

Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Российской академии наук»

На правах рукописи
УДК 519.6, 533.6, 534.2, 629.735.45

Бобков Владимир Георгиевич

**Численное моделирование
обтекания винта вертолета
и определение аэроакустических характеристик**

05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертационная работа на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., г.н.с.

Козубская Татьяна Константиновна

Научный консультант

д. т. н., главный конструктор АО «Камов»

Аникин Виктор Андреевич

Москва – 2018

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Многомодельный подход к расчету аэродинамических и акустических характеристик винта вертолета	22
1.1. Особенности моделирования течения около вертолета	22
1.2. Модели для описания течения в ближнем поле	24
1.3. Моделирование течения во вращающихся областях	29
1.4. Области определения моделей в ближнем поле	38
1.5. Аэродинамические характеристики	41
1.6. Модели для описания шума в дальнем поле	45
1.7. Акустические характеристики	47
1.8. Карта моделей	49
1.9. Выводы к первой главе	54
Глава 2. Численные алгоритмы моделирования течения около винта и шума в дальнем поле	57
2.1. Численная схема на основе квазиодномерной реконструкции переменных на гибридных неструктурированных сетках	57
2.2. Методы моделирования газодинамического течения в широком диапазоне скоростей	75
2.3. Реализация метода моделирования шума винта в дальнем поле	82
2.4. Выводы ко второй главе	91
Глава 3. Проблемно-ориентированный программный комплекс NOISEtte.Rotor для расчета аэродинамических и акустических характеристик винта	93
3.1. Структура комплекса программ NOISEtte.Rotor	93

3.2. Программные модули подготовки и преобразования расчетных сеток	96
3.3. Программный модуль расчета акустических характеристик в дальнем поле	100
3.4. Программный модуль расчета аэродинамических сил	102
3.5. Система автоматического тестирования комплекса программ NOISEtte.Rotor	104
3.6. Выводы к третьей главе	110
Глава 4. Моделирование аэродинамических и акустических характеристик винтов вертолета различных конфигураций . . .	112
4.1. Модельный двухлопастной винт Caradonna-Tung	112
4.2. Модельный несущий винт КНИТУ-КАИ	118
4.3. Модельная конфигурации «винт в кольце»	122
4.4. Модельный несущий винт КБ «Камов»	133
4.5. Выводы к четвертой главе	139
Заключение	142
Список сокращений и условных обозначений	143
Список литературы	146
Список иллюстративного материала	161
Список таблиц	165
Приложение А. Система уравнений Навье – Стокса во вращающейся системе координат	166
Приложение Б. Справочные формулы	173

Приложение В. Аналоги разделенных разностей на произвольных неструктурированных сетках	174
В.1. Правый треугольник первого уровня	174
В.2. Правые треугольники второго уровня	175

Введение

В настоящее время методы математического моделирования активно внедряются в промышленные приложения и начинают все шире использоваться при создании, если говорить об авиационной промышленности, новых летательных аппаратов. Численный расчет становится мощным средством, позволяющим повысить эффективность инженерных исследований, направленных на выбор оптимальных конфигураций летательных аппаратов, определения оптимальных режимов эксплуатации. Для обеспечения возможности использования расчетов в инженерной практике необходимо создание удобного и эффективного программного обеспечения, которым могли бы без затруднений пользоваться разработчики.

Практически все существующие и реализованные в коммерческих пакетах прикладных программ методы и алгоритмы для расчета аэродинамических и акустических характеристик винтов ориентированы на использование многоблочных структурированных сеток и обеспечивают точность численного результата не выше второго порядка. Методики, приведенные в данной работе, предполагают использование неструктурированных сеток, позволяющих рассматривать объекты сложной реальной конфигурации, и обеспечивающие повышенную точность расчета благодаря применению оригинальных численных схем, основанных на квазиодномерной реберно-ориентированной реконструкции переменных.

Для моделирования течения, возникающего при обтекании вращающихся тел (в том числе винта вертолета) и течения, индуцируемого вращением винта в режиме осевого обтекания, в работе используется полная система уравнений Навье – Стокса, описывающих течение сжимаемого теплопроводного газа, либо система уравнений Эйлера, в случае, когда вязкими эффектами можно пренебречь. Для определения аэродинамических и акустических характеристик вращающегося винта вертолета решаются две основные задачи: проведение рас-

чета для получения стационарных или нестационарных полей физических переменных, характеризующих течение около винта, и позволяющие определить аэродинамические нагрузки на лопастях винта; моделирование распространения акустических возмущений на основе полученных полей как в ближнем, так и в дальнем поле с использованием различных методик.

Актуальность темы исследования

Необходимость улучшения характеристик летательных аппаратов (ЛА), в том числе и вертолетов, постоянно возрастает. Это вызвано рядом причин, главные из которых — стремление производителей повышать экономичность и надежность ЛА. Основными, частично противоречащими друг другу направлениями развития современной вертолетной техники, являются улучшение аэродинамики ЛА и уменьшение акустического шума, производимого им. Улучшение аэродинамических характеристик позволяет повысить скорость и дальность полета ЛА, снизить потребление топлива, а также повысить его устойчивость и управляемость. Улучшение акустических характеристик позволяет уменьшить уровень акустического шума как внутри салона вертолета, так и снаружи, что особенно актуально ввиду все более ужесточающихся экологических норм по шуму на местности, принимаемых Международным комитетом гражданской авиации (ICAO – International Civil Aviation Organization).

Для вертолета улучшение его аэродинамических и акустических характеристик связано, главным образом, с определением оптимальных параметров винта вертолета. Производители вертолетов во всем мире работают над новыми перспективными модификациями винта вертолета с целью улучшения его эксплуатационных и экологических характеристик. Применение современных методик формирования лопастей и применение композитных материалов позволяют использовать различные подходы к улучшению характеристик винта таких, как оптимизация формы лопастей винта в плане — создание специальных наборов аэродинамических профилей со сложной круткой, применение законцовок сложных форм, закрылков и других конструктивных улучшений.

В процессе разработки оптимальной конфигурации винта современного перспективного вертолета, в результате многочисленных экспериментов и исследований, лопасти винта приобретают достаточно сложные геометрические формы.

Несмотря на развитие методов проектирования и изготовления лопастей, позволяющих существенно ускорить процесс изготовления новых винтов различных форм, оптимизация формы винта, построенная на натуральных экспериментах, представляет собой довольно долгий и дорогостоящий процесс. Более того, натурные эксперименты зачастую имеют узкие рамки применимости как по размеру исследуемых винтов, так и по диапазону эксплуатационных режимов винта, ограниченных размерами рабочей зоны аэродинамических труб и воспроизводимых в них характеристиками потока. То есть существуют конфигурации и условия, которые можно воспроизвести только в летных испытаниях, но их проведение практически невозможно на этапе проектирования ЛА. Наряду с экспериментальными методами существуют и применяются инженерные методы определения характеристик несущего винта вертолета на основе полуэмпирических методик и аналитические методы на основе импульсной, вихревой и дисковой вихревой теорий. Такие подходы не требуют высоких вычислительных затрат, однако они не обеспечивают нужной точности для сложных геометрических конфигураций и скоростей современных винтов вертолетов. Вот почему в вертолетостроении, как и в других отраслях, занимающихся конструированием и производством ЛА, все большее значение приобретает вычислительный эксперимент на основе полного газодинамического описания течения, формируемого вблизи лопасти.

Возрастающая актуальность численного моделирования гидродинамических течений в разработке ЛА обеспечивается как развитием математических моделей, позволяющих точно описывать течение вблизи элементов конструкции и распространение возмущений в пространстве около ЛА, так и растущими вычислительными ресурсами современных суперкомпьютеров, что дает воз-

возможность проводить вычислительные эксперименты с очень высоким пространственно-временным разрешением. Еще одной привлекательной особенностью вычислительного эксперимента, в отличие от натурного, является возможность детального изучения характера и особенностей газодинамического течения во всех точках охватываемой расчетом области.

Таким образом, численное моделирование гидродинамических течений обладает рядом преимуществ по сравнению с существующими методами определения характеристик винта. Среди них выделим следующие:

- относительно малое время получения результата, ограниченное только мощностью вычислительной техники, задействованной в расчете;
- возможность получения результата с повышенной точностью, при корректном выборе моделей и численных алгоритмов;
- возможность оценки характеристик винта для произвольных режимов эксплуатации винта;
- возможность численного моделирования полноразмерной конфигурации винта при реальных режимах эксплуатации;
- возможность детального описания течения около винта, позволяющее проводить измерения в произвольных областях рядом с винтом и на поверхности лопастей.

Таким образом, синтез методов моделирования турбулентного течения около винта вертолета и оценки производимого им акустического излучения в дальнейшем поле вместе с огромными вычислительными мощностями современных суперкомпьютеров в руках разработчиков и конструкторов становится мощным инструментом, дополняющим и расширяющим возможности натурного эксперимента.

Цели и задачи диссертационной работы

Основной целью диссертационной работы является разработка вычислительной методики для промышленно-ориентированного моделирования течения около винта вертолета, позволяющей определять аэродинамические и акустические характеристики винта при различных режимах полета.

Целями диссертационной работы являются:

- 1) разработка эффективной промышленно-ориентированной методики определения аэродинамических и акустических характеристик вертолета на основе численного моделирования течения вокруг винта;
- 2) реализация разработанной методики в виде программного комплекса для проведения суперкомпьютерных расчетов с высокой эффективностью;
- 3) демонстрация эффективности разработанной методики на примере расчетов аэродинамических и акустических характеристик винтов вертолета различной конфигурации.

Для достижения поставленных целей решаются следующие задачи:

- 1) разработать методику моделирования течения около вращающегося винта вертолета на основе многомодельного подхода, позволяющего выбирать оптимальные с точки зрения вычислительной стоимости модели в зависимости от режима полета и целей исследования;
- 2) разработать эффективные алгоритмы расчета аэродинамических и акустических характеристик винта вертолета на основе распределенных данных о газодинамических параметрах течения в ближнем и дальнем полях, полученных путем численного моделирования;
- 3) разработать численный алгоритм повышенной точности для моделирования течения около винта вертолета и создаваемого им акустического излучения в дальнем поле, работающий на неструктурированных гибридных сетках;

- 4) реализовать разработанные модели и методы в проблемно-ориентированном комплексе параллельных программ, предназначенном для определения аэродинамических и акустических характеристик вертолета на основе суперкомпьютерного моделирования течения около винта на сетках большой размерности (вплоть до миллиарда узлов);
- 5) провести серию валидационных и промышленно-ориентированных расчетов по определению аэродинамических и акустических характеристик вертолетных винтов различной конфигурации.

Научная новизна

1. Разработана многомодельная методика проведения промышленно-ориентированных расчетов по оценке аэродинамических и акустических характеристик несущего винта вертолета. Методика использует полное газодинамическое описание на основе уравнений Навье – Стокса, записанных во вращающейся системе координат. Она применима к винтам с лопастями произвольной формы в плане, с нелинейной круткой, произвольной законцовкой и величиной общего шага. При этом предложенная методика позволяет произвести оптимальный выбор математической модели в зависимости от режима эксплуатации винта и требований по составу и точности определяемых характеристик.
2. Разработан оригинальный метод расчета акустических характеристик винта вертолета с использованием интегрального метода Фокса Уилльямса – Хокинга (FWH – Ffowcs Williams – Hawkings). Особенность разработанной методики заключается в том, что параметризация контрольной поверхности и последующее интегрирование по ней проводится в инерциальной, связанной с фюзеляжем вертолета, системе координат, в то время как само моделирование течения происходит в неинерциальной, связанной с вращающимся винтом, системе координат.

3. Создан проблемно-ориентированный программный комплекс для расчета аэродинамических и акустических характеристик винта вертолета при различных режимах эксплуатации винта.

Теоретическая и практическая значимость

В результате проведенного исследования разработан и реализован ряд алгоритмов, позволяющих получить с необходимой точностью оценку аэродинамических и акустических характеристик несущих винтов вертолета различных схем и конфигураций при помощи вычислительного эксперимента.

Методика, составляющие ее алгоритмы и реализующие их программные модели, описанные в диссертации, могут быть использованы для разработки отечественных программных комплексов, предназначенных для проведения численных экспериментов на суперкомпьютерах с целью получения аэродинамических и акустических характеристик несущих винтов вертолета различных конфигураций в широком диапазоне режимов эксплуатации. Методика обеспечивает выбор оптимальной модели расчета в зависимости от режима эксплуатации винта и цели исследования.

Материалы диссертационной работы использовались при выполнении следующих научных работ: научно-исследовательская работа (НИР) «Исследование аэродинамических и акустических характеристик винта в кольце» (заказчик – ОАО «Камов», 2013 г.), прикладное научное исследование (ПНИ) «Разработка программного обеспечения для моделирования аэродинамических и аэроакустических характеристик винта вертолета на суперкомпьютерах» в рамках ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технического комплекса России на 2014-2020 годы» (индустриальный партнер – ОАО «Камов», 2014 – 2017 гг.), НИР «Численное исследование аэродинамических и акустических характеристик изолированного модельного несущего винта вертолета» (заказчик – ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского, 2017 г.).

Разработанные в ходе работы проблемно-ориентированный программный

комплекс `NOISEtte.Rotor` для расчета аэродинамических и акустических характеристик винта вертолета и программа `NOISEtte.forces` для расчета аэродинамических сил и моментов, действующих на обтекаемое тело внедрены в практическую деятельность АО «Камов».

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся основные результаты диссертационной работы, которые изложены в Заключение диссертационной работы.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность изложенных в работе результатов обеспечивается использованием современных апробированных подходов к моделированию физических процессов, проверкой всех предложенных численных методик на тестовых задачах с известными точными решениями, а также сравнением с натурными экспериментами.

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях: Третья открытая всероссийская конференция по аэроакустике, г. Звенигород, 2013 г.; 3rd International workshop "Computational Experiment in Aeroacoustics", Svetlogorsk, Russia, 2014; XXV Научно-техническая конференция по аэродинамике, п. Володарского, 2014 г.; Международный авиационно-космический научно-гуманитарный семинар имени С.М. Белоцерковского, г. Москва, 2014 г.; Japan-Russian Workshop "Supercomputer Modeling, Instability and Turbulence in Fluid Dynamics", March 4-6, Moscow, 2015 г.; Шестой Московский суперкомпьютерный форум МСКФ-2015, 2015 г.; II Международный технологический форум «Инновации. Технологии. Производство» г. Рыбинск. 2015 г.; Четвертая открытая всероссийская конференция по аэроакустике, г. Звенигород, 2015 г.; Национальная ежегодная выставка-форум ВУЗПРОМЭКСПО-2015, г. Москва, 2015 г.; International Workshop "Computational Experiment in Aeroacoustics", Svetlogorsk, Russia, 2014; 42nd European Rotocraft Forum, Lille, France, 2016; Научно-техническая конференция по аэродинамике, п. Володарского, 2016

г.; III Всероссийская научно-практическая конференция "Исследования и разработки - 2016", г. Москва, 2016 г.; XVI Международная конференция "Супервычисления и математическое моделирование", г. Саров, 2016 г. Пятая открытая всероссийская (XVII научно-техническая) конференция по аэроакустике, г. Звенигород, 2017 г.; XXIX научно-техническая конференция по аэродинамике, парк-отель Орловский, 2018 г.

Степень разработанности темы исследования

Развитие теорий и методик для определения характеристик винта вертолета имеет достаточно длинную историю.

Изначально, начиная с 30-х годов прошлого века применялись методы импульсной теории винта, которая была создана учениками Н.Е. Жуковского – Б.Н. Юрьевым и Г.Х. Сабининым [1].

В импульсной теории, аэродинамические силы, действующие на винт, определяются с помощью применения теорем механики к воздушному потоку, обтекающему винт. Импульсная теория рассматривает винт как активный диск, состоящий из бесконечно большого числа лопастей, и действующего на обтекающий его поток, основной характеристикой которого является его скорость и скачок давления в плоскости диска винта. Для учета реальной среды был сделан ряд специальных поправок в работах [1; 2]. Методы импульсной теории винта применяются до сих пор в комбинации с современными сеточными методами, когда, например, рассматривается влияние несущего винта на обтекание фюзеляжа [3]. В этом случае несущий винт моделируется активным диском.

Дальнейшее развитие импульсная теория получила в работах Г. Глауэрта [4], Б.Н. Юрьева [1; 2], И.П. Братухина [5], М.Л. Миля [6], Э.А. Петросяна [7] и других авторов.

С помощью импульсной теории были получены широко используемые аналитические соотношения для сил, индуктивных скоростей и других аэродинамических характеристик, она зарекомендовала себя как весьма удобный инструмент для быстрого предварительного расчета интегральных характеристик вин-

та, за счет чего широко используется и сегодня.

Задача более физически корректного определения скоростей, индуцируемых сложной вихревой структурой, порождаемой работающим винтом, может быть решена на основе вихревой теории винта.

Главной задачей вихревой теории несущего винта является определение аэродинамических нагрузок на лопасти с учетом неравномерного поля индуктивных скоростей. Определение переменных аэродинамических нагрузок на лопасть, позволяет более точно рассчитать колебания и деформацию лопастей. Определение неравномерного поля индуктивных скоростей в следе за винтом позволяет лучше учитывать его влияния на другие элементы вертолета, в том числе, на другие винты.

Широкое распространение в вихревых теориях нашла модель винта в виде диска состоящего из бесконечного числа лопастей, разработанная впервые Н.Е. Жуковским [8]. Предполагалось, что разница между мгновенными и средними индуктивными скоростями несущественна, что позволяло использовать подобную модель, учитывающую средние по времени индуктивные скорости. В методах использовались различные допущения, упрощающие математические модели, и позволяющие применять их на практике.

Разработкой методов расчета аэродинамических характеристик винтов на базе дисковой теории занимались: В.Э. Баскин, Е.С. Вождаев [9], В.И. Шайдаков [10; 11], предложившие метод расчета характеристик винта на осевых режимах, след которого моделировался вихревым цилиндром; Г. И. Майкапар [9], который для этих же целей предложил схему скошенного вихревого цилиндра, которая соответствовала режиму косоугольного обтекания винта; Л.С. Вильдгрубе [9] – предложил метод расчета характеристик винта на режимах косоугольного обтекания с большими относительными скоростями, след которого моделировался плоской вихревой пеленой. Для этих подходов к созданию методов расчета аэродинамических характеристик винтов на базе дисковой теории были получены соотношения для определения поля скоростей в окрестности несущего винта.

Для частных случаев получены точные решения, которые позволили повысить точность и скорость вычислений, а также использовать их для верификации различных численных методов. Вклад в развитие дисковой вихревой теории внесли Ван Ши-Цун [12] и В.А. Аникин [13]. В. И. Шайдаковым была разработана дисковая теория несущего винта, в том числе и нелинейная, были получены методы расчета винтов на различных режимах, в том числе приближенно на режимах снижения с небольшими скоростями [11; 14]. С помощью приближенной линейной модели была рассмотрена область режимов «вихревого кольца».

Другим классом вихревых теорий являются так называемые лопастные вихревые теории, предложенные Г.И. Майкапаром в его теоретической работе [9]. В лопастных теориях был совершен переход от схемы винта с бесконечным числом лопастей к винту с конечным числом лопастей. Это позволяло учитывать истинные мгновенные индуктивные скорости и нагрузки, в отличие от осредненных по времени для бесконечного числа лопастей. Был сделан вывод, что винты с разным числом лопастей при одинаковом заполнении отнюдь не являются эквивалентными.

Дальнейшее развитие лопастных теорий винта было проведено в работах Е.С. Вождаева и М.Н. Тищенко. Е.С. Вождаев разработал линейные теории на основе несущей линии (нити), с которой сходит система дискретных вихрей и на основе несущей поверхности [9; 15]. В дальнейшем Е.С. Вождаеву удалось разработать принципиально новый метод расчета аэродинамических характеристик несущего винта на основе точных аналитических решений в задаче о нестационарном поле скоростей винтовых вихрей [16]. На базе этих решений были разработаны «быстрые» алгоритмы аэродинамического расчета, ориентированные на применение в многодисциплинарных системах программ расчета и аэродинамического проектирования.

Описанные выше вихревые теории не учитывают свободных перемещений вихревой структуры в следе за винтом, таким образом, пелена не может свободно деформироваться и является линейной (квазилинейной).

Ввиду большой сложности процессов деформации свободной вихревой пелены, для построения нелинейных моделей для осевых режимов широко распространился подход с использованием, так называемой модели с жестким нелинейным следом. Эти модели базируются на эмпирических зависимостях, определяющих положение концевой вихря. Эти зависимости были получены на основе многочисленных экспериментов с визуализацией вихревого следа, наиболее детально такие исследования были проведены Landgrebe A.J. и Chenly M.C. [17], Kosurec Y.D. и Tangler Y.L. [18]. В.Э. Баскин построил лопастную нелинейную вихревую теорию в квазистационарной постановке на основе несущей линии со свободно деформируемым вихревым следом [9].

Дальнейшее развитие методов расчета аэродинамических характеристик несущего винта на основе нелинейной лопастной вихревой теории получили в работах Ю.М. Игнаткина, П.В. Макеева и А.И. Шомова [19]. В их работах рассматривалась нестационарная постановка на базе несущей линии.

Однако у всех методов, основанных на схеме несущей линии, имеется существенное ограничение – они не позволяют моделировать обтекание лопасти сложной формы в плане, которая характерна для современных несущих винтов. Кроме того, они не позволяют рассчитывать акустические характеристики несущего винта.

Этих недостатков лишен метод расчета, основанный на нелинейной теории винта в нестационарной постановке на базе тонкой несущей поверхности освещенной в работе С.М. Белоцерковского, Б.Е. Локтева и М.И. Ништа [20]. Основные положения этой теории заключаются в замене лопастей винта бесконечно тонкими базовыми поверхностями, по форме в плане совпадающими с формой в плане лопасти и искривленными по закону искривления ее срединной поверхности.

Развитие метода определения нелинейных аэродинамических характеристик в нестационарной постановке на базе тонкой несущей поверхности получило в работах Б.С. Крицкого и его коллег [21–25]. Развитие состояло в обобщении

метода на случаи совместной работы произвольной комбинации вертолетных винтов, махового движения лопастей, обтекания преобразуемого летательного аппарата с поворотными несущими-тянущими винтами, движения летательного аппарата в следе от вертолета и др.

Возможности по моделированию аэродинамики винтов, которые открылись с появлением нелинейной нестационарной вихревой теории винта на базе тонкой несущей поверхности, позволили приступить к исследованию аэроакустических характеристик винтов в дальнем поле.

Математическая модель аэроакустики винта основана на модификационном подходе М. Лоусона и Ф. Фарассата, использующем уравнение Фокса Уилльямса – Хокинга [26–28] применительно к воздушному винту. В уравнение для определения пульсаций давления от воздушного винта в точке наблюдения входит нестационарная нагрузка на лопастях винта, определение которой во многих случаях представляет наибольшую трудность. Поэтому главные составляющие шума от нестационарной аэродинамической нагрузки – шум вращения и вихревой шум – определяются совместно на основе данных о распределении аэродинамической нагрузки по размаху и хорде лопасти по времени, получаемых из расчетов по нелинейной нестационарной теории [29].

Принципиальными преимуществами по сравнению с вихревыми методами в моделировании шумоизлучения несущего винта обладают сеточные методы, особенно основанные на полном газодинамическом описании на базе уравнений Навье – Стокса. Следует отметить, что методы расчета аэродинамических характеристик, основанные на рассмотренных выше вихревых теориях, в свою очередь, имеют преимущество по сравнению с сеточными в быстродействии и отличаются существенно меньшей ресурсоемкостью.

В настоящее время имеется множество алгоритмов реализации сеточных методов в применении к определению аэродинамических и акустических характеристик вертолета. В качестве базы при этом могут использоваться: модель на основе уравнений Эйлера, для описания невязкого течения; модель на осно-

ве осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса (RANS – Reynolds Averaged Navier-Stocks) для сжимаемого газа с различными замыкающими моделями турбулентности; различные гибридные модели на основе вихреразрешающих подходов типа модели крупных вихрей (LES – Large Eddy Simulation), модели отсоединенных вихрей (DES – Detached Eddy Simulation), и их модификаций.

Выбор модели существенным образом зависит как от режима обтекания и требований к качеству получаемых характеристик, так и от доступных временных и вычислительных ресурсов. Современный опыт вычислительных экспериментов, например в работах группы под руководством М. Х. Стрельца и М. Л. Шура [30], показывает, что на данный момент оптимальным выбором для решения задач внешней аэродинамики, связанным с моделированием безотрывных течений и течений с ограниченными отрывными зонами является использование RANS модели, замыкаемой эволюционным уравнением Спаларта – Аллмараса (SA – Spalart-Allmaras). Также в работе показано, что для моделирования течений с наличием существенных отрывных областей и нестационарным взаимодействием крупно- и мелкомасштабных вихревых структур наилучших результатов позволяет достичь использование гибридного вихреразрешающего подхода DES [31].

Среди работ, использующих модель Эйлера можно упомянуть использованную В.Ф Копьевым, В.А. Титаревым и И.В. Беляевым методологию расчета шума винта [32]. В данной работе обтекание шестилопастного винта моделировалось с использованием TVD-схем на тетраэдральной сетке, а расчет акустического шума в дальнем поле производился с использованием методики Фокса Уилльямса – Хокинга. Авторами было получено хорошее согласование с экспериментом по значениям тяги и крутящего момента. В дальнейшем авторы пришли от вращающейся контрольной FWH-поверхности к неподвижной [33].

Различные методы моделирования работы лопаточных машин и определения аэроакустических характеристик разработаны специалистами двигателе-

строительных фирм и институтов «Сатурн», «Салют», «Авиадвигатель», ЦИАМ [34–38].

Однако для вертолетного несущего винта основным является режим косого обтекания, когда течение является несимметричным относительно оси вращения винта, поэтому подходы к моделированию осевого обтекания винта в этом случае не могут быть использованы напрямую. В общем случае моделирование работы несущего винта на режимах косого обтекания сеточными методами является исключительно сложной задачей, требующей рациональных алгоритмов и больших вычислительных ресурсов на суперкомпьютерах.

Частные случаи, когда несущий винт рассматривается жестким, без махового движения лопастей, рассматривались многими авторами. Особо следует выделить проблему взаимодействия лопасти несущего винта с вихревым жгутом от впереди идущей лопасти (Blade Vortex Interaction – BVI) [39]. Следует отметить, что наиболее актуальные и практически важные публикации фундаментального и прикладного характера по вертолетной тематике имеют место по итогам работы Европейского вертолетного форума (European Rotorcraft Forum) и Форума американского вертолетного общества (Forum of the American Helicopter Society) [40–43].

Наибольшее продвижение в моделировании обтекания несущего винта в общем случае движения, определения его аэродинамических и акустических характеристик принадлежит специалистам ONERA и CFD-лаборатории Ливерпульского университета под руководством профессора Varakos G. В ONERA разработан программный комплекс, позволяющий рассчитывать аэродинамические и акустические характеристики несущего винта при рационально построенных сетках с целью сокращения вычислительных ресурсов, сохраняя приемлемую точность [44–46].

Программные комплексы CFD-лаборатории Ливерпульского университета позволяют моделировать особенности обтекания как изолированного несущего винта с упругими лопастями, совершающими маховое движение, так и совмест-

но с фюзеляжем и рулевым винтом [3; 47–52].

В целом, следует отметить, что ведущие вертолетостроительные фирмы и национальные исследовательские центры в исследованиях по аэродинамике и акустике вертолета и его основного элемента – несущего винта ориентируются на собственные программные комплексы, предоставляя коммерческим пакетам вспомогательную роль. Сложность моделирования обтекания вертолета и его акустического излучения в общем случае движения требует привлечения суперкомпьютеров. При этом актуальной становится задача разработки эффективных алгоритмов для параллельных вычислений.

Публикации

Материалы диссертации опубликованы в 24 печатных работах: 7 публикаций в рецензируемых журналах, входящих в список изданий рекомендованных ВАК [53–59] (из них 5 публикаций, входящих в системы цитирования Web of Science(WoS) и Scopus [53–57]), 2 статьи в сборниках трудов конференций и 15 тезисов докладов.

Разработанные проблемно-ориентированный программный комплекс и его основные модули зарегистрированы в федеральной службе по интеллектуальной собственности Российской Федерации. Получено 3 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ [60–62].

Личный вклад автора

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в проведенное исследование. Разработка и реализация методик промышленно-ориентированного моделирования обтекания винта вертолета, а также расчеты и обработка результатов представленные в работе проведены лично автором. Оригинальный численный алгоритм расчета акустических характеристик винта вертолета на основе интегрального метода Фокса Уилльямса – Хокинга разработан с участием Бахвалова П.А.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю

д.ф.-м.н. Татьяне Константиновне Козубской за поддержку и чуткое руководство в научных изысканиях, коллеге к.ф.-м.н. Павлу Алексеевичу Бахвалову за помощь и плодотворную совместную работу, коллегам И.А. Абалакину, А.В. Горобцу, А.П. Дубеню из сектора вычислительной аэроакустики ИПМ им. М.В. Келдыша РАН за помощь и полезные советы. Также автор выражает благодарность за консультации по теории полета и инженерным основам винтокрылых машин научному консультанту настоящей диссертации, д.т.н, главному конструктору АО «Камов» Виктору Андреевичу Аникину и профессору, главному научному сотруднику ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского Борису Сергеевичу Крицкому.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы, списка иллюстративного материала, списка таблиц и трех приложений. Общий объем диссертации 176 страниц, включая 59 рисунков и 13 таблиц. Библиография включает 112 наименований на 15 страницах.

Глава 1

Многомодельный подход к расчету аэродинамических и акустических характеристик винта вертолета

1.1. Особенности моделирования течения около вертолета

При моделировании течения около вертолета можно выделить три типа зон, течение в которых может моделироваться разными способами (см. Рис. 1.1).

- «Неподвижная» область ближнего поля (область «1» на Рис. 1.1): область внешнего обтекания вертолета как единого тела, для которой является естественным использование системы координат, связанной с фюзеляжем вертолета.
- Вращающиеся области ближнего поля (области «2» на Рис. 1.1): области, содержащие винты вертолета. В областях этого типа моделирование течения около винта можно проводить как в неинерциальной вращающейся системе координат, так и с использованием абсолютной системы координат. Среди моделей в абсолютной системе координат, можно выделить два основных класса: модели на основе движущейся сетки и модели на основе метода погруженных границ.
- Область дальнего поля (область «3» на Рис. 1.1): области, удаленные от акустического источника, представляемого вертолетом и его винтами. Для оценки акустического излучения в этой области используются модели на основе волновых уравнений.

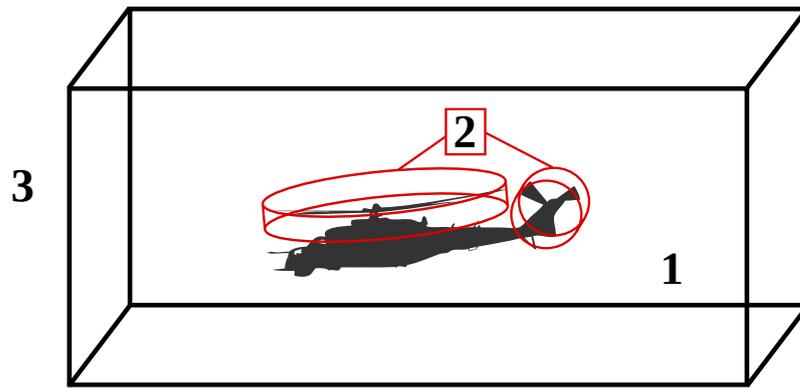


Рисунок 1.1 – Области моделирования течения около вертолета

Такое условное разделение на зоны вызвано тем, что в различных областях доминируют различные физические процессы, для описания которых возможно использовать разные математические модели, а также применять те или иные технологические приемы. Например, течение в зонах ближнего поля (**1** и **2**), где существенны нелинейные эффекты и могут образовываться скачки, где важна динамика вихреобразования, учет турбулентности и т.п., необходимо моделировать на основе полного газодинамического описания. В то же время в зоне дальнего поля **3**, где подразумевается однородное течение вдали от источника шума, перенос акустических возмущений можно описывать волновым уравнением. Зоны **1** и **2** ближнего поля принципиально отличаются вращением одной области относительно другой. Учет вращательного движения также тем или иным способом приводит к различному математическому описанию течения в смежных областях. Такое условное разделение на зоны вызвано тем, что в разных зонах для определения характеристик течения требуется моделирование разных эффектов с различной подробностью их описания.

1.2. Модели для описания течения в ближнем поле

1.2.1. Модели на основе системы уравнений Навье – Стокса в неподвижной системе координат

В зонах ближнего поля для достоверного моделирования течения и его параметров вблизи твердых поверхностей необходимо подробное газодинамическое описание. Именно это является определяющим фактором при выборе модели, которая может варьироваться в зависимости от режима эксплуатации вертолета.

Выпишем систему уравнений Навье – Стокса для сжимаемого газа, на основе которой строятся все математические модели для описания течения вблизи винта вертолета.

Законы сохранения в газовой динамике представимы в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{Div} \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \nabla p &= \operatorname{Div} \mathbf{S} \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} E + \operatorname{div} \mathbf{u} p &= \operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div} \mathbf{S} \mathbf{u} . \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь введены следующие обозначения: $\mathbf{u} = (u, v, w)$ — декартовы компоненты скорости

ρ — плотность;

p — гидродинамическое давление, вычисляемое по уравнению состояния совершенного газа $p = \rho \varepsilon (\gamma - 1)$, где ε — внутренняя энергия газа, γ — показатель адиабаты, для воздуха равный значению 1.4;

E — полная энергия газа, определяемая по формуле

$$E = \rho \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \rho \varepsilon ;$$

$\mathbf{S} = [S_{ij}]$ — тензор вязких напряжений, компоненты которого имеют вид

$$S_{ij} = 2\mu \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\tau_{ij}} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i},$$

где $\mathcal{T} = [\tau_{ij}]$ — тензор скоростей деформации, а δ_{ij} — символ Кронекера;

\mathbf{q} — вектор теплового потока, компоненты которого могут быть выражены через градиенты внутренней энергии¹

$$q_i = \frac{\gamma \mu}{\text{Pr}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}.$$

Число Прандтля задано соотношением $\text{Pr} = \mu c_p / \lambda$, где μ — коэффициент динамической молекулярной вязкости газа, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, λ — коэффициент теплопроводности. Значение числа Прандтля для воздуха есть величина $\text{Pr} = 0.72$. Коэффициент молекулярной вязкости μ задается формулой Сазерленда:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + 120^\circ\text{K}}{T + 120^\circ\text{K}},$$

где μ_0 — характерная вязкость при характерной температуре T_0 .

Оперторы div и Div в системе уравнений (1.1) представляют собой операторы дивергенции векторной и тензорной величин соответственно, а \otimes — оператор диадного произведения векторов:

$$\text{div } \mathbf{v} = \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right], \quad \text{Div } \mathbf{T} = \left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \right], \quad a \otimes b = [a_i b_j].$$

При этом результатами применения операторов div , Div и \otimes являются скаляр, вектор и тензор, соответственно.

При численной реализации методов расчета на основе выписанной модели

¹ Рассматривается политропный газ, то есть удельная теплоемкость c_V не зависит от температуры и, как следствие, внутренняя энергия газа есть линейная функция температуры: $\varepsilon = c_V T$.

(1.1) удобнее использовать ее форму, записанную в псевдовекторном потоковом виде относительно вектора консервативных переменных $\mathbf{Q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E)^T$:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{Q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{Q})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_3(\mathbf{Q})}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{F}_1^{NS}(\mathbf{Q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2^{NS}(\mathbf{Q})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_3^{NS}(\mathbf{Q})}{\partial z}. \quad (1.2)$$

В системе (1.2) конвективные потоки $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ определены как

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(E + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_3(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ w(E + p) \end{pmatrix}.$$

В свою очередь вязкие потоки $\mathbf{F}_1^{NS}, \mathbf{F}_2^{NS}, \mathbf{F}_3^{NS}$ определяются следующим образом:

$$\mathbf{F}_1^{NS} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_{xx} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \\ uS_{xx} + vS_{xy} + wS_{xz} + q_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2^{NS} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_{yx} \\ S_{yy} \\ S_{yz} \\ uS_{yx} + vS_{yy} + wS_{yz} + q_y \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_3^{NS} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_{zx} \\ S_{zy} \\ S_{zz} \\ uS_{zx} + vS_{zy} + wS_{zz} + q_z \end{pmatrix}.$$

Математическая модель (1.1) описывает вязкое газодинамическое течение в неподвижной системе координат и может быть использовано для расчета течения в области ближнего поля $\mathbf{1}$, Рис. 1.1. Далее (в пп. 1.3) будет рассмотрена

модификация данной системы для проведения расчета во вращающихся областях **2**.

1.2.2. Модели для описания турбулентных течений

Для описания турбулентного газодинамического течения в области ближнего поля в данной работе предлагается использовать модель на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса (RANS) для сжимаемого газа с различными замыкающими моделями турбулентности и гибридные модели отсоединенных вихрей DES.

В качестве методики из первого класса была выбрана RANS-модель, замыкаемая эволюционным уравнением Спаларта – Аллмараса (SA) для турбулентной вязкости [63]. Практика показывает, что этот подход на данный момент является оптимальным для решения задач внешней аэродинамики, связанным с моделированием безотрывных течений и течений с ограниченными отрывными зонами [30].

Для моделирования течений с наличием существенных отрывных областей и нестационарным взаимодействием крупно- и мелкомасштабных вихревых структур предлагается использовать гибридный вихреразрешающий подход DES [31], сочетающий преимущества RANS-подхода и метода моделирования крупных вихрей LES [30].

1.2.3. Граничные условия

Под внешними границами областей ближнего поля **1** (см. Рис. 1.1) понимаются границы расчетной области, на которых задаются параметры внешнего невозмущенного потока. Таким образом, там задаются вектор внешнего потока \mathbf{U}_0 , значения плотности ρ_0 и давления p_0 . Вообще говоря, задание параметров невозмущенного потока на внешней границе не всегда корректно, так как на границе *реальной* расчетной области течение всегда будет слабооднородным

из-за приходящих возмущений из источниковой зоны. Под *реальной* расчетной областью будем понимать область с диаметром $D = (3 \div 10)L$, где L — характерный размер обтекаемой конструкции, например диаметр винта. Поэтому на внешней границе расчетной области необходимо задавать искусственные или численные граничные условия. В данной работе на внешних границах предлагается использовать граничные условия на основе расщепленных по направлению характеристических скоростей потоков, связывающих значения газодинамических параметров внутри расчетной области $\rho_i, \mathbf{U}_i, p_i$ и их значений в удаленном потоке $\rho_\infty, \mathbf{U}_\infty, p_\infty$.

Под значениями газодинамических величин $\rho_\infty, \mathbf{U}_\infty, p_\infty$ в удаленном потоке будут пониматься либо невозмущенные значения

$$\rho_\infty = \rho_0, p_\infty = p_0, \mathbf{U}_\infty = \mathbf{U}_0, \quad (1.3)$$

либо значения, определяемые характеристическими соотношениями

$$\rho_\infty = \rho_i \left(\frac{p_\infty}{p_i} \right)^{1/\gamma}, p_\infty = p_0, \mathbf{U}_\infty = \mathbf{U}_i + \frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\gamma \frac{p_i}{\rho_i} \right)^{1/2} - \left(\gamma \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \right)^{1/2} \right] \cdot \mathbf{n}. \quad (1.4)$$

При проведении расчетов без учета вязкости, т.е. с использованием уравнений Эйлера, на твердой поверхностях, ставятся граничные условия непротекания, заключающиеся в задании нулевой нормальной скорости на границе.

В случае использования моделей с учетом вязкости, на основе уравнений Навье – Стокса (1.1) на твердой границе ставиться условие прилипания, то есть условие равенства нулю величины вектора скорости.

1.3. Моделирование течения во вращающихся областях

1.3.1. Система уравнений Навье – Стокса в неинерциальной вращающейся системе координат

Существующие подходы к моделированию течения около вращающегося винта на основе уравнений Навье – Стокса можно разделить на несколько классов: подходы с модификацией базовой модели для описания течения в неинерциальной вращающейся системе координат и подходы на основе абсолютной системы координат. Среди подходов, использующих абсолютную систему координат, можно выделить два основных класса: методы на основе движущейся сетки [64–66] и методы на основе метода погруженных границ [67; 68].

В данной работе для описания течения вблизи вращающихся винтов (зона 2, Рис. 1.1) используются уравнения Навье – Стокса записанные в неинерциальной вращающейся системе координат. Можно показать, что система уравнений Навье – Стокса (1.1) во вращающейся системе координат, записанная в виде законов сохранения относительно вектора абсолютной скорости \mathbf{u} , выглядит следующим образом (см. Приложение А):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho (\mathbf{u} - \mathbf{V}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{Div} \rho (\mathbf{u} - \mathbf{V}) \otimes \mathbf{u} + \nabla p &= \operatorname{Div} \mathbf{S} - \rho (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathbf{u} - \mathbf{V}) E + \operatorname{div} \mathbf{u} p &= \operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div} \mathbf{S} \mathbf{u} , \end{aligned} \quad (1.5)$$

где вектор линейной скорости вращения \mathbf{V} , определяемый вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ выражается как

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (1.6)$$

С точки зрения наблюдателя, находящегося в неподвижной системе координат, система уравнений (1.5) описывает изменение консервативных переменных за счет их переноса во вращающейся со скоростью \mathbf{V} среде, градиента давления

и поворота вектора скорости на угол равный $|\boldsymbol{\omega}|t$. При численной реализации данной системы уравнений скорость вращения можно интерпретировать как скорость подвижной сетки. В таком виде система уравнений рассматривалась, например, в публикациях [69; 70], где выполнялся одновременный расчет течения во вращающейся и неподвижной областях.

Перепишем систему (1.5) в псевдовекторном потоковом виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x^I}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y^I}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z^I}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{F}_x^{NI}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{F}_y^{NI}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{F}_z^{NI}}{\partial z} &= \mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{F}_x^V}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y^V}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z^V}{\partial z} \\ \mathbf{Q} &= (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E)^T \\ \mathbf{H} &= (0, -v\omega_z + w\omega_y, u\omega_z - w\omega_x, -u\omega_y + v\omega_x, 0)^T, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $\mathbf{F}_x^I, \mathbf{F}_y^I, \mathbf{F}_z^I$ — конвективные потоки системы уравнений Навье – Стокса в инерциальной (неподвижной) системе координат, $\mathbf{F}_x^{NI} = V_x \mathbf{Q}, \mathbf{F}_y^{NI} = V_y \mathbf{Q}, \mathbf{F}_z^{NI} = V_z \mathbf{Q}$ — добавки к потокам, определяемые неинерциальной системой координат или скоростью движения сетки. $\mathbf{F}_x^V, \mathbf{F}_y^V, \mathbf{F}_z^V$ — вязкие потоки системы уравнений Навье – Стокса, определяемые градиентами вектора абсолютной скорости и градиентом теплового потока.

Далее для краткой записи нижние индексы x, y, z заменим на нижний индекс k , где k принимает значения от 1 до 3 соответственно.

Матрицы Якоби конвективного потока, иницируемого скоростью вращения, имеют диагональный вид

$$\frac{\partial \mathbf{F}_k^{NI}}{\partial \mathbf{Q}} = V_k \mathbf{I}, \quad k = 1, 2, 3,$$

следовательно, матрицы Якоби полного конвективного потока можно записать как

$$\frac{\partial (\mathbf{F}_k^I - \mathbf{F}_k^{NI})}{\partial \mathbf{Q}} = \mathbf{S}_k \text{diag} (\lambda_k^i - V_k) \mathbf{S}_k^{-1}, \quad i = 1, \dots, 5, \quad k = 1, 2, 3, \quad (1.8)$$

где λ_k^i — собственные значения, $\mathbf{S}_k (\mathbf{S}_k^{-1})$ — матрица правых (левых) собствен-

ных векторов матриц Якоби $\partial (\mathbf{F}_k^I - \mathbf{F}_k^{NI}) / \partial \mathbf{Q}$ соответствующих конвективных потоков уравнений Навье – Стокса в инерциальной системе координат. Таким образом, отличие системы (1.7) от системы уравнений Навье – Стокса, записанной в неподвижной системе координат (1.2), заключено только в изменении характеристических скоростей и наличии источника в правой части. Поэтому при дальнейшей численной реализации системы (1.7) схемами годуновского типа методы аппроксимации, останутся теми же самыми, что и при решении уравнений в неподвижной системе координат.

1.3.2. Граничные условия

Граничные условия на внешней свободной границе во вращающейся области формулируются аналогично пп. 1.2.3 с тем отличием, что вектор абсолютной скорости на внешней границе поворачивается в направлении противоположном направлению вращения области и определяется как

$$\mathbf{U}_0^R = \mathbf{U}_0 + (\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{U}_0) \sin \Psi + ((\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{U}_0) \times \mathbf{e}_\omega) (\cos \Psi - 1) , \quad (1.9)$$

где $\mathbf{e}_\omega = -\boldsymbol{\omega} / |\boldsymbol{\omega}|$ — единичный вектор, относительно которого происходит вращение, $\Psi = |\boldsymbol{\omega}| t$ — угол поворота.

Для определения значений скалярных физических переменных на внешней границе справедливы выражения (1.3) – (1.4), приведенные пп. 1.2.3 для задания значений газодинамических величин на внешней свободной границе.

Рассмотрим подробнее постановку граничного условия непротекания на твердых поверхностях при использовании вращающейся системы координат на примере модельной геометрической конфигурации, сектор которой изображен на Рис. 1.2. Поверхности “2” (лопасть) и “1” (поверхность «втулки» или «центрального тела») представляют собой вращающиеся поверхности, а поверхность “3” («кольцо») — неподвижна в абсолютной системе координат.

На вращающихся твердых поверхностях (поверхности 1 и 2, Рис. 1.2) за-

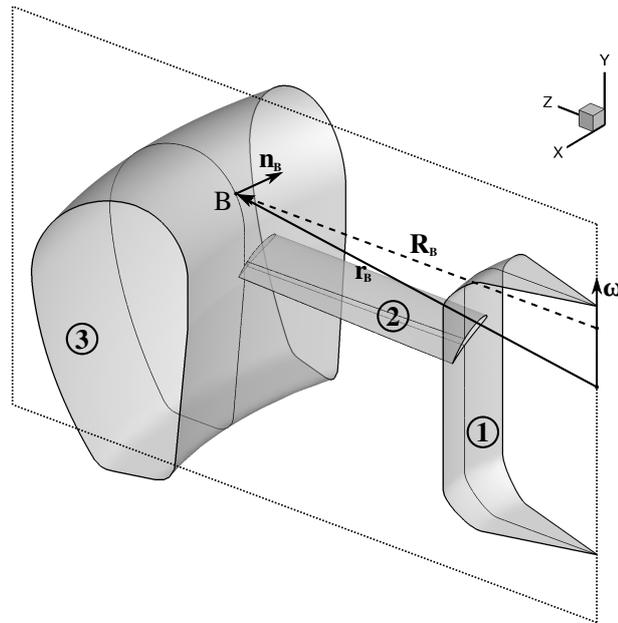


Рисунок 1.2 – Модельная геометрическая конфигурация с подвижными и неподвижными поверхностями

даются условия непротекания:

$$\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}_B = (\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_B = 0, \quad (1.10)$$

где \mathbf{n}_B — единичная нормаль к поверхности.

Будем предполагать, что неподвижная поверхность является поверхностью вращения вокруг оси задаваемой вектором $\boldsymbol{\omega}$. Определим граничные условия на неподвижной поверхности 3, с учетом того, что сеточное значение абсолютной скорости на кольце должно изменяться при вращении. В подвижной неинерциальной системе координат, связанной с лопастью, кольцо вращается вокруг оси около неподвижной лопасти с угловой скоростью $-\boldsymbol{\omega}$. Пусть на момент времени t_0 вектор скорости на кольце задан значением \mathbf{u}_0 , тогда условие непротекания в абсолютной неподвижной системе координат запишется в виде

$$\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_{B0} = 0, \quad (1.11)$$

где \mathbf{n}_{B0} — единичная нормаль к поверхности в точке B_0 , в которой задана скорость \mathbf{u}_0 . Найдем вектор абсолютной скорости \mathbf{u} на кольце в произвольный

момент времени t . Для этого решим начальную задачу для следующей системы:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0.$$

Решение этой задачи есть вектор²

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + (\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{u}_0) \sin \Psi + ((\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{u}_0) \times \mathbf{e}_\omega) (\cos \Psi - 1), \\ \mathbf{e}_\omega &= \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|}, \quad \Psi = |\boldsymbol{\omega}| t. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Заметим, что, так как неподвижная поверхность кольца представляет собой поверхность вращения, нормаль в любой точке B поверхности кольца лежит в плоскости вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и радиус-вектора \mathbf{R}_B (см. Рис. 1.2). Следовательно,

$$\mathbf{n}_B = \alpha \boldsymbol{\omega} + \beta \mathbf{R}_B \text{ и } (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_B) \cdot \mathbf{R}_B = 0. \quad (1.13)$$

Аналогично для точки B_0 с радиус-вектором \mathbf{R}_{B_0} , полученной из точки B поворотом вокруг оси определяемой вектором $\boldsymbol{\omega}$ справедливо

$$\mathbf{n}_{B_0} = \alpha \boldsymbol{\omega} + \beta \mathbf{R}_{B_0}.$$

Умножим обе части первого равенства в (1.12) на нормаль \mathbf{n}_B и получим следующее соотношение:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_B = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_B + \beta (\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{R}_B \sin \Psi + \beta ((\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{u}_0) \times \mathbf{e}_\omega) \cdot \mathbf{R}_B (\cos \Psi - 1). \quad (1.14)$$

Если в физической постановке задачи направление вектора угловой скорости совпадает с положительным направлением оси z , то есть $\mathbf{e}_\omega = (0, 0, 1)^T$, то легко получить соотношение между векторами \mathbf{R}_B и \mathbf{R}_{B_0} и упростить вид равенства

² Обратим внимание, что полученное решение аналогично формуле (1.9), определяющее поворот вектора относительно оси вращения, задающейся единичным вектором \mathbf{e}_ω .

(1.12). Так вектор \mathbf{R}_{B0} можно определить как

$$\mathbf{R}_B = \begin{pmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi & 0 \\ \sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}_{B0} ,$$

и после несложных преобразований равенство (1.14) запишется в виде

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_B = \mathbf{u}_0 \cdot (\alpha \boldsymbol{\omega} + \beta \mathbf{R}_{B0}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{B0}$$

или с учетом (1.11)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_B = 0 .$$

Таким образом, условия равенства нулю нормальной скорости инвариантно относительно поворота скорости. Следовательно, во вращающейся неинерциальной системе координат, связанной с лопастью, на кольце выполняются условия непротекания. А если еще принять во внимание соотношения (1.13), то имеем следующую цепочку равенств

$$0 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_B = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}_B + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_B = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}_B .$$

Отсюда следует, что граничное условие непротекания на неподвижной поверхности вращения идентично условию (1.10) для вращающихся поверхностей.

1.3.3. Граничные условия на основе пристеночных функций

При расчетах турбулентных течений на расчетных сетках с недостаточно подробным разрешением вблизи твердой поверхности молекулярный подслой турбулентного пограничного слоя может не разрешаться. Вследствие этого, постановка граничных условий прилипания (скорость жидкости на поверхности совпадает со скоростью движения самой поверхности) не корректна, та как

невозможно правильное определение градиентов компонент вектора скорости на твердой стенке. Поэтому в данной ситуации используется механизм пристеночных функций. Пристеночные функции – это предопределенные профили характеристик турбулентного потока, которые моделируют течение в неразрешенной сеткой части пограничного слоя, непосредственно около твердой стенки. Это означает, что в примыкающих к стенке ячейках течение реконструируется с использованием пристеночных функций, в остальных же ячейках используется та или иная модель турбулентности.

Ниже приводится описание определения потока импульса на грани приграничного контрольного объёма (на Рис. 1.3 выделена красным цветом), совпадающей с границей твердого тела (потокосые граничные условия) с применением механизма пристеночных функций. При таком подходе понятия граничной поверхности и твердой стенки отождествляются.

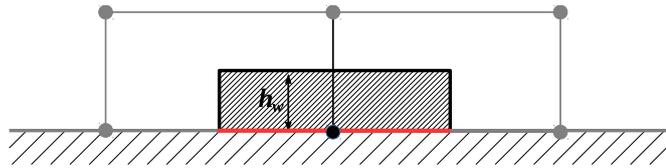


Рисунок 1.3 – Пристеночная ячейка (заштрихованная область)

При построении пристеночных функций важную роль играет понятие динамической скорости u_f , определяемое через напряжение трения на стенке τ_w [71]:

$$u_f = \sqrt{\frac{1}{\rho_w} \tau_w}.$$

Как скалярная величина, напряжение трения τ_w в точке граничной поверхности задается проекцией нормальной составляющей тензора вязких напряжений $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ на плоскость касательную к этой поверхности:

$$[\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = -\tau_w \mathbf{u}_t^e \quad \text{или} \quad \tau_w = -([\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}_t^e, \quad (1.15)$$

где \mathbf{n} – единичный нормальный к стенке вектор, а оператор проецирования

$(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$ и единичный вектор тангенциальной скорости \mathbf{u}_t^e определяются следующим образом:

$$[\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}]_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j, \quad \mathbf{u}_t^e = \frac{\mathbf{u}_t}{|\mathbf{u}_t|}, \quad \mathbf{u}_t = [\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] \mathbf{u} = \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}. \quad (1.16)$$

Заметим, что декартовы компоненты вектора скорости и их производные в формулах (1.15), (1.16) задаются на граничной поверхности. Возможен другой, более экономичный, но менее точный, вариант вычисления напряжения трения на стенке через нормальную производную от модуля тангенциальной скорости:

$$\tau_w = \mu_w \left. \frac{\partial |\mathbf{u}_t|}{\partial n} \right|_w. \quad (1.17)$$

Мерой «грубости» сетки или индикатором для применения механизма пристеночных функций для конкретного расчета служит пристеночное число Рейнольдса y^+ , задаваемое как

$$y^+ = \frac{\rho u_f h_{nw}}{\mu},$$

где h_{nw} – размер пристеночной ячейки, в нормальном к твердой стенке направлении. Если для приграничных точек значение $y^+ > 1$, то в постановке граничных условий на твердой поверхности необходимо использовать пристеночные функции.

В соответствии с теорией турбулентного пограничного слоя на пластине [71; 72] нормальная скорость на стенке полагается равной нормальной компоненте скорости движения стенки (1.6):

$$u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V}|_w \cdot \mathbf{n} = V_n, \quad (1.18)$$

а модуль тангенциальной скорости задается следующей функциональной зависимостью:

$$|\mathbf{u}_t| = u_f f(y^+), \quad (1.19)$$

где пристеночная функция $f(y^+)$ определяет профиль скорости в вязком, буферном и логарифмическом подслое (см. Рис. 1.4) и задается, например, законом Райхардта [73]³:

$$f(y^+) = \frac{1}{0.41} \ln(1 + 0.41y^+) + 7.8 \left(1 - e^{-\frac{y^+}{11}} - \frac{y^+}{11} e^{-\frac{y^+}{3}} \right).$$

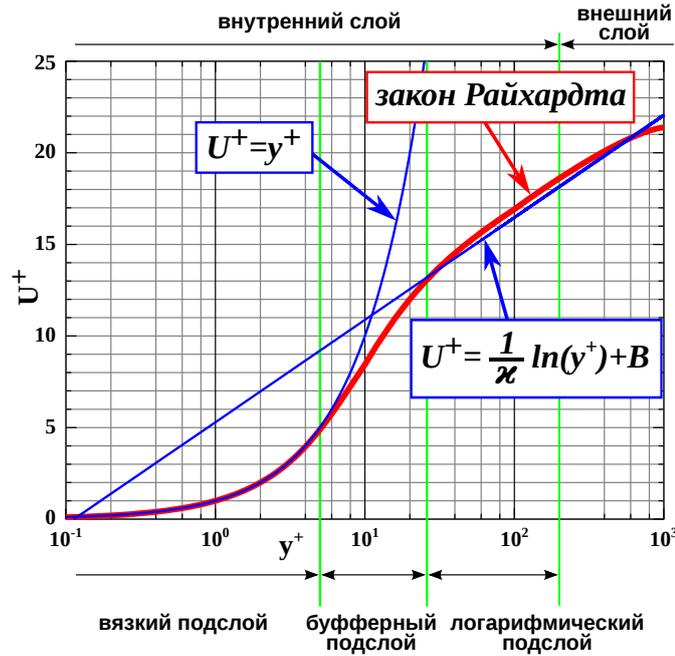


Рисунок 1.4 – Профиль скорости в пограничном слое

Закон Райхардта практически точно воспроизводит линейный и логарифмический профиль скорости в соответствующих диапазонах аргумента y^+ , а переходной профиль скорости от ламинарного подслоя к развитому турбулентному пограничному слою (буферная зона) соответствует экспериментальным данным.

Таким образом алгоритм определения составляющей потока импульса с учетом пристеночных функций выглядит следующим образом.

1. Используя метод конечных объёмов в приграничной расчетной ячейке (см. Рис. 1.3) вычисляются компоненты скорости и определяется модуль тангенциальной скорости $|\mathbf{u}_t|$ по формуле (1.16), с учетом условия (1.18):

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u} - V_n \mathbf{n}.$$

³ Вид других универсальных пристеночных функций приведен в работе [72].

2. Вычисляется напряжение трения τ_w^0 по формуле (1.15) или (1.17) и определяется нулевое приближение динамической скорости $u_f^0 = \tau_w^0 / |\mathbf{u}_t|$.
3. Решается методом Ньютона с начальным приближением u_f^0 нелинейное уравнение (1.19), записанное в виде $F(u_f) = u_f f(y^+) - |\mathbf{u}_t| = 0$ и находится окончательное значение динамической скорости u_f .
4. На основе значений динамической скорости и единичного вектора \mathbf{u}_t^e сонаправленного с вектором тангенциальной скорости (1.16), вычисляется составляющая потока импульса на граничной поверхности:

$$\mathbf{F}_w^{wl} = \rho u_f^2 \frac{\mathbf{u} - V_n \mathbf{n}}{|\mathbf{u} - V_n \mathbf{n}|} \quad (1.20)$$

Окончательное выражение для вектора потока импульса на граничной поверхности представляет собой сумму потока (1.20) с учетом приграничных функций и конвективной составляющей потока, учитывающей условие (1.18):

$$\mathbf{F}_w = p \mathbf{n} + \mathbf{F}_w^{wl}.$$

Данная методика позволяет существенно уменьшить трудоемкость расчета, существенно снижая требования к сеточному разрешению в области турбулентного пограничного слоя на твердой поверхности.

1.4. Области определения моделей в ближнем поле

1.4.1. Сопряжение вращающейся и невращающейся областей

При использовании в смежных зонах ближнего поля моделей в различных системах координат возникает проблема сопряжения этих областей. Существует два способа решения этой проблемы: методы на основе перекрывающихся или скользящих областей.

В первом подходе предполагается, области определения задач в смежных областях перекрываются (см. Рис. 1.5, *a*). В этом случае в процессе расчета необходимо организовать корректный обмен данными на перекрывающихся участках. При численной реализации такого подхода речь идет об интерполяции значений моделируемых физических величин с сетки, покрываемой одну область, на сетку в другой области. Такая технология известна под названием «химера», применительно к моделированию течения вокруг винта вертолета она использована, например, в работах [64—66].

Второй подход не предполагает пересечения областей определения моделей в неподвижной и вращающейся области и интерфейс между двумя областями определяется только границей, а в случае численной реализации — граничными элементами сетки (см. Рис. 1.5, *б*). Для моделирования течения вокруг винта вертолета такой подход использовался, например, в работах [55; 70; 74].

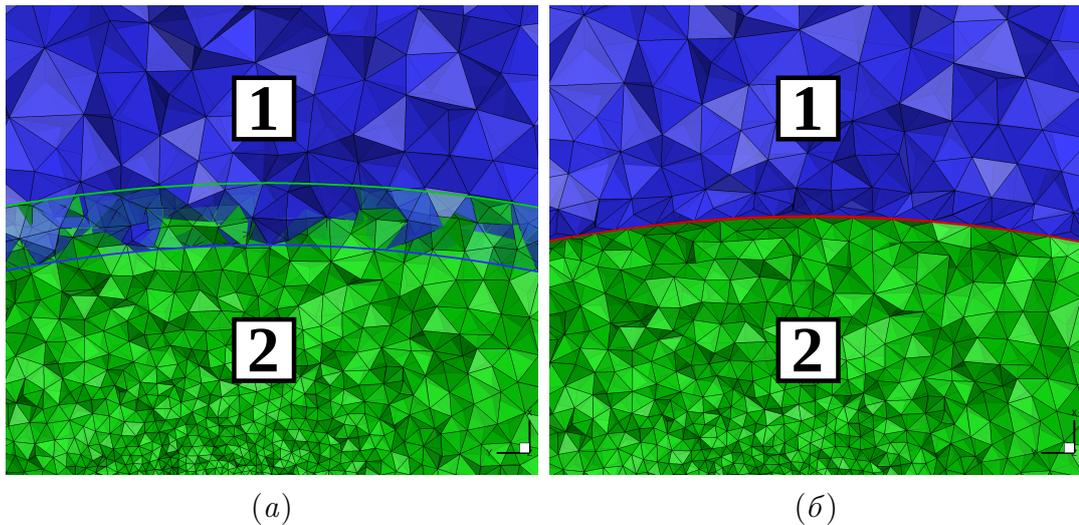


Рисунок 1.5 – Сопряжение областей: пересекающиеся сетки (*a*) и скользящий интерфейс (*б*)

Следует отметить, что при численной реализации обоих подходов ключевыми проблемами является обеспечение локальной консервативности (т.е. консервативности для сеточных контрольных объёмов) и сохранение точности того или иного численного алгоритма в приграничных областях. Пути решения указанных проблем при использовании скользящих сеток рассматриваются, например, в работе [55] при построении численного алгоритма на основе объёмно-

центрированных схем, использующих квазиодномерную реконструкцию переменных.

1.4.2. Определение задачи в секторе при осевом обтекании

Отдельно стоит выделить моделирование винта вертолета в режиме осевого обтекания, когда проекции составляющих скорости внешнего потока (скорости полета вертолета) на плоскость вращения винта равна нулю, и течение в области моделирования обусловлено исключительно потоком воздуха, индуцированного винтом и, возможно, вертикальным движением (вертикальным снижением или набором высоты) вертолета.

В этом случае, если выполняются следующие три условия:

- 1) невращающиеся поверхности в моделируемой конфигурации винта являются телами вращения с осью, совпадающей с осью вращения винта;
- 2) лопасти винта идентичны и установлены под одним углом;
- 3) лопасти винта расположены в одной плоскости, ортогональной оси вращения винта,

возможно рассмотрение не полной конфигурации, а лишь одного сектора с одной лопастью (см. Рис. 1.6).

Описание задачи в секторе требует реализации дополнительных граничных условий, а именно периодических условий на азимутальных границах сектора, заключающие в топологическом замыкании сетки на двух азимутальных плоскостях сектора.

При численной реализации такое замыкание строится следующим образом: из исходной геометрической конфигурации выделяется сектор с одной лопастью (см. Рис. 1.6, *а*) и в нем строится расчетная сетка таким образом, чтобы узлы на двух азимутальных плоскостях сектора совпадали с точностью до поворота на угол раствора этого сектора (см. Рис. 1.6, *б*). Далее для «совпадающих»

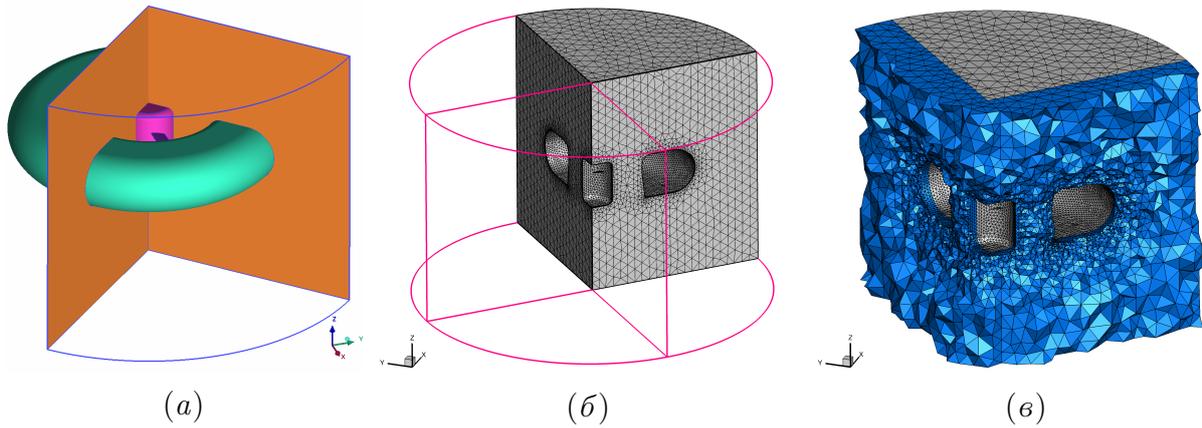


Рисунок 1.6 – Построение сектора с лопастью: полная конфигурация (а), расчетная сетка в секторе с лопастью (б), расчетная сетка с достроенным периодическим замыканием (в)

узлов на этих плоскостях строится соответствие образ – прообраз, то есть происходит топологическое замыкание границ сектора. При этом для связанных узлов достраивается на необходимую глубину топологические связи между этими узлами. На Рис. 1.6, в условно изображено такое замыкание – синим цветом выделена зона достроенных топологических связей образ – прообраз.

Такой подход позволяет существенно сократить вычислительную трудоемкость задачи, а реализация периодических условий позволяет вести сквозной счет и практически не влияет на общее время счета.

1.5. Аэродинамические характеристики

Определим аэродинамические силы действующие на вращающиеся элементы конструкции (на винт) и на неподвижные (например на кольцо окружающие винт), следуя монографии [75]. Для этого рассмотрим две системы координат (Рис. 1.7): неподвижную систему координат — (x, y, z) и систему координат, связанную с вращающимся винтом — (x', y', z') , полученную поворотом неподвижной системы координат на угол $\psi(t) = \omega t$, где угол $\psi(t)$ определяется угловой скоростью вращения винта ω .

При этом, если расчет проводится во вращающейся системе координат, то в случае стационарного решения (при отсутствии зависимости от азимуталь-

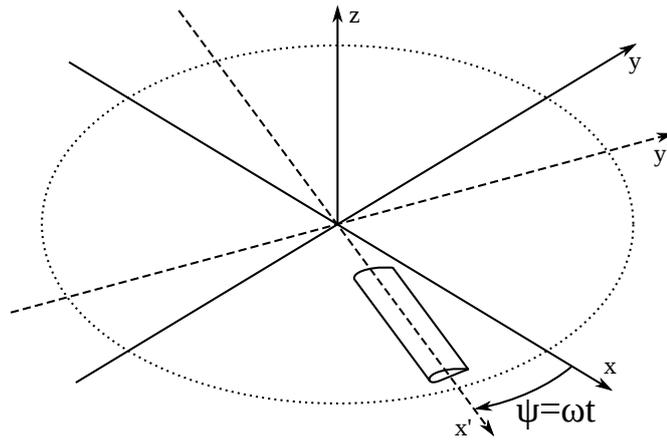


Рисунок 1.7 – неподвижная и вращающаяся системы координат

ного угла ψ) можно отождествить оси неподвижной и вращающейся систем координат.

Пусть $p(x, y, z)$ есть распределение давления по поверхности лопасти винта S , а $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ – внешняя к поверхности S единичная нормаль. Тогда сила тяги винта T^{rot} из N лопастей складывается из нормальной к плоскости вращения компоненты силы тяги T_z^{blade} , действующей на единичную лопасть

$$T^{rot} = NT_z^{blade} = N \int_S p n_z ds . \quad (1.21)$$

Момент силы винта определяется проекциями сил на оси неподвижной системы координат и радиус-вектором (рычагом) \mathbf{r} элемента лопасти во вращающейся системе координат (Рис. 1.8)

$$\mathbf{M} = N \int_S p (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) ds .$$

Учитывая, что

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{n}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(yn_z - zn_y) - \mathbf{j}(xn_z - zn_x) + \mathbf{k}(xn_y - yn_x) ,$$

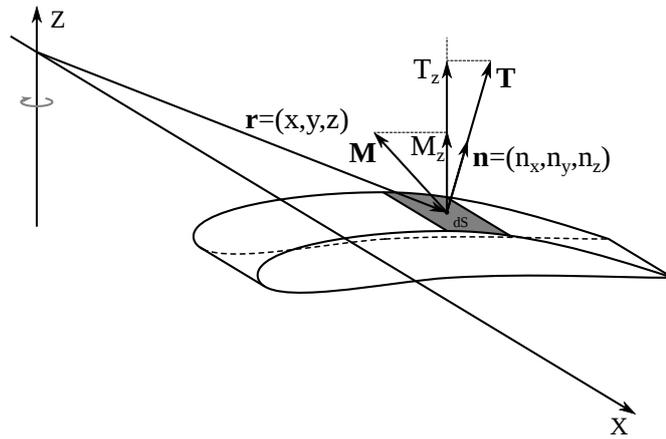


Рисунок 1.8 – Аэродинамические силы и их проекции

выражение для аэродинамического крутящего момента винта принимает вид

$$M_{\text{к}}^{\text{rot}} = M_z = N \int_S p(xn_y - yn_x) ds . \quad (1.22)$$

В случае стационарного решения в вышеприведенных выражениях для расчета силы тяги и крутящего момента осреднение по азимутальному углу не проводится.

При наличии в моделируемой конфигурации неподвижных (не вращающихся) поверхностей, например канала, в котором установлен рулевой винт типа «винт-в-кольце», схема расчета интегральных характеристик меняется. Пусть $p(x, y, z)$ есть распределение давления по поверхности сегмента «кольца»⁴ с углом раствора равным $2\pi/N$. Это распределение давления соответствует фиксированному положению лопасти вблизи кольца в некоторый момент времени (распределение давления во вращающейся системе координат). Поэтому, чтобы получить распределение давления в неподвижной системе координат, необходимо усреднить давление по азимутальному углу ψ . В случае стационарного течения осредненное по углу давление будет одинаково для каждого из N сегментов. Тогда, переходя к цилиндрическим координатам (r, φ, z) , рассчитаем

⁴ Здесь и далее предполагается, что поверхность «кольца» является телом вращения.

среднее по азимутальному углу значение давления

$$\langle p(r, z) \rangle = \int_0^{2\pi} p(r, \varphi, z) d\varphi .$$

Сила тяги кольца вычисляется по формуле, аналогичной (1.22):

$$T^{ring} = N \int_S \langle p \rangle n_z ds ,$$

где S — поверхность кольца, а n_x, n_y, n_z — компоненты внешней к поверхности кольца единичной нормали. Крутящий момент кольца определяется проекциями сил на оси неподвижной системы координат и радиус-вектором координат кольца в неподвижной системе координат $\mathbf{r} = (x, y, z)$:

$$M_K^{ring} = N \int_S \langle p \rangle (xn_y - yn_x) ds .$$

Коэффициент силы тяги c_T и коэффициент аэродинамического крутящего момента m_K вычисляются обезразмериванием силы тяги и крутящего момента на величину $\rho_0 A (\omega R)^2 / 2$

$$c_T^{rot/ring} = \frac{2T^{rot/ring}}{\rho_0 A (\omega R)^2} ; \quad m_K^{rot/ring} = \frac{2M_K^{rot/ring}}{\rho_0 R A (\omega R)^2} , \quad (1.23)$$

где ρ_0 — плотность невозмущенного воздуха, $A = \pi R^2$ — площадь диска винта, R — радиус винта, ω — модуль угловой скорости лопасти.

Таким образом, распределение давления на твердой поверхности, полученное в результате расчета, позволяет в соответствии с формулами (1.21), (1.22), (1.23) вычислить в произвольный момент времени размерные силы, действующие на лопасти и винт, а также их коэффициенты.

1.6. Модели для описания шума в дальнем поле

Описанные выше в пп. 1.2–1.4 модели и подходы позволяют проводить моделирование течения около вертолета и, таким образом, получать пространственно-временное распределение газодинамических переменных в ближнем поле. С точки зрения акустики, сложные нестационарные газодинамические процессы в ближнем поле течения можно интерпретировать как распределенный акустический источник, ответственный за генерацию шума в дальнем поле (области **1** и **2** на Рис. 1.1). Для моделирования акустических возмущений в дальнем поле (область **3** на Рис. 1.1) применяются модели на основе волнового уравнения, решение которого может быть представлено в виде пространственно-временного интеграла. При этом аналитически решается внешняя краевая задача в неограниченной области, краевые условия которой ставятся на некоторой, окружающей акустический источник, поверхности. Такая поверхность, называемая *контрольной*, располагается внутри ближнего поля течения.

Применительно к задачам моделирования акустических характеристик винта вертолета, предлагается использовать популярную методику – так называемую “формулировку «1А»” Фарассата [76] для уравнения Фокса Уилльямса – Хокинга (Ffowcs Williams – Hawkins – FWH). Формулировка «1А» допускает использование контрольной поверхности произвольной формы. Однако при этом предполагается, что скорость движения точек контрольной поверхности меньше скорости звука. В противном случае, при переходе через скорость звука, в интегральной формуле появляется особенность, что делает данный метод неприменимым для определения пульсаций в дальнем поле. Это затрудняет применение метода FWH для вращающегося винта, так как, при «погружении» контрольной поверхности в область вращения винта (зона **2**) на небольшом удалении от законцовок лопастей, относительно неподвижной системы координат она вращается со скоростью, превышающую концевую скорость лопасти, и, вообще говоря, может быть выше скорости звука. Существуют

решения этой проблемы предложенные в [77] и [78], позволяющие работать с трансзвуковым движением точек контрольной поверхности, но реализация их достаточно сложна и влечет за собой дополнительные вычислительные затраты.

В работе [56] предложено альтернативное простое в реализации решение. Оно заключается во введении модификации в исходную формулировку Фарасата «1А». Считая, что контрольная поверхность является поверхностью вращения с осью совпадающей с осью вращения винта, разделяется движение точек контрольной поверхности относительно фонового потока на поступательное и вращательное. При этом параметризация контрольной поверхности происходит не во вращающейся системе координат, связанной с винтом, а в инерциальной системе, связанной с фюзеляжем вертолета.

То, что контрольная поверхность является поверхностью вращения, обеспечивает сохранность ее формы и, при использовании равномерной сетки в сферических координатах, позволяет легко интерполировать значения и вычислять производную по углу в любой точке поверхности. В результате задача сводится к вычислению поверхностного интеграла с запаздыванием, на контрольной поверхности, поступательно движущейся относительно фонового потока.

В соответствии с этим подходом пульсации давления в точке \mathbf{R} в момент времени T вычисляется по интегральной формуле

$$p'(\mathbf{R}, T) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \Psi(\mathbf{r}, t^*(\mathbf{r})) ds = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left[\frac{1}{\Xi^2 r} \left(\frac{\partial U}{\partial t} - \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} \right)_r \right) + \left(\frac{M_r - M^2}{\Xi^3 r^2} + \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right)_r \right) (U - L_r) - \frac{L_r - (\mathbf{L} \cdot \mathbf{M})}{\Xi^2 r^2} \right]_{t=t^*(\mathbf{r}_0, \mathbf{R}, T), \mathbf{r}=\mathbf{r}_e(\mathbf{r}_0, \mathbf{R}, T)} ds . \quad (1.24)$$

Здесь интегрирование производится по поверхности S , параметризуемой в каждый момент времени вектором \mathbf{r}_0 , пробегающим поверхность S_0 . Мирова линия, по которой движется точка \mathbf{r}_0 в абсолютной системе координат, с учетом того, что *точка движется поступательно и равномерно*, описывается как

$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 - \mathbf{M}t$, где \mathbf{M} — отношение вектора скорости фонового потока к фоновой скорости звука. Момент времени t^* , в который излучающая точка \mathbf{r}_0 поверхности S_0 внесет вклад в поле в точке \mathbf{R} в момент времени T определятся как время запаздывания $t^* = T - \tau(\mathbf{R} - \mathbf{r})$, где

$$\tau(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{M})^2 + (1 - M^2) \mathbf{x}^2} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{M})}{c(1 - M^2)}, \quad M = |\mathbf{M}|. \quad (1.25)$$

Радиус эмиссии при поступательном движении контрольной поверхности определяется как $\mathbf{r}_e = \mathbf{R} - (\mathbf{r}_0 + \mathbf{M}\tau(\mathbf{r}_0))$, компоненты вектора \mathbf{L} определяются как $L_i = (p\delta_{ij} + \rho u_i(u_j + M_j))n_j$, член U имеет вид $U = (\rho u_i + \rho' M_i)n_i$, где \mathbf{n} — единичная трехмерная нормаль к поверхности, а \mathbf{u} — скорость газа относительно фонового потока. Проекция на направление вектора эмиссии векторов \mathbf{M} и \mathbf{L} обозначаются как M_r и L_r , соответственно, а доплеровский множитель определяется соотношением $\Xi = 1 - M_r$.

Интегральную формулу (1.24) можно интерпретировать как представление поля в точке наблюдения в виде суперпозиции полей, излучаемых точками контрольной поверхности.

1.7. Акустические характеристики

Полученные в процессе расчета значения пульсаций давления по времени позволяют определить акустические характеристики как в ближнем, так и в дальнем поле.

Наиболее важными характеристиками с точки зрения разработчиков летательных аппаратов являются зависимость общего уровня звукового давления (Overall Sound Pressure Level – OASPL) от направления на точку наблюдения, и спектральный состав акустического сигнала в точках наблюдения.

Пульсации давления $p'(\mathbf{R}, t)$ в точке наблюдения \mathbf{R} , на основе которых производится последующий анализ сигнала, могут быть получены двумя спосо-

бами.

Первый способ применим, если точка наблюдения находится в расчетной области ближнего поля (области **1** и **2**, Рис. 1.1). В данном случае сеточное разрешение в области распространения акустического сигнала от источника до точки наблюдения должно соответствовать исследуемому частотному диапазону, что не всегда может быть осуществимо.

Второй способ предполагает использование интегрального метода FWH (см. пп. 1.6), при этом акустический сигнал в точках наблюдения будет получен в результате обработки данных на контрольных поверхностях на этапе постобработки, после проведения расчета.

Полученный акустический сигнал подвергается дальнейшему анализу для получения интересующих акустических характеристик. Одной из наиболее репрезентативных акустических характеристик является общий уровень пульсаций давления который определяется по следующей формуле:

$$OASPL(\mathbf{R}) = 10 \log \left(\langle p'(\mathbf{R})^2 \rangle / p_0^2 \right),$$

где $p_0 = 2 \times 10^{-5}$ Па – минимальный порог слышимости звука.

С точки зрения инженерных разработок, наиболее полезным представлением о картине общего уровня звукового давления является азимутальная диаграмма направленности (OASPL – Overall SoundPressure Level) – график в полярных координатах, на котором отражена зависимость общего уровня звукового давления в некоторой плоскости для некоторого диапазона значений азимутального угла (как правило, в плоскости, проходящей через ось вращения

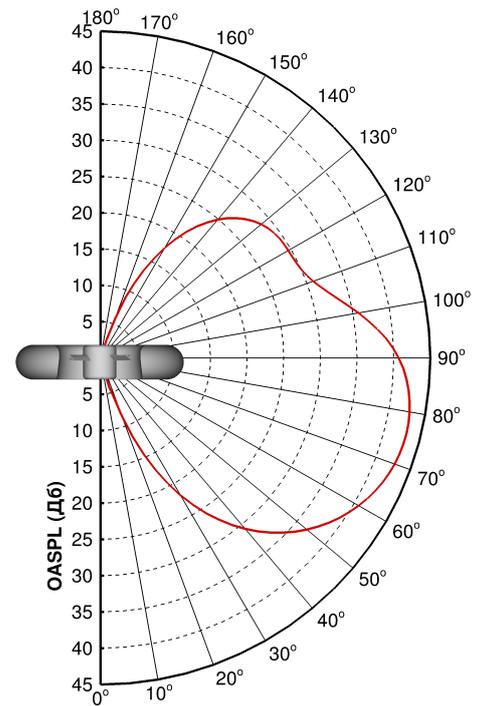


Рисунок 1.9 – Пример диаграммы направленности общего уровня звукового давления

винта значений азимутального угла от 0 до π или до 2π). В качестве примера на Рис. 1.9 приведен вид диаграммы направленности общего уровня звукового давления для конфигурации «винт в кольце».

Спектральные характеристики сигналов, которые также представляют интерес с инженерной точки зрения, могут быть получены с помощью методов, основанных на дискретном преобразовании Фурье (см. [79]).

1.8. Карта моделей

1.8.1. Режимы эксплуатации несущего винта вертолета

Вид и характеристики течения около винта вертолета существенно зависят от режима полета вертолета. Среди штатных режимов полета вертолета можно выделить [75]:

- режим висения — режим полета, при котором равны нулю как горизонтальная, так и вертикальные составляющие скорости⁵;
- режим вертикального полета — режим полета, при котором равна нулю горизонтальная составляющая скорости, а вертикальная составляющая скорости положительна (режим вертикального набора высоты) или отрицательна (режим вертикального снижения);
- крейсерский режим полета — режим полета при котором все составляющие скорости отличны от нуля и динамически изменяются.

Для каждого из вышеупомянутых режимов полета течение вокруг винта вертолета имеет специфические особенности, влияющие как на аэродинамику винта, так и на его акустические характеристики.

Выделим три основных режима эксплуатации винта вертолета: набор высоты и медленное вертикальное снижение, снижение и крейсерский режим полета.

⁵ Под вертикальной скоростью здесь понимается проекция вектора скорости внешнего невозмущенного потока на ось вращения винта.

Для первых двух режимов характерно наличие осевого обтекания с нулевыми компонентами горизонтальной скорости. При этом угол установки лопасти в таком режиме зафиксирован, и, как следствие, отсутствует динамическое изменение углов взмаха, качания и установки, а также необходимость в компенсации неосевых составляющих подъемной силы при разных азимутальных положениях лопастей (при этом предполагается, что лопасти идентичны), а аэродинамические характеристики не зависят от времени и азимутального положения лопастей. Существенным отличием первого режима от других заключается в минимальном взаимодействии вихревых структур (концевых вихрей и турбулентной «вихревой пелены») с лопастями в силу высокой скорости потока индуцированной вращением винта и внешним потоком, достаточной для сноса концевых и мелкомасштабных вихревых структур вниз по потоку.

При проведении промышленно-ориентированных расчетов для оценки характеристик винта вертолета необходимо выбирать модели для описания течения и формулировать постановку численной задачи оптимальным образом. Выбор принципиальным образом зависит от режима работы винта и от того, оценка каких характеристик является целью численного исследования. Под «оптимальностью» выбора понимается минимизация ресурсов (и, как следствие, и длительности вычислительного эксперимента), необходимых для получения оценок требуемых характеристик с необходимой точностью.

1.8.2. Карта моделей для оценки характеристик несущего винта вертолета

Как было упомянуто выше, для описания течения вокруг винта вертолета в ближнем поле на основе уравнений Навье – Стокса существует достаточно много математических моделей. Большое количество моделей и их разнообразие вызвано тем обстоятельством, что при численном решении задач, ориентированных на авиационную и аэрокосмическую промышленность, мощности современных вычислительных систем (и даже суперкомпьютеров обозримого будуще-

го) недостаточно для обеспечения столь высокого пространственно-временного разрешения турбулентных структур течения, которое бы позволило проводить прямое численное моделирование путем решения уравнений Навье – Стокса. Поэтому в качестве альтернативы численному воспроизведению мгновенных газодинамических параметров течения стали развиваться вычислительно менее затратные подходы моделирования статистических характеристик этих параметров либо нестационарных величин, полученных в результате их пространственно-временной фильтрации. Эти подходы в той или иной степени используют эмпирические знания о природе течения, требуемые для корректного замыкания получаемых систем. Речь идет о таких подходах как RANS, LES, а также гибридные RANS-LES методы, в рамках которых было предложено множество математических моделей.

В настоящее время для инженерных приложений в авиационной промышленности наиболее эффективными признаны гибридные RANS-LES модели. Среди них применительно к моделированию характеристик винта вертолета, рассматриваемому в настоящей работе, предпочтение отдается моделям семейства DES. Безусловно, DES подход дает наиболее точные оценки аэродинамических и акустических характеристик винта для всех режимов его эксплуатации. Однако, с точки зрения проведения промышленных расчетов с целью проектирования реальных конструкций, массовое DES-моделирование все еще остается не реализуемым из-за его высокой вычислительной стоимости. Поэтому для активного внедрения вычислительного эксперимента в инженерные разработки важно рассмотрение возможности использования менее дорогих моделей, указание диапазонов их применимости, а также случаев, когда их применение некорректно.

Рассмотрим сначала возможность снижения ресурсоемкости расчетов за счет выбора более дешевых с вычислительной точки зрения моделей для оценки аэродинамических характеристик. В режиме набора высоты и медленного вертикального снижения для расчета аэродинамических характеристик в боль-

шинстве случаев достаточно использовать уравнения RANS. Более того, так как для определения тяги достаточно знать только нормальные составляющие действующих на лопасть сил, то, чтобы получить ее вполне приемлемую оценку, можно применять модель без учета вязкости, а именно уравнения Эйлера. В то же время, оценка крутящих моментов, зависящих от продольных составляющих сил, требует учета вязких эффектов и может быть осуществлена на основе подхода RANS. В обоих случаях в режиме набора высоты и медленного снижения вблизи винта формируется осесимметричное течение, а потому можно проводить расчеты по оценке всех аэродинамических характеристик в секторе, включающем одиночную лопасть, с периодическими граничными условиями (см. пп. 1.4.2). Возможность использования сектора отражается значением поля «сектор» в таблице 1.1.

Для общего режима снижения с заметной вертикальной скоростью, существенным физическим фактором может быть наличие взаимодействия концевых вихрей с лопастями винта. Приемлемую точность в оценке аэродинамических характеристик дает та или иная модель RANS. Однако взаимодействие концевых вихрей с лопастями может приводить к сложной вихревой картине с разномасштабными структурами, для корректного описания которой может понадобиться «дорогая» модель DES. Тем не менее, в силу осевого характера обтекания в режиме снижения, техника моделирования одиночного сектора с лопастью также применима.

Для крейсерского режима полета характерно наличие взаимодействия вихревых структур, формируемых за обтекаемыми препятствиями, с лопастями винта. Так же, как и в предыдущем случае, аэродинамические характеристики можно оценивать с помощью уравнений RANS, однако подход DES здесь также предпочтителен. При крейсерском режиме из-за наличия ненулевых проекций скорости внешнего потока на плоскость вращения винта моделирование сектора с одной лопастью, с очевидностью, некорректно. Поэтому для такого эксплуатационного режима необходимо рассмотрение полной конфигурации винта.

Таблица 1.1 – Карта моделей

Режим	Характеристики	«сектор»	EE	RANS	DES
Висение, вертикальный набор высоты, медленное снижение ⁶	Тяга	+	+	+	+
	Крутящий момент	+	–	+	+
	Тональный шум	+	+	+	+
	Широкополосный шум ⁷	+	–	–	+
Снижение	Тяга	+	+	+	+
	Крутящий момент	+	–	+	+
	Тональный шум	+	+	+	+
	Широкополосный шум	±	–	–	+
Крейсерский полет	Тяга	–	+	+	+
	Крутящий момент	–	–	+	+
	Тональный шум	–	+	+	+
	Широкополосный шум	–	–	–	+

С точки зрения оценки акустических характеристик винта, зона ближнего поля представляет собой распределенный акустический источник. Поэтому возможность воспроизведения в численном эксперименте шума того или иного состава напрямую зависит от выбора модели, выбранной для описания тех или иных газодинамических процессов в источнике, т.е. в ближнем поле. Так, для моделирования источника тонального шума вытеснения и нагружения могут вполне подойти не учитывающие вязкие эффекты уравнения Эйлера. Однако более точное предсказание мощности акустического излучения для тонального шума дадут все же уравнения RANS. При этом на режимах висения и вертикального набора высоты можно проводить расчет акустического источника тонального шума только в одном секторе. Для крейсерского режима такой подход невозможен.

Для моделирования источников всего производимого винтом шума, включая широкополосную составляющую, необходимо качественное описание разномасштабных турбулентных структур и процессов их взаимодействия с течением и лопастями винта, что могут дать только вихреразрешающие подходы и, в

⁶ «Медленным снижением» здесь называется такой режим вертикального снижения, при котором взаимодействие вихревых структур с последующими лопастями минимально.

⁷ Широкополосный шум здесь включает пульсации всего спектра частот, т.е. включает и тональный шум.

частности, модели семейства DES. С этой точки зрения, расчет акустических характеристик винта вертолета для полного состава шума требует наибольших вычислительных затрат для всех эксплуатационных режимов. Более того, моделирование широкополосного шума винта предпочтительно проводить для полной его конфигурации, так как «секторальный» подход может дать искажения акустических характеристик. Однозначно расчет для одного сектора не подходит для крейсерского режима.

Рассмотрим более подробно причины возможного искажения акустических характеристик при моделировании широкополосного шума в секторе с одной лопастью. На режиме висения и вертикального снижения такой подход дает достаточно точные оценки акустического излучения в ближнем поле течения. Однако при использовании техники сектора и метода FWH для дальнего поля, полные данные на контрольной поверхности получаются путем дублирования и поворота фрагмента контрольной поверхности рассматриваемого сектора. Как следствие, расчет пульсаций давления в точке дальнего поля путем пространственно-временного интегрирования по контрольной поверхности можно трактовать как влияние N скореллированных источников (N – число лопастей). При этом эффект этой искусственной корреляции наиболее заметен при оценке акустических пульсаций в областях, находящихся вблизи оси вращения винта, и проявляется в виде завышения уровня звукового давления в этих областях. Подобные искажения в оценках акустических характеристик также можно устранять искусственным образом. Однако для более аккуратного моделирования следует рассматривать полную, многолопастную, конфигурацию винта.

1.9. Выводы к первой главе

В первой главе представлен многомодельный подход для оценки аэродинамических и акустических характеристик винта вертолета на основе детального моделирования воздушного течения вокруг конструкции. Необходимость

подхода, подразумевающего возможность использования различных математических моделей для описания течения вокруг винта вертолета, вызвана, главным образом, его предназначением для проведения промышленно-ориентированных расчетов в процессе разработки новых конструкций винта. Дело в том, что наиболее развитые на сегодняшний день математические модели для описания высокорейнольдсовых нестационарных турбулентных течений около твердотельных препятствий (а таковыми сегодня являются вихреразрешающие гибридные RANS-LES методы) все еще остаются неприемлемыми для проведения массовых инженерных расчетов из-за их высокой вычислительной стоимости. В связи с этим остро стоит вопрос о возможности снижения ресурсоемкости вычислений без существенного ухудшения точности предсказания для тех или иных режимов полета, в тех или иных областях определения задачи и для определения тех или иных (аэродинамических или акустических) характеристик, требуемых для выполнения конструкторских работ. При этом понимается, что для отдельных случаев численное моделирование обтекания с неизбежностью остается достаточно дорогим. К таким случаям относятся, в первую очередь, режимы крейсерского полета при необходимости определения акустических характеристик винта, учитывающих не только тональные, но и широкополосные составляющие производимого им шума.

Первая глава работы начинается исследованием специфики моделирования течения вокруг вертолета и, в частности, вертолетного винта как ключевого элемента конструкции, влияющего на аэродинамику и акустику летательного аппарата в целом. Показывается, что в разных зонах определения задачи для описания течения можно использовать разные математические модели. В частности, это происходит потому, что акустика в дальнем поле не нуждается в столь полном газодинамическом описании, которое требуется для корректного воспроизведения течения вблизи вертолета. При этом в ближнем поле течения вокруг вертолета присутствуют вращающиеся друг относительно друга элементы, что само собой уже приводит к необходимости использования раз-

ных моделей в рамках одного расчета. При существовании набора приемлемых математических моделей для той или иной подобласти задачи естественным образом должен решаться о выборе оптимальных моделей для каждой из рассматриваемых подобластей, а также об их согласовании в зонах интерфейсов.

Результатом проведенных в первой главе исследований является построение карты моделей, позволяющей разработчику выбрать для каждой исследуемой подобласти оптимальную, то есть допустимую с точки зрения точности и приемлемую с точки зрения вычислительной стоимости, математическую постановку задачи с целью определения требуемых характеристик винта вертолета в зависимости от исследуемого режима эксплуатации и целей исследования. Под целями исследования при этом понимается, в первую очередь, то, какие характеристики винта интересуют разработчика на данной стадии исследования, а именно: достаточно ли аэродинамических характеристик или необходимы акустические, критичен ли в акустических характеристиках учет широкополосной составляющей шума или нет, необходимо ли знать спектральный состав шума в дальнем поле, и т.п.

Следует отметить, что представленная в первой главе карта моделей соответствует современному мировому уровню в моделировании турбулентных течений при существующем уровне развития высокопроизводительной вычислительной техники. В будущем, вместе с ожидаемым дальнейшим ростом производительности суперкомпьютеров, карта моделей должна корректироваться и эволюционировать в сторону усложнения газодинамического описания и соответствующего повышения точности численных оценок аэродинамических и акустических характеристик.

Глава 2

Численные алгоритмы моделирования течения около винта и шума в дальнем поле

2.1. Численная схема на основе квазиодномерной реконструкции переменных на гибридных неструктурированных сетках

В данной главе дано описание численных методов, используемых для аппроксимации системы уравнений Навье-Стокса (1.5) на неструктурированных сетках. Дискретизация пространственных производных системы строится на основе смешанного метода аппроксимации [80] с использованием метода конечных объёмов в качестве базового для аппроксимации членов конвективного переноса и метода конечных элементов для диффузионной части уравнений Навье – Стокса. Интегрирование по времени осуществляется явными методами типа Рунге – Кутты и неявными методами с линеаризацией по Ньютону нелинейной разностной системы уравнений.

В пп. 2.1.1, на примере произвольных треугольных сеток, приведен вывод оригинальных схем на основе квазиодномерной реберно-ориентированной реконструкции, аппроксимирующих конвективные члены системы уравнений Навье – Стокса с повышенным порядком. Более подробную информацию о конструировании, теоретическом и численном анализе этих схем можно найти в работах [80–85]. Отличительной особенностью этих схем является их экономичность (низкая вычислительная стоимость) при расчетах на произвольных неструктурированных сетках с сохранением повышенного порядка точности и теоретически доказанный высокий порядок аппроксимации на сетках специального вида [85; 86]. Реберно-ориентированный подход позволяет достаточно про-

сто реализовать в многомерном случае процедуру монотонизации типа TVD или WENO [87; 88].

В пп. 2.1.2 приводится описание метода конечных элементов на основе кусочно-линейных базисных функций (P1-метод Галеркина) [89] для дискретного представления диффузионных членов (членов, содержащие вторые производные) в системе уравнений Навье – Стокса.

В пп. 2.1.3 рассматривается реализация методов явного и неявного интегрирования по времени.

2.1.1. Аппроксимация конвективных членов

Приведем описание построения схемы с квазиодномерной реберно-ориентированной реконструкцией следуя работе [85].

Основная одномерная схема высокой точности

Вначале рассмотрим схему для линейного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a > 0 .$$

Следуя методу линий, полудискретную аппроксимацию этого уравнения можно записать в виде

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_j = -\Psi_j(u) ,$$

где функция $\Psi_j(u) = a \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_j^L$ является приближением пространственной производной на шаблоне, скошенном влево (обозначено верхним индексом L) относительно узла x_j .

На равномерной сетке с узлами x_j и шагом $\Delta x = x_{j+1} - x_j$ определим искомую узловую сеточную функцию $u_j = u(x_j)$. Используя метод неопределенных коэффициентов на шеститочечном шаблоне $j-3, j-2, j-1, j, j+1, j+2$ найдем приближение пространственной производной с максимально возможным пятым

порядком аппроксимации:

$$\Psi_j(u) = a \frac{-2u_{j-3} + 15u_{j-2} - 60u_{j-1} + 20u_j + 30u_{j+1} - 3u_{j+2}}{60\Delta x}. \quad (2.1)$$

Для узла x_j определим вычислительную ячейку в виде сегмента с границами $x_{j\mp 1/2} = x_j \mp \Delta x/2$. Тогда аппроксимация (2.1) может быть представлена в дивергентной форме

$$\Psi_j(u) = a \frac{u_{j+1/2}^L - u_{j-1/2}^L}{\Delta x}, \quad (2.2)$$

со следующей реконструкцией значений неизвестной функции в точках интерфейса x_j , написанных в терминах первых конечных разностей:

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}^L &= u_j + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{15}\Delta u_{j-3/2} + \frac{11}{30}\Delta u_{j-1/2} + \frac{4}{5}\Delta u_{j+1/2} - \frac{1}{10}\Delta u_{j+3/2} \right) \\ u_{j-1/2}^L &= u_{j-1} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{15}\Delta u_{j-5/2} + \frac{11}{30}\Delta u_{j-3/2} + \frac{4}{5}\Delta u_{j-1/2} - \frac{1}{10}\Delta u_{j+1/2} \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\Delta u_{k+1/2} = u_{k+1} - u_k$.

Если скорость переноса отрицательна $a < 0$, то соответствующая аппроксимация пятого порядка принимает вид

$$\Psi_j(u) = a \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_j^R = a \frac{u_{j+1/2}^R - u_{j-1/2}^R}{\Delta x}, \quad (2.4)$$

где реконструированные значения $u_{j\pm 1/2}^R$ определяются как

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}^R &= u_{j+1} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{10}\Delta u_{j-1/2} + \frac{4}{5}\Delta u_{j+1/2} + \frac{11}{30}\Delta u_{j+3/2} - \frac{1}{15}\Delta u_{j+5/2} \right) \\ u_{j-1/2}^R &= u_j - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{10}\Delta u_{j-3/2} + \frac{4}{5}\Delta u_{j-1/2} + \frac{11}{30}\Delta u_{j+1/2} - \frac{1}{15}\Delta u_{j+3/2} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь верхний индекс R обозначает противопоточную аппроксимацию градиента с использованием шаблона, сдвинутого вправо.

В случае неравномерной сетки с узлами x_j и шагами сетки $\Delta x_{j+1/2} =$

$x_{j+1} - x_j$ вычислительная ячейка для узла задается как сегмент с границами $x_{j-1/2} = (x_{j-1} + x_j)/2$, $x_{j+1/2} = (x_j + x_{j+1})/2$ и размером $x_{j+1/2} - x_{j-1/2} = (\Delta x_{j+1/2} + \Delta x_{j-1/2})/2$.

Схему повышенного порядка точности типа (2.2)–(2.3) или (2.4)–(2.5) на неравномерной сетке запишем в виде:

$$\Psi_j(u) = a \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_j^{L/R} = a \frac{u_{j+1/2}^{L/R} - u_{j-1/2}^{L/R}}{\bar{h}_j}, \quad (2.6)$$

где для определения реконструированных значений $u_{j+1/2}^{L/R}$ используется та же самая процедура реконструкции, что и при реконструкции на равномерной сетке с теми же самыми коэффициентами перед разделенными разностями:

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}^L &= u_j + \frac{\Delta x_{j+1/2}}{2} \left(-\frac{1}{15} \frac{\Delta u_{j-3/2}}{\Delta x_{j-3/2}} + \frac{11}{30} \frac{\Delta u_{j-1/2}}{\Delta x_{j-1/2}} + \frac{4}{5} \frac{\Delta u_{j+1/2}}{\Delta x_{j+1/2}} - \frac{1}{10} \frac{\Delta u_{j+3/2}}{\Delta x_{j+3/2}} \right) \\ u_{j+1/2}^R &= u_{j+1} - \frac{\Delta x_{j+1/2}}{2} \left(-\frac{1}{10} \frac{\Delta u_{j-1/2}}{\Delta x_{j-1/2}} + \frac{4}{5} \frac{\Delta u_{j+1/2}}{\Delta x_{j+1/2}} + \frac{11}{30} \frac{\Delta u_{j+3/2}}{\Delta x_{j+3/2}} - \frac{1}{15} \frac{\Delta u_{j+5/2}}{\Delta x_{j+5/2}} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Такое определение реконструированных переменных на неравномерной сетке гарантирует следующие два важных свойства:

- 1) формулы (2.7) совпадают с высокоточной реконструкцией (2.3), (2.5) на равномерных сетках;
- 2) формулы (2.7) точны для линейных функций при определении значений $u_{j+1/2}^L$ и $u_{j+1/2}^R$ в точках интерфейса $x_{j+1/2}$.

Рассмотрим теперь схемы для нелинейных уравнений на примере одномерной гиперболической системы законов сохранения:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(Q)}{\partial x} = 0.$$

Для нее полудискретная схема в пространственно-дивергентной форме мо-

жет быть записана в виде

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_j + \frac{h_{j+1/2} \left(\mathbf{V}_{j+1/2}^R, \mathbf{V}_{j+1/2}^L\right) - h_{j-1/2} \left(\mathbf{V}_{j-1/2}^R, \mathbf{V}_{j-1/2}^L\right)}{(\Delta x_{j+1/2} + \Delta x_{j-1/2})/2} = 0, \quad (2.8)$$

где под обозначениями $\mathbf{V}_{j+1/2}^L$ и $\mathbf{V}_{j+1/2}^R$ понимается значения либо консервативных переменных \mathbf{Q} , либо потоковых переменных \mathbf{F} , реконструированных с левой и правой сторон относительно границ вычислительных ячеек $x_{j+1/2}$. Численные потоки $h_{j\pm 1/2}$ определяются методом решения задачи Римана (задачи о распаде произвольного разрыва).

В настоящей работе в качестве численных потоков $h_{j\pm 1/2}$ выбираются потоки, основанные на приближенном решении задачи Римана, предложенным Рои в [90]:

$$h^{Roe} \left(\mathbf{Q}_{j\pm 1/2}^R, \mathbf{Q}_{j\pm 1/2}^L\right) = \frac{\mathbf{F} \left(\mathbf{Q}_{j\pm 1/2}^R\right) + \mathbf{F} \left(\mathbf{Q}_{j\pm 1/2}^L\right)}{2} - \frac{\delta}{2} \left| \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{Q}} \left(\mathbf{Q}_{j\pm 1/2}^{Roe}\right) \right| \left(\mathbf{Q}_{j\pm 1/2}^R - \mathbf{Q}_{j\pm 1/2}^L\right). \quad (2.9)$$

Здесь параметр δ , $0 \leq \delta \leq 1$ управляет диссипацией схемы. В работе [91] показано, что схема (2.9) для нелинейных гиперболических уравнений имеет порядок аппроксимации не выше второго даже на равномерных сетках. Для преодоления этого ограничения в настоящей работе используется численный поток схемы Хуанга [92]:

$$h^{Huang} \left(\mathbf{F}_{j\pm 1/2}^R, \mathbf{F}_{j\pm 1/2}^L\right) = \frac{\mathbf{F}_{j\pm 1/2}^R + \mathbf{F}_{j\pm 1/2}^L}{2} - \frac{\delta}{2} \text{sign} \left(\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{Q}} \left(\mathbf{Q}_{j\pm 1/2}\right) \right) \left(\mathbf{F}_{j\pm 1/2}^R - \mathbf{F}_{j\pm 1/2}^L\right). \quad (2.10)$$

В отличие от схемы (2.9), в схеме (2.10) реконструируются потоки, а не консервативные переменные. Реконструкция потоковых переменных проводится по формулам (2.7), аналогично реконструкции консервативных переменных в схеме (2.9). Разностная схема (2.8), (2.10) с реконструкцией потока (2.7) обладает пятым порядком точности на равномерных сетках и преобразуется в центрально-разностную схему шестого порядка, если $\delta = 0$.

Схемы с реберно-ориентированной реконструкцией на неструктурированных сетках

Основная консервативная вершинно-центрированная формулировка

В использованных в работе вершинно-центрированных алгоритмах физические или консервативные переменные определяются в узлах сетки. Построение консервативной схемы требует определения контрольных объемов или ячеек, используемых для дискретизации законов сохранения. В данной работе при расчетах используется два типа ячеек: барицентрический и ортоцентрический. В трехмерном случае барицентрические ячейки построены на основе центров тяжести тетраэдров, их треугольных граней и ребер, в двумерном случае – на основе центров тяжести треугольников и центров ребер. Опорными точками для ортоцентрических ячеек являются центры описанных сфер около тетраэдров, центры описанных окружностей около треугольников и центров ребер.

Закон сохранения в интегральной форме для системы уравнений Эйлера (система (1.2) с нулевыми вязкими потоками) в расчетной ячейке C_i , построенной вокруг узла i можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\bar{\mathbf{Q}}_i}{dt} = -\frac{1}{|C_i|} \int_{\partial C_i} (\mathcal{F} \cdot \mathbf{n}) ds, \quad \mathcal{F} = (\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}), \quad (2.11)$$

где $|C_i|$, ∂C_i есть объем ячейки и его граница, соответственно, вектор $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ – единичная внешняя нормаль к границе ячейки, а $\bar{\mathbf{Q}}_i$ – интегральное среднее от величины \mathbf{Q} по ячейке C_i . Для барицентрических и ортоцентрических ячеек их поверхность может быть записана в виде объединения граней ∂C_{ik} , разделяющей узлы i и k – $\partial C_i = \bigcup_{k \in N_1(i)} \partial C_{ik}$, где $N_1(i)$ – множество узлов сетки, соседних (то есть соединенных одним ребром) с вершиной i . Грань ∂C_{ik} , в общем случае, представляет собой объединение выпуклых многогранников.

Для дискретного представления закона сохранения (2.11), заменим среднее значение переменных $\bar{\mathbf{Q}}_i$ на их точечные значения в узлах сетки \mathbf{Q}_i , а

правую часть (2.11) запишем в виде

$$\int_{\partial C_i} (\mathcal{F} \cdot \mathbf{n}) ds = \sum_{k \in N_1(i)} \int_{\partial C_{ik}} (\mathcal{F} \cdot \mathbf{n}) ds \approx \sum_{k \in N_1(i)} \mathbf{h}_{ik},$$

где через \mathbf{h}_{ik} обозначен численный поток, аппроксимирующий газодинамический поток через грань ячейки ∂C_{ik} . Определим численный поток, как $\mathbf{h}_{ik} = \mathcal{F}_{ik} \cdot \mathbf{n}_{ik}$, где \mathcal{F}_{ik} есть значение газодинамического потока, определяемого по формулам решения задачи Римана типа (2.9) или (2.10) взятое в точке пересечения грани ячейки ∂C_{ik} с ребром сеточного элемента ik (эта точка является центром ребра ik). Вектор $\mathbf{n}_{ik} = \int_{\partial C_{ik}} \mathbf{n} ds$ представляет собой сумму ориентированных площадей всех многогранников, составляющих грань ∂C_{ik} .

Полученную схему

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right)_i = -\frac{1}{|C_i|} \sum_{k \in N_1(i)} \mathbf{h}_{ik} \quad (2.12)$$

назовем схемой с *реберно-ориентированной реконструкцией* (EBR – Edge-Based Reconstruction), если численные потоки \mathbf{h}_{ik} могут быть найдены с помощью процедуры одномерной реконструкции (2.7) вдоль соответствующего ребра сеточного элемента. Далее рассматриваются детали такой реконструкции в случае треугольных/тетраэдральных сеток.

EBR схема на произвольной треугольной/тетраэдральной сетке

Как было сказано выше, схема (2.12) определяется выбором метода вычисления численного потока (2.9) или (2.10), зависящего от переменных, найденных с использованием процедуры одномерной реконструкции.

Далее будем рассматривать процедуру выбора точек шаблона одномерной реконструкции потоковых переменных на примере произвольной треугольной сетки (см. Рис. 2.1, *a*). Для этого выберем направление реконструкции \mathbf{E} , определяемое вектором ребра $\mathbf{e}_{ik} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i$. Первая точка $\mathbf{r}_{ik}^{(5)}$ находится на пере-

сечении прямой, определяемой направлением \mathbf{E} , с ребром $B_k C_k$ треугольника $A_k B_k C_k$. Следующая точка $\mathbf{r}_{ik}^{(6)}$ лежит на пересечении прямой \mathbf{E} с отрезком $D_k^1 D_k^2$, где точки D_k^1 и D_k^2 являются пересечениями прямых, параллельных прямой \mathbf{E} и проходящих через вершины A_k^1 и A_k^2 , с ребрами $B_k^1 C_k^1$ и $B_k^2 C_k^2$, соответственно. Точки $\mathbf{r}_{ik}^{(1)}$ и $\mathbf{r}_{ik}^{(2)}$ находятся из аналогичной геометрической конструкции слева от вершины, которая включает в себя треугольники $A_i B_i C_i$, $A_k^1 B_k^1 C_k^1$ и $A_k^2 B_k^2 C_k^2$.

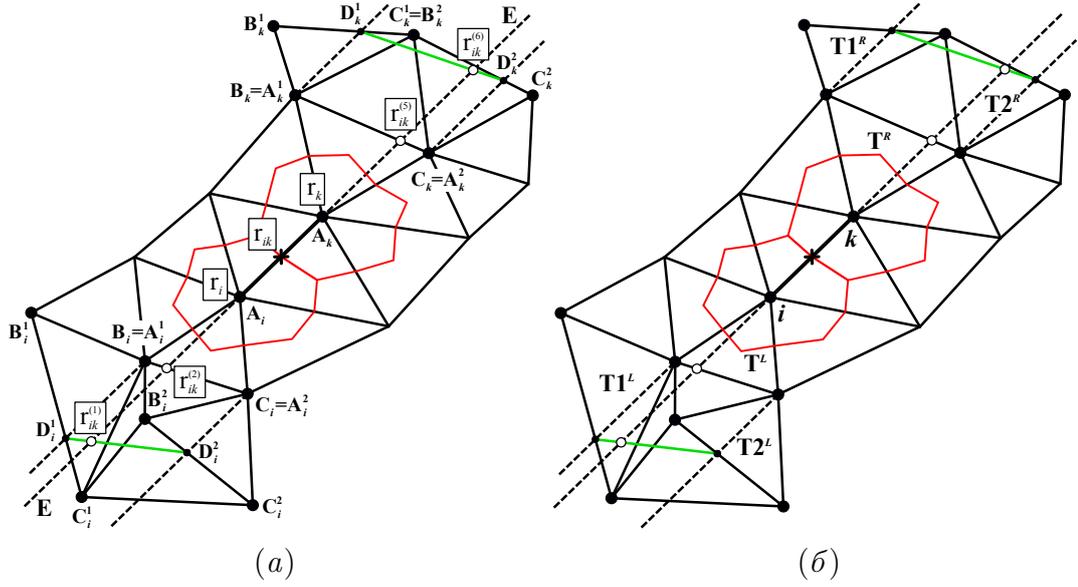


Рисунок 2.1 – Определение направления реконструкции и точек шаблона для произвольной треугольной сетки

Таким образом, точки $S_{ik}^{1D} = \left\{ \mathbf{r}_{ik}^{(1)}, \mathbf{r}_{ik}^{(2)}, \mathbf{r}_{ik}^{(3)} \equiv \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{ik}^{(4)} \equiv \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{ik}^{(5)}, \mathbf{r}_{ik}^{(6)} \right\}$ определяют шаблон *одномерной реконструкции*, заданный направлением \mathbf{E} . Тогда, следуя формуле (2.7), определим одномерную реконструкцию вектора переменных Φ_{ik}^1 как

$$\begin{aligned} \Phi_{ik}^L &= \Phi_i + \frac{\Delta r_{ik}^{(7/2)}}{2} \left(-\frac{1}{15} \frac{\Delta \Phi_{ik}^{(3/2)}}{\Delta r_{ik}^{(3/2)}} + \frac{11}{30} \frac{\Delta \Phi_{ik}^{(5/2)}}{\Delta r_{ik}^{(5/2)}} + \frac{4}{5} \frac{\Delta \Phi_{ik}^{(7/2)}}{\Delta r_{ik}^{(7/2)}} - \frac{1}{10} \frac{\Delta \Phi_{ik}^{(9/2)}}{\Delta r_{ik}^{(9/2)}} \right) \\ \Phi_{ik}^R &= \Phi_i - \frac{\Delta r_{ik}^{(7/2)}}{2} \left(-\frac{1}{10} \frac{\Delta \Phi_{ik}^{(5/2)}}{\Delta r_{ik}^{(5/2)}} + \frac{4}{5} \frac{\Delta \Phi_{ik}^{(7/2)}}{\Delta r_{ik}^{(7/2)}} + \frac{11}{30} \frac{\Delta \Phi_{ik}^{(9/2)}}{\Delta r_{ik}^{(9/2)}} - \frac{1}{15} \frac{\Delta \Phi_{ik}^{(11/2)}}{\Delta r_{ik}^{(11/2)}} \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $\Delta r_{ik}^{(s+1/2)} = \left| \mathbf{r}_{ik}^{(s+1)} - \mathbf{r}_{ik}^{(s)} \right|$, $s = 1, \dots, 5$.

¹ Здесь Φ – это вектор консервативных переменных \mathbf{Q} (для схемы (2.9)) или потоковых переменных \mathbf{F} (для схемы (2.10)).

В общем случае точки шаблона S_{ik}^{1D} не совпадают с узлами сетки и поэтому не могут рассматриваться как истинный шаблон реконструкции для произвольной неструктурированной сетки. Поэтому разделенные разности $\Delta\Phi_{ik}/\Delta r_{ik}$ в формуле (2.13) нуждаются в специальном определении. Для этого в случае геометрической конфигурации, показанной на Рис. 2.1, б, выделим *опорные* треугольники $T^L = A_i B_i C_i$, $T1^L = A_i^1 B_i^1 C_i^1$, $T2^L = A_i^2 B_i^2 C_i^2$, $T^R = A_k B_k C_k$, $T1^R = A_k^1 B_k^1 C_k^1$, $T2^R = A_k^2 B_k^2 C_k^2$.

Заменяем разделенные разности в (2.13) проекциями на прямую, заданную направлением вектора ребра $\mathbf{e}_{ik} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i$ на градиенты, определенные на введенных выше треугольниках (градиенты P1 метода Галеркина²):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\Phi_{ik}^{(3/2)}}{\Delta r_{ik}^{(3/2)}} &= [\sigma_i \Delta\Phi|_{T1^L} + (1 - \sigma_i) \Delta\Phi|_{T2^L}] \cdot \frac{\mathbf{e}_{ik}}{|\mathbf{e}_{ik}|}, \\ \frac{\Delta\Phi_{ik}^{(5/2)}}{\Delta r_{ik}^{(5/2)}} &= \Delta\Phi|_{T1^L} \cdot \frac{\mathbf{e}_{ik}}{|\mathbf{e}_{ik}|}, \Delta\Phi_{ik}^{(7/2)} = \Phi_k - \Phi_i, \frac{\Delta\Phi_{ik}^{(9/2)}}{\Delta r_{ik}^{(9/2)}} = \Delta\Phi|_{T1^R} \cdot \frac{\mathbf{e}_{ik}}{|\mathbf{e}_{ik}|}, \\ \frac{\Delta\Phi_{ik}^{(11/2)}}{\Delta r_{ik}^{(11/2)}} &= [\sigma_k \Delta\Phi|_{T1^R} + (1 - \sigma_k) \Delta\Phi|_{T2^R}] \cdot \frac{\mathbf{e}_{ik}}{|\mathbf{e}_{ik}|}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Веса σ_i и σ_k определяются в зависимости от положения точек $\mathbf{r}_{ik}^{(1)}$ и $\mathbf{r}_{ik}^{(6)}$ на отрезках $D_i^1 D_i^2$ и $D_k^1 D_k^2$, соответственно (см. Рис. 2.1, а). Например, если обозначить точку $\mathbf{r}_{ik}^{(6)}$ через P, то $\sigma_k = |D_k^2 P| / |D_k^1 D_k^2|$. Формулы (2.14) определяют неструктурированные аналоги разделенных разностей на произвольных неструктурированных сетках, необходимых для определения реконструкций типа (2.13). Более подробный вывод формул (2.14) приведен в Приложении В.

Формулы (2.12), (2.14), определяют схему с квазиодномерной реконструкцией переменных для произвольной неструктурированной треугольной/тетраэдральной сетки на шеститочечном шаблоне, которую назовем схемой EBR5.

² Градиент P1 метода Галеркина от вектор-функции \mathbf{f} на треугольнике T определяется как $\nabla\mathbf{f}|_T = \sum_{k \in T} \mathbf{f}_k \nabla\varphi_k$, где кусочно-линейные функции φ_k образуют стандартный базис.

2.1.2. Аппроксимация диффузионных членов

Аппроксимация диффузионной части потоков производится на основе метода конечных элементов Галеркина с линейными базисными функциями (P1-метод Галеркина). Далее, не ограничивая общности, приведем описание метода в двумерном случае для модельного диффузионного уравнения и для диффузионной части системы уравнений Навье – Стокса для сжимаемого газа.

Диффузионное уравнение

Рассмотрим модельное диффузионное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u. \quad (2.15)$$

Предположим, что в вычислительной области Ω построена некоторая триангуляция $\{T_i\}$ по N узлам, такая, что $\Omega = \bigcup_{i=1}^N T_i$. Введем множество S_i , представляющие собой объединение треугольников, имеющих общую вершину i (Рис. 2.2). Множество номеров таких треугольников обозначим через $TN(i)$. Тогда формальное определение множества S_i дается следующим выражением:

$$S_i = \bigcup_{i \in T_k} T_k = \bigcup_{k \in TN(i)} T_k.$$

Определим медианный контрольный объём C_i , построенный вокруг узла i и состоящий из частей инцидентных ему элементов T_k . Граница контрольного объёма представляет собой объединение отрезков соединяющие центры тяжести ребер элементов T_k , имеющих общий узел i с барицентром самого элемента (на Рис. 2.2 граница медианного контрольного объёма обозначена серым цветом).

В рамках P1-метода Галеркина в каждой точке определяется базисная кусочно-линейная функция φ_i такая, что $\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}$, где a_j – вершины элементов, входящих в множество S_i (см. Рис. 2.3). Множество таких вершин обозначим через $N(i)$.

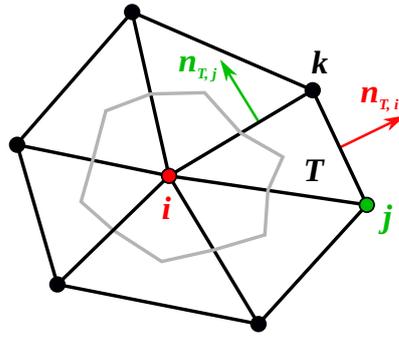
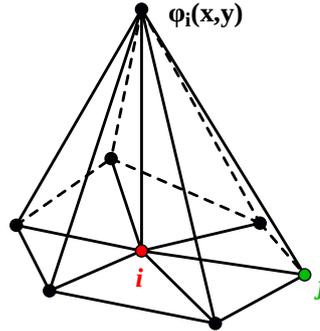


Рисунок 2.2 – Схема контрольного объёма неструктурированной сетки

Рисунок 2.3 – Базисная кусочно-линейная функция φ_i

Согласно определению носителей финитных функций φ_i множество S_i может быть определено как

$$S_i = \bigcup_{j \in N(i)} \text{supp} \varphi_i \cap \text{supp} \varphi_j.$$

Умножим уравнение (2.15) на функцию φ_i и проинтегрируем по S_i :

$$\int_{S_i} \frac{\partial u}{\partial t} \varphi_i dV = \int_{S_i} \nu \Delta u \varphi_i dV. \quad (2.16)$$

Предполагая, что значение временной производной постоянно на ячейке контрольного объёма и используя формулу Грина для интеграла в правой части, выражение (2.16) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} \int_{S_i} \varphi_i dV = - \int_{S_i} \nu \nabla u \nabla \varphi_i dV. \quad (2.17)$$

Значение градиента финитной функции φ_i на треугольнике $T \in S_i$ постоянно

и определяется геометрией треугольника (Рис. 2.2):

$$\nabla\varphi_i = \frac{\mathbf{n}_{T,i}}{2|T|} = \frac{1}{2|T|}(y_k - y_j, x_j - x_k)^T, \quad (2.18)$$

где $\mathbf{n}_{T,i}$ – нормаль к стороне треугольника, противоположащей узлу i (Рис. 2.2), $|T|$ – площадь треугольника.

Функция u на множестве S_i представима в виде линейной комбинации базисных финитных функций $u|_{S_i} = \sum_{j \in N(i)} u_j \varphi_j$, где u_j – искомые значения функции в узлах. Следовательно, градиент функции равен $\nabla u|_{S_i} = \sum_{j \in N(i)} u_j \nabla \varphi_j$ и правая часть уравнения (2.17) переписется в виде

$$\int_{S_i} \nu \nabla u \nabla \varphi_i dV = \sum_{j \in N(i)} \nu \left(\int_{S_i} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dV \right) u_j,$$

что позволяет записать уравнение (2.17) в матричном (операторном) виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = D_{ij} u_j.$$

Здесь элементы D_{ij} матричного представления диффузионного оператора определены следующим образом:

$$D_{ij} = -\frac{\nu}{|C_i|} \int_{S_i} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dV, \quad (2.19)$$

где $|C_i|$ – площадь медианного контрольного объёма:

$$|C_i| = \int_{S_i} \varphi_i dV = \frac{1}{3} \sum_{k \in TN(i)} |T_k|.$$

Так как градиенты финитной функции кусочно-постоянны на множестве S_i , то в правой части равенства (2.19) заменим интеграл на конечную сумму и воспользуемся выражением для градиента финитной функции (2.18). В резуль-

тате имеем

$$\int_{S_i} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dV = \sum_{k \in TN(i)} \int_{T_k} dV \sum_{\substack{j \in T_k \\ j \neq i}} \nabla \varphi_i|_{T_k} \nabla \varphi_j|_{T_k} = \sum_{k \in TN(i)} |T_k| \sum_{\substack{j \in T_k \\ j \neq i}} \frac{\mathbf{n}_{T_k,i} \cdot \mathbf{n}_{T_k,j}}{4|T_k|^2}. \quad (2.20)$$

Откуда следует матричное представление диффузионного оператора, полученное с использованием Р1-метода Галеркина:

$$D_{ij} = -\frac{\nu}{|C_i|} \sum_{k \in TN(i)} \sum_{\substack{j \in T_k \\ j \neq i}} \frac{\mathbf{n}_{T_k,i} \cdot \mathbf{n}_{T_k,j}}{4|T_k|}. \quad (2.21)$$

Система диффузионных уравнений

Рассмотрим систему диффузионных уравнений, аналогичную вязкой части системы уравнений Навье – Стокса без уравнения энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_k} a_{kl}^{(1)} \frac{\partial u}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_k} b_{kl}^{(1)} \frac{\partial v}{\partial x_l}, & (a_{kl}^{(1)}) &= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, & (b_{kl}^{(1)}) &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3}\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_k} a_{kl}^{(2)} \frac{\partial v}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_k} b_{kl}^{(2)} \frac{\partial u}{\partial x_l}, & (a_{kl}^{(2)}) &= \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}\mu \end{pmatrix}, & (b_{kl}^{(2)}) &= \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\frac{2}{3}\mu & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.22)$$

с коэффициентом динамической вязкости μ зависящим от пространственных координат. Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам $k, l = 1, 2$.

Систему уравнений можно записать в векторном виде относительно вектора скорости $\mathbf{u} = (u, v)^T \equiv (u_1, u_2)^T$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{A}_{kl} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{B}_{kl} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_l}, \quad (2.23)$$

где \mathbf{A}_{kl} , \mathbf{B}_{kl} есть элементы блочных матриц

$$\mathbf{A}_{kl} = \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{4}{3}\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3}\mu \end{array} \right), \quad \mathbf{B}_{kl} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}\mu \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ \hline 0 & \mu & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3}\mu & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Применим P1-метод Галеркина к системе (2.22). Для этого домножим систему уравнений (2.23) на функцию φ_i и проинтегрируем по S_i :

$$\int_{S_i} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \varphi_i dV = \int_{S_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{A}_{kl} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{B}_{kl} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_l} \right) \varphi_i dV. \quad (2.24)$$

Предполагая, что значение временной производной постоянно на ячейке контрольного объёма и используя формулу Грина для интеграла в правой части, выражение (2.24) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} \int_{S_i} \varphi_i dV = - \int_{S_i} \left(\mathbf{A}_{kl} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_l} + \mathbf{B}_{kl} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_l} \right) dV. \quad (2.25)$$

Представляя векторную функцию в виде линейной комбинации базисных финитных функций на множестве S_i , система (2.25) запишется в блочно-матричном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} = \mathbf{D}_{ij} \mathbf{u}_j,$$

где блочные элементы \mathbf{D}_{ij} размерностью 2×2 матричной записи диффузионного оператора определены следующим образом:

$$\mathbf{D}_{ij} = -\frac{1}{|C_i|} \int_{S_i} \left(\mathbf{A}_{kl} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} + \mathbf{B}_{kl} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} \right) dV.$$

Далее представим интеграл в правой части предыдущего равенства сум-

мой:

$$\int_{S_i} \left(\mathbf{A}_{kl} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} + \mathbf{B}_{kl} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} \right) dV = \sum_{m \in TN(i)} \int_{T_m} (\mathbf{A}_{kl} + \mathbf{B}_{kl}) dV \sum_{\substack{j \in T_m \\ j \neq i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \Big|_{T_m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} \Big|_{T_m}.$$

Оставшиеся интегралы по треугольникам T_m заменим простейшей квадратурной формулой

$$\int_{T_m} (\mathbf{A}_{kl} + \mathbf{B}_{kl}) dV \approx (\langle \mathbf{A}_{kl} \rangle_{T_m} + \langle \mathbf{B}_{kl} \rangle_{T_m}) |T_m|, \quad (2.26)$$

где элементы матриц $\langle \mathbf{A}_{kl} \rangle_{T_m}$, $\langle \mathbf{B}_{kl} \rangle_{T_m}$ есть среднее арифметическое значение коэффициентов на элементе T_m :

$$\langle a_{kl}^{(1,2)} \rangle_T = \frac{\left(a_{kl}^{(1,2)} \right)_1 + \left(a_{kl}^{(1,2)} \right)_2 + \left(a_{kl}^{(1,2)} \right)_3}{3}, \quad \langle b_{kl}^{(1,2)} \rangle_T = \frac{\left(b_{kl}^{(1,2)} \right)_1 + \left(b_{kl}^{(1,2)} \right)_2 + \left(b_{kl}^{(1,2)} \right)_3}{3}.$$

Заметим, что здесь, в отличие от аналогичного представления интеграла (2.20), нет точного равенства, так как коэффициенты матриц \mathbf{A}_{kl} и \mathbf{B}_{kl} зависят от пространственных переменных.

Воспользовавшись выражением для градиента (2.18) финитной функции и квадратурой (2.26), запишем окончательный вид блочных элементов \mathbf{D}_{ij} матрицы диффузионного оператора:

$$\mathbf{D}_{ij} = -\frac{1}{|C_i|} \sum_{m \in TN(i)} (\langle \mathbf{A}_{kl} \rangle_{T_m} + \langle \mathbf{B}_{kl} \rangle_{T_m}) \sum_{\substack{j \in T_m \\ j \neq i}} \frac{(n_k)_{T_m,i} \cdot (n_l)_{T_m,j}}{4 |T_k|}.$$

Для вязкой части скалярного уравнения энергии в системе Навье – Стокса матрица диффузионного оператора строится аналогично изложенному выше методу Галеркина для диффузионной системы с переменными коэффициентами.

2.1.3. Интегрирование по времени

Полудискретную аппроксимацию системы (1.7) можно записать в виде

$$V_i \left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right)_i = -\Psi_i(\mathbf{Q}_{N(i)}) , \quad (2.27)$$

где V_i – объём расчетной ячейки, $\Psi_i(\mathbf{Q}_{N(i)}) = \sum_{j \in N(i)} \mathcal{F}_{ij} S_{ij} + \frac{1}{V_i} H_i$ – аппроксимация уравнений поверхностного интеграла в методе конечного объёма. Функция $\Psi_i(\mathbf{Q}_{N(i)})$ зависит от переменных, определенных в точках пространственного шаблона $N(i)$ и представима в виде суммы конвективных потоков Ψ_2^{conv} источника H :

$$\Psi_i(\mathbf{Q}_{\Omega_i}) = \Psi_2^{conv} + H .$$

Обозначим через $\mathbf{Q}_i^{n+1} \equiv \mathbf{Q}_i(t + \Delta t^n)$, $\mathbf{Q}_i^n \equiv \mathbf{Q}_i(t)$, $\mathbf{Q}_i^{n-1} \equiv \mathbf{Q}_i(t - \Delta t^{n-1})$. Запишем для уравнения (2.27) полностью неявную схему с первым порядком аппроксимации по времени на момент времени $t + \Delta t^n$:

$$\frac{V_i}{\Delta t^n} (\mathbf{Q}_i^{n+1} - \mathbf{Q}_i^n) = -\Psi_i(\mathbf{Q}_{N(i)}^{n+1}) \quad (2.28)$$

и со вторым порядком аппроксимации на тот же момент времени:

$$\begin{aligned} V_i (a\mathbf{Q}_i^{n+1} + b\mathbf{Q}_i^n + c\mathbf{Q}_i^{n-1}) &= -\Psi_i(\mathbf{Q}_{N(i)}^{n+1}) \\ a &= \frac{1}{\Delta t^n} \frac{2\tau + 1}{\tau + 1}, \quad b = -\frac{1}{\Delta t^n} (\tau + 1), \quad c = \frac{1}{\Delta t^n} \frac{\tau^2}{\tau + 1} \\ \tau &= \frac{\Delta t^n}{\Delta t^{n-1}}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Если шаг по времени постоянный ($\tau = 1$), то левая часть (2.29) есть стандартная направленная разность 2-го порядка.

Рассмотрим отдельно реализацию схемы (2.28) или (2.29) для стационарных и нестационарных расчетов.

Понятно, что для стационарного случая достаточно ограничиться схемой первого порядка (2.28) и рассматривать ее как квазинестационарную схему метода установления. Построим итерационный процесс, сходящийся к стационарному решению. Для этого введем приращение вектора переменных $\Delta \mathbf{Q}^n = \mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n$ и линеаризуем правую часть уравнения (2.28) в каждой точке $i \in N(i)$ (далее пространственные индексы опущены):

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{Q}^{n+1}) &= \Psi(\mathbf{Q}^n) + \frac{\partial \Psi(\mathbf{Q}^n)}{\partial t} \Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= \Psi(\mathbf{Q}^n) + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \right)^n \Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= \Psi(\mathbf{Q}^n) + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} \Delta \mathbf{Q}^n + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Подставляя (2.30) в (2.28), получаем

$$\left(\frac{V}{\Delta t} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} \right) \Delta \mathbf{Q}^n = -\Psi(\mathbf{Q}^n).$$

Здесь под матрицей Якоби $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}}$ правой части понимается дифференцирование по переменным, определенным на шаблоне $N(i)$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} \equiv \frac{\partial \Psi_i(\Omega_i)}{\partial \mathbf{Q}_j}, \quad i, j \in N(i).$$

Вводя обозначение оператора неявной части $\mathfrak{M} = \left(\frac{V}{\Delta t} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} \right)$ и обращая его, получаем $\Delta \mathbf{Q}^n = -\mathfrak{M}^{-1} \Psi(\mathbf{Q}^n)$. Откуда следует, что при $n \rightarrow \infty$ приращение $\Delta \mathbf{Q}^n$ стремится к нулю, следовательно, $\Psi(\mathbf{Q}^n) \rightarrow 0$. Это означает сходимость к стационарному решению $\Psi(\mathbf{Q}) = 0$.

Для нестационарного случая рассмотрим схему 2-го порядка аппроксимации (2.29) и построим ньютоновский итерационный процесс для нелинейного

уравнения $F(\mathbf{Q}_i^{n+1}) = 0$, где функция F определяется следующим образом:

$$F(\mathbf{Q}_i^{n+1}) = V_i a \mathbf{Q}_i^{n+1} + \Psi(\mathbf{Q}_i^{n+1}) - V_i b \mathbf{Q}_i^n - V_i c \mathbf{Q}_i^{n-1}. \quad (2.31)$$

Далее пространственный индекс i опускаем. Тогда для определения величины \mathbf{Q}^{n+1} ньютоновский итерационный процесс запишется в виде (s – номер итерации)

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{n+1} &= \mathbf{Q}^n \\ \mathbf{Q}^{n+1} &= \mathbf{Q}^{n+1} - \left[F' \left(\mathbf{Q}^{n+1} \right) \right]^{-1} F \left(\mathbf{Q}^{n+1} \right), \end{aligned} \quad (2.32)$$

где матрица Якоби F' в точке i имеет вид

$$F' = \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{Q}_j^{n+1}} = a V_i + \frac{\partial \Psi(\Omega_i)}{\partial \mathbf{Q}_j^{n+1}}, \quad i, j \in N(i). \quad (2.33)$$

Подставляя (2.31) и (2.33) в (2.32) и обозначая приращение на итерации s через $\Delta \mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^{(s+1)} - \mathbf{Q}^{(s)}$, получаем линейризованную версию схемы (2.29):

$$\left[aV + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} \left(\mathbf{Q}^{(s)} \right) \right] \Delta \mathbf{Q}^{n+1} = -\Psi \left(\mathbf{Q}^{(s)} \right) - V \left(a \mathbf{Q}^{(s)} + b \mathbf{Q}^n + c \mathbf{Q}^{n-1} \right). \quad (2.34)$$

Обращая оператор в левой части (2.34), получаем

$$\Delta \mathbf{Q}^{n+1} = \mathfrak{M}^{-1} \left[-\Psi \left(\mathbf{Q}^{(s)} \right) - V \left(a \mathbf{Q}^{(s)} + b \mathbf{Q}^n + c \mathbf{Q}^{n-1} \right) \right].$$

Если $s \rightarrow \infty$ и присутствует сходимость ньютоновских итераций, то $\Delta \mathbf{Q}^{n+1} \rightarrow 0$, а это означает, что предельное значение ньютоновского процесса \mathbf{Q}^{n+1} удовлетворяет полностью неявной консервативной схеме (2.29).

Для упрощения вычисления матрицы Якоби выбираем поток, конвективная часть которого подсчитана по схеме первого порядка на более узком шаб-

лоне, чем шаблон $N(i)$. При этом улучшаются свойства матрицы оператора \mathfrak{M} , но ухудшается сходимость ньютоновских итераций (сходимость уже не квадратична).

Все выкладки, приведенные выше для нестационарного случая и второго порядка аппроксимации по времени, верны и для аппроксимации первого порядка, если положить $a = -b = -1/\Delta t$ и $c = 0$. Линейная система уравнений (2.34) решалась стабилизированным методом бисопряженных градиентов (BiCGStab – Biconjugate gradient stabilized method) [93].

2.2. Методы моделирования газодинамического течения в широком диапазоне скоростей

Моделирование вращающихся лопастей винта характеризуется наличием в расчетной области зон с существенно разными скоростями течения, так как скорость движения точек поверхности лопасти при фиксированной скорости вращения винта линейно растет удалением от оси вращения винта. Это обстоятельство должно учитываться при разработке численного метода, который должен быть эффективным при моделировании течений в широком диапазоне скоростей. Таким образом, при расчете течения по всему радиусу лопасти надо учитывать влияние практически несжимаемой, слабо сжимаемой и сжимаемой среды, что приводит к необходимости применять алгоритмы работающие в широком диапазоне чисел Маха. Существует три основных подхода к моделированию течения в сжимаемой среде при скоростях соответствующих малым числам Маха.

Первый подход основан на использовании стационарных предобуславливателей, описанных в работах Туркеля [94; 95]. В основе подхода лежит коррекция производной по времени (псевдовремени) в системе уравнений конвективного переноса (например, система уравнений Эйлера) для достижения наиболее высокой скорости сходимости. Метод коррекции заключается в домножении произ-

водной по времени на обратную матрицу предобуславливания, зависящую от локального числа Маха. Недостатком этого метода является то, что он применим для расчета нестационарных задач только тогда, когда характерная скорость протекания процесса много меньше скорости конвективного переноса жидкости (малые числа Струхаля).

Второй подход основан на идее искусственной сжимаемости, предложенной в работе Чорина [96] и развитой в работах [97; 98]. В этом подходе вводится псевдопроизводная по времени от плотности или давления [97; 98] в стационарное несжимаемое уравнение неразрывности. Данный метод предполагает существование искусственного переходного решения для достижения стационарного решения. При применении данного метода могут возникнуть сложности при решении нестационарных задач, так как сохранение массы гарантируется только при наличии сходимости для переходного решения, которая, в общем случае, может быть обеспечена наложением сильных ограничений на выбор шага по времени. К тому же, этот метод не применим, когда в рассчитываемой задаче должны быть учтены эффекты сжимаемого и несжимаемого течений.

Третий способ заключается в использовании схем, предназначенных для расчета течений в широком диапазоне чисел Маха. Эти схемы построены на основе расчета потока путем решения приближенной задачи Римана в каждой ячейке области (схемы годуновского типа). Наиболее популярными являются схемы, построенные на основе решателя RoU [90; 99; 100], и методы расщепления (AUSM – Advection Upstream Splitting Method) [101–103]. Для решения проблем, связанных с малыми числами Маха, в схемах годуновского типа модифицируется диссипативный член с помощью функции масштабирования, зависящий от локального числа Маха. Преимуществом этих схем является их простая реализация как явного, так и неявного метода интегрирования по времени. В данной работе при расчетах был использован третий подход, так как в нем коррекция происходит только при малых числах Маха, исключаящую модификацию схемы в областях со средними и высокими значениями числа

Маха [57].

2.2.1. Модификация схемы Роу для расчета низкоскоростных течений

Численные алгоритмы годуновского типа с противопоточной аппроксимацией, предназначенные для решения уравнений сжимаемого газа, сталкиваются с целым рядом проблем, когда число Маха близко к нулю. Чтобы показать это, запишем вначале поток через грань расчетной ячейки, разделяющей точки i и j оригинальной схемы Роу для системы (1.7):

$$\mathcal{F}_{ij}^{Roe} = \frac{\mathbf{A}_n(\mathbf{Q}_i)\mathbf{Q}_i + \mathbf{A}_n(\mathbf{Q}_j)\mathbf{Q}_j}{2} - \frac{1}{2}|\bar{\mathbf{A}}_n|\Delta\mathbf{Q}_{ij}, \quad (2.35)$$

где $\Delta\mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i$, матрицы \mathbf{A}_n – это свертка по индексу k матриц Якоби (1.8) с вектором нормали к грани ячейки n_k , а матрица $|\bar{\mathbf{A}}_n|$ определяется³, используя разложение аналогичное (1.8): $|\bar{\mathbf{A}}_n| = \bar{\mathbf{S}}_n|\bar{\mathbf{A}}_n|\bar{\mathbf{S}}_n^{-1}$.

Введем в рассмотрение характеристические переменные (инварианты Римана) $\Delta\mathbf{W} = \bar{\mathbf{S}}_n^{-1}\Delta\mathbf{Q}$ и выпишем явный вид диссипативной части схемы Роу⁴:

$$\mathbf{D}_{ij}^{Roe} = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{S}}_n|\bar{\mathbf{A}}_n|\Delta\mathbf{W}_{ij} = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{S}}_n \begin{pmatrix} \left(\Delta_{ij}\rho - \frac{\Delta p_{ij}}{\bar{c}^2} \right) |\bar{\lambda}_1| \\ \bar{\rho}(\Delta u_s)_{ij} |\bar{\lambda}_1| \\ \bar{\rho}(\Delta u_t)_{ij} |\bar{\lambda}_1| \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta p_{ij}}{\bar{c}^2} + \frac{\bar{\rho}}{\bar{c}}(\Delta u_n)_{ij} \right) |\bar{\lambda}_2| \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta p_{ij}}{\bar{c}^2} - \frac{\bar{\rho}}{\bar{c}}(\Delta u_n)_{ij} \right) |\bar{\lambda}_3| \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Поток, определенный формулами (2.35)–(2.36) есть оригинальная схема Роу.

³ Черта над матрицей означает осреднение по Роу каждого элемента матрицы.

⁴ Здесь введено упорядочение собственных векторов матрицы $\bar{\mathbf{A}}_n$ такое, что ΔW_1 – энтропийная волна, ΔW_2 и ΔW_3 – вихревые волны, ΔW_4 и ΔW_5 – акустические волны, распространяющиеся со скоростями $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = un$, $\lambda_4 = u_n + c$, $\lambda_5 = u_n - c$, соответственно.

В работах [99] и [104] на основе асимптотического разложения по числу M была отмечена потеря точности в схеме Роу из-за наличия большой численной диффузии (искусственной вязкости), пропорциональной $O(1/M)$ в уравнениях, аппроксимирующих уравнения импульса. Асимптотический анализ схемы Роу показал наличие скачка нормальной к грани ячейки скорости Δu_n . Именно, это слагаемое имеет первый порядок малости по числу Маха в диссипативной части разностных уравнений, записанных относительно переменных нулевого порядка. Чтобы решить эту проблему достаточно промасштабировать скачок Δu_n в диссипативной части схемы Роу так, чтобы он оставался порядка единицы при любом числе $M < 1$, например, простым выражением (см. [99])

$$(\Delta u_n)_{ij} = \min(M_{ij}, 1), \quad (2.37)$$

где M_{ij} – локальное число Маха на грани ячейки.

Но функции масштабирования (2.37) не всегда применима, так как она недифференцируема. Естественно функцию масштабирования $f(M_{ij})$ можно выбрать различными способами исходя из следующих условий (см. [100]):

$$\begin{aligned} 0 < f(M_{ij}) < 1, & \text{ если } 0 < M_{ij} < 1 \\ f(M_{ij}) \rightarrow 0, & \text{ если } M_{ij} \rightarrow 0 \\ f(M_{ij}) = 1, & \text{ если } M_{ij} \geq 1. \end{aligned}$$

В данной работе, использовалась следующая гладкая функция, предложенная в [100]:

$$f(M_{ij}) = \max \left(1, M_{ij} \frac{\sqrt{4 + (1 - M_{ij}^2)^2}}{1 + M_{ij}^2} \right). \quad (2.38)$$

С использованием масштабирующей функции $f(M_{ij})$ диссипативная часть мо-

дифицированной схемы Роу запишется в виде

$$\mathbf{D}_{ij}^{Roe/LM} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{S}}_n |\bar{\Lambda}_n| \Delta \mathbf{W}_{ij} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{S}}_n \begin{pmatrix} \left(\Delta_{ij} \rho - \frac{\Delta p_{ij}}{c^2} \right) |\bar{\lambda}_1| \\ \bar{\rho} (\Delta u_s)_{ij} |\bar{\lambda}_1| \\ \bar{\rho} (\Delta u_t)_{ij} |\bar{\lambda}_1| \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta p_{ij}}{c^2} + \frac{\bar{\rho}}{c} f(M_{ij}) (\Delta u_n)_{ij} \right) |\bar{\lambda}_2| \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta p_{ij}}{c^2} - \frac{\bar{\rho}}{c} f(M_{ij}) (\Delta u_n)_{ij} \right) |\bar{\lambda}_3| \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Таким образом, соотношения (2.35), (2.38) и (2.39) дают новый алгоритм, который не должен приводить к потере точности при наличии в области расчета течений с очень малыми числами Маха.

2.2.2. Верификация методики расчета низкоскоростных течений

Для верификации этой методики была проведена серия численных экспериментов, в которых моделировалось двухмерное невязкое обтекание профиля NASA0012 при нулевом угле атаки потоком с низкой скоростью.

Расчетная конфигурация представляла собой профиль NASA0012 с хордой $b = 1$ расположенный в центре расчетной зоны. Границы расчетной области были удалены на расстояние порядка $60b$ от профиля, чтобы исключить влияние граничных условий на течение вблизи профиля. При этом расчеты проводились на двух типах неструктурированной сетки: «структурированной» – полученной разбиением прямоугольной структурированной сетки на треугольные элементы (см. Рис. 2.4, *а*) и неструктурированной полученной методом продвинутого фронта (см. Рис. 2.4, *б*). Для каждого типа сетки было проведено три расчета с числами Маха внешнего потока 0.15, 0.01 и 0.001 с использованием описанной выше модификации схемы Роу с квазиодномерной реконструкцией физических переменных, а также по одному расчету с использованием оригинальной схемы

с аналогичной реконструкцией, но без учета низкоскоростных поправок для числа Маха внешнего потока равным 0.01.

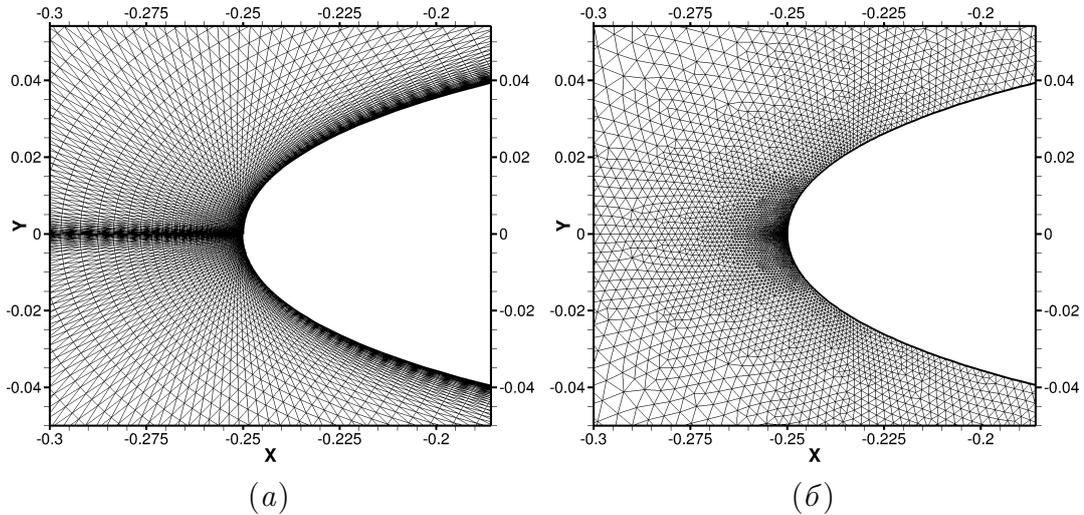


Рисунок 2.4 – Расчетные сетки для моделирования обтекания профиля NASA0012: «структурированная» (а) и неструктурированная (б)

Расчет на обоих типах сеток при скорости внешнего потока с числом Маха равным 0.01 проведенной с использованием схемы Роу без применения низкоскоростных поправок показал непригодность данной схемы для расчета подобных задач. При расчете не только наблюдалось отсутствие сходимости к стационарному решению, но и наблюдалась численная неустойчивость независящая от значения числа Куранта (см. Рис. 2.5, а). Расчеты с использованием схемы с низкоскоростной поправкой дали адекватные результаты: наблюдалась сходимость к стационарному решению, в полях физических переменных отсутствовали нефизичные осцилляции (см. Рис. 2.5, б).

На Рис. 2.6 приведено распределение коэффициента давления на поверхности профиля для расчета со скоростью потока соответствующей числу Маха 0.01 и расчета по модели невязкой несжимаемой жидкости. Наблюдается хорошее совпадение результатов двух расчетов. Для скоростей внешнего потока с числами Маха 0.15 и 0.001 распределения коэффициента давления практически не отличается от расчета с числом Маха 0.01 и здесь не приводится.

В таблице 2.1 приведены значения коэффициента силы сопротивления для разных чисел Маха и двух типов сетки. Видно, что эти значения близки к нулю,

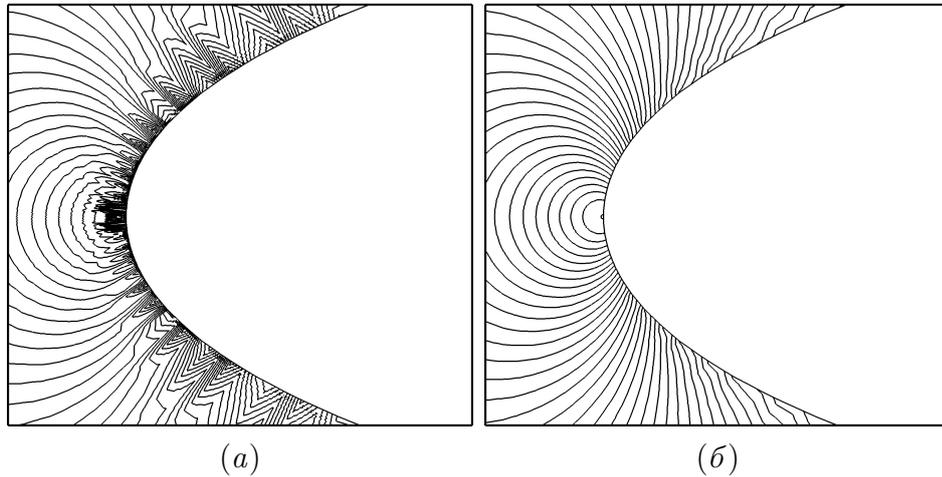


Рисунок 2.5 – Изолинии избыточного давления вблизи передней кромки профиля NASA0012 полученные в результате использования оригинальной схемы (а) и схемы с низкоскоростными поправками (б)

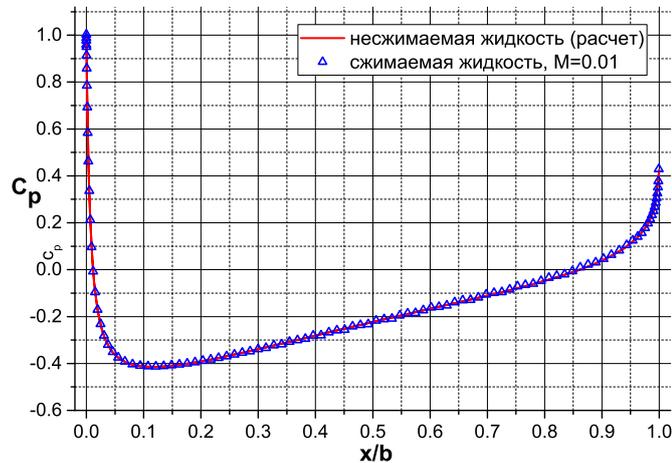


Рисунок 2.6 – Сравнение распределения коэффициента давления на поверхности профиля на неструктурированной сетке при числе Маха 0.01 с расчетом по модели невязкой несжимаемой жидкости

что соответствует парадоксу Даламбера, и отличаются не более чем в 1.3 раза при изменении числа Маха.

Результаты тестовых расчетов с применением модификацией схемы $Ro\gamma$ (2.35), (2.38), (2.39) для расчета низкоскоростных течений показали, что описанная методика позволяет получать качественные результаты в задачах со скоростью течения в широком диапазоне дозвуковых чисел Маха. Применение данной методика особенно уместно при моделировании обтекания лопасти винта вертолета, в силу широкого диапазона скорости обтекания, прямо пропорциональной удалению от оси вращения винта.

Таблица 2.1 – Значения коэффициента силы сопротивления

Тип расчетной сетки	$M = 0.15$	$M = 0.01$	$M = 0.001$
Структурированная	-0.851×10^{-5}	-1.000×10^{-5}	-1.092×10^{-5}
Неструктурированная	1.630×10^{-5}	2.022×10^{-5}	2.201×10^{-5}

2.3. Реализация метода моделирования шума винта в дальнем поле

2.3.1. Вычисление интеграла в формулировке Фокса Уилльямса – Хокинга

Как показано в работе [56] при параметризации контрольной поверхности в инерциальной системе координат, связанной с фюзеляжем вертолета, интеграл (1.24), с учетом того, что контрольная поверхность является поверхностью вращения, можно представить в виде $p'(\mathbf{R}, T) = \frac{1}{4\pi} \iint \Psi(\mathbf{r}, t^*(\mathbf{r})) \cos \theta d\theta d\phi$, где $\mathbf{r} = (r(\theta) \cos \theta \cos \phi, r(\theta) \cos \theta \sin \phi, r(\theta) \sin \theta)^T$, а θ и ϕ – азимутальный и меридиональный углы параметризации поверхности.

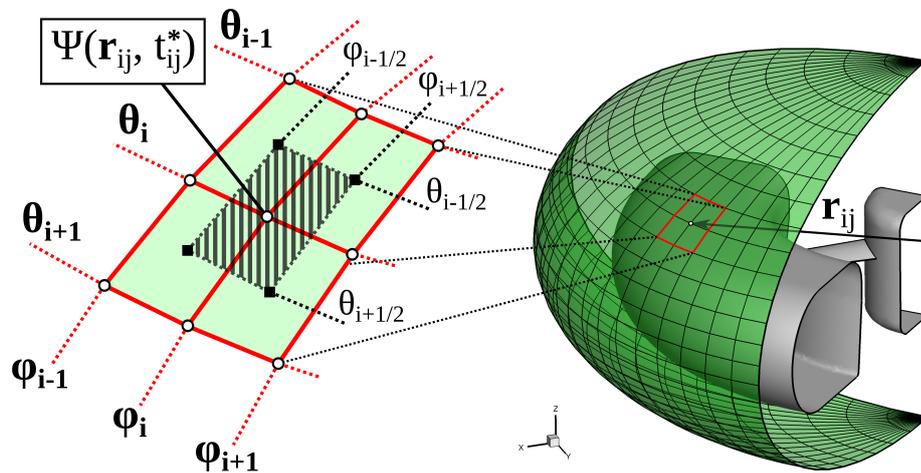


Рисунок 2.7 – Интегрирование по контрольной поверхности

При расчете интеграл приближается суммой следующего вида (см. Рис. 2.7):

$$p'(\mathbf{R}, T) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{i=0}^{N_\theta} \sum_{j=0}^{N_\phi} \Psi(\mathbf{r}_{ij}, t_{ij}^*) (\sin \theta_{i+1/2} - \sin \theta_{i-1/2}) (\phi_{j+1/2} - \phi_{j-1/2}), \quad (2.40)$$

где $\mathbf{r}_{ij} = (r(\theta_i) \cos \theta_i \cos \phi_j, r(\theta_i) \cos \theta_i \sin \phi_j, r(\theta_i) \sin \theta_i)^T$, а по углам используется равномерная сетка: $\phi_j = 2\pi j/N_\phi$, $0 \leq j \leq N_\phi$ и $\theta_i = \pi i/N_\theta - \pi/2$ при $0 < i < N_\theta$ и $\theta_{-1/2} = -\pi/2$, $\theta_{N_\theta+1/2} = \pi/2$.

Принимая во внимание то, что контрольная поверхность параметризована в системе координат связанной с фюзеляжем вертолета, а расположена во вращающейся области **2** (см. Рис. 1.1), то относительно расчетной сетки вращающейся области точки поверхности движутся. Таким образом при расчете необходимо переинтерполировать данные на точки поверхности, динамически перестраивая шаблон интерполяции. Этого можно избежать, если в процессе расчета в ближнем поле интерполировать поля необходимых физических переменных и их производных в фиксированных относительно сетки точек, производя переинтерполяцию по меридиональному углу ϕ в точки $\{\phi_{j+1/2}\}$.

2.3.2. Верификация методики вычисления акустических пульсаций в дальнем поле

Предложенная методика была верифицирована на нескольких задачах. Причем цель верификации была не только убедиться в корректности предложенной методики, но и количественно оценить влияние на результат техники интерполяции с расчетного поля на контрольную поверхность, точности интегрирования и точности самого расчета в ближнем поле.

Верификация на линейной задаче о распространении волны от точечного источника

Предложенная методика для линеаризованных уравнений Эйлера была верифицирована на задаче о распространении волны от точечного источника при отсутствии фонового потока.

Постановка задачи в отсутствии потока формулируется следующим образом. В точках с координатами $(\cos(\pi k/6), \sin(\pi k/6), 0)$, где $k = \overline{0, 5}$, размеща-

ется шесть монопольных точечных источников (см. Рис. 2.8).

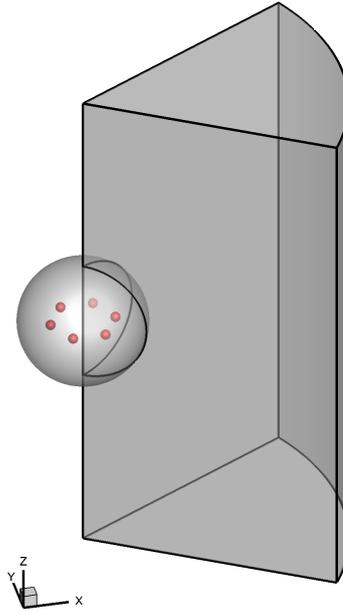


Рисунок 2.8 – Общий вид расчетной области, точечных источников и контрольной FWH-поверхности

При этом решение является периодическим с углом $\pi/6$, что позволяет в соответствии с пп. 1.4.2 проводить расчет в секторе. Такая постановка задачи приближена к реальной ситуации моделирования одиночной лопасти винта в секторе и определения акустических характеристик в дальнем поле. Контрольная поверхность в данной задаче представлена сферой с центром в начале координат (на оси сектора) и радиусом 1 (см. Рис. 1.1).

Расчет проводился для линеаризованных на однородных фоновых полях плотности и давления уравнений Эйлера. Значения плотности, давления и скорости фонового поля были взяты равными $\bar{\rho} = 1$, $\bar{p} = 1/\gamma$, $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$, таким образом скорость звука была равна 1. Решаемая система уравнений может быть записана в виде

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}(\mathbf{Q}) = s(t, \mathbf{r}) \mathbf{H}, \quad (2.41)$$

где $\mathbf{Q} = (\rho', \mathbf{u}', p'/(\gamma - 1))^T$ – вектор неизвестных, поток выражается формулой $\mathcal{F} = (\mathbf{u}'^T, p' \mathbf{I}, \mathbf{u}'^T/(\gamma - 1))^T$, а источник в правой части определяется вектором $\mathbf{H} = (1, \mathbf{0}, 1/(\gamma - 1))^T$.

Для системы уравнений (2.41) при нулевых начальных данных с точечным источником в правой части $s(t, \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})f(t)$ существует точное решение, которое можно записать в виде $\rho' = \partial Q/\partial t$, $\mathbf{u}' = -\nabla Q$, где $Q(t, \mathbf{r}) = f(t - |\mathbf{r}|)/(4\pi|\mathbf{r}|)$. Для рассматриваемой задачи точное решение представляет собой суперпозицию сигналов от шести точечных источников. Для обеспечения достаточной гладкости точного решения зависимость сигнала от времени задавалась функцией $f(t) = \sin^4(\pi t)$ при $0 < t < 2$ и $f(t) = 0$ иначе.

Сигнал в дальнем поле измерялся на достаточном удалении от источников в трех точках: $(10^6, 0, 0)$, $(0, 10^6, 0)$ и $(0, 0, 10^6)$. Вид точного решения в этих точках приведен на Рис. 2.9, где по горизонтальная ось соответствует времени относительно момента прихода сигнала в контрольную точку из гипотетического источника, действовавшего в нулевой момент времени в начале координат. Заметим, что в силу достаточного удаления контрольных точек от источников, была возможность в формуле (1.24) пренебречь членами, убывающими квадратично с увеличением расстояния.

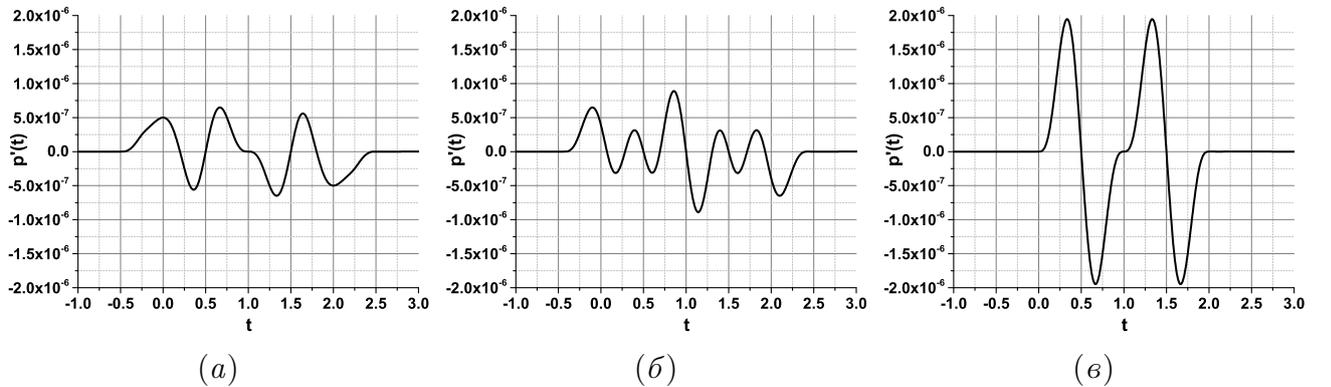


Рисунок 2.9 – Точное решение задачи с шестью монополярными точечными источниками в контрольных точках $(10^6, 0, 0)$ (а), $(0, 10^6, 0)$ (б) и $(0, 0, 10^6)$ (в)

Чтобы верифицировать реализованный алгоритм, вначале точное решение было задано на самой контрольной поверхности, то есть исключался этап интерполяции с расчетной сетки на контрольную поверхность, чтобы оценить ошибку интегрирования. Сетка на контрольной поверхности обозначалась числом ячеек в меридиональном сечении и числом ячеек в секторе: $N_\theta \times (N_\phi/6)$.

При этом рассматривалось два варианта: неподвижной поверхности и поверхности, вращающейся с угловой частотой $\omega = 1$. Интерполяция по времени в момент эмиссии сигнала бралась с точностью, заведомо не ухудшающей итоговую точность интегрирования.

Численная ошибка вычисления интеграла в дальнем поле для трех контрольных точек сведена в таблице 2.2. Мерой ошибки считалось максимальная по времени разность между посчитанной пульсацией давления в дальнем поле и ее точным значением. Видно, что численный порядок точности процедуры интегрирования по контрольной поверхности близок ко второму: с уменьшением шага сетки в два раза ошибка уменьшается в четыре раза.

Таблица 2.2 – Численная ошибка интегрирования

Контрольная поверхность	Сетка на контрольной поверхности	$(10^6, 0, 0)$	$(0, 10^6, 0)$	$(0, 10^6, 0)$
Покоящаяся	25×10	1.243712×10^{-2}	9.230866×10^{-3}	9.171387×10^{-3}
	50×20	3.357593×10^{-3}	2.416552×10^{-3}	1.891483×10^{-3}
	100×40	8.528325×10^{-4}	6.192871×10^{-4}	4.581706×10^{-4}
Вращающаяся ($\omega = 1$)	25×10	1.453984×10^{-2}	1.038558×10^{-2}	9.126306×10^{-3}
	50×20	3.542807×10^{-3}	2.476649×10^{-3}	1.888664×10^{-3}
	100×40	8.617387×10^{-4}	6.175071×10^{-4}	4.585777×10^{-4}

Далее, чтобы оценить влияние на результат интерполяции с расчетной сетки на контрольную поверхность, точное решение было задано на тетраэдральной расчетной сетке и проведена интерполяция данных на контрольную поверхность, как это и должно происходить в процессе расчета. Было рассмотрено два варианта интерполяции: с первым и со вторым порядком. Интерполяцию по времени проводилась квадратичным полиномом, а шаг по времени выбирался равным половине от максимального расстояния между узлами сетки на контрольной поверхности. Тетраэдры изотропной неструктурированной объёмной сетки внутри контрольной поверхности имели примерно одинаковую высоту. Измерения численной ошибки были проведены только для вращающейся поверхности и приведены в таблицах 2.3, 2.4.

Таблица 2.3 – Численная ошибка при задании точного решения на объёмной сетке при использовании интерполяции 1-го порядка

Характерная высота тетраэдра объёмной сетки	Сетка на контрольной поверхности	$(10^6, 0, 0)$	$(0, 10^6, 0)$	$(0, 10^6, 0)$
0.08	40×15	3.334434×10^{-2}	5.129149×10^{-2}	6.292077×10^{-2}
	80×30	2.400721×10^{-2}	4.397583×10^{-2}	6.267298×10^{-2}
	160×60	2.288022×10^{-2}	4.277762×10^{-2}	6.130336×10^{-2}
0.04	160×60	7.693792×10^{-3}	1.096491×10^{-2}	1.459462×10^{-2}
0.02	320×120	1.845901×10^{-3}	2.821744×10^{-3}	3.551005×10^{-3}
0.01	640×240	4.534432×10^{-4}	6.839202×10^{-4}	8.969209×10^{-4}

Из таблицы 2.3 видно, что, во-первых при измельчении объёмной сетки использованный численный метод обладает вторым порядком при соответствующем измельчении сетки на контрольной поверхности. Во-вторых, точность интегрирования на фиксированной объёмной сетке перестает улучшаться, когда шаг поверхностной сетки приблизительно равен удвоенной характерной высоте тетраэдра в объёмной сетке. В сетке 80×30 расстояние между соседними узлами поверхностной сетки по меридиану равно $\pi/80 \approx 0.04$, а по экватору – $\pi/(6 \cdot 30) \approx 0.035$. Сравнивая эти данные с результатами представленными в таблице 2.2, можно видеть, что погрешность интерполяции существенно превосходит точность интегрирования по контрольной поверхности.

Таблица 2.4 – Численная ошибка при задании точного решения на объёмной сетке при использовании интерполяции 2-го порядка

Характерная высота тетраэдра объёмной сетки	Сетка на контрольной поверхности	$(10^6, 0, 0)$	$(0, 10^6, 0)$	$(0, 10^6, 0)$
0.08	80×30	8.825473×10^{-3}	9.179742×10^{-3}	9.036968×10^{-3}
	160×60	6.355184×10^{-3}	8.407078×10^{-3}	8.931071×10^{-3}
	320×120	5.806881×10^{-3}	8.981011×10^{-3}	8.876115×10^{-3}
	640×240	5.673985×10^{-3}	9.123470×10^{-3}	8.877535×10^{-3}
0.04	320×120	8.788391×10^{-4}	1.066907×10^{-3}	7.931457×10^{-4}
	640×240	6.788794×10^{-4}	1.033079×10^{-3}	7.591731×10^{-4}
0.02	640×240	1.160320×10^{-4}	1.231057×10^{-3}	1.023057×10^{-4}

При использовании интерполяционных полиномов второго порядка точ-

ность интерполяции повышается со второго порядка до третьего, в результате чего для получения максимального результата на поверхности приходится брать сетку с более мелким шагом, чем объёмную. Результаты представленные в таблице 2.4 показывают, что интерполяция квадратичными полиномами существенно улучшает точность по сравнению с линейными. Из таблицы видно, что интерполяция квадратичными полиномами позволяет добиться третьего порядка при избыточном измельчении поверхностной сетки.

Верификация на линейной задаче о распространении волны от протяженного источника

Далее было проверено, как предложенная методика работает на реальных расчетных данных. Поскольку в расчете невозможно адекватным образом задать точечный источник, ширину источника была принята равной $b = 0.25$, а его форма задавалась в виде $s(t, \mathbf{r}) = f(t)\cos^2(\pi|\mathbf{r}|/(2b))$ при $|\mathbf{r}| < b$ и 0 иначе. Поскольку точное решение для задачи с протяженным источником отличается от точного решения для задачи с точечным источником на величину порядка $O((\omega b)^2)$, необходимо использовать точное решение именно для протяженного источника. Для тех же контрольных точек $(10^6, 0, 0)$, $(0, 10^6, 0)$ и $(0, 0, 10^6)$ оно изображено на Рис. 2.10.

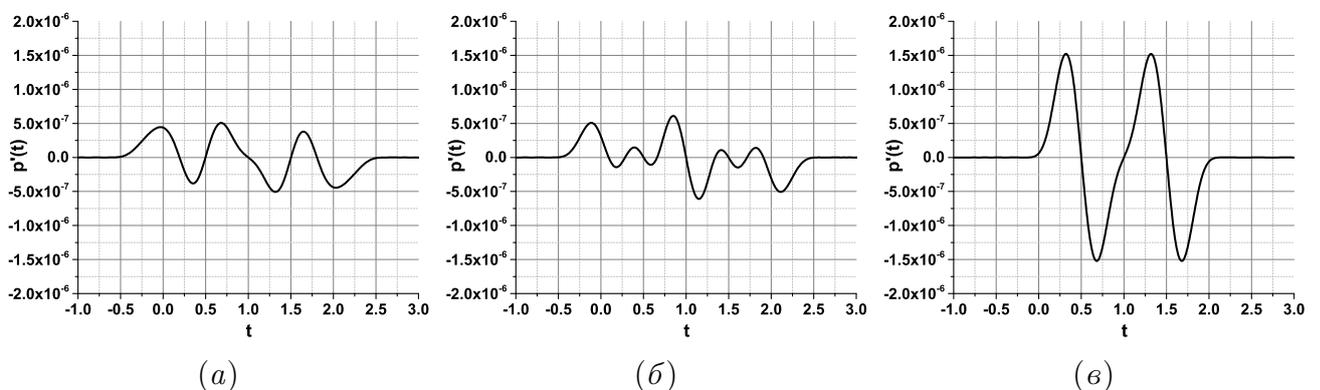


Рисунок 2.10 – Точное решение задачи с шестью монополярными протяженными источниками в контрольных точках $(10^6, 0, 0)$ (a), $(0, 10^6, 0)$ (б) и $(0, 0, 10^6)$ (в)

Результаты численного эксперимента при расчете по схеме EBR5 (опреде-

ленной в пп. 2.1) на неструктурированной тетраэдральной сетке представлены в таблицах 2.5 и 2.6. Данные на контрольной поверхности сохранялись с той же частотой, которая использовалась в предыдущем эксперименте.

Таблица 2.5 – Численная ошибка вычисления сигнала в дальнем поле при расчете по схеме EBR5 и интерполяции квадратичным полиномом при отсутствии вращения

Характерная высота тетраэдра объемной сетки	Сетка на контрольной поверхности	$(10^6, 0, 0)$	$(0, 10^6, 0)$	$(0, 0, 10^6)$
0.08	80×30	2.253822×10^{-2}	4.702184×10^{-2}	5.563398×10^{-2}
0.04	160×60	3.173944×10^{-3}	5.576575×10^{-3}	1.056794×10^{-2}
0.02	320×120	7.161923×10^{-4}	1.276988×10^{-3}	1.945565×10^{-3}

Таблица 2.6 – Численная ошибка вычисления сигнала в дальнем поле при расчете по схеме EBR5 и интерполяции квадратичным полиномом во вращающейся системе координат

Характерная высота тетраэдра объемной сетки	Сетка на контрольной поверхности	$(10^6, 0, 0)$	$(0, 10^6, 0)$	$(0, 0, 10^6)$
0.08	80×30	3.130641×10^{-2}	5.129012×10^{-2}	6.449302×10^{-2}
	60×20	3.271232×10^{-2}	5.137639×10^{-2}	6.518897×10^{-2}
	40×15	3.594061×10^{-2}	5.322246×10^{-2}	6.691446×10^{-2}
	26×10	4.662711×10^{-2}	5.826836×10^{-2}	6.994384×10^{-2}
	20×7	6.055558×10^{-2}	7.319112×10^{-2}	7.437310×10^{-2}
0.04	160×60	4.163594×10^{-3}	5.920185×10^{-3}	6.018839×10^{-3}
0.02	320×120	8.235885×10^{-4}	1.330070×10^{-3}	1.444711×10^{-3}

Поскольку основной вклад в ошибку вносит расчет в ближнем поле, численный порядок точности оценивается числом между вторым и третьим, что характерно для EBR-схем на неструктурированных сетках.

Практически важным вопросом является выбор пространственной и временной дискретизаций данных на контрольной поверхности, которые необходимо сохранять в результате расчета для использования при вычислении пульсаций в дальнем поле. Из таблицы 2.6 видно, что на фиксированной тетраэдральной сетке точность вычисления пульсаций в дальнем поле начинает существенно падать, начиная с сетки на контрольной поверхности 26×10 , то есть

с максимальным расстоянием между соседними узлами, примерно равным 0.1. Таким образом, чтобы, оставаясь в рамках предложенного алгоритма, добиться максимальной точности для рассмотренной модельной задачи, нужно выбирать сетку на поверхности с шагом, не превосходящим характерной длины ребра объёмной сетки.

Верификация на линейной задаче при наличии потока

Далее была решена задача при наличии внешнего потока. Так как точное решение для протяженного источника в потоке выглядит довольно сложно, численный расчет в ближнем поле не проводился, и методики дальнего поля была верифицирована при заполнении полей объёмной сетки точным решением для точечного источника в потоке.

Скорость внешнего потока соответствовала числу Маха $M = 0.5$.

Расчет проводился для линеаризованных на однородных фоновых полях плотности и давления уравнений Эйлера. Значения плотности, давления и скорости фонового поля были взяты равными $\bar{\rho} = 1$, $\bar{p} = 1/\gamma$, $\mathbf{M} = \bar{\mathbf{u}} = (M, 0, 0)^T$. Решаемая система уравнений может быть записана в виде

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}(\mathbf{Q}) = f(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{H}, \quad (2.42)$$

где $\mathbf{Q} = (\rho', \bar{\rho}\mathbf{u}' + \bar{\mathbf{u}}\rho', p' / (\gamma - 1) + \rho'\bar{\mathbf{u}}^2)^T$ – вектор неизвестных, поток выражается формулой $\mathcal{F} = (\mathbf{u}'^T, p'\mathbf{I}, \mathbf{u}'^T / (\gamma - 1))^T + \mathbf{Q}\mathbf{u}'^T$, а источник в правой части определяется вектором $\mathbf{H} = (1, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}^2/2 + 1/(\gamma - 1))^T$.

Для системы уравнений (2.42) при нулевых начальных данных существует точное решение:

$$Q(t, \mathbf{r}) = \frac{f(t - \tau(\mathbf{r}))}{4\pi|\mathbf{r}_e|(1 + \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}_e/|\mathbf{r}_e|)}, \quad \mathbf{r}_e = \mathbf{r} - \mathbf{M}\tau(\mathbf{r}, t), \quad \rho' = \partial Q / \partial t, \quad \mathbf{u}' = -\nabla Q,$$

где функция τ задавалась формулой (1.25).

Отметим, что при заполнении данных на контрольной поверхности точным решением нельзя было пренебречь членами порядка $1/r^2$, поскольку сама контрольная поверхность находится в ближнем поле.

Численная ошибка вычисления интеграла в дальнем поле для трех контрольных точек сведена в таблице 2.7. Видно, что реализованная методика предсказывает пульсации со вторым порядком точности как для покоящейся, так и для вращающейся поверхности.

Таблица 2.7 – Численная ошибка интегрирования

Контрольная поверхность	Сетка на контрольной поверхности	Шаг по времени	$(10^6, 0, 0)$	$(0, 10^6, 0)$	$(0, 10^6, 0)$
Покоящаяся	25×60	0.01	1.697191×10^{-3}	4.311671×10^{-3}	6.280719×10^{-3}
	50×120	0.005	4.536516×10^{-4}	1.093175×10^{-3}	1.335793×10^{-3}
	100×240	0.025	1.143521×10^{-4}	2.659413×10^{-4}	3.343456×10^{-4}
	200×480	0.0125	2.891581×10^{-5}	6.624086×10^{-5}	8.161558×10^{-5}
Вращающаяся ($\omega = 1$)	25×60	0.01	3.031751×10^{-3}	2.410954×10^{-2}	7.292789×10^{-3}
	50×120	0.005	4.668952×10^{-4}	5.724022×10^{-3}	1.355584×10^{-3}
	100×240	0.025	1.165306×10^{-4}	1.426320×10^{-3}	3.344567×10^{-4}
	200×480	0.0125	2.904252×10^{-5}	3.510736×10^{-4}	8.162356×10^{-5}

2.4. Выводы ко второй главе

Вторая глава работы посвящена описанию численного алгоритма, разработанного автором для моделирования течения вокруг винта вертолета при использовании рассмотренных в первой главе математических моделей.

Особенностью предлагаемого численного алгоритма является экономная схема повышенной точности, предназначенная для проведения расчетов на гибридных неструктурированных сетках. Повышенная точность схемы достигается благодаря квазиодномерной реконструкции переменных на расширенных шаблонах, ориентированных вдоль ребер неструктурированной сетки. Следует отметить, что данная схема как таковая не является результатом диссертации, однако в данной работе она была впервые применена для моделирования тече-

ния около винта вертолета в областях ближнего поля, в том числе и для моделей в неинерциальной системе координат. Подобного рода схемы не использованы ни в одном из существующих коммерческих программных комплексов.

Отдельное внимание в данной главе уделено описанию методам численного моделирования течений с малыми числами Маха. При моделировании течения около винта вертолета использование единого численного алгоритма, эффективно работающего при различных числах Маха набегающего потока является принципиальным моментом.

Еще одним ключевым элементом разработанного в диссертации численного метода является оригинальный алгоритм реализации метода Фокса Уильямса – Хокинга для оценки акустического излучения в дальнем поле течения. Согласно предложенному в работе подходу, параметризация окружающей винт контрольной поверхности и последующее пространственно-временное интегрирование по ней проводится в фиксированной, связанной с фюзеляжем вертолета, системе отсчета, в то время как моделирование течения происходит в неинерциальной, связанной со вращающимся винтом, системе координат. Такой способ позволяет естественным образом избежать сингулярность в интеграле, связанную с возможным движением окружающей винт поверхности со скоростью, превышающей скорость звука. Следует отметить, что разработанный подход применим только для поверхности осесимметричной формы, что естественным образом реализуется в случае вертолетного винта.

Глава 3

Проблемно-ориентированный программный комплекс

NOISEtte.Rotor для расчета аэродинамических и акустических характеристик винта

3.1. Структура комплекса программ NOISEtte.Rotor

В основе проблемно-ориентированного программного комплекса (ПОПК) NOISEtte.Rotor лежит ядро аэроакустического программного комплекса (ПК) NOISEtte, предназначенного для проведения крупномасштабных суперкомпьютерных расчетов различных газодинамических и аэроакустических задач [105]. Базовый алгоритм ПК основан на численном решении системы уравнений Навье – Стокса для сжимаемого газа на неструктурированных гибридных сетках с использованием схем повышенной точности с определением переменных в узлах, описанных в пп. 2.1. Для интегрирования по времени используются явные и неявные схемы: Рунге-Кутты 4-го порядка и неявная схема 2-го порядка на основе линеаризации по Ньютону, соответственно.

Структура ядра ПОПК NOISEtte.Rotor типична для кодов, реализующих методику численного решения системы уравнений Навье – Стокса с использованием конечно-объемного подхода, в которой можно выделить основной цикл по времени, на каждом шаге которого вычисляются потоки (происходит пространственная аппроксимация), и совершается интегрирование по времени (см. Рис. 3.1).

При этом в начале расчета считывается ряд параметров и настроек расчета, производится инициализация необходимых модулей, считывается расчетная сетка с помеченными граничными гранями элементов, схема коммуникаций (в

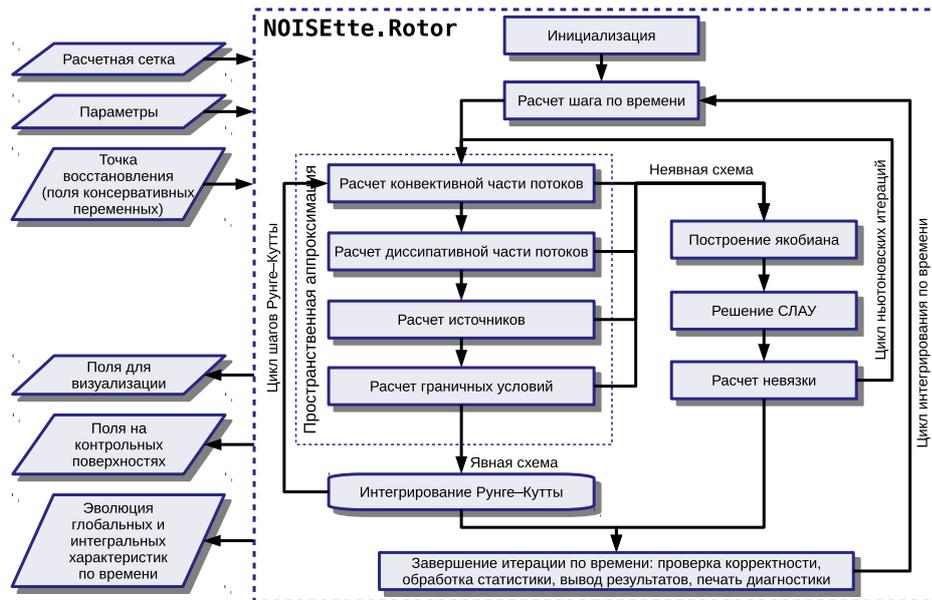


Рисунок 3.1 – Функциональная схема ПОКП NOISEtte.Rotor

случае параллельного режима работы), а также, в случае продолжения счета - данные (поля консервативных переменных) с точки восстановления, поле чего управление передается основному циклу интегрирования по времени.

На алгоритмических схемах 3.1, 3.2 отображены схемы явного и неявного шага по времени, соответственно.

Алгоритм 3.1 Шаг по времени с интегрированием по времени по явной схеме

- 1: Расчет величины шага по времени
- 2: **Цикл пока $i < K$ выполнять** ▷ цикл K -шагового метода Рунге-Кутта
- 3: Расчет пространственной аппроксимации
- 4: Шаг интегрирования Рунге-Кутта
- 5: $i \leftarrow i + 1$
- 6: **Конец цикла**

Алгоритм 3.2 Шаг по времени с интегрированием по времени по неявной схеме

- 1: Расчет величины шага по времени
- 2: **Цикл пока $\varepsilon < tolerance$ выполнять** ▷ цикл итераций метода Ньютона
- 3: Расчет пространственной аппроксимации
- 4: Построение матрицы Якоби
- 5: Решение СЛАУ
- 6: Расчет невязки ε ньютоновского процесса

7: Конец цикла

В обоих алгоритмах присутствует блок пространственной аппроксимации, структура которого представлена на схеме 3.3.

Алгоритм 3.3 Расчет пространственной аппроксимации

- 1: **Начало** ▷ Расчет конвективных потоков
- 2: Расчет потоков в узлах
- 3: Расчет узловых градиентов
- 4: Реконструкция потоков слева и справа от граней контрольных объёмов
- 5: Расчет результирующего потока
- 6: **Конец**
- 7: Расчет диссипативных потоков с учетом вклада модели турбулентности
- 8: Расчет вклада источников в правую часть
- 9: Расчет граничных условий

Помимо расчетной сетки на вход ПК могут подаваться подсетки, для которых с указанной периодичностью записываются указанные переменные или характеристики. При этом подсетка может быть описана как часть исходной сетки, так и в виде произвольной сетки на некотором множестве узлов. Для этого в процессе инициализации строится схема, позволяющая производить быструю интерполяцию переменных с текущей расчетной сетки на подсетку. С использованием этой функциональности имеется, например, возможность записи распределения давления на поверхностях лопастей винта для последующего анализа сил, действующих на лопасть, или запись данных на контрольных поверхностях для последующего моделирования акустики в дальнем поле с использованием методики Фокса Уилльямса – Хокинга (см. далее пп. 3.3).

Также реализована возможность периодического вывода запрошенных глобальных и интегральных переменных, что позволяет проводить анализ эволюции по времени наиболее важных характеристик. В задачах моделирования работы винта вертолета такая функциональность позволяет судить о режиме работы винта посредством мониторинга и анализа эволюции интегральных характеристик винта, таких как величина силы тяги и крутящего момента, в про-

цессе проведения расчета.

Код ПОПК `NOISEtte.Rotor` написан на языке программирования C++ и имеет кроссплатформенную реализацию. Он оптимизирован для проведения расчетов на суперкомпьютерах, имеет двухуровневую MPI+OpenMP параллелизацию: MPI – для межузлового распараллеливания, OpenMP – для параллелизации в пределах одного вычислительного узла с большим количеством вычислительных ядер.

3.2. Программные модули подготовки и преобразования расчетных сеток

Неотъемлемой частью вычислительного эксперимента с использованием конечно-объемных методов является построение расчетной сетки.

В данной работе, как упоминалось выше, в расчетах используется гибридная неструктурированная сетка, которая может содержать следующие трехмерные элементы: тетраэдры, треугольные призмы, четырехугольные пирамиды и гексаэдры. Сетка описывается множеством узлов – точек трехмерного пространства, где каждая точка определяется тремя координатами и топологией, представленной описанием каждого элемента сетки в виде набора узлов соответствующих каждой вершине элемента. По такой структуре можно при необходимости построить все необходимые дополнительные топологические зависимости, такие, например, как наборы соседних элементов для каждого элемента, соответствие ребро-элементы, определяющее для каждого ребра набор элементов, которым оно принадлежит.

Расчетная сетка может быть построена как с использованием специализированных программ из состава коммерческих CFD-пакетов (CFD – Computational fluid dynamics), таких как ANSYS ICEM CFD, STAR-CCM+, Pointwise, так и с использованием свободно-распространяемых программ, таких как Netgen, Gmsh, Salome и др. Как правило входными данными при

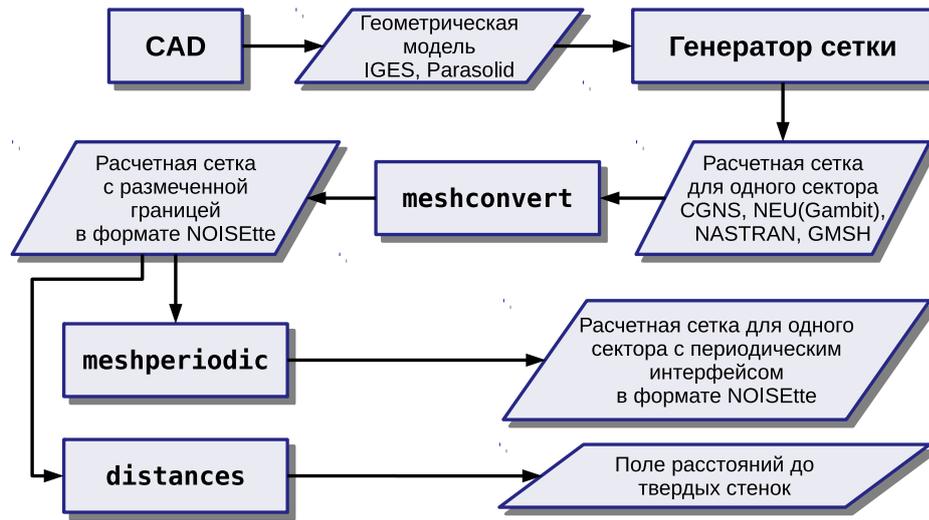


Рисунок 3.2 – Схема подготовки расчетной сетки в ПОКП NOISEtte.Rotor

построению расчетной сетки служит поверхностное или твердотельное описание геометрии конфигурации, обтекание которой необходимо моделировать в расчете.

Обычно процесс построения расчетной сетки (см. схему на Рис. 3.2 и иллюстрации на Рис. 3.3) начинается с импорта геометрии, описывающей поверхности обтекаемых тел (лопастей винта, втулки, фюзеляжа вертолета и т.п.) в построитель сетки (см. Рис. 3.3, а). При необходимости, при условиях описанных в пп. 1.4.2, когда есть возможность проведения моделирования не полной конфигурации, а ее фрагмента, заключенного в секторе, средствами построителя или предварительно в CAD из конфигурации вырезается необходимая часть (см. Рис. 3.3, б). Далее, средствами построителя достраивается до нужных размеров расчетная зона и строится гибридная сетка. При этом при необходимости на твердых поверхностях строятся призматические слои для разрешения течения в пограничном слое, и, также при необходимости, сетка измельчается в зонах интереса. Также в случае расчета в секторе на азимутальных плоскостях расчетного сектора строится конформная (совпадающая при повороте на угол раствора сектора) сетка для последующей постановки периодических граничных условий. Помимо этого поверхностям, для которых в расчете необходимо будет ставить те или иные граничные условия, присваиваются уникальные иден-

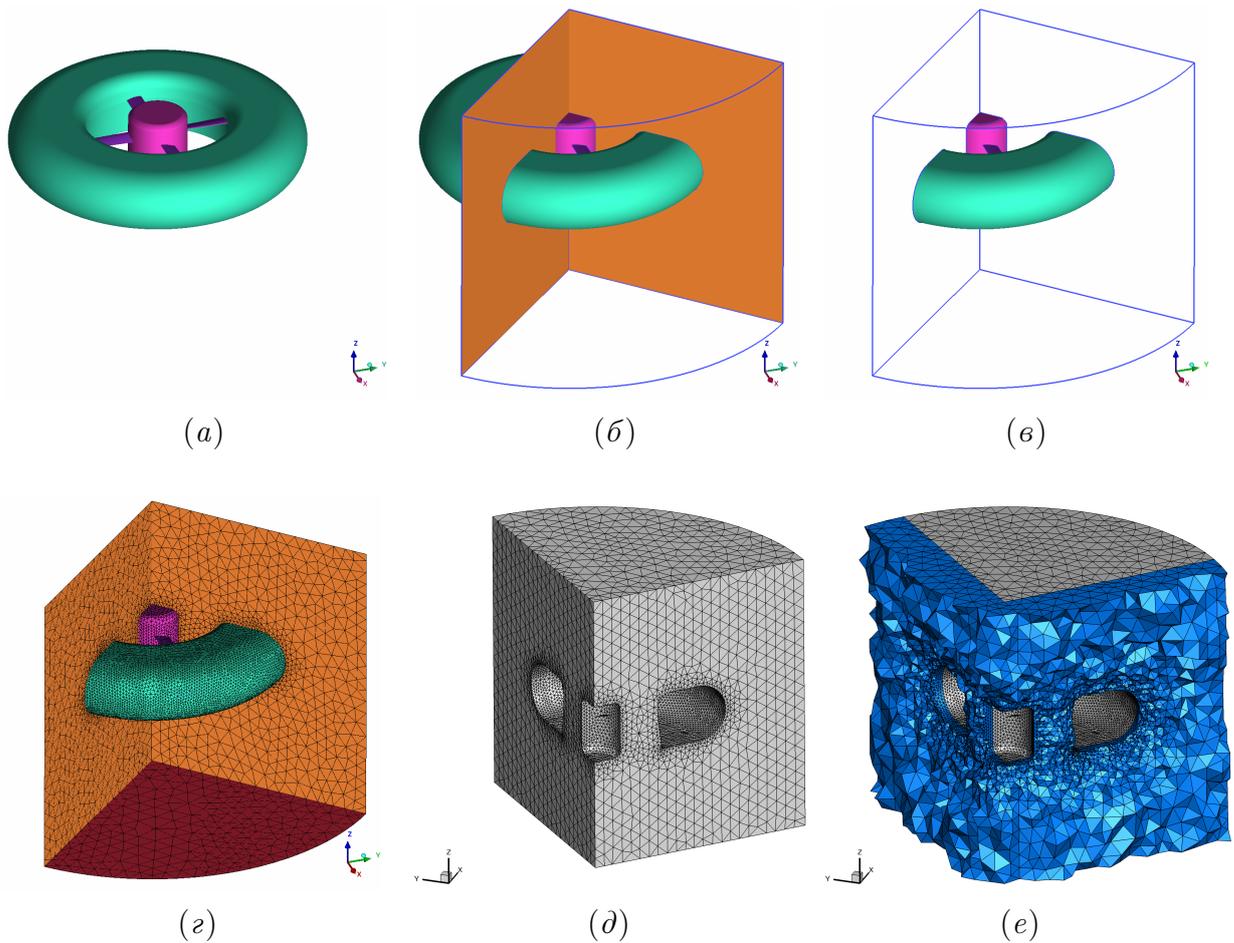


Рисунок 3.3 – Процесс подготовки расчетной сетки в ПОКП NOISEtte.Rotor

тификаторы («метки»).

Из построителя сгенерированная объёмная гибридная сетка импортируется в формат, который поддерживается модулем конвертирования сетки `meshconvert`: это может сетка в форматах CGNS (CGNS – CFD General Notation System), NEU (Gambit neutral mesh format), NASTRAN, ASTRAN или GMSH.

Программный модуль `meshconvert` считывает сетку в виде набора узлов и топологии объёмных элементов и преобразует ее в формат ПК NOISEtte (см. Рис. 3.4). При этом в модуле реализована возможность преобразования координат исходной сетки¹, а также возможность объединения и удаления граничных меток. В результате на выходе программный модуль `meshconvert` генерирует

¹ Под «преобразованием координат» здесь понимается, что любая координата узла может быть заменена на линейную комбинацию исходных координат узла: $x'_i = a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 + d_i$, $i = 1, \dots, 3$

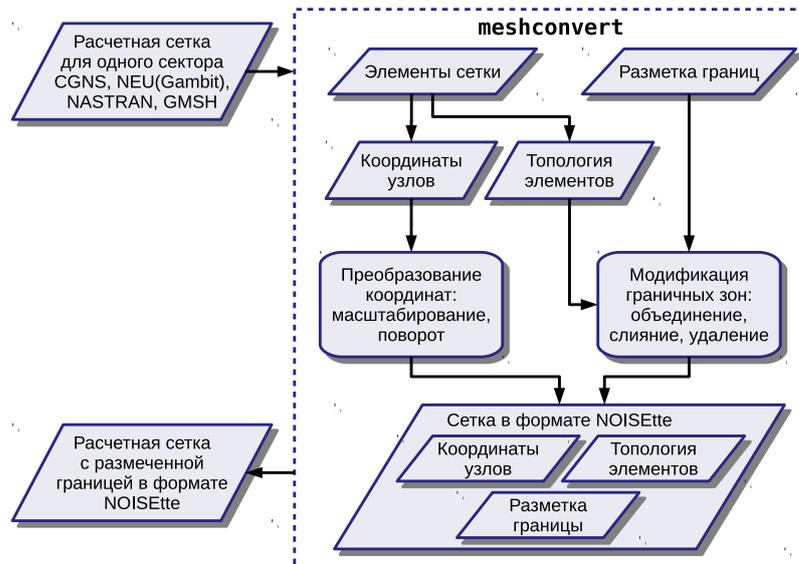


Рисунок 3.4 – Функциональная схема программного модуля `meshconvert`

расчетную сетку в формате ПК NOISEtte с размеченными границами. Помимо функциональности преобразования двух- и трехмерных объемных сеток в модуле `meshconvert` также реализована возможность импорта поверхностной трехмерной сетки, состоящей из треугольников и прямоугольников – эта функциональность используется для формирования контрольных поверхностей для метода FWH (см. пп. 1.6).

Как было упомянуто выше, при задействовании методики, описанной в пп. 1.4.2, на конформных поверхностных сетках азимутальных границах расчетного сектора необходимо ставить периодические граничные условия. Для создания топологического замыкания этих двух границ используется программный модуль `meshperiodic`, который для каждого узла (и его соседей необходимого уровня) проводит сопоставление образ-образ (см. схему на Рис. 3.2) и записывает эту информацию в файл.

В случае задействования в расчете моделей, в которых необходимо учитывать расстояние до твердой поверхности, используется программный модуль `distances`, который для каждого узла сетки вычисляет расстояние до ближайшей твердой поверхности. Вычисленные расстояния также записываются в файл в составе сетки.

В результате работы программных модулей `meshconvert`, `meshperiodic`,

`distances` формируется расчетная сетка, пригодная для проведения расчета.

3.3. Программный модуль расчета акустических характеристик в дальнем поле

Функциональность расчета акустических характеристик в дальнем поле реализована в программном модуле `frunrot`.

В соответствии с пп. 1.6, 2.3 в модуле реализован алгоритм расчета пульсаций давления в дальнем поле на основе множества временных отсчетов полей переменных на контрольной FWH-поверхности.

В программном модуле `frunrot` реализовано два режима работы. В первом режиме модуль по заданным параметрам формирует дискретизованную контрольную поверхность в виде поверхностной структурированной сетки, координаты узлов которой получены в сферической системе координат равномерным разбиением по азимутальному углу и разбиением по меридиональному углу (см. Рис. 2.7). В процессе численного расчета задачи с использованием ПОПК `NOISEtte.Rotor` с некоторой наперед заданной частотой полученное численное решение интерполируется на подсетку контрольной поверхности, и эти данные сохраняются для последующей обработки модулем `frunrot`.

На Рис. 3.5 изображена функциональная схема модуля `frunrot`. В режиме построения сетки контрольной поверхности на вход модулю идут параметры поверхности, описывающие ее размер, форму и параметры ее дискретизации (параметры поверхностной сетки). На выходе формируется подсетка в формате ПК `NOISEtte`, которая используется для сохранения полей на контрольной поверхности в процессе расчета.

Второй режим реализует основную функциональность модуля – расчет акустических характеристик в дальнем поле. Если первый функциональный режим относится к средствам предобработки, и должен быть задействован до начала основного расчета, то второй режим является средством постобработки

– он используется после завершения основного газодинамического расчета. В режиме постобработки на вход модулю подаются

- параметры контрольной поверхности и поверхностная сетка;
- множество временных записей полей на сетке контрольной поверхности для некоторого интервала времени;
- параметры, задающие как контрольные точки, в которых необходимо получить акустический сигнал, так и азимутально распределенные точки, по которым будет строиться диаграмма направленности общего уровня звукового давления (OASPL).



Рисунок 3.5 – Функциональная схема программного модуля **frunrot**

Функциональная схема работы модуля в режиме расчета акустических характеристик включает в себя проверку консистентности всех временных временных записей на контрольной поверхности и инициализацию контрольных точек и точек для расчета OASPL. Далее в основном цикле программы последовательно считываются предварительно упорядоченные временные записи полей на контрольной поверхности. Эти данные после поворота на текущий фазовый угол переинтерполируются на невращающуюся сетку контрольной поверхности, и производится учет вклада текущего отсчета в сигнал каждой кон-

трольной точки путем вычисления FWH-интеграла в соответствии с формулой (2.40).

Алгоритм основного режима программного модуля `frunrot` представлен на схеме 3.4.

Алгоритм 3.4 Алгоритм вычисления акустики в дальнем поле.

- 1: Инициализация контрольных точек и сопутствующих данных
- 2: Считывание временных записей и их упорядочивание по времени
- 3: **Цикл пока $t_i < T$ выполнять** ▷ цикл по временным записям
- 4: Чтение данных для времени t_i
- 5: Поворот и проецирование данных на сетку контрольной поверхности
- 6: **Цикл пока $r_k < K$ выполнять** ▷ цикл по контрольным точкам
- 7: Учет вклада текущего отсчета в сигнал в точке r_k
- 8: **Конец цикла**
- 9: $t_i \leftarrow t_{i+1}$
- 10: **Конец цикла**
- 11: Вычисление OASPL для каждой азимутальной точки
- 12: Сохранение OASPL и сигналов в контрольных точках

Таким образом, в результате постобработки с использованием модуля `frunrot` возможно определение акустических характеристик в дальнем поле, таких как акустический сигнал (пульсации давления) в заданных точках и диаграмма направленности общего уровня звукового давления.

3.4. Программный модуль расчета аэродинамических сил

Функциональность расчета аэродинамических характеристик в дальнем поле реализована в программном модуле `forces`.

Для расчета аэродинамических характеристик обтекаемой конфигурации в соответствии с пп. 1.5 в модуле производится интегрирование по поверхности тела соответствующих физических полей с учетом особенностей расчета этих характеристик во вращающейся системе координат.

Общая функциональная схема модуля `forces` изображена на Рис. 3.6.

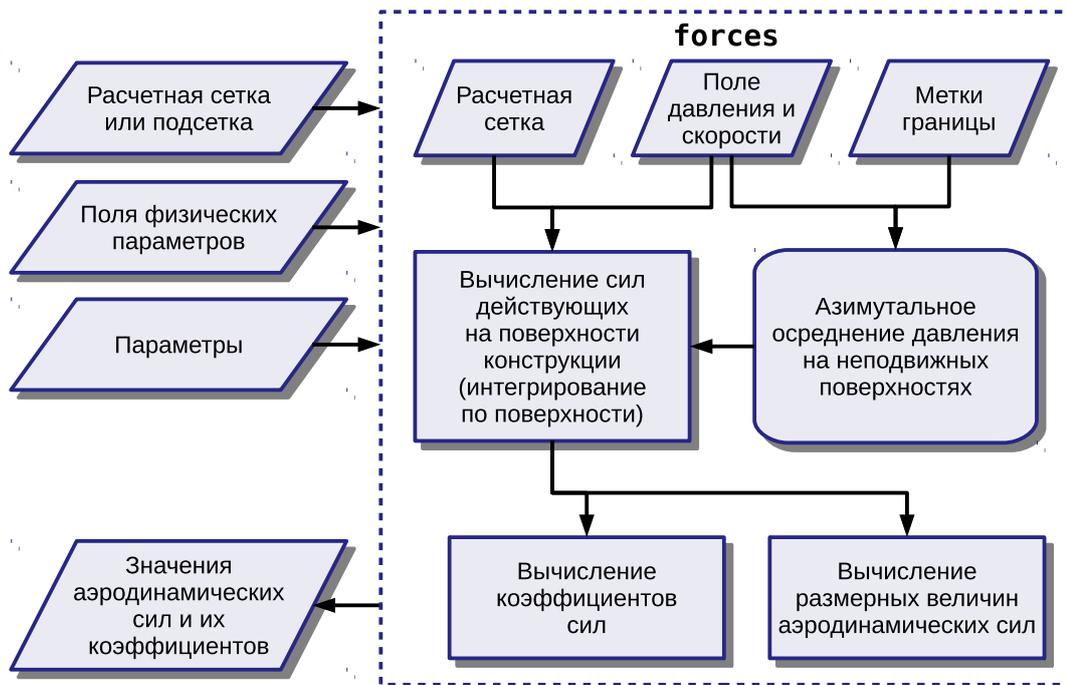


Рисунок 3.6 – Функциональная схема программного модуля **forces**

На вход модулю подаются поле с расчетной сеткой, причем функциональность ПОПК **NOISEtte.Rotor**, утилит обработки сетки и модуль **forces** позволяют вычислять аэродинамические характеристики не по всему расчетному полю, а по подсетке, соответствующей сетке на поверхностях, для которых необходимо вычислить интегральные характеристики. То есть для расчета аэродинамических характеристик винта достаточно сохранять данные на подсетке, соответствующей поверхностям лопастей, что позволяет существенно сократить объём хранимых данных и увеличить скорость их обработки. В параметрах задаются переменные для вычисления размерных величин аэродинамических сил. Также имеется возможность в параметрах задать метки границ (поверхностей), для которых необходимо определять аэродинамические характеристики. Это позволяет отдельно определять силы, действующие на вращающиеся и неподвижные элементы конструкции. Таким образом, например, в конфигурации «винт-в-кольце» можно отдельно вычислять силы, действующие на винт и на кольцо.

Вычисление интегральных величин силы тяги и крутящего момента производится в соответствии формулами (1.21) и (1.22). Интегралы вычисляются пу-

тем обхода всех граней расчетных элементов, помеченных как твердая граница, и последовательного вычисления и суммирования подынтегральных величин.

В результате работы модуля для каждой указанной поверхности выводятся размерные величины аэродинамических сил и их коэффициенты.

3.5. Система автоматического тестирования комплекса программ NOISEtte.Rotor

Разработка ПОПК NOISEtte.Rotor как и ПК NOISEtte ведется с использованием системы контроля версий SVN (SVN – Subversion) [106]. Использование этой системы существенно упрощает совместную разработку объёмного кода, обеспечивая сохранность целостности кода и централизованное хранение полной истории изменений. Однако ее использование не обеспечивает сохранность корректной функциональности кода.

В процессе разработки достаточно объёмных программных продуктов разработчики, меняя код в зоне своей компетенции, могут, не подозревая того, вносить непредусмотренные изменения в функциональность других модулей и всего кода.

Это может приводить к непредусмотренному изменению поведения программы в различных рабочих сценариях. Чтобы этого избежать, применяется регрессионное тестирование — набор тестов и методика тестирования, направленные на проверку работоспособности работающей ранее функциональности программы.

В ходе разработки ПОПК NOISEtte.Rotor автором была разработана система автоматического регрессионного тестирования [59]. Основой системы является набор тестов, проверяющих функциональность того или иного метода, алгоритма или модуля программного комплекса.

Тесты можно условно разделить на два основных класса. Тесты первого типа представляет собой постановку небольшой задачи с численным решением,

полученным с помощью рабочей версии кода ПК. Далее это численное решение считается эталонным. Сценарий теста включает в себя этап решения задачи средствами ПК с последующей проверкой соответствия нового численного решения эталонному. При этом результатом такого теста является как сам факт успешного решения задачи, так сравнение разницы между численным и эталонным решениями в какой-либо норме с наперед заданным достаточно малым значением. Для проведения теста достаточно продолжить расчет с заранее сохраненной точки восстановления и произвести расчет на небольшом интервале времени. Дальнейшее сравнение полученного решения с эталонным, взятым на этот же момент времени, позволит судить о том, произошла ли деградация кода.

Тесты второго типа предназначены для проверки корректной функциональности последовательности вызовов, воспроизводящих типовые сценарии работы ПК и входящих в его состав утилит. Эти тесты позволяют в результате однократного выполнения проверить работу нескольких утилит, входящих в состав ПК. Успешного выполнения теста возможно только при корректной работе всех утилит и модулей, задействованных в сценарии. Примером может служить, например, тест, проверяющий последовательность действий для подготовки сетки к расчету, в котором последовательно вызываются модуль `meshconvert` (см. пп. 3.2) для получения расчетной сетки в формате `NOISEtte`, утилита преобразования сетки в бинарный формат, утилита достраивания периодических граничных условий `meshperiodic` и утилита проверки корректности сетки.

Набор тестов постоянно пополняется в ходе разработки, чтобы покрыть тестами новую функциональность кода и новые имплементированные алгоритмы.

Чтобы автоматизировать процесс тестирования и не утруждать разработчиков требованием проводить массированное тестирование перед внесением каждого изменения в код, была реализована система автоматического тестирования. В процессе разработки кода ПК и выполнения тестов сформировался ряд требований к системе тестирования, среди которых основными можно

назвать следующие:

- набор тестов должен быть связан с версией кода, на которой этот набор отрабатывает корректно;
- разработчику должна быть предоставлена возможность в любой момент времени узнать подробную информацию о результате тестирования текущей версии кода;
- разработчику должна быть предоставлена возможность самому выполнять отдельные тесты с использованием своей версии исполняемых файлов ПК и анализировать результаты их исполнения на платформах Windows и Linux;
- если изменения разработчика привели к деградации кода (то есть не все тесты проходят корректно), то он должен быть извещен об этом автоматически.

В соответствии с этими требованиями была создана система автоматического тестирования.

Для обеспечения кроссплатформенности системы было решено управляющую программу с функциональностью запуска отдельных тестов написать на интерпретируемом языке Python [107], который сочетает простоту, кроссплатформенность и независимость от наличия каких-либо компиляторов.

Требование о соответствии набора тестов текущей версии кода было удовлетворено путем перемещения и хранения набора тестов в том же репозитории, что и исходный код ПК. Таким образом ревизия кода, единственным образом определяющая некоторую версию кода определяет и версию набора тестов.

В основном автоматическом режиме программа извлекает из хранилища SVN текущую версию кода и производит компиляцию и сборку всех необходимых библиотек и исполняемых файлов, входящие в состав ПК, извлекает из хранилища текущий набор тестов, с использованием этих бинарных файлов

выполняет все тесты, обрабатывает результаты и генерирует полный отчет о результатах тестирования и оповещает разработчиков в случае деградации кода. Второй — «ручной» режим — аналогичен первому, но в нем предполагается, что исполняемые файлы и состав тестового набора предоставляются программе пользователем, а оповещения не рассылаются.

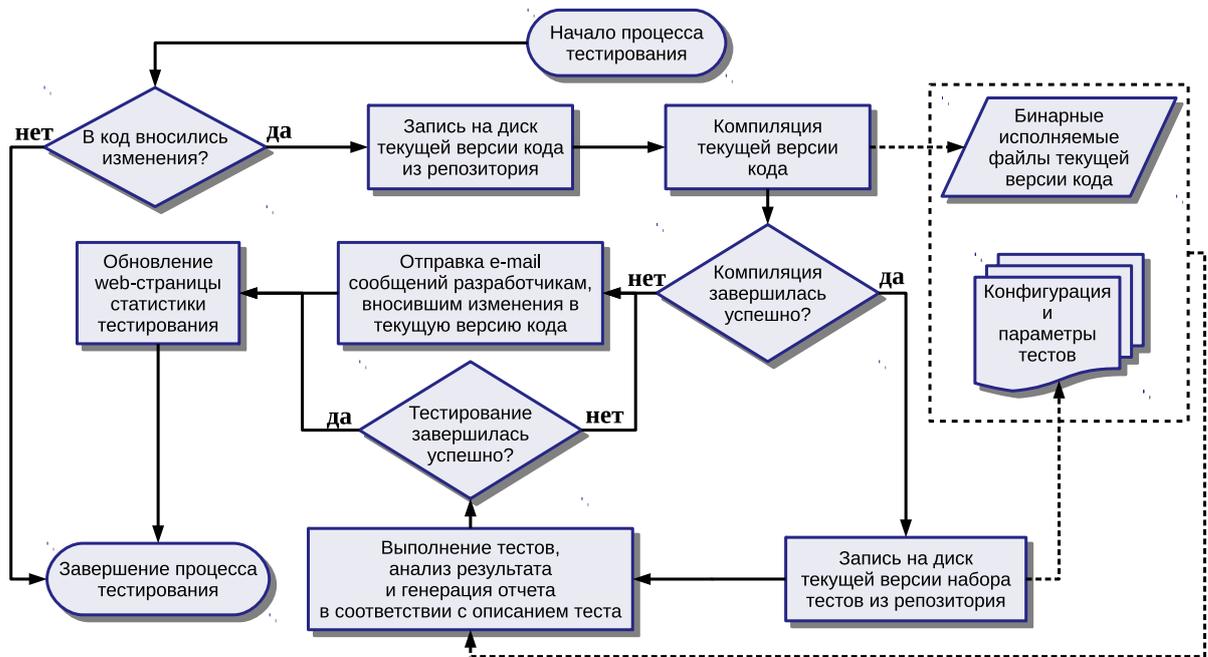


Рисунок 3.7 – Схема управляющей программы системы автоматического тестирования

Схема работы управляющей программы разработанной системы автоматического тестирования изображена на Рис. 3.7 и предусматривает следующую последовательность действий. Вначале производится проверка, были ли в код внесены изменения со времени последнего запуска тестирования, и процесс тестирования продолжается, только в том случае, если код изменялся. Из SVN извлекается текущая версия кода ПК и производится попытка его скомпилировать. Если компиляция завершилась неуспешно, процесс тестирования прерывается и разработчикам, изменявшим код со времени последнего успешного тестирования, отсылаются оповещения по электронной почте. В случае успешной компиляции из SVN извлекается текущий набор тестов и производится последовательное выполнение каждого теста и заполнение отчета о ходе тестирования. По окончании тестирования в случае наличия ошибок в ходе выполнения тестов

разработчикам, изменявшим код со времени последнего успешного тестирования, отправляются оповещения по электронной почте о деградации кода.

При этом выполнение каждого теста производится управляющей программой в соответствии с сценарием теста — файлом, написанном на расширяемом языке разметки XML [108]. Этот формат был выбран за простоту его формального синтаксиса, гибкие возможности формирования документов и наличие в языке Python библиотек для его разбора. В этом сценарии для каждого теста описаны² последовательность вызовов модулей ПК, правила проверки результата каждого такого вызова, условия успешного или неуспешного завершения теста, а также набор данных, которые необходимо сохранять для подробного анализа результата выполнения теста. Набор входных данных и сценария полностью описывает один текст, а вся тестовая последовательность представляет собой набор каталогов в SVN, в каждом каталоге при этом расположены данные теста и его XML-сценарий. При такой организации хранения тестов и процесса тестирования добавление разработчиком нового теста заключается в подготовке сценария и внесении его в общий набор вместе с конфигурационным файлом. При следующем запуске тестирования новый тест будет автоматически включен в тестовый набор.

Система автоматического тестирования была установлена на сервере на платформе Linux с операционной системой Ubuntu 14.04 LTS. На сервере были установлены и настроены SVN-клиент для доступа к SVN-хранилищу, Python 3.4.3 с необходимыми модулями, а также настроен почтовый сервер. С использованием системы cron был настроен ежедневный запуск системы тестирования.

Для более удобного представления результатов тестирования был реализован доступ к результатам тестирования через веб-интерфейс. На сервере, на котором была установлена и работала система тестирования, был настроен веб-сервер Apache 2.4. С использованием средств JavaScript и библиотеки jQuery был разработан веб-интерфейс для отображения результатов работы системы

² Подробное описание синтаксиса сценария теста приведено в [59]

тестирования.

В качестве связующего звена между веб-интерфейсом и результатами тестов была написана вспомогательная программа на языке Python, которая принимает один параметр. В зависимости от значения этого параметра, программа возвращает в формате JSON либо список ревизий, для которых есть результаты тестов, либо результаты тестирования для указанной в параметре версии кода.

Current QA run revision

request QA run

3994

Testcases statistics:
313 passed, 4 failed (317 total)

STARTED AT 2017-12-11 23:00:01
NEW_REVISION PASSED 3994(2017-12-11 18:00:06 +0300 by pavelb)
CODE_CHECKOUT PASSED /qa/run.results/3994/code_checkout.log
QA_CHECKOUT PASSED /qa/run.results/3994/qa_checkout.log
COMPILATION PASSED /qa/run.results/3994/compilation.log

Название теста	Статус	Результаты	Проверка условий	Режим
QA2D caseRZ_04	FAILED	QA_log.txt testcase.stdout	conditions.txt	4xMPI
QA2D caseRZ_04	FAILED	QA_log.txt testcase.stdout	conditions.txt	SP
QA2D caseRZ_03	FAILED	QA_log.txt testcase.stdout	conditions.txt	4xMPI
QA2D caseRZ_03	FAILED	QA_log.txt testcase.stdout	conditions.txt	SP
QA_STIEFEL 3D case012	PASSED	QA_log.txt testcase.stdout	conditions.txt	SP
QA_STIEFEL 3D case024	PASSED	QA_log.txt testcase.stdout	conditions.txt	SP
QA_STIEFEL 3D case024	PASSED	QA_log.txt testcase.stdout	conditions.txt	4xMPI
QA_STIEFEL 3D case010	PASSED	QA_log.txt testcase.stdout	conditions.txt	SP

```
testcase.stdout.4xMPI contains words 'UseQA finished',... - PASSED
testcase.stdout.4xMPI notcontains words 'SIGSEGV' - PASSED
testcase.stdout.4xMPI: ERR_UA < 1e-10 ... (ERR_UA=0.0005736288 > 1e-10) - FAILED
...
```

Рисунок 3.8 – Общий вид web-интерфейса системы тестирования ПК NOISEtte

При загрузке страницы через GET-запрос сначала вызывается вспомогательная программа для заполнения и отображения списка версий кода, для которых доступны результаты тестирования, затем, также посредством GET-запроса к той же программе, извлекаются результаты тестирования для наиболее поздней версии кода. Общий вид интерфейса представлен на Рис. 3.8. Вся страница представляет собой таблицу, в которой при загрузке отображаются результаты тестирования самой поздней из доступных версий кода. При желании пользователь может выбрать и посмотреть результаты тестирования

для более ранних версий кода, используя выпадающий слева-сверху список доступных ревизий кода. В таблице отображаются все тесты, выполненные для выбранной ревизии кода, их названия, статусы завершения, ссылки на файлы результатов и файлы анализа выполнения условий. На Рис. 3.8 показано, что статусы некорректно завершившихся тестов выделены красным цветом, и показано, что по содержанию файла "conditions.txt", доступного по ссылке через веб-интерфейс, можно понять, какие именно условия были нарушены.

Также для удобства разработчиков в интерфейсе существует возможность запроса запуска внеочередного раунда тестирования, что может быть полезным, в случае, если разработчик внес изменения в код и желает немедленно проверить результаты тестирования нового кода.

Представленная система автоматического регрессионного тестирования успешно внедрена и используется в процессе разработки ПК NOISEtte и ПОПК NOISEtte.Rotor.

3.6. Выводы к третьей главе

Описанные в первых двух главах методы и алгоритмы были успешно реализованы в проблемно-ориентированном программном комплексе NOISEtte.Rotor: в ядре имплементирована модель на основе уравнений Навье – Стокса, записанных в неинерциальной вращающейся системе координат (см. пп. 1.3), разработаны модули для построения расчетной сетки, в том числе и для топологического замыкания расчетной области типа «сектор» (см. пп. 1.4.2), разработаны модули расчета аэродинамических характеристик и акустических характеристик в дальнем поле.

Также создана и внедрена в процесс разработки кодов NOISEtte и NOISEtte.Rotor система автоматического регрессионного тестирования.

Третья глава диссертации представляет созданный в результате диссертационной работы проблемно-ориентированный программный комплекс

`NOISEtte.Rotor`, предназначенный для оценки аэродинамических и акустических характеристик винта вертолета на основе подробного численного моделирования создаваемого им воздушного течения. В вычислительном ядре программного комплекса реализованы все описанные в первых двух главах математические модели, численные методы и алгоритмы. Так, раздел 3.1 работы посвящен имплементации моделей на основе уравнений Навье – Стокса, записанных в неинерциальной вращающейся системе координат. Разработанные программные модули для построения расчетной сетки, в том числе и для топологического замыкания расчетной области типа «сектор» представлены в разделе 3.2. Также в главе содержится описание модулей расчета аэродинамических и акустических характеристик винта (разделы 3.4 и 3.3).

Отдельное внимание в данной главе уделяется системе автоматического регрессионного тестирования, которая была создана в ходе работы и внедрена в процесс разработки как основного программного комплекса `NOISEtte`, так и представляемой в диссертации его проблемно-ориентированной версии `NOISEtte.Rotor`. Отметим, что предложенная система регрессионного тестирования может с успехом использоваться и при разработке других программных продуктов, связанных с численным моделированием.

На разработанные в процессе работы над диссертацией программные продукты получены свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ [60–62].

Проблемно-ориентированный программный комплекс `NOISEtte.Rotor` передан для использования в АО "Камов".

Моделирование аэродинамических и акустических характеристик винтов вертолета различных конфигураций

4.1. Модельный двухлопастной винт Caradonna-Tung

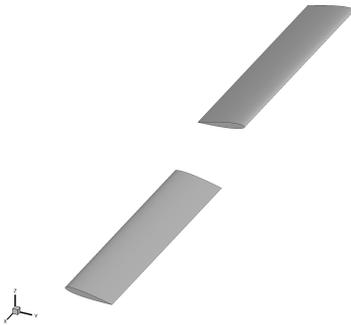
В качестве первой верификационной задачи была выбрана задача о моделировании аэродинамических характеристик модельного двухлопастного винта Caradonna-Tung [109] в режиме осевого обтекания.

Эта задача примечательна тем, что для нее имеются достаточно подробные экспериментальные данные не только по интегральным аэродинамическим характеристикам, но и по распределенным – в виде распределения коэффициента давления вдоль хорды лопасти для различных его сечений. Таким образом численное решение такой задачи позволило бы верифицировать реализованную методику оценки аэродинамических характеристик винта вертолета.

4.1.1. Постановка задачи о вязком обтекании модельного винта Caradonna-Tung

Моделируемая конфигурация представляла собой двухлопастной винт радиуса 1.143 м, с лопастями на основе профиля НАСА-0012 с хордой 0.1905 м без крутки и углом установки 8° . Исследовался режим осевого обтекания винта при скорости вращения 650 об/мин, что соответствует концевой скорости лопасти 77.8 м/с. Общий вид, характерные размеры и параметры моделируемого режима приведены на Рис. 4.1 и в таблице 4.1 соответственно. Значение числа Рейнольдса определялось в расчете по хорде лопасти и ее концевой скорости как $Re = \rho_0 V_{\text{кон}} b / \mu_0$ при значениях $\rho_0 = 1.239 \text{ кг/м}^3$ и $\mu_0 = 1.822 \times 10^{-5} \text{ Н}\cdot\text{с/м}^2$

соответствующих плотности и динамической вязкости воздуха при температуре 16°C и принимало значение $\text{Re} = 1.01 \times 10^6$.



число лопастей N	2
радиус винта R	1.143 м
хорда лопасти b	0.1905 м
профиль лопасти	NACA-0012
угол установки лопастей	8°
частота вращения винта	650 об/мин
линейная скорость конца лопасти $V_{\text{лоп}}$	77.8 м/с
концевое число Маха $M = V_{\text{лоп}}/c_0$	0.228

Рисунок 4.1 и Таблица 4.1 – Общий вид и параметры моделируемой конфигурации винта Caradonna-Tung

В соответствии с пп. 1.4.2, благодаря симметрии винта и осевому режиму обтекания, было возможно моделировать не весь винт, а сектор с одной лопастью с постановкой периодических граничных условий на меридиональных плоскостях сектора. Расчет проводился с использованием RANS-подхода с моделью турбулентности на основе уравнения Спаларта – Аллмараса. Сетка вблизи лопасти строилась следующим образом (см. Рис. 4.2): на поверхности лопасти была построена треугольная сетка с наибольшим измельчением на передней и задней кромках (см. Рис. 4.2, б); от поверхности лопасти внутрь расчетной области строилась призматическая сетка, состоящая из 30 слоев треугольных призм с увеличивающейся в геометрической прогрессии высотой с фактором 1.17 (см. Рис. 4.2, в); далее строилась неструктурированная тетраэдральная сетка, причем высота тетраэдров увеличивалась с удалением от лопасти (см. Рис. 4.2, а). Высота пристеночных ячеек при этом была подобрана таким образом, чтобы сеточное значение числа Рейнольдса y^+ не превышало значения 10, что подразумевало применение в расчете пристеночных функций. В результате была построена гибридная неструктурированная расчетная сетка, содержащая около 7М узлов и 37.5М элементов.

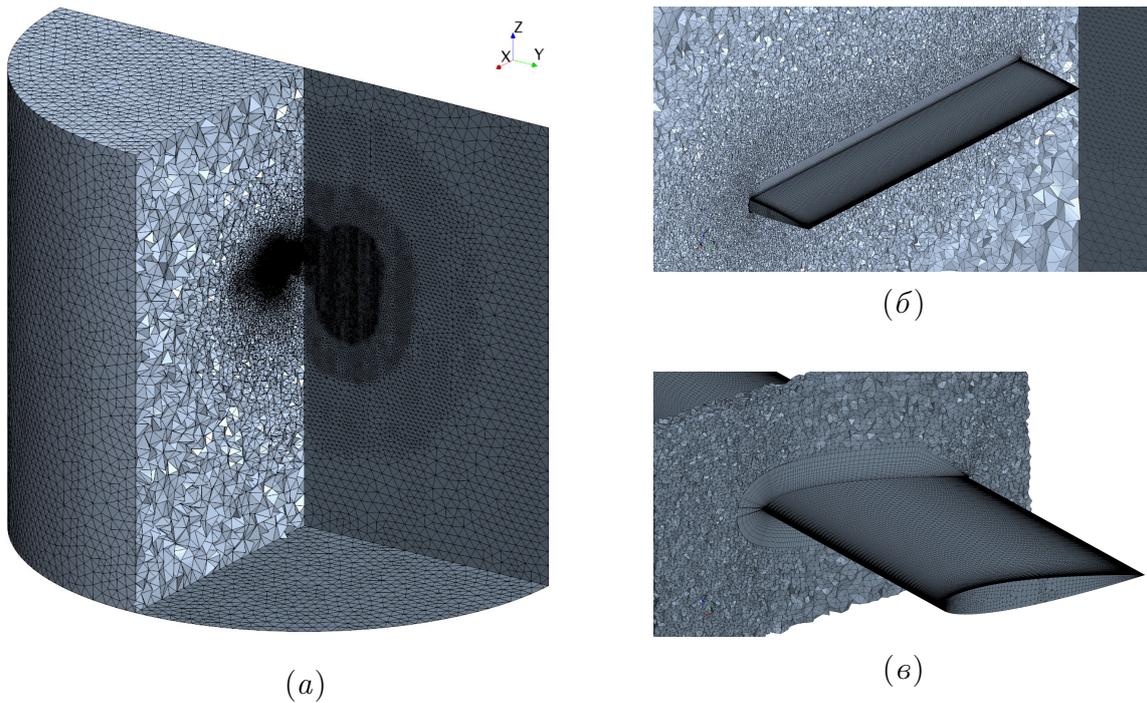


Рисунок 4.2 – Расчетная сетка для задачи Caradonna-Tung: общий вид (а) и сетка вблизи лопасти (б), (в)

4.1.2. Результаты численного моделирования обтекания винта Caradonna-Tung

На графиках 4.3 представлены распределения коэффициента давления в разных сечениях поверхности лопасти винта, полученные в результате расчета и аналогичные распределения, полученные в эксперименте. Видно, что результаты вычислительного эксперимента хорошо согласуются с экспериментальными данными.

На Рис. 4.4 показана общая картина течения. На рисунке 4.4, а представлено поле модуля скорости течения и линии тока – видно, что максимум скорости наблюдается непосредственно под концевой частью лопасти и далее вниз по конусу спуска концевых вихрей. Направление линий тока соответствует физике процесса: над винтом и сбоку от винта наблюдается зона всасывания, скорость течения в которой увеличивается с приближением к диску винта, причем интенсивность течения падает с приближением к оси вращения винта, где вблизи комлевых частей лопастей наблюдаются слабоскоростные турбулентные струк-

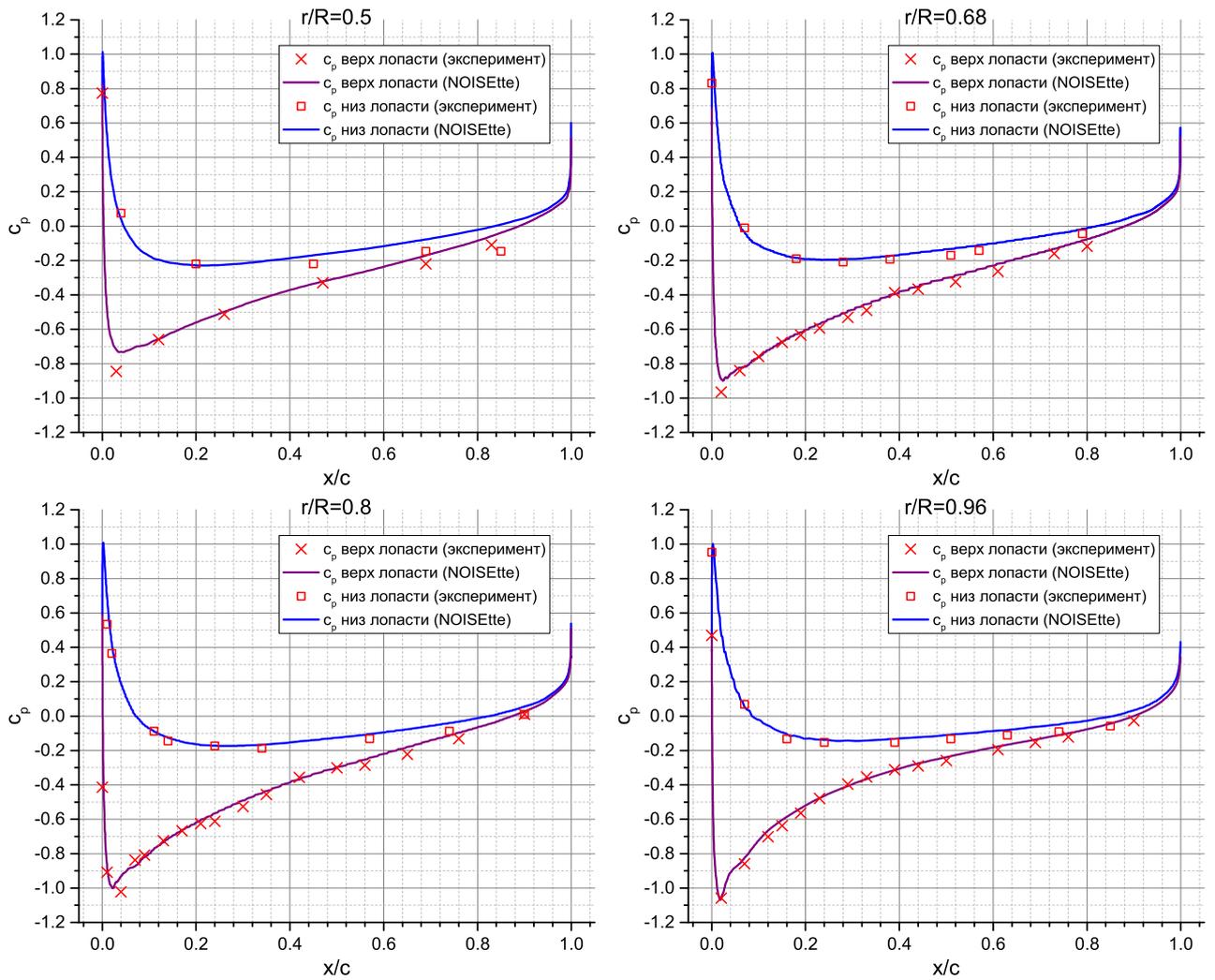


Рисунок 4.3 – Графики распределения коэффициента давления в разных сечениях лопасти

туры. Под винтом скорость потока достигает своего максимума в конусе под концевыми областями лопастей и падает с дальнейшим удалением вниз от диска винта.

На рисунках 4.4(б), (в) представлено поле модуля завихренности в двух сечениях, первое из которых (Рис. 4.4, б) проходит через продольные оси лопастей, а второе – ортогонально первому (Рис. 4.4, в). Видно, что наиболее мощные турбулентные структуры здесь – это концевые вихри, сходящиеся с заливонок лопастей, и закручивающиеся в характерные сужающиеся спирали, сходящиеся вниз по потоку под плоскость вращения винта. По результатам расчета видно, что с удалением от диска винта вниз по потоку интенсивность турбулентных структур падает, а разрешение их ухудшается. Это связано со структу-

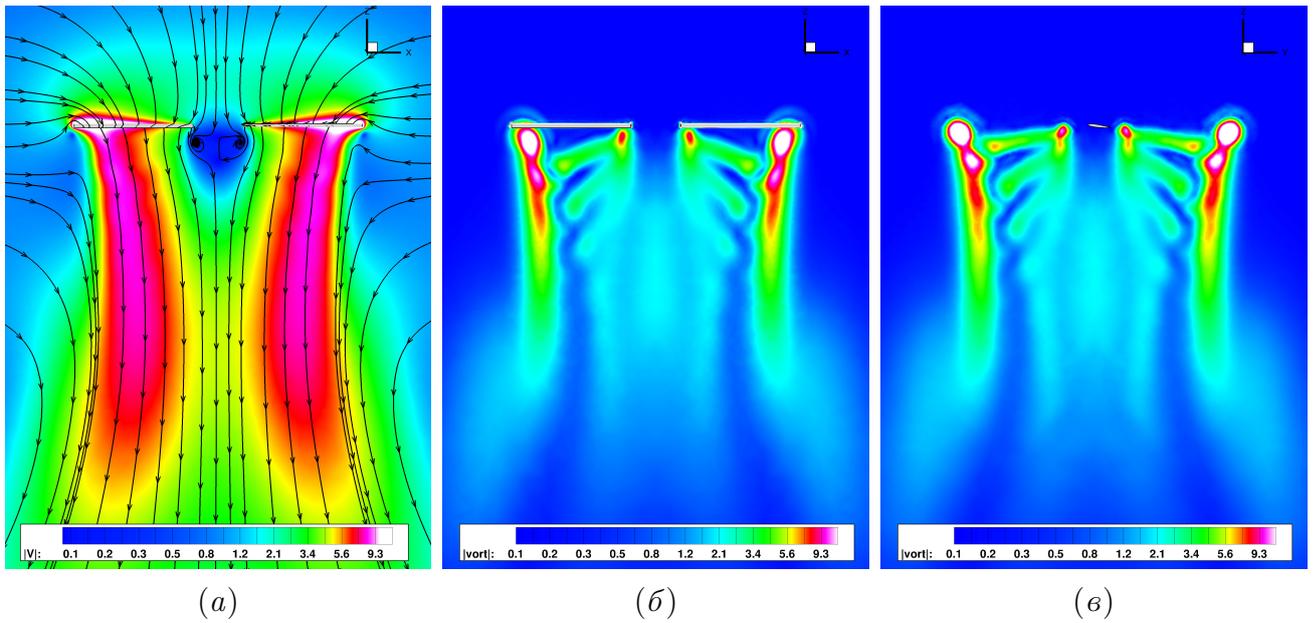


Рисунок 4.4 – Общий вид течения в меридиональных сечениях: поле модуля скорости с линиями тока (а), поле модуля завихренности в двух плоскостях проходящих через ось вращения винта (б), (в)

рой используемой сетки, в которой размер сеточных элементов увеличивается с удалением от винта. Увеличение размера элемента влечет за собой ускорение диссипации и уменьшение разрешения турбулентных структур вниз по потоку.

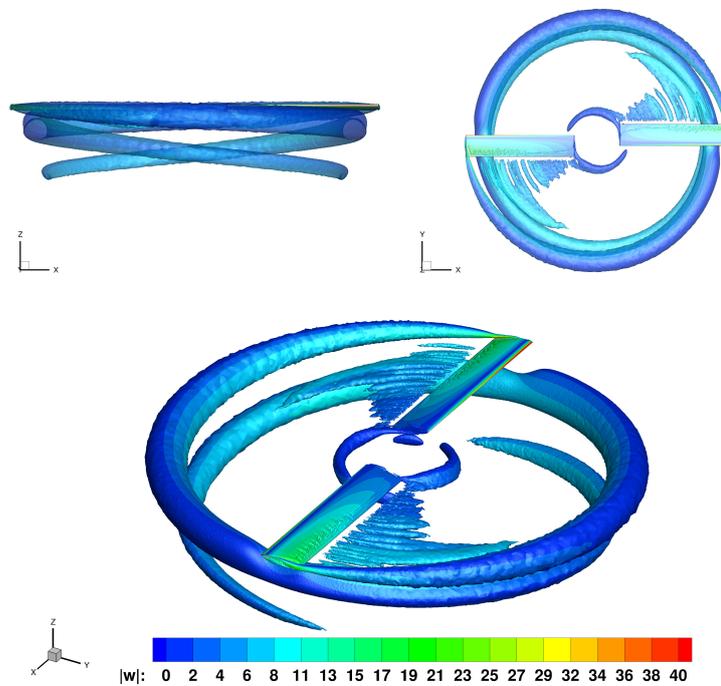


Рисунок 4.5 – Визуализация турбулентных структур при обтекании винта Caradonna-Tung: изоповерхность Q-критерия, раскрашенная по модулю вертикальной составляющей скорости

Визуализация турбулентных структур на основе Q -критерия¹ подтверждает это (см. Рис. 4.5): с удалением от диска винта размер сеточных элементов увеличивается, и, соответственно, ухудшается разрешение турбулентных структур. Несмотря на это, видно, что концевые вихри, сходящиеся с лопастей, разрешаются достаточно хорошо.

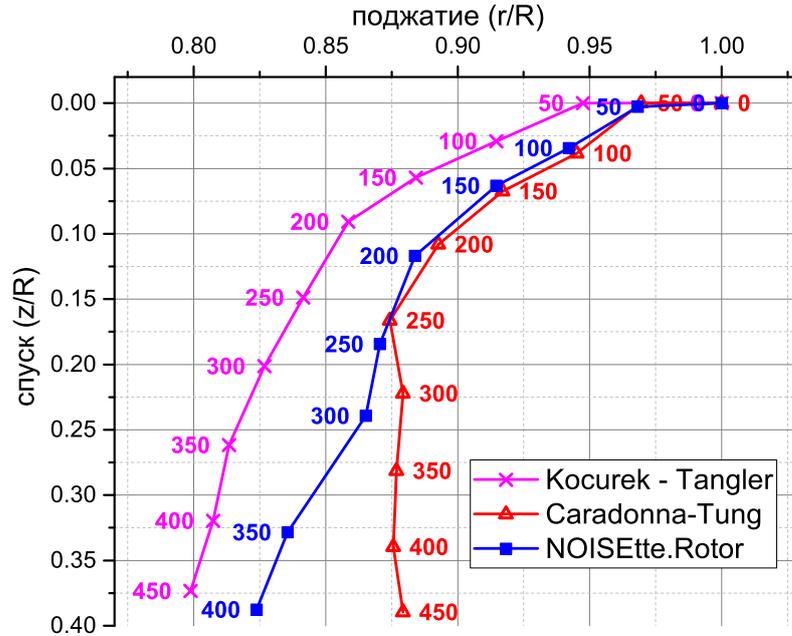


Рисунок 4.6 – Эволюция положения ядра концевых вихрей

Факт корректного моделирования концевых вихрей и влияния разрешения расчетной сетки на него также подтверждается анализом положения ядра концевых вихрей. На Рис. 4.6 приведено сравнение положения ядра концевых вихрей на разные моменты времени (или, что тоже самое – для разных азимутальных углов поворота винта) полученных в расчете, в эксперименте и в соответствии с теоретической оценкой приведенной в работе [18]. По горизонтальной оси отложено относительное смещение вихря к оси вращения винта – длина радиус-вектора положения вихря приведенная к радиусу винта. По вертикальной оси отложено смещение вихря вниз по потоку вдоль оси вращения винта также отнесенное к радиусу винта. Надписи на точках отсчетов соответствуют величине азимутального угла в градусах. Видно, что пока вихрь находится в зоне

¹ Q -критерий является мерой дисбаланса между величиной тензора скоростей деформации \mathbf{S} и величиной тензора завихренности $\mathbf{\Omega}$: $Q = \|\mathbf{\Omega}\| - \|\mathbf{S}\| > 0$, где норма тензора определяется как $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\text{tr} \mathbf{A}^T \mathbf{A}}$ [110].

достаточного сеточного разрешения, его положение хорошо согласуется с экспериментальными данными вплоть до азимутального угла 250° .

Решение задачи о численном моделировании аэродинамических характеристик винта Caradonna-Tung и их сравнение с результатами натурального эксперимента подтвердило корректность реализации методов и описанных в работе алгоритмов.

4.2. Модельный несущий винт КНИТУ-КАИ

Для верификации разработанных и реализованных методик моделирования течения около вращающегося винта вертолета и акустического поля вблизи винта была выбрана задача об осевом обтекании модельного винта вертолета, воспроизводящая эксперимент проведенный на базе кафедры аэрогидродинамики Казанского национального исследовательского технического университета им. А. Н. Туполева (КНИТУ-КАИ).

4.2.1. Постановка задачи о вязком обтекании модельного несущего винта КНИТУ-КАИ

Целью данного вычислительного эксперимента было оценить акустические характеристики модельного несущего четырехлопастного винта (далее – «модельного винта»), испытанного в аэродинамической трубе Т-1К с акустической шумопоглощающей камерой (см. Рис. 4.7) кафедры аэрогидродинамики КНИТУ-КАИ.

Параметры винта и моделируемого режима соответствовали параметрам экспериментальной установки. Геометрия конструкции представляла собой масштабную модель четырехлопастного несущего винта вертолета. Радиус винта составлял 0.8 м, хорда лопасти – 0.065 м. Лопасти винта, прямоугольные в плане, на базе аэродинамического профиля НАСА0012, без крутки. Общий шаг лопастей составлял 8° . Моделировался режим осевого обтекания винта при ско-

рости вращения винта 911 об/мин, что соответствует концевой скорости лопасти 76.34 м/с и концевому числу Маха 0.224. Характерные размеры конфигурации и параметры моделируемого режима приведены в таблице 4.2.



число лопастей N	4
радиус винта R	1.952 м
хорда лопасти b	0.18 м
профиль лопасти	NACA-0012
угол установки лопастей	8°
частота вращения винта	911.25 об/мин
линейная скорость конца лопасти $V_{\text{лоп}}$	76.34 м/с
концевое число Маха $V_{\text{лоп}}/c_0$	0.224

Рисунок 4.7 и Таблица 4.2 – Общий вид установки и параметры модельного винта

В эксперименте с помощью массива микрофонов измерялись акустические параметры в ближнем поле (см. Рис. 4.8). Решетка с шагом 150 мм, состоящая из трех линий по 13 микрофонов была расположена на расстоянии 208 мм от края лопасти винта, таким образом, что верхняя линия микрофонов лежала в плоскости вращения винта, и центральный микрофон («mic06» на Рис. 4.8) находился ближе всех к оси вращения винта и краю лопасти.

Значение числа Рейнольдса определялось в расчете по хорде лопасти и ее концевой скорости как $Re = \rho_0 V_{\text{лоп}} b / \mu_0$ при значениях $\rho_0 = 1.185 \text{ кг/м}^3$ и $\mu_0 = 1.822 \times 10^{-5} \text{ Н}\cdot\text{с/м}^2$ соответствующим плотности и динамической вязкости воздуха при температуре 24°C и принимало значение $Re = 0.322 \times 10^6$.

Как было описано в пп. 1.4.2, в силу симметрии винта и осевого режима обтекания было возможно моделировать не весь винт, а сектор с одной лопастью с постановкой периодических граничных условий на меридиональных плоскостях сектора.

На поверхности лопасти была построена треугольная сетка с измельчением на передней и задней кромках от поверхности лопасти внутрь расчетной области строилась призматическая сетка, состоящая из 30 слоев треугольных призм

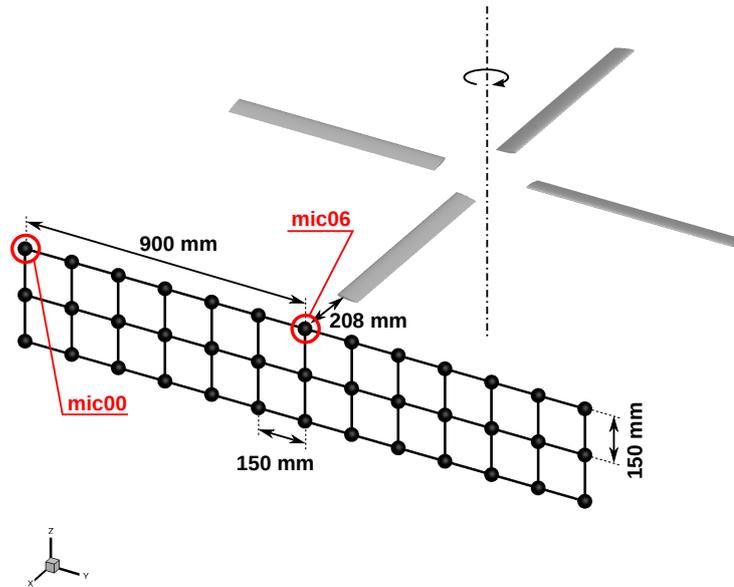


Рисунок 4.8 – Схема расположения массива микрофонов вблизи винта

с увеличивающейся в геометрической прогрессии высотой с фактором 1.12, далее строилась неструктурированная тетраэдральная сетка, причем высота тетраэдров увеличивалась с удалением от лопасти. В результате была построена расчетная сетка, содержащая $3.7M$ узлов и $17M$ элементов.

4.2.2. Результаты численного моделирования обтекания винта модельного несущего винта КНИТУ-КАИ

Был проведен расчет с использованием RANS-подхода с моделью турбулентности на основе уравнения Спаларта – Аллмараса. Основной целью данного численного эксперимента было получение и сравнение с экспериментальными данными пульсаций давления в ближнем поле. На Рис. 4.9 приведены результаты этого сравнения для двух микрофонов: «mic00» и «mic06» (см. Рис. 4.8), где голубая зона определяет величину дисперсии измеренного в эксперименте сигнала. Видно, что результат расчета хорошо согласуется с измерениями проведенными в эксперименте.

Выше представлены результаты расчета проведенного с использованием схемы повышенного порядка EBR5, описанной в параграфе 2.1. Для demonstra-

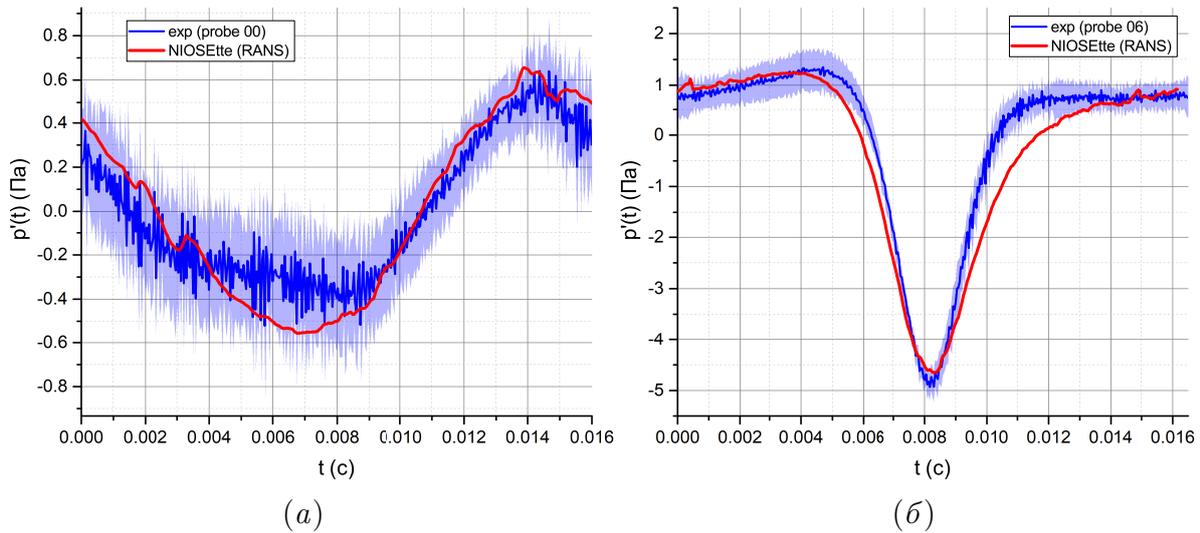


Рисунок 4.9 – Сигналы в микрофонах 00(*a*), 06(*б*)

ции преимущества использования этой схемы на той же расчетной сетке был проведен расчет с использованием схемы первого порядка аппроксимации по пространству без введения реберно-ориентированной реконструкции (EBR).

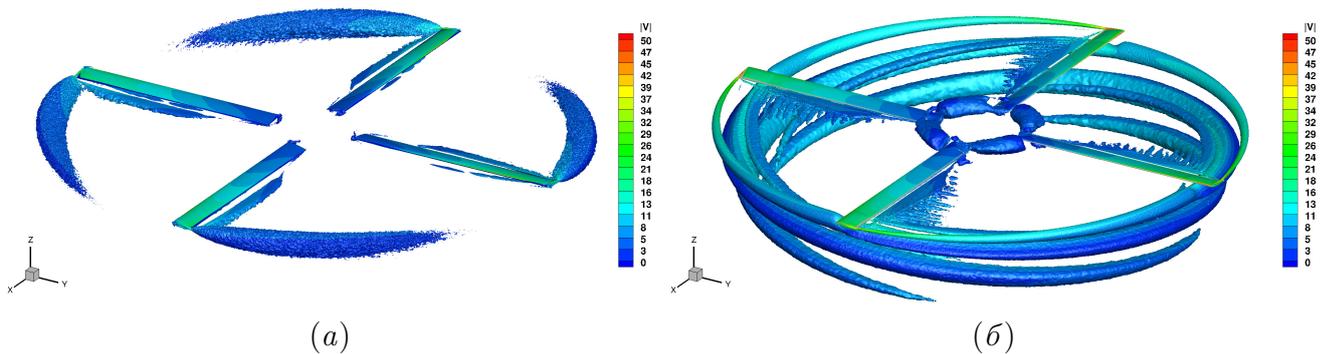


Рисунок 4.10 – Изоповерхность Q -критерия для значения 0.005 для полей полученных в результате использования схемы первого порядка (*a*) и схемы повышенного порядка (*б*)

На Рис. 4.10 приведена визуализация турбулентных структур (изоповерхность Q -критерия) для двух вариантов расчетов: с использованием схемы первого порядка (Рис. 4.10, *a*) и с использованием схемы повышенного порядка (Рис. 4.10, *б*). Очевидно, что результат использования схемы первого порядка непригоден для анализа вихревой структуры течения, и, как следствие, для анализа акустических свойств винта.

4.3. Модельная конфигурации «винт в кольце»

Для верификации разработанных и реализованных методов моделирования вращающегося винта вертолета в присутствии внешних элементов конструкции была выбрана промышленно-ориентированная задача моделирования конфигурации типа «винт в кольце». Подобные компоновки винтов, называемые «Фенестрон» используются в качестве рулевого винта на нескольких моделях вертолетов, в том числе на SA 341/342 Gazelle (Sud Aviation), Kawasaki OH-1, RAH-66 Comanche (Boeing, Sikorsky), KA-60/62 («Камов») (см. Рис. 4.11).



Рисунок 4.11 – Модели вертолетов с рулевым винтом схемы Фенестрон (слева – КА-62, справа – Kawasaki OH-1)

Схема винта типа Фенестрон обладает рядом преимуществ по сравнению с классической схемой рулевого винта, такими как

- повышенная безопасность для людей и для самой конструкции винта ввиду наличия защитного ограждения в виде жесткого кольца
- большая скорость вращения и, как следствие, меньший уровень вибраций в низком диапазоне частот
- повышенная эффективность управления крутящим моментом
- КПД выше, чем у открытого винта
- меньший диаметр винта, что исключает необходимость в изломе хвостовой балки для создания требуемого условиями посадки расстояния между

концами лопастей винта и поверхностью земли и, как следствие, отсутствие необходимости установки промежуточного редуктора.

4.3.1. Постановка задачи о вязком обтекании четырехлопастного ротора в кольце

В данной работе были получены аэродинамические характеристики модельного винта типа Фенестрон, повторяющего конфигурацию винта, испытанного на открытом стенде КБ «Камов» (см. Рис. 4.12)

Геометрия конструкции представляла собой четырехлопастной рулевой винт вертолета в кольце торроидальной формы (см. Рис. 4.13, б). Моделируемая в численном эксперименте геометрия максимально соответствовала экспериментальной установке: в канале был установлен одиночный винт без деталей механизации винта, канал (кольцо), в котором вращается ротор, представлял собой осесимметричное тело вращения. При этом центральное тело имело форму цилиндра со скругленными торцами. Лопасть была построена на основе профиля ЦАГИ СВ-11 с линейной круткой. Параметры винта и кольца соответствовали параметрам экспериментальной установки, указанным в таблице 4.3.



число лопастей N	4
радиус винта R	0.6 м
хорда лопасти b	0.13 м
радиус центрального тела	0.248 м
профиль лопасти	ЦАГИ СВ-11
угол крутки лопасти	$\varphi(\bar{r}) = 40/3(0.7 - \bar{r})$
внутренний радиус канала	0.605 м
внешний радиус канала	1.25 м
частота вращения винта	1166.4 об/мин
линейная скорость конца лопасти $V_{\text{лоп}}$	73.3 м/с
концевое число Маха $V_{\text{лоп}}/c_0$	0.2135

Рисунок 4.12 и Таблица 4.3 – Общий вид стенда и параметры моделируемой конфигурации «винт в кольце»

Как указано, внутренний радиус канала в плоскости вращения винта составляет 0.605 метра, что соответствует зазору 5 мм между торцом лопасти и

внутренней поверхностью канала (см. Рис. 4.13, *a*)

Как было описано в разделе 1.4.2, в силу наличия осевой симметрии в исследуемой конфигурации при осевом обтекании, возможно и целесообразно решать задачу не в полной постановке, а для одного сектора с лопастью, что и было сделано. Расчетная область в численном эксперименте представляла собой сектор с раствором угла $2\pi/N$, $N = 4$, содержащим одну лопасть винта (см. Рис. 4.13, *в*) с постановкой периодических граничных условий на боковых плоскостях сектора в азимутальном направлении.

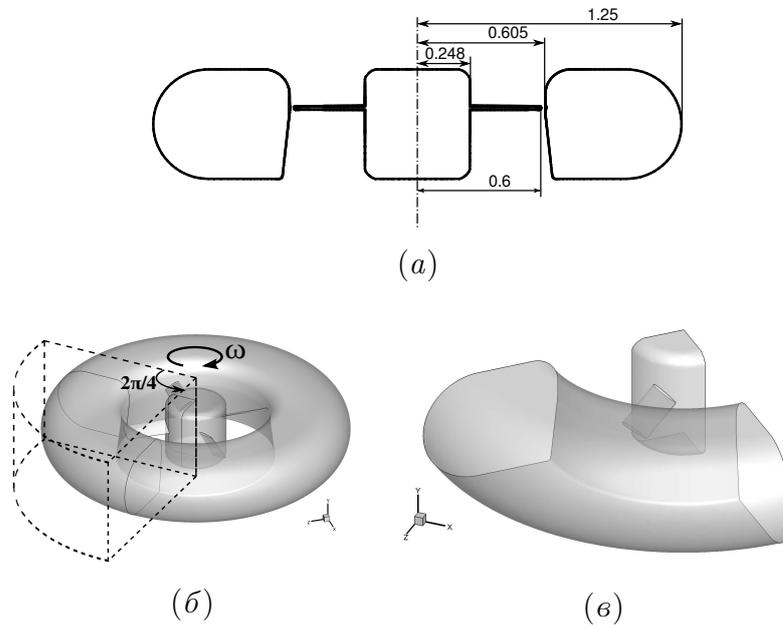


Рисунок 4.13 – Общая конфигурация модели: характерные размеры (*a*), полная компоновка (*б*) и моделируемый сектор с одной лопастью (*в*)

В численном эксперименте моделировалось осевое обтекание винта при вращении винта с частотой 1166.4 об/мин (19.44 Гц), что соответствует угловой скорости $\omega = 122.17$ Рад/с и линейной скорости конца лопасти $V_{\text{лоп}} = \omega R = 73.3$ м/с, при этом угол установки лопасти φ принимал значения 10, 15, 20, 30, 40°. Число Рейнольдса определялось в расчете по хорде лопасти и ее концевой скорости как $Re = \rho_0 V_{\text{лоп}} b / \mu_0$ при значениях $\rho_0 = 1.2041$ кг/м³ и $\mu_0 = 1.827 \times 10^{-5}$ Н·с/м², соответствующих плотности и динамической вязкости воздуха при температуре 20° С и принимало значение $Re = 6.28 \times 10^5$.

В расчетной области была построена неструктурированная тетраэдраль-

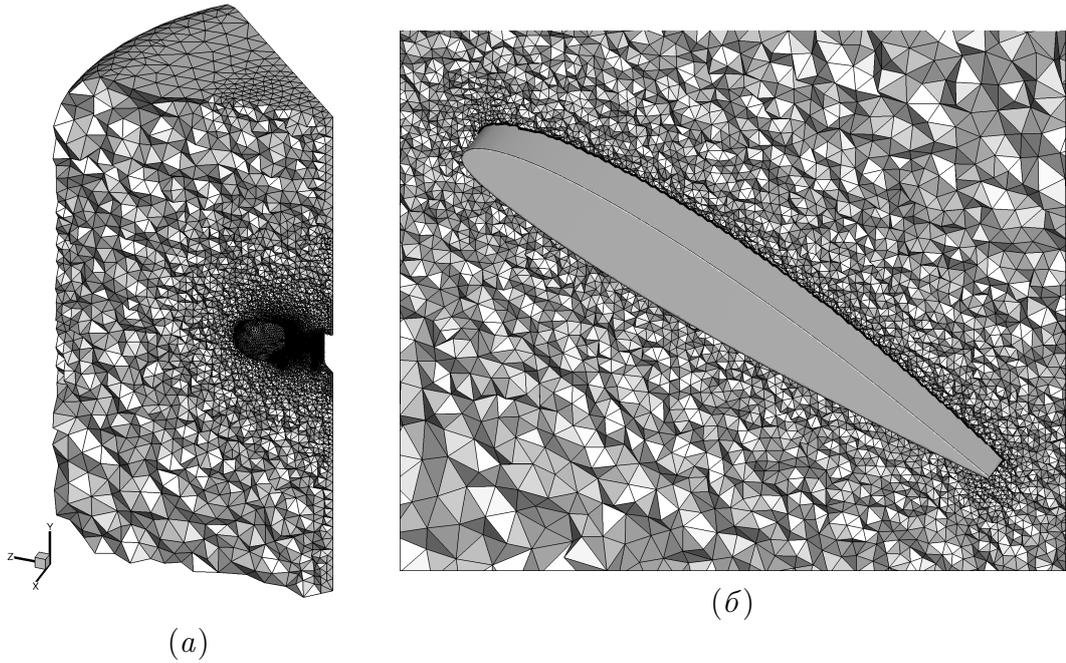


Рисунок 4.14 – Конфигурация расчетной сетки: общий вид (а) и сетка вблизи лопасти винта (б)

ная сетка. Сетка измельчалась в областях, требующих подробного моделирования аэродинамических эффектов. Так, наиболее подробная сетка строилась на передней и хвостовой (по хорде профиля) частях поверхности лопасти и на торце лопасти. На поверхностях лопасти, центрального тела и кольца сетка измельчалась в нормальном к поверхности направлении для разрешения пограничного слоя.

Далее поверхностная и объемная сетка строилась методом продвинутого фронта, таким образом, чтобы размер сеточных элементов плавно изменялся (см. Рис. 4.14, а). Наиболее подробная сетка строилась в области зазора между торцом лопасти и внутренней поверхностью кольца. Также вводилось ограничение сверху на максимальные размеры элементов вблизи лопасти и центрального тела.

На твердых поверхностях ротора, центрального тела и кольца сетка измельчалась для разрешения пограничного слоя в соответствии с числом Рейнольдса так, чтобы на толщину пограничного слоя приходилось не менее 10 ячеек (см. Рис. 4.14, б).

В результате было построено 5 расчетных сеток (для углов установки лопасти 10, 15, 20, 30, 40°) с размерами, приведенными в таблице 4.4.

Таблица 4.4 – Размеры расчетных сеток для разных углов установки для задачи «винт в кольце»

Угол установки α	Число узлов	Число тетраэдров
10°	2 326 941	13 589 791
15°	2 371 707	13 859 009
20°	2 511 582	14 669 900
30°	2 555 652	14 936 402
40°	2 592 469	15 154 418

Расчетные сетки строились средствами ICEM CFD из программного пакета ANSYS [111].

4.3.2. Результаты численного моделирования обтекания четырехлопастного ротора в кольце

Результатом моделирования обтекания четырехлопастного ротора в кольце являлись стационарные² поля физических величин: давления, плотности и скорости как в расчетной зоне, так и непосредственно на поверхности лопасти, что позволило, используя подходы, описанные в пп. 1.5, определить аэродинамические характеристики винта в различных режимах.

Характерная картина течения представлена на Рис. 4.15. На рисунке показано поле модуля скорости в меридиональном сечении при угле установки лопасти 30°. Полное поле течения в данном случае получено продолжением решения, вычисленного в секторе с одной лопастью, с поворотом координат каждого сектора и вектора скоростей в секторе на угол $2\pi k/4$, где значение k изменялось от 0 до 3.

Как видно из Рис. 4.15, в потоке над винтом линии тока направлены вдоль оси вращения внутрь кольца, то есть образуется эффект всасывания окружающего воздуха в канал, образуемый кольцом. При этом величина скорости падает

² В рассматриваемой постановке стационарность по времени эквивалентна отсутствию зависимости решения во вращающейся системе координат от угла вращения ψ

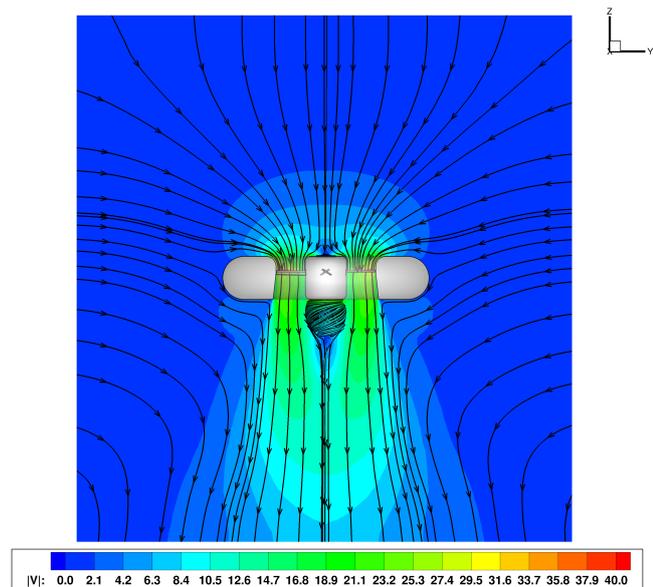


Рисунок 4.15 – Общий вид течения: линии тока (в неподвижной системе координат) и поле модуля скорости в меридиональном сечении при угле установки лопасти 30°

вдоль радиуса кольца и становится пренебрежимо малой на внешней поверхности. За винтом наблюдается существенное ускорение осевой скорости течения на цилиндрической поверхности порядка радиуса кольца и его закручивание сонаправленное с направлением вращения винта. С уменьшением радиуса и увеличением расстояния осевая скорость уменьшается и, как следствие, возрастает величина закрутки течения. Особенно четко можно видеть скручивание линий тока в жгут под центральным телом, где осевая скорость практически нулевая. Это означает образование спиралевидных вихрей в нижней части потока в окрестности оси вращения.

На Рис. 4.16 приведены линии тока и поля модуля абсолютной скорости в меридиональном сечении вдоль оси лопасти винта при разных углах установки лопасти. Видно, что наибольшая скорость потока наблюдается в струе непосредственно под диском винта, при этом скорость потока быстро убывает с удалением от кольца. Также наблюдается увеличение скорости и ширины струи за винтом с увеличением угла установки лопасти, хотя общий характер течения существенно не меняется: в верхней полуплоскости над кольцом формируется зона всасывания, в нижней полуплоскости, непосредственно под диском винта

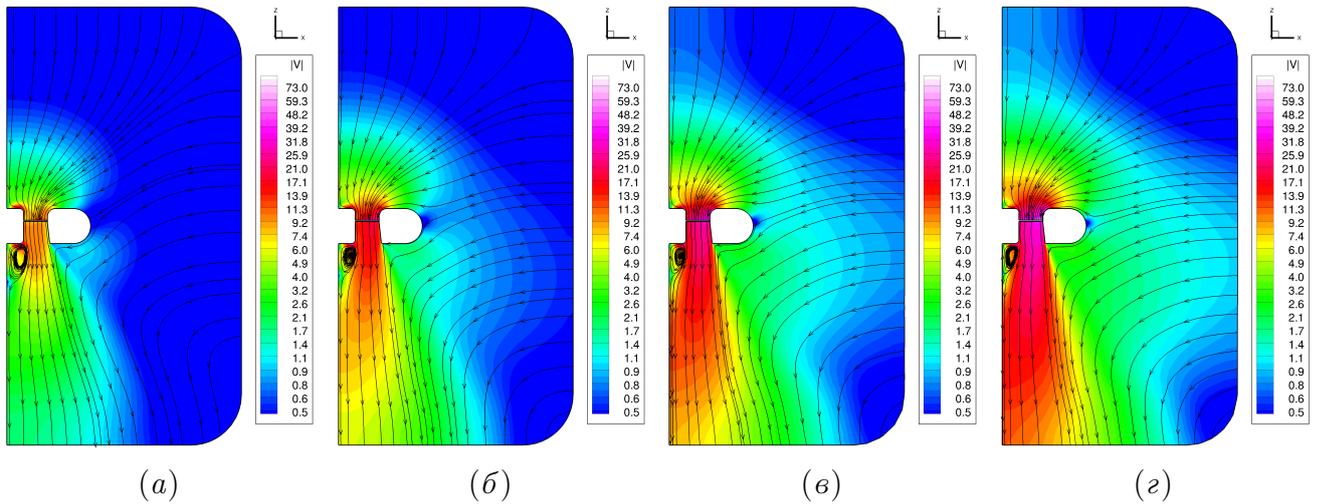


Рисунок 4.16 – Поле модуля абсолютной скорости и линии тока в меридиональном сечении при угле установки лопасти 10° (а), 20° (б), 30° (в), 40° (г)

— зона истечения струи, а в удалении от оси вращения зона спутного потока, вызванного струйным течением.

На основе полученных значений физических параметров в потоке около винта и на поверхностях лопастей в соответствии с подходами, описанными в пп. 1.5 были получены аэродинамические характеристики винта для различных режимов работы винта.

На Рис. 4.17 приведены графики зависимостей силы тяги и крутящего момента винта от угла установки лопасти, а на Рис. 4.18 — графики зависимости коэффициента тяги и крутящего момента винта от угла установки лопасти. Величины тяги и крутящего момента винта и их полученные в расчетах коэффициенты близки к экспериментальным данным.

На Рис. 4.19 приведено сравнение зависимости коэффициента тяги от коэффициента крутящего момента винта (поляры винта), полученной в расчетах с экспериментальными данными. Здесь также наблюдается хорошее согласование результатов численного эксперимента с натурным.

На Рис. 4.20 приведено сравнение графика зависимости коэффициента тяги кольца от коэффициента крутящего момента винта³ (поляры кольца), полу-

³ Поляра кольца приводится как зависимость коэффициента тяги кольца от коэффициента тяги **винта**, так как момент кольца, как покоящегося тела равен 0

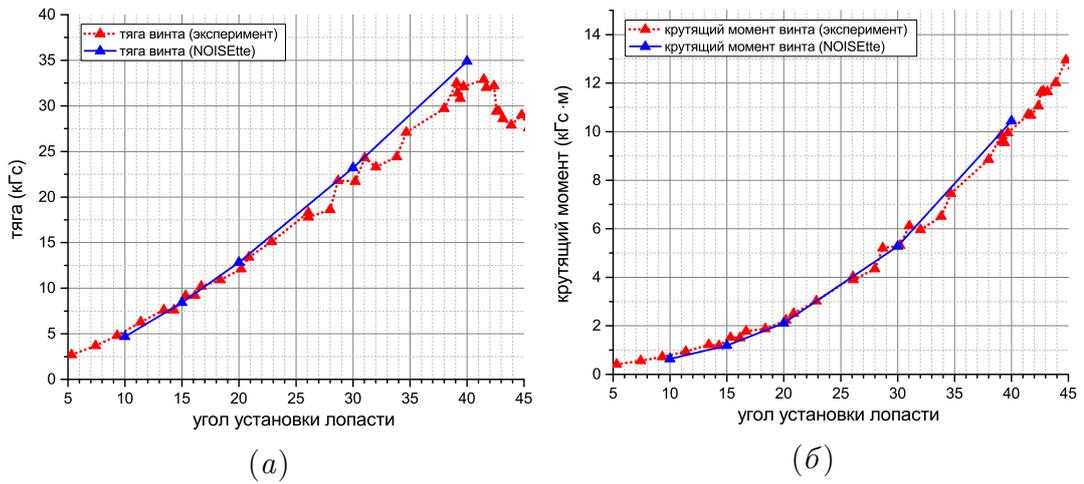


Рисунок 4.17 – Зависимость тяги (а) и крутящего момента (б) винта от угла установки лопасти

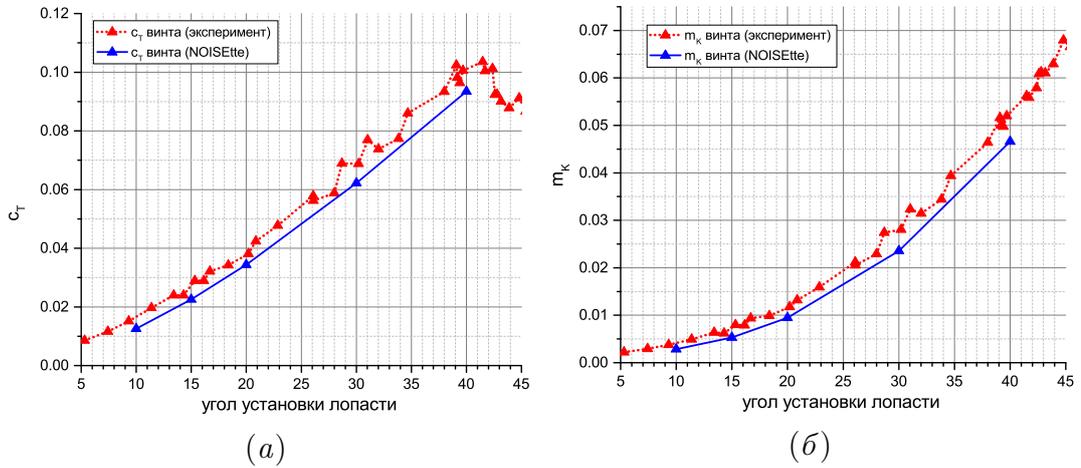


Рисунок 4.18 – Зависимость коэффициентов тяги (а) и крутящего момента (б) винта от угла установки лопасти

ченной в расчетах с экспериментальными данными. При этом на Рис. 4.20 приведены результаты двух серий расчетов: первая (на графике показана синим цветом) — получена в ходе основной серии расчетов с использованием сеток, указанных в таблице 4.4 с числом узлов порядка 2.3 миллиона (см. Рис. 4.20, б), вторая (на графике показана зеленым цветом) — серия из двух расчетов с сеткой измельченной на твердых поверхностях и возле них, содержащая порядка 6.1 миллиона узлов (см. Рис. 4.20, в). При этом высота ячеек в пограничном слое была сохранена. С увеличением разрешения сетки вблизи кольца интегральные аэродинамические характеристики кольца стали существенно ближе к эксперименту, в то время как измельчение сетки в области лопасти не повлияло на

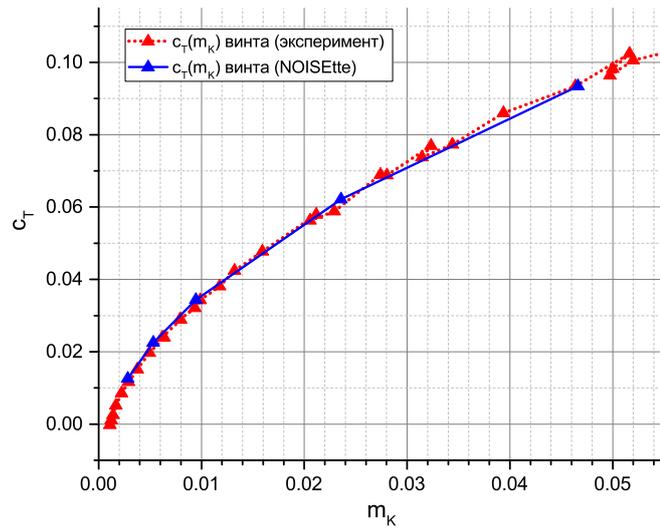


Рисунок 4.19 – Поляра винта (зависимость коэффициента тяги от коэффициента крутящего момента)

полученные в результате расчета аэродинамические характеристики винта.

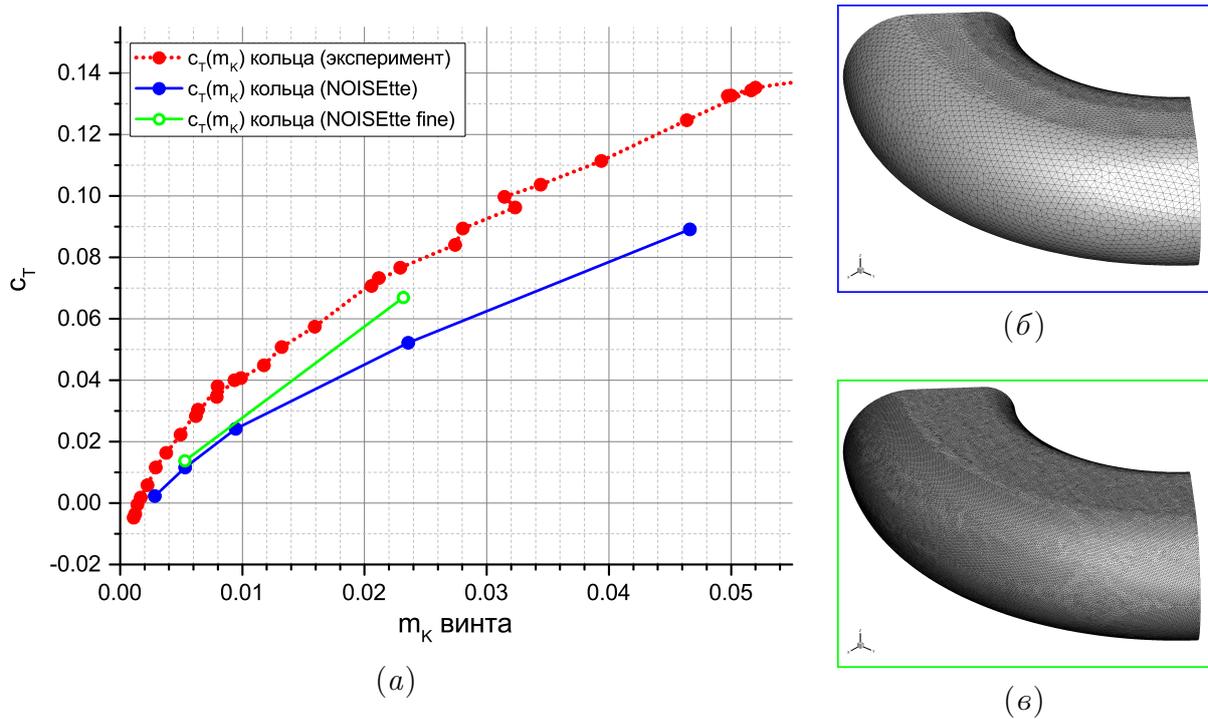


Рисунок 4.20 – Поляра кольца (а) и характерный вид поверхностной сетки на «кольце» для двух серий расчетов (б), (в)

4.3.3. Результаты численного моделирования акустических характеристик четырехлопастного ротора в кольце

Акустические характеристики четырехлопастного ротора в кольце в дальнем поле исследовались с использованием FWH-методтики описанной в пп. 1.6.

Для анализа результатов были выбраны три вида контрольных поверхностей, заданных в виде тел вращения с осью, совпадающей с осью вращения винта (см. Рис. 4.21, *а*): поверхность «1», охватывающая область непосредственно около кольца с винтом и зону индуцированного винтом течения, выдуваемого из кольца; поверхность «2», включающая расширенную зону всасывания и поверхность «3» – сферу, охватывающую зоны как над, так и под кольцом. При этом в диаграммах направленности общего уровня звукового давления азимутальный угол отсчитывался согласно схеме 4.21, *б*: нулевое значение соответствовало направлению «вниз» вдоль направления индуцированного течения, а угол 90° соответствовал плоскости вращения винта.

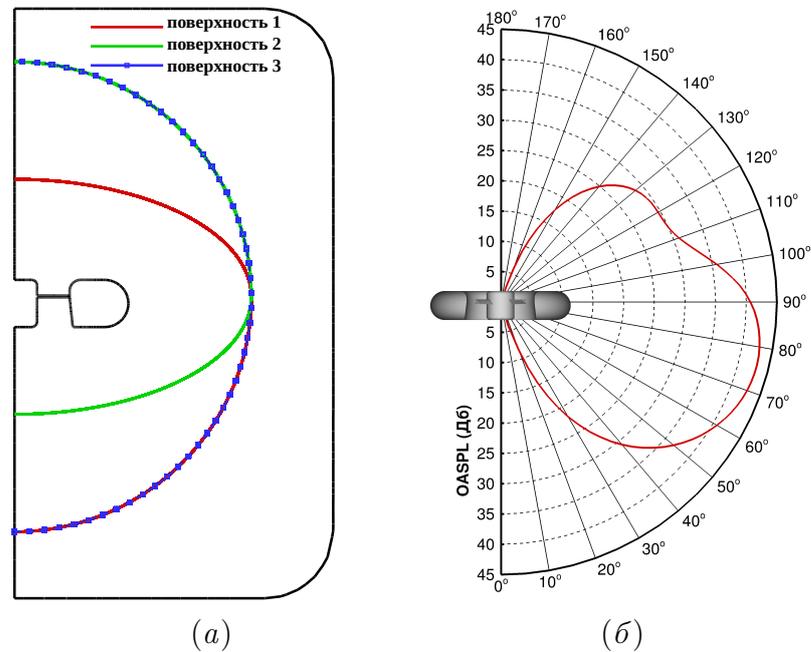


Рисунок 4.21 – Вид контрольных поверхностей (*а*) и схема отсчета азимутального угла (*б*)

На Рис. 4.22 приводятся диаграммы направленности общего уровня звукового давления на расстоянии $R = 150$ м в полярной системе координат в плоскости диаграммы направленности для разных контрольных поверхностей. Плоскость диаграммы направленности перпендикулярна плоскости вращения винта, причем в силу симметрии сечения выбор плоскости не зависит от полярного угла ψ . Угловая координата задается азимутальным углом $\beta = \theta + \pi/2$ (см. Рис. 4.21, *б*). По радиальной оси отложена спектральная мощность пульсаций

давления.

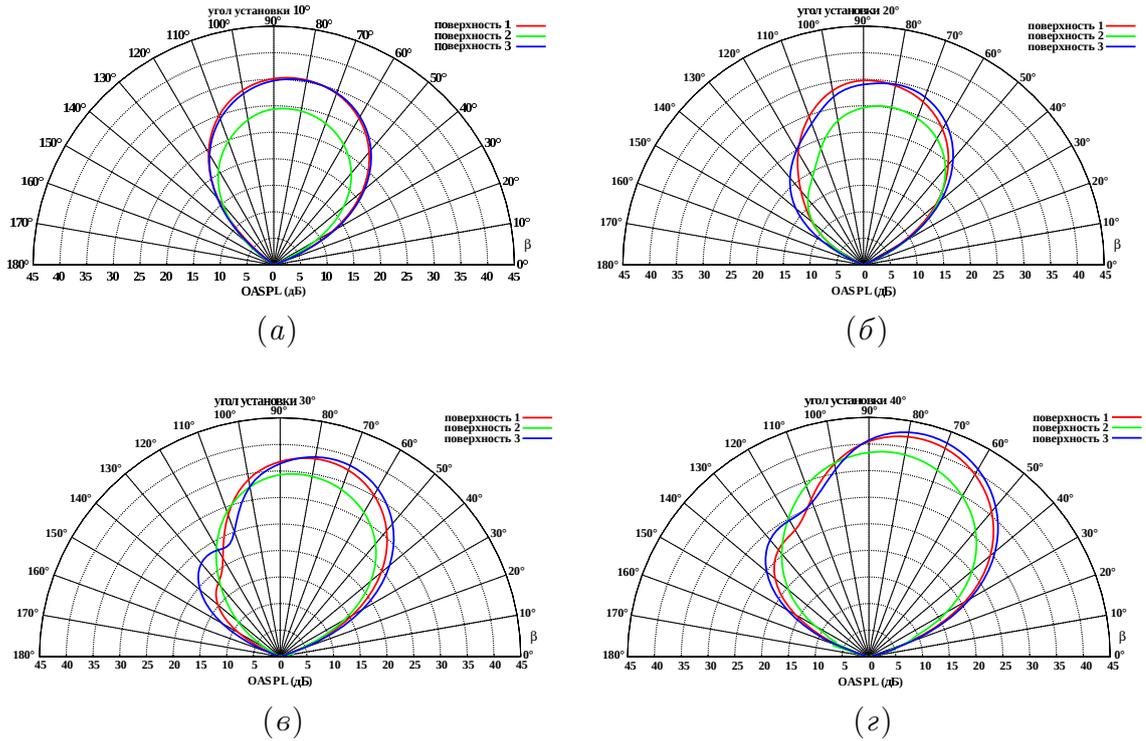


Рисунок 4.22 – Диаграммы направленности общего уровня звукового давления при разных углах установки лопасти для разных контрольных поверхностей 10° (а), 20° (б), 30° (в), 40° (г)

Общий анализ приведенных на Рис. 4.22 диаграмм направленности показывает, что максимальный уровень шума, производимого вращающимся винтом в кольце, наблюдается за кольцом в плоскости вращения винта и поблизости от нее. При этом наиболее слабый звук детектируется на оси вращения винта. Это говорит о том, что данная конструкция обладает наименьшей акустической заметностью для наблюдателей, находящихся непосредственно под винтом или над ним. Наоборот, для наблюдателей сбоку от винта в кольце интенсивность шума максимальна.

Также можно видеть, что большая контрольная поверхность (поверхность «3») позволяет более адекватно описать акустическое поле, генерируемое ротором: по сравнению с результатами, полученными с использованием поверхностей «1» и «2», пик мощности акустического излучения по азимутальному углу приходится на область струи, формируемой ротором ($\beta \approx 75^\circ$), и существенно увеличивается при использовании контрольной поверхности «3» (см. Рис. 4.22).

Заметим, что с увеличением угла установки лопасти растет общая мощность звукового излучения, а его пик смещается в область струйного течения за ротором. Также примечательно, что согласно результатам проведенных численных экспериментов, при увеличении скорости вращения винта общая мощность звукового излучения так же увеличивается, однако заметного смещения пика мощности в область струи не наблюдается (см. Рис. 4.22).

4.4. Модельный несущий винт КБ «Камов»

Для верификации разработанных и реализованных методик моделирования вращающегося винта вертолета с лопастями сложной формы была выбрана промышленно-ориентированная задача оценки характеристик модельного винта КБ «Камов».

4.4.1. Постановка задачи о вязком обтекании модельного несущего винта КБ «Камов»

Целью данного вычислительного эксперимента было оценить аэродинамические и акустические характеристики модельного четырехлопастного несущего винта (далее – «модельного винта»), испытанного на открытом стенде КБ «Камов» (см. Рис. 4.23).

Параметры винта и моделируемого режима соответствовали параметрам экспериментальной установки. Геометрия конструкции представляла собой четырехлопастной несущий винт вертолета с лопастями сложной формы. Радиус винта составлял 1.952 м, хорда лопасти – 0.18 м. Лопастей винта, прямоугольные в плане, были скомпонованы из 5 несимметричных профилей ЦАГИ со стреловидными законцовками. При этом лопасть и законцовка имели кусочно-линейную кривую -7.5° и -2.5° соответственно (см. Рис. 4.24). Общий шаг лопастей составлял 8° . Моделировался режим осевого обтекания винта при скорости вращения винта 584.5 об/мин, что соответствует концевой скорости лопасти 119.5

м/с и концевому числу Маха 0.35. Характерные размеры конфигурации и параметры моделируемого режима приведены в таблице 4.5.



число лопастей N	4
радиус винта R	1.952 м
хорда лопасти b	0.18 м
форма лопасти	5 несимметричных профилей ЦАГИ, стреловидная законцовка
крутка лопасти	линейная, $\Delta\phi_{\text{лоп}} = -7.5^\circ$
крутка законцовки	линейная, $\Delta\phi_z = -2.5^\circ$
угол установки лопастей	8°
частота вращения винта	584.5 об/мин
линейная скорость конца лопасти $V_{\text{лоп}}$	119.5 м/с
концевое число Маха $V_{\text{лоп}}/c_0$	0.35

Рисунок 4.23 и Таблица 4.5 – Общий вид стенда и параметры модельного винта



Рисунок 4.24 – Лопасть модельного винта

Значение числа Рейнольдса определялось в расчете по хорде лопасти и ее концевой скорости как $Re = \rho_0 V_{\text{лоп}} b / \mu_0$ при значениях $\rho_0 = 1.193 \text{ кг/м}^3$ и $\mu_0 = 1.822 \times 10^{-5} \text{ Н}\cdot\text{с/м}^2$ соответствующим плотности и динамической вязкости воздуха при температуре 17°C и принимало значение $Re = 1.4 \times 10^6$.

Как было описано в пп. 1.4.2, в силу симметрии винта и осевого режима обтекания было возможно моделировать не весь винт, а сектор с одной лопастью с постановкой периодических граничных условий на меридиональных плоскостях сектора.

Сетка вблизи лопасти строилась следующим образом (см. Рис. 4.25, 4.26): на поверхности лопасти была построена треугольная сетка с измельчением на передней и задней кромках (см. Рис. 4.25, б); от поверхности лопасти внутрь расчетной области строилась призматическая сетка, состоящая из 40 слоев треугольных призм с увеличивающейся в геометрической прогрессии высотой с

фактором 1.12 (см. Рис. 4.25, в); далее строилась неструктурированная тетраэдральная сетка, причем высота тетраэдров увеличивалась с удалением от лопасти (см. Рис. 4.25, а).

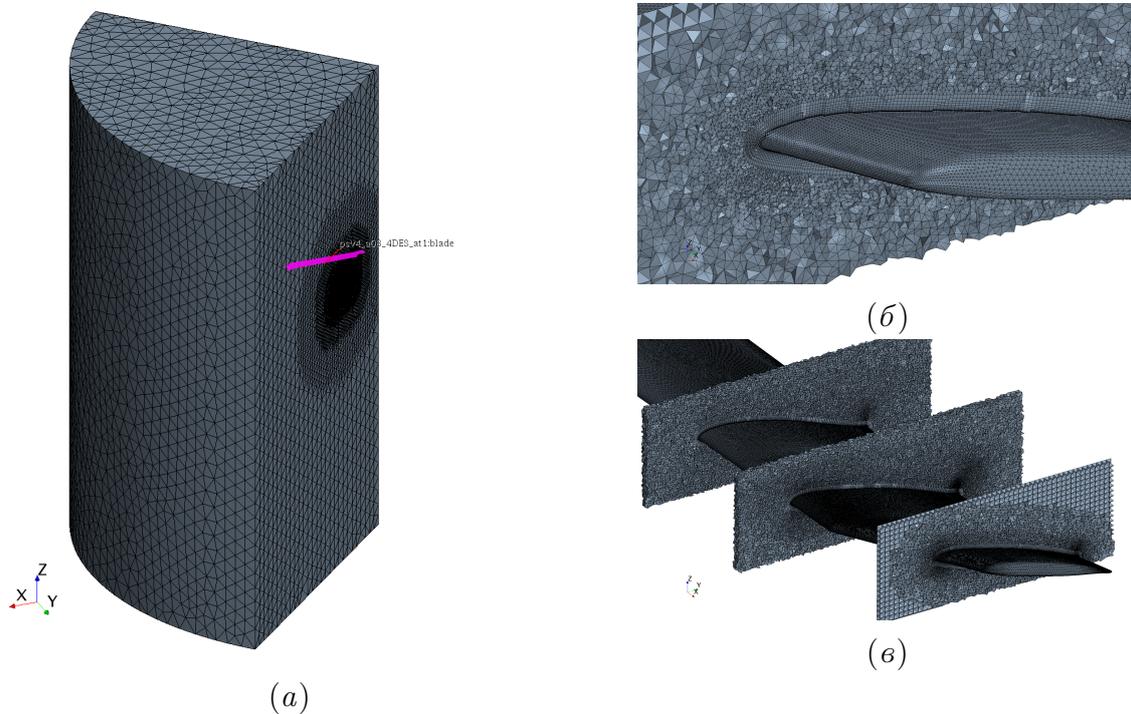


Рисунок 4.25 – Расчетная сетка для задачи о моделировании обтекания модельного винта: общий вид (а) и сетка вблизи лопасти (б), (в)

При этом для улучшения разрешения турбулентных структур в следе за лопастями и вихрей, сходящих с законцовки в концентрических зонах в плоскости вращения винта и под концевой частью лопасти, максимальный размер элементов был ограничен достаточно малым числом (см. Рис. 4.26). Высота пристеночных ячеек при этом была подобрана таким образом, чтобы сеточное значение числа Рейнольдса y^+ не превышало значения 10 для последующего применения в расчете пристеночных функций вблизи твердых поверхностей. В результате была построена гибридная неструктурированная расчетная сетка для сектора с одной лопастью, содержащая порядка 19М узлов и 99М элементов. Для корректной оценки акустических характеристик винта, как было указано в пп. 1.8.2, даже в случае осевого обтекания необходимо моделировать полную конфигурацию. Для этого была построена сетка для четырехлопастной конфигурации путем объединения четырех секторов, предварительно развернутых на

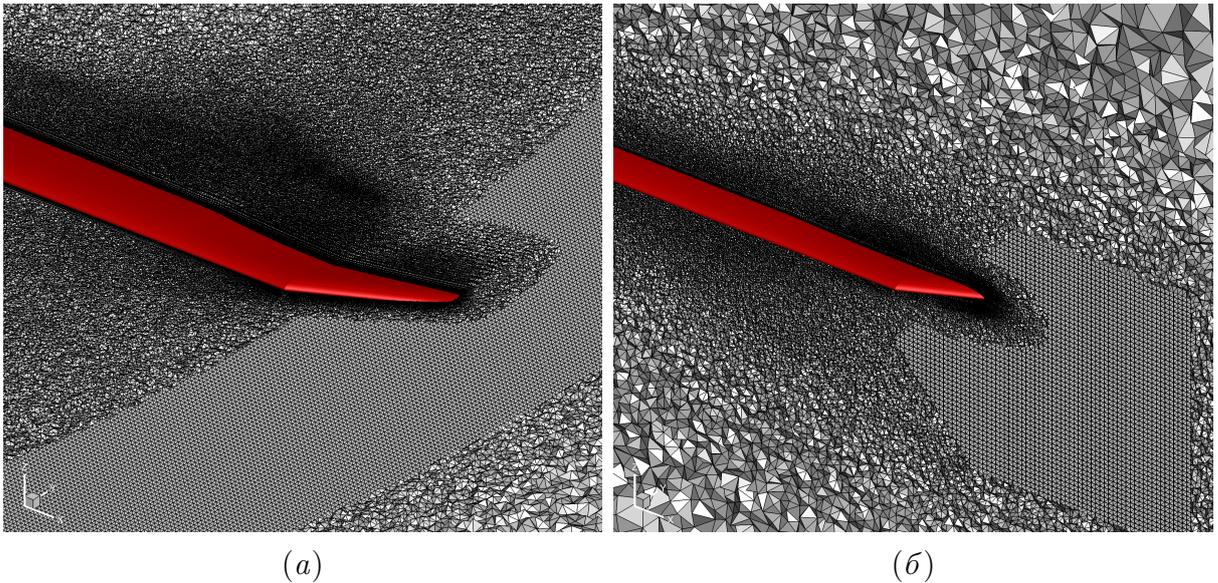


Рисунок 4.26 – Сеточные элементы вблизи лопасти в плоскости вращения винта (а) и в плоскости проходящей через ось вращения винта и ось лопасти (б)

соответствующие углы кратные $\pi/2$, что было возможно в силу идентичности поверхностных сеток на азимутальных плоскостях сектора. Таким образом была получена сетка для полной конфигурации из 391.5М объемных элементов и 75М узлов.

4.4.2. Результаты численного моделирования обтекания модельного винта

Основной расчет проводился с использованием гибридного вихререзающий подход DES. Также в исследовательских целях были проведены аналогичный расчет с использованием RANS-подхода с моделью турбулентности на основе уравнения Спаларта – Аллмараса и серия расчетов основе модели Эйлера (на существенно более грубых сетках). На Рис. 4.27 приведено сравнение результатов, полученных в ходе численного эксперимента, с экспериментальными данными. Точки на поляре соответствует разным углам установки лопасти. Как и ожидалось, расчеты на основе уравнений Эйлера дают сильно завышенное значение крутящего момента, в то время как результат DES-расчета гораздо ближе к результатам эксперимента.

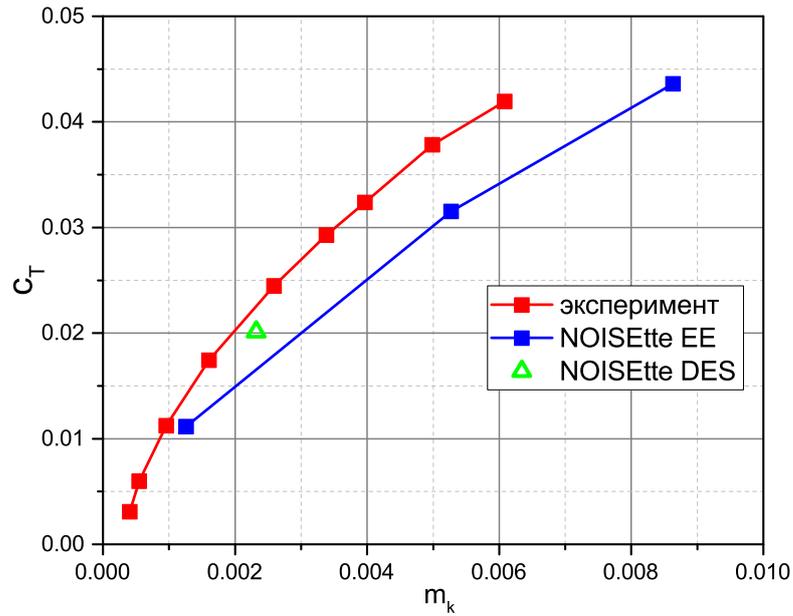
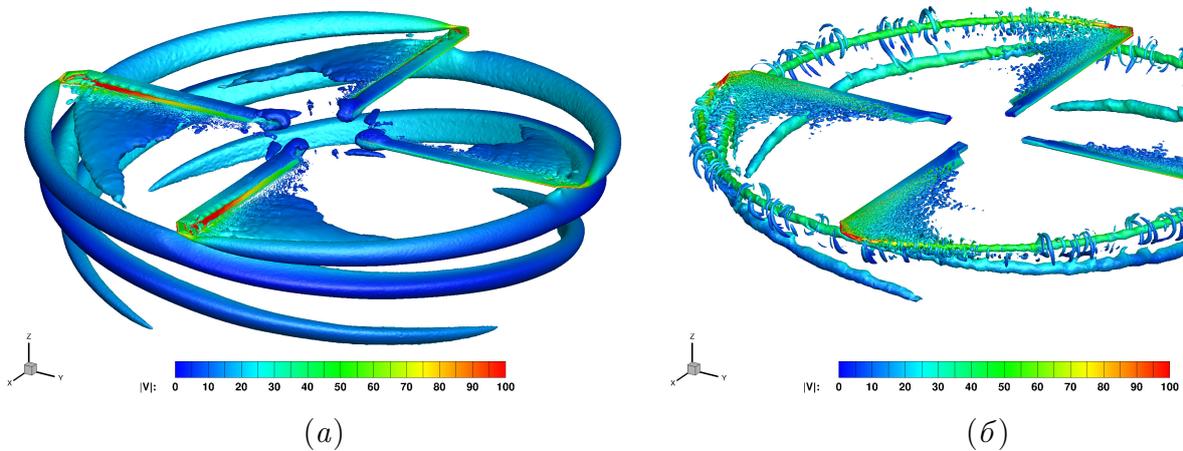


Рисунок 4.27 – Поляра модельного винта

На Рис. 4.28 приведена визуализация поля турбулентных структур, полученных в результате расчета с использованием RANS-подхода Рис. 4.28, *а* и DES-подхода Рис. 4.28, *б*. Видно, что картина турбулентных структур полученная в результате DES-расчета отражает больше деталей: разрешена не только тонкая структура концевых вихрей, но и вихревая пелена, сходящая с лопастей, а также наблюдается взаимодействие мелких вихревых структур с мощными концевыми вихрями.

Рисунок 4.28 – Визуализация турбулентных структур (изоповерхность Q -критерия) полученных в результате RANS (а) и DES (а) расчетов

На Рис. 4.29 представлены диаграммы направленности уровня звуково-

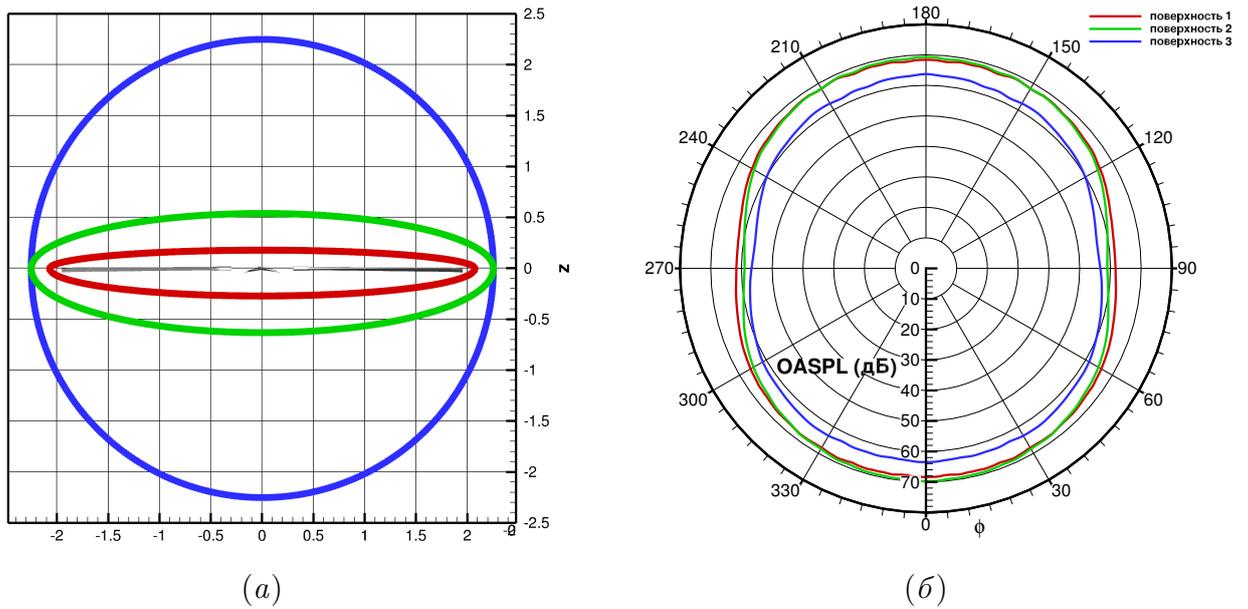


Рисунок 4.29 – Вид контрольных FWH-поверхностей (а) и диаграммы направленности уровня звукового давления (б)

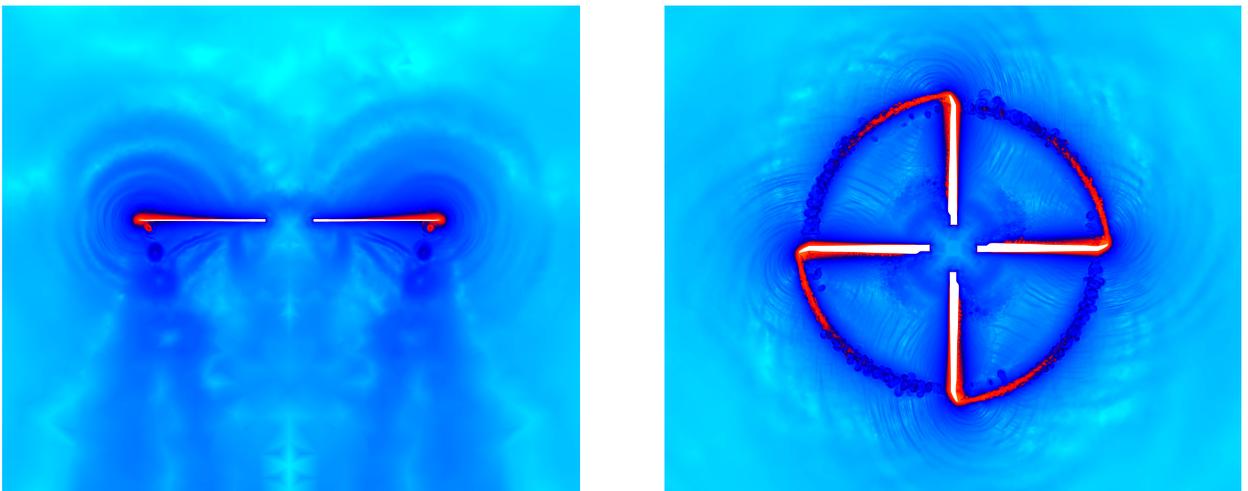


Рисунок 4.30 – Поле модуля градиента плотности в продольном и поперечном сечениях

го давления в дальнем поле на расстоянии 150 метров от центра винта для трех разных контрольных поверхностей. Видно, что с увеличением размера контрольной поверхности общий уровень звукового давления падает. Это объясняется тем, что с удалением от винта разрешение расчетной сетки в области контрольной поверхности падает, и в силу численной диссипации, возмущения затухают с удалением от винта. Также по представленным диаграммам направленности можно сделать вывод о том, что для моделируемого режима работы винта шум нагружения преобладает над шумом вытеснения, так как максимум

уровня звукового давления находится в области оси вращения винта, а не в плоскости вращения.

На Рис. 4.30 представлено поле модуля градиента плотности в двух сечениях. Эта визуализация позволяет судить о расположении акустических источников. Видно, что основными источниками звука здесь являются области схода концевых вихрей и области их взаимодействия с мелкими турбулентными структурами.

Расчеты выполненные в работе были произведены на суперкомпьютерах К-100 и К-60 ИПМ им. В.М. Келдыша РАН и с использованием оборудования центра коллективного пользования «Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса» НИЦ «Курчатовский институт», <http://скр.nrcki.ru>.

4.5. Выводы к четвертой главе

Четвертая глава работы представляет результаты расчетов по определению аэродинамических и акустических характеристик вертолетных винтов различной конфигурации, полученные с помощью созданного проблемно-ориентированного программного комплекса NOISEtte.Rotor.

Значительная часть настоящей главы посвящена валидации разработанных математических моделей, численных методов и реализующего их программного комплекса NOISEtte.Rotor. Способность программного комплекса NOISEtte.Rotor корректно предсказывать аэродинамические характеристики винта продемонстрирована путем сравнения имеющихся данных экспериментальных измерений с результатами проведенного численного моделирования осевого обтекания двухлопастного винта Caradonna-Tung на основе RANS подхода (см. раздел 4.1). Полученное в результате численных расчетов распределение коэффициента давления в разных сечениях лопасти и эволюция концевого вихря достаточно хорошо согласуются с экспериментальными

данными.

Точность воспроизведения акустических полей, создаваемых винтом вертолета, подтверждена с помощью вычислительного эксперимента по численному моделированию течения около модельного винта КНИТУ-КАИ (см. раздел 4.2). При этом численная постановка задачи воспроизводила физический эксперимент, проведенный в акустической камере кафедры АГД КНИТУ-КАИ. Сравнение пульсаций давления, полученных в ходе физического и вычислительного экспериментов показало хорошее согласование результатов.

В разделе 4.3 приведены результаты численного моделирования осевого обтекания конфигурации «винт в кольце» АО «Камов». Путем вычислительных экспериментов определены аэродинамические характеристики конфигурации при различных значениях общего шага лопасти. Полученные значения тяги и крутящего момента, а также их коэффициенты близки к данным экспериментальных измерений. Также определены акустические характеристики данной конфигурации.

Раздел 4.4 посвящен численному моделированию модельного несущего винта АО «Камов» сложной конфигурации в режиме осевого обтекания. Проведены расчеты на основе вихререзающего подхода DES как для сектора с одной лопастью, так и для полной четырехлопастной конфигурации. Сравнительный анализ результатов показал необходимость рассмотрения полной конфигурации для более точной оценки акустических характеристик. В результате расчета получена подробная картина взаимодействия разномасштабных турбулентных структур, явно показывающая локализацию распределенных источников акустических возмущений. Проведено измерение уровня звукового давления в дальнем поле течения.

Выбор моделей и постановок задач во всех проведенных расчетах произведен в соответствии с разработанной картой моделей (см. первую главу диссертации). В качестве моделей в расчетах использовались уравнения Эйлера, осредненные уравнения Навье – Стокса (RANS), а также гибридные RANS-LES

модели (DES). Расчеты проводились как для полной конфигурации (четырёхлопастной модельный винт АО «Камов»), так и для осесимметричных постановок с одной лопастью в секторе. Следует отметить, что несмотря на то, что все представленные в работе промышленно-ориентированные расчеты по несущим винтам вертолета касались моделирования режима осевого обтекания, все разработанные в работе модели, численные методы и реализующий их комплекс программ NOISEtte.Rotor пригодны для расчетов характеристик винтов для всех возможных режимов эксплуатации.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Разработана методика промышленно-ориентированного моделирования обтекания винта вертолета на основе системы уравнений Навье – Стокса в неинерциальной системе координат. В рамках методики предложена карта моделей, позволяющая сделать выбор оптимального с точки зрения ресурсоемкости подхода в зависимости от режима полета вертолета и целей исследования.
2. Разработан оригинальный численный алгоритм расчета акустических характеристик винта вертолета на основе интегрального метода Фокса Уилльямса – Хокинга для оценки шума в дальнем поле. Использование разных систем координат (вращающейся неинерциальной системы для моделирования течения около винта и системы, связанной с фюзеляжем, для определения контрольной поверхности) позволяет избежать особенностей в пространственно-временном интеграле.
3. Создан проблемно-ориентированный комплекс программ `NOISEtte.Rotor` для расчета аэродинамических и акустических характеристик винта вертолета. Программный комплекс передан для использования в АО «Камов».
4. С помощью разработанной методики численного моделирования определены аэродинамические и акустические характеристики винтов трех промышленных конфигураций: компоновки «винт в кольце» АО «Камов», модельного несущего винта АО «Камов» и модельного несущего винта КНИТУ-КАИ.

Список сокращений и условных обозначений

$\bar{r} = \frac{r}{R}$ — относительный радиус

\mathbf{q} — вектор теплового потока

γ — показатель адиабаты

λ — коэффициент теплопроводности

μ — коэффициент динамической молекулярной вязкости газа

$\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения (вектор)

Div — оператор дивергенции тензорной величины

div — оператор дивергенции векторной величины

\otimes — оператор диадного произведения векторов

Pr — число Прандтля

ρ — плотность

ρ_∞ — значение плотности в удаленном потоке

ε — внутренняя энергия газа

$\varphi(\bar{r})$ — угол крутки лопасти

b — хорда лопасти

c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении

c_T — коэффициент силы тяги

E — полная энергия газа

M — число Маха

m_k — коэффициент аэродинамического крутящего момента

N — число лопастей

p — гидродинамическое давление

p_∞ — значение давления в удаленном потоке

R — радиус винта

T^{rot} — сила тяги винта

T_z^{blade} — нормальная к плоскости вращения компонента силы тяги, действующая на лопасть

y^+ — пристеночное число Рейнольдса

$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ — внешняя к поверхности S единичная нормаль

$\mathbf{S} = [S_{ij}]$ — тензор вязких напряжений

$\mathbf{u} = (u, v, w)$ — декартовы компоненты скорости

\mathbf{U}_∞ — вектор скорости в удаленном потоке

\mathbf{V} — вектор линейной скорости вращения

$\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ — конвективные потоки

$\mathbf{F}_1^{NS}, \mathbf{F}_2^{NS}, \mathbf{F}_3^{NS}$ — вязкие потоки

\mathbf{Q} — вектор консервативных переменных

\mathbf{u}' — вектор относительной скорости

\mathbf{M} — момент силы винта

δ_{ij} — символ Кронекера

$\mathcal{T} = [\tau_{ij}]$ — тензор скоростей деформации

τ_w — напряжение трения на стенке

$M_k^{rot} = M_z$ — аэродинамический крутящий момент винта

AUSM (Advection Upstream Splitting Method) — метод расщепления с последующей противопоточной аппроксимацией конвекции

BiCGStab (Biconjugate gradient stabilized method) — стабилизированный метод бисопряженных градиентов

CFD (Computational fluid dynamics) — вычислительная гидродинамика

CGNS (CFD General Notation System) — общая система записи CFD (формат сетки/данных)

DES (Detached Eddy Simulation) — метод моделирования отсоединенных вихрей

EBR (Edge-Based Reconstruction) — схемы на основе квазиодномерной реберно-ориентированной реконструкции

FWH (Ffowcs Williams – Hawkins) — методика Фокса Уилльямса – Хокингса

ICAO (International Civil Aviation Organization) — Международный комитет гражданской авиации

- LES (Large Eddy Simulation) — моделирование больших вихрей
- OASPL (Overall SoundPressure Level) — общий уровень звукового давления
- RANS (Reynolds Averaged Navier-Stocks) — осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье – Стокса
- SA (Spalart-Allmaras) — модель турбулентности Спаларта – Аллмараса
- SVN (Subversion) — система контроля версий
- ЛА — летательный аппарат
- НИР — научно-исследовательская работа
- ПК — программный комплекс
- ПНИ — прикладное научное исследование
- ПОПК — проблемно-ориентированный программный комплекс

Список литературы

1. *Юрьев Б. Н.* Аэродинамический расчет вертолетов. — Москва : Оборонгиз, 1956.
2. *Юрьев Б. Н.* Импульсная теория воздушных винтов. Вып. 306. — Москва : Труды ВВИА, 1948.
3. *Steijl R., Barakos G. N.* Computational Study of Helicopter Rotor-Fuselage Aerodynamic Interactions // AIAA Journal. — 2009. — Vol. 47, issue 9. — Pp. 2143–2157. — DOI: 10.2514/1.41287.
4. *Глауэрт Г.* Основы теории крыльев и винта. — Москва-Ленинград : ГНТИ, 1931. — С. 160.
5. *Братухин И. П.* Аэродинамический расчет автожира // Техника воздушного флота. — 1934. — Т. 3.
6. Вертолеты. Книга первая. Аэродинамика. Т. 1 / М. Л. Миль, А. В. Некрасов, А. С. Браверман, Л. Н. Гродко, М. А. Лейканд. — Москва : Машиностроение, 1966.
7. *Петросян Э. А.* Аэродинамика соосного вертолета. — Москва : Полигон-Пресс, 2004. — С. 816.
8. *Жуковский Н. Е.* Вихревая теория гребного винта. — Москва-Ленинград : Гостехиздат, 1950. — С. 239.
9. Теория несущего винта / В. Э. Баскин, Л. С. Вильдгрубе, Е. С. Вождаев, Г. И. Майкапар. — Москва : Машиностроение, 1973.
10. *Шайдаков В. И.* Дисковая вихревая теория несущего винта с постоянной нагрузкой на диск // Труды МАИ. — 1976. — Вып. 381.

11. *Шайдаков В. И.* Методы расчета аэродинамических характеристик несущего винта вертолета на базе обобщенной дисковой вихревой теории // Проблемы проектирования современных вертолетов. — Москва : МАИ, 1977.
12. *Ван Ши-цунь.* Обобщенная вихревая теория несущего винта вертолета // Труды МАИ. — Москва, 1961. — Вып. 142. — С. 82.
13. *Аникин В. А.* К теории индукции несущего винта // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 1982. — № 5.
14. *Шайдаков В. И.* Метод расчета аэродинамических характеристик несущих винтов на режимах снижения // Труды 4-х научных чтений посвященных памяти академика Б.Н. Юрьева. — Москва : МАИ, 1994.
15. *Вождаев Е. С.* Лопастная теория несущего винта вертикально взлетающего аппарата в осевом потоке // Труды ЦАГИ. — Москва, 1970. — Вып. 1234.
16. *Вождаев Е. С.* Аэродинамический расчет воздушного винта на основе точных аналитических решений в задаче о нестационарном поле скоростей винтовых вихрей // Труды ЦАГИ. — Москва, 2002. — Вып. 2659.
17. *Landgrebe A. J., Chenly M. C.* Rotor Wakes – Key to Performance Prediction: tech. rep. ; AGARD Conference Proceedings. — 1972. — No. 111.
18. *Kocurek J., Tangler J.* A Prescribed Wake Lifting Surface Hover Performance Analysis // Journal of the American Helicopter Society. — 1977. — Vol. 22, no. 1. — Pp. 24–35. — ISSN 2161-6027. — DOI: 10.4050/JAHS.22.24.

19. *Игнаткин Ю. М., Макеев П. В., Шомов А. И.* Исследование аэродинамических характеристик несущего винта вертолета на режиме «вихревое кольцо» на базе нелинейной лопастной вихревой теории // Вестник МАИ. — 2009. — Т. 16, № 6. — С. 11—15. — DOI: 10.2514/1.41287.
20. *Белоцерковский С. М., Локтев Б. Е., Никит М. И.* Исследование на ЭВМ аэродинамических и упругих характеристик винтов вертолета. — Москва : Машиностроение, 1992. — С. 220.
21. *Крицкий Б. С.* Математическая модель аэродинамики винтокрылого летательного аппарата // Труды ЦАГИ. — Москва, 2002. — Вып. 2655.
22. *Anikin V., Kritsky B., Leontiev V.* Aerodynamics and Flight Dynamics of Aircraft in Vortex Wake of Helicopter // Proceedings of 33rd European Rotorcraft Forum, Kazan, Russia, September 11-14. Vol. 1. — Curran Associates, Inc., 2007. — Pp. 643–676.
23. *Крицкий Б. С., Аникин В. А.* Нестационарные аэродинамические характеристики летательного аппарата в потоке от несущего винта // Труды XIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2007), Харьков-Херсон, Украина. — 2007.
24. *Крицкий Б. С.* Моделирование обтекания лопастей несущего винта с различными законцовками // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. — 2010. — № 151. — С. 28—32.
25. *Головкин М. А., Кочин С. И., Крицкий Б. С.* Методика расчета аэродинамических характеристик комбинированной несущей системы летательного аппарата // Труды МАИ. — 2012. — Вып. 55.

26. *Williams J. E. F., Hawkings D. L.* Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 1969. — Vol. 264, no. 1151. — Pp. 321–342. — DOI: 10.1098/rsta.1969.0031.
27. *Голдстейн М. Е.* Аэроакустика. — Москва : Машиностроение, 1981. — С. 294.
28. *Джонсон У.* Теория вертолета. Т. 2. — Москва : Мир, 1983. — С. 1021.
29. *Дронов Б. Н., Крицкий Б. С.* К математическому моделированию аэроакустики несущего винта // *Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации*. — 2001. — № 37. — (Аэромеханика и прочность).
30. *Современные подходы к моделированию турбулентности / А. В. Гарбарук, М. Х. Стрелец, А. К. Травин, М. Л. Шур.* — Санкт-Петербург : Издательство Политехническое университета, 2016. — С. 234.
31. *Comments on the Feasibility of LES for Wings and on the Hybrid RANS/LES Approach / P. R. Spalart, W.-H. Jou, M. Stretlets, S. R. Allmaras // Advances in DNS/LES, Proceedings of the First AFOSR International Conference on DNS/LES / ed. by C. Liu, Z. Liu.* — Greyden Press, 1997. — Pp. 137–147.
32. *Копьев В. Ф., Титарев В. А., Беляев И. В.* Разработка методологии расчета шума винтов с использованием суперкомпьютеров // *Ученые записки ЦАГИ*. — 2014. — Т. XLV, № 2. — С. 78–106.
33. *Беляев И. В., Скворцов Р. А., Титарев В. А.* Разработка методологии численного моделирования шума открытого ротора // *Сбоник тезисов Пятой всероссийская конференция «Вычислительный эксперимент в аэроакусти-*

- ке», Светлогорск, Россия, 22-27 сентября. — МАКС пресс, 2014. — С. 33—34.
34. *Архарова Н. В., Пятунин К. Р., Томилина Т. В.* Опыт моделирования шума вентиляторов авиационных двигателей методом граничных элементов // Сбоник тезисов Пятой всероссийская конференция «Вычислительный эксперимент в аэроакустике», Светлогорск, Россия, 22-27 сентября. — МАКС пресс, 2014. — С. 27—28.
35. Разработка подхода для модального анализа шума лопаточной машины / Н. Н. Большагин, Р. Н. Колегов, Е. В. Коромыслов, А. А. Синер, М. В. Усанин, А. С. Хорунжий, В. А. Чурсин // Сбоник тезисов Пятой всероссийская конференция «Вычислительный эксперимент в аэроакустике», Светлогорск, Россия, 22-27 сентября. — МАКС пресс, 2014. — С. 44—45.
36. On the computation of aircraft engine fan noise generation using high order numerical methods on graphic processing units / L. U. Gomzиков, E. V. Koromyslov, M. V. Usanin, A. A. Siner // Computational experiment in aeroacoustics, CEAA 2014, Third International workshop, Svetlogorsk, Kaliningrad region, Russia, September 24-27. — Moscow : MAKS Press, 2014. — Pp. 136–138.
37. Comparative analysis of counter-rotating propfans noise assessment methods in the case of open rotor with narrow cylindrical shield / A. V. Gracheva, V. E. Makarov, K. S. Reent, V. A. Shorstov, P. I. Baranov // Computational experiment in aeroacoustics, CEAA 2014, Third International workshop, Svetlogorsk, Kaliningrad region, Russia, September 24-27. — Moscow : MAKS Press, 2014. — Pp. 139–140.
38. Numerical Method for 3D Computation of Turbomachinery Tone Noise, Paper 035 / A. A. Rossikhin, S. V. Pankov, I. A. Braiko, V. I. Mileschin //

- International Conference on Fan Noise, Technology, and Numerical Methods, Senlis, France, 18-20 April. — 2012.
39. Blade-Vortex Interaction Capture by CFD / T. Renaud, G. Perez, C. Benoit, G. Jeanfaivre, S. Péron // Proceedings of 34th European Rotorcraft Forum, Liverpool, UK, 16-19 September. — London : Royal Aeronautical Society, 2008. — Pp. 500–530.
 40. *Rodriguez B., Boisard R., Mayeur J.* Eulerian-Lagrangian coupling for helicopter rotor aerodynamics // Proceedings of 38th European Rotorcraft Forum 2012, Amsterdam, Netherlands, 4-7 September. — Amsterdam : Netherlands Association of Aeronautical Engineers, 2012. — Pp. 729–742.
 41. *Betzina M. D.* Rotor Performance of an Isolated Full-Scale XV-15 Tiltrotor in Helicopter Mode // American Helicopter Society Aerodynamics, Acoustics, and Test and Evaluation Technical Specialists Meeting, San Francisco, USA, January 23-25. — 2002.
 42. *Farrell M. K.* Aerodynamic Design of the V-22 Osprey Proprotor // 45th Annual Forum of the American Helicopter Society, Boston, MA, May 22-24. — 1989.
 43. Towards Consistent Hybrid Overset Meshes for Rotorcraft CFD / M. Jarkowski, M. Woodgate, J. Rokicki, G. Barakos // Proceedings of the 37th European Rotorcraft Forum, Vergiate and Gallarate, Italy, 13-15 September. — Cascina Costa di Samarate : Agusta Westland, 2011. — Pp. 163–177.
 44. Assessment of aeromechanics and acoustics methods for BVI predictions using CFD / R. Boisard, F. Richez, M. Costes, B. Rodriguez, G. Rebol // Proceedings of 39th European Rotorcraft Forum, Moscow, Russia, 3-6 September. — Moscow : Russian Helicopters, 2013. — Pp. 44–46.

45. *Costes M., Renaud T., Rodriguez B.* Rotorcraft simulations: a challenge for CFD // International Journal of Computational Fluid Dynamics. — 2012. — Vol. 26, 6-8. — Pp. 383–405. — DOI: 10.1080/10618562.2012.726710.
46. Application of vorticity confinement to rotor wake simulations / M. Costes, T. Renaud, B. Rodriguez, G. Reboul // Int. J. of Engineering Systems Modelling and Simulation. — 2012. — Vol. 1, 1-2. — Pp. 102–112. — DOI: 10.1504/IJESMS.2012.044848.
47. *Brocklehurst A., Barakos G. N.* A review of helicopter rotor blade tip shapes // Progress in Aerospace Sciences. — 2013. — Vol. 56. — Pp. 35–74. — DOI: 10.1016/j.paerosci.2012.06.003.
48. *Батраков А. С., Нурмухаметов Р. Р., Кусюмов А. Н.* Исследование рулевого винта вертолета АНСАТ с помощью средств CFD // Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева. — 2012. — Вып. 2, № 4.
49. *Dehaeze F., Barakos G. N.* Hovering rotor computations using an aeroelastic blade model // The Aeronautical Journal. — 2012. — Vol. 116, no. 1180. — Pp. 621–649. — DOI: 10.1017/S0001924000007107.
50. *Mohd N. A. R. N., Barakos G. N.* Computational Aerodynamics of Hovering Helicopter Rotors // Jurnal Mekanikal. — 2012. — No. 34. — Pp. 16–46.
51. *Woodgate M., Barakos G. N.* Implicit CFD Methods for Fast Analysis of Rotor Flows // AIAA Journal. — 2012. — Vol. 50, no. 6. — Pp. 1217–1244. — DOI: 10.2514/1.J051155.
52. *Johnson C., Woodgate M., Barakos G. N.* Optimisation of aspects of rotor blades in forward flight // Int. J. of Engineering Systems Modelling and Simulation. — 2012. — Vol. 1, 1-2. — Pp. 79–93. — DOI: 10.1504/IJESMS.2012.044848.

53. Численное моделирование аэродинамических и акустических характеристик винта в кольце / И. В. Абалакин, П. А. Бахвалов, В. Г. Бобков, Т. К. Козубская, В. А. Аникин // Матем. моделирование. — 2015. — Т. 27, № 10. — С. 125—144.
54. Численное исследование аэродинамических и акустических свойств винта в кольце / И. В. Абалакин, В. А. Аникин, П. А. Бахвалов, В. Г. Бобков, Т. К. Козубская // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2016. — № 3. — С. 130—145.
55. *Бахвалов П. А., Бобков В. Г., Козубская Т. К.* Применение схем с квазиодномерной реконструкцией переменных для расчётов на неструктурированных скользящих сетках // Матем. моделирование. — 2016. — Т. 28, № 8. — С. 13—32.
56. *Бахвалов П. А., Бобков В. Г., Козубская Т. К.* Технология расчёта акустических пульсаций в дальнем поле при расчёте во вращающейся системе координат // Матем. моделирование. — 2017. — Т. 29, № 7. — С. 94—108.
57. *Абалакин И. В., Бобков В. Г., Козубская Т. К.* Разработка метода расчёта течений с малыми числами Маха на неструктурированных сетках в программном комплексе NOISEtte // Матем. моделирование. — 2017. — Т. 29, № 4. — С. 101—112.
58. *Абалакин И. В., Бобков В. Г., Козубская Т. К.* Многомодельный подход к оценке аэродинамических и акустических характеристик винта вертолета с помощью вычислительного эксперимента // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2018. — № 47. — DOI: 10.20948/prepr-2018-47.
59. *Бобков В. Г.* Разработка и автоматическое регрессионное тестирование программного комплекса NOISEtte // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2018. — № 32. — DOI: 10.20948/prepr-2018-32.

60. Проблемно-ориентированный программный комплекс NOISEtte.Rotor для расчета аэродинамических и акустических характеристик винта // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015661493 (дата регистрации 29.10.2015 г.) / И. В. Абалакин, П. А. Бахвалов, В. Г. Бобков, А. Горобец, А. Дубень, Т. К. Козубская. — 2015.
61. *Абалакин И. В., Бобков В. Г.* Программа NOISEtte.forces для расчета аэродинамических сил, действующих на обтекаемое тело // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2016662466 (дата регистрации 11.11.2016 г.) — 2016.
62. *Бобков В. Г.* Программа NOISEtte.meshconvert для преобразования неструктурированных сеток из сторонних форматов в формат NOISEtte // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2016662249 (дата регистрации 03.11.2016 г.) — 2016.
63. *Spalart P. R., Allmaras S. R.* A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows // 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Aerospace Sciences Meetings. — 1992. — DOI: 10.2514/6.1992-439.
64. Navier–Stokes computations of a complete helicopter configuration accounting for main and tail rotor effects / Т. Renaud, С. Benoit, J.-С. Boniface, Р. Gardarein // Proceedings of 29th European Rotorcraft Forum, Friedrichshafen, Germany, September. — 2003.
65. *Potsdam M., Yeo W., Johnson W.* Rotor airloads prediction using loose aerodynamic/structural coupling // Journal of Aircraft. — 2006. — Vol. 43, no. 3. — Pp. 732–742.
66. Investigations of Aerodynamic Performance of Bell 412 Helicopter in Real-Time Hover Flight Conditions / Н. Xu, S. Zhang, N. Ball, A. Gubbels //

- Proceedings of 33rd European Rotorcraft Forum, Kazan, Russia, September 11-14. Vol. 1. — Curran Associates, Inc., 2007. — Pp. 643–676.
67. *Peskin C. S.* Flow patterns around heart valves: A numerical method // *J. Comput. Phys.* — 1972. — Vol. 10, no. 2. — Pp. 252–271. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(72\)90065-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(72)90065-4).
68. *Mittal R., Iaccarino G.* Immersed Boundary Methods // *Annual Review of Fluid Mechanics.* — 2005. — Vol. 37, no. 1. — Pp. 239–261. — DOI: [10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743](https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743).
69. *Pomin H., Wagner S.* Navier-Stokes analysis of helicopter rotor aerodynamics in hover and forward flight // *Journal of Aircraft.* — 2002. — Vol. 39, no. 5. — Pp. 813–821.
70. *Steijl R., Barakos G., Badcock K.* A framework for CFD analysis of helicopter rotors in hover and forward flight // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* — 2006. — Vol. 51, no. 8. — Pp. 819–847.
71. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. — 7-е изд. — Москва : Дрофа, 2003. — С. 840.
72. *Knopp T.* Universal Wall Functions for Aerodynamic Flows: Turbulence Model Consistent Design, Potential and Limitations. — Berlin, Heidelberg, 2009. — DOI: [10.1007/978-3-642-04093-1_5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-04093-1_5).
73. *Reichard H.* Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen // *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.* — 1951. — Т. 31, вып. 7. — С. 208–219.
74. *Steijl R., Barakos G.* Sliding mesh algorithm for CFD analysis of helicopter rotor–fuselage aerodynamics // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* — 2008. — Vol. 58, issue 5. — Pp. 527–549.
75. *Джонсон У.* Теория вертолета. Т. 1. — Москва : Мир, 1983. — С. 502.

76. *Farassat F.* Derivation of Formulations 1 and 1A of Farassat: tech. rep. ; NASA. — Langley Research Center, Hampton, Virginia, Mar. 2007. — TM-2007-214853.
77. *Farassat F., Myers M. K.* The Kirchhoff Formula for a Supersonically Moving Surface // CEAS/AIAA Aeroacoustics Conference (16th AIAA Conference), Munich, Germany, June 12-15 (Munich, Germany). — 1995.
78. *Farassat F., Brentner K., Dunn M.* A study of supersonic surface sources — The Ffowcs Williams–Hawkings equation and the Kirchhoff formula // 4th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Toulouse, France, June 2-4. — American Institute of Aeronautics, Astronautics, 1998.
79. *Bendat J. S., Piersol A. G.* Random Data: Analysis and Measurement Procedures. — 4th ed. — New York : John Wiley & Sons, 2010. — P. 640.
80. *Debiez C., Dervieux A.* Mixed-element-volume MUSCL methods with weak viscosity for steady and unsteady flow calculations // Computers and Fluids. — 2000. — Vol. 29, no. 1. — Pp. 89–118. — ISSN 0045-7930. — DOI: 10.1016/j.compfluid.2017.09.004.
81. *Abalakin I., Dervieux A., Kozubskaya T.* High accuracy finite volume method for solving nonlinear aeroacoustics problems on unstructured meshes // Chinese Journal of Aeronautics. — 2006. — Vol. 19. — Pp. 97–104.
82. *Абалакин И. В., Козубская Т. К.* Схема на основе реберно-ориентированной квазиодномерной реконструкции переменных для решения задач аэродинамики и аэроакустики на неструктурированных сетках // Матем. моделирование. — 2013. — Т. 25, № 8. — С. 109–136.

83. *Бахвалов П., Козубская Т. К.* Экономичная формулировка схем с квазиодномерной реконструкцией переменных // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2013. — № 89. — DOI: 10.20948/prepr-2018-47.
84. *Abalakin I., Bakhvalov P., Kozubskaya T.* Edge-based reconstruction schemes for prediction of near field flow region in complex aeroacoustics problems // Int. J. Aeroacoust. — 2014. — Vol. 13, 3-4. — Pp. 207–234.
85. *Abalakin I., Bakhvalov P., Kozubskaya T.* Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // Int. J. Numer. Meth. Fluids. — 2016. — Vol. 81, no. 6. — Pp. 331–356. — DOI: 10.1002/flid.4187.
86. *Бахвалов П.* О порядке точности рёберно-ориентированных схем на сетках специального вида // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2017. — № 79. — DOI: 10.20948/prepr-2017-7.
87. *Бахвалов П., Козубская Т.* Схема EBR-WENO для решения задач газовой динамики с разрывами на неструктурированных сетках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2017. — № 23. — DOI: 10.20948/prepr-2017-23.
88. *Bakhvalov P., Kozubskaya T.* EBR-WENO scheme for solving gas dynamics problems with discontinuities on unstructured meshes // Computers and Fluids. — 2017. — Vol. 157. — Pp. 312–324. — ISSN 0045-7930. — DOI: 10.1016/j.compfluid.2017.09.004.
89. *Марчук Г., Агошков В.* Введение в проекционно-сеточные методы. — Москва : Наука, 1981. — С. 416.
90. *Roe P.* Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes // Journal of Computational Physics. — 1997. — Vol. 135, no.

2. — Pp. 250–258. — ISSN 0021-9991. — DOI: 10.1006/jcph.1997.5705.
91. *Wu H., Wang L.* Non-existence of third order accurate semi-discrete MUSCL-type schemes for nonlinear conservation laws and unified construction of high accurate ENO schemes // The 6th International Symposium on CFD, Lake Tahoe, USA, September 4-8 (Lake Tahoe, USA). — 1995.
92. *Huang L. C.* Pseudo-unsteady difference schemes for discontinuous solutions of steady-state, one-dimensional fluid dynamics problems // Journal of Computational Physics. — 1981. — Vol. 42, no. 1. — Pp. 195–211. — ISSN 0021-9991. — DOI: 10.1016/0021-9991(81)90239-4.
93. *Y. S.* Iterative methods for sparse linear systems. — Philadelphia : Society for Industrial, Applied Mathematics, 2003. — P. 528.
94. *Turkel E.* Preconditioned Methods for Solving the Incompressible and Low Speed Compressible Equations // J. Comput. Phys. — 1987. — Vol. 72, issue 2. — Pp. 277–298.
95. *Turkel E.* Preconditioning techniques in computational fluid dynamics // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1999. — Vol. 31, no. 1. — Pp. 385–416. — DOI: 10.1146/annurev.fluid.31.1.385.
96. *Chorin A. J.* A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems // Journal of Computational Physics. — 1997. — Vol. 135, no. 2. — Pp. 118–125. — DOI: 10.1006/jcph.1997.5716.
97. *Rogers S. E., Kwak D., Kiris C.* Steady and unsteady solutions of the incompressible Navier-Stokes equations // AIAA Journal. — 1991. — Vol. 29. — DOI: 10.2514/3.10627.

98. *Rogers S. E., Kwak D.* An upwind differencing scheme for the incompressible Navier–Stokes equations // Applied Numerical Mathematics. — 1991. — Vol. 8, no. 1. — Pp. 43–64. — DOI: 10.1016/0168-9274(91)90097-J.
99. *Rieper F.* A low-Mach number fix for Roe’s approximate Riemann solver // J. Comput. Phys. — 2011. — Vol. 230, issue 13. — Pp. 5263–5287.
100. *Li X.-s., Gu C.-w.* An All-Speed Roe-type Scheme and Its Asymptotic Analysis of Low Mach Number Behaviour // J. Comput. Phys. — 2008. — Vol. 227, no. 10. — Pp. 5144–5159. — ISSN 0021-9991. — DOI: 10.1016/j.jcp.2008.01.037.
101. *Liou M.-S., Steffen C. J.* A New Flux Splitting Scheme // Journal of Computational Physics. — 1993. — Vol. 107, no. 1. — Pp. 23–39. — DOI: 10.1006/jcph.1993.1122.
102. *Liou M.-S.* A Sequel to AUSM: AUSM+ // Journal of Computational Physics. — 1996. — Vol. 129, no. 2. — Pp. 364–382. — DOI: 10.1006/jcph.1996.0256.
103. *Liou M.-S.* A Sequel to AUSM, Part II: AUSM+-up for All Speeds // J. Comput. Phys. — 2006. — Vol. 214, no. 1. — Pp. 137–170. — ISSN 0021-9991. — DOI: 10.1016/j.jcp.2005.09.020.
104. *Guillard H., Viozat C.* On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit // Computers and Fluids. — 1999. — Vol. 28, no. 1. — Pp. 63–86. — DOI: 10.1016/S0045-7930(98)00017-6.
105. Параллельный программный комплекс NOISEtte для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики / И. В. Абалакин, П. А. Бахвалов, А. В. Горобец, А. П. Дубень, Т. К. Козубская // Вычислительные методы и программирование. — 2012. — Т. 13, № 2. — С. 110–125.

106. *Apache Software Foundation* Subversion(SVN). — 2004. — URL: <https://subversion.apache.org>.
107. *Guido van Rossum, Python Software Foundation* Python. — 1991. — URL: <https://www.python.org>.
108. *World Wide Web Consortium* XML(eXtensible Markup Language). — 1998. — URL: <https://www.w3.org/XML>.
109. *Caradonna F. X., Tung C.* Experimental and analytical studies of a model helicopter rotor in hover: tech. rep. ; NASA. — Ames Research Center, Moffett Field, California, Sept. 1981. — NASA-TM-81232.
110. *Hunt J. C. R., Wray A. A., Moin P.* Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows // Studying Turbulence Using Numerical Simulation Databases, 2, Proceedings of the 1988 Summer Program. — 1988. — Pp. 192–208.
111. *ANSYS, Inc.* ANSYS. — 1970-2018. — URL: www.ansys.com.
112. *Иродов И. Е.* Основные законы механики. — 3-е изд. — Москва : Высшая школа, 1983. — С. 248.

Список иллюстративного материала

1.1	Области моделирования течения около вертолета	23
1.2	Модельная геометрическая конфигурация с подвижными и неподвижными поверхностями	32
1.3	Пристеночная ячейка (заштрихованная область)	35
1.4	Профиль скорости в пограничном слое	37
1.5	Сопряжение областей: пересекающиеся сетки (<i>a</i>) и скользящий интерфейс (<i>b</i>)	39
1.6	Построение сектора с лопастью: полная конфигурация (<i>a</i>), расчетная сетка в секторе с лопастью (<i>b</i>), расчетная сетка с достроенным периодическим замыканием (<i>в</i>)	41
1.7	Неподвижная и вращающаяся системы координат	42
1.8	Аэродинамические силы и их проекции	43
1.9	Пример диаграммы направленности общего уровня звукового давления	48
2.1	Определение направления реконструкции и точек шаблона для произвольной треугольной сетки	64
2.2	Схема контрольного объёма неструктурированной сетки	67
2.3	Базисная кусочно-линейная функция φ_i	67
2.4	Расчетные сетки для моделирования обтекания профиля НАСА0012: «структурированная» (<i>a</i>) и неструктурированная (<i>b</i>)	80
2.5	Изолинии избыточного давления вблизи передней кромки профиля НАСА0012 полученные в результате использования оригинальной схемы (<i>a</i>) и схемы с низкоскоростными поправками (<i>a</i>)	81
2.6	Сравнение распределения коэффициента давления на поверхности профиля на неструктурированной сетке при числе Маха 0.01 с расчетом по модели невязкой несжимаемой жидкости	81

2.7	Интегрирование по контрольной поверхности	82
2.8	Общий вид расчетной области, точечных источников и контрольной FWH-поверхности	84
2.9	Точное решение задачи с шестью монопольными точечными источниками в контрольных точках $(10^6, 0, 0)(a)$, $(0, 10^6, 0)(б)$ и $(0, 0, 10^6)(в)$	85
2.10	Точное решение задачи с шестью монопольными протяженными источниками в контрольных точках $(10^6, 0, 0)(a)$, $(0, 10^6, 0)(б)$ и $(0, 0, 10^6)(в)$	88
3.1	Функциональная схема ПОКП NOISEtte.Rotor	94
3.2	Схема подготовки расчетной сетки в ПОКП NOISEtte.Rotor	97
3.3	Процесс подготовки расчетной сетки в ПОКП NOISEtte.Rotor	98
3.4	Функциональная схема программного модуля meshconvert	99
3.5	Функциональная схема программного модуля frunrot	101
3.6	Функциональная схема программного модуля forces	103
3.7	Схема управляющей программы системы автоматического тестирования	107
3.8	Общий вид web-интерфейса системы тестирования ПК NOISEtte	109
4.1	Общий вид и параметры моделируемой конфигурации винта Caradonna-Tung	113
4.2	Расчетная сетка для задачи Caradonna-Tung: общий вид (a) и сетка вблизи лопасти $(б)$, $(в)$	114
4.3	Графики распределения коэффициента давления в разных сечениях лопасти	115
4.4	Общий вид течения в меридиональных сечениях: поле модуля скорости с линиями тока (a) , поле модуля завихренности в двух плоскостях проходящих через ось вращения винта $(б)$, $(в)$	116

4.5	Визуализация турбулентных структур при обтекании винта Caradonna-Tung: изоповерхность Q -критерия, раскрашенная по модулю вертикальной составляющей скорости	116
4.6	Эволюция положения ядра концевое вихря	117
4.7	Общий вид установки и параметры модельного винта	119
4.8	Схема расположения массива микрофонов вблизи винта	120
4.9	Сигналы в микрофонах 00(a), 06(b)	121
4.10	Изоповерхность Q -критерия для значения 0.005 для полей полученных в результате использования схемы первого порядка (a) и схемы повышенного порядка (b)	121
4.11	Модели вертолетов с рулевым винтом схемы Фенестрон (слева – КА-62, справа – Kawasaki OH-1)	122
4.12	Общий вид стенда и параметры моделируемой конфигурации «винт в кольце»	123
4.13	Общая конфигурация модели: характерные размеры (a), полная компоновка (b) и моделируемый сектор с одной лопастью (c)	124
4.14	Конфигурация расчетной сетки: общий вид (a) и сетка вблизи лопасти винта (b)	125
4.15	Общий вид течения: линии тока (в неподвижной системе координат) и поле модуля скорости в меридиональном сечении при угле установки лопасти 30°	127
4.16	Поле модуля абсолютной скорости и линии тока в меридиональном сечении при угле установки лопасти $10^\circ(a)$, $20^\circ(b)$, $30^\circ(c)$, $40^\circ(d)$	128
4.17	Зависимость тяги (a) и крутящего момента (b) винта от угла установки лопасти	129
4.18	Зависимость коэффициентов тяги (a) и крутящего момента (b) винта от угла установки лопасти	129

4.19	Поляра винта (зависимость коэффициента тяги от коэффициента крутящего момента)	130
4.20	Поляра кольца (<i>a</i>) и характерный вид поверхностной сетки на «кольце» для двух серий расчетов (<i>б</i>), (<i>в</i>)	130
4.21	Вид контрольных поверхностей (<i>a</i>) и схема отсчета азимутального угла (<i>б</i>)	131
4.22	Диаграммы направленности общего уровня звукового давления при разных углах установки лопасти для разных контрольных поверхностей 10° (<i>a</i>), 20° (<i>б</i>), 30° (<i>в</i>), 40° (<i>г</i>)	132
4.23	Общий вид стенда и параметры модельного винта	134
4.24	Лопасть модельного винта	134
4.25	Расчетная сетка для задачи о моделировании обтекания модельного винта: общий вид (<i>a</i>) и сетка вблизи лопасти (<i>б</i>), (<i>в</i>)	135
4.26	Сеточные элементы вблизи лопасти в плоскости вращения винта (<i>a</i>) и в плоскости проходящей через ось вращения винта и ось лопасти (<i>б</i>)	136
4.27	Поляра модельного винта	137
4.28	Визуализация турбулентных структур (изоповерхность <i>Q</i> -критерия) полученных в результате RANS (<i>a</i>) и DES (<i>a</i>) расчетов	137
4.29	Вид контрольных FWH-поверхностей (<i>a</i>) и диаграммы направленности уровня звукового давления (<i>б</i>)	138
4.30	Поле модуля градиента плотности в продольном и поперечном сечениях	138
V.1	Правый треугольник первого уровня соседства	174
V.2	Шаблон для произвольной треугольной сетки	176

Список таблиц

1.1	Карта моделей	53
2.1	Значения коэффициента силы сопротивления	82
2.2	Численная ошибка интегрирования	86
2.3	Численная ошибка при задании точного решения на объёмной сетке при использовании интерполяции 1-го порядка	87
2.4	Численная ошибка при задании точного решения на объёмной сетке при использовании интерполяции 2-го порядка	87
2.5	Численная ошибка вычисления сигнала в дальнем поле при расчете по схеме EBR5 и интерполяции квадратичным полиномом при отсутствии вращения	89
2.6	Численная ошибка вычисления сигнала в дальнем поле при расчете по схеме EBR5 и интерполяции квадратичным полиномом во вращающейся системе координат	89
2.7	Численная ошибка интегрирования	91
4.1	Параметры моделируемой конфигурации винта Caradonna-Tung .	113
4.2	Параметры модельного винта	119
4.3	Параметры моделируемой конфигурации «винт в кольце»	123
4.4	Размеры расчетных сеток для разных углов установки для задачи «винт в кольце»	126
4.5	Параметры модельного винта	134

Приложение А

Система уравнений Навье – Стокса во вращающейся системе координат

Введем K' -систему координат, вращающуюся с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ вокруг оси, неподвижной в K -системе. Пусть начала отсчета обеих систем определены в одной точке на оси вращения. В том случае радиус-векторы K -системы и K' -системы совпадают: $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Тогда вектор относительной скорости \mathbf{u}' в K' -системе определяется следующим образом [112, с. 26]:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{u} - \mathbf{V},$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Отметим некоторые очевидные свойства вектора линейной скорости вращения \mathbf{V} :

- стационарность:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = 0; \quad (\text{A.2})$$

- градиент вектора \mathbf{V} (диадное произведение векторов набла и вектора \mathbf{V}) есть кососимметрический тензор:

$$\nabla \mathbf{V} = \nabla \otimes \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

а это означает, что

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{V} \quad (\text{A.4})$$

и его симметричная часть равна нулю

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) = 0 ; \quad (\text{A.5})$$

- вектор \mathbf{V} удовлетворяет следующим дифференциальным соотношениям

$$\begin{aligned} (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{V} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}' . \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Для относительной скорости \mathbf{u}' справедлив второй закон Ньютона, который можно записать в виде [112, с. 49]:

$$\frac{d\mathbf{u}'}{dt} = \frac{1}{\rho} \mathbf{F} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}') , \quad (\text{A.7})$$

где \mathbf{F} — внешняя сила, $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ — осестремительное ускорение (центробежная сила), $2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}')$ — поворотное ускорение (сила Кориолиса).

Для уравнений движения системы уравнений Навье-Стокса полная производная по времени имеет вид

$$\frac{d\mathbf{u}'}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' , \quad (\text{A.8})$$

а внешняя сила определяется дивергенцией тензора напряжений:

$$F_i = \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} \text{ или } \mathbf{F} = \operatorname{Div} \mathbf{P} , \quad (\text{A.9})$$

где тензор напряжений есть функция градиентов относительной скорости \mathbf{u}' , так как вращающаяся система координат никак не влияет на внутренние силы внутри жидкости, которые по определению не зависят от движения одной

системы координат относительно другой.

Запишем тензор напряжений в виде

$$\begin{aligned}
 P_{ij} &= P_{ij} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) = \mu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} \left(\frac{2}{3} \mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} + p \right) \\
 &= 2\mu \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}_{\tau_{ij}} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} - \delta_{ij} p \\
 &= \underbrace{2\mu \tau_{ij} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_i}}_{S_{ij}} - \delta_{ij} p ,
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

где $\mathcal{T} = [\tau_{ij}]$ — тензор скоростей деформации, а $\mathbf{S} = [S_{ij}]$ — тензор вязких напряжений. Исходя из свойств (A.4) и (A.5) вектора линейной скорости вращения \mathbf{V} , получаем, что тензор напряжений как функция от производных линейной скорости вращения тождественно равна нулю:

$$P_{ij} = P_{ij} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) \equiv 0 ,$$

а, следовательно,

$$\begin{aligned}
 P_{ij} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) &= P_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \\
 S_{ij} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) &= S_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \\
 \tau_{ij} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) &= \tau_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) .
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Таким образом, тензор вязких напряжений инвариантен относительно скорости вращения системы координат.

Запишем вначале уравнения Навье-Стокса в K' -системе координат относительно вектора скорости $\mathbf{u}' = (u', v', w')^T$ K' -системы координат, плотности и давления. Так как скорость вращения K' -системы координат не дает вклад

в баланс массы, то уравнение неразрывности остается инвариантным и может быть записано в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u}' = 0 . \quad (\text{A.12})$$

Уравнение движения определяется вторым законом Ньютона (A.7) - (A.9):

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} \mathbf{S} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}') . \quad (\text{A.13})$$

Запишем уравнение баланса внутренней энергии, которое определяется индивидуальным изменением во времени удельной внутренней энергии среды, притоком внутренней энергии извне и плотностью распределения мощности внутренних сил, определяемых скалярным произведением тензора напряжений и тензора скоростей деформации $\mathbf{P} \cdot \mathcal{T} = P_{ij} \tau_{ij}$ и не зависит от выбора системы координат:

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \rho (\operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbf{P} \cdot \mathcal{T})$$

или, учитывая определение (A.10) и равенство $p \operatorname{div} \mathbf{u}' = -\delta_{ij} p \tau_{ij}$, имеем

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mathbf{u}' \cdot \nabla \varepsilon + p \operatorname{div} \mathbf{u}' = \rho (\operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbf{S} \cdot \mathcal{T}) . \quad (\text{A.14})$$

Перейдем от уравнения для внутренней энергии (A.14) к уравнению для давления, используя уравнение неразрывности (A.12) и уравнение состояния совершенного газа $p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon$:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u}' \cdot \nabla p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u}' = (\gamma - 1) \rho (\operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbf{S} \cdot \mathcal{T}) . \quad (\text{A.15})$$

Таким образом, система (A.12)-(A.15) есть система уравнений Навье-Стокса записанная в неинерциальной вращающейся системе координат.

Заметим, что для численных расчетов лучше использовать систему (A.12) - (A.15), записанную относительно абсолютной скорости (скорости в неподвижной K -системе координат) $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{V}$. При этом согласно (A.11) тензор вяз-

ких напряжений и тензор скоростей деформации не изменятся. Принимая во внимание стационарность (A.2) и соленоидальность (A.4) векторного поля \mathbf{V} , уравнение неразрывности и уравнение энергии в абсолютных скоростях будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho (\mathbf{u} - \mathbf{V}) = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \nabla p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u} = (\gamma - 1) \rho (\operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbf{S} \cdot \mathcal{T}) . \quad (\text{A.17})$$

Для записи уравнения движения в абсолютных скоростях преобразуем правую часть уравнения (A.13), используя соотношения (A.6):

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}') &= -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} - (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}' \\ &= -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} - ((\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \nabla) \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (A.13) запишется как

$$\frac{\partial (\mathbf{u} - \mathbf{V})}{\partial t} + ((\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \nabla) (\mathbf{u} - \mathbf{V}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} \mathbf{S} - ((\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \nabla) \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + ((\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} \mathbf{S} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} . \quad (\text{A.18})$$

Запишем уравнения Навье-Стокса в неинерциальной системе координат (A.16) - (A.18) в виде законов сохранения, используя формулы (B.1) и (B.2) из Приложения Б.

Для получения уравнения сохранения импульса сложим домноженное на вектор скорости \mathbf{u} уравнение (A.18) с домноженным на плотность ρ уравнением (A.16). В результате имеем

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{Div} \rho (\mathbf{u} - \mathbf{V}) \otimes \mathbf{u} + \nabla p = \operatorname{Div} \mathbf{S} - \rho (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) . \quad (\text{A.19})$$

Выведем уравнения для полной энергии

$$E = \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} .$$

Для этого умножим уравнение (A.16) на $\mathbf{u}^2/2$, уравнение (A.18) — на импульс $\rho \mathbf{u}$, уравнение (A.17) — на величину $1/(\gamma - 1)$ и сложим результаты. В результате, учитывая свойство (A.4), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} \right) + \underbrace{\operatorname{div} \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} (\mathbf{u} - \mathbf{V})}_{(A.16) \times \frac{\mathbf{u}^2}{2} + (A.18) \times \rho \mathbf{u}} + \underbrace{\frac{1}{\gamma - 1} ((\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \nabla p + p \operatorname{div} (\mathbf{u} - \mathbf{V}))}_{(A.17) \times \frac{1}{\gamma - 1}} \\ + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \nabla p}_{(A.18) \times \rho \mathbf{u}} + \underbrace{p \operatorname{div} \mathbf{u}}_{(A.17) \times \frac{1}{\gamma - 1}} = -\rho \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) + \rho \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho (\mathbf{u} \operatorname{Div} \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \mathcal{T}) . \end{aligned} \quad (A.20)$$

Член $\mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})$ в правой части (A.20) равен нулю, так как вектор \mathbf{u} ортогонален вектору $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})$. Преобразуем выражение $\mathbf{u} \operatorname{Div} \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \mathcal{T}$, записав его в координатной форме и используя свойство симметричности тензора \mathbf{S} :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot \mathcal{T} + \mathbf{u} \operatorname{Div} \mathbf{S} &= S_{ij} \cdot \tau_{ij} + u_i \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} = S_{ij} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial u_i S_{ij}}{\partial x_j} - S_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ &= S_{ij} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial u_i S_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \left(S_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + S_{ji} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= S_{ij} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial u_i S_{ij}}{\partial x_j} - S_{ij} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{\partial u_i S_{ij}}{\partial x_j} = \operatorname{div} \mathbf{S} \mathbf{u} . \end{aligned} \quad (A.21)$$

Воспользовавшись тождеством (Б.3) из Приложения Б и равенством (A.21), получим уравнение сохранения энергии в неинерциальной вращающейся системе координат, записанной относительно скорости в абсолютной системе координат:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathbf{u} - \mathbf{V}) E + \operatorname{div} \mathbf{u} p = \operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div} \mathbf{S} \mathbf{u} . \quad (A.22)$$

Уравнения (A.16), (A.19) и (A.22) составляют систему уравнений Навье-Стокса во вращающейся неинерциальной системе координат, записанной в виде законов сохранения относительно вектора абсолютной скорости.

Приложение Б

Справочные формулы

В этом разделе приведена справочная информация, которую можно найти, например в [71]:

$$\mathbf{u} \cdot ((\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \nabla \frac{\mathbf{u}^2}{2}; \quad (\text{Б.1})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} (\mathbf{u} - \mathbf{V}) &= \frac{\mathbf{u}^2}{2} \operatorname{div} \rho (\mathbf{u} - \mathbf{V}) + \rho (\mathbf{u} - \mathbf{V}) \nabla \frac{\mathbf{u}^2}{2} \\ &= \frac{\mathbf{u}^2}{2} \operatorname{div} \rho (\mathbf{u} - \mathbf{V}) + \rho \mathbf{u} \cdot ((\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \nabla) \mathbf{u}; \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

$$\operatorname{div} \varphi \mathbf{u} = \rho \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi. \quad (\text{Б.3})$$

Приложение В

Аналоги разделенных разностей на произвольных неструктурированных сетках

Покажем выполнение равенств (2.14) на примерах правого треугольника первого уровня соседства (Рис. В.1) и правых треугольников второго уровня соседства (Рис. В.2).

В.1. Правый треугольник первого уровня

Функция Φ является линейной на треугольнике T^R и, следовательно, представляема в виде

$$\Phi(x, y) = ax + by + c, \quad a = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{T^R}, \quad b = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{T^R}$$

или в векторной форме

$$\Phi(x, y) = \nabla \Phi|_{T^R} \cdot \mathbf{r} + c,$$

где $\mathbf{r} = (x, y)$, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$.

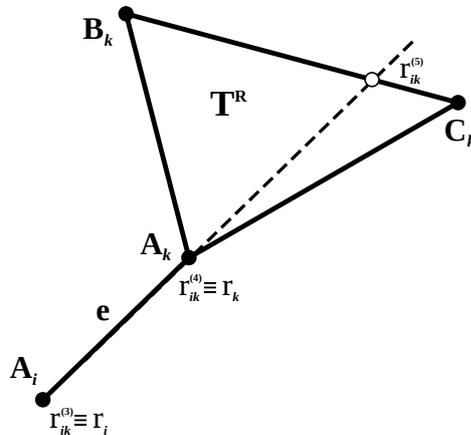


Рисунок В.1 – Правый треугольник первого уровня соседства

Тогда

$$\Delta\Phi_{ik}^{(9/2)} = \Phi_{ik}^{(5)} - \Phi_{ik}^{(4)} \equiv \Phi\left(\mathbf{r}_{ik}^{(5)}\right) - \Phi\left(\mathbf{r}_{ik}^{(4)}\right) = \nabla\Phi|_{\mathbb{T}^R} \cdot \left(\mathbf{r}_{ik}^{(5)} - \mathbf{r}_{ik}^{(4)}\right). \quad (\text{B.1})$$

Заметим, что вектора $\mathbf{r}_{ik}^{(5)} - \mathbf{r}_{ik}^{(4)}$ и $\mathbf{r}_{ik}^{(4)} - \mathbf{r}_{ik}^{(3)} = \mathbf{e}_{ik}$ сонаправлены, следовательно, $\left(\mathbf{r}_{ik}^{(5)} - \mathbf{r}_{ik}^{(4)}\right) / \left|\mathbf{r}_{ik}^{(5)} - \mathbf{r}_{ik}^{(4)}\right| = \mathbf{e}_{ik}/|\mathbf{e}_{ik}|$. Тогда

$$\mathbf{r}_{ik}^{(5)} - \mathbf{r}_{ik}^{(4)} = \frac{\mathbf{r}_{ik}^{(5)} - \mathbf{r}_{ik}^{(4)}}{\left|\mathbf{r}_{ik}^{(5)} - \mathbf{r}_{ik}^{(4)}\right|} \left|\mathbf{r}_{ik}^{(5)} - \mathbf{r}_{ik}^{(4)}\right| = \frac{\mathbf{e}_{ik}}{|\mathbf{e}_{ik}|} \left|\mathbf{r}_{ik}^{(5)} - \mathbf{r}_{ik}^{(4)}\right|$$

или, обозначив $\Delta r_{ik}^{(9/2)} = \left|\mathbf{r}_{ik}^{(5)} - \mathbf{r}_{ik}^{(4)}\right|$, получим

$$\mathbf{r}_{ik}^{(5)} - \mathbf{r}_{ik}^{(4)} = \frac{\Delta r_{ik}^{(9/2)}}{|\mathbf{e}_{ik}|} \mathbf{e}_{ik}. \quad (\text{B.2})$$

Подставляя (B.2) в (B.1) имеем

$$\frac{\Delta\Phi_{ik}^{(9/2)}}{\Delta r_{ik}^{(9/2)}} = \nabla\Phi|_{\mathbb{T}^R} \cdot \frac{\mathbf{e}_{ik}}{|\mathbf{e}_{ik}|},$$

что и требовалось показать.

В.2. Правые треугольники второго уровня

По построению вектора $\mathbf{r}_{ik}^{(6)} - \mathbf{r}_{ik}^{(5)}$, $\mathbf{D}_k^1 - \mathbf{A}_k^1$ и $\mathbf{D}_k^2 - \mathbf{A}_k^2$ сонаправлены и имеют равные длины $\Delta r_{ik}^{(11/2)} = \left|\mathbf{r}_{ik}^{(6)} - \mathbf{r}_{ik}^{(5)}\right| = \left|\mathbf{D}_k^1 - \mathbf{A}_k^1\right| = \left|\mathbf{D}_k^2 - \mathbf{A}_k^2\right|$.

Также по построению $\mathbf{r}_{ik}^{(6)} = \sigma_k \mathbf{D}_k^1 + (1 - \sigma_k) \mathbf{D}_k^2$ и $\mathbf{r}_{ik}^{(5)} = \sigma_k \mathbf{A}_k^1 + (1 - \sigma_k) \mathbf{A}_k^2$.

Из свойства линейности функция Φ на треугольниках $\mathbb{T}1^R$ и $\mathbb{T}2^R$ имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{ik}^{(5)} &\equiv \Phi\left(\mathbf{r}_{ik}^{(5)}\right) = \sigma_k \nabla\Phi|_{\mathbb{T}1^R} \cdot \mathbf{A}_k^1 + (1 - \sigma_k) \nabla\Phi|_{\mathbb{T}2^R} \cdot \mathbf{A}_k^2 \\ \Phi_{ik}^{(6)} &\equiv \Phi\left(\mathbf{r}_{ik}^{(6)}\right) = \sigma_k \nabla\Phi|_{\mathbb{T}1^R} \cdot \mathbf{D}_k^1 + (1 - \sigma_k) \nabla\Phi|_{\mathbb{T}2^R} \cdot \mathbf{D}_k^2. \end{aligned}$$

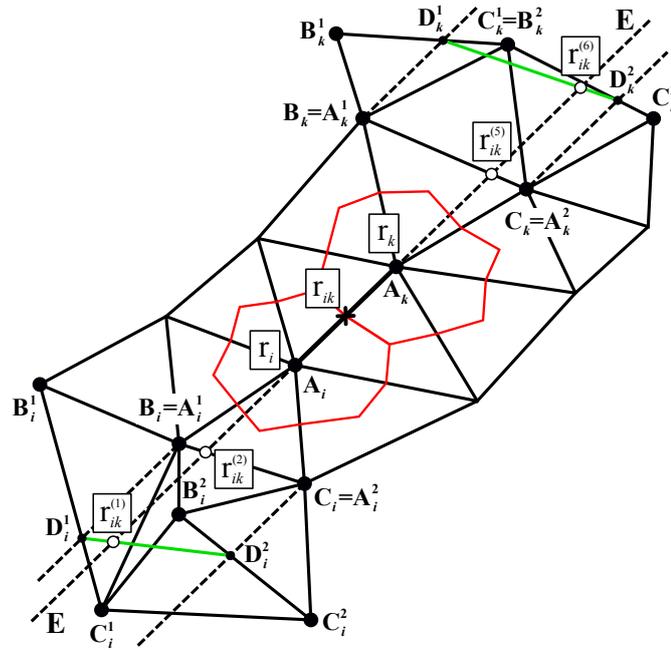


Рисунок В.2 – Шаблон для произвольной треугольной сетки

Из этого следует

$$\begin{aligned}
 \Delta\Phi_{ik}^{(11/2)} &= \Phi_{ik}^{(6)} - \Phi_{ik}^{(5)} = \sigma_k \nabla\Phi|_{T1R} \cdot (\mathbf{D}_k^1 - \mathbf{A}_k^1) + (1 - \sigma_k) \nabla\Phi|_{T2R} \cdot (\mathbf{D}_k^2 - \mathbf{A}_k^2) \\
 &= (\sigma_k \nabla\Phi|_{T1R} + (1 - \sigma_k) \nabla\Phi|_{T2R}) \cdot (\mathbf{r}_{ik}^{(6)} - \mathbf{r}_{ik}^{(5)}) \\
 &= (\sigma_k \nabla\Phi|_{T1R} + (1 - \sigma_k) \nabla\Phi|_{T2R}) \cdot \frac{\mathbf{e}_{ik}}{|\mathbf{e}_{ik}|} \left| \mathbf{r}_{ik}^{(6)} - \mathbf{r}_{ik}^{(5)} \right| \\
 &= (\sigma_k \nabla\Phi|_{T1R} + (1 - \sigma_k) \nabla\Phi|_{T2R}) \cdot \frac{\mathbf{e}_{ik}}{|\mathbf{e}_{ik}|} \Delta r_{ik}^{(11/2)}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta\Phi_{ik}^{(11/2)}}{\Delta x_{ik}^{(11/2)}} = [\sigma_k \nabla\Phi|_{T1R} + (1 - \sigma_k) \nabla\Phi|_{T2R}] \cdot \frac{\mathbf{e}_{ik}}{|\mathbf{e}_{ik}|}.$$