей в центре каверны, $s \in [0, L_\gamma]$; $\vec{\tau} = \vec{\tau}(s)$ — касательный к линии $\gamma = \gamma(s)$ вектор единичной длины. Будем считать, что сечение канала

в некоторой точке s имеет форму круга с диаметром $d = d(s)$.

Далее предполагается, что справедливы следующие утверждения:

- течение в каверне существенно одномерное;
- число Рейнольдса $Re = d \cdot v / \nu \ll 1$, где v — характерная скорость течения, ν — кинематическая вязкость флюида.

При указанных допущениях скорость течения можно описать законом Пуазейля для ламинарного течения вязкой жидкости в тонком канале [39]. Согласно данному закону для скорости течения флюида справедливо следующее выражение:

$$v_v(s) = -\frac{d^2(s)}{32\mu} \frac{\partial p_v}{\partial s}, \quad (1.25)$$

где v_v — средняя по сечению каверны скорость течения жидкости, μ — динамическая вязкость флюида, p_v — давление в каверне. При сделанных допущениях уравнение закона сохранения массы в канале будет иметь вид [39]:

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial \rho A v_v}{\partial s} = q, \quad (1.26)$$

$$v_v = -\frac{k_v}{\mu} \left(\frac{\partial p_v}{\partial s} + \rho g_\tau \right), \quad k_v(s) = \frac{d^2(s)}{32}, \quad A(s) = \frac{\pi d^2(s)}{4}, \quad (1.27)$$

где $A = A(s)$ — площадь сечения канала в точке s , $g_\tau = \vec{g} \cdot \vec{\tau}$ — проекция вектора ускорения свободного падения на вектор $\vec{\tau}$, q — мощность источников, k_v — абсолютная проницаемость канала. Уравнение (1.26) представляет собой уравнение баланса массы в рамках квазистационарной модели течения в канале с переменным сечением. Течение в трещинах описывается уравнениям (1.2), (1.1).

Отметим, что уравнение (1.26) имеет вид, аналогичный уравнению (1.1). Отличие заключается в том, как в выражение для проницаемости входит геометрический параметр области течения (диаметр канала — для случая каверны и раскрытие — для трещины).

1.5.1 Условия согласования и граничные условия

Уравнения (1.26)–(1.1), должны быть дополнены условиями согласования на линиях пересечения трещин γ_{ij} . В предыдущем разделе были введены условия непрерывности давления и потоков на отрезках пересечений трещин, которые соответствуют случаю, когда течения вдоль каверн отсутствует. В случае наличия течения вдоль каверн, условия согласования принимают вид:

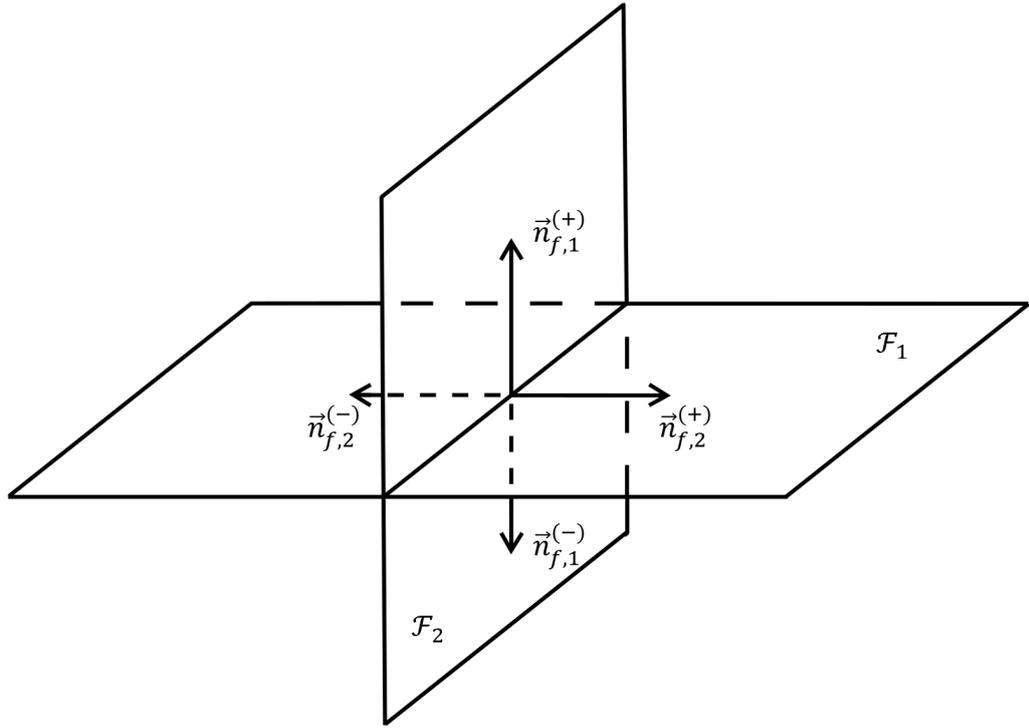


Рис. 1.3. Нормали к отрезку пересечения трещин.

- непрерывность потоков массы в точках отрезка γ_{ij} :

$$q = \vec{Q}_{f,i}^{(+)} \cdot \vec{n}_{f,i}^{(+)} + \vec{Q}_{f,i}^{(-)} \cdot \vec{n}_{f,i}^{(-)} + \vec{Q}_{f,j}^{(+)} \cdot \vec{n}_{f,j}^{(+)} + \vec{Q}_{f,j}^{(-)} \cdot \vec{n}_{f,j}^{(-)}, \quad \forall x \in \gamma_{ij},$$

где q — источник в уравнении (1.26), $\vec{n}_i^{(+)}$, $\vec{n}_i^{(-)}$ — векторы единичных нормалей к линии γ_{ij} , касательные к поверхности трещины \mathcal{F}_i (рисунок 1.3), $\vec{Q}_{f,i}^{(+)}$, $\vec{Q}_{f,i}^{(-)}$ — векторы плотности потока массы флюида в трещине \mathcal{F}_i :

$$\vec{Q}_f = -\rho w \frac{k_f}{\mu} (\nabla p + \rho \vec{g}_n).$$

- непрерывность давления в точках отрезка γ_{ij} :

$$p_f = p_v, \quad \forall x \in \gamma_{ij}.$$

Из представленных выражений видно, что условие непрерывности потоков массы играет роль источникового члена в уравнении одномерного течения флюида в каверне.

Помимо условия согласования, для постановки задачи о течении жидкости необходимо задать начальное распределение давления и граничные условия на границах трещин и каверн. Граничные условия могут быть двух типов: 1) давление; 2) поток жидкости.

Таким образом, система уравнений (1.1), (1.26) совместно с условием согласования, а также начальными и граничными условиями, описывает одно-

фазное течение жидкости в системе трещин и каверн.

1.6 Модель двухфазного течения в трещинах с кавернами

В данном разделе проводится обобщение рассмотренной выше модели однофазного течения на случай двухфазного течения нефти и воды.

Будем считать, что:

- флюид состоит из двух несмешивающихся фаз, то есть каждая фаза $\alpha = W, O$ (« W » — жидкая водная фаза, « O » — жидкая углеводородная фаза) состоит из единственного (псевдо) компонента (« w » — вода, « o » — нефть). В дальнейшем фаза будет отождествляться с соответствующим компонентом;
- фазы являются сжимаемыми, массовая плотность фазы является функцией ее давления p_α : $\rho_\alpha = \rho_\alpha(p_\alpha)$, $\alpha = W, O$.

Дифференциальные уравнения законов сохранения масс компонент в трещинах и кавернах в рассматриваемых допущениях имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha w S_\alpha) + \operatorname{div} \vec{Q}_{f,\alpha} = 0, \quad \vec{x} \in \mathcal{F}, \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial \rho_\alpha A S_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial Q_{v,\alpha}}{\partial s} = q_\alpha, \quad \vec{x} \in \gamma_{ij}, \quad (1.29)$$

где $\alpha = W, O$ — водная и нефтяная фазы, q_α — член, отвечающий за массообмен между трещинами и кавернами (будет описан ниже), S_α — насыщенности фаз, такие что $S_W + S_O = 1$, $\vec{Q}_{f,\alpha}$ — вектор плотности потока массы компонента в трещине, $Q_{v,\alpha}$ — плотность потока массы компонента в каверне, для которых справедливы следующие соотношения:

$$\vec{Q}_{f,\alpha} = -\rho_\alpha w \frac{k_f k_{r,\alpha}^{(f)}}{\mu_\alpha} (\nabla p_{f,\alpha} + \rho_\alpha \vec{g}_n), \quad (1.30)$$

$$Q_{v,\alpha} = -\rho_\alpha A(s) \frac{k_v k_{r,\alpha}^{(v)}}{\mu} \left(\frac{\partial p_{v,\alpha}}{\partial s} + \rho_\alpha g_\tau \right), \quad (1.31)$$

где k_f, k_v — абсолютные проницаемости трещин и каверн, определяемые выражениями (1.27) и (1.2) соответственно, $k_{r,\alpha}^{(\beta)} = k_{r,\alpha}^{(\beta)}(S_w)$, $\beta = f, v$ — относительные фазовые проницаемости, $p_{f,\alpha}, p_{v,\alpha}$ — давления фаз в трещине и каверне, $\mu_\alpha = \mu_\alpha(p_\alpha)$ — вязкость фазы.

Давления фаз не равны, они связаны капиллярным давлением, которое определяется локально (в точке пространства) моделью, учитывающей раскрытие (диаметр) трещины (каверны) и эффекты смачиваемости:

$$p_{f,c}(x) = (p_{f,O} - p_{f,W})(x) = \frac{2\sigma \cos \theta(x)}{w(x)}, \quad (1.32)$$

$$p_{v,c}(s) = (p_{v,O} - p_{v,W})(s) = \frac{4\sigma \cos \theta(s)}{d(s)}, \quad (1.33)$$

где θ — контактный угол (является заданной функцией взаимных свойств флюидов и скелета), σ — поверхностное натяжение.

Условия согласования в модели двухфазного течения принимают следующий вид:

- непрерывность потоков массы в точках отрезка γ_{ij} :

$$q_\alpha = \vec{Q}_{f,\alpha,i}^{(+)} \cdot \vec{n}_{f,\alpha,i}^{(+)} + \vec{Q}_{f,\alpha,i}^{(-)} \cdot \vec{n}_{f,\alpha,i}^{(-)} + \vec{Q}_{f,\alpha,j}^{(+)} \cdot \vec{n}_{f,\alpha,j}^{(+)} + \vec{Q}_{f,\alpha,j}^{(-)} \cdot \vec{n}_{f,\alpha,j}^{(-)}, \\ \forall x \in \gamma_{ij}, \quad \alpha = W, O;$$

- непрерывность давления в точках отрезка γ_{ij} :

$$p_{f,\alpha} = p_{v,\alpha}, \quad \forall x \in \gamma_{ij}, \quad \alpha = W, O.$$

Условие непрерывности давлений фаз в точках отрезков γ_{ij} означает, что капиллярные давления также должны быть равны. Будем считать, что капиллярное давление в точках отрезков γ_{ij} определяется из выражения для каверн:

$$p_{f,c}(x) = p_{v,c}(s) = \frac{4\sigma \cos \theta(s)}{d(s)}, \quad \forall s \in \gamma_{ij}. \quad (1.34)$$

Для замыкания системы уравнений (1.28)–(1.31) необходимо задать зависимости относительных фазовых проницаемостей в трещинах и кавернах. Будем предполагать, что ОФП задаются линейной зависимостью (с нулевыми значениями остаточных насыщенностей).

В модели течения жидкости по трещинами основным геометрическим параметром области являлось раскрытие трещин. Для модели течения жидкости по трещинам с кавернами также необходимо задать радиус каверн. Радиус каверн может быть определен двумя способами:

- определен явно как входной параметр, на равне с раскрытием трещин;
- задан как функция раскрытия трещин.

Таким образом, система уравнений (1.28)–(1.31) совместно с условиями согласования на границах трещина–каверна, начальными и граничными условиями для давления и насыщенности, а также уравнениями состояния для

плотностей и вязкостей компонент описывает двухфазное течение жидкости в системе трещин и каверн.

Глава 2

Вычислительные алгоритмы

В данной главе описаны алгоритмы построения треугольной сетки для системы трещин представляющей собой набор пересекающихся полигонов в пространстве. Представлены алгоритмы расчета однофазных и двухфазных течений как в чисто трещиноватой среде, так и в системе трещин и каверн. Описанные алгоритмы построены на основании метода Петрова-Галеркина. В главе приведены, используемые в методе Петрова-Галеркина описания пространств базисных и пробных функций. Описанные в данной главе результаты диссертационной работы опубликованы в работах [3, 4, 8].

2.1 Построение расчетной сетки

Для построения сетки на системе трещин необходимо учитывать пересечения трещин и пересечения отрезков пересечений. Рассмотрим алгоритм построения согласованной расчетной сетки на примере двух пересекающихся трещин (рисунок 2.1).

Алгоритм построения сетки состоит из следующих этапов:

1. Поиск пересечений трещин.
2. Последовательное разбиение отрезков пересечений и границ трещины точками на отрезки заданного размера, которые впоследствии используются как ребра сетки.
3. Равномерное заполнение точками областей трещин с ограничением на близость внутренних точек к граничным и к точкам на отрезках пересечений.
4. Построение триангуляции для каждой трещины по заданным каркасам (точкам, отрезкам).

Построенная таким образом сетка полностью охватывает всю двумерную

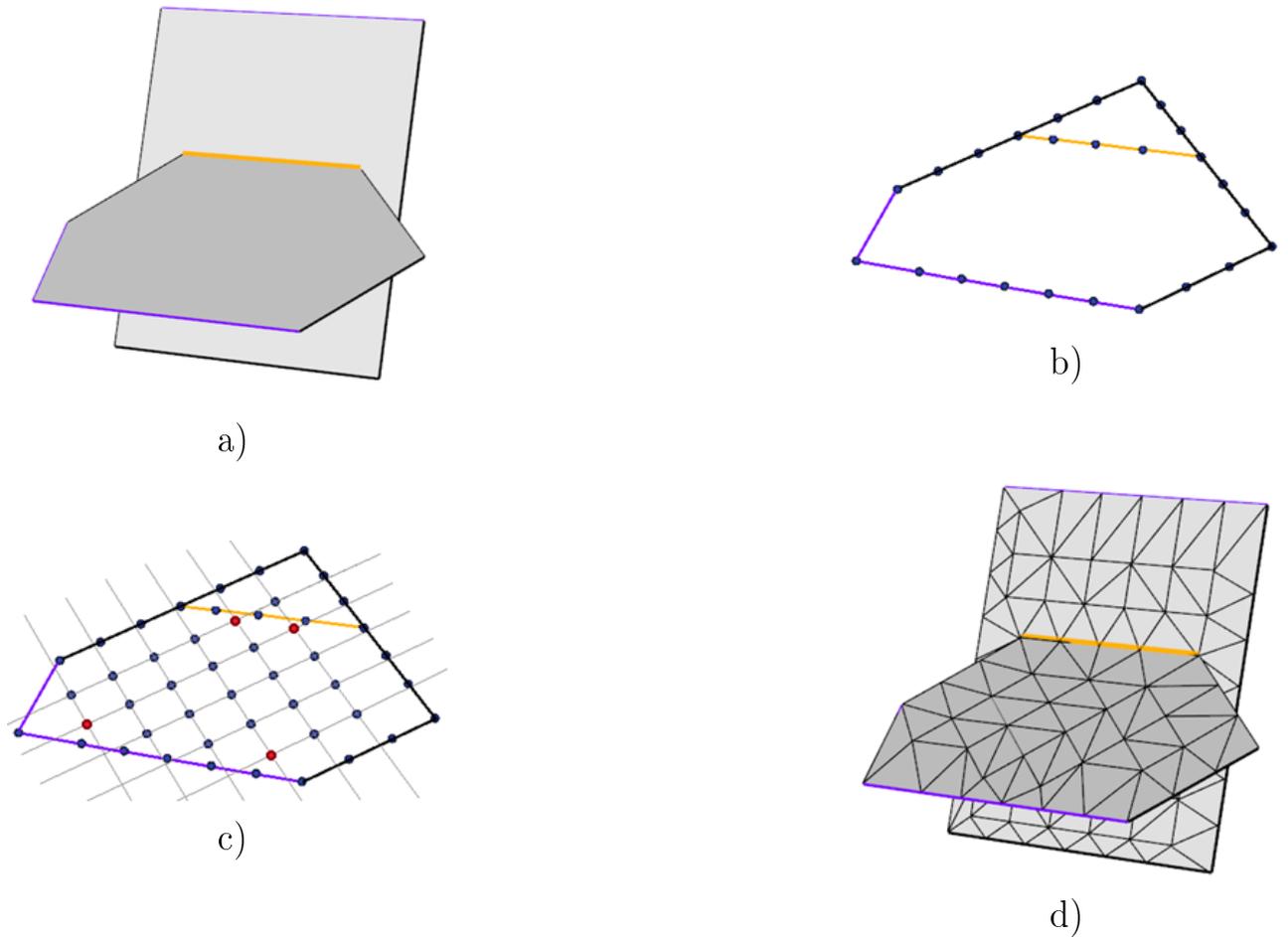


Рис. 2.1. Алгоритм построения согласованной треугольной сетки: а) поиск пересечений трещин, б) разбиение отрезка границ трещин и отрезка пересечений, в) заполнение точками области трещины, г) построение триангуляции.

область геометрической модели среды:

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{N_e} \omega_n,$$

где ω_n — n -й треугольник сетки.

Также построенная сетка удовлетворяет следующим условиям:

- любые два треугольника имеют либо пустое пересечение, либо одну общую вершину, либо одно общее ребро;
- границы трещин и отрезки их пересечения являются объединением ребер треугольников.

Таким образом сетка внутри каждой трещины образуется подмножеством треугольников сетки системы трещин:

$$\mathcal{F}_i = \bigcup_{n \in I_i} \omega_n,$$

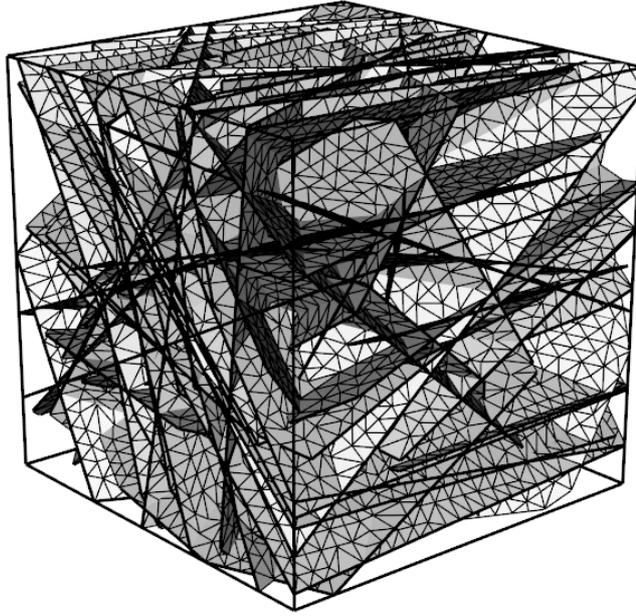


Рис. 2.2. Пример построенной сетки для системы трещин.

где I_i — множество треугольников, образующих трещину \mathcal{F}_i .

Сетка для сгенерированной случайным образом системы трещин, построенная по описанному выше алгоритму представлена на рисунке. 2.2.

2.2 Пространства базисных и пробных функций

Для построения численной схемы в расчетной области \mathcal{F} вводится треугольная сетка, согласованная на пересечениях трещин. Обозначим через \mathcal{T}^h множество ячеек сетки:

$$\mathcal{T}^h = \bigcup_{k=1}^{N_w} w_k,$$

где w_k — треугольник сетки (конечный элемент), N_w — количество треугольников. При этом каждому треугольнику ставится в соответствие три вершины: $w_k \leftrightarrow \{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\}$.

Множество \mathcal{T}^h — правильное, т.е. любые два конечных элемента имеют либо общую грань, либо общую вершину, либо не имеют общих точек. На данном множестве определяется пространство непрерывных кусочно-линейных базисных функций [3]. Базисные функции $\phi(x)$ данного пространства строятся следующим образом [40, 41]:

- в узле i сетки базисная функция равна единице, а в остальных узлах — нулю, то есть: $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, $i, j = \overline{1, N_h}$, N_h — количество узлов сетки;

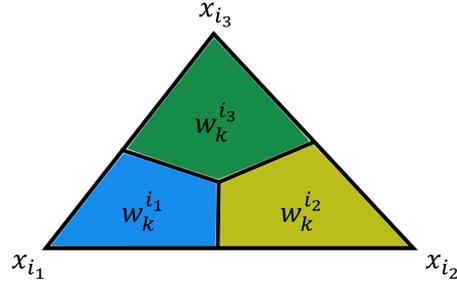


Рис. 2.3. Пример частей контрольного объёма в треугольнике.

- в пределах каждого треугольника $\phi_i(x)$ является линейной.

Тогда каждой непрерывной и достаточно гладкой функции $f(x)$, $x \in \mathcal{F}$, может быть поставлена в соответствие непрерывная кусочно-линейная функция из пространства базисных функций [42]:

$$f_h(x) = \sum_{i=1}^{N_h} f_i \phi_i(x), \quad x \in \mathcal{F}, \quad (2.1)$$

где f_i — значения функции $f(x)$ в узлах сетки x_i , $\phi_i(x)$ — базисные функции.

На разбиении \mathcal{T}^h строятся контрольные объёмы Ω_i таким образом, что их объединение составляет всю расчетную область:

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{N_h} \Omega_n.$$

Рассмотрим конечный элемент w_k с узлами $\{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\}$. Каждому узлу сопоставим часть конечного элемента, которая образована путем соединения центра треугольника (под которым будем понимать его барицентр) с центрами его сторон, и представляет собой четырехугольник. Тогда конечный элемент может быть представлен в виде объединения его частей (рисунок 2.3):

$$w_k = w_k^{i_1} \cup w_k^{i_2} \cup w_k^{i_3}.$$

Контрольный объём для узла сетки с номером i определим как объединение множества четырехугольников w_k^i , инцидентных заданному узлу сетки x_i (рисунок 2.4):

$$\Omega_i = \bigcup_{w_k: x_i \in w_k} w_k^i.$$

На контрольных объёмах определяется пространство пробных функций $\psi_i(x)$:

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \notin \Omega_i. \end{cases} \quad (2.2)$$

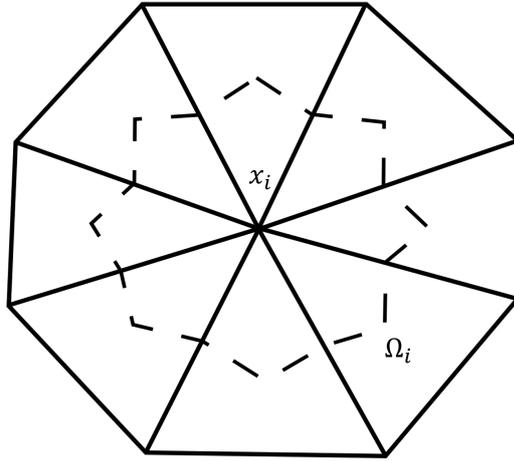


Рис. 2.4. Построение контрольного объёма (x_i — узел сетки, Ω_i — контрольный объём вокруг вершины x_i , пунктирная линия — граница контрольного объёма).

Тогда каждой функции $f(x)$, $x \in \mathcal{F}$, может быть поставлена в соответствие кусочно-постоянная функция из пространства пробных функций [43]:

$$f_h(x) = \sum_{i=1}^{N_h} f_i \psi_i(x), \quad x \in \mathcal{F}, \quad (2.3)$$

где f_i — среднее значение функции $f(x)$ в пределах контрольного объёма Ω_i , которое определяется следующим образом:

$$f_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} f(x) dx,$$

где $|\Omega_i|$ — площадь контрольного объёма Ω_i .

Для построения численной схемы также необходимо ввести пробные функции, соответствующие отрезкам пересечений трещин. При этом для согласованности схемы вводимые функции должны быть определены с учётом контрольных объёмов Ω_i . Обозначим через Σ_i множество точек, лежащих одновременно внутри контрольного объёма Ω_i и на отрезках пересечения трещин:

$$\Sigma_i = \left\{ x : x \in \bigcup_{\gamma_{ij}} (\gamma_{ij} \cap \Omega_i) \right\}.$$

Тогда на множествах Σ_i введем пробные функции $\psi_{\Sigma_i}(x)$:

$$\psi_{\Sigma_i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Sigma_i, \\ 0, & x \notin \Sigma_i. \end{cases} \quad (2.4)$$

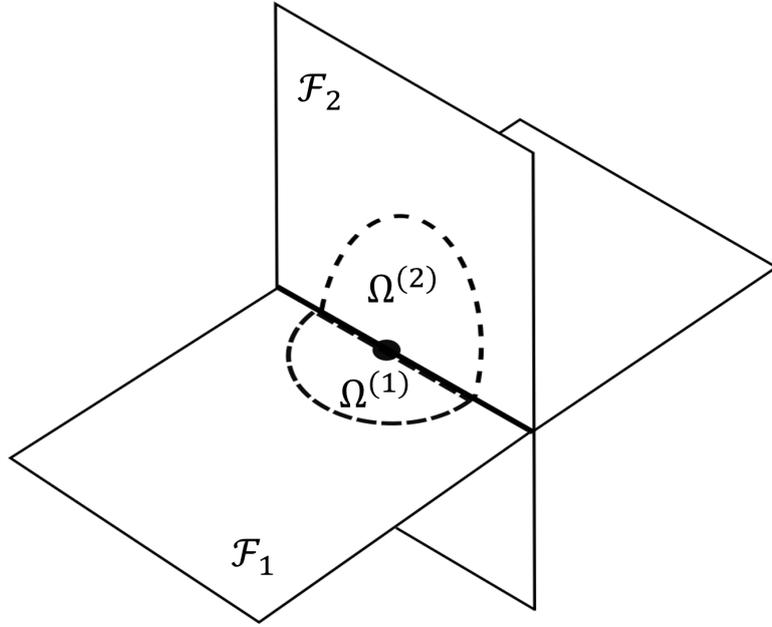


Рис. 2.5. Пример контрольного объёма для двух пересекающихся трещин.

Пусть \mathcal{N} — множество узлов сетки. Разобъём его на два подмножества:

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{N}_{\gamma}, \quad \mathcal{N}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{N}_{\gamma} = \emptyset,$$

где $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ — узлы, лежащие во внутренней области трещин, \mathcal{N}_{γ} — узлы, лежащие на пересечениях трещин.

Рассмотрим, как устроены контрольные объёмы, соответствующие узлам сетки, лежащим на пересечениях трещин. Возьмем узел $x \in \mathcal{N}_{\gamma}$, и пусть Ω — соответствующий ему контрольный объём. Тогда Ω может быть представлен в следующем виде:

$$\Omega = \bigcup \Omega^{(k)}, \tag{2.5}$$

где $\Omega^{(k)} = \Omega \cap \mathcal{F}_k$ — часть контрольного объёма, лежащая в трещине \mathcal{F}_k . На рисунке 2.5 представлен пример контрольного объёма для двух пересекающихся трещин.

При этом стоит заметить, что контрольный объём в каждой трещине также разбивается на части, относительно отрезка пересечения (рисунок 2.6):

$$\Omega^{(k)} = \bigcup \Omega^{(k,i)}. \tag{2.6}$$

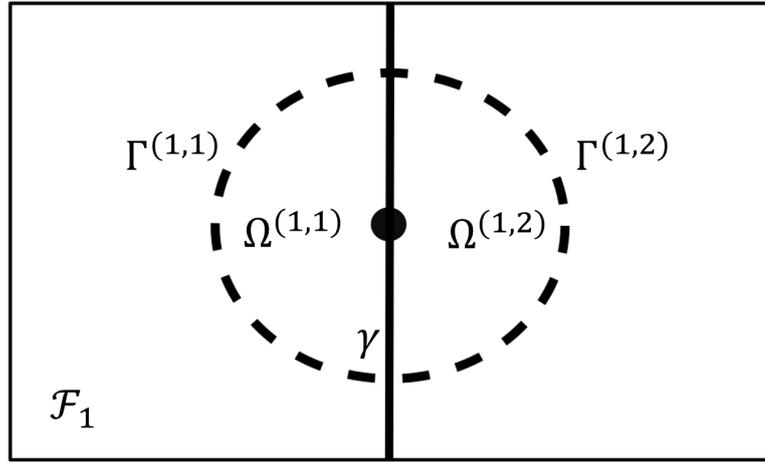


Рис. 2.6. Пример разбиения контрольного объёма по отрезку пересечения трещин $(\Gamma^{(1,1)}, \Gamma^{(1,2)})$ — части границ контрольных объёмов $\Omega^{(1,1)}, \Omega^{(1,2)}$, лежащие внутри трещины \mathcal{F}_1 , γ — часть границ контрольных объёмов $\Omega^{(1,1)}, \Omega^{(1,2)}$, лежащая на линии пересечения трещин).

2.3 Алгоритмы расчета однофазного течения в трещинах

2.3.1 Аппроксимации по времени

Для аппроксимации первого уравнения системы (1.8) по времени могут быть использованы:

- явно-неявная схема (в том случае, если коэффициенты уравнения слабо зависят от давления):

$$M(p) \frac{\hat{p} - p}{\Delta t} + \operatorname{div} [-T(p)(\nabla \hat{p} + \rho(p)\vec{g}_n)] = 0.$$

В данном случае получается линейное дифференциальное уравнение относительно \hat{p} .

- полностью неявная схема:

$$M(\hat{p}) \frac{\hat{p} - p}{\Delta t} + \operatorname{div} [-T(\hat{p})(\nabla \hat{p} + \rho(\hat{p})\vec{g}_n)] = 0. \quad (2.7)$$

В данном случае получается нелинейное дифференциальное уравнение относительно \hat{p} .

В приведенных выше соотношениях Δt — шаг по времени, p — приближенное значение решения в момент времени t , \hat{p} — приближенное значение решения в момент времени $\hat{t} = t + \Delta t$.

В данной работе для решения системы (1.8) будет использована полностью неявная схема.

2.3.2 Аппроксимации методом Петрова-Галеркина

Аппроксимации уравнений будут выполнены с использованием метода конечных элементов/конечных объёмов. Важным свойством метода конечных объёмов является то, что он обеспечивает локальную консервативность для таких величин, как масса, количество движения и энергия на любой группе конечных объёмов и, следовательно, на всей расчетной области [44].

Для построения дискретной задачи уравнение (2.7) умножается на ψ_i , $i = \overline{1, N_h}$ и интегрируется по всей расчетной области \mathcal{F} . Затем в полученных выражениях \hat{p} и p заменяются на кусочно-линейные приближения \hat{p}_h и p_h .

В результате получается эквивалентная система интегральных соотношений:

$$\int_{\mathcal{F}} M(\hat{p}_h) (\hat{p}_h - p_h) \psi_i d\sigma + \Delta t \int_{\mathcal{F}} \operatorname{div} (-T(\hat{p}_h) [\nabla \hat{p}_h + \rho(\hat{p}_h) \vec{g}]) \psi_i d\sigma = 0, \quad (2.8)$$

где $i = \overline{1, N_h}$.

В силу определения пробных функций система (2.8) примет вид:

$$\int_{\Omega_i} M(\hat{p}_h) (\hat{p}_h - p_h) d\sigma + \Delta t \int_{\Omega_i} \operatorname{div} (-T(\hat{p}_h) [\nabla \hat{p}_h + \rho(\hat{p}_h) \vec{g}]) d\sigma = 0. \quad (2.9)$$

Каждое из уравнений системы по теореме Остроградского-Гаусса преобразуется к следующему выражению:

$$\int_{\Omega_i} M(\hat{p}_h) (\hat{p}_h - p_h) d\sigma + \Delta t \int_{\partial\Omega_i} -T(\hat{p}_h) (\nabla \hat{p}_h + \rho(\hat{p}_h) \vec{g}, \vec{n}_i) dl = 0, \quad (2.10)$$

где \vec{n}_i — единичная внешняя нормаль к границе контрольного объема $\partial\Omega_i$, (\cdot, \cdot) — скалярное произведение векторов.

Система (2.10) может быть записана в матричном виде:

$$\mathbf{M}(\hat{p}_h) [\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}] + \Delta t \mathbf{A}(\hat{p}_h) \hat{\mathbf{p}} + \Delta t \mathbf{A}_G(\hat{p}_h) = 0, \quad (2.11)$$

где $\hat{\mathbf{p}}$ и \mathbf{p} — вектор неизвестных и вектор значений давления с предыдущего временного слоя, \hat{p}_h — неизвестная функция давления, которая связана с вектором неизвестных формулой (2.1). $\mathbf{M}(\hat{p}_h)$ — матрица масс, $\mathbf{A}(\hat{p}_h)$ — матрица жесткости, $\mathbf{A}_G(\hat{p}_h)$ — вектор потоков, возникающих под действием гравитационных сил. Элементы указанных матриц и вектора определяются

по следующим формулам:

$$\mathbf{M}(\hat{p}_h)_{[i,j]} = \int_{\Omega_i} M(\hat{p}_h) \phi_j d\sigma, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{A}(\hat{p}_h)_{[i,j]} = \int_{\partial\Omega_i} -T(\hat{p}_h) (\nabla\phi_j, \vec{n}_i) dl, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{A}_G(\hat{p}_h)_{[i]} = \int_{\partial\Omega_i} -T(\hat{p}_h) \rho(\hat{p}_h) (\vec{g}, \vec{n}_i) dl. \quad (2.14)$$

Заметим, что, во-первых, номер строки матрицы соответствует номеру узла сетки и, во-вторых, каждая строка в данной матрице описывает потоки через границу контрольного объема соответствующей вершины сетки.

Далее в полученной системе уравнений необходимо учесть граничные условия Неймана и Дирихле. Подробное описание учета граничных условий в системе уравнений (2.11) будет рассмотрено ниже. Сейчас только заметим, что граничное условие Неймана выражается в виде источникового члена в правой части:

$$\mathbf{M}(\hat{p}_h) [\hat{p} - \mathbf{p}] + \Delta t \mathbf{A}(\hat{p}_h) \hat{p} + \Delta t \mathbf{A}_G(\hat{p}_h) = \Delta t \mathbf{f}, \quad (2.15)$$

где \mathbf{f} — вектор источников (стоков), который учитывает граничные условия Неймана.

Система нелинейных уравнений (2.15) для определения значений давления в узлах сетки:

$$\hat{p} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_N)^T \in \mathbb{R}^N, \quad \hat{p}_h = \sum_{i=1}^N \hat{p}_i \phi_i(x),$$

записывается в общем виде:

$$\mathbf{F}(\hat{p}, \mathbf{p}, \Delta t) = 0, \quad \mathbf{F} \in \mathbb{R}^N; \quad \mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_N)^T \in \mathbb{R}^N, \quad (2.16)$$

где \mathbf{p} — известный вектор решения в момент времени t , Δt — шаг по времени.

Система (2.16) решается методом Ньютона, который сводится к итерационному решению специальной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\mathbf{J}(\hat{p}^k, \hat{p}^0) \Delta \mathbf{p} = \mathbf{F}(\hat{p}^k, \hat{p}^0), \\ \hat{p}^{k+1} = \hat{p}^k + \Delta \mathbf{p}, \end{cases} \quad (2.17)$$

где \hat{p}^k — вектор давления на k -ой итерации, $\Delta \mathbf{p}$ — вектор поправок давления, $\mathbf{J}(\hat{p}^k, \hat{p}^0)$ — матрица Якоби, $\mathbf{F}(\hat{p}^k, \hat{p}^0)$ — вектор правой части. Для удобства

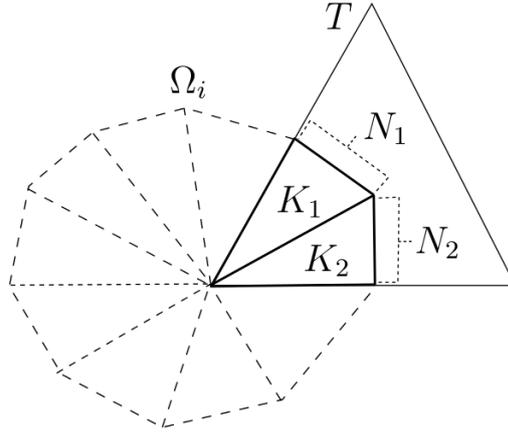


Рис. 2.7. Разбиение части контрольного объема на треугольники.

записи, будем обозначать $\hat{\mathbf{p}}^{k+1}$ как $\hat{\mathbf{p}}$, а $\hat{\mathbf{p}}^0$ как \mathbf{p} .

Полная схема алгоритма метода Ньютона решения системы нелинейных уравнений (2.16) приведена на схеме 4.

На каждой итерации метода новое $(k + 1)$ -е приближение решения определяется по известному приближенному решению на k -ой итерации с помощью решения линейной системы уравнений относительно поправки давления (2.17). Итерации продолжаются до достижения заданного критерия точности — до тех пор, пока максимальная по модулю поправка вектора решения не станет меньше наперед заданного ε .

Вектор правой части $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$ и матрица Якоби $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$ имеют вид:

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) = \mathbf{M}(\hat{p}_h)(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}) + \Delta t \mathbf{A}(\hat{p}_h) \hat{\mathbf{p}} + \Delta t \mathbf{A}_G(\hat{p}_h) - \Delta t \mathbf{f}, \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) = \mathbf{M}(\hat{p}_h) + \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \mathbf{M}(\hat{p}_h)(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}) + \Delta t \mathbf{A}(\hat{p}_h) + \\ + \Delta t \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \mathbf{A}(\hat{p}_h) \hat{\mathbf{p}} + \Delta t \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \mathbf{A}_G(\hat{p}_h). \end{aligned} \quad (2.19)$$

В соответствии с формулой (2.12) для элемента матрицы масс, который находится на i -ой строке в j -ом столбце, справедливо выражение:

$$\mathbf{M}(\hat{p}_h)_{[i,j]} = \int_{\Omega_i} M(\hat{p}_h) \phi_j d\sigma = \sum_{\Delta_m \cap \Omega_i \neq \emptyset} \int_{\Delta_m \cap \Omega_i} M(\hat{p}_h) \phi_j d\sigma,$$

где Δ_m — треугольники, имеющие непустое пересечение с контрольным объемом Ω_i . Каждая часть контрольного объема, лежащая внутри треугольника, разбивается на два треугольника, как показано на рисунке (2.7). Таким образом интеграл по части контрольного объема Ω_i , лежащей внутри тре-

угольника T , разбивается на два интеграла по треугольникам K_1, K_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\hat{p}_h)_{[i,j]} &= \int_{\Omega_i} M(\hat{p}_h) \phi_j d\sigma = \\ &= \sum_{\Delta_m \cap \Omega_i \neq \emptyset} \left[\int_{K_{mi1}} M(\hat{p}_h) \phi_j d\sigma + \int_{K_{mi2}} M(\hat{p}_h) \phi_j d\sigma \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

В соответствии с формулой (2.13) для элемента матрицы $\mathbf{A}(\hat{p}_h)$, который находится на i -ой строке в j -ом столбце, справедливо выражение:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\hat{p}_h)_{[i,j]} &= \int_{\partial\Omega_i} -T(\hat{p}_h) (\nabla\phi_j, \vec{n}_i) dl = \\ &= \sum_{\Delta_m \in \Omega_i} \left[\int_{\partial\Omega_{i1} \in \Delta_m} -T(\hat{p}_h) (\nabla\phi_j, \vec{n}_{im1}) dl + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial\Omega_{i2} \in \Delta_m} -T(\hat{p}_h) (\nabla\phi_j, \vec{n}_{im2}) dl \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Из формулы (2.21) следует, что интеграл по границе контрольного объёма разбивается на интегралы по сегментам границ, которые лежат внутри треугольников сетки (рисунок 2.7).

Аналогично выражению для элемента матрицы проводимости получается выражение для элемента вектора $\mathbf{A}_G(\hat{p}_h)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_G(\hat{p}_h)_{[i]} &= \int_{\partial\Omega_i} -T(\hat{p}_h) (\rho(\hat{p}_h)g, \vec{n}_i) dl = \\ &= \sum_{\Delta_k \in \Omega_i} \left[\int_{\partial\Omega_{i1} \in \Delta_m} -T(\hat{p}_h) \rho(\hat{p}_h) (\vec{g}, \vec{n}_{im1}) dl + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial\Omega_{i2} \in \Delta_m} -T(\hat{p}_h) \rho(\hat{p}_h) (\vec{g}, \vec{n}_{im2}) dl \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

В случае, когда треугольники примыкают к границе расчетной области, ребра треугольников, которые лежат на границе, образуют границы соответствующих контрольных объёмов. Приграничные треугольники области изображены на рисунке 2.8, границы контрольного объёма в приграничных треугольниках изображены на рисунке 2.9.

В случае, когда на рассматриваемой границе задано условие Дирихле, которое имеет вид постоянного давления, соответствующим элементам вектора

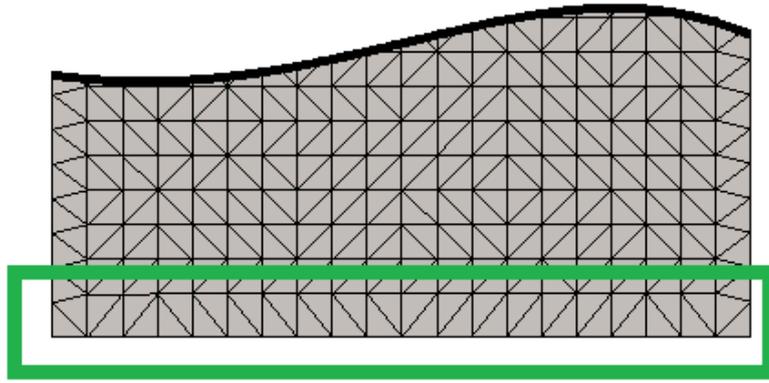


Рис. 2.8. Треугольники на границе области расчета.

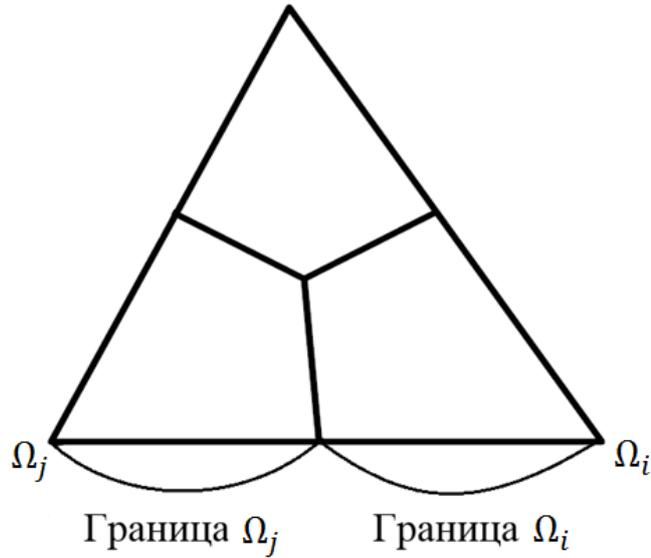


Рис. 2.9. Границы контрольных объемов на границе области.

\hat{p} присваивается значение p_D . В соответствующих данным вершинам строках матрицы Якоби $\mathbf{J}(\hat{p})$ элементы, лежащие на главной диагонали, устанавливаются равными 1, а остальным элементам присваиваются нулевые значения. Элементам вектора правой части \mathbf{F} в соответствующих строках также присваивается нулевое значение. Таким образом, получается, что поправка давления в системе уравнений (2.17) для узлов сетки, на которых задано условие Дирихле, всегда равна нулю. В случае, когда на рассматриваемой границе задано условие Неймана, которое имеет вид:

$$-T(\hat{p}_h)(\nabla \hat{p}_h + \rho(\hat{p}_h)\vec{g}, \vec{n}_i) = Q_N.$$

В формулах (2.21), (2.22) для интегралов по границе области подынтегральное выражение заменяется на значение потока Q_N заданного на границе (в частности оно будет равно нулю для границ с условием непротекания). Данные слагаемые записываются в правую часть уравнения (2.15), образуя источник член \mathbf{f} . Таким образом, происходит учет граничных условий

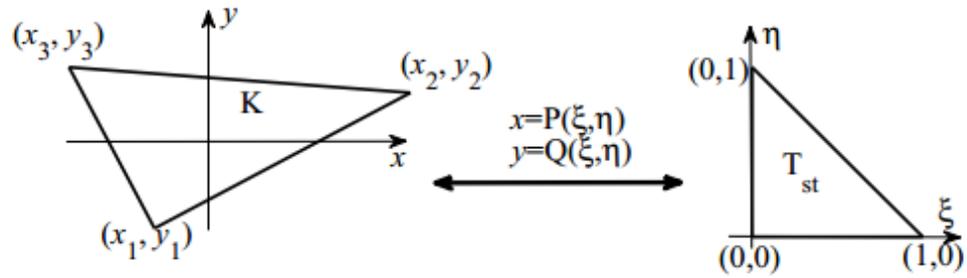


Рис. 2.10. Переход от произвольного треугольника к стандартному.

Неймана.

При расчете интегралов в формулах (2.20)–(2.22) используются формулы численного интегрирования внутри треугольника и на отрезке. В частности, для унификации расчета слагаемых при сборке матрицы масс, интегрирование по произвольному треугольнику сводится к интегрированию по прямоугольному треугольнику, путём преобразования координат, как показано на рисунке (2.10).

Далее будут описаны алгоритмы сборок всех матриц и векторов, которые участвуют в формировании матрицы Якоби и правой части системы (2.17).

Стоит отметить, что во всех описанных ниже алгоритмах сборок матриц и векторов номера элементов указаны в соответствии с локальными номерами вершин треугольников. В свою очередь номера вершин треугольников имеют однозначное отображение в глобальной нумерации сетки. То есть для номеров вершин любого треугольника существуют глобальные индексы среди вершин сетки: $[1, 2, 3] \mapsto [i_1, i_2, i_3]$.

Введем функцию перехода от локальных номеров вершин треугольника к глобальным номерам узлов сетки:

$$G(j) = i_j, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.23)$$

Пусть i, j — номера вершин в локальной нумерации треугольника, тогда обозначим символами $G[i, j]$ и $G[i]$ номера элементов матриц и векторов, соответствующих глобальным номерам вершин i, j , которые определяются по формуле (2.23).

В соответствии с выражениями (2.12), (2.13), каждый элемент матриц

$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \mathbf{M}(\hat{p}_h)(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p})$, $\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \mathbf{A}(\hat{p}_h) \hat{\mathbf{p}}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \mathbf{M}(\hat{p}_h)(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}) \right]_{[i,j]} &= \sum_{k=1}^{N_h} \left[\int_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial p_j} M(\hat{p}_h) \phi_k d\sigma \right] (\hat{p}_k - p_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{N_h} \left[\int_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial \hat{p}_h} M(\hat{p}_h) \frac{\partial \hat{p}_h}{\partial p_j} \phi_k d\sigma \right] (\hat{p}_k - p_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{N_h} \left[\int_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial \hat{p}_h} M(\hat{p}_h) \phi_j \phi_k d\sigma \right] (\hat{p}_k - p_k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \mathbf{A}(\hat{p}_h) \hat{\mathbf{p}} \right]_{[i,j]} &= \sum_{k=1}^{N_h} \left[\int_{\partial \Omega_i} -\frac{\partial T(\hat{p}_h)}{\partial \hat{p}_h} \frac{\partial \hat{p}_h}{\hat{p}_j} (\nabla \phi_k, \vec{n}_i) dl \right] \hat{p}_k = \\ &= \sum_{k=1}^{N_h} \left[\sum_{\Delta_m \in \Omega_i} \left(\int_{\partial \Omega_{i1} \in \Delta_m} -\frac{\partial T(\hat{p}_h)}{\partial \hat{p}_h} \phi_j (\nabla \phi_k, \vec{n}_{im1}) dl + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\partial \Omega_{i2} \in \Delta_m} -\frac{\partial T(\hat{p}_h)}{\partial \hat{p}_h} \phi_j (\nabla \phi_k, \vec{n}_{im2}) dl \right) \right] \hat{p}_k. \end{aligned}$$

Алгоритмы сборки матриц и векторов, участвующих в построении матрицы Якоби и правой части системы уравнений (2.17), приведены на схемах 1 — 3.

Алгоритм 1 Сборка матриц $\mathbf{M}(\hat{p}_h)$, $\mathbf{A}(\hat{p}_h)$

1. Цикл по треугольникам сетки
2. Цикл по вершинам треугольника $i = \overline{1, 3}$
3. Цикл по базисным функциям, отнесенным к вершинам треугольника $j = \overline{1, 3}$:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{M}(\hat{p}_h)]_{G[i,j]} & += \sum_{\gamma=1,2} \int_{K_{i\gamma}} M(\hat{p}_h) \phi_j d\sigma = \\
 & = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{k=1}^3 M(\hat{p}_h)|_{\hat{p}_h=\hat{p}_h(\xi_k)} \phi_j(\xi_k) w_k \frac{|J_{i\gamma}|}{2},
 \end{aligned}$$

где $\{w_k, \xi_k\}$ — веса и координаты квадратурных точек, J_{i1}, J_{i2} — определители матриц Якоби перехода от произвольных треугольников к «стандартным» (рисунок 2.10),

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{A}(\hat{p}_h)]_{G[i,j]} & += \sum_{\gamma=1,2} \int_{N_{i\gamma}} -T(\hat{p}_h) (\nabla \phi_j, \vec{n}_{i\gamma}) dl = \\
 & = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} -T(\hat{p}_h)|_{\hat{p}_h=\hat{p}_h(\xi_r)} w_r (\nabla \phi_j, \vec{n}_{i\gamma}),
 \end{aligned}$$

где $\{w_r, \xi_r\}$ — веса и координаты квадратурных точек на сегментах границ N_1 и N_2 (рисунок 2.7), N_p — количество точек взятых на сегменте.

Алгоритм 2 Сборка матриц $\frac{\partial}{\partial \hat{p}} \mathbf{M}(\hat{p}_h) (\hat{p} - p)$, $\frac{\partial}{\partial \hat{p}} \mathbf{A}(\hat{p}_h) \hat{p}$

1. Цикл по треугольникам сетки
2. Цикл по вершинам треугольника $i = \overline{1, 3}$
3. Цикл по производным $j = \overline{1, 3}$
4. Цикл по базисным функциям, отнесенным к вершинам треугольника $k = \overline{1, 3}$:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\partial}{\partial \hat{p}} \mathbf{M}(\hat{p}_h) (\hat{p} - p) \right]_{G[i,j]} & += \sum_{k=1}^{N_h} \left[\sum_{\gamma=1,2} \int_{K_{i\gamma}} \frac{\partial M(\hat{p}_h)}{\partial \hat{p}_h} \phi_j \phi_k d\sigma \right] (\hat{p}_k - p_k) = \\
 & = \sum_{k=1}^{N_h} \left[\sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^3 \frac{\partial M(\hat{p}_h)}{\partial \hat{p}_h} \Big|_{\hat{p}_h=\hat{p}_h(\xi_r)} \phi_j(\xi_r) \phi_k(\xi_r) w_r \frac{|J_{i\gamma}|}{2} \right] (\hat{p}_k - p_k),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\partial}{\partial \hat{p}} \mathbf{A}(\hat{p}_h) \hat{p} \right]_{G[i,j]} & += \sum_{k=1}^{N_h} \sum_{\gamma=1,2} \left[\int_{N_{i\gamma}} -\frac{\partial T(\hat{p}_h)}{\partial \hat{p}_h} \phi_j (\nabla \phi_k, \vec{n}_{i\gamma}) dl \right] \hat{p}_k = \\
 & = \sum_{k=1}^{N_h} \left[\sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} \left[-\frac{\partial T(\hat{p}_h)}{\partial \hat{p}_h} \Big|_{\hat{p}_h=\hat{p}_h(\xi_r)} w_r \phi_j(\xi_r) (\nabla \phi_k, \vec{n}_{i\gamma}) \right] \right] \hat{p}_k.
 \end{aligned}$$

Алгоритм 3 Сборка вектора $\mathbf{A}_G(\hat{p}_h)$ и матрицы $\frac{\partial}{\partial \hat{p}} \mathbf{A}_G(\hat{p}_h)$

1. Цикл по треугольникам сетки
2. Цикл по вершинам треугольника $i = \overline{1,3}$
3. Цикл по базисным функциям (производным), отнесенным к вершинам треугольника $j = \overline{1,3}$:

$$[\mathbf{A}_G(\hat{p}_h)]_{G[i]} += \sum_{\gamma=1,2} \int_{N_{i\gamma}} -T(\hat{p}_h) \rho(\hat{p}_h) (\vec{g}, \vec{n}_{i1}) dl =$$

$$= \sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} \left[-T(\hat{p}_h) \rho(\hat{p}_h) |_{\hat{p}_h=\hat{p}_h(\xi_r)} w_r (\vec{g}, \vec{n}_{i\gamma}) \right],$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \hat{p}} \mathbf{A}_G(\hat{p}_h) \right]_{G[i,j]} += \sum_{\gamma=1,2} \int_{N_{i\gamma}} -\frac{\partial T(\hat{p}_h) \rho(\hat{p}_h)}{\partial \hat{p}_h} \phi_j(\vec{g}, \vec{n}_{i\gamma}) dl =$$

$$= \sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} \left[-\frac{\partial T(\hat{p}_h) \rho(\hat{p}_h)}{\partial \hat{p}_h} |_{\hat{p}_h=\hat{p}_h(\xi_r)} w_r \phi_j(\xi_r) (\vec{g}, \vec{n}_{i\gamma}) \right].$$

Алгоритм 4 Метод Ньютона

1. **Инициализация:** Выбрать шаг по времени Δt , начальное приближение p_0 , максимальное число итераций k_{max} и коэффициент уменьшения шага по времени $\delta < 1$.
 2. Положить $k = 0$, $\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k = \mathbf{p}^0$.
 3. Вычислить $\mathbf{J}^{(k)}$ и $\mathbf{F}^{(k)}$.
 4. Определить поправку $\Delta \mathcal{P}$ путем решения СЛАУ $-\mathbf{J}^{(k)} \Delta \mathcal{P} = \mathbf{F}^{(k)}$.
 5. По найденной поправке $\Delta \mathcal{P}$ определить скорректированную поправку $\Delta \mathbf{p}$. В простейшем случае $\Delta \mathbf{p} = \Delta \mathcal{P}$.
 6. Положить $\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k + \Delta \mathbf{p}$, $k = k + 1$.
 7. Если удовлетворяется критерий сходимости, то перейти к шагу 9.
 8. **Рестарт:** Если $k \geq k_{max}$, то уменьшить шаг по времени Δt : $\Delta t = \delta \cdot \Delta t$, и перейти к шагу 2, иначе перейти к шагу 4.
 9. **Выход:** Искомое решение это вектор \mathbf{p}^{k+1} .
-

2.4 Алгоритмы расчета двухфазного течения в трещинах

2.4.1 Аппроксимация по времени

Система уравнений (1.24), описывающая течений двухфазной жидкости, записана в форме IMPES. Первые два уравнения (1.24) аппроксимируются по времени по неявной схеме:

$$c_t(\hat{p}_W) \frac{\hat{p}_W - p_W}{\Delta t} + \operatorname{div} [-\lambda_T(\hat{p}_W, S_W) \nabla \hat{p}_W - w \lambda_O(\hat{p}_W, S_W) \nabla p_C - \rho_T(\hat{p}_W) \vec{g}] = 0, \quad (2.24)$$

$$w \rho_W(\hat{p}_W) \frac{\hat{S}_W - S_W}{\Delta t} + \operatorname{div} \left[-w \rho_W(\hat{p}_W) \frac{K K_{r,W}(\hat{S}_W)}{\mu_W} (\nabla \hat{p}_W + \rho_W(\hat{p}_W) \vec{g}) \right] = 0, \quad (2.25)$$

где \hat{p}_W, \hat{S}_W — значения давления и насыщенности с верхнего временного слоя, а p_W, S_W — значения с нижнего временного слоя.

Таким образом, для моделирования двухфазного течения на одном временном слое необходимо сначала решить уравнение для давления опорной фазы (2.24) и пересчитать давление второй фазы через четвертое уравнение системы (1.24), затем рассчитать водонасыщенность, решив уравнение (2.25), и определить насыщенность нефти через третье уравнение системы (1.24). Заметим, что при решении уравнения (2.25), давление \hat{p}_W является известным.

2.4.2 Аппроксимации методом Петрова-Галеркина

Для построения конечномерной задачи в уравнениях (2.24), (2.25) производится замена функций p_W и S_W на их непрерывные, кусочно-линейные (2.1) и кусочно-постоянные аналоги (2.3) [27, 45]:

$$c_t(\hat{p}_{Wh}) \frac{\hat{p}_{Wh} - p_{Wh}}{\Delta t} + \operatorname{div} [-\lambda_T(\hat{p}_{Wh}, S_{Wh}) \nabla \hat{p}_{Wh} - w \lambda_O(\hat{p}_{Wh}, S_{Wh}) \nabla p_C - \rho_T(\hat{p}_W) \vec{g}] = 0, \quad (2.26)$$

$$w \rho_W(\hat{p}_{Wh}) \frac{\hat{S}_{Wh} - S_{Wh}}{\Delta t} + \operatorname{div} [w \rho_W(\hat{p}_{Wh}) \vec{v}_W] = 0. \quad (2.27)$$

Таким образом получается постановка задачи в дискретном пространстве относительно неизвестных p_{Wi}, S_{Wi} $i = \overline{1, N_h}$.

Рассмотрим уравнение (2.26). Умножим его на $\psi_i(x)$, $i = \overline{1, N_h}$ и проинтегрируем по всей расчетной области \mathcal{F} . Тогда, в соответствии с определением

функций $\psi_i(x)$, получается система следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} w c_t \frac{\hat{p}_{Wh} - p_{Wh}}{\Delta t} d\sigma + \int_{\Omega_i} \operatorname{div} [-\lambda_T \nabla \hat{p}_{Wh}] d\sigma + \\ + \int_{\Omega_i} \operatorname{div} [-w \lambda_O \nabla p_C] d\sigma + \int_{\Omega_i} \operatorname{div} [-\rho_T \vec{g}] d\sigma = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Система (2.28) может быть переписана в матричном виде:

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})(\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{W}} - \mathbf{p}_{\mathbf{W}}) + \mathbf{A}_{\mathbf{W}}(\hat{p}_{Wh})\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{W}} + \mathbf{A}_{\mathbf{C}}(\hat{p}_{Wh}) + \mathbf{A}_{\mathbf{G}}(\hat{p}_{Wh}) = 0, \quad (2.29)$$

где

$$\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{W}} = [\hat{p}_{W_1} \dots \hat{p}_{W_{N_h}}]^T$$

— вектор неизвестных,

$$\mathbf{p}_{\mathbf{W}} = [p_{W_1} \dots p_{W_{N_h}}]^T$$

— вектор значений опорного давления с предыдущего временного слоя. Входящие в уравнение (2.29) матрицы определяются выражениями:

$$[\mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})]_{G[i,j]} = \int_{\Omega_i} c_t(\hat{p}_{Wh}) \phi_j d\sigma, \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_{\mathbf{W}}(\hat{p}_{Wh})]_{G[i,j]} &= \int_{\Omega_i} \operatorname{div} [-\lambda_T(\hat{p}_{Wh}) \nabla \phi_j] d\sigma = \\ &= \int_{\partial\Omega_i} -\lambda_T(\hat{p}_{Wh}) (\nabla \phi_j, \vec{n}_i) dl, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_{\mathbf{C}}(\hat{p}_{Wh})]_{G[i]} &= \int_{\Omega_i} \operatorname{div} [-w \lambda_O(\hat{p}_{Wh}) \nabla p_C] d\sigma = \\ &= \int_{\partial\Omega_i} -w \lambda_O(\hat{p}_{Wh}) (\nabla p_C, \vec{n}_i) dl, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$[\mathbf{A}_{\mathbf{G}}(\hat{p}_{Wh})]_{G[i]} = \int_{\Omega_i} \operatorname{div} [-\rho_T(\hat{p}_{Wh}) \vec{g}] d\sigma = \int_{\partial\Omega_i} -\rho_T(\hat{p}_{Wh}) (\vec{g}, \vec{n}_i) dl, \quad (2.33)$$

где \vec{n}_i — единичный вектор внешней нормали к границе контрольного объема Ω_i .

Система уравнений (2.29) является нелинейной и для её решения будет применен метод Ньютона.

При помощи аналогичных операций выполняется переход от дифференциального уравнения (2.27) к системе интегральных:

$$\int_{\Omega_i} w \rho_W \frac{\hat{S}_{Wi} - S_{Wi}}{\Delta t} d\sigma + \int_{\Omega_i} \operatorname{div} [-w \rho_W \vec{v}_W] d\sigma = 0, \quad i = \overline{1, N_h}. \quad (2.34)$$

Полученную систему аналогично можно записать в матричном виде:

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_S(\hat{p}_{Wh})(\hat{\mathbf{S}}_W - \mathbf{S}_W) + \mathbf{A}_S(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh}) \hat{\mathbf{p}}_W + \mathbf{A}_{GS}(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh}) = 0, \quad (2.35)$$

где $\hat{\mathbf{S}}_W$ — вектор неизвестных, \mathbf{S}_W — вектор значений водонасыщенности с предыдущего временного слоя.

$$[\mathbf{M}_S(\hat{p}_{Wh})]_{[i]} = \int_{\Omega_i} w \rho_W(\hat{p}_{Wh}) d\sigma, \quad (2.36)$$

$$[\mathbf{A}_S(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})]_{[i,j]} = \int_{\Omega_i} \operatorname{div} [-w \rho_W(\hat{p}_{Wh}) \lambda_W(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh}) \nabla \phi_j] d\sigma, \quad (2.37)$$

$$[\mathbf{A}_{GS}(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})]_{[i]} = \int_{\Omega_i} \operatorname{div} [-w \rho_W^2(\hat{p}_{Wh}) \lambda_W(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh}) \vec{g}] d\sigma. \quad (2.38)$$

Таким образом, задача свелась к решению систем нелинейных уравнений (2.29), (2.35).

2.4.3 Расчет функций относительных фазовых проницаемостей

При построении систем численной схемы необходимо вычислять потоки через границы контрольных объёмов (рисунок 2.4). При расчете потоков, необходимо определить относительные фазовые проницаемости на границе контрольного объема. Насыщенность является кусочно-постоянной функцией (2.3) и на границе контрольного объема терпит разрыв (рисунок 2.11). Соответственно, функция относительной фазовой проницаемости также терпит разрыв.

Для определения значений функций относительных фазовых проницаемостей на границе контрольного объема используется метод направленных разностей («upwind») [27], которая заключается в том, что значение ОФП

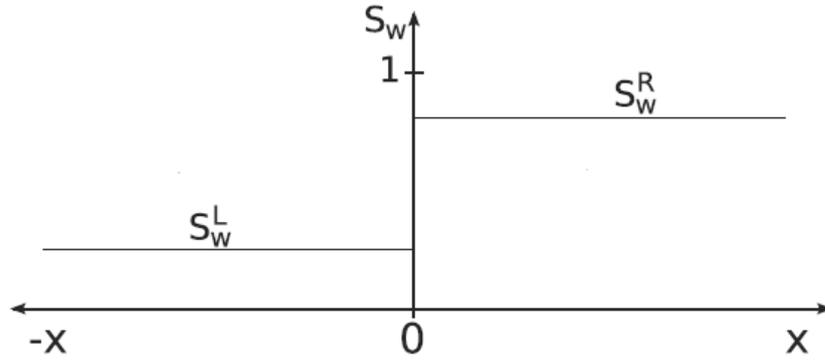


Рис. 2.11. Пример разрыва насыщенности на границе контрольного объема.

выбирается согласно критерию:

$$K_{r\alpha}|_{\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j} = \begin{cases} K_{r\alpha,i}, & (-(\nabla p_\alpha + \rho_\alpha \vec{g}), \vec{n}_i) > 0, \\ K_{r\alpha,j}, & (-(\nabla p_\alpha + \rho_\alpha \vec{g}), \vec{n}_i) < 0, \end{cases}$$

где $\alpha = W, O$; \vec{n}_i — единичный вектор внешней нормали к границе контрольного объема Ω_i .

2.4.4 Расчет градиента функции капиллярного давления

Как отмечалось ранее, капиллярное давление может быть задано в качестве функции раскрытия трещины или водонасыщенности. В первом случае предполагается, что функция угла смачиваемости является непрерывной и гладкой во всей области расчета, а раскрытие трещины задается непрерывной функцией вида (2.1). В результате функция капиллярного давления также является непрерывной и гладкой на границе контрольных объемов. Гладкость капиллярного давления необходима при построении численной схемы в выражении (2.32). Если раскрытие задаётся в виде зависимости от давлений фаз, то непрерывность и гладкость функции капиллярного давления полностью определяются характером данной зависимости.

Во втором случае, в силу того, что функция насыщенности разрывна (2.1), функция капиллярного давления также является разрывной. На границе контрольных объемов терпит разрыв и производная функции капиллярного давления. При расчете градиента капиллярного давления в выражении (2.32), предполагается что функция капиллярного давления задается функцией вида (2.1).

2.4.5 Решение уравнения давления

Система (2.29), по аналогии с однофазным случаем, решается методом Ньютона, который сводится к итерационному решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} -\mathbf{J}(\hat{\mathbf{p}}_W^k, \hat{\mathbf{p}}_W^0) \Delta \mathbf{p}_W &= \mathbf{F}(\hat{\mathbf{p}}_W^k, \hat{\mathbf{p}}_W^0), \\ \hat{\mathbf{p}}_W^{k+1} &= \hat{\mathbf{p}}_W^k + \Delta \mathbf{p}_W, \end{aligned} \quad (2.39)$$

где $\hat{\mathbf{p}}_W^k$ — вектор давления на k -ой итерации, $\Delta \mathbf{p}_W$ — вектор поправок давления, $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{p}}_W^k, \hat{\mathbf{p}}_W^0)$ — матрица Якоби, $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{p}}_W^{k+1}, \hat{\mathbf{p}}_W^0)$ — вектор правой части. Для удобства записи, будем обозначать $\hat{\mathbf{p}}_W^k$ как $\hat{\mathbf{p}}_W$, а $\hat{\mathbf{p}}_W^0$ как \mathbf{p}_W .

Вектор правой части $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{p}}_W, \mathbf{p}_W)$ и матрица Якоби $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{p}}_W, \mathbf{p}_W)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\hat{\mathbf{p}}_W, \mathbf{p}_W) &= \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})(\hat{\mathbf{p}}_W - \mathbf{p}_W) + \mathbf{A}_W(\hat{p}_{Wh})\hat{\mathbf{p}}_W + \\ &\quad + \mathbf{A}_C(\hat{p}_{Wh}) + \mathbf{A}_G(\hat{p}_{Wh}), \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\hat{\mathbf{p}}_W, \mathbf{p}_W) &= \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\hat{p}_{Wh}) + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{p}}_W} (\hat{\mathbf{p}}_W - \mathbf{p}_W) + \\ &\quad + \mathbf{A}_W(\hat{p}_{Wh}) + \frac{\partial \mathbf{A}_W(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{p}}_W} \hat{\mathbf{p}}_W + \frac{\partial \mathbf{A}_C(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{p}}_W} + \frac{\partial \mathbf{A}_G(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{p}}_W}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

2.4.6 Решение уравнения насыщенности

Как отмечалось ранее, для решения уравнения насыщенности также применяется неявная схема расчета. При решении системы нелинейных уравнений (2.35) будет использован метод Ньютона.

$$\begin{aligned} -\mathbf{J}(\hat{\mathbf{S}}_W^k, \hat{\mathbf{S}}_W^0) \Delta \mathbf{S}_W &= \mathbf{F}(\hat{\mathbf{S}}_W^k, \hat{\mathbf{S}}_W^0), \\ \hat{\mathbf{S}}_W^{k+1} &= \hat{\mathbf{S}}_W^k + \Delta \mathbf{S}_W, \end{aligned} \quad (2.42)$$

где $\hat{\mathbf{S}}_W^k$ — вектор водонасыщенности на k -ой итерации, $\Delta \mathbf{S}_W$ — вектор поправок водонасыщенности, $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{S}}_W^k, \hat{\mathbf{S}}_W^0)$ — матрица Якоби, $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{S}}_W^k, \hat{\mathbf{S}}_W^0)$ — вектор правой части. Для удобства записи, будем обозначать $\hat{\mathbf{S}}_W^k$ как $\hat{\mathbf{S}}_W$, а $\hat{\mathbf{S}}_W^0$ как \mathbf{S}_W .

Вектор правой части $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{S}}_W, \mathbf{S}_W)$ и матрица Якоби $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{S}}_W, \mathbf{S}_W)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\hat{\mathbf{S}}_W, \mathbf{S}_W) &= \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_S(\hat{p}_{Wh})(\hat{\mathbf{S}}_W - \mathbf{S}_W) + \\ &\quad + \mathbf{A}_S(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})\hat{\mathbf{p}}_W + \mathbf{A}_{GS}(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh}), \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\mathbf{J}(\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{W}}, \mathbf{S}_{\mathbf{W}}) = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_{\mathbf{S}}(\hat{p}_{Wh}) + \frac{\partial \mathbf{A}_{\mathbf{S}}(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{W}}} \hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{W}} + \frac{\partial \mathbf{A}_{\mathbf{GS}}(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{W}}}. \quad (2.44)$$

2.4.7 Алгоритмы сборки матриц линеаризованных систем уравнений

Для описания сборки СЛАУ в методе Ньютона для уравнения давления необходимо рассмотреть матрицы и векторы, представленные в формулах (2.40), (2.41).

Матрицы $\mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})$, $\mathbf{A}_{\mathbf{W}}(\hat{p}_{Wh})$ и векторы $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}(\hat{p}_{Wh})$, $\mathbf{A}_{\mathbf{G}}(\hat{p}_{Wh})$ были описаны ранее формулами (2.30)–(2.33). С учетом полученных выражений, остается описать способ вычисления производных, входящих в матрицу Якоби слагаемых:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{W}}} (\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{W}} - \mathbf{p}_{\mathbf{W}}) \right]_{[i,j]} &= \sum_{k=1}^{N_h} \left[\int_{\Omega_i} \frac{\partial c_t(\hat{p}_{Wh})}{\partial p_{W_j}} \phi_k \, d\sigma \right] [\hat{p}_{W_j} - p_{W_j}] = \\ &= \sum_{k=1}^{N_h} \left[\int_{\Omega_i} \frac{\partial c_t(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \frac{\partial \hat{p}_{Wh}}{\partial p_{W_j}} \phi_k \, d\sigma \right] [\hat{p}_{W_j} - p_{W_j}] = \\ &= \sum_{k=1}^{N_h} \left[\int_{\Omega_i} \frac{\partial c_t(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \phi_j \phi_k \, d\sigma \right] [\hat{p}_{W_j} - p_{W_j}]. \quad (2.45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{A}_{\mathbf{W}}(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{W}}} \hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{W}} \right]_{[i,j]} &= \sum_{k=1}^{N_h} \left[\int_{\partial \Omega_i} -\frac{\partial \lambda_T(\hat{p}_{Wh})}{\partial p_{W_j}} (\nabla \phi_k, \vec{n}_i) \, dl \right] \hat{p}_{W_k} = \\ &= \sum_{k=1}^{N_h} \left[\int_{\partial \Omega_i} -w \left[\frac{\partial \lambda_W(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \frac{\partial \hat{p}_{Wh}}{\partial p_{W_j}} + \frac{\partial \lambda_O(\hat{p}_{Oh})}{\partial \hat{p}_{Oh}} \frac{\partial \hat{p}_{Oh}}{\partial p_{W_j}} \right] (\nabla \phi_k, \vec{n}_i) \, dl \right] \hat{p}_{W_k} = \\ &= \sum_{k=1}^{N_h} \left[\int_{\partial \Omega_i} -w \left[\frac{\partial \lambda_W(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} + \frac{\partial \lambda_O(\hat{p}_{Oh})}{\partial \hat{p}_{Oh}} \right] \phi_j (\nabla \phi_k, \vec{n}_i) \, dl \right] \hat{p}_{W_k}. \quad (2.46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \mathbf{A}_C(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{p}}_W} \right]_{[i,j]} &= \int_{\partial \Omega_i} -w \frac{\partial \lambda_O(\hat{p}_{Wh})}{\partial p_{Wj}} (\nabla p_C, \vec{n}_i) dl = \\
&= \int_{\partial \Omega_i} -w \frac{\partial \lambda_O(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \frac{\partial \hat{p}_{Wh}}{\partial p_{Wj}} (\nabla p_C, \vec{n}_i) dl = \\
&= \int_{\partial \Omega_i} -w \frac{\partial \lambda_O(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \phi_j (\nabla p_C, \vec{n}_i) dl. \quad (2.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \mathbf{A}_G(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{p}}_W} \right]_{[i,j]} &= \int_{\partial \Omega_i} -\frac{\partial \rho_T(\hat{p}_{Wh})}{\partial p_{Wj}} (\vec{g}, \vec{n}_i) dl = \\
&= \int_{\partial \Omega_i} -\frac{\partial \rho_T(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Whj}} \frac{\partial \hat{p}_{Wh}}{\partial p_{Wj}} (\vec{g}, \vec{n}_i) dl = \int_{\partial \Omega_i} -\frac{\partial \rho_T(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \phi_j (\vec{g}, \vec{n}_i) dl. \quad (2.48)
\end{aligned}$$

Легко заметить, что каждый контрольный объем (граница контрольного объема) может быть представлен в виде объединения частей (границ) контрольных объемов, лежащих в треугольниках (рисунок 2.4):

$$\Omega_i = \bigcup_k (\Delta_k \cap \Omega_i), \quad \partial \Omega_i = \bigcup_k (\Delta_k \cap \partial \Omega_i),$$

где Δ_k — треугольники сетки.

Каждая часть контрольного объема, лежащая внутри треугольника, разбивается на два треугольника, как показано на рисунке (2.7). Соответственно каждый из интегралов в представленных ранее формулах может быть представлен в виде суммы интегралов по частям контрольного объема (по частям границы).

Согласно последнему утверждению выражения (2.30)–(2.33) могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})]_{G[i,j]} &= \int_{\Omega_i} c_t(\hat{p}_{Wh}) \phi_j d\sigma = \sum_{\Delta_k \cap \Omega_i \neq \emptyset} \int_{\Omega_i \in \Delta_k} c_t(\hat{p}_{Wh}) \phi_j d\sigma = \\
&= \sum_{\Delta_k \cap \Omega_i \neq \emptyset} \left(\int_{\Omega_{i1} \in \Delta_k} c_t(\hat{p}_{Wh}) \phi_j d\sigma + \int_{\Omega_{i2} \in \Delta_k} c_t(\hat{p}_{Wh}) \phi_j d\sigma \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}_W(\hat{p}_{Wh})]_{G[i,j]} &= \int_{\partial\Omega_i} -\lambda_T(\hat{p}_{Wh}) (\nabla\phi_j, \vec{n}_i) dl = \\
&= \sum_{\Delta_k \cap \partial\Omega_i \neq \emptyset} \int_{\partial\Omega_i \in \Delta_k} -\lambda_T(\hat{p}_{Wh}) (\nabla\phi_j, \vec{n}_i) dl = \\
&= \sum_{\Delta_k \cap \partial\Omega_i \neq \emptyset} \left(\int_{\partial\Omega_{i1} \in \Delta_k} -\lambda_T(\hat{p}_{Wh}) (\nabla\phi_j, \vec{n}_i) dl + \int_{\partial\Omega_{i2} \in \Delta_k} -\lambda_T(\hat{p}_{Wh}) (\nabla\phi_j, \vec{n}_i) dl \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}_C(\hat{p}_{Wh})]_{G[i]} &= \sum_{\Delta_k \cap \partial\Omega_i \neq \emptyset} \left(\int_{\partial\Omega_{i1} \in \Delta_k} -w\lambda_O(\hat{p}_{Wh}) (\nabla p_C, \vec{n}_i) dl + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\partial\Omega_{i2} \in \Delta_k} -w\lambda_O(\hat{p}_{Wh}) (\nabla p_C, \vec{n}_i) dl \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}_G(\hat{p}_{Wh})]_{G[i]} &= \\
&= \sum_{\Delta_k \cap \partial\Omega_i \neq \emptyset} \left(\int_{\partial\Omega_{i1} \in \Delta_k} -\rho_T(\hat{p}_{Wh}) (\vec{g}, \vec{n}_i) dl + \int_{\partial\Omega_{i2} \in \Delta_k} -\rho_T(\hat{p}_{Wh}) (\vec{g}, \vec{n}_i) dl \right).
\end{aligned}$$

Для описания алгоритмов сборки матриц

$$\frac{\partial \mathbf{A}_S(\hat{s}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{s}}_W}, \quad \frac{\partial \mathbf{A}_{GS}(\hat{s}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{s}}_W},$$

вводятся обозначения

$$W_N(\hat{p}_{Wh}) = \frac{Kw\rho_W(\hat{p}_{Wh})}{\mu_W(\hat{p}_{Wh})}, \quad W_G(\hat{p}_{Wh}) = W_N(\hat{p}_{Wh})\rho_W.$$

С учетом формулы (2.37) и преобразований для выражений (2.30)–(2.33) строка матрицы

$$\frac{\partial \mathbf{A}_S(\hat{s}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{s}}_W}$$

принимает вид:

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\Omega_i} -W_N(\hat{p}_{Wh}) \frac{\partial K_{rW}(\hat{S}_{Wh})}{\partial \hat{S}_{W,i}} (\nabla \hat{p}_W, \vec{n}_i) dl = \\
& \sum_{\Delta_k \cap \partial\Omega_i \neq \emptyset} \left[\int_{\partial\Omega_{i_1} \in \Delta_k} -W_N(\hat{p}_{Wh}) \frac{\partial K_{rW}(\hat{S}_{Wh})}{\partial \hat{S}_{Wh}} \frac{\partial \hat{S}_{Wh}}{\hat{S}_{W,up_1}} (\nabla \hat{p}_W, \vec{n}_i) dl + \right. \\
& \left. + \int_{\partial\Omega_{i_2} \in \Delta_k} -W_N(\hat{p}_{Wh}) \frac{\partial K_{rW}(\hat{S}_{Wh})}{\partial \hat{S}_{Wh}} \frac{\partial \hat{S}_{Wh}}{\hat{S}_{W,up_2}} (\nabla \hat{p}_W, \vec{n}_i) dl \right] = \\
& = \sum_{up_k} \left[\frac{\partial \mathbf{A}_S(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{s}}_W} \right]_{[i, up_k]}
\end{aligned}$$

где up_k — номера ячеек, из которых осуществляется перенос значения насыщенности на границу ячейки.

Алгоритмы сборки матриц и векторов, необходимые для построения матрицы Якоби и вектора правой части системы уравнений (2.39), приведены на схемах 5–7. Алгоритмы сборки матриц и векторов, необходимые для построения матрицы Якоби и вектора правой части системы уравнений (2.42), приведены на схемах 8, 9.

Таким образом, после сборки всех матриц и векторов можно получить матрицы Якоби и правые части систем линейных уравнений в формулах (2.40), (2.41) и (2.43), (2.44).

Алгоритм 5 Сборка матриц $\mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})$, $\mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})$ и векторов $\mathbf{A}_C(\hat{p}_{Wh})$, $\mathbf{A}_G(\hat{p}_{Wh})$

1. Цикл по треугольникам сетки
2. Цикл по вершинам треугольника $i = \overline{1, 3}$:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{A}_C(\hat{p}_{Wh})]_{G[i]} & += \sum_{\gamma=1,2} \int_{N_{i\gamma}} -\lambda_O(\hat{p}_{Wh}) (\nabla p_C, \vec{n}_{i\gamma}) dl = \\
 & = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} \left[-\lambda_O(\hat{p}_{Wh}) |_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} w_r (\nabla p_C, \vec{n}_{i\gamma}) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{A}_G(\hat{p}_{Wh})]_{G[i]} & += \sum_{\gamma=1,2} \int_{N_{i\gamma}} -\rho_T(\hat{p}_{Wh}) (g, \vec{n}_{i\gamma}) dl = \\
 & = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} \left[-\rho_T(\hat{p}_{Wh}) |_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} w_r (g, \vec{n}_{i\gamma}) \right].
 \end{aligned}$$

3. Цикл по базисным функциям, отнесенным к вершинам треугольника $j = \overline{1, 3}$:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})]_{G[i,j]} & += \sum_{\gamma=1,2} \int_{K_{i\gamma}} c_t(\hat{p}_{Wh}) \phi_j d\sigma = \\
 & = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{k=1}^3 c_t(\hat{p}_{Wh}) |_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_k)} \phi_j(\xi_k) w_k \frac{|J_{i\gamma}|}{2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{A}_W(\hat{p}_{Wh})]_{G[i,j]} & += \sum_{\gamma=1,2} \int_{N_{i\gamma}} -\lambda_T(\hat{p}_{Wh}) (\nabla \phi_j, \vec{n}_{i\gamma}) dl = \\
 & = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} \left[-\lambda_T(\hat{p}_{Wh}) |_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} w_r (\nabla \phi_j, \vec{n}_{i\gamma}) \right].
 \end{aligned}$$

Алгоритм 6 Сборка матриц $\frac{\partial \mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_W}(\hat{p}_W - p_W)$, $\frac{\partial \mathbf{A}_W(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_W} \hat{p}_W$

1. Цикл по треугольникам сетки
2. Цикл по вершинам треугольника $i = \overline{1, 3}$
3. Цикл по производным $j = \overline{1, 3}$
4. Цикл по базисным функциям, отнесенным к вершинам треугольника $k = \overline{1, 3}$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_W}(\hat{p}_W - p_W) \right]_{G^{[i,j]}} & += \sum_{\gamma=1,2} \int_{K_{i\gamma}} \frac{\partial c_t(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \phi_j \phi_k d\sigma = \\ & = \left[\sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^3 \frac{\partial c_t(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \Big|_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} \phi_j(\xi_r) \phi_k(\xi_r) w_r \frac{|J_{i\gamma}|}{2} \right] [\hat{p}_{W,k} - p_{W,k}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{A}_W(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_W} \hat{p}_W \right]_{G^{[i,j]}} & += \sum_{\gamma=1,2} \int_{N_{i\gamma}} -\frac{\partial \lambda_T(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \phi_j (\nabla \phi_k, \vec{n}_{i\gamma}) dl = \\ & = \left[\sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} \left[-\frac{\partial \lambda_T(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \Big|_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} \phi_j(\xi_r) w_r (\nabla \phi_k, \vec{n}_{i\gamma}) \right] \right] p_{W,k}. \end{aligned}$$

Алгоритм 7 Сборка матриц $\frac{\partial \mathbf{A}_C(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_W}$, $\frac{\partial \mathbf{A}_G(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_W}$

1. Цикл по треугольникам сетки
2. Цикл по вершинам треугольника $i = \overline{1, 3}$
3. Цикл по производным $j = \overline{1, 3}$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{A}_C(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_W} \right]_{G^{[i,j]}} & += \sum_{\gamma=1,2} \int_{N_{i\gamma}} -w \frac{\partial \lambda_O(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \phi_j (\nabla p_C, \vec{n}_i) dl = \\ & = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} \left[-w \frac{\partial \lambda_O(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \Big|_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} \phi_j(\xi_r) w_r (\nabla p_C, \vec{n}_{i\gamma}) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{A}_G(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_W} \right]_{G^{[i,j]}} & += \sum_{\gamma=1,2} \int_{N_{i\gamma}} -\frac{\partial \rho_T(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \phi_j (\vec{g}, \vec{n}_i) dl = \\ & = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} \left[-\frac{\partial \rho_T(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \Big|_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} \phi_j(\xi_r) w_r (\vec{g}, \vec{n}_{i\gamma}) \right]. \end{aligned}$$

Алгоритм 8 Сборка векторов $\mathbf{M}_S(\hat{p}_{Wh})$, $\mathbf{A}_{GS}(\hat{p}_{Wh})$ и матрицы $\mathbf{A}_S(\hat{p}_{Wh})$

1. Цикл по треугольникам сетки
2. Цикл по вершинам треугольника $i = \overline{1,3}$:

$$[\mathbf{M}_S(\hat{p}_{Wh})]_{G[i]} += \sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^3 \left[-\rho_W(\hat{p}_{Wh}) \Big|_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} w_r \frac{|J_{i\gamma}|}{2} w(\xi_r) \right],$$

3. Цикл по базисным функциям, отнесенным к вершинам треугольника $j = \overline{1,3}$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_S(\hat{p}_{Wh})]_{G[i,j]} & += \sum_{\gamma=1,2} \int_{N_{i\gamma}} -w \rho_W \lambda_W(\hat{p}_{Wh}) (\nabla \phi_j, \vec{n}_{i\gamma}) dl = \\ & = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} \left[-w(\xi_r) [\rho_W(\hat{p}_{Wh}) \lambda_W(\hat{p}_{Wh})] \Big|_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} w_r (\nabla \phi_j, \vec{n}_{i\gamma}) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_{GS}(\hat{p}_{Wh})]_{G[i]} & += \sum_{\gamma=1,2} \int_{N_{i\gamma}} -w \rho_W^2 \lambda_W(\hat{p}_{Wh}) (\vec{g}, \vec{n}_{i\gamma}) dl = \\ & = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} \left[-w(\xi_r) [\rho_W^2(\hat{p}_{Wh}) \lambda_W(\hat{p}_{Wh})] \Big|_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} w_r (\vec{g}, \vec{n}_{i\gamma}) \right]. \end{aligned}$$

Алгоритм 9 Сборка матриц $\frac{\partial \mathbf{A}_S(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{S}_W}$, $\frac{\partial \mathbf{A}_{GS}(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{S}_W}$

1. Цикл по треугольникам сетки
2. Цикл по вершинам треугольника $i = \overline{1,3}$, $\gamma = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{A}_S(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{S}_W} \right]_{G[i, up_\gamma]} & += \\ & += \int_{N_{i\gamma}} -W_N(\hat{p}_{Wh}) \frac{\partial K_{rW}(\hat{S}_{Wh})}{\partial \hat{S}_{Wh}} (\nabla \hat{p}_W, \vec{n}_{i\gamma}) dl = \\ & = \sum_{r=1}^{N_p} \left[-W_N(\hat{p}_{Wh}) \Big|_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} \frac{\partial K_{rW}(\hat{S}_{Wh})}{\partial \hat{S}_{Wh}} \Big|_{\hat{S}_{Wh}=\hat{S}_{W, up_\gamma}} w_r (\nabla \hat{p}_W, \vec{n}_{i\gamma}) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{A}_{GS}(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{S}_W} \right]_{G[i, up_\gamma]} & += \int_{N_{i\gamma}} -W_G(\hat{p}_{Wh}) \frac{\partial K_{rW}(\hat{S}_{Wh})}{\partial \hat{S}_{Wh}} (\vec{g}, \vec{n}_{i\gamma}) dl = \\ & = \sum_{r=1}^{N_p} \left[-W_G(\hat{p}_{Wh}) \Big|_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} \frac{\partial K_{rW}(\hat{S}_{Wh})}{\partial \hat{S}_{Wh}} \Big|_{\hat{S}_{Wh}=\hat{S}_{W, up_\gamma}} w_r (\vec{g}, \vec{n}_{i\gamma}) \right], \end{aligned}$$

2.5 Алгоритмы расчета двухфазного течения в трещинах с кавернами

В данном разделе будет изложен процесс построения численной схемы двухфазного течения в системе трещин и каверн. Аналогичные рассуждения могут быть проведены для модели однофазного течения. Вначале будут введены аппроксимации функций, определенных в расчетной области. Затем будут рассмотрены аппроксимации дифференциальных уравнений по времени и в пространстве.

2.5.1 Конечномерные аппроксимации

Система уравнений (1.28), (1.29) будет аппроксимирована по времени с помощью полностью неявной схемы. В качестве первичных переменных выберем давление нефти p_O и водонасыщенность S_W . Давление воды и нефтенасыщенность могут быть определены через соотношения для капиллярного давления и насыщенных фаз. Тогда система уравнений (1.28), (1.29) примет следующий вид:

$$\frac{\rho_\alpha(\hat{p}_{f,\alpha})w\hat{S}_\alpha - \rho_\alpha(p_{f,\alpha})wS_\alpha}{\Delta t} + \operatorname{div} \left[-\rho_\alpha(\hat{p}_{f,\alpha})w \frac{k_f k_{r,\alpha}^{(f)}(\hat{S}_W)}{\mu_\alpha(\hat{p}_{f,\alpha})} (\nabla \hat{p}_{f,\alpha} + \rho_\alpha(\hat{p}_{f,\alpha})\vec{g}_n) \right] = 0, \quad (2.49)$$

$$\frac{\rho_\alpha(\hat{p}_{v,\alpha})A\hat{S}_\alpha - \rho_\alpha(p_{v,\alpha})AS_\alpha}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial s} \left[-\rho_\alpha(\hat{p}_{v,\alpha})A \frac{k_v k_{r,\alpha}^{(v)}}{\mu(\hat{p}_{v,\alpha})} \left(\frac{\partial \hat{p}_{v,\alpha}}{\partial s} + \rho_\alpha(\hat{p}_{v,\alpha})g_\tau \right) \right] = \hat{q}_{\alpha,f,v}, \quad (2.50)$$

где $\alpha = W, O$, $\hat{p}_{v,\alpha}, \hat{p}_{f,\alpha}, \hat{S}_\alpha$ — неизвестные с нового временного слоя, $p_{v,\alpha}, p_{f,\alpha}, S_\alpha$ — известные значения давления и насыщенности с предыдущего временного слоя, Δt — шаг по времени.

Заметим, что в соответствии с введенными условиями согласования о непрерывности полей давления и потока массы флюидов на границе «трещина»/«каверна», в случае, когда $\vec{x} \in \mathcal{A}$, давления фаз в трещинах и кавернах равны.

Рассмотрим случай, когда $x \in \mathcal{N}_F$. Тогда течение описывается моделью течения в трещинах и дискретизация уравнений проводится аналогично тому, как это сделано в предыдущем разделе: для дискретизации задачи уравнение (2.49) умножается на ψ_i , $i \in \mathcal{I}_F$, где $\mathcal{I}_F = \{i : \Omega_i \cap \mathcal{A} = \emptyset\}$, и интегрирует-

ся по всей расчетной области \mathcal{F} . Затем в полученных выражениях давления \hat{p}_α и p_α заменяются на их кусочно-линейные аппроксимации $\hat{p}_{\alpha,h}$ и $p_{\alpha,h}$, а насыщенности \hat{S}_α и S_α — на кусочно-постоянные приближения $\hat{S}_{\alpha,h}$ и $S_{\alpha,h}$. В результате получается система интегральных соотношений относительно значений давления и насыщенности фаз в точках сетки:

$$\int_{\Omega_i} \frac{\rho_\alpha(\hat{p}_{f,\alpha,h})w\hat{S}_{\alpha,h} - \rho_\alpha(p_{f,\alpha})wS_{\alpha,h}}{\Delta t} d\sigma + \int_{\partial\Omega_i} \left(\vec{Q}_{f,\alpha}(\hat{p}_{f,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}), \vec{n}_i \right) dl = 0, \quad i \in \mathcal{I}_F. \quad (2.51)$$

Рассмотрим случай, когда $x \in \mathcal{N}_\gamma$, и введем обозначение:

$$\mathcal{I}_V = \{ i : \Omega_i \cap \mathcal{A} \neq \emptyset \}$$

— номера всех контрольных объёмов, содержащих отрезки пересечений.

Уравнение (2.49) умножается на $\psi_i, i \in \mathcal{I}_V$, а уравнение (2.50) умножается на $\psi_{\Sigma_i}(x), i \in \mathcal{I}_V$, и оба уравнения интегрируются по всей расчетной области \mathcal{F} . В результате получается система интегральных соотношений:

$$\int_{\Omega_i} \frac{\rho_\alpha(\hat{p}_{f,\alpha,h})w\hat{S}_{\alpha,h} - \rho_\alpha(p_{f,\alpha})wS_{\alpha,h}}{\Delta t} d\sigma + \int_{\Omega_i} \operatorname{div} \left(\vec{Q}_{f,\alpha}(\hat{p}_{f,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}) \right) d\sigma = 0, \quad i \in \mathcal{I}_F, \quad (2.52)$$

$$\int_{\Sigma_i} \frac{\rho_\alpha(\hat{p}_{v,\alpha,h})A\hat{S}_{\alpha,h} - \rho_\alpha(p_{v,\alpha})AS_{\alpha,h}}{\Delta t} dl + \int_{\Sigma_i} \frac{\partial}{\partial s} Q_{v,\alpha}(\hat{p}_{v,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}) dl = \int_{\Sigma_i} \hat{q}_\alpha, \quad i \in \mathcal{I}_V. \quad (2.53)$$

Рассмотрим второе слагаемое уравнения (2.52), описывающее потоки через границу контрольного объёма. Для простоты предположим, что в точке x_i , соответствующей контрольному объёму Ω_i , пересекаются только две тре-

щины, тогда выражение для потока примет вид:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_i} \operatorname{div} \left(\vec{Q}_{f,\alpha}(\hat{p}_{f,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}) \right) d\sigma &= \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_i^k} \operatorname{div} \left(\vec{Q}_{f,\alpha}(\hat{p}_{f,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}) \right) d\sigma = \\
&= \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_i^{k,j}} \left(\vec{Q}_{f,\alpha}(\hat{p}_{f,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}), \vec{n} \right) dl + \\
&+ \sum_{k=1}^2 \int_{\gamma} \left(\vec{Q}_{f,\alpha}(\hat{p}_{f,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}), \vec{n}_k^{(+)} \right) + \left(\vec{Q}_{f,\alpha}(\hat{p}_{f,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}), \vec{n}_k^{(-)} \right) dl, \quad (2.54)
\end{aligned}$$

где Ω_i^k — часть контрольного объёма Ω_i , лежащая внутри k -ой трещины, $\Gamma_i^{k,j}$ — границы частей контрольного объёма, лежащие внутри трещин (рисунок 2.6), γ — отрезок пересечения, разделяющий контрольный объём Ω_i на части (см. рисунки 1.3, 2.5, 2.6).

Ранее, во всех предыдущих работах на тему моделирования течений в системах трещине, предполагалось что последнее слагаемое выражения (2.54) равно нулю. В настоящей работе, в соответствии с введенным условием непрерывности потоков на границе трещина–каверна, данное слагаемое описывает переток жидкости между трещинами и кавернами и определяет источник-вый член в уравнении (2.53):

$$\int_{\Sigma_i} \hat{q}_\alpha = \sum_{k=1}^2 \int_{\gamma} \left(\vec{Q}_{f,\alpha}(\hat{p}_{f,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}), \vec{n}_k^{(+)} \right) + \left(\vec{Q}_{f,\alpha}(\hat{p}_{f,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}), \vec{n}_k^{(-)} \right) dl. \quad (2.55)$$

Предыдущие рассуждения легко обобщаются на случай произвольного количества пересечений трещин в точке x_i .

Соотношения (2.51)–(2.55) представляет собой систему нелинейных уравнений относительно неизвестных $\hat{p}_{O,i}, \hat{S}_{W,i}, i = \overline{1, N_h}$. Данная система может быть представлена в общем виде:

$$A^f \vec{x} + A^v \vec{x} = 0, \quad (2.56)$$

где A^f, A^v — операторы, соответствующие интегральным соотношениям (2.51)–(2.53), вектор $\vec{x} = [\hat{p}_{O,1}, \dots, \hat{p}_{O,N_h}, \hat{S}_{W,1}, \dots, \hat{S}_{W,N_h}]$ — вектор неизвестных. В силу условия согласования непрерывности давлений на границе трещина–каверна, давления фаз в точках пересечений трещин равны давлениям фаз в кавернах и, следовательно, число неизвестных остаётся тем же, как и в случае течения без учёта каверн. В данном случае в системе уравнений в строках соответствующих узлам сетки, которые лежат на пересечениях трещин, появляются дополнительные слагаемые, описывающие течение жидкости в

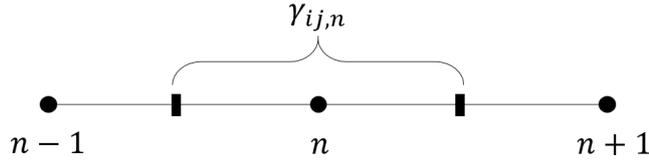


Рис. 2.12. Разбиение отрезка γ_{ij} .

кавернах.

Процесс приведения соотношений (2.51)–(2.52) к системе линейных уравнений и сопутствующие операции численного интегрирования повторяют случай модели двухфазного течений по трещинам, который был описан ранее. Рассмотрим отрезок γ_{ij} , на котором лежат $N_{\gamma_{ij}}$ точек сетки. Разобьем отрезок на множество сегментов:

$$\gamma_{ij} = \bigcup_{n=1}^{N_{\gamma_{ij}}} \gamma_{ij,n},$$

где $\gamma_{ij,n}$ — отрезок, образованный точками середин смежных с n -ой точкой отрезков (рисунок 2.12). Нумерация точек на отрезке γ_{ij} задается в соответствии с вектором $\vec{\tau}$. Множество Σ_i состоит из объединения отрезков $\gamma_{ij,n}$, лежащих внутри контрольного объёма Ω_i . При этом из способа построения контрольных объёмов Ω_i и отрезков разбиения $\gamma_{ij,n}$ следует, что из каждого отрезка γ_{ij} в множество Σ_i может попасть только один сегмент $\gamma_{ij,n}$. Отсюда имеем:

$$\Sigma_i = \left\{ x : x \in \bigcup_{\gamma_{ij} \cap \Omega_i \neq \emptyset} (\gamma_{ij,n}) \right\}.$$

Рассмотрим поочередно первые два слагаемых (2.53):

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_i} \frac{\rho_\alpha(\hat{p}_{v,\alpha,h}) A \hat{S}_{\alpha,h} - \rho_\alpha(p_{v,\alpha,h}) A S_{\alpha,h}}{\Delta t} dl &= \\ &= \sum_{\gamma_{ij,n} \in \Sigma_i} |\gamma_{ij,n}| A_{\gamma_{ij,n}} \frac{\rho_\alpha(\hat{p}_{v,\alpha,i}) \hat{S}_{\alpha,i} - \rho_\alpha(p_{v,\alpha,i}) S_{\alpha,i}}{\Delta t}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_i} \frac{\partial}{\partial s} Q_{v,\alpha}(\hat{p}_{v,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}) dl &= \sum_{\gamma_{ij,n} \in \Sigma_i} \int_{\gamma_{ij,n}} \frac{\partial}{\partial s} Q_{v,\alpha}(\hat{p}_{v,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h}) dl = \\ &= \sum_{\gamma_{ij,n} \in \Sigma_i} \left(Q_{v,\alpha}(\hat{p}_{v,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h})|_{\gamma_{ij,n+1/2}} - Q_{v,\alpha}(\hat{p}_{v,\alpha,h}, \hat{S}_{\alpha,h})|_{\gamma_{ij,n-1/2}} \right), \end{aligned} \quad (2.58)$$

где $\gamma_{ij,n+1/2}$, $\gamma_{ij,n-1/2}$ — граничные точки отрезка $\gamma_{ij,n}$. Теперь рассмотрим вы-

ражение для потока, на границах отрезка:

$$Q_{v,\alpha}|_{\gamma_{ij,n+1/2}} = \left(-\rho_\alpha(\hat{p}_{v,\alpha}) A \frac{k_v k_{r,\alpha}^{(v)}}{\mu(\hat{p}_{v,\alpha})} \right) \Big|_{\gamma_{ij,n+1/2}} \cdot \left(\frac{\hat{p}_{v,\alpha,n+1} - \hat{p}_{v,\alpha,n}}{l_{ij,n+1/2}} + \rho_\alpha(\hat{p}_{v,\alpha}) \gamma_{ij,n+1/2} g_\tau \right), \quad (2.59)$$

где $l_{ij,n+1/2}$ — расстояние между точками с номерами n и $n + 1$.

Из выражения (2.59) видно, что для расчета потоков необходимо вычислить значения плотности и вязкости воды и нефти, относительные фазовые проницаемости, абсолютную проницаемость и площади сечения каверны на границе отрезков. Будем считать, что диаметр сечения задан в центрах отрезков и описывается линейной зависимостью между центрами отрезков. Соответственно, площадь сечения и абсолютная проницаемость определяются непосредственно по значению диаметра на границе отрезка. Для расчета плотности и вязкости необходимо определить соответствующее давление на границе отрезка. Так как функция давления была заменена кусочно-линейным приближением, то, используя давление в узлах сетки, можно определить давление в любой точке области. Для определения относительной фазовой проницаемости используется аппроксимация «против потока» [42], в соответствии с которой на границе отрезка используется значение ОФП из той ячейки, откуда вытекает жидкость.

Таким образом, была построена система нелинейных уравнений (2.51)–(2.55) и описаны аппроксимации потоков в каверне (2.57)–(2.59).

Конечномерная задача (2.56) является системой нелинейных алгебраических уравнений относительно значений давлений и насыщенных в узлах сетки. Для ее решения применяется метод Ньютона. Детали реализации численной схемы и общая схема алгоритма (расчет локальных матриц жесткости конечных элементов, сборка глобальной матрицы жесткости, матрицы Якоби и т.д.) во многом идентичны представленным в предыдущем разделе.

Полученная в результате линеаризации система линейных алгебраических уравнений решается с помощью метода BiCGStab (стабилизированный метод бисопряжённых градиентов) с предобуславливателем ILUTP (неполное LU-разложение в выборе ведущего элемента) [46]. BiCGStab является итерационным методом решения системы линейных алгебраических уравнений крыловского типа. Метод предобуславливания ILUTP является одним из семейства методов, в которых исходная матрица системы линейных алгебраических уравнений представляется в виде произведения нижней треугольной (L) и верхней треугольной (U) матрицы ($LU \approx A$). Данный метод имеет два параметра: первый определяет, какой величины элементы следует учитывать в ходе гауссовского исключения при построении матриц L и U, второй контролирует степень заполнения (число ненулевых элементов) этих матриц.

В процессе расчета временной шаг определяется автоматически. А именно при большом числе (больше 5-ти) итераций метода Ньютона шаг по времени измельчается в $\alpha_{\text{дн}}$ раз, а при малом (меньшем или равном 2-х) увеличивается в $\alpha_{\text{ур}}$ раз. Параметры $\alpha_{\text{ур,дн}}$ являются параметрами метода и задаются в пусковом файле. Их типичные значения варьируются в диапазоне $\alpha_{\text{дн}} \in [1.5, 4]$, $\alpha_{\text{ур}} \in [2, 5]$. Такой подход повышает работоспособность программы, в частности, повышает устойчивость вычислительных алгоритмов при расчете решения на временных слоях. Сходимость метода Ньютона оценивается исходя из величины нелинейной невязки с одновременным контролем значений поправок к давлению и насыщенности $\|\Delta p_o/p_o\|_\infty$, $\|\Delta S_w\|_\infty$, где $\Delta p_o, \Delta S_w$ — изменение решения на итерации метода Ньютона.

В представленных ниже расчетах метод Ньютона считался сошедшимся при достижении величины нелинейной невязки значения 10^{-10} и значений поправок к решению величины 10^{-2} для давления и 10^{-3} для насыщенности. Метод бисопряженных градиентов считался сошедшимся, если невязка решения на i -ой итерации соответствующей системы линейных алгебраических уравнений удовлетворяла выражению $\|r_i\|_2 \leq r_{\text{tol}}\|r_0\|_2 + a_{\text{tol}}$, где $r_{\text{tol}} = 10^{-6}$, $a_{\text{tol}} = 10^{-10}$, r_0 — невязка начального приближения. После решения системы линейных уравнений на итерации метода Ньютона, в случае если полученные насыщенности не лежат в пределах от 0 до 1, проводится масштабирование вектора поправок к насыщенности, для того чтобы все насыщенности лежали в пределах от 0 до 1. Если масштабирование поправок насыщенности имело место, то независимо от того, сошелся метод Ньютона или нет, делается дополнительная нелинейная итерация. В рассмотренных при тестировании и апробации программного комплекса задачах моделирования течений в трещиноватых средах метод Ньютона в среднем сходился за 3 итерации, а метод BiCGStab за 6 итераций.

Глава 3

Комплекс программ

В данной главе приведено описание разработанного программного комплекса и использованных библиотек и фреймворков для разработки.

В настоящее время существуют программные комплексы, разработанные в специализированных институтах (описаны в работах [27, 28]), и коммерческие симуляторы, например [47], в которых реализована модель DFN. Программный комплекс CSMP++ [28] разработан группой из четырех университетов: ETH Zuerich (Switzerland), Montanuniversitaet Leoben (Austria), Heriot Watt University, Edinburgh (UK), The University of Melbourne (Australia). В программном комплексе CSMP++ реализована модель DFN, которая позволяет моделировать двухфазное течение жидкости в трещиновато-поровых коллекторах. Трещины геометрически описываются двумерными поверхностями, а пористая матрица представляется в виде некоторого объёма среды, в котором течение полностью отсутствует, но при этом присутствует переток между трещинами и матрицей под действием капиллярных и гравитационных сил. Течение в трещинах двумерное, при этом капиллярные силы не учитываются, а матрица учитывается в виде источника притока жидкости к трещинам и описывается набором «виртуальных ячеек». Вычислительные алгоритмы построены на основе метода конечных элементов-конечных объёмов.

Программный комплекс, описанный в работе [27], был разработан в Reservoir Engineering Research Institute (Palo Alto, California, USA). В рамках данного симулятора реализована модель DFN, которая позволяет моделировать двухфазное течение несжимаемой жидкости в трещиновато-поровых коллекторах. Трещины описываются набором плоскостей, на которых строится треугольная сетка, а матрица описывается сеткой тетраэдров, построенной геометрически согласованно с сеткой на трещинах. Вычислительные алгоритмы построены на основе метода «конечных элементов»/«конечных объёмов».

Коммерческий симулятор «KAPPA Rubis» [47] является многофункциональным программным обеспечением, которое предназначено для модели-

рования течений в трещиновато-поровых коллекторах в масштабе сектора месторождения. Расчетная сетка в симуляторе представляется в виде диаграммы Вороного системы точек, аппроксимирующей геометрию расчетной области с учетом ее геометрических особенностей, в частности трещин, которые описываются вертикальными плоскостями. Модель течения жидкости трехфазная (нефть, газ, вода). Вычислительные алгоритмы построены на основе метода конечных объёмов.

В настоящей работе разработан программный комплекс, в котором трещины описываются плоскостями в пространстве, которые могут произвольным образом располагаться в пространстве и пересекаться. Предполагается, что течение во вмещающей среде (матрице) и переток между трещинами и матрицей отсутствуют. Течение в трещинах двумерное, двухфазное (вода, нефть). Капиллярные силы учитываются в соответствии с моделью Юнга-Лапласа. Отличительной особенностью рассматриваемого программный комплекс является использованная в нем математическая модель, которая учитывает одномерное течение вдоль каналов (каверн), отнесенных к линиям пересечения трещин. В частности, это позволяет применять разработанный симулятор к анализу течений в образцах керна горных пород.

На основании описанных моделей течения в системах трещин и каверн, а также вычислительных алгоритмов, был разработан программный комплекс на языке программирования *C++*. Входные данные для расчета: геометрическое расположение трещин, начальное состояние, граничные условия и другие параметры могут быть заданы двумя способами в файле формата *yaml*, которой имеет наглядную структуру (см. рисунок 3.1) и удобные языковые инструменты для его обработки. Формат входных файлов *yaml* был выбран по причинам легковесности и легкочитаемости.

Результаты расчетов выгружаются в формате *VTK* [48] и могут быть отображены в программе *Paraview* (см. рисунок 3.2).

```
FRACTURE_SYSTEMS:
System:
- Fracture 1: // первая трещина
  alfa: 45.3      // углы наклона трещины
  betta: 107.5 //
  length: 5.6    // длина и ширина
  width: 4.6     // трещины
  aperture: 7.6e-005 // раскрытие
  center:
    - 6.1 //
    - 3.1 // центр трещины
    - 4.9 //
Fracture 2:
  betta: 115.4
  alfa: 120.4
  length: 4.5
  width: 4.4
  aperture: 3.4e-004
  center:
    - 2.8
    - 7.1
    - 9.5
Fracture 3:
  betta: 104.1
  alfa: 26.5
  length: 5.0
  width: 5.6
  aperture: 2.1e-005
  center:
    - 2.9
    - 2.0
    - 7.6
```

Рис. 3.1. Пример входного файла.

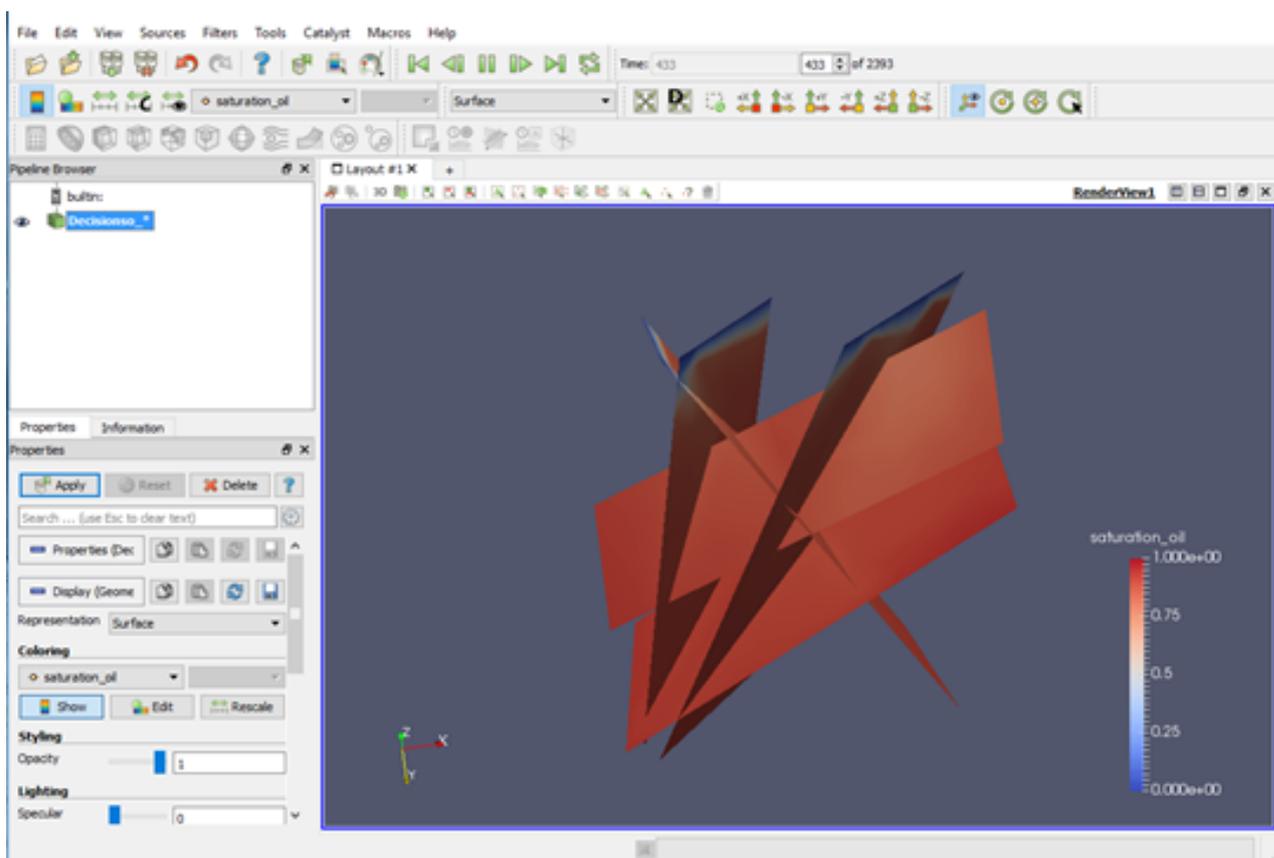


Рис. 3.2. Пример отображения результатов расчета в программе *Paraview*.

Глава 4

Результаты моделирования

В данной главе представлены результаты моделирования двухфазных течений в трещинах с кавернами, которые демонстрируют работоспособность разработанных алгоритмов. Также представлены результаты, демонстрирующие влияние смачиваемости, отношения вязкостей воды и нефти, перепада давления на течение в трещинах с переменным раскрытием. Описаны результаты моделирования течений в трещинах с кавернами, которые показывают влияние течения в каверне, диаметра каверны, капиллярных сил в каверне на динамику вытеснения. Описанные в данной главе результаты диссертационной работы опубликованы в работах [5, 6, 7, 8].

4.1 Моделирование течений в трещинах

Как известно, капиллярные силы могут оказывать значительное влияние на процесс вытеснения в коллекторе [49]. В зависимости от типа породы (рисунок 1.2) процесс вытеснения может протекать по различным сценариям:

- В случае гидрофильной породы вода вытесняет нефть преимущественно из пустот малого размера. При этом образуются кластеры пустот большого размера, в которых остаётся закупоренная нефть. Процесс вытеснения закупоренной нефти может протекать в течение длительного периода времени.
- В случае умеренной смачиваемости вода вытесняет нефть, как из пустот малого размера, так и из пустот большого размера. При проникновении в крупные пустоты, вода остается в их центре, так как в этом случае поверхности пустот гидрофобные.
- В случае гидрофобной породы вода вытесняет нефть преимущественно из пустот большого размера.

Далее рассматриваются тесты, которые демонстрируют влияние различных параметров жидкостей и породы на характер течения жидкости в тре-

щинах. В приведённых ниже тестах свойства трещин и жидкостей задаются параметрами, представленными в таблице 4.3.

Таблица 4.1. Заивисимость КИН от угла смачиваемости.

Плотность воды, кг/м ³	1000
Плотность нефти, кг/м ³	800
Вязкость воды, сПз	0.6
Вязкость нефти, сПз	2.4
Коэффициент поверхностного натяжения, Па·м	0.027

4.1.1 Влияние смачиваемости на течение в трещине с переменным раскрытием

В данном тесте рассматривается уединенная трещина размером 10x8 метров с переменным раскрытием, заданным в интервале [1, 5] мкм. На рисунке 4.1 представлено раскрытие трещины, где жёлтым контуром выделены области с большим раскрытием, а чёрным с малым раскрытием. В начальный момент трещина полностью заполнена нефтью. В качестве граничных условий заданы: постоянная водонасыщенность на верхней границе трещины $S_W=1$, перепад давления между верхней и нижней границей 0.5 Бар.

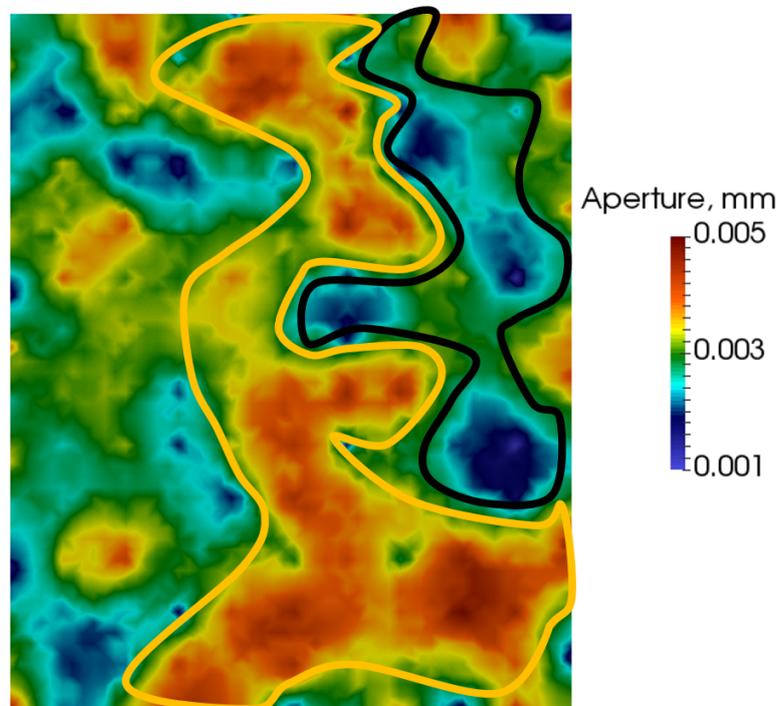


Рис. 4.1. Поле раскрытия трещины.

Моделирование вытеснения проведено для случаев гидрофильной ($\theta = 0$)

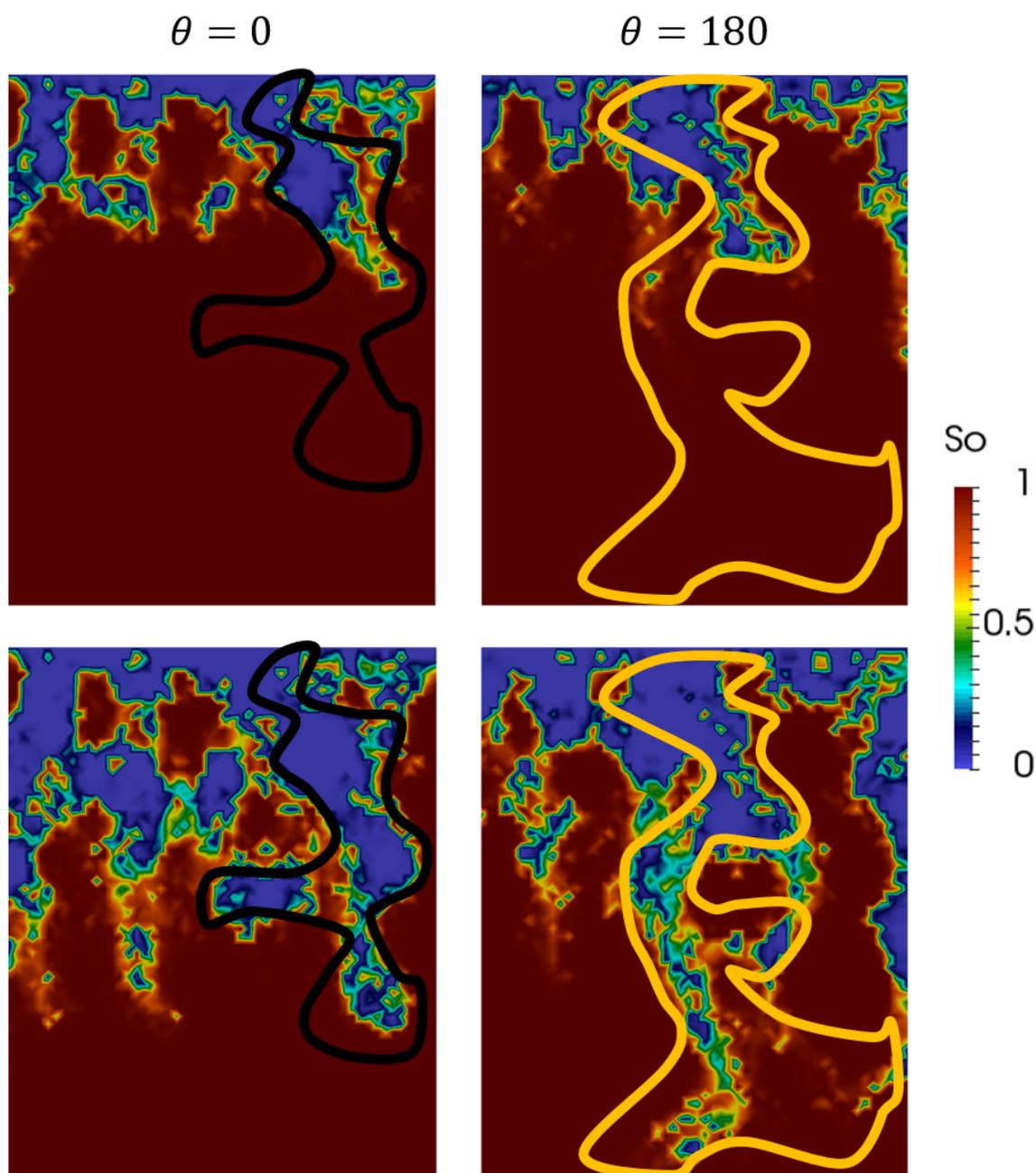


Рис. 4.2. Поле нефтенасыщенности в трещине в процессе вытеснения.

и гидрофобной ($\theta = 180$) породы. На рисунке 4.2 представлено поле нефтенасыщенности в процессе вытеснения на последовательные моменты времени.

На представленных рисунках видно, что в случае гидрофильной породы вытеснение проходит преимущественно по областям с малым раскрытием, при этом нефть остаётся запертой в областях с большим раскрытием. В случае гидрофобной породы наблюдается обратная ситуация. Также можно отметить, что в случае гидрофобной породы фронт вытеснения в трещине продвинулся дальше, чем в случае гидрофильной породы, поскольку вытеснение нефти водой произошло по пустотам большего размера. Для более наглядной демонстрации полученных эффектов в рассматриваемой трещине были явно выделены зоны с малым ($w < 3$ мкм) и большим раскрытием ($w > 3$

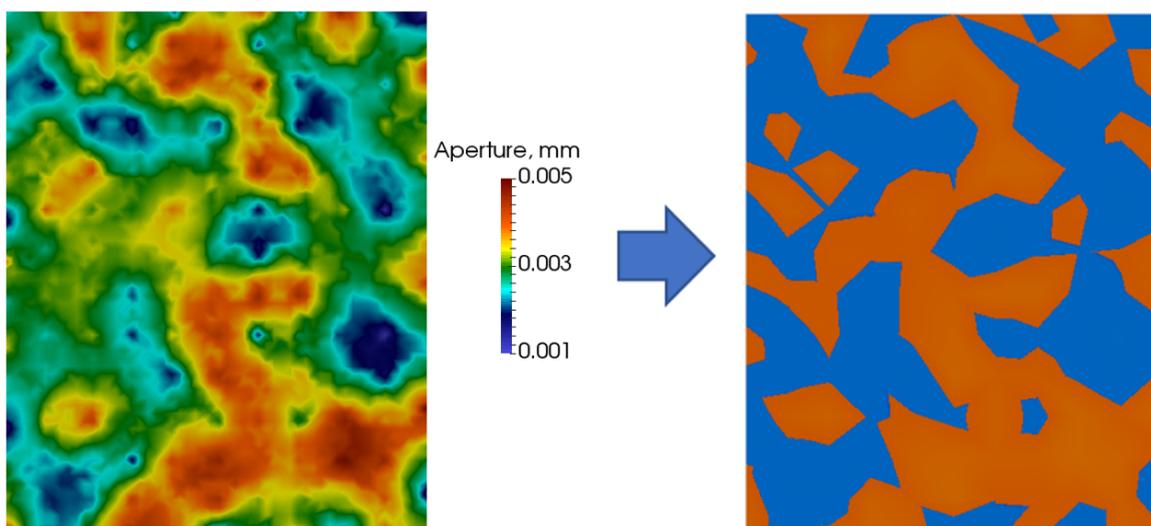


Рис. 4.3. Выделение областей раскрытия в трещине (оранжевым цветом закрашена область с большим раскрытием, синим цветом закрашена область с малым раскрытием).

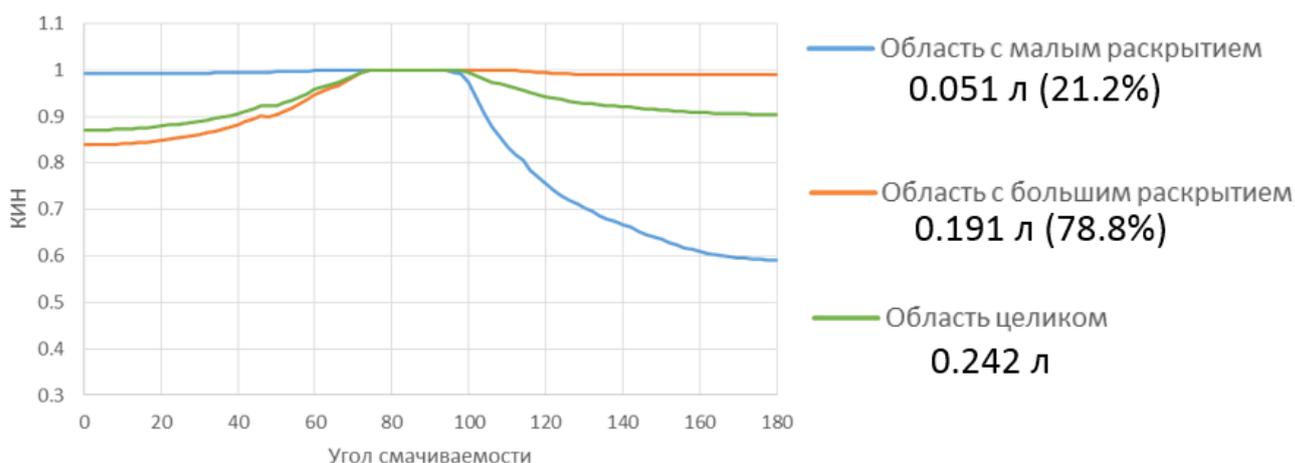


Рис. 4.4. Зависимость коэффициента извлечения нефти от угла смачиваемости.

мкм) (рисунок 4.3). Было проведено моделирование вытеснения при различных углах смачиваемости заданных в диапазоне от 0 до 180 градусов с шагом 2 градуса. По результатам данных расчетов для каждой области раскрытия был вычислен КИН. Результаты расчетов представлены на рисунке 4.4.

Зависимость КИН от угла смачиваемости, представленная на рисунке 4.4, показывает, как изменяется область вытеснения нефти водой при изменении смачиваемости породы. Полученные результаты коррелируют с общеизвестными фактами о влиянии капиллярных сил на процесс вытеснения в поровых коллекторах [50]. Также можно заметить, что в данном тесте капиллярные силы существенно влияют на коэффициент извлечения нефти. В крайних случаях, когда порода полностью гидрофильна или гидрофобна, КИН снижается на 10-12%.

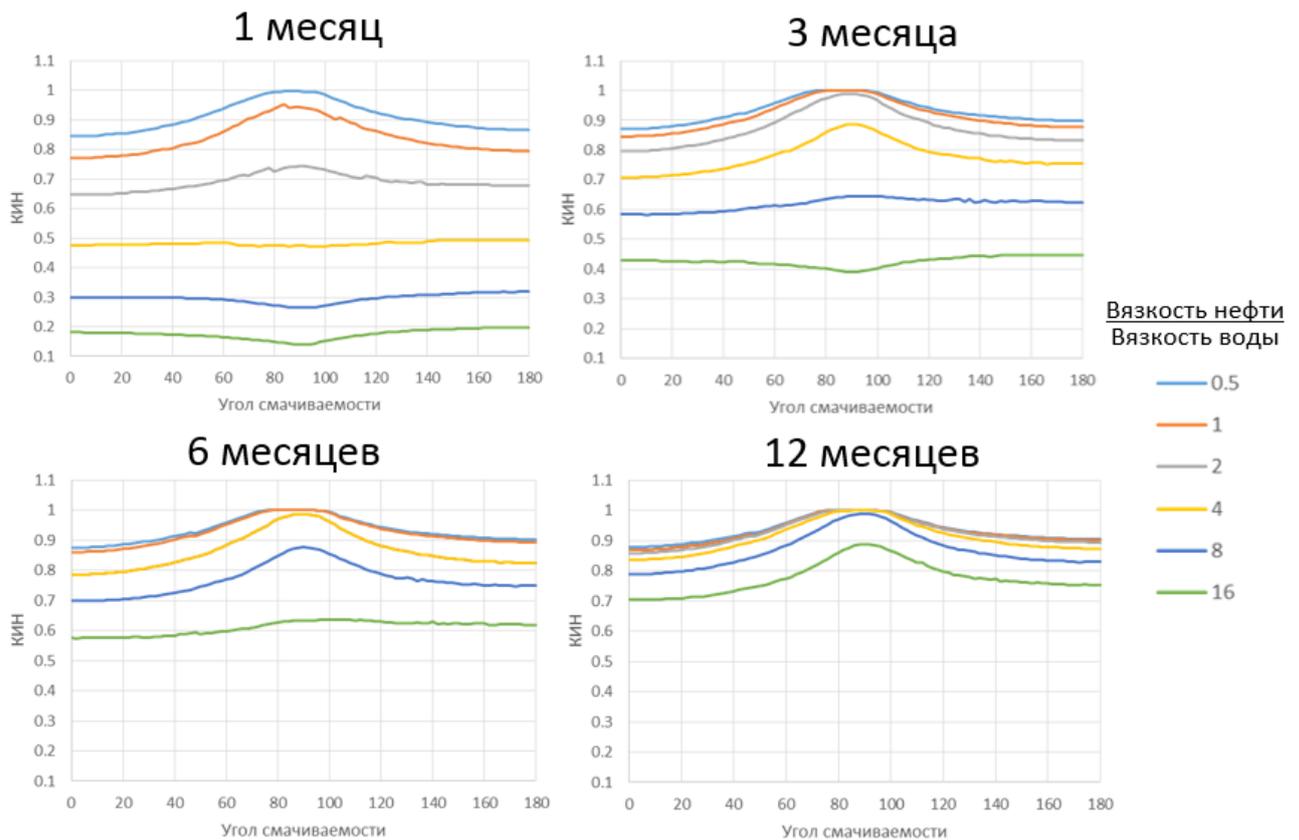


Рис. 4.5. Динамика вытеснения в трещине в зависимости от отношения вязкостей и угла смачиваемости.

4.1.2 Влияние отношения вязкостей нефти и воды на коэффициент извлечения нефти

В данном тесте проведено исследование влияния отношения вязкостей нефти и воды на процесс вытеснения в трещине с переменным раскрытием. Параметры трещины, а также начальные и граничные условия полностью совпадают с параметрами предыдущего теста.

Моделирование вытеснения было проведено для различных углов смачиваемости заданных в диапазоне от 0 до 180 градусов с шагом 2 градуса. Зависимость коэффициента извлечения нефти от угла смачиваемости породы при различных значениях отношения вязкостей фаз представлены на рисунке 4.5. КИН на момент установления течения представлен на рисунке 4.6.

Из рисунка 4.6 видно, что отношение вязкостей практически не влияет на итоговый КИН, а влияет лишь на время его достижения (рисунок 4.5). Наибольшее влияние на КИН оказывает угол смачиваемости.

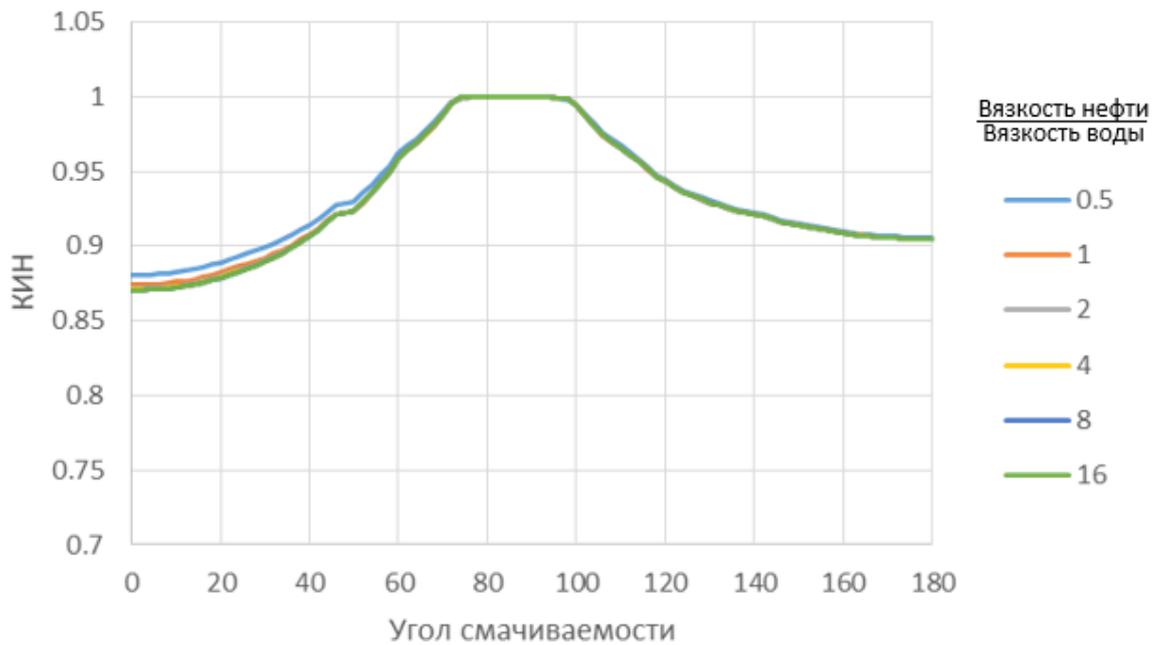


Рис. 4.6. Зависимость коэффициента извлечения нефти от угла смачиваемости (кривые для различного отношения вязкостей μ_o/μ_w).

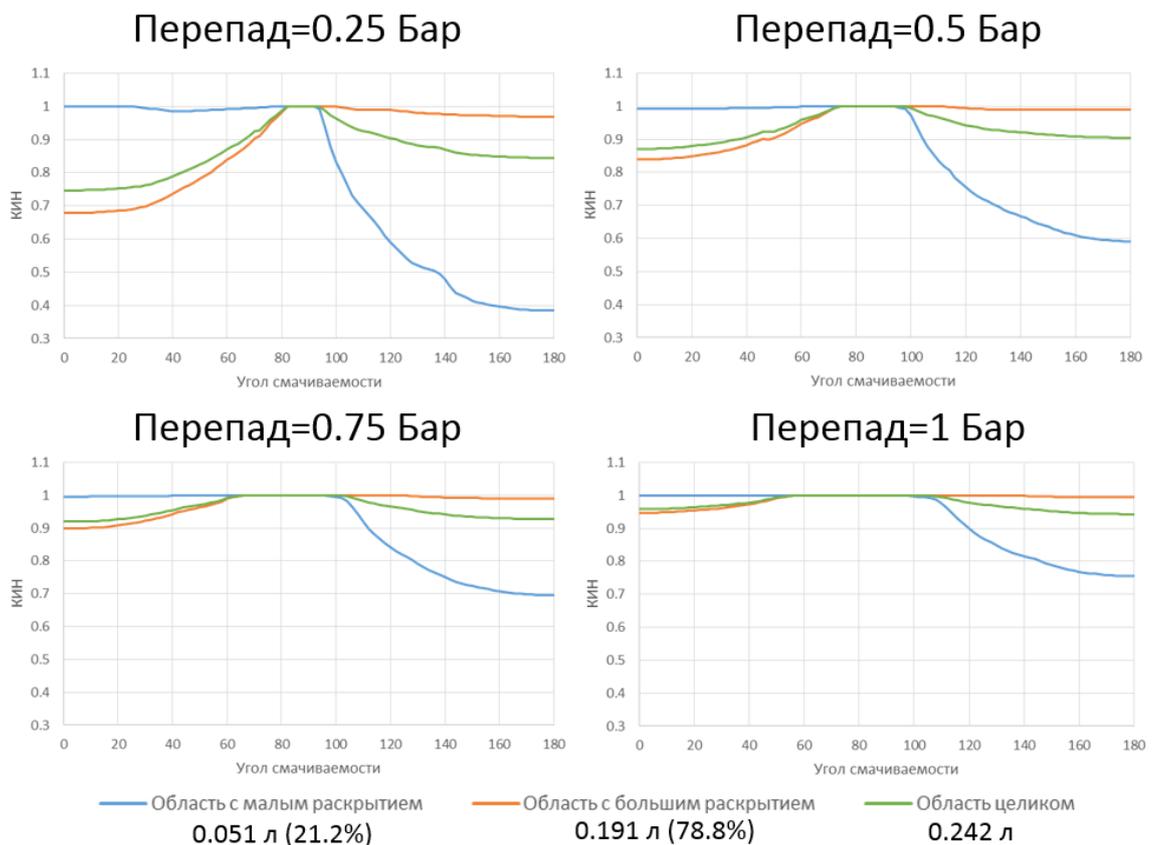


Рис. 4.7. Влияния перепада давления на КИН.

4.1.3 Влияние перепада давления на коэффициент извлечения нефти

В данном тесте было исследовано влияние перепада давления на процесс вытеснения нефти в трещине с переменным раскрытием (также как и в пер-

вом тесте в трещине рассматриваются две подобласти: с малым и большим раскрытием). Геометрия трещины, параметры жидкости и постановка задачи такие же, как и в предыдущем тесте, кроме значений вязкости воды и нефти, которые взяты из таблицы 4.3. Моделирование вытеснения было проведено при четырех различных перепадах давления: 0.25, 0.5, 0.75, 1 Бар.

Из рисунка 4.7 видно, что чем больше перепад давления, тем больше коэффициент извлечения нефти. Данное явление объясняется тем, что при большем перепаде давления закачиваемая в трещину вода преодолевает капиллярные силы в большем количестве областей трещины и соответственно коэффициент извлечения нефти возрастает.

4.1.4 Изменение уровня ВНК под действием капиллярных сил в трещине с переменным раскрытием

В данном тесте рассматривается уединённая трещина 10x8 метров. Поле раскрытия трещины задано таким образом, что в трещине присутствуют как проводящие каналы, так и полностью непроницаемые зоны. Такое поле раскрытия наиболее соответствует реальной геометрии трещин. Свойства жидкостей, начальные и граничные условия полностью совпадают с параметрами, использованными в первом тесте. Раскрытие в проводящих каналах задавалось двумя способами:

- постоянное раскрытие 7 мкм;
- переменное раскрытие, заданное в двух различных интервалах: $w \in [10, 43]$, $w \in [1, 5]$ мкм.

На рисунке 4.8 представлены поля раскрытия трещины, использованные при моделировании. На рисунках 12-15 представлены результаты моделирования.

Перед тем как перейти к результатам моделирования необходимо подробнее рассмотреть поле раскрытия около границы проводящих каналов. Раскрытие в трещине задается кусочно-линейной функцией: базовые значения задаются в точках сетки, между точками сетки в каждом треугольнике раскрытие интерполируется линейной функцией. Характерный вид раскрытия около границы проводящего канала представлен на рисунке 4.9.

Из рисунка 4.9 видно, что раскрытие при приближении к границе проводящего канала уменьшается до нуля. Соответственно около границы каналов капиллярное давление принимает максимальное значение.

Из представленных результатов видно (рисунок 4.11), что в случае гидрофильной породы уровень ВНК смещается вверх, а в случае гидрофобной

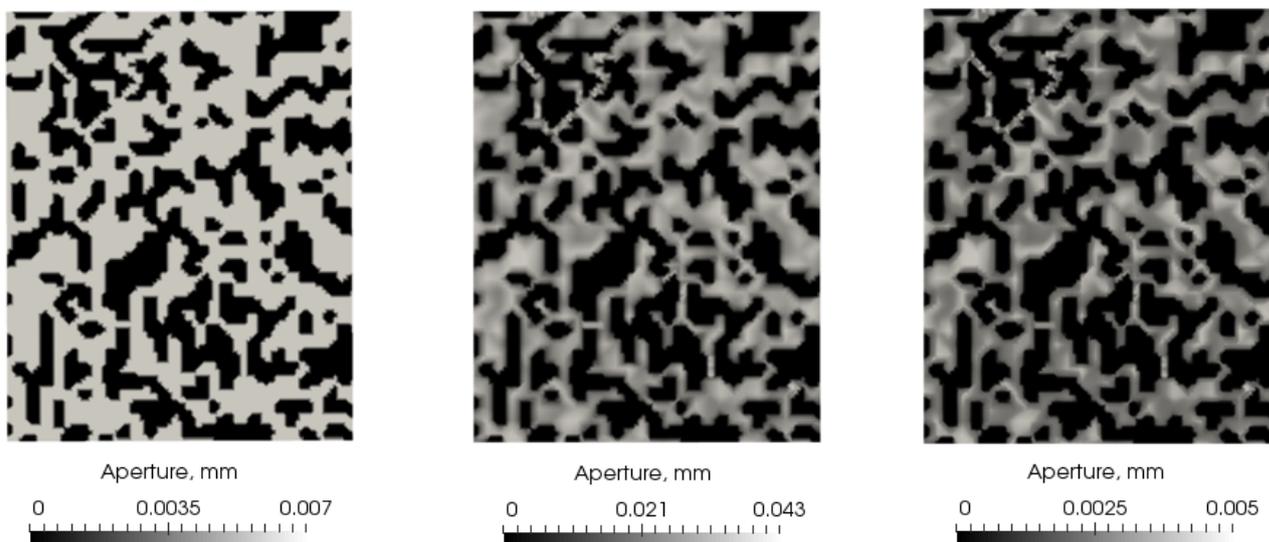


Рис. 4.8. Поля раскрытия трещины, левый рисунок — постоянное раскрытие, средний рисунок — переменное раскрытие $w \in [10, 43]$ мкм, правый рисунок — переменное раскрытие $w \in [1, 5]$ мкм (белый цвет — проводящие каналы, черный цвет — непроницаемые зоны).

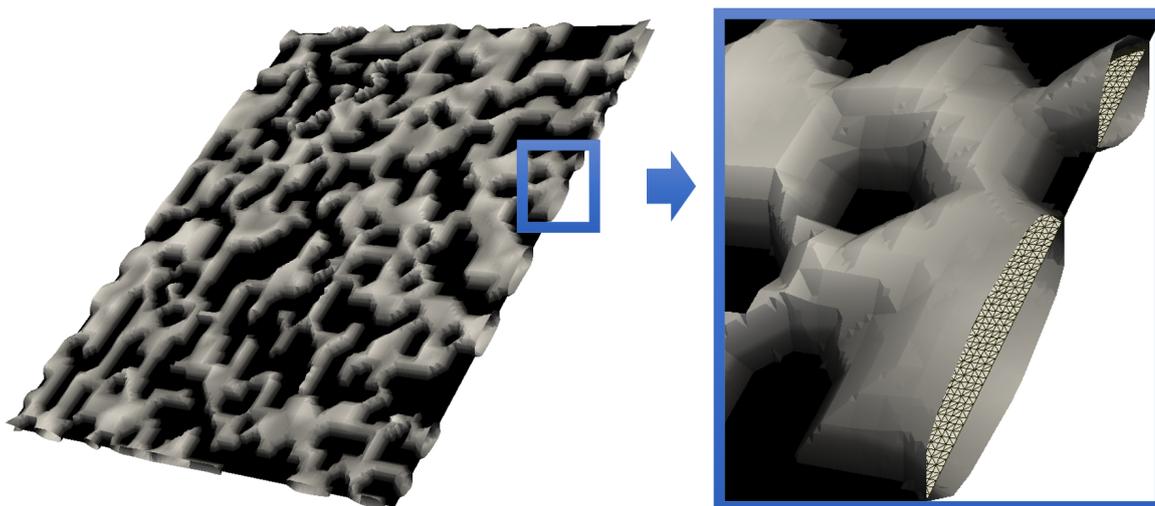


Рис. 4.9. Геометрическая модель трещины представленной на рисунке 4.8.

породы наоборот вниз. При этом чем более выражено свойство гидрофильности (меньший угол смачиваемости) или гидрофобности (большой угол смачиваемости), тем выше или ниже смещается уровень ВНК.

Задача о нахождении высоты подъёма жидкости в уединенном капилляре имеет аналитическое решение и обобщается на случай трещины с постоянным раскрытием. Аналитическое решение для трещины с постоянным раскрытием имеет следующий вид:

$$h = \frac{2\sigma \cos(\theta)}{w(\rho_w - \rho_o)g}$$

где h — высота подъёма жидкости, σ — коэффициент поверхностного на-

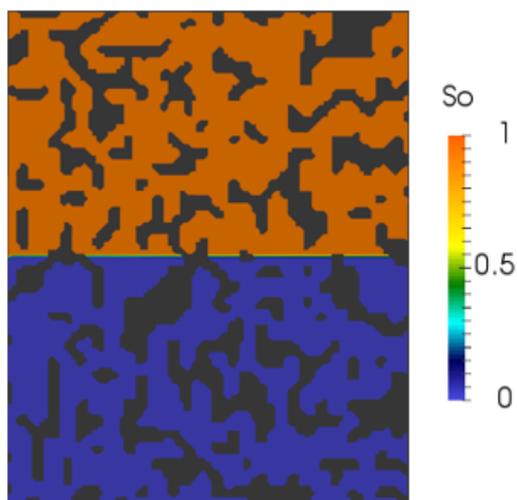


Рис. 4.10. Поле начального распределения воды и нефти.

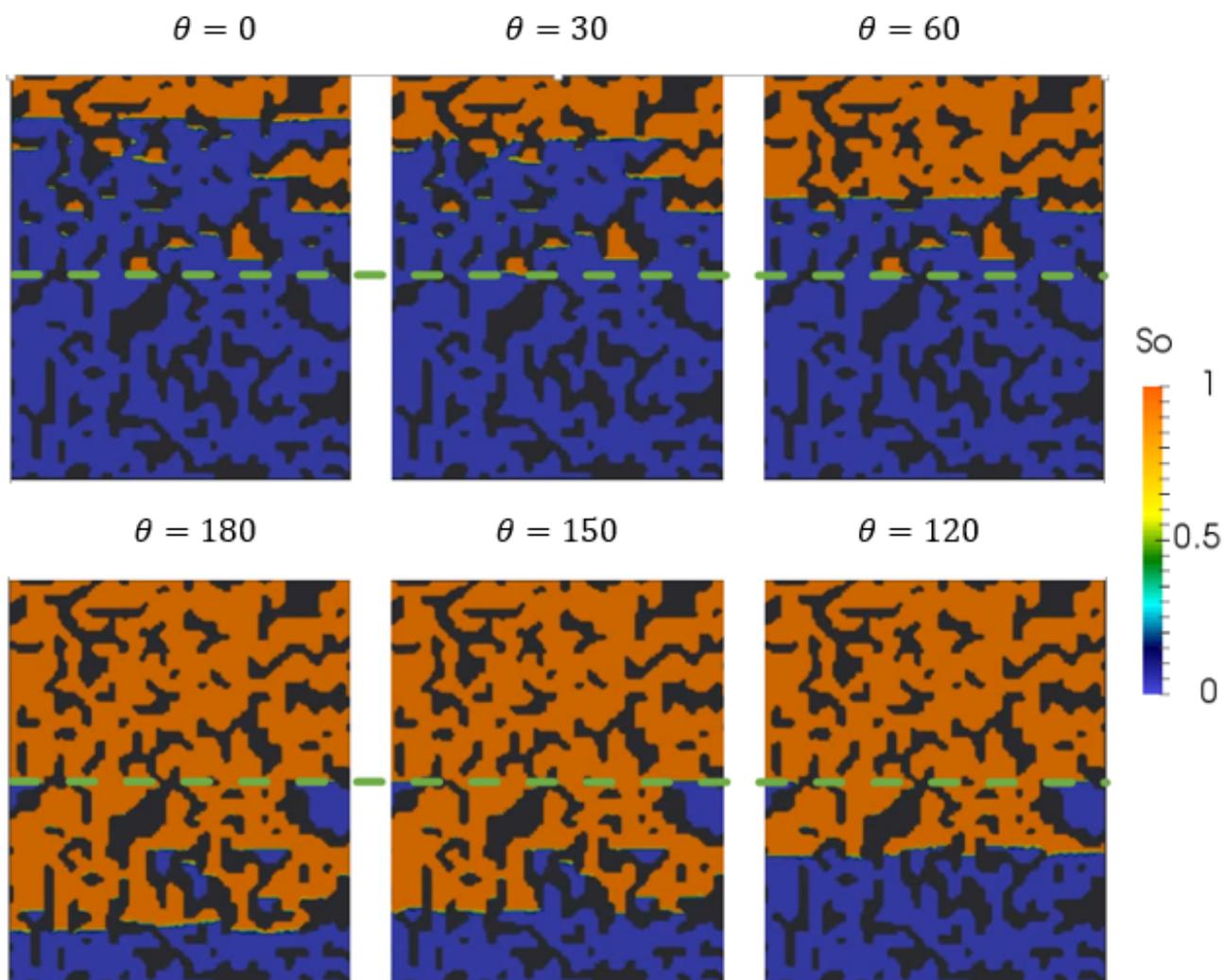


Рис. 4.11. Поле насыщенности на момент установления для случая постоянного раскрытия каналов трещины.

тяжения на границе раздела фаз, θ — угол смачиваемости, w — раскрытие трещины, ρ_w, ρ_o — плотности фаз, g — ускорение свободного падения.

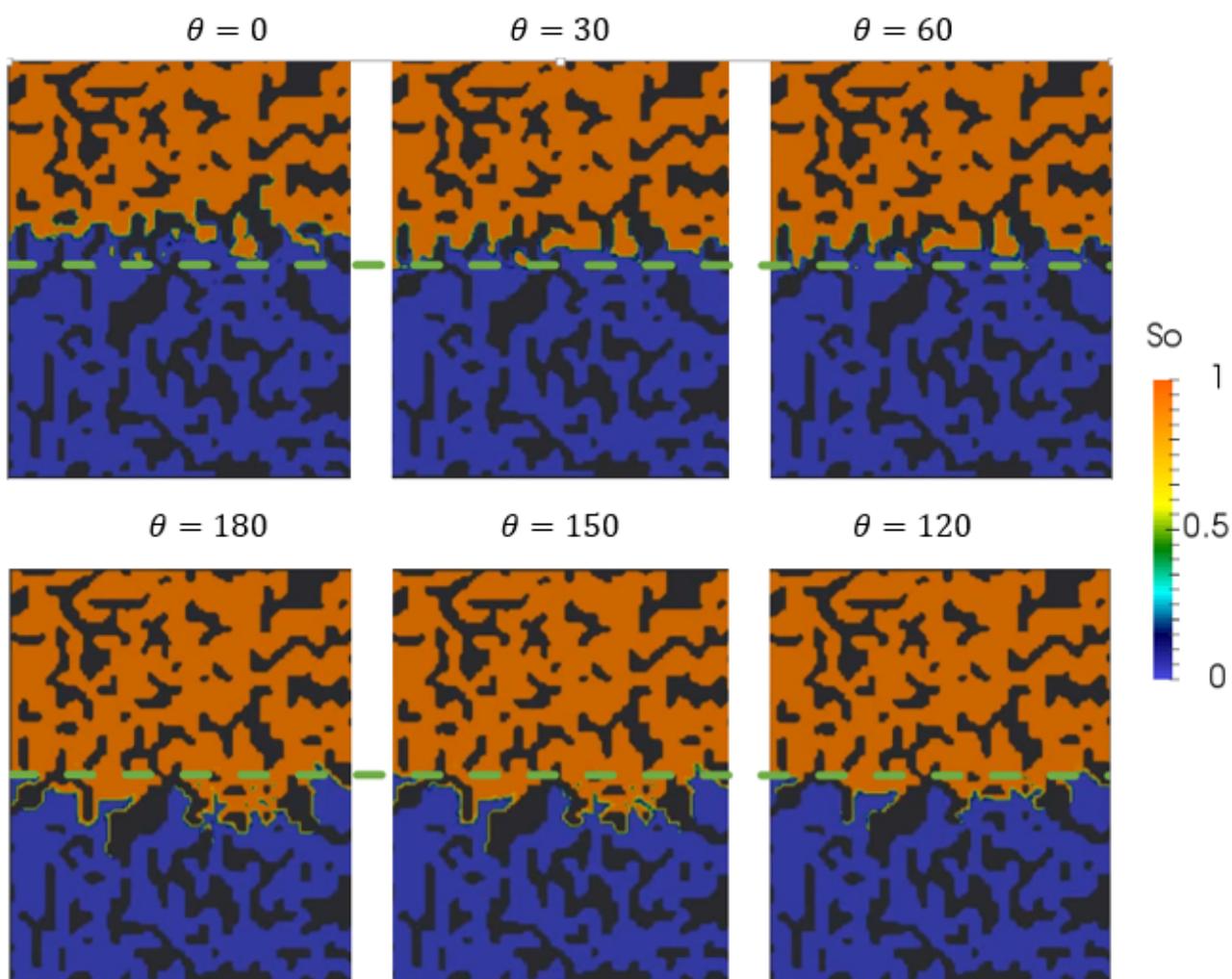


Рис. 4.12. Поле насыщенности на момент установления для случая переменного раскрытия каналов трещины $w \in [10, 43]$ мкм.

В данном тесте для случая постоянного раскрытия каналов была рассчитана высота подъема жидкости, как с помощью аналитического решения, так и с помощью численного. В результате получились величины, совпадающие с точностью до шага расчетной сетки.

Из рисунка 4.12 видно, что уровень ВНК изменился незначительно, при этом в случае гидрофильной породы вода вытесняет нефть вверх, а в случае гидрофобной породы нефть вытесняет воду вниз, при этом в обоих случаях вытеснение происходит по границе проводящих каналов, где раскрытие минимально.

Направление движения уровня ВНК полностью совпадает с ранее полученными результатами для трещины с постоянным раскрытием. Малое изменение уровня ВНК по сравнению с результатами, представленными на рисунке 4.11, объясняется тем, что в данном случае раскрытие в трещине значительно больше, а соответственно капиллярные силы оказывают меньшее влияние.

Результаты, представленные на рисунке 4.13 показывают, что при меньших значениях раскрытия $w \in [1, 5]$ мкм капиллярные силы оказыва-

ют более значительное влияние на изменение уровня ВНК, по сравнению с результатами, полученными для поля раскрытия заданного в интервале $w \in [10, 43]$ мкм. Уровень ВНК в данном случае изменился значительно, при этом сохранились эффекты, полученные при тестировании более простых моделей трещин: зависимость направления вытеснения от гидрофильности/гидрофобности, зависимость высоты поднятия, опускания жидкости от угла смачиваемости. Также можно заметить, что в случае гидрофильной породы нефть в некоторых областях трещины незначительно опустилось ниже уровня начального положения ВНК. Данный эффект объясняется тем, что капиллярные силы при очень маленьком раскрытии преобладают над гравитационными.

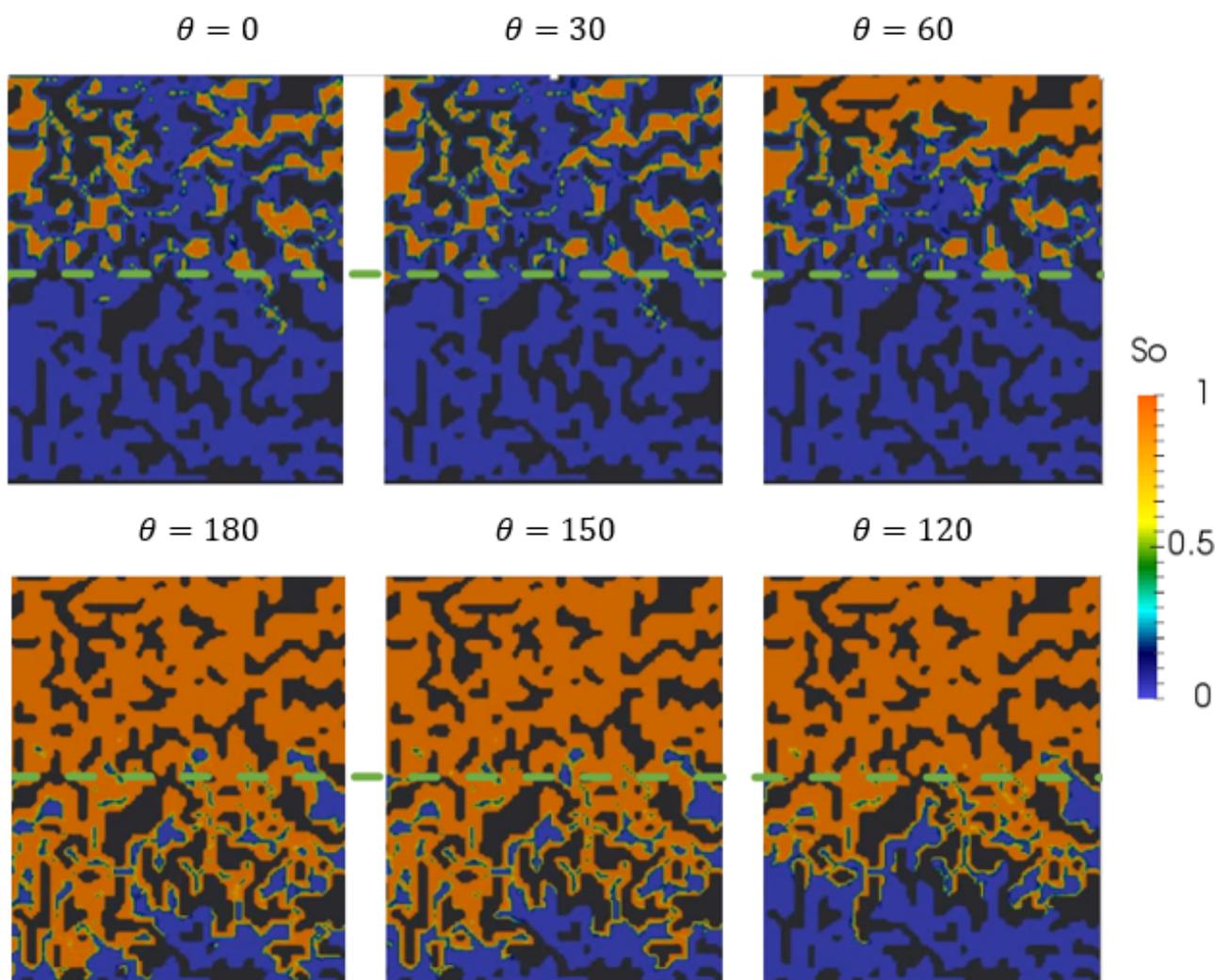


Рис. 4.13. Поле насыщенности на момент установления для случая переменного раскрытия каналов трещины $w \in [1, 5]$ мкм.

4.1.5 Влияние смачиваемости на характер вытеснения нефти водой в трещине с переменным раскрытием

В данном тесте рассматривается трещина с зонами нулевого раскрытия из предыдущего теста. Раскрытие проводящих каналов задано равномерным распределением на интервале $w \in [1, 5]$ мкм (рисунок 4.8). В начальный момент трещина полностью заполнена нефтью. На нижней границе расчетной области задано условие постоянного давления 2.5 Бар. На верхней границе задано условие постоянного давления 3 Бара и постоянной водонасыщенности $S_W = 1$. Моделирование проводилось до установления течения для различных углов смачиваемости: $\theta \in [0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ]$.

Поля насыщенности на различные моменты времени моделирования для углов смачиваемости $\theta \in [0^\circ, 90^\circ, 180^\circ]$ представлены на рисунке 4.14. Также для всех случаев были рассчитаны коэффициенты извлечения нефти, которые представлены в таблице 4.2.

Таблица 4.2. Зависимость КИН от угла смачиваемости.

Угол	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 135^\circ$	$\theta = 180^\circ$
КИН %	66.5	79.5	91.6	62.5	60.0

Из представленных результатов видно, что смачиваемость породы и капиллярные силы оказывают значительное влияние как на характер вытеснения нефти водой, так и на интегральные характеристики процесса вытеснения (снижение коэффициента извлечения нефти (КИН) на 30% в предельных случаях). При этом в случае, когда капиллярные силы отсутствуют ($\theta = 90^\circ$), в трещине также остается запертая нефть, что обусловлено извилистой структурой проводящих каналов.

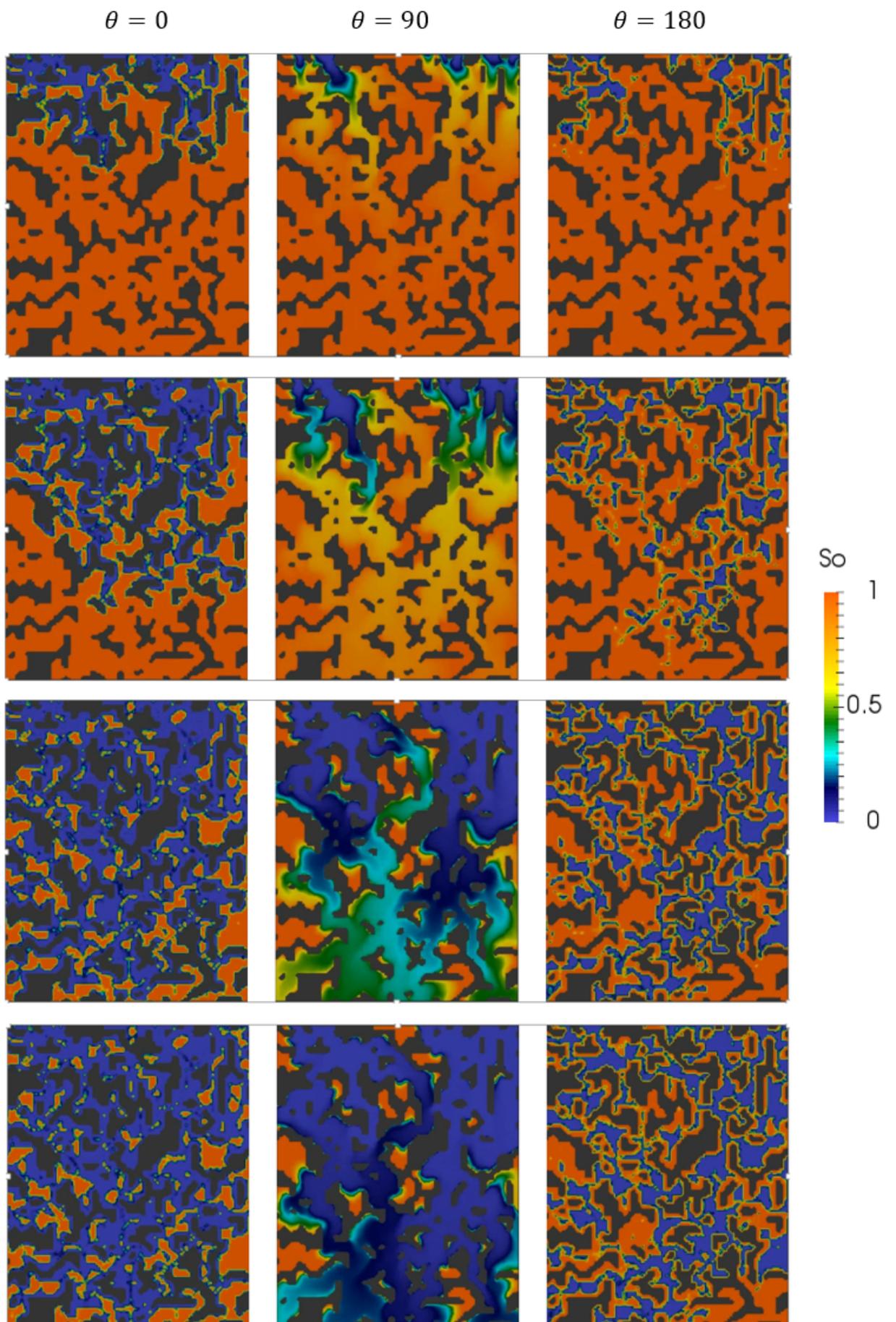


Рис. 4.14. Динамика вытеснения в трещине с переменным раскрытием.

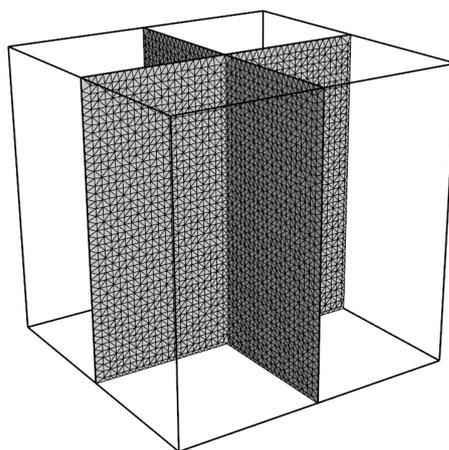


Рис. 4.15. Сетка для двух пересекающихся трещин.

4.2 Моделирование течений в трещинах с кавернами

В данном разделе приведены результаты моделирования течений в трещиновато-кавернозной среде. При этом параметры жидкостей, использованные при моделировании, представлены в таблице 4.3.

Таблица 4.3. Параметры жидкостей.

Плотность воды ρ_W , кг/м ³	1000
Плотность нефти ρ_O , кг/м ³	800
Вязкость воды μ_W , сПз	0.6
Вязкость нефти μ_O , сПз	2.4
Коэффициент поверхностного натяжения σ , Па·м	0.027

4.2.1 Влияние диаметра канала на течение

В данном тесте исследуется влияние отношения диаметра канала к раскрытию трещин на характер вытеснения нефти водой. Рассматриваются две пересекающиеся трещины (рисунок 4.15) размером 0.5×0.5 метров с постоянным раскрытием 10 мкм. При этом рассматриваются три случая, в которых диаметр каверны равен: $d = w$, $10 \cdot w$, $0.1 \cdot w$. Предполагается, что порода обладает нейтральной смачиваемостью ($\theta = 90^\circ$). В начальный момент трещины полностью заполнены нефтью. В качестве граничных условий заданы: постоянный поток 90 литров в час и постоянная водонасыщенность $S_W=1$ на верхней границе расчетной области, постоянное давление 3 бара на нижней границе.

Из представленных результатов (рисунок 4.16) видно, что в случае, когда диаметр канала равен или меньше раскрытия трещин, течение в каверне не

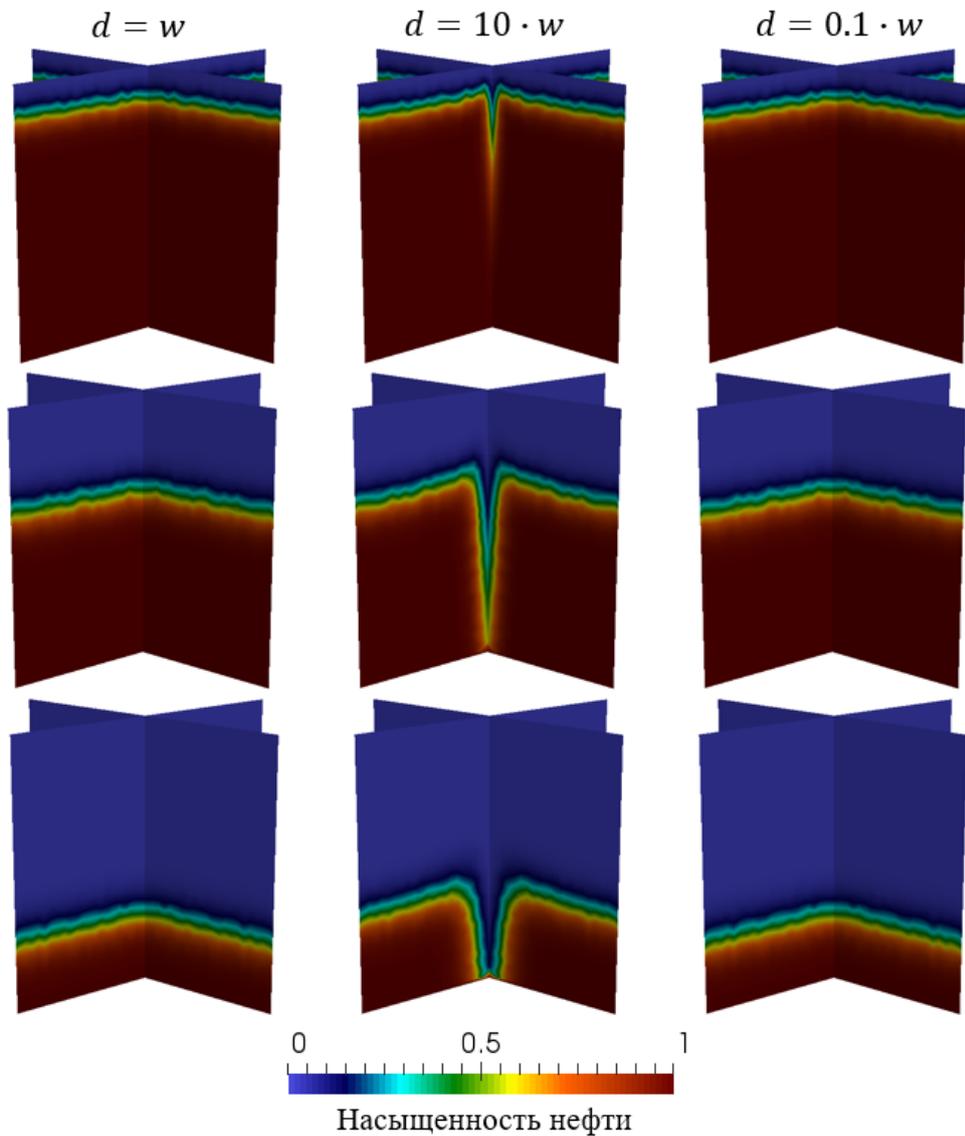


Рис. 4.16. Динамика вытеснения нефти водой в случае нейтральной смачиваемости.

оказывает влияние на процесс вытеснения. В случае, когда диаметр каверны больше раскрытия трещины, вытеснение в каверне происходит быстрее и влияет на фронт вытеснения в трещинах. Таким образом, в отсутствие капиллярных сил каверны большого размера могут оказывать влияние на время прорыва воды. В данном тесте для случая с большим диаметром каверны для прорыва воды потребовалось на 50% меньше времени.

4.2.2 Влияние капиллярных сил в каверне на течение

В данном тесте рассматриваются две пересекающиеся трещины из предыдущего теста и три случая, в которых диаметр каверны равен: $d = w$, $10 \cdot w$, $0.1 \cdot w$. При этом в каждом из случаев исследуется влияние смачиваемости на процесс вытеснения нефти водой ($\theta \in \{0^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 180^\circ\}$). Начальные и граничные условия полностью совпадают с условиями из предыдущего теста.

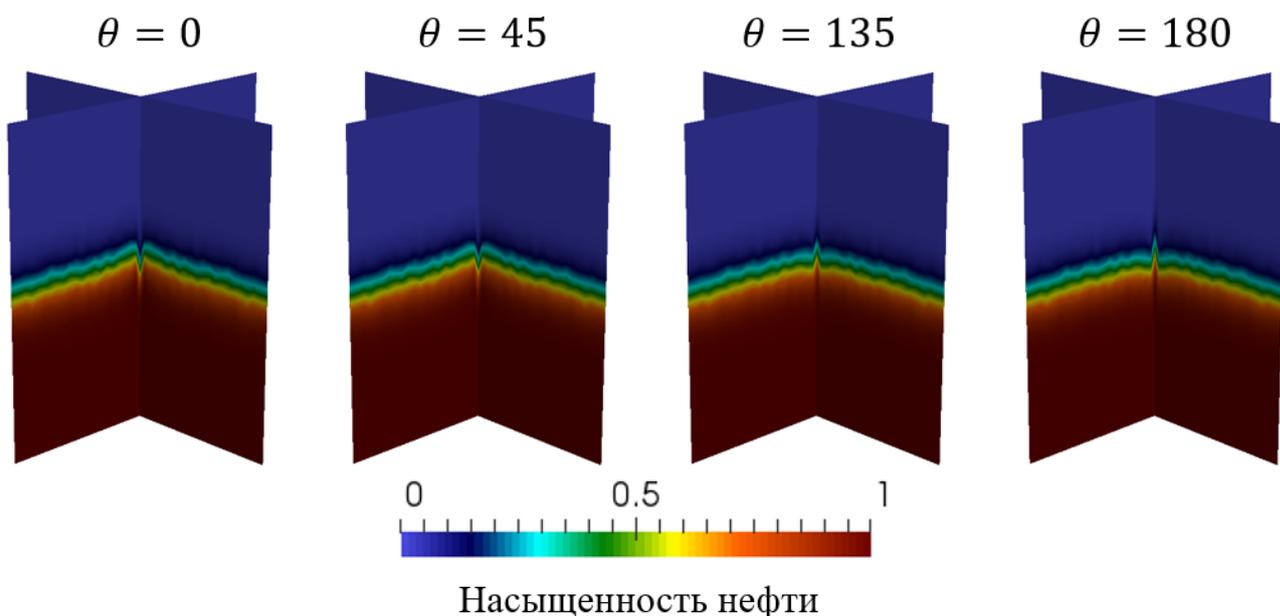


Рис. 4.17. Динамика вытеснения нефти водой для случая $d = w$ и различных значений угла смачиваемости.

На рисунках ниже представлены результаты проведенных расчетов.

Из рисунка 4.17 видно, что в случае, когда ширина трещин совпадает с диаметром каналов, капиллярные силы не оказывают существенного влияния на процесс вытеснения.

Из рисунка 4.18 видно, что в случае, когда диаметр каналов больше ширины трещин, капиллярные силы могут играть существенную роль в процессе вытеснения. Видно, что во всех случаях фронт вытеснения в каверне продвигается существенно быстрее, чем в трещинах. В случае гидрофильной породы вытеснение нефти водой в каверне происходит медленнее, чем в случае гидрофобной. Данное явление объясняется тем, что в случае, когда порода гидрофобна, капиллярные силы увеличивают скорость течения по пустотам большого размера, а в случае гидрофильной породы, наоборот, уменьшают. Таким образом в случае гидрофобной породы по каверне происходит более быстрый прорыв воды. По этой причине эффективность вытеснения в случае гидрофильной породы более высокая.

Из рисунка 4.19 видно, что в случае, когда диаметр каналов меньше ширины трещин, капиллярные силы также оказывают влияние на процесс вытеснения. В случае гидрофильной породы вода затекает в каверну, но при этом быстрого прорыва не происходит, поскольку проводимость каверны в данном случае очень низкая. В случае гидрофобной породы капиллярные силы и низкая проводимость каверн являются факторами, которые препятствуют проникновению воды в каверну.

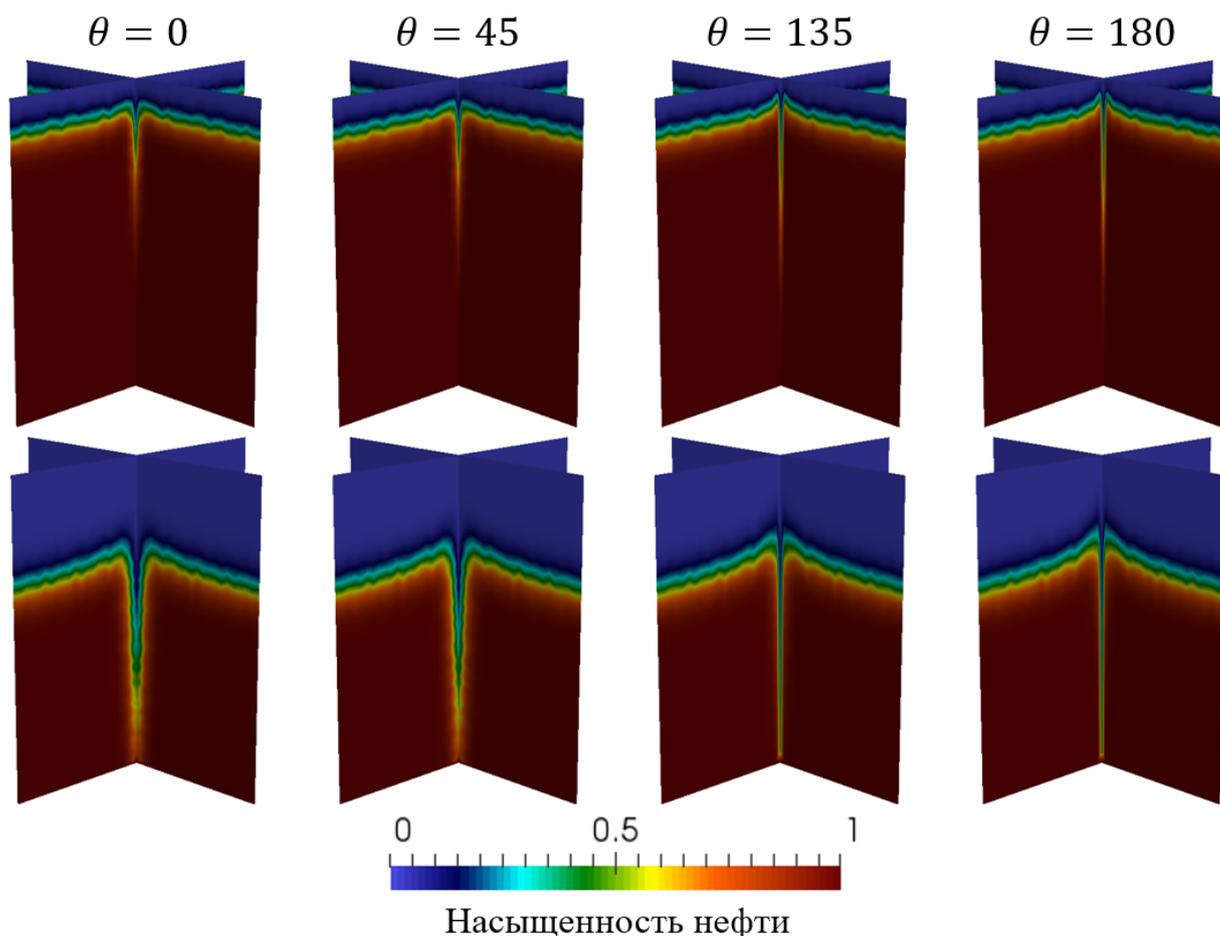


Рис. 4.18. Динамика вытеснения нефти водой для случая $d = 10 \cdot w$ и различных значений угла смачиваемости.

4.2.3 Влияние течения в каверне на переток между трещинами

В данном тесте рассматриваются две пересекающиеся трещины представленные на рисунке 4.20. Диаметр каверны 1 мм, раскрытие первой трещины 0.1 мм, раскрытие второй трещины 0.01 мм (трещины отмечены номерами на рисунке). Рассматривается два случая смачиваемости породы: $\theta \in \{0^\circ, 180^\circ\}$. Начальные условия совпадают с условиями из предыдущего теста. Граничные условия отличаются, вместо потока на верхней границе расчетной области задано постоянное давление 5 бар. На рисунках ниже представлены результаты проведенных расчетов.

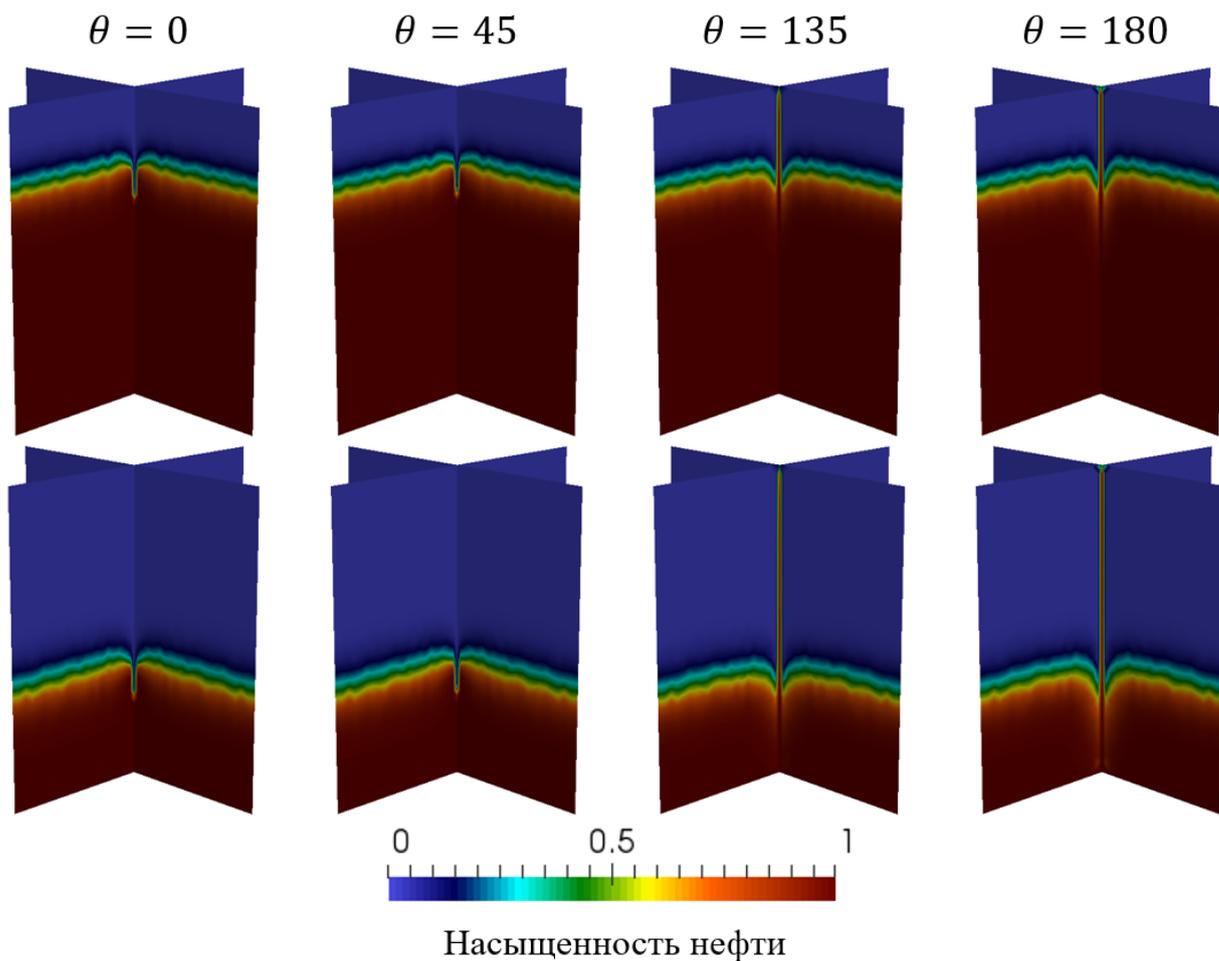


Рис. 4.19. Динамика вытеснения нефти водой для случая $d = 0.1 \cdot w$ и различных значений угла смачиваемости.

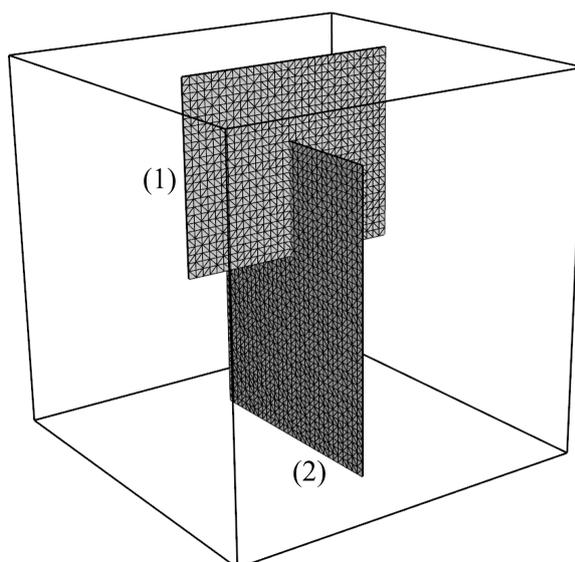


Рис. 4.20. Сетка для двух пересекающихся трещин.

Из представленных на рисунке 4.21 результатов видно, что динамика течения существенно отличается для случаев гидрофильной и гидрофобной породы. В случае гидрофильной породы, после того как фронт воды достиг

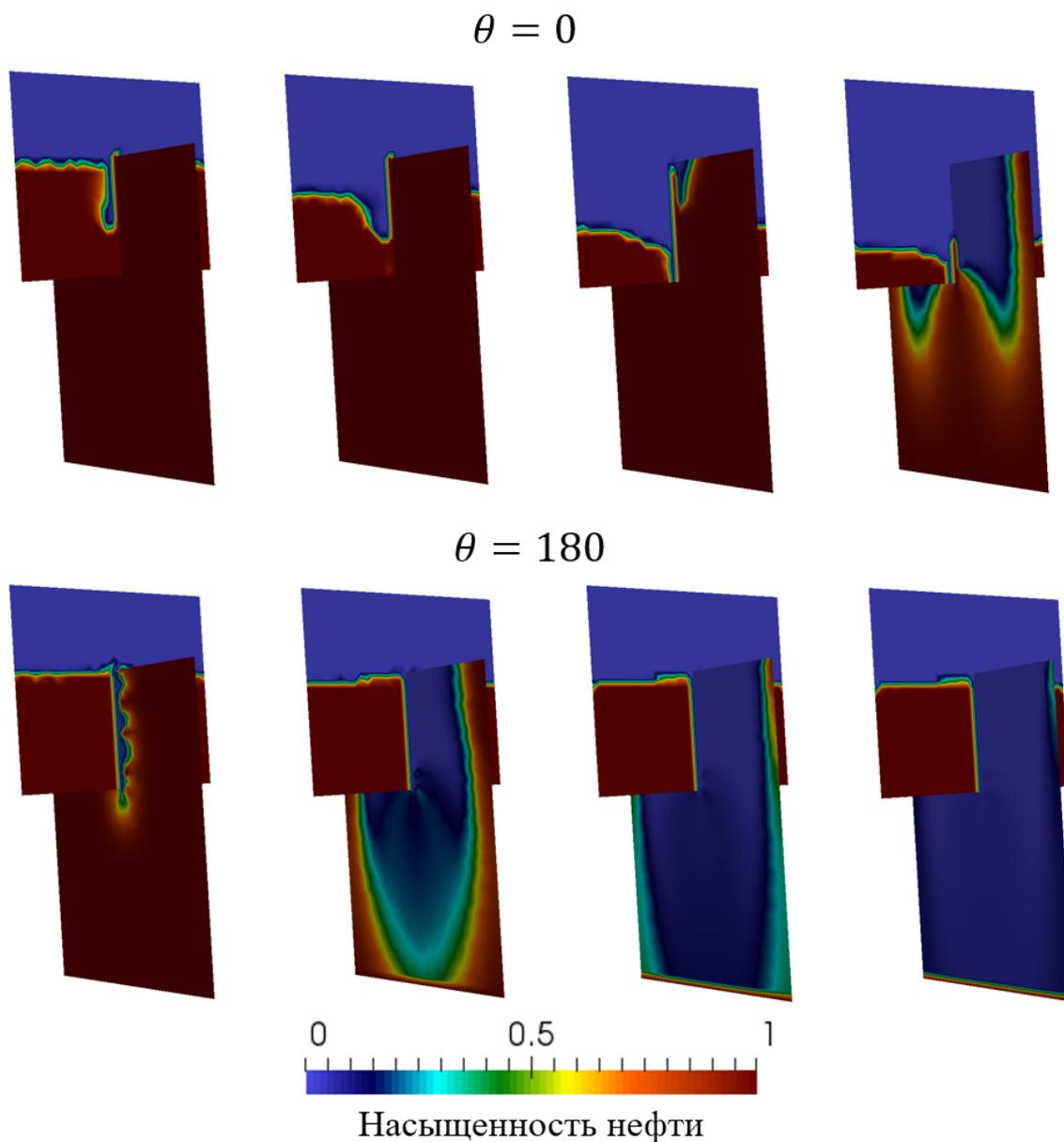


Рис. 4.21. Динамика вытеснения нефти водой.

каверны в первой трещине, в каверну начала вытесняться нефть из области вокруг каверны. Затем, после того как нефть вокруг каверны оказалась полностью вытесненной, то есть первая трещина оказалась по большей части заполнена водой, в каверну начала проникать вода и перетекать во вторую трещину. В случае гидрофобной породы, как только фронт воды достиг каверны в первой трещине, вода начала проникать в каверну и перетекать во вторую трещину. После того как вода прорвалась в каверну, вытеснение нефти из первой трещины в каверну прекратилось. Таким образом, в первой трещине осталась запечатая нефть.

В результате, после установления течения получились различные коэффициенты извлечения нефти. Для случая гидрофильной породы коэффициент извлечения нефти (КИН) составил 98%, а для гидрофобной — всего 56%.

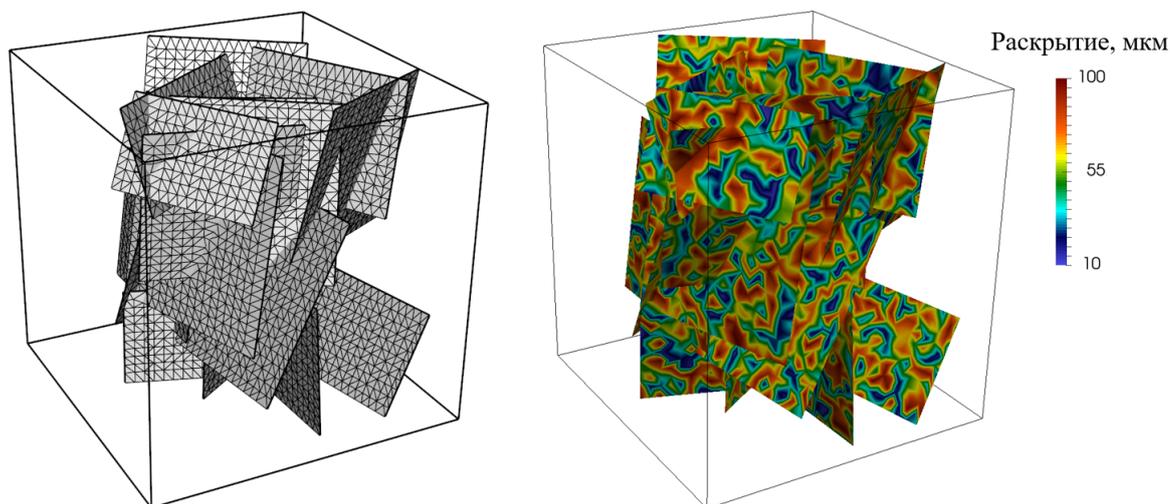


Рис. 4.22. Сетка для системы трещин и поле раскрытия.

4.2.4 Влияние каверн на динамику течения в системе трещин

В данном тесте рассматривается случайным образом сгенерированная система из 20 трещин, находящаяся внутри расчетной области размером $10 \times 10 \times 10$ метров (рисунок 4.22). Раскрытие трещин было задано с помощью равномерного распределения на интервале $[10, 100]$ мкм. Суммарный объём пустот в трещинах составил 27 литров. Диаметры каверн заданы равномерным распределением на трех различных интервалах: $d_1 = [30, 70]$ мкм, $d_2 = [450, 750]$ мкм, $d_3 = [2, 4]$ мкм. В данном тесте исследуется влияние размера каверн на динамику течения для случаев гидрофильной ($\theta = 0^\circ$), нейтральной ($\theta = 90^\circ$) и гидрофобной ($\theta = 180^\circ$) породы. Суммарный объём каверн пренебрежимо мал по сравнению с объёмом трещин для всех рассматриваемых случаев. Изначально трещины полностью заполнены нефтью. В качестве граничных условий заданы: постоянный поток 18 литров в час и постоянная водонасыщенность $S_W = 1$ на верхней границе расчетной области, постоянное давление 3 бара на нижней границе. Время закачки жидкости: 4 часа.

Рассмотрим случай, когда порода гидрофильна ($\theta = 0^\circ$). Динамика вытеснения нефти водой для данного случая представлена на рисунке 4.23. Из представленных результатов видно, что в случаях, когда диаметры каверн заданы на интервалах d_1 и d_2 , фронт вытеснения одинаковый. В случае, когда диаметры каверн заданы в интервале d_3 , фронт вытеснения продвигается быстрее, но при этом в трещинах за фронтом остаётся значительное количество нефти. В данном случае, так как вода легче проникает в пустоты малого размера, система каверн образует путь наименьшего сопротивления для течения воды.

В процессе моделирования были рассчитаны зависимости коэффициента извлечения нефти от времени (рисунок 4.24). Из полученных зависимостей

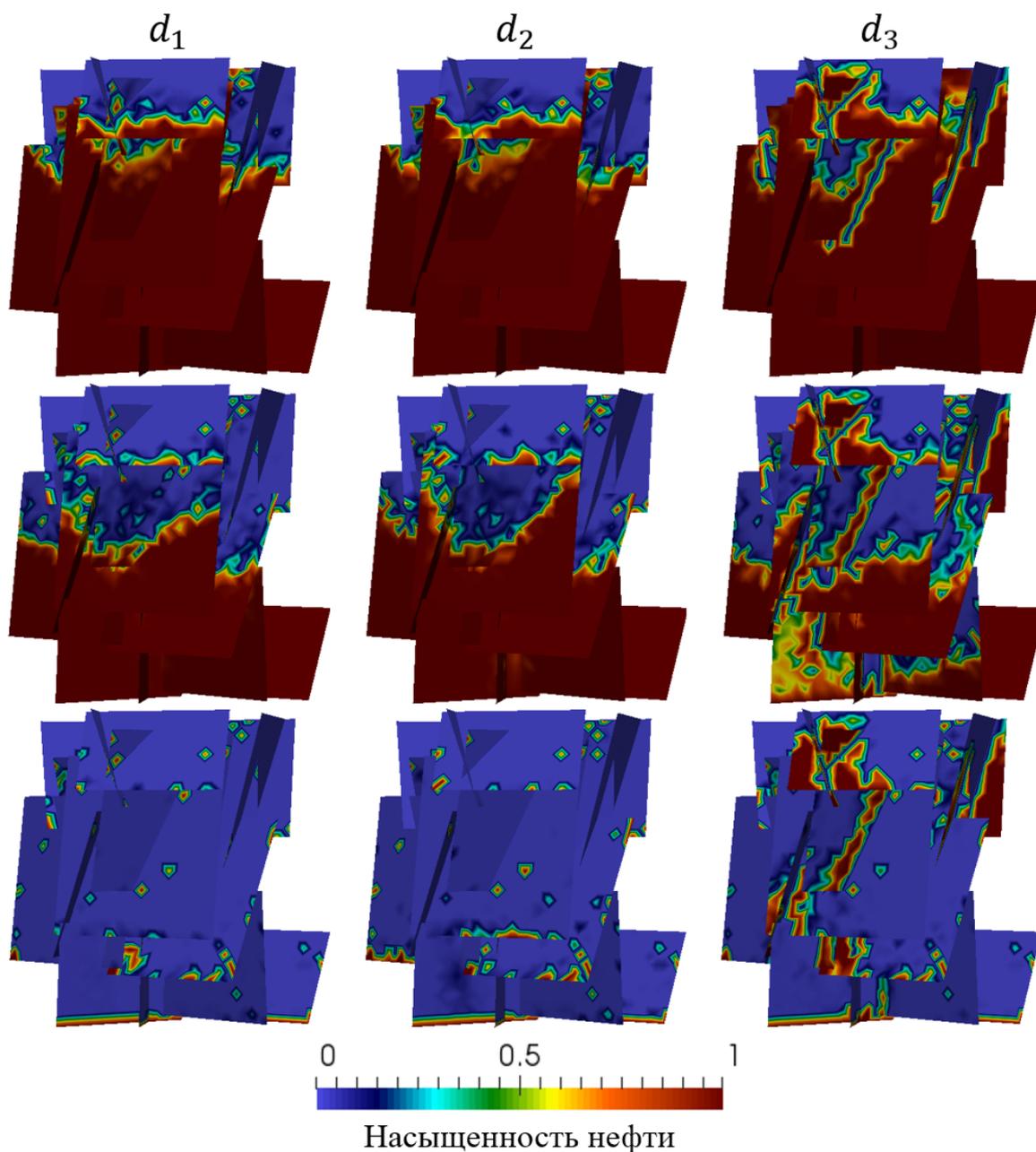


Рис. 4.23. Динамика вытеснения нефти водой для случая гидрофильной породы.

видно, что для случая каверн с малым диаметром итоговый КИН ниже на 21%. Более низкий КИН обусловлен тем, в трещинах, в пустотах большего размера, осталась невытесненная нефть.

В случае, когда порода нейтральна, динамика течения во всех случаях оказалась практически одинаковой. Из зависимостей КИН от времени, представленных на рисунке 4.25, видно, что итоговый КИН получился одним и тем же во всех случаях, но при этом в случае $d = d_2$ достижение максимального КИН происходило дольше, чем в остальных случаях (зависимости КИН от времени для случаев $d = d_1$ и $d = d_3$ полностью совпадают). Данный результат обусловлен тем, что каверны образовали высокопроводящую сеть

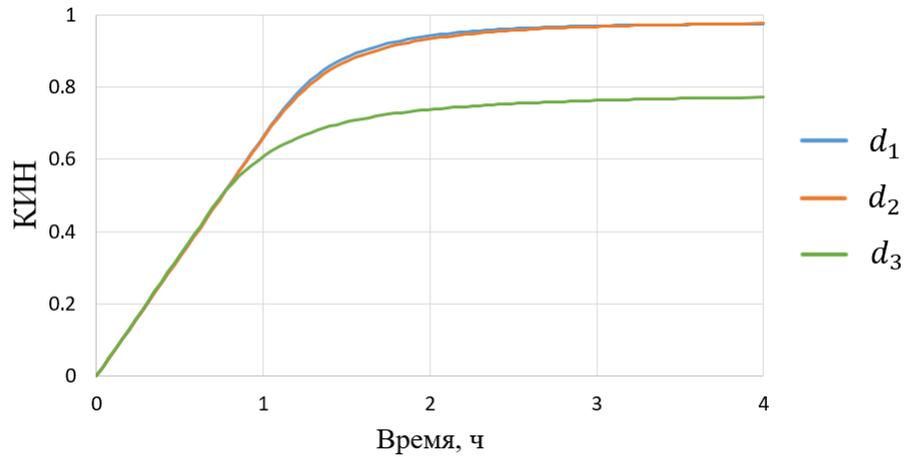


Рис. 4.24. Зависимость КИН от времени для случая гидрофильной породы.

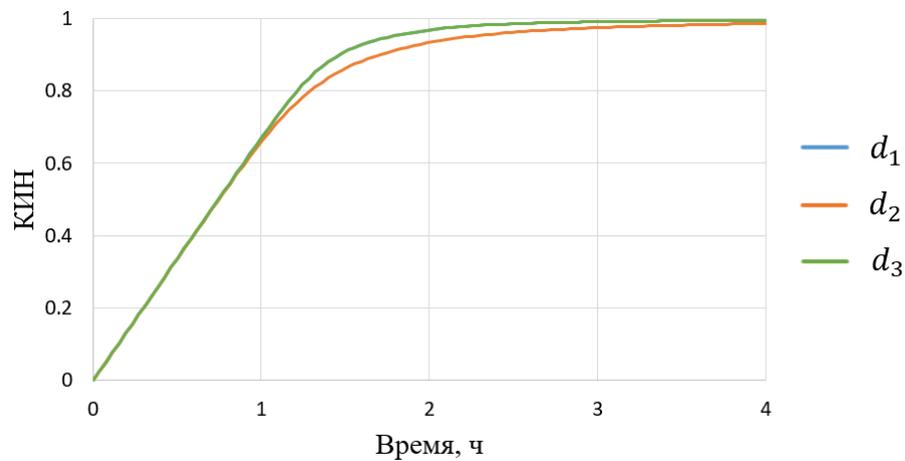


Рис. 4.25. Зависимость КИН от времени для случая породы с нейтральной смачиваемостью.

каналов. После вытеснения нефти из каверн часть воды просто протекала через каверны, не вытесняя нефть, то есть расходовалась менее эффективно по сравнению со случаями меньших размеров каверн.

Рассмотрим случай, когда порода гидрофобна ($\theta = 180^\circ$). Из представленных на рисунке 4.26 результатов видно, что в случае $d = d_2$ фронт вытеснения продвигается быстрее. Вытеснение в первую очередь происходит в кавернах, так как в гидрофобной породе вода течет преимущественно по пустотам большего размера. В случае $d = d_3$ фронт преимущественно продвигается по трещинам (по пустотам большего размера) и за фронтом в кавернах остаётся запертая нефть. В случае $d = d_1$ вытеснение происходит как в кавернах, так и в трещинах, фронт вытеснения движется с наименьшей скоростью.

Из представленных на рисунке 4.27 зависимостей КИН от времени видно, что в результате расчетов во всех случаях были получены различные значения итогового КИН. В случае $d = d_1$ было получено наибольшее значение КИН (96%), поскольку в данном случае вытеснение проходило более равно-

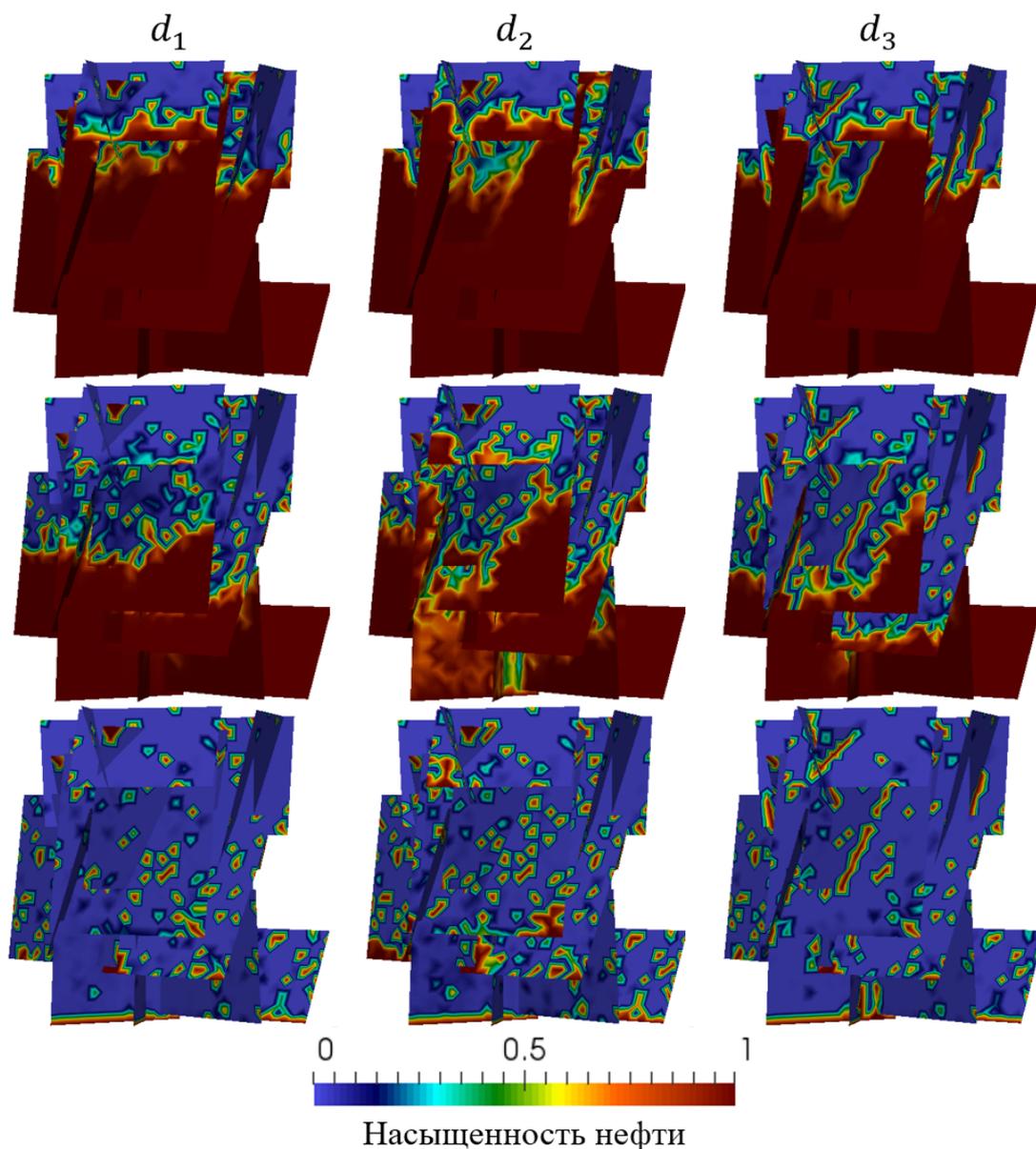


Рис. 4.26. Динамика вытеснения нефти водой для случая гидрофобной породы.

мерно во всей области, чем в остальных случаях.

В случае $d = d_2$ вытеснение происходило преимущественно в пустотах большего размера (в первую очередь в кавернах, а затем и в трещинах). Так как по кавернам произошел прорыв воды, то в дальнейшем вода расходовалась менее эффективно, поэтому итоговый КИН (92%) получился меньше, чем в случае $d = d_1$.

В случае $d = d_3$ вытеснение происходило преимущественно в пустотах большего размера — в трещинах. Более высокая скорость роста КИН в случае $d = d_3$, чем в случае $d = d_2$, в промежутке времени между первым и вторым часом закачки обусловлена тем, что объём трещин значительно больше объёма каверн, а вытеснение в данном случае происходило преимущественно в трещинах. Соответственно, в указанном промежутке времени вода расходо-

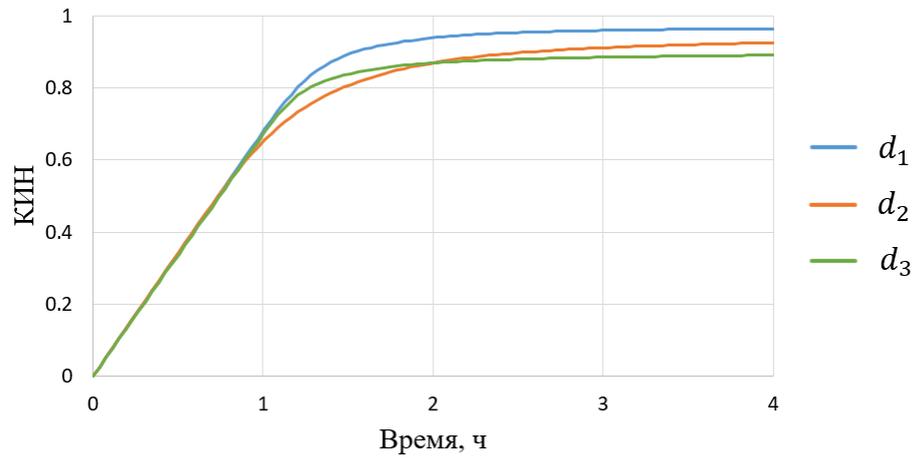


Рис. 4.27. Зависимость КИН от времени для случая гидрофобной породы.

валась более эффективно на больший суммарный объём пустот. Более низкое итоговое значение КИН в случае $d = d_3$ (89%), обусловлено тем, что в данном случае проводимость каверн очень низкая и капиллярные силы препятствуют течению по кавернам, то есть гидродинамическая связность трещин является наименьшей среди всех рассматриваемых случаев.

Заключение

В диссертационной работе приведен обзор основных существующих методов моделирования однофазных и многофазных течений трещиноватых коллекторах. На основе существующих моделей течения в трещиноватых средах разработана физико-математическая модель течения в трещиноватых средах с кавернами, разработаны вычислительные алгоритмы расчета течения по предложенной модели, реализован программный комплекс для расчета однофазных и двухфазных течений с целью анализа процессов вытеснения в системах трещин.

Основными результатами выполненной работы являются:

1. Физико-математические модели течения однофазной и двухфазной жидкости в дискретных системах трещин с учетом перетоков флюида вдоль каверн, отнесенных к их пересечениям; сжимаемости флюидов, капиллярных сил и смачиваемости породы.
2. Вычислительные алгоритмы расчета динамики однофазных и двухфазных течений в рамках разработанных математических моделей с использованием метода конечных элементов/конечных объемов на неструктурированных сетках.
3. Программный комплекс для моделирования течений в дискретных системах трещин с кавернами с учётом сжимаемости жидкости, гравитационных и капиллярных сил с использованием разработанных математических моделей и вычислительных алгоритмов.
4. Результаты расчетов, демонстрирующие корректность предложенных моделей и вычислительных алгоритмов, значимость учитываемых в разработанной модели эффектов и применимость разработанного программного обеспечения для решения прикладных задач.

В перспективе дальнейшее развитие результатов работы возможно путём расширения спектра физико-химических явлений, учитываемых в физико-математической модели, в частности:

- зависимость раскрытия трещины от давления;
- наличие проницаемой матрицы, течение в ней, перетоки между матрицей, трещинами и кавернами;

- неньютоновскую реологию жидкости;
- течение поверхностно-активных веществ и их влияние на смачиваемость породы.

С алгоритмической точки зрения представляет интерес разработка новых итерационных методов решения задач линейной алгебры, которые учитывают специфичную для рассматриваемого класса задач структуру матриц.

Литература

- [1] Matthai S.K., Mezentsev A., Belayneh M., Finite element-node-centered finite-volume two-phase-flow experiments with fractured rock represented by unstructured hybrid-element meshes // SPE, 2007, Vol. 10, N. 6, p. 740-756.
- [2] Блонский А.В., Митрушкин Д.А., Савенков Е.Б. Моделирование течений в дискретной системе трещин: физико-математическая модель // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017, № 65, 27 с., doi:10.20948/prepr-2017-65.
- [3] Блонский А.В., Митрушкин Д.А., Савенков Е.Б. Моделирование течений в дискретной системе трещин: вычислительные алгоритмы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017, № 66, 30 с., doi:10.20948/prepr-2017-66.
- [4] Блонский А.В., Савенков Е.Б., Математическая модель и алгоритм расчета течения в дискретной системе трещин с кавернами // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2017, № 133. 18 с., doi:10.20948/prepr-2017-133.
- [5] Блонский А.В., Савенков Е.Б., Математическое моделирование течений двухфазного флюида в трещиновато-кавернозной среде // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2018, № 49, 18 с., doi:10.20948/prepr-2018-49.
- [6] Блонский А.В., Митрушкин Д.А., Исследование влияния капиллярных сил на течение в трещинах с переменным раскрытием // Математическое моделирование, 2018, Т. 30, № 9, с. 72-86.
- [7] Блонский А. В., Савенков Е. Б., Математическое моделирование двухфазных течений в трещиноватой среде с кавернами, 2019 (Принята к печати в журнале «Математическое моделирование»).
- [8] Блонский А. В., Программный комплекс для моделирования течений в системах трещин с кавернами // Вычислительные методы и программирование, 2018, Т. 19, с. 405-415.
- [9] Blonsky A. V. et al. Computation of Absolute and Relative Permeability Full Tensors for Fractured Reservoirs // SPE, 2017.

- [10] Gunde A., Babagadi T., Mitra S. K., Lattice-Boltzmann method to estimate relative permeabilities for Matrix-Fracture Interaction in Naturally Fractured Reservoirs // SPE, 2010.
- [11] Balhoff M. T., Wheeler M.F., A predictive poro-scale model for Non-Darcy flow in porous media // SPE, 2009, Vol. 14, N. 4, p. 579-589.
- [12] Demianov A., Dinariev, O., Evseev, N., Density functional modelling in multiphase compositional hydrodynamics // The Canadian Journal of Chemical Engineering, 2011, Vol. 89, N. 2, p. 206-226.
- [13] Meakin, P., Tartakovsky, A., Modelling and simulation of pore-scale multiphase transport in fractured and porous media // Reviews of Geophysics, 2009, Vol. 47, N. 3.
- [14] Popov P., Efendiev Y., Qin G., Multiscale modelling and simulations of flows in naturally fractured karst reservoirs // Communications in computational physics, 2009, Vol. 6, N. 1, p. 162.
- [15] He J. et al. Unified Finite Difference Modeling of Transient Flow in Naturally Fractured Carbonate Karst Reservoirs — A 3D Case Study // SPE, 2015.
- [16] Samardzioska T., Popov V., Numerical comparison of the equivalent continuum, non-homogeneous and dual porosity models for flow and transport in fractured porous media // Advances in water resources, 2005, Vol. 28, N. 3, p. 235-255.
- [17] Басниев К.С, Дмитриев Н.М., Каневская Р.Д., Максимов В.М., Подземная гидромеханика, М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006, 488 с.
- [18] Азиз Х., Сеттари Э., Математическое моделирование пластовых систем. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 407 с.
- [19] Ishibashi, T., N. Watanabe, N. Hirano, A. Okamoto, and N. Tsuchiya, GeoFlow: A novel model simulator for prediction of the 3-D channeling flow in a rock fracture network // Water resources research, 2012, Vol. 48, N. 7.
- [20] Oda M., Permeability tensor for discontinuous rock masses // Geotechnique, 1985, Vol. 35, N. 4, p. 483-495.
- [21] Koudina N. et al. Permeability of three-dimensional fracture networks // Physical Review E, 1998, Vol. 57, N. 4, p. 4466.
- [22] Durlofsky L. J., Upscaling and gridding of fine scale geological models for flow simulation // International Forum on Reservoir Simulation Iles Borromees, Stresa, Italy, 2005, Vol. 2024.

- [23] Родионов С.П., Соколюк Л.Н., Расчёт и использование модифицированных относительных фазовых проницаемостей при преобразовании геологической модели в гидродинамическую // Труды МФТИ, 2010, Т. 2, № 2, с. 130-136.
- [24] Matthäi S. K. et al. Control-volume finite-element two-phase flow experiments with fractured rock represented by unstructured 3D hybrid meshes // SPE, 2005.
- [25] Murphy J. R., Thomson N. R., Two-phase flow in a variable aperture fracture // Water resources research, 1993 Vol. 29, N. 10, p. 3453-3476.
- [26] Young-Jin Park and Kang-Kun Lee, Analytical solutions for solute transfer characteristics at continuous fracture junctions // Water resources research, 1999, Vol. 35, N. 5, p. 1531-1537.
- [27] Monteagudo J. E. P., Firoozabadi A. Control volume method for numerical simulation of two phase immiscible flow in two and three dimensional discrete fractured media // Water resources research, 2004, Vol. 40. N. 7.
- [28] Unsal E., Matthäi S. K., Blunt M. J. Simulation of multiphase flow in fractured reservoirs using a fracture-only model with transfer functions, // Computational Geosciences, 2010, Vol. 14, N. 4, p. 527-538.
- [29] Lang P., Matthai S., Fracture-Matrix Interface Area Contacted by Injected Fluid as a Function of Average Saturation, Mechanical Aperture and Counter-Current Imbibition // IAMG, 2011.
- [30] Райсс Л., Основы разработки трещиноватых коллекторов. М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012, 118 с.
- [31] Reynolds D.A., Multiphase flow and transport in fractured geological environments // Queen's University Kingston, Canada, 2001, p. 326.
- [32] Persoff P., Pruess K., Two-Phase Flow Visualization and Relative Permeability Measurement in Natural Rough-Walled Rock Fractures // Water resources research, 1995, Vol. 31, N. 5, p. 1175-1186.
- [33] Pruess K., Tsang Y. W., On Two-Phase Relative Permeability and Capillary Pressure of Rough Walled Rock Fractures // Water resources research, 1990, Vol. 26, N. 9, p. 1915-1926.
- [34] Corey A. T. et al., The interrelation between gas and oil relative permeabilities // Producers monthly, 1954, Vol. 19, N. 1, p. 38-41.
- [35] Brooks R.H., Corey A.T, Hydraulic Properties of Porous Media // Hydrology Papers, 1964, Vol. 24, p. 37.

- [36] Van Genuchten M. T. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // Soil science society of America journal, 1980, Vol. 44, N. 5, p. 892-898.
- [37] Kueper B.H., McWhoner D.B., The behavior of dense, nonaqueous phase liquids in fractured clay and rock // Groundwater, 1991, Vol. 29, N. 5. p. 716-728.
- [38] Franca L. P., Russo A., Deriving Upwinding, Mass Lumping and Selective Reduced Integration by Residual-Free Bubbles // Pergamon, Great Britain, 1996, Vol. 9, N. 5, p. 83-88.
- [39] Milišić V., Quarteroni A. Analysis of lumped parameter models for blood flow simulations and their relation with 1D models // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 2004, Vol. 38, N. 4, p. 613-632.
- [40] Zienkiewicz O. C. et al. Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, Sixth edition, Elsevier, Incorporated, 2005, p. 802.
- [41] Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Том II. М.: Наука, 1977, 400 с.
- [42] Chen Z., Huan G., Ma Y. Computational methods for multiphase flows in porous media // SIAM, 2006, Vol. 2.
- [43] Chen Z. On the control volume finite element methods and their applications to multiphase flow // Networks and Heterogeneous Media, 2006, Vol. 1, N. 4. p. 689.
- [44] Патанкар С., Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости, М.: Энергоатомиздат, 152 с., 1984.
- [45] Nick H.M., Matthai S.K., Comparison of Three FE-FV Numerical Schemes for Single- and Two-Phase Flow Simulation of fractured porous media // Springer, 2011, Vol. 90, N. 2, p. 421-444.
- [46] Saad Y., Iterative methods for sparse linear systems, SIAM, 2003, p. 567.
- [47] URL: <https://www.kappaeng.com/software/rubis/overview?lang=ru>.
- [48] URL: <https://www.vtk.org/>.
- [49] Qasem F. et al. Role of capillary imbibition in partially fractured reservoirs // Canadian International Petroleum Conference, Petroleum Society of Canada, 2006.
- [50] Карлсон М. Р. Практическое моделирование нефтегазовых пластов, Издательство «ИКИ», 2012, 994 с.