

На правах рукописи

Борисов Виталий Евгеньевич

**РАЗРАБОТКА ПАРАЛЛЕЛЬНОГО НЕЯВНОГО МЕТОДА
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ВЯЗКОГО
СЖИМАЕМОГО ГАЗА**

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре вычислительной механики
механико-математического факультете МГУ имени М.В. Ломоносова.

**Научный
руководитель:** доктор физико-математических наук,
Луцкий Александр Евгеньевич

**Официальные
оппоненты:** **Бочаров Алексей Николаевич**,
доктор физико-математических наук,
Объединенный институт высоких
температур РАН (ОИВТ РАН),
зав. отделением магнитоплазменной
аэродинамики и МГД преобразования энергии

Колдоба Александр Васильевич,
доктор физико-математических наук,
МФТИ (ГУ), заведующий лабораторией
флюидодинамики и сейсмоакустики

**Ведущая
организация:** ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский
университет «МЭИ» («НИУ «МЭИ»)

Защита диссертации состоится «___» _____ 2017 года в «___» час.
«___» мин. на заседании совета Д002.024.03 при ИПМ им. М.В. Келдыша РАН
по адресу: 125047, Москва, Миусская пл., д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института прикладной
математики им. М.В. Келдыша РАН и на сайте www.keldysh.ru/council/3/.

Автореферат разослан «___» _____ 2016 года.



Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук

Корнилина М.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Усложнение математических моделей современной гидрогазодинамики и непрерывное развитие вычислительной техники ставят вопрос о разработке соответствующих численных методов, которые позволили бы моделировать сложные физические процессы. Одновременно с этим возникает проблема повышения эффективности используемых алгоритмов, решение которой является критически важным в силу постоянного увеличения сложности стоящих перед инженерами задач. Разрабатываемые при этом численные методы, с одной стороны, должны с достаточной точностью воспроизводить характерную для задач данного класса сложную картину течений (в частности, наличие узких зон больших градиентов, особенности типа пограничных слоев, ударных волн и т.д.), а с другой – обладать необходимым запасом устойчивости, экономичности и масштабируемости, позволяя получать решение за приемлемое время. Поэтому, несмотря на большое количество разработанных к настоящему моменту алгоритмов разработка новых эффективных численных методов продолжает оставаться актуальной.

История вычислительной гидрогазодинамики (в западной литературе CFD, Computational Fluid Dynamics) насчитывает чуть более 60-и лет, за которые она прошла значительный путь. За это время были разработаны принципы построения математических моделей, основы теории разностных схем, фундаментальные положения вычислительной математики. Существенный вклад в развитие численных методов для задач гидрогазодинамики внесли научные группы, работающие в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Вычислительном центре им. А.А. Дородницына РАН, Институте вычислительных технологий СО РАН, Центральном институте авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, Центральном аэрогидродинамическом институте имени профессора Н.Е. Жуковского, Институте теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Институте прикладной механики УрО РАН, РФЯЦ–ВНИИЭФ, Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, Санкт-Петербургском политехническом университете, и многие другие. Из зарубежных научных центров можно отметить Los Alamos National Laboratory, University of Stanford (США), Imperial College, University of Manchester, University of Cambridge (Великобритания), University of Toulouse, ONERA (Франция) и т.д.

Основными уравнениями гидрогазодинамики являются уравнения Эйлера и Навье–Стокса для несжимаемой или сжимаемой среды. Анализ этих уравнений, способы их замыкания, построение численных методов их решения (в том числе параллельных) представлены в работах О.М. Белоцерковского, С.К. Годунова, А.А. Самарского, Ю.П. Попова, К.И. Бабенко, В.В. Русанова, А.Г. Куликовского, Н.В. Погорелова, А.Ю. Семенова, Б.Н. Четверушкина, Т.Г. Елизаровой, Р.П. Федоренко, А.М. Липанова, Ю.Ф. Кисарова, И.Г. Ключникова, И.А. Белова, С.А. Исаева, P. Lax, V. van Leer, A. Harten, S. Osher и др.

При проведении расчетов задач гидрогазодинамики широко применяются как явные, так и неявные разностные схемы. Явные схемы, как правило, более просты в реализации, однако в силу условия устойчивости накладывают ограничение на шаг интегрирования по времени. В случае течений с большими числами Рейнольдса (из-за большой разницы временных масштабов, на которых проявляют себя процессы конвективного и диффузионного переноса) расчет задачи сводится к решению жестких систем дифференциальных уравнений, для которых допустимый временной шаг явной схемы существенно ограничен. Поэтому, даже несмотря на тот факт, что явные схемы обладают высокой степенью параллелизма, при жестких ограничениях на шаг по времени их использование может оказаться неэффективным (в особенности при расчете стационарных задач методом установления). Однако если физический временной шаг, необходимый для описания нестационарного течения в силу соображений точности, мал, использование явных схем оправдано.

Неявные схемы не имеют формальных ограничений на шаг интегрирования по времени, связанных с условием устойчивости. Однако при их использовании возникает необходимость дополнительного решения систем нелинейных уравнений. Для их решения обычно используется метод Ньютона, на каждой итерации которого необходимо решать линейную систему алгебраических уравнений (СЛАУ) с матрицей Якоби, обладающей большой размерностью и сложной структурой. В силу этих факторов применение неявных схем требует дополнительных вычислительных ресурсов – как памяти, так и процессорного времени. Кроме того, немаловажным фактором является степень параллелизма, которую допускает конкретная реализация неявной схемы. При использовании неявных схем область зависимости решения является глобальной, т.е. значение решения в данной ячейке зависит от значений решения во всех остальных ячейках расчетной сетки. Из-за этого эффективная параллельная реализация любой неявной схемы достаточно сложна.

За последние десятилетия было разработано большое количество неявных схем, основанных на методах полной и приближенной факторизации и методах расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям (позволяющим свести решение многомерной задачи к последовательности одномерных аналогов), в той или иной степени обеспечивающих компромисс между скоростью сходимости, требованиями к памяти и эффективностью параллельной реализации.

Один из возможных подходов к построению вычислительно эффективной неявной схемы заключается в использовании алгоритмов на основе метода LU-SGS. Он относится к классу безматричных методов решения систем линейных алгебраических уравнений, т.е. решение системы данным методом не требует отдельного хранения коэффициентов матрицы системы целиком, позволяя строить компоненты решения локально по мере прохода циклов по ячейкам сетки через произведения матриц-векторов. В этом методе блочно-диагональная матрица сводится к диагональной за счет использования ап-

проксимаций специального вида при линеаризации правой части системы уравнений. Внедиагональные элементы матрицы при этом учитываются в прямом и обратном циклах итерационного процесса Гаусса-Зейделя. Это позволяет существенно сократить объемы используемой памяти и исключить операции с большой матрицей системы, что часто облегчает параллельную реализацию методов данного класса.

Преимуществом использования метода LU-SGS в сравнении с остальными подходами к построению неявных схем является по существу явный характер вычислений, за счет чего в перспективе его эффективность может быть сравнима по вычислительным затратам с аналогичными значениями для явных схем. *Таким образом, разработка параллельных алгоритмов неявной схемы на основе метода LU-SGS для решения промышленных задач гидрогазодинамики (в т.ч. динамики вязкого сжимаемого газа), является актуальной задачей, имеющей теоретическое и практическое значение.*

Цель диссертационной работы состоит в разработке параллельного программного комплекса для высокопроизводительных вычислительных систем, предназначенного для эффективного решения инженерных задач динамики вязкого сжимаемого газа, а также применение разработанного комплекса для математического моделирования различных режимов работы воздухозаборника прямооточного воздушно-реактивного двигателя.

Для достижения поставленных целей решены следующие задачи:

1. Разработка алгоритмов неявной схемы на основе методов LU-SGS и BiCGStab для решения нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса URANS. В качестве модели турбулентности используется дивергентная форма однопараметрической модели турбулентности Спаларта-Аллмараса для сжимаемых течений с модификацией Эдвардса.
2. Программная реализация разработанных алгоритмов на языках программирования C/C++ с использованием интерфейса параллельного программирования MPI для расчета трехмерных турбулентных течений вязкого сжимаемого газа, в том числе течений с энерговыделением в поток.
3. Разработка подхода для моделирования турбулентного пограничного слоя заданной толщины, его реализация в виде вспомогательного программного модуля, проведение тестовых расчетов.
4. Проведение расчетов трансзвукового обтекания крыла ONERA M6 с симметричным профилем. Сравнение результатов расчетов с экспериментом.
5. Проведение расчетов перехода между регулярным и маховским отражением $RR \Rightarrow MR$ ударных волн в области двойных решений, инициируемого

вложением энергии в сверхзвуковой поток газа. Сравнение результатов расчетов с известными данными.

6. Моделирование различных режимов работы воздухозаборника прямоточного воздушно-реактивного двигателя. Сравнение результатов расчетов с экспериментом и известными данными.
7. Исследование масштабируемости и эффективности разработанных параллельных алгоритмов.

Научная новизна диссертации отражена следующими элементами:

1. Разработаны алгоритмы неявной схемы на основе методов LU-SGS и BiCGStab для решения нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса URANS совместно с дивергентной формой уравнения однопараметрической модели турбулентности Спаларта–Аллмараса для сжимаемых течений с модификацией Эдвардса и возможностью энерговложения в поток.
2. Разработан и реализован параллельный программный комплекс для расчета трехмерных турбулентных течений вязкого сжимаемого газа, в том числе течений с энерговложением в поток. Программный комплекс предназначен для работы на высокопроизводительных вычислительных системах, в процессе расчетов подтверждены его эффективность и масштабируемость.
3. Проведено моделирование стационарных и нестационарных течений в псевдоскачке в тракте воздухозаборника прямоточного воздушно-реактивного двигателя. Показано существенное влияние толщины пограничного слоя на положение и характер ударно-волновой структуры в псевдоскачке, а также влияние инициируемого энерговложением противодавления на возможность выхода на нерасчетные режимы работы воздухозаборника.

Теоретическая ценность и практическая значимость диссертационной работы состоят в разработанных вычислительных алгоритмах неявной схемы и параллельном программном комплексе для расчета трехмерных турбулентных течений вязкого сжимаемого газа, в том числе течений с энерговложением в поток. Результаты диссертационной работы использованы для проведения численных экспериментов и решения промышленных инженерных задач.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Разработаны алгоритмы неявной схемы на основе методов LU-SGS и BiCGStab для решения нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса URANS совместно с дивергентной формой уравнения однопараметрической модели турбулентности Спаларта–Аллмараса для сжимаемых течений с модификацией Эдвардса и возможностью энерговложения в поток.
2. Разработан и реализован параллельный программный комплекс для расчета трехмерных турбулентных течений вязкого сжимаемого газа, в том числе течений с энерговложением в поток. Программный комплекс предназначен для работы на высокопроизводительных вычислительных системах, в процессе расчетов подтверждены его эффективность и масштабируемость.
3. В результате проведенного моделирования различных режимов работы воздухозаборника прямого воздушного реактивного двигателя показано существенное влияние толщины пограничного слоя на положение и характер ударно-волновой структуры в псевдоскачке, а также влияние инициируемого энерговложением противодавления на возможность выхода на нерасчетные режимы работы воздухозаборника.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечены строгостью используемого математического аппарата и подтверждаются сравнением результатов вычислительных экспериментов с опубликованными в литературе экспериментальными и расчетными данными.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на:

- научной конференции «Ломоносовские чтения» (г. Москва, 2014);
- семинарах кафедры вычислительной механики механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (г. Москва, 2014, 2015, 2016);
- XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г. Казань, 2015);
- 9-й Всероссийской школе-семинаре «Аэротермодинамика и физическая механика классических и квантовых систем» (г. Москва, 2015);
- XV Международном совещании по магнитоплазменной аэродинамике (г. Москва, 2016);
- XVIII Международной конференции по методам аэрофизических исследований «ICMAR 2016» (г. Пермь, 2016);

- семинаре 11-го отдела ИПМ им. М.В. Келдыша РАН «Вычислительные методы и математическое моделирование» (г. Москва, 2016);
- семинаре ИПМ им. М.В. Келдыша РАН «Математическое моделирование» под руководством В.Ф. Тишкина, А.А. Кулешова (г. Москва, 2016).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 5 печатных работах, в том числе в 4 печатных работах в изданиях из перечня ВАК.

Личный вклад соискателя. Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю; заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, приложения и списка литературы. Работа представлена на 93 страницах, содержит 35 иллюстраций и 5 таблиц. Список литературы содержит 99 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, проведен обзор литературы по теме исследования, сформулированы цель и задачи исследования, основные положения, выносимые на защиту, приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

Помимо этого приведено обоснование направления исследования, разработке которого посвящена диссертационная работа, т.е. построению вычислительно эффективной неявной схемы на основе метода LU-SGS. Решению этой задачи посвящены последующие разделы диссертационной работы.

В первой главе приведено описание математической модели и соответствующих вычислительных алгоритмов для решения составляющих ее уравнений. Для описания трехмерных турбулентных течений совершенного вязкого сжимаемого газа используется система нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (URANS), в декартовой системе координат имеющая следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x_j} + \mathbf{w},$$

где суммирование ведется по $j = 1, 2, 3$, \mathbf{q} – вектор консервативных переменных, \mathbf{f}_j и \mathbf{g}_j – векторы невязких и вязких потоков соответственно, \mathbf{w} – вектор внешних источников (в настоящей работе используется только источник в уравнении баланса энергии):

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho E^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_j = \begin{pmatrix} \rho u_j \\ \rho u_j u_1 + \delta_{1,j} p \\ \rho u_j u_2 + \delta_{2,j} p \\ \rho u_j u_3 + \delta_{3,j} p \\ u_j (\rho E^* + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{1j} \\ \tau_{2j} \\ \tau_{3j} \\ \tau_{ij} u_i + h_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix}.$$

Здесь ρ – плотность, u_j – компоненты вектора скорости \mathbf{u} , p – термодинамическое давление, E^* – полная энергия турбулентного течения, τ_{ij} и h_j – компоненты тензора вязких напряжений и теплового потока:

$$\tau_{ij} = \mu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_{\text{eff}} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{i,j} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{i,j}, \quad h_j = \lambda_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial x_j},$$

где T – температура газа, k – кинетическая энергия турбулентных пульсаций, μ_{eff} и λ_{eff} – «эффективные» значения коэффициентов вязкости и теплопроводности:

$$\mu_{\text{eff}} = \mu + \mu_t, \quad \lambda_{\text{eff}} = c_p \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \right).$$

Здесь c_p – коэффициент удельной теплоемкости газа при постоянном давлении, Pr и Pr_t – ламинарное и турбулентное числа Прандтля, μ – молекулярная вязкость газа. Величина μ_t обозначает добавочную турбулентную вязкость, которая определяется моделью турбулентности.

В работе использован вариант однопараметрической модели турбулентности Спаларта–Аллмарса (SA) для сжимаемых течений с модификацией Эдвардса, записанный в полностью дивергентной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \tilde{\nu} \mathbf{u}) &= \rho (P_{\tilde{\nu}} - D_{\tilde{\nu}} + T_{\tilde{\nu}}) + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \nabla \cdot [(\mu + \rho \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}] \\ &+ \frac{C_{b2}}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \rho (\nabla \tilde{\nu})^2 - \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}} \rho} (\mu + \rho \tilde{\nu}) \nabla \rho \cdot \nabla \tilde{\nu}, \quad \mu_t = \rho \tilde{\nu} f_{v1}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\nu}$ – модельная величина, на основе которой пересчитывается величина турбулентной вязкости.

Уравнения URANS и SA дискретизируются по пространственным переменным методом конечных объемов, при этом для вычисления невязких потоков на гранях расчетных ячеек используется обобщенная схема Годунова с интерполяционной схемой WENO3, адаптированной для структурированных неравномерных сеток. Для дискретизации уравнений по времени используются явная и неявная схемы Эйлера. Так, для системы уравнений URANS неявная схема записывается как:

$$V_i \frac{\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n}{\Delta t} = \mathbf{R}_i^{n+1}, \quad \mathbf{R}_i = - \sum_{\sigma} (T_{\sigma}^{-1} \mathbf{F}_{\sigma} - \mathbf{g}_{\sigma}) s_{\sigma} + V_i \mathbf{w}_i.$$

Алгоритм численного решения уравнений неявной схемы основан на идее расщепления по физическим процессам: сначала решается система уравнений URANS с использованием значения турбулентной вязкости с предыдущего временного шага, затем решается уравнение модели турбулентности SA. Такой подход не требует введения дополнительных рабочих массивов, что позволяет эффективно использовать уже имеющиеся данные о течении при решении уравнения турбулентной вязкости.

Система дискретных уравнений неявной схемы решается методом установления по псевдо-временной переменной с использованием метода Ньютона. Для уравнений URANS возникающая на каждой ньютоновской итерации система линейных алгебраических уравнений может быть записана в виде:

$$\underbrace{(L + D + U)}_A \underbrace{\delta^s \mathbf{q}}_x = \underbrace{\mathbf{G}^s}_b,$$

$$D_i = V_i \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \tau} \right) + \sum_{\sigma} s_{\sigma} \left(\frac{1}{2} \rho_{inv, \sigma} + \frac{\rho_{dis}}{h_{\sigma}} \right),$$

$$L(\delta^s \mathbf{q}_{\sigma(i)}) = \sum_{\sigma: \sigma(i) < i} s_{\sigma} \left[\frac{1}{2} T_{\sigma}^{-1} \delta^s \mathbf{F}_{\sigma(i)} - \left(\frac{1}{2} \rho_{inv, \sigma} + \frac{\rho_{dis}}{h_{\sigma}} \right) \delta^s \mathbf{q}_{\sigma(i)} \right],$$

$$U(\delta^s \mathbf{q}_{\sigma(i)}) = \sum_{\sigma: \sigma(i) > i} s_{\sigma} \left[\frac{1}{2} T_{\sigma}^{-1} \delta^s \mathbf{F}_{\sigma(i)} - \left(\frac{1}{2} \rho_{inv, \sigma} + \frac{\rho_{dis}}{h_{\sigma}} \right) \delta^s \mathbf{q}_{\sigma(i)} \right],$$

$$\mathbf{G}_i^s = \mathbf{R}_i^{n+1, s} - V_i \frac{\Delta^s \mathbf{q}_i}{\Delta t}.$$

Для ее решения применяется метод LU-SGS, суть которого состоит в представлении линейной системы в виде

$$(D + L) D^{-1} (D + U) \delta^s \mathbf{q} = \mathbf{G}^s - LD^{-1} U \delta^s \mathbf{q}$$

и в пренебрежении при решении системы последним слагаемым в правой части. В результате факторизованная система разбивается на две подсистемы, решение которых реализуется двумя расчетными циклами по ячейкам сетки: первый – в прямом направлении (от первой ячейки к последней), а второй – в обратном:

$$\delta^{s,*} \mathbf{q}_i = D_i^{-1} \left[\mathbf{G}_i - L(\delta^{s,*} \mathbf{q}_{\sigma(i)}) \right], \quad i = 1 \dots N$$

$$\delta^s \mathbf{q}_i = \delta^{s,*} \mathbf{q}_i - D_i^{-1} U(\delta^s \mathbf{q}_{\sigma(i)}), \quad i = N \dots 1.$$

Получающаяся при этом итерационная невязка служит для обновления итерационного вектора, $\mathbf{q}^{n+1, s+1} = \mathbf{q}^{n+1, s} + \delta^s \mathbf{q}$, после чего процедура повторяется. Аналогичные выкладки проводятся для уравнения модели SA.

Решение СЛАУ методом LU-SGS производится с точностью, обусловленной порядком величины $LD^{-1}U$. Однако в ряде случаев очень точное решение СЛАУ и не требуется, в частности, при расчете стационарных течений. В случае когда точности метода LU-SGS недостаточно для обеспечения сходимости метода Ньютона, для решения СЛАУ используется итерационный метод крыловских подпространств BiCGStab, внутри которого LU-SGS применяется в качестве предобуславливателя.

Во многом качество работы итерационного метода зависит от качества используемого предобуславливателя, поскольку процедура предобуславливания является наиболее ресурсоемким элементом алгоритма. Кроме того, т.к. процедура распараллеливания скалярного произведения и матрично-векторного умножения может быть проведена стандартным образом без особого труда, эффективность параллельной реализации общего алгоритма зависит от степени параллелизма, которую допускает используемый метод предобуславливания. Следует отметить, что решение СЛАУ методом BiCGStab с LU-SGS в качестве предобуславливателя допускает реализацию без хранения полной матрицы коэффициентов системы. За счет этого общий алгоритм «Метод Ньютона + BiCGStab + LU-SGS» так же, как и алгоритм «Метод Ньютона + LU-SGS», является «безматричным» и относится к классу безматричных методов Ньютона-Крылова (Jacobian-free Newton-Krylov methods).

Во второй главе приведено описание созданного параллельного программного комплекса для расчета трехмерных турбулентных течений вязкого сжимаемого газа, в том числе течений с энерговыделением в поток. Рассмотрены особенности параллельной реализации разработанных алгоритмов.

В рамках валидации и верификации используемой математической модели, вычислительных алгоритмов и разработанного программного комплекса рассмотрены следующие задачи:

1. Стационарное транзвуковое обтекание крыла ONERA M6.
2. Моделирование перехода между регулярным (RR) и маховским (MR) отражением ударных волн в области двойных решений, в котором переход инициируется импульсным подводом энергии в поток.

Расчеты каждой задачи проводились по явной и неявной схемам, их результаты сравнивались с данными экспериментов и опубликованными в литературе результатами других авторов.

Моделирование транзвукового обтекания крыла проводилось для угла атаки $\alpha = 3.06^\circ$ при числе Маха набегающего потока $M_\infty = 0.8395$ и числе Рейнольдса $Re_\infty = 19\,318\,611\text{ м}^{-1}$. Для расчетов использовалась блочно-структурированная сетка, содержащая $N = 1\,898\,960$ ячеек. Начальные и граничные условия ставились стандартным образом.

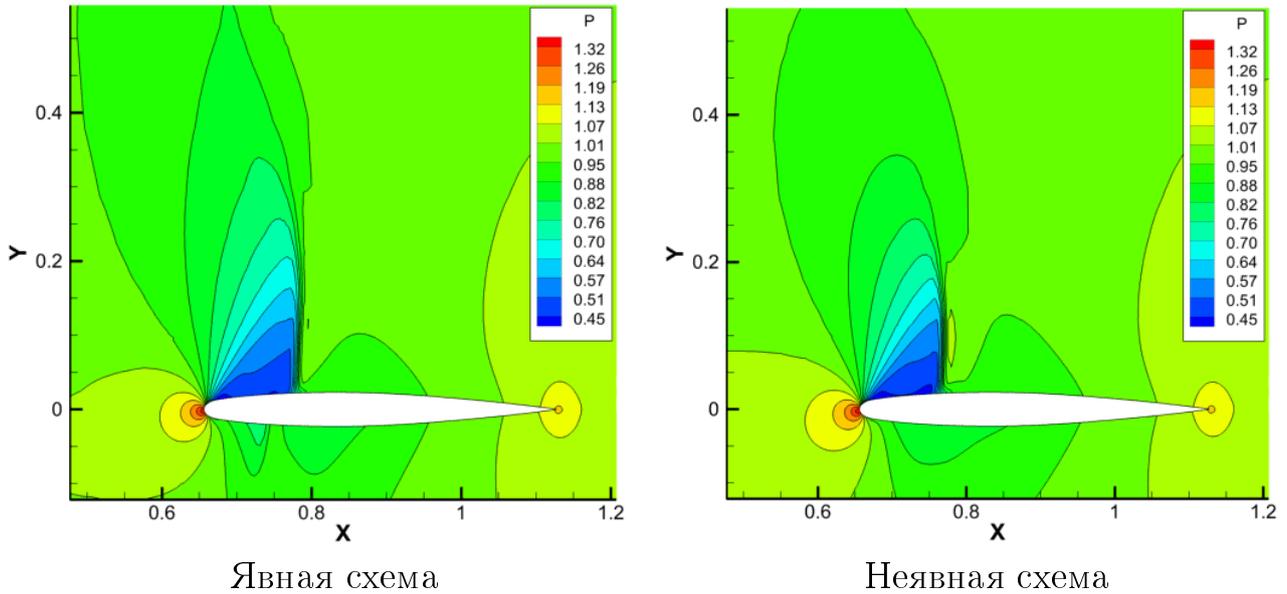


Рис. 1. Распределение давления в сечении $z/(L/2)=0.95$

Расчеты проводились на $N_{\text{proc}} = 36$ вычислительных ядрах. Для получения стационарного решения расчеты проводились методом установления, поэтому для неявной схемы было выбрано фиксированное количество внутренних ньютоновских итераций $s_{\text{max}} = 1$ на один шаг по времени. В качестве исследуемого значения «невязки» была выбрана величина

$$\text{res} = \|\Delta\rho/\Delta t\|_{C(\Omega_h)} = \max_{i=1\dots N} |\Delta\rho_i/\Delta t|.$$

Расчет останавливался при выполнении условия $\text{res} < 5.0 \times 10^{-6}$. Число Куранта для явной и неявной схем бралось равным $q_{\text{CFL}}^{\text{exp}} = 0.5$ и $q_{\text{CFL}}^{\text{imp}} = 1000.0$ соответственно.

На рисунке 1 изображено полученное в расчетах по явной и неявной схемам распределение поля давления в плоскости сечения крыла $z/(L/2) = 0.95$, где $L/2 = 1.1963$ м – полуразмах крыла. Для этого же сечения на рис. 2 представлено сравнение полученного в расчетах коэффициента давления C_p (взятого со знаком минус) с результатами эксперимента. Как видно из рис. 2, расчет по неявной схеме довольно точно совпадает с экспериментальными данными, воспроизводя положение скачка уплотнения даже более точно, чем расчет по явной схеме. Данный факт имеет логичное объяснение, следующее из рис. 3, на котором представлена зависимость «невязки» от числа временных шагов.

Для достижения стационарного решения в расчете по неявной схеме потребовалось выполнить порядка 13 000 итераций, что значительно меньше, чем количество выполненных шагов по явной схеме – 2 000 000 (для отображения результатов в одном масштабе значение на графике не представлено), за которые «невязка» упала до величины приблизительно 1.0×10^{-3} (далее расчет не продолжался). Кроме того, время одной итерации расчета по неявной схеме составило примерно 0.51 сек., по явной – 0.33 сек. Благодаря этим фак-

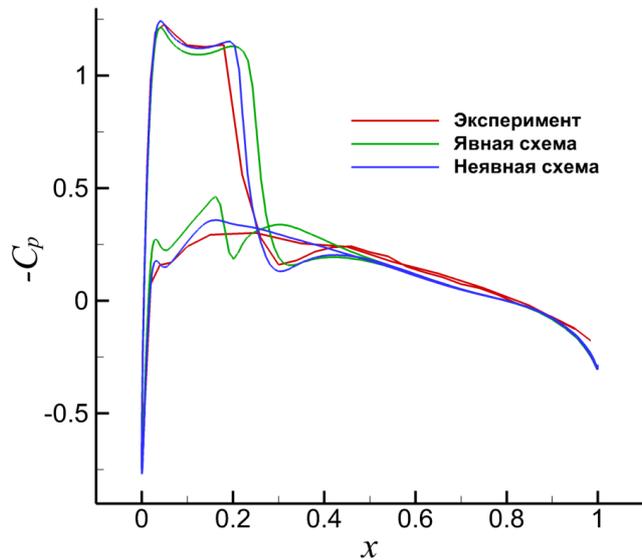


Рис. 2. Распределение коэффициента давления в сечении $z/(L/2) = 0.95$

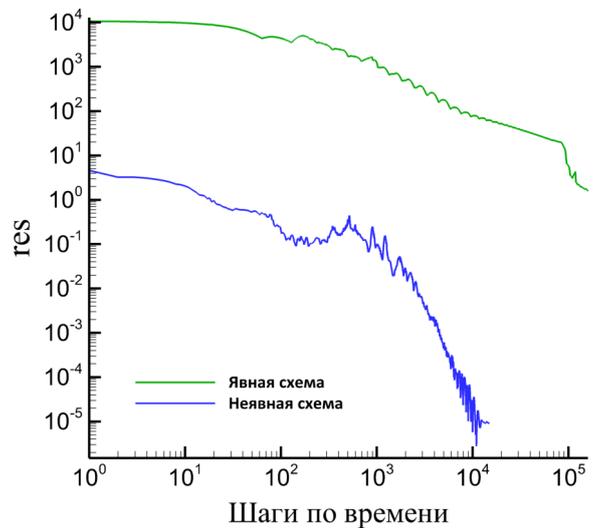


Рис. 3. Зависимость «невязки» от числа шагов по времени

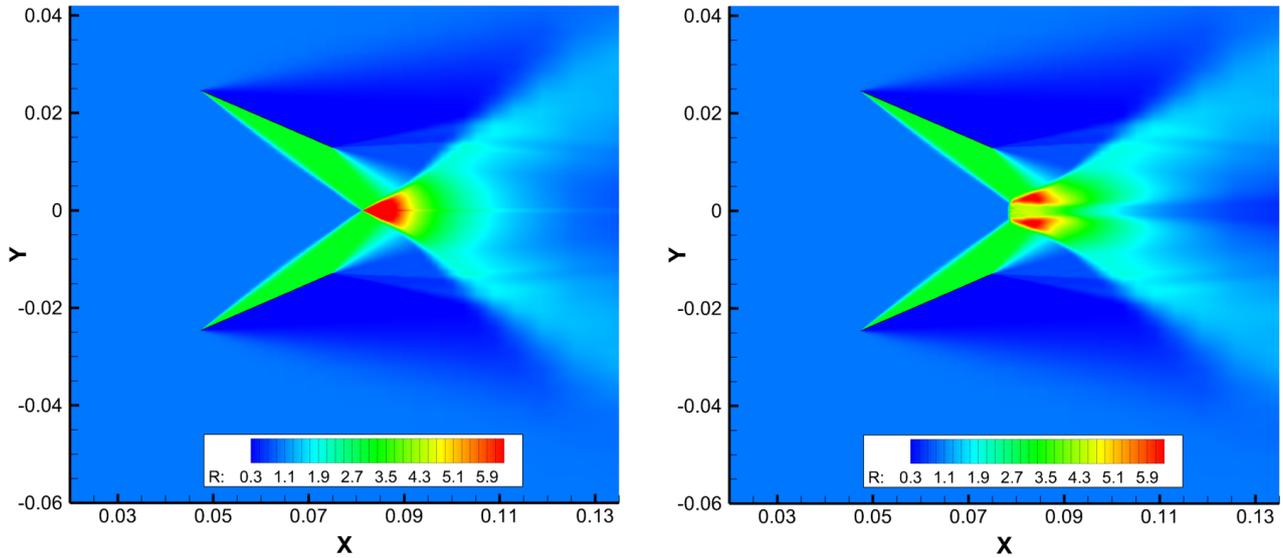
там использование неявной схемы позволило сократить общее время расчета приблизительно в 100 раз при приемлемом совпадении с экспериментальными данными.

В качестве второй валидационной задачи рассмотрено моделирование перехода $RR \Rightarrow MR$ между регулярным и маховским отражением ударных волн в области двойных решений, в котором переход инициируется импульсным подводом энергии в поток. При этом процесс перехода является существенно нестационарным, что накладывает дополнительные требования на точность используемых методов решения.

Задача посвящена исследованию отражения ударной волны от плоскости симметрии при взаимодействии скачков уплотнения, генерируемых двумя помещенными в сверхзвуковой поток симметричными пластинами. Она интересна тем, что в зависимости от угла падающего скачка α возможно существование двух различных стационарных ударно-волновых конфигураций (рис. 4) в некотором диапазоне углов $\alpha_N < \alpha < \alpha_d$ (т.н. «область двойного решения») и связанное с этим явление гистерезиса. Постановка задачи взята из работы Д.В. Хотяновского¹, в которой исследовалась возможность управления течением для инициирования перехода $RR \Rightarrow MR$ путем локального выделения энергии перед ударной волной.

Моделирование проводилось при числе Маха набегающего потока $M_\infty = 4.0$ и числе Рейнольдса $Re_\infty = 1.278 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$. Для расчетов использовалась блочно-структурированная сетка, имеющая сгущения в областях энергетичес-

¹Khotyanovsky D.V., Knight D.D., Kudryavtsev A.N., Ivanov M.S. Numerical study on laser-induced shock wave reflection transition. In: The 5th Int. Workshop on Shock-Vortex Interaction, Kaohsiung, Taiwan, Oct. 27-31, 2003. P. 84–90.



Регулярное отражение

Маховское отражение

Рис. 4. Стационарные ударно-волновые конфигурации

жения и отражающихся скачков. Сетка содержала $N = 9\,062\,400$ ячеек. Начальные и граничные условия ставились стандартным образом. Параметры источника энергии соответствовали лазерному импульсу с энергией $J_l = 0.1$ Дж, действующему на область объемом $V_l = 3$ мм³ в течение $\Delta t_l = 10$ нс.

Расчет проводился в несколько этапов:

1. Моделирование стационарного регулярного отражения.
2. Локальное выделение энергии в область, расположенную на пересечении плоскостей симметрии перед точкой регулярного отражения.
3. Продолжение расчета до установления стационарной маховской конфигурации.

Моделирование стационарного регулярного отражения (этап 1) проводилось с помощью неявной схемы методом установления (аналогично расчетам обтекания крыла). Расчет проводился на $N_{\text{проц}} = 96$ вычислительных ядрах при числе Куранта $q_{\text{CFL}} = 100.0$, на каждом временном шаге использовалась одна ньютоновская итерация $s_{\text{max}} = 1$, для решения СЛАУ применялся метод LU-SGS. На втором этапе проводился расчет одного временного шага с $\Delta t = 10$ нс, что соответствовало числу Куранта $q_{\text{CFL}} \approx 0.57$, при $N_{\text{проц}} = 96$. Здесь и далее для расчетов использовались следующие параметры неявной схемы: максимальное количество ньютоновских итераций $s_{\text{max}} = 5$, относительная точность $\varepsilon_r = 10^{-3}$, решение СЛАУ методом BiCGStab + LU-SGS с максимальным количеством итераций $k_{\text{max}} = 10$, относительной точностью $\varepsilon_r = 10^{-4}$, абсолютной точностью $\varepsilon_a = 10^{-6}$. Третий этап расчетов проводился с помощью неявной схемы с указанными выше параметрами.

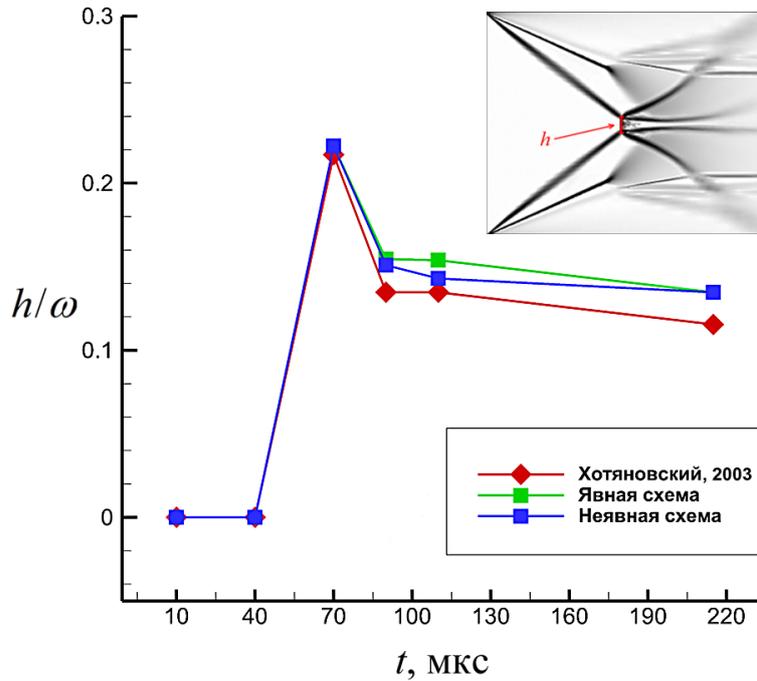


Рис. 5. Нормированная высота мостообразного скачка

Результаты сравнивались с аналогичными расчетами по явной схеме и данными из работы Д.В. Хотяновского. Число используемых вычислительных ядер в обоих случаях составило $N_{\text{proc}} = 96$, числа Куранта равнялись $q_{\text{CFL}}^{\text{imp}} = 12.0$ и $q_{\text{CFL}}^{\text{exp}} = 0.6$ соответственно.

В указанные моменты времени после лазерного теплового импульса сравнивались численные ширены и высота мостообразного скачка h (нормированная на длину хорды клина ω) в центральном сечении модели (координатная плоскость xy). Полученные данные позволили утверждать как о качественном, так и количественном совпадении результатов во всех трех рассмотренных случаях. В частности, на рис. 5 получено довольно точное соответствие высоты мостообразного скачка в указанные моменты времени, при этом результаты работы явной и неявной схем практически идентичны. В итоге общее время расчета в сравнении с явной схемой сокращено в 2.5 раза.

Помимо представленных результатов также был проведен ряд параметрических расчетов, которые показали, что при использовании для решения СЛАУ только метода LU-SGS число итераций метода Ньютона возросло в несколько раз, при этом очень часто при достижении порядка десяти итераций наблюдалось стагнирование нелинейной невязки. По этой причине для данной задачи применение метода `BiCGStab` являлось целесообразным.

В конце главы представлены результаты анализа эффективности разработанного параллельного программного комплекса на двух рассмотренных выше задачах. Исследования проводились для различного числа вычислительных ядер при всех прочих фиксированных параметрах осреднением времени счета 100 итераций. Полученные на задаче обтекания крыла результаты представ-

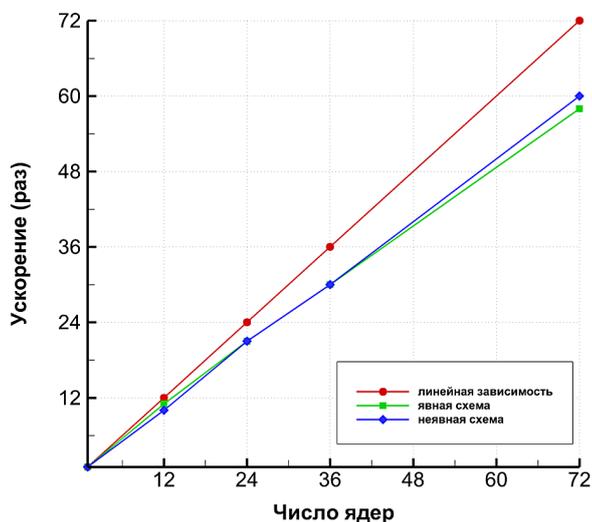


Рис. 6. Зависимость ускорения от числа ядер, задача 1

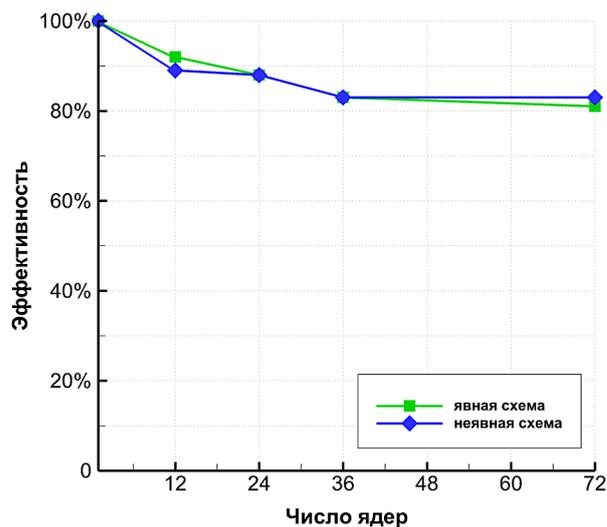


Рис. 7. Зависимость эффективности от числа ядер, задача 1

лены на рис. 6 и 7. Из графиков видно, что предложенная методика обладает хорошей масштабируемостью (ускорение расчета в 30 раз при использовании 36 вычислительных ядер и в 60 раз на 72 ядрах) и сохраняет свою эффективность распараллеливания (83% при использовании как 36, так и 72 вычислительных ядер). Масштабируемость и эффективность распараллеливания предложенной методики, полученные на задаче о моделировании перехода регулярного отражения в маховское, продемонстрированы на рис. 8 и 9. Как видно из рисунков, предложенная методика обладает хорошей масштабируемостью (ускорение расчета в 68 раз при использовании 96 вычислительных ядер и в 210 раз на 384 ядрах) и эффективностью (71% на 96 ядрах, 55% на 384), при этом масштабируемость явной и неявной схем сопоставима. Все это позволяет сделать вывод о возможности применения реализованного неявного метода для эффективного решения задач газовой динамики, обладающих большой размерностью.

В третьей главе рассмотрено численное исследование различных режимов работы воздухозаборника прямооточного воздушно-реактивного двигателя (ПВРД). В воздухозаборнике происходит торможение вязкого сверхзвукового потока, что представляет собой сложную комбинацию взаимодействия ударных волн с развивающимися турбулентными пограничными слоями, приводящую к формированию псевдоскачка. Изучение формирования псевдоскачка в канале тракта двигателя является одной из самых востребованных практических задач при проектировании ПВРД. Длина псевдоскачка зависит от числа Маха набегающего потока M_∞ , толщины пограничного слоя (ПС) на входе в воздухозаборник, числа Рейнольдса Re_∞ и других параметров. При этом структура течения является чувствительной к параметрам потока как на входе, так и на выходе из воздухозаборника. В некоторых случаях может

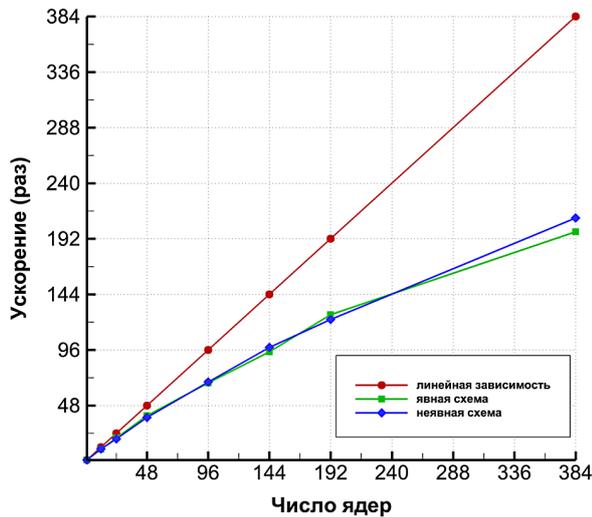


Рис. 8. Зависимость ускорения от числа ядер, задача 2

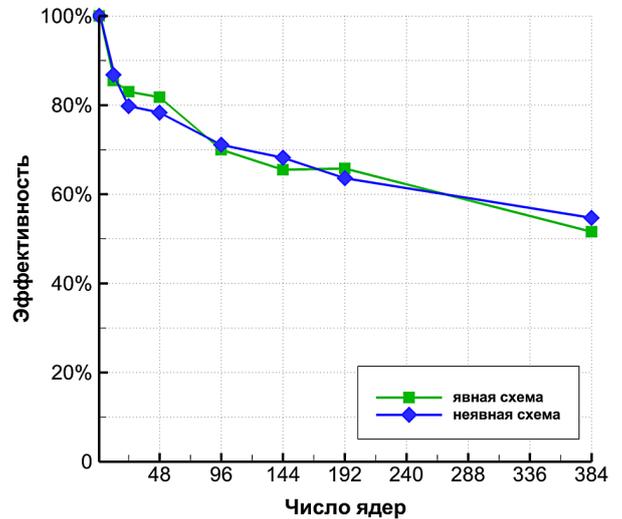


Рис. 9. Зависимость эффективности от числа ядер, задача 2

наблюдаться эффект запираания потока («незапуска» воздухозаборника), что приводит к резкому снижению тяги двигателя или даже полному нарушению его работы.

В качестве исследуемой задачи использовались данные из натурального эксперимента J. Wagner², в котором рассматривалось гиперзвуковое течение в модельном воздухозаборнике с углом наклона входной ramпы 6° при числе Маха набегающего потока $M_\infty = 4.9$ и числе Рейнольдса $Re_\infty = 1.26 \times 10^6 h^{-1}$, где $h = 0.0254$ м – единица длины модели.

Трехмерные расчеты, представленные в главе, проводились с помощью разработанного программного комплекса. Предварительные двумерные расчеты осуществлялись с помощью программы, описанной в работе³.

Для проведения расчетов использовалось несколько сеток разной размерности и степени детализации, а также размеров области перед воздухозаборником. Самая подробная сетка была трехмерной и насчитывала $N = 14\,081\,984$ ячейки. Общий вид этой модели (с показанным распределением давления для одного из расчетов) представлен на рис. 10.

Для моделирования пограничного слоя заданной толщины использовался разработанный подход, основанный на известных формулах для пограничного

²Wagner J.L. Experimental studies of unstart dynamics in inlet/isolator configurations in a Mach 5 flow. PhD Thesis. The University of Texas at Austin, 2009.

³Кудряшов И.Ю., Луцкий А.Е. Моделирование турбулентного отрывного трансзвукового обтекания тел вращения // *Математическое моделирование*. 2011. Т. 23. № 5. С. 71–80.

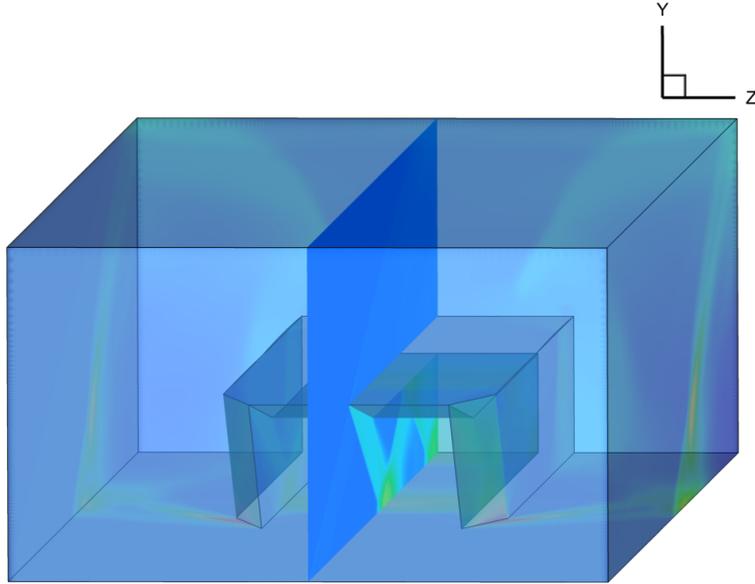


Рис. 10. Общий вид расчетной трехмерной модели

слоя на толстой пластине и ряда их модификаций:

$$p(y) = p_\infty, \quad u(y, \delta) = u_\infty \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}}, \quad \rho(y, \delta) = \frac{p(y)}{RT(y, \delta)},$$

$$T(y, \delta) = T_\infty \left[r \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left(1 - \left(\frac{u(y, \delta)}{u_\infty} \right)^2 \right) + 1 \right],$$

где δ – заданная толщина моделируемого пограничного слоя, координата y представляет собой расстояние до пластины. В такой постановке трансверсальная компонента скорости w может быть положена равной нулю, а поперечная компонента вектора скорости v находится интегрированием из уравнения неразрывности.

При использовании моделей турбулентности для правильного моделирования пограничного слоя необходимо соответствующим образом пересчитывать модельные переменные. Для этих целей сначала по полученному ранее распределению основных переменных при фиксированном δ моделировалась величина турбулентной вязкости μ_t с помощью алгебраической модели Себеси–Смита, после чего по ней пересчитывались модельные переменные. В частности, для модели Спаларта–Аллмараса:

$$\tilde{\nu}^4 - a\tilde{\nu}^3 - b = 0, \quad a = \frac{\mu_t}{\rho}, \quad b = \frac{\mu_t \mu^3 C_{v1}^3}{\rho^4}.$$

Результаты двумерных расчетов с дополнительной областью перед воздухозаборником (предназначенной для наращивания необходимой толщины пограничного слоя ко входному сечению) и со смоделированным пограничным слоем заданной толщины, на которых приведено нормированное давле-

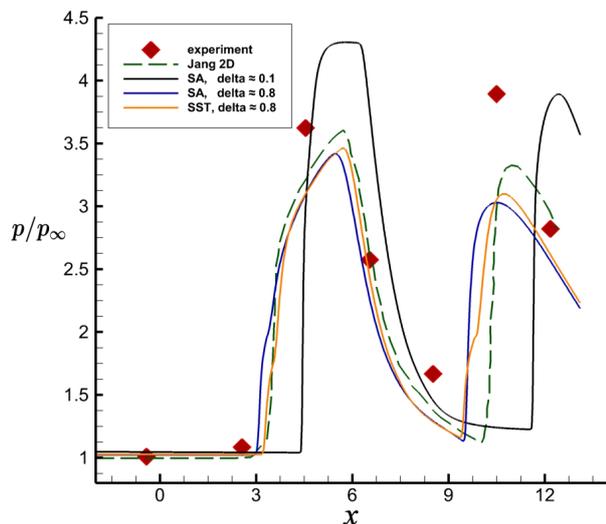


Рис. 11. Сравнение p/p_∞ в эксперименте и в двумерных расчетах с дополнительной областью

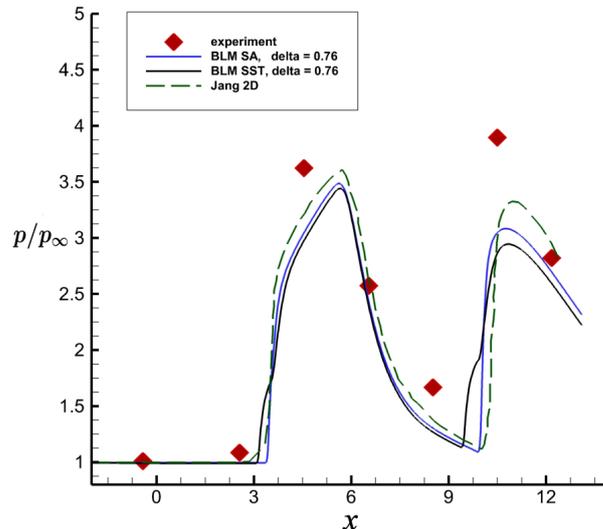


Рис. 12. Сравнение p/p_∞ в эксперименте и в двумерных расчетах со смоделированным ПС

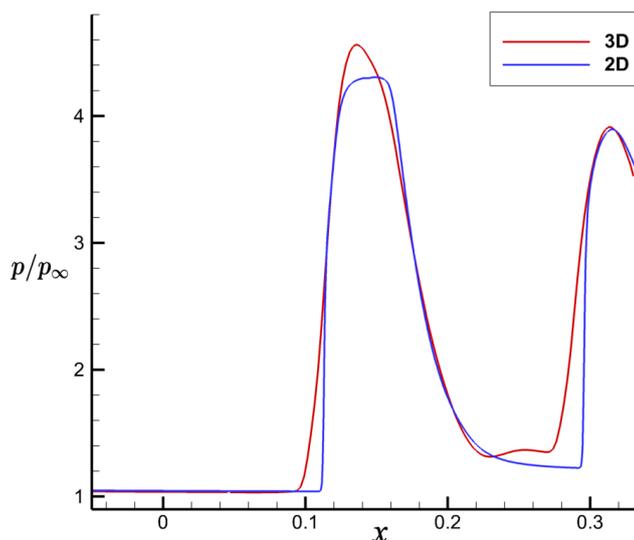


Рис. 13. Сравнение p/p_∞ в двумерном и трехмерном расчетах

ние p/p_∞ на нижней стенке воздухозаборника, представлены на рис. 11 и 12. Видно, что смоделированный с помощью формул пограничный слой адекватно отображает пограничный слой, формирующийся при реальных условиях. При этом правильный учет его характеристик существенно влияет на положение ударных волн в псевдоскачке, что критически важно при сравнении с натурным экспериментом.

На рис. 13 приведено сравнение p/p_∞ на нижней стенке воздухозаборника в центральном сечении для двумерного и трехмерного расчетов без заранее сформированного пограничного слоя. Видно, что в трехмерном расчете

за счет влияния боковых стенок давление несколько выше. В обоих расчетах положение пиков ударных волн в псевдоскачке совпадает, что позволяет сделать вывод о качественном совпадении результатов двумерных и трехмерных расчетов и в случае других значений толщины пограничного слоя во входном сечении.

Для формирования нестационарного режима течения в псевдоскачке использовалось энерговыделение в поток, моделирующее противодействие, создаваемое камерой сгорания. Энерговыделение осуществлялось вдоль поперечного сечения недалеко от выхода из воздухозаборника с объемом (площадью для двумерных расчетов) вложения порядка $V_{\text{energ}} = 1.0 h^3$ ($S_{\text{energ}} = h^2$); (с соответствующим отступом от границы). Под ω_{max} подразумевалось «максимально возможное» количество вкладываемой энергии, рассчитываемое следующим образом. Пусть I_{∞} [кг/с] – массовый расход воздуха во входном сечении в воздухозаборник, H_U [Дж/кг] – теплотворная способность топлива, тогда

$$\omega = k \omega_{\text{max}}, \quad \omega_{\text{max}} = \frac{I_{\infty} H_U}{V_{\text{energ}}},$$

где $0 \leq k \leq 1$ – некоторый коэффициент. При расчете ω_{max} предполагалось, что (теоретически сформированная) смесь имела стехиометрический состав. В качестве параметров топлива бралась теплотворная способность $H_U = 42.9$ [МДж/кг] топлива Т-6, используемого в сверхзвуковой авиации.

На рис. 14 представлено распределение числа Маха в двумерном расчете с $\delta = 0.76 h$ для пограничного слоя в набегающем потоке и мощностью источника энерговыделения, равной 50% от максимальной в последовательные моменты времени (сверху вниз). При этом на самом нижнем рисунке показано новое установившееся распределение, т.е. в данном случае запыриания потока не происходило. Напротив, на рис. 15 представлен вариант аналогичного двумерного расчета, в котором наблюдался этот эффект. Единственное отличие от предыдущего рассмотренного случая в параметрах задачи состояло в количестве вкладываемой энергии, которое бралось равным максимальному в рамках постановки. При этом стационарный режим не формировался и возмущения продолжали распространяться против течения. В трехмерных расчетах наблюдались результаты, аналогичные двумерному моделированию. На рис. 16 представлено распределение числа Маха в центральном сечении в трехмерном расчете без дополнительного моделирования пограничного слоя на входе в воздухозаборник и мощностью источника энерговыделения, равной 70% от максимальной (согласно описанной выше постановке), в последовательные моменты времени (сверху вниз). В данном случае ситуация качественно совпала с изображенной на рис. 14, запыриания потока не наблюдалось, однако стабилизация псевдоскачка произошла значительно ближе к входному сечению воздухозаборника.

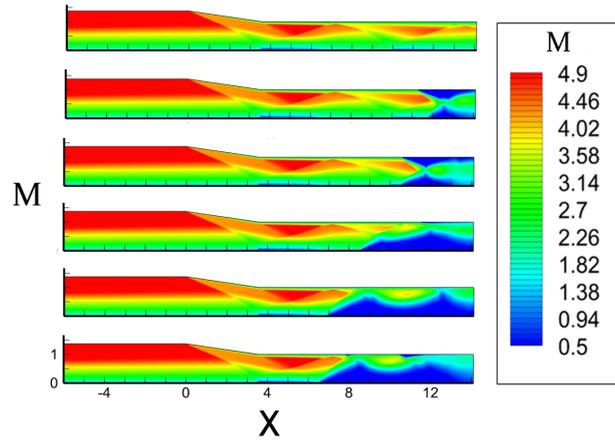


Рис. 14. Распределение числа Маха в последовательные моменты времени (сверху вниз) при $w = 0.5 w_{\max}$

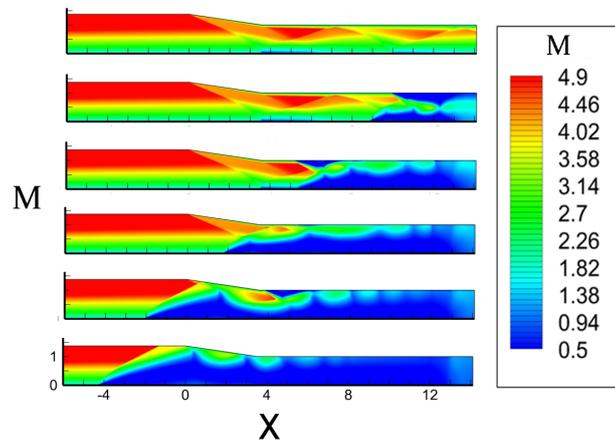


Рис. 15. Распределение числа Маха в последовательные моменты времени (сверху вниз) при $w = w_{\max}$

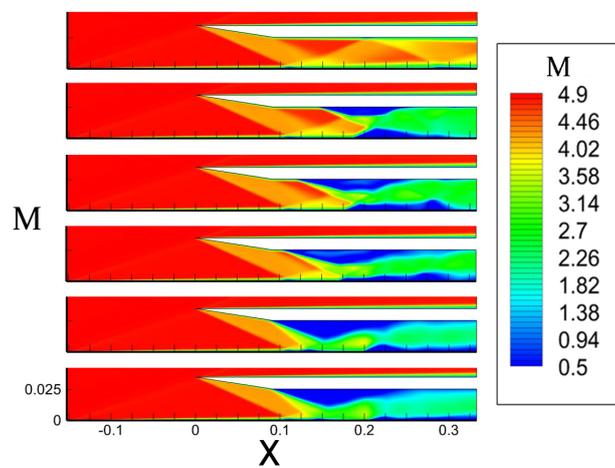


Рис. 16. Распределение числа Маха в последовательные моменты времени (сверху вниз) при $w = 0.7 w_{\max}$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

В процессе работы над диссертацией получены следующие результаты:

1. Разработаны алгоритмы неявной схемы на основе методов LU-SGS и BiCGStab для решения нестационарных осреднённых по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса URANS совместно с дивергентной формой уравнения однопараметрической модели турбулентности Спаларта–Аллмараса для сжимаемых течений с модификацией Эдвардса и возможностью энерговложения в поток.
2. Разработан и реализован параллельный программный комплекс для расчёта трёхмерных турбулентных течений вязкого сжимаемого газа, в том числе течений с энерговложением в поток. Программный комплекс предназначен для работы на высокопроизводительных вычислительных системах.
3. В целях валидации программного комплекса проведено моделирование: стационарного течения вокруг крыла ONERA M6 с симметричным профилем и нестационарного перехода между регулярным и маховским отражением $RR \Rightarrow MR$ ударных волн в области двойных решений, инициируемого вложением энергии в сверхзвуковой поток. На данных задачах продемонстрирована высокая эффективность созданных параллельных алгоритмов.
4. Разработанный программный комплекс использован для численного моделирования различных режимов работы воздухозаборника прямооточного воздушно-реактивного двигателя. При этом:
 - разработана модель для построения турбулентного пограничного слоя заданной толщины, адекватно отображающая пограничный слой, формирующийся при реальных условиях;
 - установлено существенное влияние толщины пограничного слоя на положение и характер ударно-волновой структуры в псевдоскачке;
 - проведено исследование влияния инициируемого энерговложением противодействия на выходе из воздухозаборника на течение в псевдоскачке, смоделирован режим «незапуска» воздухозаборника.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ИЗЛОЖЕНЫ В РАБОТАХ

В изданиях, рекомендованных ВАК:

1. Борисов В.Е., Давыдов А.А., Кудряшов И.Ю., Луцкий А.Е., Меньшов И.С. Параллельная реализация неявной схемы на основе метода LU-SGS для моделирования трехмерных турбулентных течений // *Математическое моделирование*. 2014. Т.26. № 10. С. 64–78.
2. Борисов В.Е. Моделирование обтекания крыла ONERA M6 с помощью параллельной реализации неявной схемы // *Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика*. 2015. № 4. С. 65–68.
3. Борисов В.Е., Кудряшов И.Ю., Луцкий А.Е. Численное исследование формирования псевдоскачка в канале // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2016. № 2. 24 с.
<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-2>
4. Борисов В.Е., Луцкий А.Е. Моделирование перехода между регулярным и маховским отражением ударных волн с помощью неявной схемы на основе методов LU-SGS и BiCGStab // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2016. № 68. 36 с.
<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-68>

Другие публикации:

5. Борисов В.Е., Луцкий А.Е. Моделирование течений в воздухозаборнике ПВРД // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2015. Т. 16, вып. 1. 12 с. <http://chemphys.edu.ru/issues/2015-16-1/articles/530/>