Институт нефтехимии и катализа — обособленное структурное подразделение
Федерального государственного бюджетного научного учреждения
Уфимского федерального исследовательского центра
Российской академии наук

На правах рукописи

Бобренёва Юлия Олеговна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАССОПЕРЕНОСА В КОЛЛЕКТОРАХ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРОВОГО ТИПА

1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Губайдуллин И.М.

Москва – 2022

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ 5

ГЛАВА 1. ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ ПО МАССОПЕРЕНОСУ В КОЛЛЕКТОРАХ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРОВОГО ТИПА 12

1.1 Актуальность проблемы гидродинамических исследований скважин 12

1.2 Математический аппарат для моделирования гидродинамических исследований 16

1.3 Процесс массопереноса в трещиноватых коллекторах. Обзор предшествующих исследований 18

1.4 Двухфазная фильтрация несмешивающихся жидкостей 30

1.5 Обзор программных продуктов для моделирования 36

1.6 Выводы по главе 1 39

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАССОПЕРЕНОСА В РАМКАХ МОДЕЛИ ДВОЙНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В КОЛЛЕКТОРЕ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРОВОГО ТИПА 41

2.1 Физическая модель процесса фильтрации однофазной жидкости в коллекторе трещиновато-порового типа 41

2.2 Математическая модель процесса фильтрации однофазной жидкости в коллекторе трещиновато-порового типа 43

2.3 Математическая модель процесса массопереноса в коллекторе трещиновато-порового типа с учетом влияния внешних эффектов 45

2.4 Аналитическое решение 47

2.5 Выводы по главе 2 48

ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ МАССОПЕРЕНОСА В РАМКАХ МОДЕЛИ ДВОЙНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В КОЛЛЕКТОРЕ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРОВОГО ТИПА 49

3.1 Разностная схема для решения задачи массопереноса в рамках модели двойной среды для однофазной фильтрации 49

3.1.1 Явная схема 50

3.1.2 Неявная схема 52

3.2 Описание метода матричной прогонки 56

3.3 Программный модуль для моделирования процесса массопереноса в коллекторе трещиновато-порового типа 58

3.4 Результаты численного моделирования 60

3.4.1 Инженерный анализ чувствительности к входным параметрам . 69

3.4.2 Анализ влияния проницаемости пласта на динамику забойного давления 69

3.4.3 Анализ влияния параметра коэффициента доли трещинно-кавернозной емкости на динамику забойного давления 71

3.4.4 Анализ влияния коэффициента удельной проводимости на динамику забойного давления 72

3.4.5 Анализ влияния состояния призабойной зоны пласта на динамику забойного давления 74

3.4.6 Анализ влияния объема ствола скважины на динамику забойного давления 76

3.5 Выводы по главе 3 78

ГЛАВА 4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАССОПЕРЕНОСА В РАМКАХ МОДЕЛИ ДВОЙНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В КОЛЛЕКТОРЕ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРОВОГО ТИПА 80

4.1 Физическая модель процесса фильтрации двухфазной жидкости в коллекторе трещиновато-порового типа 80

4.2 Математическая модель процесса фильтрации двухфазной жидкости в коллекторе трещиновато-порового типа 83

4.3 Расщепление по физическим процессам 86

4.4 Выводы по главе 4 89

ГЛАВА 5. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ В РАМКАХ МОДЕЛИ ДВОЙНОЙ СРЕДЫ В КОЛЛЕКТОРЕ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРОВОГО ТИПА 90

5.1 Разностная схема для решения задачи фильтрации двухфазной жидкости в коллекторе трещиновато-порового типа 90

5.2 Метод скалярной прогонки 100

5.3 Результаты численного моделирования 100

5.4 Выводы по главе 5 105

ГЛАВА 6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАССОПЕРЕНОСА РЕАЛЬНОГО КАРБОНАТНОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ 106

6.1 Месторождение им. Р. Требса 106

6.2 Расчет длительности исследования методом кривой восстановления давления на нефтяной скважине для месторождения им. Р. Требса 107

6.3 Выводы по главе 6 111

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 112

Условные обозначения 114

Список литературы 116

ВВЕДЕНИЕ

Представляемая работа посвящена разработке вычислительных алгоритмов и комплексов программ для математического моделирования массопереноса в среде с двойной пористостью при проведении гидродинамического исследования скважин на неустановившемся режиме течения.

На сегодняшний день в карбонатных коллекторах сосредоточено до 60% запасов нефти, поэтому изучению продуктивных пластов и развитию методов добычи углеводородов в трещиновато-поровых коллекторах уделяется много внимания. Интерес и сложность изучаемого объекта заключается в наличии пустотного пространства в виде трещин и каверн, которые требуют новых подходов к разработке. Процесс фильтрации в таких средах не описывается с достаточной точностью классическими моделями фильтрации и требует использования более сложных моделей двойной пористости и т.д.

Для рациональной разработки нефтяных и газовых залежей важным является наличие информации высокого качества о фильтрационно-емкостных свойствах коллектора, что напрямую связано с изучением особенностей фильтрации жидкостей в пластах. Одним из самых эффективных инструментов, позволяющим изучить свойства пласта, на сегодняшний день являются гидродинамические исследования скважин (ГДИС). Гидродинамические исследования скважин – система мероприятий, проводимых на скважинах по специальным программам и предназначенных для изучения продуктивных пластов при их испытании, освоении и эксплуатации с целью получения данных об их продуктивности, фильтрационных параметрах, границах пласта и особенностях зон дренирования, типа пласта-коллектора.

Для традиционных моделей фильтрации типа «одинарной среды» разработаны эффективные алгоритмы как прямые для моделирования процесса фильтрации, так и методы интерпретации данных ГДИС для идентификации параметров моделей. Однако, ситуация сильно усложняется в случае применения моделей типа «двойной среды».

Существующие как в России, так и за рубежом программы для анализа и интерпретации результатов ГДИС не позволяют проводить полный спектр расчетов и не всегда вычислительно эффективны, что ограничивает круг решаемых с их помощью технико-экономических задач по разработке.

Поэтому возникает необходимость в создании быстросчетного инструмента, который позволит решать задачи оперативного планирования, формирующиеся при разработке месторождения, куда относится проведение экспресс-оценки требуемой длительности остановки перед исследованием, а также тщательное изучение поведения процессов флюидодинамики при различных параметрах пласта.

Как следствие, создание вычислительных основ, комплексов программ для моделирования массопереноса в трещиновато-поровых коллекторах при проведении гидродинамических исследований является актуальной задачей.

Целью работы является разработка математической модели, численного алгоритма и создание программного комплекса для моделирования фильтрации жидкости при проведении гидродинамического исследования в коллекторе трещиновато-порового типа.

Для достижения цели были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Построение математической модели массопереноса в случаях однофазной и двухфазной фильтрации для описания гидродинамического исследования методом кривой восстановления давления в рамках модели двойной пористости в коллекторе трещиновато-порового типа с учетом скважины.
2. Построение разностных схем для двухфазной модели фильтрации типа двойной пористости на основе алгоритма расщепления по физическим процессам, обеспечивающего корректность и согласованность потоков в системе трещин и поровом коллекторе.
3. Разработка программного комплекса для моделирования фильтрации жидкости в рамках модели двойной пористости в коллекторе трещиновато-порового типа.

4. Проведение вычислительных экспериментов в случаях однофазной и двухфазной фильтрации жидкости при проведении гидродинамического исследования методом кривой восстановления давления в добывающих скважинах в коллекторе трещиновато-порового типа. Апробация реализованных численных схем и проверка на адекватность полученных результатов.

Объектом исследования является модель распространения давления в среде с двойной пористостью.

Предметом исследования являются математические модели, описывающие изменение давления в среде с двойной пористостью при проведении гидродинамического исследования.

Научная новизна результатов исследования заключается в:

1. построении новой флюидодинамической модели в трещиновато-поровых коллекторах в рамках модели двойной пористости для описания гидродинамических исследований методом кривой восстановления давления в добывающей скважине с учетом влияния процессов, которые возникают при закрытии скважины на исследование;

2. разработке новых эффективных вычислительных алгоритмов для решения полученных систем уравнений модели, обеспечивающих корректность и согласованность потоков в системе трещин и поровом коллекторе;

3. разработке программного комплекса для моделирования гидродинамического исследования на неустановившемся режиме течения в добывающей скважине в случае однофазной и двухфазной фильтрации жидкости в коллекторе трещиновато-порового типа;

4. выполнении параметрических исследований динамики давления и насыщенности в зависимости от значений проницаемости, влияния ствола скважины и скин-фактора, расчёте оптимального времени длительности остановки скважины с минимальными потерями по добыче, необходимого для проведения гидродинамического исследования на неустановившемся режиме.

Практическая значимость работы заключается в создании программного комплекса для моделирования процесса фильтрации жидкости в коллекторе трещиновато-порового типа при планировании гидродинамических исследований на неустановившихся режимах. Разработанный программный комплекс применим для изучения флюидодинамических процессов и оценки оптимального времени остановки скважины при гидродинамическом исследовании методом кривой восстановления давления в среде с двойной пористостью в коллекторе трещиновато-порового типа. Данный программный комплекс может быть использован для прогноза дебитов, добычи и расчета оптимальных режимов работы скважин. (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019664711).

Методы исследования для решения поставленных в диссертационной работе задач включают в себя методы механики сплошной среды и методы вычислительной математики. Реализация программы выполнена на языке C++.

Положения, выносимые на защиту:

- Предложена математическая модель массопереноса в случаях однофазной и двухфазной фильтрации для описания гидродинамического исследования методом кривой восстановления давления в рамках модели двойной пористости в коллекторе трещиновато-порового типа для системы «скважина-пласт».
- Предложены разностные схемы с временными весами на основе метода расщепления модели по физическим процессам и обладающие улучшенными свойствами в части учета пространственных потоков флюида, а также между системой трещин и поровым коллектором.
- Разработан программный комплекс, реализующий математическую модель и предложенный численный алгоритм. Этот комплекс применим для изучения флюидодинамических процессов и решения задач оперативного планирования при разработке месторождений. Выполнены параметрические исследования динамики давления и насыщенности в зависимости от значений проницаемости, влияния ствола скважины и скин-фактора, рассчитано оптимальное время длительности

остановки скважины с минимальными потерями по добыче, необходимое для проведения гидродинамического исследования на неустановившемся режиме.

Личный вклад автора. Автор непосредственно участвовал в постановке цели и задач диссертационной работы. Лично автору принадлежит описание математических моделей, разработка алгоритмов и разработка программного комплекса для решения поставленных задач и его верификации путем сравнения с аналитическим решением и промысловыми данными, а также проведение вычислительных экспериментов, формирование выводов и подготовка научных публикаций.

Степень достоверности и апробация результатов подтверждаются сравнением результатов численного моделирования с промысловыми данными, полученными во время проведения натурного эксперимента, а также воспроизведением известных результатов других исследователей, использованием обоснованных методов построения математических моделей и алгоритмов.

Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинарах Института нефтехимии и катализа УФИЦ РАН, Уфимского государственного нефтяного технического университета, Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН, Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, а также на межрегиональных, всероссийских и международных конференциях:

- Межрегиональная школа-конференция студентов, аспирантов и молодых ученых-физиков «Теоретические и экспериментальные исследования нелинейных процессов в конденсированных средах» (Уфа, 2017 г.);
- Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании (DEAMM)» (Саранск, 2017 г., 2020 г., 2021 г.);
- International conference on information technology and nanotechnology (ITNT - 2018) (Самара, 2018 г., 2019 г.);

- Международная научно-практическая конференция молодых ученых «Актуальные проблемы науки и техники-2018» (Уфа, 2018 г., 2020 г., 2021 г.);
- Международная конференция «Вычислительная математика и математическая геофизика», посвященная 90-летию со дня рождения академика А.С. Алексеева (Новосибирск, 2018 г.);
- Международная конференция «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2019» (АПВПМ-19) (Новосибирск, 2019 г.);
- Международная конференция «Суперкомпьютерные дни в России» (RuSCDays’19) (Москва, 2019 г., 2021 г.);
- Международная научная конференция «Параллельные вычислительные технологии» (ПаВТ) (2020 г., 2022 г.);
- Международная Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 2021 г.);
- Международная научно-практическая конференция «Интеллектуальные информационные технологии и математическое моделирование 2021» (ИИТ&ММ-2021) (пос. Дивноморское, 2021 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 24 научных работы, из них 3 – в изданиях, включенных в перечень ВАК [130, 135, 136], 7 – в изданиях, индексируемых в Scopus [114, 118, 130, 132, 134, 136, 137], получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019664711 [124].

Работа выполнена при поддержке следующих **научных программ**:

1) Проект РФФИ № 19-37-50025 мол_нр «Математическое моделирование течения жидкости в коллекторах трещиновато-порового типа с использованием высокопроизводительных вычислительных систем». Исполнитель Бобренёва Ю.О.
2) Проект РНФ № 21-71-20047 «Разработка теоретических основ и создание высокопроизводительных алгоритмов для двухфазных математических моделей фильтрации жидкости в коллекторах трещиновато-порового типа». Основной исполнитель Бобренёва Ю.О.

Структура и объем работы. Материал диссертационной работы изложен на 129 страницах, состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы из 138 наименований и содержит 4 таблицы и 47 рисунков.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ ПО МАССОПЕРЕНОСУ В КОЛЛЕКТОРАХ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРОВОГО ТИПА

1.1 Актуальность проблемы гидродинамических исследований скважин

Нефтяная промышленность – важнейший сектор мирового хозяйства, которая оказывает значительное влияние на развитие других отраслей промышленности. Россия занимает передовые позиции в нефтяной промышленности. Перспективы развития нефтегазовой отрасли нуждаются в изучении и решении различных сложных вопросов. Одним из основных и важных которых является освоение и эффективная разработка месторождений. Теория разработки месторождений основывается на фундаментальных исследованиях в области физики, химии, математики, геологии, а также на прикладных науках. Важно знание геологических процессов, как в конкретной нефтегазоносной области, так и региона в целом, физики нефтегазовых пластов в залежи, их строения, физико-химических процессов, происходящих в залежи при выработке запасов из продуктивных пластов. Современная технология разработки месторождений базируется на всестороннем изучении свойств продуктивных пластов и содержащихся в них жидкостей и газов, а также изучении сложных процессов, происходящих в пластах при различных сценариях эксплуатации. С момента активного развития нефтегазовой промышленности, масштабного введения в разработку самых различных по своим размерам, глубинам и геолого-физическим свойствам месторождений, основными задачами всех геологов и разработчиков остаются выделение продуктивных залежей, подсчет запасов, проектирование системы разработки месторождения, комплексная оценка существующей системы разработки, обоснование планируемых к бурению скважин с разным типом заканчивания, моделирование различных геолого-технологических мероприятий, связанных с повышением нефтеотдачи пластов. Точность и качество выполнения перечисленных выше целей напрямую зависит от степени изученности рассматриваемого объекта. На данном этапе очень важно понимать фильтрационные особенности коллектора, характер движения жидкостей

в пласте, пространственное распределение зон высоких и низких значений проницаемости. Как правило, наиболее значимым и важным вопросом остается увеличение выработки запасов углеводородов из залежей. Однако при выделении коллекторов, оценках характера их насыщения и подсчетных параметров постоянно возникают трудности. Особенно актуальным данный вопрос остается для карбонатных коллекторов, в которых наличие трещиноватости приурочено к естественному геологическому процессу формирования залежи [1]. Основные характеристики трещинного коллектора – густота и раскрытость трещин, и коэффициент трещинной пористости [2]. Актуальность исследования процессов фильтрации в трещиноватых средах обусловлена тем, что более 60% разведанных мировых запасов углеводородов содержатся в месторождениях, которые той или иной степени характеризуются трещиноватостью [3]. На них приходится доля ~60% запасов нефти и ~30% газа. Основной причиной сложности разработки таких коллекторов является неоднородное строение, в которых наряду с межзерновыми порами почти всегда присутствуют трещины и каверны, составляющие порой значительную долю эффективного порового пространства и способствующие, как правило, формированию глубокой зоны проникновения фильтрата бурового раствора [4]. Фильтрация флюида обусловлена, в первую очередь, трещинами и кавернами. Несмотря на наличие большого объема трещин, разработка таких месторождений является исключительно сложным технологическим процессом, и часто сопровождается трудностями и даже бывает неэффективной [5]. Сложное строение, петрофизическая неоднородность и изменчивость свойств карбонатных коллекторов от месторождения к месторождению делает малоэффективными общепринятые способы исследования [6, 7].

Изучение состояния и свойств продуктивного пласта возможно с помощью разных методов: лабораторных, промыслово-геофизических и гидродинамических. Лабораторные методы основаны на исследовании керна. На сегодняшний день представлена достаточно широкая линейка лабораторного оборудования, позволяющего изучать параметры горных пород. Промыслово-геофизические исследования позволяют определить средние свойства пласта лишь на небольшом

расстоянии от стенки скважины [8]. Гидродинамические методы исследования в свою очередь позволяют определять средние значения на значительных расстояниях от скважины, что способствует определению большего объема информации о работе пласта, и становятся очень важными, поскольку являются единственным более или менее надежным источником информации о фильтрационно-емкостных свойствах пласта по разрезу и в целом [9]. Но также необходимо отметить, что определение трещинной проницаемости в образцах керна, разбитых трещинами, в лабораторных условиях невозможно. При фильтрации флюида в керне измеряется проницаемость одной или нескольких трещин ограниченной протяженности, что весьма условно характеризует трещинную проницаемость породы [10, 11]. Таким образом, одним из эффективных инструментов остаются и являются гидродинамические исследования скважин [12].

Гидродинамические исследования скважин (ГДИС) – система мероприятий, проводимых на скважинах по специальным программам, т.е. замер с помощью глубинных приборов ряда величин (забойного давления, дебитов, температуры), обработка замеряемых данных, определение фильтрационных, геометрических и других параметров пласта, анализ и интерпретация полученной информации о продуктивных характеристиках и выдача рекомендации по их практическому использованию при принятии промысловых решений [12, 13].

Гидродинамические исследования скважин предназначены для изучения продуктивных пластов при их испытании, освоении и эксплуатации в добывающих и нагнетательных скважинах с целью получения данных об их продуктивности и приемистости, фильтрационных параметрах и скин-факторе, трассировки границ пласта и особенностях зон дренирования, типа пласта-коллектора, режима залежи [14].

Цель анализа и интерпретации данных ГДИС заключается в оценке параметров системы по известным входным и выходным данным. Под входными данными подразумевается изменение режима работы скважины, под выходными –

реакция системы «скважина-пласт» в виде изменения забойного давления. Такая задача называется обратной задачей гидродинамики [15, 16].

Основными видами традиционных видов ГДИС на неустановившихся режимах течения являются кривая восстановления давления (КВД) для добывающих скважин (рисунок 1.1) и кривая падения давления (КПД) для нагнетательных скважин (рисунок 1.2) [13].

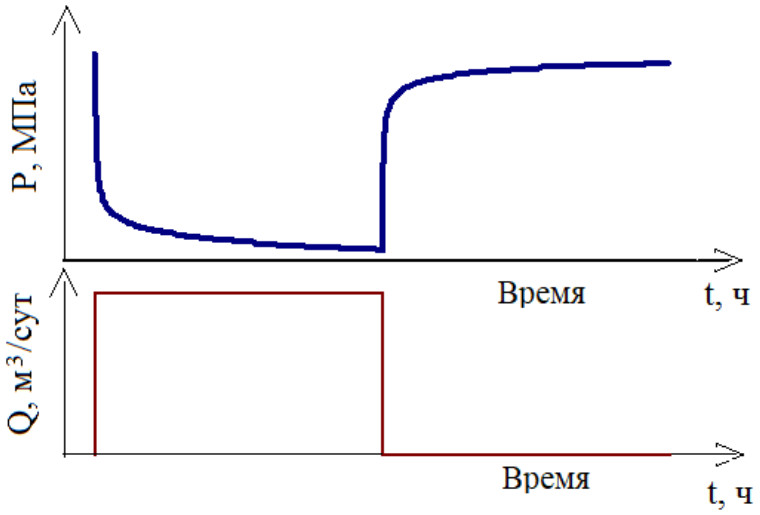


Рисунок 1.1 – Гидродинамическое исследование скважины методом кривой восстановления давления в добывающей скважине

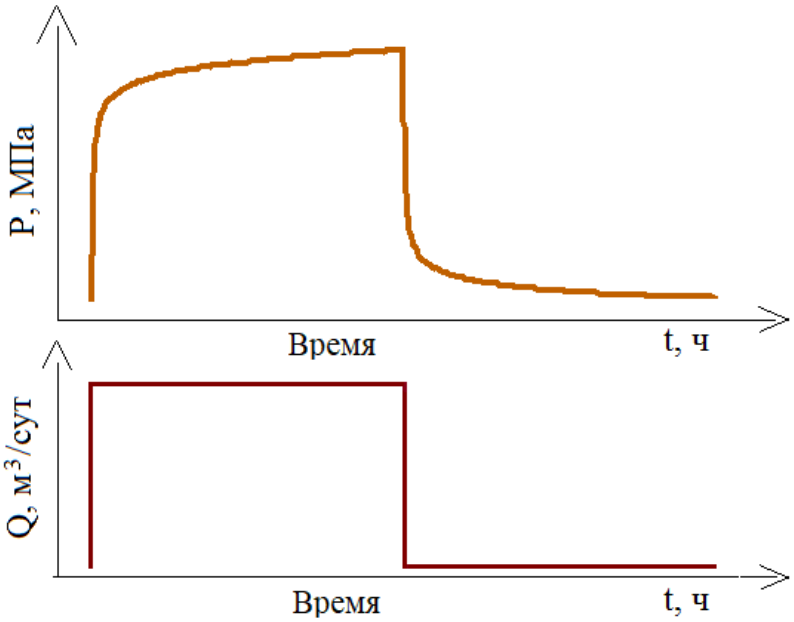


Рисунок 1.2 – Гидродинамическое исследование скважины методом кривой падения давления в нагнетательной скважине

Суть этих методов заключается в анализе данных кривых забойного давления (P) с изменением дебита/приемистости (Q) в период остановки скважины. Для этого строится диагностический график производной давления Бурде по времени в двойных логарифмических координатах [9], где определяются режимы течения. Для корректного определения параметров пласта необходимо получение псевдорадиального режима течения [9, 13, 14]. Главная задача – это получить отклик системы, идентичный реальным испытаниям скважины, тогда параметры модели будут соответствовать параметрам системы. Эта задача называется прямой задачей гидродинамики [17, 18].

При проведении ГДИС возникают свои трудности. Во-первых, это экономическая составляющая, которая представлена затратами на проведение исследования и потерями по добычи за счет остановки скважины. Во-вторых, зачастую скважины находятся в отдаленных районах и в суровых климатических условиях. Поэтому важным является обоснование проведения исследования в случае каждой скважины. Для этого необходимо проводить экспресс-оценку требуемой длительности остановки перед исследованием, а также тщательно изучать поведение процессов флюидодинамики при различных параметрах пласта. Эффективное и адекватное решение данных задач возможно путем средств математического моделирования.

1.2 Математический аппарат для моделирования гидродинамических исследований

Математическим фундаментом для анализа ГДИС на неустановившихся режимах фильтрации является уравнение пьезопроводности в радиальных координатах, описывающее однофазное и одномерное течение флюида в пористой среде [19].

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right) = \frac{\varphi \mu c_t}{k}\frac{\partial P}{\partial t}, \tag{1.1}$$

где P - пластовое давление; r - радиальное расстояние от точки наблюдения до скважины; t - время; $k/\varphi\mu c_t$ - коэффициент пьезопроводности; k - проницаемость; φ - пористость; μ - вязкость; c_t - общая сжимаемость системы.

Вывод уравнения пьезопроводности основывается на трех законах [20, 21]:

Уравнение неразрывности (закон сохранения массы):

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho u_r)}{\partial r} = -\varphi\frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{1.2}$$

Закон Дарси:

$$u_r = -\frac{k}{\mu}\frac{dP}{dr}. \tag{1.3}$$

Уравнение состояния:

$$\mathrm{c} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial P}. \tag{1.4}$$

Уравнение пьезопроводности выражает связь между пластовым давлением, временем и расстоянием от скважины до точки наблюдения. Если наложить начальные и граничные условия, такие как начальное давление, условие на внутренней границе – скважина, условие на внешней границе – границы пласта, и решить уравнение, то получится модель, характеризующая перераспределение давления в пласте. Аналитическое решение дифференциального уравнения пьезопроводности примет вид – решение линейного стока [22, 23]:

$$P_i - P(r,t) = -9.205\frac{qB\mu}{kh}E_i\left(-\frac{\varphi\mu c_t r^2}{0.00144\cdot kt}\right), \tag{1.5}$$

где $E_i(x)$ – экспоненциальный интеграл значения x:

$$E_i(-x) = -\int_x^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du. \tag{1.6}$$

При выводе уравнения пьезопроводности использовались условные допущения: пласт однородный, изотропный, эффективная толщина постоянна, сжимаемость жидкости мала и постоянна. Однако гидродинамические методы определения параметров трещинных коллекторов вследствие сильной неоднородности пласта значительно отличаются от обычных стандартных методов

[24]. Трещиновато-поровые коллектора характеризуются интенсивным обменным потоком жидкости между трещинами и пористыми блоками, что вносит существенные корректировки в известные методы определения фильтрационных параметров [5]. Поэтому, для того, чтобы идентифицировать описанные фильтрационные потоки, необходимы модели, которые бы учитывали также и трещинную составляющую коллектора.

1.3 Процесс массопереноса в трещиноватых коллекторах. Обзор предшествующих исследований

В мировой литературе опубликовано большое количество работ, которые посвящены вопросам изучения параметров карбонатных коллекторов. Результаты фундаментальных исследований докладываются на различных мировых конференциях и научных форумах, посвященных как нефтегазовой и энергетической отрасли в целом, так и трещиноватым коллекторам в частности. Однако, учитывая, что геологические и географические условия залегания трещиноватых коллекторов крайне разнообразны, то одну и ту же технологию добычи нельзя применить для разработки всех месторождений, а зачастую каждая скважина одного месторождения требует индивидуальный подход, т.е. универсальных методик, охватывающих всевозможные ситуаций и проблемы, встречающиеся на практике, еще не разработаны. Задача освоения карбонатного месторождения характеризуется совокупностью различных сложных процессов и носит общий характер.

Карбонатные коллекторы в силу физико-химических свойств, предрасположенности к растрескиванию, выщелачиванию, а также перекристаллизации образуют достаточно сложную микроструктуру пустотного пространства [2, 25]. Трещиноватостью и кавернозностью в той или иной степени обладают все карбонатные породы, которые могут быть коллектором нефти или газа [6]. Но известны залежи в карбонатных коллекторах обладающих высокой пористостью и межпоровой проницаемостью, где трещины играют подчиненную роль, и в таком случае методология изучения данных залежей мало отличается от

подходов, применяемых для терригенных коллекторов гранулярного типа. Трещиноватый пласт характеризуется дискретностью свойств в связи с наличием двух видов пустотности [4]. Поровый коллектор (в дальнейшем матрица) обладает более мелкими порами (пустотами) и отличается значительной вмещающей способностью, но низкими фильтрационными свойствами. Трещинная составляющая, наоборот, характеризуется низкими емкостными, но высокими фильтрационными свойствами [26].

Процесс фильтрации флюида в трещиноватых коллекторах также значительно изменяется [18], так как присутствуют две поровые системы - система трещин и матрица с различными значениями геометрических размеров и фильтрационно-емкостных свойств (рисунок 1.3) [14].

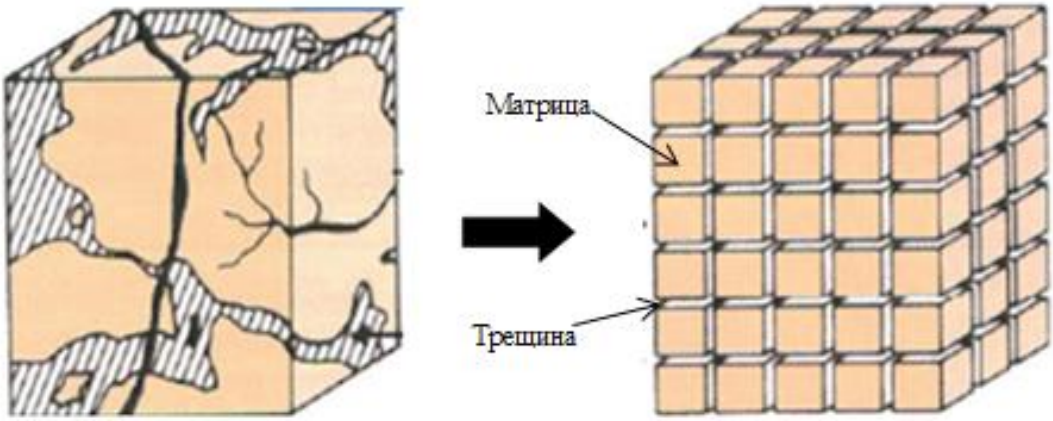


Рисунок 1.3 – Модель трещиноватого пласта [4]

Расчетом характеристик течения в особых условиях резкой неоднородности коллектора занимались разные авторы [26-30].

Рассмотрим модели: Оде, Полларда, Уоррена-Рута, Каземи и де Сваана.

В модели Уоррена – Рута [4, 26] трещиноватый пласт аппроксимирован одинаковыми прямоугольными параллелепипедами, которые обладают высокой пористостью и низкой проницаемостью. Низкопроницаемая поровая часть разделена сетью естественных трещин, которые в свою очередь обладают высокой проницаемостью и низкой пористостью. Рассматривается, что движение жидкости к скважине происходит только по системе естественных трещин, а матрица непрерывно подпитывает всю систему трещин. В модели двойной пористости

матрица и трещины имеют индивидуальные свойства и характеризуются собственными значениями проницаемости, сжимаемости и пористости.

Модель де Сваана описывает неустановившееся течение жидкости на основании предположения, что матрица представляет собой правильные геометрические формы или сферические блоки [4, 27]. Сферы укладываются в правильном пространстве и объем трещин представлен пространством между сферами.

Оде в своей модели исходя из анализа, что вмещающая способность двух систем (матрицы и трещин) в общем настолько схожа, что после перехода от нестационарного к стационарному течению наступает такой период, когда трещиноватый пласт ведет себя как однородный. Поэтому модель Оде рассматривается как модель обычного пласта [4, 31].

В модели Каземи трещиноватый пласт представлен слоистой системой, состоящей из тонких слоев с высокой проводимостью, которые моделируют трещины, чередующих со слоями, представляющими матрицу большой мощности с низкой проводимостью и высокой емкостной характеристикой [4, 28]. С помощью численного интегрирования, изменения давления в скважине во времени эта модель дает результаты, удовлетворительно совпадающие с результатами модели Уоррена-Рута для случаев равномерного распределения трещин и при сочетании высокой вмещающей способности матрицы с возможностью интенсивных перетоков жидкости из матрицы в трещины.

В модели Полларда изменение давления рассчитывается как результат взаимодействия трех областей, которые развиты в трещиноватом пласте [4, 29]. Первую область образует система трещин вокруг скважины, вторую – вся трещинная система пласта вдали от скважины и третья – матрица, которая питает трещины. Вначале падение давления связано с системой естественных трещин, окружающих скважину, затем с системой всего пласта и только на третьей стадии – с падением давления в матрице. После того, как давление в матрице снизилось, процесс течения быстро становится квазистационарным. Модель Полларда не учитывает радиальную геометрию течения и сводит задачу к простому процессу

расширения, что в некоторых случаях дает приемлемые результаты, но часто приводит к значительным погрешностям.

Рассмотрим основные уравнения течения жидкости.

Математические модели движения жидкости были разработаны в конце 50-х годов Г. И. Баренблаттом, Ю. П. Желтовым, И. Н. Кочиной [22, 23]. В современной литературе эта модель двойной пористости (в порах и в трещинах) известна как модель Баренблатта [4]. Модель характеризуется наличием обмена давлениями между фазами. Обе среды – система трещин и блоки матрицы он рассматривал как две сплошные среды, вложенная одна в другую, причем параметры движения жидкости и среды определяются в каждой математической точке. Уравнения движения и сохранения массы записываются отдельно и независимо для каждой среды. Переток флюида из одной среды в другую учитывается с помощью введения функции источника – стока в уравнениях сохранения массы.

Баренблатт предполагал, что пласт однороден, изотропен и течение в обеих средах находится в пределах справедливости закона Дарси [22].

Уоррен и Рут представили в несколько уточненной постановке решение той же задачи [26]. Они учитывали сжимаемость трещин, но пренебрегали движением жидкости в блоках матрицы. Соответствующие уравнения для радиального течения имеют вид:

$$\begin{aligned} &\varphi_m c_m \frac{\partial P_m}{\partial t} + \alpha \frac{k_m}{\mu}\left(P_m - P_f\right) = 0, \\ &\varphi_f c_f \frac{\partial P_f}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{k_f}{\mu} r \frac{\partial P_f}{\partial r}\right) - \alpha \frac{k_m}{\mu}\left(P_m - P_f\right) = 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Рассматривались следующие начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} &t = 0,\ P_m(r,0) = P_f(r,0) = P_0, \\ &r = r_w, \qquad q = -2\pi r_w \frac{k_f}{\mu}\frac{\partial P_f}{\partial r}, \qquad \text{когда } t > 0, \\ &r = r_\infty,\ P_m = P_f = 0, \qquad \text{когда } t > 0; \end{aligned} \tag{1.8}$$

Они определили соответствующие безразмерные параметры и представили уравнения (1.7) и условия (1.8) в безразмерной форме:

$$P_D = \left(\frac{2\pi k_f h}{q\mu}\right)[P_0 - P(r,t)], \qquad r_\sigma = \frac{r}{r_w},$$
$$t_D = k_f t/[(c_m\varphi_m + c_f\varphi_f)\mu r_w^2], \tag{1.9}$$
$$\lambda = \alpha k_m r_w^2/k_f, \qquad w = \varphi_f c_f/(\varphi_f c_f + \varphi_m c_m).$$

Уравнения (1.9) в сочетании с граничными условиями дают:

$$\frac{1}{r_D}\frac{\partial}{\partial r_D}\left(r_D\frac{\partial P_{Df}}{\partial r_D}\right) - \omega\frac{\partial P_{Df}}{\partial t_D} - (1-\omega)\frac{\partial P_{Dm}}{\partial t_D} = 0,$$
$$(1-\omega)\frac{\partial P_{Dm}}{\partial t_D} - \lambda\left(P_{Df} - P_{Dm}\right) = 0, \tag{1.10}$$

при

$$t_D = 0, \qquad P_{Dm} = P_{Df} = 0,$$
$$r_D = 1, \qquad \frac{DP_f}{\partial r_D} = -1, \qquad \text{когда } t_D > 0, \tag{1.11}$$
$$r \to \infty, \qquad P_{Dm} = P_{Df} = 0, \qquad \text{когда } t \geq 0.$$

Решение, полученное с помощью преобразования Лапласа, имеет вид [4]:

$$P_{Df}(r_D, t_D) = L^{-1}\left\{\frac{K_0\left[r_D\sqrt{Sf(S)}\right]}{S\sqrt{Sf(S)}K_1\sqrt{Sf(S)}}\right\}, \tag{1.12}$$

где L^{-1} – оператор обратного преобразования Лапласа:

$$f(S) = \frac{[\omega(1-\omega)S + \lambda]}{[(1-\omega)S + \lambda]}, \tag{1.13}$$

K_0 и K_1 – модифицированные функции Бесселя второго порядка соответственно нулевой и первой степени.

Уравнение (1.12) в общем случае не может быть получено аналитически. Однако асимптотическое решение для малых значений $Sf(S)$ может быть получено при рассмотрении только первых членов ряда по функциям Бесселя. Таким образом, преобразованное уравнение (1.12) будет иметь вид:

$$P_{Df}\,(1,t_D) = \frac{1}{2}\left\{0.80908 + lnt_D + E_i\left[\frac{\lambda t_D}{\omega(1-\omega)}\right] - E_i(-\frac{\lambda t_D}{(1-\omega)})\right\}, \qquad (1.14)$$

где E_i – интегральная экспоненциальная функция, определяемая выражением

$$E_i(-x) = -\int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du. \qquad (1.15)$$

Перераспределение флюида между матрицей и трещинами количественно характеризуется с помощью параметра α (таблица 1.1) и главным образом зависит от [4, 13]:

- формы, которая учитывается с помощью параметра n. Этот параметр определяет, в каких направлениях (X, Y, Z) возможен обмен флюида между матрицей и трещинами. Чем выше n, тем легче идет перераспределение флюида:

Таблица 1.1 - Геометрический коэффициент

	Общая форма	Куб/сфера	Призма/ цилиндр	Плита
Форма	**n**	**3**	**2**	**1**
Геометрический коэффициент	$\alpha = \frac{4n(n+2)}{l_m^2}$	$\alpha = \frac{60}{l_m^2}$	$\alpha = \frac{32}{l_m^2}$	$\alpha = \frac{12}{l_m^2}$

- размеров блоков матрицы, где l_m – характеристический размер блока матрицы, равный:

$$l_m = \alpha, \qquad \text{для n = 1,}$$
$$l_m = 2ab/(a+b), \qquad \text{для n = 2,} \qquad (1.16)$$
$$l_m = \frac{3abc}{(ab+bc+ac)}, \qquad \text{для n = 3,}$$

где a, b, c – длина различных перпендикулярных сторон блока.

Для описания взаимосвязи между двумя областями пласта с разными видами пустотности введены дополнительные параметры [26]:

1. Коэффициент доли трещинно-кавернозной емкости (storativity ratio), ω - это коэффициент упругоемкости пласта, который определяется по формуле (1.17),

то есть доля флюидов, накопленных в системе трещин (например, ω=0.08 означает процентную долю 8%). Чем выше данный коэффициент, тем больше в пласте трещинно-кавернозной емкости. Типичные значения коэффициента от 10^{-2} до 10^{-4}.

$$\omega = \frac{\varphi_f c_f}{\varphi_f c_f + \varphi_m c_m}. \quad (1.17)$$

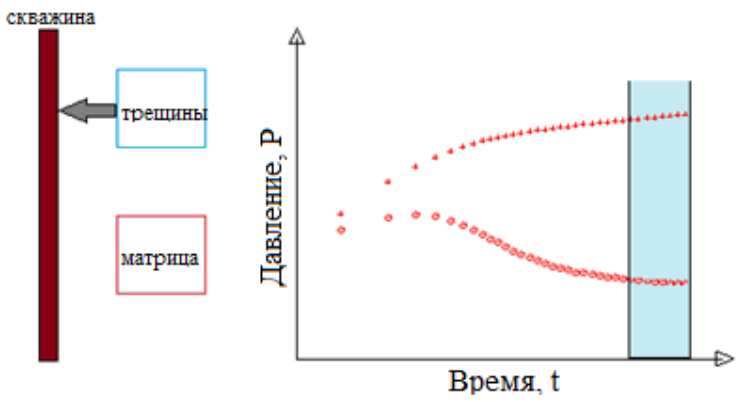
2. Удельный коэффициент проводимости (transmissivity ratio), λ, который характеризует способность фильтрации из матрицы в трещины и определяется по формуле (1.18). Типичные значения коэффициента изменяются от 10^{-3} до 10^{-9}. Коэффициент зависит от размеров и геометрии матричных блоков, а также от отношения k_m/k_f. С увеличением данного коэффициента увеличивается способность матрицы участвовать в фильтрации системы. Матрицы низкой проницаемости характеризуются меньшими значениями данного коэффициента.

$$\lambda = \alpha \frac{k_m}{k_f} r_w^2. \quad (1.18)$$

Фильтрацию флюида в трещиноватом пласте можно условно разделить на три стадии [(24), (32), (33)]:

Ранняя стадия. Благодаря тому, что трещина имеет более высокую проницаемость, на ранней стадии испытаний приток флюида к скважине осуществляется только за счет системы трещин при отсутствии перераспределения давления в матрице. В этот период трещиноватый пласт можно рассматривать как однородный, с проницаемостью k_f и трещинно-кавернозной емкостью $\varphi_f c_f$. Данный режим проявляется в течение очень короткого времени и не всегда идентифицируется на графиках из-за эффекта сжимаемости жидкости в стволе скважины.

Если эффект влияния ствола скважины не скрывает этот период, то на графике в полулогарифмических координатах можно будет увидеть прямолинейный участок данных, характерный для радиального режима течения и определяющий проницаемость трещины. А на диагностическом графике этому периоду соответствует стабилизация производной (рисунок 1.4).



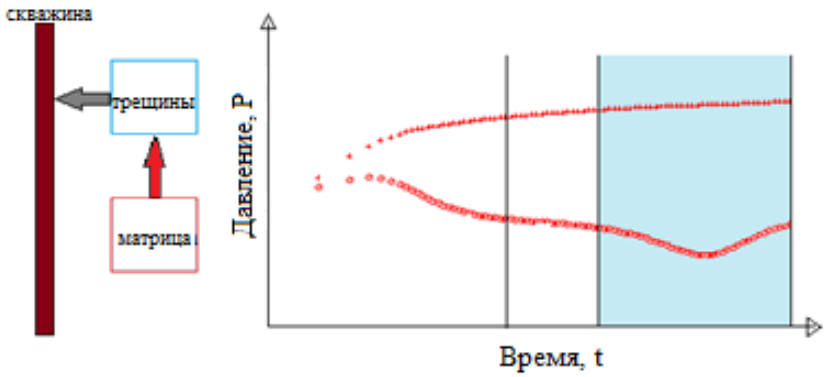
а) б)

а) Схема системы «скважина-трещина-матрица»

б) Диагностический график в билогарифмических координатах

Рисунок 1.4 – Ранний период. Радиальный приток по системе трещин

Переходная стадия. В тот период, когда начинается переток из матрицы в трещину, обеспечивается дополнительное поддерживание давления в трещинах, так как флюид в матрице до сих пор находился при начальном пластовом давлении.



а) б)

а) Схема системы «скважина-трещина-матрица»

б) Диагностический график производной Бурде в двойных логарифмических координатах

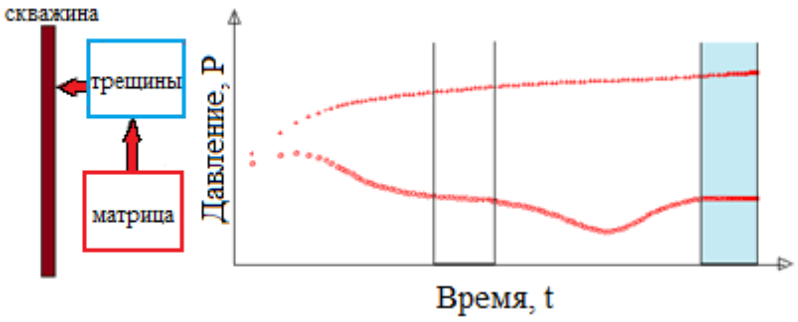
Рисунок 1.5 – Переходный период. Перераспределение давления между системой трещин и матрицей

Анализ притока флюида из матрицы в трещину показывает, что сначала перераспределение давления в блоках матрицы определяется неустановившимся режимом фильтрации, а затем устанавливается псевдоустановившийся режим,

соответствующий истощению (или снижению давления) блоков матрицы (рисунок 1.5).

Если переходный период не скрыт эффектом влияния ствола скважины, то он характеризуется скачком производной давления вниз на диагностическом билогарифмическом графике (рисунок 1.5). Положение и амплитуда этого скачка определяются параметрами ω и λ.

Поздняя стадия. После завершения переходного периода, когда перепад давления между матрицей и трещиной исчезает, пласт опять можно охарактеризовать как однородный: с проницаемостью k_f, и емкостью $\varphi_f c_f + \varphi_m c_m$. При этом на графике в билогарифмических координатах (рисунок 1.6) образуется второй радиальный участок (параллельный первому радиальному периоду).



а) б)

а) Схема системы «скважина-трещина-матрица»

б) Диагностический график производной Бурде в двойных логарифмических координатах

Рисунок 1.6 – Поздний период. Радиальный приток по всей системе

На диагностическом билогарифмическом графике этот период соответствует второй стабилизации производной.

Таким образом, диагностический график в билогарифмических координатах для модели двойной пористости в общем случае выглядит следующим образом (рисунок 1.7):

Первая стабилизация производной соответствует радиальному притоку по системе трещин.

Скачок производной вниз соответствует перераспределению давления между матрицей и системой трещин.

Вторая стабилизация производной соответствует радиальному притоку трещинно-матричной системы.

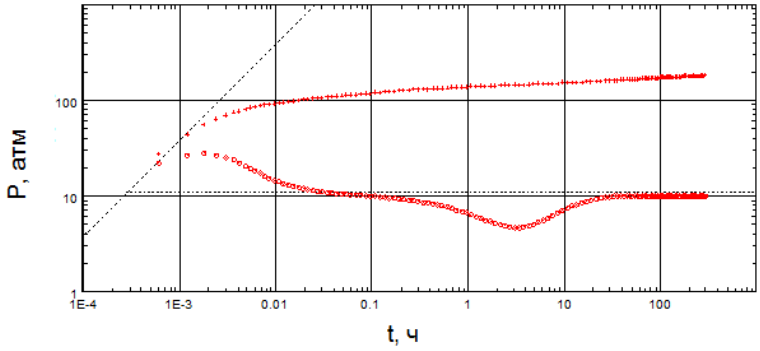


Рисунок 1.7 – Диагностический график производной Бурде в двойных логарифмических координатах модели двойной пористости

На полулогарифмическом графике (рисунок 1.8) наблюдаются две параллельные линии, одна из которых характеризует проницаемость трещин, а другая проницаемость трещинно-матричной системы. Смещение по вертикали второго радиального участка относительно первого на графике в полулогарифмических координатах зависит от параметра ω.

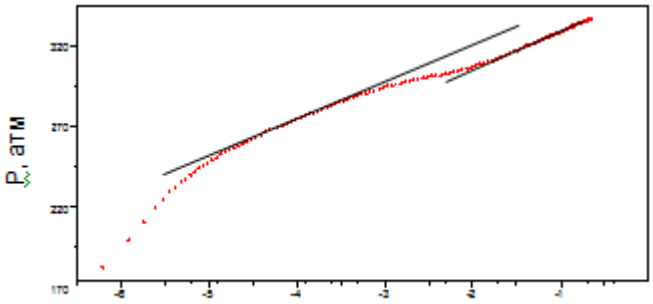


Рисунок 1.8 – Диагностический график в полулогарифмических координатах модели двойной пористости

Так как проницаемость трещин велика относительно проницаемости матрицы, то мы имеем две прямые линии с одинаковым углом наклона.

Рассмотрим научные подходы современников, предлагаемые к исследованию процессов фильтрации жидкости в трещиновато-поровых коллекторах.

В работе Шарнова А.И [34] предложены аналитические приемы решений дифференциального уравнения для описания фильтрации однородной жидкости в трещиновато-пористых средах. За основу берутся уравнения Уоррена-Рута. Решены полная и усеченная системы, проведен анализ полученных зависимостей для конкретных условий разработки трещиноватых пластов на режиме истощения. Также рассматривалась различная геометрия фильтрационных потоков. Расчет позволил провести оценку запасов жидкости в коллекторах с двойной пористостью. Щипанов А.А. в своей работе [35] провел сравнение многофазной фильтрации в пористой и трещиноватой средах с учетом ее деформации и разработал программное обеспечение, позволяющее моделировать фильтрацию в деформируемой среде. За основу были взяты известные математические модели, представленные в [4, 10, 20, 22]. В статье Куштановой Г.Г. [36] численно исследуются нестационарные режимы фильтрации в трещиновато-пористых средах. Плоско-радиальная фильтрация описывается уравнениями Баренблатта Г.И. [22]. Проводится сравнение численного расчета с промысловыми данными, полученными при гидродинамическом исследовании методом кривой падения давления, которое выявило, что упругоемкость трещин много меньше упругоемкости блоков. В работе Томина П.Ю. [37] предложен и разработан многомасштабный многосеточный алгоритм, с помощью которого построены эффективные функции относительных фазовых проницаемостей для сред сложной структуры, в частности для трещиновато-поровых коллекторов. Рассмотрены случаи связной и несвязной системы трещин и сравнены динамики обводненности скважины для всех возможных случаев. Григорьев А.В. [38] в своих трудах использует модель однофазной фильтрации флюида в трещиновато-пористой среде, в основе которой лежат дифференциальные уравнения Баренблатта [22]. Основной упор в работе делается на построение численной схемы, где применяется схема расщепления по пространственным переменным. В работе [39] группой авторов представлена математическая модель двухфазной фильтрации в коллекторе с тектоническими нарушениями типа «сдвиг» и «сброс». Течение жидкости по трещине разлома описывается специальной системой уравнений

фильтрации, которые осредненены по ширине трещины разлома. За основу приняты уравнения представляющие известную модель двухфазной фильтрации [22]. В результате расчетов ими был разработан упрощенный численный метод, позволяющий моделировать процесс фильтрации вблизи окрестности тектонического разлома. Дуркин С.М. [40] разработал и реализовал программный код, который позволяет учитывать и моделировать специфические особенности движения жидкости в коллекторе трещиновато-порового типа. Он предлагает принципиально новую модель двойной пористости, которая позволяет явно задавать параметры трещин. В его схеме приток флюида идет как по трещинам, так и в матричных блоках, а также поступает в трещины из матричных блоков и наоборот. Смоделированные кривые восстановления давления в период проведения исследования в билогарифмических координатах показывают режимы течения такие как: линейный, билинейный и радиальный. Периодов подключения матрицы в работу, как это наблюдается в моделях [26, 28] на кривой производной давления не выявлены. Научные результаты в работе [41] основаны на усовершенствовании методики [42] интерпретации промыслово-геофизических совместно с гидродинамическими исследованиями [43, 44] с целью определения геометрических параметров системы естественных трещин, участвующих в дренировании пласта. Расчеты проводятся в известных программных обеспечениях, где заложены модели [30]. В работе Суходановой С.С. [44] разрабатывается подход для повышения достоверности геолого-фильтрационной модели с использованием анализа гидродинамических, геофизических и сейсмических исследований в коллекторах трещиноватого типа на примере конкретного месторождения. Подход строится и обосновывается на уже известных математических моделях и программных обеспечениях. Черепанов С.С. в своих трудах [45] также, как и предыдущий автор предлагает методику оценки трещиноватости турне-фаменских отложений, для повышения достоверности прогнозирования распространения коллекторов. За основу приняты ранее известные геофизические методы, математические модели и программные продукты. В работе [46] предлагается физико-математическая модель течения

жидкости в дискретной системе трещин и каверн. Течение в трещинах описывается моделью смазочного слоя, а в кавернах- законом Пуазейля ламинарного течения в узком канале. Модель применима в рамках описания течения жидкости в образце керна. Научные труды группы авторов [47] анализируют подходы моделирования течений в трещиноватом коллекторе на трех уровнях (микро-, мезо-, макромасштабе). Представлено формальное математическое описание геометрии трещин и разработан алгоритм построения расчетной сетки, также рассмотрены особенности многофазных течений. В работе [48] группа авторов проводит численное моделирование задачи двухфазной фильтрации в трещиновато-поровом коллекторе. За основу берется математическая модель Баренблатта, в качестве функции перетока между матричными блоками и трещинами используется работа Каземи [28], а также предлагается альтернативный вариант, базирующий на концепции баланса жидкостей в смеси.

В ходе проведенного анализа вышеперечисленных работ выявлено, что основное развитие темы направлено на построение сложных гидродинамических моделей всего месторождения, которые требуют сложные модели и дополнительную труднодоступную информацию об объекте, что не эффективно для оперативных производственных задач в рамках мониторинга месторождения. Поэтому, рассматриваемый вопрос о течении жидкости в коллекторе трещиновато-порового типа и поведение кривых давлений при проведении гидродинамических исследований скважин остается нерешенным полностью и требует дальнейшего изучения.

1.4 Двухфазная фильтрация несмешивающихся жидкостей

При проектировании и разработке нефтяных и газовых месторождений в пористой среде важно исследовать течение одновременно нескольких жидкостей. Как правило, это газ, нефть и вода, которые представляют собой обособленные фазы, не смешивающиеся между собой.

Залежь формируется в результате оттеснения из продуктивных пластов первоначально залегавшей там воды [22]. Поэтому совместно с нефтью и газом в

коллекторах содержится некоторое количество пластовой воды [49]. Таким образом, даже еще в неразбуренном пласте может находиться несколько отдельных подвижных фаз [50]. Двух- или трехфазное течение возникает всегда при разработке нефтяных месторождений [23].

Рассмотрим наиболее простое двухфазное течение флюида, которое соответствует вытеснению жидкости, первоначально заполнявшей поры, другой жидкостью, и не смешивающейся с первой жидкостью. В основном вытеснение нефти из пласта будет происходить водой (реже газом). При разработке месторождений основана технология извлечения нефти из продуктивных коллекторов с помощью воды или газа [20]. Данный процесс является основным как в случае естественного водонапорного режима (например, при вторжении в пласт краевой воды, либо газовой шапки, которые продвигают нефть к эксплуатирующим скважинам), так и в случае вторичных методов добычи нефти (например, закачка жидкости или газа через систему нагнетательных скважин с целью поддержания пластового давления и продвижения нефти к эксплуатирующим скважинам) [51].

В случае пренебрежения капиллярными силами и влиянием силы тяжести, а также когда поверхностное натяжение между фазами невелико, то процесс вытеснения можно представить простым математическим описанием. Это описание было впервые предложено американскими исследователями С. Бакли и М. Левереттом в 1942 г. Математическое описание основывается на таких понятиях как насыщенность, относительные фазовые проницаемости и закон Дарси. Такой анализ одномерных течений позволяет выявить основные эффекты и характерные особенности совместной фильтрации двух жидкостей.

Рассмотрим процесс вытеснения. На рисунке 1.9 представлен образец однородной и изотропной пористой среды, направление течения – горизонтальное. Пусть w – площадь сечения образца, и предположим, что оно достаточно малое, благодаря чему давление и насыщенность можно считать постоянными по сечению. В связи с тем, что капиллярным давлением пренебрегли, давление в

нефтяной и водяной фазах считаем одинаковыми, фазы несжимаемы и температура постоянна.

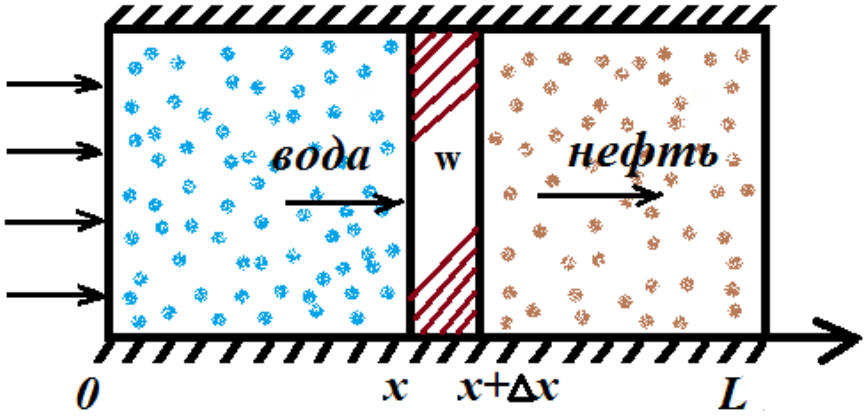


Рисунок 1.9 – Схема вытеснения нефти водой

Образец (рисунок 1.9) изначально заполнен нефтью. Далее через сечение x=0 закачивается вода. В период вытеснения нефти водой образуется зона совместного движения жидкостей. В процессе совместного течения фаз в пористой среде, по крайне мере, одна из них образует связную систему, которая будет граничить со скелетом породы и частично со второй жидкостью. Площадь взаимодействия каждой из фаз со скелетом пористой среды значительно превышает площадь контакта фаз между собой. Это говорит о том, что основной вклад в сопротивление движению дает именно взаимодействие каждого флюида с твердым скелетом пласта, и в первом приближении можно пренебречь эффектом увлечения одной жидкостью другой. При этом, сопротивление, которое испытывает каждая из фаз при совместной фильтрации, отличается от того сопротивления, которое было бы при течении только одной из них. Опытным путем получено то, что расход каждой фазы растет при увеличении насыщенности и градиента давления.

Закон фильтрации для каждой фазы можно представить в дифференциальной форме в виде закона Дарси [19]:

$$w_{\text{в}} = \frac{Q_{\text{в}}}{\omega} = -k\,\frac{k_{\text{в}}(s)\partial p}{\eta_{\text{в}}\partial x},$$
$$w_{\text{н}} = \frac{Q_{\text{н}}}{\omega} = -k\,\frac{k_{\text{н}}(s)\partial p}{\eta_{\text{н}}\partial x}, \qquad (1.19)$$

здесь $w_в$, $w_н$ скорости фильтрации воды и нефти; $Q_в$, $Q_н$ - объемные расходы воды и нефти; $\eta_в$, $\eta_н$ - коэффициенты динамической вязкости фаз; $k_в(s)$, $k_н(s)$ - относительные фазовые проницаемости; $s = s_в$ - водонасыщенность.

Водо- и нефтенасыщенность связаны соотношением:

$$s_в + s_н = 1. \tag{1.20}$$

Сформулируем закон сохранения массы каждой фазы [52]. Для воды изменение массы находится согласно направления течения по оси x, плотность $\rho_в$ будет постоянной исходя из предположения о несжимаемости. Через сечение x (рисунок 1.9) за время Δt втекает в объем ΔV масса воды $\rho_в \cdot \omega \cdot w_в\,(x,t) \cdot \Delta t$, а вытекает через $x + \Delta x$ масса $\rho_в \cdot \omega \cdot w_в\,(x + \Delta x, t) \cdot \Delta t$, таким образом изменение массы воды в ΔV за время Δt будет равняться:

$$\rho_в \cdot [w_в\,(x,t) - w_в\,(x + \Delta x, t)] \cdot \frac{\Delta V}{\Delta x} \cdot \Delta t, \tag{1.21}$$

здесь

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = \omega. \tag{1.22}$$

Необходимо, чтобы изменение массы было сбалансировано за счет изменения во времени водонасыщенности в поровом объеме:

$$\varphi \cdot \rho_в \cdot [s \cdot (x, t + \Delta t) - s(x,t)] \cdot \Delta V. \tag{1.23}$$

Приравняв два последних выражения, и поделив обе части равенства на $\rho_в \cdot \Delta V \cdot \Delta t$ и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0, \cdot \Delta t \to 0$, получаем:

$$-\frac{\partial w_в}{\partial x} = \varphi \frac{\partial s}{\partial t} \quad \text{или} \quad \varphi \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial w_в}{\partial x} = 0. \tag{1.24}$$

Таким же способом выводится уравнение сохранения массы нефти:

$$\varphi \frac{\partial s_н}{\partial t} + \frac{\partial w_н}{\partial x} = 0. \tag{1.25}$$

Учитывая (1.20) формулу (1.25) можно представить:

$$-\varphi \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial w_н}{\partial x} = 0. \tag{1.26}$$

Просуммировав уравнения неразрывности (1.24) и (1.26) для обеих фаз, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x}(w_{\text{н}} + w_{\text{в}}) = 0. \tag{1.27}$$

Отсюда находится первый интеграл:

$$w_{\text{н}} + w_{\text{в}} = w(t) \text{ или } Q_{\text{н}} + Q_{\text{в}} = Q(t). \tag{1.28}$$

(1.27) и (1.28) показывают, что суммарная скорость двухфазного потока $w(t)$, а также и суммарный расход фаз $Q(t)$ не зависят от x, то есть являются постоянной величиной, либо известной функцией. Это есть следствие предположения о несжимаемости фаз.

Уравнения (1.19), (1.24), (1.26) или (1.28) полностью описывают процесс вытеснения и позволяют определить неизвестные функции $s(x,t)$, $w_{\text{в}}(x,t)$, $w_{\text{н}}(x,t)$ и $p(x,t)$. Проведя небольшие выкладки, можно получить уравнения, содержащие только водонасыщенность.

Из (1.19) исключим градиент давления, поделив почленно одно уравнение на другое. Получим:

$$\frac{w_{\text{в}}}{w_{\text{н}}} = \frac{Q_{\text{в}}}{Q_{\text{н}}} = \frac{k_{\text{в}}(s)}{\eta_0 k_{\text{н}}(s)}, \tag{1.29}$$

где $\eta_0 = \eta_{\text{в}}/\eta_{\text{н}}$.

Применяя правило производных пропорций и с учетом формулы (1.28), получаем:

$$\frac{w_{\text{в}}}{w(t)} = \frac{Q_{\text{в}}}{Q(t)} = \frac{k_{\text{в}}(s)}{k_{\text{в}}(s) + \eta_0 k_{\text{н}}(s)}. \tag{1.30}$$

Введем обозначение:

$$f(s) = \frac{k_{\text{в}}(s)}{k_{\text{в}}(s) + \eta_0 k_{\text{н}}(s)}. \tag{1.31}$$

Из (1.30) находим:

$$w_{\text{в}} = f(s) \cdot w(t) \text{ и } w_{\text{н}} = [1 - f(s)] \cdot w(t). \tag{1.32}$$

Функция насыщенности $f(s)$ называется функцией распределения потоков фаз или функцией Бакли-Леверетта. Формула (1.32) показывает, что отношение скорости фильтрации вытесняющей фазы и суммарной скорости, равна объемной доле воды в суммарном потоке двух фаз. $f(s)$ имеет значимую роль при гидродинамических

расчетах двухфазных потоков, определяет полноту вытеснения, а также характер распределения насыщенности по пласту. Задача повышения нефтеотдачи сводится к применению таких воздействий на пласт, которые имеют вид $f(s)$ в направлении увеличения полноты вытеснения.

По (1.31) видим, что $f(s)$ полностью определяется относительными фазовыми проницаемостями. График $f(s)$ и ее производная представлены на рисунке 1.10.

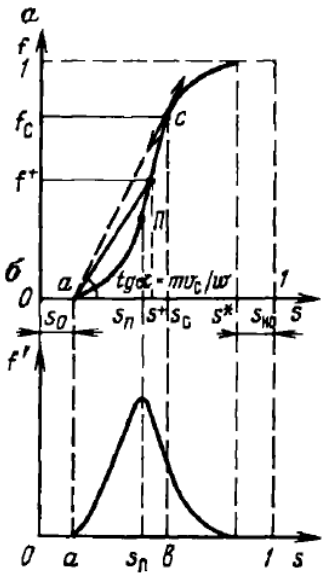


Рисунок 1.10 – Зависимость объемной доли вытесняющей фазы (воды) в потоке f (рис. а) и ее производной от насыщенности (рис. б) [50]

По графику наблюдается, что при росте водонасыщенности $f(s)$ монотонно возрастает в промежутке от 0 до 1.

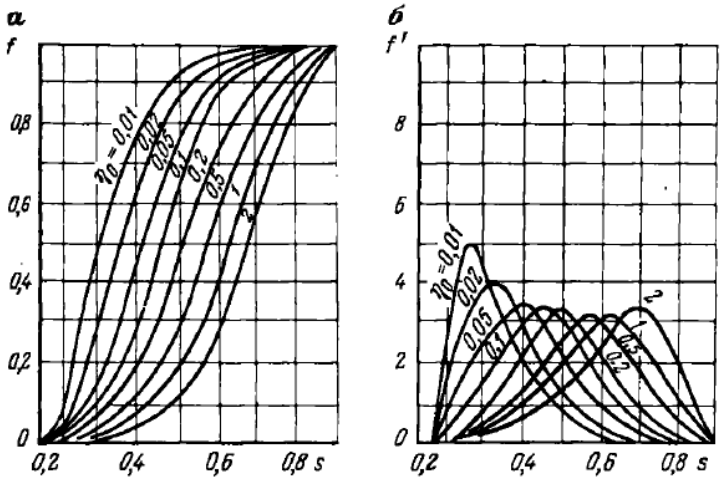


Рисунок 1.11 – Графики функции Бакли-Леверетта (рис. а) и ее производной (рис. б) для различных отношений коэффициентов вязкости [50]

Графики функций $f(s)$ и $f'(s)$ для различных отношений коэффициентов вязкости фаз $\eta_0 = \eta_в/\eta_н$ представлены на рисунке 1.11.

Подставив (1.32) для $w_в$ в уравнение (1.24), получим:

$$\varphi \frac{\partial s}{\partial t} + w(t) \frac{\partial f(s)}{\partial x} = 0. \tag{1.33}$$

Поскольку насыщенность зависит от двух переменных $s = s(x,t)$, то используя дифференцирование сложной функции к $\frac{\partial}{\partial t} f\ [s(x,t)]$, получим:

$$\frac{\partial f(s)}{\partial x} = \frac{\partial f(s)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = f^{'}(s) \frac{\partial s}{\partial x}. \tag{1.34}$$

Сделав некоторые преобразования, приводим (1.29) к виду:

$$\varphi \frac{\partial s}{\partial t} + w(t) \cdot f'(s) \frac{\partial s}{\partial x} = 0. \tag{1.35}$$

(1.35) является дифференциальным уравнением только относительно насыщенности. Решив уравнение (1.35), независимо от распределения давления $p(x,t)$, можно получить изменение насыщенности во времени по пласту. Данное уравнение носит название Бакли-Леверетта, в честь авторов.

Для нахождения распределения насыщенности к (1.35) необходимо добавить начальное и граничное условия. Они могут задаваться как некоторые функции, либо константами. Случай кусочно-постоянных начальных данных имеет важное [50] значение в практике. Значение начальной водонасыщенности влияет на процесс заводнения и определяет структуру зоны вытеснения.

1.5 Обзор программных продуктов для моделирования

Некоторые процессы и проблемы разработки, часто, невозможно описать с помощью аналитических подходов, либо получается решение путем использования ряда допущений, которые могут негативно сказаться на адекватности полученного результата. В таких случаях, для решения задач математической физики необходимо использование численных методов с применением специальных компьютерных программ [53-56]. Численные методы позволяют преобразовывать дифференциальные уравнения в системы алгебраических уравнений [57-62]. Для решения полученных систем используют итерационные методы [63]. При этом

важной задачей является обеспечение сходимости итерационного процесса, что в значительной степени определяет время вычисления задачи. В учебно-методических материалах [64] рассматривается устойчивость численных схем решения задач, построенных конечно-разностным методом. Обсуждаются проблемы граничной неустойчивости численных схем, и предлагается метод повышения эффективности путем их регуляризации. В статье [65] приводится алгоритм численного решения системы параболических уравнений и доказывается его устойчивость. Определяются условия, которые гарантируют применимость процедур прогонки и предлагается оценка на шаг дискретизации по времени, где итерационный процесс имеет внутреннюю сходимость.

Точность решения зависит от шага координатной сетки и количества итераций [66-70]. Численные методы [71-76], реализуемые на мощных ЭВМ [77-79], позволяют осуществлять широкомасштабные вычислительные эксперименты [80-86]. Например, в работе [80] проведено моделирование фильтрации флюидов в талой и гидратной зоне для газогидратного месторождения.

При исследовании гидродинамических исследований приходится сталкиваться с обработкой больших массивов данных. Этот массив представляет собой набор данных давления замеренных в период проведения исследования и является исходными данными для проведения анализа. От качества обработки исходного числового материала существенно зависит качество полученного результата. Имеются работы, которые развивают численные методы именно в этом направлении [54, 87-97]. В основе таких задач лежат уравнения диффузии [73, 98-101].

На сегодняшний день разработано достаточно большое количество коммерческих программных продуктов как отечественных, так и зарубежных, позволяющих моделировать и интерпретировать результаты промысловых исследований и оценивать фильтрационно-емкостные свойства пласта: FLUENT, FracaFlow, «Saphir» ПК «ECRIN», Автон, Гидрозонд, FlowVision и т.д. Некоторые из них получили широкое применение в России.

Программные средства могут быть представлены в качестве решения данной задачи, однако каждый из них имеет ряд недостатков.

Программный модуль «Saphir» ПК «ECRIN», разработанный французскими исследователями является удобным инструментом решения задачи. Он включает все необходимые модели течения с широким диапазоном возможностей, однако при моделировании исследований в трещиновато-пористых коллекторах, при выборе модели двойной пористости в нем существует ряд ограничений на задание некоторых начальных параметров расчета. Невозможно провести анализ каждого входного параметра, а программный код закрыт для конечного пользователя, соответственно это не позволяет провести полное исследование рассматриваемых вопросов.

В программном комплексе FlowVision можно проводить исследования фильтрации нефти в коллекторах, но в нем отсутствуют модели для трещиноватых коллекторов.

Система «Гидрозонд», разработанная на кафедре геофизики Башкирского государственного университета, предназначена для автоматизированной обработки данных ГДИС нефтяных и газовых пластов. Основное направление и отличительная характеристика от других ПО в том, что она содержит специальные алгоритмы для обработки данных ГДИ, полученных при освоении малодебитных скважин (компрессором, свабом, эжекторным насосом). Но также, как и FlowVision предназначен для интерпретации простых моделей пласта и скважины, то есть модель течения жидкости в трещиноватом коллекторе там не предусмотрена.

Модуль «ГидраТест» предназначен для количественной обработки результатов гидродинамических исследований нефтяных и газовых скважин при сложных условиях проведения. Основной упор сделан на алгоритмы для нестабильно работающих скважин и скважин с существенным влиянием ствола скважины, а именно при компрессировании, свабировании, насосной эксплуатации и т.д. Модуль имеет широкий функциональный диапазон, однако модели пласта для проведения гидродинамических исследований в трещиновато-поровом коллекторе не включены.

Программное обеспечение «Автон» обеспечивает проведение и обработку данных различных видов исследований, а также позволяет совместно использовать данные промысловых исследований и данные гидродинамических исследований. Преимущества объединения всех видов исследований перекрываются недостатком отсутствия сложных моделей пласта, в частности модели коллектора с двойной пористостью.

Из существующих программных продуктов, предназначенных для моделирования и интерпретации ГДИС, нет модуля, который бы позволил проводить полноценное моделирование исследований в коллекторе трещиновато-порового типа, что подчеркивает актуальность данной работы.

1.6 Выводы по главе 1

В первой главе проведен обзор и анализ литературы в области неизотермической фильтрации в коллекторах трещиновато-порового типа, а также существующих методов численного исследования фильтрации. Рассмотрены модели двойной пористости различных авторов, изучены существующие подходы и современные программные комплексы для решения задачи фильтрации жидкости в карбонатных коллекторах при проведении гидродинамических исследований в добывающих скважинах. В ходе анализа выявлено, что основное развитие темы направлено на построение сложных гидродинамических моделей всего месторождения, что не эффективно для оперативных производственных задач в рамках мониторинга месторождения, а именно проблем при проведении и интерпретации гидродинамических исследований на скважинах. Во-первых, зачастую скважины находятся в отдаленных районах и в суровых климатических условиях, что не позволяет постоянно находиться рядом со скважинами для снятия замеров. Во-вторых, это экономическая составляющая, которая представлена затратами на проведение исследования и потерями по добычи за счет длительной остановки скважины, благодаря чему не позволяют останавливать все скважины на исследование. В-третьих, нет полноценных симуляторов по ГДИС, которые позволяют моделировать и оценивать параметры пласта в среде с двойной

пористостью. Так как существующие отечественные симуляторы ориентированы только на однопоровые модели и их сложности, а двухпоровые не рассматриваются. Зарубежные программы, не позволяют проводить полный спектр расчетов и при этом имеют закрытый код, и также они дорогостоящие и усложненные, а значит требуют длительного времени для расчета, что неприемлемо при принятии оперативных решений особенно на месторождениях с большим количеством скважин.

Поэтому, возникает необходимость в создании быстросчетного инструмента, который позволит решать задачи оперативного планирования, возникающие при разработке месторождения, куда относится проведение экспресс-оценки требуемой длительности остановки перед исследованием, а также тщательное изучение поведение процессов флюидодинамики при различных параметрах пласта.

Таким образом, создание вычислительных основ, комплексов программ для моделирования массопереноса при проведении гидродинамических исследований в трещиновато-поровых коллекторах является актуальной задачей на сегодняшний день и целью данной диссертационной работы.

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАССОПЕРЕНОСА В РАМКАХ МОДЕЛИ ДВОЙНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В КОЛЛЕКТОРЕ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРОВОГО ТИПА

В данной главе представлено описание физико-математической модели процесса фильтрации однофазной жидкости в рамках модели двойной пористости в коллекторе трещиновато-порового типа при гидродинамическом исследовании на добывающей скважине, где учтены все основные влияющие на исследование процессы.

Гидродинамические исследования предназначены для определения [102], контроля и регулирования режима разработки нефтяных месторождений, и являются наиболее естественным способом получения информации о состоянии пластовых систем в процессе их эксплуатации [12]. Их проведение возможно не только как самостоятельные исследования, но и в комплексе с методами определения профиля притока, с использованием всех методов создания депрессии/репрессии на пласт.

Результаты гидродинамических исследований скважин, получаемые на основе данных об изменениях давления и дебита в скважинах при различных режимах их эксплуатации, наиболее полно отражают фильтрационные процессы, происходящие непосредственно в пластовых условиях [103, 104].

Интерпретация ГДИС позволяет оценить продуктивные и фильтрационные характеристики пластов и скважин (пластовое давление, продуктивность или фильтрационные коэффициенты, гидропроводность, проницаемость, пьезопроводность, скин-фактор и т. д.) [105], особенности околоскважинной и удалённой зон пласта, а также определить геометрию [9, 24].

2.1 Физическая модель процесса фильтрации однофазной жидкости в коллекторе трещиновато-порового типа

В неограниченном пласте рассматривается добывающая скважина, эксплуатирующая карбонатный коллектор. На скважине, проводится

гидродинамическое исследование методом кривой восстановления давления. При проведении исследования должны выполняться следующие критерии:

- скважина вышла на установившийся режим и работает с постоянным дебитом (либо с постоянным забойным давлением);
- все компоненты фонтанной арматуры герметичны и прочны;
- измерительный прибор для фиксации давления спущен на глубину верхних дыр перфорации.

Предполагается, что в момент запуска скважины в эксплуатацию давление в пласте равняется начальному пластовому давлению. На контуре питания поддерживается постоянное давление.

На рисунке 2.1 представлена схема скважины и местоположение датчика.

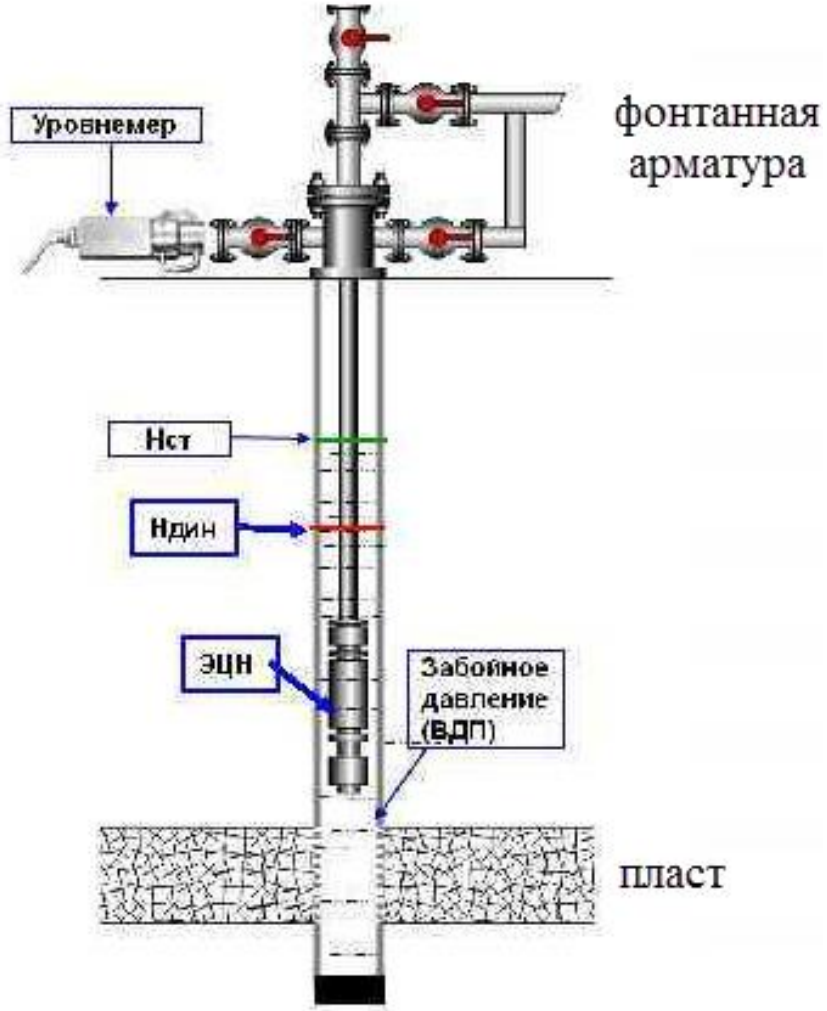


Рисунок 2.1 – Схема скважины

В трещиновато-поровом коллекторе матрица [4] представлена как множество блоков, в работе будем рассматривать прямоугольные параллелепипеды, которые обладают значениями высокой пористости и низкой проницаемости и разделены сетью естественных трещин, имеющие высокую проницаемость и низкую пористость. Фильтрация флюида осуществляется по системе естественных трещин, а матрица – емкостью, непрерывно подпитывающая трещины. Так как эффективная толщина разрабатываемого коллектора много меньше его длины, то считаем, что течение флюида в пласте строго горизонтальное и перетоки между пропластками отсутствуют. Поэтому расчет динамики давления можно проводить в пространственно-одномерном случае.

2.2 Математическая модель процесса фильтрации однофазной жидкости в коллекторе трещиновато-порового типа

Для качественного описания процесса массопереноса в коллекторе трещиновато-порового типа при ГДИС с целью изучения поведения каждого параметра, необходимо и важно при численном моделировании учитывать все параметры пласта и флюида. Рассмотрим модель, которая описывает процесс фильтрации при исследовании на добывающей скважине методом кривой восстановления давления. Математическим фундаментом для анализа гидродинамических исследований на неустановившихся режимах фильтрации является уравнение пьезопроводности в радиальных координатах, описывающее неустановившееся течение жидкости в среде с двойной пористостью, в основе, которого лежат уравнения неразрывности, состояния и закон Дарси [23, 20, 106].

Распределение давления в системе «сеть трещин – матрица» описывается дифференциальными уравнениями второго порядка вида [107, 108]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^f}{\partial t} &= \frac{1}{r\varphi_f c_{tf}} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{k_f}{\mu} r \frac{\partial P^f}{\partial r}\right) - \alpha \frac{k_m}{\mu \varphi_f c_{tf}} \left(P^f - P^m\right), \\ \frac{\partial P^m}{\partial t} &= \alpha \frac{k_m}{\mu \varphi_m c_{tm}} \left(P^f - P^m\right). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь φ_f – пористость сети трещин , φ_m – пористость матрицы, c_{tf} – сжимаемость сети трещин (1/Па), c_{tm} – сжимаемость матрицы (1/Па), k_f – проницаемость сети трещин (м^2), k_m – проницаемость матрицы (м^2), μ – вязкость нефти (Па·с), P^f– пластовое давление в сети трещин (Па), P^m – пластовое давление в матрице (Па), q – дебит жидкости (м^3/сут), α – коэффициент трещиноватой породы (1/м^2).

Пространственно-временной интервал, в котором задана система уравнений, представлен в виде:

$$\begin{aligned} &r_w \le r \le r_e, \\ &0 \le t \le t_k. \end{aligned} \tag{2.2}$$

r_w – радиус скважины (м), r_e – радиус контура питания (м), t_k – заданный конечный момент времени (окончание исследования) (сут).

Сжимаемость сети трещин и матрицы определяются по формулам [109].

$$\begin{aligned} &c_{t_f} = S_o c_o + S_w c_w + S_g c_g + c_f, \\ &c_{t_m} = S_o c_o + S_w c_w + S_g c_g + c_m. \end{aligned} \tag{2.3}$$

c_t – общая сжимаемость (1/Па), S_o – нефтенасыщенность, S_w – водонасыщенность, S_g – газонасыщенность (д.ед), c_o – сжимаемость нефти (1/Па), c_w – сжимаемость воды (1/Па), c_g – сжимаемость газа (1/Па), c_f, c_m – сжимаемость пород (1/Па).

Размеры блоков матрицы, в зависимости от выбранной размерности, в данном случае n=3, определяются следующим образом:

$$\alpha = \frac{4n(n+2)}{l_m^2}, \qquad L = \frac{3abc}{(ab+bc+ac)}. \tag{2.4}$$

n – число взаимно перпендикулярных групп трещин, L – размер блоков (м), a – длина стороны блока матрицы (м), b – ширина стороны блока матрицы (м), c – высота стороны блока матрицы (м).

Согласно поставленным выше условиям для скважины и рассматриваемой области начальные и граничные условия задаются следующим образом:

$$P^m|_{t=0} = P_0, \qquad P^f\big|_{t=0} = P_0, \qquad P^f\big|_{r=re} = P_к, \qquad P^m|_{r=re} = P_к,$$
$$2\pi h \frac{k_f}{\mu}\left(r\frac{\partial P^f}{\partial r}\right)_{r=r_w} = -q, \tag{2.5}$$

где h – эффективная мощность пласта (м), q - дебит жидкости (м^3/сут), $\pi \approx 3.14$.

Таким образом, замкнув задачу граничными и начальными условиями, получаем модель (2.1) – (2.5) [110, 111], характеризующую перераспределение давления в матрице и сети трещин [112-114], где учтены геометрические размеры блоков матрицы.

2.3 Математическая модель процесса массопереноса в коллекторе трещиновато-порового типа с учетом влияния внешних эффектов

В случаях, когда интервалы перфорации неограниченны пакером, пластовая жидкость заполняет межтрубное пространство. Во многих исследованиях дебит скважины контролируется на устье. И соответственно, при закрытии скважины на гидродинамическое исследование постоянство дебита на устье (q = 0) из (2.5) не означает постоянства дебита на забое скважины из-за эффектов, происходящих в стволе. Процесс несовпадения дебитов на устье и забое носит название «послепритока» или влияние объема ствола скважины (ВСС) на перераспределение давления. Существует две основные причины: расширение/сжатие флюида в стволе скважины и меняющийся уровень флюида в стволе скважины [13, 115].

Влияние ствола скважины определяется как изменение объема флюида в стволе скважины на единицу изменения забойного давления:

$$C_s = -\frac{\Delta V}{\Delta P}. \tag{2.6}$$

Расширение флюида в стволе скважины подчиняется уравнению:

$$\Delta V = -c \cdot V_w \cdot \Delta P, \tag{2.7}$$

где, V_w -объем ствола скважины (м^3), c - сжимаемость флюида (1/Па).

Отсюда получаем ВСС:

$$C_s = c \cdot V_w. \tag{2.8}$$

Еще один немаловажный эффект, который необходимо учитывать при моделировании процесса массопереноса жидкости во время проведения гидродинамического исследования – это скин-эффект [12], который определяется дополнительным перепадом давления (рисунок 2.2), происходящим в зоне пренебрежимо малой толщины вокруг скважины или в призабойной зоне [116, 117], где проницаемость ухудшилась, либо улучшилась за счет проводимых по очистке мероприятий, например, таких как соляно-кислотная обработка.

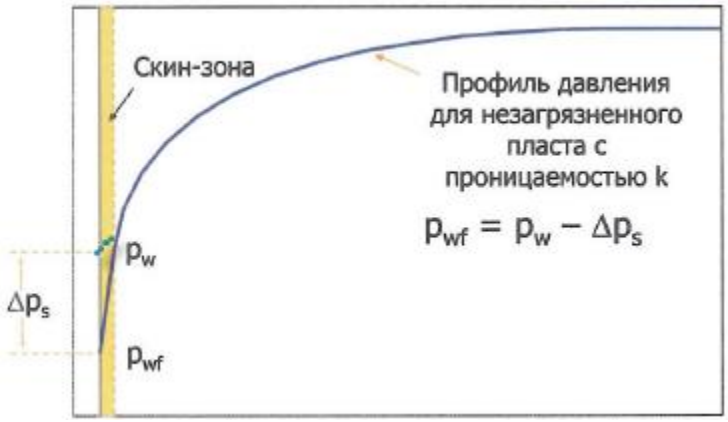


Рисунок 2.2 – Профиль давления в пласте с загрязненной призабойной зоной пласта [13]

Если допустить, что протяженность скин-зоны относительно мала в сравнении с границами пласта $r_s \ll r_e$, то приток можно считать установившийся через скин-зону и данный параметр можно определить по формуле:

$$S = \left(\frac{k}{k_s} - 1\right) \cdot \ln\frac{r_s}{r_w}, \tag{2.9}$$

где k_s – проницаемость призабойной зоны (м^2), k – проницаемость пласта (м^2), r_s – радиус призабойной зоны (м), r_w – радиус скважины.

Следовательно, полная депрессия в радиальном пласте при установившемся однофазном притоке определяется по формуле:

$$P_e - P_{wf} = 18.41 \cdot \frac{q\mu}{kh} \cdot \left(\ln\frac{r_s}{r_w} + S\right). \tag{2.10}$$

Здесь, P_e - пластовое давление (Па), P_{wf} – забойное давление (Па), h – толщина пласта (м).

В связи с этим необходимо учитывать наличие жидкости в стволе скважины при проведении гидродинамического исследования методом кривой восстановления давления и дополнительный перепад давления в призабойной зоне пласта.

Таким образом, учитывая эффекты, влияющие на процесс переноса жидкости, граничные условия для (2.1) будут моделироваться специального вида граничными условиями, заданными на стенке скважины при $r = r_w$ [118, 119]:

$$P^m|_{t=0} = P_0, \qquad P^f\big|_{t=0} = P_0, \qquad \left.\frac{\partial P^f}{\partial r}\right|_{r=r_e} = 0,$$
$$2\pi h \frac{k_f}{\mu}\left(r\frac{\partial P^f}{\partial r}\right)_{r=r_w} = -qB + C_s\left(\frac{\partial P^f}{\partial t}\right)_{r=r_w}, \qquad r_w = r_w\ \exp(-S), \tag{2.11}$$

где h – эффективная мощность пласта (м), q - дебит жидкости (м^3/сут), $\pi \approx 3.14$, B – объемный коэффициент (м^3/м^3), C_s – влияние ствола скважины (м^3/Па), S – скин-фактор.

2.4 Аналитическое решение

Для системы дифференциальных уравнений (2.1) известны асимптотические решения, которые не всегда могут быть применены для решения практически значимых задач. Существует решение только для частного случая [26], а именно для значений времени: $t_\delta > 100$, или более точно, $t_\delta > 100\omega$ при $\lambda \ll 1$ и $t_\delta > 100\lambda - 1/\lambda$ для $\omega \ll 1$. Параметры представлены в безразмерных переменных.

$$P_{Df}\,(1, t_D) = \frac{1}{2}\left\{0.80908 + lnt_D + E_i\left[\frac{\lambda t_D}{\omega(1-\omega)}\right] - E_i\left(-\frac{\lambda t_D}{(1-\omega)}\right)\right\}, \tag{2.12}$$

где P_{Df} – безразмерное давление, t_D – безразмерное время, λ – удельный коэффициент проводимости, ω – коэффициент доли трещинно-кавернозной емкости, E_i – интегральная экспоненциальная функция, определяемая выражением:

$$E_i(-x) = -\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du. \tag{2.13}$$

В связи с тем, что аналитическое решение (рис. 2.3) не всегда может быть использовано в масштабах производственных задач, то возникает необходимость в численном решении задачи.

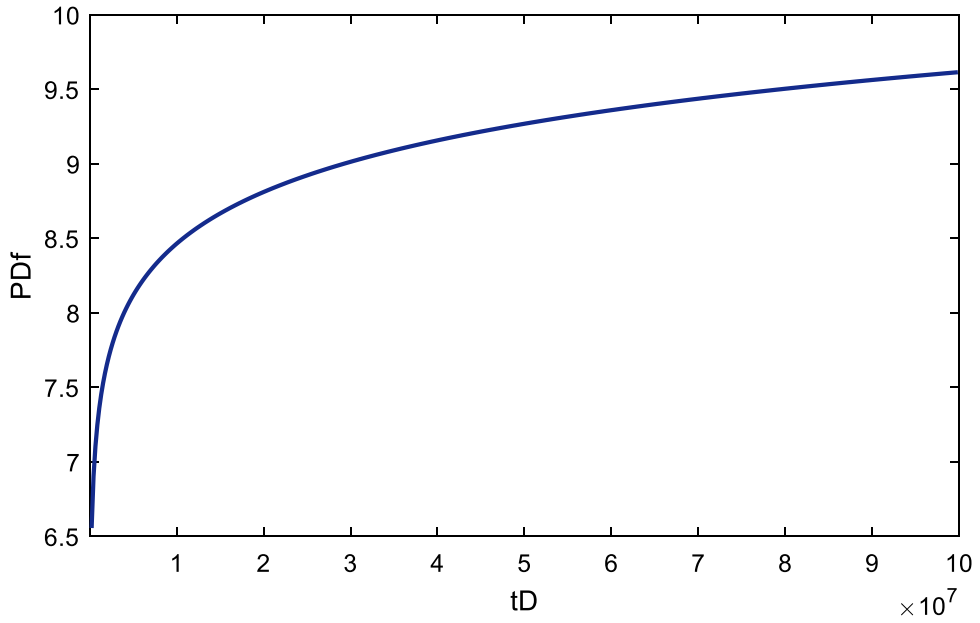


Рисунок 2.3 – Аналитическое решение модели Уоррена-Рута для бесконечного пласта

2.5 Выводы по главе 2

Во второй главе описана физическо-математическая модель процесса фильтрации однофазной жидкости в рамках модели двойной среды в коллекторе трещиновато-порового типа при проведении гидродинамического исследования на неустановившемся режиме течения в добывающей скважине. В модели будут учтены геометрические размеры блоков, на которые разбивается пористая часть коллектора. Представлены случаи, когда скважина во время исследования закрывается на забое и когда перекрывается только на устье, в связи с чем возникают такие процессы как влияние ствола скважины и скин-эффект. С учетом рассматриваемых эффектов меняются граничные условия. Для модели процесса фильтрации построено аналитическое решение, представленное в литературе [4]. Известны асимптотические решения для определенных условий, которые не всегда могут быть использованы в масштабах производственных задач. В связи с этим будет рассматриваться численное решение задачи.

ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ МАССОПЕРЕНОСА В РАМКАХ МОДЕЛИ ДВОЙНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В КОЛЛЕКТОРЕ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРОВОГО ТИПА

В данной главе описываются разностные схемы задачи массопереноса в рамках модели двойной пористости для однофазной фильтрации. Представлен программный модуль, разработанный на основе предложенных численных схем, который дает возможность задавать и варьировать каждый параметр системы с целью тщательного изучения процессов флюидодинамики в среде с двойной пористостью. Продемонстрированы результаты вычислительных экспериментов, представляющие практический интерес.

3.1 Разностная схема для решения задачи массопереноса в рамках модели двойной среды для однофазной фильтрации

Для решения дифференциальных уравнений в частных производных (2.1) используется метод конечных разностей [120, 121].

Вводится равномерная сетка по пространственному направлению и по времени.

$$\begin{aligned} \overline{W}_h &= \left\{ r_i = r_w + ih, i = 0, 1 \dots N, h = \frac{r_e - r_w}{N} \right\}, \\ \overline{W}_\tau &= \left\{ t_j = j\tau, j = 0, 1 \dots M, \tau = \frac{t_k}{M} \right\}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где h – шаг сетки по радиусу, τ - шаг сетки по времени, N и M – число узлов по радиусу и времени, соответственно.

Необходимо от дифференциальной задачи перейти к аппроксимирующему разностному уравнению. Простейший дифференциальный оператор $\frac{\partial P}{\partial t}$ заменим на конечно-разностный аналог:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\tau}, \tag{3.2}$$

Оператор $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right)$ представим в виде:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right) = \frac{\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right)_{i-\frac{1}{2}}}{r_i h_r} = \frac{r_{i+\frac{1}{2}}\frac{P_{i+1}^n - P_i^n}{h_r} - r_{i-\frac{1}{2}}\frac{P_i^n - P_{i-1}^n}{h_r}}{r_i h_r} =$$
$$= \frac{r_{i+\frac{1}{2}}P_{i+1}^n - \left(r_{i+\frac{1}{2}} + r_{i-\frac{1}{2}}\right)P_i^n + r_{i-\frac{1}{2}}P_{i-1}^n}{r_i h_r^2}. \quad (3.3)$$

Итоговое уравнение, представленное разностным аналогом, будет выглядеть:

$$\frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\tau} = \sigma\frac{r_{i+\frac{1}{2}}\frac{P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}}{h_r} - r_{i-\frac{1}{2}}\frac{P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}}{h_r}}{r_i h_r} +$$
$$+ (1-\sigma)\frac{r_{i+\frac{1}{2}}P_{i+1}^n - \left(r_{i+\frac{1}{2}} + r_{i-\frac{1}{2}}\right)P_i^n + r_{i-\frac{1}{2}}P_{i-1}^n}{r_i h_r^2}. \quad (3.4)$$

Здесь σ произвольный вещественный параметр, $0 \le \sigma \le 1$. Если $\sigma = 0$, то получаем явную разностную схему, если $\sigma = 1$, то получаем неявную разностную схему.

Используя (3.4) для дифференциальной задачи (2.1) рассмотрим явную и неявную разностные схемы.

3.1.1 Явная схема

Система уравнений (2.1) с учетом (3.4) для случая $\sigma = 0$ запишется в виде:

$$P^{f}{}_i^{n+1} = \frac{\tau k_f r_{i+\frac{1}{2}}}{\varphi_f \mu c_{tf} r_i h^2}P^{f}{}_{i+1}^{n} + \left(1 - \frac{\tau k_f\left(r_{i+\frac{1}{2}} + r_{i-\frac{1}{2}}\right)}{\varphi_f \mu c_{tf} r_i h^2} - \frac{\tau k_m \alpha}{\varphi_f \mu c_{tf}}\right)P^{f}{}_i^{n} +$$
$$+ \frac{\tau k_f r_{i-\frac{1}{2}}}{\varphi_f \mu c_{tf} r_i h^2}P^{f}{}_{i-1}^{n} + \frac{\tau k_m \alpha}{\varphi_f \mu c_{tf}}P^{m}{}_i^{n}, \quad (3.5)$$

$$P^{m}{}_i^{n+1} = \left(1 - \frac{\tau k_m \alpha}{\varphi_m \mu c_{tm}}\right)P^{m}{}_i^{n} + \frac{\tau k_m \alpha}{\varphi_m \mu c_{tm}}P^{f}{}_i^{n},$$

где $P^{m}{}_i^{n}$, $P^{m}{}_i^{n+1}$, $P^{f}{}_i^{n}$, $P^{f}{}_i^{n+1}$ – решения на *n+1* и *n* –том временных слоях, h – постоянный шаг сетки по радиусу r_e, τ – постоянный шаг по времени t_k. Разностная схема представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений решения *n+1* слое по времени.

$$A_h P^{n+1} = f_h. \tag{3.6}$$

К любой разностной схеме относятся такие понятия как: аппроксимация, порядок аппроксимации, устойчивость, сходимость, порядок сходимости (или точность).

Докажем устойчивость явной разностной схемы [121]. Устойчивость доказывается с помощью спектрального метода Неймана [72]. Для этого рассматривается однородная задача. Пусть:

$$\begin{aligned} &P_{m,n} = \lambda^n \cdot e^{imw}, \\ &|\lambda| \leq 1, \quad \text{для всех } w. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Подставим (3.7) в (3.5) и разделим на $\lambda^n \cdot e^{imw}$.

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda - 1}{\tau} = \frac{k_f}{\varphi_f \mu c_{tf} r h^2} \left[re^{im} - 2r + re^{-im}\right], \\ &\frac{\lambda - 1}{\tau} = -\frac{4k_f sin^2 \frac{w}{2}}{\varphi_f \mu c_{tf} r h^2}, \\ &\lambda = 1 - \frac{4\tau k_f sin^2 \frac{w}{2}}{\varphi_f \mu c_{tf} r h^2}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Полученная разность не должна превышать 2, и учитывая $sin^2 \frac{w}{2} < 1$, получаем:

$$\frac{4 \cdot \tau \cdot k_f \cdot sin^2 \frac{w}{2}}{2 \cdot h^2 \cdot \varphi_f \cdot \mu \cdot c_{tf}} \leq 1. \tag{3.9}$$

В результате условие устойчивости явной разностной схемы, примет вид:

$$\tau \leq \frac{h^2 \cdot \varphi_f \cdot c_{tf} \cdot \mu}{2 \cdot k_f}. \tag{3.10}$$

Условие связывает между собой шаг по времени и по пространству. В данном случае интервал времени не фиксирован и может значительно изменяться. Пространственный интервал фиксирован, поэтому в процессе вычислений в результате увеличения временного интервала с целью выполнения условия количество шагов по времени может существенно вырасти.

3.1.2 Неявная схема

В данном пункте рассматривается аппроксимация задачи (2.1) с применением чисто неявной разностной схемы ($\sigma = 1$) [122].

$$P^{f}{}_{i}^{n} = -\frac{\tau k_f r_{i+\frac{1}{2}}}{\varphi_f \mu c_{tf} r_i h^2} P^{f}{}_{i+1}^{n+1} + \left(1 + \frac{\tau k_f \left(r_{i+\frac{1}{2}} + r_{i-\frac{1}{2}}\right)}{\varphi_f \mu c_{tf} r_i h^2} + \frac{\tau k_m \alpha}{\varphi_f \mu c_{tf}}\right) P^{f}{}_{i}^{n+1} -$$

$$-\frac{\tau k_f r_{i-\frac{1}{2}}}{\varphi_f \mu c_{tf} r_i h^2} P^{f}{}_{i-1}^{n+1} - \frac{\tau k_m \alpha}{\varphi_f \mu c_{tf}} P^{m}{}_{i}^{n+1}, \tag{3.11}$$

$$P^{m}{}_{i}^{n} = \left(1 + \frac{\tau k_m \alpha}{\varphi_m \mu c_{tm}}\right) P^{m}{}_{i}^{n+1} - \frac{\tau k_m \alpha}{\varphi_m \mu c_{tm}} P^{f}{}_{i}^{n+1}.$$

Также, как и в предыдущем случае докажем устойчивость неявной схемы (3.11), используя спектральный метод Неймана.

Рассматривая однородное уравнение, подставим решение (3.7) в (3.11) и поделим на $\lambda^{n+1} \cdot e^{imw}$. В результате небольших выкладок аналогичных предыдущему пункту в (3.7) - (3.9) получаем:

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{4 \cdot \tau \cdot k_f \cdot sin^2 \frac{w}{2}}{h^2 \cdot \varphi_f \cdot c_{tf} \cdot \mu}} \leq 1. \tag{3.12}$$

Таким образом, условие (3.7) выполняется. Доказано необходимое условие устойчивости. Докажем теперь достаточное условие устойчивости. Рассматривается полная задача с начальным условием.

$$\begin{gathered}
\frac{P^{f}_{n+1,m} - P^{f}_{n,m}}{\tau} = \frac{1}{r} \cdot \frac{k_f}{\mu \cdot \varphi_f \cdot c_{tf}} \cdot \frac{1}{h^2} \times \\
\times \left(r_{m+\frac{1}{2}} \cdot P^{f}_{n+1,m} - \left(r_{m+\frac{1}{2}} - r_{m-\frac{1}{2}}\right) \cdot P^{f}_{n+1,m} + r_{m-\frac{1}{2}} \cdot P^{f}_{n+1,m-1}\right) + \\
+\alpha \cdot \frac{k_m}{\mu \cdot \varphi_f \cdot c_{tf}} \cdot \left(P_m^{f^{n+1}} - P_m^{m^{n+1}}\right) = 0, \\
P_{m,0} = \varphi_m.
\end{gathered} \tag{3.13}$$

Пусть

$$\frac{k_f}{\mu \cdot \varphi_f \cdot c_{tf}} = \chi_1,$$
$$\frac{k_m}{\mu \cdot \varphi_f \cdot c_{tf}} = \chi_2. \tag{3.14}$$

Доказать:

$$\left\|P^h\right\| \leq C_1\left\|f^h\right\| + C_2\|\varphi^n\|. \tag{3.15}$$

Рассматривается:

$$P^f_{m_0,n+1} =$$
$$= P^f_{n,m} + \frac{\chi_1 \cdot \tau}{r \cdot h^2}\left(rP^f_{n+1,m+1} - 2rP^f_{n+1,m} + rP^f_{n+1,m-1}\right) + \alpha \cdot \chi_2 \cdot \tau\left(P^f - P^m\right). \tag{3.16}$$

Если $m = m_0$, то $rP^f_{n+1,m+1} - 2rP^f_{n+1,m} + rP^f_{n+1,m-1}$ – не положительно.

$$P^f_{m,n+1} \leq P^f_{m_0,n+1} \leq P^f_{m,n+1}. \tag{3.17}$$

Достаточное условие сходимости неявной схемы доказано. Сходимость, безусловно устойчива, то есть можно проводить интегрирование краевой задачи с любым разностным шагом по времени.

Проведем аппроксимацию граничных условий [61, 123]. Начально-краевая задача (2.1) – (2.5) имеет смешанные краевые условия.

Производную первого порядка в (2.5) аппроксимируем по следующей схеме:

$$\left.\frac{\partial P^f}{\partial r}\right|^{n+1}_{r=r_w} = \frac{P^{f\,n+1}_1 - P^{f\,n+1}_0}{h_r} = -\frac{qB\mu h_r}{2\pi k h r_w},$$
$$P^{f\,n+1}_0 = P^{f\,n+1}_1 + \frac{qB\mu h_r}{2\pi k h r_w}. \tag{3.18}$$

Если в (2.5) условие на правой границе $P^f\big|_{r=re} = P_к$, задать как границу непротекания, то для нее аппроксимация будет выглядеть:

$$\left.\frac{\partial P^f}{\partial r}\right|^{n+1}_{r=r_e} = \frac{P^{f\,n+1}_N - P^{f\,n+1}_{N-1}}{h_r} = 0,$$
$$P^{f\,n}_{N-1} = P^{f\,n+1}_N. \tag{3.19}$$

Таким образом, граничные условия (2.5) аппроксимируются первым порядком точности (3.18) и (3.19). И глобальный порядок будет равен первому

порядку, даже, несмотря на то, что все внутренние узлы по пространственной переменной имеют второй порядок аппроксимации. Чтобы сохранить порядок $O(h^2)$ проведем аппроксимацию для левой границы с помощью интегро-интерполяционного способа. Проинтегрируем уравнение для трещины в (2.1) от 0 до $h/2$. Интегралы берутся приближенно, используя метод прямоугольников в крайних или средних точках.

Для начала введем обозначения:

$$\chi_1 = \frac{k_f}{\mu\varphi_f c_{tf}}, \chi_2 = \frac{k_m}{\mu\varphi_f c_{tf}},$$

тогда:

$$\frac{\partial P^f}{\partial t} = \frac{\chi_1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P^f}{\partial r}\right) - \alpha\,\chi_2\left(P^f - P^m\right),$$

$$\int\limits_{r_w}^{r_w+0,5h_r} r\frac{\partial P^f}{\partial t}dr = \int\limits_{r_w}^{r_w+0,5h_r} \chi_1\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P^f}{\partial r}\right)dr - \int\limits_{r_w}^{r_w+0,5h_r} r\alpha\,\chi_2\left(P^f - P^m\right)dr,$$

$$\frac{r^2}{2}\frac{\partial P^f}{\partial t}\bigg|_{r_w}^{r_w+0.5h_r} = \chi_1 r\frac{\partial P^f}{\partial r}\bigg|_{r_w}^{r_w+0.5h_r} - \alpha\,\chi_2\frac{r^2}{2}\left(P^f - P^m\right)\bigg|_{r_w}^{r_w+0.5h_r},$$

$$\frac{(r_w+0.5h_r)^2}{2}\frac{\partial P^f}{\partial t} - \frac{r_w^2}{2}\frac{\partial P^f}{\partial t} =$$

$$= \chi_1(r_w+0.5h_r)\frac{\partial P^f}{\partial r}\bigg|_{r_w+0.5h_r} - r_w\chi_1\frac{\partial P^f}{\partial r}\bigg|_{r_w} - \tag{3.20}$$

$$-\alpha\chi_2\frac{(r_w+0.5h_r)^2}{2}\left(P^f - P^m\right) + \alpha\chi_2\frac{r_w^2}{2}\left(P^f - P^m\right),$$

$$\frac{h_r}{2}\left(r_w + \frac{h_r}{4}\right)\frac{P^{f\,n+1}_0 - P^{f\,n}_0}{\tau} =$$

$$= \chi_1\left(r_w + \frac{h_r}{2}\right)\frac{P^{f\,n+1}_1 - P^{f\,n+1}_0}{h_r} + \chi_1\frac{qB\mu}{2\pi kh} -$$

$$-\ \alpha\,\chi_2\frac{h_r}{2}\left(r_w + \frac{h_r}{4}\right)\left(P^{f\,n+1}_0 - P^{m\,n+1}_0\right),$$

$$\left(\frac{h_r}{2\tau}\left(r_w+\frac{h_r}{4}\right)+\frac{\alpha\,\chi_2 h_r}{2}\left(r_w+\frac{h_r}{4}\right)+\frac{\chi_1}{h_r}\left(r_w+\frac{h_r}{2}\right)\right)P^{f\,n+1}_{0}=$$

$$=\frac{\chi_1}{h_r}\left(r_w+\frac{h_r}{2}\right)P^{f\,n+1}_{1}+\frac{\chi_1 qB\mu}{2\pi kh}+\frac{h_r}{2\tau}\left(r_w+\frac{h_r}{4}\right)P^{f\,n}_{0}-$$

$$-\frac{\alpha\,\chi_2 h_r}{2}\left(r_w+\frac{h_r}{4}\right)P^{m\,n+1}_{0}\,.$$

Итак, получаем:

$$P^{f\,n+1}_{0}=\frac{\frac{\chi_1}{h_r}\left(r_w+\frac{h_r}{2}\right)}{\frac{h_r}{2}\left(r_w+\frac{h_r}{4}\right)\left(\alpha\,\chi_2+\frac{1}{\tau}\right)+\frac{\chi_1}{h_r}\left(r_w+\frac{h_r}{2}\right)}\cdot P^{f\,n+1}_{1}+$$

$$+\frac{\frac{qB\mu\,\chi_1}{2\pi kh}+\left(r_w+\frac{h_r}{4}\right)\frac{h_r}{2\tau}P^{f\,n}_{0}-\left(r_w+\frac{h_r}{4}\right)\frac{\alpha\chi_2 h_r}{2}\cdot P^{m\,n+1}_{0}}{\frac{h_r}{2}\left(r_w+\frac{h_r}{4}\right)\left(\alpha\,\chi_2+\frac{1}{\tau}\right)+\frac{\chi_1}{h_r}\left(r_w+\frac{h_r}{2}\right)}. \tag{3.21}$$

Для правого граничного узла разложим на точном решении значение в окрестности точки $r=r_e$ в ряд Тейлора по пространственной переменной до третьей производной включительно:

$$P^{f\,n+1}_{N-1}=P^{f}(r_e-h_r,t^{n+1})=$$

$$=P^{f\,n+1}_{N}-h_r\cdot\left.\frac{\partial P^f}{\partial r}\right|^{n+1}_{r=N}+\frac{h_r^2}{2}\left.\frac{\partial^2 P^f}{\partial r^2}\right|^{n+1}_{r=N}+O(h_r^3). \tag{3.22}$$

Далее подставим значение второй производной для правого граничного узла.

$$P^{f\,n+1}_{N-1}=$$

$$=P^{f\,n+1}_{N}-h_r\left.\frac{\partial P^f}{\partial r}\right|^{n+1}_{r=N}+\frac{h_r^2}{2}\left.\left(\frac{1}{\chi_1}\frac{\partial P^f}{\partial t}-\frac{\chi_2}{\chi_1}\alpha\left(P^f-P^m\right)\right)\right|^{n+1}_{r=N}+O(h^3),$$

$$\frac{P^{f\,n+1}_{N-1}-P^{f\,n+1}_{N}}{h_r}=\frac{h_r}{2\chi_1}\frac{P^{f\,n+1}_{N}-P^{f\,n}_{N}}{\tau}-\frac{h_r}{2}\frac{\chi_2}{\chi_1}\alpha\left(P^{f\,n+1}_{N}-P^{m\,N+1}_{N}\right), \tag{3.23}$$

$$\left(\frac{h_r}{2\chi_1\tau}+\frac{1}{h_r}\right)P^{f\,n+1}_{N}=$$

$$=\frac{P^{f\,n+1}_{N-1}}{h_r}+\frac{h_r}{2\chi_1\tau}P^{f\,n}_{N}+\frac{h_r\alpha\chi_2}{2\chi_1}\left(P^{f\,n+1}_{N}-P^{m\,N+1}_{N}\right).$$

В результате получаем:

$$P^{f}{}_{N-1}^{n+1} = \\ = \left(\frac{h_r^2}{2\chi_1\tau} + 1\right) P^{f}{}_{N}^{n+1} - \frac{h_r^2}{2\chi_1\tau} P^{f}{}_{N}^{n} - \frac{h_r^2 \alpha \chi_2}{2\chi_1}\left(P^{f}{}_{N}^{n+1} - P^{m}{}_{N}^{N+1}\right). \quad (3.24)$$

3.2 Описание метода матричной прогонки

В результате аппроксимации частных производных соответствующими конечными разностями получаем систему линейных алгебраических уравнений (3.11), которую можно свести к общему виду:

$$AP_{i-1} - CP_i + BP_{i+1} = -F_i,\ i = 1,\ldots M, \quad (3.25)$$

где M – количество блоков на главной диагонали, A_i, B_i, C_i – квадратные матрицы (блоки) размерности N, P_i, f_i - векторы размерности N.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений с блочной трехдиагональной матрицей использовался метод матричной прогонки [71]. Матричная прогонка относится к прямым методам решения разностных уравнений. По сравнению с другими прямыми методами решения разностных задач матричная прогонка более универсальна, так как позволяет решать уравнения с переменными коэффициентами и не накладывает сильных ограничений на вид граничных условий.

Элементами полученной трехдиагональной матрицы для задачи (2.1) – (2.5) являются матрицы, где размерность каждой рассматриваемой матрицы 2×2:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_i}\frac{k_f\tau}{\mu\varphi_f c_{tf}}\frac{1}{h_r^2} r_{i-\frac{1}{2}} \end{bmatrix},$$

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\alpha k_m \tau}{\mu\varphi_m c_{tm}} & -\frac{\alpha k_m \tau}{\mu\varphi_m c_{tm}} \\ -\frac{\alpha k_m \tau}{\mu\varphi_f c_{tf}} & 1 + \frac{1}{r_i}\frac{k_f}{\mu\varphi_f c_{tf}}\frac{1}{h_r^2}\left(r_{i+\frac{1}{2}} + r_{i-\frac{1}{2}}\right) + \frac{\alpha k_m \tau}{\mu\varphi_f c_{tf}} \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_i}\frac{k_f\tau}{\mu\varphi_f c_{tf}}\frac{1}{h_r^2} r_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix},$$

$F_i = \begin{bmatrix} P^m \\ P^f \end{bmatrix}$.

Решение системы (3.25) находится в два этапа: ход вперед, который позволяет рассчитать прогоночные коэффициенты, используя рекуррентные формулы и ход назад, на основе полученных коэффициентов рассчитывается решение (3.26):

$\alpha_1 = C_0^{-1} B_0$,

$\beta_1 = C_0^{-1} F_0$,

α_1, β_1 - определяются из левого граничного условия.

$$\alpha_{i+1} = (C_i - A_i \alpha_i)^{-1} B_i, \qquad i = 1, 2, \dots N-1,$$
$$\beta_{i+1} = (C_i - A_i \alpha_i)^{-1} (A_i \beta_i + F_i), \qquad i = 1, 2, \dots N, \tag{3.27}$$

где α и β - прогоночные коэффициенты.

$P_i = \alpha_{i+1} P_{i+1} + \beta_{i+1}, \qquad i = N-1, N-2, \dots 1, 0,$

$P_N = \beta_{N+1}$ находится из правого граничного условия.

Начальные прогоночные коэффициенты для задачи (2.1) – (2.5) полученные из (3.21) на основе левого граничного условия будут выглядеть:

$$\alpha_0 = \frac{1}{1 + \frac{h_r^2}{2\chi_1 \tau} - \frac{\alpha\, \chi_2 h_r^2}{2\chi_1}},$$
$$\beta_0 = \frac{\frac{qB\mu h_r}{2\pi k h r_w} + \frac{h_r^2}{2\chi_1 \tau} Pf_0^n - \frac{\alpha\, \chi_2 h_r^2}{2\chi_1} Pm_0^{n+1}}{1 + \frac{h_r^2}{2\chi_1 \tau} - \frac{\alpha\, \chi_2 h_r^2}{2\chi_1}}. \tag{3.28}$$

P_N, на основе правого граничного условия получаем:

$$Pf_N^{n+1} = \frac{h_r^2 Pf_N^n - \alpha\, \chi_2 h_r^2 \tau Pm_N^{n+1} + 2\chi_1 \tau \beta_{N-1}}{2\chi_1 \tau + h_r^2 - \alpha\, \chi_2 h_r^2 \tau - 2\chi_1 \tau \alpha_{N-1}}. \tag{3.29}$$

При решении задачи с граничными условиями (3.18) и (3.19) получаем погрешность в результатах, которая допустима для практических задач. В связи с этим для упрощения вычислительного процесса все численные расчеты будут проводиться с граничными условиями (3.18), (3.19).

3.3 Программный модуль для моделирования процесса массопереноса в коллекторе трещиновато-порового типа

Представленная выше разностная схема была реализована в виде программного модуля, написанного на языке C++, который позволяет получить решение задачи с заданными начальными и граничными условиями [124]. Программный модуль содержит две основные формы. При запуске программы появляется главная – первая форма. Первое окно позволяет вносить начальные данные по характеристикам пласта и скважины. Интерфейс главной формы представлен на рисунке 3.1.

Для задания параметров на форме имеются текстовые поля, все текстовые поля подписаны, для параметров, имеющих единицы измерения, названия единиц измерения также подписаны.

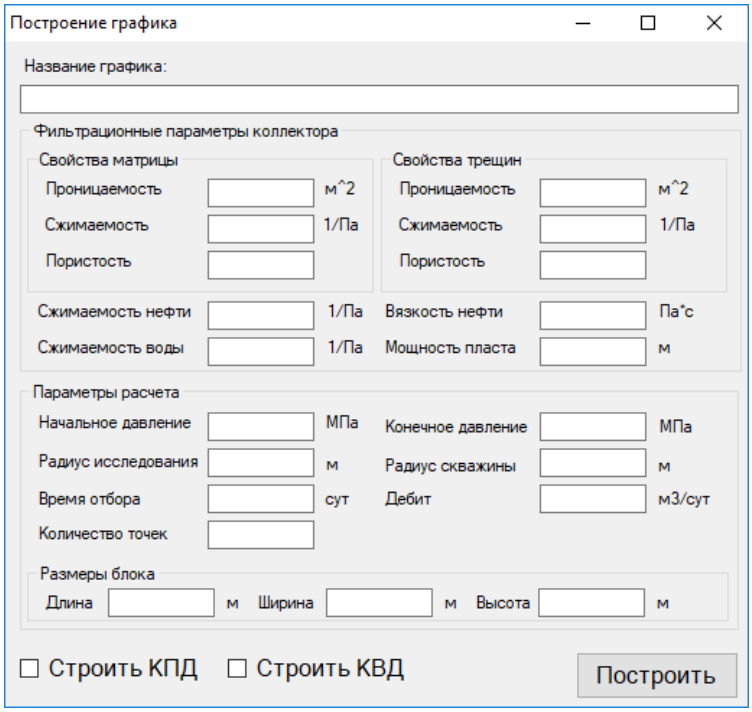


Рисунок 3.1 – Диалоговое окно «Начальные параметры»

При задании параметров на форме предусмотрен механизм ввода некорректных данных. При попытке пользователем ввода некорректных данных или отсутствия значения в необходимых полях на экран выводится соответствующее сообщение. Пример сообщения представлен на рисунке 3.2. Подобные сообщения могут выводиться при других исключительных ситуациях.

Если пользователь видит такое сообщение, значит, программа остановила свою работу.

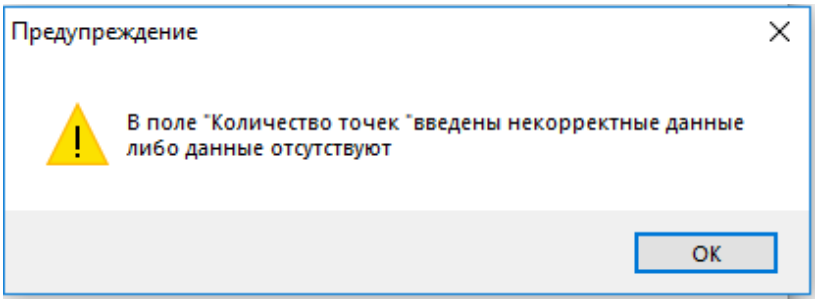


Рисунок 3.2 – Окно с предупреждением о вводе некорректных данных

Второе окно выводит результаты расчета в табличном и графическом видах. В левой части таблицы находятся таблицы, в которые помещаются числовые данные графиков. Вверху формы располагается меню, с помощью которого можно построить график, загрузить/сохранить данные в файл, произвести настройки файла журнала и вида графика. Программный модуль также имеет средства для работы с файлами. Файл (.txt) представляет набор строк, на каждой строке содержит один параметр. Всего типов таких файлов – три. Файлы, являющиеся входными, выбираются пользователем посредством диалогового окна. Выходные файлы сохраняются пользователем на жестком диске, место в файловой системе выбирается с помощью диалогового окна, имя сохраняемого файла задается пользователем. Если пользователь пытается загрузить неподдерживаемый тип файла, то файл не будет загружен, а на экран выведется сообщение с предупреждением. Интерфейс формы с результатами представлен на рисунке 3.3.

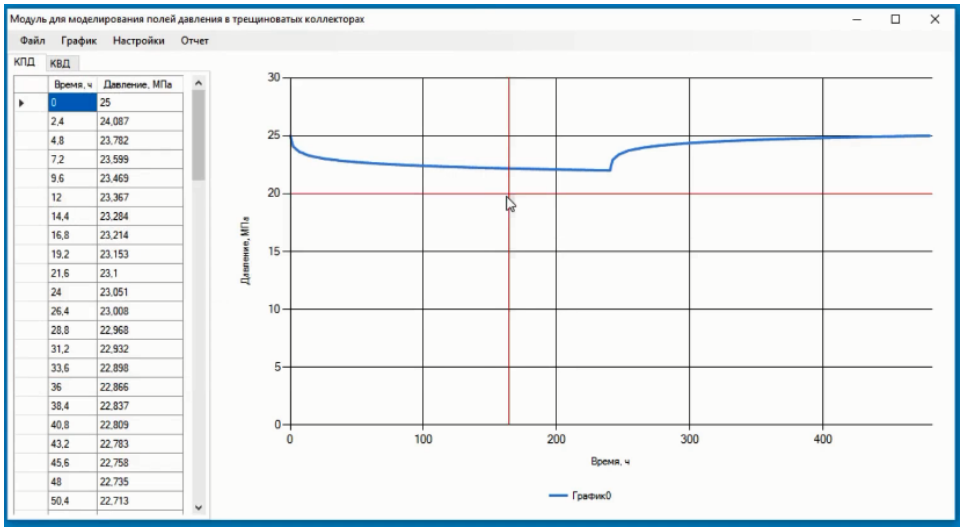


Рисунок 3.3 – Диалоговое окно «Построение графиков»

Первый тип файла может быть входным и выходным. Первая часть файла содержит набор параметров, необходимых для построения графика, в том числе имя графика, данные ГДИС и параметры расчета. Во второй части файла поочередно прописаны точки графика. При выборе пользователя такого файла в качестве входного, сразу будет построен график на главной форме, а точки загружены в таблицы. Также в таком формате можно сохранить уже построенные графики, каждый график в отдельный файл.

Второй тип файла также может быть входным и выходным. Его отличие от первого файла, в нем отсутствует первая часть, и содержатся точки необходимые для построения графика. При сохранении файла, пользователю предлагается выбор в каком формате необходимо сохранить – в первом с параметрами или втором без параметров.

Третий тип файла может быть только выходным. Этот файл является файлом-журналом, в который записываются этапы расчета и промежуточные результаты. Файл формируется автоматически в ходе расчета. Его вид определяется в настройках файла-журнала, при необходимости пользователь может отключить запись файла-журнала. Если запись не отключена файл-журнал автоматически открывается после каждого расчета.

3.4 Результаты численного моделирования

Протестируем программный модуль на примере модельной задачи в виде гидродинамического исследования в добывающей скважине методом кривой восстановления давления. Пусть в начальный момент времени добывающая скважина, которая эксплуатирует один пласт, запущена в работу с дебитом жидкости 80 м^3/сут. Отработав 1 сутки, скважина выходит на установившейся режим работы и закрывается на забое для проведения гидродинамического исследования методом кривой восстановления давления [125]. В момент остановки скважины, при q = 0 м^3/сут, давление в пласте начинает восстанавливаться. Предполагается, что на границе пласта поддерживается постоянное давление, и

влияние соседних скважин не наблюдается. Для пласта, скважины и сети трещин имеем следующие начальные параметры [126, 127]:

Таблица 3.1 – Начальные и граничные параметры

Параметры	Значения	Единицы измерения
Вязкость нефти, μ	1.3 E-3	Па·с
Начальное давление в сети трещин, P_0^f	250.0E5	Па
Начальное давление в матрице, P_0^m	250.0E5	Па
Проницаемость сети трещин, k_f	1.0E-13	м^2
Проницаемость матрицы, k_m	1.0E-15	м^2
Сжимаемость сети трещин, c_{tf}	5.0E-10	1/Па
Сжимаемость матрицы, c_{tm}	3.0E-10	1/Па
Сжимаемость нефти, c_o	1.4E-9	1/Па
Сжимаемость воды, c_w	3.3E-10	1/Па
Пористость сети трещин, φ_f	1 E-2	
Пористость матрицы, φ_m	1 E-1	
Количество групп трещин, n	3	
Длина блока, a	0.5…20	м
Ширина блока, b	0.5…20	м
Высота блока, c	0.5…20	м
Эффективная мощность пласта, h	10	м
Радиус скважины, r_w	0.1	м
Радиус исследования, R_e	10.0	м
Скин, S	-3…3	

Результаты численного моделирования представлены на графике динамики изменения давления (рисунок 3.4). Численный расчет сопоставляется с аналитическим решением для заданного интервала, который представлен в формуле (2.12). Относительная погрешность составляет ~7 %, что является приемлемым на практике.

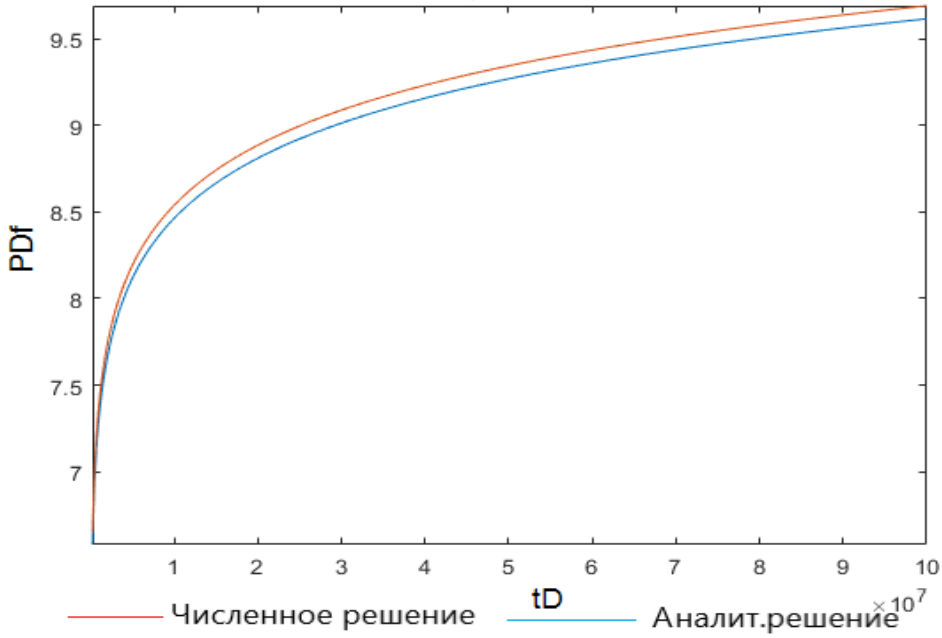


Рисунок 3.4 – Сопоставление результатов аналитического решения с численным расчетом для изменения забойного давления

Далее на рисунке 3.5 представлен сравнительный анализ численного расчета с результатом на основе промысловых данных. Относительная погрешность расчета составила не более 5%.

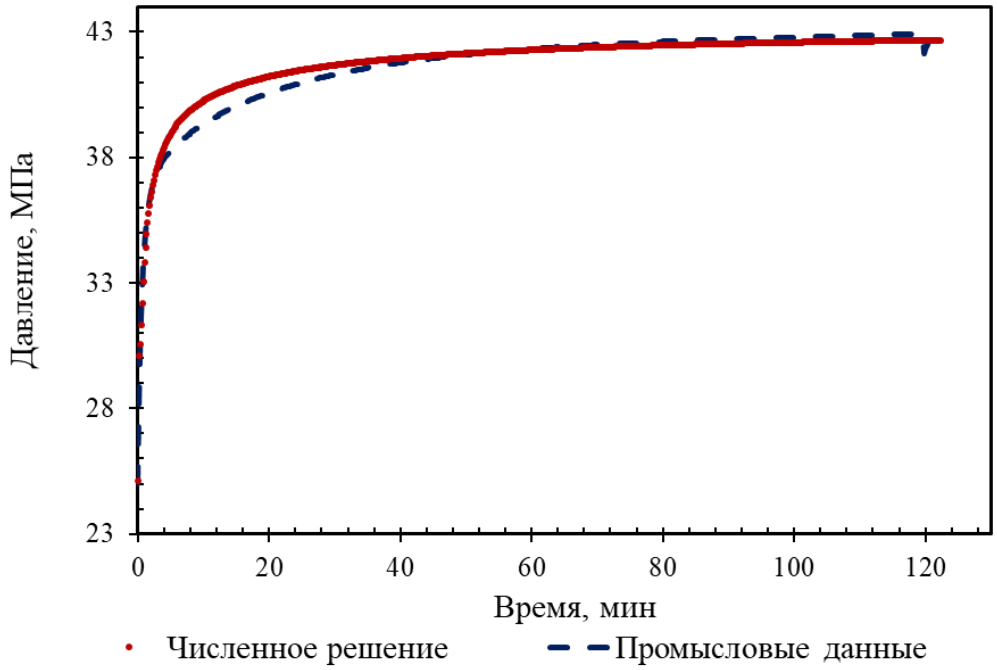


Рисунок 3.5 – Сопоставление результатов численного расчета с промысловыми данными

Получив удовлетворительную сходимость аналитического и численного решения, а также численного расчета с промысловыми данными было проведено ряд расчетов и анализ полученных кривых. На рисунке 3.6 представлена зависимость давления от времени для гидродинамического исследования методом кривой восстановления давления на расстояниях 0.5 м, 1 м, 10 м от скважины. Результатом решения уравнений пьезопроводности является перераспредление давления, которое распространяется мгновенно после остановки скважины по всему пласту. С физической точки зрения, для каждой скважины существует свое расстояние или радиус исследования, дальше которого уже изменения незначительны и не могут быть измерены. Этот радиус показывает область вокруг скважины, которая влияет на результаты гидродинамических исследований. По рисунку 3.6 наблюдаем динамику давления во времени на трех разных радиусах и отмечаем, что чем дальше расстояние от скважины, тем давление восстанавливается быстрее. Таким оразом, для рассматриваемого нами случая, радиус исследования получается 10 м, дальше этого расстояния возмущения проявляться уже не будут, так как давление полностью восстановится.

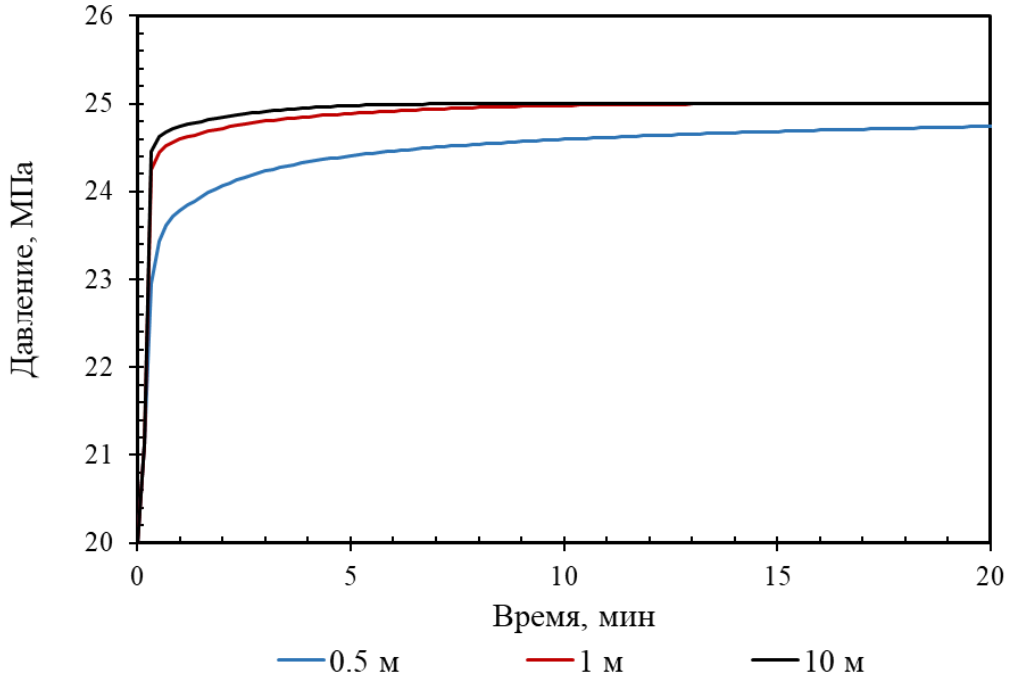


Рисунок 3.6 – Динамика изменения давления для разных радиусов (0.5 м, 1 м, 10 м)

На рисунке 3.7 построены зависимости забойного давления от радиуса исследования в разные моменты времени – 10 мин, 60 мин, 120 мин. В данном случае видим с какой скоростью идет восстановление давления в разные моменты времени. В момент времени 10 минут наблюдается сильное возмущение пласта, при дальнейшей остановке возмущения уменьшаются и на 120 минутах исследования практически исчезают. Так можно оценить необходимое время длительности проведения исследования, то есть если оно уже восстановилось на 120 минутах, значит дальнейшая остановка будет нерентабельна и новых результатов не принесет.

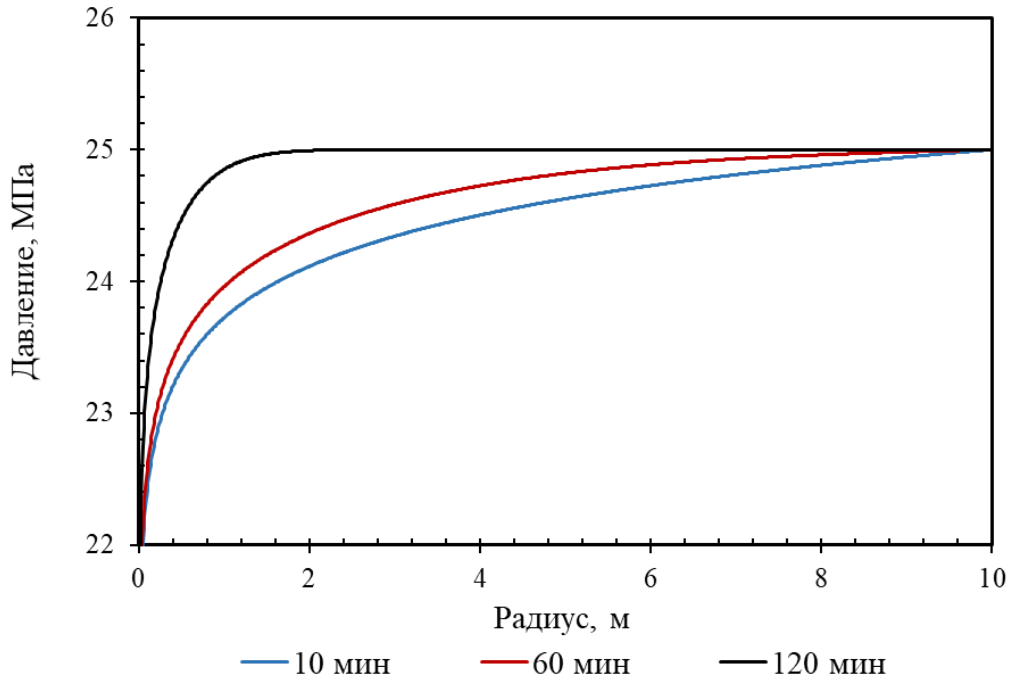


Рисунок 3.7 – Зависимость давления от радиуса для разных моментов врмени (10 мин, 60 мин, 120 мин)

Далее на рисунках 3.8 и 3.9 продемонстрированы динамики изменения давления во времени и по пространству вокруг добывающей скважины для разных проницаемостей трещин, 10 мД и 100 мД, соответственно.

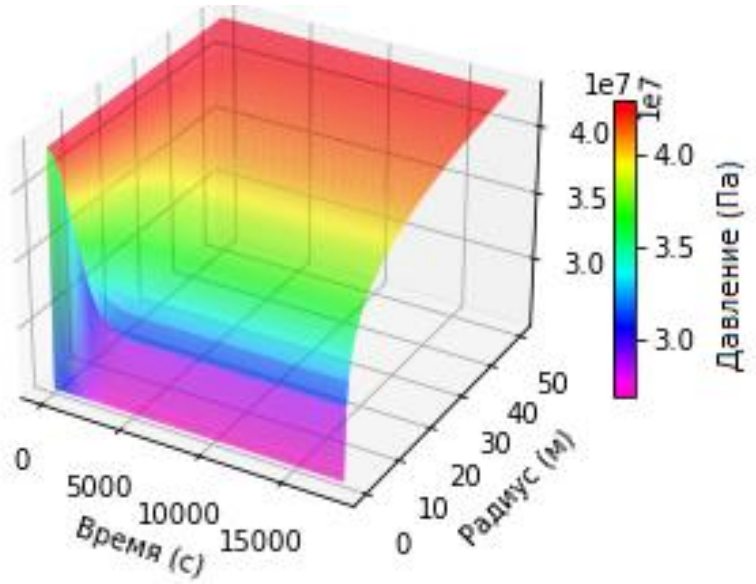


Рисунок 3.8 – Динамика изменения давления в окружении добывающей скважины для k_f = 10 мД и k_m = 0.1 мД

Наблюдаем, в каком случае быстрее происходит восстановление давления. Зная коэффициент пьезопроводности можно оценить время, когда влияние скважины дойдет до других (соседних) скважин. Имея данную информацию, проводится контроль и разработка месторождения.

Во втором случае проницаемость системы трещин увеличена в 10 раз. В результате этого отмечается, что давление восстанавливается быстрее и скорость распространения выше.

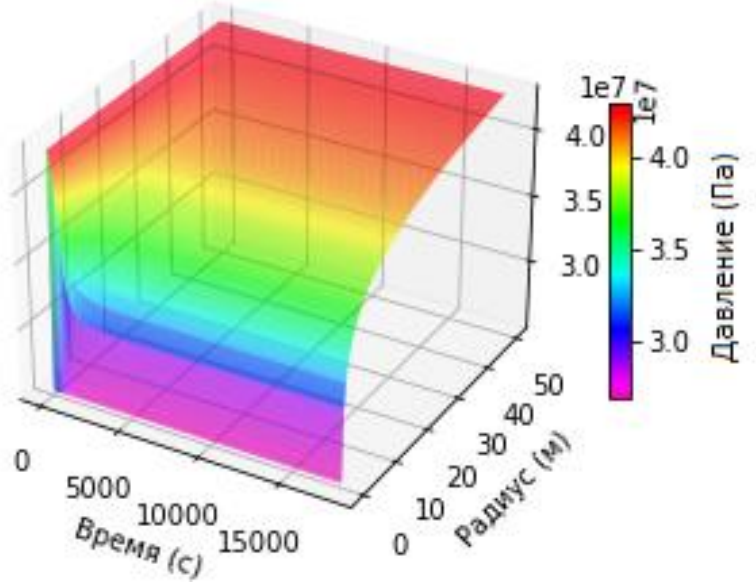


Рисунок 3.9 – Динамика изменения давления в окружении добывающей скважины для k_f = 100 мД и k_m = 1 мД

Далее на рисунках рассматривается динамика давления при исследовании методом кривой восстановления давления в зависимости от размеров матричных блоков. На рисунках 3.10 и 3.11 смоделированы кривые давления для разных размеров блоков длины и высоты, соответственно.

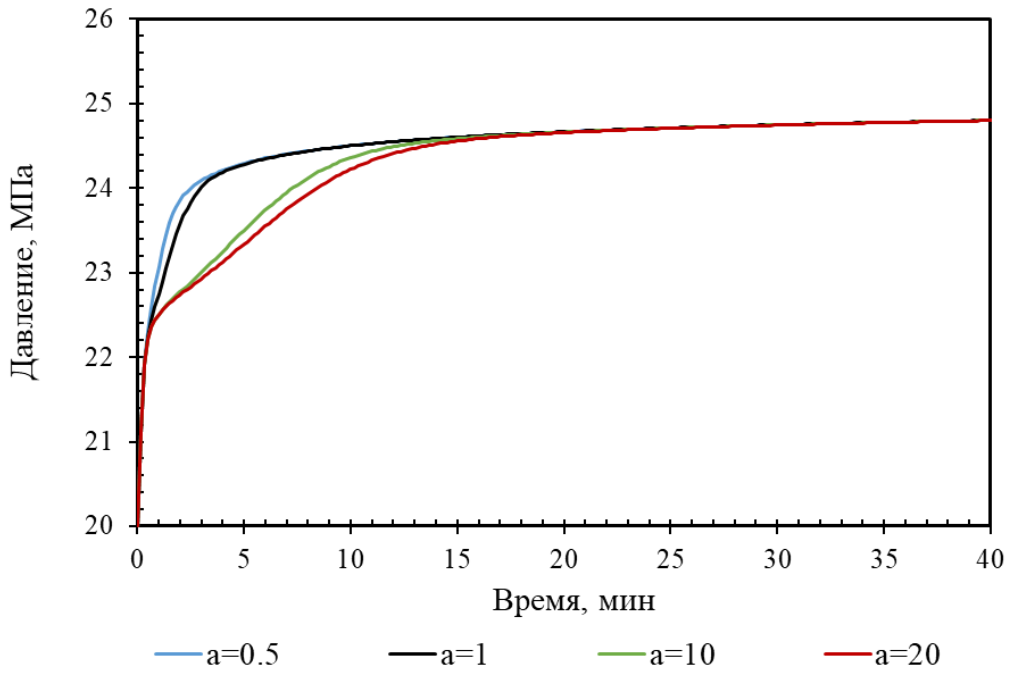


Рисунок 3.10 – Изменение давления для блоков разной длины (0.5, 1, 10, 20м)

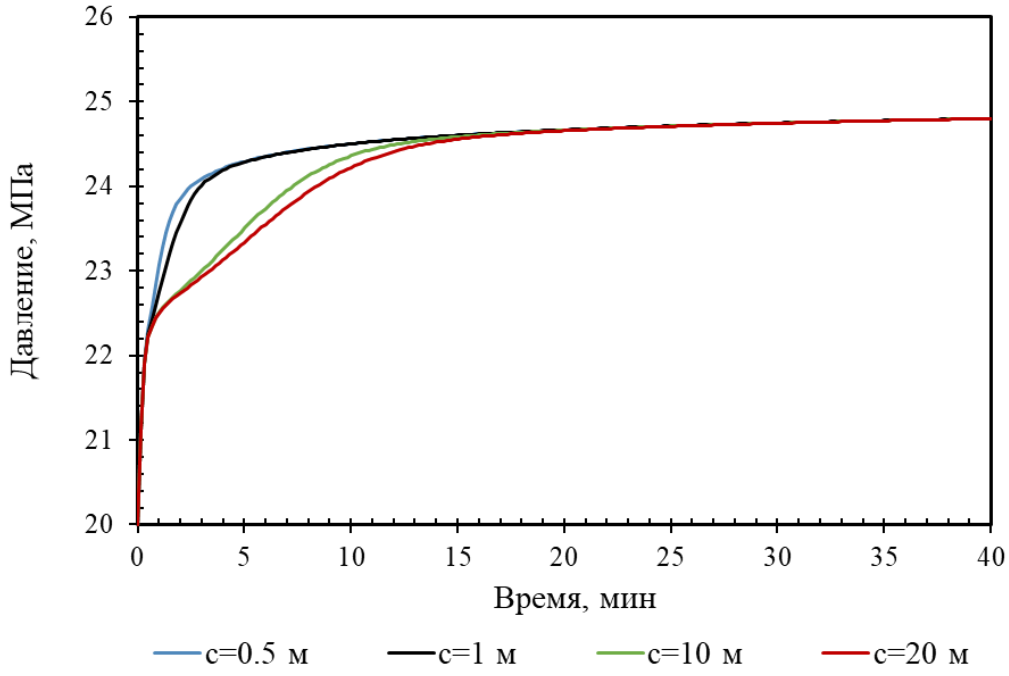


Рисунок 3.11 – Изменение давления для блоков разной длины высоты (0.5, 1, 10, 20 м)

Заметим, что в зависимости от размеров блоков матрицы динамика забойного давления изменяется. Чем больше размер блока, тем процесс восстановления происходит медленнее, и наоборот.

Для более детального анализа полученных кривых в ГДИС используется производная Бурде, так как производная более чувствительна к изменениям давления, чем сама функция. В литературе предложено много различных вариантов построения производной, но в практике зачастую применяют логарифмическую производную Бурде [128], которая представляется следующим образом:

$$P' = \frac{\partial \Delta P}{\partial (ln \Delta t)}. \quad (3.30)$$

Главная идея производной – определить наклон в каждой точке кривой давления на полулогарифмическом графике и нанести эти точки на график в билогарифмических координатах.

Далее анализ кривых будет проводиться на основании производной Бурде, представленной на графике в двойных логарифмических координатах. Благодаря такому представлению, на производной можно выделять разного рода режимы, которые протекают в пласте и скважине, а также определять тип коллектора. В трещиновато-поровом коллекторе для производной Бурде характерны два горизонтальных участка, которые отделены между собой скачком кривой вниз. Горизонтальный участок отвечает за стационарный режим течения, а скачок вниз указывает на перераспределение жидкости между матрицей и трещинами. Для построения производных использовался программный модуль «Saphir» программного комплекса «ECRIN» [128]. Рассмотрим графики производных давления для кривых восстановления давления (рисунках 3.12-3.13).

Для случая с разной высотой блока матрицы (рисунок 3.11) построим логарифмическую производную для высоты 0.5 м и 10 м (рисунок 3.12). По диагностическому графику КВД в билогарифмических координатах на первых временах наблюдаем прямолинейный участок – выход на первый радиальный режим течения (по трещинам), далее скачок вниз – отвечает за перераспределение жидкости между матрицей и системой трещин и затем выход на второй радиальный

режим течения – система стабилизировалась. Отметим, что скачок вниз или перераспределение давления для высоты 0.5 м находится в промежутке времени от 0.01 до 0.2 мин., т.е. на совсем ранних временах. Можно сделать вывод, что при текущих заданных начальных параметрах, эффект двойной пористости возникает до 1 мин. исследования, а далее идет стабилизация, то есть пласт начинает вести себя как однопоровый. При высоте блока в 10 м, перераспределение давления происходит в промежутке от 0.7 до 20 мин. В случае проведения исследования без перекрытия скважины на забое для высоты блока 0.5 м, в начальный момент проявится влияние ствола скважины, который на диагностическом графике производной перекроет период перетока жидкости из матрицы в трещину (или скачок вниз), соответственно выявить эффект двойной пористости будет невозможно. Поэтому рекомендуется проводить исследования такого характера с перекрытием скважин на забое.

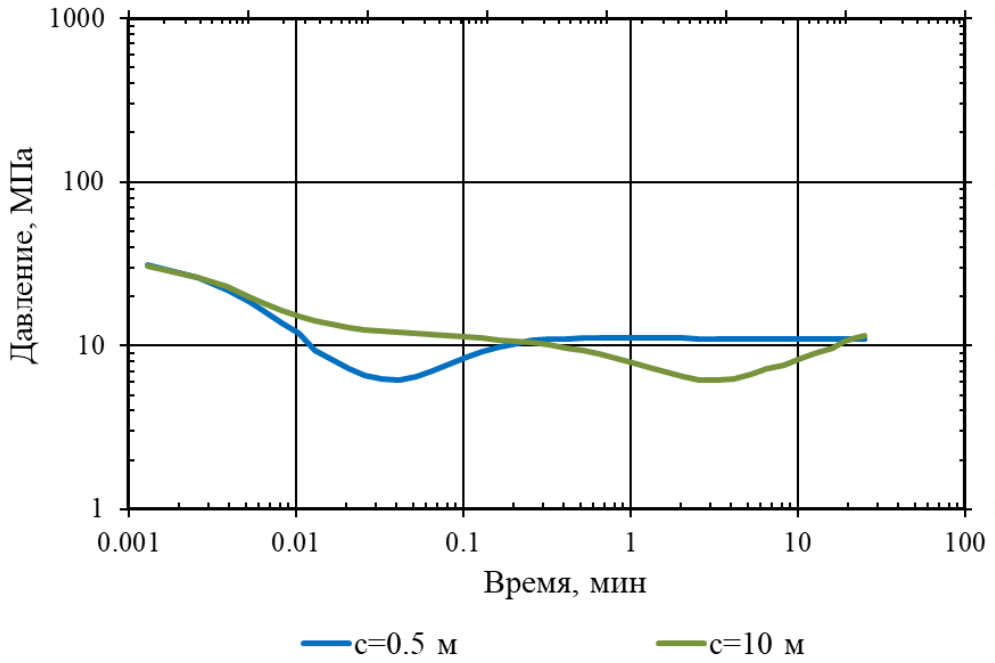


Рисунок 3.12 – График производной давления Бурде в двойных логарифмических координатах для блоков высоты 0.5 м и10 м

Отмечается, что при разных высотах вид диагностических графиков производной в билогарифмических координатах различаются. Это означает, что при меньших

высотах движение флюида в пласте происходит быстрее, тем самым восстановление давление будет достигнуто за короткий промежуток времени.

3.4.1 Инженерный анализ чувствительности к входным параметрам

При построении модели исходные данные всегда принимаются с некоторой степенью неопределенности. Кроме того, параметры могут изменяться в зависимости от внешних условий и во времени – в этом случае нет однозначного соответствия между вектором параметров и вектором состояния. Для выявления таких факторов применяют специальный анализ, называемый «анализом чувствительности».

Анализ чувствительности позволяет сделать вывод об относительной важности входных переменных для конкретной модели, позволяет отметить ключевые переменные и выделить диапазоны варьирования, а также идентифицировать те, которые можно без ущерба исключить из рассмотрения.

Проведем анализ чувствительности для рассмотренной модели двойной пористости. С технологической точки зрения специалисты выделяют определенный набор параметров, которые важно учитывать при бурении скважин или проведении геолого-технических мероприятий. Поэтому будут варьироваться следующие параметры: проницаемость (k), удельный коэффициент проводимости (λ), коэффициент доли трещинно-кавернозной емкости (ω), скин-фактор ($Skin$), влияние ствола скважины (C_s).

Для каждого из этих параметров построим группы кривых, которые покажут поведение забойного давления и подключения матрицы в работу на графике в двойных логарифмических координатах в зависимости от изменения параметров пласта.

3.4.2 Анализ влияния проницаемости пласта на динамику забойного давления

Представлен анализ чувствительности для различных значений проницаемости пласта. На рисунке 3.13 построен набор кривых давлений при различных проницаемостях. Здесь под проницаемостью понимается общая

проницаемость, т.е. $k_f + k_m$. Диапазон варьируемых значений составил от 1 до 100 мД. Отмечается, что чем больше проницаемость, тем кривая давления стремится к восстановлению быстрее.

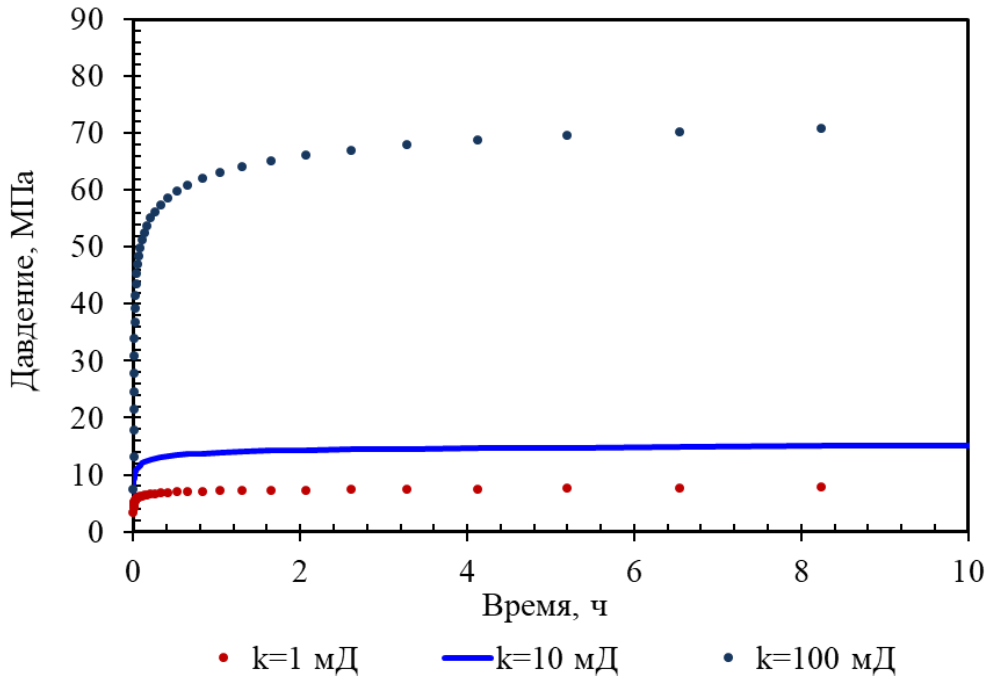


Рисунок 3.13 – График КВД при различных значениях проницаемости пласта

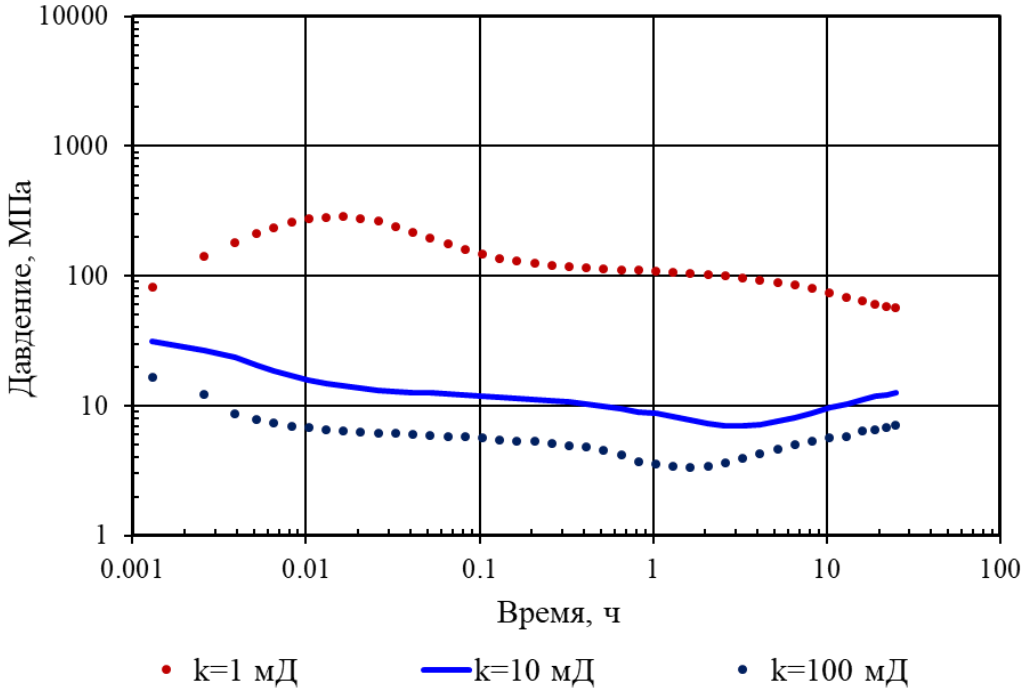


Рисунок 3.14 – График производной давления Бурде в двойных логарифмических координатах при различных значениях проницаемостях пласта

На диагностическом графике в билогарифмических координатах (рис.3.14) видим, что при увеличении проницаемости скачок вниз на производной сдвигается влево по времени и спускается вниз, а точнее при увеличении проницаемости в 100 раз, время подключения матрицы в работу уменьшается в 200 раз. Физически это объясняется тем, что при низких проницаемостях (1 мД) выход на радиальный режим течения будет наблюдаться на более поздних временах исследования (200 ч), соответственно, разрядка матрицы в трещины будет проявляться позже.

3.4.3 Анализ влияния параметра коэффициента доли трещинно-кавернозной емкости на динамику забойного давления

При варьировании параметра коэффициента доли трещинно-кавернозной емкости *(ω)*, т.е. изменении пористости и сжимаемости трещин и матрицы, также были сделаны выводы. На рисунке 3.15 построен набор кривых давлений при различных значениях параметра коэффициента доли трещинно-кавернозной емкости. Также отмечаем, что чем меньше данное значение, тем кривая давления восстанавливается быстрее.

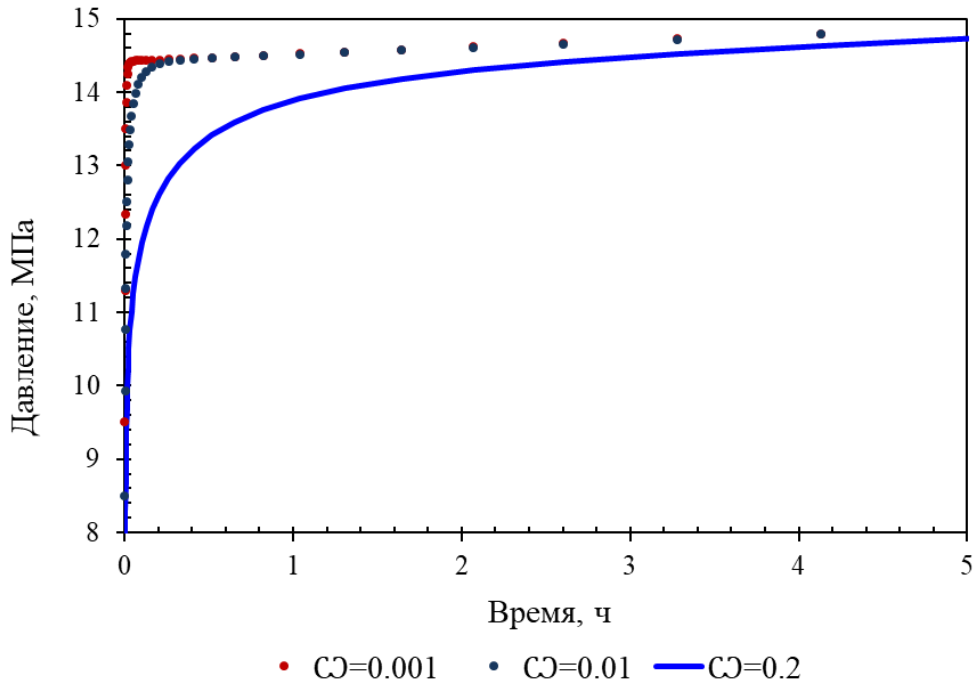


Рисунок 3.15 – График КВД для различных значений параметра коэффициента доли трещинно-кавернозной емкости

По диагностическим графикам производной при ω=0.001 подключение матрицы в работу наступает при 0.02 часах, а при ω =0.2 – на 1часе исследования.

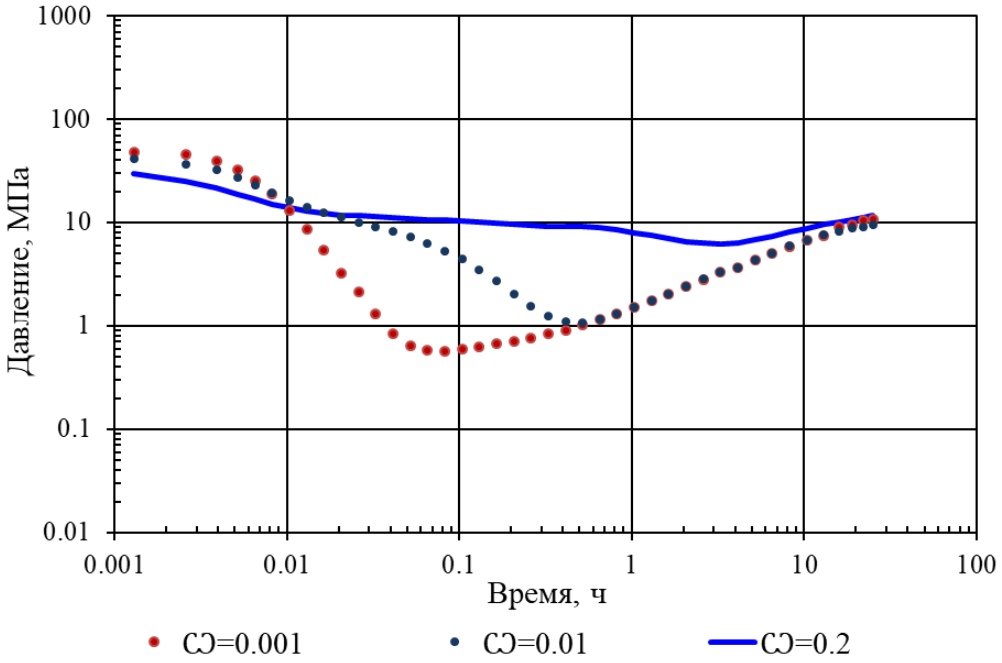


Рисунок 3.16 – График производной давления Бурде в двойных логарифмических координатах для различных значений параметра коэффициента доли трещинно-кавернозной емкости

При увеличении данного коэффициента в пласте увеличивается объем трещинно-кавернозной емкости, соответственно эффект двойной пористости или подключение матрицы в работу наступает позднее.

3.4.4 Анализ влияния коэффициента удельной проводимости на динамику забойного давления

Второй параметр двойной пористости – коэффициент удельной проводимости (λ). λ описывает возможность фильтрации из матрицы в трещины. Для высоких значений λ, проницаемость матрицы относительно высокая, поэтому она начнет отдавать свой флюид, как только заработает система трещин. С другой стороны, низкие значения λ означают очень низкопроницаемую матрицу, и в системе трещин необходимо установить большее падение давления, прежде чем матричные блоки начнут заметно отдавать флюид, в этом случае переходная стадия

наступит позже. На рисунке 3.17 по кривым динамики давления видим, что при низких λ, восстановление происходит быстрее, чем при высоких λ.

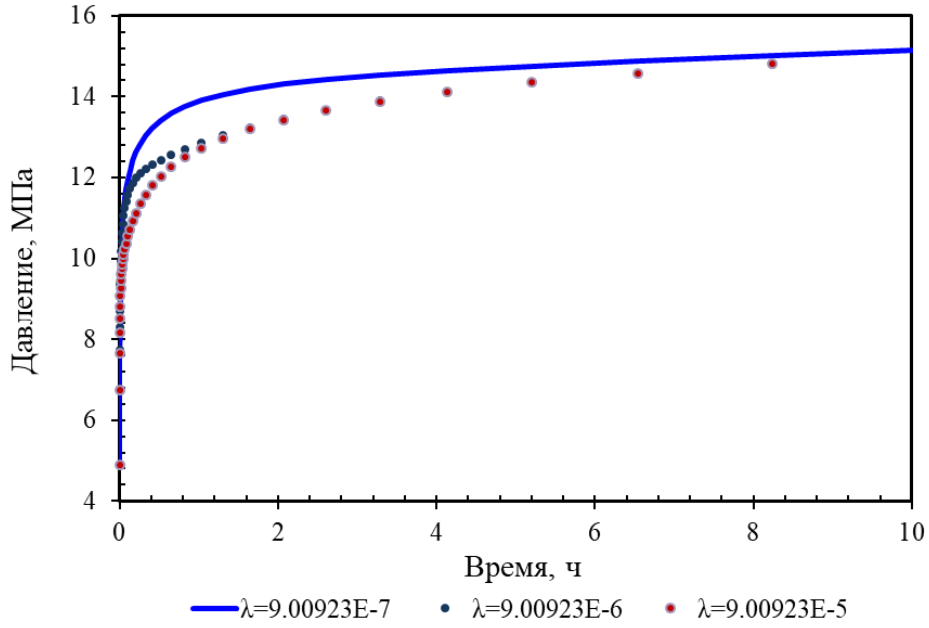


Рисунок 3.17– График КВД при различных значениях параметра коэффициента удельной проводимости

Это же продемонстрировано на диагностическом графике в билогарифмических координатах (рис.3.18).

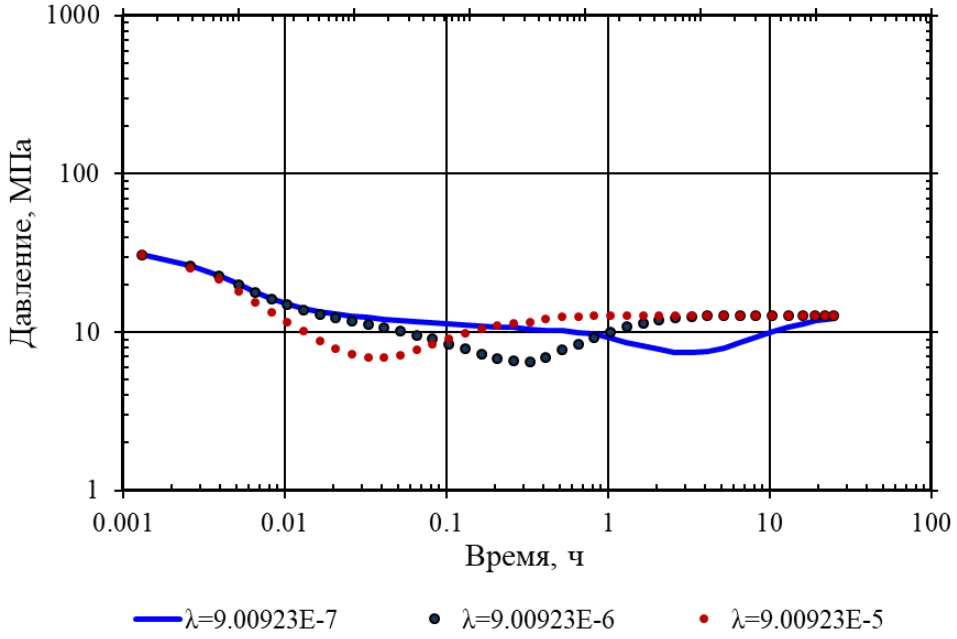


Рисунок 3.18 – График производной давления Бурде в двойных логарифмических координатах при различных значениях параметра коэффициента удельной проводимости

Наблюдаем, что при увеличении λ скачок производной не изменяется в размере, как это было с параметром ω, но смещается влево по времени. При больших значениях коэффициента λ=9·E-5, когда матрица имеет высокую проницаемость, радиальный режим течения в трещинах также не получим, сразу матрица подключается в работу и радиальный режим будет характерен для всей системы. При маленьких значениях коэффициента λ=9·E-7, подключение в работу матрицы получим на 1 часе.

3.4.5 Анализ влияния состояния призабойной зоны пласта на динамику забойного давления

При варьировании такого параметра как скин-фактор, положение скачка, связанного с перетоком жидкости, на производной изменяться не будет. Это связано с тем, что скин-фактор позволяет определять степень загрязнения призабойной зоны скважины. Другими словами, он делает оценку проницаемости призабойной зоны пласта. Так как скин-эффект проявляется на самых ранних временах исследования, то он не повлияет на радиальные режимы в трещинах и всей системы, а также на разрядку матрицы в пласт. Таким образом, на рисунке 3.19 явной разницы между кривыми восстановления не наблюдается. Для моделирования был выбран диапазон изменения скин-фактора от -3 до 3. Отрицательные значения говорят о хороших свойствах призабойной зоны ($k_s > k$), положительные значения скина – о плохих свойствах призабйной зоны ($k_s < k$).

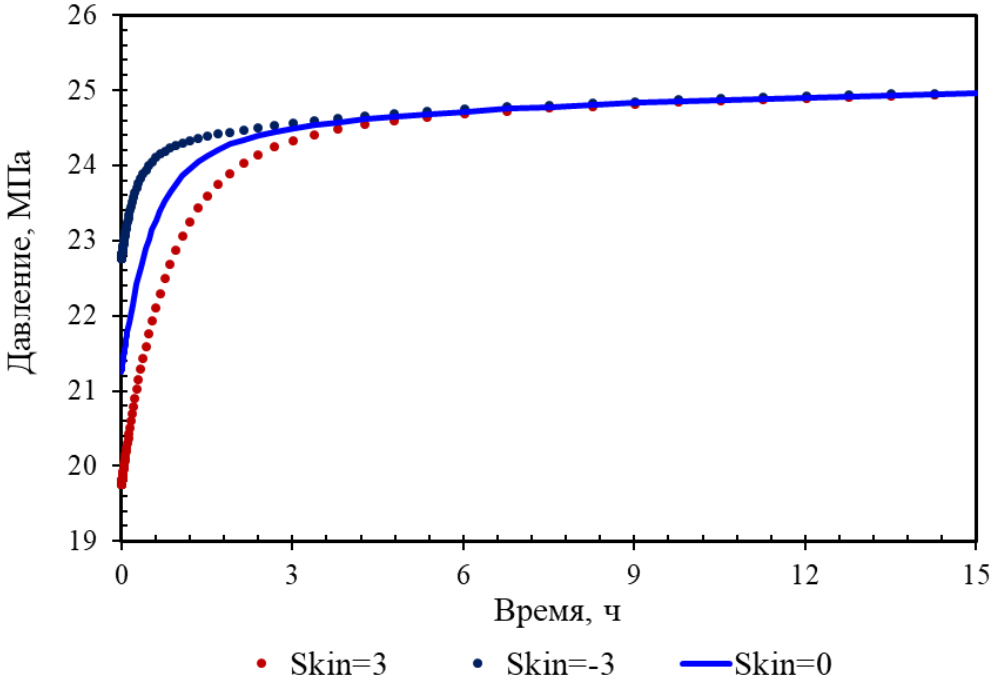


Рисунок 3.19 – График КВД при различных значениях скин-фактора

На рисунке 3.20 скачок производной на билогарифмическом графике будет статичным. Лишь на первых временах исследования наблюдаем разницу производных, которые никак не связаны с потоком флюида в пласте. То есть при максимальном положительном скин-факторе равном 3 получаем наивысший «бугорок» производной, при наименьшем отрицательном значении равном – 3, «бугорок» производной вовсе исчезает.

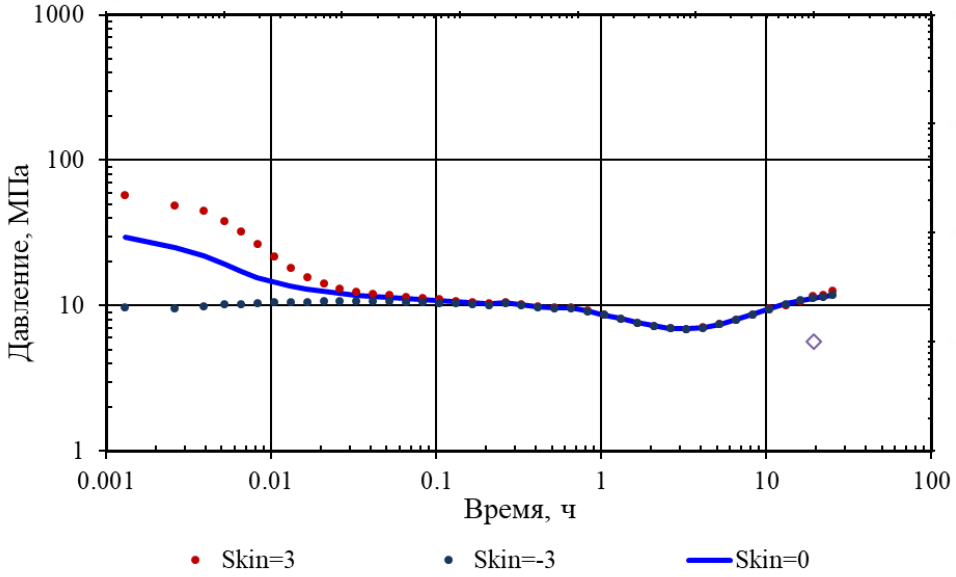


Рисунок 3.20 – График производной давления Бурде в двойных логарифмических координатах при различных значениях скин-фактора

3.4.6 Анализ влияния объема ствола скважины на динамику забойного давления

Параметр, который играет немаловажную роль – это коэффициент влияния объема ствола скважины. Специалисты в области разработки на данный параметр внимания не обращают, однако его влияние заметно проявляется на стадии интерпретации гидродинамических исследований на неустановившихся режимах. При проведении исследований ГДИС интервалы перфорации не всегда отделяют пакером. В связи с этим возникают проблемы с выделением режимов течения из-за эффектов, которые происходят в стволе скважины после ее остановки.

На рисунке 3.21 представлен результат анализа чувствительности данного параметра. Для анализа выбран диапазон значений от 4E-4 до 0.09.

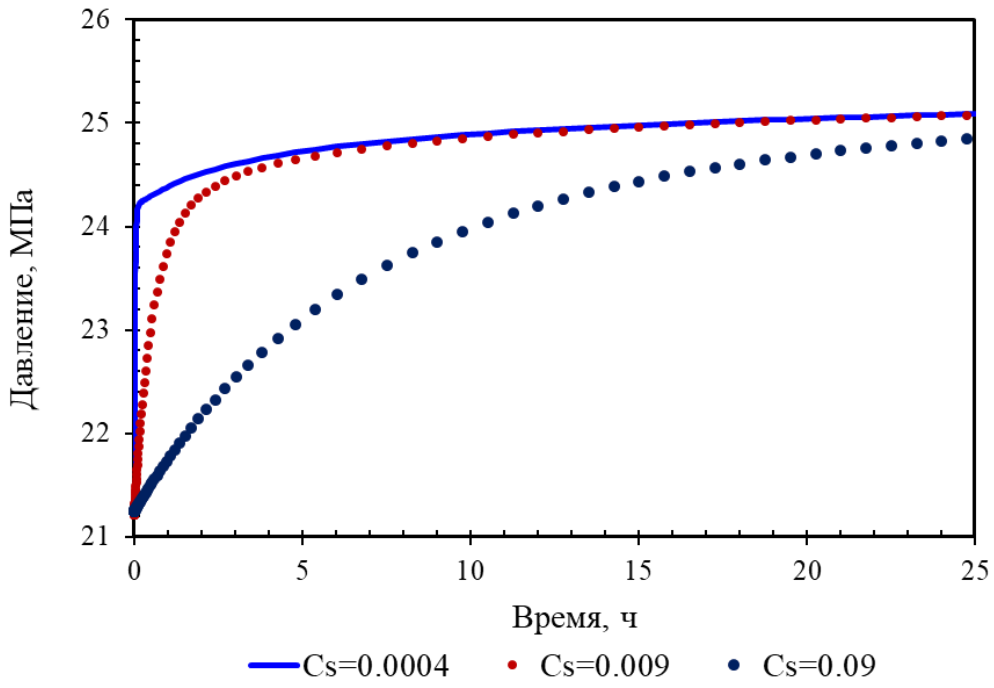


Рисунок 3.21 – График КВД при различных значениях ВСС

По диагностическом графику производной (рис.3.22) наблюдаем, что при увеличении параметра ВСС возникает риск перекрытия радиального режима течения, который устанавливается в трещинах. А в некоторых случаях возможно перекрытие и скачка на производной, т.е. после коэффициента влияния ствола скважины (скачка производной вверх) сразу будем наблюдать радиальный режим течения всей системы. Такое возможно, когда будут максимальные значения

параметра коэффициента удельной проводимости или минимальные значения параметра коэффициента доли трещинно-кавернозной емкости, которые фиксируются на временах менее 0.1 часа. Соответственно в таких случаях при ГДИС есть вероятность ошибиться, что коллектор однопоровый.

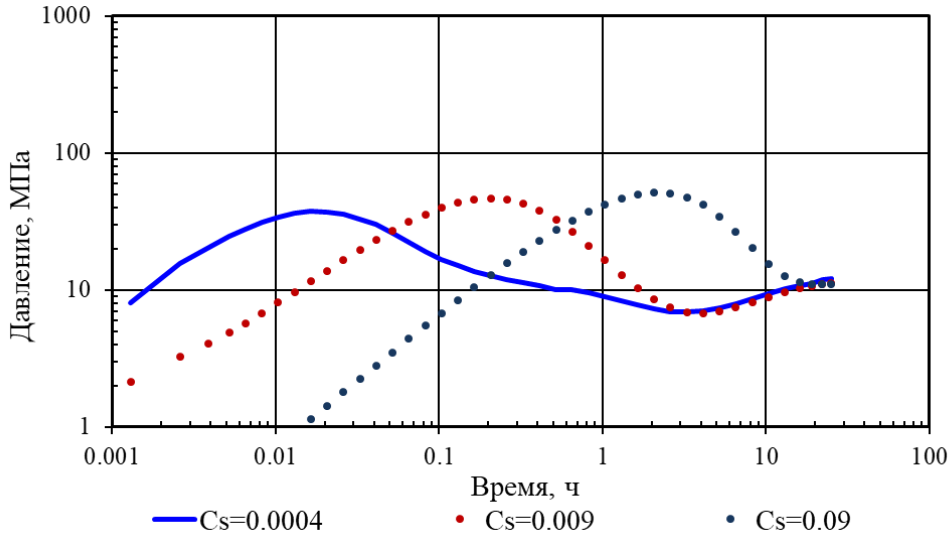


Рисунок 3.22 – График производной давления Бурде в двойных логарифмических координатах при различных значениях ВСС

Таким образом, для прогнозирования продуктивности скважин, успешности различных геолого-технологических мероприятий необходимо учитывать не только проницаемость и текущий скин-фактор, но и геометрию распределения проводящих трещин.

Анализ результатов моделирования гидродинамических исследований методом кривой восстановления давления в добывающей скважине показал, что удельный коэффициент проводимости (λ) зависит от размеров матричных блоков, а именно: при увеличении размеров блока матрицы коэффициент проводимости уменьшается, соответственно уменьшается способность матрицы участвовать в фильтрации системы. Также было отмечено, что больший вклад вносит именно размер блока матрицы, при ее увеличении эффект двойной пористости проявляется на более раннем временном участке, и наоборот при ее уменьшении к более позднему проявлению эффекта двойной пористости (перераспределению давления между трещиной и матрицей).

3.5 Выводы по главе 3

В главе 3 представлены методы решения рассмотренных систем дифференциальных уравнений второго порядка. Для решения выбран метод конечных разностей. Расписаны явная и неявная разностные схемы для рассмотренных математических моделей на равномерной сетке.

Для математической модели были записаны граничные условия специального вида, которые учитывают влияние процессов, происходящих в стволе скважины при закрытии ее на исследование. Представлена дискретизация граничных условий до второго порядка точности. При решении задачи с граничными условиями первого порядка точности получены погрешности в результатах, которые допустимы для практических задач. В связи с этим, для упрощения вычислительного процесса все численные расчеты проводились с граничными условиями первого порядка.

Для решения полученных схем применялся метод матричной прогонки. Разработан интерфейс для моделирования полей давления при проведении гидродинамических исследований в коллекторе трещиновато-порового типа с выбором типа схем и шага расчетной сетки. Программный модуль предусматривает возможность задания различных входных параметров и граничных условий.

В разработанном модуле проведено численное моделирование динамики забойного давления во времени и пространстве в коллекторе трещиновато-порового типа. Построены кривые восстановления давления для разных проницаемостей сети трещин. Для кривых давления построены производные Бурде в двойных логарифмических координатах. По построенным производным проведен анализ результатов, который показал:

1. При низких значениях проницаемости системы трещин и матрицы наступление перетока жидкости из матрицы в трещины будет проявляться на более поздних режимах, а именно для проницаемости 1 мД переток начнется на 30 часах исследования, для 100 мД – на 0.5 часах исследования.

2. При увеличении коэффициента объема трещинно-кавернозной емкости в пласте увеличивается доля трещин и объем жидкости находящийся в трещинах. В связи с этим при больших значениях коэффициента эффект двойной пористости наступает позднее: для ω =0.001 переток начинается на 0.02 часах исследования, для ω =0.2 время наступления увеличивается в 50 раз или на 1 часе исследования.
3. При увеличении параметра коэффициента удельной проводимости увеличивается проницаемость матрицы, соответственно подключение матрицы в работу наступает быстрее: для λ=9E-5 время подключения матрицы в работу происходит на 0.1 часе, для минимального значения λ=9E-7 подключение время подключения увеличивается в 10 раз.
4. Влияние ствола скважины и скин-фактора на подключение матрицы в работу не влияют, так как данные параметры относятся к характеристикам призабойной зоны пласта и скважины. Данные параметры имеют влияние на построение производной, то есть при их больших значениях эффект двойной пористости (или подключение матрицы в работу) может перекрыться и определить его наличие не будет возможности.

Полученные результаты важны при построении гидродинамической модели, где важно понимать геометрию и структуру пласта, а также для проведения ГДИС, где необходимо оценивать длительности остановок скважин с целью оптимизации затрат на проведение исследований.

ГЛАВА 4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАССОПЕРЕНОСА В РАМКАХ МОДЕЛИ ДВОЙНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В КОЛЛЕКТОРЕ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРОВОГО ТИПА

В главе рассматриваются физическая и математическая модели двухфазной фильтрации флюидов в рамках модели двойной пористости в коллекторе трещиновато-порового типа. Определяется исходная система уравнений, впервые проводится расщепление такого рода задач на физические процессы с целью дальнейшего применения эффективных алгоритмов решения. Исследуются свойства уравнений, описывается метод их решения.

4.1 Физическая модель процесса фильтрации двухфазной жидкости в коллекторе трещиновато-порового типа

На сегодняшний день многие уникальные месторождения находятся на поздней стадии разработки. Для таких месторождений одной из основных целей является увеличение темпа отбора нефти из залежи и поддержание пластового давления на эксплуатируемом объекте. В России в большинстве случаев для этого используется система поддержания пластового давления (ППД), которая предполагает нагнетание рабочего агента в пласт для создания напорного режима. В качестве агента могут выступать вода или газ. Применение того или иного агента зависит от различных технических и геологических факторов: фильтрационно-емкостных свойств пласта, сетки добывающих скважин, наличия необходимого агента и так далее. В связи с теми или иными причинами в основном в качестве агента применяется вода. Так возникают многофазные потоки в пласте [23]. Характер каждого из потоков исследуется экспериментально, а полученный результат изображается в виде зависимостей относительных фазовых проницаемостей от степени насыщенности порового пространства различными фазами [10]. Также полагается, что горные породы одного пласта обладают одинаковыми зависимостями относительных фазовых проницаемостей от насыщенности флюидами, независимо от значения абсолютной проницаемости. Это дает возможность при расчетах многофазной фильтрации использовать

готовые кривые фазовых проницаемостей для часто встречающихся пород (например, песков, песчаников, известняков и т.д.).

Изучение фильтрационных потоков [129] типа «жидкость-жидкость» сводится к построению и анализу двухфазных диаграмм зависимости значений относительных проницаемостей для каждой из фаз от насыщенности [51]. Под водонасыщенностью ($S_{\text{в}}$) понимают отношение объема воды ($V_{\text{в}}$) в породе к объему пор ($V_{\text{пор}}$):

$$S_{\text{в}} = \frac{V_{\text{в}}}{V_{\text{пор}}}.$$

Экспериментально полученные для этого случая фазовые диаграммы имеют стандартный вид:

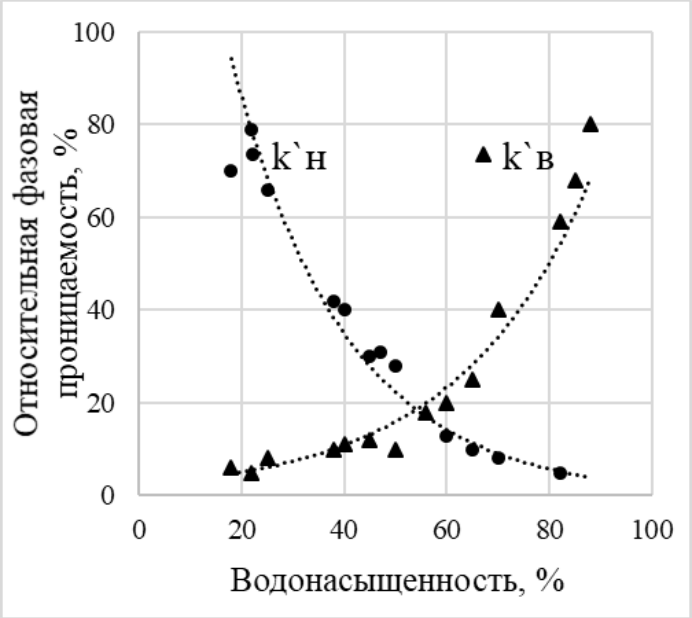


Рисунок 4.1 – Зависимости значений относительных проницаемостей для каждой из фаз от насыщенности ($k'_{\text{н}}$ – нефть, $k'_{\text{в}}$ – вода)

Существенное влияние на характер кривых относительных проницаемостей оказывает структура порового пространства: коллекторы с преобладанием пор большого диаметра характеризуются низкими значениями остаточной водонасыщенности и более широким диапазоном совместного течения фаз. При этом структура порового пространства влияет на относительную проницаемость смачивающей фазы и в меньшей степени – несмачивающей. Это выражено на

графиках (рис. 4.2) различным положением точек пересечения кривых относительных проницаемостей в песках и песчаниках.

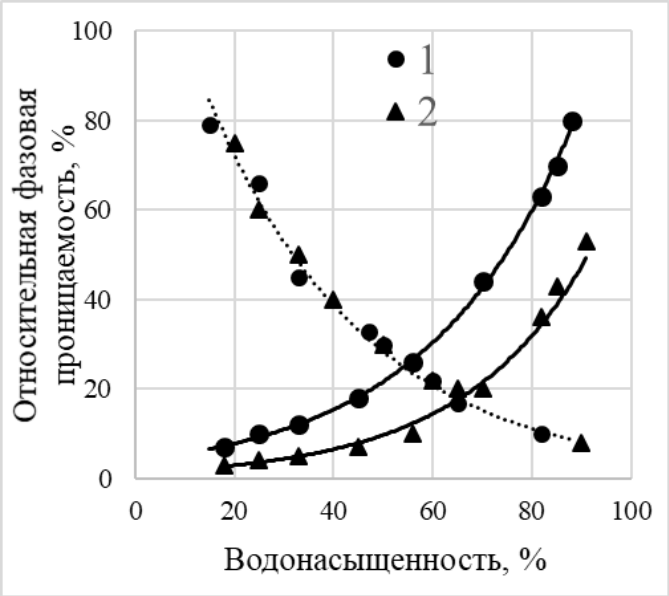


Рисунок 4.2 – Зависимость относительных фазовых проницаемостей для системы нефть – вода от воднасыщенности (1 – песок; 2 –песчаник)

За счет сложного строения карбонатных коллекторов, фазовые диаграммы (рис. 4.3) будут немного отличаться от диаграмм, характерных для терригенных коллекторов.

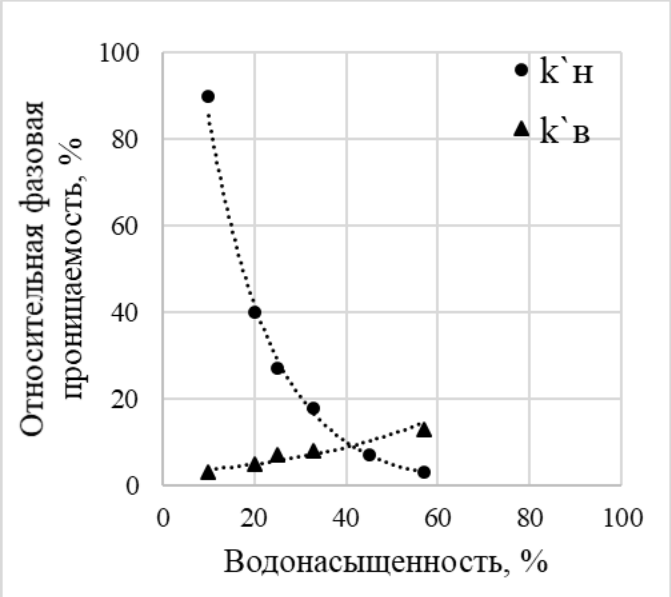


Рисунок 4.3 – Зависимости значений относительных проницаемостей для каждой из фаз от насыщенности для карбонатных коллекторов

При эксплуатации скважины, либо проведении исследования замечено, что насыщенности и давления наиболее быстро меняются вблизи скважин. В связи с этим возникает необходимость проследить детально за движением воды к добывающим скважинам. По сравнению с однофазным течением моделирование двухфазного потока требует более эффективных методов [49], поэтому в следующей подглаве рассмотрим математическую модель двухфазного потока в рамках модели двойной пористости в коллекторе трещиновато-порового типа. Отметим, что давление в пласте выше давления насыщения, что означает отсутствие свободной газовой фазы. А также газовый фактор имеет наименьшие показатели, что говорит о его практическом отсутствии в рассматриваемом коллекторе. Поэтому в качестве флюида будут рассматриваться только нефть и вода.

4.2 Математическая модель процесса фильтрации двухфазной жидкости в коллекторе трещиновато-порового типа

В настоящей работе математическое описание процессов фильтрации основано на законе сохранения массы компонент [20] с учетом взаимодействия фаз.

Рассматриваются двухфазные уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-поровых коллекторах, записанные в дивергентной форме:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(\varphi^\alpha \rho_o^\alpha S_o^\alpha)}{\partial t} + \nabla(\rho_o^\alpha U_o^\alpha) - q_o^\alpha = 0, \\ &\frac{\partial(\varphi^\alpha \rho_w^\alpha S_w^\alpha)}{\partial t} + \nabla(\rho_w^\alpha U_w^\alpha) - q_w^\alpha = 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $\alpha = f, m$, $f -$ система трещин, $m -$ матрица, $i = o, w$, где o –нефть, w–вода, φ^α – пористость (д.ед), ρ_i^α – плотность (г/м^3), S_i^α– насыщенность фазы, U_i^α – скорость течения фазы, q_i^α – функция перетока.

$$\sum_i S_i^\alpha = 1. \tag{4.2}$$

Для скорости фильтрации используется обобщенный закон Дарси. Согласно этому закону скорости фильтрации нефти и воды соответственно равны:

$$U_o^\alpha = -\frac{k^\alpha k_{ro}(S_o^\alpha)}{\mu_o} grad\ P^\alpha,$$
$$U_w^\alpha = -\frac{k^\alpha k_{rw}(S_w^\alpha)}{\mu_w} grad\ P^\alpha, \quad (4.3)$$

где k^α – абсолютная проницаемость (м^2), k_{ro}, k_{rw} – относительные фазовые проницаемости, μ_i – вязкость (Па·с).

В качестве функций перетока используются классические функции, которые предложены в работах Уоррена-Рута [26]. Тогда с учетом функций перетока жидкости между матрицей и системой трещин получим следующее:

$$q_o^m = -q_o^f = -\frac{\sigma \rho_o k^m k_{ro}(S_o^m)}{\mu_o}\left(P^f - P^m\right),$$
$$q_w^m = -q_w^f = -\frac{\sigma \rho_w k^m k_{rw}(S_w^m)}{\mu_w}\left(P^f - P^m\right), \quad (4.4)$$

или

$$q_i^\alpha = \sigma \lambda_i^\alpha (P^f - P^m), \text{ где } \lambda_i^\alpha = \frac{k^m k_{ri}(S_i^m)}{\mu_i}, \quad (4.5)$$

где P – пластовое давление (Па), P^f – пластовое давление в сети трещин (Па), P^m – пластовое давление в матрице (Па), σ – коэффициент трещиноватой породы (1/м^2).

Гравитационными и капиллярными силами пренебрегаем. В случае пренебрежения капиллярными силами, давление для различных фаз будет одинаковым. Флюид считается слабосжимаемым.

$$P_o^\alpha = P_w^\alpha = P^\alpha,\ \alpha = f, m.$$

Расписав уравнения для каждой из фаз, общая система (система трещин + матрица) будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial(\varphi^f \rho_o S_o^f)}{\partial t} + \nabla\left(\rho_o U_o^f\right) + q_o^f = 0,$$
$$\frac{\partial(\varphi^f \rho_w S_w^f)}{\partial t} + \nabla\left(\rho_w U_w^f\right) + q_w^f = 0, \quad (4.6)$$
$$\frac{\partial(\varphi^m \rho_o S_o^m)}{\partial t} + \nabla(\rho_o U_o^m) - q_o^m = 0,$$

$$\frac{\partial(\varphi^m \rho_w S_w^m)}{\partial t} + \nabla(\rho_w U_w^m) - q_w^m = 0.$$

Скорости фильтраций для матрицы и системы трещин для каждой из фаз представлены уравнениями:

$$U_o^f = -\frac{k^f k_{ro}(S_o^f)}{\mu_o} grad\, P^f, \qquad U_w^f = -\frac{k^f k_{rw}(S_w^f)}{\mu_w} grad\, P^f,$$
$$U_o^m = -\frac{k^m k_{ro}(S_o^m)}{\mu_o} grad\, P^m, \qquad U_w^m = -\frac{k^m k_{rw}(S_w^m)}{\mu_w} grad\, P^m. \tag{4.7}$$

Функции перетока для каждой из фаз запишутся:

$$q_o^m = \frac{\sigma \rho_o k^m k_{ro}(S_o^m)}{\mu_o}\left(P^f - P^m\right),$$
$$q_w^m = \frac{\sigma \rho_w k^m k_{rw}(S_w^m)}{\mu_w}\left(P^f - P^m\right). \tag{4.8}$$

Собирая все члены уравнения в более компактный вид, получаем систему уравнений, описывающую фильтрационный процесс двухфазной жидкости в рамках модели двойной пористости в коллекторе трещиновато-порового типа [130]. Отметим, что будем рассматривать процесс, где движение жидкости происходит только в системе трещин, а матрица является емкостью, подпитывающая систему трещин. В связи с вышесказанным получаем систему уравнений в следующем виде:

$$\frac{\partial(\varphi^f \rho_o S_o^f)}{\partial t} + \nabla\left(\rho_o U_o^f\right) + \frac{\sigma \rho_o k^m k_{ro}(S_o^m)}{\mu_o}\left(P^f - P^m\right) = 0,$$
$$\frac{\partial(\varphi^f \rho_w S_w^f)}{\partial t} + \nabla\left(\rho_w U_w^f\right) + \frac{\sigma \rho_w k^m k_{rw}(S_w^m)}{\mu_w}\left(P^f - P^m\right) = 0,$$
$$\frac{\partial(\varphi^m \rho_o S_o^m)}{\partial t} - \frac{\sigma \rho_o k^m k_{ro}(S_o^m)}{\mu_o}\left(P^f - P^m\right) = 0,$$
$$\frac{\partial(\varphi^m \rho_w S_w^m)}{\partial t} - \frac{\sigma \rho_w k^m k_{rw}(S_w^m)}{\mu_w}\left(P^f - P^m\right) = 0. \tag{4.9}$$

Уравнения (4.9) дополненные начальными и граничными условиями, представляют собой математическую модель описывающую движение двухфазной

жидкости в коллекторе трещиновато-порового типа. Граничные условия, которые будем использовать имеют вид:

$$P^m|_{t=0} = P_0, \qquad P^f\big|_{t=0} = P_0, \qquad P^f\big|_{r=rw} = P_к, \qquad P^m|_{r=rw} = P_к,$$
$$\left(\frac{\partial P^f}{\partial r}\right)_{r=r_e} = 0. \tag{4.10}$$

Начально-краевая задача (4.9) - (4.10) является квазилинейной и достаточно сложной системой уравнений математической физики смешанного типа. Система решается методом конечных разностей. При решении такой системы возникает ряд трудностей, которые, во-первых, связаны с большим количеством переменных и во-вторых, характер нелинейности уравнений таков, что соответствующая линеаризованная система в ряде случаев уже не обладает свойством самосопряженности пространственных дифференциальных операторов. Для решения системы исходных уравнений (4.9) - (4.10) применяется метод расщепления по физическим процессам [131, 132].

4.3 Расщепление по физическим процессам

Для математического исследования и численного решения уравнения двухфазной фильтрации в коллекторе трещиновато-порового в (4.9) выделим два процесса: перераспределение давления и перенос насыщенностей [80, 133]. Далее будем рассматривать выделенные процессы поэтапно.

На первом этапе получим новую преобразованную систему эквивалентную исходной (4.9). Система образуется путем исключения функций S_i^f и S_i^m из-под знака производной по времени в системе уравнений (4.9).

$$\rho_o\varphi^f\frac{\partial S_o^f}{\partial t} + S_o^f\varphi^f\frac{\partial \rho_o}{\partial t} + \rho_o\, S_o^f\frac{\partial \varphi^f}{\partial t} - div\left(\rho_o U_o^f\right) + \rho_o\sigma\lambda_o^m\left(P^f - P^m\right) = 0, \tag{4.11}$$

$$\rho_w\varphi^f\frac{\partial S_w^f}{\partial t} + S_w^f\varphi^f\frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \rho_w\, S_w^f\frac{\partial \varphi^f}{\partial t} - div\left(\rho_w U_w^f\right) +$$
$$+\rho_w\sigma\lambda_w^m\left(P^f - P^m\right) = 0, \tag{4.12}$$

$$\rho_o\varphi^m\frac{\partial S_o^m}{\partial t}+\ S_o^m\varphi^m\frac{\partial\rho_o}{\partial t}+\rho_o\,S_o^m\frac{\partial\varphi^m}{\partial t}-\rho_o\sigma\lambda_o^m(P^f-P^m)=0, \tag{4.13}$$

$$\rho_w\varphi^m\frac{\partial S_w^m}{\partial t}+\ S_w^m\varphi^m\frac{\partial\rho_w}{\partial t}+\rho_w\,S_w^m\frac{\partial\varphi^m}{\partial t}-\rho_w\sigma\cdot\lambda_w^m(P^f-P^m)=0. \tag{4.14}$$

Уравнения (4.11) и (4.13) поделим поочередно на ρ_o, а уравнения (4.12) и (4.14) – на ρ_w. И далее сложим попарно (4.11) и (4.12), (4.13) и (4.14):

$$\varphi^f\left(\frac{\partial S_o^f}{\partial t}+\frac{\partial S_w^f}{\partial t}\right)+\frac{S_o^f\varphi^f}{\rho_o}\frac{\partial\rho_o}{\partial t}+\frac{S_w^f\varphi^f}{\rho_w}\ \frac{\partial\rho_w}{\partial t}+S_o^f\frac{\partial\varphi^f}{\partial t}+S_w^f\frac{\partial\varphi^f}{\partial t}-$$
$$-\frac{div\left(\rho_oU_o^f\right)}{\rho_o}-\frac{div\left(\rho_wU_w^f\right)}{\rho_w}+\sigma\rho_o\lambda_o^f(Pf-Pm)+\sigma\rho_w\lambda_w^m\left(P_f-P_m\right)=0, \tag{4.15}$$

$$\varphi^m\left(\frac{\partial S_o^m}{\partial t}+\frac{\partial S_w^m}{\partial t}\right)+\frac{S_o^m\varphi^m}{\rho_o}\frac{\partial\rho_o}{\partial t}+\frac{S_w^m\varphi^m}{\rho_w}\frac{\partial\rho_w}{\partial t}+\ S_o^m\frac{\partial\varphi^m}{\partial t}+\ S_w^m\frac{\partial\varphi^m}{\partial t}-$$
$$-\sigma\rho_o\lambda_o^m\left(P_f-P_m\right)-\sigma\rho_w\lambda_w^m(P_f-P_m)=0. \tag{4.16}$$

Поскольку $S_o+S_w=1$, то имеем $\frac{\partial(S_o+S_m)}{\partial t}$=0. Применяя данное равенство для (4.15) и (4.16) в результате получим уравнения, определяющие процесс перераспределения давления в трещинах и матрице:

$$\left(\frac{S_o^f}{\rho_o^f}\frac{\partial(\varphi^f\rho_o^f)}{\partial t}+\frac{S_w^f}{\rho_w^f}\frac{\partial(\varphi^f\rho_w^f)}{\partial t}\right)+\frac{div\left(\rho_o^fU_o^f\right)}{\rho_o^f}+\frac{div\left(\rho_w^fU_w^f\right)}{\rho_w^f}+$$
$$+\sigma\left(P^f-P^m\right)\left(\frac{\rho_o^m}{\rho_o^f}\lambda_o^m+\frac{\rho_w^m}{\rho_w^f}\lambda_w^m\right)=0, \tag{4.17}$$

$$\left(\frac{S_o^m}{\rho_o^m}\frac{\partial(\varphi^m\rho_o^m)}{\partial t}+\frac{S_w^m}{\rho_w^m}\frac{\partial(\varphi^m\rho_w^m)}{\partial t}\right)-\sigma\left(P^f-P^m\right)(\lambda_o^m+\lambda_w^m)=0. \tag{4.18}$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$DIG^f=\frac{div\left(\rho_o^fU_o^f\right)}{\rho_o^f}+\frac{div\left(\rho_w^fU_w^f\right)}{\rho_w^f}+\sigma\left(P^f-P^m\right)\left(\frac{\rho_o^m}{\rho_o^f}\lambda_o^m+\frac{\rho_w^m}{\rho_w^f}\lambda_w^m\right), \tag{4.19}$$

$$DIG^m=\sigma\left(P^f-P^m\right)(\lambda_o^m+\lambda_w^m). \tag{4.20}$$

В уравнениях (4.17) – (4.18) водо- и нефтенасыщенность уже не содержатся под производной по времени. Получившаяся система (4.17) – (4.18) представляет собой систему уравнений пьезопроводности для сети трещин и матрицы.

Далее из (4.9) запишем систему уравнений (4.21) – (4.22), которая отвечает за перенос насыщенностей

$$\frac{\partial(\varphi^f \rho_w S_w^f)}{\partial t} + \nabla\left(\rho_w U_w^f\right) + \frac{\sigma \rho_w k^m k_{rw}(S_w^m)}{\mu_w}\left(P^f - P^m\right) = 0, \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial(\varphi^m \rho_w S_w^m)}{\partial t} - \frac{\sigma \rho_w k^m k_{rw}(S_w^m)}{\mu_w}\left(P^f - P^m\right) = 0. \tag{4.22}$$

На втором этапе решаем полученную систему уравнений (4.17) – (4.18). Для решения численной задачи строятся разностные сетки по времени и пространству. Дифференциальные уравнения, граничные и начальные условия аппроксимируются их сеточными аналогами. Затем системы уравнений линеаризуется по методу хорд. Полученные уравнения представляются системой линейных алгебраических уравнений, для решения которых применяется метод скалярной прогонки на каждом временном слое при фиксированных насыщенностях и определяются давления в трещинах и матрице (на s-итерации).

На третьем этапе на основе полученных давлений (на s-итерации) из системы (4.17) – (4.18) решаем систему (4.21) – (4.22) аналогично предыдущему шагу: уравнения аппроксимируются их сеточными аналогами, линеаризуется по методу хорд и решаются методом прогонки. В результате определяются водонасыщенность на $s+1$ -итерации. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность по давлению и водонасыщенности.

Предложенный алгоритм необходим потому, что система уравнений пьезопроводности (4.17) – (4.18) является параболической, а система переноса насыщенностей флюидов (4.21) – (4.22) – гиперболической, поэтому применение расщепления даст возможность реализовать эффективный численный алгоритм для

решения системы уравнений (4.9) и позволит производить расчеты с крупным шагом по времени с меньшим количеством неизвестных параметров.

4.4 Выводы по главе 4

В данной главе были представлены физическая и математическая модели фильтрации двухфазной жидкости в рамках модели двойной пористости в коллекторе трещиновато-порового типа при проведении гидродинамического исследования скважины.

Поставленная задача является сложной квазилинейной системой уравнений математической физики смешанного типа. Модель включает в себя систему гиперболических уравнений относительно переноса насыщенностей на фоне фиксированных скоростей фильтрации, и систему, содержащую уравнения пьезопроводности для определения давления. При решении такой системы возникает ряд трудностей, которые, во-первых, связаны с большим количеством переменных и, во-вторых, характер нелинейности уравнений таков, что соответствующая линеаризованная система в ряде случаев уже не обладает свойством самосопряженности пространственных дифференциальных операторов. Для решения системы исходных уравнений применяется метод расщепления по физическим процессам: перенос насыщенностей и перераспределение давления. Такое преобразование позволит реализовать эффективный численный алгоритм для рассматриваемой задачи, который позволит производить расчеты с крупным шагом по времени и с меньшим количеством неизвестных параметров.

Представлен алгоритм решения преобразованной задачи. Подробное описание методов и разностной схемы будет приведено в следующей главе 5.

ГЛАВА 5. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ В РАМКАХ МОДЕЛИ ДВОЙНОЙ СРЕДЫ В КОЛЛЕКТОРЕ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРОВОГО ТИПА

В данной главе описывается разностная схема для решения преобразованной системы (4.9), представленная уравнениями (4.17) - (4.22). Предлагается численная схема, которая обладает рядом свойств, обеспечивающая устойчивость решения задачи [134-137]. Отметим, что полученная расщепленная модель эквивалентна консервативной разностной аппроксимации для уравнений (4.9), записанных в дивергентной форме, благодаря введения специальной аппроксимации сеточных функций по времени. При этом по сравнению с полностью неявной схемой решаются две системы уравнений меньшей размерности (по давлениям и насыщенностям) вместо одной. Представлены вычислительные эксперименты задачи массопереноса в коллекторе трещиновато-порового типа при работающей добывающей скважине.

5.1 Разностная схема для решения задачи фильтрации двухфазной жидкости в коллекторе трещиновато-порового типа

Рассматривается одномерная постановка задачи (4.9) [130]. Для решения дифференциальных уравнений в частных производных используется метод конечных разностей [120, 121]. Строится равномерная пространственно-временная сетка.

$$\begin{aligned} &\overline{W}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1 \dots N, x_0 = 0, x_N = L\}, \\ &\overline{W}_\tau = \{t_j = \tau k, k = 0, 1 \dots M\}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где x_i – координаты узлов, h – шаг сетки по радиусу, τ - шаг сетки по времени, N и M – число узлов по пространству и времени, соответственно. В x_i определяются сеточные величины (давление и насыщенности). Под $i + 1/2$-ой ячейкой одномерной сетки Ω_i понимается отрезок $[x_i, x_{i+1}]$. $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$, $\hbar_i = \frac{1}{2}(h_{i+1/2} + h_{i-1/2})$.

Дифференциальные уравнения (4.17) – (4.18) аппроксимируются следующим образом:

$$\frac{\left(S_w^f\right)^{(\delta 1f)}}{\left(\rho_w^f\right)^{(\delta 1f)}}\left[\bar{\varphi}^f\rho_w^f\right]_t+\frac{\left(1-S_w^f\right)^{(\delta 1f)}}{\left(\rho_o^f\right)^{(\delta 1f)}}\left[\bar{\varphi}^f\rho_w^f\right]_t+\ DIG^{f\sim}=0,$$
$$DIG^{f\sim}=$$
$$=\frac{1}{\left(\rho_w^f\right)^{(\delta 1f)}}DIN\left(\rho_w^f U_w^f\right)^{\sim}+\frac{1}{\left(\rho_o^f\right)^{(\delta 1f)}}DIN\left(\rho_o^f U_o^f\right)^{\sim}+\frac{q_o^{f\sim}}{\left(\rho_o^f\right)^{(\delta 1f)}}+\frac{q_o^{f\sim}}{\left(\rho_w^f\right)^{(\delta 1f)}}, \tag{5.2}$$

$$\frac{(S_w^m)^{(\delta 1m)}}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m)}}[\bar{\varphi}^m\rho_w^m]_t+\frac{(1-S_w^m)^{(\delta 1m)}}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m)}}[\bar{\varphi}^m\rho_w^m]_t+\ DIG^{m\sim}=0,$$
$$DIG^{m\sim}=\frac{q_o^{m\sim}}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m)}}+\frac{q_o^{m\sim}}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m)}}. \tag{5.3}$$

Здесь $\bar{\varphi}=\hbar\varphi$, δ1 – вес по времени, выражение $a^{\sim}$ обозначает аппроксимацию сеточной функции a между слоями по времени t и $\hat{t}$, $\hat{t}=t+\tau$, τ – временной шаг.

Разностная аппроксимация расщепленной модели (5.2) – (5.3) эквивалентна разностной аппроксимации для уравнений (4.9), записанных в дивергентной форме. При этом на временных слоях t и $\hat{t}=t+\tau$ вводятся производные по времени и специальным образом пространственно-точечные временные интерполяции: $a_t=(\hat{a}-a)/\tau$, $a^{(\delta_1)}=\delta_1\hat{a}+(1-\delta_1)a$. Интерполяционный вес δ_1 может зависеть от узла пространственной сетки ω и будет представляться как:

$$\delta 1=\frac{\sqrt{(\bar{\varphi})^{\wedge}}}{\left(\sqrt{(\bar{\varphi})^{\wedge}}+\sqrt{(\bar{\varphi})}\right)}. \tag{5.4}$$

Выражение (5.4) представляется как доля объема пор, предназначенного для свободного движения флюида. Здесь $\bar{\varphi}=h\varphi$, φ – пористость, $(\bar{\varphi})^{\wedge}$ – значение на неявном временном слое $\hat{t}$.

Такой выбор аппроксимации позволит производить дискретные преобразования уравнений, которые связаны с их расщеплением по физическим процессам, близкие к континуальным.

Разностные уравнения (5.2) – (5.3) представляют собой систему нелинейный алгебраических уравнений, для которых проводится линеаризация по методу хорд.

Сначала рассмотрим уравнения пьезопроводности в трещинах. Для расщепленных уравнений пьезопроводности в трещинах (5.2) линеаризованная схема будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\left(S_w^f\right)^{(\delta 1 f)\approx}}{\left(\rho_w^f\right)^{(\delta 1 f)\approx}}\left(\bar{\varphi}^f \rho_w^f\right)_{Pf}^{'s}\delta P^f + \frac{\left(1-S_w^f\right)^{(\delta 1 f)\approx}}{\left(\rho_o^f\right)^{(\delta 1 f)\approx}}\left(\bar{\varphi}^f \rho_o^f\right)_{Pf}^{'s}\delta P^f + \tag{5.5}$$

$$+\tau\delta\left(DIG^{f\sim}\right) = 0 - F^{fs},$$

$$\tau\delta\left(DIG^{f\sim}\right) =$$

$$= \frac{-\tau}{\left(\rho_w^f\right)^{(\delta 1 f)\approx}} DIN\left[\left(\frac{\rho_w^f k_f}{\mu_w^f}\right)^s k_{r_w}^{ups} GRAN\delta P^f\right] +$$

$$+ \frac{-\tau}{\left(\rho_o^f\right)^{(\delta 1 f)\approx}} DIN\left[\left(\frac{\rho_o^f k_f}{\mu_o^f}\right)^s k_{r_o}^{ups} GRAN\delta P^f\right] - \tag{5.6}$$

$$- \frac{-\tau}{\left(\rho_w^f\right)^{(\delta 1 f)\approx}} (\rho_w^m \bar{\sigma}\, \lambda_w^m)^s\left(\delta P^f - \delta P^m\right) -$$

$$- \frac{\tau}{\left(\rho_o^f\right)^{(\delta 1 f)\approx}} (\rho_o^m \bar{\sigma}\, \lambda_o^m)^s\left(\delta P^f - \delta P^m\right).$$

Здесь $\bar{\varphi} = \hbar\varphi$, F^{fs} – разностная аппроксимация левой части уравнения (4.19) (умноженная на шаг по времени τ), $\delta 1$ – вес по времени, a' – производная по давлению, δP – невязка по давлению, разностная операция $DIN:(\Omega)\to(\omega)$ обозначает аппроксимацию дивергенции $dv\cdot div$, действующую на функции в ячейках (Ω), $GRAN:(\omega)\to(\Omega)$ обозначает аппроксимацию градиента $grad$ в ячейках (Ω), действующую на сеточные функции в узлах (ω), $k_{rw\Omega}^{up\wedge}$ – относительная фазовая проницаемость воды в ячейке Ω, взятая из узла ω(Ω) этой ячейки, расположенного вверх по потоку (up) с неявного слоя по времени $(\wedge)$. В сеточных аппроксимациях $a^{\approx}$ значения на неявном слое по времени $\hat{t}$ берутся на $s+1$ уже вычисленной итерации, если они связаны с давлением (P^{s+1}), и s-й итерации, если они связаны с водонасыщенностью (S_w^s).

Для расщепленных уравнений пьезопроводности в матрице (5.3) после линеаризации получим:

$$\frac{(S_w^m)^{(\delta 1m)\approx}}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m)\approx}}(\bar{\varphi}^m\rho_w^m)'^s_{P^m}\delta P^m + \frac{(1-S_w^m)^{(\delta 1m)\approx}}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m)\approx}}(\bar{\varphi}^m\rho_o^m)'^s_{P^m}\delta P^m + \\ + \tau\delta(DIG^{m\sim}) = 0 - F^{ms}, \tag{5.7}$$

где

$$\tau\delta(DIG^{m\sim}) = \\ = \frac{-\tau}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m)\approx}}(\rho_w^m\bar{\sigma}\,\lambda_w^m)^s\left(\delta P^f - \delta P^m\right) - \frac{\tau}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m)\approx}}(\rho_o^m\bar{\sigma}\,\lambda_o^m)^s\left(\delta P^f - \delta P^m\right). \tag{5.8}$$

Здесь $\bar{\sigma} = \hbar\sigma$, F^{ms} – разностная аппроксимация левой части уравнения (4.21) (умноженная на шаг по времени τ).

Выразим давление в матрице через давление в трещинах, для этого сгруппируем члены полученной аппроксимации относительно давлений в матрице и трещинах. Получаем следующее выражение:

$$\left\{\frac{(S_w^m)^{(\delta 1m)\approx}}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m)\approx}}(\bar{\varphi}^m\rho_w^m)'^s_{P^m} + \frac{(1-S_w^m)^{(\delta 1m)\approx}}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m)\approx}}(\bar{\varphi}^m\rho_o^m)'^s_{P^m} + \right. \\ \left. + \frac{\tau}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m)\approx}}(\rho_w^m\bar{\sigma}\lambda_w^m)^s + \frac{\tau}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m)\approx}}(\rho_o^m\bar{\sigma}\lambda_o^m)^s\right\}\delta P^m - \\ - \left\{\frac{\tau}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m)\approx}}(\rho_w^m\bar{\sigma}\lambda_w^m)^s + \frac{\tau}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m)\approx}}(\rho_o^m\bar{\sigma}\lambda_o^m)^s\right\}\delta P^f = 0 - F^{ms}, \tag{5.9}$$

Затем упростим (5.9) вынеся плотности за скобки:

$$\left[\frac{1}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m)\approx}}\left\{(S_w^m)^{(\delta 1m)\approx}(\bar{\varphi}^m\rho_w^m)'^s_{P^m} + \tau(\rho_w^m\bar{\sigma}\lambda_w^m)^s\right\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m)\approx}}\left\{(S_o^m)^{(\delta 1m)\approx}(\bar{\varphi}^m\rho_o^m)'^s_{P^m} + \tau(\rho_o^m\bar{\sigma}\lambda_o^m)^s\right\}\right]\delta P^m - \\ - \tau\left\{\frac{(\rho_w^m\bar{\sigma}\lambda_w^m)^s}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m)\approx}} + \frac{(\rho_o^m\bar{\sigma}\lambda_o^m)^s}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m)\approx}}\right\}\delta P^f = 0 - F^{ms}. \tag{5.10}$$

В результате из (5.9) получаем линейную зависимость давления в матрице от давления в сети трещин:

$$\delta P^m = \frac{\tau\left\{\frac{(\rho_w^m\bar{\sigma}\lambda_w^m)^s}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m)\approx}} + \frac{(\rho_o^m\bar{\sigma}\lambda_o^m)^s}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m)\approx}}\right\}\delta P^f - F^{ms}}{\frac{\left\{(S_w^m)^{(\delta 1m)\approx}(\bar{\varphi}^m\rho_w^m)'^s_{Pm} + \tau(\rho_w^m\bar{\sigma}\lambda_w^m)^s\right\}}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m)\approx}} + \frac{\left\{(S_o^m)^{(\delta 1m)\approx}(\bar{\varphi}^m\rho_o^m)'^s_{Pm} + \tau(\rho_o^m\bar{\sigma}\lambda_o^m)^s\right\}}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m)\approx}}}. \quad (5.11)$$

Чтобы не оперировать большими выражениями, для удобства введем следующие замены:

$$\pi_m^s = \frac{\tau\left\{\frac{(\rho_w^m\bar{\sigma}\lambda_w^m)^s}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m)\approx}} + \frac{(\rho_o^m\bar{\sigma}\lambda_o^m)^s}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m)\approx}}\right\}}{\frac{\left\{(S_w^m)^{(\delta 1m)\approx}(\bar{\varphi}^m\rho_w^m)'^s_{Pm} + \tau(\rho_w^m\bar{\sigma}\lambda_w^m)^s\right\}}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m)\approx}} + \frac{\left\{(S_o^m)^{(\delta 1m)\approx}(\bar{\varphi}^m\rho_o^m)'^s_{Pm} + \tau(\rho_o^m\bar{\sigma}\lambda_o^m)^s\right\}}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m)\approx}}}, \quad (5.12)$$

$$\Phi^{ms} = \frac{F^{ms}}{\frac{\left\{(S_w^m)^{(\delta 1m)\approx}(\bar{\varphi}^m\rho_w^m)'^s_{Pm} + \tau(\rho_w^m\bar{\sigma}\lambda_w^m)^s\right\}}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m)\approx}} + \frac{\left\{(S_o^m)^{(\delta 1m)\approx}(\bar{\varphi}^m\rho_o^m)'^s_{Pm} + \tau(\rho_o^m\bar{\sigma}\lambda_o^m)^s\right\}}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m)\approx}}}. \quad (5.13)$$

Тогда (5.11) представится в сокращенном виде:

$$\delta P^m = \pi_m^s \delta P^f - \Phi^{ms}. \quad (5.14)$$

Таким образом, систему уравнений (5.5) – (5.6) можно переписать в следующем виде:

$$-A_{pk}\delta P_{k-1}^f + C_{pk}\delta P_k^f - B_{pk}\delta P_{k+1}^f = \Phi_{\mathrm{Pk}}, \quad (5.15)$$

Коэффициенты СЛАУ выглядят следующим образом:

$$\Phi_{\mathrm{Pk}} = -F^{fs} - \tau\left\{\frac{(\rho_w^m\bar{\sigma}\lambda_w^m)^s}{\left(\rho_w^f\right)^{(\delta 1f)\approx}} + \frac{(\rho_o^m\bar{\sigma}\lambda_o^m)^s}{\left(\rho_o^f\right)^{(\delta 1f)\approx}}\right\}\Phi^{ms}, \quad (5.16)$$

$$A_{pk} =$$
$$= \frac{\tau}{\left[\left(\rho_w^f\right)^{(\delta 1 f)}\right]_k^{\approx}} \left\{ \frac{1}{h_{k-\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f}\right)^s_{k-\frac{1}{2}} k^{ups}_{rw(k-\frac{1}{2})} \right\} +$$
$$+ \frac{\tau}{\left[\left(\rho_o^f\right)^{(\delta 1 f)}\right]_k^{\approx}} \left\{ \frac{1}{h_{k-\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{\rho_o^f k^f}{\mu_o^f}\right)^s_{k-\frac{1}{2}} k^{ups}_{ro(k-\frac{1}{2})} \right\}, \tag{5.17}$$

$$B_{pk} =$$
$$= \frac{\tau}{\left[\left(\rho_w^f\right)^{(\delta 1 f)}\right]_k^{\approx}} \left\{ \frac{1}{h_{k+\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f}\right)^s_{k+\frac{1}{2}} k^{ups}_{rw(k+\frac{1}{2})} \right\} +$$
$$+ \frac{\tau}{\left[\left(\rho_o^f\right)^{(\delta 1 f)}\right]_k^{\approx}} \left\{ \frac{1}{h_{k+\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{\rho_o^f k^f}{\mu_o^f}\right)^s_{k+\frac{1}{2}} k^{ups}_{ro(k+\frac{1}{2})} \right\}, \tag{5.18}$$

$$C_{pk} =$$
$$= \frac{\left(S_w^f\right)^{(\delta 1 f)\approx}}{\left(\rho_w^f\right)^{(\delta 1 f)\approx}} (\bar{\varphi}^f \rho_w^f)^{'s}_{Pf} + \frac{\left(1 - S_w^f\right)^{(\delta 1 f)\approx}}{\left(\rho_o^f\right)^{(\delta 1 f)\approx}} (\bar{\varphi}^f \rho_o^f)^{'s}_{Pf} +$$
$$+ \frac{\tau}{\left[\left(\rho_w^f\right)^{(\delta 1 f)}\right]_k^{\approx}} \left\{ \frac{1}{h_{k+\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f}\right)^s_{k+\frac{1}{2}} k^{ups}_{rw(k+\frac{1}{2})} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{h_{k-\frac{1}{2}}} * \left(\frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f}\right)^s_{k-\frac{1}{2}} k^{ups}_{rw(k-\frac{1}{2})} \right\} + \tag{5.19}$$
$$+ \frac{\tau}{\left[\left(\rho_o^f\right)^{(\delta 1 f)}\right]_k^{\approx}} \left\{ \frac{1}{h_{k+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\rho_o^f k^f}{\mu_o^f}\right)^s_{k+\frac{1}{2}} k^{ups}_{ro(k+\frac{1}{2})} + \frac{1}{h_{k-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\rho_o^f k^f}{\mu_o^f}\right)^s_{k-\frac{1}{2}} k^{ups}_{ro(k-\frac{1}{2})} \right\} +$$
$$+ \left\{ \frac{\tau}{\left(\rho_w^f\right)^{(\delta 1 f)\approx}} (\rho_w^m \bar{\sigma} \lambda_w^m)^s (1 - \pi_m^s) \right\}_k +$$
$$+ \left\{ \frac{\tau}{\left(\rho_o^f\right)^{(\delta 1 f)\approx}} (\rho_o^m \bar{\sigma} \lambda_o^m)^s (1 - \pi_m^s) \right\}_k .$$

Для решения СЛАУ (5.15) с трехдиагональной матрицей использовался метод скалярной прогонки [72]. Метод прогонки является эффективным методом решения СЛАУ с трехдиагональными матрицами, возникающими при конечно-разностной аппроксимации задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и одномерных уравнений в частных производных второго порядка. В сравнении с другими прямыми методами решения задач прогонка более универсальна и позволяет решать уравнения с переменными коэффициентами и не накладывает сильных ограничений на вид граничных условий [63, 71, 72].

Уравнения пьезопроводности решаются на каждом временном слое при фиксированных насыщенностях, итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная наперед точность по давлению:

$$|\delta P^m| < \varepsilon_1 |P^{ms}| + \varepsilon_2,$$
$$|\delta P^f| < \varepsilon_1 |P^{fs}| + \varepsilon_2. \qquad (5.20)$$

Где (5.21) - приращение давления на итерации:

$$\delta P^m = P^{ms+1} - P^{ms},$$
$$\delta P^f = P^{fs+1} - P^{fs}. \qquad (5.21)$$

На основе полученного решения уравнения пьезопроводности для трещин, находим решение для давлений в матрице, которое определяется из линейной зависимости формулы (5.11). Полученные результаты позволяют перейти к решению второго этапа - переносу насыщенностей.

Рассчитав давления на s-й итерации для обеих систем, переходим ко второму этапу уравнений по переносу насыщенности, который считается на $(s+1)$-й итерации. Из условия, что $S_w^f + S_o^f = 1$, насыщенность по нефти можно выразить через насыщенность воды.

Тогда будет решаться только одна пара уравнений. Аналогично уравнениям пьезопроводности проводится аппроксимация дифференциальных уравнений (4.21) – (4.22) их сеточными аналогами.

$$\frac{L^f}{\tau} = \left[\overline{\varphi^f} \rho_w^f S_w^f\right]_t + DIN\left(\rho_w^f U_w^f\right)^{\sim} + q_w^{f\sim} = 0, \qquad (5.22)$$

$$\frac{L^m}{\tau} = [\overline{\varphi^m}\rho_w^m S_w^m]_t + q_w^{m\sim} = 0. \qquad (5.23)$$

Здесь разностная операция $DIN:(\Omega)\to(\omega)$ обозначает аппроксимацию дивергенции $dv\cdot div$, действующую на функции в ячейках (Ω). Выражение $a^{\sim}$ обозначает аппроксимацию сеточной функции a между слоями по времени t и $\hat{t}$, $\hat{t} = t + \tau$; τ – временной шаг, $\bar{\varphi}_i = \hbar\varphi_i$ – пористость в узле $(\omega = i)$, умноженная на пространственный шаг $\hbar_i = \frac{1}{2}\left(h_{i+1/2} + h_{i-1/2}\right)$, $h_{i\pm1/2}$ – размеры соседних к узлу i ячеек сетки, L^f, L^m разностная аппроксимация левой части уравнения умноженная на τ.

Для полученной системы уравнений (5.22) – (5.23) проводится линеаризация по методу хорд.

Умножив обе части уравнений (5.22) и (5.23) на τ, получаем:

$$\left(\overline{\varphi^f}\rho_w^f\right)^{s+1}\delta S_w^f + \tau\delta\left[DIN\left(\rho_w^f U_w^f\right)^{\sim}\right] + \tau\delta q_w^{f\sim} = 0 - L^{fs,s+1}, \qquad (5.24)$$

$$(\overline{\varphi^m}\rho_w^m)^{s+1}\delta S_w^m + \tau\delta q_w^{m\sim} = 0 - L^{ms,s+1}, \qquad (5.25)$$

где

$$\left(\rho_w^f U_w^f\right)_\Omega^{\sim} = -\left(\frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f}\right)_\Omega^{\wedge} k_{rw\Omega}^{up\wedge} GRANP_f^{\wedge}. \qquad (5.26)$$

Здесь $GRAN$: $(\omega) \to (\Omega)$ обозначает аппроксимацию градиента $grad$ в ячейках (Ω), действующую на сеточные функции в узлах (ω). $k_{rw\Omega}^{up\wedge}$ - относительная фазовая проницаемость воды в ячейке Ω, взятая из узла $\omega(\Omega)$ этой ячейки, расположенного вверх по потоку (up) с неявного слоя по времени $(\wedge)$. В сеточных аппроксимациях $a^{\approx}$ значения на неявном слое по времени $\hat{t}$ берутся на $s+1$ уже вычисленной итерации, если они связаны с давлением (P^{s+1}), и s -й итерации, если они связаны с водонасыщенностью (S_w^s).

В узле k обозначим:

$$C_{swk}^{m}\delta S_{wk}^{m} = 0 - L_{k}^{ms,s+1}, \tag{5.27}$$

$$C_{swk}^{m} = (\overline{\varphi^{m}}\rho_{w}^{m})_{k}^{s+1} - \tau\left[\rho_{w}^{m}\bar{\sigma}\left(P^{f} - P^{m}\right)\frac{k^{m}}{\mu_{w}^{m}}\right]_{k}^{s+1}\left[(k_{rw})'_{S_{w}^{m}}\right]_{k}^{s}, \tag{5.28}$$

$$(S_{wk}^{m})^{s+1}=(S_{wk}^{m})^{s} + \delta S_{wk}^{m}. \tag{5.29}$$

Здесь $\bar{\sigma} = \hbar\sigma$.

Определим насыщенности для трещин. С учетом вышеизложенного получаем систему алгебраических уравнений:

$$-A_{swk}^{f}\delta S_{wk-1}^{f} + C_{swk}^{f}\delta S_{wk}^{f} - B_{swk}^{f}\delta S_{k+1}^{f} = 0 - L^{fs,s+1}, \tag{5.30}$$

где коэффициенты системы будут выглядеть следующим образом:

$$C_{swk}^{f}=\left(\overline{\varphi^{f}}\rho_{w}^{f}\right)_{k}^{s+1} - \tau\left[\left\{\left[\rho_{w}^{f}\frac{k^{f}}{\mu_{w}^{f}}\frac{1}{h}\right]_{k+\frac{1}{2}}^{s+1}\left(P_{k+1}^{f} - P_{k}^{f}\right)^{s+1}\right\}\left[(k_{rw})'_{S_{wk}^{f}}\right]_{upink}^{s} - \right.$$
$$\left.\left\{\left[\rho_{w}^{f}\frac{k^{f}}{\mu_{w}^{f}}\frac{1}{h}\right]_{k-\frac{1}{2}}^{s+1}\left(P_{k}^{f} - P_{k-1}^{f}\right)^{s+1}\right\}\left[(k_{rw})'_{S_{wk}^{f}}\right]_{upink}^{s}\right] > 0. \tag{5.31}$$

Здесь выражение:

$$\left\{\left[\rho_{w}^{f}\frac{k^{f}}{\mu_{w}^{f}}\frac{1}{h}\right]_{k+\frac{1}{2}}^{s+1}\left(P_{k+1}^{f} - P_{k}^{f}\right)^{s+1}\right\}\left[(k_{rw})'_{S_{wk}^{f}}\right]_{upink}^{s}, \tag{5.32}$$

рассматривается для $P_{k}^{f} > P_{k+1}^{f}$, а выражение:

$$\left\{\left[\rho_{w}^{f}\frac{k^{f}}{\mu_{w}^{f}}\frac{1}{h}\right]_{k-\frac{1}{2}}^{s+1}\left(P_{k}^{f} - P_{k-1}^{f}\right)^{s+1}\right\}\left[(k_{rw})'_{S_{wk}^{f}}\right]_{upink}^{s}, \tag{5.33}$$

рассматривается для $P_{k}^{f} > P_{k-1}^{f}$.

$$B_{swk}^{f} = \tau\left\{\left\{\left[\rho_{w}^{f}\frac{k^{f}}{\mu_{w}^{f}}\frac{1}{h}\right]_{k+\frac{1}{2}}^{s+1}\left(P_{k+1}^{f} - P_{k}^{f}\right)^{s+1}\right\}\left[(k_{rw})'_{S_{wk+1}^{f}}\right]_{upink}^{s}\right\}, \quad \text{если}$$
$$P_{k}^{f} < P_{k+1}^{f}\ ; \quad B_{swk}^{f} \geq 0, \tag{5.34}$$

$$A_{swk}^{f}=-\tau\left\{\left\{\left[\rho_{w}^{f}\frac{k^{f}}{\mu_{w}^{f}}\frac{1}{h}\right]_{k-\frac{1}{2}}^{s+1}\left(P_{k}^{f}-P_{k-1}^{f}\right)^{s+1}\right\}\left[\left(k_{rw}\right)'_{S_{wk-1}^{f}}\right]_{upink}^{s}\right\},\quad \text{если} \tag{5.35}$$

$P_{k}^{f}<P_{k-1}^{f}$; $A_{swk}^{f}\geq 0.$

При достаточно малых шагах по времени получаем:

$$C_{swk}^{f}-A_{swk}^{f}-B_{swk}^{f}>0. \tag{5.36}$$

Полученное уравнение (5.30) решается также с помощью скалярной прогонки на каждом временном слое при найденных давлениях из (5.15). Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность по насыщенности:

$$\begin{aligned}&\left|\delta S_{w}^{f}\right|<\varepsilon_{1}\left|S_{w}^{fs}\right|+\varepsilon_{2,}\\&\left|\delta S_{w}^{m}\right|<\varepsilon_{1}\left|S_{w}^{ms}\right|+\varepsilon_{2.}\end{aligned} \tag{5.37}$$

Где (5.38) – приращение давления на итерации:

$$\begin{aligned}&\delta S_{w}^{f}=S_{w}^{fs+1}-S_{w}^{fs}\ ,\\&\delta S_{w}^{m}=S_{w}^{ms+1}-S_{w}^{ms}.\end{aligned} \tag{5.38}$$

Обратим внимание на преимущества предложенного алгоритма по сравнению с полностью неявной схемой: решаются две системы уравнений меньшей размерности (по давлениям и насыщенностям), вместо одной. Во всех дальнейших расчетах выявлено, что такой подход, когда система расщепляется по физическим процессам и обе группы уравнений решаются неявно, обеспечивает надежность расчета в исследованном диапазоне параметров и приемлемое быстродействие, что вполне устраивает при решении практических задач.

Для численного решения систем использовался IMPIS метод, известный как «неявное давление – неявная насыщенность». Математическая модель процесса фильтрации двухфазной жидкости в коллекторе трещиновато-порового типа реализована численно в среде C++. Результаты численного моделирования представлены ниже.

5.2 Метод скалярной прогонки

Метод прогонки один из эффективных методов решения систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами. Такие матрицы возникают при конечно-разностной аппроксимации задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и одномерных уравнений в частных производных второго порядка.

$$AP_{i-1} - CP_i + BP_{i+1} = -F_i,\ i = 1,\ldots M \qquad (5.39)$$

A_i, B_i, C_i коэффициенты, P_i, P_{i-1} P_{i+1} переменные.

Решение системы (5.39) находится в два этапа: ход вперед, который позволяет рассчитать прогоночные коэффициенты, используя рекуррентные формулы, и ход назад, на основе полученных коэффициентов рассчитывается решение (5.39):

$$\alpha_1 = \frac{-B_1}{C_1}, \beta_1 = \frac{F_1}{C_1},$$

α_1, β_1 - определяются из левого граничного условия.

$$\alpha_{i+1} = \frac{-B_i}{C_i - A_i\alpha_i}, i = 1, 2, \ldots N-1,$$

$$\beta_{i+1} = \frac{F_i - \beta_i\alpha_i}{C_i + A_i\alpha_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots N. \qquad (5.40)$$

где α и β – прогоночные коэффициенты.

$$P_i = \alpha_{i+1}P_{i+1} + \beta_{i+1}, \qquad i = N-1, N-2, \ldots 1, 0,$$

$$P_N = \frac{F_i - \beta_i\alpha_i}{C_i + A_i\alpha_i},$$ – находится из правого граничного условия.

5.3 Результаты численного моделирования

Рассматривалась следующая задача. Пусть в начальный момент времени добывающая вертикальная скважина, эксплуатирующая один пласт, остановлена. В коллекторе установлен стационарный режим и давление около скважины равно пластовому давлению всего объекта разработки. Затем скважина запускается в работу на частоте, поддерживающей постоянное забойное давление, которое

создает депрессию для притока жидкости к скважине. Предполагается, что на границе пласта поддерживается постоянное давление, и влияние соседних работающих скважин не наблюдается. Для пласта, скважины и сети трещин заданы следующие начальные и граничные параметры [126, 127]:

Таблица 5.1 – Начальные и граничные параметры

Параметры	Значения	Единицы измерения
Водонасыщенность, S_w^f	0.36	
Плотность нефти, ρ_o^m	730	кг/м^3
Плотность воды, ρ_w^m	1118	кг/м^3
Плотность нефти, ρ_o^f	730	кг/м^3
Плотность воды, ρ_w^f	1118	кг/м^3
Пористость сети трещин, φ_f	0.01	
Пористость матрицы, φ_m	0.10	
Вязкость воды, μ_w^f	0.67E-3	Па·с
Вязкость нефти, μ_o^f	0.86E-3	Па·с
Вязкость воды, μ_w^m	0.67E-3	Па·с
Вязкость нефти, μ_o^m	0.86E-3	Па·с
σ	0.12	
Начальное давление в сети трещин, P_0^f	250.0E5	Па
Начальное давление в матрице, P_0^m	250.0E5	Па
Давление слева в сети трещин, $P_{r_w}^f$	200.0E5	Па
Давление слева в матрице, $P_{r_w}^m$	200.0E5	Па
Проницаемость сети трещин, k_f	200.0E-12	м^2
Проницаемость сети трещин k_m	200.0E-15	м^2

Параметры	Значения
k_{ro}^{ups}	$7.7S_w^4$-$12.07S_w^3$+$6.9S_w^2$-$1.8S_w$ +0.2
k_{rw}^{ups}	$0.03S_w^2$+$0.002S_w$ +0.0002

Результаты численного моделирования представлены ниже.

На графике (рисунок 5.1) представлены динамики изменения давления в матрице и системе трещин вблизи скважины. Наблюдается, что после запуска скважины в работу, в первое время течение жидкости идет по трещинам, затем в работу включается матрица. Это хорошо прослеживается на графике на временах от 0 до 60 минут, затем после 60 минут давления в обеих системах стремятся к воссоединению, то есть начинается выравнивание давления для всех систем.

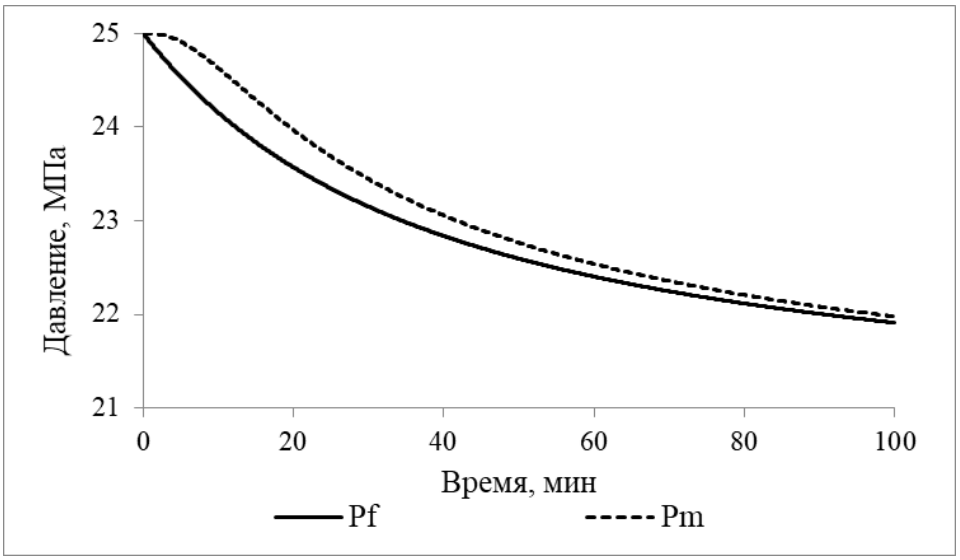


Рисунок 5.1 – Динамика давления в трещинах (Pf) и матрице (Pm)

Далее, на рисунке 5.2 продемонстрированы изменения давления в зависимости от времени при различных значениях проницаемости в трещинах вблизи скважины. Для расчета рассматривались проницаемости 10 мД, 100 мД, 1000 мД. Отмечается, что чем проницаемость выше, тем скорость падения давления во время работы скважины увеличивается.

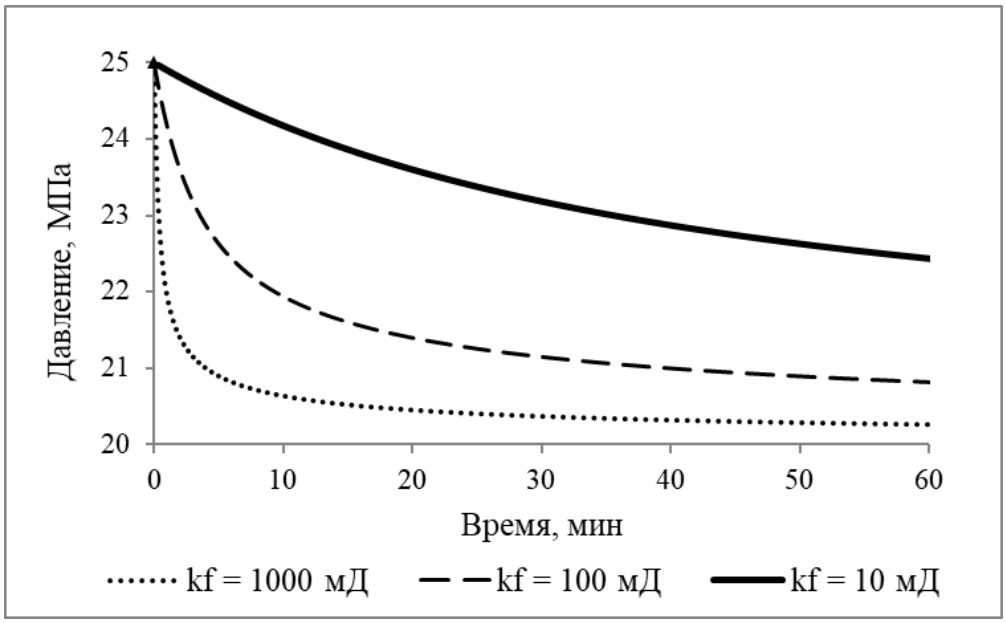


Рисунок 5.2 – Динамика давления во времени в трещинах при проницаемостях 10 мД, 100 мД, 1000 мД

На рисунке 5.3 построены динамики давления в зависимости на разных расстояниях от скважины. Рассматривалась точка вблизи скважины – 0.01 м, а также 0.25 м и 0.5 м. Отмечено, что чем дальше расстояние от скважины, тем возмущения давления становятся меньше. Таким образом можно посчитать насколько изменится давление в любой точке от скважины в определенный момент времени.

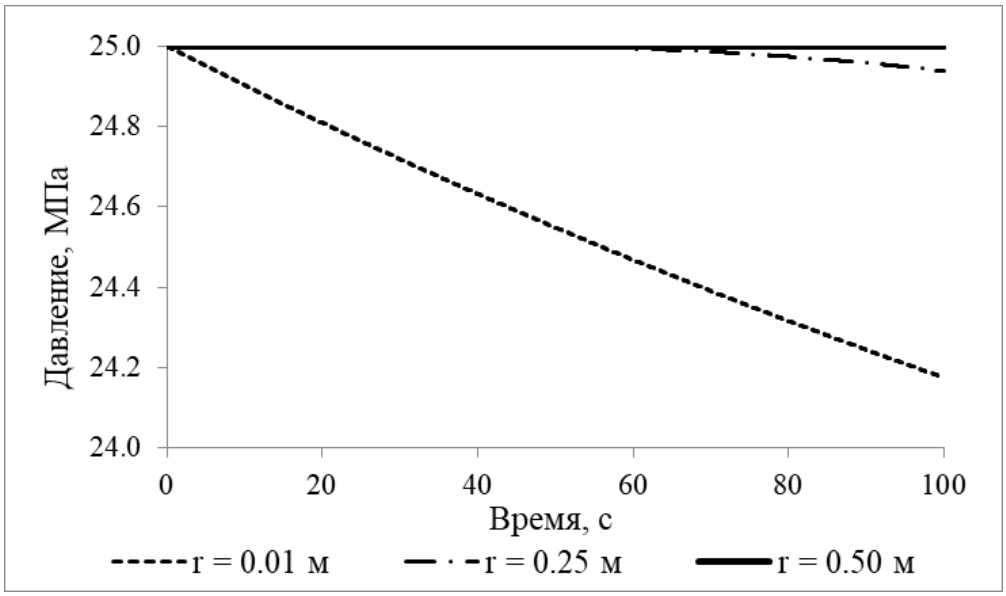


Рисунок 5.3 – Динамика давления на расстояниях 0.01 м, 0.25 м и 0.5 м от скважины

На рисунке 5.4 изображено изменение давления по пространству в разные моменты времени: 2000 с, 4000 с, 8000 с. Выявлено, что с увеличением времени работы скважины также увеличивается воронка депрессии, это объясняется тем, что происходит постоянный отбор жидкости из пласта.

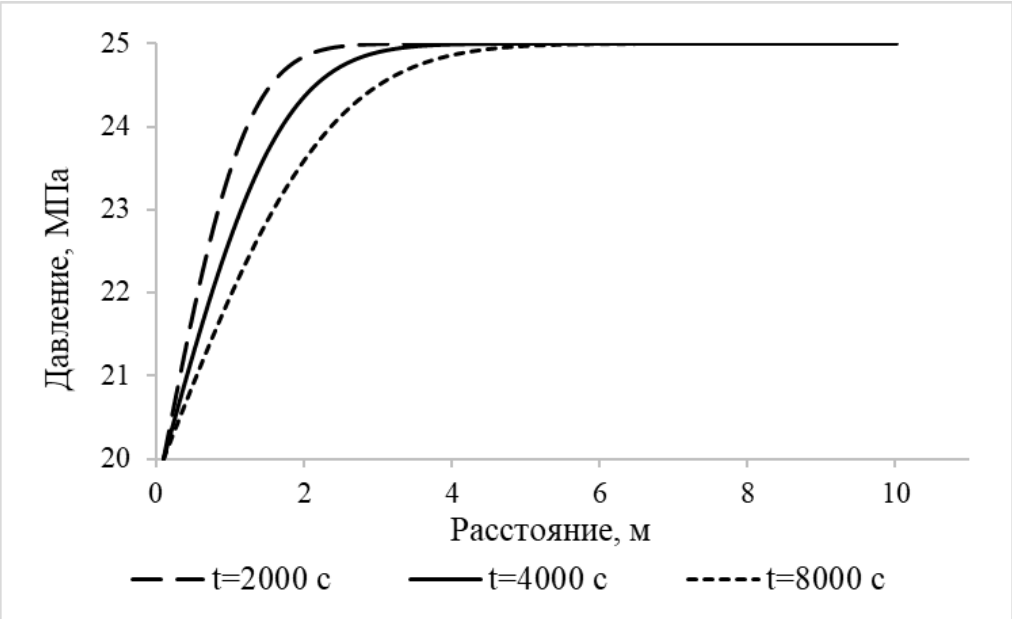


Рисунок 5.4 – Изменение давления по пространству для 2000 с, 4000 с, 8000 с

На рисунке 5.5 изображено изменение насыщенности по пространству в разные моменты времени: 300 с, 600 с для сети трещин и матрицы.

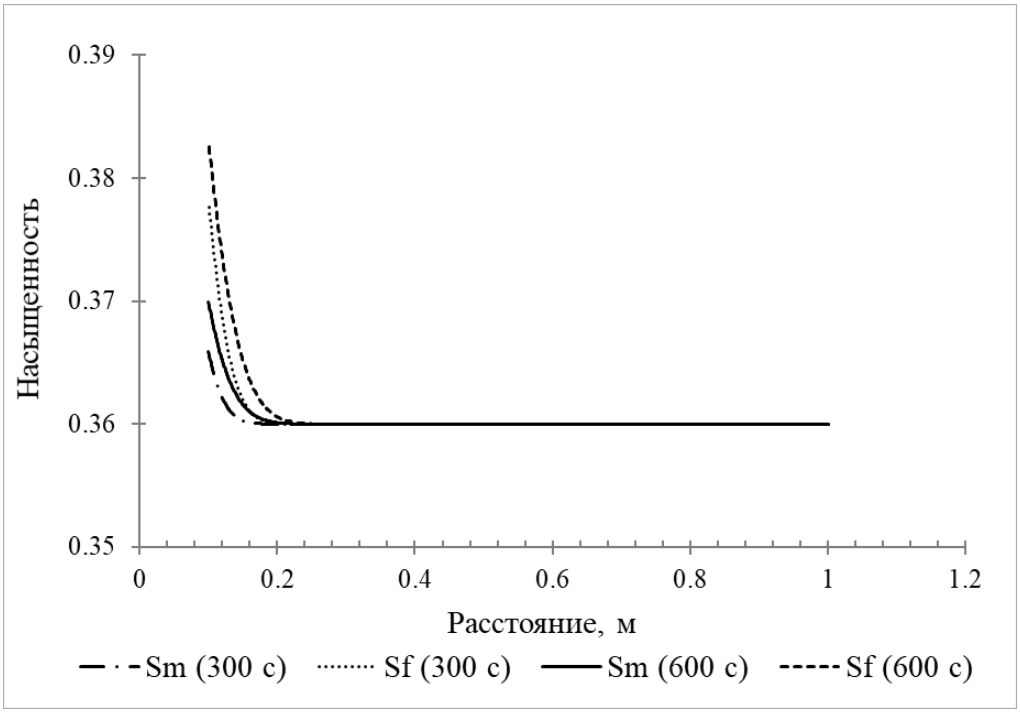


Рисунок 5.5 – Изменение насыщенности по пространству в разное время

5.4 Выводы по главе 5

В главе 5 представлена численная модель процесса фильтрации двухфазной жидкости в рамках модели двойной пористости в коллекторе трещиновато-порового типа. Полученная расщепленная модель эквивалентна консервативной разностной аппроксимации для исходных уравнений, записанных в дивергентной форме, благодаря введения специальной аппроксимации сеточных функций по времени. При этом по сравнению с полностью неявной схемой решаются две системы уравнений меньшей размерности (по давлениям и насыщенностям) вместо одной. Выявлено, что такой подход, когда система расщепляется по физическим процессам и обе группы уравнений решаются неявно, алгоритм обеспечивает надежность расчета в исследованном диапазоне параметров и приемлемое быстродействие, что вполне устраивает при решении практических задач.

Построены коэффициенты СЛАУ для расчета давлений и насыщенностей. Для решения СЛАУ применялся метод скалярной прогонки. Программный модуль реализован на языке C++. В разработанном модуле проведено численное моделирование динамики забойного давления и насыщенностей во времени и по пространству в коллекторе трещиновато-порового типа для работающей добывающей скважины. Построены и проанализированы кривые давления и насыщенностей для разных случаев.

ГЛАВА 6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАССОПЕРЕНОСА РЕАЛЬНОГО КАРБОНАТНОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ

В данной главе проводится обзор карбонатного месторождения им. Р. Требса и численное моделирование на промысловых данных.

6.1 Месторождение им. Р. Требса

Месторождение имени Романа Требса было открыто в 1987 г. и располагается в Ненецком автономном округе на севере Тимано-Печорской плиты. Оно считается одним из крупных месторождений среди континентальных месторождений в России. Территория, на которой расположено данное месторождение, сильно заболочена (более 50%), а также окружена большим количеством озер и изрезана густой сетью рек.

Климат в данной области суровый, арктический, зима продолжительная с коротким летом. Среднегодовая температура составляет порядка - 6°С. Высокая влажность воздуха вызывает частую изморозь, что затрудняет работу средств связи.

Месторождение им. Р. Требса выделяется сложным геологическим строением, которое обуславливается высокой фациальной изменчивостью отложений, а также большим разнообразием протекавших сложных вторичных процессов. Основные геологические запасы углеводородов сосредоточены в карбонатных отложениях [138]. Карбонатный коллектор в свою очередь характеризуется литологической неоднородностью, которая обусловлена цикличностью осадконакопления. Зернистые литотипы обладают хорошо развитой поровой системой. Структуры литотипа формировались в ходе седиментогенеза, а в дальнейшем диагенетической доломитизацией. Карбонатные отложения в ходе деформации были разбиты разрывными нарушениями на блоки, испытали трещинообразование и выщелачивание. Все это привело к матричной пористости и вторичной пустотности кавернового и трещинного типов, часть которой была залечена глинами. Таким образом, промысловые свойства определяются вторичной пустотностью трещинно-каверновой пустотности и межзерновой пористости. А

призабойная зона пласта обусловлена хорошей гидродинамической связью с участками вторичных коллекторов, которые имеют высокую продуктивность с радиусом фильтрации несколько сотен метров [138].

Учитывая сложность строения и труднодоступное месторасположение данного объекта, климатические условия, вести исследования и разработку затруднительно, а также все это требует больших финансовых затрат. В связи с этим возникает необходимость математического моделирования длительности времени проведения гидродинамических исследований непосредственно перед началом проведения экспериментов.

6.2 Расчет длительности исследования методом кривой восстановления давления на нефтяной скважине для месторождения им. Р. Требса

Для успешного исследования важно и необходимо, чтобы выполнялись определенные критерии: герметичность фонтанной арматуры для исключения пропусков по затрубному давлению, выход скважины на установившийся режим работы (стабильный дебит или постоянство забойного давления) и превышение длительности работы скважины в 3-5 раз по сравнению с периодом остановки на исследования. Выход вновь введенной скважины на установившийся режим работы зависит от проницаемости, чем она выше, тем быстрее наступает стабилизация и тем больше задействован радиус возмущения вокруг скважины. На практике, в зависимости от проницаемости, достаточно от 3 до 6 месяцев работы скважины. Исходя из условий и допущений выше, имеем высокопроницаемые трещины, соответственно достаточно рассмотреть остановку в 3 месяца.

Рассмотрим добывающую скважину, эксплуатирующую один пласт на месторождении им. Р. Требса. В начальный момент времени скважина, запущена в работу с дебитом жидкости 80 м^3/сут. После отработки скважина закрывается на забое для гидродинамического исследования методом кривой восстановления давления. Замер давления проводится датчиком телеметрической системы (ТМС), установленного на глубине спуска насоса. В момент остановки, при q = 0 м^3/сут, давление в пласте начинает восстанавливаться. На границе пласта поддерживается

постоянное давление, влияние соседних работающих скважин не наблюдается в связи с тем, что скважины расположены далеко друг от друга и имеют небольшую отработку. Для пласта, скважины и сети трещин заданы следующие начальные параметры, которые представлены в таблице 6.1:

Таблица 6.1 – Начальные и граничные параметры для месторождения им. Р. Требса

Параметры	Значения	Единицы измерения
Вязкость нефти, μ	1.1E-3	Па·с
Начальное давление в сети трещин, P_0^f	280.0E5	МПа
Начальное давление в матрице, P_0^m	280.0E5	МПа
Проницаемость сети трещин, k_f	1.0E-13	м^2
Проницаемость матрицы, k_m	1.0E-16	м^2
Сжимаемость сети трещин, c_{tf}	4.2E-10	1/Па
Сжимаемость матрицы, c_{tm}	3.1E-10	1/Па
Сжимаемость нефти, c_o	1.4E-9	1/Па
Сжимаемость воды, c_w	3.3E-10	1/Па
Пористость сети трещин, φ_f	0.01	
Пористость матрицы, φ_m	0.10	
Количество перпендикулярных групп трещин, n	3	
Длина блока, a	10	м
Ширина блока, b	10	м
Высота блока, c	0.6	м
Эффективная мощность пласта, h	8	м
Радиус скважины, r_w	0.1	м
Радиус исследования, R_e	100.0	м

Результаты численного моделирования представлены на графике динамики изменения давления (рисунок 6.1).

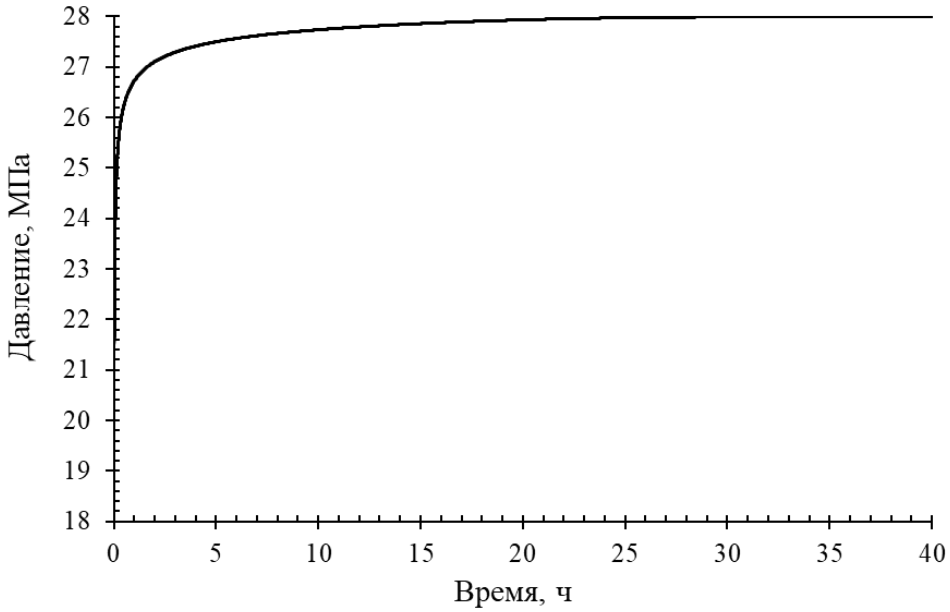


Рисунок 6.1 – Динамика забойного давления

На рисунке 6.1 построена динамика забойного давления. В данном случае видим с какой скоростью идет восстановление давления, отмечаем, что за 40 часов давление полностью восстановилось до начального пластового 28 МПа, т.е. дольше этого времени держать скважину на исследовнаии нет необходимсти, так как новой информации мы не получим.

Далее для построенной кривой на рисунке 6.2 построим производную Бурде и отобразим ее на графике в двойных логарифмических координатах.

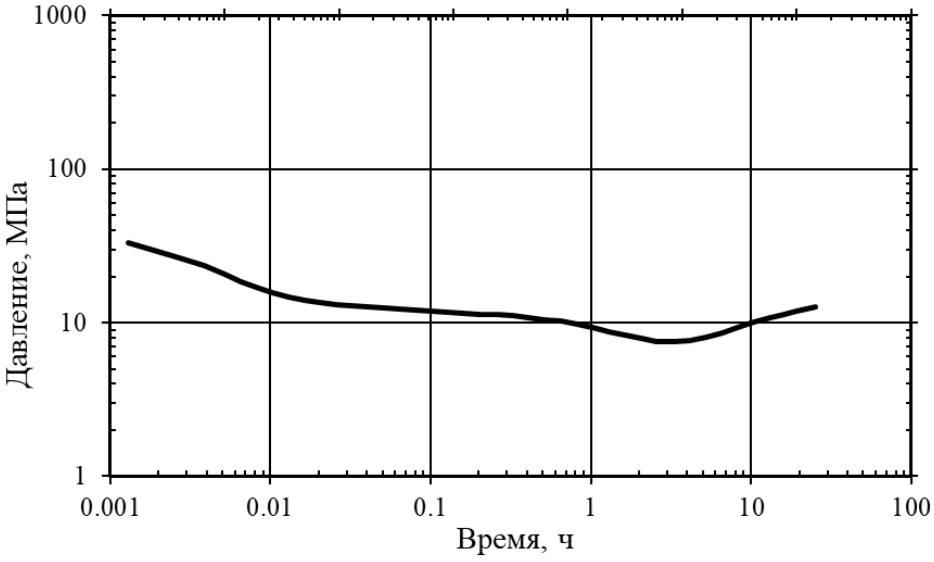


Рисунок 6.2. График производной давления Бурде в двойных логарифмических координатах

По графику производной наблюдаем подключение матрицы к системе трещин на промежутке времени от 0.3 до 20 часов, далее система стремится к полному восстановлению давления. После подключения матрицы на графике наблюдаем горизонтальный участок кривой, который показывает псевдорадиальный режим течения. Достигнув его, исследование можно завершать.

Таким образом для добывающей скважины проведено математическое моделирование гидродинамического исследования, которое позволило рассчитать оптимальное время остановки скважины равное 40 ч. При исследовании скважины более 40 часов получим нерентабельную остановку, которая приведет только к потерям по добыче.

На рисунке 6.3 построены зависимости забойного давления от времени исследования на разные расстояния от скважины – 10 м, 50 м, 100 м. В данном случае видим с какой скоростью идет восстановление давления на разных участках от скважины. В момент времени на 10 м наблюдается сильное возмущение пласта, при больших расстояниях от скважины возмущения уменьшаются.

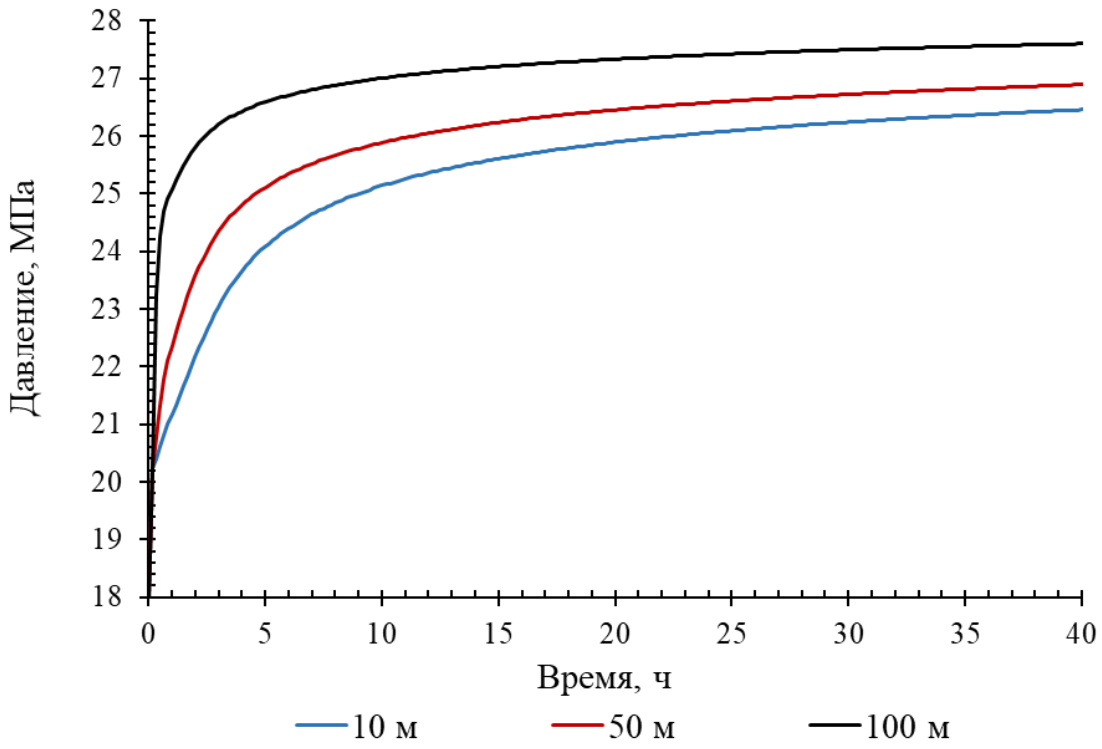


Рисунок 6.3. Зависимость давления от радиуса для разных моментов врмени (10 ч, 20 ч, 40 ч)

6.3 Выводы по главе 6

В данной главе проведено тестирование математических моделей на примере реального карбонатного месторождения трещиновато-порового типа – им. Р. Требса. Было выбрано одно из крупных месторождений России, разработка которого имеет дополнительные трудности в виде сложного строения залежи, климатических условий и далекого месторасположения и финансовые затраты. В первом случае на основании начальных параметров, характерных для рассматриваемого месторождения, была простроена математическая модель для гидродинамического исследования методом кривой восстановления давления на добывающей скважине. В результате была получена необходимая длительность остановки скважины на исследование, которая составила 40 ч. При данном времени исследования достигается псевдорадиальный режим течения и давление практически восстанавливается. При проведении исследования более 40 ч получим нерентабельную остановку, которая приведет к дополнительным потерям по добыче. Также представлены кривые изменения давления в зависимости от радиуса на разные промежутки времени, которые показывают поведение давления вокруг скважины в момент исследования.

Таким образом, построенные в работе математические модели полностью подтверждаются результатами полученных на реальных объектах и позволяют делать экспресс-оценку необходимой длительности исследования, а также изучать и анализировать поведение давления при разных случаях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе построено описание математической модели процесса фильтрации однофазной и двухфазной жидкости в рамках модели двойной пористости в коллекторе трещиновато-порового типа при проведении гидродинамического исследования на добывающей скважине с учетом влияния процессов, которые возникают при закрытии скважины на исследование. В работе проведен обзор современных работ, которые показали, что существует необходимость доработок в области гидродинамических исследований скважин, а именно не хватает быстросчетных инструментов для решения практических задач при оперативном планировании ГДИС на месторождениях, относящихся к коллекторам с двойной пористостью. Описанная в работе модель является квазилинейной и достаточно сложной системой уравнений математической физики смешанного типа, которая содержит уравнения, характеризующие перераспределение давления в сети трещин и поровой части коллектора - матрице. Решение такого рода системы вызывает трудности, которые, во-первых, связаны с большим количеством переменных и во-вторых, характер нелинейности уравнений таков, что соответствующая линеаризованная система в ряде случаев уже не обладает свойством самосопряженности пространственных дифференциальных операторов. Для решения полученной системы применяется метод расщепления по физическим процессам. Полученная расщепленная модель эквивалентна консервативной разностной аппроксимации для исходных уравнений, записанных в дивергентной форме, благодаря введению специальной аппроксимации сеточных функций по времени. При этом по сравнению с полностью неявной схемой решаются две системы уравнений меньшей размерности (по давлениям и насыщенностям) вместо одной. Численная модель реализована в виде программного комплекса, который применим для изучения флюдоидодинамических процессов и оценки оптимального времени остановки скважины при гидродинамическом исследовании методом кривой восстановления давления в среде с двойной пористостью в коллекторе трещиновато-порового типа.

Тестирование разработанного программного комплекса проводилось на промысловых данных реального карбонатного месторождения.

Основными результатами диссертационной работы являются:

1. Построена математическая модель массопереноса в случаях однофазной и двухфазной фильтрации для описания гидродинамического исследования методом кривой восстановления давления в рамках модели двойной пористости в коллекторе трещиновато-порового типа.

2. Построены разностные схемы с временными весами на основе алгоритма расщепления модели по физическим процессам, обеспечивающие корректность и согласованность потоков в системе трещин и поровом коллекторе.

3. Разработан программный комплекс, реализующий построенные модели и алгоритмы, который позволяет моделировать фильтрацию жидкости в рамках модели двойной пористости в коллекторе трещиновато-порового типа с учетом практических особенностей, возникающих при проведении гидродинамических исследований.

4. Выполнены вычислительные эксперименты, которые показали хорошую согласованность с промысловыми данными. На примере месторождения им. Р. Требса проведены исследования процессов при различных фильтрационно-емкостных свойствах пласта, условиях загрязнения призабойной зоны, на разных удаленностях от скважины. Для проведения гидродинамического исследования методом кривой восстановления давления рассчитано оптимальное время остановки скважины с минимальными потерями по добыче.

В рамках дальнейшего развития работы планируется рассмотреть случаи, когда проявляется влияние соседних нагнетательных и добывающих скважин, и усложнить геологию наличием проницаемых и непроницаемых разломов. Также предполагается рассмотреть новые подходы для эффективного решения систем линейных уравнений.

Условные обозначения

Обозначение	Описание	Ед. изм.
P, P_f, P_m	давление, давление в сети трещин, давление в матрице	Па
r	радиальное расстояние от точки наблюдения до скважины	м
r_w, r_e	радиус скважины, радиус исследования	м
$\varphi, \varphi_f, \varphi_m$	пористость, проницаемость сети трещин, пористость матрицы	
μ, μ_w, μ_o	вязкость, вязкость воды, вязкость нефти	Па·с
c_t, c_{ft}, c_{mt}	общая сжимаемость, общая сжимаемость трещин, общая сжимаемость матрицы	$Па^{-1}$
k, k_f, k_m	проницаемость, проницаемость сети трещин, проницаемость матрицы	$м^2$
t	время	с
q	дебит	$м^3$/сут
B	объемный коэффициент	$м^3/м^3$
h	эффективная толщина пласта	м
E_i	интегральная экспоненциальная функция	
α, σ	коэффициент трещиноватой породы	$1/м^2$
q	дебит	$м^3$/сут
B	объемный коэффициент	$м^3/м^3$
P_D, P_{Df}, P_{Dm}	безразмерное давление (f – в трещине, m – в матрице)	
t_D	безразмерное время	
r_D	безразмерный радиус	
λ	удельный коэффициент проводимости	
w	коэффициент доли трещинно-кавернозной емкости	
L^{-1}	оператор обратного преобразования Лапласа	
K_0 и K_1	модифицированные функции Бесселя второго порядка соответственно нулевой и первой степени	
n	число взаимно перпендикулярных групп трещин	
a	длина блока матрицы	м
b	ширина блока матрицы	м
c	высота блока матрицы	м
l_m	характеристический размер блока матрицы	м
$w_в, w_н$	скорости фильтрации воды и нефти	
$Q_в, Q_н$	объемные расходы воды и нефти	$м^3$/сут

Обозначение	Описание	Ед. изм.
$k_{в}(s), k_{н}(s)$	относительные фазовые проницаемости	
$\rho_{в}, \rho_w$	плотность воды	кг/м^3
ρ_o	плотность нефти	кг/м^3
S, S_w, S_o, S_g	насыщенность, насыщенность воды, нефти, газа	
c_w, c_o, c_g, c_f	сжимаемость воды, нефти, газа, породы	Па$^{-1}$
C_s	коэффициент влияния ствола скважины	м^3/Па
V_w	объем ствола скважины	м^3
$Skin$	скин-фактор	
k_s	проницаемость призабойной зоны	м^2
r_s	радиус призабойной зоны	м
P_{wf}	забойное давление	Па
U_w, U_o	скорость фильтрации воды, нефти	
$\delta_1 f, \delta_1 m$	вес по времени в трещинах, в матрице	
F^{fs}, F^{ms}, L^f, L^m	разностная аппроксимация	
δP	невязка по давлению	
$DIN:(\Omega)\to(\omega)$	аппроксимация дивергенции $dv\cdot div$, действующая на функции в ячейках (Ω)	
$GRAN:(\omega)\to(\Omega)$	аппроксимация градиента $grad$ в ячейках (Ω), действующая на сеточные функции в узлах (ω)	
$k_{rw\Omega}^{up\wedge}$	относительная фазовая проницаемость воды в ячейке ω, взятая из узла $\omega(\Omega)$ этой ячейки, расположенного вверх по потоку (up) с неявного слоя по времени $(\wedge)$	
$a^{\approx}$	сеточная аппроксимация на неявном слое по времени	

Список литературы

1. Денк, С.О. Проблемы трещиноватых коллекторов / С.О.Денк. - Пермь: Электронные издательские системы, 2004. - 334 с.

2. Черницкий, А.В. Геологическое моделирование нефтяных залежей массивного типа в карбонатных трещиноватых коллекторах / А.В.Черницкий. - Москва: ОАО "РМНТК"Нефтеотдача", 2002. - 254 с.

3. Все о нефти [Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://vseonefti.ru/upstream.

4. Van Golf-Racht, T.D. Fundamentals of Fractured Reservoir Engineering / T.D.Van Golf-Racht. - Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company, 1982. - 608 p.

5. Наказная, Л.Г. Фильтрация жидкости и газа в трещиноватых коллекторах / Л.Г.Наказная. - Москва: Недра, 1972. - 184 с.

6. Nelson, N .A. Geologic analysis of naturally fractured reservoirs / N.A.Nelson. – Woburn: Butterworth-Heinemann, 2001. - 332 p.

7. Мусаев, Р.Т. Исследование фильтрационных течений в трещиновато-пористых средах: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.02.05 / Мусаев Рихсибай Туляганович. - Ташкент: 1984. - 16 с.

8. Тугарова, М.А. Породы-коллекторы: Свойства, петрографические признаки, классификации: учебно-методическое пособие / М.А.Тугарова. - Санкт-Петербург: С.-Петербургский гос. университет, 2004. - 36 с.

9. Эрлагер, Р. Гидродинамические методы исследования скважин / Р.Эрлагер. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. - 512 с.

10. Басниев, К.С. Нефтегазовая гидромеханика / К.С.Басниев, Н.М.Дмитриев, Г.Д Розенберг. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исслдеовнаий, 2005. - 544 с.

11. Алишаев, М.Г. Неизотермическая фильтрация при разработке нефтяных месторождений / М.Г.Алишаев, М.Д.Розенберг, Е.В.Теслюк. - Москва: Недра, 1985. - 270 с.

12. Кременецкий, М.И. Гидродинамические и промыслово-технологические исследования скважин / М.И.Кременецкий, А.И.Ипатов. - Москва: МАКС Пресс, 2008. - 476 с.

13. Деева, Т.А. Гидродинамические исследования скважин: анализ и интерпретация данных: учебное пособие / Т.А.Деева, М.Р.Камартдинов, Т.Е.Кулагина, П.В.Мангазеев. - Томск: ЦППС НД ТПУ, 2009. - 128 с.

14. Кременецкий, М.И. Долговременный мониторинг промысловых параметров как знаковое направление развития современных ГДИС / М.И.Кременецкий, А.И.Ипатов // Инженерная практика. - 2012. - № 9. - С. 4-8.

15. Котляр, Л.А. Математическое моделирвоание и интерпретация нестационарных термогидродинамических процессов в системе скважина-пласт: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 25.00.10 / Котляр Лев Андреевич. - М: 2013. - 26 с.

16. Хисамов, Р.С. Гидродинамические исследования скважин и методы обработки результатов измерений / Р.С.Хисамов, Э.И.Сулейманов, Р.Г.Фархуллин, О.А.Никашев, А.А.Губайдуллин, Р.К.Ишкаев, В.М.Хусаинов. - Москва: "ОАО "ВНИИОЭНГ", 2000. - 228 с.

17. Каневская, Р.Д. Математическое моделирование гидродинамичеких процессов разработки месторождений углеводородов / Р.Д.Каневская. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. - 140 с.

18. Pattay, Patrick W. Transient pressure behaviour in fractured reservoirs / Patrick W Pattay // SPE J. -1998. https://doi.org/10.2118/52080-STU.

19. Маскет, М. Течение однородных жидкостей в пористой среде / М.Маскет. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. - 628 с.

20. Желтов, Ю.П. Механика нефтегазоносного пласта / Ю.П.Желтов. - Москва: Недра, 1975. - 216 с.

21. Котяхов, Ф.И. Физика нефтяных и газовых коллекторов / Ф.И.Котяхов. - Москва: Недра, 1977. - 287 с.

22. Баренблатт, Г.И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г.И.Баренблатт, В.М.Ентов, В.М.Рыжик. - Москва: Недра, 1984. - 211 с.

23. Басниев, К.С. Подземная гидромеханика / К.С.Басниев, И.Н.Кочина, В.М.Максимов. - Москва: Недра, 1993. - 416 с.

24. Aguilera, R. Naturally fractured reservoirs / R. Aguilera. - T. Pennwell Corp, 1980. - 521 p.

25. Райсс, Л. Основы разработки трещиноватых коллекторов / Л.Райсс. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследовнаий, 2012. - 118 с.

26. Warren, J.E. The behaviour of naturally fractured reservoirs / J.E.Warren, P.J.Root // SPE J. - 1963. - Vol. 3(03). - P. 245-255.

27. DeSwaan, A.O. Analytic solutions for determining naturally fractured reservoir properties by well testing / A.O.DeSwaan // SPE J. - 1976. - Vol. 16(03). - P. 117-122.

28. Kazemi, H. The interpretation of interference tests in naturally fractured reservoirs with uniform fracture distribution / H.Kazemi, M.S.Seth, G.V.Thomas // SPE J. - 1969. -Vol. 9.(04). - P. 463-471.

29. Pollard, P. Evaluation of acid treatments from pressure build-up analysis / P. Pollard // Trans.AIME. - 1959. - Vol. 216(01). - P. 38-43.

30. Douglas Jr., J., Simulation of Flow in Naturally Fractured Reservoirs / J. Douglas Jr., P.J.Paes. Leme, U.Pontificia, T.Arbogast, T.Schmitt // SPE J. - 1987. https://doi.org/10.2118/16019-MS.

31. Odeh, A.S. Unsteady-state behavior of naturally fractured reservoirs / A.S.Odeh // SPE J. - 1965. -Vol. 5(01). -P. 60-66.

32. AI-Ghamdi, A. Pressure transient analysis of dually fractured reservoirs / A.AI-Ghamdi, I.Ershaghi // SPE J. -1996. - Vol. 1(01). -P. 93-100.

33. Kuchuk, F. Fractured-reservoir modeling and interpretation / F.Kuchuk, D. Biryukov, T.Fitzpatrick // SPE J. - 2015. - Vol. 20(05).- P. 983-1004.

34. Шарнов, А.И. Совершенствование гидродинамических расчетов основных показателей разработки нефтяных пластов с двойной пористостью: автореф. дис. … канд. тех. наук: 05.15.06 / Шарнов Александр Иванович. - Грозный. 1993. - 21 с.

35. Щипанов, А.А. Математическое моделирование двухфазной фильтрации в деформируемой трещиновато-пористой среде: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Щипанов Антон Александрович. - Пермь. 2002. - 24 с.

36. Куштанова, Г.Г. Некоторые особенности нестационарной фильтрации в трещиновато-пористых коллекторах [Электронный ресурс] / Г.Г.Куштанова // Нефтегазовое дело. - 2007. - № 1. - Режим доступа: http://ogbus.ru/files/ogbus/authors/Kushtanova/Kushtanova_2.pdf

37. Томин, П.Ю. Математическое моделирование процессов фильтрации в трещиноватых средах: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Томин Павел Юрьевич. - Москва. 2011. - 24 с.

38. Григорьев, А.В. Численное моделирование фильтрации в трещиновато-поритсых средах на основе модели двойной пористости: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Григорьев Александр Виссарионович. - Якутск. 2013. - 18 с.

39. Мазо, А.Б. Моделирование двухфазной фильтрации в окрестности тектонического разлома нефтяного пласта / А.Б.Мазо, Е.И.Калинин, Д.В.Булыгин // Георесурсы. - 2013. - № 3(53). - С. 14-16.

40. Дуркин, С.М. Математическая модель скважины, дренирующей трещиновато-пористый коллектор: автореф. дис. … канд. техн. наук: 25.00.17 / Дуркин Сергей Михайлович. - Ухта. 2014. - 26 с.

41. Морозовский, Н.А. Методика комплексного геофизического контроля разработки низкопроницаемых коллекторов в условиях искусственной и естественной макротрещиноватости: автореф. дис. … канд. техн. наук: 25.00.17 / Морозовский Никита Александрович. - Москва. 2016. -24 с.

42. Барышников, А.В. Формирование системы промыслового монитоинга на основе долговременных исследований стационарными датчиками на приеме насоса / А.В.Барышников, Э.Ф.Габдрашидов, Л.Ф.Никурова, М.И.Кременецкий, В.В.Кокурина, Д.Н.Гуляев // Нефтяное хозяйство. - 2009. - № 12. - С. 41-44.

43. Kuchuk, F. Transient pressure test interpretation for continuously and discretely fractured reservoirs / F.Kuchuk, D.Biryukov // SPE J. - 2012.

https://doi.org/10.2118/158096-MS.

44. Суходанова, С.С. Создание 3D модели залежи с карбонатными трещиноватыми коллекторами на основе комплексирования гидродинамических, геофизических, сейсмических и промысловых данных (на примере нижнепермских отложений Варандейского месторождения): автореф. дис. … канд. техн. наук: 25.00.17 / Суходанова Светлана Сергеевна. - Москва. 2016. - 31 с.

45. Черепанов, С.С. Исследование и совершенствование методов оценки трещиноватости карбонатных коллекторов (на примере турне-фаменских отложений Соликамской депрессии): автореф. дис. … канд. техн. наук: 25.00.12 / Черепанов Сергей Сергеевич. - Пермь. 2016. - 21 с.

46. Блонский, А.В. Математическая модель и алгоритм расчета течения в дискретной системе трещин с кавернами / А.В.Блонский, Е.Б.Савенков // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша. - 2017. - № 133. - 16 с.

47. Блонский, А.В. Моделирование течений в дискретной системе трещин: физико-математическая модель / А.В.Блонский, Д.А.Митрушкин, Е.Б.Савенков // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша. - 2017. - № 65. - 28 с.

48. Васильев, В.И. Математическое моделирвоание задачи двухфазной фильтрации в неоднородных трещиновато-пористых средах с использованием модели двойной пористости и метода конечных элементов / В.И.Васильев, М.В.Васильева, А.В.Григорьев, Г.А.Прокопьев // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. - 2018. - Т. 160. -№ 1. - С. 165-182.

49. Нигматуллин, Р.И. Динамика многофазных сред / Р.И.Нигматуллин. В 2 ч. Ч.1. - Москва: Наука, 1987. - 464 с.

50. Брусиловский, А.И. Фазовые превращения при разработке месторождений нефти и газа / А.И.Брусиловский. - Москва: Грааль, 2002. - 579 с.

51. Нигматуллин, Р.И. Динамика многофазных сред / Р.И.Нигматуллин. В 2 ч. Ч.2. - Москва: Наука, 1987. - 359 с.

52. Седов, Л.И. Механика сплошных сред / Л.И.Седов. - Москва: Наука, 1970. - 492 с.

53. Рындин, Е.А. Методы решения задач математической физики / Е.А.Рындин. - Таганрог: ТРТУ, 2003. - 119 с.

54. Вахитов, Г.Г. Разностные методы решения задач разработки нефтяных месторождений / Г.Г. Вахитов. - Москва: Недра, 1970. - 248 с.

55. Крылов, В.И. Вычислительные методы высшей математики / В.И.Крылов, В.В.Бобков, П.И.Монастырный. - Москва: Наука, 1977. - 400 с.

56. Кудряшов, Н.А. Методы нелинейной математической физики: учебное пособие / Н.А.Кудряшов. - Долгопрудный: Издательский дом "Интеллект", 2010. - 364 с.

57. Белоглазкина, М.В. Численное решение уравнений: учебно-методическое пособие / М.В.Белоглазкина, Е.Н.Егоров, Ю.И.Левин. - Саратов: Саратовский государственный университет, 2008. - 27 с.

58. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С.Владимиров. - Москва: Мир, 1984. - 464 с.

59. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков. - Москва: Лаборатория базовых знаний, 2001. - 630 с.

60. Годунов, С.К. Разностные схемы, введение в теорию / С.К.Годунов, В.С.Рябенький. - Москва: Наука, 1977. - 400 с.

61. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н.Калиткин. - Москва: Наука, 1978. - 512 с.

62. Бахвалов, Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения) / Н.С.Бахвалов. - Москва: Наука, 1975. - 632 с.

63. Самарский, А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А.Самарский. - Москва: Наука, 1971. - 552 с.

64. Баженов, В.Г. Оценки устойчивочти и повышение эффективности численных схем решения задач динамики сплошных сред и конструкций: учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Применение программных средств в научных исследованиях и преподавании математики и механики» / В.Г.Баженов, Д.Т.Чекмарев. - Нижний Новгород: Образовательно-.

научный центр «Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы и математическое обеспечение», 2007. - 98 с.

65. Семенова, Н.Н. Об одном методе численного решения системы параболических уравнений / Н.Н.Семенова, В.В.Терлеев, Г.И.Сухорученко, Е.Е.Орлова, Н.Е.Орлова // Вестник СПбГУ. 2016. - Т. 3(61). -№ 2. - С. 230-240.

66. Яненко, Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н.Н.Яненко. - Новосибирск: Наука, 1967. - 196 с.

67. Ландис, Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов / Е.М.Ландис. - Москва: Наука, 1971. - 288 с.

68. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э.Хайрер, С.Нернсет, Г.Ваннер. - Москва: Мир, 1990. - 512 с.

69. Фаддеев, Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д.К.Фаддеев, В.Н.Фаддеева. - Москва: Физматгиз, 1960. - 656 с.

70. Воеводин, В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В.Воеводин. - Москва: Наука, 1977. - 303 с.

71. Самарский, А.А. Численные методы / А.А.Самарский, А.В.Гулин - Москва: Наука, 1989. - 432 с.

72. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А.Самарский, Е.С.Николаев. - Москва: Наука, 1978. - 592 с.

73. Чупров, И.Ф. Уравнения параболического типа и некоторые методы их решения / И.Ф.Чупров, Е.А.Канева. - Ухта: УГТУ, 2012. - 103 с.

74. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А.Самарский. - Москва: Наука, 1983. - 656 с.

75. Распопов, В.Е. Лекции по курсу "Численные методы" / В.Е.Распопов, М.М.Клунникова. - Красноярск: Министерство образования и науки РФ Сибирский федеральный университет Институт естественных и гуманитарных наук, 2007. - 186 с.

76. Сухинов, А.И. Разностная схема с оптимальным весом для уравнения диффузии-конвекции / А.И.Сухинов, А.Е.Чистяков, В.В.Сидорякина,

С.В.Проценко // Вычислительные методы и программирование. - 2019. - Т. 20. - №3. - С. 283-292.

77. Клочков, М.А. Организация параллельных вычислений для решения дифференциальных уравнений на blade-сервере: учебное пособие / М.А.Клочков, К.Ю.Марков, Ю.С.Митрохин, Л.С.Чиркова. - Ижевск: Удмуртский университет, 2011. - 79 с.

78. Антонов, А.С. Параллельное программирование с использованием технологии MPI: учебное пособие / А.С.Антонов. - Москва: МГУ, 2004. - 71 с.

79. РАН, Сибирский Суперкомпьютерный Центр ИВМиМГ СО. [Электронный ресурс] - Режим доступа: http://www.sscc.icmmg.nsc.ru.

80. Рагимли П.И. Математическое моделирвоание связанных процессов фильтрации в талой зоне и в пьезопроводной среде с газогидратными включениями: дис. … канд.физ.-мат. наук: 05.13.18 / Рагимли Парвин Ильгар кызы. - Москва: 2018. - 139 с.

81. Вшивков, В.А. Численное решение трехмерных задач динамики самогравитирующих многофазных систем / В.А.Вшивков, Г.Г.Лазарева, С.Е.Киреев, И.М.Куликов // Научный вестник НГТУ. - 2011. № 3(44). - С. 69-80.

82. Koledina, K.F. Internal parallelism of multi-objective optimization and optimal control based on a compact kinetic madel for the catalytic reaction of dimethyl carbonate with alcohols / K.F.Koledina, S.N.Koledin, L.F.Nurislamova, I.M.Gubaydullin // Communications Computer and Information Science. - 2019. - Vol. 1063. - P. 242-255.

83. Куликов, И.М. Численное моделирование массопереносав трещиноватых коллекторах с применением высокопроизводительных вычислений / И.М.Куликов, И.Г.Черных, В.А.Протасов, Ю.О.Бобренёва, И.М.Губайдуллин // Сборник трудов: Суперкомпьютерные дни в России. - 2019. - С. 136-151.

84. Чистяков, А.Е. Математическое моделирование гидродинамических процессов мелководных водоёмов с учетом процессов переноса солей и тепла / А.Е.Чистяков, А.В Никитина., Ю.В. Белова, В.Н.Литвинов, А.А.Филина // Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева. - 2020. - Т. 3, - С. 784-791.

85. Авербух, А.З. Математическое моделирование процессов подземной гидродинамики в напряженно-деформированных средах / А.З.Авербух, В.Х.Ахияров, В.Ю.Жиркевич, А.В.Колдоба, О.Л.Кузнецов, Ю.Л.Попов, А.Х.Пергамент, Ю.Повещенко, М.С.Хозяинов // Доклады академии наук. - 1995. - Т. 340. - С. 51-56.

86. Koldoba, A.V. Comparisons of MHD propeller model with observations of cataclysmic variable AE Aqr / A.V.Koldoba // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2019. - Vol. 487. - P.1754-1763.

87. Крайнов, А.Ю. Численные методы решения задач тепло-и массопереноса: учебное пособие / А.Ю.Крайнов, Л.Л.Миньков. - Томск: SST, 2016. - 92 с.

88. Алишаев, М.Г. Реализация мтеода матричной прогонки для задач плошадного заводнения / М.Г.Алишаев, Г.О.Хазамов // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1984. - Т. 24(3). - С. 403-413.

89. Кузнецов, Г.В. Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие / Г.В.Кузнецов, М.А.Шеремет. - Томск: ТПУ, 2007. - 172 с.

90. Патанкар, С.В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах / С.В., Патанкар; под ред. Г.Г.Янькова, перев. Е.В.Калабин. - Москва: МЭИ, 2003. - 312 с.

91. Амосов, А.А. Вычислительные методы для инженеров: учебное пособие / А.А.Амосов, Ю.А.Дубинский, Н.В.Копченова. - Москва: Высшая школа, 1994. - 543 с.

92. Алифанов, О.М. Обратные задачи теплообмена / О.М.Алифанов. - Москва: Машиностроение, 1988. - 280 с.

93. Пасконов, В.М. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В.М.Пасконов, В.И.Полежаев, Л.А.Чудов. - Москва: Наука, 1984. - 288 с.

94. Питюк, Ю.А. Численный анализ термогидродинамических процессов в нагнетательной скважине и пласте с трещиной гидроразрыва / Ю.А.Питюк, А.Я.Давлетбаев, И.А.Зарафутдинов, А.А.Мусин, Л.А.Ковалева // Нефтяное хозяйство. - 2018. - № 8. - С. 42-46.

95. Патанкар, С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С.Патанкар; под ред. В.Д. Виленского. - Москва: Энергоатомиздат, 1984. - 152 с.

96. Федоренко, Р.П. Введение в вычислительную физику / Р.П.Федоренко. - Долгопрудный: Интеллект, 2008. - 526 с.

97. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Д.Андерсон, Дж.Таннехилл, Р.Плетчер. - Москва: Мир, 1990. - 384 с. - 1 т.

98. Корпусов, М.О. Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики / М.О.Корпусов. - Москва: Физический факультет МГУ, 2014. - 364 с.

99. Березин, И. С. Методы вычислений / И.С.Березин, Н.П Жидков. - Москва: Физматгиз, 1962. - 464 с. - 1 т.

100. Saltelli, A. Sensitivity Analysis for Chemical Models / A.Saltelli, M.Ratto, S.Tarantola, F.Campolongo // Chem Rev. - 2005. - Vol. 105(7). - P. 2811-1818.

101. Фридман, А. Уравнения с частными производными параболического типа / А.Фридман. - Москва: Мир, 1968. - 428 с.

102. Каменецкий, С.Г. Нефтепромысловые исследования пластов / С.Г.Каменецкий, В.М.Кузьмин, В.П.Степанов. - Москва: Недра, 1974. - 224 с.

103. Teklu, T.W. Pressure and rate analysis of fractured low permeability gas reservoirs: numerical and analytical dual-porosity models / T.W.Teklu, J.Akinboyewa, N.Alharthy, M.A.Torchuk, A.M.Aisumaiti, A.Dhabi, H.Kazemi, R.M.Graves // SPE. - 2013. https://doi.org/10.2118/163967-MS.

104. Stewart, G. Well test intepretation for naturally fractured reservoirs / G.Stewart, F.Ascharsobbi // SPE. - 1988. - Vol. OMEGA. -P. 661-676.

105. Давлетбаев, А.Я. Анализ результатов исследований коллектора трещиновато-кавернозно-порового типа / А.Я.Давлетбаев, В.А.Байков, Т.Дое, О.В.Емченко, А.Зайнуллин, А.Игошин, А.Федоров // SPE J. - 2010.

106. Харичева, Д.Л. Моделирование теплофизических задач: методические материалы для студентов очной формы обучения специальности 010101

«Математика» / Д.Л.Харичева. - Благовещенск: Амурский государственный университет, 2008. - 100 с.

107. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. - Москва: Наука, 1972. - 735 с.

108. Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П.Демидович, И.А.Марон - Москва: Наука, 1966. - 664 с.

109. Ковалева, Л.А. Физика нефтегазового пласта: учебное пособие / Л.А.Ковалева. - Уфа: РИО БашГУ, 2008. - 280 с.

110. Бобренёва, Ю.О. Исследование процессов массопереноса в коллекторах с двойной пористостью [Электронный ресурс] / Ю.О.Бобренёва, А.Я.Давлетбаев, И.М.Губайдуллин // СВМО. - 2017. - С. 232-235. Режим доступа: http://conf.svmo.ru/files/deamm2017/papers/paper33.pdf.

111. Мазитов, А.А. Моделирование процесса массопереноса жидкости в коллекторах с двойной пористостью / А.А.Мазитов, Ю.О.Бобренёва, И.М.Губайдуллин // Сборник материалов конференции: Актуальные проблемы науки и техники. - 2018. - Т. 1. - С. 143-144.

112. Зельдович, Я.Б. Элементы математической физики / Я.Б.Зельдович. - Москва: Наука, 1973. - 352 с.

113. Соболев, С.Л. Уравнения математической физики / С.Л.Соболев. Москва: Наука, 1992. - 432 с.

114. Bobreneva, Y.O. Researching the mechanisms of fluid flow in the fracture-porous reservoir based on mathematical modeling / Yu.O.Bobreneva, A.A.Mazitov, I.M.Gubaydullin // Computational Mathematics and Information Technologies. - 2018. - Vol. 2(2). - P. 133-143.

115. Chu, Hongyang, A numerical model for pressure transient analysis in fractures reservoirs with poorly connected fractures / Hongyang Chu, Xinwei Liao, Zhiming Chen, Youwei He, Jiandong Zou, Jiali Zhang, Juan Zhao, Jiaxin Wei // SPE. - 2018. https://doi.org/10.2118/191246-MS.

116. Питюк, Ю.А. Оценка влияния различных температурных эффектов на изменение температуры в призабойной зоне пласта / Ю.А.Питюк, А.Я.Давлетбаев,

А.А.Мусин, Л.А.Ковалева, Д.Ф.Марьин, Г.А.Фурсов // НТВ "НК "РОСНЕФТЬ". - 2016. - Т. 1(42). - С. 28-34.

117. Бобренёва, Ю.О. Определение параметров скин-зоны на основе ТермоГДИС остановленных нагнетательных скважин / Ю.О.Бобренёва, Ю.А.Иткулова, Д.Ф.Марьин, А.Я.Давлетбаев // РИЦ БашГУ. - 2015. - С. 79.

118. Bobreneva, Yu.O. Mathematical modelling of fluid flow processes in the fracture-porous reservoir / Yu.O.Bobreneva, A.A.Mazitov, I.M.Gubaydullin // Journal of Physics: Conf. Series. - 2019. - Т. 1096. - 012187.

119. Самарский, А.А. Вычислительная теплопередача / А.А.Самарский, П.Н.Вабищевич. - Москва: Едиториал УРСС, 2003. - 784 с.

120. Демидович, Б.П. Численные методы анализа / Б.П.Демидович, И.А.Марон, Э.З.Шувалова. - Москва: Наука, 1967. - 368 с.

121. Коновалов А.Н. Введение в вычислительные методы линейной алгебры / А.Н.Коновалов. - Новосибирск: Наука, 1993. - 158 с.

122. Бобренёва, Ю.О. Математическое моделирование процесса массопереноса в коллекторе трещиновато-порового типа / Ю.О.Бобренёва, А.А.Мазитов, И.М.Губайдуллин // Предприятие "Новая техника". - 2018. - С. 1775-1780.

123. Куштанова Г.Г. Математическое моделирование геофизических процессов: учебное пособие / Г.Г.Куштанова. - Казань: Казанский университет. - 2015. - 20 с.

124. Бобренёва, Ю.О. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ: Программный модуль для построения полей давления в коллекторах трещиновато-порового типа / Ю.О.Бобренёва, А.А.Мазитов, И.М.Губайдуллин. № 2019664711 Россия, 13 ноября 2019 г.

125. Термогидродинамические исследования вертикальных и горизонтальных скважин: отчет о НИР / Марданов Р.Ш. - Казань, 2014. - 53 с.

126. Лыков, А.В. Тепломассобмен. Справочник / А.В.Лыков. - Москва: Энергия, 1978. - 479 с.

127. Чоловский, И.П. Справочник: Спутник нефтегазопромыслового геолога / И.П.Чоловский. - Москва: Недра, 1989. - 376 с.

128. Бобренёва, Ю.О. Интерпретация гидродинамических исследований скважин в трещиноватых коллекторах в модуле "Saphir" ПК "ECRIN" (Kappa Eng.): методическое указание / Ю.О.Бобренёва, А.Я.Давлетбаев. - Уфа: РИЦБашГУ, 2018. - 24 с.

129. Сорокин, К.Э. Моделирование динамики сжимаемых двухфазных сред в двухскоростном гидродинамическом приближении: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Сорокин Константин Эдуардович. - Новосибирск: 2015. - 16 с.

130. Бобренёва, Ю.О. Моделирование процесса пьезопроводности двухфазной жидкой системы в коллекторе трещиновато-порового типа / Ю.О.Бобренёва // Математическое моделирование. - 2022. - Т. 1(34). - С. 33-46.

Bobreneva, Yu.O. Modeling the Piezoconductivity Process of a Two-Phase Fluid System in a Fractured-Porous Reservoir / Yu.O.Bobreneva // Mathematical Models and Computer Simulations. - 2022. - Vol. 14, № 4. – P. 645-653.

131. Рагимли, П.И. Использование расщепления по физическим процессам для численного моделирования диссоциации газовых гидратов / П.И.Рагимли, Ю.А.Повещенко, О.Р.Рагимли, В.О.Подрыга, Г.И.Казакевич, И.В Гасилова // Математическое моделирование. - 2017. - Т. 29. - № 7. - С. 133-144.

132. Bobreneva, Yu.O. On one method of numerical modeling of piezoconductive processes of a two-phase fluid system in a fractured-porous reservoir / Yu.O.Bobreneva, P.I.Rahimly, Yu.A.Poveshchenko, V.O.Podryga, L.V.Enikeeva // Journal of Physics: Conference Series. - 2021. - Vol. 2131. - P. 022001.

133. Азиз, Х. Математическое моделирование пластовых систем / Х.Азиз, Э.Сеттари. под ред. М.М.Максимова, перев. В.П.Кестнер, А.В.Королев. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. - 416 с.

134. Bobreneva, Yu.O. Numerical modeling of multiphase mass transfer processes in fractured-porous reservoirs / Yu.O.Bobreneva, P.I.Rahimly, Yu.A.Poveshchenko, V.O.Podryga, L.V.Enikeeva // Journal of Physics: Conference Series. - 2020. - Vol. 2131. - P. 022002.

135. Бобренёва, Ю.О. Об одном методе численного моделирования двухфазной жидкой системы в коллекторе трещиновато-порового типа / Ю.О.Бобренёва, П.И.Рагимли, В.О.Подрыга, С.С.Бажитова, А.Э.Бакир, А.К.Абу-Наб // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. - 2021. - № 38. - 20 с.

136. Иващенко, Д.С. Комплексирование результатов гидродинамических исследований и геомеханико-гидродинамического моделирования для прогнозирования зон аномально высокого пластового давления / Д.С. Иващенко, Ю.О.Бобренёва, И.Р.Гимранов, А.Я.Давлетбаев, А.В.Сергейчев , Г.А.Щутский // Нефтяное хозяйство. – 2019. – № 6. – С. 66-70.

137. Bobreneva, Yu.O. Mathematical simulation of a pressure field exemplified by dual porosity reservoir / Yu.O.Bobreneva, I.M.Gubaidullin // Journal of Physics: Conference Series. –2019. – V. 1368. – 042067.

138. Душин, А.С. Новая флюидодинамическая модель карбонатного коллектора месторождения им. Р. Требса на основе синтеза геологических и промысловых данных / А.С.Душин, А.В.Мельников, А.И.Федоров, М.В.Рыкус // Нефтегазовое дело. - 2016. - Т. 15. - № 3. - С. 13-23.