

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Российская академия наук

На правах рукописи

Чмыхова Наталья Александровна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ РАВНОВЕСНЫХ
КОНФИГУРАЦИЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ – ГАЛАТЕЯХ

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –
доктор физико-математических наук
профессор Брушлинский Константин Владимирович

Москва – 2015

Содержание

Введение	4
Глава 1. Постановка задачи	21
1.1. Физическая постановка	21
1.2. Математическая постановка задачи	22
1.2.1. Нестационарная 2D МГД модель формирования квазиравновесной конфигурации пояса	22
1.2.2. Плазмостатическая модель. Уравнение Грэда-Шафранова	27
1.2.3. Моделирование изоляции проводника от горячей плазмы	30
1.2.4. Одномерная плазмодинамическая модель окрестности проводника	33
Глава 2. Численный метод решения задачи	37
2.1. Единицы измерения	37
2.2. Постановка МГД-задачи в безразмерном виде. Консервативная форма уравнений	38
2.3. Численный метод решения нестационарной МГД - задачи	43
2.3.1. Разностная схема	43
2.3.2. Метод расчета	46
2.4. Особенности численного решения задач	54
2.5. 2D равновесие. Решение уравнения Грэда-Шафранова. Итерационный метод	58
Глава 3. Модель окрестности проводника	63
3.1. 1D Равновесие, точное решение. Зависимости от β (β_{cr})	63
3.2. Нестационарная задача. Расчет установления равновесной конфигурации	66
3.2.1. Равновесные плазменные конфигурации занимающие весь объем цилиндра	67
3.2.2. Плазменные конфигурации в центральной части цилиндра с образованием вакуумной области на периферии	71

3.2.3. Квазиравновесие кольцевое. Плазменные конфигурации отделенные от проводника.....	73
3.3. Выводы по третьей главе.....	86
Глава 4. Расчет конфигураций в «Поясе»	87
4.1. Равновесные конфигурации в квадратной области.	87
4.2. Нестационарная задача в круглой области. Квазиравновесие	90
4.2.1. Задание электрического поля на границе.....	90
4.2.2. Задание магнитного поля на границе.....	107
4.3. Нестационарная задача в квадратной области. Квазиравновесие.....	110
4.4. Сравнение «Пояса» с токовым слоем.	112
4.5. Выводы по четвертой главе	114
Заключение.....	115
Список литературы.	116

Введение

Диссертация посвящена математическому моделированию магнитоплазменных конфигураций в ловушках-«галатях» с погруженными в плазму токонесущими проводниками. Строго равновесных конфигураций, изолированных от проводников, не существует в МГД-моделях с конечной проводимостью, поэтому рассмотрен нестационарный процесс формирования квазиравновесных структур, медленно разрушающихся впоследствии в результате слабой диффузии магнитного поля при высокой проводимости плазмы. Расчеты, проведенные в одномерной и двумерной численных МГД-моделях окрестности одного проводника и прямого плазменного цилиндра с двумя проводниками, демонстрируют образование равновесных и квазиравновесных конфигураций, возможных в ловушке «Галатей-Пояс» и типичных для широкого класса ловушек-«галатей».

Актуальность работы

Актуальность работ в данной области в первую очередь определяется общечеловеческой потребностью в термоядерных исследованиях. Она также тесно связана с многочисленными приложениями физики плазмы, например, к астрофизике и техническим проблемам разработки новой плазменной техники. В этом круге вопросов существенную роль играют современные математические модели и расчеты с привлечением ЭВМ и новейших вычислительных комплексов. Успешное взаимодействие расчетов с теоретическими и экспериментальными исследованиями приводит к повышению качества получаемой информации, дополняя, а иногда и заменяя дорогостоящие эксперименты.

Рассмотренные в диссертации вопросы относятся к проблемам удержания плотной горячей плазмы с экстремальными параметрами, необходимого для реакций управляемого термоядерного синтеза (УТС). С ним связаны разработки и многочисленные исследования различных магнитных ловушек. В качестве простейшего примера ловушки для

магнитного удержания является Z-пинч: ток в плазменном шнуре, расположенном между двумя электродами, создает азимутальное магнитное поле сжимающее и удерживающее плазму. С ней связана одна из первых работ в области вычислительной плазмодинамики – одномерная численная модель динамики Z-пинча [1], с последующим развитием большой серии работ В.Ф. Дьяченко и В.С. Имшенника [2, 3] и других [4 – 6]. Также выполнен ряд исследований по изучению неустойчивости пинча [7 – 13]. Основой модернизации пинча стала идея избежать прямого контакта плазмы с электродами, и замкнуть шнур в тор. Известными примерами таких технических устройств (ловушек), являются многочисленные тороидальные установки, среди которых наиболее известны токамак [14] и стелларатор [15] (см., например, обзоры [16 – 19]). На данный момент разрабатывается Токамак-реактор в рамках международного научного проекта ITER [20, 21]. В токамаке магнитное поле создается в основном электрическим током в плазме, а в стеллараторе – внешними проводниками, расположенными на периферии ловушки вне плазмы, окружающими ее. Таким образом, в перечисленных выше традиционных ловушках для создания магнитных полей используются внешние магнитные системы (катушки) опертые о Землю [22]. В таком случае, плазма и магнитное поле «перемешаны». Привлекательнее, с практической точки зрения, были бы ловушки в которых напряженность магнитного поля мала или вовсе отсутствует в объеме занимаемом плазмой, по сравнению с полем в окружающем ее магнитном барьере. В магнитном поле, сдерживающем плазму, порождаются так называемые «щели», вызванные вогнутостью границы раздела в сторону плазмы – остроугольностью плазменного объема. Создание бесщелевых магнитных ловушек с использованием катушек опертых о Землю невозможно. Однако эти недостатки можно преодолеть, с помощью интересного и перспективного класса ловушек, в которых проводники с током, создающие магнитное поле, погружены в плазменный объем. Особое внимание уделил таким ловушкам А.И. Морозов и назвал их “галатеями”

[22, 23]. Многообразие геометрии магнитного поля различной связности должно позволить замкнуть острые углы плазменной конфигурации друг на друга, создавая плазменный объем, локализованный в основном в центре системы и опоясывающий проводники. При этом магнитное поле будет играть роль оболочки, сдерживающей плазму, а не перемешиваться с ней. В результате этого принципиального отличия появляется надежда получить более высокие параметры удержания.

Обратим внимание на то, что вопреки видимых преимуществ галатей и перспективность их изучения с точки зрения удержания плазмы и использования в качестве основы промышленных термоядерных реакторов, они все еще довольно мало исследованы в сравнении с традиционными ловушками. Это можно объяснить технологическими трудностями, связанными с необходимостью создания специальной магнитной системы поддержания проводников в левитирующем состоянии. С передовыми технологиями и растущим уровнем научного прогресса эти трудности могут быть преодолены. В работе [22] приведен ряд значимых факторов, как например: сложность магнитной структуры токамаков, возможность создания «микрогалатей» [24, 25] и многие другие, благодаря которым следует продолжать развивать направление галатей.

Обзор раннего этапа исследований в области галатей и соответствующих численных моделей содержится в ([26], см. также [27, 28] и цитируемую там литературу). Так в [26] затронуты кинетические эффекты галатей и аспекты связанные с техническими вопросами создания полноценного реактора на основе галатей. Работа [27] содержит обзор и спектральный анализ различных математических моделей галатей. Ответы на вопросы, общие для широкого класса ловушек-галатей, получены в исследованиях простейшего примера ловушки «Пояса», точнее его упрощенного «распрявленного» варианта – бесконечного цилиндра с двумя погруженными в него проводниками, параллельными оси и током в плазме того же направления. Схема тороидальной ловушки галатеей типа «Пояс»

предложена в работе А.И. Морозова и А.Г. Франк [29], где рассмотрен также ее распрямленный в цилиндр аналог и приведены некоторые связанные с ним простые теоретические соображения, продолженные в [30]. Прямой вариант «Пояса» реализован в экспериментах в ИОФАН в режиме электродного разряда [31, 32], где получены первые результаты о квазиравновесных конфигурациях плазмы и магнитного поля. Представление о современном этапе экспериментальных работ дают работы [33 – 35]. Приведем краткое описание схемы этой установки: кварцевая камера (труба) радиусом 9 см. и длиной 100 см. с погруженными в нее проводниками, представляющими собой металлические стержни радиусом 1 см и длиной 95 см, покрытые изоляцией. Оси проводников смещены на расстояние $\pm 4,5$ см. относительно оси камеры. Электрические токи в проводниках заданы одинаковыми по величине и направлению. Обратный токопровод реализован такими же проводниками расположенными снаружи вакуумной камеры, параллельно ее оси и на расстоянии $\pm 11,25$ см. Электрические токи внешних проводников изменяя структуру магнитного поля приводят к уменьшению силы стягивания внутренних проводников. На торцах камеры введены два плоских сетчатых электрода. Камера заполнена предварительно ионизованным, посредством мощной ультрафиолетовой лампы, газом (Ar или He). Дальнейшая ионизация газа и возбуждение тока в плазме реализовывалась прикладываемым к электродам разрядом – импульсным напряжением от конденсатора. Отметим, что идея конфигурации «Пояса» отталкивалась в значительной степени от работ С.И. Сыроватского и его учеников по динамике нейтрального токового слоя в окрестности нулевой линии магнитного поля [36 – 41]. Численным моделям токового слоя посвящены работы [42 – 44]. Общие черты и различия галатей и токовых слоев обсуждаются ниже. Экспериментальные исследования галатей проводились также в МИРЭА в группе А.И. Бугровой [45] на установке «Авоська» и продолжают в настоящее время на модернизированной установке «Галатей-3М» и мультипольной ловушки «Тримикс-3М», [46, 47]. Численная

модель и расчеты поддержания в равновесии левитирующих колец с током в ловушках-галатях рассмотрены в работах [48, 49].

В исследованиях конфигураций плазмы и удерживающего его магнитного поля по прежнему остается интерес к задачам равновесия идеальной плазмы. Первые исследования равновесных плазменных конфигураций с « $\beta = 1$ » аналитическими методами, а так же вывод критерия устойчивости выполнены С.И. Брагинским и Б.Б. Кадомцевым [50]. Ряд общих свойств равновесных состояний и независимый вывод критериев устойчивости содержатся в классических работах Берковича, Грэда, Рубина [51]. Одним из известных критериев является: граница раздела должна быть вогнута в сторону плазмы [8, 26].

Значительное место в исследованиях магнитных ловушек занимают численные модели и расчеты. Основным объектом исследований являются конфигурации плазмы, магнитного поля и электрического тока, находящиеся в равновесии, поскольку оценки времени удержания, требуемого для возникновения реакции термоядерного синтеза, на порядки превосходят характерные времена быстрых плазменных процессов. Математические модели плотной горячей плазмы в ловушках создаются на языке механики сплошных сред, т.е. магнитной газодинамики (МГД). Естественно различать два типа моделей – плазмостатические и плазмодинамические. Плазмостатика рассматривает равновесные конфигурации вне истории их образования. Они полностью характеризуются пространственным распределением плазмы, магнитного поля и электрического тока в заданном объеме ловушки, которое описывается тремя уравнениями: МГД-равновесия, и двумя уравнениями Максвелла.

Имеется ещё одно обстоятельство, которое делает исследование таких систем интересными. В.Д. Шафрановым было отмечено, что уравнения МГД - равновесия формально эквивалентны уравнениям стационарной динамики несжимаемой жидкости [52], поэтому при изучении равновесных плазменных конфигураций можно использовать опыт исследования

динамики вихревого течения жидкости [53, 54]. С его помощью в работах [26, 55, 56] получены аналитические решения плоских задач магнитогазодинамического равновесия, для случая бесконечно тонких границ плазма-поле. Здесь оказался полезным математический аппарат теории функций комплексного переменного и конформных отображений.

Модель строго равновесных конфигураций, к тому же обладающих какой-либо симметрией (плоской, осевой, винтовой) строится в терминах уравнения Грэда-Шафранова – полулинейного дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа для функции потока магнитного поля с нелинейным распределением давления и электрического тока в младших членах [52, 57, 58]. В работе [29] были построены некоторые простые решения уравнения Грэда-Шафранова для конфигурации в ловушке «Пояс» в предположении, что распределение давления плазмы между магнитными поверхностями (магнитобарическая характеристика) описывается линейным и квадратичным сплайнами, а в [30] приведено более подробное рассмотрение равновесных конфигураций. Краевые задачи с этим уравнением успешно моделируют равновесные конфигурации в магнитных ловушках (см., например, [10, 19, 26 – 28, 59, 60]). Задачи с уравнением Грэда-Шафранова сталкиваются с нетривиальными вопросами существования и единственности решения, общими для широкого класса моделей процессов взаимодействия реакции и диффузии. В приложении к плазмостатике эти вопросы затронуты в расчетах равновесия в ловушке «Стелларатор-галатея» в [27, 28 61, 62]. Плазмостатическая модель прямого варианта «Галатеи-пояса» представлена в работах [63 – 65]. В той же модели исследованы равновесные конфигурации плазмы и поля в прямых цилиндрических аналогах ловушек «Трилистник» с тремя прямыми и «Стелларатор-галатеи» с тремя винтовыми проводниками [64, 66]. В упомянутых трех типах ловушек рассчитаны равновесные конфигурации в круглом цилиндре, в которых плазма не соприкасается с погруженными в нее

проводниками. Изоляция проводников обеспечена взаимодействием тока противоположного направления в плазме с магнитным полем проводников.

Однако, этот результат обязан излишней простоте модели. На простом примере одномерной задачи в цилиндрической окрестности одного проводника нами обращено внимание на недоопределенность задач плазмостатики, в постановке которых не участвует проводимость плазмы [67]. Показано, что в строгом МГД-равновесии с учетом конечной проводимости ток осевого направления в плазме не может менять направления и, следовательно, способствовать изоляции проводников от плазмы.

В связи с этим существенную роль должны играть исследование процесса формирования плазменных конфигураций в ловушках, которым и посвящается в основном настоящая диссертация. Математические модели формирования конфигураций с изолированными проводниками относятся к моделям второго типа – плазмодинамическим. Численные модели двумерного МГД-течения также широко используются в исследовании плазменных процессов. Примерами успешного моделирования течения в поперечном магнитном поле являются упомянутые выше исследования динамики Z-пинча и установление стационарного течения в коаксиальном канале плазменного ускорителя [68, 69]. Идея ускорения плазмы собственным азимутальным магнитным полем принадлежит А.И. Морозову. Расчету течения в плоскости магнитного поля посвящены работы [42 – 44]. Двумерным МГД-течениям в трехкомпонентном магнитном поле посвящены работы об ускорении плазмы в коаксиальном канале с продольным полем [70 – 74] и об обтекании токового кольца плазменным потоком [27, 75].

В нашем случае рассматривается двумерное МГД-течение в плоскости магнитного поля с учетом конечной проводимости в котором образуется искомая конфигурация. Электрический ток обратного направления в окружающей проводники плазме создается в нестационарном процессе возрастания тока в проводниках, что было предложено Г.И. Дудниковой,

А.И. Морозовым и М.П. Федоруком в работах [76, 77]. При этом в течение относительно короткого времени между проводниками и основной массой плазмы образуется пространство с низкой плотностью – условно «вакуум». Этот механизм можно использовать при формировании конфигурации с желаемыми свойствами. Если теперь остановить возрастание тока в проводниках, то в ловушке формируется искомая конфигурация, которая существует в квазиравновесном режиме и при условии высокой проводимости плазмы медленно разрушается под влиянием слабой диффузии магнитного поля. Одномерная численная модель такого процесса представлена в работе [67].

Дальнейшие исследования посвящены двумерной МГД-модели формирования плазменной конфигурации в распрямленном аналоге «Пояса», т.е. в прямом цилиндре с двумя расположенными в нем токнесущими проводниками, параллельными оси. Наряду с работой [77] на ту же тему но без искусственного образования отрицательного тока выполнены работы [78, 79], в которых в отличие от наших работ математическая модель использует функцию потока магнитного поля вместо компонент самого поля. В развитие работ [42 – 44, 77] некоторые расчеты по формированию конфигураций и токового слоя Галатей-пояс выполнены в последнее время Новосибирскими авторами в контакте с экспериментами группы А.Г. Франк [80, 81].

В диссертации по сравнению с работами [77, 79] исследованы особенности модели, варианты граничных условий, использован хорошо зарекомендовавший себя в расчетах плазмодинамических задач метод коррекции потоков (FCT) с одновременной по обеим пространственным координатам коррекцией по Залесаку [82, 83], прослежена динамика процесса в течение достаточно длительного времени. В результате расчетов, действительно, получена конфигурация с плазмой, отделенной от проводников, существующая в квазиравновесном режиме достаточно долго по сравнению с временем ее формирования (при высоких значениях магнитного числа Рейнольдса). Исследована зависимость конфигурации и

времени ее существования от параметров задачи. Рассмотрены варианты постановки задачи, отличающиеся граничными условиями с разным физическим смыслом. Обращено внимание на особенности численного решения задач.

Расчеты проведены в модели распрямленной разновидности «Пояса», однако принципиальная, качественная сторона исследованного процесса формирования конфигураций справедливо относится к широкому классу ловушек-галатей.

Целью диссертационной работы является разработка математической модели формирования плазменных конфигураций в магнитных ловушках – галатей на примере цилиндрического плазменного шнура с двумя погруженными в него проводниками, включая составление комплекса программ и численные исследования формирования конфигурации при различных значениях физических параметров задачи.

Методы исследования и степень разработанности темы.

В основе математической модели лежат двумерные нестационарные задачи магнитной газодинамики с учетом конечной проводимости плазмы. Одномерные задачи о равновесии решаются аналитически. Численные решения МГД - задач используют известные разностные методы с расщеплением по процессам: метод коррекции потоков FCT [82, 84 – 86] с коррекцией по Залесаку [83] для гиперболической части задачи и метод переменных направлений, а именно, продольно-поперечная прогонка [87 – 89] – для параболической. Успешный опыт использования этих методов в указанном круге задач, а также за его пределами, позволяет говорить о высокой степени разработанности модели в рассматриваемой тематике.

В диссертационной работе решены следующие задачи:

1. Одномерные задачи о равновесных конфигурациях плазмы и поля в цилиндрической окрестности прямолинейного проводника.
2. Одномерные нестационарные задачи о формировании равновесных и квазиравновесных конфигураций.
3. Двумерная задача о равновесии плазмы в цилиндре прямоугольного сечения с двумя погруженными проводниками.
4. Двумерные нестационарные задачи о формировании конфигурации в цилиндрах круглого и прямоугольного сечений с двумя проводниками с двумя типами граничных условий: с заданным внешним электрическим полем и с заданной касательной компонентой магнитного поля на границе, соответствующей полному электрическому току в системе.
5. Реализация известных численных методов в решении двумерных МГД – задач и внесение в них необходимых модификаций с учетом особенностей постановки задачи.
6. Создание комплекса программ для решения перечисленных задач.

В решении перечисленных задач получены следующие основные результаты и положения, выносимые на защиту:

1. Созданы одномерные и двумерные численные плазмостатические модели равновесных магнитоплазменных конфигураций в ловушке Галатея-Пояс и плазмодинамические модели формирования таких конфигураций в плазме конечной проводимости.
2. Созданы программы, с помощью которых модели реализованы в расчетах упомянутых выше конфигураций.
3. В одномерных задачах аналитически получены равновесные конфигурации различной геометрии, зависящей от величины тока в проводнике.

4. В расчетах двумерных краевых задач с уравнением Грэда-Шафранова получены равновесные конфигурации в распрямленном варианте ловушки «Пояс» прямоугольного сечения. Показано, что основные свойства конфигурации практически не зависят от формы границы области.

5. Показано, что строго равновесных конфигураций плазмы, изолированных от проводников, существовать не может. Изолированные конфигурации кольцевого сечения получены в нестационарной одномерной МГД- модели с конечной проводимостью в результате возрастания тока в проводнике в начальной стадии процесса и существующие в квазистационарном режиме.

6. В двумерных нестационарных МГД- моделях течения плазмы в цилиндре круглого и квадратного сечений с двумя погруженными в него проводниками получены изолированные от проводников конфигурации, существующие в квазистационарном режиме. Исследована зависимость геометрии, количественных характеристик и времени существования конфигурации от граничных условий и физических параметров задачи.

7. Показано, что в рассмотренных конфигурациях электрический ток в плазме сосредоточен в основном у границ, т.е. имеет тенденцию к скинированию, в отличие от известных исследований токового слоя.

Научная новизна

Первые работы по рассматриваемой тематике выполнены в 1997 г. в работах [77, 79]. В их развитие в диссертации проведено подробное исследование процесса формирования и его зависимости от параметров задачи. Во всех вариантах расчетов впервые получен и исследован квазиравновесный режим конфигурации, обращено внимание на распределение электрического тока. Эти результаты являются новыми.

Обоснованность и достоверность результатов

Достоверность результатов одномерных расчетов подтверждается сравнением установившихся конфигураций с аналитическим решением.

Двумерные расчеты проверены на внутреннюю сходимость измельчением сетки и соблюдением разностных аналогов законов сохранения. Соответствие результатов расчетов с опубликованными результатами первых экспериментов и работ других авторов, говорит в пользу адекватности выбранной модели.

Теоретическая и практическая значимость.

Проведенные в диссертации исследования и полученные результаты вносят вклад в теорию магнитных ловушек-галатей. Они имеют также методическое значение в вопросах математического моделирования динамики плазмы в плоскости магнитного поля. Практическое значение результатов состоит в приобретении полезного опыта численного решения 2D-МГД-задач с учетом проводимости и связано с перспективой их применения в дальнейших разработках ловушек-галатей.

Апробация и публикации

Основные результаты и положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах:

- XVII, XVIII, XIX и XX Всероссийские конференции «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященные памяти К.И. Бабенко, Новороссийск, п. Абрау-Дюрсо, 2008, 2010, 2012 и 2014 гг.
- Международная научная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященная памяти академика А.А. Самарского к 90-летию со дня рождения, Москва, МГУ 16-18 июня 2009.

- Международная конференция по прикладной математике и информатике, посвященная 100-летию со дня рождения академика А.А. Дородницына. ВЦ РАН, Москва, 7-11 декабря 2010.
- X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Нижний Новгород, 24-30 августа 2011.
- XI Международная конференция «Забабахинские научные чтения». Снежинск, 16 – 20 апреля 2012.
- Ежегодные Научные Сессии МИФИ 2007, 2008, 2009 годов и НИЯУ МИФИ 2011, 2013, 2015 годов, Москва.
- Семинар им. К.И. Бабенко Института прикладной математики им. М.В. Келдыша, РАН.

Материалы диссертации опубликованы в 16 печатных работах, 3 из которых [67, 90, 91] в журналах рекомендованных ВАК, остальные [92 – 104] – в сборниках тезисов научных конференций.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. В главах выделены разделы. Общий объем диссертации 127 страниц, включая 31 рисунок. Список цитируемой литературы включает 121 наименование.

Краткое содержание работы

В первой главе описывается идея и принцип ловушки-галатеи. Формулируется физическая постановка МГД-задачи об образовании равновесных (и квазиравновесных) плазменных конфигураций в магнитной ловушке «Пояс», предложенной А.И. Морозовым и А.Г. Франк [29]. Рассматривается вариант распрямленного в бесконечный цилиндр тора с двумя параллельными друг другу прямыми проводниками с электрическими

токами, равными по величине и направлению, погруженными в плазменный объем. Плазма рассматривается как сплошная среда, модели исследуемых процессов строятся в терминах магнитной газодинамики. Задача ставится в двух различных вариантах геометрии области и двух вариантах граничных условий, отражающих количественную электромагнитную природу задачи. Наряду с этим, описана плазмостатическая модель равновесных конфигураций в предположении плоской симметрии в декартовых координатах. Математический аппарат использует краевые задачи с двумерным эллиптическим уравнением типа Грэда-Шафранова [26 – 28, 52]. Показано, что в конфигурации с плазмой конечной проводимости, находящейся на конечном расстоянии от проводников, строгого равновесия быть не может. Также описана простейшая одномерная математическая модель квазиравновесной плазменной конфигурации, окружающей проводник с током в элементе магнитной ловушки – «галатее» и отстоящей от него на конечном расстоянии.

Во второй главе описан численный метод решения задачи. Решение поставленных задач ведется в безразмерных переменных. Выбираются единицы измерения, выделяются безразмерные параметры задачи, и указывается их физический смысл. Приводится система МГД-уравнений в консервативной форме для всех вариантов постановок задачи и необходимые граничные и начальные условия. Численное решение задачи использует разностные методы коррекции потоков (FCT) с двумерной версией коррекции по Залесаку [82, 83], которая позволяет избежать дополнительного расщепления по направлениям. С применением метода переменных направлений с продольно-поперечной прогонкой для параболической части задачи.

В заключение главы уделено внимание особенностям задач и метода численного решения.

В третьей главе приводятся и анализируются результаты решения одномерных задач о конфигурациях плазмы в цилиндре с погруженным в него прямым токнесущим проводником [67, 90, 92 – 101]. Рассмотрено два варианта теплового режима: в адиабатическом процессе и с джоулевым нагревом, который компенсируется искусственным отводом тепла, например при «излучении». В предположении постоянной проводимости плазмы, равновесное решение находится в явном виде. Показано, что равновесные конфигурации вплотную соприкасаются с проводниками. Получены конфигурации двух типов, в зависимости от величины тока в плазме: занимающие всю область цилиндра или лишь часть, окруженную вакуумом на периферии. Показано, что строго равновесных конфигураций кольцевой формы, т.е. отделенных от проводника, в плазме конечной проводимости быть не может, но они получены в нестационарной модели при кратковременном возрастании тока в проводнике и существуют в квазиравновесном режиме. Продемонстрировано физическое отличие полученных конфигураций при разных тепловых режимах.

Четвертая глава посвящена результатам двумерных расчетов.

В начале главы представлены расчеты равновесных конфигураций в плазмостатической модели с уравнением Грэда-Шарфанова в цилиндре прямоугольного сечения. Показано, что размеры и форма области на периферии существенно не влияют на свойства конфигурации, расположенной в центральной части [67, 90, 98, 99, 101]. Далее приведены результаты расчетов нестационарной задачи о динамике плазмы конечной проводимости с образованием квазиравновесной конфигурации [90, 91, 97 – 104]. Исследованные серии расчетов отличаются друг от друга значениями параметров, геометрией области и заданием граничного условия. Во всех вариантах расчетов двумерных задач о формировании конфигурации в ловушке «Пояс» получены квазиравновесные режимы конфигураций.

Определены закономерности формирования и квазиудержания конфигураций от физических параметров системы и свойств плазмы.

В заключение диссертации кратко представлены основные итоги данного исследования, даны рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в статьях:

1. Брушлинский К.В., Чмыхова Н.А. О равновесии плазмы в магнитном поле ловушек – галатей // Математическое моделирование, 2010 год, том 22, номер 6, стр. 3-14.

2. Брушлинский К.В., Чмыхова Н.А. Математические модели магнитного удержания плазмы в ловушках - галатях // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4, часть 3, С. 661-663.

3. Брушлинский К.В., Чмыхова Н.А. Численная модель формирования квазиравновесия плазмы в магнитном поле ловушек – Галатей. // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 2014, Т. 3, № 1, С. 40-52.

Глава 1. Постановка задачи

1.1. Физическая постановка

Исходным объектом исследований, составивших диссертацию, является магнитная ловушка «Пояс», предложенная А.И. Морозовым и А.Г. Франк в работе [29]. В плазменный тор, погружены два параллельных друг другу кольцевых проводника с электрическими токами равными по величине и направлению. Они создают магнитное поле, схематически изображенное штриховыми линиями на рис. 1.1. Кроме того в плазме возбужден тороидальный электрический ток. Предполагается, что сила Ампера его взаимодействия с магнитным полем способствует созданию плазменной конфигурации, расположенной вдоль оси тора и проходящей через нее сепаратрисной магнитной поверхности, которая удерживается в равновесии этим полем. Представляют интерес два основных круга вопросов: во-первых геометрия и параметры равновесной конфигурации, и во-вторых динамика ее формирования, исследование которой и составляет основное содержание диссертации. Ответы на вопросы имеют принципиальное значение для широкого класса ловушек-галатей, что позволяет ограничиться здесь простейшим примером «Пояса» и даже еще более упростить его, «распрямив» тор в бесконечный цилиндр с параллельными его оси токами в плазме и в двух прямых проводниках. Сечение предполагаемой конфигурации, проводников и магнитного поля плоскостью $z = \text{const}$ представлена на рис. 1.2.

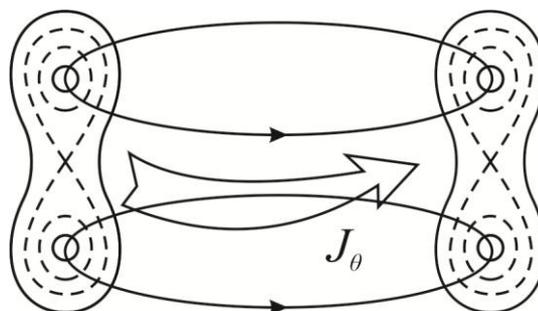


Рис. 1.1. Схема тороидальной ловушки-галатеи «Пояс» [29]

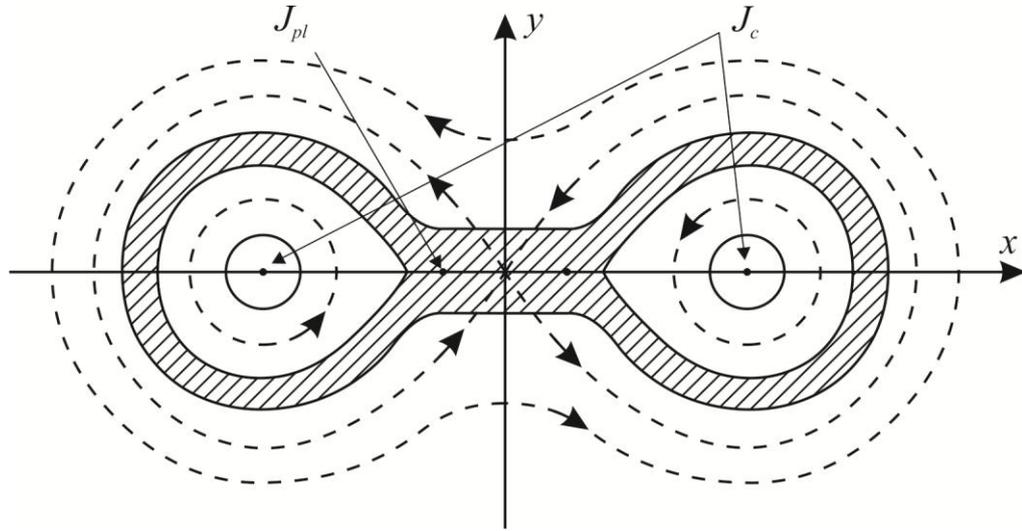


Рис. 1.2. Схема предполагаемой конфигурации ловушки-галатеи «Пояс» в сечении плоскостью $z = \text{const}$ ее цилиндрического аналога.

1.2. Математическая постановка задачи

1.2.1. Нестационарная 2D МГД модель формирования квазиравновесной конфигурации пояс

Параметры и свойства плазмы в обсуждаемом классе магнитных ловушек позволяют рассматривать ее как сплошную среду, состоящую из ионов и электронов с едиными макропараметрами. По этой причине математические модели исследуемых процессов строятся в терминах магнитной газодинамики (см. например, [13, 20, 28, 105, 106])

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{V} &= 0; \\
 \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \nabla p &= \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}; \\
 \rho \frac{d\varepsilon}{dt} + p \text{div} \mathbf{V} &= \frac{j^2}{\sigma} - Q; \\
 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}) - \text{rot} \frac{c\mathbf{j}}{\sigma}; \\
 p &= (\gamma - 1) \rho \varepsilon; \quad \varepsilon = C_V T; \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \mathbf{H}; \\
 \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Уравнения написаны в традиционных для магнитной газодинамики обозначениях и распространенной в данном круге вопросов системе единиц CGSE:

ρ – плотность плазмы (среды);

\mathbf{V} – вектор скорости плазмы;

p – давление;

\mathbf{j} – вектор плотности электрического тока;

\mathbf{H} – вектор напряженности магнитного поля;

ε – внутренняя (тепловая) энергия;

T – температура плазмы;

σ – конечная проводимость плазмы;

$\gamma = C_p/C_v$ – показатель адиабаты – отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме соответственно;

c – скорость света.

Они не содержат слагаемых, соответствующих гидродинамической вязкости и теплопроводности, по-видимому, несущественных в данном цикле исследований, т.е. из диссипативных факторов учитывают только конечную проводимость плазмы σ (обратную к ней величину $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$ называют магнитной вязкостью).

Ввиду того, что особый интерес представляют равновесные конфигурации, а уравнение энергии в общепринятой форме не может иметь строго равновесного решения при $\sigma \neq \infty$, в это уравнение введено слагаемое $Q(\rho, T) > 0$, с целью нейтрализовать джоулев нагрев j^2/σ в равновесии. Ему можно придать физический смысл потерь тепла на излучение, например, в форме излучения «черного тела»:

$$Q(\rho, T) = Q_0 \rho^2 T^4. \quad (1.2)$$

Если пренебречь деталями процесса вблизи торцов цилиндра, в задаче можно допустить плоскую (трансляционную) симметрию:

$$\partial/\partial z \equiv 0, \quad (1.3)$$

т.е. ограничиться двумерной МГД - моделью.

Общая постановка задачи о формировании равновесия – нестационарная. Будем рассматривать ее в сечении прямого цилиндра плоскостью $z = \text{const}$, см. рис. 1.2. Она решается в двух различных вариантах геометрии области: в круге во всем объеме $r < R$ в цилиндрических координатах (r, φ) , и в прямоугольнике $|x| \leq R, |y| \leq R$ в декартовых координатах (x, y) . В этих областях задача, кроме того обладает симметрией относительно осей x и y . Следовательно, ее можно решать не во всей области, а только в первом квадранте

$$x > 0, \quad y > 0, \quad \text{или} \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad (1.4)$$

дополнительно поставив на его границах очевидные условия симметрии

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial V_\tau}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial H_n}{\partial n} = 0; \quad V_n = 0; \quad H_\tau = 0, \quad (1.5)$$

где n и τ – нормаль и касательная к границе.

Граничные условия на внешней границе задачи ориентированы на установление равновесного режима и не зависят от времени. Граница области предполагается непроницаемой для плазмы и магнитного поля:

$$V_n = 0; \quad H_n = 0 \quad (1.6)$$

Кроме того на внешней границе требуется граничное условие, которое отражает количественную электромагнитную природу задачи, или конкретнее – электрический ток осевого направления, протекающий по плазме. Оно использовано ниже в двух различных вариантах.

В первом из них предполагается известным и постоянным по времени полный электрический ток, протекающий в цилиндре в осевом направлении, т.е. сумма тока J_{pl} в плазме и в двух проводниках J_c .

$$J_{tot} = J_{pl} + 2J_c$$

$$\iint j_z dx dy = \frac{c}{4\pi} \iint (\text{rot} \mathbf{H})_z dx dy = J_{tot}$$

По формуле Стокса это означает

$$\frac{c}{4\pi} \oint_{\Gamma} H_{\tau} ds = J_{tot} ,$$

где H_{τ} – тангенциальная компонента поля.

Отсюда, предполагая для простоты $H_{\tau} = \text{const}$ на границе, получим граничное условие на внешней границе Γ :

$$H_{\tau} = H_{\Gamma} \quad (1.7)$$

Во втором случае ток в плазме инициирован электрическим полем $E_z = E_{\Gamma} = \text{const}$, заданным независимо от цепи питания проводников также на внешней границе. Из закона Ома

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{H} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma}$$

и условий (1.6) следует что $\mathbf{V} \times \mathbf{H} = 0$, т.е.:

$$j_z = \sigma E_{\Gamma} \quad (1.8)$$

Это электромагнитное граничное условие обычно используется в работах на рассматриваемую тему [77, 79] и по-видимому, достаточно адекватно экспериментам. В то же время в интересах более полного исследования математической модели рассмотрены оба варианта (1.7) и (1.8) постановки задачи.

Далее нужно учесть, что сечение цилиндра пересекают два проводника конечного диаметра. Поэтому, из указанной области нужно, строго говоря, исключить территорию проводников и поставить на ее границах краевое условие:

$$\frac{c}{4\pi} \oint H_{\tau} ds = J_c , \quad (1.9)$$

где J_c – заданный ток в каждом проводнике.

Однако чтобы избежать вычислительных проблем решения задачи в многосвязной области будем рассматривать ее во всем сечении цилиндра, а территорию проводников предполагать прозрачной. Каждый из проводников моделируется заданным в них внешним током, параллельным оси и непрерывно распределенным в их окрестностях [27, 28, 61] следующим образом:

$$\mathbf{j}_{ex} = (0, 0, j_{ex});$$

$$j_{ex}(x, y) = j_0 e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{r_c^2}}, \quad (1.10)$$

где (x_0, y_0) – координаты центра, а r_c – условный радиус проводника.

Множитель j_0 подобран так, чтобы интеграл внешнего тока в окрестности проводника равнялся заданному значению J_c .

$$\iint j_{ex} dx dy = J_c \quad (1.11)$$

Поскольку задача ставится в квадранте (1.4), достаточно ограничиться только правым проводником (рис. 1.2), поскольку влияние левого пренебрежимо мало при $r_c \ll r_0$.

Учтем это предположение в уравнениях, заменив плотность тока \mathbf{j} на $\mathbf{j}_{pl} = \mathbf{j} - \mathbf{j}_{ex}$, где \mathbf{j}_{pl} – плотность тока в плазме, участвующая во взаимодействии с магнитным полем в плазме, а \mathbf{j} – полный ток, т.е. сумма плазменного и внешнего.

С учетом сделанного предположения уравнения МГД уточняются и имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} &= 0; \\
\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \nabla p &= \frac{1}{c} \mathbf{j}_{pl} \times \mathbf{H}; \\
\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{V} &= \frac{j_{pl}^2}{\sigma} - Q; \\
\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}) - \operatorname{rot} \frac{c \mathbf{j}_{pl}}{\sigma}; \\
p &= (\gamma - 1) \rho \varepsilon; \quad \varepsilon = C_v T; \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_{pl} + \mathbf{j}_{ex} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}; \\
\frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

В качестве начальных условий задачи берется состояние покоя

$$t = 0: \quad \rho = \rho_0, \quad T = T_0, \quad \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{H} = 0 \tag{1.13}$$

с отсутствующим магнитным полем. Выйти из этого состояния плазму заставят внешний ток \mathbf{j}_{ex} в уравнениях (1.12) и граничное условие (1.7 или 1.8), играющее роль «магнитного поршня», толкающего ее от границы к центру.

1.2.2. Плазмостатическая модель. Уравнение Грэда-Шафранова

Обсуждаемые конфигурации плазмы, удерживаемые магнитным полем, представляют интерес в первую очередь в состоянии равновесия (покоя). Их модель описывается в изложенных выше терминах, но в предположении:

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0, \quad \mathbf{V} = 0. \tag{1.14}$$

В этом случае от уравнений МГД (1.12) остается лишь уравнение равновесия

$$\nabla p = \frac{1}{c} \mathbf{j}_{pl} \times \mathbf{H}, \tag{1.15}$$

а входящие в него электрический ток и магнитное поле должны подчиняться кроме того уравнениям Максвелла.

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \text{rot} \mathbf{H}, \quad \text{div} \mathbf{H} = 0, \quad (1.16)$$

Краевые задачи с уравнениями (1.15) – (1.16) в заданной области с необходимыми граничными условиями образуют математические модели равновесных конфигураций.

В случае, когда конфигурация обладает какой-либо симметрией, упомянутые задачи становятся двумерными и сильно упрощаются, а именно, сводятся к краевым задачам с уравнением Грэда-Шафранова [52, 57, 58].

Это скалярное эллиптическое дифференциальное уравнение второго порядка для функции магнитного потока ψ с нелинейными младшими членами. Оно получено впервые в задачах с осевой симметрией и успешно используется в исследованиях равновесия в течение более чем полувека [10, 11, 27, 28, 60, 107]. Его разновидность для задач с винтовой симметрией [108, 109] также известна в исследованиях стеллараторов [19, 28, 64].

В рассматриваемом нами случае плоской симметрии $\partial/\partial z \equiv 0$ в декартовых координатах (x, y) оно имеет вид

$$\Delta \psi + g(\psi) = 0, \quad (1.17)$$

где Δ – оператор Лапласа,

$$\Delta \psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2},$$

$$g(\psi) = 4\pi \frac{dp}{d\psi} + \left(\frac{4\pi}{c} \right)^2 I \frac{dI}{d\psi} + \frac{4\pi}{c} j_{ex}. \quad (1.18)$$

В задаче с круглым цилиндром, т.е. с круглой областью $r < R$ используются цилиндрические координаты (r, φ) и уравнение Грэда-Шафранова имеет тот же вид (1.17) с оператором Лапласа

$$\Delta \psi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}.$$

Неизвестной величиной является функция потока ψ магнитного поля – координата вектор-потенциала магнитного поля в направлении оси z .

$$\mathbf{H} = \text{rot } \psi, \quad (1.19)$$

В декартовых координатах она связана с полем формулами:

$$H_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad H_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.20)$$

В цилиндрических (полярных) координатах:

$$H_r = \frac{\partial \psi}{r \partial \varphi}; \quad H_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (1.21)$$

Уравнение Грэда-Шафранова содержит в младших членах, вообще говоря, две произвольные функции $p(\psi)$ и $I(\psi)$, характеризующие распределение давления и электрического тока между магнитными поверхностями $\psi = \text{const}$. Конкретный вид этих функций не следует, строго говоря, из постановки задачи и задается достаточно произвольно, исходя из требований к искомой конфигурации или из какой-либо информации, полученной на основе экспериментальных данных. Этот произвол и связанная с ним фактическая недоопределенность задачи позволяет легко строить модели конфигураций с желаемыми свойствами.

В рассматриваемом случае прямого цилиндра функция I пропорциональна осевому полю H_z и потому

$$I \equiv 0, \quad (1.22)$$

и нетривиальной остается только $p(\psi)$.

В ловушке «Пояс» предполагается, что плазма, представленная здесь давлением p , сосредоточена на оси цилиндра и проходящей через нее сепаратрисной магнитной поверхности (рис. 1.2).

В данной модели это достигается заданием функции $p(\psi)$ в виде

$$p = p_0 e^{-\left(\frac{\psi}{q}\right)^2} \quad (1.23)$$

и дополнительным требованием, чтобы $\psi = 0$ в центре ($r = 0$). Коэффициент p_0 соответствует максимальному значению давления, а параметр q характеризует поперечный размер конфигурации, сосредоточенной вдоль

сепаратрисы. В частности, уменьшением q можно добиться, чтобы давление быстро спадало в обе стороны от сепаратрисы. В результате, плазма почти не касается поверхности проводников.

Уравнение Грэда-Шафранова содержит также функцию j_{ex} , которая моделирует ток в проводнике (1.10)

Краевая задача с уравнением Грэда-Шафранова ставится в сечении цилиндра. Условие $H_n = 0$ (см. 1.6) означает здесь

$$\psi = \psi_r = \text{const} \quad (1.24)$$

на внешней границе. Эту константу следует выбирать так, чтобы

$$\psi = 0 \text{ при } r = 0, \quad (1.25)$$

как сказано выше. После этого она приобретает физический смысл величины магнитного потока между сепаратрисой поля и внешней границей.

Таким образом, модель равновесия конфигурации плазмы и магнитного поля в распрямленном варианте «Пояса» строится на основе решения первой краевой задачи с уравнением Грэда-Шафранова с перечисленными выше условиями.

1.2.3. Моделирование изоляции проводника от горячей плазмы

Магнитные ловушки-галатеи объединяет общий признак – проводники с током погружены в плазменный объем. Наряду с упомянутым достоинством он создает дополнительную проблему изоляции проводников от плазмы, потому что если им позволить соприкоснуться, проводники сгорят прежде, чем ловушка сможет удержать плазму в течении необходимого времени. Таким образом, желательно, чтобы проводник с одной стороны был окружен со всех сторон плазмой, а с другой – находился бы на конечном расстоянии от нее. В рассматриваемой геометрии плазменного шнура с прямыми проводниками это требование выполнено в плазмостатической модели, где плазма сосредоточена в центре и вдоль сепаратрисы в результате

специфического выбора функции $p(\psi)$ (1.23), отвечающей за распределение плазмы между силовыми линиями магнитного поля. Выбирая ее достаточно произвольно, – в данном случае немонотонной функцией с максимумом на сепаратрисе, можно легко достичь желаемого результата. Однако это всего лишь свойство математической модели равновесия, допускающей произвольный выбор $p(\psi)$. Она, строго говоря, недоопределена [67], а причина такой свободы выбора $p(\psi)$ в том, что плазмостатика в задачах с уравнением Грэда-Шафранова обходится замкнутой системой уравнений без учета конечной проводимости плазмы. В то же время уравнение магнитной индукции (четвертое в системе (1.12)) в строгом равновесии требует, чтобы:

$$\operatorname{rot} \frac{c\mathbf{j}}{\sigma} = 0, \quad (1.26)$$

как бы велика ни была проводимость σ , откуда в рассматриваемых условиях плоской симметрии (1.3) следует

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{j_z^{pl}}{\sigma} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{j_z^{pl}}{\sigma} \right) = 0, \quad (1.27)$$

т.е. $j_z^{pl}/\sigma = \text{const}$, и ток в плазме обязан быть постоянного направления во всем объеме ловушки. Полагаем что ток в проводниках $J_c > 0$ и, следовательно, магнитное поле ориентировано против часовой стрелки (см. рис. 1.2.). Чтобы искомая конфигурация тяготела к центральной части области, очевидно необходимо, чтобы на периферии ток j_{pl} был положительным. Согласно (1.27) он положителен везде, в том числе вблизи проводников, и сила Ампера $\frac{1}{c} \mathbf{j}_{pl} \times \mathbf{H}$ в их окрестности прижимает плазму к проводникам. Это означает, что изолировать плазму от них можно только силой Ампера обратного направления, т.е. отрицательным током в плазме в их окрестности.

Таким образом, строгого равновесия в конфигурации с плазмой конечной проводимости, находящейся на конечном расстоянии от

проводников, быть не может. Однако, отрицательный ток $j_z^{pl} < 0$ вблизи проводников можно получить в нестационарной модели, в которой ток в проводниках J_c монотонно возрастает со временем, что впервые было замечено в расчетах Г.И. Дудниковой, А.И. Морозова и М.П. Федорука [77]. Поэтому реализовать эту идею и построить конфигурацию с желаемыми свойствами, предлагается следующим образом. Пусть, в начальной стадии процесса формирования конфигурации, ток в проводниках J_c возрастает со временем от нуля до необходимого постоянного значения J_c , например линейно, при $0 < t < t_1$, а затем остается постоянным при $t > t_1$. Предполагая проводимость плазмы достаточно высокой ($\sigma \gg 1$), можно рассчитывать, что разрушающая полученную конфигурацию диффузия магнитного поля действует медленно, и конфигурация будет существовать в квазистационарном режиме достаточно долго по сравнению с временем ее формирования. В изложенной в п.1.2.1. нестационарной МГД-модели токи в проводниках заданы в форме (1.10), следовательно коэффициент j_0 становится зависимым от времени

$$j_0(t) = \begin{cases} j_0 \frac{t}{t_1} & \text{при } t < t_1 \\ j_0 & \text{при } t > t_1 \end{cases}, \quad (1.28)$$

где постоянное значение j_0 , в правой части согласовано с постоянной при $t > t_1$ величиной J_c с помощью формулы (1.11).

Граничное условие (1.7) или (1.8) на внешней границе можно оставить без изменения, а можно по аналогии с (1.28) сделать правую часть возрастающей при $0 < t < t_2$ от нуля до заданного постоянного значения H_Γ или E_Γ .

1.2.4. Одномерная плазодинамическая модель окрестности проводника

Модель формирования изолированной от проводника конфигурации плазмы рассмотрим сначала в простейшем случае – окрестности одного прямолинейного проводника конечного диаметра.

Здесь достаточно ограничиться одномерной моделью, в цилиндрических координатах, в изложенных выше предположениях и терминах.

Уравнения магнитной газодинамики (1.1) в данном случае имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V r}{r \partial r} &= 0 \\
 \rho \frac{dV}{dt} + \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{c} j H &= 0 \\
 \rho \frac{d\varepsilon}{dt} + p \frac{\partial V r}{r \partial r} &= \frac{j^2}{\sigma} - Q \\
 \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H V}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{j}{\sigma} \right) \\
 p &= (\gamma - 1) \rho \varepsilon; \quad \varepsilon = C_V T; \quad V = V_r; \quad H = H_\varphi; \\
 j = j_z &= \frac{c}{4\pi} \frac{\partial H r}{r \partial r}; \quad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial r}
 \end{aligned} \tag{1.29}$$

Здесь можно фактически иметь дело с реальным проводником ($r < r_c$), т.е. нет необходимости предполагать его прозрачным.

Модель строится в кольцевой области $r_c < r < R$ (рис. 1.3), где r_c и R – радиусы соответственно проводника и внешней границы цилиндра.

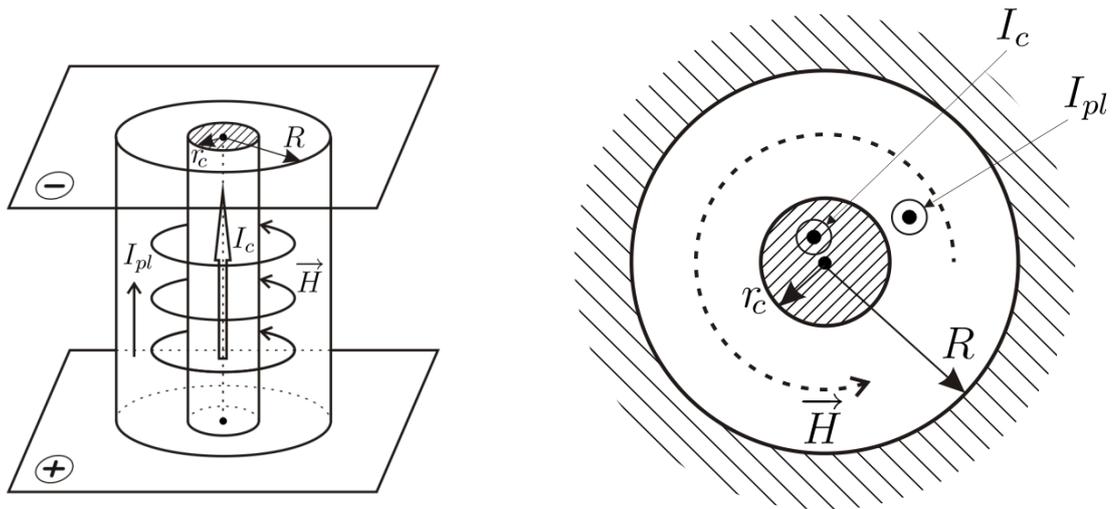


Рис. 1.3: Схема постановки задачи

Введенному в правую часть уравнения энергии слагаемому Q , как и ранее, придается смысл «объемного излучения», например (1.2), призванного компенсировать джоулев нагрев. Рассмотрено два варианта его конкретной реализации. Во-первых, проще всего положить

$$\frac{j^2}{\sigma} - Q \equiv 0 \quad (1.30)$$

тождественно. Тогда описываемые уравнениями (1.29) процессы имеют адиабатический характер:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0, \quad (1.31)$$

и при однородном начальном состоянии среды

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (1.32)$$

Другой вариант – задать «излучение», например, по закону «черного тела». В этом случае в равновесии должно стать:

$$\frac{j^2}{\sigma} = Q_0 \rho^2 T^4, \quad (1.33)$$

что играет роль «равновесного» уравнения состояния вместо (1.32).

Поскольку интерес представляют равновесные конфигурации, граничные условия ориентированы на эту цель и не зависят от времени. На внутренней и внешней границах заданы условия непротекания и напряженность азимутального поля H , соответствующая постоянным величинам осевого тока в круглом проводнике J_c и в плазменном объеме J_{pl} :

$$\begin{aligned} r = r_c; \quad V = 0; \quad H = \frac{2J_c}{cr_c} \\ r = R; \quad V = 0; \quad H = \frac{2(J_c + J_{pl})}{cR} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Начальные условия в динамической задаче о формировании равновесной конфигурации можно задать достаточно произвольно, например, в простой и естественной форме

$$t = 0: \quad V = 0; \quad \rho = \rho_0; \quad T = T_0; \quad H = \frac{2J_c}{cr}, \quad (1.35)$$

где ρ_0 и T_0 – известные постоянные значения плотности и температуры. Эти условия соответствуют состоянию покоя, при котором в плазме отсутствует электрический ток: $\partial(Hr)/\partial r = 0$. Заданный полный ток в плазме $J_{pl} > 0$ участвует в граничном условии (1.34), и разрыв поля H при $t = 0$, $r = R$ означает, что этот ток первоначально сосредоточен только на поверхности цилиндра («скинированный» ток). Его взаимодействие с азимутальным полем проводника создает радиальную силу Ампера $(\mathbf{j} \times \mathbf{H})_r = -jH$, которая играет роль «магнитного поршня», ускоряющего плазму в сторону оси цилиндра. При конечной проводимости ($\sigma < \infty$) магнитное поле и ток диффундируют со временем в плазму, и сила Ампера приобретает объемный характер. Впрочем, разрыв поля не является обязательным элементом постановки задачи, т.к. его можно сгладить в начальных условиях (1.35),

распределив плазменный электрический ток в периферийной части цилиндра и согласовав с условием (1.34)

Одномерное равновесное решение поставленной задачи описывается уравнениями, следующими из (1.28) при $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$, $V \equiv 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} + \frac{1}{c} jH &= 0; \\ \frac{j^2}{\sigma} - Q &= 0; \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{j}{\sigma} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.36)$$

Задача с этими уравнениями при заданных выше граничных условиях имеет явное аналитическое решение, описанное ниже в п. 3.1. Как сказано в п.1.2.3. равновесная конфигурация здесь не может отделить плазму от проводника.

Одномерная конфигурация в квазиравновесном режиме, отделенная от проводника, описывается теми же уравнениями (1.29), а граничное условие на проводнике $r = r_c$ следует упомянутому выше возрастанию тока J_c при $0 < t < t_1$, т.е. формулы (1.34) имеют вид

$$H(t, r_c) = \begin{cases} \frac{2J_c t}{cr_c t_1}, & 0 < t < t_1 \\ \frac{2J_c}{cr_c}, & t > t_1 \end{cases} \quad (1.37)$$

Начальное условие для магнитного поля в этом случае имеет вид:

$$H(0, r) = 0 \quad (1.38)$$

Как сказано выше, аналогичную зависимость от времени может иметь и J_{pl} в формуле (1.34) для H при $r = R$.

Глава 2. Численный метод решения задачи

2.1. Единицы измерения

Решение поставленных выше задач ведется в безразмерных переменных. Они отнесены к единицам измерения, составленным из заданных характерных размерных величин, участвующих в постановке задачи. К ним относятся: во-первых, ее геометрия – расстояние r_0 от каждого из проводников до оси цилиндра, характеризующее размер области (единица длины). Во-вторых начальные постоянные значения термодинамических параметров плазмы (1.13) – плотности ρ_0 и температуры T_0 . В третьих, заданное значение электрического тока J_c в каждом из проводников.

Отсюда естественные единицы

$$r_u = r_0, \quad \rho_u = \rho_0, \quad T_u = T_0. \quad (2.1)$$

Из них формируется единица напряженности магнитного поля H_u – поле тока J_c на расстоянии r_0 от оси проводника (электромагнитная природа задачи).

$$H_u = \frac{2J_c}{cr_0}. \quad (2.2)$$

Единицы давления p_u , внутренней энергии ε_u и скорости плазмы V_u удобно измерять в магнитных величинах:

$$p_u = \frac{H_u^2}{4\pi}, \quad \varepsilon_u = V_u^2 = \frac{H_u^2}{4\pi\rho_u}. \quad (2.3)$$

Единицы времени t_u , плотности электрического тока j_u и напряженности электрического поля E_u , естественным образом связаны с ними

$$t_u = \frac{r_u}{V_u}, \quad j_u = \frac{c}{4\pi} \frac{H_u}{r_0}, \quad E_u = \frac{V_u H_u}{c}. \quad (2.4)$$

2.2. Постановка МГД-задачи в безразмерном виде. Консервативная форма уравнений

Сохранив для всех безразмерных переменных их традиционные обозначения, перепишем систему МГД - уравнений (1.12) в «почти консервативной» форме: неконсервативным остается уравнение энергии согласно распространенной в вычислительной МГД практике и традиции [28] для обеспечения положительности температуры.

В декартовых координатах (x, y) уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho V_y}{\partial y} &= 0; \\
 \frac{\partial \rho V_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho V_x V_x + p - \frac{1}{2} (H_x^2 - H_y^2) \right] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho V_x V_y - H_x H_y] &= \\
 &= j_{ex} H_y; \\
 \frac{\partial \rho V_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\rho V_y V_x - H_x H_y] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho V_y V_y + p - \frac{1}{2} (H_y^2 - H_x^2) \right] &= \\
 &= -j_{ex} H_x; \\
 \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho \varepsilon V_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho \varepsilon V_y}{\partial y} &= -p \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) + \nu (j - j_{ex})^2 - Q; \\
 \frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{\partial (H_x V_y - H_y V_x)}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial y} (\nu (j - j_{ex})); \\
 \frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial (H_y V_x - H_x V_y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (\nu (j - j_{ex})); \\
 p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon = \frac{\beta}{2} \rho T; & \\
 j = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j_{pl} + j_{ex}; \quad j_{ex} = \frac{2}{r_c^2} e^{-\frac{(x-1)^2 + y^2}{r_c^2}} &
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

В полярных координатах (r, φ) с учетом плоской симметрии и круглой формы области, уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho V_r r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\varphi}{r \partial \varphi} &= 0; \\
\frac{\partial \rho V_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho V_r^2 r + pr + \frac{H_\varphi^2 - H_r^2}{2} r \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho V_r V_\varphi - H_r H_\varphi) &= \\
&= \frac{\rho V_\varphi^2}{r} + \frac{p}{r} - \frac{H_\varphi^2 - H_r^2}{2r} + j_{ex} H_\varphi; \\
\frac{\partial \rho V_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho V_r V_\varphi r - H_r H_\varphi r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\rho V_\varphi^2 + p - \frac{H_\varphi^2 - H_r^2}{2} \right) &= \\
&= -\frac{\rho V_r V_\varphi}{r} + \frac{H_r H_\varphi}{r} - j_{ex} H_r; \\
\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_r \varepsilon r}{r \partial r} + \frac{\partial \rho V_\varphi \varepsilon}{r \partial \varphi} &= -p \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r r}{\partial r} + \frac{\partial V_\varphi}{r \partial \varphi} \right) + \nu (j - j_{ex})^2 - Q; \\
\frac{\partial H_r}{\partial t} - \frac{\partial (V_r H_\varphi - V_\varphi H_r)}{r \partial \varphi} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\nu (j - j_{ex})); \\
\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial (V_r H_\varphi - V_\varphi H_r)}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} (\nu (j - j_{ex})); \\
p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon = \frac{\beta}{2} \rho T & \\
j = \frac{\partial H_\varphi r}{r \partial r} - \frac{\partial H_r}{r \partial \varphi}; \quad j_{ex} = j_0(t) e^{-\frac{(r-1)^2 + \varphi^2}{r_c^2}} &
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь $j_0(t)$ – возрастает при $0 < t < t_1$ по закону (1.28), безразмерное значение константы j_0 получено из условия (1.11) и равно $j_0 = 2/r_c^2$, где r_c отнесено к единице $r_u = r_0$. Отвод тепла Q имеет вид (1.2) с теперь уже безразмерным коэффициентом Q_0 .

Уравнения содержат безразмерные параметры: два традиционных для МГД-моделирования течений плазмы [28]

$$\beta = \frac{8\pi p_0}{H_u^2}, \quad \nu = \frac{c^2}{4\pi\sigma r_u V_u} = \frac{1}{\text{Re}_m}, \tag{2.7}$$

– отношение характерных значений газового $p_0 = (\gamma - 1)C_v \rho_0 T_0$ и «магнитного» $H_u^2 / 4\pi$ давлений и «магнитную вязкость» ν , обратную характерному значению «магнитного» числа Рейнольдса Re_m .

Задача рассматривается в квадранте (1.4).

Граничные условия на внешней границе для декартовых координат (x, y) , в постановке (1.7) имеют вид:

$$\begin{aligned} x = R: V_x = 0; H_x = 0; H_y = H_\Gamma \\ y = R: V_y = 0; H_x = -H_\Gamma; H_y = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

а в постановке (1.8)–следующий вид:

$$\begin{aligned} x = R: V_x = 0; H_x = 0; \nu \frac{\partial H_y}{\partial x} = E_\Gamma \\ y = R: V_y = 0; -\nu \frac{\partial H_x}{\partial y} = E_\Gamma; H_y = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Граничные условия на внешней границе для полярных координат (r, φ) в случае задания электрического поля имеют вид:

$$r = R: V_r = 0; H_r = 0; j_\Gamma \equiv \frac{\partial H_\varphi r}{r \partial r} = \frac{E_\Gamma}{\nu} \quad (2.10)$$

где безразмерное значение E_Γ соответствует размерному (1.8). Если на границе задано H_Γ согласно (1.7), то вместо последнего условия (2.10) берется

$$H_\varphi = H_\Gamma = \frac{2}{R} \left(1 + \frac{J_{pl}}{2J_c} \right) \quad (2.11)$$

Первое слагаемое справа соответствует току в проводниках, второе – отношению плазменного тока к нему.

На ограничивающих область лучах ($x > 0$ и $y > 0$) или ($\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$) граничные условия (1.5) остаются в силе.

Граничные условия содержат еще четыре безразмерных параметра, они связаны с конкретными деталями рассматриваемой задачи

$$r_c; \frac{H_\Gamma R}{2} - 1 = \frac{J_{pl}}{2J_c}; E_\Gamma; Q_0,$$

– отношения радиусов проводника и цилиндра, заданных токов в плазме и проводнике, электрическое поле E_Γ , а также количественная характеристика искусственно введенного в задачу «излучения».

Начальные условия (1.13) имеют вид

$$t = 0: \rho = 1; T = 1; \mathbf{V} = 0; \mathbf{H} = 0. \quad (2.12)$$

Одномерный вариант постановки задачи (1.29, 1.34, 1.35) в п. 1.2.4. очевидным образом переформулируется в тех же единицах и имеет следующий безразмерный вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V r}{r \partial r} &= 0 \\ \rho \frac{dV}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial r} + jH &= 0 \\ \rho \frac{d\varepsilon}{dt} + p \frac{\partial V r}{r \partial r} &= v j^2 - Q \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H V}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(v j) \\ p &= (\gamma - 1) \rho \varepsilon = \frac{\beta}{2} \rho T; \quad j = \frac{\partial H r}{r \partial r}; \quad Q = Q_0 \rho^2 T^4 \\ r_c &< r < 1 \end{aligned} \quad , \quad (2.13)$$

с граничными и начальными условиями

$$\text{При } r = r_c: V = 0; H = \frac{1}{r_c} \quad (\text{рис. 2.1})$$

$$\text{При } r = 1: V = 0; H = H_\Gamma = 1 + \frac{J_{pl}}{J_c} > 1 \quad (\text{рис. 2.2}) \quad , \quad (2.14)$$

$$\text{При } t = 0: V = 0; \rho = 1; T = 1; H = 0, \quad (2.15)$$

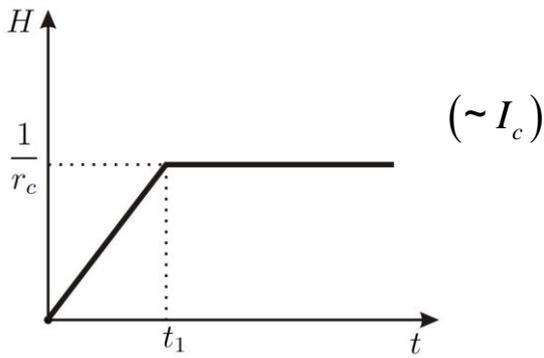


Рис. 2.1 ($r = r_c$)

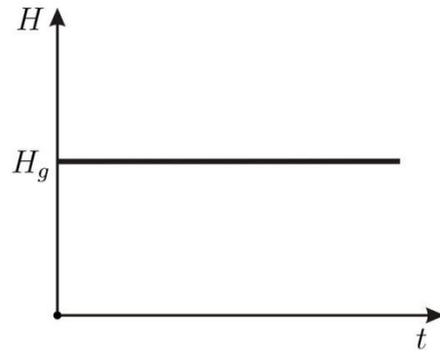


Рис. 2.2 ($r = 1$)

Рассмотрен также вариант (рис. 2.3) в котором ток на внешней границе со временем уменьшается до некоторого значения, или можно совсем выключить ток в плазме, т.е. уменьшить значение напряженности поля на внешней границе от значения $H = H_\Gamma > 1$ до $H = 1$:

$$H(t,1) = \begin{cases} H_\Gamma, & 0 < t < t_{21} \\ \frac{H_\Gamma(t_{22} - t) + t - t_{21}}{t_{22} - t_{21}}, & t_{21} < t < t_{22}, \\ 1, & t > t_{22} \end{cases} \quad (2.16)$$

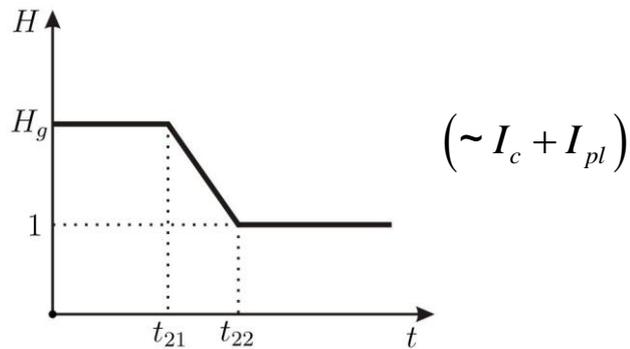


Рис. 2.3 ($r = 1$)

2.3. Численный метод решения нестационарной МГД - задачи

Численный метод решения задачи основан на следующих положениях. В разностном аналоге задачи использован принцип «расщепления по процессам». Сначала выделяется гиперболический элемент без диффузии магнитного поля, т.е. без правых частей в пятом и шестом уравнениях (2.5). Здесь реализован метод коррекции потоков (FCT) с двумерной версией коррекции по Залесаку [82 – 86], которая позволяет избежать дополнительного расщепления по направлениям. Схему с указанным свойством также называют «полностью многомерной». Затем к оставшейся параболической части задачи, – упомянутые выше два уравнения диффузии, – применяется метод переменных направлений с продольно-поперечной прогонкой [87 – 89, 110].

2.3.1. Разностная схема

Рассмотрим первую часть разностного алгоритма – обобщение Залесака метода FCT.

Рассмотрим двумерное скалярное уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0, \quad (2.17)$$

где U, F, G – функции независимых переменных (t, x, y) . Переход $U^n \rightarrow U^{n+1}$ на следующий шаг по времени состоит из следующих последовательных стадий:

На **первой** стадии вычисляются разностные потоки переноса $F_{l+1/2,m}^L$ и $G_{l,m+1/2}^L$ с помощью разностной схемы низкого порядка точности, сохраняющей монотонность решения. Далее следует расчет грубого варианта решения низкого порядка U^{td} :

$$\frac{U_{l,m}^{td} - U_{l,m}^n}{\Delta t} + \frac{F_{l+1/2,m}^L - F_{l-1/2,m}^L}{\Delta x} + \frac{G_{l,m+1/2}^L - G_{l,m-1/2}^L}{\Delta y} = 0. \quad (2.18)$$

На **втором** этапе предыдущий результат уточняется –вычисляются потоки переноса $F_{l+1/2,m}^H$ и $G_{l,m+1/2}^H$, с помощью разностной схемы более высокого порядка точности. Затем определяются нескорректированные антидиффузионные потоки:

$$F_{l+1/2,m}^{ad} \equiv F_{l+1/2,m}^H - F_{l+1/2,m}^L, \quad (2.19)$$

$$G_{l,m+1/2}^{ad} \equiv G_{l,m+1/2}^H - G_{l,m+1/2}^L. \quad (2.20)$$

Третий этап накладывает ограничения (посредством множителей C) на антидиффузионные потоки, чтобы их использование в расчете уточненного решения $U_{l,m}^{n+1}$ не приводило к усилению уже существующих (если такие имеются) экстремумов функции $U_{l,m}^{td}$ и не создавало новые – физически не обусловленные.

$$F_{l+1/2,m}^C = C_{l+1/2,m} F_{l+1/2,m}^{ad}, \quad 0 \leq C_{l+1/2,m} \leq 1, \quad (2.21)$$

$$G_{l,m+1/2}^C = C_{l,m+1/2} G_{l,m+1/2}^{ad}, \quad 0 \leq C_{l,m+1/2} \leq 1. \quad (2.22)$$

Описание расчета множителей C приведено ниже.

Получаем новые значения решения U^{n+1} на следующем слое с участием скорректированных антидиффузионных потоков.

$$\frac{U_{l,m}^{n+1} - U_{l,m}^{td}}{\Delta t} + \frac{F_{l+1/2,m}^C - F_{l-1/2,m}^C}{\Delta x} + \frac{G_{l,m+1/2}^C - G_{l,m-1/2}^C}{\Delta y} = 0. \quad (2.23)$$

Приведенный выше алгоритм, является обобщением Залесака известного метода коррекции потоков FCT [82 – 86], широко применяемого в расчетах задач с гиперболическими системами уравнений. Поскольку метод FCT принципиально одномерный, то для расчетов двумерных задач требует применения расщепления по направлениям. Напомним условия скорректированных, только в одном направлении, потоков метода FCT.

$$F_{l+\frac{1}{2},m}^C = S_{l+1/2} \max \left\{ 0, \min \left[\begin{array}{l} S_{l+1/2} (U_{l+2,m}^{td} - U_{l+1,m}^{td}), \\ \frac{\Delta t}{\Delta x} |F_{l+1/2,m}^{ad}|, \\ S_{l+1/2,m} (U_{l,m}^{td} - U_{l-1,m}^{td}) \end{array} \right] \right\}, \quad (2.24)$$

где

$$S_{l+1/2,m} = \begin{cases} +1, & U_{l+1/2,m}^{td} \geq 0 \\ -1, & U_{l+1/2,m}^{td} < 0 \end{cases}. \quad (2.25)$$

Условия третьего этапа достигаются за счет выбора корректирующих множителей. Они учитывают одновременно потоки по всем четырем, в двумерном случае ($F_{l+1/2,m}^{ad}$, $F_{l-1/2,m}^{ad}$, $G_{l,m+1/2}^{ad}$, $G_{l,m-1/2}^{ad}$), направлениям. Профиль решения в таком случае изображен на рис. 2.4

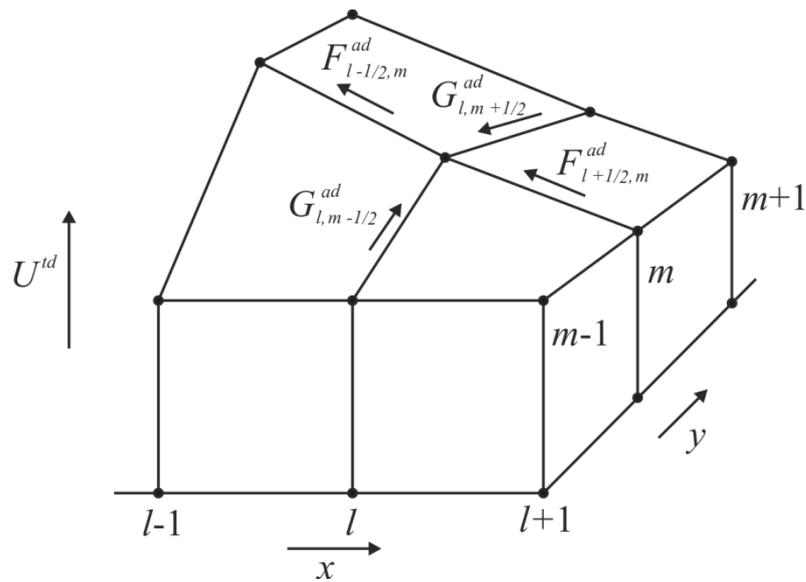


Рис. 2.4. Двумерный профиль транспортно-диффузионного решения U^{td} [83]

Для этого необходимо вычислить 6 вспомогательных величин:

$$\begin{aligned} P_{l,m}^+ &= \max(0, F_{l-1/2,m}^{ad}) - \min(0, F_{l+1/2,m}^{ad}) + \max(0, G_{l,m-1/2}^{ad}) - \min(0, G_{l,m+1/2}^{ad}) \\ Q_{l,m}^+ &= (U_{l,m}^{\max} - U_{l,m}^{td}) A_{l,m} \\ R_{l,m}^+ &= \begin{cases} \min(1, Q_{l,m}^+ / P_{l,m}^+), & \text{если } P_{l,m}^+ > 0 \\ 0, & \text{если } P_{l,m}^+ = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned}
P_{l,m}^- &= \max(0, F_{l+1/2,m}^{ad}) - \min(0, F_{l-1/2,m}^{ad}) + \max(0, G_{l,m+1/2}^{ad}) - \min(0, G_{l,m-1/2}^{ad}) \\
Q_{l,m}^- &= (U_{l,m}^{td} - U_{l,m}^{\min}) A_{l,m} \\
R_{l,m}^- &= \begin{cases} \min(1, Q_{l,m}^- / P_{l,m}^-), & \text{если } P_{l,m}^- > 0 \\ 0, & \text{если } P_{l,m}^- = 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

где: $P_{l,m}^+$ и $P_{l,m}^-$ – сумма всех антидиффузионных потоков направленных к узлу (l,m) и из узла соответственно; $A_{l,m}$ – двумерный элемент площади центрированный в узле сетки (l,m) ; $R_{l,m}^+$ и $(R_{l,m}^-)$ – величины, представляющие собой наименьшее ограничение сверху (снизу) для коэффициента, на который следует умножить все антидиффузионные потоки, идущие в (из) ячейку(и) (l,m) , для обеспечения отсутствия нефизических завышенных (заниженных) выбросов решения в этой точке.

Выбор величин, предложенный [83], $U_{l,m}^{\max}$ и $U_{l,m}^{\min}$ учитывает оба координатных направления и они рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned}
U_{l,m}^{\max} &= \max(U_{l-1,m}^a, U_{l+1,m}^a, U_{l,m}^a, U_{l,m+1}^a, U_{l,m-1}^a) \\
U_{l,m}^{\min} &= \min(U_{l-1,m}^b, U_{l+1,m}^b, U_{l,m}^b, U_{l,m+1}^b, U_{l,m-1}^b)
\end{aligned} \quad \text{где} \quad \begin{aligned} U_{l,m}^a &= \max(U_{l,m}^n, U_{l,m}^{td}) \\ U_{l,m}^b &= \min(U_{l,m}^n, U_{l,m}^{td}) \end{aligned} \tag{2.28}$$

Константы коррекции вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
C_{l+1/2,m} &= \begin{cases} \min(R_{l+1,m}^+, R_{l,m}^-), & \text{если } F_{l+1/2,m}^{ad} \geq 0 \\ \min(R_{l,m}^+, R_{l+1,m}^-), & \text{если } F_{l+1/2,m}^{ad} < 0 \end{cases} \\
C_{l,m+1/2} &= \begin{cases} \min(R_{l,m+1}^+, R_{l,m}^-), & \text{если } G_{l,m+1/2}^{ad} \geq 0 \\ \min(R_{l,m}^+, R_{l,m+1}^-), & \text{если } G_{l,m+1/2}^{ad} < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

2.3.2. Метод расчета

Консервативную разностную схему, описанную выше, естественно применить к системе уравнений в консервативной форме (2.5). Использование в численных расчетах уравнения энергии в консервативном

виде может вызвать большую ошибку определения температуры, а в некоторых случаях, даже возникновение отрицательных значений, поэтому напомним о нестрого консервативном виде этого уравнения.

Систему уравнений (2.5) можно представить в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}(t, x, y)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = \mathbf{Q}(t, x, y), \quad (2.29)$$

где \mathbf{U} – вектор функция, имеющая вид:

$$\mathbf{U} \equiv \{ \rho, \rho V_x, \rho V_y, \rho \varepsilon, H_x, H_y \},$$

\mathbf{F} и \mathbf{G} – вектор функции, определяемые следующим образом:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = UV_x + \mathbf{f} \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = UV_y + \mathbf{g}, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{f} \equiv \left\{ 0, p - \frac{1}{2}(H_x^2 - H_y^2), -H_x H_y, 0, 0, -H_x V_y \right\},$$

$$\mathbf{g} \equiv \left\{ 0, -H_x H_y, p + \frac{1}{2}(H_x^2 - H_y^2), 0, -H_y V_x, 0 \right\}.$$

Вектор \mathbf{Q} состоит из правых частей уравнений (2.5), включая неконсервативное слагаемое уравнения энергии

$$\mathbf{Q} \equiv \left\{ 0, j^{ex} H_y, -j^{ex} H_x, -p \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) + \nu (j - j^{ex})^2 - Q, 0, 0 \right\}.$$

Обратим внимание, что здесь последние две компоненты вектора \mathbf{Q} содержат нулевые значения, поскольку параболическая часть уравнений учтена в методе переменных направлений, как сказано выше.

Каждое из уравнений (2.29) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial U(t, x, y)}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = Q(t, x, y), \quad (2.31)$$

где записаны соответствующие компоненты одноименных векторов.

Из (2.30) следует, что основную часть потоков F и G составляет перенос величины U , со скоростями V_x и V_y в направлении координатных линий.

Рассматривается разностная сетка размеров $L \times M$, где L и M – количество точек по оси x и y соответственно (рис. 2.5). В целых точках

вычисляются значения $U_{l,m}$, а в полуцелых точках – разностные потоки величин F и G .

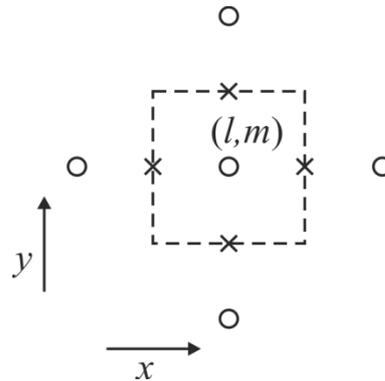


Рис. 2.5 Ячейка расчетной сетки

К уравнению вида (2.31) применяем три этапа вышеописанного разностного метода. На **первом этапе** используем диффузионный этап метода ФСТ: для расчета (грубого) решения низкого порядка точности выбираем в качестве потоков транспортно-диффузионные $F_{l+1/2,m}^{td}$, $G_{l,m+1/2}^{td}$. Они определяются с помощью монотонной схемы первого порядка.

$$F_{l+1/2,m}^{td} = F_{l+1/2,m}^t + F_{l+1/2,m}^d;$$

$$F_{l+1/2,m}^t = F_{l+1/2,m}^n = \frac{U_{l+1,m}^n + U_{l,m}^n}{2} \cdot \frac{V_{l+1,m}^x + V_{l,m}^x}{2} + \frac{f_{l+1,m}^n + f_{l,m}^n}{2};$$

$$F_{l+1/2,m}^d = -\mu_x^d (U_{l+1,m}^n - U_{l,m}^n)$$

Аналогично

$$G_{l,m+1/2}^{td} = G_{l,m+1/2}^t + G_{l,m+1/2}^d;$$

$$G_{l,m+1/2}^t = G_{l,m+1/2}^n = \frac{U_{l,m+1}^n + U_{l,m}^n}{2} \cdot \frac{V_{l,m+1}^y + V_{l,m}^y}{2} + \frac{g_{l,m+1}^n + g_{l,m}^n}{2};$$

$$G_{l,m+1/2}^d = -\mu_y^d (U_{l,m+1}^n - U_{l,m}^n)$$

$$\frac{U_{l,m}^{td} - U_{l,m}^n}{\Delta t} + \frac{F_{l+1/2,m}^{td} - F_{l-1/2,m}^{td}}{\Delta x} + \frac{G_{l,m+1/2}^{td} - G_{l,m-1/2}^{td}}{\Delta y} = Q_{l,m}^n. \quad (2.32)$$

Линейный аналог уравнения (2.31) с постоянными коэффициентами в разностных аппроксимациях запишется в виде

$$U_{l,m}^{td} = C_{-1,0}U_{l-1,m} + C_{0,-1}U_{l,m-1} + C_{0,0}U_{l,m} + C_{1,0}U_{l+1,m} + C_{0,1}U_{l,m+1} . \quad (2.33)$$

Коэффициенты диффузии μ_x^d и μ_y^d определяются требованием монотонности схемы $C_{l,m} \geq 0$. В общем случае они могут быть отличными друг от друга и зависеть от точки (l, m) .

$$\begin{aligned} C_{-1,0} &= \frac{\tau}{h_x} \left(\frac{V_x}{2} + \mu_x \right); & C_{0,-1} &= \frac{\tau}{h_y} \left(\frac{V_y}{2} + \mu_y \right) \\ C_{0,0} &= 1 - 2\tau \left(\frac{\mu_x}{h_x} - \frac{\mu_y}{h_y} \right) \\ C_{1,0} &= \frac{\tau}{h_x} \left(\mu_x - \frac{V_x}{2} \right); & C_{0,1} &= \frac{\tau}{h_y} \left(\mu_y - \frac{V_y}{2} \right) \end{aligned} . \quad (2.34)$$

Откуда получаем следующие неравенства на ограничение снизу на диффузионные коэффициенты и ограничение сверху шага по времени – условие типа Куранта:

$$\mu_x^d \geq \frac{|V_x|}{2}; \quad \mu_y^d \geq \frac{|V_y|}{2}; \quad \tau \leq \frac{h_x h_y}{2(\mu_x h_y + \mu_y h_x)} . \quad (2.35)$$

Ограничения (2.35) обеспечивают монотонность разностного оператора переноса. Кроме того существует известное ограничение Куранта, Фридрикса, Леви (CFL) [110] шага по времени во всех явных разностных схемах для гиперболических систем уравнений.

$$\tau \leq \frac{\min(h_x, h_y)}{\max_{l,m} (\mathbf{V} + C_{f,\max})_{l,m}} , \quad (2.36)$$

где $C_{f,\max}^2 = C_T^2 + C_A^2 = \frac{\gamma P}{\rho} + \frac{\mathbf{H}^2}{\rho}$; $\mathbf{V}^2 = V_x^2 + V_y^2$; $\mathbf{H}^2 = H_x^2 + H_y^2$.

В расчете каждого следующего слоя шаг по времени определяется по минимуму из обоих условий (2.35), (2.36)

Производные в неконсервативном слагаемом уравнения энергии аппроксимируем центральными разностями (используем второй порядок аппроксимации)

$$p \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \sim p_{l,m} \left(\frac{V_{l+1,m}^x - V_{l-1,m}^x}{2h_x} + \frac{V_{l,m+1}^y - V_{l,m-1}^y}{2h_y} \right) . \quad (2.37)$$

$$j = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \sim j_{l,m} = \frac{H_{l+1,m}^y - H_{l-1,m}^y}{2h_x} - \frac{H_{l,m+1}^x - H_{l,m-1}^x}{2h_y}$$

Разностную схему (2.32) для каждого уравнения можно также получить интегро-интерполяционным методом [111, 112]. Это осуществляется следующим образом: интегрируем дифференциальное уравнение по элементарной ячейке расчетной сетки, затем приводим его к интегральной форме, соответствующей законам сохранения и далее заменяем приближенными разностными выражениями входящие в уравнение интегралы. Полученная схема будет заведомо консервативной.

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (2.29)

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint U dx dy + \iint \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dx dy = \iint Q dx dy ,$$

Используя формулу Грина $\iint \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dx dy = \oint (F dy - G dx)$, получим

аппроксимационную формулу

$$\frac{U_{l,m}^{td} - U_{l,m}^n}{\Delta t} S_{l,m} + (F_{l+1/2,m}^{td} - F_{l-1/2,m}^{td}) \Delta y + (G_{l,m+1/2}^{td} - G_{l,m-1/2}^{td}) \Delta x = Q_{l,m}^n S_{l,m} .$$

, где $S_{l,m}$ – площадь ячейки расчетной сетки (рис. 2.5). Разделив обе части уравнения на $S_{l,m}$, получим (2.32). Его же можно получить, интегрируя уравнения системы (2.5).

На **втором этапе** также можно воспользоваться логикой метода FCT и ввести антидиффузионные потоки, для компенсации излишней диффузии, следующим образом: $F_{l+1/2,m}^{ad} = \mu_x^{ad} (U_{l+1,m}^{td} - U_{l,m}^{td})$; $G_{l,m+1/2}^{ad} = \mu_y^{ad} (U_{l,m+1}^{td} - U_{l,m}^{td})$

Поскольку фениксный вариант антидиффузии [86] является более предпочтительным (убирает систематическую ошибку вносимую диффузией,

при $V = 0$), остановимся на нем. Вместо функций U^{td} используется только транспортная ее составляющая.

$$F_{l+1/2,m}^{ad} = \mu_x^{ad} (U_{l+1,m}^t - U_{l,m}^t); \quad G_{l,m+1/2}^{ad} = \mu_y^{ad} (U_{l,m+1}^t - U_{l,m}^t).$$

Согласно Залесаку, потоками высокого порядка точности будут величины:

$$F_{l+1/2,m}^H \equiv F_{l+1/2,m}^{td} + F_{l+1/2,m}^{ad}; \quad G_{l,m+1/2}^H \equiv G_{l,m+1/2}^{td} + G_{l,m+1/2}^{ad},$$

Коэффициенты антидиффузии выбираем как часть диффузионных, стремясь сократить их разницу (т.е. приравнять), чтобы существенно уменьшить негативное влияние антидиффузионных слагаемых.

На **третьем этапе** осуществляется коррекция антидиффузионных потоков формулами (2.21 – 2.22). В 1D задачах она используется в классическом варианте Бориса-Бука, а для 2D постановок в многомерном варианте по Залесаку. Далее вычисляется решение U^{n+1} по формуле (2.23) на следующем слое.

По вышеописанным формулам рассчитываются внутренние точки сеточного решения. На границах рассматривается только половина ячейки, и учитываются правильным образом граничные условия.

В полярных координатах сетка устроена с постоянными шагами Δr , $\Delta \varphi$, метод проходит также, только с учетом координатных особенностей. Шаблон разностной схемы в данном случае представлен на рис. 2.6.

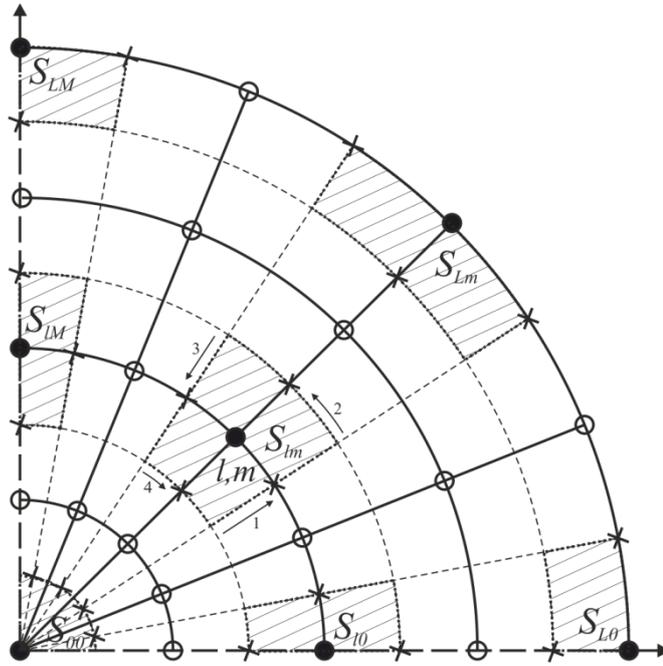


Рис. 2.6. Шаблон разностной схемы

Уравнение (2.29 – 2.30) имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}(t, r, \varphi)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{r \partial \varphi} = \mathbf{Q}(t, r, \varphi), \quad (2.38)$$

где \mathbf{U} – вектор функция, имеющая вид:

$$\mathbf{U} \equiv \{ \rho r, \rho r V_r, \rho r V_\varphi, \rho r \varepsilon, H_r, H_\varphi \},$$

\mathbf{F} и \mathbf{G} – вектор функции, определяемые следующим образом:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{U} V_r + \mathbf{f} \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \mathbf{U} V_\varphi + \mathbf{g}, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{f} \equiv \left\{ 0, pr - \frac{r}{2}(H_r^2 - H_\varphi^2), -H_r H_\varphi r, 0, 0, -H_r V_\varphi \right\},$$

$$\mathbf{g} \equiv \left\{ 0, -H_r H_\varphi r, pr + \frac{r}{2}(H_r^2 - H_\varphi^2), 0, -H_\varphi V_r, 0 \right\}.$$

Вектор \mathbf{Q} состоит из правых частей уравнений (2.6), включая неконсервативное слагаемое уравнения энергии

$$\mathbf{Q} \equiv \left\{ \begin{array}{l} 0, r j^{ex} H_\varphi + p + \rho V_\varphi^2 + \frac{H_r^2}{2} - \frac{H_\varphi^2}{2}, -r j^{ex} H_r - \rho V_r V_\varphi + H_r H_\varphi, \\ -p \left(\frac{\partial V_r r}{\partial r} + \frac{\partial V_\varphi r}{r \partial \varphi} \right) + vr (j - j^{ex})^2 - r Q, 0, 0 \end{array} \right\}.$$

По формуле Остроградского – Гаусса $\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} r dr d\varphi = \oint_{\Gamma} F_n ds$, интеграл дивергенции поля по области равен потоку поля через границу области.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{F} = Q; \quad \operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_r r}{r \partial r} + \frac{\partial F_\varphi}{r \partial \varphi}$$

Роль элементарных ячеек играют криволинейные трапеции, заштрихованные на рис. 2.6. Для внутренних точек: $S_{l,m} = r_l \Delta r \Delta \varphi$

На границах рассматривается только половина ячейки, и учитываются правильным образом граничные условия. Вблизи центра, расчетной ячейкой является криволинейный треугольник. Расчет центральной точки есть среднее арифметическое от значений по всем криволинейным треугольникам.

Получим аппроксимационную формулу

$$\frac{U_{l,m}^{td} - U_{l,m}^n}{\Delta t} S_{l,m} + \left(\Pi_{l+1/2,m}^r r_{l+1/2} - \Pi_{l-1/2,m}^r r_{l-1/2} \right) \Delta \varphi + \left(\Pi_{l,m+1/2}^\varphi - \Pi_{l,m-1/2}^\varphi \right) \Delta r = Q_{l,m}^n S_{l,m} .$$

Для численного моделирования создан комплекс программ на языке C++ [113, 114] с использованием как стандартных библиотек для реализации математических алгоритмов, так и frameworkQt для реализации: io-модуля, отображаемых данных по идеологии Model-View-Controller, возможности современных многоядерных процессоров – такой, как многопоточность и управления приложением. Некоторые расчеты проводились на гибридном вычислительном комплексе К-100 [115], расположенным в ИМП им. М.В.Келдыша, РАН. Он состоит из 64 узлов, на каждом из которых стоит по два шести-ядерных процессора. Программа написана так, что для расчетов использовался только 1 узел, но с использованием технологии QtConcurrent [116 – 118], которая автоматически приводят количество используемых потоков в соответствие с доступным количеством процессорных ядер. Это означает, что приложение, будет масштабироваться в зависимости от

используемой системы, при развертывании на многоядерных системах в будущем.

2.4. Особенности численного решения задач

Следует обратить внимание на особенности задачи и метода ее решения в рассматриваемом классе двумерных МГД-течений в плоскости магнитного поля (1.3 $\partial/\partial z \equiv 0$).

Особенность рассматриваемой задачи в том, что в ней переплетаются элементы эйлеровой и лагранжевой постановок. Эйлеровы логика и система координат диктуются фиксированной областью решения и неподвижными проводниками в ней. С другой стороны, задача имеет дело с движением фиксированной массы плазмы, за которым более естественно следить в подвижных лагранжевых координатах. Тем более, что в случаях, когда сила Ампера, толкающая плазму от границ к центру, заметно превосходит градиент давления (второе уравнение (1.12)), на периферии области может образоваться вакуумная зона, где МГД-уравнения теряют смысл. В обсуждаемой модели «компромиссным» вариантом является следующий [79]. Задача ставится и решается в эйлеровых координатах, но с условием, что, если в расчетной точке плотность плазмы, определяемая уравнениями, окажется ниже некоторого фиксированного малого допустимого значения δ , то она полагается равным этому значению $\rho = \delta > 0$. Для более адекватного моделирования магнитного поля в образовавшейся зоне «вакуума», в ней можно сильно уменьшить σ , поэтому задаем $v_{vac} > v_{pl}$. А на территории проводников, условно определенной в виде кругов радиуса r_c с центрами $r = \pm 1$, проводимость выше: $v_c < v_{pl}$, чтобы обеспечить обтекание проводников магнитным полем, т.е. избежать проникновение плазмы в область проводников. Магнитная вязкость, в части пространства занятой плазмой, полагалась $(v_{pl})_{l,m} = v_0 + \frac{v_1}{T_{l,m}^{3/2}}$, где v_0, v_1 – некоторые константы.

Такая форма записи позволяет использовать в расчетах как спитцеровскую проводимость $\sigma \approx T^{3/2}$ [119], так и постоянную. В большинстве расчетов она предположена, для простоты, постоянной.

Уравнения МГД, выведенные с участием уравнений Максвелла, подразумевают соленоидальность магнитного поля, т.е. отсутствие «магнитных зарядов»

$$\operatorname{div}\mathbf{H} \equiv \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \equiv \frac{\partial H_r}{r \partial r} + \frac{\partial H_\varphi}{r \partial \varphi} = 0, \quad (2.40)$$

которая должна воспроизводиться в численном решении задач. Это автоматически выполняется в « ψ – версии» уравнений, где вместо двух компонент поля H_x , H_y или H_r , H_φ участвует одна скалярная функция потока ψ (см. [28, 77, 79, 106]). В настоящей работе отдано предпочтение « H – версии», которая требует следить за разностным аналогом уравнения (2.40) с нужной точностью, что и сделано в расчетах.

Вторая особенность менее очевидна и связана со вторым (параболическим) этапом решения. На этом этапе пятое и шестое уравнения (2.5) и (2.6) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + F_x \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + F_y \\ &\text{и} \\ \frac{\partial H_r}{\partial t} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\nu \frac{\partial H_\varphi}{r \partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\nu \frac{\partial H_r}{r \partial \varphi} \right) + F_r \\ \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \frac{\partial H_\varphi}{r \partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \frac{\partial H_r}{r \partial \varphi} \right) + F_\varphi \end{aligned} \quad (2.41)$$

где свободные члены F_x , F_y или F_r , F_φ включают в себя продукт, полученный на первом этапе методом FCT, и известную функцию j_{ex} . Каждое из уравнений (2.41) содержит вторую производную только по одной

координате. Оставшиеся смешанные производные в методах переменных направлений аппроксимируются разностями на предыдущем слое, т.е. известны [89]. Таким образом каждая из неизвестных компонент поля \mathbf{H} должна была бы определяться по неявной схеме только в одном направлении, а по другому направлению схема явная. Устойчивость такой схемы требует жесткого ограничения на шаг по времени: $\Delta t \sim (\Delta r)^2$. Это ограничение можно обойти, переписав смешанные производные в уравнениях (2.41) с учетом уравнения (2.40), а именно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial H_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + F'_x \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) + F'_y \\ &\text{и} \\ \frac{\partial H_r}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial H_r r}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{r \partial \varphi} \left(v \frac{\partial H_r}{r \partial \varphi} \right) + F'_r \\ \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial H_\varphi r}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{r \partial \varphi} \left(v \frac{\partial H_\varphi}{r \partial \varphi} \right) + F'_\varphi \end{aligned} \quad (2.42)$$

где F' включают в себя помимо F первые производные функций компонент \mathbf{H} и v . Здесь каждое уравнение содержит вторые производные искомой функции по обоим переменным и допускает решение методом продольно-поперечной прогонки без дополнительного ограничения шага по времени.

Третья особенность численного решения задачи относится к его гиперболическому этапу. Здесь, как хорошо известно, существует ограничение на шаг по времени – условие Куранта для явных разностных схем. В методе FCT оно проявляется дважды: один раз в выборе коэффициента искусственной диффузии (2.35) в каждом уравнении, второй раз – в собственно «курантовском» виде (2.36), требуя, чтобы характеристики гиперболической системы уравнений не выходили за пределы шаблона явной схемы. Оба ограничения имеют вид

$$\Delta t < Ch, \quad (2.43)$$

где h характерный шаг по пространству. В задачах с цилиндрической геометрией в полярных координатах (r, φ) центр круга $r=0$ является особой точкой, и при приближении к нему фактическая величина шага по азимуту $h = r\Delta\varphi$ стремится к нулю. Точнее здесь $r \sim \Delta r$, и шаг $h \sim \Delta r \cdot \Delta\varphi$, а вместе с ним и Δt становятся второго порядка малости. В выборе коэффициента диффузии это может не создавать проблем, т.к. коэффициент C в (2.43) пропорционален скорости, а обе скорости V_r и V_φ при $r \rightarrow 0$ стремятся также к нулю. Но в условии Куранта этот коэффициент определяется скоростью звука (в данном случае «магнитного» C_f в формуле (2.36)), которая остается конечной и при $r=0$. В этом особенность численного решения задач в полярных координатах в области, содержащей центр. Эта особенность отсутствует, если геометрия задачи допускает декартовы координаты. Однако они соответствуют прямоугольным областям, расчеты в которых дополнительно осложняются в окрестностях угловых точек границы.

Последнее замечание о деталях численных методов, касается коэффициента магнитной вязкости ν , который может быть, вообще говоря, переменным и даже иногда разрывным, например, на границе плазма – вакуум. В использованных здесь численных методах значения искомых функций ρ , p , \mathbf{V} , \mathbf{H} , приписаны точкам с целыми индексами по обоим пространственным направлениям, например, ρ_{lm} . К ним же следует отнести и значения ν , поскольку они зависят от свойств среды. Но в разностных аналогах уравнений магнитной индукции (2.5 и 2.6) участвуют значения ν в полуцелых по одному из направлений точках. Их следует интерполировать по двум ближайшим целым точкам, но не средним арифметическим, а средним гармоническим

$$\frac{1}{v_{l+\frac{1}{2},m}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_{l,m}} + \frac{1}{v_{l+1,m}} \right), \quad \frac{1}{v_{l,m+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_{l,m}} + \frac{1}{v_{l,m+1}} \right), \quad (2.44)$$

что обеспечивает адекватную аппроксимацию вторых производных компонент магнитного поля в случае разрывного коэффициента диффузии [112].

2.5. 2D равновесие. Решение уравнения Грэда-Шафранова. Итерационный метод

Краевая задача с уравнением Грэда-Шафранова сформулированная выше рассматривается в прямоугольной области $|x| \leq R$, $|y| \leq R$ в декартовых координатах. Она приводится к безразмерным переменным с теми же единицами измерения указанными в п. 2.1. Функцию потока ψ магнитного поля участвующую в постановке задачи естественно измерять в таких единицах: $\psi_u = H_u r_u$. Участвующие в задаче геометрические параметры r_c из формулы (1.10) и R относим к единице r_u , а q из формулы (1.23) относим к ψ_u . В безразмерных переменных формулируемая задача переписывается следующим образом.

Уравнение Грэда-Шафранова

$$\Delta \psi + g(\psi) = 0, \quad (2.45)$$

где

$$g(\psi) = \frac{dp}{d\psi} + j_{ex}, \quad (2.46)$$

содержит функцию $p(\psi)$. Ее удобно задать в виде:

$$p(\psi) = p_0 \exp \left(- \left(\frac{\psi - \psi_0}{q} \right)^2 \right) \quad (2.47)$$

и в связи с требованием иметь максимальное давление в центре и на сепаратрисе положить параметр ψ_0 равным значению решения ψ в нуле, т.е.

$$\psi_0 = \psi(0) \text{ при } x = y = 0 \quad (2.48)$$

После этого постоянное граничное значение ψ_Γ в формуле (1.24) может быть задано произвольным, например следующим:

$$\psi_\Gamma = 0 \quad (2.49)$$

Роль окончательного решения задачи играет разность $\psi - \psi_0$.

Заданный внешний ток (1.10) имеет вид

$$j_{ex} = \frac{2}{r_c^2} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-1)^2 + (y)^2}{r_c^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x+1)^2 + (y)^2}{r_c^2}\right) \right\} \quad (2.50)$$

Уравнение (2.45) аппроксимируется конечными разностями

$$\Lambda_1(\psi_{l,m}) + \Lambda_2(\psi_{l,m}) + g(\psi_{l,m}) = 0 \quad (2.51)$$

где

$$\Lambda_1(\psi_{l,m}) = \frac{\psi_{l-1,m} - 2\psi_{l,m} + \psi_{l+1,m}}{h^2}, \quad \Lambda_2(\psi_{l,m}) = \frac{\psi_{l,m-1} - 2\psi_{l,m} + \psi_{l,m+1}}{h^2} \quad (2.52)$$

Шаг по координате обоих направлений выбираем постоянным и равным h . Индексы l и m – номера точек сетки по координатам x и y соответственно. Краевую задачу с разностными уравнениями решаем итерационным методом типа установления, хорошо зарекомендовавшим себя [28, 61], в которой нелинейная правая часть (неоднородность) $g(\psi_{l,m}^k)$ берется с предыдущей итерации.

$$\frac{\psi_{l,m}^{k+1} - \psi_{l,m}^k}{\tau} = \Lambda_1(\psi_{l,m}^{k+1}) + \Lambda_2(\psi_{l,m}^{k+1}) + g(\psi_{l,m}^k) = 0 \quad (2.53)$$

Коэффициенты при неизвестных функциях ψ^{k+1} постоянны и область решения – прямоугольник, следовательно, уравнение (2.53) можно решать с применением дискретного преобразования Фурье [120] по обеим переменным. Поскольку граничные условия задачи нулевые, в качестве собственных функций разложения в ряд Фурье удобно взять синусы

$$V_l^\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{N}lh\alpha\right)V_m^\beta = \sin\left(\frac{\pi}{N}mh\beta\right), \quad (2.54)$$

где $0 \leq m \leq M$, $0 \leq l \leq L$, $Mh = Lh = N$, N – длина стороны квадрата.

Записанное уравнение в операторном виде (2.53) умножаем скалярно на V_l^α , затем на V_m^β

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_1 \psi_{l,m}^{k+1}, V_l^\alpha \rangle &= \psi_{\alpha,m}^{k+1} 2 \cos\left(\frac{\pi}{N}h\alpha\right); \\ \langle \Lambda_2 \psi_{\alpha,m}^{k+1}, V_m^\beta \rangle &= \psi_{\alpha,\beta}^{k+1} 2 \cos\left(\frac{\pi}{N}h\beta\right); \end{aligned} \quad (2.55)$$

Разностный оператор, включающий в себя три точки сетки после умножения скалярно на базисные функции преобразования Фурье превращается в умножение на функцию.

А в результате двух преобразований Фурье пятиточечное разностное уравнение для исходной функции преобразуется в алгебраическое уравнение для фурье-образов, которое решается точно.

Итак, $\psi_{\alpha,m}^{k+1} = \langle \psi_{l,m}^{k+1}, V_l^\alpha \rangle$ – преобразование Фурье исходной функции по первому индексу и $\psi_{\alpha,\beta}^{k+1} = \langle \psi_{\alpha,m}^{k+1}, V_m^\beta \rangle$ – преобразование Фурье исходной функции по второму индексу. Обозначим $U_{\alpha,\beta}^k$ – фурье-образ исходной функции $\psi_{l,m}^k$, $G_{\alpha,\beta}^k$ – фурье-образ неоднородности уравнения $g(\psi_{l,m}^k)$.

После всех преобразований, уравнение (2.53) запишется в виде

$$U_{\alpha,\beta}^{k+1} = \frac{U_{\alpha,\beta}^k + \tau G_{\alpha,\beta}^k}{1 - \frac{2\tau}{h^2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{N}\alpha h\right) + \cos\left(\frac{\pi}{N}\beta h\right) - 2 \right)}, \quad (2.56)$$

Таким образом, алгоритм расчетов следующий:

Рассчитываем фурье-образы для исходной функции $\psi_{l,m}^k$ и неоднородности уравнения $g(\psi_{l,m}^k)$ поочередно по каждому индексу.

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha,m}^k &= \sum_{l=1}^{L-1} \psi_{l,m}^k \sin\left(\frac{\pi}{N} l \alpha h\right); & U_{\alpha,\beta}^k &= \sum_{m=1}^{M-1} \psi_{\alpha,m}^k \sin\left(\frac{\pi}{N} m \beta h\right) \\ g_{\alpha,m}^k &= \sum_{l=1}^{L-1} g_{l,m}^k \sin\left(\frac{\pi}{N} l \alpha h\right); & G_{\alpha,\beta}^k &= \sum_{m=1}^{M-1} g_{\alpha,m}^k \sin\left(\frac{\pi}{N} m \beta h\right), \end{aligned} \quad (2.57)$$

Далее рассчитываем следующий, $(k+1)$ слой, по формуле

$$U_{\alpha,\beta}^{k+1} = \frac{U_{\alpha,\beta}^k + \tau G_{\alpha,\beta}^k}{1 - \frac{2\tau}{h^2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{N} \alpha h\right) + \cos\left(\frac{\pi}{N} \beta h\right) - 2 \right)}, \quad (2.58)$$

Затем восстанавливаем искомую функцию по фурье-образу $(k+1)$ слоя

$$\psi_{\alpha,m}^{k+1} = \frac{2}{L} \sum_{\beta=1}^{L-1} U_{\alpha,\beta}^{k+1} \sin\left(\frac{\pi}{N} m \beta h\right); \quad \psi_{l,m}^{k+1} = \frac{2}{M} \sum_{\alpha=1}^{M-1} \psi_{\alpha,m}^{k+1} \sin\left(\frac{\pi}{N} l \alpha h\right), \quad (2.59)$$

Неизвестный параметр ψ_0 согласно логике (2.48) будем полагать равным значению ψ^k с предыдущей итерации $\psi_0 = \psi^k(0,0)$.

Таким образом, на каждой следующей итерации алгоритма известны все необходимые для расчета величины.

В виду симметрии задачи относительно осей, достаточно рассмотреть ее в квадранте (1.4). Тогда будут следующие изменения в постановке задачи и методе ее решения. Во-первых, учитываем ток только от одного проводника $(x=1, y=0)$. Во вторых, в силу дополнительных граничных условий на упомянутых осях

$$\left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{y=0} = \left. \frac{d\psi}{dy} \right|_{x=0} = 0 \quad (2.60)$$

в качестве базисных функций преобразований Фурье вместо синусов (2.54) используются разложение по косинусам

$$V_m^\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2N} m h (2\alpha + 1)\right), \quad (2.61)$$

где $0 \leq m \leq M$, $0 \leq l \leq L$, $Mh = Lh = N$, N – длина стороны рассматриваемого квадрата.

Поскольку выбранные функции дискретного преобразования Фурье не внесут изменений в формулу (2.58), то новая область решения задачи не внесет в алгоритм больше никаких изменений.

В качестве основного использовался более короткий метод, а расчет использующий всю область использован в качестве теста на достоверность результатов.

Основная задача решалась на сетке 50x50 точек в квадранте (100x100 точек для всей области), с шагом по времени $\tau = 0,004$. Считалось, что решение установилось, когда суммарная среднеквадратичная относительная ошибка меньше 0,5%

$$\delta\psi^k = \sqrt{\frac{\sum_{l,m=0}^{L,M} \left(\frac{\psi_{lm}^k - \psi_{lm}^{k-1}}{\psi_{lm}^{k-1}} \right)^2}{LM}} < 0,005 ,$$

где k – номер итерации.

Глава 3. Модель окрестности проводника

3.1. 1D Равновесие, точное решение. Зависимости от β (β_{cr})

Равновесная конфигурация сосредоточена непосредственно у проводника, на поверхности которого давление плазмы максимально. По этой причине она не интересна для Галатей, но может представлять интерес в каких-то других вопросах, поэтому остановимся на её описании в терминах уравнений (1.36). Их решение находится в явном виде, если предположить для простоты проводимость плазмы постоянной: $\nu \equiv \text{const}$ [67, 92]. В этом случае $j \equiv \text{const}$, и с учетом граничных условий (2.14) для H :

$$Hr = 1 + \frac{j}{2}(r^2 - r_c^2); \quad \frac{j}{2} = \frac{H_r - 1}{1 - r_c^2}, \quad (3.1)$$

Из (1.36) и (3.1) получим

$$p(r) = C + j \left(1 - \frac{jr_c^2}{2} \right) \ln \frac{1}{r} + \frac{j^2}{4} (1 - r^2), \quad (3.2)$$

Константа интегрирования $C = p(1)$ не может быть определена из строго статической постановки задачи, где давление присутствует только в виде производной $\frac{dp}{dr}$. Найти ее можно, если привлечь к рассмотрению процесс установления и использовать закон сохранения массы: из первого уравнения (2.13), проинтегрировав его по области, получится

$$\frac{d}{dt} \int \rho r dr = \rho r V \Big|_{r_c}^R = 0,$$

т.е. полная масса не зависит от времени – сохраняется, следовательно она равна своему начальному значению. Отсюда следует, согласно начальным и граничным условиям:

$$\int_{r_c}^1 \rho(t, r) r dr = \int_{r_c}^1 \rho(0, r) r dr = \frac{1 - r_c^2}{2}, \quad (3.3)$$

В установившемся равновесии нужно выразить ρ через p , подставить его в (3.3) и из полученного равенства определить неизвестное значение C . Связь

ρ и p зависит от типа «излучения» Q . Если $Q \equiv \nu j^2$ тождественно, то, как сказано выше, процесс установления адиабатичен, и

$$p = \frac{\beta}{2} \rho^\gamma. \quad (3.4)$$

Если же $Q = Q_0 \rho^2 T^4$, то в установившемся равновесии $Q_0 \rho^2 T^4 = \nu j^2$, $p = (\beta/2) \rho T$, откуда

$$Q_0 p^4 = \left(\frac{\beta}{2}\right)^4 \nu j^2 \rho^2, \quad (3.5)$$

Равенство (3.5) и есть искомая связь ρ и p в равновесии вместо (3.4), т.е. играет роль уравнения состояния.

Изложенная схема решения имеет смысл лишь в том случае, если $C = p(1) \geq 0$. Плазма занимает при этом весь объем цилиндра.

Нетрудно проверить, что при убывании параметра β или возрастании величины H_Γ на границе (т.е. при возрастании электрического тока в проводнике I_c или в плазме I_{pl}) значение C убывает. Существует пороговое значение β_{cr} , зависящее от H_Γ , при достижении которого константа C обращается в нуль, а при $\beta < \beta_{cr}(H_\Gamma)$ она становится отрицательной. В этом случае плазма может занимать не весь объем цилиндра, а лишь его часть, примыкающую к проводнику $r_c < r < r_1$, вокруг которой образуется область вакуума при $r_1 < r < 1$. Расчет равновесия при $\beta < \beta_{cr}$ непринципиально усложняется. В вакууме тока нет: $\nu = \infty$, $j = 0$. Вместо формул (3.1), (3.2) имеют место

$$Hr = \begin{cases} 1 + \frac{j}{2}(r^2 - r_c^2) & \text{при } r < r_1; \\ 1 & \text{при } r > r_1 \end{cases}; \quad \frac{j}{2} = \frac{H_\Gamma - 1}{r_1^2 - r_c^2}, \quad (3.6)$$

$$p = \begin{cases} j \left(1 - \frac{j r_c^2}{2}\right) \ln \frac{r_1}{r} + \frac{j^2}{4}(r_1^2 - r^2), & r < r_1, \\ 0, & r > r_1 \end{cases}, \quad (3.7)$$

Радиус r_1 границы плазма – вакуум зависит от β и H_Γ и играет здесь роль константы интегрирования, которая определяется, как и выше, из закона сохранения

$$\int_{r_c}^{r_1} \rho r dr = \frac{1-r_c^2}{2}, \quad (3.8)$$

в котором интеграл берется только по области $r < r_1$, занятой плазмой.

Это аналитическое решение соответствует идеальной постановке задачи с вакуумом за r_1 , где предполагалось что $v_{vac} = \infty$. На самом деле, как сказано в п. 2.4, $v = v_{vac} \gg v_{pl}$, $r > r_1$. С учетом этого аналитическое решение уточняется следующим образом.

Введём для удобства: $\alpha = \frac{v_{pl}}{v_{vac}} \ll 1$;

Вместо (3.6) и (3.7) получаем:

$$H(r, r_1) = \begin{cases} \frac{1}{r} \left(1 + j_{pl} \frac{r^2 - r_c^2}{2} \right), & r < r_1 \\ \frac{1}{r} \left(1 + j_{pl} \frac{r_1^2 - r_c^2}{2} + \alpha j_{pl} \frac{r^2 - r_1^2}{2} \right), & r > r_1 \end{cases}, \quad (3.9)$$

$$j_{pl} = \frac{2(H_\Gamma - 1)}{r_1^2 - r_c^2 + \alpha(1 - r_1^2)}, \text{ в области } r_c < r < r_1.$$

$$p(r, r_1) = j_{pl} \left(1 - \frac{j_{pl} r_c^2}{2} \right) \ln \frac{r_1}{r} + \frac{j_{pl}^2}{4} (r_1^2 - r^2). \quad (3.10)$$

Роль константы интегрирования в этом случае играет граница плазмы r_1 . Она находится из условия $p(r=r_1)=0$ и закона сохранения массы, аналогичного (3.8).

Или аналогично (3.3), тогда:

$$\int_{r_c}^{r_1} \rho r dr + \int_{r_1}^1 \delta r dr = \frac{1-r_c^2}{2}, \quad (3.11)$$

При $\beta = \beta_{cr}$, очевидно, $r_1 = 1$, т.е. граница плазмы совпадает с границей цилиндра, и при $\beta > \beta_{cr}$ следует вернуться к формулам (3.1) – (3.2).

Полученное аналитическое решение играет роль теста в численном решении задачи после установления равновесного состояния.

Аналитические вычисления производятся с помощью системы символьной математики Maple [121].

3.2. Нестационарная задача. Расчет установления равновесной конфигурации

В численном исследовании нестационарной задачи проведено несколько серий расчётов для двух тепловых режимов. В адиабатическом процессе ($\nu j^2 \equiv Q$), в процессе с джоулевым нагревом νj^2 и компенсирующим его излучением $Q = Q_0 \rho^2 T^4$, с различными параметрами β .

Аналитически найдены указанные выше критические значения β_{cr} параметра β . Например, при $\nu = 0,1 = const$, $Q_0 = 0,01$:

$$\beta_{cr\ adiabata} = 1,24504; \quad \beta_{cr\ nagrev} = 0,91055$$

Представленные ниже расчеты, проведены при двух различных значениях параметра β , чтобы получить равновесные конфигурации обоих упомянутых типов. Одно из них соответствует $\beta = 2,0 > \beta_{cr}$, т.е. плазма занимает всю расчётную область, другое значение соответствует $\beta = 0,5 < \beta_{cr}$ и плазма занимает только часть ловушки $r_c < r < r_1 < 1$ с вакуумом на периферии. Область $r_1 < r < 1$ – есть область вакуума.

Вычисления проводились на расчётных сетках с широким диапазоном, содержащих от 40 до 640 точек по радиусу. После тщательного проведения необходимых проверок, остановились на 160 расчетных точек.

В процессе проведения расчетов было проведено методическое исследование иллюстрирующее эффективность антидиффузии метода коррекции потоков FCT [82, 84]. Она подтверждается следующими сравнениями: чтобы получить близкие друг к другу результаты расчеты без антидиффузии потребовали в 4 раза большего числа точек, чем с антидиффузией и коррекцией. А поскольку при этом шагов по времени тоже в 4 раза больше, введение антидиффузии с коррекцией потоков приводит к экономии почти в 16 раз. Коэффициент антидиффузии в основном оказалось возможным положить $adKoeff = 0,9$.

3.2.1. Равновесные плазменные конфигурации занимающие весь объем цилиндра

Во всех вариантах расчёта при $\beta = 2,0$ (соответствует заданию слабого тока), то есть в случае, когда плазма занимает весь объем цилиндра, со временем устанавливается практически равновесный режим, характеризующийся малой скоростью $|V| \approx 0,002 \div 0,004$. Для сравнения – на активной стадии установления скорость достигает значения: $|V| \approx 0,37 \div 0,31$. Время установления составляет примерно 2 безразмерных единицы (рис.3.1). Эти режимы допускают сравнения с аналитическим решением.

Параметры: $r_c = 0,2$; $H_g = 1,6$; $Q_0 = 0,001$; $\nu = 0,1$;

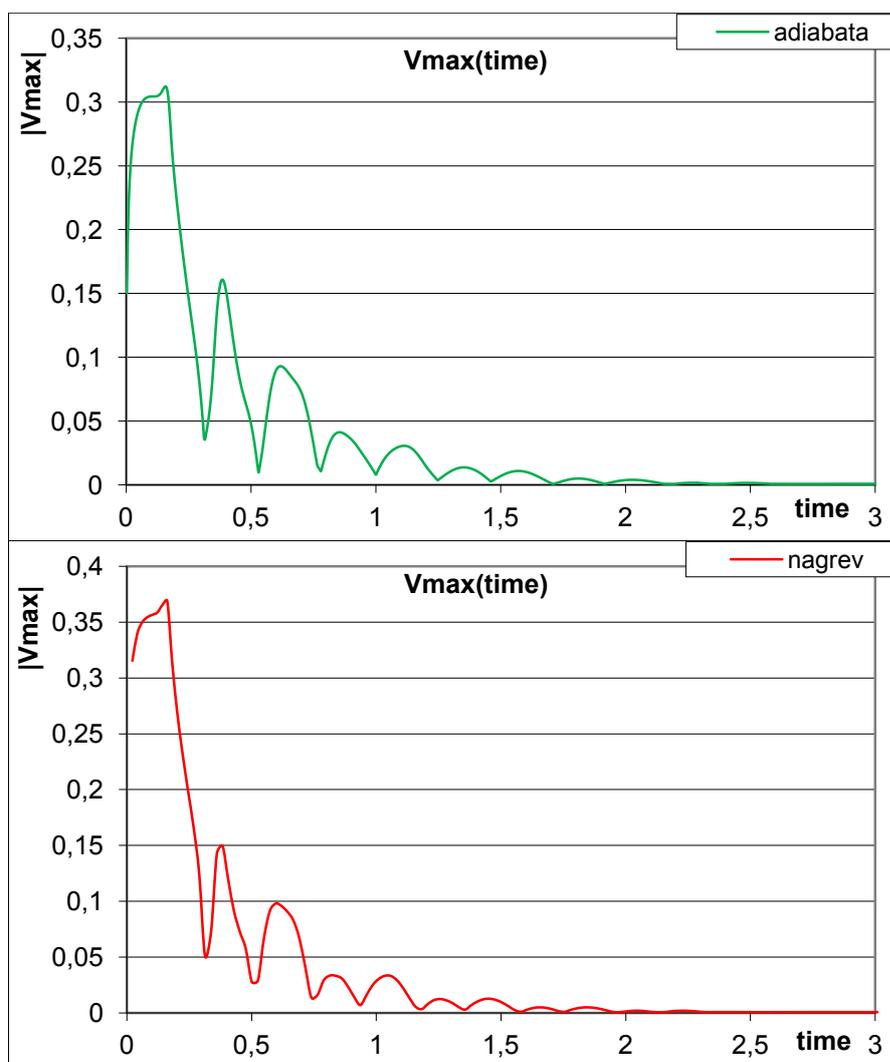


Рис. 3.1 Зависимость максимальной скорости от времени для двух режимов.

На рисунках 3.2 и 3.3 представлены графики рассчитанных значений установившихся плотности, скорости, энергии, напряжённости магнитного поля, температуры, давления и плотности электрического тока для указанных выше двух тепловых режимов – адиабатического и с джоулевым нагревом, с излучением разных мощностей.

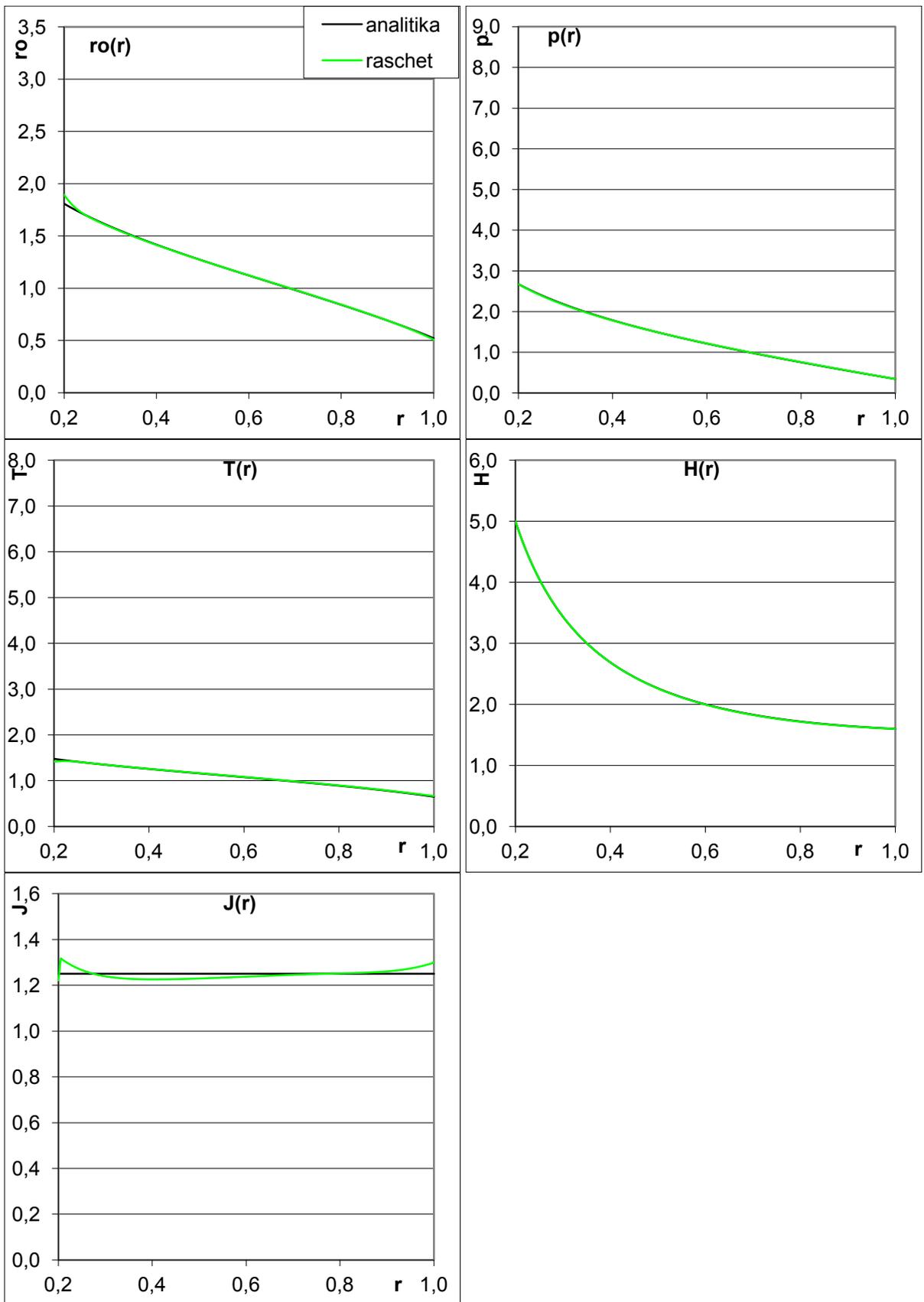


Рис. 3.2 Адиабатический тепловой режим.

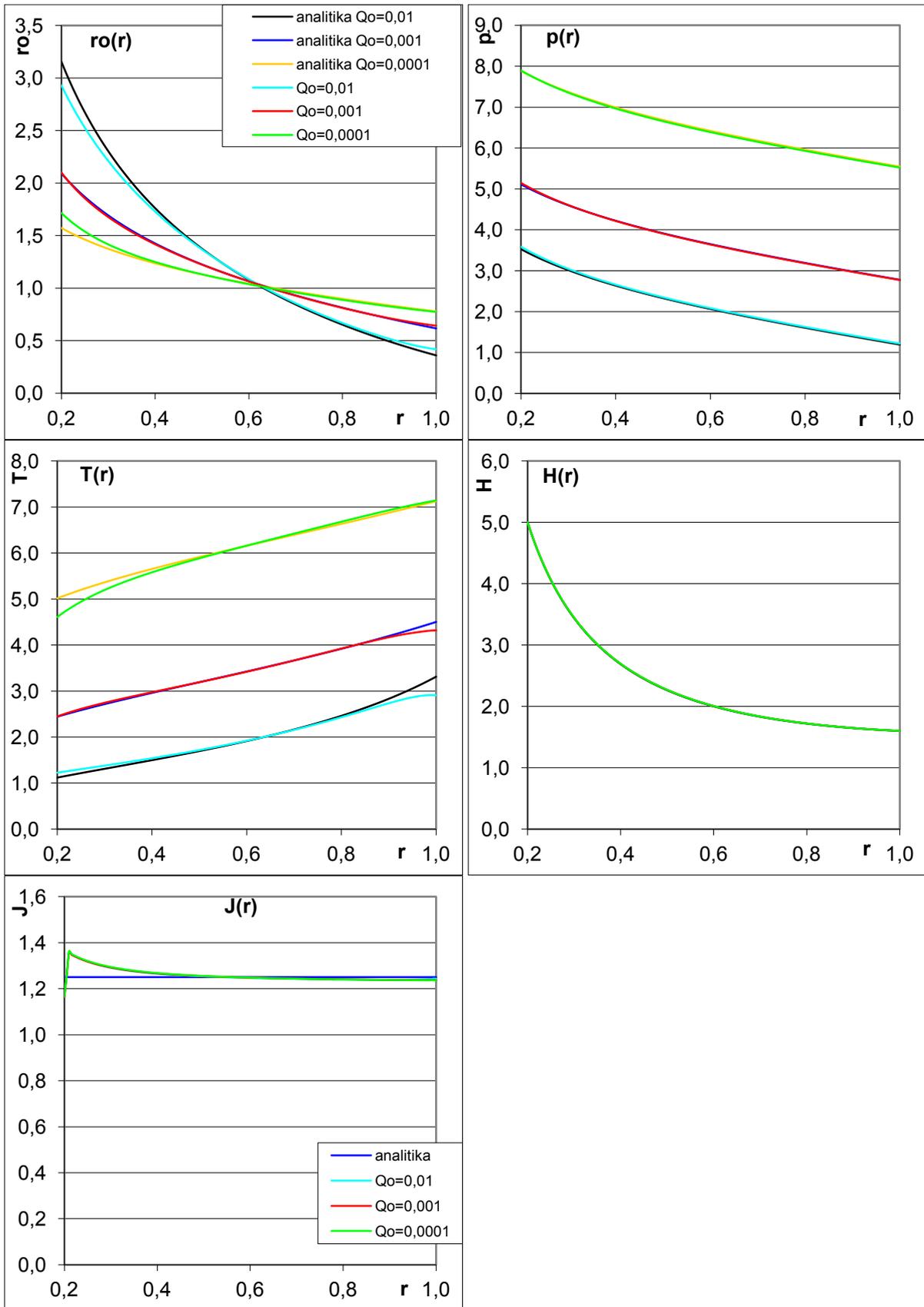


Рис. 3.3 Тепловой режима с джоулевым нагревом и компенсирующим его излучением при различных значениях коэффициента Q_0 .

Проведен сравнительный анализ результатов в обеих разновидностях модели. Физическое отличие вариантов можно наблюдать, главным образом, на графиках температуры: в варианте с джоулевым нагревом и излучением она всегда превосходит «адиабатическую» и тем выше, чем слабее излучение. Варианты нагрева несколько перераспределяют плотность и сильно повышают давление в соответствии с температурой. Наименьшее влияние различия тепловых режимов оказывает на распределение магнитного поля и электрического тока. В режиме с нагревом и излучением расчеты проведены с тремя различными значениями коэффициента Q_0 . Помимо их упомянутого влияния на температуру можно заметить, что значение $Q_0 = 0,001$ оказалось наиболее естественным, т.к. рассчитанные графики при нем оказались ближе всего к аналитическим решениям.

3.2.2. Плазменные конфигурации в центральной части цилиндра с образованием вакуумной области на периферии

Расчёт течения с образованием плазменной конфигурации только в центральной части цилиндра проведён при значении $\beta = 0,5$ только для адиабатического варианта. Уменьшение β соответствует более сильным магнитному полю и току при одном и том же начальном давлении плазмы.

Общие параметры: $\beta = 0,5$; $\nu_{pl} = 0,03$; $\nu_{vac} = 10,0$.

В расчётах этого варианта со временем устанавливается почти равновесный режим, характеризующийся $|V| \approx 0,05$. В активной стадии установления $|V| \sim 1$. Время практически установления составляет порядка 2 безразмерных единиц времени.

Значение $\rho = \delta$, моделирующее область вакуума, рассматривался: $\delta = 0,04$.

Продемонстрирован “повременной” фильм: несколько моментов времени, характеризующих выход решения на стационарное состояние, динамика движения вакуума (появление вакуумной области). На границе

плазма – «вакуум» можно наблюдать резкий переход, напоминающий ударную волну, что естественно при малом значении диссипативного коэффициента ν . См. Рис. 3.4.

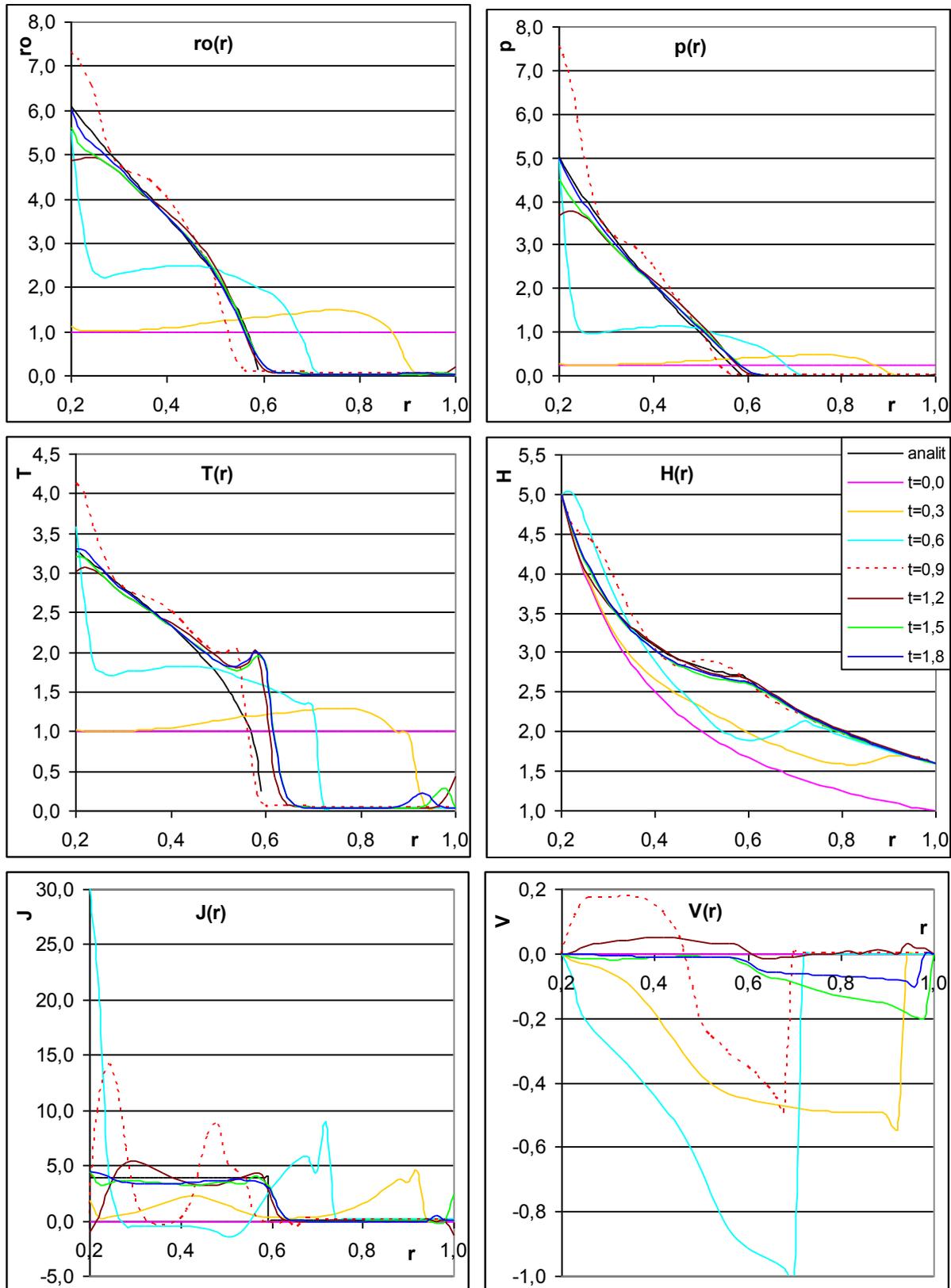


Рис. 3.4

Таким образом, в расчетах получены конфигурации двух типов в зависимости от характерного значения параметра β : при $\beta > \beta_{cr}$ плазма заполняет весь цилиндр, а при $\beta < \beta_{cr}$ – только его центральную часть окруженную вакуумом на периферии. Оба типа обладают тем свойством, что плазма тяготеет к проводнику, – ее плотность, давление и температура максимальны на поверхности проводника.

3.2.3. Квазиравновесие кольцевое. Плазменные конфигурации отделенные от проводника

В ловушках необходимо избежать контакта проводников с горячей средой, т.е. изолировать их от плазмы. В связи с этим особый интерес представляют задачи с образованием плазменной конфигурации, отделенной от проводника.

Напомним (п.1.2.3), что строго равновесной конфигурация указанного типа быть не может, т.к. в ней необходима сила Ампера $[\mathbf{j}, \mathbf{H}]$ обратного направления, т.е. с обратным током. В то же время при $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0, V \equiv 0$ из уравнения (4) системы (2.13) следует $v j = const$. Указанная конфигурация может быть получена на квазистационарной стадии установления с помощью тока в плазме отрицательного направления и его взаимодействия с азимутальным магнитным полем. В работе [77] о расчётах двумерной плоской модели ловушки «Пояс» показано, что, изменяя ток в проводнике, можно создать вокруг него магнитную оболочку, практически лишенную плазмы. Другая возможность получить такую конфигурацию – задать отрицательный ток в плазме вблизи проводника непосредственно в начальных данных.

Идеализированную конфигурацию с постоянным давлением без магнитного поля, удерживаемую окружающим ее полем в вакууме можно

представить себе согласно работам А.И. Морозова, В.В. Савельева [55, 56] (см. также [26, 27])

$$p = \begin{cases} 0, & r_c < r < r_1 \\ p_0 = \text{const}, & r_1 < r < r_2; \\ 0, & r > r_2 \end{cases} \quad H = \begin{cases} 1/r, & r_c < r < r_1 \\ 0, & r_1 < r < r_2, \\ H_\Gamma/r, & r > r_2 \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\text{где } p_0 = \frac{1}{2r_1^2} = \frac{H_\Gamma^2}{2r_2^2}$$

Здесь полное давление $p + H^2/2$ не меняется на границах конфигурации. Ток сосредоточен только на этих границах (полностью скинирован). Он отрицателен на левой ($r = r_1$) и положителен на правой ($r = r_2$) границах.

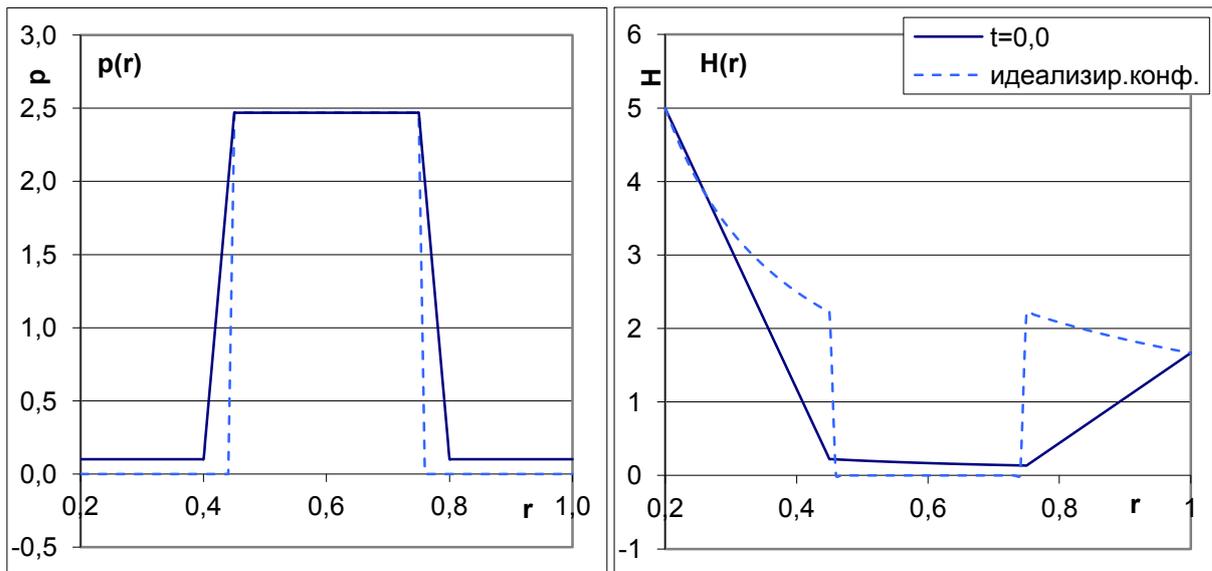


Рис. 3.5

Рассмотрим динамику плазмы и поля в задаче, где начальные данные (2.15) непрерывно сглажены линейными функциями по сравнению с (3.12), а именно (см. рис. 3.5),

$$t = 0: V = 0;$$

$$p = \rho = T = 0,1 \quad \text{при } r_c < r < 0,4 \text{ и } 0,8 < r < R$$

$$p = 2,469; \rho = 1; T = 1 \quad \text{при } 0,45 < r < 0,75$$

Разрывы значений p и ρ размазаны линейными функциями на интервалах: $0,4 < r < 0,45$ и $0,75 < r < 0,8$. (3.13)

$$H(r=r_c) = \frac{1}{r_c}; H(0,45 \leq r \leq 0,75) = \frac{0,1}{r}; H(r=R) = H_g = 1,667;$$

при $r_c < r < 0,45$ и $0,75 < r < R$: H – линейные функции.

$$\beta = \frac{2p}{\rho T} (= 2p = 4,938 \text{ при } r_c < r < R);$$

Постановка задачи состоит из системы уравнений (2.13) и новых начальных и граничных условий (3.13).

В некотором диапазоне маленьких значений ν и соответствующих им Q_0 получены квазиравновесные конфигурации. Конфигурация зависит от мощности излучения: чем оно сильнее, тем меньше температура и давление.

Проведено сравнение теплового режима при параметрах:

$$\nu_{pl} = 0,04; \quad \nu_{vac} = 5,0; \quad \delta = 0,04; \quad Q_0 = 0,0004;$$

с «адиабатическим» режимом $\nu j^2 \equiv Q$.

В обоих режимах квазиравновесие характеризуется малыми значениями скорости: $|V| \approx 0,3 \div 0,07$. На активной стадии установления скорость достигает значения: $|V| \approx 2,75$. Время квазиустановления составляет $0,5 \div 0,7$ безразмерных единиц времени.

В результате расчетов получены конфигурации (предполагаемого вида) кольцевой формы (отделённой от проводника и с вакуумом на периферии), которые существуют и мало меняются в течение времени $t_{y\text{derg}}$, превосходящего время квазиустановления. Временем «удержания» конфигурации $t_{y\text{derg}}$ будем называть продолжительность времени с момента установления (в данном случае, достижение $|V| \approx 0,3$), до момента при котором конфигурация существенно расплывается, например – значение

плотности на левой или правой границах цилиндра не превосходит половину своего максимального значения.

Результаты представлены графиками на Рис 3.6 в обоих тепловых режимах в указанные моменты времени.

При расчете с нагревом в полученной квазиравновесной конфигурации плазма сильнее «сгребается» к середине всей области, т.е. более узкая и выпуклая, а в «адиабатическом» варианте – более размазанная, т.е. более широкая и низкая (можно наблюдать на графике плотности). В случае с нагревом почти вакуумные участки, приосевая область и область на периферии цилиндра, греются сильнее, вследствие чего давление сильнее растекается нежели плотность, также оно больше, чем в адиабатическом варианте, где за счет отсутствия нагрева растекание давления и плотности согласовано друг с другом. Это демонстрируют графики зависимости температуры, давления и плотности. Также рассчитаны значения напряжённости магнитного поля и плотности электрического тока. В обоих вариантах ток обратного направления исчезает, то есть перестает быть отрицательным, что приводит к росту давления вблизи левой границы.

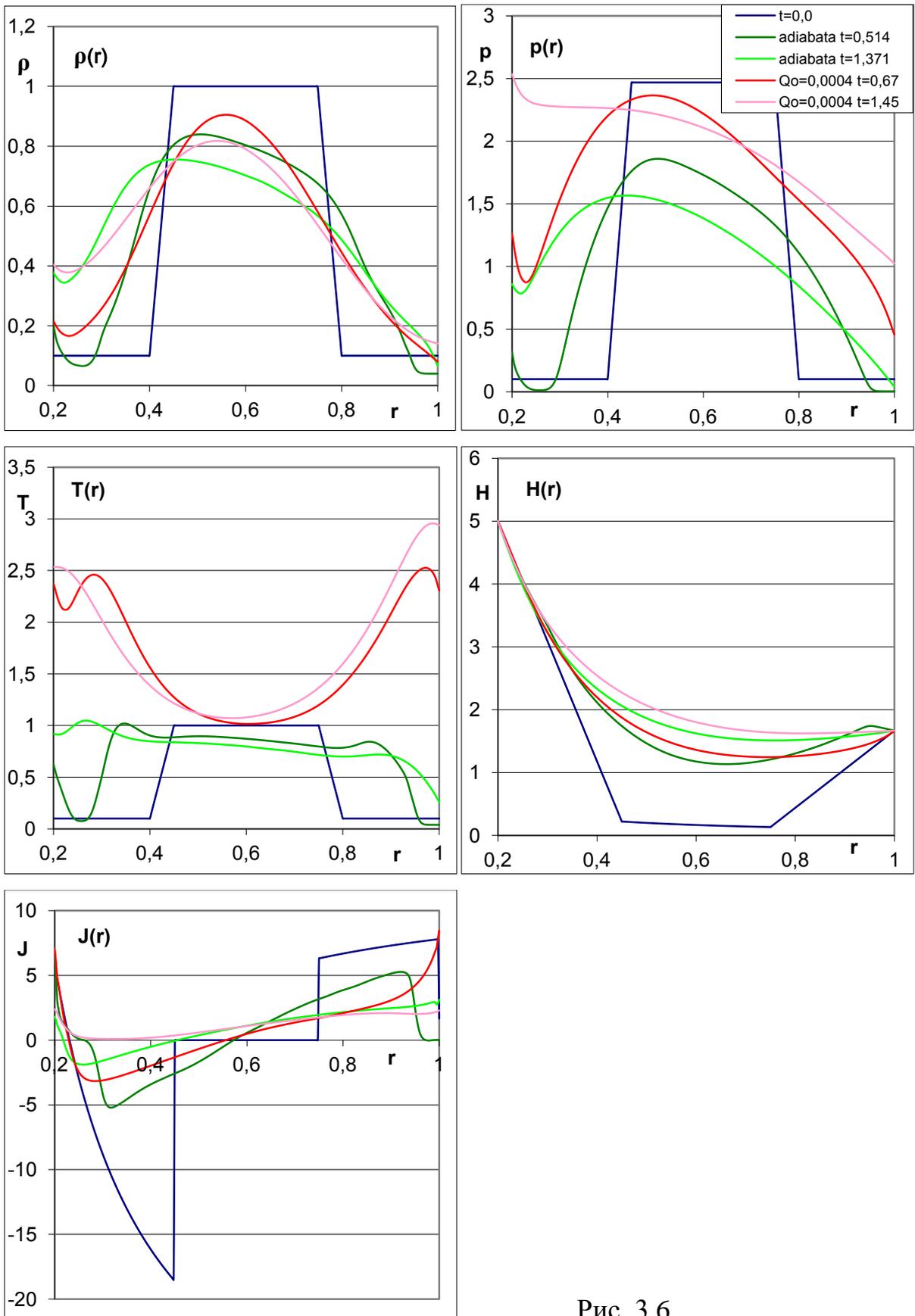


Рис. 3.6

Далее рассмотрены варианты той же задачи с более высокой проводимостью.

Для «адиабатического» теплового режима рассчитаны конфигурации со следующими параметрами: $\nu_{pl} = 0,01 \div 0,0001$; $\nu_{vac} = 100,0$. Время установления составляет 0,85 безразмерных единиц времени. Время удержания $t_{yderg} = 1 \div 2,3$ безразмерных единиц времени. Оно возрастает с ростом проводимости (уменьшением ν), и при этом ток становится более «скинированным». Рис. 3.7.

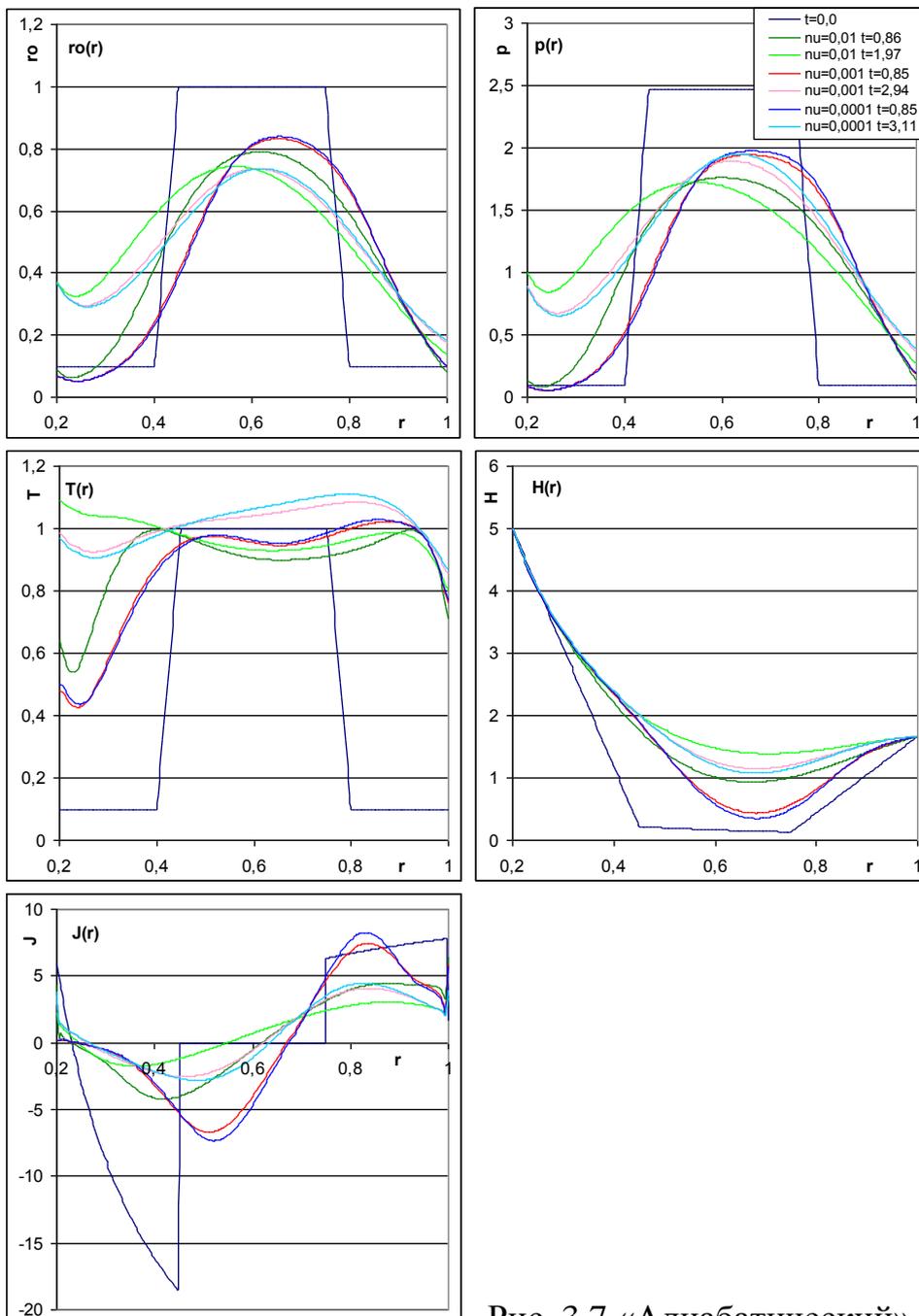


Рис. 3.7 «Адиабатический» тепловой режим.

В тепловом режиме с нагревом и излучением получена конфигурация с высокой проводимостью $\nu_{pl} = 0,0001$; ($\nu_{vac} = 1,0$; $Q_0 = 0,00001$). Время установления составляет 2,68 безразмерных единиц времени. Время удержания $t_{yderg} = 10,38$ безразмерных единиц времени. Полученные результаты представлены на Рис. 3.8. Отсюда видно, что, чем выше проводимость плазмы, т.е. чем меньше значения ν_{pl} , тем менее различимы указанные режимы между собой, поскольку джоулев нагрев и тепловые процессы играют меньшую роль.

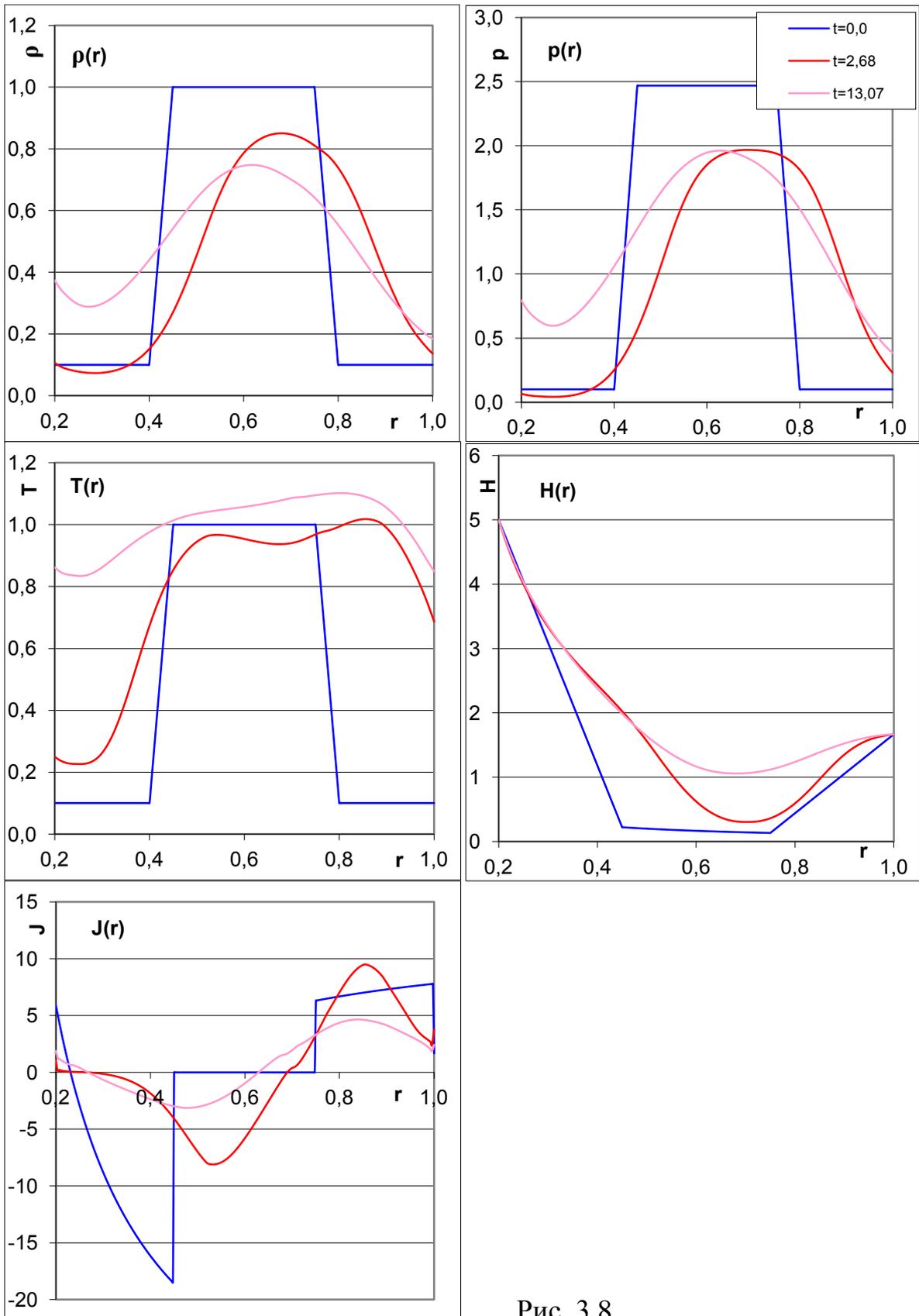


Рис. 3.8

Известно, что равновесное состояние конфигурации подчиняется плоскому уравнению Грэда-Шафранова (Г-Ш). Построение МГД - модели на

основе уравнения Г-Ш требует априорного задания магнитобарической характеристики $p(\psi)$ – распределение давления плазмы между магнитными поверхностями. Остается без ответа вопрос о выборе вида $p(\psi)$. Очевидно, вид этой функции реально определяется только в результате расчета формирования конфигурации. Расчеты двумерной задачи о конфигурации «Пояс» методом установления [77, 79] дали некоторое представление о ней.

В рассмотренной нами одномерной задаче приближенная зависимость $p(\psi)$ следует из полученных результатов расчетов на квазистационарной стадии установления. Если бы конфигурации были стационарными, они характеризуются независимым от времени $\psi(r)$, и p является только функцией от ψ . Интересно, что получилось здесь в квазистационарных режимах. Напомним: $H \equiv H_\varphi \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial r}$; $I = H_z \equiv 0$, см. п.1.2.2. Функция магнитного потока $\psi(r)$ может быть вычислена $\psi = -\int H dr + c$, например, численно методом трапеций. В сопоставлении $\psi(r)$ с полученной в расчетах $p(r)$ установлена зависимость $p(\psi)$. Соответствующие графики приведены на Рис 3.9, для двух моментов времени (начало и конец стадии удержания) и для двух тепловых режимов.

На рассмотренной стадии плазма устойчиво отделена от проводника, и это обстоятельство отражено в немонотонной зависимости $p(\psi)$ с максимумом внутри области. Давление сосредоточено далеко от границ, затем со временем конфигурация расплывается, причем в «адиабатическом» варианте медленнее, чем в варианте с нагревом.

В задаче с равновесием без обратного тока (п. 3.2.1–3.2.2), зависимость $p(\psi)$ тривиальна: очевидно, она монотонна с максимумом у проводника.

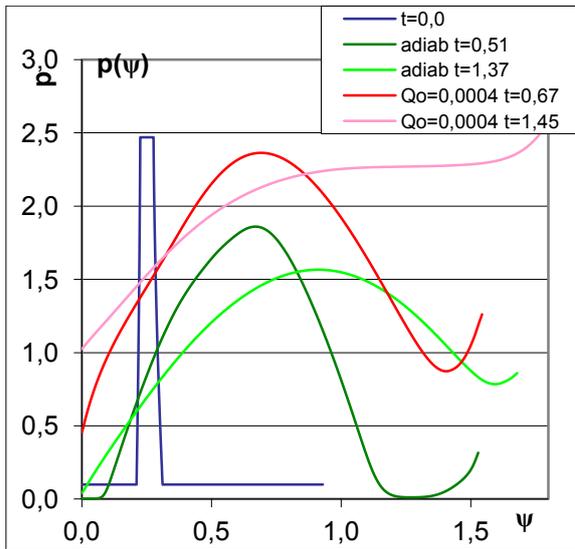


Рис. 3.9

Подчеркнем что, до сих пор задавали в качестве начальных данных желаемый вид конфигурации и исследовали как она деформируется. Теперь же, рассмотрим процесс ее формирования за счет возрастания тока согласно (1.37).

В результате образуются токи в плазме разных знаков у внутренней и внешней границ области. В результате плазма движется от границ и образует конфигурацию кольцевого сечения, отделенную от них. Она не является и, как сказано выше, не может являться строго равновесной, поскольку разрушается в процессе диффузии магнитного поля. Однако, если проводимость σ горячей плазмы достаточно велика, скорость диффузии мала ($\nu \ll 1$), и процесс разрушения конфигурации идет достаточно медленно. По той же причине магнитное поле, заданное на границах, медленно проникает внутрь области, и в образовавшейся кольцевой зоне значения $H(t,r)$ заметно ниже, чем у границ. Конфигурация образованная в процессе формирования при $t = t_1$ в основном напоминает «фигуру равновесия», полученную в расчетах выше (рис. 3.6). Далее она существует в квазиравновесном состоянии в течение длительного по сравнению с t_1 времени. Кроме того, в расчетах установлено, что время её существования

можно дополнительно продлить, если со временем уменьшить или выключить ток в плазме, как предложено в формуле 2.16 (рис. 2.3)

Нестационарные варианты задачи (2.13) с граничными условиями (2.14) рассчитаны при значениях $\beta = 0.5$, $\nu_{pl} = 0.04$, $\nu_{vac} = 2.0$, $H_\Gamma = 1.67$.

В уравнении (2.13) положено $Q \equiv 0$, т.к. это искусственно введенная функция служила установлению строгого равновесия. На рис. 3.10 приведены графики плотности, температуры, напряженности магнитного поля и плотности электрического тока в различные моменты времени, полученные в расчетах задачи с граничными условиями (2.14) для поля. Расчеты показали, что в начале процесса магнитное поле действительно сосредоточено вблизи границ области. Здесь же возникает электрический ток разных направлений в плазме и имеет место максимум температуры, обусловленный джоулевым нагревом. Геометрия конфигурации характеризуется графиком плотности. Она сохраняет свою кольцевую форму и отделена от проводника в течение времени, на порядок превосходящего время формирования. На рис. 3.11 – те же величины, полученные в расчетах с дополнительной модификацией граничного условия (2.16) на внешней границе, соответствующей выключению тока в плазме при $t \sim t_2 \sim 0.2$. Время существования конфигурации удалось увеличить ещё примерно втрое.

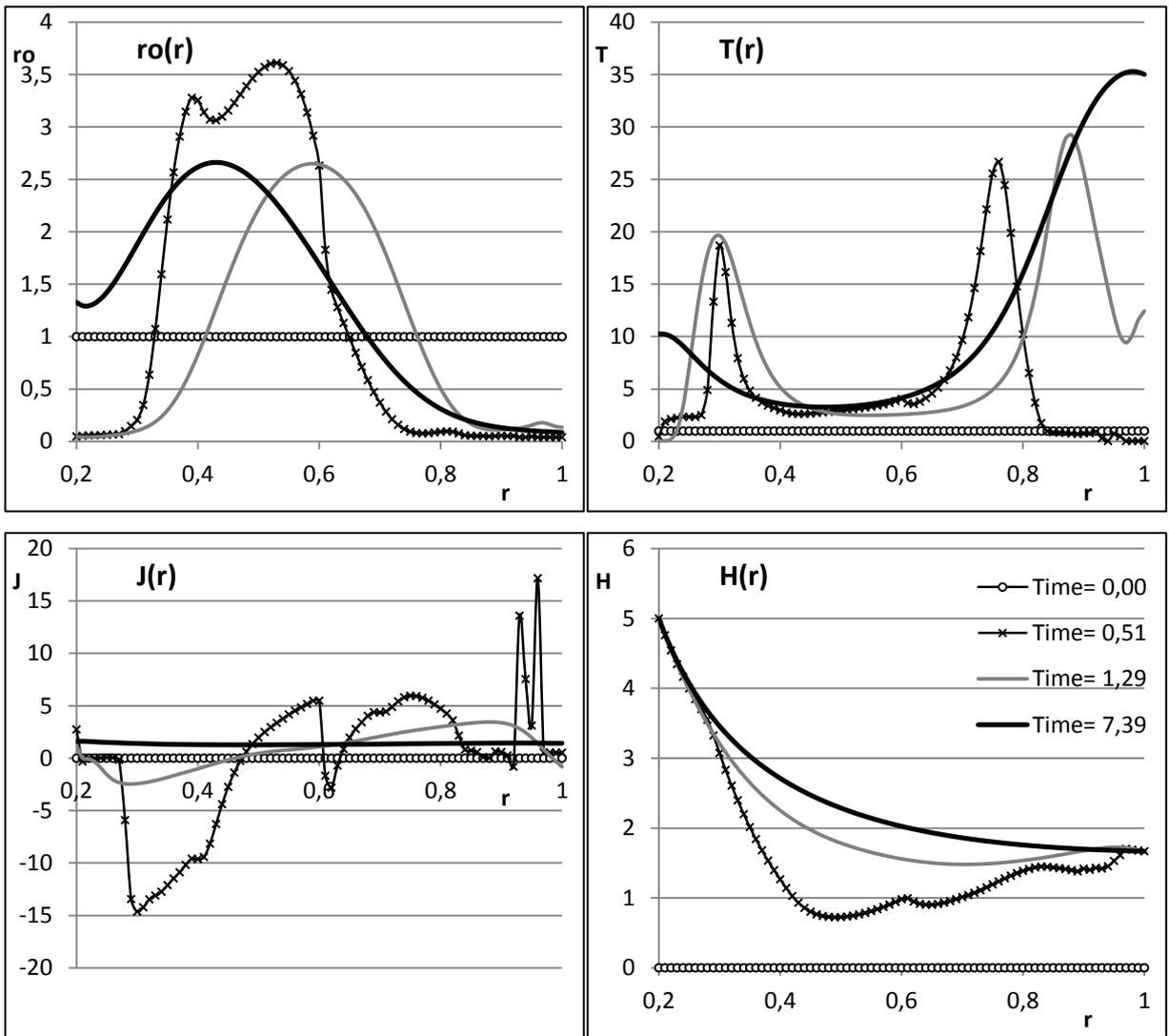


Рис.3.10. Эволюция квазиравновесной конфигурации при $H(1) = H_\Gamma$

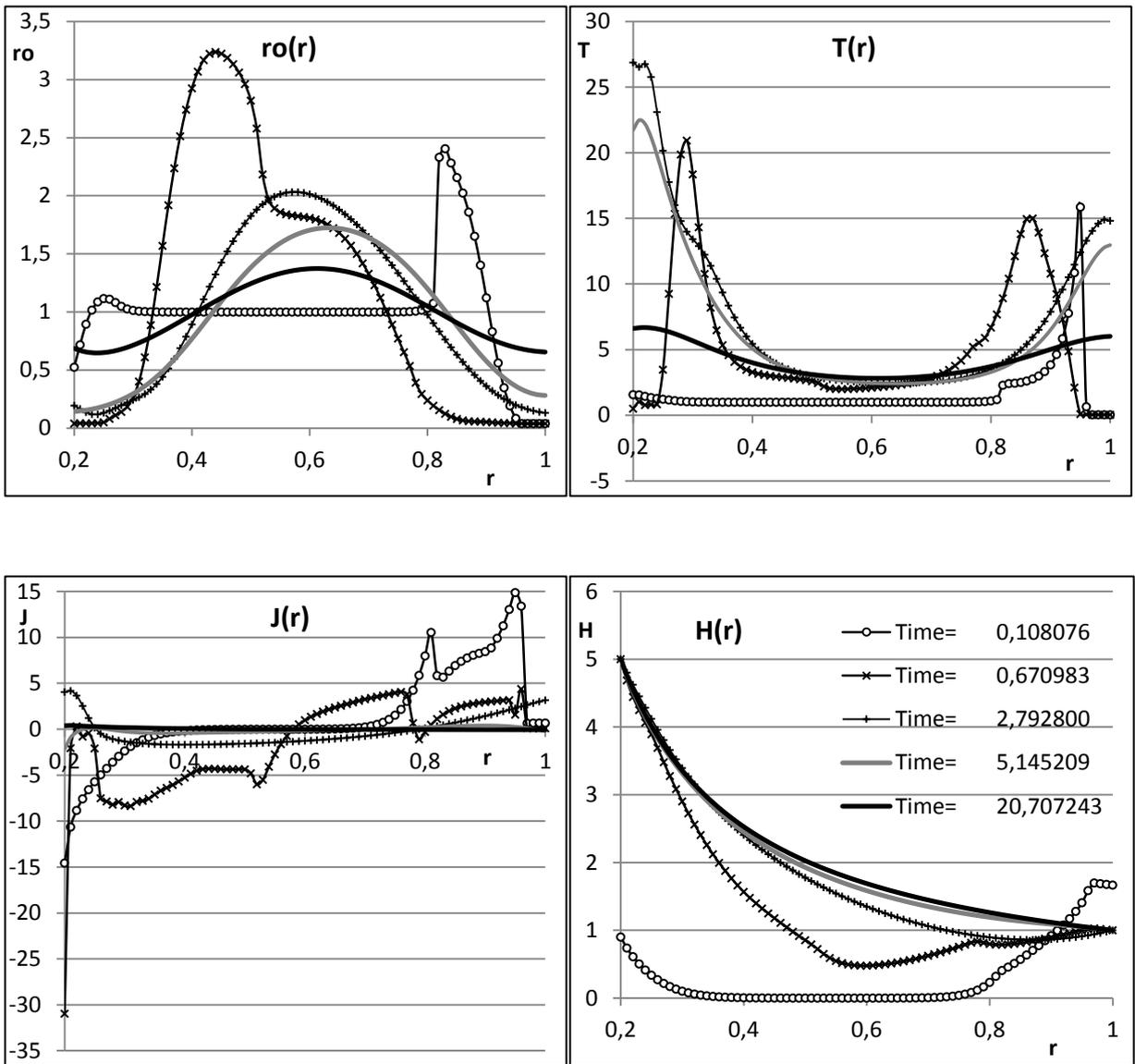


Рис.3.11. Эволюция квазиравновесной конфигурации с внешним граничным условием (2.16)

3.3. Выводы по третьей главе

Сформулируем основные результаты по данной главе.

1. Реализована в расчетах МГД – модель формирования равновесной плазменной конфигурации в цилиндре с погруженным в него токонесущим проводником – одномерный элемент модели магнитных ловушек галатей. Найдены точные решения задачи о строгом равновесии плазмы в окрестности проводника.
2. Исследованы равновесные конфигурации занимающие весь объем магнитной ловушки или только его часть с образованием вакуума. Вторые получаются либо при сильном токе в проводнике, либо при малом исходном давлении плазмы.
3. Получена конфигурация, отделенная от проводника при расчете квазистационарной стадии динамики плазмы высокой проводимости в двух циклах расчетов: с заданной желаемой конфигурацией в начальных данных и с возбуждением тока обратного направления в плазме вблизи проводника в начальной стадии процесса. Исследован характер поведения этой конфигурации в зависимости от параметров задачи.

Таким образом, расчеты, выполненные в простейшей одномерной постановке нестационарной МГД – задачи подтвердили предложенную концепцию формирования плазменных конфигураций, которые изолированы от проводников, погруженных в рабочий объем магнитных ловушек.

Глава 4. Расчет конфигураций в «Поясе»

4.1. Равновесные конфигурации в квадратной области.

Равновесные конфигурации в круглом цилиндре с двумя прямыми параллельными проводниками с током подробно исследованы в работах [63, 64] в плазмостатической модели, т.е. в терминах двумерной краевой задачи с плоской разновидностью уравнения Грэда-Шафранова. Упомянутая выше недоопределенность модели, которая с одной стороны не учитывает конечную проводимость плазмы, а с другой – содержит произвольную функцию $p(\psi)$, позволяет получить строго равновесные решения задач с плазменными конфигурациями, не соприкасающимися с проводниками. Это достигается выбором немонотонной функции $p(\psi)$ (2.47) с максимумом давления в центре кругового сечения цилиндра и на магнитной сепаратрисе на конечном расстоянии от проводников. В расчетах получены распределения магнитного поля, давления плазмы и электрического тока в круговом сечении цилиндра, найдены интегральные значения положительного и отрицательного тока в плазме, указаны пределы допустимых значений давления p_0 в зависимости от параметров задачи.

В настоящем разделе обсуждается решение той же задачи в цилиндре квадратного сечения, которое предпринято в связи с интересом к деталям модели и ее исследований, в частности с целью выяснить зависимость результатов от геометрической формы ловушки. На рис. 4.1 представлены полученные в расчетах линии уровня $\psi = \text{const}$, которые являются магнитными силовыми линиями (точнее, сечениями магнитных поверхностей плоскостью $z = \text{const}$) и изобары $p = \text{const}$ в квадрате с длиной сторон $\Delta x = \Delta y = 4$ при значениях параметров

$$r_c = 0,1; \quad p_0 = 0,5; \quad q = 0,1$$

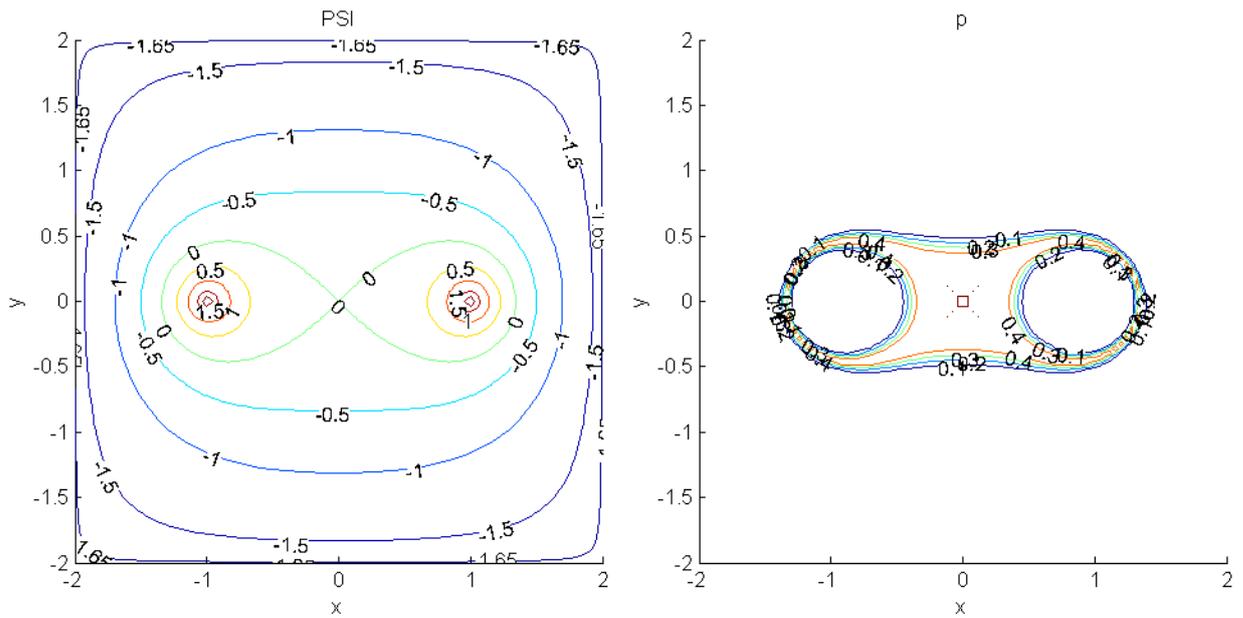


Рис. 4.1

Плазменная конфигурация с максимумом давления в центре имеет форму криволинейного четырехугольника со сторонами, выпуклыми внутрь, с тонкими «усами», окаймляющими проводники. Электрический ток в плазме $j = dp/d\psi$ равен нулю в центре и на сепаратрисе, где давление максимально. Он положителен в части области вне сепаратрисы и отрицательный внутри нее. Последнее обстоятельство обеспечивает изоляцию проводников от плазмы силой Ампера $[j, H]$.

Конфигурация допускает сравнение с аналогичным расчетом круглого цилиндра диаметра $2R=4$ при тех же параметров [63]. В обоих случаях плазменные конфигурации сосредоточены в центральной части области и близки друг другу, а отличие результатов относится к периферии, примыкающей к границам областей. Для иллюстрации приведем значения интегральных токов, вычисленных в первом квадранте каждой из областей:

$$\begin{aligned}
 I_{pl+}^{Ignatov} &= 0.96 & I_{pl+}^{Chmykhova} &= 0.67 \\
 I_{pl-}^{Ignatov} &= -0.50 & I_{pl-}^{Chmykhova} &= -0.48
 \end{aligned}$$

Значения отрицательного тока, сосредоточенного внутри сепаратрисы, отличаются друг от друга на 4%.

Краевые задачи с полулинейным уравнением Грэда-Шафранова имеют единственное решение при известном ограничении $p_0 < p^{cr}$ на величину максимального давления. В работе [63] приведена таблица значений p^{cr} , зависящих от параметра q . Это ограничение согласовано с математической природой уравнения и краевой задачи (см. [26, 27, 61]) и имеет легко объяснимый физический смысл. В представленном варианте расчета в цилиндре при $q=0,1$ значение $p^{cr} \approx 0,56$ и возрастает с ростом q [63]. В нашем примере задачи в квадратной области это значение приблизительно то же. Построить решение с бóльшим значением $p_0=3,6$ удалось $q=0,5$ (рис. 4.2). Здесь конфигурация, более насыщенная плазмой и током в ней, имеет более расплывшуюся форму, что также близко к результатам расчетов в круглой области.

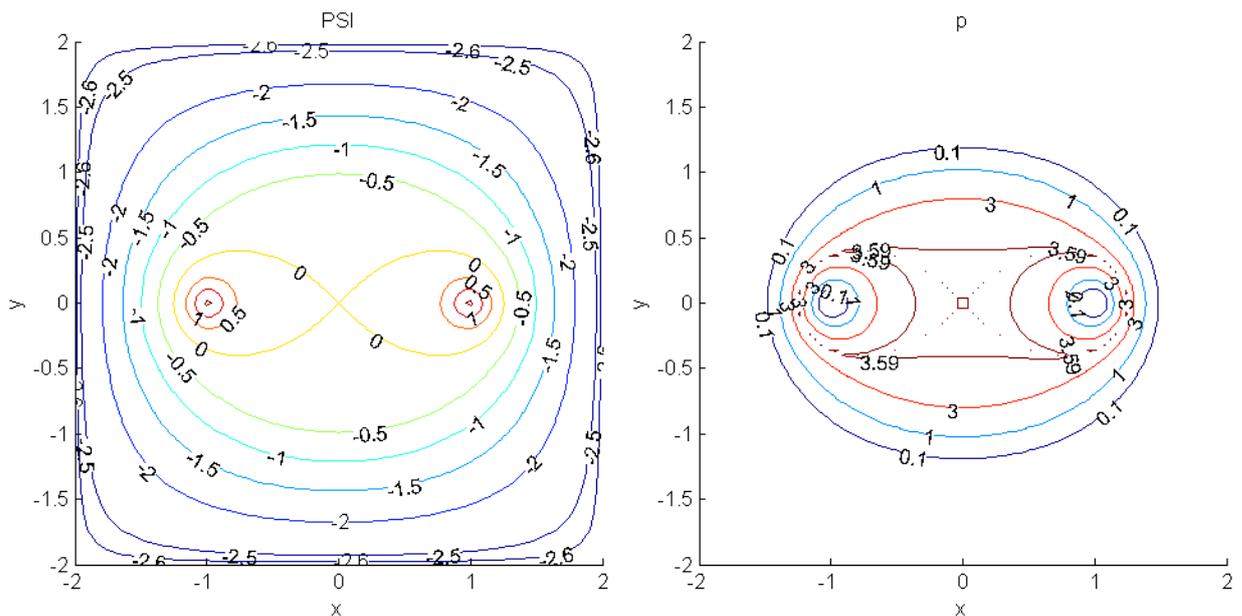


Рис. 4.2

Таким образом, проведенный численный эксперимент наглядно показал, что основные свойства равновесных магнитоплазменных конфигураций в цилиндре с двумя проводниками весьма устойчивы по отношению к изменениям формы внешней границы, а различия обязанные

таким изменениям, касаются лишь периферийной части рассматриваемой области решения задачи.

4.2. Нестационарная задача в круглой области. Квазиравновесие

Численное исследование формирования магнитоплазменных конфигураций в цилиндре с двумя прямыми проводниками проведено в рамках двумерной МГД-модели. Постановка задачи сформулирована в п. 1.2.1. Помимо нестационарной постановки, ее существенное отличие от плазмостатической модели состоит в том, что здесь учтена конечная проводимость плазмы σ , представленная безразмерной магнитной вязкостью $\nu \sim 1/\sigma$. Особенность ее выбора изложена в п. 2.4. Числовое значение ν для простоты положено постоянным в плазме, а в вакууме завышено в $2 \div 10$ раз и в проводнике занижено в $10 \div 100$ раз. Проведено несколько серий расчетов в областях круглого и квадратного сечений цилиндра с граничными условиями, содержащими заданные значения электрического поля E или касательной компоненты H_τ магнитного поля на границе. Последнее означает задание полного электрического тока, протекающего в осевом направлении через сечение цилиндра.

Большинство расчетов относится к круглому сечению.

4.2.1. Задание электрического поля на границе

Основная серия расчетов предполагает заданное значение электрического поля $E_z = E_\Gamma$, т.е. с учетом условия непротекания $V_n = 0$ – заданную на границе плотность электрического тока $j_\Gamma = E_\Gamma/\nu$. Расчеты выполнены при различных значениях параметров задачи с целью определить роль каждого из них в исследуемом процессе формирования конфигурации.

В качестве типичного или *базового варианта* расчетов удобно представить и обсудить вариант со значением безразмерных параметров задачи:

$$R = 2; r_c = 0,12; \beta = 0,5; E_\Gamma = 0,2; \nu_{pl} = 0,05; Q \equiv 0; t_1 = 0,1 \quad (4.1)$$

Результаты расчетов позволяют следующим образом представить развитие процесса формирования магнитоплазменной конфигурации от заданного начальными условиями (1.13) состояния покоя. Постепенное включение электрического тока j_r на границе и j^{ex} в проводнике индуцирует азимутальное магнитное поле на периферии области и вокруг проводников. Неоднородность поля создает ток в плазме, положительный – вдали от центра и отрицательный – в центральной части области, охватывающей проводники. Взаимодействие поля с током приводит плазму в движение от границы к центру и от проводников – в противоположном направлении, образуя со временем искомую конфигурацию.

Стадию формирования характеризует представленное на рис. 4.3 распределение при $t=1$ магнитного поля, плотности электрического тока, плотности и давления в первом квадранте сечения цилиндра плоскостью $z = \text{const}$. Характерная скорость движения плотной массы плазмы $V \sim 1$. Параметры конфигурации еще не достигли своих квазиравновесных значений. Магнитное поле представлено силовыми линиями, т.е. линиями уровня $\psi = \text{const}$, где функция магнитного потока ψ в соответствии с формулами (1.19), (1.21) определяется численным интегрированием

$$\psi = \psi_r + \int_r^R H_\varphi dr, \quad (4.2)$$

а значение ψ_r на внешней границе положено $\psi_r = 0$.

Интенсивность магнитного поля характеризуется магнитным потоком

$$\psi_0 - \psi_r = - \int_0^R H_\varphi \left(r, \frac{\pi}{2} \right) dr \quad (4.3)$$

между сепаратрисой и внешней границей. Его значение при $t=1$ равно $\psi_0 - \psi_r \approx 0,34$. Топология магнитного поля напоминает конфигурацию известную из расчетов в плазмостатической модели (см. п. 4.1 и [63]). Плотность тока положительна и максимальна у внешней границы области, обращается в нуль на линии, охватывающей центр круга и проводники, и

отрицательна в области, ограниченной этой линией, т.е. в центре круга и вблизи проводников. Это значит, что установленной в идеализированной равновесной модели скинированный характер распределения электрического тока в плазменной конфигурации [64] проявился в расчетах уже на ранней стадии исследуемого процесса. В распределении плотности наблюдается кольцеобразное уплотнение, охватывающее оба проводника. Кроме того, область повышенной плотности имеет место в центральной части области вдоль образовавшейся сепаратрисы магнитного поля. Максимальное значение плотности равно $\rho_{\max} = 1,6$. Температура при $t = 1$ еще невелика – в большей части рассматриваемой области $T \sim 1,0 \div 1,6$, т.е. начальная стадия процесса носит адиабатический характер, поэтому распределение давления близко к распределению плотности $p \sim \rho^\gamma$.

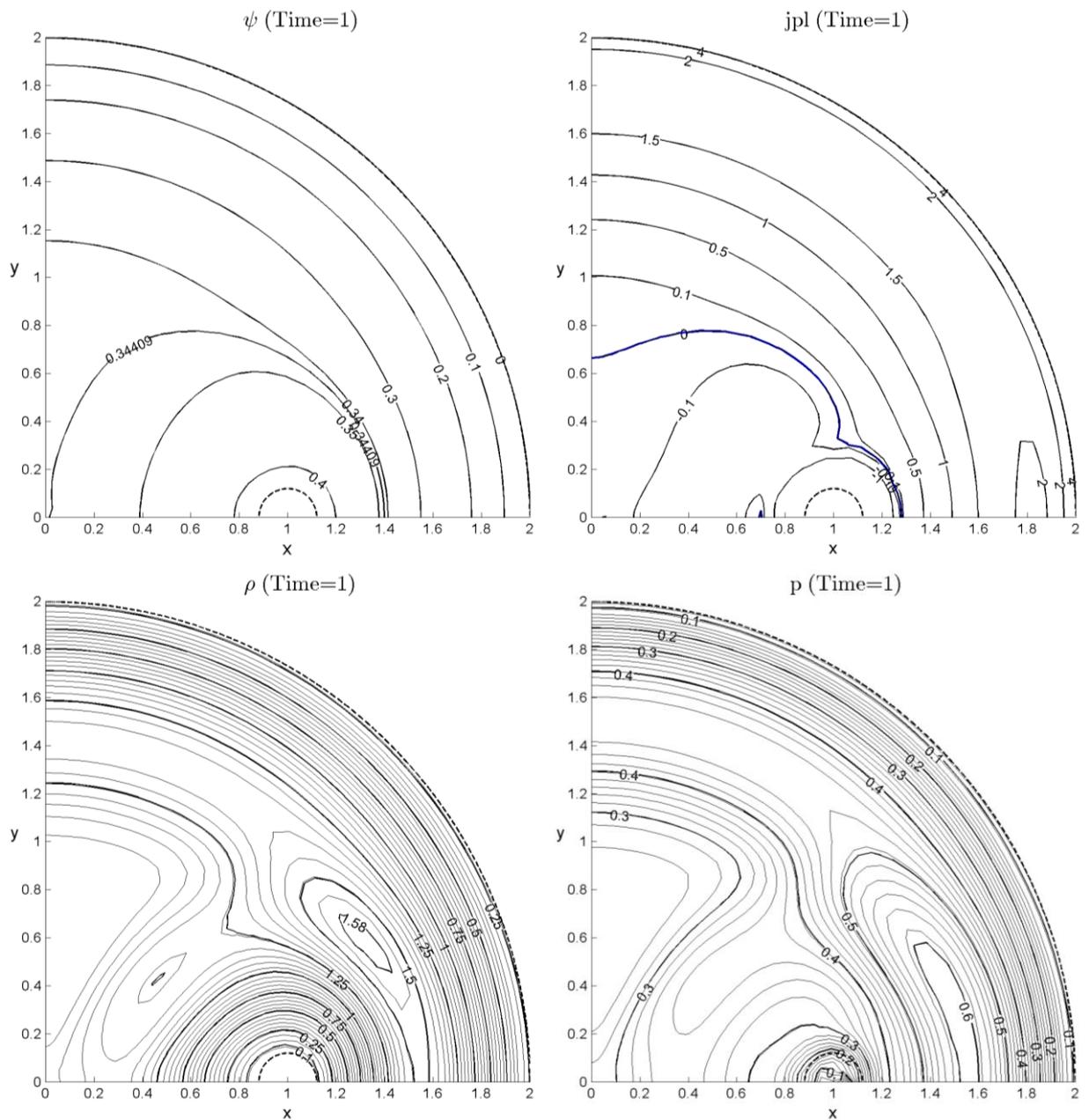


Рис.4.3 Силовые линии магнитного поля, линии уровня плотности электрического тока, плотности и давления плазмы в базовом варианте при $t = 1$

Далее со временем топология магнитного поля медленно меняется, уплощаясь к оси $\varphi = 0$, а магнитный поток возрастает до значения $\psi_0 - \psi_\Gamma = 1,6$ при $t \approx 5$ и $\psi_0 - \psi_\Gamma \approx 3$ при $t \geq 10$. Плотность сосредоточивается на оси $\varphi = \pm \pi/2$ с максимумами при $r \sim 0,35$ к моменту $t \approx 3$ и сохраняет эту форму до $t \approx 10 \div 15$. Максимальное значение $\rho_{\max} \sim 4,4$ достигается при

$t \approx 9,5$. Смещение максимума из центра, по-видимому, обязано равнодействующей сил Ампера со стороны проводников, которая в центре оказывается сильнее сжатия извне. Проводники соседствуют с плазмой малой плотности $\rho \sim 0,1$ при $t=1$, а затем плотность на условной границе проводников медленно возрастает в результате диффузии до значения $\rho \sim 1$, существенно меньшего чем в максимуме, при $t \approx 10$. Распределение давления плазмы постепенно изменяется отличным от плотности образом и становится качественно похожим на полученное в плазمو-статической модели [63]: топология изобар напоминает магнитные силовые линии. В центре имеет место «плато» с максимумом $p \sim 6$ при $t=10$, но с весьма пологими «склонами». Исключение составляют локальные максимумы вблизи проводников, обязанные «всплескам» электрического тока и температуры. В остальном он (электрический ток в плазме) имеет тенденцию к равномерному распределению в большей части плазменного объема, что явилось следствием диффузии магнитного поля при конечной проводимости. На рис. 4.4 представлено пространственное распределение упомянутых величин при $t=10$. Оно характеризует квазиравновесную конфигурацию. Скорость плотных участков плазмы уменьшилась на порядок до $V \sim 0,1 \div 0,05$. Значения температуры и тока в плазме медленно возрастают. Проводник остается изолированным от плазмы в течение времени $t \leq 10$: на границах проводников $\rho \leq 1$, т.е. в четыре раза меньше ρ_{\max} . Проводники окружены при этом кольцевыми областями отрицательного тока шириной не меньше r_c . Количественной мерой этого тока может служить интеграл

$$J_{pl}^- = \iint_{j_{pl} < 0} j_{pl} r dr d\varphi \approx \iint_{j_{pl} < 0} \left(\frac{\partial H_{\varphi} r}{r \partial r} - \frac{\partial H_r}{r \partial \varphi} - j^{ex} \right) r dr d\varphi \quad (4.4)$$

по той части круга (в данном случае четверти круга (1.4)), где $j_{pl} < 0$. Величина его быстро (при $0 < t < t_1$) достигает максимума $J_{pl}^-(t_1) \approx -\pi = -J^{ex}$, поскольку положительный ток растет медленнее. Затем его абсолютная

величина медленно убывает и при $t \geq 7$ остается почти постоянной $J_{pl}^- \approx -1.2$. Аналогичный интеграл положительного тока J_{pl}^+ медленно возрастает со временем, и при $5 < t < 10$ постепенно изменяется в интервале $J_{pl}^+ \approx 4 \div 6,5$, достигая значения $J_{pl}^+ \approx 8,7$ к моменту времени $t = 15$.

На рис. 4.4. обращает на себя внимание изменение топологии магнитного поля со временем, обусловленное диффузией. При $t \approx 8$ седловая особая точка поля в центре раздваивается, и две вновь возникших точки медленно смещаются вдоль оси $\varphi = 0$ в сторону проводников. В центре образуется особая точка типа «центра». Таким образом, диффузия магнитного поля при конечной проводимости ($\nu > 0$) привела к так называемому перезамыканию силовых линий, хорошо известному, например, в работах по токовому слою [17, 37, 38, 41 – 44]. В седловых точках поля имеют место локальные минимумы давления. Можно предполагать, что в результате медленной диффузии поля квазиравновесная конфигурация в ловушке приобретает на больших временах черты токового слоя.

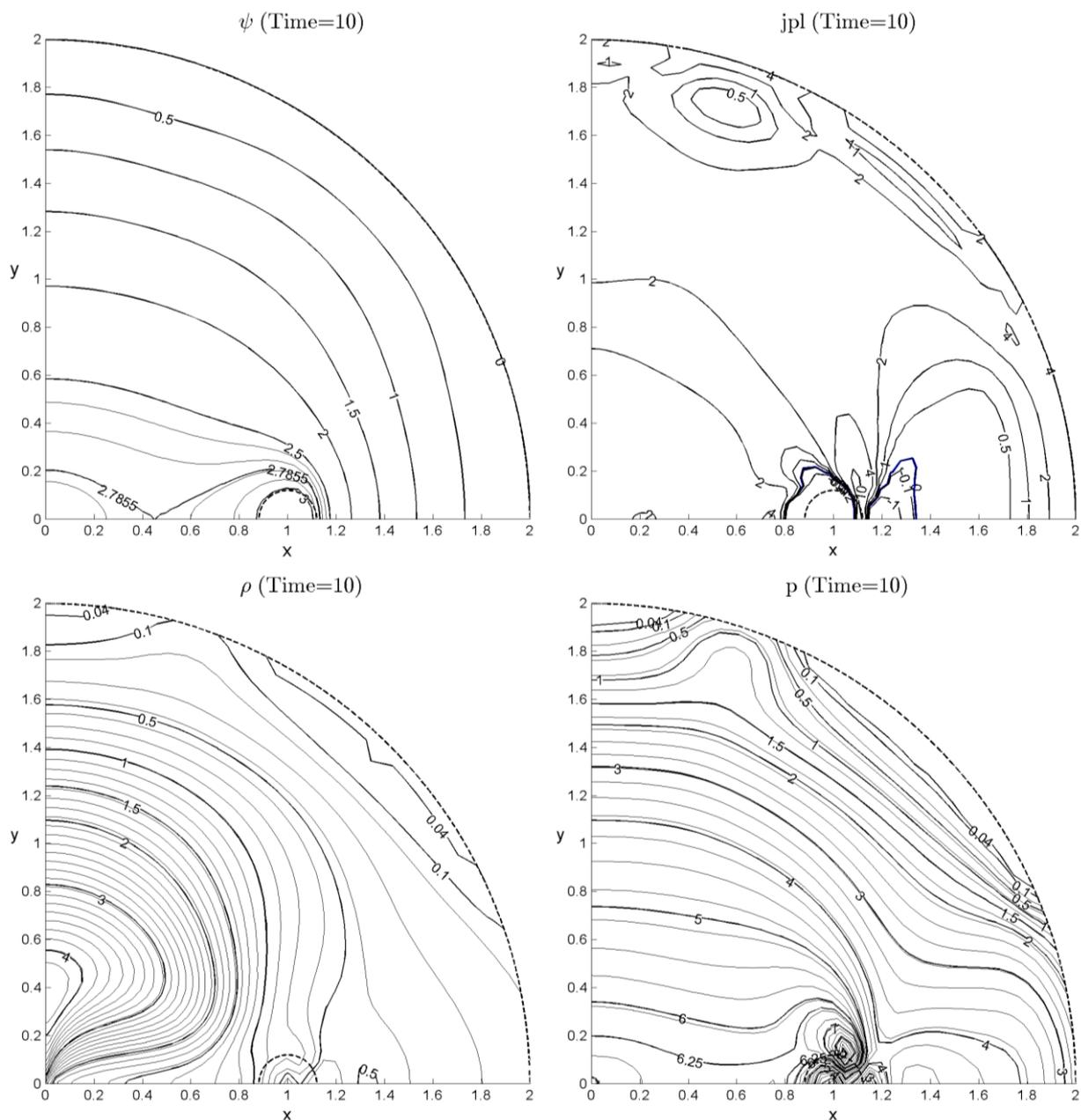


Рис.4.4. Силовые линии магнитного поля, линии уровня плотности электрического тока, плотности и давления плазмы в базовом варианте при $t = 10$

Влияние скорости включения тока в проводниках. Изложенные результаты практически не зависят от времени t_1 , т.е. от скорости включения тока в проводниках. Общая картина формирования конфигурации при $t > t_1$ оказалось одинаковой при «базовом» значении $t_1 = 0,1$, а также при $t_1 = 1$ и даже при $t_1 = 0$, т.е. при мгновенном включении тока и его воздействии на

начальное состояние покоя (1.13). На рис. 4.5 представлена зависимость от времени интегральных токов J_{pl}^- , J_{pl}^+ , их суммы $J_{pl} = J_{pl}^- + J_{pl}^+$, а также ток в проводниках $J^{ex} = \pi$ при $t_1 = 1$, с базовыми остальными параметрами.

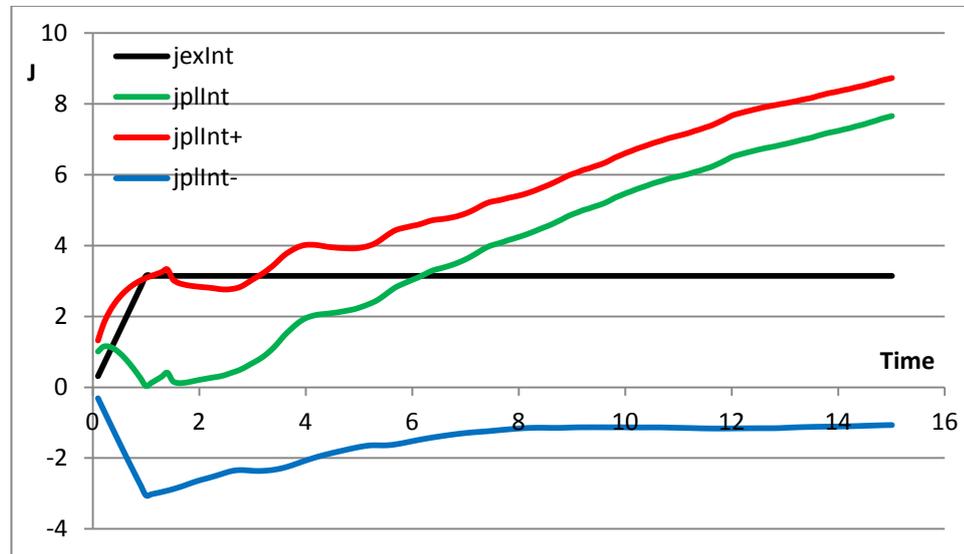


Рис.4.5. Зависимость от времени интегральных токов J_{pl}^- , J_{pl}^+ , их суммы $J_{pl} = J_{pl}^- + J_{pl}^+$, а также ток в проводниках $J^{ex} = \pi$.

Упомянутые выше отличия распределений плотности и давления друг от друга и неполного соответствия результатов плазмостатической модели равновесных конфигураций связаны с учетом конечной проводимости и повышением температуры вследствие джоулева нагрева.

Ослабить влияние последнего удалось в расчете варианта с теми же параметрами (4.1) кроме $Q_0 = 0,001$, т.е. *введя отвод тепла «излучением»*. Здесь на квазиравновесной стадии температура снизилась в 6 – 8 раз, давление – в 3 раза, ток менее интенсивен и более «размазан» по области. Абсолютная величина его интегральных значений J_{pl}^+ и J_{pl}^- снизилась по сравнению с базовыми (см.рис. 4.5) до $J_{pl}^+ = 5,4$ при $t = 15$ и $J_{pl}^- = -0,76$ при $t > 8$. Результаты данного расчета проиллюстрированы на рис. 4.6 при $t = 10$.

Распределения плотности и давления стали топологически ближе друг к другу: максимум плотности сместился к центру круга. Однако «возвращение» плазмы в окрестность проводников происходит быстрее: плотность с ее начальным значением $\rho = 1$ вновь касается их условной границы при $t \approx 6$. Упомянутое выше перезамыкание магнитных линий в районе центра происходит при $t \approx 11$, т.е. позже, чем в базовом варианте ($Q_0 = 0$).

Отвод тепла в виде (1.2) является свойством математической модели, и его можно использовать в попытках сделать модель более адекватной рассматриваемым процессам в ловушке, сопоставляя результаты расчетов при разных значениях параметра Q_0 с доступной информацией о физическом эксперименте.

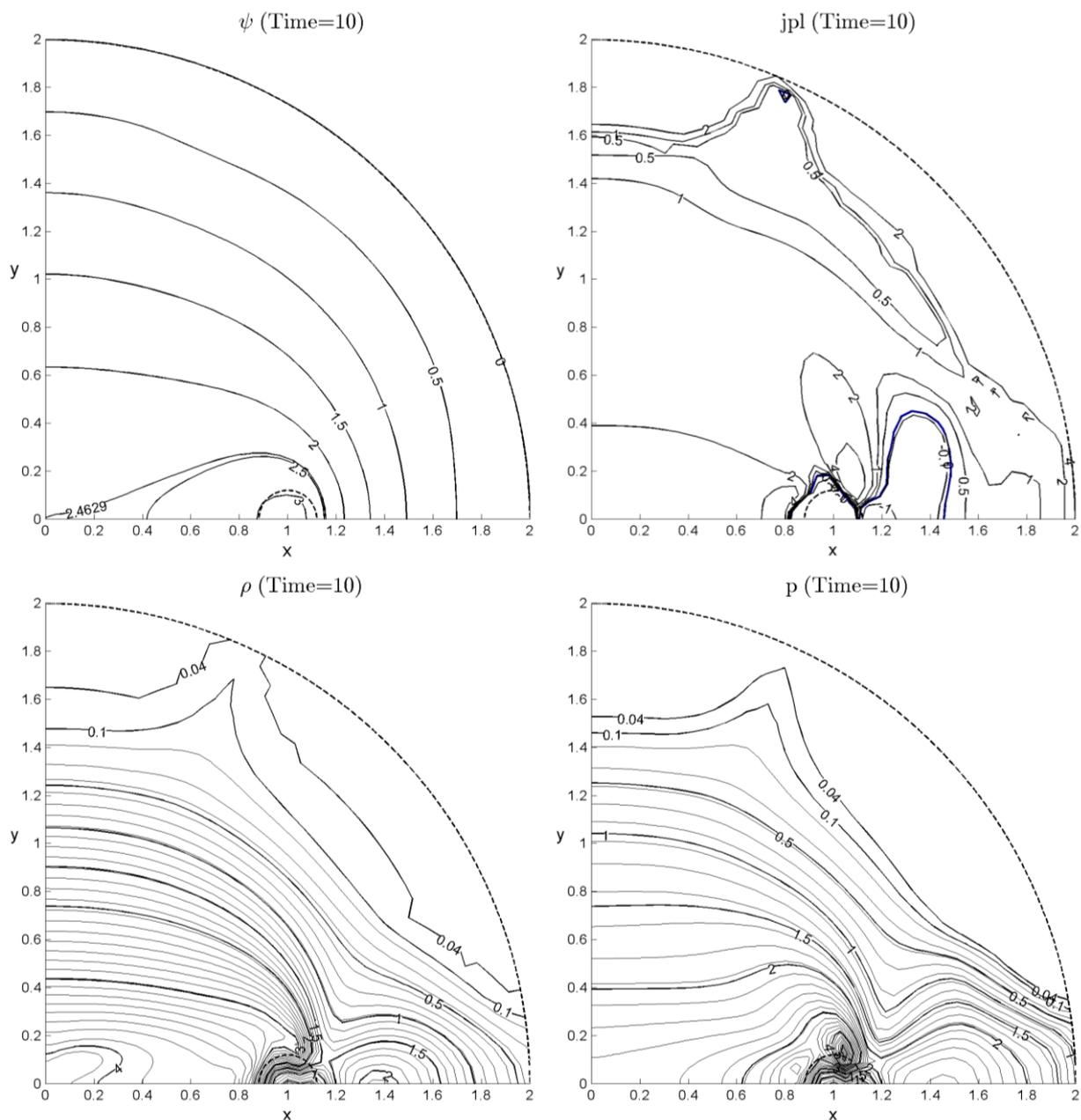


Рис.4.6. Силовые линии магнитного поля, линии уровня плотности электрического тока, плотности и давления плазмы при $t = 10$ при введении отвода тепла.

Свойства плазмы в рассматриваемом процессе характеризуются ее термодинамическими параметрами ρ_0 , T_0 и p_0 а также проводимостью σ , которая в данной работе предполагается для простоты постоянной в плазме и изменена в областях условных «вакуума» и «проводника», согласно п. 2.4. Роль термодинамики, главным образом, давления или, точнее, – его

отношения к магнитному давлению $H^2/8\pi$, моделируется в терминах безразмерного параметра β (2.7).

Рассмотрим *влияние проводимости* (т.е. различия химических элементов, образующих плазму, в то же время проводимость плазмы одного и того же элемента может изменяться при изменении температуры (см., например, [119])) на формирование квазиравновесной конфигурации. *Вдвое меньшая проводимость*, по сравнению с базовым вариантом, при неизменности всех остальных размерных констант задачи соответствует вдвое бóльшему коэффициенту «магнитной вязкости» ν и, следовательно, вдвое меньшему значению безразмерной плотности тока на границе (2.10), т.е. $\nu=0,1$; $j_\Gamma=2$. Расчет этого варианта показал, что процесс формирования конфигурации отличается более интенсивной диффузией, и следовательно, более плавным распределением всех величин в пространстве по сравнению с базовым вариантом. При $t=1$ магнитный поток $\psi_0 - \psi_\Gamma = 0,26$, конфигурация плотности глубже проникла в сторону центра вдоль сепаратрисы поля и достигла здесь значений $\rho \sim 1,5$. Со временем максимум плотности смещается на ось $\varphi = \pm \pi/2$, как и в базовом варианте, но его значение уменьшилось до $\rho_{\max} \sim 3,5$ при $t=10$. Окрестность проводников более разрежена, и плотность достигает значения $\rho \sim 1$ теперь только при $t \approx 12$. Электрический ток более плавно «размазан», его плотность ниже, чем в базовом варианте. Поведение распределения давления плазмы со временем аналогично базовому варианту с образованием «плато» с весьма пологими склонами, но с меньшим максимумом $p \sim 5$. Температура мало отличается от базовой (несмотря на удвоение коэффициента ν). Интегральные характерные значения тока $J_{pl}^- = -0,8$ при $t > 8$ и $J_{pl}^+ = 5,5$ при $t=10$ ниже базовых (см. рис.4.5). Результаты данного расчета представлены на рис. 4.7 при $t=10$. Изменение топологии поля в центре с образованием

новых особых точек начинается при $t \approx 12$ и по этой причине не наблюдается на рис. 4.7.

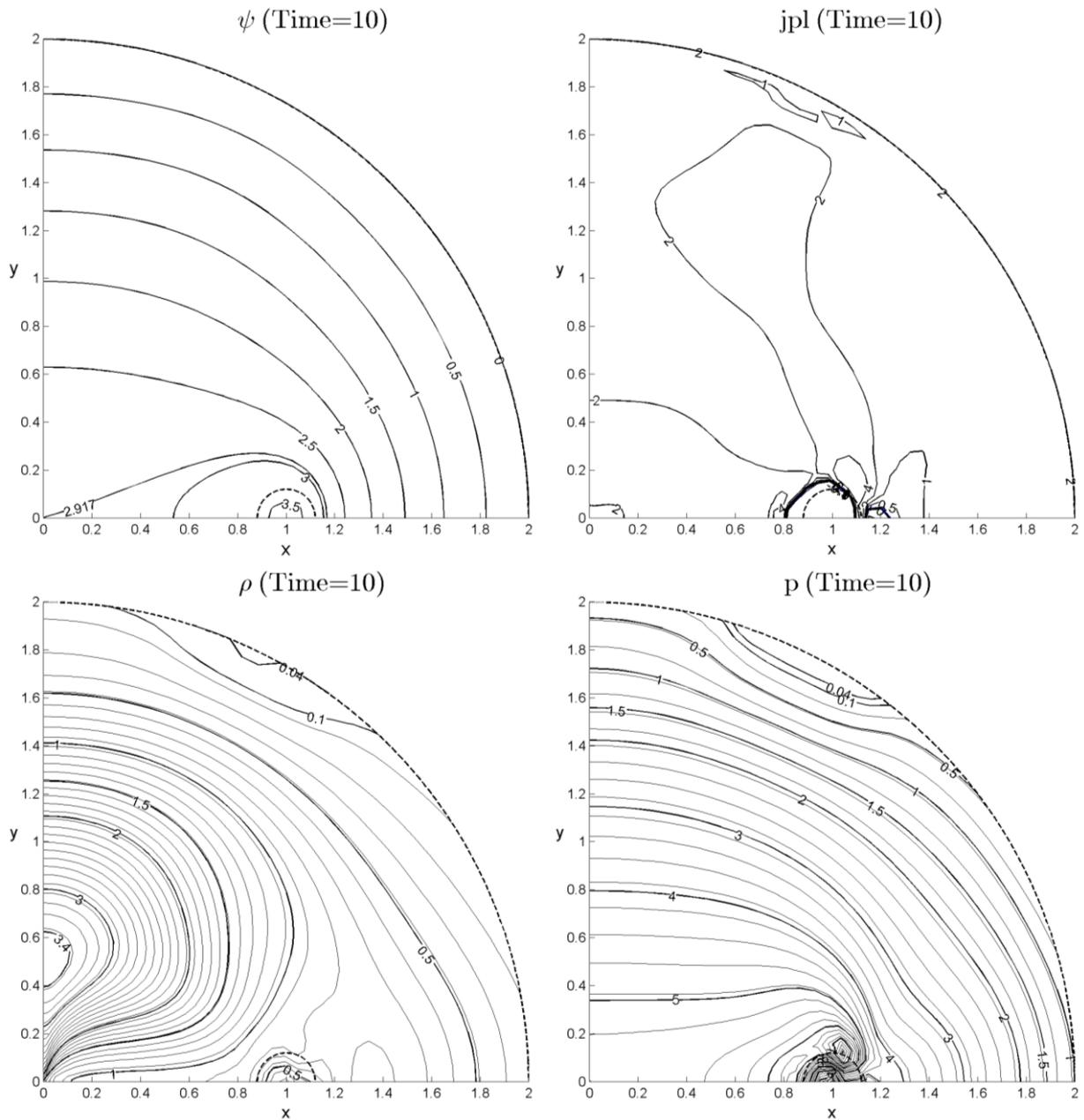


Рис.4.7. Силовые линии магнитного поля, линии уровня плотности электрического тока, плотности и давления плазмы при $t = 10$ при вдвое меньшей проводимости ($\nu = 0,1$).

В противоположном случае *вдвое более высокой проводимости* ($\nu = 0,025$; $j_r = 8$) в расчетах появились противоположные тенденции.

Процесс формирования конфигурации происходит более интенсивно вследствие меньшей диффузии. Области пониженной плотности вокруг проводников в этом случае меньшего размера и исчезают, т.е. достигают значения $\rho \sim 1$, при $t \approx 5$. Перезамыкание поля в центре происходит раньше – при $t \sim 2,4$.

Оставшиеся размерные константы – электрический ток в проводниках J_c и электрическое поле E_r , определяющие ток j_{pl} в плазме, характеризуют электрическую природу процесса формирования конфигурации. Они дают возможность управлять развитием процесса и влиять на свойства конфигурации. В математической модели эти константы присутствуют в составе единиц измерения давления, скорости, времени и электромагнитных величин (2.1 – 2.4), а также – безразмерных параметров β и ν (2.7) и граничного значения j_r (2.10). В следующих расчетах исследована зависимость свойств и параметров конфигураций, а также процесса их формирования от указанных величин.

Если *электрическое поле E_r увеличить в два раза* по сравнению с базовым вариантом (безразмерное $E_r = 0,4$, ток на границах $j_r = 8$), то очевидно, усилится ток в плазме, и, как следствие, конфигурация интенсивнее сосредоточится в центральной части области: при $t = 1,7$ максимум плотности $\rho_{\max} \approx 8,5$ находится в центре. Значение плотности $\rho = 1$ достигает границы проводника при $t \sim 5$, т.е. вдвое быстрее, чем в базовом варианте. Однако со временем ток в проводниках и в плазме вокруг них компенсирует влияние периферии, и при $t > 5$ участки с максимальной плотностью $\rho_{\max} \sim 5,5$ вновь расположены на осях $\varphi = \pm \pi/2$ при $r = 0,1$, а при $t > 10$ плотность держится на уровне $\rho_{\max} \sim 4,5 \div 5,0$ при $r = 0,2$. Интегральные значения плазменного тока при $10 \leq t \leq 15$ изменились, точнее – перераспределились в сторону положительного: $9 \leq J_{pl}^+ \leq 12,2$ и

$-0,8 \leq J_{pl}^- \leq -0,5$. Конфигурации поля и давления сохранили свою топологию, но максимальные значения магнитного потока $\psi_0 - \psi_\Gamma = 4,5$ и давления $p_{\max} \sim 11,5$ при $t = 10$ в центре выше, чем базовые, что и следовало ожидать при увеличении внешнего электромагнитного фактора E_Γ . Перезамыкание поля в окрестности центра наблюдается при $t \approx 2$, т.е. также быстрее, чем в базовом варианте.

В противоположном случае *более слабого внешнего электрического поля* ($E_\Gamma = 0,1$; $j_\Gamma = 2$) влияние силы Ампера на периферии слабее, чем в окрестности проводников. По этой причине конфигурация плотности более тяготеет к осям $\varphi = \pm \pi/2$, и продолжительность времени изоляции проводников возрастает: при $t \leq 15$ значение плотности на их границах остается в пределах $\rho \leq 0,75$. Плотность плазмы в квазиравновесном состоянии характеризуется максимальным значением $\rho_{\max} \approx 3,5$ в районе $r \approx 0,4$, $\varphi = \pm \pi/2$ при $t = 10$. Положительный ток в плазме менее интенсивен: его интегральное значение при $10 \leq t \leq 15$ находится в диапазоне $4,5 < J_{pl}^+ < 6$, а отрицательный ток мало изменяется по сравнению с базовым $J_{pl}^- \approx -1,2$, т.е. его величина определяется главным образом заданным током в проводниках. Перезамыкание поля имеет место при $t \approx 13,3$.

Рассмотрим теперь *влияние тока в проводниках* J_c на исследуемые конфигурации. При изменении величины J_c нужно иметь ввиду изменение единиц измерения (2.1 – 2.4). Если ток J_c увеличить вдвое, то единицы H_u, V_u, j_u , становятся вдвое, p_u, E_u – вчетверо больше, а единица t_u – вдвое меньше по сравнению с базовыми. Безразмерная магнитная вязкость уменьшается вдвое, а параметр β – вчетверо. Таким образом, *удвоенному значению* J_c при сохранении остальных размерных величин соответствуют безразмерные параметры $\beta = 0,125$, $\nu = 0,025$, $E_\Gamma = 0,05$, $j_\Gamma = 2$.

Результаты расчетов при таких значениях параметров представлены на рис. 4.8. Они показали, что процесс формирования конфигурации идет быстрее, и момент времени $t=15$ имеет смысл сравнивать с фактически более поздним временем $t=10$ базового варианта на рис. 4.4. Здесь хорошо видно перезамыкание магнитных силовых линий, которое возникло при $t \approx 11,4$. Распределения плотности и давления отличаются друг от друга сильнее, чем в базовом варианте. Максимальная плотность $\rho_{\max} \approx 3,7$ достигается на осях $\varphi = \pm \pi/2$ на расстоянии $r \sim 0,8 \div 1,0$ вдвое выше от центра, а в окрестности проводников плазма достаточно разрежена. В то же время магнитная конфигурация уплотняется в сторону оси $\varphi = 0$: сепаратриса поля образует с этой осью угол, существенно меньший, чем базовая. Распределение давления остается в хорошем согласии с магнитным полем. В центральной части оно максимально вдоль оси $\varphi = 0$: $p_{\max} \sim 5$, что соответствует $p \sim 20$ в единицах базового варианта. Высокое давление относительно редкой плазмы обязано джоулеву нагреву до температур $T \sim 100$ в центре круга.

Интегральные значения плазменного тока в сопоставимые моменты времени близки к базовым безразмерным значениям. Это значит, что их размерные величины вдвое превосходят базовые с учетом вдвое большей единицы тока.

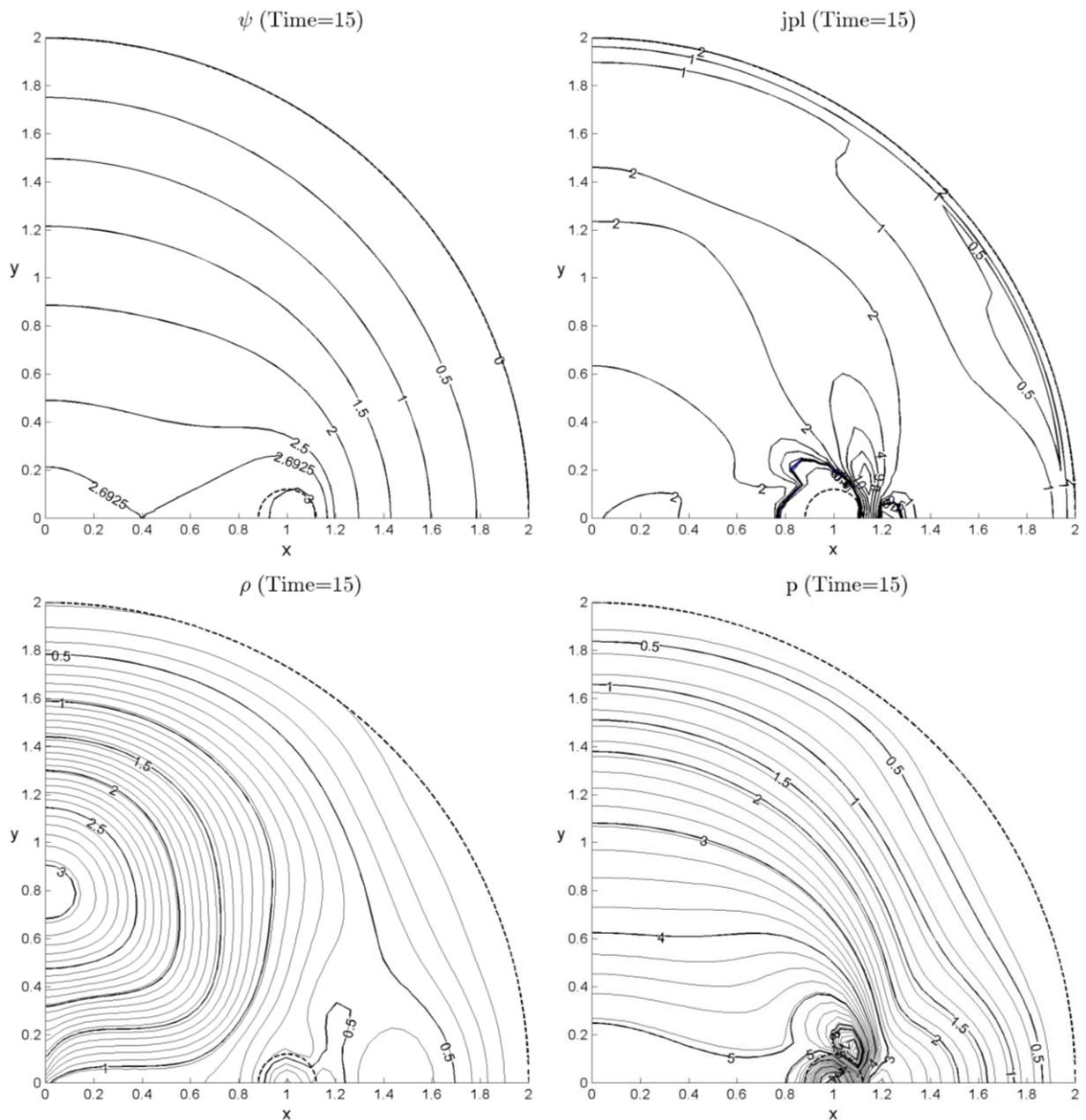


Рис.4.8. Силовые линии магнитного поля, линии уровня плотности электрического тока, плотности и давления плазмы при $t = 15$ при удвоенном значении J_c .

При уменьшении J_c вдвое ($\beta = 2$, $\nu = 0,1$, $E_r = 0,8$, $j_r = 8$) по сравнению с базовым вариантом наблюдается обратная тенденция. Максимальная плотность $\rho_{\max} \sim 5,5$ при $t = 5$ расположена в центре, а затем незначительно смещается вдоль осей $\varphi = \pm \pi/2$ до $r \sim 0,25$. В окрестности проводников плотность $\rho \sim 1$ достигается при $t \sim 1$. Максимальное давление

$\rho_{\max} \sim 14$ при $t=5$ (вдвое более медленного по сравнению с базовым времени) в центральной области вдоль оси $\varphi=0$ ниже базового, поскольку единицы ρ_u здесь вчетверо меньше. При более слабом токе в проводнике интегральное значение отрицательного тока заметно падает по абсолютной величине и при $t > 8$ практически равно нулю. Безразмерные значения J_{pl}^+ близки к базовым, следовательно размерная величина плазменного тока уменьшилась пропорционально току в проводниках J_c .

Наконец, может представить интерес одновременное изменение обоих параметров J_c и E_r , т.е. *усиление или ослабление электромагнитной составляющей процесса* формирования ловушки. В варианте их удвоения опять, как и выше, изменились единицы измерения. Безразмерные параметры задачи имеют значения: $\beta = 0,125$; $\nu = 0,025$; $E_r = 0,1$; $j_r = 4$. Расчеты с этими параметрами показали, что процесс формирования идет быстрее. Квазиравновесное распределение плотности устанавливается при $t \approx 7,5$, т.е. вдвое быстрее базового времени, поскольку единицы t_u здесь вдвое меньше. При $t=14$ она качественно и количественно близка к базовой при $t=10$ (см. рис. 4.4). Основное отличие в том, что максимум плотности $\rho_{\max} \approx 4,7$ расположен при $r \approx 0,6$, т.е., как и в предыдущем варианте, дальше от центра. Электрический ток большей интенсивности нагревает плазму до температуры в 3 – 4 раза выше базовой. Безразмерное давление не сильно отличается от базового, следовательно, его физическое значение – в четыре раза выше. Интегральные значения тока в плазме в сопоставимые моменты времени также близки к базовым, т.е. размерные величины превосходят их вдвое.

Одновременное изменение параметров J_c и E_r в противоположную сторону, т.е. их уменьшение вдвое приводит к обратным результатам: процесс формирования замедляется, максимальное значение плотности на

оси $\varphi = \pm \pi/2$ расположено ближе к центру, квазиравновесные значения тока, температуры и давления снижены в соответствии с указанной выше закономерностью.

4.2.2. Задание магнитного поля на границе

Изложенные выше результаты получены в численном решении задач с электромагнитным граничным условием (1.8), т.е. с заданным электрическим полем на внешней границе. В интересах более полного исследования математической модели рассмотрен вариант с заданием магнитного поля на границе. Напомним, что это соответствует заданию полного тока осевого направления в плазме J_{pl} (п. 1.2.1).

В расчете задачи в такой постановке при $H_T = 1,2$ и базовых значениях остальных параметров (4.1) полный безразмерный ток в плазме (точнее, четверть полного тока, соответствующая квадранту (1.4)), очевидно постоянен и равен $J_{pl} = 0,63$. В этом основное отличие данного решения от рассмотренных в п. 4.2.1, где ток растет со временем (рис. 4.5), а его значение $J_{pl} = 0,63$ в базовом решении достигается при $t \approx 2,7$. Заметим, что в экспериментах [31] ток также растет на активной стадии разряда. Результаты расчета решения на квазистационарной стадии при $t = 10$ представлены на рис. 4.9. Их сравнение с базовым вариантом (рис. 4.4) говорит о следующем. Топология магнитного поля напоминает типичную конфигурацию для плазмостатической модели [см. п. 4.1], она мало меняется со временем. В отличие от базового варианта здесь отсутствует перезамыкание магнитных силовых линий, с образованием новых особых точек, что по-видимому связано с постоянной и относительно небольшой величиной полного тока в плазме. Магнитный поток достигает значения $\psi_0 - \psi_T \approx 1,5$ при $t = 5$ и очень медленно возрастает впоследствии. Максимум плотности расположен на сепаратрисе вблизи центра, а не на оси $\varphi = \pi/2$, а его значение ниже, чем на рис. 4.4. Отжатие плазмы от проводников более

эффективно: на их условных границах при $t = 15$ $\rho \sim 0,25 \div 0,3$. Распределение давления и плотности здесь, так же, как в расчетах с заданным E_r не согласованы друг с другом: давление имеет два небольших максимума, локализованных недалеко от проводника, а в основной части области его значение $p \sim 2 \div 2,5$ широко распространено вдоль оси $\varphi = \pi/2$, напоминая в слабой форме « β -режим» в работе [77]. Температура в этой части области в 5 – 10 раз выше исходной благодаря джоулеву нагреву в начальной стадии процесса. Электрический ток – положительный и отрицательный – максимален по абсолютной величине в области больших градиентов давления. В большей части области его плотность не превосходит значения $j \sim 0,5$, а вдоль оси $\varphi = \pi/2$ наблюдается обширная область незначительных по величине ее отрицательных значений.

Введя в модель «излучение» с коэффициентом $Q_0 = 0,001$, как и выше, удалось понизить температуру на квазиравновесной стадии процесса. Как следствие, давление оказалось более согласованным с плотностью. Их максимальные значения в центральной части конфигурации близки к «адиабатическому» режиму: энтропийная функция p / ρ^γ изменилась в течение времени $0 < t < 10$ не более чем на 20%. Топология магнитного поля и изобар после введения Q осталась прежней.

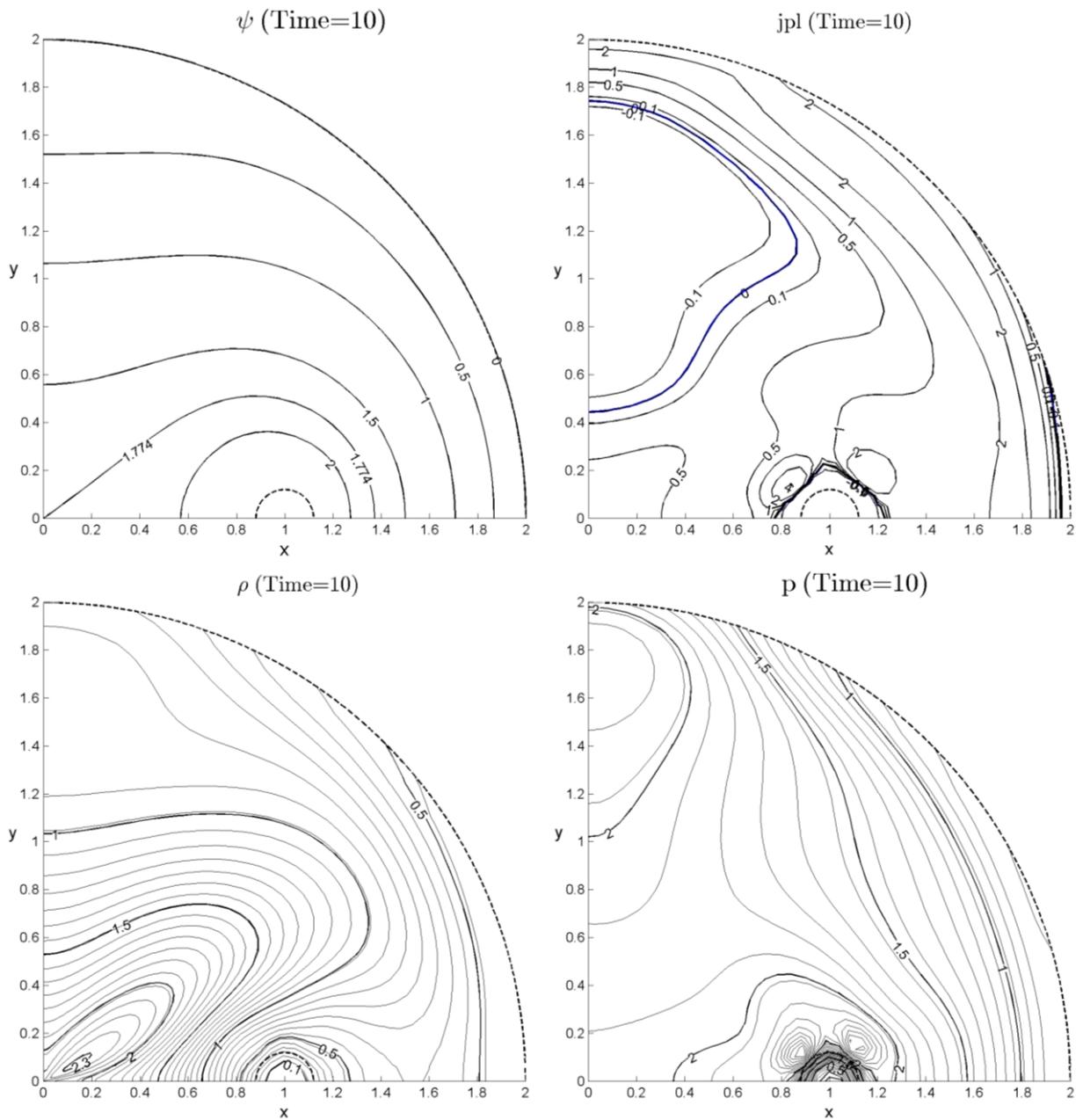


Рис.4.9. Силовые линии магнитного поля, линии уровня плотности электрического тока, плотности и давления плазмы при $t = 10$, в варианте с граничным условием $H_{\Gamma} = 1,2$

4.3. Нестационарная задача в квадратной области. Квазиравновесие

В этом разделе приводятся результаты расчетов той же задачи, поставленной в п.1.2.1, со вторым вариантом геометрии области – цилиндре квадратного сечения. Выбор области в таком виде существенно ускоряет расчет благодаря отсутствию особой точки $r=0$ цилиндрической системы координат. Шаги пространственной сетки Δx и Δy постоянны и не требуют сильного измельчения шага по времени Δt .

Нестационарный вариант задачи с заданным электрическим полем на границе (1.8) рассчитан при базовых значениях (4.1) в квадратной области. Результаты представленные на рис. 4.10 говорят о следующем.

Электромагнитные параметры конфигурации увеличились в соответствии с увеличением расчетной области на периферии. Магнитный поток достигает значения $\psi_0 - \psi_T \approx 3,8$ при $t=10$. Интегральное значение отрицательного тока быстро достигает своего максимума $J_{pl}^- = 3,14$ и медленно убывает аналогично базовому варианту. Величина положительного тока возрастает со временем интенсивнее базового, и при $5 < t < 10$ изменяется в интервале $J_{pl}^+ \approx 6 \div 8$.

Конфигурация плазмы (ее термодинамические свойства) мало отличается от рассчитанной в круглой области. Она расположена в центральной части. Максимальное значение $\rho_{\max} \sim 4$ достигается при $t \approx 2,7$, и мало меняется $\rho \sim 3,8$ на промежутке времени $5 < t < 10$. Плотность на условной границе проводников возрастает до значения $\rho \sim 1$ при $t = 9$.

Приведенный выше результат ещё раз подтверждает, что конфигурация весьма устойчива по отношению к изменениям формы внешней границы, как было отмечено в плазмостатической модели п. 4.1.

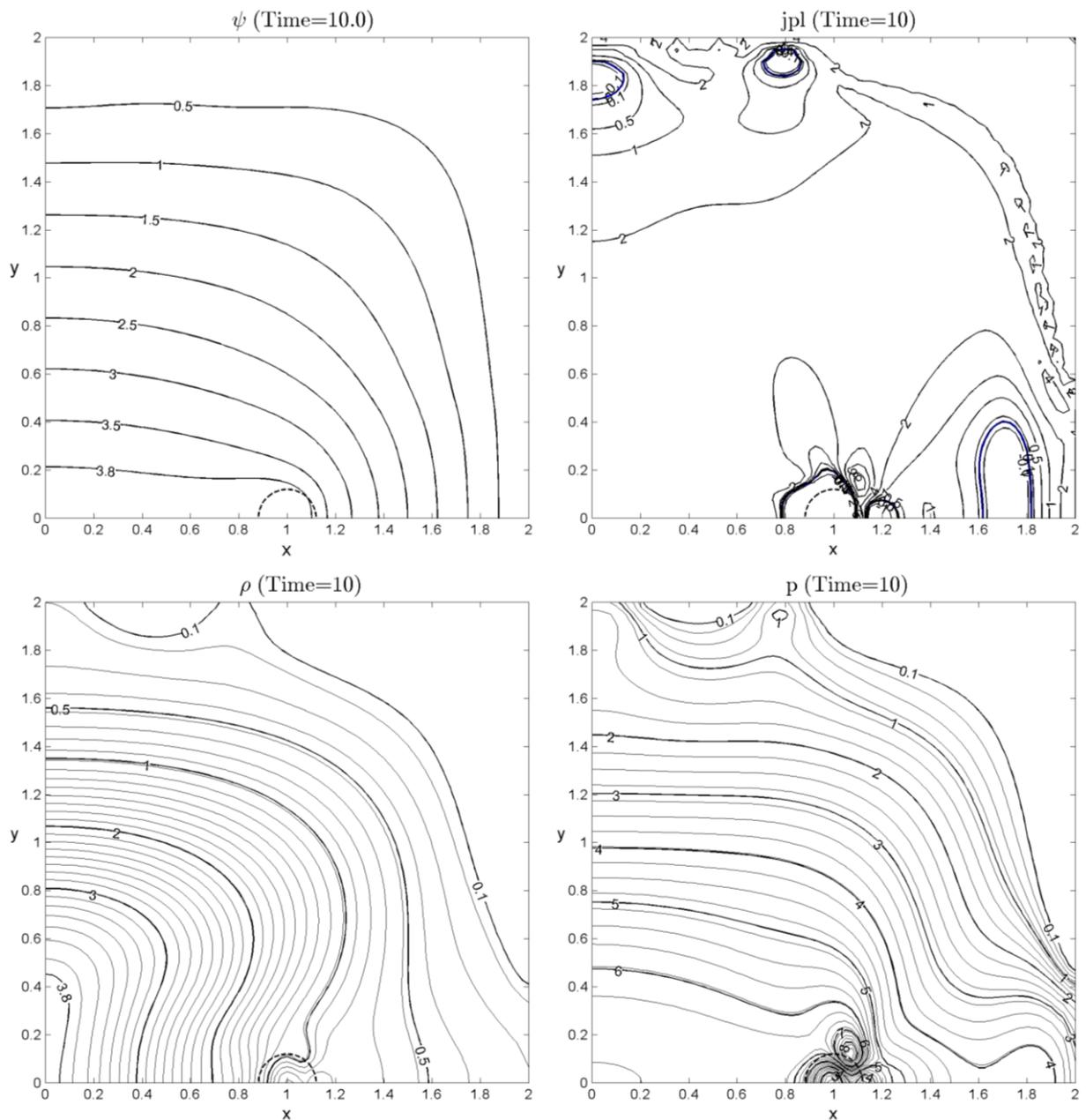


Рис.4.10. Силовые линии магнитного поля, линии уровня плотности электрического тока, плотности и давления плазмы при $t = 10$, в варианте с граничным условием $E_r = 0,2$

В квадратной области рассчитан также нестационарный вариант задачи с заданным магнитным полем на границе (1.7). Здесь также получена квазиравновесная конфигурация, формирование которой подчиняется изложенным выше закономерностям.

4.4. Сравнение «Пояса» с токовым слоем.

В заключение главы 4 заметим, что во всех рассчитанных вариантах электрический ток положительного направления в плазме сосредоточен вначале процесса на периферии цилиндра, а отрицательного – вблизи проводника. Со временем отрицательный ток уменьшается, а положительный медленно осредняется, распространяясь по всей области вследствие диффузии магнитного поля. Этим обстоятельствам конфигурации в галатее отличаются от токового слоя [31, 33], и основная причина тому – создание отрицательного тока в начальной стадии процесса [77].

Если этот механизм исключить из модели, то распределение тока в области становится ближе к токовому слою, который наблюдается в экспериментах [31, 33] и расчетах [43, 44]. Та же тенденция проявилась в попытках рассчитать формирование конфигурации в работе [79]. В подтверждение этому на рисунке 4.11 приведен результат расчета без стадии возрастания тока в проводниках – постепенного или мгновенного. Для этого в качестве начальных значений магнитного поля \mathbf{H} предварительно рассчитано поле двух проводников в вакууме, т.е. в той же двумерной МГД-модели (2.6, 2.10), где положено $\mathbf{V} \equiv 0$, $\rho = \text{const}$, $p = \text{const}$. На рисунке 4.11 представлена начальная стадия процесса при $t = 1,2$ в круглой области с граничным условием $E_r = 0,3$. Здесь хорошо видно образование токового слоя, в котором максимальный ток в плазме сосредоточен вблизи центра вместе с максимальными плотностью и давлением.

Отсюда следует вывод, что рассмотренные математические модели «Пояса», (т.е. галатей) и токового слоя в его накопительной (довзрывной) стадии близки между собой и в то же время хорошо видно их различие.

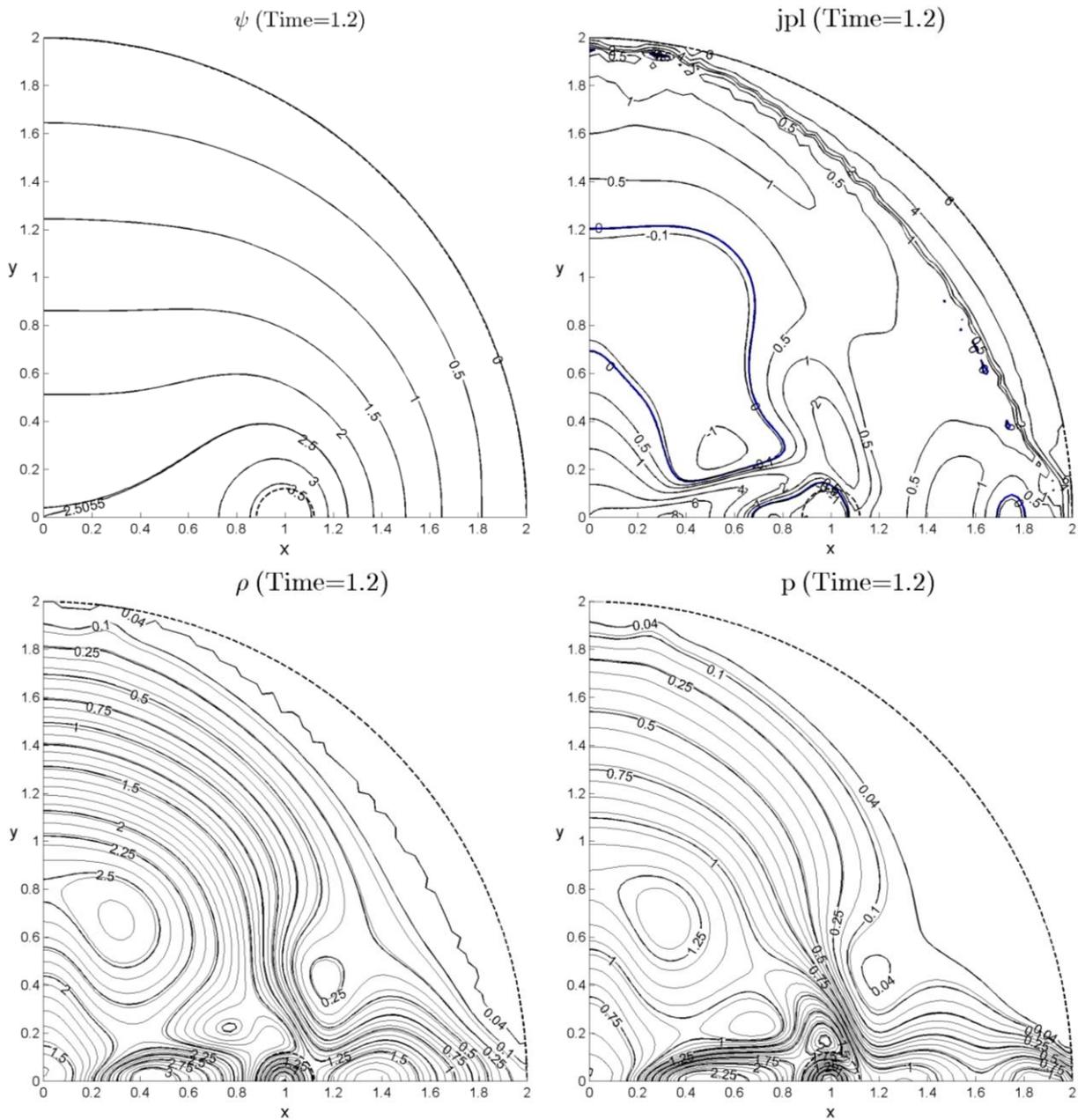


Рис.4.11. Силовые линии магнитного поля, линии уровня плотности электрического тока, плотности и давления плазмы при $t = 1, 2$, в варианте без возрастания тока в проводниках

4.5. Выводы по четвертой главе

В двумерной МГД-модели цилиндрического аналога тороидальной магнитной ловушки «Пояс» показано, что в ловушках-галатях погруженные в горячую плазму проводники с током могут быть изолированы от нее только в нестационарном процессе. Возрастающий вначале ток в проводниках создает в окружающей их плазме ток обратного направления, который, взаимодействуя с магнитным полем, способствует их изоляции.

В данной главе приведены результаты расчетов формирования изолированной от проводников квазиравновесной плазменной конфигурации. В серии расчетов исследованы ее свойства и длительность существования в зависимости от параметров плазмы и электрических токов, участвующих в задаче.

Заключение.

В заключение диссертации кратко представлены основные итоги данного исследования, даны рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы.

1. Созданы математические модели формирования магнитоплазменных конфигураций в ловушке «Галатей-пояс» и ее элементах. Они реализованы в виде комплекса программ и проведенных одномерных и двумерных расчетах магнитоплазменных процессов с использованием высокопроизводительных вычислительных систем.

2. Расчеты, выполненные в простейшей одномерной постановке МГД – задачи с модельными значениями основных параметров, подтвердили предложенную концепцию формирования плазменных конфигураций, изолированных от проводников в рабочем объеме ловушек. Этот вывод справедлив для широкого класса магнитных ловушек - галатей.

3. В расчетах двумерных задач о формировании конфигурации в ловушке «Пояс» получены квазиравновесные режимы конфигураций. Определены закономерности формирования и особенностей удержания конфигураций от физических параметров системы и свойств плазмы.

4. Результаты работы могут представлять интерес для дальнейшей разработки ловушек-галатей.

Основные результаты работы являются новыми.

Список литературы.

1. *Брагинский С.И., Гельфанд И.М., Федоренко Р.П.* Теория сжатия и пульсаций плазменного столба в мощном импульсном разряде // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций / Под ред. Леонтовича М.А. - Изд. АН СССР. 1958. Т. 1. С. 201-221.
2. *Дьяченко В.Ф., Имшенник В.С.* МГД-теории пинч-эффекта в высокотемпературной плотной плазме // Вопросы теории плазмы / Под ред. Леонтовича М.А. - М.: Атомиздат. Вып. 5. 1967. С. 394.
3. *Дьяченко В.Ф., Имшенник В.С.* Двумерная МГД-модель плазменного фокуса Z-пинча // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. - М.: Атомиздат, 1974. Вып. 8. С. 164–246.
4. *Робертс К., Поттер Д.* Магнитогидродинамические методы // Вычислительные методы в физике плазмы / Под ред. Олдера Б., Вернбаха С., Ротенберга М. – М.: Мир, 1974, С. 335.
5. *Аксенов А.Г., Герусов А.В.* Сравнение численных методов расчета двумерных МГД-течений, характеризующихся высокой степенью сжатия // Физика плазмы. 1995. Т. 21. № 1. С. 14–22.
6. *Имшенник В.С., Боброва Н.А.* Динамика столкновительной плазмы. – М.: Энергоатомиздат. 1997.
7. *Bernstein I.B., Frieman E.A., Kruskal M.D., Kulsrud R.M.* Energy principle for the hydromagnetic stability problem // Proc. Roy. Soc. 1958. V. 244. P. 17–50 (перевод: Бернштейн А.Б. и др. Энергетический принцип для проблемы гидродинамической устойчивости // Управляемые термоядерные реакции (сб. перев. материалов) М.: Атомиздат. 1960. Вып. 26. С. 226–260.).
8. *Веденов А.А., Велихов Е.П., Сагдеев Р.З.* Устойчивость плазмы // Усп. физ. наук. 1961. Т.73. Вып. 4. С 701–766
9. *Кадоццев Б.Б.* Гидромагнитная устойчивость плазмы // Вопр. теории плазмы. - М.: Атомиздат. 1963. Вып. 2. С. 132–176.

10. *Bateman G.* MHD Instability. MIT Press. Cambridge MA, London. 1979
(перевод: *Бейтман Г.* МГД-неустойчивости. – М.: Энергоатомиздат. 1982. – 200 с.)
11. *Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П.* Математическое моделирование плазмы. –М.: Наука. 1982–320с
12. *Белова И.В., Брушлинский К.В.* Численная модель неустойчивости Z-пинча в плазме конечной проводимости // ЖВМиМФ. 1988. Том. 28. №1. С. 72–79.
13. *Трубников Б.А.* Теория плазмы. - М.: Энергоатомиздат. 1996.
14. *Василевский В.С., Мухоматов В.С., Стрелков В.С., Явлинский Н.А.* Тороидальная установка с сильным магнитным полем "Токамак-2" // ЖТФ. 1960. Т. 30. Вып. 10. С. 1137
15. *Spitzer L.* // Jr. Phys. Fluids, 1958. V. 1., P. 253.
16. *Арцимович Л.А.* Установки токамак // М.: Институт атомной энергии им. И.В Курчатова, 1974
17. *Кадомцев Б.Б.* О неустойчивости срыва в токамаках // Физика плазмы. 1975. Т. 1. Вып. 5. С. 710–715.
18. *Коврижных Л.М., Щепетов С.В.* Современное состояние теории магнитогидродинамического равновесия и устойчивости плазмы в стеллараторах. // Успехи физических наук. 1986. Т. 148. Вып. 4. С. 637–670.
19. *Пустовитов В.Д., Шафранов В.Д.* Равновесие и устойчивость плазмы в стеллараторах // Вопросы теории плазмы / Под ред. Кадомцева Б.Б. – М.: Энергоатомиздат. 1987. Вып. 15. С. 146–291.
20. *Морозов А.И.* Введение в плазмодинамику. // М.: Физматлит. 2008 – 2-е изд., 616 с.
21. *Интернет ресурс:* <https://www.iter.org/>
22. *Морозов А.И.* О Галатях – плазменных ловушках с омываемыми плазмой проводниками. // Физика плазмы. 1992. Т.18, вып.3. С. 305–316

23. *Морозов А.И.* О магнитных ловушках с "плавающими" в плазме проводниками Письма в ЖТФ. 1990. Т.16, вып.15. С. 86–89;
24. *Брушлинский К.В., Морозов А.И., Ратникова Т.А., Тузова Н.Б.* Диссипативная эволюция магнитной конфигурации автономного зонда («микрогалатеи») // Физика плазмы. 1992. Т. 18. Вып. 8. С. 1047–1054.
25. *Брушлинский К.В., Ратникова Т.А., Тузова Н.Б.* Расчет эволюции магнитного поля и температуры в проводящем кольце с током во внешнем однородном поле. // Мат. моделирование. 1990. Т. 2. №. 11. С. 45–54.
26. *Морозов А.И., Савельев В.В.* О галатеех-ловушках с погруженными в плазму проводниками. // Усп. физ. наук. 1998. Т.168, №11, С. 1153–1194
27. *Брушлинский К.В., Савельев В.В.* Магнитные ловушки для удержания плазмы. // Мат. Моделирование. 1999. Т.11, №5. С. 3–36
28. *Брушлинский К.В.* Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. // М.: Бинوم. Лаборатория знаний. 2009 – 200с.
29. *Морозов А.И., Франк А.Г.* Тороидальная мультипольная ловушка-галатея с азимутальным током. // Физика плазмы. 1994. Т.20, №11, С. 982–989
30. *Морозов А.И., Мурзина М.В.* Простейшие равновесные конфигурации галатей типа «Пояс» //Физ. плазмы. 1996. Т.22. №6. с.551-563
31. *Богданов С.Ю., Марков В.С., Морозов А.И., Франк А.Г.* Плазменная конфигурация «Галатея-Пояс». Первые результаты экспериментальных исследований // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. Вып. 24. С. 5-9.
32. *Богданов С.Ю., Бурилина В.Б., Кирий Н.П., Марков В.С., Морозов А.И., Франк А.Г.* Эволюция температуры плазмы в зависимости от условий формирования магнитоплазменных конфигураций в прямой системе Галатея-Пояс. // Физика плазмы. 1998. Т. 24. №. 6. С. 467-480.
33. *Франк А.Г., Сатунин С.Н.* Эволюция структуры электрических токов и электродинамических сил в токовых слоях. // Физика плазмы. 2011. Т.37, № 10., С. 889 – 908.

34. *Кирий Н.П., Франк А.Г.* Ускорение плазмы в токовых слоях, сформированных в гелии в двумерных и трехмерных магнитных конфигурациях. // Физика плазмы. 2012. Т.38, №12, С. 1042–1054
35. *Островская Г. В, Франк А. Г.* Эволюция пространственной структуры плазмы в процессе формирования токовых слоев в аргоне по данным голографической интерферометрии // Физика плазмы. 2014. Т. 40. № 1. С. 3-100.
36. *Сыроватский С.И.* Динамическая диссипация и ускорение частиц. // Астрономический журнал. 1966. Т. 43., № 2, С. 340–355.
37. *Сыроватский С.И.* О возникновении токовых слоев в плазме с замороженным сильным магнитным полем// ЖЭТФ. 1971. Т. 60. Вып. 5. С. 1721–1741.
38. *Сыроватский С.И., Франк А.Г., Ходжаев А.З.* Развитие токового слоя при движении плазмы в магнитном поле с нулевой линией // Письма в ЖЭТФ, 1972, Т. 15, Вып. 3, С. 138–142.
39. *Сыроватский С.И.* Токовые слои и вспышки в космической и лабораторной плазме. // Вестник АН СССР. 1977. № 10. С. 33–43.
40. *Сыроватский С.И.* Ключевые вопросы теории вспышек // Изв. АН СССР: Сер. Физ. 1979. Т. 43. № 4., С. 695–707.
41. Магнитное пересоединение в двумерных и трехмерных конфигурациях // Труды ИОФАН. М.: Наука, 1996.
42. *Подгорный А.И., Сыроватский С.И.* Численное моделирование процесса возникновения и эволюции токового слоя. // Вспышечные процессы в плазме. Труды ФИАН, т. 110. М.:Наука, 1979 С. 33 – 56.
43. *Брушлинский К.В., Заборов А.М., Сыроватский С.И.* Численный анализ токового слоя в окрестности магнитной нулевой линии //Физ. плазмы. 1980. Т. 6. Вып. 2. С. 297–311.
44. *Подгорный А.И., Сыроватский С.И.* Образование и развитие токового слоя при различных магнитных вязкостях и газовых давлениях // Физика Плазмы. Т. 7. №. 5. С. 1055–1063. 1981.

45. Бугрова А.И., Липатов А.С., Морозов А.И., Харчевников В.К. Электроразрядная ловушка на основе замкнутого квадруполья // Физика плазмы. 1993. Т. 19. Вып. 12. С. 1418-1425.
46. Бишаев А.М., Бугрова А.И., Козинцева М.В., Липатов А.С., Сигов А.С., Харчевников В.К. Исследование времени удержания в мультипольной магнитной ловушке-галатее «Тримикс-М». // Журнал технической физики, 2013, том 83, вып. 4, С. 34 – 40.
47. Бишаев А.М., Бугрова А.И., Гавриков М.Б., Козинцева М.В., Липатов А.С., Савельев В.В., Сигов А.С., Смирнов П.Г., Тарелкин И.А., Храмцов П.П. Исследование диамагнитного эффекта в мультипольных ловушках-галатеех. // Журнал технической физики, 2013, том 83, вып. 4, С. 34 – 40.
48. Бишаев А.М., Буш А.А., Гавриков М.Б., Гордеев И.С., Денисюк А.И., Каменцев К.Е., Козинцева М.В., Савельев В.В., Сигов А.С. Равновесие системы сверхпроводящих колец в однородном поле силы тяжести // Журнал технической физики, 2013, Т. 83. Вып. 5. С. 61-68
49. Бишаев А.М., Буш А.А., Гавриков М.Б., Денисюк А.И., Каменцев К.Е., Козинцева М.В., Савельев В.В., Сигов А.С. Левитирующие состояния сверхпроводящих колец в поле закрепленного кольца с постоянным током // Журнал технической физики, 2014, Т. 84. Вып. 6. С. 155-159
50. Брагинский С.И., Кадомцев Б.Б. // в сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций Т. 3. (Под ред. М.А.Леонтовича) (М.: Изд-во АН СССР, 1958) С. 300.
51. Беркович И., Град Х., Рубин Х. // в кн. Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии, Женева, 1958 Т. 1: Физика горячей плазмы и термоядерные реакции (М.: Атомиздат, 1959).
52. Шафранов В.Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. Вып. 3(9). С. 710–722.
53. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны // (М.: Мир, 1964.)
54. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости // (М.: Наука, 1979.)

55. *Морозов А.И., Савельев В.В.* Фигуры равновесия идеальной плазмы с $\beta=1$ в магнитном поле. // Физика плазмы. 1993. Т.19, вып.8. С. 977–989
56. *Савельев В.В.* Фигуры равновесия идеальной плазмы с током в магнитном поле // Физ. Плазмы. 1995. Т.21. N3. с.216–220
57. *Шафранов В.Д.* Равновесие плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы. / Под ред. М.А.Леонтовича. – М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2 С. 92 – 131.
58. *Grad H., Rubin H.* Hydromagnetic equilibria and force-free fields // Proc. 2nd United Nations Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Geneva. Vol.31. P.190. Columbia Univ. Press. N.Y. 1959.
59. *Захаров Л.Е., Шафранов В.Д.* Равновесие плазмы с током в тороидальных системах // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича и Б.Б. Кадомцева. Вып.11. – М.: Энергоиздат. 1982. С.118-235
60. *Костомаров Д.П., Медведев С.Ю., Сычугов Д.Ю.* Математическое моделирование МГД – равновесия плазмы. // Матем. моделирование. 2008. Т. 20. №5. С. 3-34.
61. *Брушлинский К.В., Зуева Н.М., Михайлова М.С., Морозов А.И., Пустовитов В.Д., Тузова Н.Б.* Численное моделирование прямых винтовых шнуров с проводниками, погруженными в плазму. // Физ. Плазмы. 1994. Т.20. N3. с.284–292
62. *Брушлинский К.В., Зуева Н.М., Михайлова М.С., Петровская Н.Б.* О единственности и устойчивости решений двумерных задач плазмостатики // Матем. моделирование. 1995. Т. 7. №4. С. 73–86.
63. *Брушлинский К.В., Игнатов П.А.* Плазмостатическая модель магнитной ловушки “Галатейя-пояс” // ЖВМ и МФ .2010. Т. 50. № 12. С.2184–2194
64. *Брушлинский К.В., Гольдич А.С., Десятова А.С.* Плазмостатические модели магнитных ловушек-галатей // Матем. моделирование. 2012. Т.24. №8. С.81-96.

65. *Брушлинский К.В., Гольдич А.С.* Краевые задачи вычислительной плазмостатики // Вестник НИЯУ МИФИ. 2013. Т.2. №3. С.292-304.
66. *Брушлинский К.В., Гольдич А.С.* Плазмостатические модели ловушек галатей с магнитопроницаемыми границами.// Физика плазмы. 2014. Т.40. №8.
67. *Брушлинский К.В. Чмыхова Н.А.* О равновесии плазмы в магнитном поле ловушек галатей // Матем. моделирование. 2010 Т. 22, №6. С. 3-14. (Brushlinsky K.V., Chmykhova N.A. Plasma Equilibrium in the Magnetic Field of Galatea Traps // Mathematical Models and Computer Simulations, 2011, Vol. 3, No. 1, pp. 9-17.)
68. *Морозов А.И.* Об ускорении плазмы магнитным полем // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. Вып. 2. С. 305-310.
69. *Брушлинский К.В, Заборов А. М., Козлов А. Н., Морозов А.И., Савельев В.В.* Численное моделирование течений плазмы в КСПУ // Физика плазмы. 1990. Т.16. Вып. 2. С.147-157.
70. *Брушлинский К.В., Жданова Н.С.* Расчет осесимметричных МГД-течений в канале с внешним продольным магнитным полем // ЖФМиМФ. 2006. Том 46. № 3. С. 548–557.
71. *Козлов А.Н.* Динамика вращающихся потоков плазмы в канале плазменного ускорителя с продольным магнитным полем // Физика плазмы. 2006. Т. 32. Вып. 5. С. 413–422.
72. *Брушлинский К.В., Жданова Н.С.* МГД-течения в каналах плазменных ускорителей с продольным магнитным полем // Физика плазмы. 2008. Том 34. № 12. С. 1120–1128.
73. *Козлов А.Н.* Двухжидкостная магнитогидродинамическая модель течений плазмы в квазистационарном ускорителе с продольным магнитным полем. // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50, № 3. С. 44-55.

74. *Козлов А.Н.* Исследование приэлектродных процессов в квази-стационарных плазменных ускорителях с непроницаемыми электродами // *Физика плазмы*. 2012. Т. 38, № 1. С. 15-25.
75. *Морозов А.И., Савельев В.В.* Динамика сверхзвуковых плазменных потоков в магнитном поле. // *Физика плазмы*. 1996. Т. 22. № 4. С. 318.
76. *Дудникова Г.И., Морозов А.И., Федорук М.П.* Формирование плазменных конфигураций-галатей типа «Пояс» // *Письма в ЖТФ*. 1996. Т. 22. №21. С. 45-51.
77. *Дудникова Г.И., Морозов А.И., Федорук М.П.* Численное моделирование прямых плазменных конфигураций-галатей типа «Пояс» // *Физ. плазмы*. 1997. Т. 23. №5. С. 387-396.
78. *Брушлинский К.В., Горшенин К.П., Морозов А.И.* Численное моделирование начальной стадии формирования плазменной конфигурации "Пояс". *Письма в ЖТФ*. 1995. Т.21, вып.222. С. 67-70
79. *Брушлинский К.В., Горшенин К.П.* Плоская МГД-модель образования плазменной конфигурации с погруженными в нее проводниками. // *Мат. Моделирование*. 1997. Т.9, №5. С. 28–36
80. *Дудникова Г.И., Федорук М.П., Яковлев В.С.* Численное моделирование магнитоплазменных конфигураций Галатея – Пояс.// *Вычислительные технологии* 2000. Т.5 N2. с.26–34.
81. *Дудникова Г.И., Жуков В.П., Франк А.Г.* Численное моделирование формирования и эволюции токового слоя в ограниченной плазме. // *Вычислительные технологии* 2004. Т.9 N3. с.39–49.
82. *Oran E.S., Boris J.P.* Numerical simulation of reactive flow. ELSEVIER. N.Y., Amsterdam, London. 1987 (перевод: *Оран Э., Борис Дж.* Численное моделирование реагирующих потоков: Пер. с англ. М.: Мир, 1990, 660с.)
83. *Zalesak S.T.* Fully Multidimensional Flux-Corrected Transport Algorithms for Fluids // *Journ. of Computational Physics*. 1979. V.31. P.335–362.

84. Бук Д., Борис Дж. Решение уравнений непрерывности методом коррекции потоков // Вычисл. методы в физике. Управляемый термоядерный синтез. / Под ред. Киллина Дж. – М.: Мир. 1980. С. 92.
85. Boris J.P., Book D.L. Flux-Corrected Transport. I: SHASTA – A Fluid Transport Algorithm that Works // J Comp. Phys. 1973. V.11, N.1, P.38–69
86. Boris J.P., Book D.L., Hain K. Flux-Corrected Transport. II: Generalizations of the Method // J Comp. Phys. 1975. V.18, N.3, P.248–283
87. Peaceman D.W., Rachford H.H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // Journ. Soc. Industr. Appl. Math. 1955. V. 3. №1. P.28-42.
88. Douglas J. On the numerical integration of $U_{xx} + U_{yy} = U_t$ by implicit methods // Journ. Soc. Industr. Appl. Math. 1955. V. 3. №1. P.42-65
89. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука. 1967. 197с.
90. Брушлинский К.В., Чмыхова Н.А. Математические модели магнитного удержания плазмы в ловушках - галатях // X ВСФПТМ (X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики), 24-30 августа 2011, Нижний Новгород, Россия, Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4, часть 3, С. 661-663.
91. Брушлинский К.В., Чмыхова Н.А. Численная модель формирования квазиравновесия плазмы в магнитном поле ловушек – Галатей. // Вестник Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ", 2014, Т. 3, № 1, С. 40-52.
92. Брушлинский К.В., Зализняк О.И., Чмыхова Н.А. Динамика и равновесие плазмы в окрестности проводника с током // Научная сессия МИФИ-2007: Сб. науч. тр. в 17 т. – М.: МИФИ, 2007. – Т. 7. С. 94-95.
93. Брушлинский К.В., Чмыхова Н.А. Численная модель формирования квазиравновесной плазменной конфигурации вокруг проводника с током

// Научная сессия МИФИ-2008: Сб. науч. тр. в 15 т. – М.: МИФИ, 2008. – Т. 9. С. 64-65.

94. *Чмыхова Н.А.* Равновесная плазменная конфигурация в окрестности проводника с током // XVII Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов и решение задач математической физики с приложением к многопроцессорным системам», посвященная памяти К.И.Бабенко: Дюрсо, 16-20 сентября 2008, Тез. докл. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2008. – С. 81-83.
95. *Чмыхова Н.А.* Равновесие плазменной конфигурации в окрестности токонесущего проводника // Научная сессия МИФИ-2009: Аннотации докладов в 2 т. – М.: МИФИ, 2009. – Т. 2. С. 129.
96. *Брушлинский К.В., Чмыхова Н.А.* Математические модели равновесия плазмы в магнитных ловушках // Международная научная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященная памяти академика А.А. Самарского к 90-летию со дня рождения, Москва, МГУ 16-18 июня 2009. Тез. докл. С. 306-307. МАКС Пресс. 2009.
97. *Чмыхова Н.А.* Двумерная МГД – модель формирования плазменной конфигурации в магнитной ловушке типа «Пояс» // XVIII Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященная памяти К.И.Бабенко: Дюрсо, 13-17 сентября 2010, Тез. докл. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2010. – С. 76-77.
98. *Брушлинский К.В., Игнатов П.А., Чмыхова Н.А.* Математические модели равновесия плазмы в магнитном поле ловушек – галатей // Международная конференция по прикладной математике и информатике, посвященная 100-летию со дня рождения академика А.А. Дородницына. ВЦ РАН, Москва, 7-11 декабря 2010, Тез. докл. – ВЦ РАН. Москва, 2010. – С 30-31.

99. *Чмыхова Н.А.* Численное исследование формирования двумерной магнитоплазменной конфигурации в ловушке типа "Пояс" // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2011: Аннотации докладов в 3 т. – М.: НИЯУ МИФИ, 2011. – Т. 2. С. 196.
100. *Чмыхова Н.А.* Численная модель формирования квазиравновесия плазмы и магнитного поля в ловушке - Галатее - «Пояс». // XI Международная конференция " Забабахинские научные чтения." Сб. материалов. 16-20 апр.2012 - Снежинск: Изд. РФЯЦ ВНИИТФ, 2012. С.152
101. *Чмыхова Н.А.* Численная модель динамики плазмы в магнитной ловушке «Галатее – Пояс» // XIX Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященная памяти К.И.Бабенко: Дюрсо, 10-16 сентября 2012, Тез. докл. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2012. – С. 99-101.
102. *Чмыхова Н.А.* Двумерная МГД-модель формирования квазиравновесных плазменных конфигураций в магнитных ловушках-галатеех // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2013: Аннотации докладов в 3 т. – М.: НИЯУ МИФИ, 2013. – Т. 3. С. 141.
103. *Брушлинский К.В., Гольдич А.С., Чмыхова Н.А.* Математические модели равновесия и квазиравновесия плазмы в магнитных ловушках // XX Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященная памяти К.И.Бабенко: Дюрсо, 15-21 сентября 2014, Тез. докл. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2014. – С. 33-34.
104. *Чмыхова Н.А.* Плазмодинамическая модель формирования квазиравновесной конфигурации в магнитном поле // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2015: Аннотации докладов в 3 т. – М.: НИЯУ МИФИ, 2015. – Т. 2. С. 252.
105. *Куликовский А.Г., Любимов Г.А.* Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз. 1962. 246 с.

106. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. - М.: ФИЗМАТЛИТ. 2001. - 608 с. – ISBN 5-9221-0194-3, стр.59-75
107. Соловьев Л.С., Шафранов В.Д. Замкнутые магнитные конфигурации для удержания плазмы // В кн.: Вопросы теории плазмы. / Под ред. М.А.Леонтовича. Вып. 5. – М.: Атомиздат, 1967. – С. 3 – 208.
108. Johnson J.L., Oberman C.R., Kulsrud R.M., Frieman E.A. Some stable hydromagnetic equilibria // Phys. Fluids. 1958. V.1. №4. P. 281 – 296.
109. Соловьев Л.С. Симметричные магнитогидродинамические течения и винтовые волны в круглом плазменном цилиндре // Вопросы теории плазмы. / Под ред. М.А.Леонтовича. – М.: Госатомиздат, 1963. Вып.3. – С. 245 – 289.
110. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы (введение в теорию). // М.: Наука, 1973, С.400
111. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем - М.:Наука. 1971.
112. Самарский А.А. Теория разностных схем - М.: Наука. 1977. 656 с.; 1997
113. Страуструп Б. Язык программирования C++. - М.: Бином. 1999. 991с.
114. Карпов Б., Баранова Т. C++ Специальный справочник. С-Пб. Питер 2001
115. Интернет ресурс: Страница вычислительного комплекса К-100. URL: <http://www.kiam.ru/MVS/resources/k100.html>
116. Интернет ресурс: <http://www.qt.io/>
<http://doc.qt.io/qt-4.8/qtconcurrent.html>
117. Интернет ресурс: <http://qwtplot3d.sourceforge.net/>
118. Интернет ресурс:
<http://doc.crossplatform.ru/qt/4.7.x/threads-qtconcurrent.html>
119. Spitzer L. Physics of fully ionized gases. – Interscience Publisher, Inc. N.Y., London. 1956 (перевод: Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. – М: Изд. Иностр. лит. 1957 112с.)
120. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978.
121. Дьяконов В. Maple 7. С-Пб. Питер 2002