

На правах рукописи

Денисенко Владимир Викторович

Прямое численное моделирование вихрей в потоках нормальной идеальной
среды

Специальность 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Трошкин Олег Валентинович

2014

Содержание

Введение.....	
Глава 1. Моделируемые задачи.....	
§ 1. Двумерные возмущения сдвигового течения между цилиндрами.....	
§ 2. Противоточные вихри осевых потоков.....	
Выводы по главе 1.....	
Глава 2. Моделирование возмущений цилиндрического слоя.....	
§ 3. Упрощенная схема Роу на структурированной сетке.....	
§ 4. Вихри двумерной неустойчивости.....	
Выводы по главе 2.....	
Глава 3. Моделирование возникновения вихрей неустойчивости.....	
§ 5. Двумерное течение Куэтта-Тейлора между цилиндрами.....	
§ 6. Струйное и спутное течения с закруткой.....	
§ 7. Течение в газоразделительной центрифуге.....	
Выводы по главе 3.....	
Заключение.....	
Литература.....	

Введение

Численное моделирование в наше время приобретает все большую значимость как в науке, так и в инженерии. В фундаментальных исследованиях численное моделирование позволяет построить модель задачи и исследовать влияние различных условий на нее, чего порой нельзя достичь натурным экспериментом. Например, при проведении натурального эксперимента, следует избавиться от влияния многочисленных погрешностей, вносимых аппаратурой, внешними условиями и т.д. Также, натуральный эксперимент стоит намного дороже численного. К примеру, при исследовании устойчивости течения по трубе, следует следить, чтобы поверхность трубы была как можно более гладкой и сама установка была изолирована для предотвращения действия на нее случайных внешних условий (изменения температуры, влияния акустических волн и т.д.). При численном исследовании этой задачи, достаточно написать модель (систему уравнений, граничные условия и т.д.), построить численную модель и реализовать ее на ЭВМ. Таким образом, мы исключим действия внешних условий, вносящих погрешности и ошибки, учитывать которые нам не нужно.

Составляя различные модели исследуемой задачи, акцентируя тем самым свое внимание на влиянии тех или иных условий, свойств, параметров, которые входят в дифференциальные уравнения модели, становится возможным выделить главный фактор, влияющий на исследуемую задачу. Например, при исследовании течений на устойчивость было показано [1], что влиянием вязкости при больших числах Рейнольдса можно пренебречь и рассматривать устойчивость протекания аналогичной, но невязкой задачи. Таким образом, мы имеем возможность строить модель, учитывая наиболее существенные, в рамках исследуемой задачи, физические законы.

При проведении инженерных расчетов, численное моделирование позволяет рассчитать параметры конструкции и проверить возможность ее реализации без проведения натуральных экспериментов, либо сведя их количество к минимуму. Например, при проверке расчетов конструкций различных частей самолетов, раньше делали натурную модель этих частей и продували в аэродинамической трубе. В наше время, самым первым этапом здесь будет являться численное моделирование аэродинамической трубы и «продувка численной модели». Данный подход позволяет выявить и исправить наиболее грубые ошибки на этапе проектирования. Например, компания Boeing создала модель самолета Boeing 777 без изготовления макета и не провела ни одного натурального эксперимента. Самолет был спроектирован полностью с использованием одних лишь вычислительных машин.

Из инженерных программных продуктов для численного моделирования сейчас наиболее известны ANSYS, FlowVision, SolidWorks, и т.д. Благодаря постоянно возрастающей вычислительной мощности ЭВМ, методов распараллеливания задач, расчет сложных моделей занимает все меньше времени. Для научных расчетов, как правило, не существует какого-либо программного продукта. Это обусловлено тем, что в данной области решаются фундаментальные задачи, для которых необходимо построить свою математическую и численную модель с целью исследования какого-либо явления или получения фундаментальных результатов. Что подразумевает самостоятельную работу над разработкой численной модели решаемой задачи.

Важной частью является численное исследование всевозможных течений на гидродинамическую устойчивость. Сложность аналитического подхода состоит в том, что уравнения гидродинамики нелинейные и даже в упрощенном случае невязкой и несжимаемой жидкости анализ уравнений на предмет устойчивости представляет значительные трудности. Как правило, удается лишь линеаризовать задачу и исследовать линеаризованные

уравнения. И даже если в результате мы получим, что линейризованная задача глобально устойчива, то это не означает, что исходные нелинейные уравнения являются устойчивыми (течение может быть глобально неустойчивым). Это связано с влиянием нелинейной части уравнений. В этом случае на помощь приходят методы численного моделирования, которые позволяют учесть нелинейные эффекты. Но и здесь есть свои вопросы. Один из них формулируется следующим образом - какую модель следует использовать (вязкую, сжимаемую, невязкую и т.д.), и каким образом моделировать возмущения исследуемого течения. Также, следует знать о влиянии численной схемы, сетки, покрывающей расчетную область, на поставленную задачу.

Ответ на некоторые вопросы, касающиеся исследования гидродинамической устойчивости течений можно найти в [1]. Его можно сформулировать следующим образом:

- Крупномасштабные упорядоченные структуры турбулентного течения (крупные вихри) и мелкомасштабная стохастическая турбулентность при больших числах Рейнольдса не взаимодействуют друг с другом (независимы);

- Характер развития крупномасштабных структур не зависит от вязкости.

В работах, приведенных в диссертации, использовался именно данный подход (за исключением исследования вторичных режимов в газоразделительной центрифуге).

В целом, технологию численного эксперимента можно представить в виде этапов: 1) математическая постановка задачи, включающая разработку и выбор математической модели; 2) построение методики решения задачи в целом со структурным анализом математической модели. Последний пункт обеспечивает декомпозицию задачи на составные части; 3) разработка алгоритма решения отдельных задач; 4) модульный анализ алгоритмов; 5) разработка проекта программы с описанием структуры данных, информационных потоков; 6) разработка программы или модификация

существующих; 7) проведение тестовых расчетов; 8) проведение собственно решения задачи. Заметим, что в процессе численного эксперимента результаты требуют возврата к предыдущим этапам для внесения необходимых изменений в математическую модель, метод решения, программный код. Таким образом, технологическая цепочка имеет много обратных связей, приводит к цикличности процесса, что в итоге существенно увеличивает стоимость численного эксперимента.

Существенное значение при численном моделировании имеет факт уменьшения затрат на разработку и модификацию программы. Процесс модификации находится в самом внутреннем цикле технологической цепочки численного эксперимента, поскольку и уточнение постановки задачи, и изменение методов численного решения задачи с той же математической постановкой приводят в итоге к необходимости внесения изменений в программу. Эффект в этом направлении достигается за счет разработки проблемно-ориентированных комплексов программ. Одним из основных требований к такому комплексу является обеспечение такой гибкости программных реализаций, при которой существенно облегчается настройка на конкретную физическую или математическую задачу определенного класса. Реализация этого требования приводит к простой структуре комплекса программ, позволяющей вносить изменения в математическую модель или метод решения путем естественного расширения комплекса новыми программами.

В технологической цепочке численного моделирования основное внимание уделяется разработке методов и алгоритмов решения задач. В методологии разработки алгоритма должен присутствовать структурный подход. Основная суть этого подхода состоит в том, чтобы создавать такие программы, сложность которых не будет превышать некоторого уровня, несмотря на любую сложность реализуемого алгоритма. Эта идея осуществляется построением простой и ясной структуры программы путем синтеза единого целого из составных частей. Разработка программы с

позиций структурного подхода в основном ведется сверху вниз методом пошаговой детализации: вначале описывается алгоритм решения задачи в целом (верхний уровень программы), а затем детализируется каждое частное действие. Подобная детализация проводится до уровня выражения частного действия одним оператором используемого языка программирования. Другими словами, детализация алгоритма всегда заканчивается на уровне действий, которые можно непосредственно реализовать на конкретном языке программирования для реальной ЭВМ.

Кроме того, данный подход к производству больших программ предусматривает иерархическое разбиение алгоритмов решения и математической постановки. Сложную комплексную задачу можно разбивать на ряд более простых задач (гидродинамическую, тепловую, диффузионную), для которых предполагаются известными все внешние входные данные. Здесь процесс детализации заканчивается на уровне выделения более простых задач. Таким образом, структурный анализ постановки задачи предусматривает построение иерархической системы отдельных подзадач. На следующем этапе разработки программы проводится детализация алгоритмов решения этих выделенных задач также в виде иерархических структур, реализующих выбранные алгоритмы. В итоге проведенный структурный анализ алгоритма позволяет разрабатывать легко модифицируемую программу. Внесение необходимых изменений в расчетные соотношения сводится к исправлению некоторых действий определенного уровня и не затрагивает других частей программы. Опыт показывает, что разрабатываемые на такой основе комплексы программ являются развивающимися системами: с течением времени расширяется круг задач решаемых с помощью комплекса, увеличивается число структурных модулей в комплексе, улучшается качество отдельных модулей и т.д.

Целью всех работ, описанных ниже в диссертации, являлось изучение условий возникновения вторичных течений при возмущении различных видов течений – в основном вращательных и протеканий. Такие течения

часто встречаются в природе (аккреционные диски, атмосферные явления на Земле и т.д.) и технике (течения в газоразделительной промышленной центрифуге, течения в трубах). Совокупное их рассмотрение позволит выявить общие свойства относительно условий, необходимых для перехода во вторичный режим течения. Также, возможно будет проследить общность в характере этих вторичных течений.

Актуальностью изучения данных задач являются вопросы, возникающие в астрофизике (двумерная задача Куэтта-Тейлора моделирует аккреционный диск), теории гидродинамической устойчивости (все рассматриваемые задачи), нефтегазовой промышленности и транспортировки продуктов по трубам (задача изучения протекания в трубе), атомной промышленности (газоразделительная центрифуга).

В данной работе будут рассмотрены некоторые классы течений и их вторичные режимы. Для расчетов использовался метод конечного объема второго порядка точности по пространству. В каждой главе, где рассматривается какая-либо задача, кратко описана модель течения (система уравнений) и численная схема, использовавшаяся в расчетах. Основной трудностью моделирования вторичных течений является подбор возмущений, которые приведут к смене режима течения. Второй задачей данной работы является изучение влияния различных возмущений на основное течение.

Во многих случаях, вторичный режим течения представляет из себя течение с наличием вихрей в потоке. Данные вихри рождаются в области концентрации возмущений или области больших градиентов скорости течения. Они вбирают в себя энергию первичного течения, пока не достигнут размеров порядка размеров области течения, затем начинают взаимодействовать друг с другом, образуя пары (двойные системы), либо сливаясь воедино и далее их энергия переходит в мелкомасштабную часть вследствие взаимодействия с основным потоком.

Одним из основных результатов проведенных исследований является обоснование использования модели «начальные условия: основное течение + возмущение» для исследования невязких задач на устойчивость. В конце данной работы будет приведена задача о исследовании течения в газоразделительной центрифуге – вязкой, теплопроводной, многокомпонентной задаче. В ней будет показано, что подход «начальные условия: основное течение + возмущение» уже не работает и необходимо искать новые методы моделирования.

ГЛАВА 1. МОДЕЛИРУЕМЫЕ ЗАДАЧИ

В данной главе представлены математические постановки исследуемых модельных задач. Первой будет рассмотрена двумерная задача, посвященная исследованию вращательного течения между цилиндрами на устойчивость [2]. Данная задача является в некотором смысле продолжением работы [3], где исследовалось сдвиговое течение между цилиндрами.

Во второй задаче рассматривается трехмерное, осесимметричное сдвиговое осевое течение идеальной среды в зазоре между двумя цилиндрами.

§ 1. ДВУМЕРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ МЕЖДУ ЦИЛИНДРАМИ

В качестве основного течения, исследованием которого мы займемся, выберем течение (профиль скорости) Тейлора между двумя коаксиальными цилиндрами. Следует заметить, что постановка задачи на самом деле не является исследованием реального течения Тейлора, которое трехмерно. Мы лишь позаимствуем профиль скорости и будем рассматривать двумерный аналог.

Нас будет интересовать влияние физических параметров задачи на устойчивость течения и характер вторичного течения. В качестве модельных уравнений течения выберем уравнения Эйлера. Выбор уравнений идеальной среды основан на предположении, что влияние вязкости сводится к диссипации энергии вносимых возмущений. Таким образом, если диссипация происходит медленнее, чем перетекание энергии основного течения в энергию возмущений, то течение будет неустойчивым. Выбирая модель идеальной среды, таким образом мы исследуем течение на абсолютную устойчивость: если идеальная модель устойчива, то вязкая тем более будет устойчивой (но встречаются исключения).

Как известно, в теории устойчивости течений вязкой среды, число Рейнольдса Re , является безразмерным параметром, показывающим степень неустойчивости течения. Как правило, чем больше Re , тем неустойчивее течение. В данной же задаче невозможно ввести Re , т. к. нет молекулярной вязкости. Таким образом, следует ввести безразмерное число (возможно и не одно), характеризующее задачу и исследовать его влияние на устойчивость течения.

Запишем уравнения Эйлера для двумерного течения в полярных координатах (r, φ) :

1. Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru\rho) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}(v\rho) = 0 \quad (1.1)$$

Здесь u, v - r и φ - компоненты скорости соответственно.

2. Уравнения для двух компонент плотности импульса:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r(\rho u^2 + p)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho uv) = \frac{p}{r} \quad - r \text{ компонента,} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho uv) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho v^2 + p) = 0 \quad - \varphi \text{ компонента,} \quad (1.3)$$

3. Уравнение для удельной полной энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru(\rho E + p)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}(v(\rho E + p)) = 0 \quad (1.4)$$

Где t - время (сек.), ρ - плотность ($\frac{г}{см^3}$), $E = e + \frac{\mathbf{v}^2}{2}$ - удельная полная

энергия ($\frac{эрг}{г}$) и e - удельная внутренняя энергия ($\frac{эрг}{г}$).

Граничные условия на стенках цилиндрического зазора имеют вид условий непротекания: $u|_{r=R_1} = u|_{r=R_2} = 0$, где R_1, R_2 - радиусы внутреннего и внешнего цилиндров соответственно.

Теперь приступим к приведению системы уравнений, с помощью которых производилось моделирование, к безразмерным переменным.

Выпишем уравнение Эйлера в декартовых координатах:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \quad (1.5)$$

где ρ - плотность среды, p - ее давление, а \mathbf{V} - вектор скорости. Сделаем замену $\bar{\mathbf{V}} = \frac{1}{\Omega R}\mathbf{V}$, $\bar{t} = \frac{1}{T}t$, $\bar{\nabla} = L\nabla$, где черта сверху обозначает безразмерную

переменную. Подставив в (1.5), получим:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial \bar{t}} + \frac{\Omega R}{L}(\bar{\mathbf{V}}\bar{\nabla})\bar{\mathbf{V}} = -\frac{1}{\rho\Omega RL}\bar{\nabla}p \quad (1.6)$$

Если положить:

$$T = \frac{L}{\Omega R} \quad (1.7)$$

то (1.6) примет следующий вид:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial \bar{t}} + (\bar{\mathbf{V}}\bar{\nabla})\bar{\mathbf{V}} = -\frac{1}{\rho(\Omega R)^2}\bar{\nabla}p \quad (1.8)$$

Вычислив безразмерное давление $\bar{p} = \frac{1}{\rho(\Omega R)^2}p$, в итоге получим из (1.8):

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial \bar{t}} + (\bar{\mathbf{V}}\bar{\nabla})\bar{\mathbf{V}} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\bar{\nabla}\bar{p} \quad (1.9)$$

Таким образом, получается, что уравнение Эйлера (1.9) не меняется (инвариантно) относительно операции приведения к безразмерным переменным. Здесь возникает параметр с размерностью времени (1.7) (характерное время задачи). Приведя к безразмерным переменным уравнение непрерывности, получим аналогичный результат, действительно:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{V}) = 0; \text{ после аналогичных преобразований: } \frac{1}{T}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \frac{\Omega R}{L}\overline{\text{div}(\bar{\rho}\bar{\mathbf{V}})} = 0.$$

Положив $T = \frac{L}{\Omega R}$, получим инвариантность уравнения непрерывности. Теперь

приведем к безразмерным переменным уравнение для удельной полной

энергии: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \text{div}((\rho E + p)\mathbf{V}) = 0$. Вычислив безразмерную энергию

$\bar{E} = \frac{1}{(\Omega R)^2}E$, и подставив в уравнение все безразмерные величины, получим:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial \bar{t}}(\bar{\rho}\bar{E}) + \frac{\Omega R}{L}\overline{\text{div}((\bar{\rho}\bar{E} + \bar{p})\bar{\mathbf{V}})} = 0. \text{ Таким образом, получили, что уравнение}$$

инвариантно относительно операции приведения к безразмерным переменным и $T = \frac{L}{\Omega R}$. Будем считать, что $R = R_{cp}$ - радиус середины зазора между цилиндрами, $L = \Delta R$ - ширина зазора, Ω - угловая скорость внешнего цилиндра.

В дальнейшем все переменные будут считаться безразмерными, поэтому черту сверху писать не будем.

Основной задачей здесь является подбор возмущений, которые смогли бы «опрокинуть» основное течение, давая возможность перехода ко вторичному течению. Возмущение вносилось посередине зазора и имело вид: $\delta u(r, \varphi) = a(r) \sin(n\varphi)$ - возмущение r -компоненты скорости, где n - число мод

возмущения, $a(r) = \begin{cases} \alpha(\frac{\Delta R}{2} - r), & R_{cp} > r \geq R_{cp} - \frac{\delta}{2} \\ \alpha(r - \frac{\Delta R}{2}), & R_{cp} + \frac{\delta}{2} \geq r \geq R_{cp} \end{cases}$ - амплитуда. Здесь δ , α - ширина

слоя возмущений (несколько расчетных ячеек) и пропорциональный коэффициент в линейной зависимости $a = a(r)$.

За начальные условия бралось течение Тейлора-Куэтта

$v = \frac{\Omega}{R_2^2 - R_1^2} (R_2 r - \frac{R_2 R_1^2}{r})$ при условии неподвижности внутреннего цилиндра и вращения внешнего с угловой скоростью Ω . Здесь R_1 - радиус внутреннего цилиндра, R_2 - внешнего.

В подобной работе [3] производилось исследование по одному параметру - разности скоростей между цилиндрами. Было получено, что после перехода в турбулентный режим течения, структура течения представляла собой перемежающуюся турбулентность, т. е. области почти ламинарного течения (вторичного) сменяются областями турбулентности (крупные вихри). Также был построен спектр кинетической энергии, показывающий, что основная ее доля содержится в низкочастотной части.

Следует также обратить внимание на работу [5]. В данной работе теоретически исследовалась устойчивость плоскопараллельного сдвигового

течения (задача Рэлея). Было получено, что чем больше длина волны возмущения, тем неустойчивее становится течение. Также, на устойчивость течения влияет распределение завихренности $\xi(r)$, более того, профиль $\xi(r)$ является доминирующим над профилем скорости $v(r)$ при изучении устойчивости. Если профиль завихренности имеет максимум в некоторой точке r' , то чем больше вторая производная в данной точке $\frac{d^2}{dr^2}\xi(r)|_{r=r'}$, тем более неустойчиво течение.

Привлекательным общим методом решения поставленной задачи служит численный эксперимент [6], подкрепленный физическими доводами [7].

В целом, данная постановка задачи касается исследования так называемой *структурной неустойчивости течения*, связанной с возникновением крупных вихрей.

Как хорошо известно, структурная гидродинамическая неустойчивость была обнаружена Рэлеем [8, 9] практически одновременно с традиционной *параметрической неустойчивостью течений*, открытой Рейнольдсом [10].

В отличие от последней первая не ограничивается числом Рейнольдса, сводящем гидродинамику к классической механике малых (или локальных) или конечных (или нелокальных) бифуркаций решений нелинейных уравнений [11-18]. Более того, самому указанному числу здесь отводится скромная роль «стартера», «включающего» большие градиенты скорости у твердой стенки при наличии условия прилипания.

Вследствие же больших градиентов скорости, возникающих по тем или иным причинам, локально параллельным (или «ламинарным») слоям жидкости или газа становится почему-то «выгоднее» сворачиваться в рулоны, или образовывать крупные вихри с четко обозначенной осью вращения.

Сворачивание слоев в рулоны может быть вызвано также разностью направлений градиентов плотности и давления (*неустойчивость Фридмана* [19]), касательной или нормальной компонент скорости (*неустойчивости*

Гельмгольца-Кельвина [20, 21] или *Рихтмайера-Мешкова* [22, 23], соответственно), плотности (*неустойчивость Тейлора* [24]), температуры (*неустойчивость Бенара* [25, 26]), собственных частот колебаний [27-30], обратного числа Россби [31] и других физических параметров ([6, 30, 32-35]).

Возникающие вихри неустойчивости оказываются элементами развивающегося *каскада турбулентности*, допускающего прямое численное моделирование [36].

Между тем механика и термодинамика вихря все еще остаются невыясненными. Например, вихревая *трубка Ранки-Хилша* [37, 38] способна на десятки градусов Цельсия понизить температуру поступающего воздуха к центру вращения (чем более полувек а пользуются американские пожарные).

В любом случае центр вихря неизменно втягивает в себя мелкую примесь (*парадокс чаинок*, скапливающихся у центра вращения вопреки ожидаемому разбеганию к краю), чему конечной причиной служит *эйлерова конвекция* $(\bar{\nabla}\bar{\nabla})\bar{\nabla}$ [30].

Эта главная «нелинейность» механики сплошных сред приводит и к возникновению самих вихрей. Иначе говоря, с вязкостью, но без конвекции (*неустойчивость Сэфмена-Тейлора* [41]) течение может быть сколь угодно сложным, но центров вращения при этом не образуется [42].

Влиянию эйлеровой конвекции на возникновение и развитие вихрей неустойчивости в основном приближении невязкой среды в основном и посвящена настоящая работа.

§ 2. ПРОТИВОТОЧНЫЕ ВИХРИ ОСЕВЫХ ПОТОКОВ

В качестве модели для данной задачи выберем течение между цилиндрами вдоль оси x . В такой постановке удобно ввести цилиндрическую систему координат (r, x, φ) . Будем считать, что гидродинамические параметры течения не зависят от угла φ , т.е. оператор

$\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0$. В качестве уравнений модели возьмем уравнения невязкой

сжимаемой среды с уравнением состояния идеального газа, записанные в цилиндрической системе координат:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u^r \\ \rho u^x \\ \rho u^\varphi \\ \rho(e + \frac{V^2}{2}) \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho u^r \\ \rho(u^r)^2 + p \\ \rho u^r u^x \\ \rho u^r u^\varphi \\ \rho u^r (e + \frac{V^2}{2}) + p u^r \end{pmatrix}_r + \begin{pmatrix} \rho u^x \\ \rho u^r u^x \\ \rho(u^x)^2 + p \\ \rho u^\varphi u^x \\ \rho u^x (e + \frac{V^2}{2}) + p u^x \end{pmatrix}_x + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \rho u^r \\ -\rho(u^\varphi)^2 + \rho(u^r)^2 \\ \rho u^r u^x \\ 2\rho u^r u^\varphi \\ \rho u^r (e + \frac{V^2}{2}) + p u^r \end{pmatrix} = 0, \quad p = \sigma \rho e, \quad \sigma = \gamma - 1 \quad (1.10)$$

Характерной особенностью данной постановки является то, что несмотря на трехмерность задачи, в силу симметричности течения по углу φ для численного решения уравнений (1.10), записанных в потоковой форме, требуется двумерная расчетная область. Таким образом, задача существенно упрощается для численных расчетов.

В качестве основного течения бралось течение вдоль оси x . Всего было исследовано два вида течений:

1. С отрицательным градиентом скорости

$$u^x = \begin{cases} 1, & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \frac{1}{R_3 - R_2} (R_3 - r), & R_2 < r \leq R_3 \\ 0, & R_3 < r \leq R_4 \end{cases}$$

2. С положительным градиентом скорости

$$u^x = \begin{cases} 0, & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \frac{1}{R_3 - R_2} (r - R_2), & R_2 < r \leq R_3 \\ 1, & R_3 < r \leq R_4 \end{cases}$$

Где $R_1 = 0.1$ – радиус внутренней стенки канала (стенка введена из-за наличия в расчетной схеме множителя $\frac{1}{r}$),
 $R_2 = R_1 + 0.3(R_4 - R_1)$, $R_3 = R_4 - 0.3(R_4 - R_1)$. Здесь $R_4 = 0.5$ – радиус внешней стенки канала.

Возмущение представляло из себя «закрутку» основного течения:

$$u^\varphi = \begin{cases} \Omega_{\max} (r - R_4), & R_4 \geq r \geq \frac{R_1 + R_4}{2} \\ -\Omega_{\max} (r - R_1), & \frac{R_1 + R_4}{2} > r \geq R_1 \end{cases},$$

где $\Omega_{\max} = 0.1$.

Радиальная компонента скорости $u^r = 0$. Схематически, данные виды течений показаны на Рисунке 1. Следует заметить, что данные течения являются сдвиговыми с шириной сдвигового слоя $\Delta = R_3 - R_2$.

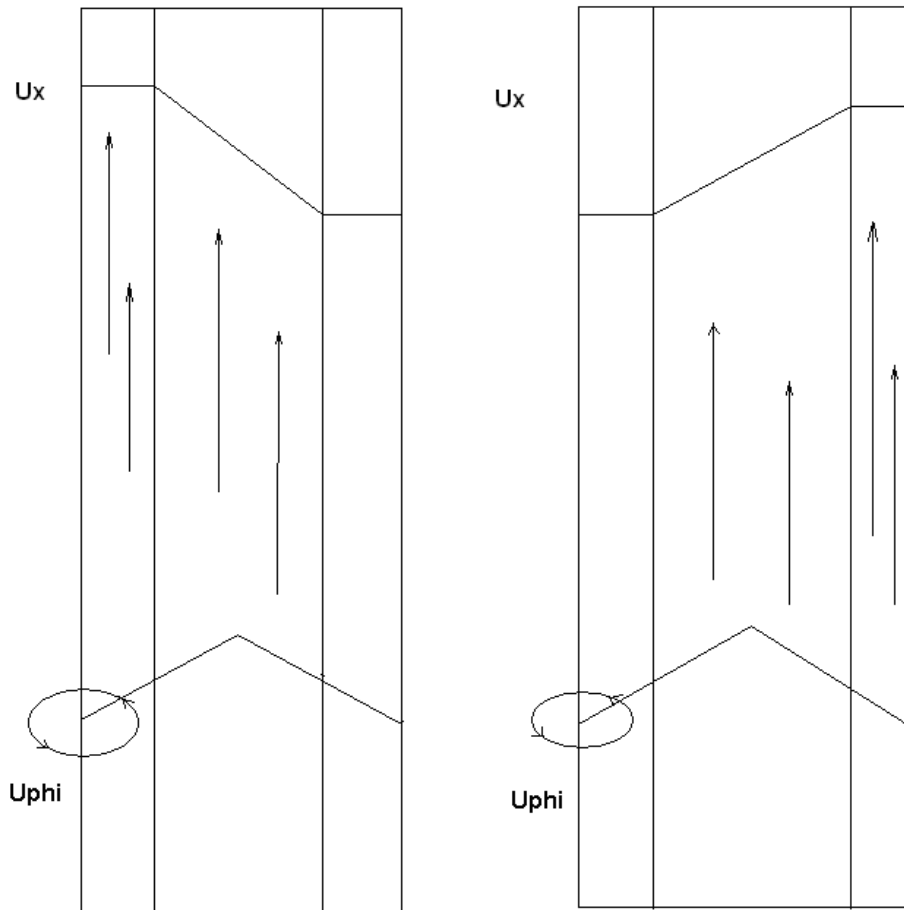


Рисунок 1. Схематическое представление течений с отрицательным (слева) и положительным (справа) градиентом скорости, возмущенных закруткой.

Граничные условия имеют вид условий непротекания на стенках канала и периодические условия на торцах расчетной области:

$$u^r|_{r=R_1} = 0, \quad u^r|_{r=R_4} = 0, \quad U|_{x=0} = U|_{x=H}. \quad \text{Где } H - \text{длина канала, } U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u^r \\ \rho u^x \\ \rho u^\varphi \\ \rho(e + \frac{V^2}{2}) \end{pmatrix}.$$

В общем, работа посвящена исследованию условий возникновения тороидальных вихрей. Тороидальный вихрь представляет из себя

относительно устойчивое образование, фотография и схематический набросок которого приведены на Рисунке 2. В области пространства, занимаемом тороидом, линии тока похожи на обмотку тороидального соленоида. Вне тора, линии тока напоминают магнитное поле этого соленоида. В частности, шаровой вихрь, является предельным случаем тороидального вихря (при радиусе образующей окружности равном расстоянию от ее центра до оси вращения тора).

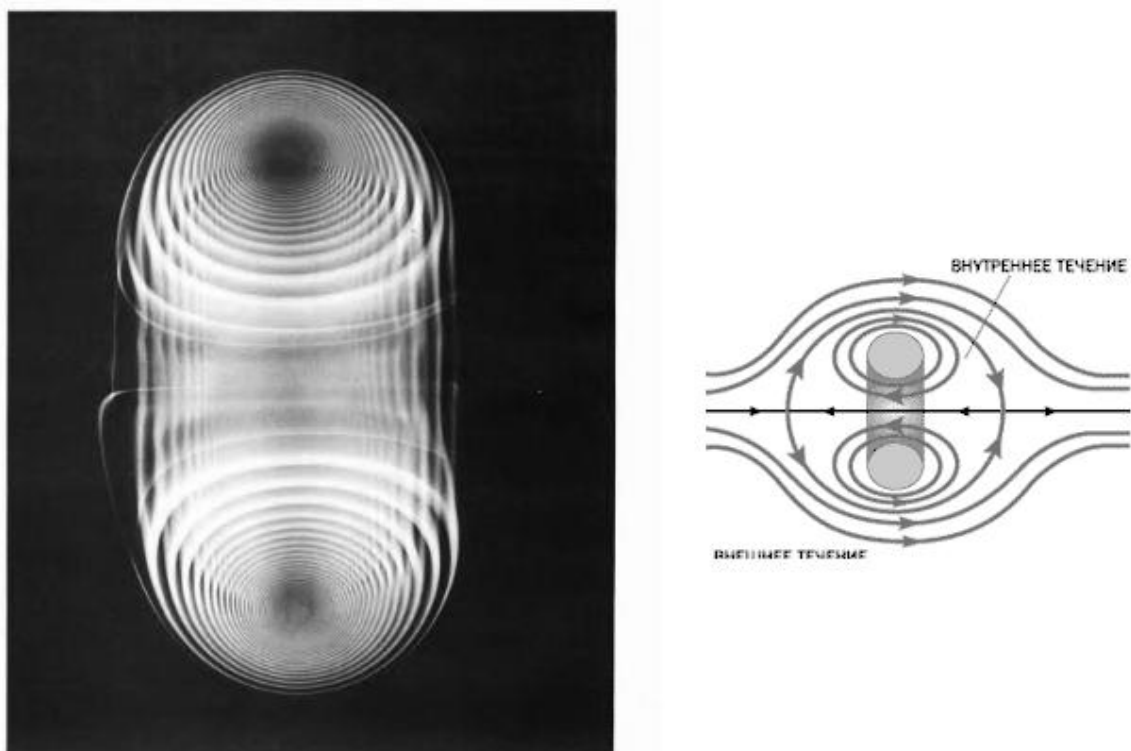


Рисунок 2. Фотография тороидального вихря (слева) и его схематическое представление во внешнем потоке (справа).

Вопрос возникновения тороидальных вихрей малоизучен, в связи с чем, данная работа позволит прояснить некоторые механизмы их возникновения.

Примерами данных образований являются кольца испускаемого сигаретного дыма и образование вихревых колец дельфинами.

ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 1

В данной главе описана постановка задач, исследуемых в данной работе. Первой постановкой является задача о исследовании устойчивости двумерного течения Куэтта-Тейлора. Второй задачей ставится проблема возникновения вторичных течений в осесимметричном протекании по трубе. Все постановки основаны на невязкой модели идеальной среды. Такой подход обусловлен следующей гипотезой [1]:

- Крупномасштабные упорядоченные структуры турбулентного течения (крупные вихри) и мелкомасштабная стохастическая турбулентность при больших числах Рейнольдса не взаимодействуют друг с другом (независимы);

- Характер развития крупномасштабных структур не зависит от вязкости.

Одной из основных проблем является задание возмущений, способных опрокинуть данное течение. В случае изучения невязких течений, можно сформулировать некоторые положения относительно вида возмущений. Данные положения будут сформулированы ниже в заключении.

ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ

Важным вопросом при исследовании гидродинамических течений на устойчивость является выбор численной схемы решения определяющих дифференциальных уравнений. Такая схема не должна обладать большой численной вязкостью, т.к. это может привести к диссипации вносимых возмущений. Также, схема должна быть не осциллирующей. Под осцилляцией схемы понимается, что возмущения вносимые в течение будут взаимодействовать, в основном с течением, а не со схемой.

Как известно, возникновение численной вязкости и осцилляционных свойств схемы, связано с ее дифференциальным приближением.

Дифференциальное приближение схемы выглядит обычно следующим образом $D(y) + R(y)$, где $D(y)$ – решаемое дифференциальное уравнение,

$R(y)$ – ошибка аппроксимации используемой численной схемы. В член $R(y)$ входят производные более высокого порядка, по сравнению с решаемым уравнением. Нечетные производные $\frac{\partial^{2n+1}}{\partial x_i^{2n+1}} y(\dots, x_i, \dots)$, $n \in N$, входящие в $R(y)$ определяют осцилляционные свойства схемы, и в частности ее устойчивость.

Четные производные $\frac{\partial^{2n}}{\partial x_i^{2n}} y(\dots, x_i, \dots)$, $n \in N$, характеризуют диссипативные свойства схемы (в случае гиперболической системы уравнений, коэффициенты при этих членах определяют численную вязкость схемы).

Как уже было сказано выше, для исследования течений на устойчивость, требуются схемы с высоким порядком точности и слабыми осцилляцией и диссипацией. Как правило, повышение порядка точности численной схемы, приводит к уменьшению ее диссипативных свойств и увеличению осцилляционных. Поэтому, в схемах высокого порядка приходится вводить искусственную диссипацию для гашения осцилляций, порождаемых схемой.

Наша задача состоит в исследовании течений на устойчивость. То есть мы не будем интересоваться турбулентностью, так как нас интересуют вторичные либо устойчивые режимы течения, либо неустойчивые, которые затем переходят в турбулентность. Поэтому, нет необходимости вводить модели турбулентности и учитывать подсеточные пульсации. Нам это не требуется в силу указанных выше свойств вторичных течений: развитие вторичных неустойчивостей начинается с возникновения крупномасштабных образований (вихрей). Таким образом, нам необходимо получить эти вихри, что не требует учета подсеточных пульсаций и применения мелких сеток. Логичнее всего в данном случае было бы использовать метод прямого численного моделирования, который позволит "поймать" переход к неустойчивости. В качестве численного метода решения системы гиперболических уравнений, описывающих движение среды (уравнений Эйлера), выберем конечно-объемный метод. К достоинствам конечно-

объемного метода следует отнести его консервативность. Что подразумевает в себе автоматическое выполнение законов сохранения (конечно-объемные схемы обладают свойством консервативности), в отличие, например, от конечно-разностных схем, где свойство консервативности может и отсутствовать. Еще одним достоинством конечно-объемных методов является возможность их реализации на неструктурированных сетках.

Впервые, конечно-объемный метод был использован Макдональдом [59] для расчета двумерных невязких течений. Данный метод дискретизирует определяющие уравнения в физическом пространстве, поделенном многогранниками (контрольными объемами). Запишем произвольную систему гиперболических уравнений без правой части (внешних источников) в дивергентном виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F^i(U)}{\partial x^i} = 0, \quad (2.1)$$

здесь индекс $i = \overline{1,3}$ – обозначает номер пространственной координаты, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Введем произвольную пространственную (в общем случае - неструктурированную) сетку Ω_{ij} и проинтегрируем по контрольному объему (который может не совпадать с элементарным сеточным объемом Ω_{mn}) Ω'_{mn} систему (2.1) полагая что вектор консервативных величин постоянен внутри каждого контрольного объема $U_{mn} = const$. Тогда получим

$$\int_{\Omega'_{mn}} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega'_{mn}} \frac{\partial F^i(U)}{\partial x^i} d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega'_{mn}} U d\Omega + \int_{S'_{mn}} F^i(U) dS^i = \frac{dU_{mn}}{dt} \Omega'_{mn} + F^i(U_{mn}, U_{mn'}, \dots) S'_{mn}{}^i = 0, \quad (2.2)$$

здесь S'_{mn} – обозначает поверхность, ограничивающую контрольный объем Ω'_{mn} . Перепишем (2.2) в следующем виде:

$$\frac{dU_{mn}}{dt} = -F^i(U_{mn}, U_{mn'}, \dots) S'_{mn}{}^i \frac{1}{\Omega'_{mn}} \equiv R_{mn}. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) представляет из себя ОДУ первого порядка, которое можно решить, например, методом Рунге-Кутты. Пространственная точность схемы

(2.3) зависит от метода вычисления невязки потоков $F^i(U_{mn}, U_{mn'}, \dots)$ через грани ячейки Ω_{mn} .

Существует несколько возможностей задания формы и положения контрольного объема по отношению к сетке. Приведем два основных метода:

- cell-centred схема (Рисунок 3(a)) – здесь консервативным величинам сопоставляется центр ячейки расчетной сетки, т.е. контрольный объем совпадает с ячейкой расчетной сетки;
- cell-vertex схема (Рисунок 3(b)) – консервативные величины относятся к точкам пересечения линий (граней ячеек) расчетной сетки. Таким образом, контрольный объем может представлять из себя как объединение всех ячеек, окружающих точку пересечения линий расчетной сетки, так и объединение частей этих ячеек.

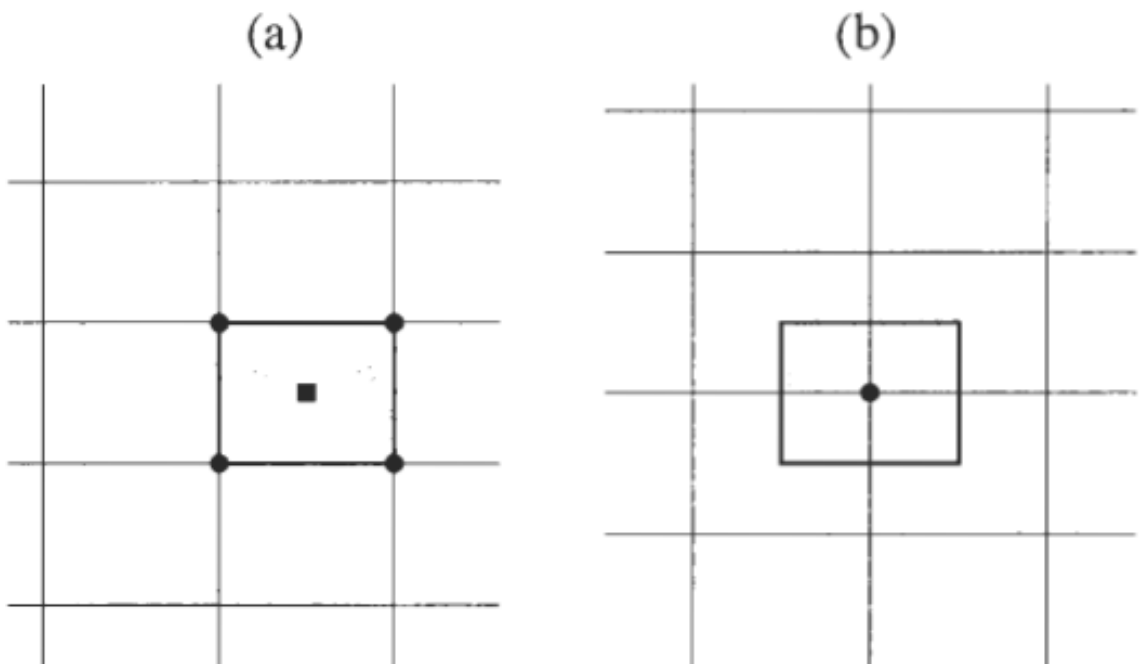


Рисунок 3. Контрольный объем cell-centred (a) и cell-vertex (b) схем.

Главным преимуществом конечно-объемного метода является то, что пространственная дискретизация производится прямо в физическом пространстве. Таким образом, не возникает проблем, по сравнению с

конечно-разностными методами, связанных с преобразованием систем координат. Еще одним преимуществом конечно-объемных методов по сравнению с конечно-разностными является их высокая степень гибкости – они могут быть легко применены как на структурированных, так и на неструктурированных сетках. Именно поэтому конечно-объемные методы используются в расчетах со сложной геометрией.

Конечно-объемные методы являются консервативными вследствие того, что они основаны на дискретной записи законов сохранения. Это приводит к еще одному важному их свойству – возможности получать слабые решения определяющих уравнений (т.е. разрывных решений – ударных волн, контактных разрывов и др.). Однако, в случае решения уравнений Эйлера, должно быть поставлено дополнительное условие – условие энтропийной коррекции. Оно необходимо из-за неединственности слабых решений. Энтропийная коррекция предотвращает возникновение нефизических решений, которые нарушают второй закон термодинамики (уменьшение энтропии). Другим важным свойством этих схем является удовлетворение условиям Ренкина-Гюгонио на поверхностях разрывов гидродинамических величин.

Следует заметить, что при некоторых условиях, конечно-объемные методы становятся эквивалентными конечно-разностным или конечно-элементным методам более низкого порядка.

Как было сказано выше, пространственная точность вычислений схемы (2.3) зависит от метода расчета невязких потоков $F^i(U_{mn}, U_{mn'}, \dots)$ на гранях ячеек. Поэтому, следует рассмотреть данный вопрос более подробно.

Первый тип схем, которые мы рассмотрим, являются центральные схемы. В данных типах схем, невязкие потоки вычисляются непосредственным осреднением консервативных величин слева и справа от грани контрольного объема, т.е. $F^i(U_{mn}, U_{mn'}, \dots) = F^i(\overline{U_{mn}})$, $\overline{U_{mn}} = \frac{U_{mn} + U_{mn'}}{2}$, где mn, mn' – смежные контрольные объемы. Недостатком центральных схем

является их неустойчивость. Для устойчивых расчетов здесь необходимо вводить так называемую искусственную вязкость. Также, возможно возникновение неустойчивости по временному шагу у явных схем типа Рунге-Кутты.

Другими типами схем являются схемы, построенные с учетом физических свойств уравнений Эйлера. Данный тип схем называется «противопоточными» схемами (upwind schemes) из-за учета направления распространения возмущений. Приблизительно можно выделить четыре типа данных схем:

- схемы расщепления типа flux-vector,
- схемы расщепления типа flux-difference,
- TVD схемы,
- fluctuation-splitting схемы.

Рассмотрим кратко каждую из них:

Схемы расщепления типа flux-vector. Данный тип схем основывается на декомпозиции вектора невязких потоков на две части в соответствии со значением знака некоторых характеристических величин, которые подобны, но не идентичны собственным значениям якобиана конвективных потоков. Эти две части потока затем дискретизируются «противопоточными» разностями. Данные схемы были разработаны в начале 1980х годов [60-61]. Второй класс данных схем основывается на декомпозиции вектора невязких потоков на конвективную и акустическую части. Эта идея используется в схемах типа AUSM (Advection Upstream Splitting Method) [64-65], CUSP (Convective Upwind Split Pressure) [62-63]. Более поздние подобные идеи реализованы в Low-Diffusion Flux-Splitting Scheme (LDFSS) [66], или в Mach number-based Advection Pressure Splitting (MAPS) [67-68]. Второй тип данных схем получил большую популярность, в частности из-за хорошего разрешения сдвиговых слоев, правда при посредственной вычислительной эффективности. Преимуществом схем типа flux-vector также является их

сравнительно простое расширение для возможности выполнения расчетов реальных газов, в отличие от схем типа flux-difference или TVD.

Схемы расщепления типа flux-difference. Данный тип схем основывается на локальном решении одномерных уравнений Эйлера с разрывными условиями гидродинамических величин на грани контрольного объема. Данная задача, по сути является задачей Римана. Величины на каждой из сторон грани называют как правое и левое состояние. Идея о решении задачи Римана на грани контрольного объема впервые была высказана Годуновым в 1959 году [69]. Для уменьшения вычислительной нагрузки, связанной с решением задачи Римана, были разработаны приближенные методы решения, наподобие метода Ошера [70] и Роу [71]. Метод Роу широко используется в наши дни из-за его хорошей способности разрешения пограничных слоев и разрывов гидродинамических величин. Также, он может легко быть применен как на структурированных, так и на неструктурированных сетках.

TVD схемы. Идея TVD схем впервые была предложена Хартеном в 1983 году [72]. TVD схемы основываются на принципе предотвращения возникновения дополнительных экстремумов в решении. Основными условиями TVD схем являются не возрастание максимума, не уменьшения минимума и не возникновение новых локальных экстремумов. Данные схемы также носят название сохраняющих монотонность. Таким образом, методы дискретизации определяющих уравнений, обладающие TVD свойствами, позволяют разрешать ударные волны, исключая нежелательные осцилляции решения. TVD схемы реализуются как вычисление среднего конвективных потоков с добавкой некоторого диссипативного члена. Диссипативный член может либо зависеть от знака характеристических скоростей, либо нет. В первом случае говорят о противопоточной TVD схеме [73], во втором – симметричной TVD схеме [74]. Как показывает опыт, противопоточные TVD схемы являются более предпочтительными, по сравнению с симметричными TVD схемами, из-за лучшего разрешения ударных волн и пограничных

слоев. Недостатком данного типа схем является сложность повышения пространственной точности выше 2-го порядка. Это ограничение может быть преодолено при помощи использования ENO (Essentially Non-Oscillatory) схем [75-80].

Fluctuation-splitting схемы. Целью построения данных типов схем являлось точное разрешение гидродинамических величин, которые не разрешаются пространственной сеткой. Это свойство является значительным преимуществом по сравнению с рассмотренными выше противопоточными схемами, где расщепление уравнений производится только исходя из ориентации ячеек расчетной сетки. В *fluctuation-splitting* методах, гидродинамические величины ассоциируются с узлами сетки. Промежуточные невязки вычисляются исходя из принципа баланса потоков через ячейки сетки и относятся к ячейкам. Рассчитанные таким образом невязки затем распределяются по принципу противопоточности на узлы сетки. После этого, производится интегрирование по времени, основываясь на этих узловых величинах. В случае решения систем уравнений (Эйлера или Навье-Стокса), невязки относящиеся к ячейкам, разделяются на скалярные волны. Так как разделение не одинаково в двумерном и трехмерном случае, в дальнейшем было разработано несколько подходов. Их множество распространено среди методов волновой модели Роу [81-82], алгебраической схемы Сидикова [83] и наиболее современного метода характеристической декомпозиции [84-87]. Несмотря на вышеуказанные преимущества данного метода над методами TVD, flux-difference и т.д., он используется сравнительно недавно и только в исследовательских кодах, что обусловлено его вычислительной сложностью и проблемами со сходимостью.

Подведем итоги, указав преимущества и недостатки вышеописанных методов. В целом, центральные схемы требуют меньшей вычислительной нагрузки, по сравнению с противопоточными схемами. С другой стороны, противопоточные схемы способны разрешать разрывы гидродинамических величин более точно, чем центральные схемы. Более того, ввиду их меньшей

численной диффузии, противопоточные схемы могут разрешать пограничные слои используя меньшее число ячеек сетки. В частности, flux-difference схемы, использующие метод Роу, сравнительно точно разрешают пограничные слои. Начиная со схем второй точности по пространству и выше, противопоточные схемы проявляют некоторые негативные свойства, связанные с ростом осцилляций решения возле сильных разрывов. В этом случае применяют так называемые ограничители потоков. Эти ограничители негативно влияют на сходимость схемы из-за наличия дополнительного переключения в областях изменения гладкости решения. Решение было предложено Венкатакришнаном [88-90], но малые возмущения в решении все-таки сохранились. Другим недостатком введения ограничителей потока является их высокая вычислительная трудоемкость, в частности на примере проведения расчетов на неструктурированных сетках.

Описанный выше метод конечных объемов использует так называемый метод линий - разделение вычислений на временном и пространственном шаге. Данный подход обладает большей гибкостью, т.к. для вязких и невязких потоков могут быть применены различные методы аппроксимации, так же как и для интегрирования по временной переменной.

При решении определяющих уравнений методом линий, мы имеем систему ОДУ, записанную для ячейки контрольного объема (чтобы не загромождать формулы индексами ячеек, мы их опустим):

$$\frac{d}{dt}(\Omega \overline{M} \overline{U}) = -\overline{R}, \quad (2.4)$$

здесь Ω – значение объема ячейки контрольного объема, \overline{R} – невязка, \overline{U} – вектор консервативных величин, \overline{M} – обозначает так называемую весовую матрицу. Для схем, где центр контрольного объема относится к узлу расчетной сетки (в случае неструктурированных сеток) (cell-vertex схема), величина \overline{M} полагается равной средней величине консервативного вектора \overline{U} . В свою очередь, для схем, где центр контрольного объема относится к центру масс ячейки расчетной сетки (cell-centred схема), величина \overline{M}

полагается равной единичной матрице. Для cell-vertex схемы, реализованной на структурированной сетке, \overline{M} также полагается равной единичной. Вид матрицы \overline{M} зависит только от вида расчетной сетки и системы решаемых уравнений. При расчете стационарных течений, когда не производится интегрирование по времени, весовая матрица может быть заменена на единичную. Таким образом, весовую матрицу \overline{M} следует вводить только в случае расчетов нестационарных течений cell-vertex схемами.

Систему (2.4) можно аппроксимировать следующей нелинейной схемой:

$$\frac{\Omega \overline{M}}{\Delta t} \Delta \overline{W}^n = -\frac{\beta}{1+\omega} \overline{R}^{n+1} - \frac{1-\beta}{1+\omega} \overline{R}^n + \frac{\omega \Omega \overline{M}}{(1+\omega)\Delta t} \Delta \overline{W}^{n-1}, \quad (2.5)$$

где $\Delta \overline{W}^n = \overline{W}^{n+1} - \overline{W}^n$. Верхний индекс n обозначает номер временного слоя.

Схема (2.5) при величине $\beta = \omega + \frac{1}{2}$ относится к схемам 2-го порядка

точности, во всех остальных случаях, данная схема имеет 1-й порядок точности. Варьируя значения β и ω , возможно получить явную ($\beta = 0$) или неявную схемы интегрирования по времени.

Явную схему можно получить положив в (2.5) коэффициенты $\beta = 0$, $\omega = 0$. В этом случае производная по времени аппроксимируется прямыми разностями и невязка вычисляется только на текущем временном слое:

$$\Delta \overline{W}^n = -\frac{\Delta t}{\Omega} \overline{R}^n. \quad (2.6)$$

Схема (2.6) называется одношаговой, т.к. решение \overline{W}^{n+1} вычисляется только одноразовым вычислением невязки.

Очень популярны многошаговые методы (типа методов Рунге-Кутты), когда между i -м и $i+1$ -м временным слоем вводятся еще несколько дополнительных промежуточных слоев [91] и невязка \overline{R} вычисляется на этих промежуточных слоях. При этом, можно ввести весовые коэффициенты для

«взвешивания» невязки на каждом таком дополнительном временном слое. Коэффициенты могут быть выбраны из условия увеличения области устойчивости и улучшения сходимости и устойчивости [91-93]. Также, подбирая коэффициенты и число промежуточных временных слоев, можно построить многошаговые схемы второго и выше порядка точности по времени. Отдельный класс схем типа Рунге-Кутта был разработан для увеличения шага интегрирования по времени и сохранения TVD и ENO свойств схемы.

Явные многошаговые методы используются совместно с какой-либо схемой интегрирования по пространству. Они могут быть легко реализованы как на однопроцессорных компьютерах так и на многопроцессорных, т.к. распараллеливание явных схем не представляет большой сложности. Явные схемы численно не трудоемки и не требуют много машинной памяти. С другой стороны, максимально возможный шаг по времени ограничен условиями устойчивости схемы. В частности, для вязких течений и вытянутых ячеек сетки, решение очень медленно сходится к стационарному. Более того, в случае решения жесткой системы уравнений (реальный газ, модели турбулентности), или наличия жестких источников членов, для достижения стационарного решения потребуется очень много времени. Или, что еще хуже, явная схема может стать неустойчивой или привести к ложному решению [94].

Если нас интересует только стационарное решение задачи, то возможно разработать несколько методов улучшения сходимости схемы. Первым, наиболее общим методом является метод локального временного шага. Его идея состоит в получении решения на следующем временном слое в каждом контрольном объеме с максимально возможным шагом по времени. Результатом этого подхода является значительное ускорение процесса сходимости. Однако, эти решения не обладают большой точностью. Другим подходом является так называемый характеристический метод. В данном случае, в дополнение к методу локального временного шага, применяется

еще метод интегрирования каждого уравнения (непрерывности, моментов и энергии) по своему временному шагу. Возможности этого метода представлены на примере решения двумерных уравнений Эйлера в [95]. Подобным характеристическому методу является метод предобуславливания Якоби [96, 97]. Он основывается на регуляризации якобиана потоков на каждом временном шаге неявной схемы Рунге-Кутты. Предобуславливание Якоби используется для масштабирования собственных чисел якобиана потоков с целью предотвращения его сингулярности.

Другой очень популярный метод ускорения сходимости решения состоит в увеличении максимально возможного шага по времени введением некоторой величины неявности в явную схему. Он называется неявным сглаживанием невязки или осреднением невязки [98, 99]. На структурированной сетке, метод требует обращения трехдиагональной матрицы для каждой консервативной переменной. В случае неструктурированных сеток, матрица обычно обращается так называемыми итерациями Якоби. Обычное неявное сглаживание невязки приводит к увеличению шага по времени в 2-3 раза. К примеру, следует привести неявную противопоточную схему сглаживания невязки [100], которая была разработана для применения к противопоточным схемам. По сравнению со стандартными методами, данный метод позволяет значительно увеличить величину шага по времени и также улучшить устойчивость схемы [101]. Подобным методом является явно-неявное сглаживание невязки [102, 103], который предназначен для улучшения свойств, гасящих нежелательные осцилляции решения при интегрировании по времени с использованием больших шагов по времени.

Последним и возможно наиболее важным методом ускорения сходимости решения является многосеточный метод (multigrid method). Он был разработан в 1960х годах Федоренко [104] и Бахваловым [105]. Они применили данный метод для решения эллиптических уравнений в краевой задаче. Метод в дальнейшем был развит Брандтом [106, 107]. Идея

многосеточного метода основана на наблюдении того факта, что итерационные схемы очень эффективно устраняют нежелательные высокочастотные возмущения в решении. С другой стороны, они также хорошо устраняют и нежелательные низкочастотные ошибки решения. Следовательно, после получения решения на заданной сетке, можно ввести более грубую сетку и аппроксимировать решение, полученное на предыдущем шаге (на более мелкой сетке) на нее, где длинноволновые ошибки с предыдущего шага будут уже коротковолновыми, т.к. сетка стала крупнее. Опять решая задачу итеративно на новой сетке, эти возмущения будут гаситься. Данный алгоритм повторяется на все более крупных сетках, убирая последовательно ошибки решения с масштабами порядка шага сетки. После достижения наиболее грубой размерности сетки, решение корректируется и интерполируется назад на первоначальную мелкую сетку. Под «наиболее грубой размерностью сетки» полагается критерий изменения решения при переходе с мелкой сетки на более крупную. Если решение изменилось больше, чем некоторая заданная величина (порог), то считается, что сетка достигла своего наиболее крупного размера и следует на ней остановиться. Для ускорения процесса сходимости, возможно начать многосеточный алгоритм с грубой сетки, затем полученное решение перенести на мелкую сетку, на которой решается задача, и выполнить многосеточный алгоритм снова, начиная с текущей, мелкой сетки решаемой задачи. Данный метод получил название Full Multigrid (FMG) [107].

Как уже было упомянуто выше, multigrid method изначально был разработан для решения эллиптических краевых задач. Джеймсон впервые предложил использовать данный метод для решения уравнений Эйлера [98, 108]. Он разработал так называемую Full Approximation Storage (FAS) схему [107], где multigrid method применен для решения систем гиперболического типа. В наши дни, этот метод представляет собой стандартную схему, ускоряющую сходимость решения уравнений Навье-Стокса. Примеры применения метода можно найти в [109-114] (расчет на структурированных

сетках) и в [115-124] (неструктурированные сетки). Несмотря на то, что применение многосеточного метода для эллиптических уравнений более эффективно, ускорение сходимости решения для уравнений Эйлера или Навье-Стокса составляет величину от 5 до 10 раз. В результате недавних исследований, было обнаружено, что наиболее быстрая сходимость наблюдается в случае разделения определяющих уравнений на эллиптическую и гиперболическую части [125].

Перейдем теперь к рассмотрению неявных схем. Чтобы получить семейство неявных схем, следует в уравнении (2.5) положить $\beta \neq 0$. Крайне популярной в моделировании нестационарных течений является трехточечная неявная схема со значениями $\beta = 1$, $\omega = \frac{1}{2}$, дающая второй порядок точности решения. Данная схема носит название dual time-stepping при ее применении к расчету стационарных задач.

При решении стационарных задач, наиболее подходит схема (2.5) со значением коэффициента $\omega = 0$, т.к. она требует меньше ресурсов памяти ЭВМ. Таким образом, линеаризуя невязку \vec{R}^{n+1} в (2.5), получим схему следующего вида:

$$\left(\overline{M} \frac{\Omega}{\Delta t} + \beta \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{W}} \right) \Delta \vec{W}^n = -\vec{R}^n. \quad (2.7)$$

Здесь $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{W}}$ обозначает якобиан потоков. Он представляет из себя большую разреженную матрицу. Выражение, содержащееся в скобках в левой части (2.7) называют неявным оператором. Как было уже упомянуто выше, при расчете стационарных течений, весовую матрицу можно положить равной единичной. Если в (2.7) положить $\beta = 1$, то получим схему первого порядка по времени, в случае $\beta = \frac{1}{2}$, получим схему второго порядка точности.

Следует заметить, что для стационарных задач не требуется большой

точности вычислений по времени, поэтому можно использовать схемы 1-го порядка, тем более что они являются более устойчивыми.

Основным преимуществом неявных схем по сравнению с явными является возможность увеличения шага по времени Δt без ухудшения устойчивости схемы. Заметим, что при предельном переходе $\Delta t \rightarrow \infty$ схема (2.7) переходит к известному методу Ньютона, который обладает свойством квадратичной сходимости. Однако, условие квадратичной сходимости подразумевает, что якобиан потоков $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{W}}$ содержит в себе полную линеаризацию невязки. Другим важным преимуществом неявных схем является их превосходная сходимость и устойчивость при решении жестких систем уравнений, которые часто встречаются в моделировании реальных газов, турбулентности или в случае плохих сеток (под плохими сетками понимается то, что их ячейки имеют очень вытянутую (неправильную) форму), которые встречаются в расчетах течений с большими числами Рейнольдса. С другой стороны, более быстрые и устойчивые неявные схемы (в смысле значений величин шага по времени или числа итераций), имеют более высокую вычислительную нагрузку по сравнению с явными схемами. Таким образом, явные схемы, ускоренные multigrid методом могут сравняться или даже превзойти по эффективности неявные схемы. К тому же, неявные схемы сложнее распараллеливаются.

Схема (2.7) представляет собой огромную СЛАУ (систему линейных алгебраических уравнений). Для ее решения используются прямые либо итерационные методы.

Прямые методы основаны на точном обращении неявного оператора в (2.7), используя метод исключения Гаусса, или некоторые методы обращения разреженных матриц [126, 127]. Несмотря на то, что прямые методы демонстрируют квадратичную сходимость как на структурированных [128-131], так и на неструктурированных сетках [132], при расчете трехмерных

задач, они требуют чрезмерно больших ресурсов ЭВМ (памяти, быстродействия и т.д.).

Таким образом, итерационные методы - единственные из методов, которые можно использовать в вычислениях на больших сетках или в трехмерных задачах. Суть этих методов заключается в итерационном процессе обращения матрицы неявного оператора. Для сокращения требований к объему памяти ЭВМ и, также для преобладания диагональной составляющей матрицы, потоковый якобиан $\frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{W}}$ линеаризуется аппроксимацией невязки схемой 1-го порядка точности. Результатом этой аппроксимации является невозможность достижения квадратичной сходимости метода Ньютона и ограничение на величину шага по времени. С другой стороны, вычислительная сложность метода значительно сокращается, что приводит к более эффективной вычислительной схеме.

В расчетах на структурированных сетках, в основном используются итеративные методы типа Alternating Direction Implicit (ADI) [133-136], метод релаксаций Гаусса-Зейделя (Gauss-Seidel relaxation scheme) [137-141], а также Lower-Upper Symmetric Gauss Seidel scheme (LU-SGS) [142-146]. Все эти методы основываются на таком разложении неявного оператора, которое намного проще обратить. Правда, это разложение, также как и упрощение якобиана потоков вносит свои ошибки. Но, следует заметить, что для решения системы (2.7) методом ADI или LU-SGS, требуется всего одна итерация на каждом временном шаге.

Итеративные методы решения неявной системы (2.7) в расчетах на неструктурированных сетках в большинстве случаев основываются на методе релаксаций Гаусса-Зейделя [147-150]. Для улучшения сходимости схемы, используется так называемый красно-черный метод. Его применение на неструктурированных сетках рассмотрено в [151-153]. Применение LU-SGS схем также открывает некоторые возможности решения задач на

неструктурированных сетках ввиду небольших требований к памяти и вычислительным ресурсам ЭВМ [154-156].

Ввиду успешного применения линейных неявных схем на структурированных сетках, были предприняты попытки применения этих методов на неструктурированных сетках [157-158]. В основе данного подхода лежал метод построения непрерывных линий, проходящих через узлы сетки (или ячейки в случае cell-centred схемы) только один раз – так называемый обход Гамильтона [159]. Ориентация линий совпадает с ориентацией осей системы координат, за исключением границ, где они сгибаются (поэтому их называли «змеями»). Затем выполняется обращение трехдиагональной матрицы, стоящей в левой части системы (2.7). Позже было выяснено, что сгибание линий в окрестности границ расчетной области может понижать скорость сходимости. Для преодоления этого свойства, каждая линия была представлена несколькими линиями (linelets) [160]. К недостаткам данного метода относится его свойство последовательности, т.е. он сложно распараллеливается. Идея метода linelets была применена для улучшения сходимости явной схемы на сильно вытянутых ячейках неструктурированной сетки при расчете вязких течений, используя методы решения неявной системы в направлении, перпендикулярном пограничному слою [123].

К более сложным итерационным методам, рассматривающим СЛАУ в более общем виде, относятся так называемые методы подпространства Крылова. Их развитие было вызвано разработкой эффективных итерационных методов решения больших и разреженных СЛАУ – так называемых методов сопряженных градиентов [161]. Первоначально этот метод применялся только к обращению эрмитовых положительно определенных матриц, при этом для обращения матрицы размером $n \times n$ требовалось не более n итераций. В настоящее время предложено большое количество методов для решения произвольных невырожденных матриц, использующих идеи подпространства Крылова. К примеру, методы типа CGS

(Conjugate Gradient Squared) [162], Bi-CGSTAB (Bi-Conjugate Gradient Stabilized) [163], или TFQMR (Transpose-Free Quasi-Minimum Residual) [164].

Наиболее широко используемым методом в GMRES (Generalized Minimal Residual), является метод, разработанный Садам и Шульцом (Saad and Schultz) [165]. Если записать неявную схему (2.20) в виде

$$\overline{J}\overline{\Delta\overline{W}}^n = -\overline{R}^n, \quad (2.8)$$

где \overline{J} – обозначает большую, разреженную и несимметричную матрицу.

Обозначим начальное приближение $\overline{\Delta\overline{W}}_0$, GMRES метод будет искать решение $\overline{\Delta\overline{W}}^n$ по следующему алгоритму $\overline{\Delta\overline{W}}^n = \overline{\Delta\overline{W}}_0 + \overline{y}_m$, где \overline{y}_m является элементом подпространства Крылова:

$$K_m = span\{\overline{r}_0, \overline{J}\overline{r}_0, \overline{J}^2\overline{r}_0, \dots, \overline{J}^{m-1}\overline{r}_0\}, \quad (2.9)$$

$$\overline{r}_0 = \overline{J}\overline{\Delta\overline{W}}_0 + \overline{R}^n,$$

таким образом достигается минимум невязки $\left\| \overline{J}\overline{\Delta\overline{W}}^n + \overline{R}^n \right\|$. Параметр m обозначает размерность подпространства Крылова, или другими словами, число направлений поиска ($\overline{J}^i\overline{r}_0$). Число m обычно выбирается между 10 и 40, большее число необходимо вводить в расчетах плохообусловленных матриц (которые возникают при моделировании турбулентных течений, реальных газов и т.д.). Если сходимость не достигается в m - мерном подпространстве Крылова, тогда необходим перезапуск GMRES метода. Метод GMRES требует намного больше памяти ЭВМ, по сравнению с методами Bi-CGSTAB или TFQMR, но он более устойчив, равномерно сходится и является более быстрым. Детальное сравнение различных подходов приведено в [166].

Тем не менее, по сравнению с методами сопряженных градиентов, метод преобуславливания является первичным в задачах моделирования газодинамических течений. В данном случае вместо системы (2.8) имеем:

$$(\overline{P}_L\overline{J})\overline{\Delta\overline{W}}^n = -\overline{P}_L\overline{R}^n \text{ или } \overline{J}\overline{P}_R(\overline{P}_R^{-1}\overline{\Delta\overline{W}}^n) = -\overline{R}^n. \quad (2.10)$$

Матрицы \bar{P}_L и \bar{P}_R обозначают левый и правый предобуславливатель соответственно. Цель введения предобуславливателя – сделать собственные значения матрицы \bar{J}^{-1} одного порядка, при этом не сильно изменив саму матрицу (совершить так называемую регуляризацию матрицы \bar{J}^{-1}). После выполнения процедуры предобуславливания, матрица $\bar{P}_L \bar{J}$ или $\bar{J} \bar{P}_R \bar{P}_R^{-1}$ будет легче обращаться. Одним из эффективных предобуславливателей является Incomplete Lower Upper метод факторизации [167] с нулевым наполнением (ILU(0)). Применение предобуславливания к методам типа GMRES описано в [88, 168-171].

Так как метод GMRES требует значительного количества памяти ЭВМ для хранения направлений поиска и элементов предобуславливающей матрицы, было бы неплохо провести аналогию с явным методом и хранить

только элементы якобиана потоков $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{W}}$. Этот подход получил название

matrix-free approach. Идея основана на том, что GMRES метод имеет дело с

членами вида $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{W}} \Delta \vec{W}^n$, которые могут быть аппроксимированы конечными

разностями:

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{W}} \Delta \vec{W}^n = \frac{\vec{R}(\vec{W} + \varepsilon \Delta \vec{W}^n) - \vec{R}(\vec{W})}{\varepsilon}, \quad (2.11)$$

сводя вычисления к расчетам невязки. Параметр ε выбирается из условий минимизации численной ошибки. Другим, более важным преимуществом использования matrix-free approach является то, что в неявной схеме может быть достигнута высокая точность линеаризации невязки \vec{R}^n . Таким образом, возможно небольшой ценой достигнуть квадратичной сходимости метода Ньютона. Этот подход получил название метода Ньютона-Крылова [172-176, 177]. Опыт показывает, что среди всех методов Крылова, GMRES наиболее подходит для применения matrix-free approach [178]. Интересной возможностью является использование LU-SGS схемы в качестве

предобуславливателя для GMRES matrix-free approach. Так как LU-SGS не требует хранения элементов матрицы Якоби потоков, то могут быть ослаблены требования к ресурсам памяти ЭВМ. Вычислительная эффективность этого подхода была исследована на примере расчета трехмерных невязких ламинарных течений на неструктурированных сетках [179].

Сходимость неявной схемы может быть улучшена применением к ней multigrid метода. Существует два основных подхода. Во-первых, можно использовать multigrid внутри неявной схемы – как решатель СЛАУ (2.8) на каждом временном слое, или как предобуславливатель в каком-либо методе сопряженных градиентов [180-181]. Во-вторых, неявная схема может быть «сглаживателем» в методе FAS multigrid, который применяется напрямую к решаемым уравнениям [182-185, 153]. Исследования показывают, что для задач аэродинамики комбинации «простых» неявных схем (типа Гаусса-Зейделя) с multigrid методами являются более эффективными в плане вычислительной сложности (в смысле загрузки процессора ЭВМ), чем к примеру, GMRES [153, 173].

§ 3. УПРОЩЕННАЯ СХЕМА РОУ НА СТРУКТУРИРОВАННОЙ СЕТКЕ

В данном параграфе будет рассмотрена численная схема, используемая для решения задачи об устойчивости струи, протекающей в цилиндрическом зазоре.

Задача решалась в прямоугольной области на структурированной равномерной сетке методом конечных объемов. Опишем кратко данный метод.

Запишем систему (1.10) в потоковой форме:

$$U_t + F_r^r + F_x^x + \frac{1}{r}S = 0; U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u^r \\ \rho u^x \\ \rho u^\varphi \\ \rho(e + \frac{V^2}{2}) \end{pmatrix}; F^r = \begin{pmatrix} \rho u^r \\ \rho(u^r)^2 + p \\ \rho u^r u^x \\ \rho u^r u^\varphi \\ \rho u^r(e + \frac{V^2}{2}) + pu^r \end{pmatrix};$$

$$F^x = \begin{pmatrix} \rho u^x \\ \rho u^r u^x \\ \rho(u^x)^2 + p \\ \rho u^\varphi u^x \\ \rho u^x(e + \frac{V^2}{2}) + pu^x \end{pmatrix}; S = \begin{pmatrix} \rho u^r \\ -\rho(u^\varphi)^2 + \rho(u^r)^2 \\ \rho u^r u^x \\ 2\rho u^r u^\varphi \\ \rho u^r(e + \frac{V^2}{2}) + pu^r \end{pmatrix}$$

И проинтегрируем по прямоугольной ячейке расчетной сетки:

$$\int U_t dS + \oint (F_r^r + F_x^x) dl + \frac{1}{r}S = 0.$$

Откуда получим численную схему, аппроксимирующую исходную систему (1.10):

$$(U_{ij})_t \Omega_{ij} + (F^r)_{i+\frac{1}{2}j} (h_x)_{i+\frac{1}{2}j} - (F^r)_{i-\frac{1}{2}j} (h_x)_{i-\frac{1}{2}j} + (F^x)_{ij+\frac{1}{2}} (h_r)_{ij+\frac{1}{2}} - (F^x)_{ij-\frac{1}{2}} (h_r)_{ij-\frac{1}{2}} + \frac{1}{r_{ij}} S_{ij} \Omega_{ij} = 0; \quad (2.12)$$

где i – номер ячейки расчетной сетки вдоль радиуса, j – номер ячейки расчетной сетки вдоль оси x , Ω_{ij} – мера ячейки с номером i, j ,

$F_{ij\pm\frac{1}{2}}^r, F_{i\pm\frac{1}{2}j}^x$ – потоки консервативной величины U через грани ячейки.

Особенностью схемы (2.12) является источник с множителем $\frac{1}{r}$, что

накладывает ограничения на расчеты в области, близкой к оси $r = 0$

цилиндрического зазора (вследствие чего и рассматривается расчетная область в виде цилиндрического зазора).

Из (2.12), перенося потоковые и источниковые члены в правую часть, получим:

$$(U_{ij})_t = R(t);$$

$$R(t) = - \frac{(F_r^r)_{ij}(h_x)_{ij} + (F_x^x)_{ij}(h_r)_{ij} + \frac{1}{r_{ij}} S_{ij} \Omega_{ij}}{\Omega_{ij}}. \quad (2.13)$$

Получили обыкновенное дифференциальное уравнение (2.13). Решая данное уравнение известными методами (Эйлер, Рунге-Кутта), получим требуемый порядок точности по времени, при этом соблюдая условие устойчивости схемы $CFL = \frac{\min(h_r, h_z)}{\tau} < 1$ - условие Куранта-Фридрихса-

Леви. В задаче было выбрано $CFL = 0.28$, уравнение (2.13) решалось методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Остается вопрос, касающийся вычисления потоков F через грани ячейки расчетной сетки, который мы рассмотрим ниже.

Второй порядок точности достигается реконструкцией консервативного вектора к границе ячейки. Для вычисления $U_{ij+\frac{1}{2}}$ или $U_{i+\frac{1}{2}j}$, выполняется экстраполяция, использующая разложение Тейлора:

$$U_{ij+\frac{1}{2}} = U_{ij} + \frac{1}{2} \psi_{ij} \nabla U_{ij} h_x, \text{ где ограничитель } \psi_{ij} \text{ вычисляется методом,}$$

предложенным Венкатакришнаном [89-90]. Ограничитель вводится для предотвращения возникновения нежелательных осцилляций в решении. Цель ограничителя состоит в уменьшении величины градиентов по каждому из

направлений (т.е. $\frac{U_{I+1} - U_I}{h}$), используемых для интерполяции U на грани

ячейки расчетной сетки, для ограничения вариаций решения. При наличии сильных разрывов, ограничитель обнуляет величины градиентов с целью

предотвращения возникновения новых экстремумов. Проще говоря, ограничитель сохраняет второй порядок точности по пространству в области гладкого решения и переключает схему на первый порядок точности в области разрыва.

Ограничитель, предложенный Венкатакришнаном имеет вид:

$$\psi_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_2} \left[\frac{(\Delta_{1,\max}^2 + \varepsilon^2)\Delta_2 + 2\Delta_2^2\Delta_{1,\max}}{\Delta_{1,\max}^2 + 2\Delta_2^2 + \Delta_{1,\max}\Delta_2 + \varepsilon^2} \right], & \text{если } \Delta_2 > 0 \\ \frac{1}{\Delta_2} \left[\frac{(\Delta_{1,\min}^2 + \varepsilon^2)\Delta_2 + 2\Delta_2^2\Delta_{1,\min}}{\Delta_{1,\min}^2 + 2\Delta_2^2 + \Delta_{1,\min}\Delta_2 + \varepsilon^2} \right], & \text{если } \Delta_2 < 0, \\ 1, & \text{если } \Delta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta_{1,\max} = U_{\max} - U_i, \Delta_{1,\min} = U_{\min} - U_i, \varepsilon^2 = (K)^3 \Omega, K = 5, \quad (2.14)$$

$$\Delta_2 = 0,5(\nabla U_i \vec{r}_{ij}), U_{\max} = \max(U_i, \max_j(U_j)), U_{\min} = \min(U_i, \min_j(U_j)).$$

Данный ограничитель примечателен тем, что он показывает хорошие результаты в расчетах как на структурированных, так и неструктурированных сетках. Данное свойство позволяет применять его во всех расчетных схемах, описанных в диссертационной работе. К тому же, схема с данным ограничителем обладает свойством расширяемости – ее можно применить с незначительными модификациями для расчетов на неструктурированных сетках. Именно поэтому и был выбран данный ограничитель.

В общем случае, вычисление потока вектора консервативных величин через грань ячейки, производится методом решения задачи о распаде разрыва. Впервые, этот метод был разработан и рассмотрен Годуновым [69]. Недостатком данной методики является большая алгоритмическая и вычислительная нагрузка при ее реализации на ЭВМ.

Роу привел более приемлемый метод вычисления потоков консервативных величин для реализации [71]. Остановимся на данном

методе и распишем его более подробно, т.к. он был выбран для реализации в нашей задаче.

Метод Роу применяется довольно часто из-за высокой точности расчета пограничных слоев и хорошей разрешающей способностью при расчете разрывов. Он основан на разложении разности потоков по обе стороны грани ячейки расчетной сетки на сумму вкладов отдельных волн возмущений, обеспечивая при этом свойство консервативности схемы.

Рассмотрим гиперболическую систему уравнений в одномерном случае (для многомерного получаются аналогичные результаты путем обобщения):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \quad (2.15)$$

$$U = U(x, t)$$

здесь U – вектор неизвестных, F – произвольная вектор-функция этого

вектора. Перепишем (2.15): $\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} = 0$; $A(U) = \frac{\partial F(U)}{\partial U}$. Метод

состоит в выборе специальной аппроксимации матрицы $A(U)$ на границе ячейки. При этом оказывается, что численный поток F в схеме Роу определяется по точному решению задачи о распаде произвольного разрыва для таким образом линеаризованной задачи. Данная матрица должна удовлетворять следующим соотношениям:

$$\Delta F = A_{Roe} \Delta U; \text{ где } \Delta F = F(U_l) - F(U_r), \Delta U = U_l - U_r, \text{ здесь}$$

$$A_{Roe} = A_{Roe}(U_l, U_r), A_{Roe}(U, U) = A(U)$$

$A_{Roe}(U_l, U_r)$ – искомая аппроксимация якобиана потока $A(U)$,

U_l, U_r – вектор неизвестных слева и справа от грани ячейки расчетной сетки

соответственно. Заметим, что при невырожденной замене переменных

$U = U(Z)$, из точных соотношений $\Delta F = A_F \Delta Z$, $\Delta U = A_U \Delta Z$, следует что

$A_{Roe} = A_F A_U^{-1}$. В силу нелинейности $F(U)$, получаем что матрица A_{Roe}

неединственна.

Рассмотрим систему (2.15) применительно к газодинамике, тогда пусть левые и правые величины вектора неизвестных U_l, U_r удовлетворяют соотношениям Рэнкина – Гюгонио: $\Delta F = W \Delta U$, где W – скорость распространения разрыва. Тогда W является собственным числом матрицы A_{Roe} . Действительно:

$$\Delta F - W \Delta U = (A_F - W A_U) \Delta Z = (A_{Roe} - WI) A_U \Delta Z = (A_{Roe} - WI) \Delta U = 0,$$

где I – единичная матрица. Для нахождения нетривиального решения, должно быть выполнено условие $\det(A_{Roe} - WI) = 0$ и, следовательно, W является собственным числом матрицы A_{Roe} , а вектор ΔU – ее собственным вектором. Таким образом, при использовании линеаризации Роу соотношения Рэнкина-Гюгонио на разрывах, выполнены точно.

Роу выбрал параметрический вектор в виде

$$\Delta Z = \begin{pmatrix} R \\ U \\ V \\ W \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho} u^x \\ \sqrt{\rho} u^y \\ \sqrt{\rho} u^z \\ \sqrt{\rho} h \end{pmatrix}, \quad h = \frac{e + p}{\rho}. \quad \text{Этот вектор позволяет записать } U \text{ и } F \text{ в}$$

виде полиномов второй степени относительно Z и тем самым получить матрицу A_{Roe} единственным образом. Единственность матрицы понимается в том смысле, что $A_{Roe} = A_{Roe}(U_l, U_r) = A(\bar{Z})$, где \bar{Z} – обозначает среднее арифметическое на границе, $\bar{Z} = \frac{1}{2}(Z(U_l) + Z(U_r))$.

Матрица Роу A_{Roe} сохраняет гиперболические свойства матрицы A .

Векторы U и F в этих переменных принимают вид

$$U = \begin{pmatrix} R^2 \\ RU \\ RV \\ RW \\ HR - p \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} RU \\ U^2 + p \\ UV \\ UW \\ UH \end{pmatrix}.$$

Запишем уравнение состояния (рассмотрим идеальную среду)

$p(\rho, \varepsilon) = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$. Далее, в терминах компонент параметрического вектора Z , получим выражения для $\rho\varepsilon$, p , e :

$$\begin{aligned} \rho\varepsilon &= \frac{HR}{\gamma} - \frac{1}{2\gamma}(U^2 + V^2 + W^2), \\ p &= \frac{\gamma - 1}{\gamma}HR - \frac{\gamma - 1}{2\gamma}(U^2 + V^2 + W^2), \\ e &= \frac{HR}{\gamma} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma}(U^2 + V^2 + W^2). \end{aligned}$$

Тогда получим

$$U = \begin{pmatrix} R^2 \\ RU \\ RV \\ RW \\ \frac{HR}{\gamma} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma}(U^2 + V^2 + W^2) \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} RU \\ U^2 + \frac{\gamma - 1}{\gamma}HR - \frac{\gamma - 1}{2\gamma}(U^2 + V^2 + W^2) \\ UV \\ UW \\ UH \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Delta U = \begin{bmatrix} 2\bar{R}\Delta R \\ \bar{U}\Delta R + \bar{R}\Delta U \\ \bar{V}\Delta R + \bar{R}\Delta V \\ \bar{W}\Delta R + \bar{R}\Delta W \\ \frac{1}{\gamma}\bar{H}\Delta R + \frac{\gamma-1}{\gamma}(\bar{U}\Delta U + \bar{V}\Delta V + \bar{W}\Delta W) + \frac{1}{\gamma}\bar{R}\Delta H \end{bmatrix},$$

$$\Delta F = \begin{bmatrix} \bar{U}\Delta R + \bar{R}\Delta U \\ 2\bar{U}\Delta U + \frac{\gamma-1}{\gamma}\bar{H}\Delta R - \frac{\gamma-1}{\gamma}(\bar{U}\Delta U + \bar{V}\Delta V + \bar{W}\Delta W) + \frac{\gamma-1}{\gamma}\bar{R}\Delta H \\ \bar{V}\Delta U + \bar{U}\Delta V \\ \bar{W}\Delta U + \bar{U}\Delta W \\ \bar{H}\Delta U + \bar{U}\Delta H \end{bmatrix}.$$

Здесь, $\bar{f} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ обозначает среднее арифметическое величины f , где

$f : R, U, V, W, H$. Упростим полученные выше выражения, разделив

компоненты ΔU , ΔF на $\bar{R} = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$. Тогда матрицы A_U , A_F примут вид

$$A_U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{u} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{v} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hat{w} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\gamma}\hat{h} & \frac{\gamma-1}{\gamma}\hat{u} & \frac{\gamma-1}{\gamma}\hat{v} & \frac{\gamma-1}{\gamma}\hat{w} & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix},$$

$$A_F = \begin{pmatrix} \hat{u} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-1}{\gamma}\hat{h} & \frac{\gamma+1}{\gamma}\hat{u} & \frac{1-\gamma}{\gamma}\hat{v} & \frac{1-\gamma}{\gamma}\hat{w} & \frac{\gamma-1}{\gamma} \\ 0 & \hat{v} & \hat{u} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{w} & 0 & \hat{u} & 0 \\ 0 & \hat{h} & 0 & 0 & \hat{u} \end{pmatrix}.$$

Здесь введены новые средние величины

$$\hat{u} = \frac{\bar{U}}{R} = \frac{\sqrt{\rho_1}u_1 + \sqrt{\rho_2}u_2}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}, \quad \hat{v} = \frac{\bar{V}}{R} = \frac{\sqrt{\rho_1}v_1 + \sqrt{\rho_2}v_2}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}},$$

$$\hat{w} = \frac{\bar{W}}{R} = \frac{\sqrt{\rho_1}w_1 + \sqrt{\rho_2}w_2}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}, \quad \hat{h} = \frac{\bar{H}}{R} = \frac{\sqrt{\rho_1}h_1 + \sqrt{\rho_2}h_2}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}.$$

Для аналитического вычисления выражений элементов матрицы

$A_{Roe} = A_F A_U^{-1}$ используются формулы для решения СЛАУ x :

$$x^T A_U = z^T \Rightarrow x^T = z^T A_U^{-1};$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(z_1 - \hat{u}z_2 - \hat{v}z_3 - \hat{w}z_4 + (\gamma-1)(\hat{u}^2 + \hat{v}^2 + \hat{w}^2)z_5 - \hat{h}z_5),$$

$$x_2 = z_2 - (\gamma-1)\hat{u}z_5, \quad x_3 = z_3 - (\gamma-1)\hat{v}z_5, \quad x_4 = z_4 - (\gamma-1)\hat{w}z_5, \quad x_5 = \gamma z_5.$$

Где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix}$. Таким образом, получим

$$A_{Roe} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{u}^2 + \frac{1}{2}(\gamma-1)q^2 & (3-\gamma)\hat{u} & (1-\gamma)\hat{v} & (1-\gamma)\hat{w} & \gamma-1 \\ -\hat{u}\hat{v} & \hat{v} & \hat{u} & 0 & 0 \\ -\hat{u}\hat{w} & \hat{w} & 0 & \hat{u} & 0 \\ -\hat{u}\hat{h} + \frac{1}{2}(\gamma-1)\hat{u}q^2 & \hat{h} - (\gamma-1)\hat{u}^2 & (1-\gamma)\hat{u}\hat{v} & (1-\gamma)\hat{u}\hat{w} & \gamma\hat{u} \end{pmatrix},$$

$$q^2 = \hat{u}^2 + \hat{v}^2 + \hat{w}^2.$$

Теперь, получим искомое выражение для вычисления потоков на границе расчетной ячейки. Для этого, запишем систему (2.15) в разностном виде:

$$\frac{U_j^{k+1} - U_j^k}{\Delta t} + \frac{F_{j+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0, \quad F_{m+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F_m^k + F_{m+1}^k) + \frac{1}{2}|A_{Roe}|_{m+\frac{1}{2}}^k (U_m^k - U_{m+1}^k),$$

$$m = j, j-1; \quad |A_{Roe}| = \Omega_R |\Lambda| \Omega_L.$$

Здесь Ω_R , Ω_L , Λ – правый, левый собственные вектора и матрица собственных чисел осредненной по Роу матрицы якобиана конвективных потоков A_{Roe} соответственно. Эти матрицы, факторизующие A_{Roe} , имеют вид:

$$\Omega_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hat{u} - \hat{c} & 0 & 0 & \hat{u} & \hat{u} + \hat{c} \\ \hat{v} & 1 & 0 & \hat{v} & \hat{v} \\ \hat{w} & 0 & 1 & \hat{w} & \hat{w} \\ \hat{h} - \hat{u}\hat{c} & \hat{v} & \hat{w} & \hat{h} - \hat{c}^2 / b & \hat{h} + \hat{u}\hat{c} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \text{diag}(\hat{u} - \hat{c}, \hat{u}, \hat{u}, \hat{u}, \hat{u} + \hat{c}),$$

$$\Omega_L = \frac{b}{2\hat{c}^2} \begin{pmatrix} \theta + \frac{\hat{u}\hat{c}}{b} & -\hat{u} - \frac{\hat{c}}{b} & -\hat{v} & -\hat{w} & 1 \\ \frac{-2\hat{v}\hat{c}^2}{b} & 0 & \frac{2\hat{c}^2}{b} & 0 & 0 \\ \frac{-2\hat{w}\hat{c}^2}{b} & 0 & 0 & \frac{2\hat{c}^2}{b} & 0 \\ 2\hat{h} - 2q^2 & 2\hat{u} & 2\hat{v} & 2\hat{w} & -2 \\ \theta - \frac{\hat{u}\hat{c}}{b} & -\hat{u} + \frac{\hat{c}}{b} & -\hat{v} & -\hat{w} & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$b = \gamma - 1, \quad \theta = \frac{1}{2}q^2, \quad c = \sqrt{(\gamma - 1)\hat{h} - \frac{1}{2}(\gamma - 1)q^2}.$$

Таким образом, видно, что вычисление конвективных потоков на грани ячейки расчетной сетки методом Роу имеет меньшую вычислительную нагрузку, по сравнению с методом Годунова.

Результаты тестирования построенной схемы (и программного кода) представлены на Рисунках 4-5. На Рисунке 4 показана валидационная задача о распаде разрыва давления вдоль оси r (вдоль оси x получаются аналогичные результаты). Вначале задается скачок давления в точке

$r_0 = 0.75$, в области оси цилиндра давление $p = 10$, затем в точке r_0 оно скачком падает до $p = 3$. На Рисунке 5 приведены картины распределения газодинамических величин по результатам расчета поставленной тестовой задачи. Видно, что паразитные осцилляции не возникают и фронт образующейся ударной волны, которая движется слева направо, не сильно расширен. Отсюда можно сделать вывод об устойчивости и относительно небольшой численной диссипации построенной схемы. Еще одним подтверждением корректной работы построенной схемы (и программного кода) служил расчет простого, стационарного протекания вдоль оси $x: u^x = 1$. Данное протекание является точным стационарным решением системы уравнений (1.10) и, следовательно, не должно изменяться со временем. В проведенном расчете был получен именно такой результат.

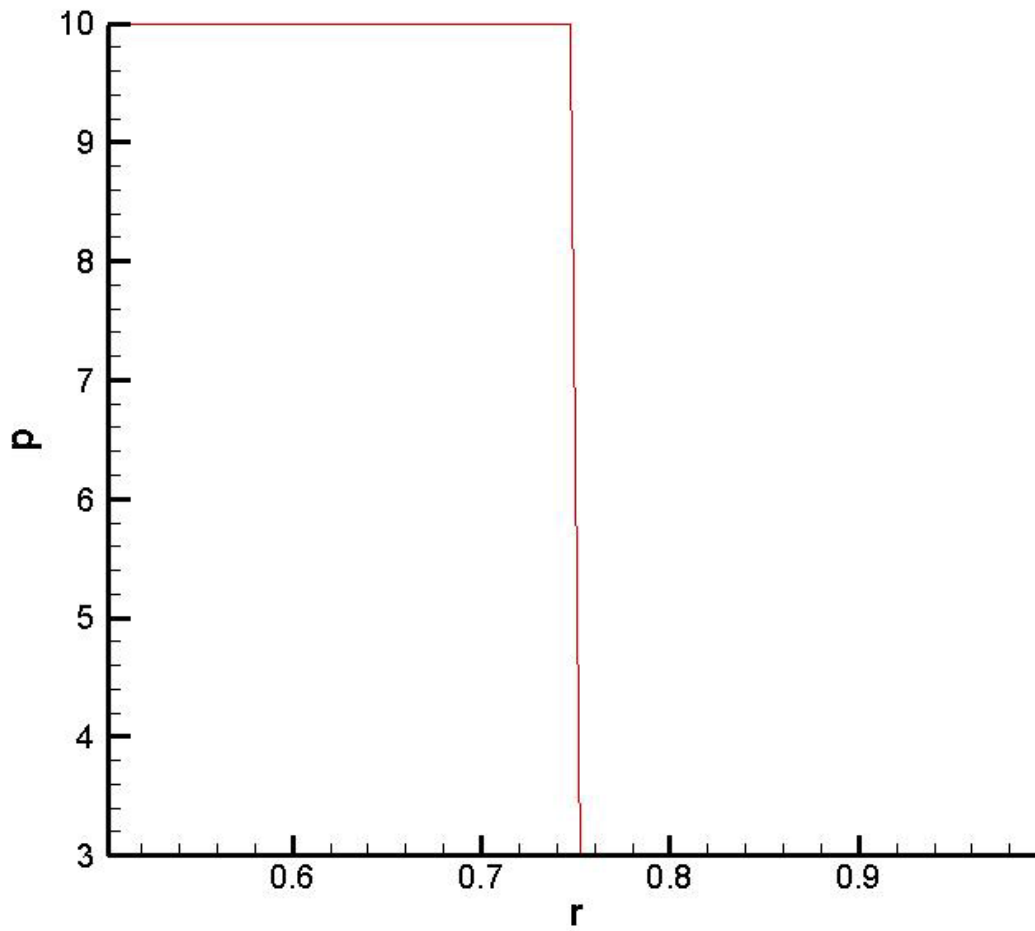


Рисунок 4 Расчет распада разрыва давления вдоль оси r в задаче о протекании в трубе, представленного на рисунке.

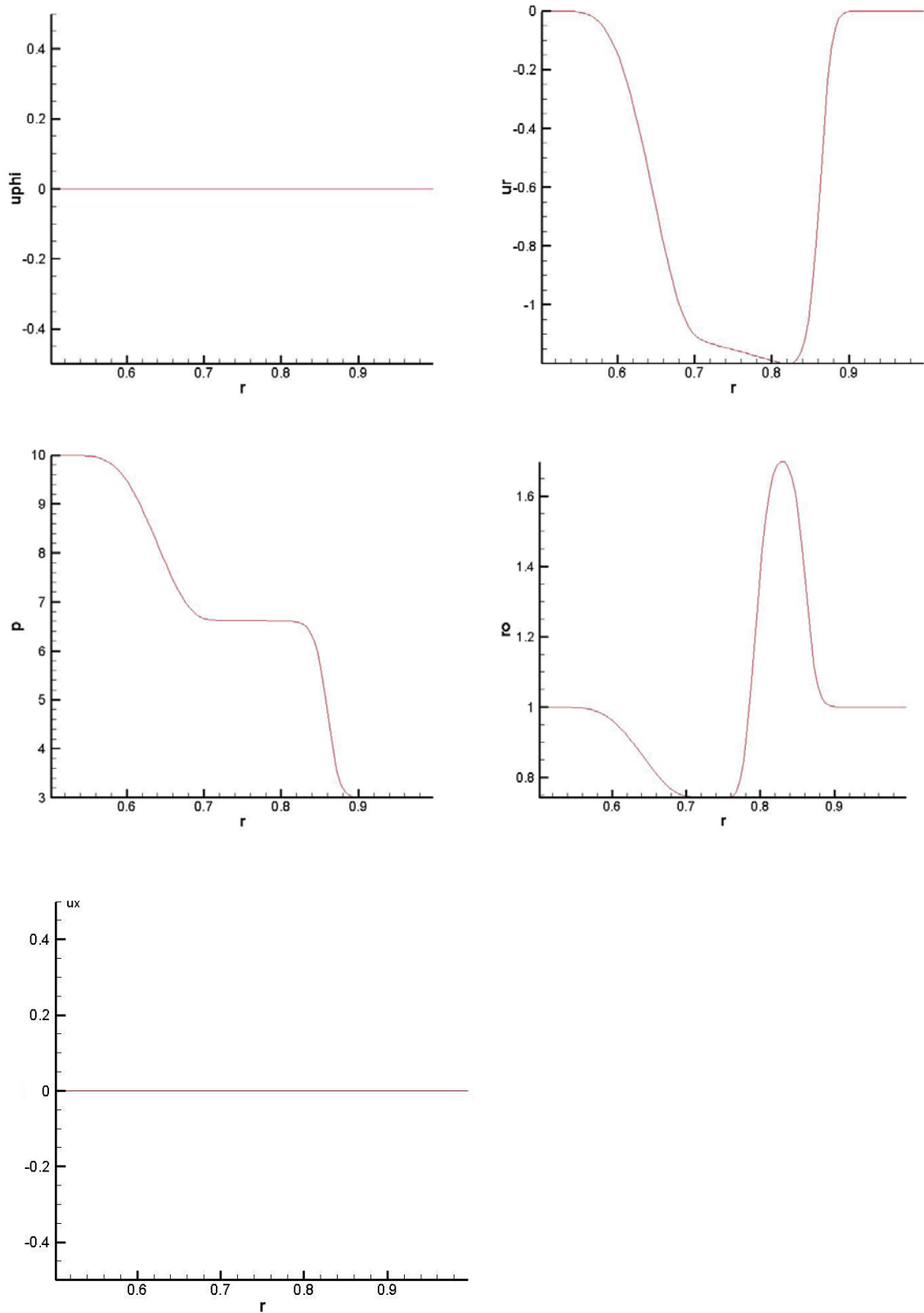


Рисунок 5 Результаты расчета распада разрыва давления вдоль оси r в задаче о протекании в трубе.

§ 4. ВИХРИ ДВУМЕРНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Здесь мы опишем численную схему, которая применялась в задаче о двумерной неустойчивости течения Куэтта-Тейлора между цилиндрами.

Рассмотрим кратко метод, с помощью которого решались данные уравнения - метод конечных объемов. Рассматриваемая область была покрыта полярной сеткой с числом узлов $n_r \times n_\varphi$, где n_r - число узлов по радиусу, а n_φ - по углу. Заметим, что уравнения (1.1)-(1.4) имеют следующую структуру (потокосная форма):

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \mathbf{G}(\mathbf{U}) \right) + \mathbf{P}(\mathbf{U}) = 0 \quad (2.16)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} u\rho \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(\rho E + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} v\rho \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(\rho E + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho uv \\ u(\rho E + p) \end{pmatrix}.$$

Отдельная расчетная ячейка $S_{ij} = [r_{i-1/2}, r_{i+1/2}] * [\varphi_{j-1/2}, \varphi_{j+1/2}]$. Проинтегрируем уравнения (2.16) по объему ячейки расчетной сетки (в данном случае - площади, или другими словами, двумерному объему):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{ij}} \mathbf{U} ds + \int_{S_{ij}} \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{F}(\mathbf{U}) ds + \int_{S_{ij}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \mathbf{G}(\mathbf{U}) \right) ds + \int_{S_{ij}} \mathbf{P}(\mathbf{U}) ds = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}_{ij} S_{ij} + (\mathbf{F}(\mathbf{U})_{i+1/2j} h_{i+1/2}^\varphi - \mathbf{F}(\mathbf{U})_{i-1/2j} h_{i-1/2}^\varphi) + \frac{1}{r_{ij}} (\mathbf{G}(\mathbf{U})_{ij+1/2} h^r - \mathbf{G}(\mathbf{U})_{ij-1/2} h^r) + \mathbf{P}(\mathbf{U})_{ij} S_{ij} = 0; \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$S_{ij} = \frac{h_{i-1/2}^\varphi + h_{i+1/2}^\varphi}{2} h^r; \quad h_{i-1/2}^\varphi = 2(r_{ij} - \frac{1}{2} h^r) \operatorname{tg} \left(\frac{\Delta \varphi}{2} \right); \quad h_{i+1/2}^\varphi = 2(r_{ij} + \frac{1}{2} h^r) \operatorname{tg} \left(\frac{\Delta \varphi}{2} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{U}_{ij}(t) = \frac{1}{S_{ij}} ((\mathbf{F}(\mathbf{U})_{i-1/2j} h_{i-1/2}^\varphi - \mathbf{F}(\mathbf{U})_{i+1/2j} h_{i+1/2}^\varphi) + \frac{h^r}{r_{ij}} (\mathbf{G}(\mathbf{U})_{ij-1/2} - \mathbf{G}(\mathbf{U})_{ij+1/2})) - \mathbf{P}(\mathbf{U})_{ij} \equiv \mathbf{L}_{ij}(\mathbf{U}_{ij})$$

где $\mathbf{U}_{ij}(t) = \frac{1}{S_{ij}} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{\varphi_{j-1/2}}^{\varphi_{j+1/2}} \mathbf{U}(r, \varphi, t) r dr d\varphi$ - вектор, представляющий количества

консервативных величин (массы, импульса, энергии и т. д.) в объеме

расчетной ячейки S_{ij} . Величины $\mathbf{F}_{i\pm 1/2,j}$, $\mathbf{G}_{i,j\pm 1/2}$ - представляют потоки через грани соответствующих ячеек и вычисляются путем решения задачи распада разрыва на границе ячейки приближенным методом Роу, описанным выше.

Второй порядок точности достигается реконструкцией консервативного вектора к границе ячейки. Для вычисления $\mathbf{U}(r_{i+1/2}, \varphi, t)$ или $\mathbf{U}(r, \varphi_{j+1/2}, t)$, выполняется экстраполяция, использующая разложение Тейлора:

$$\mathbf{U}(r_i, \varphi_{j+1/2}, t) = \mathbf{U}(r_i, \varphi_j, t) + \psi_{ij} \left. \frac{\partial \mathbf{U}(r_i, \varphi, t)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_j} \Delta \varphi_j, \quad \Delta \varphi_j = \varphi_{j+1/2} - \varphi_j,$$

где ограничитель ψ_{ij} вычисляется методом, предложенным

Венкатакришнаном (2.14) [89-90].

Граничные условия имеют вид условий непротекания на стенках цилиндрического зазора: $u|_{r=R_1} = u|_{r=R_2} = 0$. Здесь R_1, R_2 – радиус внутренней и внешней стенки соответственно.

При заданном алгоритме вычисления вектора правых частей $\mathbf{L}_{ij}(\mathbf{U}_{ij})$, (2.17) является системой ОДУ относительно времени t , для интегрирования которой используется метод Рунге-Кутты:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{ij}^{(1)} &= \mathbf{U}_{ij}^{(n)} + \Delta t \mathbf{L}_{ij}(\mathbf{U}_{ij}^{(n)}, t^{(n)}), \\ \mathbf{U}_{ij}^{(2)} &= \frac{3}{4} \mathbf{U}_{ij}^{(n)} + \frac{1}{4} \mathbf{U}_{ij}^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t \mathbf{L}_{ij}(\mathbf{U}_{ij}^{(1)}, t^{(n)} + \Delta t), \\ \mathbf{U}_{ij}^{(n+1)} &= \frac{1}{3} \mathbf{U}_{ij}^{(n)} + \frac{2}{3} \mathbf{U}_{ij}^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t \mathbf{L}_{ij}(\mathbf{U}_{ij}^{(2)}, t^{(n)} + \frac{\Delta t}{2}). \end{aligned}$$

Где индекс (n) вверху означает n – ый шаг по времени. Шаг по времени Δt

выбирается из условия Куранта-Фридрихса-Леви $CFL = \frac{\min(h^r, r_{ij} h^\varphi)}{\tau} < 1$.

В данной задаче было положено $CFL = 0.28$, использовался метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

Тестирование построенной схемы осуществлялось на примере расчета распада разрыва давления как по радиусу в средней точке зазора

$r = \frac{(R_1 + R_2)}{2}$, так и по углу. Результаты валидации схемы представлены на Рисунках 6-7, где изображено решение задачи о распаде разрыва давления по радиусу. Картины распада разрыва по угловой переменной аналогичны. На Рисунке 6 показана постановка задачи - в покоящейся среде имеется распад разрыва в середине цилиндрического зазора. Слева от разрыва величина давления $p = 3$, справа - $p = 10$. На Рисунке 7 представлены результаты расчета, из которых видно, что при распаде не возникает ошибочных осцилляций решения и фронт ударной волны, движущейся справа налево, не размывается. Таким образом, можно заключить, что схема (2.17) пригодна для расчетов.

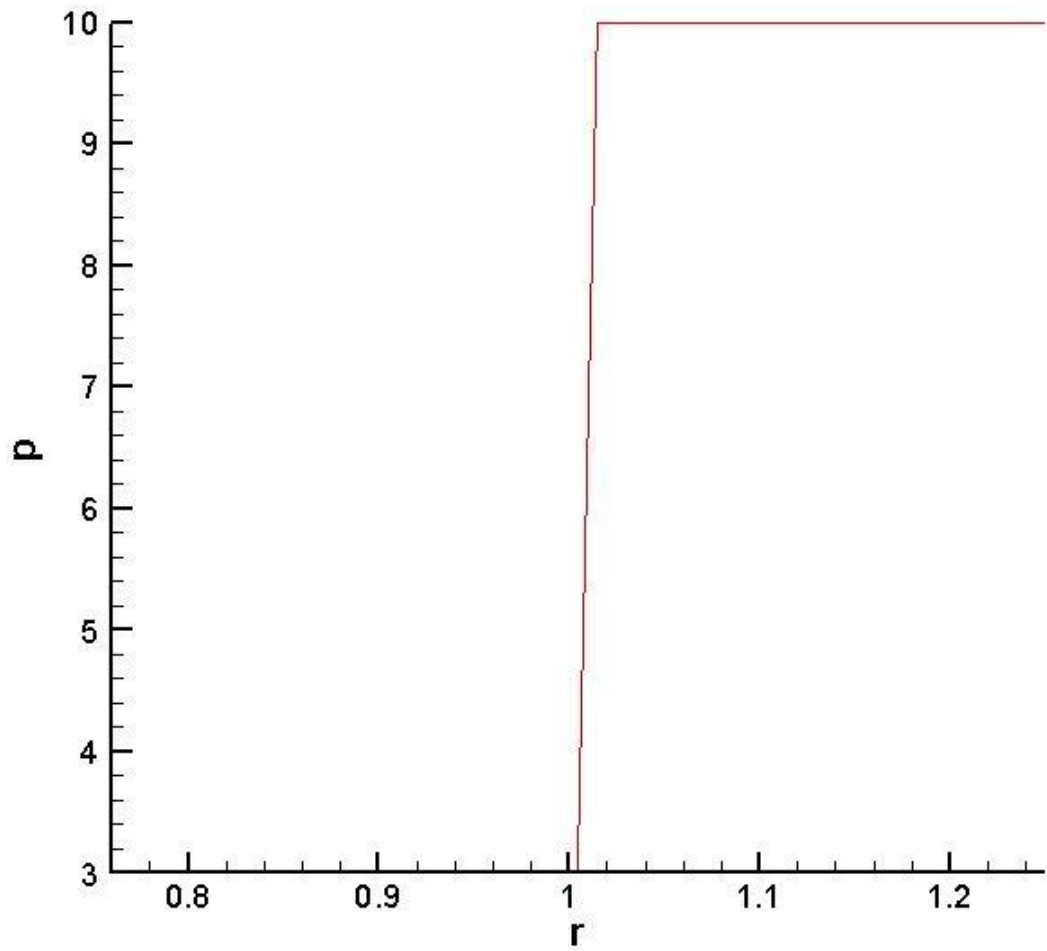


Рисунок 6. Расчет распада разрыва давления вдоль радиуса, в точке

$$r = \frac{(R_1 + R_2)}{2} \text{ в двумерной задаче.}$$

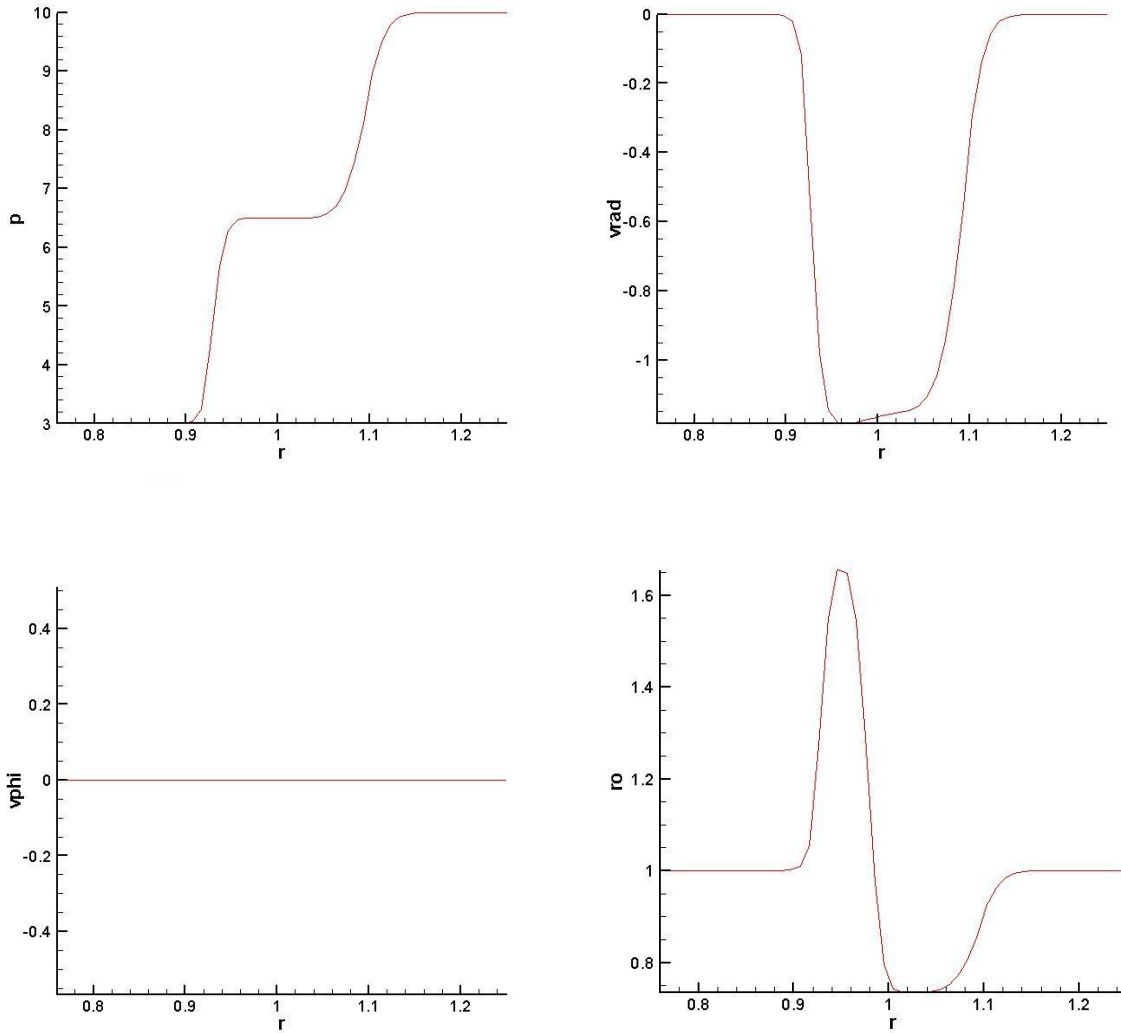


Рисунок 7. Результаты расчета распада разрыва давления вдоль радиуса, в точке $r = \frac{(R_1 + R_2)}{2}$ в двумерной задаче.

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 2

В данной главе приведены численные схемы, аппроксимирующие исходные уравнения. Все схемы построены на идее метода контрольного объема. Данный метод замечателен своей легкой переносимостью на различные виды сеток (неструктурированные, структурированные с

переменным шагом и т.д.). К тому же, метод конечного объема является консервативным.

Вычисление потоков консервативных величин на гранях ячеек производится методом Роу. Данный метод представляет из себя приближенное решение задачи Годунова. Его преимуществом, по сравнению с методом точного решения задачи Годунова, является меньшая вычислительная нагрузка. Также, данный метод сохраняет условия Рэнкина-Гюгонио на границе.

Все схемы явные, т.к. задача невязкая, размерность сетки не очень большая. Что приводит к адекватному шагу по времени. К тому же, обе задачи были распараллелены на языке MPI. Распараллеливание состояло в декомпозиции расчетной области на равные (почти равные) части, которые обсчитывались независимо на разных процессорах. Обмен значений консервативного вектора U осуществлялся на приграничных ячейках для нужд решения задачи Римана на приграничных гранях. В целом, задача распараллеливания решалась стандартными методами, применяемыми для решения невязких, явных схем.

Тестирование построенных схем и программных кодов показало корректность их работы.

ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ВИХРЕЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

В данной главе приведены результаты численного решения задач, поставленных в главе 1. Данные задачи объединяет геометрическое подобие их постановок. В обоих случаях рассматривается течение между двумя цилиндрами. Отличие состоит в размерности течений. Течение Куэтта-Тейлора рассматривается в чисто двумерной постановке. Про постановку задачи о осевом протекании следует сказать, что размерность здесь составляет 2.5D. Это связано с осевой симметрией исходных уравнений.

Хотя, в общем, задача является трехмерной, отсутствие зависимости гидродинамических величин от угловой координаты $\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0$, уменьшает ее

размерность. Но, в то же время, нельзя сказать, что задача является двумерной. Т.к. в исходных уравнениях присутствует φ – компонента скорости течения.

Сначала представим результаты исследования двумерной задачи.

§ 5. ДВУМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА-ТЕЙЛОРА МЕЖДУ ЦИЛИНДРАМИ

В расчетах были получены характерные структуры течения и энергетические величины для турбулентных течений между цилиндрами.

В численном эксперименте считалась энергия пульсаций по следующей формуле: $E_t = \frac{1}{E_0} \int ((u')^2 + (v')^2) dV$, где E_0 - кинетическая энергия течения в начальный момент времени, u', v' - пульсации радиальной и угловой компоненты скорости соответственно. Пульсации вычислялись следующим образом: проводилось усреднение обеих компонент по углу, по формуле

$\langle f(r) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) d\varphi$, где $\langle f \rangle$ - среднее значение функции. Далее

вычислялись пульсации по формуле: $f'(r, \varphi) = \langle f(r) \rangle - f(r, \varphi)$, где $f(r, \varphi)$ - значение функции в данной точке. Вначале задается течение по формуле:

$$v = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}; \quad (R_1 < R_2) \quad (\text{течение Тейлора}).$$

В данной работе будет рассматриваться случай, когда внешний цилиндр вращается, а

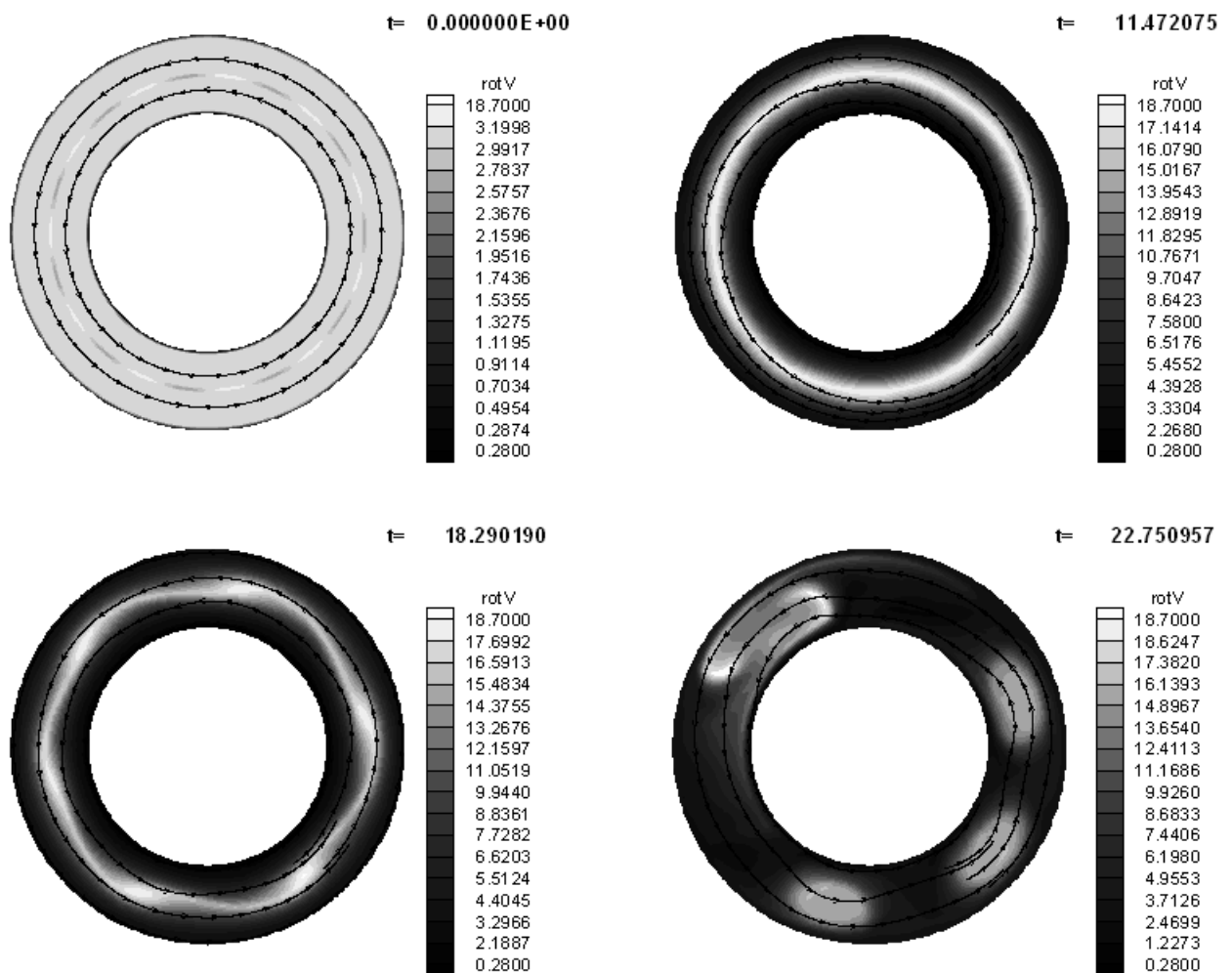
внутренний покоится, т.е. $\Omega_1 = 0$; $\Omega_2 = \Omega$, тогда $v = \frac{\Omega}{R_2^2 - R_1^2} (R_2 r - \frac{R_2 R_1^2}{r})$.

Возмущалась только радиальная компонента скорости. Возмущение вносилось посередине зазора и имело вид: $\delta U(\varphi) = a \sin(n\varphi)$, где n - число мод, a - амплитуда. Будем называть временем перехода в пульсационный режим (или временем перехода) t' , время, когда энергия пульсаций E_t начинает резко возрастать до своего максимума. Максимум этой энергии будем называть энергией пульсационного режима и обозначим его как E_t^{\max} . Будем в дальнейшем называть турбулентный режим течения пульсационным.

Обратимся к результатам, полученным из исследования влияния разности скоростей между цилиндрами на устойчивость течения. Все расчеты проводились на сетке 51x350 за исключением исследования влияния размера сетки. Возмущение содержит 11 мод по частоте, а амплитуда составляет порядка 4% от местной скорости (угловой компоненте). Заметим, что течение между цилиндрами носит сдвиговый характер с шириной сдвигового слоя, равной ширине зазора между цилиндрами. Расчеты проводились для угловых скоростей внешнего цилиндра $\Omega = 0.96; 1.92; 3.84$.

На Рисунке 8 показано, как происходит переход от ламинарного режима течения к пульсационному (для $\Omega = 3.84$). На рисунке, справа от картин завихренности, приведена линейка цветов с ее значениями. Изображены мгновенные линии тока. Видно, что вначале завихренность распределена равномерно по всему зазору, посередине зазора видно

возмущение. Потом завихренность концентрируется в области, куда было внесено возмущение (белое кольцо на рисунке) и из этой области происходит рождение крупных вихрей (деление кольца на вихри). Внизу на рисунке показана зависимость энергии пульсаций от времени E_t , на котором отмечено время перехода в пульсационный режим t' . На Рисунке 9 показаны зависимости времени перехода в пульсационный режим t' и энергии пульсационного режима E_t^{\max} от Ω . Заметим, что в случае $\Omega = 0.96$ сложно проследить интервал времени, когда происходит переход в пульсационный режим. Это видно как из картины завихренности на Рисунке 10 (характерный масштаб вихрей мал по сравнению с масштабом задачи (величина зазора)), так и из графика E_t на Рисунке 11. Из всего этого можно заключить, что в данном случае наступает слабый пульсационный режим.



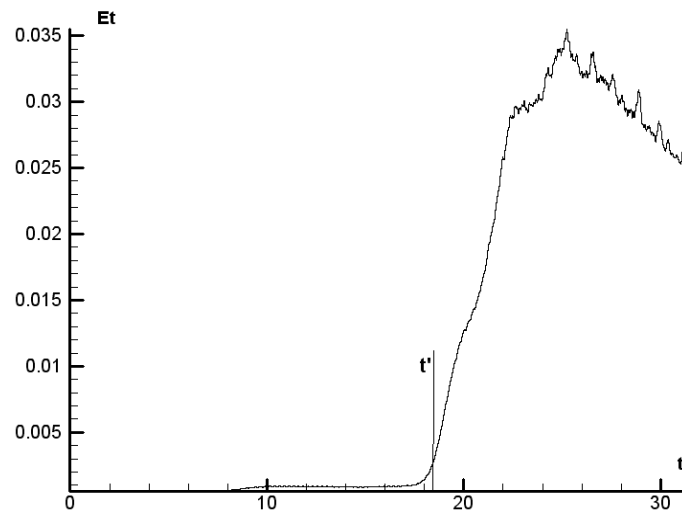


Рисунок 8. Возникновение крупных вихрей, внизу показан график зависимости энергии пульсаций E_t на котором отмечено время перехода в пульсационный режим t' .

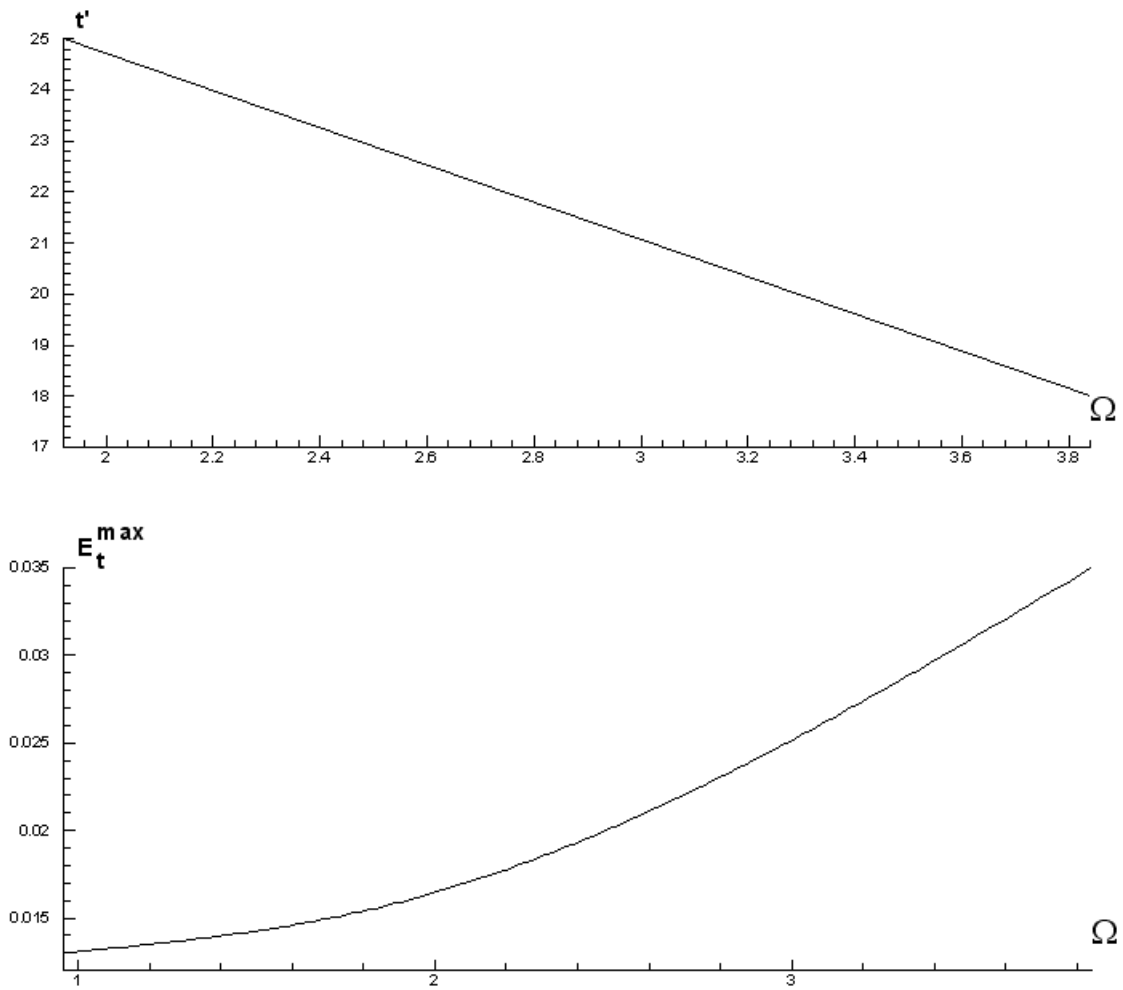


Рисунок 9. Графики зависимостей времени перехода в пульсационный режим t' и энергии пульсационного режима E_t^{\max} от частоты вращения внешнего цилиндра Ω .

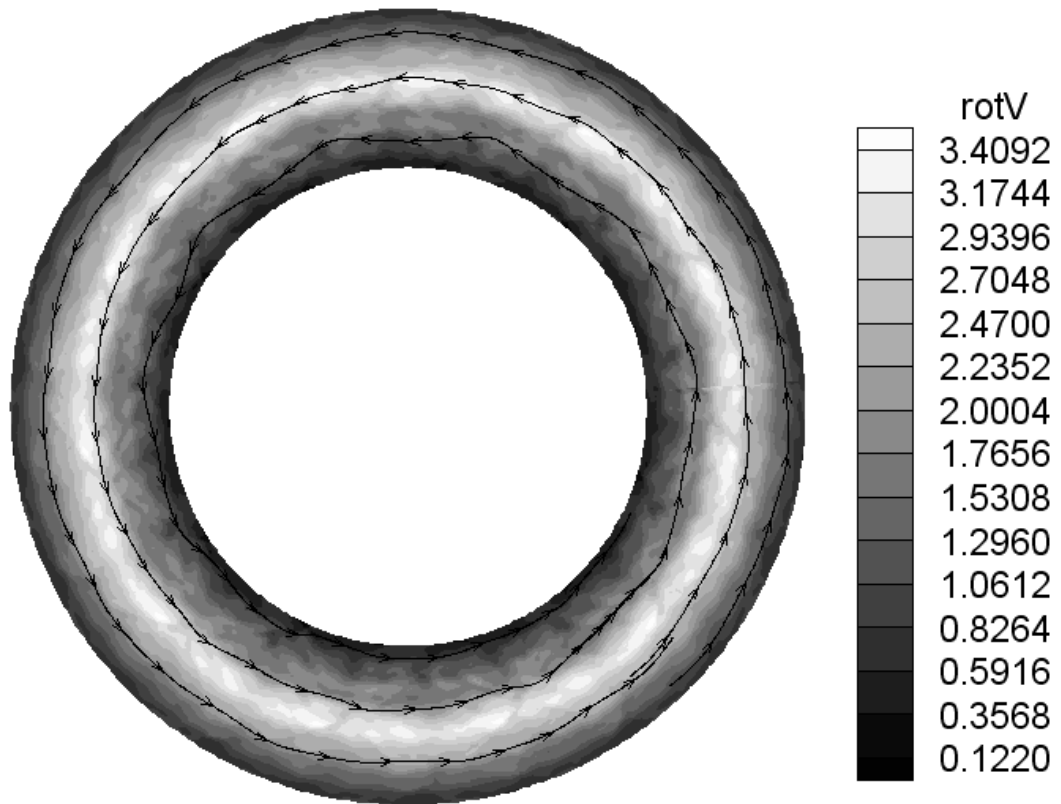
$t = 30.393684$ 

Рисунок 10. Картина завихренности в случае слабого пульсационного режима

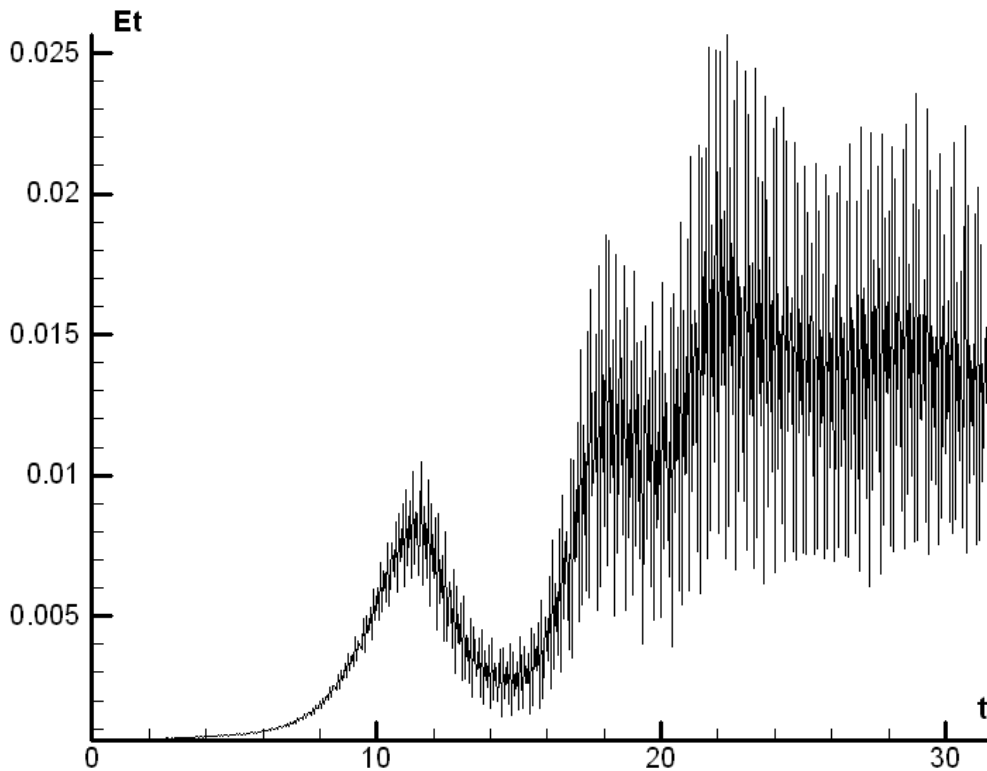


Рисунок 11. Энергия пульсаций E_t в зависимости от времени t в случае слабого пульсационного режима

Как видно из Рисунка 9, чем больше разность скоростей между цилиндрами, тем быстрее переход в пульсационный режим t' и больше энергия пульсационного режима E_t^{\max} . Это объясняется тем, что чем больше разность скоростей, тем больше перепад давления между внешним и внутренним цилиндрами. Перепад давления создает момент сил, под действием которых происходит рождение вихрей, а чем больше этот перепад, тем раньше рождаются вихри.

Обратимся к работе [5], в которой исследовалась неустойчивость плоскопараллельного невязкого двумерного течения, используя линеаризованное уравнение Эйлера (уравнение Релея) с условиями

непротекания на границах. В этой работе был получен критерий неустойчивости ламинарного течения с произвольным профилем скорости. Из него следует, что завихренность должна быть сконцентрирована в некоторой области течения, т. е. в профиле завихренности должен быть максимум и чем больше вторая производная в точке максимума (чем более выпуклый максимум), тем неустойчивее течение. Но максимум становится более выпуклым как раз при увеличении разности скоростей, таким образом, получили, что данный критерий применим и в этом случае.

Теперь рассмотрим, как будет влиять на устойчивость течения такие величины, как ширина зазора между цилиндрами ΔR , длина волны n (число мод) и амплитуда возмущения a . Но вначале исследуем, как размерность сетки будет влиять на численное решение данной задачи.

Рассмотрим, как будет влиять размерность сетки на параметры течения. Всего было проведено четыре эксперимента: для каждой из скоростей $\Omega = 1.92$ и $\Omega = 3.84$ счет велся на двух сетках 77-525 и 101-700. Далее приведены величины времени перехода в пульсационный режим t' и энергии пульсационного режима E_t^{\max} . В случае $\Omega = 1.92$ и сетки 77-525 $t' = 35.6$, $E_t^{\max} = 0.0146$; в $\Omega = 1.92$ и сетке 101-700 $t' = 34$, $E_t^{\max} = 0.0195$. Для скорости $\Omega = 3.84$ и сетки 77-525 $t' = 23$, $E_t^{\max} = 0.0382$, в случае сетки 101-700 $t' = 26$, $E_t^{\max} = 0.0416$. Также, было подсчитано численное число Рейнольдса $Re_{num} = 1.2 * 10^5; 1.5 * 10^5; 1.8 * 10^5$ (в порядке возрастания размерности сеток). На Рисунке 12 приведены три графика зависимости энергии пульсаций E_t от времени для $\Omega = 3.84$ и различных трех сеток (размерность которых указана возле каждого из графиков).

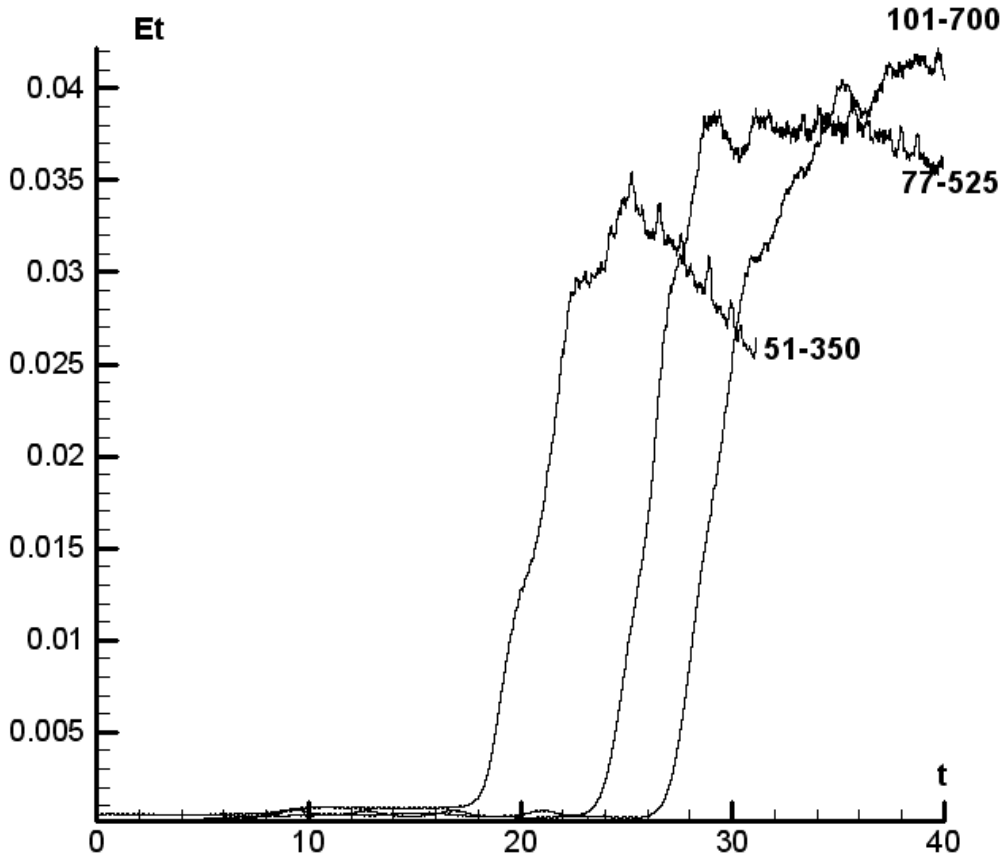


Рисунок 12. Зависимость энергии пульсаций E_t от времени t , показывающая увеличение энергии пульсационного режима E_t^{\max} с ростом размерности сетки

Из Рисунка 12 видно, что энергия пульсационного режима E_t^{\max} увеличивается с увеличением размерности сетки, стремясь к определенному пределу (истинной энергии пульсационного режима в невязком случае). Также, происходит увеличение численного числа Рейнольдса Re_{num} . Это связано с тем, что уменьшается величина сеточной вязкости и диссипация энергии происходит с меньшей скоростью. Здесь встает вопрос о характере зависимости времени перехода в пульсационный режим t' . Также было исследовано влияние сетки на масштабы крупных структур, которое показало их независимость (не сильную зависимость) от сетки.

Перейдем теперь к выяснению характера влияния длины волны возмущения. Положим ширину зазора $\Delta R=0.5$ и амплитуду возмущения порядка 4% от скорости течения. Величины мод возмущения менялись в интервале от 3-х мод до 22-х с шагом в одну моду. На Рисунке 13 показаны графики зависимостей энергии пульсаций E_t от времени для числа мод $n = 3; 4$, видно, что в некоторый момент времени (t'), энергия начинает резко возрастать. Справа от каждого графика приведен рисунок, на котором изображено распределение завихренности к моменту времени, близкому к t' . Из рисунков видно, что резкое возрастание энергии E_t сопровождается рождением крупных вихрей. Таким образом происходит переход в пульсационный режим (рождение крупных вихрей означает наступление пульсационного режима, т.к. E_t в этот момент резко возрастает). На Рисунке 14 представлены графики зависимостей от числа мод n времени перехода в пульсационный режим t' и энергии пульсационного течения E_t^{\max} соответственно. Из графика зависимости t' видно, что с увеличением числа мод время перехода в пульсационный режим возрастает, а из графика для энергии прослеживается независимость от числа мод. Независимость энергии объясняется тем, что в сформированном пульсационном течении (в конце расчета) независимо от n всегда остается 2-3 вихря размером порядка зазора между цилиндрами (Рисунок 15), в которых и сосредоточена большая часть энергии пульсаций. Из графика зависимости t' можно заключить, что имеет место длинноволновая неустойчивость, т. е. длинные волны более неустойчивы, чем короткие.

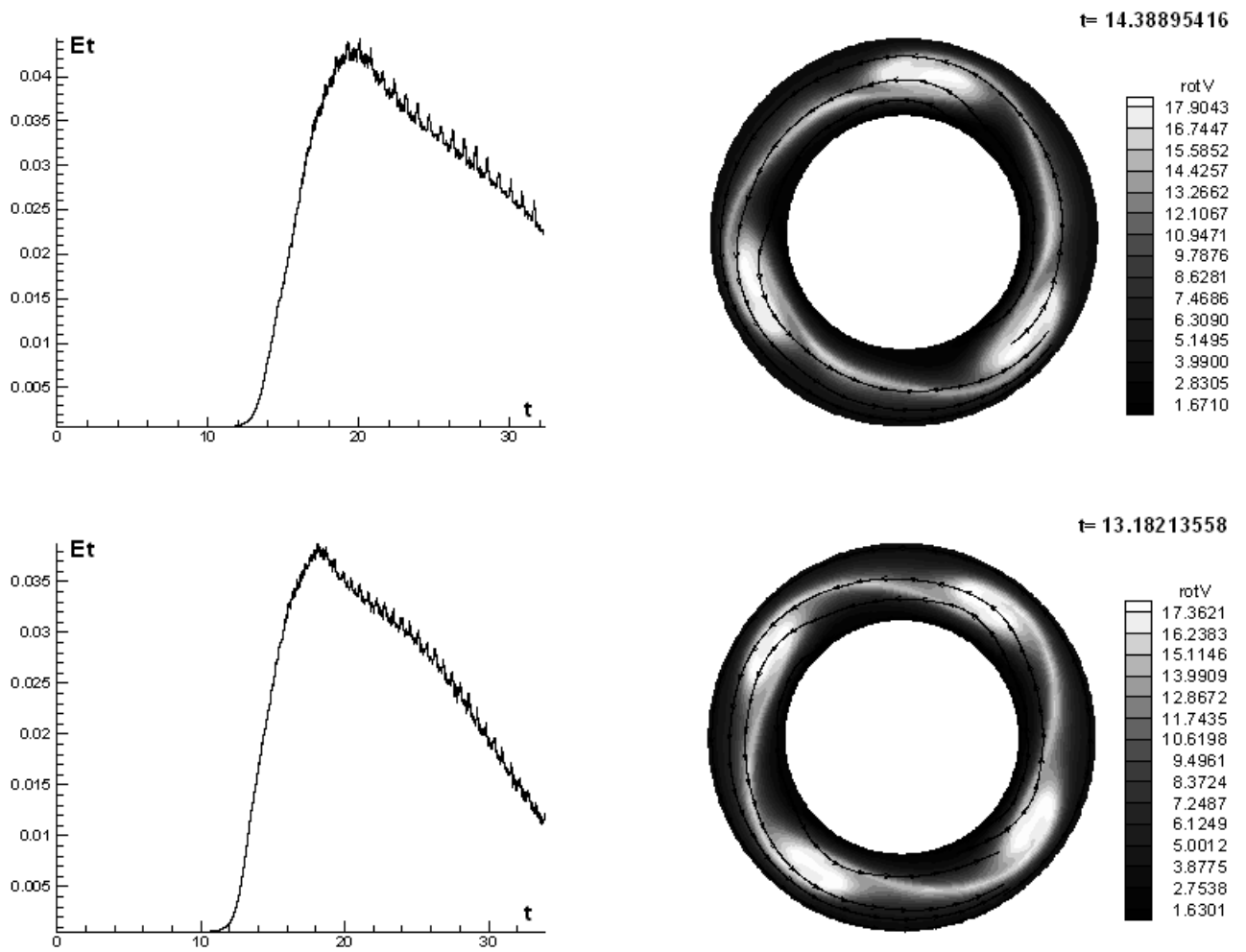


Рисунок 13. Возникновение крупных вихрей происходит в момент резкого увеличения энергии пульсаций E_t

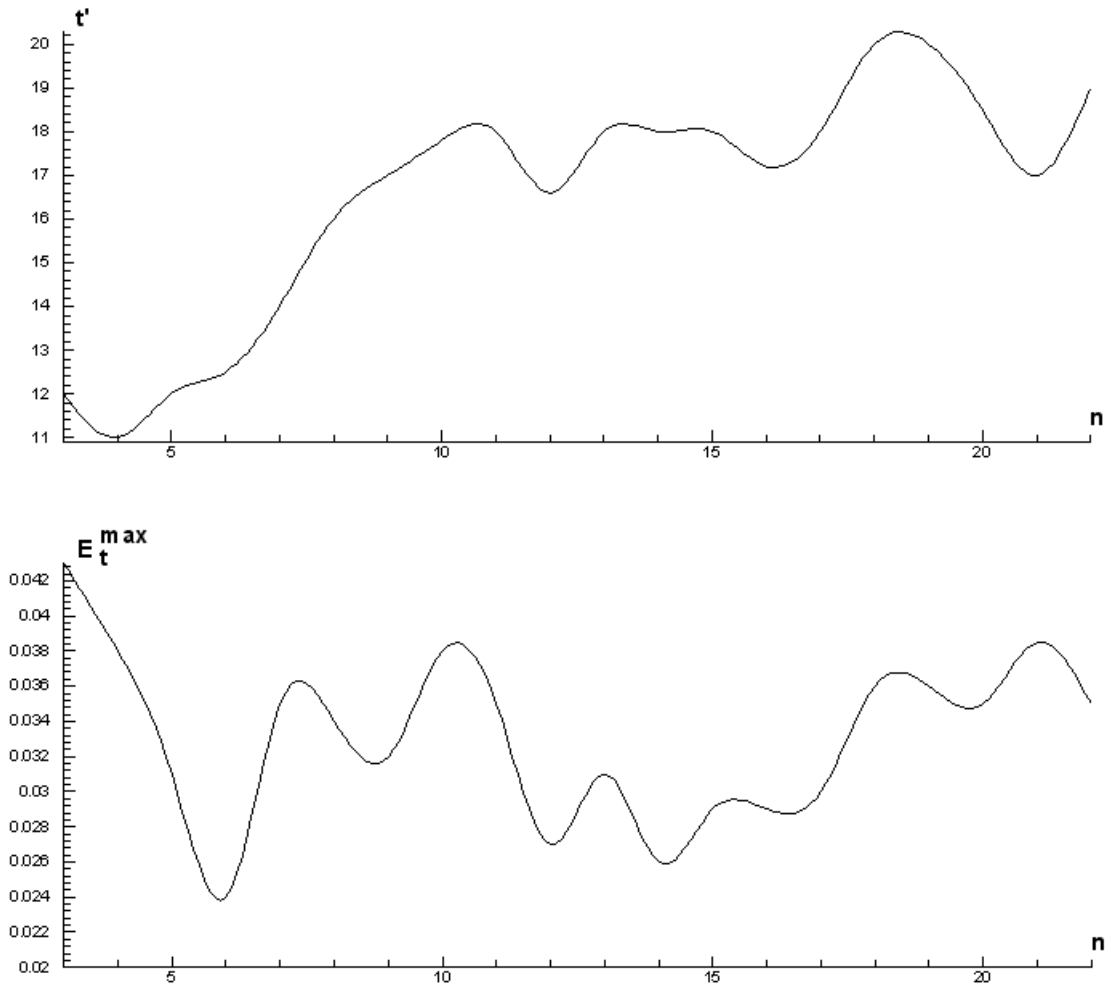


Рисунок 14. Графики зависимостей времени перехода в пульсационный режим t' и энергии пульсационного режима E_t^{\max} от числа мод n .

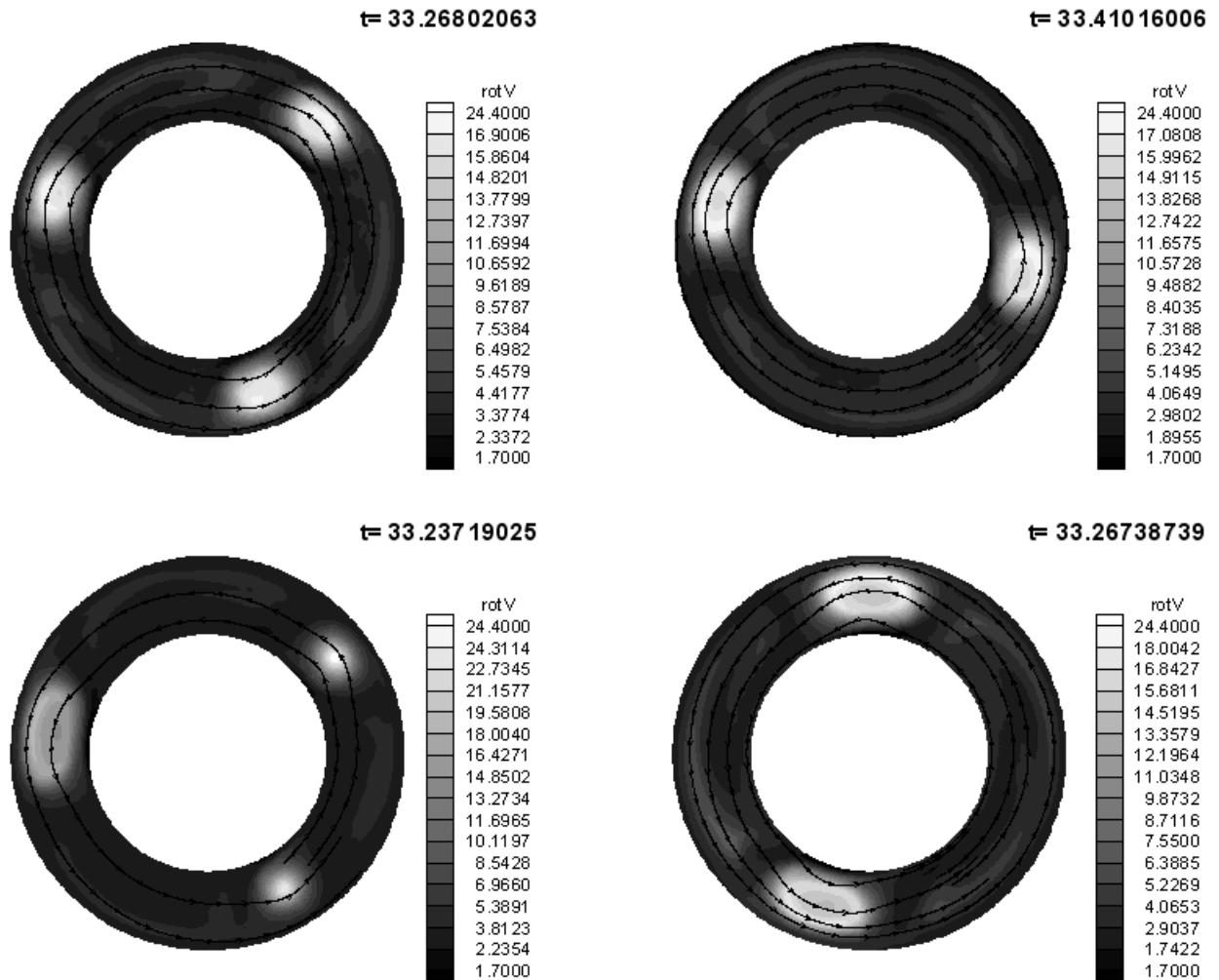


Рисунок 15. Картины завихренности пульсационного течения для числа мод $n = 15; 16; 17; 18$.

В работе [5] был получен критерий неустойчивости сдвигового течения, из которого следует, что короткие волны всегда стабильны, а длинные нет. Таким образом, видно, что критерии, полученные в [5] для плоскопараллельного течения применимы и в данной задаче.

Теперь будем менять ширину зазора ΔR , оставляя постоянным средний радиус канала $R_{cp} = 1$. Расчеты проводились для интервала $\Delta R = [0.1; 1.0]$ с шагом 0.1, возмущение оставалось без изменений. На Рисунке 16 представлены графики зависимостей времени перехода в пульсационный режим t' и энергии пульсационного режима E_t^{\max} от ширины зазора ΔR .

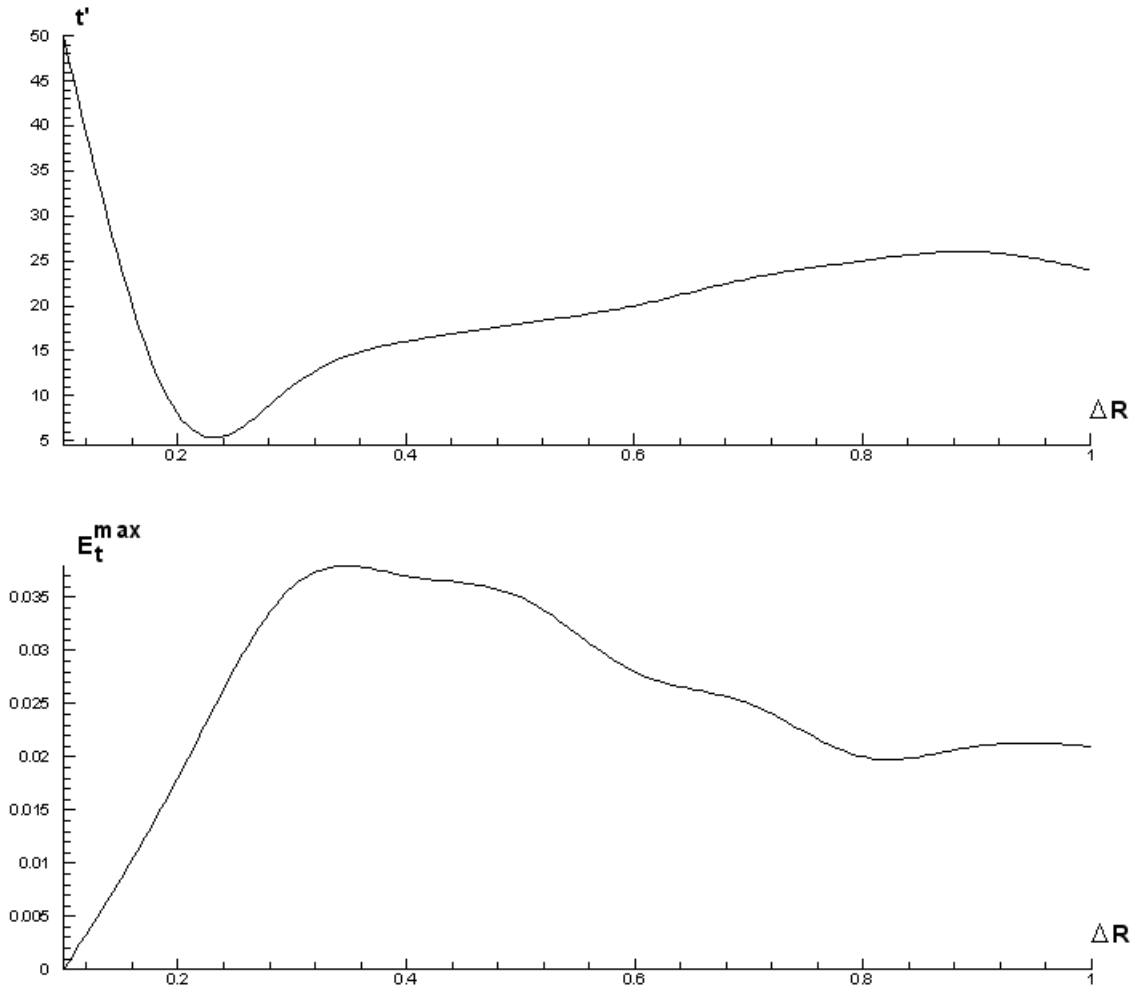


Рисунок 16. Графики зависимостей времени перехода в пульсационный режим t' и энергии пульсационного режима E_t^{\max} от ширины зазора между цилиндрами ΔR .

В данном случае поведение завихренности ничем не отличается от предыдущих рассмотренных случаев. Вначале образуется кольцо завихренности, потом из этого кольца рождаются крупные вихри. Рассмотрим график t' , который имеет минимум, соответствующий $\Delta R \sim 0.2$. Наличие этого минимума объясняется тем, что справа от минимума ширина зазора растет и перепад давления (на единицу длины в радиальном направлении) в области, где образуется кольцо завихренности, уменьшается. Таким образом, уменьшается момент сил, под действием которых происходит рождение вихрей и это ведет к увеличению времени t' .

Возрастание же t' слева от минимума связано с влиянием стенок зазора, которые не дают родиться вихрям по масштабу большим ширины зазора.

Рассмотрим, как будет влиять амплитуда возмущения на устойчивость потока. В экспериментах величины амплитуды возмущений полагались равными 0.01, 0.02, 0.05, 0.08, 0.1, 0.15, 0.2. Приведем здесь графики зависимостей энергии E_t^{\max} и времени t' от амплитуды a (Рисунок 17). Из графика для E_t^{\max} видно, что энергия пульсационного режима почти не зависит от амплитуды возмущения, то же самое можно сказать и о зависимости t' . Следовательно, можно заключить, что амплитуда начального возмущения не влияет на характер течения.

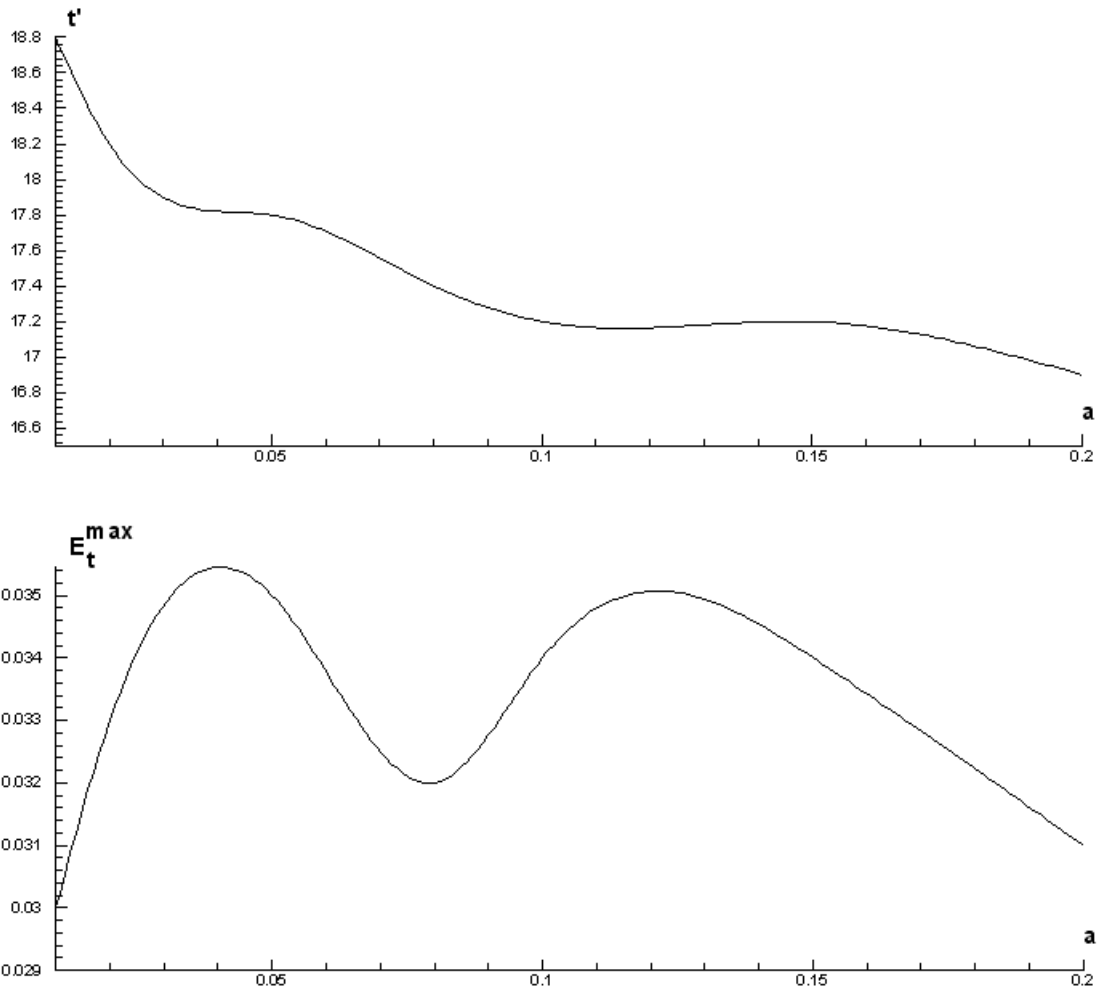


Рисунок 17. Графики зависимостей времени перехода в пульсационный режим t' и энергии пульсационного режима E_t^{\max} от амплитуды возмущения a .

Попробуем теперь получить параметр, характеризующий данную задачу. Как было показано выше, в результате приведения уравнений к безразмерным переменным появляется временной параметр $T = \frac{\Delta R}{\Omega R_{cp}}$. Как известно, безразмерное число, характеризующее задачу, следует из закона подобия. В нашей задаче мы имеем два различных режима течения: первый - нестационарный (до перехода в пульсационный режим), и второй - пульсационный (квазистационарный) режим. На нестационарный режим влияют геометрические параметры задачи ($\Delta R, R_{cp}$), угловые скорости цилиндров (Ω), а также возмущение (a, n). Данные параметры должны входить в закон подобия. В пульсационном же режиме влияние возмущения исчезает, т. к. энергия E^{\max}_t и конечное число крупных вихрей не зависит ни от амплитуды, ни от длины волны возмущения. Таким образом, нельзя охарактеризовать течение единым параметром, т. к. у данных двух режимов различные законы подобия.

Результаты рассмотрения данной задачи могут быть использованы в объяснении неустойчивости аккреционных дисков. Аккрецией по определению называется процесс падения вещества на космическое тело из окружающего пространства. Причиной аккреции является гравитация. Соответственно, аккреционный диск представляет из себя диск, образующийся вокруг звезды в результате аккреции, если падающее вещество имеет момент вращения. Ситуация, приводящая к образованию аккреционного диска, в частности, возникает в тесных двойных системах. Таким образом, рассматриваемая нами двумерная модель может быть применена к исследованию гидродинамической модели аккреционного диска. На аккреционный диск влияет множество факторов, приводящих к потере его устойчивого вращения. Соответственно, данный модуль позволит изучить различные режимы течения вещества аккреционных дисков и исследовать их устойчивость в приближении идеальной среды.

§ 6. СТРУЙНОЕ И СПУТНОЕ ТЕЧЕНИЯ С ЗАКРУТКОЙ

На Рисунках 18-19 показаны результаты численного решения задачи об устойчивости течения с отрицательным и положительным градиентом скорости соответственно, по отношению к закрутке. Закрутка течения с положительным градиентом скорости приводит к образованию вихря около внутренней стенки канала. Если пренебречь малым радиусом внутренней стенки $R_1 \ll 1$ (численные расчеты также показывают, что возникновение данного вихря происходит также при уменьшении R_1), то можно сказать, что вихрь у внутренней стенки канала является шаровым (Рисунок 2).

Закрутка течения с отрицательным градиентом скорости приводит к образованию тороидального вихря, расположенного около внешней стенки канала (Рисунок 18).

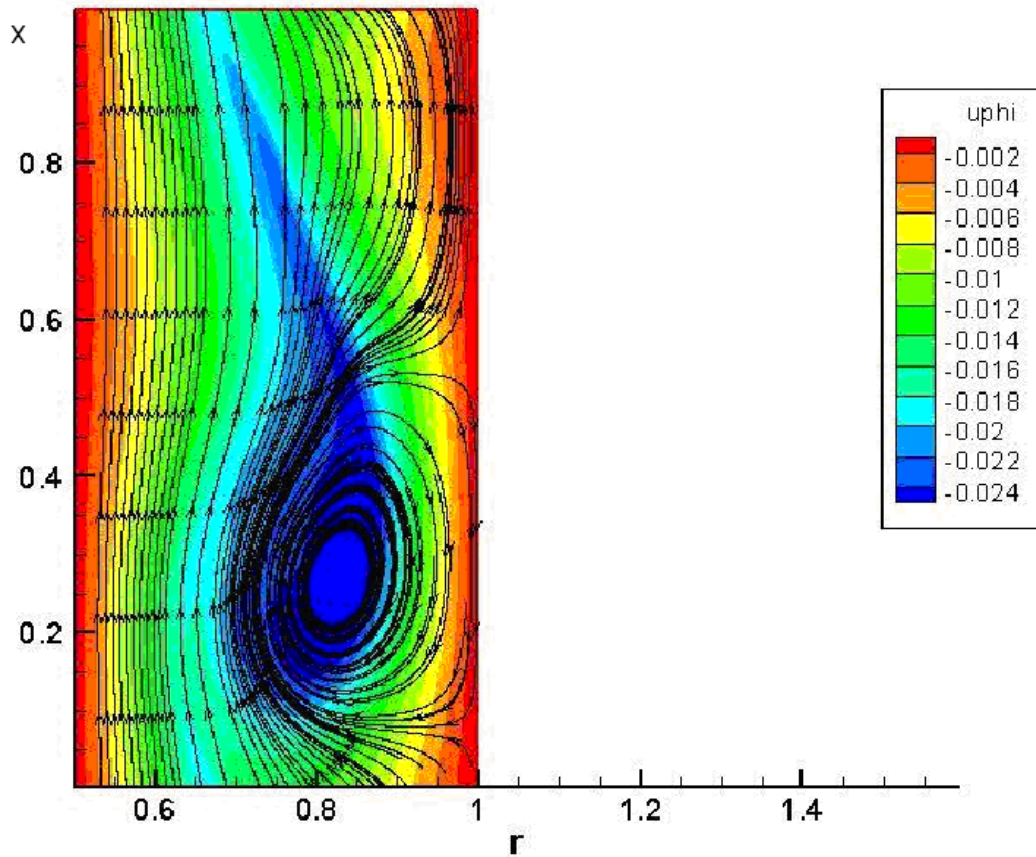


Рисунок 18. Картина вторичного течения, возникающая при возмущении закруткой протекания с отрицательным (от внутренней стенки канала) градиентом скорости, цветом показано распределение угловой скорости.

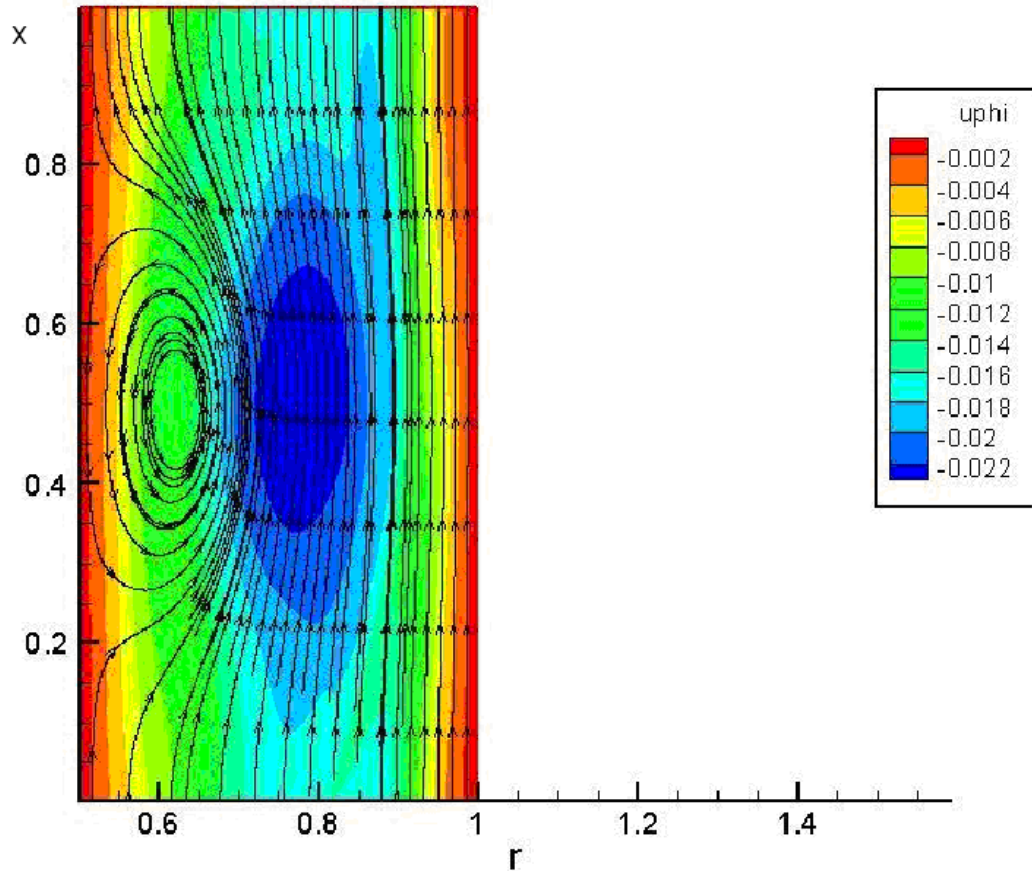


Рисунок 19. Картина вторичного течения, возникающая при возмущении закруткой протекания с положительным (от внутренней стенки канала) градиентом скорости, цветом показано распределение угловой скорости.

Возникновение вторичного течения данного типа связано, вероятно связано с перераспределением давления в результате внесения возмущений в течение. Как видно из уравнения для r -компоненты скорости (1.10),

$$\frac{\partial}{\partial r} p = \frac{\rho(u^\varphi)^2}{r}.$$

Таким образом, происходит перераспределение давления вдоль оси r : $p = p(r)$. Возникший градиент давления приводит к перемешиванию слоев среды, движущихся с различной скоростью. В результате этого, неустойчивого перемешивания, возникает вихрь в плоскости (r, x) .

На Рисунке 20 приведены расчеты на различных сетках с размерностями $n_r \times n_z = 200 \times 400$; 300×500 ; 400×700 . Видно, что решение почти не зависит от сетки, т.е. данное решение является решением исходной системы дифференциальных уравнений (численное решение сходится к точному).

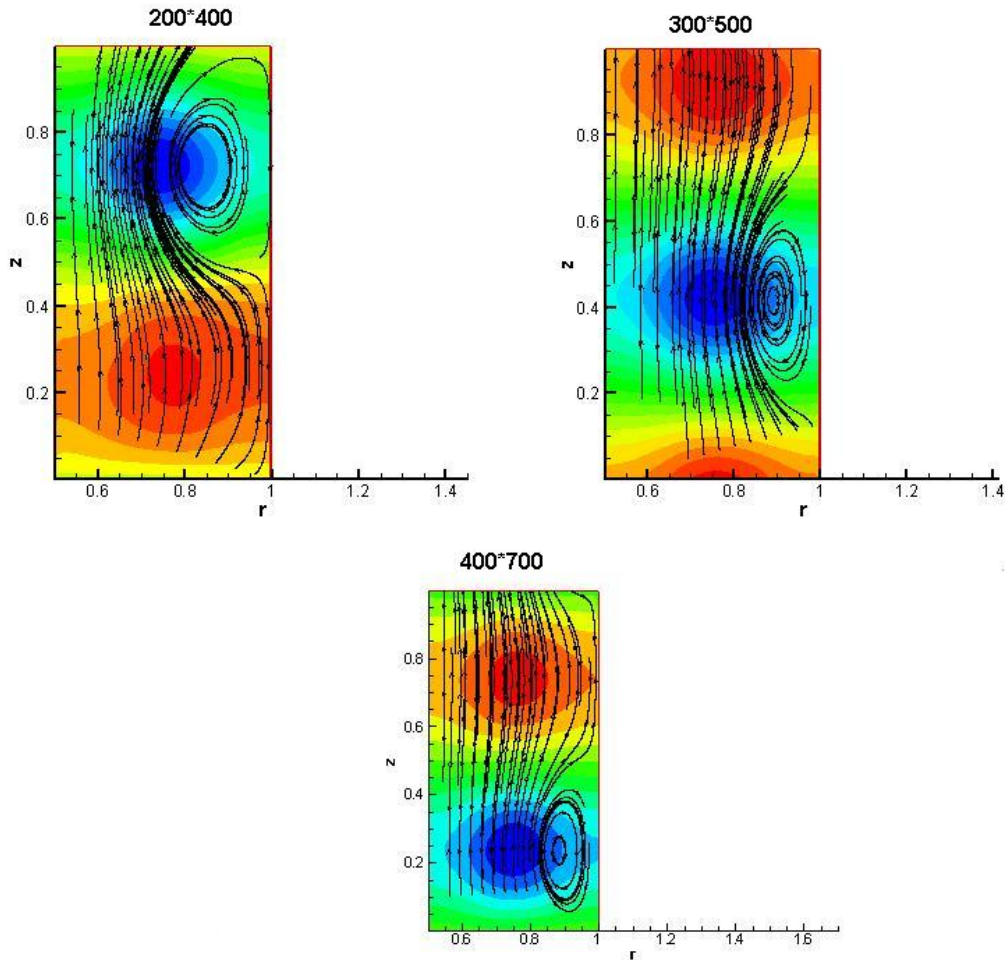


Рисунок 20. Расчет течения на различных сетках с размерностями $n_r \times n_z = 200 \times 400$; 300×500 ; 400×700 .

Таким образом, получили, что тороидальный вихрь есть вторичное течение, возникающее при возмущении закруткой сдвигового осевого течения в условиях наличия угловой симметрии. Чем больше градиент осевой компоненты скорости, тем более неустойчивым становится протекание и переход во вторичный режим с образованием вихревого тора.

Возможно, что данное свойство является определяющим при образовании колец сигаретного дыма и водяных колец дельфинами. Как известно, для того чтобы выпустить кольцо сигаретного дыма, курильщику требуется резко и как можно более быстрее выдохнуть струю дыма. Попадая во внешнюю среду, где всегда присутствуют возмущения различного типа, происходит образование вихревого кольца. Дельфины, как известно, для образования водяных колец, производят «удар носом» в область жидкости, откуда появляется кольцо. Таким образом, они создают очень тонкую струю.

Следует заметить, что возможно, данный вид возмущения (посредством u^φ – компоненты скорости) не является прямым источником развития вторичного течения. Был проведен численный эксперимент, результат которого приведен на Рисунке 21, из которого следует, что вторичный режим течения возникает также при возмущении основного (рассматривающегося в данной главе) течения только u^r – компонентой скорости. Причем, это возмущение носит детерминированный характер и описывается гармоническими функциями

$$u^r \sim a(r)\sin(nx) + b(r)\cos(nx); \quad |a(r)|, |b(r)| \ll |u^x|.$$

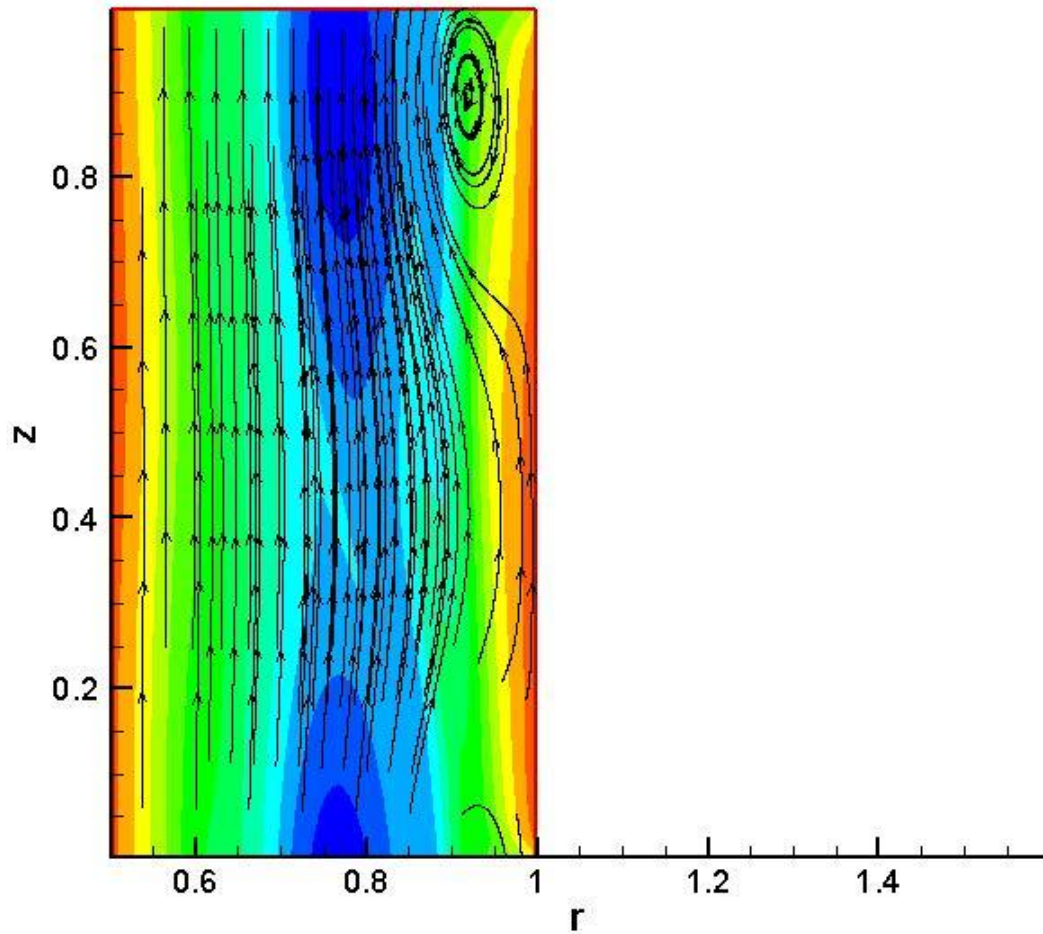


Рисунок 21. Вторичное течение, возникающее в результате возмущения протекания радиальной компонентой скорости.

Таким образом, следует, что наиболее вероятным является переход во вторичный режим под действием именно u^r – компоненты скорости. Данная же u^r – компонента, индуцируется u^φ – компонентой, посредством которой возмущается течение. Т.е., имеем место так называемой, индуцированной неустойчивости, когда на устойчивость течения оказывает влияние не непосредственно внесенное возмущение, а параметр, возникший благодаря этому возмущению. Таким образом, получаем неустойчивость стандартного сдвигового течения, которое опрокидывается u^r – компонентой скорости, как и следовало бы ожидать.

На Рисунке 22 приведены зависимости времени смены режима течения t_T от безразмерного параметра задачи $\frac{\omega H}{U}$. На Рисунке 23 показана зависимость времени t_T от размерности сетки, покрывающей расчетную область.

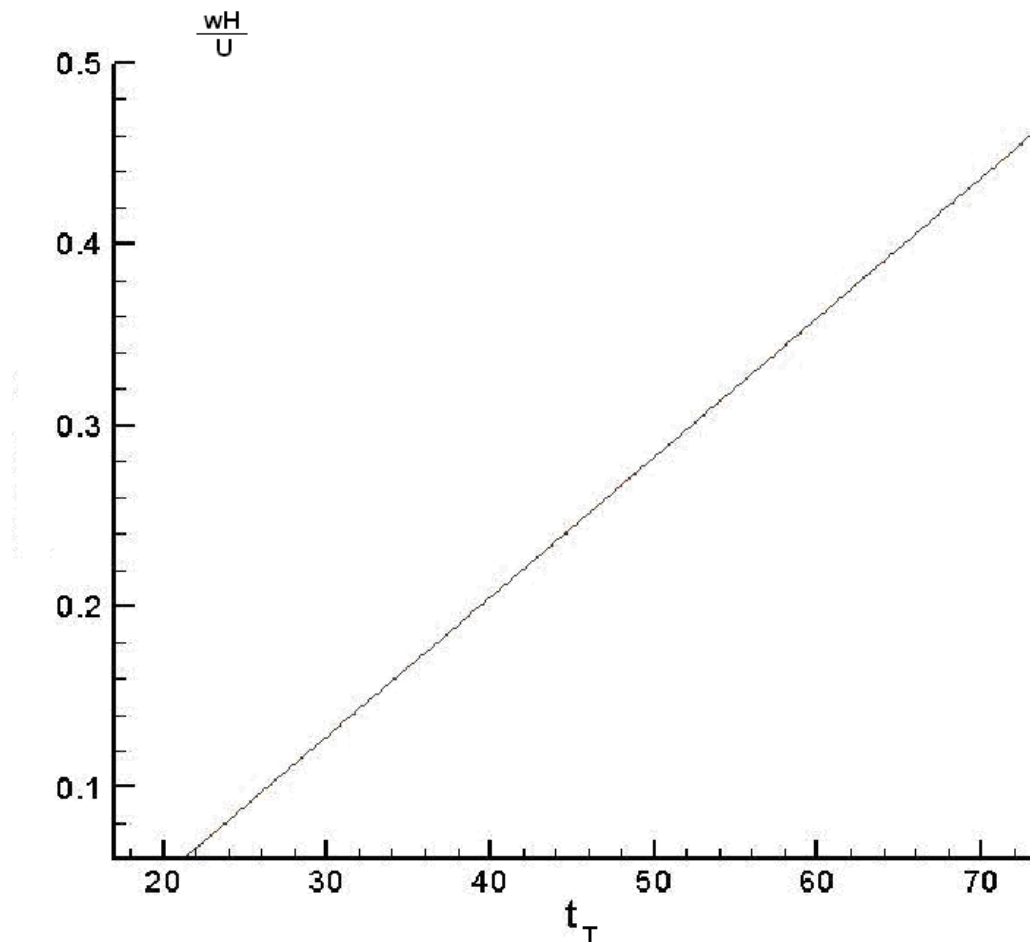


Рисунок 22. Зависимость времени перехода во вторичный режим от безразмерного параметра $\frac{\omega H}{U}$.

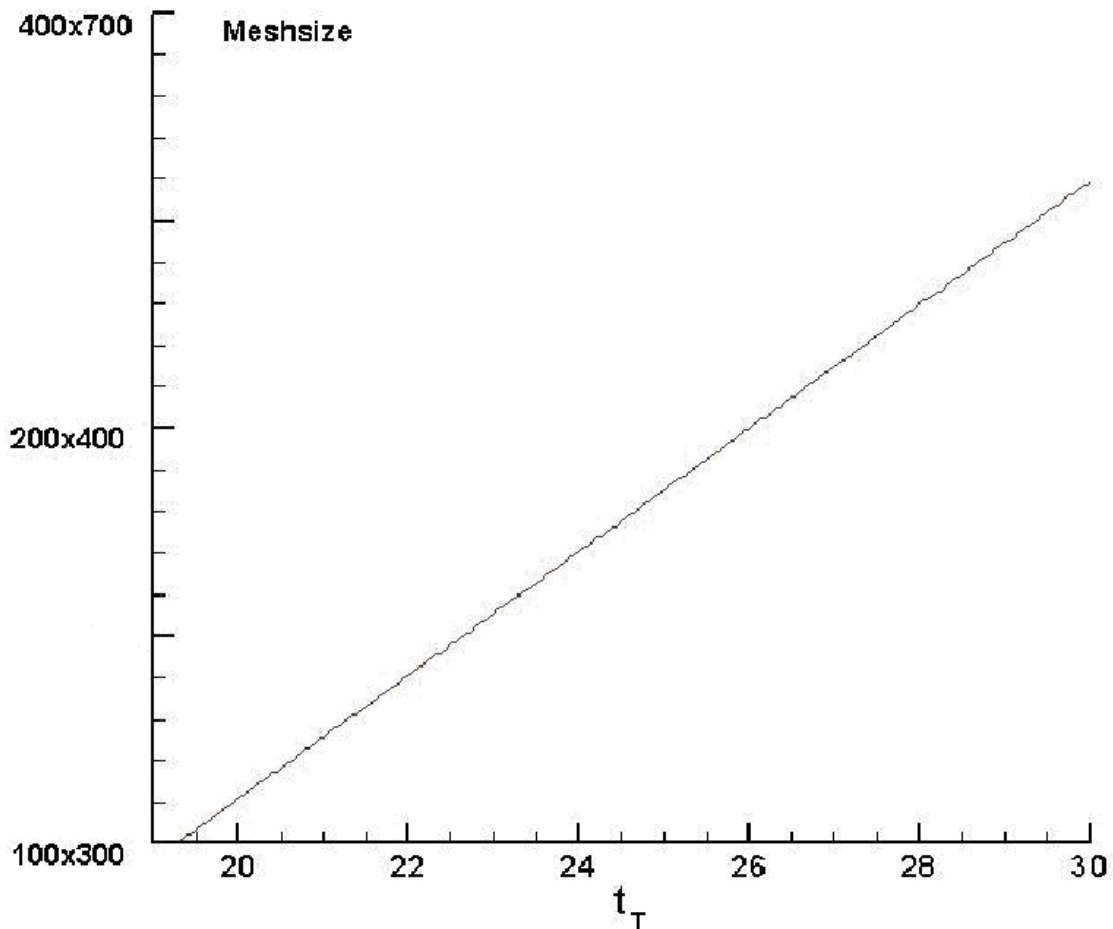


Рисунок 23. Зависимость времени перехода во вторичный режим от размерности сетки.

Подобные результаты получаются при рассмотрении закрученных потоков. Здесь следует уточнить, что такое закрученный поток. Под закрученным потоком понимается течение, в которое извне постоянно вносится завихренность, Примерами таких течений можно считать течение в каналах с закручивающими устройствами [201]. Вторичные режимы таких течений характеризуются возникновением пар вихрей, вращающихся в противоположные стороны.

Еще одним применением разработанной модели является моделирование течения в трубах. Моделирование течений в трубах актуально в задачах транспортировки жидких и газообразных веществ.

Например, в задачах транспортировки нефти и газа. Известно [201], что при транспортировке каких-либо веществ в трубах возникают возвратные течения, которые увеличивают гидродинамическое сопротивление, давление и т.д. Это негативно сказывается на состоянии трубопровода – в области возникновения возвратного течения повышается давление, что может привести даже к повреждению/разрыву трубопровода.

По результатам данного параграфа можно сказать, что основным дестабилизирующим фактором является сдвиговый характер течения. Чем

больше величина $\frac{du^z}{dr}$, тем неустойчивее протекание. Причем

неустойчивость проявляется относительно возмущений $\delta u^r, \delta u^\varphi$ – r, φ – компонент скорости.

§ 7. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПРОТИВОТОКА В ГАЗОРАЗДЕЛИТЕЛЬНОЙ ЦЕНТРИФУГЕ

Заметим, что проявление неустойчивости течения в виде генерации вихревых колец также имеет место в сверхзвуковых вращающихся потоках. Например, вторичные течения, возникающие в газовой центрифуге. Особенностью данного вида течений является неидеальность среды, т.е. наличие вязкости, теплопроводности и т.д, а также огромные величины скоростей основного течения.

Одним из наиболее важных применений газовой центрифуги является разделение изотопов урана в форме гексафторида урана UF_6 , преимуществом которого является моноизотопность фтора. С учетом ничтожности содержания в разделяемой смеси урана–234 (0,0054%), она обычно рассматривается как двухкомпонентная смесь изотопов урана–235 (0,7114%) и урана–238 [186].

Кроме отмеченной низкой исходной концентрации легкой фракции c в газовой смеси UF_6 и близости «легкой» молекулярной массы $M = 349$ к «тяжелой», $M_1 = 352$ (учитывается содержание фтора в примеси), к особенностям смеси можно отнести также ее большую теплоемкость при постоянном объеме c_v и ее малое отличие от теплоемкости при постоянном давлении c_p .

Кратко опишем процесс центрифугирования. Современная конструкция противоточной газовой центрифуги была разработана и освоена на промышленном уровне впервые в нашей стране [187, 188] (Рисунок 24). Центрифуга представляет собой ротор V – цилиндр радиуса R и высоты H . Отношение высоты к радиусу цилиндра определяет первый «крупномасштабный» (здесь, – зависящий только от геометрии) безразмерный параметр задачи, который далее будем называть главным фактором H/R . Ротор вращается с постоянной угловой скоростью Ω , увлекая за собой вязкий газ, прилипающий к его боковой поверхности.

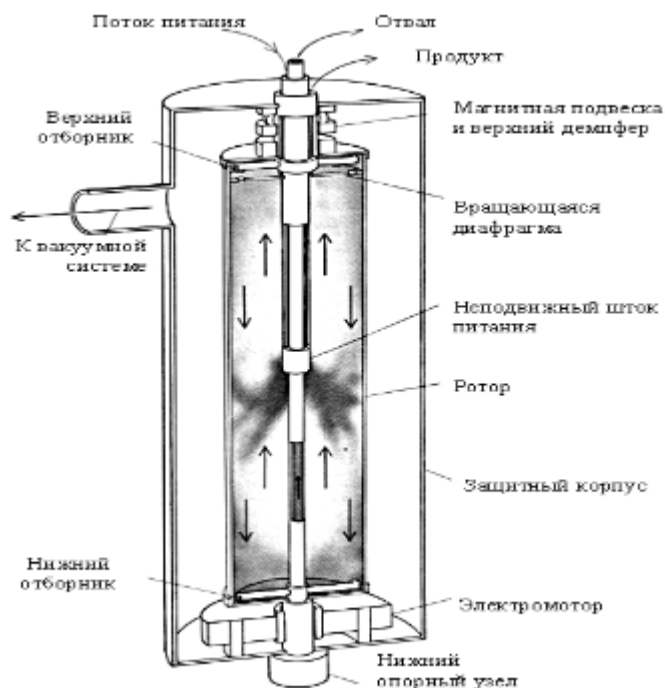


Рисунок 24. Схема противоточной газовой центрифуги для разделения изотопов урана.

Вследствие прилипания прилегающие к стенке слои газа начинают смещаться со скоростью ее движения v_* . Огромная величина этой скорости (более 600 м/с), сложное распределение температуры на боковой поверхности ротора, потоки, втекающие в ротор со скоростями, отличающимися от скорости вращения основного потока, разряженность газа в центральной его части, наконец, наличие поперечного вращающемуся потоку осевого течения, или вторичной циркуляции (называемой также вихрем противотока, или осевым противотоком), со скоростью на два порядка меньше скорости основного течения у боковой поверхности ротора (достаточно сказать, что для таких потоков число Кнудсена меняется в пределах от 10^{-3} до 10^3 , число Рейнольдса достигает значений 10^7 и выше, число Маха составляет примерно 8, а скорость звука при температуре 20°C и давлении 1 атм определяется величиной примерно равной 85 м/с, которая почти в четыре раза меньше, чем в воздухе), все это делает проблему исследования течения, теплообмена и селективного переноса компонент разделяемой смеси во вращающемся потоке с осевым противотоком чрезвычайно сложной задачей.

Главной составляющей движения в роторе идеального газа молекулярной массы M , с изотропной плотностью ρ и постоянной внутренней энергией

$$e = c_v T \quad (3.4)$$

(пропорциональной его абсолютной температуре T) служит его твердотельное вращение вокруг центральной оси с угловой скоростью вращения оболочки:

$$\begin{aligned} \rho = \rho(r), \quad e = e_* = c_v T_*, \quad T_* = \text{const} > 0 \\ u = w = 0, \quad v = \Omega r = v_* \bar{r}, \quad \bar{r} = r/R, \quad (v_* = \Omega R) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Распределение давления

$$p = \sigma \rho e = \frac{\rho}{M} \Re T, \quad \Re = M \sigma c_v = M c_p - M c_v \quad (3.6)$$

по радиусу r при этом подчиняется бароцентрическому закону,

$$\ln \frac{p}{p_*} = \frac{M\Omega^2}{2\mathfrak{R}T_*} (r^2 - R^2) = \frac{\bar{r}^2 - 1}{2\beta}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{v_*^2}{\sigma e_*} = \frac{M\Omega^2 R^2}{\mathfrak{R}T_*} \quad (3.7)$$

который даёт второй «крупномасштабный» параметр задачи – степень сжатия газа $1/\beta$, равную отношению удвоенной величины удельной механической энергии $v_*^2/2$ к характерной удельной тепловой энергии $\sigma e_* = \mathfrak{R}T_*/M$.

Если формально заменить в этом законе радиус на расстояние над поверхностью Земли, а центростремительное ускорение – на ускорение свободного падения, то получится знакомая барометрическая формула, предложенная в 1686 г. Эдмундом Галлеем: по мере возрастания высоты в арифметической прогрессии атмосферное давление уменьшается в геометрической прогрессии.

Вместе с тем бароцентрический закон отличается от барометрического закона его сугубо гидродинамическим происхождением. Он обусловлен исключительно равновесием внутренних сил сплошной среды, а именно силы конвективного ускорения Эйлера и градиента давления Паскаля:

$$-\frac{\rho v^2}{r} = -p_r, \quad (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p) \quad (3.8)$$

Благодаря этому равновесию вращение газа обнаруживает две простые черты наблюдаемых сложных вихревых течений сплошной среды: погруженные тела или частицы примеси всегда выталкиваются средой в область пониженного давления и давление всегда падает к оси вращения вихря. Последнее утверждение можно строго доказать в приближении несжимаемой среды [189, Часть 1, §1].

Твердотельное вращение газового столба отличается не только изотермичность, но и отсутствие разности скоростей вращения его концов, что может быть нарушено возмущениями у торцов ротора, ускоряющими или замедляющими вращение среды.

Но кручение вязкого теплопроводного газа при наличии разности скоростей у концов ротора не может происходить с постоянной температурой.

Вместе с разностью угловых скоростей вращения газа (закруткой) возникают вязкие напряжения. Поэтому, следуя [190], равновесие сил Эйлера и Паскаля по радиусу (приводящее к бароцентрическому закону) необходимо дополнить условием равновесия тех же сил по высоте столба (при вырождении первой ввиду отсутствия аксиальной скорости), радиальных сил Навье–Стокса (вязких напряжений) и скорости теплоотдачи с отмеченной мощностью деформаций (определяемой функцией диссипации в правой части уравнения энергии):

$$p_z = 0, (u = w = 0), v_{rr} + \frac{v_r}{r} - \frac{v}{r^2} + v_{zz} = 0,$$

$$-\frac{\kappa}{\mu c_v} \left(e_{rr} + \frac{e_r}{r} + e_{zz} \right) = \left(v_r - \frac{v}{r} \right)^2 + v_z^2 \quad (3.9)$$

соответственно.

Это позволяет ввести третий «крупномасштабный» параметр задачи – инкремент D связанных возмущений Δv , $\Delta \Omega$, ΔT или $\Delta \rho$ характерных скорости вращения v_* , угловой скорости Ω , температуры T_* или плотности ρ_* (при неизменном давлении на стенке p_*), или определяемый им и главным фактором $1/\alpha$ масштаб торможения δ ,

$$\delta = \left(\frac{\alpha}{2} \ln D \right)^2, \Delta v, \Delta \Omega, \Delta T, \Delta \rho = const > 0, \Delta \rho < \rho_*$$

$$D = 1 + \frac{\Delta v}{v_*} = 1 + \frac{\Delta \Omega}{\Omega} = \left(1 + \frac{\Delta T}{T_*} \right)^{1/2} = \left(1 - \frac{\Delta \rho}{\rho_*} \right)^{-1/2} \quad (3.10)$$

В терминах инкремента D можно записать формулы для уточняющего твердотельное вращение газового столба его упругого вращению, с нетривиальными полями угловой скорости, температуры и плотности [190]:

$$\frac{v}{v_* \bar{r}} = A(\bar{r}) D^{\bar{z}}, \frac{e}{e_*} = B(\bar{r}) D^{2\bar{z}}, \frac{\rho}{\rho_*} = C(\bar{r}) D^{-2\bar{z}}, \frac{P}{p_*} = P(\bar{r}),$$

$$C(\bar{r}) = \frac{P(\bar{r})}{B(\bar{r})}, \quad 0 < \bar{r} = \frac{r}{R} < 1, \quad 0 < \bar{z} = \frac{z}{H} < 1 \quad (3.11)$$

Их радиальные распределения однозначно определяются аналитическими функциями, разлагаемыми в ряд Маклорена в центре вращения, с бесконечным радиусом сходимости, принимающими положительные значения внутри цилиндра и удовлетворяющие следующим уравнениям и граничным условиям,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\bar{r}^3} \left(\bar{r}^3 A_{\bar{r}} \right)_{\bar{r}} &= 4\delta A, \quad P_{\bar{r}^2} = \frac{A^2}{2\beta B}, \\ -\frac{1}{\bar{r}} \left(\bar{r} B_{\bar{r}} \right)_{\bar{r}} &= 16\delta B + \text{Br} \left(\left(\bar{r} A_{\bar{r}} \right)^2 + 4\delta \bar{r}^2 A^2 \right), \quad 0 < \bar{r} < 1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

полученными подстановкой разделенных переменных (3.10) в уравнения законов сохранения (3.8).

При этом уровень диссипации характеризует параметр, называемый числом Бринкмана Br и равный отношению характерной энергии вязкой диссипации к тепловой энергии, который вместе с числами Прандтля Pr и Рейнольдса Re ,

$$\begin{aligned} \text{Br} = \frac{\mu v_*^2}{\kappa T_*} = \frac{\sigma}{\beta \gamma} \text{Pr}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_* R v_*}{\mu} = \frac{R v_*}{\sigma \mu c_v T_*} p_* = \frac{MR v_*}{\mu R T_*} p_*, \\ \left(\rho_* = \frac{p_*}{\sigma c_v T_*} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

замыкает группу параметров, порождаемых процессами вязкости и теплопроводности. Используя эти числа как «мелкомасштабные» параметры, еще раз подчеркнем их физическое отличие от трех вышеприведенных «крупномасштабных» параметров α , β и δ (или D), не зависящих от медленных диффузионных процессов.

Последний из приведенных параметров, число Рейнольдса, будет использован при потере устойчивости основного течения и возникновении нового поля скоростей с граничными данными от первого:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{v}{v_*} \right|_{\bar{r}=1} &= D^{\bar{z}}, \quad u|_{\bar{r}=1} = w|_{\bar{r}=1} = 0, \quad \left. \frac{e}{e_*} \right|_{\bar{r}=1} = D^{2\bar{z}}, \quad \left. \frac{\rho}{\rho_*} \right|_{\bar{r}=1} = D^{-2\bar{z}}, \\
\left. \frac{v}{v_*} \right|_{\bar{z}=0} &= \left. \frac{v}{Dv_*} \right|_{\bar{z}=1} = \bar{r}A(\bar{r}), \quad u|_{\bar{z}=0,1} = w|_{\bar{z}=0,1} = 0, \\
\left. \frac{e}{e_*} \right|_{\bar{z}=0} &= \left. \frac{e}{D^2 e_*} \right|_{\bar{z}=1} = B(\bar{r}), \quad \left. \frac{\rho}{\rho_*} \right|_{\bar{z}=0} = \left. \frac{D^2 \rho}{\rho_*} \right|_{\bar{z}=1} = C(\bar{r})
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Появление вторичного течения в рассматриваемой постановке задачи неизбежно, поскольку раскручивающая газ твердая оболочка ротора не может продолжительно закручиваться, не разорвавшись. Возникающее при «обрушении» вращения новое течение, перестраивая распределение физических полей, должно «наследовать» механическую и тепловую энергию упругого вращения в той же пропорции, в какой они были «накоплены» им пусть за короткое, но конечное время. Каково же соотношение между ними?

Для ответа на этот вопрос прибегнем к следующим нелокальным (как допускающим дифференцирование на всем отрезке радиуса $0 \leq \bar{r} \leq 1$, с сохранением порядка аппроксимации) приближениям радиальных распределений масштабом торможения [190]:

$$\begin{aligned}
A - 1 &= \delta \frac{1 - \bar{r}^2}{2} + O(\delta^2), \\
B - 1 &= 4\delta(1 - \bar{r}^2) \left(1 + \frac{\text{Br}}{16}(1 + \bar{r}^2) \right) + O(\delta^2), \\
\ln P &= \frac{\bar{r}^2 - 1}{2\beta} \left(1 - \left(3 + \frac{\text{Br}}{6} - \frac{\bar{r}^2 + 1}{2} \left(3 + \frac{\text{Br}}{6} \bar{r}^2 \right) \right) \delta + O(\delta^2) \right), \\
C &= \left(1 - 4\delta(1 - \bar{r}^2) \left(1 + \frac{\text{Br}}{16}(1 + \bar{r}^2) \right) + O(\delta^2) \right) P, \quad 0 \leq \bar{r} \leq 1,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

из которых следует искомая оценка для отношения относительных разностей величин температуры $B - 1$ и скорости $A - 1$ практически на всем отрезке радиуса при главном факторе 4 и 5% закрутки:

$$\frac{B-1}{A-1} = 8 + \text{Br} + \frac{\text{Br}}{2}(1-\bar{r}^2) + \frac{O(\delta)}{1-\bar{r}^2}, \quad \sqrt{\delta} < \bar{r} < \sqrt{1-\sqrt{\delta}},$$

$$\frac{B-1}{A-1} > 8 + \text{Br} - 0.1, \quad 0.006 < \bar{r} < 0.996, \quad \frac{1}{\alpha} = 4, \quad D = 1.05. \quad (3.16)$$

Для характерных величин скорости и температуры

$$v_* = 600 \frac{M}{c}, \quad T_* = 300 \text{ К}, \quad (3.17)$$

приводящих к степени сжатия и уровню диссипации

$$\frac{1}{\beta} = \frac{v_*^2}{22.72725 \cdot T_*} \approx 52.8, \quad \text{Br} = \frac{0.065}{1.065\beta} \text{Pr} \approx 2.61, \quad (3.18)$$

полученная оценка (3.15) дает более чем 10–кратное преобладание теплового эффекта над механическим.

Начальными течениями служили приведенные выше точные стационарные решения уравнений Навье–Стокса: твердотельное вращение газового столба с постоянной температурой и его упругое вращение с переменной температурой (данная постановка принадлежит Трошкину [190]). Первое из них дополнительно «возмущалось» скоростью или температурой, второе же само «опрокидывалось» в противоток (в согласии с физическими доводами, приведенными выше).

И в первом и во втором случае менее чем за секунду во вращающемся потоке возникал противоточный вихрь: замкнутые горизонтальные линии тока плоскопараллельного вращения разрывались и начинали «наматываться» на пространственные тороидальные «катушки», с общей центральной горизонтальной окружностью, проходящей через точку инверсии (Рисунок 25). Одновременно происходило разделение поля температуры, наблюдаемое в виде следующей тепловой перестройки (как и в эффекте Ранка–Хилша): первоначально окружавшее ось вращения «горячее место» смещалось к боковой стенке ротора, центральная часть ротора при этом охлаждалась.

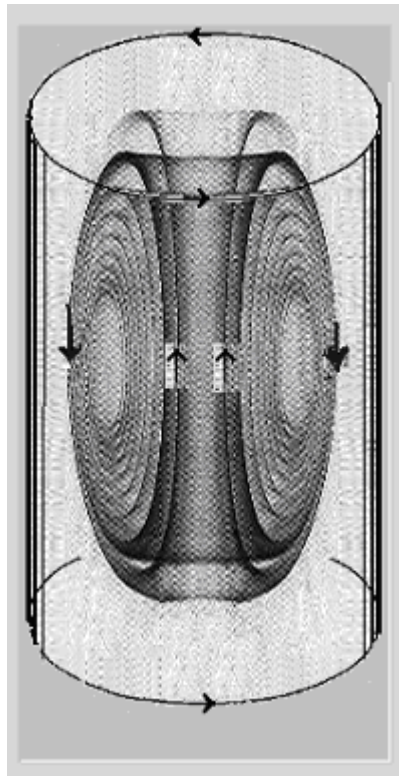


Рисунок 25. Противоток, возникающий в газоразделительной центрифуге.

Температурный фактор доминирует и в последующие моменты времени движения: установившийся противоток легко управляется температурой на границе ротора. Например, вместо одного вихря можно получить два (один над другим, с противоположенными направлениями вращения), если задать К-образный профиль температуры на боковой поверхности ротора (т.е. линейно понижать ее по мере продвижения снизу вверх до половины высоты цилиндра, а затем повышать до исходной величины).

Но самым неожиданным при моделировании оказался тот факт, что в действительности при потере устойчивости основного течения возникает не один, а несколько противотоков, как матрешки, вложенных своими обмотками из линий тока один в другой. Иначе говоря, появляется одновременно несколько точек инверсии, количество которых растет с увеличением числа Рейнольдса. При этом практически всю массу смеси «крутит» только один противоток, который примыкает к стенке ротора и точка инверсии которого смещается к последней по мере увеличения указанного числа. Ввиду разреженности газа в центральной части ротора

оставшиеся «дочерние» противоточные вихри, как обертона по отношению к главному тону, так и называемые ниже «обертоками», фактически не участвуют в перемешивании: они расположены ближе к центру и на их долю приходится ничтожная часть рабочей смеси. Вместе с тем, возникновение их приводит к смещению точки инверсии главного противотока, что оказывает существенное влияние на структуру течения.

Отмеченная выше тепловая перестройка во вращающемся потоке, температурное управление противотоком и наличие обертоков, дополняет проводимое ниже различие в физической природе точки инверсии как получаемой соответственно от механического возбуждения противотока («механическая точка инверсии») и его теплового возбуждения («тепловая точка инверсии»): при сравнимых возмущениях соответственно угловой скорости и температуры последняя всегда оказывается ближе к стенке; положение же уже возникшей точки инверсии гораздо чувствительнее к температурному возмущению по сравнению с механическим.

Если простое равновесие внутренних сил во вращающемся потоке (3.8) приводит к бароцентрическому закону распределения давления по радиусу (3.7), а его непосредственный перенос на упругое вращение (3.9) – тепловой эффект (3.16), то для получения вторичной циркуляции и расчета концентрации примеси при исключаяющей распад вихря осевой симметрии

$$u_{\theta} = v_{\theta} = w_{\theta} = \rho_{\theta} = e_{\theta} = c_{\theta} = 0, \quad (3.19)$$

требуется решение полной нестационарной задачи

$$\mathbf{U}_t + \left(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\mu}\right)_z + \left(\mathbf{G} - \mathbf{G}^{\mu}\right)_r + \mathbf{S} - \mathbf{S}^{\mu} = \mathbf{0}, \quad t > 0, \quad \mathbf{U}|_{t=+0} = \mathbf{U}_0. \quad (3.20)$$

Здесь вязкостью μ помечены силы внутреннего трения,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho w \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \\ \rho c \end{bmatrix}, \mathbf{E}^\mu = \mu \begin{bmatrix} 0 \\ \tau^{zz} \\ \tau^{zr} \\ \tau^{z\theta} \\ A^z \\ B^z \end{bmatrix}, \mathbf{G}^\mu = \mu \begin{bmatrix} 0 \\ \tau^{zr} \\ \tau^{rr} \\ \tau^{r\theta} \\ A^r \\ B^r \end{bmatrix}, \mathbf{S}^\mu = \frac{\mu}{r} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau^{zr} \\ \tau^{rr} - \tau^{\theta\theta} \\ 2\tau^{r\theta} \\ A^r \\ B^r \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

взаимодействующие с силами конвективного ускорения и давления,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w w + p \\ \rho w u \\ \rho w v \\ \rho E w + p w \\ \rho c w \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho w u \\ \rho u u + p \\ \rho u v \\ \rho E u + p u \\ \rho c u \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho w u \\ \rho u^2 - \rho v^2 \\ 2\rho u v \\ \rho E u + p u \\ \rho c u \end{bmatrix},$$

$$E = e + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}, \left(e = \frac{T}{c_v} \right) \quad (3.22)$$

а двойными индексами – скорости деформаций ньютоновской среды

$$\tau^{zz} = \frac{2}{3} \left(2w_z - u_r - \frac{u}{r} \right), \tau^{rr} = \frac{2}{3} \left(2u_r - w_z - \frac{u}{r} \right), \tau^{z\theta} = v_z,$$

$$\tau^{\theta\theta} = \frac{2}{3} \left(\frac{2u}{r} - w_z - u_r \right), \tau^{r\theta} = v_r - \frac{v}{r}, \tau^{zr} = u_z + w_r \quad (3.23)$$

мощности производимых ими растяжений (сужений) и расширений (сжатий) соответственно малых площадей и объемов,

$$A^{z,r} = \tau^{zz,zr} w + \tau^{zr,rr} u + \tau^{z\theta,r\theta} v + \frac{1}{\text{Pr}} h_{z,r}, h = e + \frac{p}{\rho} \quad (3.24)$$

[191, 192], и скорости рассеивания молекул с меньшей массой M среди молекул большей массы M_1 ,

$$B^{z,r} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Sc}} \left(c_{z,r} + c(1-c) \frac{\Delta M}{\bar{M}} \frac{1}{p} p_{z,r} \right), \text{Sc} = \frac{\mu}{\rho D_c} = 1,$$

$$\frac{1}{\bar{M}} = \frac{1-c}{M_1} + \frac{c}{M}, \Delta M = M_1 - M > 0 \quad (3.25)$$

[7], с коэффициентом диффузии пассивной примеси D_c (число Шмидта Sc в расчетах полагалось равным 1).

На границе ∂V цилиндра V поддерживается равновесие подаваемой смеси и выводимых «продукта» и «отвала» общим нулевым секундным расходом массы, суммируемым по граничным элементам (ячейкам) площади dS в направлении внешней нормали \mathbf{n} ,

$$\int_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = 0, (d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS) \quad (3.26)$$

На боковой поверхности ротора и поверхностях его торцов предполагаются выполненными условия прилипания. Системы отверстий с центрами на определенном радиусе на торцах ротора (для подачи или отвода газа) в приближении осевой симметрии моделируются кольцевыми щелями (Рисунок 26), что оправдывается быстрым вращением ротора (порядка 500 оборотов в секунду).

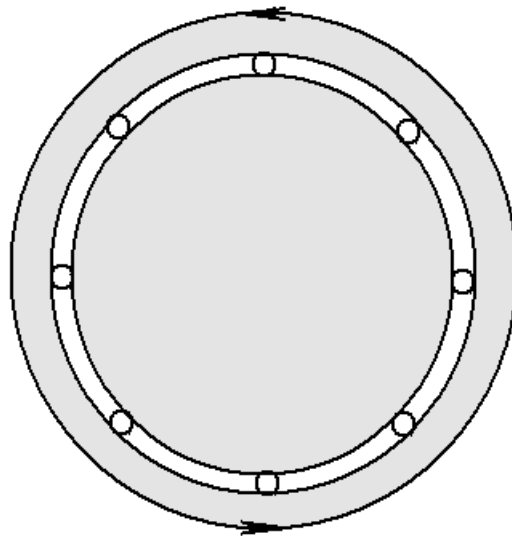


Рисунок 26. Кольцевая щель, моделирующая систему кольцевых отверстий.

С учетом разнообразного проявления теплового эффекта, в широких пределах варьируются граничные условия для внутренней энергии,

$$\left(k_1 (e - e_*) + k_2 \mathbf{n} \cdot \nabla e \right) \Big|_{\partial V} = f, \quad k_{1,2} = 0,1, \quad k_1 + k_2 = 1 \quad (3.27)$$

При помощи последних одновременно – через выбранные участки границы – осуществляется управление противотоком – либо нагреванием или охлаждением стенки, раскручивающей газовый поток (где $k_2 = 0$), либо тепловыми потоками (где $k_1 = 0$).

Как уже отмечалось, одним из двух начальных условий в уравнениях (3.20) служит твердотельное вращение газа, возмущаемое угловой скоростью в пределах слоя расчетных ячеек, прилегающего к плоскости одного из торцов ротора, или температурой на его боковой поверхности. Физически эти возмущения представляются наиболее приемлемыми, поскольку не нарушают целостности твердой оболочки.

Задача расчета течения в газоразделительной центрифуге также вызывает огромный интерес с точки зрения численных расчетов. Это связано с огромными градиентами гидродинамических величин, сверхзвуковым характером основного течения, наличия разреженной зоны, многокомпонентностью среды, ее неидеальностью и т.д. Здесь мы приведем сконструированную для данных расчетов численную схему.

В целом, задача имеет такую же размерность, как и рассмотренная выше в параграфе 6, посвященная изучению вращательной неустойчивости протекающей среды в цилиндрическом канале. То есть, так называемая 2.5D размерность.

Численный алгоритм предполагает использование структурированных сеток, статически адаптированных к геометрии течения. Вся метрическая информация представлена в обозначениях метода конечного объема. Для аппроксимации векторов потоков и матриц Якоби векторов потоков на гранях ячеек применяется TVD схема второго порядка аппроксимации,

разработанная Хартеном и Йи. Схема основана на локальном характеристическом подходе и имеет второй порядок аппроксимации почти везде за исключением точек экстремума локальных характеристических переменных, соответствующая блочная система алгебраических уравнений может быть записана в форме

$$\left\{ \mathbf{I} + \frac{\tau}{vol} \left(\sum_{k=1,4} \left[A - \partial_{\mathbf{U}} \mathbf{F}_{\mathbf{n}}^v \right]_k + vol \left(\partial_{\mathbf{U}} S^i - \partial_{\mathbf{U}} S^v \right) \right) \right\} \delta \mathbf{U} =$$

$$= - \frac{\tau}{vol} \left(\sum_{k=1,4} \left[\mathbf{F}_{\mathbf{n}}^i - \mathbf{F}_{\mathbf{n}}^v \right]_k + vol \left(S^i - S^v - S^e \right) \right). \quad (3.28)$$

Здесь $\delta \mathbf{U}$ – вектор приращения консервативных переменных, $A_n = \partial_{\mathbf{U}} \mathbf{F}_{\mathbf{n}}^i$ – матрица Якоби вектора потока $\mathbf{F}_{\mathbf{n}}^i = \mathbf{E}^i n_z + \mathbf{G}^i n_r$, где n_z , n_r – аксиальная и радиальная составляющие нормали к грани расчетной ячейки. Индекс k идентифицирует грани ячеек $\{i+1/2, j\}$, $\{i-1/2, j\}$, $\{i, j+1/2\}$ и $\{i, j-1/2\}$.

Приведем аппроксимации потоков на грани $\{i+1/2, j\}$,

$$\left[\mathbf{F}_{\mathbf{n}}^i \right]_{i+1/2, j} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}_{\mathbf{n}}^i(\mathbf{U}_{i, j}, \mathbf{n}_{i+1/2, j}) + \mathbf{F}_{\mathbf{n}}^i(\mathbf{U}_{i+1, j}, \mathbf{n}_{i+1/2, j}) + R_{i+1/2, j} \Phi_{i+1/2, j} \right),$$

где матрица $R_{i+1/2, j}$ – матрица правых собственных векторов матрицы Якоби вектора потоков, Элементы $\phi_{i+1/2, j}^l$ вектора $\Phi_{i+1/2, j}$ для схемы Хартена второго порядка аппроксимации имеют вид (индекс j для краткости опущен),

$$\phi_{i+1/2}^l = \mathbf{g}_i^l + \mathbf{g}_{i+1}^l - \psi \left(\lambda_{i+1/2}^l + \frac{\mathbf{g}_{i+1}^l - \mathbf{g}_i^l}{\alpha_{i+1/2}^l} \right) \alpha_{i+1/2}^l,$$

где

$$\mathbf{g}_i^l = \frac{1}{2} \left| \lambda_{i+1/2}^l \right| \mathbf{m}[\alpha_{i+1/2}^l, \alpha_{i-1/2}^l],$$

$\alpha_{i+1/2}^l = R_{i+1/2}^{-1}(\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i)$ – вариации локальных характеристических переменных,

$\lambda_{i+1/2}^l$ – собственные значения матрицы Якоби $A_n = \partial_{\mathbf{U}} \mathbf{F}_{\mathbf{n}}^i$,

$$m[x, y] = \begin{cases} 0, & xy \leq 0 \\ \min(|x|, |y|) \operatorname{sign}(x), & xy > 0 \end{cases}.$$

Гладкость функции потоков в окрестности нулей собственных значений обеспечивается применением энтропийной коррекции Хартена [72].

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} |\lambda|, & |\lambda| \geq \delta \\ \frac{\lambda^2 + \delta^2}{2\delta}, & |\lambda| < \delta. \end{cases}$$

Для матрицы Якоби численного вектора невязки потоков на гранях ячеек используется аппроксимация следующего вида

$$\left[\partial_{\mathbf{U}} \mathbf{F}_{\mathbf{n}}^i \right]_{i+1/2, j} = \frac{1}{2} \left(\partial_{\mathbf{U}} \mathbf{F}_{\mathbf{n}}^i(\mathbf{U}_{i, j}, \mathbf{n}_{i+1/2, j}) + \partial_{\mathbf{U}} \mathbf{F}_{\mathbf{n}}^i(\mathbf{U}_{i+1, j}, \mathbf{n}_{i+1/2, j}) + \Omega_{i+1/2, j} \right),$$

где

$$\Omega_{i+1/2, j} = R_{i+1/2, j} \operatorname{diag} \left[\frac{\mathbf{g}_{i+1}^l + \mathbf{g}_i^l}{\alpha_{i+1/2}^l} - \psi \left(\lambda^l + \frac{\mathbf{g}_{i+1}^l - \mathbf{g}_i^l}{\alpha_{i+1/2}^l} \right) \right]_{i+1/2, j} R_{i+1/2, j}^{-1}.$$

В знаменатели в приведенных формул добавлены малые положительные константы, чтобы избежать деления на ноль в области нулевых градиентов решения.

В приведенных выше выражениях $\lambda^l_{i+1/2, j}$, $R_{i+1/2, j}$, $R_{i+1/2, j}^{-1}$ вычисляются на гранях ячеек с использованием процедуры осреднения специального вида. Поскольку метод ориентирован на использование уравнений состояния реального газа, применяется подход, предложенный Глэйстером [199], который в свою очередь является обобщением на случай произвольного уравнения состояния метода Роу [71].

Приведенные уравнения дают неявный метод для исследования нестационарных режимов течения. После приближенной факторизации неявного оператора в левой части уравнений

$$\left\{ \mathbf{I} + \frac{\tau}{\operatorname{vol}} \left(\sum_{k=1,2} [A - \partial_{\mathbf{U}} \mathbf{F}_{\mathbf{n}}^v]_k \right) \right\} \left\{ \mathbf{I} + \frac{\tau}{\operatorname{vol}} \left(\sum_{k=3,4} [A - \partial_{\mathbf{U}} \mathbf{F}_{\mathbf{n}}^v]_k \right) \right\} \left\{ \mathbf{I} + \tau (\partial_{\mathbf{U}} S^i - \partial_{\mathbf{U}} S^v) \right\} \delta \mathbf{U} = - \frac{\tau}{\operatorname{vol}} R(\mathbf{U}^n)$$

решение для приращения вектора переменных при переходе на следующий временной слой может быть получено с использованием последовательных процедур блочного обращения.

Для получения стационарных решений в рамках неявного алгоритма с целью улучшения обусловленности системы может применяться методика локального предобуславливания, и более эффективной оказывается соответствующая система вида

$$\left\{ P^{-1} + \frac{\tau}{\text{vol}} \left(\sum_{k=1,4} [A - \partial_{\mathbf{U}} \mathbf{F}_n^v] + \text{vol}(\partial_{\mathbf{U}} S^i - \partial_{\mathbf{U}} S^v) \right) \right\} \delta \mathbf{U} = - \frac{\tau}{\text{vol}} \left(\sum_{k=1,4} [\mathbf{F}_n^i - \mathbf{F}_n^v] + \text{vol}(S^i - S^v - S^e) \right)$$

Предобуславливатель P выбирается таким образом, чтобы собственные значения оператора PA имели один порядок величины. Локальное предобуславливание такого вида было предложено для расчета течений, характеризующихся малыми числами Маха и, следовательно, большим разбросом по величине собственных значений матрицы Якоби вектора потоков [88].

Предобуславливатель вида [88], в котором

$$P = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{U}} \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (\beta^2 - 1)/c^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}} = I + (\beta^2 - 1) \frac{\Gamma}{c^2} \begin{pmatrix} -\frac{\varphi^2}{\Gamma} & u & v & w & -1 \\ -\frac{\varphi^2}{\Gamma} u & u^2 & uv & uw & -u \\ -\frac{\varphi^2}{\Gamma} v & vu & v^2 & vw & -v \\ -\frac{\varphi^2}{\Gamma} w & wu & wv & w^2 & -w \\ -\frac{\varphi^2}{\Gamma} H & uH & vH & wH & -H \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V} = (p, u, v, w, \rho)^T, \quad \mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho(e + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2))^T,$$

$$\frac{\varphi^2}{\Gamma} = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - e - \rho e_p |_\rho, \quad \Gamma = \frac{1}{\rho e_p |_\rho}, \quad c^2 = p_\rho |_e + \frac{p}{\rho^2} p_e |_\rho,$$

$$H = e + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2, \quad e_p |_\rho = \frac{1}{p_e |_\rho}, \quad e_\rho |_\rho = \frac{p_\rho |_e}{p_e |_\rho},$$

действует следующим образом.

Матрица Якоби вектора невязких потоков $A_n = \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{F}_n^i$ имеет спектр $(v_n, v_n, v_n, v_n - |\mathbf{n}|c, v_n + |\mathbf{n}|c)^T$, где v_n – нормальная к рассматриваемой грани составляющая скорости потока, c – скорость звука. Спектр матрицы PA_n принимает вид

$$\begin{aligned} & (v_n, v_n, v_n, \\ & \frac{1}{2}(\beta^2 + 1)v_n - \sqrt{\beta^2 \mathbf{n}^2 c^2 + v_n^2 \frac{1}{4}(\beta^2 - 1)^2}, \\ & \frac{1}{2}(\beta^2 + 1)v_n + \sqrt{\beta^2 \mathbf{n}^2 c^2 + v_n^2 \frac{1}{4}(\beta^2 - 1)^2})^T, \end{aligned}$$

где параметр $0 < \beta \leq 1$ выбирается таким образом, чтобы все собственные значения имели один порядок. В случае малых чисел Маха полагают обычно $\beta^2 \sim M$.

Альтернативным методом регуляризации матрицы неявного оператора (3.28) является ее псевдообращение.

Еще одним не менее интересным моментом в процессе решения данной задачи, являлось ее распараллеливание. Как известно, для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), необходимо обратить матрицу. Как правило, большинство методов обращения матриц сводятся к методу Гаусса. Алгоритм Гаусса сам по себе является последовательным алгоритмом, т.е. не поддающимся распараллеливанию. Но, в некоторых случаях, все же удается это сделать. Например, в случае разреженных матриц с диагональным преобладанием [193]. В идее параллельного алгоритма обращения матрицы лежит возможность представления этой матрицы в блочном виде. Поясним это на примере.

Рассмотрим трехдиагональную матрицу A размера $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & a_{n-2n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1n-2} & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad \text{Следует найти такое}$$

преобразование

$$L: LA = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_m \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

где A_i – матрица размером $k \times k$, $k = \frac{n}{m}$. Получили блочный вид матрицы A

(3.29). Обращение матрицы LA можно выполнить параллельно, обращая матрицы A_i , находящиеся на диагонали. В этом состоит идея распараллеливания обращения трехдиагональных матриц. Более подробно данный метод описан в [193].

Альтернативным начальным условием служит упругое вращение газового столба, заключенного в воображаемый сверхэластичный цилиндр. В численных экспериментах последний оказывается способным одним из своих торцов сделать на 8 оборотов больше другого (при скорости медленного обода 200 м/с и 20% возмущения ее на быстром обode) до момента возникновения противоточной циркуляции (примерно 0.2 с). Физически неприемлемая (в отличии от первой постановки) данная постановка вместе с тем не нарушает (как механическое возбуждение противотока в первой постановке) согласованности начальных и граничных данных. Тем самым она обеспечивает необходимую математическую чистоту вычислительных экспериментов по наблюдению бифуркации основного течения, в которых противоточный вихрь действительно оказывается вторичным течением, возникающим из основного вращения. Так, расчет радиального

распределения температуры по формуле (3.15) дает для возникающего противотока величину числа $B(0) - 1 = 0.0024$, сравнимую с численно измеренной величиной 0.0026 для торцов, вращающихся с большей и меньшей скоростью, чем его стенка (Рисунок 27).

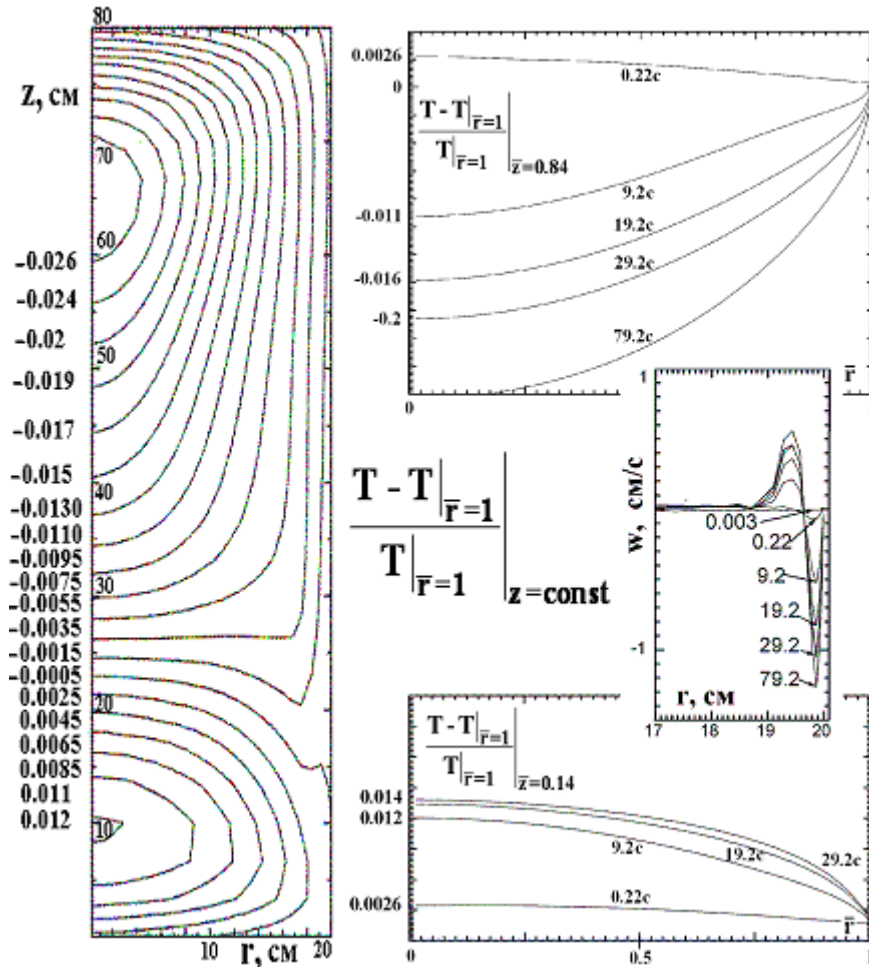


Рисунок 27. Разделение поля температуры при возникновении противоточного вихря.

Эта постановка позволяет также обнаружить тепловую перестройку течения при возникновении вихря. Она проявляется следующим образом: температура уменьшается по направлению к «медленному» торцу (как и в основном течении), но растет к другой границе («быстрому» торцу). При этом газ в центральной части ротора охлаждается относительно температуры на

стенке ротора на $3/4$ его объема по направлению к оси вращения (Рисунок 27).

Возникновение противоточного течения наблюдается в среднем сечении ротора на правой части Рисунка 27 из упругого вращения (3.11) спустя 0.22 секунды после начала вращения при скоростях медленного (нижнего) и быстрого (верхнего) торцов цилиндра 200 м/с и 240 м/с соответственно и главном факторе, равном 4. У медленного торца газ продолжает нагреваться (нижний рисунок в правой части Рисунка 27), а у быстрого торца - начинает охлаждаться (верхний рисунок правой части Рисунка 27). Спустя половину минуты устанавливаются устойчивые радиальное охлаждение и одновременно нагревание относительно стенки соответственно $3/4$ верхнего и $1/4$ нижнего объемов ротора, примыкающих соответственно к быстрому и медленному торцам (левый рисунок Рисунка 27).

Возвращаясь к первой задаче (твердотельное начальное вращение газа), рассмотрим случай, когда на боковой поверхности ротора задан К-образный профиль температуры. В этом случае в численном эксперименте в качестве вторичного течения возникают два противоточных вихря с противоположенной ориентацией линий тока (Рисунок 28).

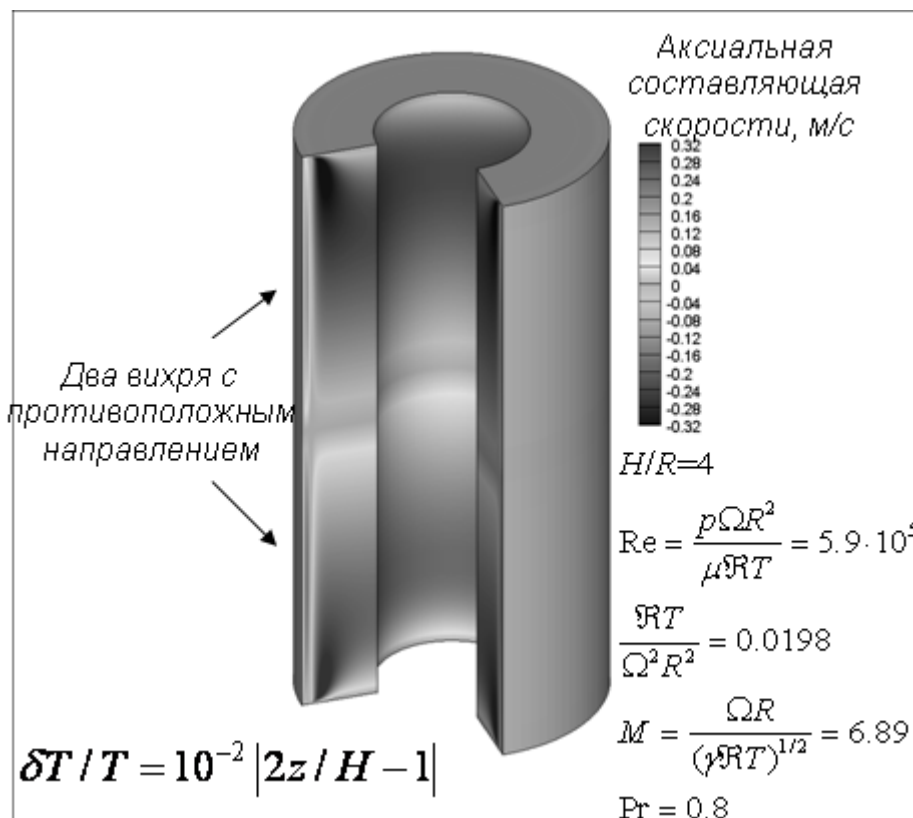


Рисунок 28. При К-образном профиле температуры, поддерживаемом на боковой поверхности ротора возникает симметричная картина из двух противотоков, вращающихся в противоположенных направлениях.

Приведенный пример служит иллюстрацией эффективности теплового управления режимом вторичного течения (с помощью граничных условий (3.27)) по сравнению с механическими способами (через угловую скорость, входящие и выходящие потоки и т.п.). Число таких примеров может быть умножено.

Итак, основываясь на простой модели газа, заключенного во вращающемся цилиндре, рассмотрены некоторые особенности вторичных течений, связанных с формированием сложной вихревой структуры, характеризующейся наличием нескольких точек инверсии потока по радиусу ротора. Кроме механического и теплового возмущений, в рамках основной постановки задачи исследовались также втекание газа во вращающийся поток и отбор того же количества газа через кольцевые щели, расположенные на торцах цилиндра, на различных расстояниях от боковой стенки (Рисунок 26).

Приводимые ниже результаты численных экспериментов относятся к случаю, когда рассматривается ротор с внешним радиусом $R = 0.1$ м, высотой $H = 0.8$ м, давлением вблизи стенки $p_* = 10^4$ Па и линейной скоростью его вращения $v_* = \Omega R = 600$ м/с. Целью расчётов была демонстрация различия скоростей и температур вблизи точки инверсии осевого потока при механическом и тепловом возбуждениях циркуляции. На Рисунке 29 показаны радиальные распределения осевой составляющей массовой скорости течения на $1/2$ высоты ротора для случаев механического и теплового возбуждения с амплитудами возмущения угловой скорости и температуры $\Delta\Omega/\Omega = 0.05$ и $\Delta T/T_* = 0.01$, соответственно.

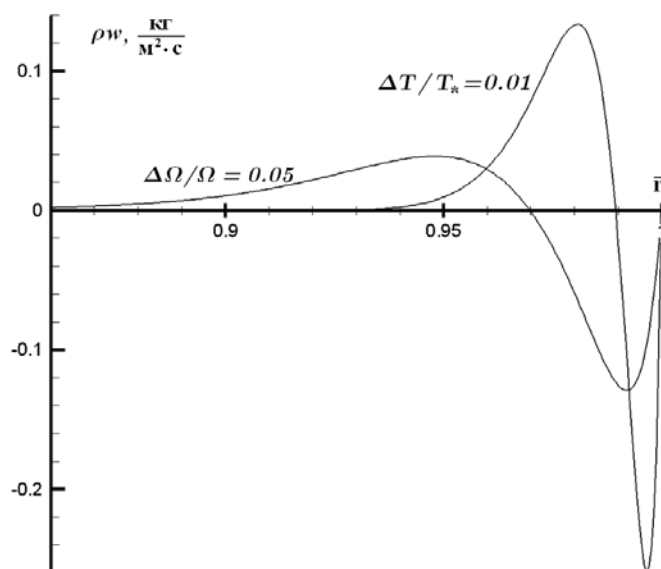


Рисунок 29. Радиальные распределения осевой составляющей массовой скорости ρw на половине высоты ротора для случаев механического и теплового возбуждения противотока в твердотельном вращении газа возмущениями $\Delta\Omega/\Omega = 0.05$ и $\Delta T/T_* = 0.01$, соответственно.

Следует отметить, что для выбранных параметров, обеспечивающих приближенное равенство расхода пристеночной массы потока на $1/2$ высоты

ротора, точка инверсии потока в случае теплового возбуждения противотока расположена ближе к боковой поверхности цилиндра.

Качественные отличия решений наблюдаются также и при отклонении азимутальной скорости вращения от скорости твердотельного вращения основного течения и в распределениях массовой скорости в максимумах восходящего и нисходящего потоков в зависимости от поперечного сечения ротора.

Значительные отличия в положении точки инверсии дают возможность моделирования формы осевых потоков, в частности, возможность изменения координаты точки инверсии потока, сочетанием теплового и механического способов возбуждения при фиксированных параметрах основного течения.

Быстрое убывание плотности при удалении от стенки «маскирует» следующее важное отличие в распределениях осевой составляющей скорости, которое состоит в том, что в случае теплового возбуждения противотока (заданием осевой составляющей градиента температуры на боковой стенке ротора) в радиальном распределении осевой компоненты скорости в решении имеется более одной точки инверсии потока.

Результаты расчетов указывают на зависимость данного эффекта от величины числа Рейнольдса $Re = M p_* \Omega R^2 / \mu \mathfrak{R} T_*$ (3.13). На Рисунке 30 показаны радиальные распределения осевой составляющей скорости течения на половине высоты ротора при главном факторе $1/\alpha = 4$ и степени сжатия $1/\beta = M \Omega^2 R^2 / \mathfrak{R} T_* \approx 36.7$ (при скорости вращения 500 м/с).

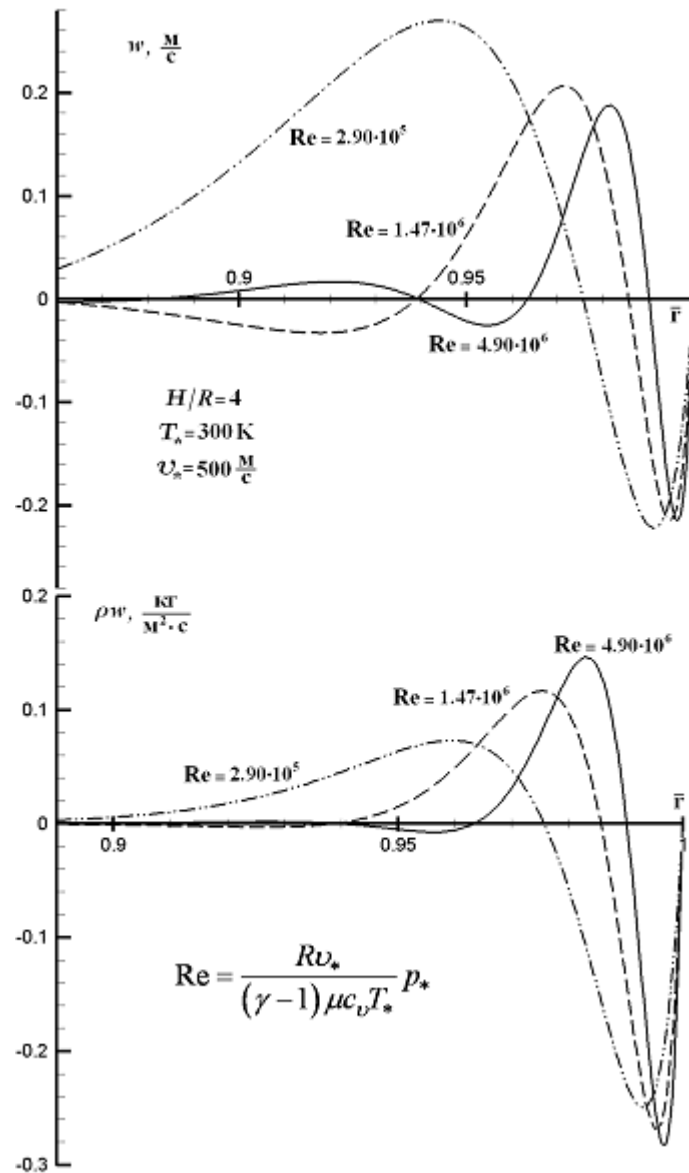


Рисунок 30. Появление оберточек в осевом течении при увеличении числа Рейнольдса.

Рассмотренные выше способы возбуждения вторичного течения во вращающемся потоке могут быть использованы для управления параметрами течения, определяющими эффективность процесса разделения изотопной смеси. Задача оптимизации параметров противотока при этом оказывается многопараметрической и требует совместного учета оказываемых на него как механических, так и тепловых воздействий.

ВЫВОДЫ ГЛАВЫ 3

В общем случае, по результатам исследования поставленных невязких задач, можно заключить, что вектор завихренности возмущения $\vec{\xi}'$ должен быть коллинеарен завихренности основного течения $\vec{\xi}$. И чем больше величина $|\vec{\xi}'|$, тем неустойчивее течение.

Выделим основные результаты исследования двумерной задачи о протекании между цилиндрами. Течение переходит в пульсационный режим, когда происходит резкое увеличение пульсационной энергии E_t и возникают крупные вихри. Было показано, что течение носит сдвиговый характер и поэтому оно нестабильно. Нестабильность, как и следует, усиливается с увеличением разности скоростей внутреннего и внешнего цилиндров. Это можно объяснить тем, что при увеличении разности скоростей, увеличивается вторая производная завихренности в точке её максимума, а из критерия, полученного в [5] следует возникновение неустойчивости.

Что касается влияния длины волны, то здесь наблюдается длинноволновая неустойчивость, т. е. время перехода в пульсационный режим t' уменьшается с ростом длины волны возмущения. Китайские ученые в своей работе [5] показали, что длинные волны более всего нестабильны в плоскопараллельном двумерном сдвиговом течении.

Изменение ширины зазора сводится к влиянию на течение стенок цилиндра и перепада давления в зазоре. С одной стороны, при уменьшении ширины, растет перепад давления, что сказывается на уменьшении t' , а с другой – стенки мешают возникновению крупных вихрей. Этим обусловлено поведение зависимости t' от ΔR .

Что касается амплитуды возмущения, то она почти не влияет на параметры пульсационного режима. Параметры сетки (ее размерность)

влияет на энергию E_t^{\max} посредством сеточной вязкости, но здесь неизвестен характер влияния сетки на t' .

Показано, что в задаче нельзя ввести единого безразмерного параметра, т. к. течение имеет два режима (нестационарный и пульсационный (квазистационарный)), характеризующихся различными законами подобия.

Приведем сравнение результатов данной работы с работой [3], где исследовалась неустойчивость Кельвина-Гельмгольца (НКГ). Данные работы подобны тем, что в обоих случаях производилось исследование сдвиговой неустойчивости, чтобы получить НКГ в нашем случае, следует устремить к нулю ширину сдвигового слоя, которая равна ΔR . В отличие от [3], где неустойчивость развивалась, сразу после начала расчета, в данной работе развитие неустойчивости начинается лишь спустя некоторое время. Если рассматривать картину завихренности в момент начала перехода в пульсационный режим, то в случае НКГ кольцо завихренности начинало делиться на более мелкие вихри, по сравнению с нашим случаем. В НКГ нестабильны все длины волн, в нашем случае короткие волны являются более стабильными, чем длинные.

Следует заметить, что течение, рассмотренное нами, является устойчивым по критерию Рэлея $\Omega_2 R_2^2 > \Omega_1 R_1^2$ [7]. Это объясняется тем, что перепад давления вдоль радиального направления не достигает критического значения, при котором происходит рождение крупных вихрей. Но, с течением времени градиент давления возрастает, и достигая критического значения в некоторой области, происходит рождение вихрей и соответственно переход в пульсационный режим.

Теперь сформулируем основные результаты решения задачи о протекании в цилиндрической трубе. Протекание сдвигового течения вдоль оси трубы неустойчиво к закручивающим возмущениям. Вторичным течением, возникающим в результате потери устойчивости основного течения – протекания, является тороидальный вихрь. Знак градиента скорости основного течения влияет на вид образующегося вихря:

- знак «-» приводит к образованию тороидального вихря у стенки цилиндрического канала;

- знак «+» приводит к образованию шарового вихря на оси канала.

Особняком выделяется задача о причинах возникновения противоточного вихря в газоразделительной центрифуге. Прежде всего, она выделяется своей постановкой – рассматривается вязкая, теплопроводная, двухкомпонентная среда. Причем скорости, фигурирующие в постановке задачи, по своей величине намного превосходят местную скорость звука. Все это сильно усложняет расчеты, схему и саму модель. В результате исследований был получен противоток, похожий на тороидальный вихрь, рассмотренный в задаче о протекании. Причем, противоток возникал путем внесения в течение различных видов возмущений:

1. Механические возмущения. В первом случае моделировалась твердотельное вращение с возмущением угловой скорости основного течения на торцах центрифуги – на одном из торцов течение замедлялось, на другом скорость течения увеличивалась. Во втором случае рассматривалось так называемое упругое вращение [190], которое сменялось вторичным режимом (противотоком) без введения извне возмущений.

2. Температурные возмущения. Задавался кусочно-линейный (К-образный) профиль температуры на роторе центрифуги. Возмущалось твердотельное вращение.

В целом, можно заключить, что возмущения здесь вносятся через граничные условия и продолжают вноситься во время расчетов (непрерывность действия возмущений). В невязких задачах возмущаются начальные данные. Таким образом, имеем непрерывность действия возмущений, вносимых в вязкой задаче. Если в невязком случае возмущения вносились в начальный момент времени, т.е. входили в начальные условия, то в случае вязкой задачи, возмущения действовали в течение всего интервала расчетного времени. Также, следует выделить тот факт, что величины скоростей вторичного течения (противотока) намного меньше

местной скорости звука, т.е. вторичное течение можно рассматривать как несжимаемое.

В общем, можно сказать что все виды течений, рассмотренные в данной работе объединяет одно общее свойство – все течения являются сдвиговыми относительно какого-либо параметра задачи. В случае рассмотренных невязких течений этим параметром является начальная скорость течения. В случае вязкого течения в газоразделительной центрифуге данных параметров несколько. Это и скорость течения и температура, и концентрация примеси.

Заключение

1. Впервые выполнено численное исследование невязкого двумерного течения нормального газа между цилиндрами. Показана неустойчивость течения относительно возмущений радиальной компоненты скорости течения. Переход во вторичный режим течения сопровождается рождением крупных вихрей. Причем вихри рождаются и области максимального значения завихренности течения - области, куда были внесены возмущения посредством начальных данных.

2. Исследовано влияние параметров задачи на устойчивость данного течения. Обнаружена длинноволновая неустойчивость, которая проявляется в том, что чем меньше длина волны вносимого возмущения, тем неустойчивее течение. Исследовано влияние стенок цилиндров на устойчивость, которое сводится к стабилизации течения как путем уменьшения зазора, так и уменьшения градиента скорости вдоль радиуса. Исследовано влияние амплитуды вносимого возмущения на устойчивость течения. Исследование показало, что значение амплитуды не влияет на устойчивость течения.

3. Разработан метод исследования невязких течений на устойчивость. Метод предполагает задание возмущений в форме начальных данных (возмущение начальных условий). При этом следует использовать метод прямого численного моделирования в расчете течения. Также следует заметить, что не всякое возмущение способно опрокинуть течение. Особую роль здесь играет то, какая компонента векторного поля гидродинамической переменной возмущается.

4. Впервые численно исследовано невязкое протекание нормального газа в трубе в трехмерной постановке в условиях наличия угловой симметрии. Показана неустойчивость сдвигового протекания относительно закручивающих и радиальных возмущений скорости протекания.

5. Вторичный режим течения в задаче о протекании представляет собой тороидальный, либо шаровой вихрь. Рождение того или иного вида вихря зависит от знака градиента скорости протекания.

6. Оба вида рассмотренных невязких течений - протекание и течение между цилиндрами имеют сдвиговый характер, что, видимо, и вызывает их неустойчивость.

7. Разработана и исследована модель газоразделительной центрифуги. Задача примечательна тем фактом, что рассматриваемой течение – вязкий, теплопроводный, многокомпонентный газ. Исследование течений такого характера на устойчивость представляет из себя сложную задачу. К тому же, течение носит сверхзвуковой характер.

8. Показано, что вторичным течением в задаче о газоразделительной центрифуге является противоточный вихрь. Т.е. полученное вторичное течение подобно вторичному течению в задаче о протекании невязкой среды, рассмотренной выше.

9. Опрокидывание основного течения возможно как механическим, так и тепловым способом. Под механическим способом понимается возмущение, подтормаживающее течение у торцов центрифуги, либо замена начальных условий – вместо твердотельного вращения рассматривается так называемое упругое вращение. К возмущению температуры на роторе центрифуги относится тепловой способ получения вторичного течения.

Литература

1. Белоцерковский О.М., Опарин А.М., Чечеткин В.М. Турбулентность: новые подходы. М.: Наука, 2003.
2. Белоцерковский О.М., Денисенко В.В., Конюхов А.В., Опарин А.М., Трошкин О.В., Чечеткин В.М. Численное исследование устойчивости течения Тейлора-Куэтта в двумерном случае // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, **Т. 49, № 4**, С. 729-742, 2009.
3. Белоцерковский О.М., Опарин А.М., Чечеткин В.М. Образование крупномасштабных структур в зазоре между вращающимися цилиндрами (задача Рэля-Зельдовича) // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, **Т. 42, № 11**, С. 1727-1737, 2002.
4. Белоцерковский О.М., Бетелин В.Б., Борисевич В.Д., Денисенко В.В., Ериклинцев И.В., Козлов С.А., Конюхов А.В., Опарин А.М., Трошкин О.В. К теории противотока во вращающемся вязком теплопроводном газе // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, **Т. 51, № 2**, С. 222-236, 2011.
5. Liang Sun. General stability criterion for inviscid parallel flow. // European Journal of Physics, **V 28, № 5**, pp. 889-895, 2007.
6. Белоцерковский О.М., Опарин А.М., Чечеткин В.М. Турбулентность: новые подходы. М.: Наука, 2003.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. Изд. 3-е. М.: Наука, 1986.
8. Lord Rayleigh F.R.S. On the stability, or Instability, of certain Fluid Motions // Proc. London Soc., **S1-11**, pp. 57-72, 1880.
9. Lord Rayleigh F.R.S. On the dynamics of revolving fluids // Proc. London Soc., **A 93**, pp. 148-154, 1916.
10. Reynolds O, On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // Phil. Trans. Roy. Soc. London, **A 186**, pp. 123-164, 1895.

11. *Линь Цзяо-цзяо*. Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958.
12. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
13. *Юдович В.И.* Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости // Доклады АН СССР, **Т. 5**, С. 1037-1040, 1965.
14. *Иванов Ю.П., Яковлев Г.Н.* О бифуркации течения жидкости между вращающимися цилиндрами // Прикл. Матем. и Мех., **Т. 30**, С. 910-916, 1966.
15. *Ruelle D. and Takens F.* On the nature of turbulence // Comm. Math. Phys., **V. 20**, pp. 167-192, 1971.
16. *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981.
17. *Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Трошкин О.В.* Бифуркационная модель турбулентного течения в канале // Доклады АН СССР, **Т. 290**, № 2, С. 313-317, 1986.
18. *Опарина Е.И., Трошкин О.В.* Устойчивость течения Колмогорова в канале с твердыми стенками // Доклады Академии Наук, **Т. 398**, № 4, С. 487-491, 2004.
19. *Фридман А.А.* Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости, М: ОНТИ, 1934.
20. *Helmholtz H.L.F.* *Uber discontinuierlich Flussigkeitsbewegungen*, *Monatsberichte konigl*, Berlin: Akad. Wissenschaften, 1868.
21. *Kelvin (W. Thomson).* Mathematical and physical papers, Cambridge University Press, **V. 4**, 1910.
22. *Richtmyer R.D.* Taylor instability in a shock acceleration of compressible fluids // Comm. Pure Appl. Math., **V. 13**, № 2, pp. 297-319, 1960.
23. *Мешков Е.Е.* Неустойчивость границы раздела двух газов, ускоряемой ударной волной // Изв. АН СССР, МЖГ, **Т. 5**, С. 151-158, 1969.

24. *Taylor G.I.I.* The Instability of Liquid Surfaces when Accelerated in a Direction Perpendicular to their Planes. I // *Pros. Roy. Soc. London*, **A 201**, № **1065**, pp. 192-196, 1950.
25. *Bénard H.* Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide // *Revue générale des Science pures et appliquées*, **V. 11**, pp. 1261- 1309, 1900.
26. *Bénard H.* Les tourbillons cellulaires une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en regime permanent // *Ann. Chim. Phys.*, **V. 23**, pp. 62-144, 1901.
27. *Arnold V.* Sur la topologie des ecoulement stationnaires des fluides parfaites // *C.R.A.S.*, **V. 261**, № **1**, pp. 17-20, 1965.
28. *Arnold V.* Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits // *Ann. Inst. Fourier*, **V. 16**, pp. 319–361, 1966.
29. *Мешалкин Л.Д., Синай Я.Г.* Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости // *Прикл. Матем. и Мех.*, **Т. 25**, № **6**, С. 1140-1143, 1961.
30. *Troshkin O.V.* Nontraditional methods in mathematical hydrodynamics, Providence, RI: American Mathematical Society, 1995.
31. *Трошкин О.В.* О топологическом анализе структуры гидродинамических течений // *УМН*, **Т. 43:4**, № **262**, С. 129–158, 1988.
32. *Belotserkovskii O.M.* Karman's Lecture Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Ed. by Wirz H. J. and Smolderen J. J., 1978.
33. *Белоцерковский О.М.* Прямое численное моделирование свободной развитой турбулентности // *ЖВМ и МФ*, **Т. 25**, № **12**, С. 1857-1882, 1985.
34. *Belotserkovskii O.M.* Turbulence and instabilities, Moscow: MZpress publishing, 2003.
35. *Belotserkovskii O.M., Oparin A.M. and Chechetkin V.M.*, Turbulence: new approaches, Cambridge: CISP CBI 6AZ, 2005.

36. *O. Belotserkovskii, S. Fortova, A. Oparin et al.*, The turbulence in free shear flows and in accretion disks, Investigation of hydrodynamic instability and turbulence in fundamental and technological problems by means of mathematical modeling with supercomputers // Nagoya, Japan: Nagoya University, pp. 229-241, 2005.
37. *Ranque G.* Experiments on expansion in a vortex with simultaneous exhaust of hot and air // *Journal de Physique et de la Radium*, **V. 4**, № 6, pp. 1125-1130, 1933.
38. *Hilsch R.* The Use of the Expansion of Gases in A Centrifugal Field as Cooling Process // *The Review of Scientific Instruments*, **V. 18**, № 2, pp. 108-1113, 1947.
39. *Дирак П.А.М.* Собрание научных трудов. Том 4, М.: Физматлит, 2005.
40. *Айсен Э.М., Борисевич В.Д., Левин Е.В.* Моделирование течения и диффузии в газовой центрифуге для разделения многокомпонентных изотопных смесей // *Математическое моделирование*, **Т. 9**, № 4, С. 27-38, 1997.
41. *Saffman P.G. and Taylor G.I.* The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // *Proc. Roy. Soc. London*, **A 245**, pp. 312-329, 1958.
42. *Белоцерковская М.С.* Численное моделирование процессов фильтрации с использованием метода вложенных сеток, Канд. дисс., М.: МГУ, 2007.
43. Структурная турбулентность. (Под ред. М.А. Гольштика). Новосибирск: Наука, 1982.
44. *Кантуэлл Б.Дж.* Организованное движение в турбулентных потоках. М.: Мир, 1984.
45. *Бакай А.С., Сигов Ю.С.* Многоликая турбулентность // Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур. М.: Наука, 1996. С. 10-94.

46. *Онуфриев А.Т.* Описание турбулентного переноса. Неравновесные модели. М.: Изд-во МФТИ, 1995.
47. *Shevelev Yu.D.* Last Achievements and Some Trends in CFD // Parallel Computational Fluid Dynamics. 1998. Elseiver. P. 367-374.
48. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика, Ч.1. М.: Наука, 1965 и Ч.2. М.: Наука, 1967.
49. *Колмогоров А.Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30. № 4. С. 299-303.
50. Этюды о турбулентности. М.: Наука, 1994.
51. *Кузнецов В.Р., Сабельников В.А.* Турбулентность и горение. М.: Наука, 1986.
52. *Гольштик М.А., Штерн В.Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. М.: Наука, 1977.
53. *Иевлев В.М.* Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука, 1975.
54. *Иевлев В.М.* Численное моделирование турбулентных течений. М.: Наука, 1990.
55. *Lesier M., Metais O.* New trends in large-eddy simulations of turbulence // Annual Rev. Fluid Mech. 1996. V. 28, P. 45-82.
56. *Germano M.* Turbulence: The filtering approach // J. Fluid Mech. 1992. V. 238. P. 133-166.
57. *Reynolds O.* An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channels // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1883. V. 174. № 3. P. 935-982.
58. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая теория открытых систем. М.: ТОО "Янус", 1995. Ч. 1 и Ч. 2, 1999.
59. *McDonald P.W.* The Computation of Transonic Flow through Two-Dimensional Gas Turbine Cascades. ASME Paper 71-GT-89, 1971.

60. *Steger J.L., Warming R.F.* Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite Difference Methods. *J. Computational Physics*, 40 (1981), pp. 263-293.
61. *Van Leer B.* Flux Vector Splitting for the Euler Equations. *Proc. 8th Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Springer Verlag, 1982, pp. 507-512; also ICASE Report 82-30, 1982.
62. *Jameson A.* Positive Schemes and Shock Modelling for Compressible Flow. *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, 20 (1995), pp. 743-776.
63. *Tatsumi S., Martinelli L., Jameson A.* A New High Resolution Scheme for Compressible Viscous Flow with Shocks. *AIAA Paper 95-0466*, 1995.
64. *Liou M.-S., Steffen C.J. Jr.* A New Flux Splitting Scheme. *NASA TM-104404*, 1991; also *J. Computational Physics*, 107 (1993), pp. 23-39.
65. *Liou M.-S.* A Sequel to AUSM: AUSM+. *J. Computational Physics*, 129 (1996), pp. 364-382.
66. *Edwards J.R.* A Low-Diffusion Flux-Splitting Scheme for Navier-Stokes Calculations. *Computers & Fluids*, 26 (1997), pp. 653-659.
67. *Rossov C.-C.* A Simple Flux Splitting Scheme for Compressible Flows. *Proc. 11th DGLR-Fach-Symposium*, Berlin, Germany, November 10-12, 1998.
68. *Rossov C.-C.* A Flux Splitting Scheme for Compressible and Incompressible Flows. *AIAA Paper 99-3346*, 1999.
69. *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. *Математический сборник*, Т.47 (1959), С. 271-306.
70. *Osher S., Solomon F.* Upwind Difference Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws. *Math. Comp.*, 38 (1982), pp. 339-374.
71. *Roe P.L.* Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes. *J. Computational Physics*, 43 (1981), pp. 357-372.
72. *Harten A.* High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *J. Computational Physics*, 49 (1983), pp. 357-393.

73. *Yee H.C., Harten A.* Implicit TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws in Curvilinear Coordinates. *AIAA Journal*, 25 (1987), pp. 266-274.
74. *Yee H.C.* Construction of Implicit and Explicit Symmetric TVD Schemes and Their Applications. *J. Computational Physics*, 68 (1987), pp. 151-179.
75. *Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarthy S.* Uniformly High Order Accurate Essentially Non-Oscillatory Schemes III. *J. Computational Physics*, 71 (1987), pp. 231-303; also ICASE Report No. 86-22, 1986.
76. *Casper J., Atkins H.L.* A Finite Volume High-Order ENO Scheme for Two-Dimensional Hyperbolic Systems. *J. Computational Physics*, 106 (1993), pp. 62-76.
77. *Godfrey A.G., Mitchell C.R., Walters R.W.* Practical Aspects of Spatially High-Order Accurate Methods. *AIAA Journal*, 31 (1993), pp. 1634-1642.
78. *Abgrall R., Lafon F.C.* ENO Schemes on Unstructured Meshes. VKI Lecture Series 1993-04, 1993.
79. *Ollivier-Gooch C.F.* High-Order ENO Schemes for Unstructured Meshes Based on Least-Squares Reconstruction. AIAA Paper 97-0540, 1997.
80. *Stanescu D., Habashi W.G.* Essentially Nonoscillatory Euler Solutions on Unstructured Meshes Using Extrapolation. *AIAA Journal*, 36 (1998), pp. 1413-1416.
81. *Roe P.L.* Discrete Models for the Numerical Analysis of Time-Dependent Multidimensional Gas Dynamics. *J. Computational Physics*, 63 (1986), pp. 458-476.
82. *Powell K.G., van Leer B., Roe P.L.* Towards a Genuinely Multi-Dimensional Upwind Scheme. VKI Lecture Series 1990-03, 1990.
83. *Sidilkover D.* A Genuinely Multidimensional Upwind Scheme and Efficient Multigrid Solver for the Compressible Euler Equations. ICASE Report, No. 94-84, 1994.
84. *Struijs R., Roe P.L., Deconinck H.* Fluctuation Splitting Schemes for the 2D Euler Equations. VKI Lecture Series 1991-01, 1991.

85. *Paillère H., Deconinck H., Roe P.L.* Conservative Upwind Residual-Distribution Schemes Based on the Steady Characteristics of the Euler Equations. AIAA Paper 95-1700, 1995.
86. *Issman E., Degrez G., Deconinck H.* Implicit Upwind Residual-Distribution Euler and Navier-Stokes Solver on Unstructured Meshes. AIAA Journal, 34 (1996), pp. 2021-2028.
87. *Van der Weide E., Deconinck H.* Compact Residual-Distribution Scheme Applied to Viscous Flow Simulations. VKI Lecture Series 1998-03, 1998.
88. *Venkatakrishnan V.* Preconditioned Conjugate Gradient Methods for the Compressible Navier-Stokes Equations. AIAA Journal, 29 (1991), pp. 1092-1110.
89. *Venkatakrishnan V.* On the Accuracy of Limiters and Convergence to Steady State Solutions. AIAA Paper 93-0880, 1993.
90. *Venkatakrishnan V.* Convergence to Steady-State Solutions of the Euler Equations on Unstructured Grids with Limiters. J. Computational Physics, 118 (1995), pp. 120-130.
91. *Jameson A., Schmidt W., Turkel E.* Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes. AIAA Paper 81-1259, 1981.
92. *Van Leer B., Tai C.H., Powell K.G.* Design of Optimally Smoothing Multi-Stage Schemes for the Euler Equations. AIAA Paper 89-1933, 1989.
93. *Chang H.T., Jiann H.S., van Leer B.* Optimal Multistage Schemes for Euler Equations with Residual Smoothing. AIAA Journal, 33 (1995), pp. 1008-1016.
94. *Lafon A., Yee H.C.* On the Numerical Treatment of Nonlinear Source Terms in Reaction-Convection Equations. AIAA Paper 92-0419, 1992.
95. *Van Leer B., Lee W.T., Roe P.* Characteristic Time-Stepping or Local Preconditioning of the Euler Equations. AIAA Paper 91-1552, 1991.

96. *Riemsdagh K., Dick E.* A Multigrid Method for Steady Euler Equations on Unstructured Adaptive Grids. Proc. 6th Copper Mountain Conf. on Multigrid Methods, NASA Conf. Publ. 3224 (1993), pp. 527-542.
97. *Morano E., Dervieux A.* Looking for $O(N)$ Navier-Stokes Solutions on Non-Structured Meshes. Proc. 6th Copper Mountain Conf. on Multigrid Methods, NASA Conf. Publ. 3224 (1993), pp. 449-464.
98. *Jameson A.* Solution of the Euler Equations by a Multigrid Method. Applied Mathematics and Computation, 13 (1983), pp. 327-356.
99. *Jameson A.* Computational Transonics. Comm. on Pure and Appl. Math., Vol. XLI (1988), pp. 507-549.
100. *Blazek J., Kroll N., Radespiel R., Rossow C.-C.* Upwind Implicit Residual Smoothing Method for Multi-Stage Schemes. AIAA Paper 91-1533, 1991.
101. *Blazek J., Kroll N., Rossow C.-C.* A Comparison of Several Implicit Smoothing Methods. Proc. ICFD Conf. on Numerical Meth. for Fluid Dynamics, Reading, 1992, pp. 451-460.
102. *Enander E.* Improved Implicit Residual Smoothing for Steady State Computations of First-Order Hyperbolic Systems. J. Computational Physics, 107 (1993), pp. 291-296.
103. *Enander E., Sjögren B.* Implicit Explicit Residual Smoothing for Upwind Schemes. Internal Report 96-179, Department of Scientific Computing, Uppsala University, Sweden, 1996.
104. *Федоренко Р.П.* Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // ЖВМ и МФ, Т. 1, № 5, С. 922-927, 1961.
105. *Бахвалов Н.С.* О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор // ЖВМ и МФ, Т. 6, № 5, С. 861-883, 1966.
106. *Brandt A.* Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems. Math. Comp., 31 (1977), pp. 333-390.

107. *Brandt A.* Guide to Multigrid Development. Multigrid Methods I, Lecture Notes in Mathematics, No. 960, Springer Verlag, 1981.
108. *Jameson A.* Multigrid Algorithms for Compressible Flow Calculations. Multigrid Methods II, Lecture Notes in Mathematics, No. 1228, Springer Verlag, 1985, pp.166-201.
109. *Martinelli L.* Calculation of Viscous Flows with a Multigrid Method. Ph. D. Thesis, Dept. of Mech. and Aerospace Eng., Princeton University, 1987.
110. *Mulder W.A.* A New Multigrid Approach to Convection Problems. J. Computational Physics, 83 (1989), pp. 303-323.
111. *Koren B.* Multigrid and Defect Correction for the Steady Navier-Stokes Equations. J. Computational Physics, 87 (1990), pp. 25-46.
112. *Turkel E., Swanson R.C., Vatsa V.N., White J.A.* Multigrid for Hypersonic Viscous Two- and Three-Dimensional Flows. AIAA Paper 91-1572, 1991.
113. *Radespiel R., Swanson R.C.* Progress with Multigrid Schemes for Hypersonic Flow Problems. ICASE Report, No. 91-89, 1991; also J. Computational Physics, 116 (1995), pp. 103-122.
114. *Arnone A., Pacciani R.* Rotor-Stator Interaction Analysis Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method. Transactions ASME: Journal of Turbomachinery, 118 (1996), pp. 679-689.
115. *Mavriplis D.J.* Three-Dimensional Multigrid for the Euler Equations. AIAA Journal, 30 (1992), pp. 1753-1761.
116. *Peraire J., Peiró J., Morgan K.* A 3D Finite-Element Multigrid Solver for the Euler Equations. AIAA Paper 92-0449, 1992.
117. *Lallemand M., Steve H., Dervieux A.* Unstructured Multigridding by Volume Agglomeration: Current Status. Computers & Fluids, 21 (1992), pp. 397-433.
118. *Crumpton P.I., Giles M.B.* Aircraft Computations Using Multigrid and an Unstructured Parallel Library. AIAA Paper 95-0210, 1995.

119. *Ollivier-Gooch C.F.* Multigrid Acceleration of an Upwind Euler Solver on Unstructured Meshes. *AIAA Journal*, 33 (1995), pp. 1822-1827.
120. *Mavriplis D.J.* Multigrid Techniques for Unstructured Meshes. ICASE Report No. 95-27, 1995.
121. *Mavriplis D.J., Venkatakrishnan V.* A 3D Agglomeration Multigrid Solver for the Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations on Unstructured Meshes. *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids* 23 (1996), pp. 527-544.
122. *Mavriplis D.J.* Directional Agglomeration Multigrid Techniques for High Reynolds Number Viscous Flow Solvers. AIAA Paper 98-0612, 1998.
123. *Mavriplis D.J.* Multigrid Strategies for Viscous Flow Solvers on Anisotropic Unstructured Meshes. *J. Computational Physics*, 145 (1998), pp. 141-165.
124. *Okamoto N., Nakahashi K., Obayashi S.* A Coarse Grid Generation Algorithm for Agglomeration Multigrid Method on Unstructured Grids. AIAA Paper 98-0615, 1998.
125. *Roberts T.W., Sidilkover D., Swanson R.C.* Textbook Multigrid Efficiency for the Steady Euler Equations. AIAA Paper 97-1949, 1997.
126. *George A., Liu J.W.* Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems. Prentice Hall Series in Comput. Math., Englewood Cliffs, N.J., 1981.
127. *Pothen A., Simon H.D., Liou K.P.* Partitioning Sparse Matrices with Eigenvectors of Graphs. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 11 (1990), pp. 430-452.
128. *Bender E.E., Khosla P.K.* Solution of the Two-Dimensional Navier-Stokes Equations Using Sparse Matrix Solvers. AIAA Paper 87-0603, 1987.
129. *Venkatakrishnan V.* Newton Solution of Inviscid and Viscous Problems. *AIAA Journal*, 27 (1989), pp. 885-891.
130. *Beam R.M., Bailey H.S.* Viscous Computations Using a Direct Solver. *Computers & Fluids*, 18 (1990), pp. 191-204.

131. *Vanden K.J., Whitfield D.L.* Direct and Iterative Algorithms for the Three-Dimensional Euler Equations. *AIAA Journal*, 33 (1995), pp. 851-858.
132. *Venkatakrishnan V., Barth T.J.* Application of Direct Solvers to Unstructured Meshes for the Euler and Navier-Stokes Equations Using Upwind Schemes. *AIAA Paper 89-0364*, 1989.
133. *Briley W.R., McDonald H.* Solution of the Multi-Dimensional Compressible Navier-Stokes Equations by a Generalized Implicit Method. *J. Computational Physics*, 24 (1977), pp. 372-397.
134. *Beam R., Warming R.F.* An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations. *AIAA Journal*, 16 (1978), pp. 393-402.
135. *Pulliam T.H., Steger J.L.* Recent Improvements in Efficiency, Accuracy and Convergence for Implicit Approximate Factorization Scheme. *AIAA Paper 85-0360*, 1985.
136. *Rosenfeld M., Yassour Y.* The Alternating Direction Multi-Zone Implicit Method. *J. Computational Physics*, 110 (1994), pp. 212-220.
137. *Golub G.H., Van Loan C.F.* *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 1983.
138. *Chakravarthy S.R.* Relaxation Methods for Unfactored Implicit Schemes. *AIAA Paper 84-016*, 1984.
139. *Napolitano M., Walters R.W.* An Incremental Line Gauss-Seidel Method for the Incompressible and Compressible Navier-Stokes Equations. *AIAA Paper 85-0033*, 1985.
140. *Thomas J.L., Walters R.W.* Upwind Relaxation Algorithms for the Navier-Stokes Equations. *AIAA Journal*, 25 (1987), pp. 527-534.
141. *Jenssen C.B.* Implicit Multiblock Euler and Navier-Stokes Calculations. *AIAA Journal*, 32 (1994), pp. 1808-1814.
142. *Yoon S., Jameson A.* Lower-Upper Implicit Schemes with Multiple Grids for the Euler Equations. *AIAA Paper 86-0105*; also *AIAA Journal*, 7 (1987), pp. 929-935.

143. *Yoon S., Jameson A.* An LU-SSOR Scheme for the Euler and Navier-Stokes Equations. AIAA Paper 87-0600; also AIAA Journal, 26 (1988), pp. 1025-1026.
144. *Rieger H., Jameson A.* Solution of Steady Three-Dimensional Compressible Euler and Navier-Stokes Equations by an Implicit LU Scheme. AIAA Paper 88-0619, 1988.
145. *Shuen J.-S.* Upwind Differencing and LU Factorization for Chemical Non-Equilibrium Navier-Stokes Equations. J. Computational Physics, 99 (1992), pp. 233-250.
146. *Blazek J.* Investigations of the Implicit LU-SSOR Scheme. DLR Research Report, No. 93-51, 1993.
147. *Fezoui L., Stoufflet B.* A Class of Implicit Upwind Schemes for Euler Simulations with Unstructured Meshes. J. Computational Physics, 84 (1989), pp. 174-206.
148. *Karman S.L.* Development of a 3D Unstructured CFD Method. PhD thesis, The University of Texas at Arlington, 1991.
149. *Batina J.T.* Implicit Upwind Solution Algorithms for Three-Dimensional Unstructured Meshes. AIAA Journal, 31 (1993), pp. 801-805.
150. *Slack D.C., Whitacker D.L., Walters R.W.* Time Integration Algorithms for the Two-Dimensional Euler Equations on Unstructured Meshes. AIAA Journal, 32 (1994), pp. 1158-1166.
151. *Anderson W.K.* A Grid Generation and Flow Solution Method for the Euler Equations on Unstructured Grids. J. Computational Physics, 110 (1994), pp. 23-38.
152. *Anderson W.K., Bonhaus D.L.* An Implicit Upwind Algorithm for Computing Turbulent Flows on Unstructured Grids. Computers & Fluids, 23 (1994), pp. 1-21.
153. *Anderson W.K., Rausch R.D., Bonhaus D.L.* Implicit Multigrid Algorithms for Incompressible Turbulent Flows on Unstructured Grids. J.

- Computational Physics, 128 (1996), pp. 391-408; also AIAA Paper 95-1740, 1995.
154. *Sharov D., Nakahashi K.* Low Speed Preconditioning and LU-SGS Scheme for 3-D Viscous Flow Computations on Unstructured Grids. AIAA Paper 98-0614, 1998.
 155. *Tomaro R.F., Strang W.Z., Sankar L.N.* An Implicit Algorithm for Solving Time Dependent Flows on Unstructured Grids. AIAA Paper 97-0333, 1997.
 156. *Kano S., Nakahashi K.* Navier-Stokes Computations of HSCT Off-Design Aerodynamics Using Unstructured Hybrid Grids. AIAA Paper 98-0232, 1998.
 157. *Hassan O., Morgan K., Peraire J.* An Adaptive Implicit/Explicit Finite Element Scheme for Compressible High Speed Flows. AIAA Paper 89-0363, 1989.
 158. *Hassan O., Morgan K., Peraire J.* An Implicit Finite Element Method for High Speed Flows. AIAA Paper 90-0402, 1990.
 159. *Gibbons A.* Algorithmic Graph Theory. Cambridge University Press, New York, NY, 1985.
 160. *Löhner R., Martin D.* An Implicit Linelet-Based Solver for Incompressible Flows. AIAA Paper 92-0668, 1992.
 161. *Hestenes M.R., Stiefel E.L.* Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. J. Res. Nat. Bur. Stand., 49 (1952), p. 409.
 162. *Sonneveld P.* CGS, A Fast Lanczos-Type Solver for Nonsymmetric Linear Systems. SIAM, J. Scientific Statistics and Computing, 10 (1989), pp. 36-52.
 163. *Van der Vorst H.A.* BiCGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems. SIAM, J. Scientific Statistics and Computing, 13 (1992), pp. 631-644.

164. *Freund R.W.* A Transpose-Free Quasi-Minimal Residual Algorithm for Non-Hermitian Linear Systems. SIAM, J. Scientific Statistics and Computing, 14 (1993), pp. 470-482.
165. *Saad Y., Schulz M.H.* GMRES: A Generalized Minimum Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems. SIAM, J. Scientific Statistics and Computing, 7 (1986), pp. 856-869.
166. *Meister A.* Comparison of Different Krylov Subspace Methods Embedded in an Implicit Finite Volume Scheme for the Computation of Viscous and Inviscid Flow Fields on Unstructured Grids. J. Computational Physics, 140 (1998), pp. 311-345.
167. *Meijerink J.A., Van der Vorst H.A.* Guidelines for Usage of Incomplete Decompositions in Solving Sets of Linear Equations as they occur in Practical Problems. J. Computational Physics, 44 (1981), pp. 134-155.
168. *Wigton L.B., Yu N.J., Young D.P.* GMRES Acceleration of Computational Fluid Dynamics Codes. AIAA Paper 85-1494, 1985.
169. *Kadioğlu M., Mudrick S.* On the Implementation of the GMRES(m) Method to Elliptic Equations in Meteorology. J. Computational Physics, 102 (1992), pp. 348-359.
170. *Venkatakrisshnan V., Mavriplis D.J.* Implicit Solvers for Unstructured Meshes. J. Computational Physics, 105 (1993), pp. 83-91.
171. *Ajmani K., Ng W.-F., Liou M.-S.* Preconditioned Conjugate Gradient Methods for Low Speed Flow Calculations. AIAA Paper, 93-0881, 1993.
172. *Brown P.N., Saad Y.* Hybrid Krylov Methods for Nonlinear Systems of Equations. SIAM, J. Scientific and Statistical Computing, 11 (1990), pp. 450-481.
173. *Nielsen E.J., Anderson W.K., Walters R.W., Keyes D.E.* Application of Newton-Krylov Methodology to a Three-Dimensional Unstructured Euler Code. AIAA Paper 95-1733, 1995.

174. *Cai X., Keyes D.E., Venkatakrishnan V.* Newton-Krylov-Schwarz: An Implicit Solver for CFD. ICASE Report 95-87, 1995.
175. *Tidriri M.D.* Schwarz-Based Algorithms for Compressible Flows. ICASE Report 96-4, 1996.
176. *Zingg D., Pueyo A.* An Efficient Newton-GMRES Solver for Aerodynamic Computations. AIAA Paper 97-1955, 1997.
177. *Venkatakrishnan V.* Implicit Schemes and Parallel Computing in Unstructured Grid CFD. ICASE Report No. 95-28, 1995.
178. *McHugh P.R., Knoll D.A.* Inexact Newton's Method Solutions to the Incompressible Navier-Stokes and Energy Equations Using Standard and Matrix-Free Implementations. AIAA Paper 93-3332, 1993.
179. *Luo H., Baum J.D., Löhner R.* A Fast, Matrix-Free Implicit Method for Compressible Flows on Unstructured Grids. AIAA Paper 99-0936, 1999.
180. *Raw M.* Robustness of Coupled Algebraic Multigrid for the Navier-Stokes Equations. AIAA Paper 96-0297, 1996.
181. *Brieger L., Lecca G.* Parallel Multigrid Preconditioning of the Conjugate Gradient Method for Systems of Subsurface Hydrology. *J. Computational Physics*, 142 (1998), pp. 148-162.
182. *Yoon S., Kwak D.* Multigrid Convergence of an Implicit Symmetric Relaxation Scheme. AIAA Paper 93-3357, 1993.
183. *Blazek J.* A Multigrid LU-SSOR Scheme for the Solution of Hypersonic Flow Problems. AIAA Paper 94-0062, 1994.
184. *Oosterlee C.W.* A GMRES-Based Plane Smoother in Multigrid to Solve 3D Anisotropic Fluid Flow Problems. *J. Computational Physics*, 130 (1997), pp. 41-53.
185. *Gerlinger P., Stoll P., Brüggemann D.* An Implicit Multigrid Method for the Simulation of Chemically Reacting Flows. *J. Computational Physics*, 146 (1998), pp. 322-345.
186. Обогащение урана. Сб. статей под ред. С. Виллани. Пер. с англ. под ред. И.К. Кикоина. – М.: Энергоатомиздат, 1983.

187. Разработка и создание газоцентрифужного метода разделения изотопов в СССР (России). Сб. статей. – С.–Петербург: ЛНПП «Облик», 2002.
188. *Кофман Е.Б.* Конструкции современных ультрацентрифуг // УФН. 1941. Т. 25. Вып. 3. С. 340 – 361.
189. *Troshkin O.V.* Nontraditional Methods in Mathematical Hydrodynamics (Trans. Math. Monographs. AMS). Providence, RI, USA, 1995. V. 144.
190. *Трошкин О.В.* О нагревании газа кручением // ЖВМ и МФ. 2010. Т. 50. № 6. С. 1–10.
191. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкостей и газов. Изд. 7-е.– М.: «Дрофа», 2003.
192. *Абрамович Г.Н.* Прикладная газовая динамика. Ч. 1. Изд. 5-е. М.: Наука, 1991.
193. *Акимова Е.Н.* Распараллеливание алгоритма матричной прогонки. Математическое моделирование. Т. 6, № 9, 1994.
194. *Юдович В.И.* Двумерная нестационарная задача протекания идеальной жидкости через заданную область // Матем. сб. 1964. Т. 64. С. 562–588.
195. *Алексеев Г.В.* О единственности и гладкости турбулентных течений идеальной жидкости // Динамика сплошной среды. Сб. научных трудов. Новосибирск. 1973. Вып.15. С. 7–17.
196. *Дезин А.А.* Инвариантные формы и некоторые структурные свойства гидродинамических уравнений Эйлера // Zeit. fur Anal. Und ihre Anwendungen. 1983. В. 2 (5). S. 401–409.
197. *Трошкин О.В.* Двумерная задача о протекании для стационарных уравнений Эйлера // Мат. сб. 1989. Т. 180. Вып. 3. С. 354–374.
198. *Трошкин О.В.* Вопросы качественного анализа уравнений математической гидродинамики. Дис. докт. ф.-м. наук: 01.01.03: защищена 05.09.90: утв. 05.10.90. – М.: ВЦ АН СССР, 1990. 297 с.

199. *Glaister P. J.* An approximate linearised Riemann solver for real gases, *Comput. Physics*, 74 (2) (1988), pp. 382–408.
200. *Белоцерковский О.М., Белоцерковская М.С., Денисенко В.В., Ериклинцев И.В., Козлов С.А., Опарина Е.И., Трошкин О.В., Фортова С.В.* Об установлении спутного вихря в потоке идеальной среды// *Ж. вычисл. матем. и матем. физики*, 2013, Т. 54, № 1 (в печати).
201. *Митрофанова О.В.* Гидродинамика и теплообмен закрученных потоков в каналах ядерно-энергетических установок. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 288 с.