

*На правах рукописи*

Чмыхова Наталья Александровна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ РАВНОВЕСНЫХ  
КОНФИГУРАЦИЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ – ГАЛАТЕЯХ

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2015

Работа выполнена в *Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН*.

Научный руководитель: *доктор физико-математических наук, профессор  
Брушлинский Константин Владимирович*

Официальные оппоненты:

*доктор физико-математических наук, в.н.с. ФИАН  
Подгорный Александр Иванович*

*доктор физико-математических наук, г.н.с. ИОФ РАН  
Франк Анна Глебовна*

Ведущая организация: *Государственный научный центр Российской Федерации Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований*

Защита диссертации состоится \_\_\_\_ \_\_\_\_\_ 2015 г. в \_\_\_\_ часов на заседании Диссертационного совета Д 002.024.03 при *Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН*, расположенном по адресу: 125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *ИПМ им. М.В. Келдыша РАН*.

Автореферат разослан \_\_\_\_ \_\_\_\_\_ 2015 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь диссертационного совета

*доктор физико-математических наук*

*Н.В. Змитренко*

## **Общая характеристика работы**

Диссертация посвящена математическому моделированию магнитоплазменных конфигураций в ловушках-"галатях" с погруженными в плазму токонесущими проводниками. Строго равновесных конфигураций, изолированных от проводников, не существует в МГД-моделях с конечной проводимостью, поэтому рассмотрен нестационарный процесс формирования квазиравновесных структур, медленно разрушающихся впоследствии в результате слабой диффузии магнитного поля при высокой проводимости плазмы. Расчеты, проведенные в одномерной и двумерной численных МГД-моделях окрестности одного проводника и прямого плазменного цилиндра с двумя проводниками, демонстрируют образование равновесных и квазиравновесных конфигураций, возможных в ловушке "Галатей-Пояс" и типичных для широкого класса ловушек-"галатей".

### ***Актуальность работы***

Актуальность работ в данной области в первую очередь определяется общечеловеческой потребностью в термоядерных исследованиях. Она также тесно связана с многочисленными приложениями физики плазмы, например, к астрофизике и с техническими проблемами разработки новой плазменной техники. В этом круге вопросов существенную роль играют современные математические модели и расчеты с привлечением ЭВМ и новейших вычислительных комплексов. Успешное взаимодействие расчетов с теоретическими и экспериментальными исследованиями приводит к повышению качества получаемой информации, дополняя, а иногда и заменяя дорогостоящие эксперименты.

Рассмотренные в диссертации вопросы относятся к проблемам удержания плотной горячей плазмы с экстремальными параметрами, необходимого для реакций управляемого термоядерного синтеза (УТС). С

ним связаны разработки и многочисленные исследования различных магнитных ловушек. Известными примерами таких ловушек, являются Z-пинч и многочисленные тороидальные установки, среди которых наиболее известны токамак и стелларатор.

В работе речь идет о специальном классе ловушек – в которых проводники с током, создающие магнитное поле, погружены в плазменный объем. В результате этого принципиального отличия появляется возможность сделать геометрию магнитного поля в ловушках более разнообразной, тем самым расширяется многообразие допустимых ловушек и, как следствие, появляется надежда получить более высокие параметры удержания. На существенную роль этих ловушек и их перспективы в термоядерных исследованиях обращено особое внимание А.И. Морозовым, который назвал их "галатеями" [1]. Обзор раннего этапа экспериментальных и численных исследований в области галатей и соответствующих численных моделей содержится в [2 – 4].

Представляют интерес два основных круга вопросов: во-первых, геометрия и параметры равновесной конфигурации и, во-вторых, динамика ее формирования, исследование которой и составляет основное содержание диссертации. Ответы на вопросы имеют принципиальное значение для широкого класса ловушек-галатей, что позволяет ограничиться здесь простейшим примером «Пояса» и даже еще более упростить его, «распрямив» тор в бесконечный цилиндр с параллельными его оси токами в плазме и в двух прямых проводниках [5].

*Целью диссертационной работы* является разработка математической модели формирования плазменных конфигураций в магнитных ловушках – галатеях на примере цилиндрического плазменного шнура с двумя погруженными в него проводниками, включая составление комплекса программ и численные исследования формирования конфигурации при различных значениях физических параметров задачи.

### ***Методы исследования и степень разработанности темы.***

В основе математической модели лежат двумерные нестационарные задачи магнитной газодинамики с учетом конечной проводимости плазмы. Одномерные задачи о равновесии решаются аналитически. Численные решения МГД - задач используют известные разностные методы с расщеплением по процессам: метод FCT для гиперболической части задачи и метод переменных направлений – для параболической. Успешный опыт использования этих методов в указанном круге задач позволяет говорить о высокой степени разработанности модели в рассматриваемой тематике.

### ***В диссертационной работе решены следующие задачи:***

1. Одномерные задачи о равновесных конфигурациях плазмы и поля в цилиндрической окрестности прямолинейного проводника.
2. Одномерные нестационарные задачи о формировании равновесных и квазиравновесных конфигураций.
3. Двумерная задача о равновесии плазмы в цилиндре прямоугольного сечения с двумя погруженными проводниками.
4. Двумерные нестационарные задачи о формировании конфигурации в цилиндрах круглого и прямоугольного сечений с двумя проводниками с двумя типами граничных условий: с заданным внешним электрическим полем и с заданной касательной компонентой магнитного поля на границе, соответствующей полному электрическому току в системе.
5. Реализация известных численных методов в решении двумерных МГД – задач и внесение в них необходимых модификаций с учетом особенностей постановки задачи.
6. Создание комплекса программ для решения перечисленных задач.

***В решении перечисленных задач получены следующие основные результаты и положения, выносимые на защиту:***

1. Созданы одномерные и двумерные численные плазмостатические модели равновесных магнитоплазменных конфигураций в ловушке Галатея-Пояс и плазмодинамические модели формирования таких конфигураций в плазме конечной проводимости.

2. Созданы программы, с помощью которых модели реализованы в расчетах упомянутых выше конфигураций.

3. В одномерных задачах аналитически получены равновесные конфигурации различной геометрии, зависящей от величины тока в проводнике.

4. В расчетах двумерных краевых задач с уравнением Грэда-Шафранова получены равновесные конфигурации в распрямленном варианте ловушки «Пояс» прямоугольного сечения. Показано, что основные свойства конфигурации практически не зависят от формы границы области.

5. Показано, что строго равновесных конфигураций плазмы, изолированных от проводников, существовать не может. Изолированные конфигурации кольцевого сечения получены в нестационарной одномерной МГД- модели с конечной проводимостью в результате возрастания тока в проводнике в начальной стадии процесса и существующие в квазистационарном режиме.

6. В двумерных нестационарных МГД- моделях течения плазмы в цилиндре круглого и квадратного сечений с двумя погруженными в него проводниками получены изолированные от проводников конфигурации, существующие в квазистационарном режиме. Исследована зависимость геометрии, количественных характеристик и времени существования конфигурации от граничных условий и физических параметров задачи.

7. Показано, что в рассмотренных конфигурациях электрический ток в плазме сосредоточен в основном у границ, т.е. имеет тенденцию к скинированию, в отличие от известных исследований токового слоя.

### ***Научная новизна***

Первые работы по рассматриваемой тематике выполнены в 1997 г. в работах [7, 8]. В их развитие в диссертации проведено подробное исследование процесса формирования и его зависимости от параметров задачи. Во всех вариантах расчетов впервые получен и исследован квазиравновесный режим конфигурации, обращено внимание на распределение электрического тока. Эти результаты являются новыми.

### ***Обоснованность и достоверность результатов***

Достоверность результатов одномерных расчетов подтверждается сравнением установившихся конфигураций с аналитическим решением. Двумерные расчеты проверены на внутреннюю сходимость измельчением сетки и соблюдением разностных аналогов законов сохранения. Соответствие результатов расчетов с опубликованными результатами первых экспериментов и работ других авторов, говорит в пользу адекватности выбранной модели.

### ***Теоретическая и практическая значимость.***

Проведенные в диссертации исследования и полученные результаты вносят вклад в теорию магнитных ловушек-галатей. Они имеют также методическое значение в вопросах математического моделирования динамики плазмы в плоскости магнитного поля. Практическое значение результатов состоит в приобретении полезного опыта численного решения 2D-МГД-задач с учетом проводимости и связано с перспективой их применения в дальнейших разработках ловушек-галатей.

### *Апробация и публикации*

Основные результаты и положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах:

- XVII, XVIII, XIX и XX Всероссийские конференции «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященные памяти К.И. Бабенко, Новороссийск, п. Абрау-Дюрсо, 2008, 2010, 2012 и 2014 гг.
- Международная научная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященная памяти академика А.А. Самарского к 90-летию со дня рождения, Москва, МГУ 16-18 июня 2009.
- Международная конференция по прикладной математике и информатике, посвященная 100-летию со дня рождения академика А.А. Дородницына. ВЦ РАН, Москва, 7-11 декабря 2010.
- X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Нижний Новгород, 24-30 августа 2011.
- XI Международная конференция "Забабахинские научные чтения". Снежинск, 16 – 20 апреля 2012.
- Ежегодные Научные Сессии МИФИ 2007, 2008, 2009 годов и НИЯУ МИФИ 2011, 2013, 2015 годов, Москва.
- Семинар им. К.И. Бабенко Института прикладной математики им. М.В. Келдыша, РАН.

Материалы диссертации опубликованы в 16 печатных работах, 3 из которых [12 – 14] в журналах рекомендованных ВАК, остальные [15 – 27] – в сборниках тезисов научных конференций.

## ***Структура и объем работы***

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. В главах выделены разделы. Общий объем диссертации 127 страниц, включая 31 рисунок. Список цитируемой литературы включает 121 наименование.

## **Краткое содержание работы**

*Во введении* обосновывается актуальность темы исследования, приводится общая характеристика диссертационной работы: формулируются цель и задачи исследования, раскрывается его научная новизна, излагаются полученные результаты и основные положения, выносимые на защиту, показывается теоретическая и практическая значимость результатов, дается краткое содержание работы по главам, а также краткий обзор литературы по тематике работы.

*В первой главе* описывается идея и принцип ловушки-галатеи. Формулируется физическая постановка МГД-задачи об образовании равновесных (и квазиравновесных) плазменных конфигураций в магнитной ловушке "Пояс", предложенной А.И. Морозовым и А.Г. Франк [5]. Рассматривается вариант распрямленного в бесконечный цилиндр тора с двумя параллельными друг другу прямыми проводниками с электрическими токами, равными по величине и направлению, погруженными в плазменный объем (рис. 1). Формирование равновесной конфигурации в ловушке происходит за счет взаимодействия тока возбужденного в плазме с азимутальным магнитным полем, созданным проводниками. Плазма рассматривается как сплошная среда, модели исследуемых процессов строятся в терминах магнитной газодинамики.

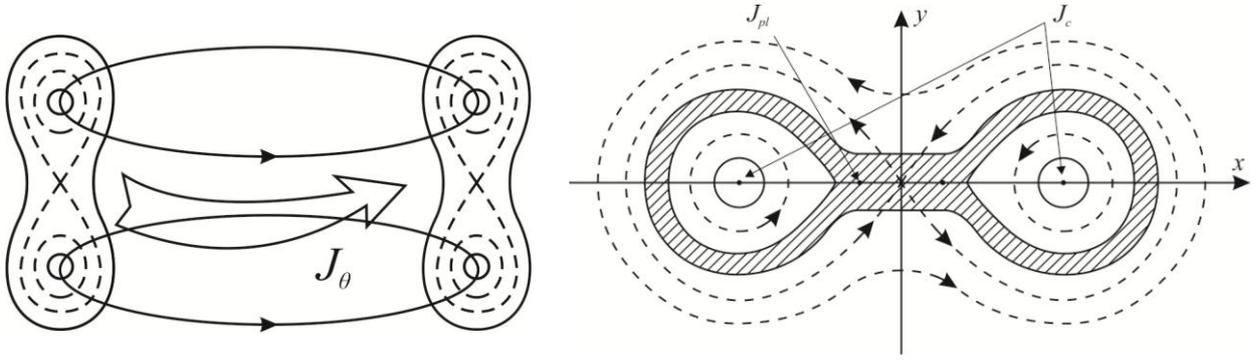


Рис. 1. Схема тороидальной ловушки-галатеи «Пояс» и предполагаемой конфигурации в сечении плоскостью  $z = \text{const}$  ее цилиндрического аналога

Течение плотной горячей плазмы с учетом конечной проводимости описывается системой МГД-уравнений (1).

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{V} &= 0; \\
 \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \nabla p &= \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}; \\
 \rho \frac{d\varepsilon}{dt} + p \text{div} \mathbf{V} &= \frac{j^2}{\sigma} - Q; \\
 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}) - \text{rot} \frac{c\mathbf{j}}{\sigma}; \\
 p &= (\gamma - 1) \rho \varepsilon; \quad \varepsilon = C_V T; \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \mathbf{H}; \\
 \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla.
 \end{aligned} \tag{1}$$

В целях получить установившееся со временем решение задачи, в уравнение энергии введено слагаемое  $Q$ , призванное нейтрализовать джоулев нагрев в ожидаемом равновесии. Его можно интерпретировать, например, как потери тепла при излучении.

Определяются область решения, граничные и начальные условия. Задача ставится в сечении прямого цилиндра плоскостью  $z = \text{const}$ . Она решается в двух различных вариантах геометрии области: в круге и прямоугольнике в цилиндрических и декартовых координатах соответственно. Пренебрегается деталями процесса вблизи торцов цилиндра

и допускается плоская симметрия. Граница области предполагается непроницаемой для плазмы и магнитного поля. Кроме того, на внешней границе задаются условия, отражающие количественную электромагнитную природу задачи. Эти условия реализованы в двух вариантах: заданием электрического поля на границе рассматриваемой области или заданием тангенциальной компоненты магнитного поля, что соответствует полному току, протекающему в цилиндре в осевом направлении. Проводники моделируются заданными в них внешними токами, параллельными оси и непрерывно распределенными в их окрестности, а их территория предполагается прозрачной для плазмы. В уравнениях (1) они имеют вид:

$$\mathbf{j}_{ex} = (0, 0, j_{ex});$$

$$j_{ex}(x, y) = j_0 \sum_{k=0}^1 e^{-\frac{(x-x_k)^2 + (y)^2}{r_c^2}}, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = -1. \quad (2)$$

Наряду с этим описана плазмостатическая модель равновесных конфигураций в предположении плоской симметрии в декартовых координатах. Математический аппарат использует краевые задачи с двумерным эллиптическим уравнением типа Грэда-Шафранова [9]:

$$\Delta \psi + g(\psi) = 0, \quad (3)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа,

$$\Delta \psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2},$$

$$g(\psi) = 4\pi \frac{dp}{d\psi} + \left(\frac{4\pi}{c}\right)^2 I \frac{dI}{d\psi} + \frac{4\pi}{c} j_{ex}.$$

Рассматриваются возможности изоляции проводников от горячей плазмы. В плазмостатической модели это требование выполняется за счет специального выбора функции  $p(\psi) = p_0 e^{-(\psi/q)^2}$ , отвечающей за распределение плазмы между силовыми линиями магнитного поля. Она выбрана немонотонной с максимумом на сепаратрисе, проходящей через

центр, что позволяет достичь желаемого результата. Поскольку плазмостатика в задачах с уравнением Грэда-Шафранова обходится замкнутой системой уравнений – без учета конечной проводимости, задача является недоопределенной [12], допуская произвольный выбор функции  $p(\psi)$ . Уравнение магнитной индукции в строгом равновесии требует постоянства направления тока в плазме во всем объеме ловушки. *В конфигурации с плазмой конечной проводимости, находящейся на конечном расстоянии от проводников, строгого равновесия быть не может.* Чтобы искомая конфигурация тяготела к центральной области ловушки, но при этом была изолирована от проводников, необходима сила Ампера обратного направления, т.е. отрицательный ток в плазме в их окрестности. Такой ток может быть создан только в нестационарной модели согласно идее, изложенной в статье Г.И. Дудниковой, А.И. Морозова и М.П. Федорука [8]. Реализована она следующим образом: на начальной стадии процесса формирования конфигурации ток в проводниках возрастает со временем от нуля до необходимого постоянного значения  $J_c$ , а затем остается постоянным.

Первые расчеты формирования конфигураций, изолированных от проводника, проведены в окрестности одного проводника в одномерной модели. В связи с этим описана одномерная плазмодинамическая модель окрестности одного прямолинейного проводника конечного диаметра. Модель использует вышеописанные предположения. Одномерные равновесные конфигурации описываются аналитическими решениями и, как сказано выше, не могут быть отделены от проводника.

*Во второй главе* описан численный метод решения задачи.

Решение поставленных задач ведется в безразмерных переменных. Выбираются единицы измерения, выделяются параметры задачи и указывается их физический смысл. Приводится система МГД-уравнений в

консервативной форме для всех вариантов постановок задачи и необходимые граничные и начальные условия.

Численное решение задачи использует разностные методы, основанные на «расщеплении по процессам». Сначала выделяется ее гиперболический элемент без диффузии магнитного поля, т.е. без правых частей в уравнениях магнитной индукции. Здесь реализован метод коррекции потоков (FCT) с двумерной версией коррекции по Залесаку [10], которая позволяет избежать дополнительного расщепления по направлениям. Используются "фениксные" антидиффузионные потоки. Схему с указанным свойством также называют «полностью многомерной». Поскольку такой способ коррекции использует одновременно четыре антидиффузионных потока, появляется возможность эффективного распараллеливания алгоритма для использования на современных многопроцессорных вычислительных комплексах. Затем к оставшейся параболической части задачи, т.е. упомянутым выше уравнениям диффузии магнитного поля, применяется метод переменных направлений с продольно-поперечной прогонкой.

В заключение главы уделено внимание особенностям задач и метода численного решения. Одной из особенностей рассматриваемого класса задач отметим переплетение элементов эйлеровой и лагранжевой постановок. В обсуждаемой модели используем "компромиссный" вариант: задача ставится и решается в эйлеровых координатах, но с условием, что, если в расчетной точке плотность плазмы, определяемая уравнениями, окажется ниже некоторого фиксированного малого допустимого значения  $\delta$ , то она полагается равным этому значению.

Уравнения МГД подразумевают соленоидальность магнитного поля, т.е. отсутствие «магнитных зарядов»  $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$ . В расчетах прослежено за соблюдением разностного аналога этого уравнения с нужной точностью. Другая особенность менее очевидна и связана со вторым (параболическим) этапом решения. На этом этапе каждое из уравнений магнитной индукции

содержит вторые производные только по одной координате. Оставшиеся смешанные производные аппроксимируются разностями на предыдущем слое. Устойчивость такой схемы требует жесткого ограничения на шаг по времени:  $\Delta t \sim (\Delta r)^2$ . Это ограничение можно обойти, переписав смешанные производные в уравнениях с учетом  $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$  так, что каждое уравнение содержит вторые производные искомой функции по обоим переменным и допускает решение методом продольно-поперечной прогонки без дополнительного ограничения шага по времени.

Следующая особенность численного решения задачи относится к его гиперболическому этапу. Как хорошо известно, существует ограничение на шаг по времени – условие Куранта для явных разностных схем. В методе ФСТ оно проявляется дважды: один раз в выборе коэффициента искусственной диффузии в каждом уравнении, второй раз – в собственно «курантовском» виде, требуя, чтобы характеристики гиперболической системы уравнений не выходили за пределы шаблона явной схемы. В задачах с цилиндрической геометрией в полярных координатах  $(r, \varphi)$  центр круга  $r=0$  является особой точкой, и при приближении к нему фактическая величина шага по азимуту стремится к нулю. Точнее здесь  $r \sim \Delta r$  и шаг  $h \sim \Delta r \cdot \Delta \varphi$ , а вместе с ним и  $\Delta t$  становятся второго порядка малости. В условии Куранта этот коэффициент определяется скоростью звука (в данном случае «магнитного»), которая остается конечной и при  $r=0$ . В этом особенность численного решения задач в полярных координатах в области, содержащей центр. Эта особенность отсутствует, если геометрия задачи допускает декартовы координаты, которыми естественно пользоваться в прямоугольных областях.

Последнее замечание о деталях численных методов касается коэффициента магнитной вязкости  $\nu$ , который может быть, вообще говоря, переменным и даже иногда разрывным, например, на границе плазма – вакуум. В разностных аналогах уравнений магнитной индукции участвуют

значения  $\nu$  в полуцелых по одному из направлений точках. Их следует интерполировать по двум ближайшим целым точкам средним гармоническим, для обеспечения адекватной аппроксимации вторых производных  $H_r$  и  $H_\varphi$  в случае разрывного коэффициента диффузии [11]. Для более адекватного моделирования магнитного поля в образовавшейся зоне «вакуума» ( $\rho = \delta$ ) значение  $\nu$  увеличено по сравнению с плазмой, а на территории проводников – уменьшено.

Аналитические вычисления производятся с помощью системы символьной математики Maple.

Для численного моделирования создан комплекс программ на языке C++ с использованием как стандартных библиотек для реализации математических алгоритмов, так и framework Qt для реализации: io-модуля, отображаемых данных по идеологии Model-View-Controller, возможности современных многоядерных процессоров – такой, как многопоточность и управления приложением.

*В третьей главе* приводятся и анализируются результаты решения одномерных задач о конфигурациях плазмы в цилиндре с погруженным в него токонесущим проводником [12, 13, 15 – 24]. Рассмотрено два варианта теплового режима: в адиабатическом процессе и с джоулевым нагревом, который может компенсироваться искусственным «излучением». В предположении постоянной проводимости плазмы равновесное решение находится в явном виде. Показано, что равновесные конфигурации вплотную соприкасаются с проводниками. Они могут быть двух типов: при относительно слабом токе плазма занимает всю область цилиндра, а при сильном – плазма занимает лишь часть объема цилиндра, окруженную вакуумом на периферии.

Формирование таких конфигураций получено в расчетах методом установления. Полученное аналитическое решение играет роль теста в

численном решении задачи после установления равновесного состояния. Установившиеся равновесные конфигурации, соответствующие всем возможным типам, представлены в работе в виде графиков основных физических величин.

Показано, что строго равновесных конфигураций кольцевой формы, т.е. отделенных от проводника, в плазме конечной проводимости быть не может, но они получены в нестационарной модели при кратковременном возрастании тока в проводнике и существуют в квазиравновесном режиме (рис. 2).

Продемонстрировано физическое отличие полученных конфигураций при разных тепловых режимах. Детально изучено влияние различных параметров (проводимости, отношения характерных газового давления к магнитному, мощности «излучения») и указан диапазон их значений, соответствующий наиболее длительной квазиравновесной стадии удержания конфигураций. В частности, чем сильнее мощность излучения, тем меньше температура и давление. В расчетах с нагревом плазма сильнее сжимается к середине всей области. Почти вакуумные участки, приосевая область и область на периферии цилиндра, греются сильнее, вследствие чего давление сильнее размазывается (растекается) нежели плотность. Оно больше чем в адиабатическом варианте, где за счет отсутствия нагрева распределения давления и плотности согласованы друг с другом. Это демонстрируют графики зависимости температуры, давления и плотности от расстояния. В обоих вариантах продемонстрировано образование токов разных знаков у внутренней и внешней границы области которые, взаимодействуя с магнитным полем, способствуют удержанию кольцевых конфигураций.

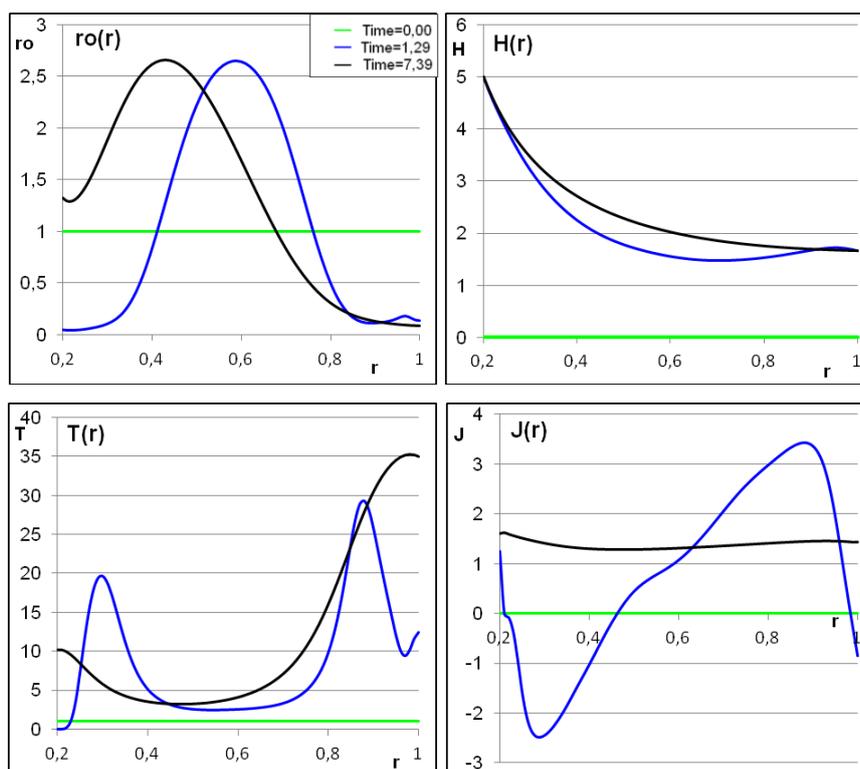


Рис. 2. Эволюция квазиравновесной конфигурации. Графики плотности, температуры, напряженности магнитного поля и плотности электрического тока в различные моменты времени

**Четвертая глава** посвящена результатам двумерных расчетов.

В начале главы представлены расчеты равновесных конфигураций в плазмостатической модели с уравнением Грэда-Шарфанова. Результаты, полученные в квадратной области, сопоставлены с результатами работы [6] в круглой области. Показано, что размеры и форма области на периферии существенно не влияют на свойства конфигурации, расположенной в центральной части [12, 13, 21, 22, 24].

Далее приведены результаты расчетов нестационарной задачи о динамике плазмы конечной проводимости с образованием квазиравновесной конфигурации [13, 14, 20 – 27]. Исследованные серии расчетов отличаются друг от друга значениями параметров, выбранным сечением области и заданием граничного условия. Базовому варианту, с которым удобно сравнивать все последующие, соответствуют расчеты для цилиндра круглого

сечения с заданием электрического поля на границе. Выбраны следующие значения:

$$R = 2; \quad r_c = 0,12; \quad \beta = 0,5; \quad E_r = 0,2; \quad v_{pl} = 0,05; \quad Q \equiv 0; \quad t_1 = 0,1$$

Пример характерной стадии формирования нестационарного решения, при которой параметры конфигурации еще не достигли своих квазиравновесных значений, продемонстрирован на рисунке 3, который представляет первый квадрант сечения круглого цилиндра в силу симметрии задачи относительно осей  $x$  и  $y$ .

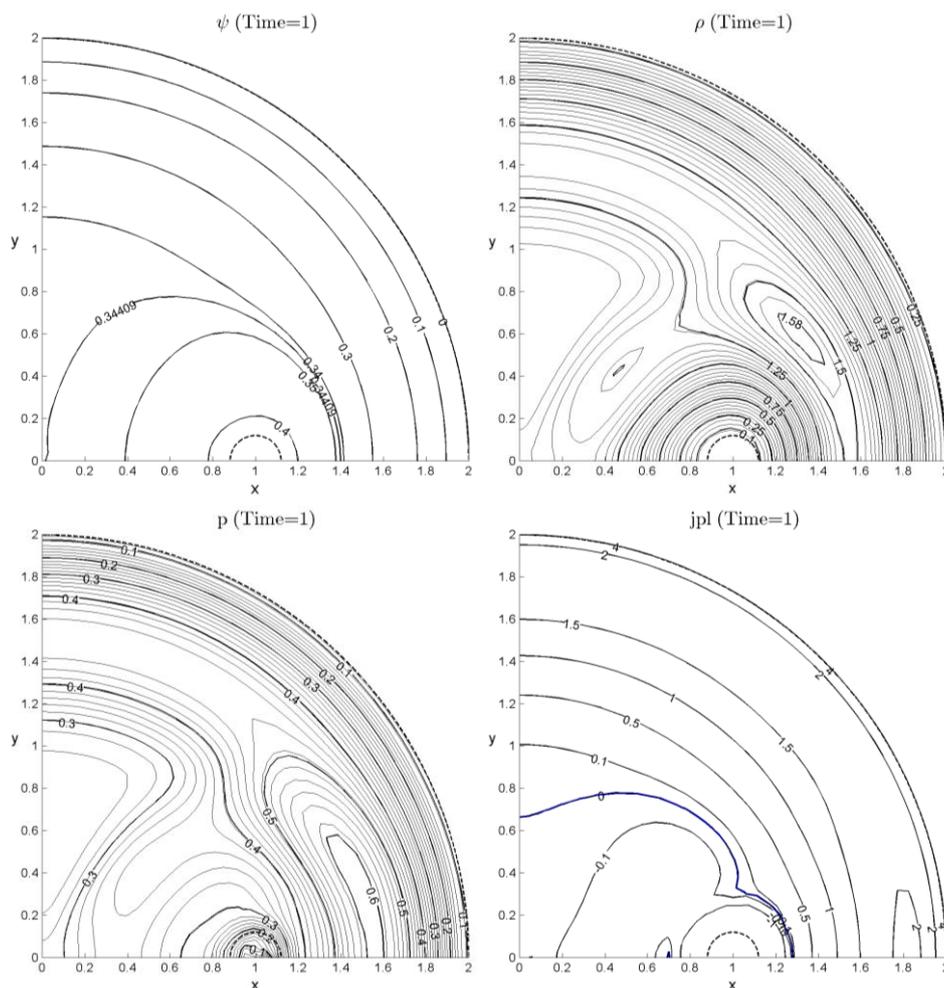


Рис. 3. Силовые линии магнитного поля, линии уровня плотности, давления и плотности электрического тока в сечении цилиндра плоскостью  $z = \text{const}$  при  $t = 1$

Результаты расчетов позволяют следующим образом представить развитие процесса формирования магнитоплазменной конфигурации.

Включение электрического тока на границе и в проводнике индуцирует азимутальное поле на периферии области и вокруг проводников. Неоднородность поля создает ток в плазме, положительный – вдали от центра и отрицательный – в центральной части области, охватывающей проводники. Взаимодействие поля с током приводит плазму в движение от границы к центру и от проводников в противоположном направлении, образуя сначала кольцеобразное уплотнение с отростками в сторону центра.

Интенсивность магнитного поля характеризуется магнитным потоком между сепаратрисой и внешней границей. Его значение при  $t=1$  равно 0,34. Максимальная плотность  $\rho_{\max}=1,6$ , распределение давления близко к распределению плотности. Температура в большей части области  $T \sim 1,0 \div 1,6$ . Плотность тока максимальна у границы, минимальна (максимальная плотность отрицательного тока) у проводника и обращается в нуль на линии, охватывающей центр круга и проводники. Далее со временем топология магнитного поля мало меняется, а магнитный поток возрастает в 10 раз при  $t \geq 10$ . Плотность сосредоточивается на оси  $\varphi = \pm \pi/2$  с максимумами при  $r \sim 0,35$  к моменту  $t \approx 3$  и сохраняет эту форму до  $t \approx 10 \div 15$ . Максимальное значение  $\rho_{\max} \sim 4,4$  достигается при  $t \approx 9,5$ . Смещение максимума из центра, по-видимому, обязано равнодействующей сил Ампера со стороны проводников, которая в центре оказывается сильнее сжатия извне. Проводники соседствуют с плазмой малой плотности  $\rho \sim 0,1$  при  $t=1$ , а затем ее значение на условной границе проводников медленно возрастает в результате диффузии до  $\rho \sim 1$  при  $t \approx 10$ . Распределение давления плазмы постепенно изменяется отличным от плотности образом и становится качественно похожим на полученное в плазمو-статической модели [6]: топология изобар напоминает магнитные силовые линии. В центре имеет место «плато» с  $p \sim 6$  при  $t=10$ , но с весьма пологими «склонами». Исключение составляют локальные максимумы вблизи проводников,

обязанные максимуму электрического тока и температуры. На рис. 4 представлено пространственное распределение упомянутых величин при  $t=10$ . Оно характеризует квазиравновесную конфигурацию. Значения температуры, давления и тока в плазме медленно возрастают. Проводник остается изолированным от плазмы в течение времени  $t \leq 10$ : на границах проводников  $\rho \leq 1$ , т.е. в четыре раза меньше  $\rho_{\max}$ . Проводники окружены при этом кольцевыми областями отрицательного тока шириной не меньше  $r_c$ .

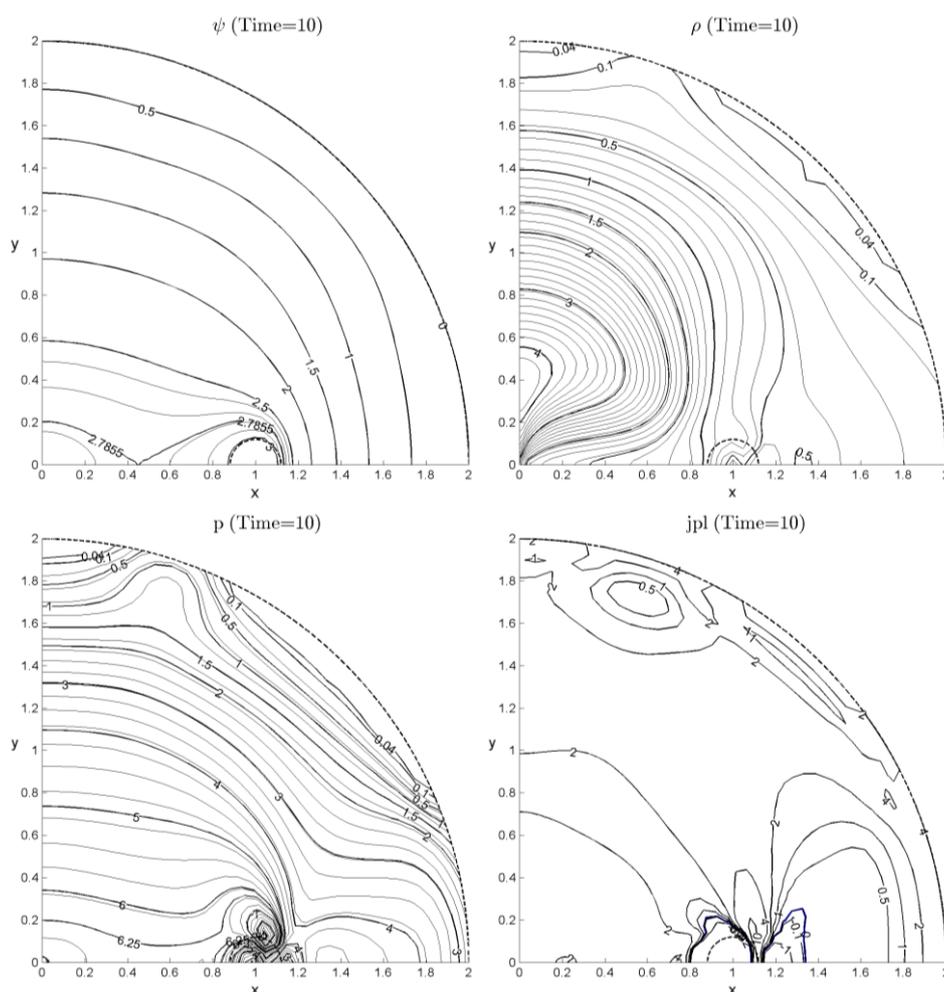


Рис. 4. Силовые линии магнитного поля, линии уровня плотности, давления и плотности электрического тока в базовом варианте при  $t=10$

Найдена зависимость от времени интегральных токов в плазме (положительного и отрицательного). Показано что, изложенные результаты практически не зависят от скорости включения тока в проводниках.

Упомянутые выше отличия распределений плотности и давления друг от друга и неполного соответствия результатов плазмостатической модели равновесных конфигураций связаны с учетом конечной проводимости и повышением температуры вследствие джоулева нагрева. Ослабить влияние последнего удалось введя отвод тепла «излучением». На квазиравновесной стадии температура снизилась в 6 – 8 раз, давление – в 3 раза, ток менее интенсивен и более «размазан» по области. Абсолютная величина его интегральных значений снизилась примерно в 1,5 раза по сравнению с базовыми. Распределения плотности и давления стали топологически ближе друг к другу: максимум плотности сместился к центру круга. Однако «возвращение» плазмы в окрестность проводников происходит быстрее.

Рассмотрено влияние проводимости на формирование квазиравновесной конфигурации. Вдвое меньшая проводимость при неизменности всех остальных размерных констант задачи соответствует вдвое бóльшему коэффициенту «магнитной вязкости» и, следовательно, вдвое меньшему значению безразмерной плотности тока на границе. Расчет этого варианта показал, что процесс формирования конфигурации отличается более интенсивной диффузией, и следовательно, более плавным характером по сравнению с базовым вариантом. Конфигурация плотности глубже проникает в сторону центра вдоль сепаратрисы поля, затем со временем максимум плотности также смещается на ось  $\varphi = \pm \pi/2$ , но его значение уменьшилось на 20 процентов. Окрестность проводников более разрежена. Электрический ток более плавно «размазан», его плотность ниже, чем в базовом варианте, в результате чего температура и давление мало отличаются от базовых. В противоположном случае вдвое более высокой проводимости в расчетах появились противоположные тенденции.

Увеличение электрического поля на границе увеличивает ток в плазме, которое интенсивнее сосредоточивает конфигурацию в центральной части области. Однако со временем ток в проводниках и в плазме вокруг них компенсирует влияние периферии. Конфигурации поля и давления сохранили свою топологию, но максимальные значения магнитного потока и давления при  $t = 10$  в центре выше, чем базовые. В противоположном случае более слабого внешнего электрического поля влияние силы Ампера на периферии слабее, чем в окрестности проводников, конфигурация плотности более тяготеет к осям  $\varphi = \pm \pi/2$  и время изоляции проводников возрастает.

При увеличении тока в проводниках вдвое процесс формирования идет быстрее. Его особенность в том, что распределение плотности и давления отличаются друг от друга сильнее, чем в базовом варианте.

В интересах более полного исследования математической модели рассчитан вариант задачи, в котором на границе вместо электрического поля задано тангенциальное магнитное поле, циркуляция которого соответствует полному току осевого направления в плазме. Сравнение с базовым вариантом говорит о следующем. Максимум плотности расположен на сепаратрисе вблизи центра, а не на оси  $\varphi = \pi/2$ , а его значение ниже. Отжатие плазмы от проводников более эффективно. Распределение давления и плотности здесь также не согласованы друг с другом. Ввод в модель «излучения», как и выше, понижает температуру на квазиравновесной стадии процесса. Как следствие, давление оказалось более согласованным с плотностью. Их максимальные значения в центральной части конфигурации близки к «адиабатическому» режиму.

В последней части четвертой главы приводятся результаты расчетов той же задачи в цилиндре квадратного сечения. Здесь также получена квазиравновесная конфигурация, формирование которой подвержено изложенным выше закономерностям.

## **Заключение**

В заключение диссертации кратко представлены основные итоги данного исследования, даны рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы.

1. Созданы математические модели формирования магнитоплазменных конфигураций в ловушке «Галатейя-пояс» и ее элементах. Они реализованы в виде комплекса программ и проведенных одномерных и двумерных расчетах магнитоплазменных процессов с использованием высокопроизводительных вычислительных систем.

2. Расчеты, выполненные в простейшей одномерной постановке МГД – задачи с модельными значениями основных параметров, подтвердили предложенную концепцию формирования плазменных конфигураций, изолированных от проводников в рабочем объеме ловушек. Этот вывод справедлив для широкого класса магнитных ловушек - галатей.

3. В расчетах двумерных задач о формировании конфигурации в ловушке «Пояс» получены квазиравновесные режимы конфигураций. Определены закономерности формирования и квазиудержания конфигураций от физических параметров системы и свойств плазмы.

4. Результаты работы могут представлять интерес для дальнейшей разработки ловушек-галатей.

Основные результаты работы являются новыми.

## **Цитированная литература**

1. Морозов А.И. О Галатейях – плазменных ловушках с омываемыми плазмой проводниками. // Физика плазмы. 1992. Т.18, вып.3. С. 305–316

2. Морозов А.И., Савельев В.В. О галатейях-ловушках с погруженными в плазму проводниками. // Усп. физ. наук. 1998. Т.168, №11, С. 1153–1194

3. Брушлинский К.В., Савельев В.В. Магнитные ловушки для удержания плазмы. // Мат. Моделирование. 1999. Т.11, №5. С. 3–36
4. Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. // М.: Бином. Лаборатория знаний. 2009 – 200с.
5. Морозов А.И., Франк А.Г. Тороидальная магнитная ловушка-галатhea с азимутальным током // Физ. плазмы. 1994. Т.20. №11. С.982-989
6. Брушлинский К.В., Игнатов П.А. Плазмостатическая модель магнитной ловушки “Галатhea-пояс” // ЖВМ и МФ .2010. Т. 50. № 12. С.2184–2194
7. Брушлинский К.В., Горшенин К.П. Плоская МГД-модель образования плазменной конфигурации с погруженными в нее проводниками // Матем. моделирование. 1997. Т. 9, №5. С. 28-36.
8. Дудникова Г.И., Морозов А.И., Федорук М.П. Численное моделирование прямых плазменных конфигураций-галатей типа «Пояс» // Физ. плазмы. 1997. Т. 23. №5. С. 387-396.
9. Шафранов В.Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. Вып. 3(9). С. 710–722.
10. Oran E.S., Boris J.P. Numerical simulation of reactive flow. ELSEVIER. N.Y., Amsterdam, London. 1987 (перевод: Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков: Пер. с англ. М.: Мир, 1990, 660с.)
11. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.

## **Публикации автора по теме диссертации**

### **Статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК**

12. Брушлинский К.В., Чмыхова Н.А. О равновесии плазмы в магнитном поле ловушек – галатей // Математическое моделирование, 2010 год, том 22, номер 6, стр. 3-14.

13. Брушлинский К.В., Чмыхова Н.А. Математические модели магнитного удержания плазмы в ловушках - галатях // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4, часть 3, С. 661-663.

14. Брушлинский К.В., Чмыхова Н.А. Численная модель формирования квазиравновесия плазмы в магнитном поле ловушек – Галатей. // Вестник Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ", 2014, Т. 3, № 1, С. 40-52.

### **Опубликованные тезисы докладов на конференциях**

15. Брушлинский К.В., Зализняк О.И., Чмыхова Н.А. Динамика и равновесие плазмы в окрестности проводника с током // Научная сессия МИФИ-2007: Сб. науч. тр. в 17 т. – М.: МИФИ, 2007. – Т. 7. С. 94-95.

16. Брушлинский К.В., Чмыхова Н.А. Численная модель формирования квазиравновесной плазменной конфигурации вокруг проводника с током // Научная сессия МИФИ-2008: Сб. науч. тр. в 15 т. – М.: МИФИ, 2008. – Т. 9. С. 64-65.

17. Чмыхова Н.А. Равновесная плазменная конфигурация в окрестности проводника с током // XVII Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов и решение задач математической физики с приложением к многопроцессорным системам», посвященная памяти К.И.Бабенко: Дюрсо, 16-20 сентября 2008, Тез. докл. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2008. – С. 81-83.

18. Чмыхова Н.А. Равновесие плазменной конфигурации в окрестности токнесущего проводника // Научная сессия МИФИ-2009: Аннотации докладов в 2 т. – М.: МИФИ, 2009. – Т. 2. С. 129.

19. Брушлинский К.В., Чмыхова Н.А. Математические модели равновесия плазмы в магнитных ловушках // Международная научная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященная памяти академика А.А. Самарского к 90-летию со дня рождения, Москва, МГУ 16-18 июня 2009. Тез. докл. С. 306-307. МАКС Пресс. 2009.

20. Чмыхова Н.А. Двумерная МГД – модель формирования плазменной конфигурации в магнитной ловушке типа «Пояс» // XVIII Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященная памяти К.И.Бабенко: Дюрсо, 13-17 сентября 2010, Тез. докл. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2010. – С. 76-77.

21. Брушлинский К.В., Игнатов П.А., Чмыхова Н.А. Математические модели равновесия плазмы в магнитном поле ловушек – галатей // Международная конференция по прикладной математике и информатике, посвященная 100-летию со дня рождения академика А.А. Дородницына. ВЦ РАН, Москва, 7-11 декабря 2010, Тез. докл. – ВЦ РАН. Москва, 2010. – С 30-31.

22. Чмыхова Н.А. Численное исследование формирования двумерной магнитоплазменной конфигурации в ловушке типа "Пояс" // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2011: Аннотации докладов в 3 т. – М.: НИЯУ МИФИ, 2011. – Т. 2. С. 196.

23. Чмыхова Н.А. Численная модель формирования квазиравновесия плазмы и магнитного поля в ловушке - Галатее - «Пояс». // XI Международная конференция " Забабахинские научные чтения." Сб. материалов. 16-20 апр.2012 - Снежинск: Изд. РФЯЦ ВНИИТФ, 2012. С.152

24. Чмыхова Н.А. Численная модель динамики плазмы в магнитной ловушке «Галатее – Пояс» // XIX Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященная памяти К.И.Бабенко: Дюрсо, 10-16 сентября 2012, Тез. докл. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2012. – С. 99-101.

25. Чмыхова Н.А. Двумерная МГД-модель формирования квазиравновесных плазменных конфигураций в магнитных ловушках-галатеех // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2013: Аннотации докладов в 3 т. – М.: НИЯУ МИФИ, 2013. – Т. 3. С. 141.

26. Брушлинский К.В., Гольдич А.С., Чмыхова Н.А. Математические модели равновесия и квазиравновесия плазмы в магнитных ловушках // XX Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященная памяти К.И.Бабенко: Дюрсо, 15-21 сентября 2014, Тез. докл. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2014. – С. 33-34.

27. Чмыхова Н.А. Плазмодинамическая модель формирования квазиравновесной конфигурации в магнитном поле // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2015: Аннотации докладов в 3 т. – М.: НИЯУ МИФИ, 2015. – Т. 2. С. 252.