

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМ. М.В. КЕЛДЫША РАН

На правах рукописи

ДУБЕНЬ АЛЕКСЕЙ ПЕТРОВИЧ

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ
ПРИСТЕНОЧНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ
НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ**

Специальность 05.13.18 —
«математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Козубская Татьяна Константиновна

Москва – 2014

Содержание

Введение	4
1 Обзор методов моделирования турбулентных течений . . .	10
1.1 Метод RANS	11
1.2 URANS подход	12
1.3 Подход DNS	14
1.4 Подход LES и его модификации	16
1.5 Гибридные подходы	19
2 Реализация гибридных RANS-LES методов моделирования турбулентных течений в рамках программного комплекса NOISEtte на неструктурированных сетках	30
2.1 Дискретизация уравнения переноса турбулентной вязкости в модели турбулентности Спаларта-Аллмараса	30
2.2 Определение пространственных масштабов турбулентности в подходах RANS, LES и WMLES	34
2.3 Реализация гибридной разностной схемы для невязких потоков, соответствующей RANS-LES методам	37
2.4 Калибровка константы C_{DES} в гибридных RANS-LES подходах .	39
3 Верификация реализованных моделей на примере канони- ческих турбулентных течений	43
3.1 Турбулентный пограничный слой на плоской пластине	43
3.2 Турбулентное течение в плоском канале	44

3.3	Нестационарное турбулентное течение в канале с обратным уступом	48
4	Использование гибридных подходов семейства DES для моделирования сложных нестационарных турбулентных течений	56
4.1	Задача о взаимодействии турбулентного потока с зазором	56
4.1.1	Постановка задачи	56
4.1.2	Результаты моделирования методом DDES	59
4.1.3	Результаты моделирования методом IDDES	61
4.2	Задача о трансзвуковом обтекании клиновидного тела с обратным уступом	64
4.2.1	Постановка задачи	64
4.2.2	Результаты численного моделирования	66
	Заключение	72
	Список рисунков	76
	Список таблиц	81
	Литература	82
	Приложение А: Формулировка методов DES, DDES и IDDES	91
	Приложение Б: Используемые математические модели и численные методы	94

Введение

Актуальность темы

В настоящее время для решения задач авиационной промышленности все чаще применяется метод математического моделирования. Это обусловлено, с одной стороны, развитием вычислительных методов и моделей, позволяющих достаточно точно и правдоподобно предсказывать реальные течения. Также за последнее десятилетие можно было наблюдать скачок в развитии вычислительной техники, что сейчас позволяет получить доступ к суперкомпьютерам довольно большой мощности. Таким образом, новым более дешевым, рациональным и эффективным инструментом для исследования турбулентных течений и решения задач авиационной промышленности становится метод математического моделирования.

Для расчетов турбулентных течений в инженерных приложениях чаще всего используется метод осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (Reynolds Averaged Navier-Stokes, RANS) с замыканием с помощью той или иной полуэмпирической модели турбулентности. Это обусловлено тем, что данный подход позволяет достаточно точно предсказывать осредненные характеристики турбулентного взаимодействия и аэродинамические параметры исследуемой конфигурации при относительно небольших вычислительных затратах. Но, во-первых, при достаточно сложной геометрии и условиях течения, например когда присутствуют большие отрывные зоны, использование подхода RANS не ведет к достоверным результатам моделирования. Во-вторых, в рамках данной методики невозможно воспроизвести нестационарные турбулентные течения, характерные для большинства при-

ложений, и, тем более, предсказать акустические характеристики для изучаемой конфигурации.

Альтернативой к RANS служит использование вихреразрешающих подходов, к которым можно отнести прямое численное моделирование (Direct Numerical Simulation, DNS) и метод моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES). Подход DNS предполагает разрешение турбулентных структур абсолютно всех масштабов из инерционного интервала, что ведет к необходимости использования сеток очень больших размеров. Большинство экспертных оценок сводится к тому, что при сохранении текущих темпов роста мощности вычислительной техники для решения задач с числами Рейнольдса, характерными для интересных авиационной промышленности конфигураций, прямое численное моделирование возможно будет применять только во второй половине нынешнего столетия. Методика LES заключается в разрешении только тех структур, размеры которых не ниже размеров ячеек расчетной сетки. Мелкомасштабная (подсеточная) турбулентность описывается с помощью той или иной модели подсеточной вязкости. Подход LES не требует такой подробности сетки в отрывной зоне вдали от стенок, как DNS, что сокращает ее размеры. Однако необходимые минимально разрешимые масштабы турбулентности для достоверного LES моделирования вблизи стенок существенно уменьшаются, поэтому размеры сеток становятся в этой зоне очень близкими к аналогичным DNS сеткам. Большинство проблем, которые стоят перед авиационной промышленностью, предполагают взаимодействие турбулентного потока со стенками, наличие которых чаще всего оказывает существенное влияние на исследуемое течение. Поэтому для таких задач LES сетки по количеству узлов и элементов не многим меньше DNS сеток для аналогичных конфигураций, так как 90% ячеек содержится в пристеночных областях. Таким образом, по сроку готовности для инженерных приложений LES не намного опережает DNS.

Тем не менее до сравнительно недавнего времени не было серьезных альтернатив использованию LES для расчета сложных нестационарных турбулентных течений с необходимостью предсказывать как турбулентные пульсации, так и акустические нагрузки.

В настоящее время активно развиваются гибридные RANS-LES подходы к моделированию турбулентности, которые сочетают в себе эффективность методики LES в отрывных свободных зонах и экономичность RANS в пристенных областях. Многие из них, как показывают многочисленные исследования, позволяют на относительно небольших по сравнению с аналогичными для LES и DNS сетках получать удовлетворительные результаты, в том числе для задач с высокими числами Рейнольдса, характерными для конфигураций, рассматриваемых авиационной промышленностью.

Вместе с развитием авиационной техники все сложнее становятся элементы летательных аппаратов. При этом возрастают требования к точности предсказания характеристик исследуемых моделей и течений. Ввиду сложности геометрии использование структурированных сеток для расчетов по таким конфигурациям зачастую вызывает серьезные затруднения. При этом развитие методов автоматического построения неструктурированных сеток вокруг тел произвольных форм достигло достаточно высокого уровня. Современные не только коммерческие, но и свободнораспространяемые генераторы позволяют заполнить расчетную область качественной сеткой с учетом всех особенностей течения в пограничных, переходных и зонах отрывного течения.

Таким образом, возникает необходимость в изучении особенностей, реализации и валидации гибридных RANS-LES методов моделирования прежде всего нестационарных пристеночных турбулентных течений с использованием неструктурированных сеток. Это особенно актуально также ввиду того, что подавляющее большинство расчетов с успешным использованием гибридных подходов производилось и производится на структурированных сетках.

Целью диссертационной работы является разработка вычислительных технологий для моделирования сложных нестационарных пристеночных турбулентных течений на неструктурированных сетках на основе гибридных RANS-LES подходов. Для ее достижения решаются следующие **задачи**:

- 1) анализ современных гибридных RANS-LES методов и выбор оптимальных применительно к расчету пристеночных турбулентных течений;
- 2) адаптация выбранного подхода применительно к неструктурированной сетке и используемой численной схеме;
- 3) эффективная параллельная программная реализация гибридной RANS-LES методики на неструктурированных сетках в рамках программного комплекса NOISEtte;
- 4) тестирование и верификация реализованной методики на примере расчета канонических сдвиговых турбулентных течений;
- 5) проведение крупномасштабных расчетов сложных турбулентных течений с наличием отрыва и присоединения и существенным влиянием стенки на суперкомпьютере.

Научная новизна работы состоит в следующем.

1. Предложена эффективная методика для моделирования сложных пристеночных турбулентных течений на неструктурированных сетках на основе гибридных RANS-LES подходов.
2. Выполнена программная реализация гибридных RANS-LES подходов семейства DES на неструктурированных сетках в рамках параллельного программного комплекса NOISEtte.
3. В результате решения набора тестовых задач получены численные данные для верификации алгоритмов моделирования турбулентных течений на неструктурированных сетках.

4. Проведенные крупномасштабные расчеты на неструктурированных сетках на основе гибридных RANS-LES подходов позволили выявить сложную картину течения и исследовать механизмы образования шума для пристеночных течений возле конфигураций, характерных для авиационной промышленности.

Практическая ценность диссертационной работы заключается в адаптации гибридных RANS-LES методов семейства DES применительно к расчетам на неструктурированных сетках, что можно эффективно использовать для решения задач со сложной геометрией.

На защиту выносятся следующие **положения**.

- Вычислительные технологии для моделирования сложных пристеночных турбулентных течений на неструктурированных сетках на основе гибридных RANS-LES подходов семейства DES.
- Программная реализация гибридных RANS-LES подходов семейства DES в рамках параллельного программного комплекса NOISEtte, предназначенного для решения сложных задач газовой динамики и аэроакустики с использованием суперкомпьютеров высокой мощности.
- Результаты верификационных тестовых расчетов канонических сдвиговых турбулентных течений на неструктурированных сетках.
- Результаты крупномасштабных расчетов сложных пристеночных турбулентных течений на неструктурированных сетках.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованных источников и двух приложений.

Первая глава посвящена обзору современных гибридных RANS-LES методов моделирования турбулентных течений. В ней также приводится обоснование выбора используемых в работе подходов к моделированию турбулентных течений.

Вторая глава посвящена реализации гибридных RANS-LES методов семейства DES моделирования турбулентных течений в рамках программного комплекса NOISEtte на неструктурированных сетках.

Третья глава посвящена верификации реализованных методов и моделей на примере расчета канонических турбулентных течений.

Четвертая глава посвящена применению разработанной в диссертационной работе методики к численному моделированию сложных нестационарных пристеночных турбулентных течений с наличием отрыва и присоединения, характерных для задач авиационной промышленности.

В **Приложении А** приведена формулировка подходов DES97, DDES и IDDES на основе модели турбулентности Спаларта-Аллмарса.

Приложение Б посвящено описанию используемых в рамках программного комплекса NOISEtte математических моделей и численных методов.

Глава 1

Обзор методов моделирования турбулентных течений

В настоящее время для проведения численного моделирования турбулентных течений в задачах аэродинамики и аэроакустики, рассматриваемых авиационной промышленностью, применяются следующие подходы:

- осредненная по Рейнольдсу система уравнений Навье-Стокса, (RANS — Reynolds Averaged Navier-Stokes system) с замыканием с помощью какой-либо полуэмпирической модели турбулентности [1];

Вихреразрешающие подходы:

- нестационарный RANS подход (URANS — Unsteady RANS);
- система уравнений Навье-Стокса в рамках прямого численного моделирования (DNS — Direct Numerical Simulation);
- подход моделирования крупных вихрей (LES — Large Eddy Simulation) [2];
- гибридные RANS-LES подходы [3], в частности, модель отсоединенных вихрей (DES — Detached Eddy Simulation) [4] и её модификации.

1.1. Метод RANS

Метод RANS [1] представляет собой численное решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, которые замыкаются с помощью той или иной полуэмпирической модели турбулентности. Замыкание происходит путем установки связи между тензором рейнольдсовых напряжений с тензором осредненных скоростей деформации, которая чаще всего определяется гипотезой Буссинеска.

Стоит отметить, что результатом моделирования, полученным с помощью метода RANS, является стационарное решение, представляющее собой осредненную по достаточно большому промежутку времени картину течения.

Широкое использование и успех RANS солверов обусловлены тем, что данный подход позволяет достаточно точно предсказывать осредненные характеристики турбулентного взаимодействия и аэродинамические параметры исследуемой конфигурации при небольших вычислительных затратах [5]. При этом разработано и внедрено во многие используемые для расчетов программные комплексы достаточно большое количество эмпирических моделей турбулентности, разработанных специально для какого-либо узкого класса течений.

Основными недостатками использования подхода RANS являются следующие. Во-первых, при сложной геометрии и условиях течения, например при наличии обширных отрывных зон, использование подхода RANS не ведет к достоверным результатам моделирования. Это обусловлено ограниченностью разрабатываемых моделей замыкания осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса. Во-вторых, в рамках данной методики невозможно предсказать нестационарные турбулентные и акустические характеристики изучаемой конфигурации. Поэтому использование подхода RANS для моделирования достаточно сложных пристеночных турбулентных течений чаще всего

не приводит к получению удовлетворительных результатов (см. материалы семинаров ERCOFTAC [6–9]).

1.2. URANS подход

Под нестационарным RANS (Unsteady RANS, URANS) подходом подразумевается моделирование классическим RANS методом, при котором по той или иной причине решение не сходится к какому-либо стационарному распределению, а меняется в течении всего времени расчета. При этом нестационарность может быть обусловлена различными факторами, например, меняющимися в течение времени входными граничными условиями. Также часто нестационарное поведение решения связано с возникновением естественной численной неустойчивости, появляющейся в процессе расчета вследствие использования подробных сеток и/или высокоточных схем.

Преимуществом данного подхода является возможность разрешать доминантные, в значительной степени невязкие вихри, характеризующиеся макромасштабами модели. Некоторые течения, особенно возле плохообтекаемых тел с массивным образованием отрывных зон, приводят к нестационарному решению, которое существенно отличается от стационарного. В то же время, с точки зрения вычислительных затрат, трехмерный URANS расчет для сложных конфигураций и с реальными числами Рейнольдса, характерных для авиационной промышленности, сегодня является вполне выполнимым [10] за достаточно разумное время. Это привлекло значительный интерес к данному подходу в конце 1990-х годов. В смысле «полезности» для расчета сложных отрывных турбулентных течений и прогнозирования возникающего аэродинамического шума, URANS модели могут претендовать только на основные дискретные тона и/или низкочастотные части широкополосного спектра.

Данный подход позволяет более точно по сравнению со стационарным RANS предсказать осредненные характеристики течения [11] возле плохооб-

текаемых тел. Но при моделировании таких задач использование URANS часто не ведет к корректному предсказанию такой характеристики, как число Струхалия St , которое для большинства отрывных течений является достаточно независимым показателем. При этом даже если в результате моделирования получено правильное значение числа St , это не гарантирует, что на данной сетке подход будет корректно предсказывать остальные аэродинамические и акустические характеристики [12]. Кроме того, подход URANS не обладает таким свойством, как сеточная сходимость [3].

Однако следует отметить, что недавние исследования, частично выполненные в рамках европейского проекта DESider [4], в котором в основном для верификации методик рассматривались задачи течения возле плохообтекаемых тел, пролили новый свет на потенциал подхода URANS, в результате чего появились так называемые URANS модели второго поколения (Second Generation URANS Models, 2G-URANS). К ним относится, в частности, модель частично осредненных уравнений Навье-Стокса (Partially Averaged Navier-Stokes, PANS), которая была предложена в работах [13, 14]. В рамках данного подхода количество разрешаемых турбулентных пульсаций выбирается до проведения самого расчета и ограничивается путем демпфирования части слагаемых в исходной RANS модели. Использование метода PANS затруднительно для расчета сложных пристеночных турбулентных течений ввиду отсутствия четкого общего принципа выбора констант, определяющих поведение течения и соотношение разрешаемого и моделируемого турбулентного контента. К тому же используемое демпфирующее соотношение одинаково для всей расчетной области и не зависит от характера течения в различных ее частях.

Также одним из активно развивающихся 2G-URANS подходов является модель адаптивного масштаба (Scale-Adaptive Simulation, SAS) [15], полученная посредством введения масштаба длины фон Кармана в качестве измерительного элемента в уравнениях. Это делает модель чувствительной к раз-

решаемым турбулентным структурам, что отражено в названии получившегося подхода. Этот подход продемонстрировал некоторые перспективные результаты для различных аэродинамических течений, включая течения возле плохообтекаемых тел [16], и безусловно заслуживает дальнейшего изучения в качестве средства для расчета.

Одним из главных недостатков 2G-URANS подходов является то, что данные методы изначально были разработаны и протестированы на задачах с массивным отрывом, и переключение в LES-режим в процессе расчета осуществляется только при возникновении разрешенных турбулентных структур. Однако в случае отсутствия или слабости какого-либо естественного механизма неустойчивости течения численное решение, получаемое с помощью данных подходов, становилось либо стационарным, либо слишком вязким для корректного предсказания нужных характеристик, особенно в области присоединенного пограничного слоя. Поэтому использование данного подхода для моделирования сложных пристеночных турбулентных течений является неразумным.

1.3. Подход DNS

Альтернативой к RANS служит использование вихреразрешающих подходов, к которым можно отнести прямое численное моделирование (Direct Numerical Simulation, DNS), метод моделирование крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES), а также гибридные RANS-LES методы.

Прямое численное моделирование означает решение полных нестационарных трехмерных уравнений Навье-Стокса. При этом предъявляются серьезные требования к вычислительной сетке, на которой должен разрешаться полный диапазон турбулентных масштабов вплоть до колмогоровских и воспроизводиться полный спектр акустического шума.

Преимущество такого подхода состоит в непосредственном нестационарном моделировании течений, в том числе и турбулентных, при произвольных числах Рейнольдса. При этом предполагается, что метод DNS свободен от численной и других форм ошибок. Это означает, что дискретизация уравнений Навье-Стокса должна производиться с помощью устойчивых высокоточных схем, и численное решение должно удовлетворять физически адекватным начальным и граничным условиям. Основная сложность проведения расчетов методом DNS состоит в требуемом объеме вычислительных ресурсов. Реализация этой модели для практических индустриальных задач с числами Рейнольдса, большими 10^5 , особенно для течений с наличием и существенным влиянием стенки, в настоящее время невозможна даже с учетом скачка в производительности вычислительной техники из-за слишком высокой стоимости вычислительных затрат [10]. Для проведения расчетов с помощью метода прямого численного моделирования расчетная сетка должна быть достаточно подробной, чтобы разрешить наименьшие вихри, размеры которых порядка колмогоровского масштаба длины. Из этого следует оценка количества узлов сетки N_{DNS} , необходимых для проведения расчетов, пропорционально $(0.15 \cdot \text{Re})^{9/4}$. В монографии [1] приводятся оценка зависимости числа узлов расчетной сетки от числа Рейнольдса для задачи о развитом течении в канале прямоугольного сечения (см. таблицу 1.1).

Таблица 1.1: Зависимость числа узлов в расчетной сетке от числа Рейнольдса для течения в канале прямоугольного сечения при использовании подхода DNS.

Re	N_{DNS}
10^3	7.87×10^4
10^4	1.4×10^7
10^5	2.49×10^9

Из этой таблицы видно, что возможность применения DNS для расчета сложных пристеночных турбулентных течений на сегодняшний день ограничивается характерным числом Рейнольдса меньше 10^4 , которое редко встречается в индустриальных приложениях.

1.4. Подход LES и его модификации

Подход моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation – LES) получается пространственным осреднением уравнений Навье-Стокса с использованием некоего фильтра, зависящего от шагов вычислительной сетки [17].

LES предполагает моделирование, при котором крупные вихри, характерный масштаб которых больше некоторого из инерционного интервала, разрешаются. Влияние же более мелких вихрей, то есть вихрей так называемого подсеточного масштаба (SubGrid Scales – SGS), учитывается с помощью той или иной LES-модели, называемой обычно подсеточной моделью турбулентности. Основным предположением подхода LES является то, что наибольшие по характерному размеру вихри, определяемому макромасштабами модели, несут максимум рейнольдсовых напряжений и должны быть сеточно разрешены и напрямую рассчитаны. Генерация таких турбулентных структур определяется воздействием граничных условий или геометрией исследуемой конфигурации. При этом мелкомасштабная турбулентность является слабой, то есть содержащей меньшую интенсивность рейнольдсовых напряжений, и поэтому представляется менее критичной для описания турбулентного течения. Также она близка к изотропной и имеет характеристики, близкие к универсальным. Поэтому она в большей мере поддается моделированию и может быть описана порой достаточно простой по записи и реализации подсеточной моделью турбулентности.

Поскольку метод LES включает моделирование мельчайших вихрей, то есть описания их влияния на более крупные, разрешенные структуры, мини-

мальные размеры расчетных сеток могут быть намного больше обязательной для DNS колмогоровской длины (наименьшего масштаба турбулентности). При этом временные шаги также могут быть выбраны много большими, чем это необходимо при прямом численном моделировании. Следовательно, при заданном числе узлов сетки возможно проводить расчеты с более высокими числами Рейнольдса на основе LES, чем используя подход DNS (см. Таблица 1.2 из [10]) .

Таблица 1.2: Сравнение размеров сеток, необходимых для расчетов с помощью методов DNS и LES для чисел Рейнольдса 12300 и 230000.

Re	N_{DNS}	N_{LES}
123000	6.7×10^6	6.1×10^5
230000	2.1×10^9	1.0×10^9

Уравнения для моделирования крупных вихрей выводятся из уравнений Навье-Стокса путем их осреднения по пространству оператором, фильтрующим масштабы, меньшие чем шаг сетки. Процедура осреднения отделяет способные к разрешению масштабы от подсеточных, причем фильтр вводит масштаб Δ , который представляет наименьший масштаб турбулентности, допустимый этим фильтром.

Наряду с моделированием крупных вихрей, находят применение подходы, которые не используют подсеточные модели – монотонное моделирование крупных вихрей (Monotonic Implicit LES — MILES) или с другим названием неявный LES (Implicit LES — ILES). Применяемые в них разностные схемы высокого порядка, обладающие свойством монотонности, уже имеют достаточную численную диффузию и диссипацию, которая имитирует стабилизирующее действие подсеточных моделей и учитывает влияние неразрешенных турбулентных структур. Диссипативный механизм (сглаживающий фильтр) содержится в операторе, дискретизирующем конвективные слагаемые (в частности, противопоточные схемы), что обеспечивает устойчивость

решения и имеет малую диссипацию в области крупных масштабов и большую в области мелких вихрей. Использование неявных LES-подходов должно производиться с повышенной аккуратностью, так как возможна ситуация, когда схемная диссипация будет велика по сравнению с масштабом вихря l (отношение $\Delta x/l$ велико), и вихрь будет гаситься схемой. Поэтому при использовании данного подхода следует обращать пристальное внимание на выбор сетки и точность пространственной аппроксимации разностной схемы.

Различные способы введения неявных подсеточных моделей рассмотрены в сборнике [18]. Подробное описание всевозможных подходов к моделированию крупных вихрей дано в монографии [2]. Чаще всего метод LES, MILES и ILES применяют для решения тех индустриальных задач, где влияние стенки минимально, и может либо пренебрегаться, либо заменяться использованием каких-либо полуэмпирическим подходом для учета влияния стенки. В случае, когда в рассматриваемых конфигурациях присутствует твердая поверхность, которая оказывает сильное влияние на течение, применение моделирования крупных вихрей сильно ограничено. Это связано с тем, что основные вычислительные затраты приходится на сравнительно тонкий присоединенный пограничный слой, в котором необходимо разрешать основные турбулентные структуры, размер которых значительно меньше тех, которые образуются и рассчитываются вдали от стенки. В итоге на область пограничного слоя обычно приходится не менее 10 % от всех узлов сетки. Таким образом, применительно к моделированию течений при наличии и существенном влиянии стенки, вычислительные затраты метода LES становятся сравнимыми с DNS подходом.

Чаще всего классический метод LES успешно применяется для расчета струйных течений (см., например, [19, 20]) и течений с массивным отрывом (см., например, [21, 22]), который возникает вследствие возникновения естественной неустойчивости, связанной с влиянием геометрии исследуемой конфигурации. В этом случае турбулентность, возникающая в присоединен-

ном пограничном слое, мало влияет на основные характеристики течения. В расчетах такого типа течений с целью снижения вычислительных затрат применяется модифицированный LES подход, заключающийся в использовании эмпирических пристеночных функций, позволяющих формировать правильный средний профиль пограничного слоя вблизи стенки, где необходимое сеточное разрешение сохранялось только в перпендикулярном к стенке направлении.

Основываясь на первоначальных успехах LES в предсказании классических течений, были сделаны попытки применить традиционный LES до сложных турбулентных течений возле конфигураций, характерных для промышленности. Но расчетные сетки для таких задач все равно оказывались достаточно грубые, на которых невозможно воспроизвести реальное детализированное течение. Поэтому появился так называемый метод моделирования очень больших вихрей (Very Large Eddy Simulation, VLES) [23]. В литературе под VLES понимается довольно широкий круг подходов [24], от URANS до LES. Данный подход при своей экономичности в большинстве случаев позволяет лишь воспроизвести общую картину исследуемого течения и не приводит к достаточно точному предсказанию аэродинамических характеристик как модели, так и течения, получающихся путем осреднения нестационарных полей по времени.

Таким образом, применение подходов DNS и LES для расчета сложных пристеночных турбулентных течений возле конфигураций, характерных для авиационной промышленности, с высокими числами Рейнольдса серьезно затруднено ограниченностью вычислительных ресурсов.

1.5. Гибридные подходы

Использование метода RANS позволяет при небольших вычислительных затратах достаточно точно и эффективно предсказывать осредненные харак-

теристики турбулентных течений с высокими числами Рейнольдса. В то же время при помощи данного подхода невозможно достичь приемлемой точности для конфигураций, в которых существенно влияние нестационарности. Методика LES обеспечивает достаточно хорошую точность нестационарного моделирования, но с очень большими вычислительными затратами, особенно при расчетах пристеночных течений, где шаг сетки должен быть изотропен и порядка малых диссипирующих пограничных вихрей. Анализ возможностей и ограничений двух традиционных подходов к моделированию турбулентности, таких как RANS и LES, показал, что проблема расчета сложных пристеночных турбулентных течений может быть успешно решена путем использования набирающих в последнее время всё большую популярность гибридных подходов [3].

Построение гибридных подходов возможно на основе структурного сходства уравнений для LES и RANS. Уравнения движения в системе RANS, записанные относительно осредненных компонент вектора скорости $\langle u_i \rangle$, выглядят следующим образом:

$$\partial_t \langle u_i \rangle + \partial_{x_j} (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle) + \partial_{x_j} \langle p \rangle = \partial_{x_j} (\nu \partial_{x_j} \langle u_i \rangle) - \partial_{x_j} \tau_{ij}^{\text{RANS}}. \quad (1.1)$$

Аналогичные уравнения для LES, записанные относительно разрешенной скорости \bar{u}_i , записываются как

$$\partial_t \bar{u}_i + \partial_{x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) + \partial_{x_j} \bar{p} = \partial_{x_j} (\nu \partial_{x_j} \bar{u}_i) - \partial_{x_j} \tau_{ij}^{\text{LES}}. \quad (1.2)$$

Очевидное сходство, видимое из уравнений (1.1) и (1.2) еще усиливается тем фактом, что концепция вихревой (турбулентной) вязкости, на которой строится большинство подсеточных LES моделей, также является основополагающей для большинства RANS подходов.

Под RANS моделью турбулентности понимается такая модель, в которой компоненты тензора рейнольдсовых напряжений зависят от физических

характеристик и которая полностью определяет (моделирует) турбулентные пульсации всех масштабов. Например, $K - \varepsilon$ модель определяет

$$\tau_{ij}^{\text{RANS}} = f(\partial_{x_j} \langle u_i \rangle, K, \varepsilon, C), \quad (1.3)$$

где C – модельная константа, K – кинетическая энергия турбулентности, а ε – скорость ее диссипации.

Широко распространенная для подхода LES подсеточная модель Смагоринского [25] позволяет замкнуть отфильтрованную по пространству систему уравнений Навье-Стокса следующим образом:

$$\tau_{ij}^{\text{LES}} = f(\partial_{x_j} \bar{u}_i, \Delta, C), \quad (1.4)$$

где Δ – подсеточный масштаб вычислительной сетки.

Учитывая то, что многие подсеточные LES модели были разработаны на основе RANS моделей и в общем имеют схожую формулировку, под последней будем понимать такую методику замыкания осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, в которой компоненты тензора рейнольдсовых напряжений определяются только физическими параметрами, не зависящими от вычислительной сетки. В отличие от этого в LES модели в том или ином виде участвует значение подсеточного масштаба, задаваемого в каждом узле.

Современные гибридные методы могут быть разделены на так называемые глобальные, или методы сквозного счета, и сегрегированные (segregated), или зональные, подходы. Суть первых заключается в том, что во всей расчетной области для моделирования используется одно и то же уравнение, численное решение которого в зависимости от каких-либо критериев оперирует как LES в одних областях (например, в отрывных зонах) и как RANS в других (например, в пристеночные области). Также в рамках глобальных подходов значение незамкнутых слагаемых в исходных системах уравнений (компонентов тензора рейнольдсовых/подсеточных напряжений) в каждой

точке расчетной области может определяться взвешенной суммой RANS и LES решения. Основным достаточно тонким и принципиальным вопросом для данного типа подходов является процедура сопряжения областей двух исходных методов. А проблема работы гибридного подхода в зоне, где решение не оперирует ни как чистый RANS, ни как чистый LES, обычно называется проблемой «серой» зоны.

Процедура переключения RANS в LES в рамках гибридного RANS-LES подхода может осуществляться различными способами. По типу общего принципа данного перехода глобальные гибридные подходы можно разделить на два класса.

Одним из возможных вариантов может быть сопряжение моделей, то есть определение незамкнутых членов в системе уравнений RANS или LES в виде взвешенной суммы, используя соотношение

$$\tau_{ij}^{\text{model}} = f^{\text{RANS}} \tau_{ij}^{\text{RANS}} + f^{\text{LES}} \tau_{ij}^{\text{LES}}. \quad (1.5)$$

В определении (1.5) f^{RANS} и f^{LES} – локальные коэффициенты, вычисляемые на основе локального значения заданного критерия перехода от области работы одного подхода к другому. Подходы, которые построены на таких принципах, называются сопряженные модели турбулентности (blending turbulence model).

К данному классу относится подход глушения RANS модели, в литературе называемый Flow Simulation Methodology (FSM) [26, 27]. В рамках данного метода, основанного на RANS, модельный член уравнения $\tau_{ij}^{\text{model}} = f_{\Delta} \left(\frac{\Delta}{l_K} \right) \tau_{ij}^{\text{RANS}}$ с $0 \leq f_{\Delta} \leq 1$, где l_K – колмогоровский масштаб турбулентности. Функция f_{Δ} глушит модельные напряжения при возникновении разрешенных турбулентных структур, что приводит к переходу расчета в нестационарный режим. Данный метод достаточно успешно показал себя для течений с сильной неустойчивостью, например, для конфигураций с наличием острых

углов, а также отрывных течений [28–30]. Однако недостатки этого метода связаны с довольно сильной зависимостью течения от вычислительной сетки и неуниверсальностью используемых в модели параметров и критериев глушения, описываемого функцией f_{Δ} , которые необходимо задавать до проведения расчета.

Еще одним сопряженным гибридным RANS-LES методом является метод взвешенной суммы LES и RANS, описанный и реализованный в [31–33], который базируется на SST модели Ментера [34]. В данном подходе взвешивание RANS и LES реализуется в выражении для турбулентной вязкости. Как и для предыдущего рассмотренного метода, данный подход не является универсальным и результат моделирования зависит от сетки, используемой для расчета, и выбора функции взвешивания. К тому же сопряжение в виде взвешенной суммы, как показали некоторые исследования [35], могут приводить к генерации нефизичных структур в моделируемом течении.

Другим принципом гибридизации подходов RANS и LES может быть следующий: в одной зоне расчет ведется в рамках чистого LES подхода, в остальной работает RANS. Также в процессе расчета явно или неявно существует граница областей работы исходных методов. Такие подходы называются подходы взаимодействующих RANS и LES моделей. При этом граница может быть мягкой и жесткой в зависимости от того, меняется она в течении всего расчета или остается постоянной, заданной в начальный момент времени.

К взаимодействующим RANS-LES методам относятся двухслойные подходы. При использовании данных методов вблизи стенки выделяется подслой, внутри которого решается уравнение Рейнольдса на сетке, измельченной по направлению нормали к твердой поверхности. В процессе расчета полученное в пограничном слое RANS решение используется для постановки граничных условий на стенке для LES подхода, с помощью которого ведется моделирование течения. В этом плане двухслойный подход напоминает чистый LES с пристеночными функциями, только в данном подходе поведение вихрераз-

решающего подхода вблизи границы описывается используемой RANS моделью. Двухслойные подходы были предложены в работах [36, 37]. Использование данного подхода позволяет получить результаты, лучшие относительно аналогичных результатов из расчета с использованием LES с пристеночными функциями [37]. Однако основным недостатком двухслойного подхода является то, что его удачное применение известно лишь для достаточно простого типа течений, например, для развитого течения в плоском канале и течения за обратным уступом в канале.

Одним из главных толчков к созданию методов, позволяющих корректно моделировать нестационарное течение в присоединенном пограничном слое является недостаток гибридных RANS-LES подходов, заключающийся в неправильном моделировании профиля скорости в логарифмическом участке. В иностранной литературе данное явление называется Log-Layer Mismatch (LLM) (см., например, [38]). Такая проблема появляется из-за того, что на границе между RANS и LES областью модельные напряжения уменьшаются, и ввиду отсутствия мелкомасштабной турбулентности не происходит компенсации полных напряжений за счет разрешенных. Это приводит к тому, что профиль средней скорости имеет два логарифмических участка, смещенных друг относительно друга. Это может приводить к существенной ошибке в оценке коэффициента трения на стенке. Данный эффект не сильно влияет на оцениваемые характеристики в случае моделирования течений с массивным ярко выраженным отрывом в отличие от присоединенных турбулентных течений.

В последнее время предложен целый класс гибридных взаимодействующих RANS-LES методов крупных вихрей с пристеночным RANS моделированием (Wall Modelled LES, WMLES). В рамках данных подходов с помощью специальных методик в той или иной мере решается проблема LLM. В общем можно выделить три типа таких методик. Первый заключается в добавлении объемного источника турбулентных пульсаций в исходные уравнения (см.,

например [39]). При этом пульсации либо задавались с помощью стохастического метода, либо моделировались при проведении дополнительного DNS расчета.

Второй методикой борьбы с LLM является использование дополнительной фильтрации в пределах RANS-LES интерфейса [40]. Эффективность данного метода была показана на примере расчета достаточно простых течений. Главным недостатком WMLES методов, использующих источник пульсаций и вводящих дополнительную фильтрацию является обязательность задания границ RANS-LES интерфейса до начала расчета. Это существенно осложняет использование данных подходов для расчета сложных пристеночных течений.

Третья WMLES предполагает модификацию турбулентной вязкости в окрестности RANS-LES интерфейса. В работе [41] для этого использовался гибридный подсеточный масштаб длины, который был введен для модели Смагоринского-Лилли [42], и позволил существенно улучшить результаты для моделирования развитого течения в бесконечном плоском канале. В отличие от вышеописанных WMLES подходов, данный обладает большей универсальностью, что делает его более пригодным для расчета сложных течений возле конфигураций с произвольной геометрией.

WMLES подходы часто применяют в рамках зонных методов. Но несмотря на многообещающие результаты, полученные с использованием Embedded LES, его возможности для моделирования течения возле тел со сложной геометрией и наличием отрывных зон недостаточно изучены, и необходимо дальнейшее подтверждение этого подхода.

Наибольшую популярность среди унифицированных моделей имеет метод моделирования отсоединенных вихрей (DES), который представляет собой гибридную модель RANS/LES, что является разумным компромиссом RANS и LES методиками. Моделирование крупных вихрей (LES) включается только в областях течения, где размер (шаг) сетки Δ достаточен для разрешения

турбулентности с масштабом $L_{\text{turb}}(\Delta \approx L_{\text{turb}})$. RANS работает в остальной области течения ($\Delta > L_{\text{turb}}$). Например, для течений возле плохообтекаемых тел с обширной отрывной зоной это означает следующее:

- область присоединенного пограничного слоя считается по RANS подходу, который обеспечивает хорошую точность в подобной ситуации;
- отрывная область, с относительно крупными вихрями, рассчитывается в LES моде.

Основная идея DES состоит в использовании одной и тоже RANS модели в RANS и LES модах. LES мода представляет собой подсеточную версию модели Спаларта-Аллмараса [43] и получается заменой линейного масштаба турбулентности d_w из RANS на масштаб турбулентности $C_{\text{DES}}\Delta$ из модели LES. В результате получаем подсеточную модель из одного уравнения — версия модели SA с моделированием вихрей подсеточного масштаба.

Благодаря впечатляющим результатам, полученным при первом использовании DES его авторами в сложных аэродинамических приложениях ([44], [45], [46]), DES стал достаточно популярным подходом как в области вычислительной газовой динамики (CFD) так и аэроакустики (CAA). Далее использование данного подхода привело к успешным результатам для моделирования широкого класса течений (см. например в [47–54]).

Одной из проблем, возникающих при применении метода DES в оригинальной формулировке, является неправомерное переключение расчета в LES режим внутри пограничного слоя в тех местах, где сеточного разрешения для моделирования с помощью данного подхода не достаточно. При этом модельная часть напряжений мала ввиду того, что расчет в этой области ведется не в RANS режиме. Это приводит к существенным ошибкам в описании течения, вплоть до преждевременного отрыва пограничного слоя при измельчении сетки. Такое явление при использовании оригинальной DES97 модели характерно, например, при моделировании течения возле обратного уступа,

при котором неправомерное переключение в LES режим происходит в районе острой кромки. Для преодоления данной проблемы был разработан метод Delayed DES, DDES [55].

Следующей ветвью развития методики DES стало ее расширение для расчета методом LES с пристеночным RANS моделированием, в итоге был разработан гибридный DDES-WMLES подход IDDES [56]. В рамках данного подхода моделирование течений может происходить в трех различных режимах:

- режим RANS, оперирующий в области невозмущенного (стационарного) пограничного слоя;
- режим LES, в который переключается расчет в областях отрывного течения, находящихся на удалении от стенок;
- режим WMLES, работающий в области присоединенного пограничного слоя при наличии разрешенных турбулентных пульсаций в окрестности твердой стенки.

Также, в отличие от оригинальных WMLES подходов, которые разработаны для расчета течений с однородным направлением потока, подход IDDES может использоваться во всей области возле объекта, имеющего сложную геометрическую конфигурацию.

Применение подходов семейства DES (DDES, IDDES) для моделирования сложных пристеночных турбулентных течений показало очень хорошие возможности в плане предсказания аэродинамических и аэроакустических стационарных и нестационарных характеристик данных методов по сравнению со многими другими [57–59].

Сегрегированные модели чаще всего используются в рамках солверов, работающих на перекрывающихся структурированных сетках, и отличаются тем, что в определенных областях вычислительного домена проводится LES моделирование, а в остальных зонах ведется RANS расчет. При этом вза-

имодействие между расчетными доменами возникает только в области перекрытия. При использовании данного подхода особое внимание уделяется разработке эффективных методов стыковки RANS и LES областей.

К числу сегрегированных моделей относится так называемый Встроенный (Embedded) LES подход (см., например [60]). Этот метод мог бы предоставить очень полезные возможности для проведения LES/WMLES расчета локально, то есть в определенном поддомене всей расчетной области. Основная проблема с реализацией этого подхода заключается в том, что когда течение из области RANS пересекает RANS-LES интерфейс, необходимо описать/добавить турбулентные флуктуации, чтобы перевести течение в возмущенный режим LES. Данная процедура делается для задания нестационарных (содержащих «турбулентный контент») входных граничных условий [61–63].

Применительно к расчету на неструктурированных сетках использование сегрегированных подходов осложняется дополнительной проблемой аккуратной стыковки RANS и LES решения, что для структурированных сеток с технической точки зрения существенно проще.

Среди множества рассмотренных в методов для адаптации к «неструктурированной» идеологии было выбрано семейство DES (DES97, DDES и IDDES методы) с базовой моделью замыкания Спаларта-Аллмараса, что обусловлено следующими причинами.

- Все модели семейства DES относятся к классу методов сквозного счета, что, в отличие от так называемых «сегрегированных» подходов, при расчетах на неструктурированных сетках, не требует дополнительной разработки методик стыковки RANS и LES границ, а также с точки зрения распараллеливания алгоритма не усложняет решение задачи.
- При наличии реализованного солвера RANS с той или иной моделью замыкания подходы семейства DES достаточно легко внедрить в расчетный код.

- Методы DES97, DDES и IDDES верифицированы на широком классе как тестовых задач, так и сложных нестационарных турбулентных, в том числе пристеночных, течений.
- Формулировка гибридных RANS-LES подходов семейства DES является универсальной и не предполагает какого-либо выбора и настройки параметров модели в зависимости от типа течения и вычислительной сетки.

Выбор в пользу семейства DES подтверждается еще тем фактом, что данные подходы в настоящее время активно развиваются и применяются большим количеством исследователей.

Выбор модели замыкания Спаларта-Аллмараса для модифицированной турбулентной вязкости в качестве базовой для гибридных RANS-LES подходов семейства DES был сделан

- по причине ее простоты по сравнению с другими моделями (одно уравнение, нетрудоемкие формулы);
- удобства использования в гибридных RANS-LES подходах.
- Кроме того, данная модель позволяет проводить физически корректное моделирование широкого класса течений (пограничные слои, струи, отрывные течения и т.д.). Последнее подтверждается множеством результатов, описанных в научной литературе.

Глава 2

Реализация гибридных RANS-LES методов моделирования турбулентных течений в рамках программного комплекса NOISEtte на неструктурированных сетках

2.1. Дискретизация уравнения переноса турбулентной вязкости в модели турбулентности Спаларта-Аллмараса

Первой задачей, которая должна была быть выполнена для реализации гибридных RANS-LES методов в рамках программного комплекса NOISEtte, была дискретизация уравнения переноса (см. [A.2](#)) для базовой модели турбулентности Спаларта-Аллмараса применительно к используемым численным методам. Их описание приведено в Приложении Б.

Аппроксимации высокого порядка точности конвективного члена уравнения Спаларта-Аллмараса для переменной $\rho\tilde{\nu}$ (ρ – плотность, $\tilde{\nu}$ модифицированная турбулентная вязкость) производилась в рамках конечно-разностной EBR (Edge-Based Reconstruction) схемы [64] на основе реберно-ориентированной квазиодномерной реконструкции переменных. В программном комплексе NOISEtte для вычисления численного потока на грани ячейки контрольного объема используется метод Роу в случае реконструкции физи-

ческих переменных или противопоточная схема на основе одномерного солвера Хуанг [65] в случае реконструкции потоковых переменных. Было предложено и реализовано два следующих способа для аппроксимации численного потока $F_{ij}^{\rho\tilde{\nu}}$ на грани S_{ij} контрольного объема, разделяющей узлы i и j :

связанный подход, который подразумевает приближенное решение задачи Римана о распаде разрыва (по схеме Роу или Хуанг) для расширенного вектора переменных, включающего $\rho\tilde{\nu}$, характеризующую турбулентную вязкость;

сегрегированный подход, в котором при помощи Римановского солвера (Роу или Хуанг) решается система уравнений для вектора газодинамических переменных, а уравнение Спаларта-Аллмараса для турбулентной вязкости решается отдельно.

В первом случае на вход одномерного солвера Роу или Хуанг подаются реконструированные по EBR схеме высокого порядка точности вектор физических $\mathbf{U} = (\rho, u, v, w, p, \tilde{\nu})^T$ или потоковых $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = (F^\rho, F^{\rho u}, F^{\rho v}, F^{\rho w}, F^E, F^{\rho\tilde{\nu}})^T$ переменных (включая $\tilde{\nu}$ или $F^{\rho\tilde{\nu}}$) в точках i и j .

Поток вычисляется в соответствии с общей схемой

$$F_{ij} = \frac{F_L + F_R}{2} - \frac{\delta}{2} S^{-1} |\Lambda| S (Q_R - Q_L) \quad (2.1)$$

которая выписывается для системы из 6 уравнений. В случае, когда на вход подаются реконструированные значения потоковых переменных, $|\Lambda|$ заменяется на $\text{sign}(\Lambda)$.

Упорядочим собственные значения как $(u, u, u, u + c, u - c, u)$, причём последним поставим значение, отвечающее за турбулентную вязкость. Пусть \mathbf{n} , \mathbf{s} , \mathbf{t} - правая тройка единичных векторов. Тогда матрицы могут быть записаны в следующем виде (примем $\gamma_1 = \gamma - 1$ и опустим для краткости индекс

0 во всех входящих переменных):

$$S = \begin{bmatrix} 1 - \gamma_1 \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} & \gamma_1 \frac{u}{c^2} & \gamma_1 \frac{v}{c^2} & \gamma_1 \frac{w}{c^2} & \frac{-\gamma_1}{c^2} & 0 \\ -u_s & s_x & s_y & s_z & 0 & 0 \\ -u_t & t_x & t_y & t_z & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\gamma_1 \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} - \frac{u_n}{c} \right) & \frac{1}{2} \left(\gamma_1 \frac{-u}{c^2} - \frac{-n_x}{c} \right) & \frac{1}{2} \left(\gamma_1 \frac{-v}{c^2} - \frac{-n_y}{c} \right) & \frac{1}{2} \left(\gamma_1 \frac{-w}{c^2} - \frac{-n_z}{c} \right) & \frac{1}{2} \frac{\gamma-1}{c^2} & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\gamma_1 \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} + \frac{u_n}{c} \right) & \frac{1}{2} \left(\gamma_1 \frac{-u}{c^2} + \frac{-n_x}{c} \right) & \frac{1}{2} \left(\gamma_1 \frac{-v}{c^2} + \frac{-n_y}{c} \right) & \frac{1}{2} \left(\gamma_1 \frac{-w}{c^2} + \frac{-n_z}{c} \right) & \frac{1}{2} \frac{\gamma-1}{c^2} & 0 \\ -\frac{\nu}{2} \gamma_1 \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} & \nu \gamma_1 \frac{u}{c^2} & \nu \gamma_1 \frac{v}{c^2} & \nu \gamma_1 \frac{w}{c^2} & -\nu \gamma_1 \frac{1}{c^2} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ u & s_x & t_x & cn_x + u & -cn_x + u & 0 \\ v & s_y & t_y & cn_y + v & -cn_y + v & 0 \\ w & s_z & t_z & cn_z + w & -cn_z + w & 0 \\ \mathbf{u}^2/2 & u_s & u_t & u_n c + h & -u_n c + h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu & \nu & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Обозначим компоненту ρ диссипативной часть потока $S^{-1}|\Lambda|S(Q_R - Q_L)$ за D_ρ . Также введём обозначение $V_1 = |u_{n,0}|$ для случая реконструкции консервативных переменных и $V_1 = \text{sign}(u_{n,0})$ для случая реконструкции потоковых переменных. Тогда поток $(\rho\nu)$ можно выразить как

$$F_{ij}^{\rho\tilde{\nu}} = \frac{F_{\rho\nu}(Q_L) + F_{\rho\nu}(Q_R)}{2} - \frac{\delta}{2} (\nu_0(D_\rho - V_1(\rho_R - \rho_L)) + |u_{n,0}|(\rho_R\nu_R - \rho_L\nu_L)) \quad (2.4)$$

Если ν_0 определяется как $(\nu_L + \nu_R)/2$, то якобиан для неявной схемы выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial F_{ij}^{\rho\tilde{\nu}}}{\partial(\rho\nu)_L} = \frac{u_{n,L}}{2} - \frac{\delta}{2} \left(\frac{1}{2\rho_L} (D_\rho - V_1(\rho_R - \rho_L)) + |u_{n,L}| \right) \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial F_{ij}^{\rho\tilde{\nu}}}{\partial(\rho\nu)_R} = \frac{u_{n,R}}{2} - \frac{\delta}{2} \left(\frac{1}{2\rho_R} (D_\rho - V_1(\rho_R - \rho_L)) - |u_{n,R}| \right) \quad (2.6)$$

Согласно второму методу, для вычисления потока $F_{ij}^{\rho\tilde{\nu}}$ на грани S_{ij} используется посчитанное по методу Роу (или Хуанг) значение потока плотности F_{ij}^ρ . При этом, в случае реконструкции физических переменных, а именно модифицированной турбулентной вязкости $\tilde{\nu}_i$ и $\tilde{\nu}_j$, численный поток в уравнении Спаларта-Аллмараса определяется следующим образом:

$$F_{ij}^{\rho\tilde{\nu}} = \begin{cases} F_{ij}^\rho \cdot \tilde{\nu}_i, & F_{ij}^\rho \geq 0 \\ F_{ij}^\rho \cdot \tilde{\nu}_j, & F_{ij}^\rho < 0 \end{cases}. \quad (2.7)$$

Если же реконструкция подвергается потоковая переменная $F^{\rho\tilde{\nu}}$, то численный поток $F_{ij}^{\rho\tilde{\nu}}$ предлагается вычислять как

$$F_{ij}^{\rho\tilde{\nu}} = \begin{cases} F_i^{\rho\tilde{\nu}}, & F_{ij}^\rho \geq 0 \\ F_j^{\rho\tilde{\nu}}, & F_{ij}^\rho < 0 \end{cases}. \quad (2.8)$$

Якобиан для неявной схемы в случае реконструкции консервативных переменных выглядит следующим образом

$$\frac{\partial F_{ij}^\rho}{\partial(\rho\nu)_L} = \text{sign}(F_{ij}^\rho) \cdot \frac{F_{ij}^\rho}{\rho_L} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial F_{ij}^\rho}{\partial(\rho\nu)_R} = (1 - \text{sign}(F_{ij}^\rho)) \cdot \frac{F_{ij}^\rho}{\rho_R} \quad (2.10)$$

В случае реконструкции потоковых переменных якобиан выражается следующим образом:

$$\frac{\partial F_{ij}^\rho}{\partial(\rho\nu)_L} = \text{sign}(F_{ij}^\rho) \cdot u_{n,L}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial F_{ij}^\rho}{\partial(\rho\nu)_R} = (1 - \text{sign}(F_{ij}^\rho)) \cdot u_{n,R}. \quad (2.12)$$

Второй из предложенных способов является более экономичным с вычислительной точки зрения, что обусловлено отсутствием необходимости решать систему уравнений для большего числа переменных. В то же время первый

метод, как будет показано в третьей главе, позволяет добиться более устойчивого и более точного решения по сравнению с первым.

2.2. Определение пространственных масштабов турбулентности в подходах RANS, LES и WMLES

В гибридных подходах семейства DES с моделью замыкания Спаларта-Аллмараса переход от зон, где работает RANS, к LES зонам осуществляется за счет замены масштаба турбулентности (что есть расстояние до стенки в узле сетки), присутствующего в диссипативном члене уравнения Спаларта-Аллмараса

$$Y_\nu = C_{w1} \rho f_w \left(\tilde{\nu} / d_w \right)^2 \quad (2.13)$$

на LES масштаб $C_{DES} \Delta$, определяемый сеточным разрешением Δ в данной точке (C_{DES} — эмпирическая константа). В формуле (2.13) C_{w1} есть константа, а f_w — некая демпфирующая функция. Такая замена возможна, исходя из соображений локального равновесия, при котором конвекция равна диффузии, то есть $\frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \tilde{\nu} u_i}{\partial x_i} = D_\nu$, и, как следствие, согласно уравнению Спаларта-Аллмараса, производство турбулентной энергии равно её диссипации: $G_\nu = Y_\nu$. Из последнего соотношения можно получить выражение для турбулентной вязкости, которая будет совпадать с эффективной вязкостью модели Смагоринского при замене d_w на Δ , и определение C_{DES} через эмпирическую константу данной модели. В оригинальном методе DES соотношение для гибридного масштаба турбулентности выглядит как

$$l_{DES} = \min(d_w, C_{DES} \Delta) \quad (2.14)$$

В результате данной подстановки смоделированная турбулентная вязкость RANS вблизи стенки перерождается в вязкость модели Смагоринского на отдалении от нее.

Для представления наименьших разрешимых масштабов в области LES необходимо, чтобы ширина фильтра в определении масштаба турбулентности (2.14) не превосходила величины Δ , зависящей от выбора шага разностной сетки.

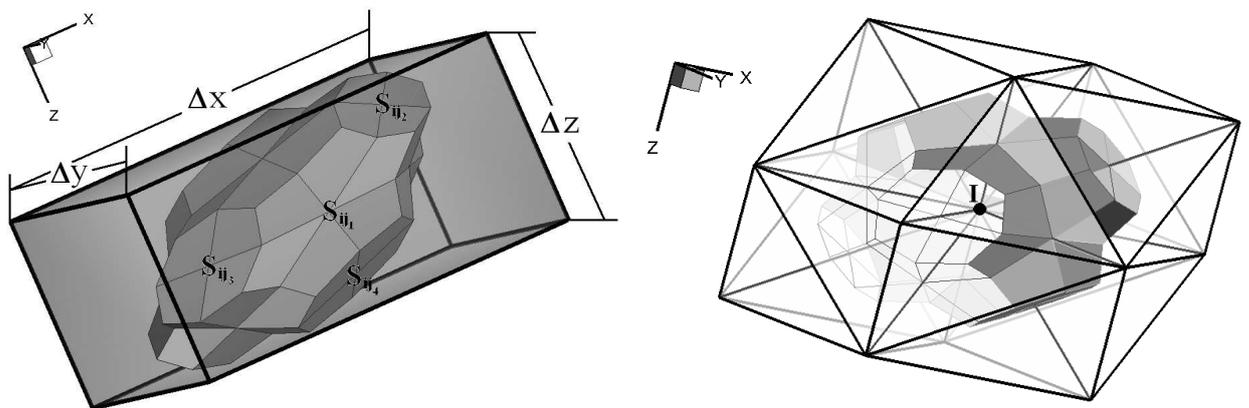


Рисунок 2.1: Расчетная ячейка и окружающий ее параллелепипед (слева) и тетраэдры, имеющие общую вершину I и часть расчетной ячейки (справа)

Как уже было отмечено выше, величина Δ , используемая непосредственно при построении модели, определяется сеточными характеристиками. В этом смысле, техника нахождения Δ , в зависимости от конфигурации и от шага сетки, входит в описание самой модели. В случае неструктурированных сеток, определение Δ не так очевидно, как при использовании структурированных сеток.

В данной работе предлагается ввести определение ширины фильтра для неструктурированной сетки, как максимальной величины из всех высот тетраэдров, имеющих общую вершину (см. Рис. 2.1 справа)

$$\Delta = \max_{j=1, \dots, N_T^i} \max_{k=1, \dots, 4} h_k^j \quad (2.15)$$

где N_T^i – число тетраэдров с общей вершиной i , вокруг которой построена расчетная ячейка, h_k^j – k -я высота j -го тетраэдра.

Следует отметить, что в случае, когда сетка становится декартовой, выражение (2.15) эквивалентно широко распространенному для структурированных сеток определению $\Delta = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

Относительно оригинального метода DES, применение его DDES модификации, доработанной, в частности, в целях преодоления проблем, связанных с неравномерным переключением расчета в LES режим внутри пограничного слоя, где должен работать RANS, не требует дополнительных методик для его адаптации к использованию на неструктурированных сетках.

Однако в методе IDDES, расширяющем DDES для LES расчета с пристеночным моделированием (WMLES), при более сложном определении подсеточного масштаба турбулентности как

$$\Delta = \min [\max (C_w d_w, C_w h_{\max}, h_{wn}), h_{\max}] \quad (2.16)$$

используется еще локальный размер ячейки h_{wn} сетки в направлении, перпендикулярном стенке. Определение этого размера также неочевидно применительно к неструктурированным сеткам. В формуле (2.16) h_{\max} – ширина фильтра, определяемая соотношением (2.15), C_w – некая эмпирическая константа.

Значение величины h_{wn} для неструктурированной сетки предлагается определять как проекцию контрольного объема, построенного возле узла сетки, на вектор нормали к стенке. Формально для произвольной неструктурированной сетки это можно записать следующим образом. Пусть \mathbf{n}_i – единичный вектор нормали к стенке. Для каждого j из N_T^i тетраэдров, имеющих общую вершину i , определим M_j^+ , M_j^- , G_j^+ , G_j^- , O_j^+ , O_j^- как максимальные по модулю положительные и отрицательные проекции на \mathbf{n}_i векторов, соединяющих

вершину i и центры масс ребер, граней и самого тетраэдра. Тогда h_{wn} будет вычисляться следующим образом:

$$h_{wn} = \max_{j=1,\dots,N_T^i} (M_j^+, G_j^+, O_j^+) + \max_{j=1,\dots,N_T^i} (M_j^-, G_j^-, O_j^-) \quad (2.17)$$

В программном комплексе NOISEtte вычисление подсеточных масштабов Δ и h_{wn} , определяемых по формулам (2.15) и (2.17) соответственно, реализовано в рамках основного расчетного модуля и происходит на этапе инициализации. Для вычисления таких параметров, как расстояние до стенки d_w и компоненты вектора нормали к стенке \mathbf{n}_i в узле неструктурированной сетки, разработана отдельная сервисная программа, адаптированная к работе на параллельной вычислительной системе.

2.3. Реализация гибридной разностной схемы для невязких потоков, соответствующей RANS-LES методам

Раздел 2.3 посвящен особенностям адаптации гибридной схемы [46] для невязких потоков к используемой численной схеме повышенного порядка точности и неструктурированным сеткам.

В рамках RANS-LES подходов для LES областей противоточные схемы становятся слишком диссипативными, а центрально-разностные схемы оказываются слабоустойчивыми в RANS зоне. Поэтому для корректного, без излишней диссипации в отрывных зонах и при этом устойчивого в пристеночных областях, моделирования методами семейства DES необходимо использовать гибридные численные схемы для невязких потоков. Исходя из этого, численный поток через грань S_{ij} , разделяющую точки i и j , определяется как взвешенная сумма его центрально-разностной и противоточной аппроксимации:

$$F_{ij} = (1 - \sigma) \cdot F_{ij}^C + \sigma \cdot F_{ij}^{UPW}. \quad (2.18)$$

В работе этот подход применен в рамках используемой EBR схемы повышенной точности для неструктурированных сеток. В выражении (2.18) F_{ij}^C и $F_{ij}^{UPW} = F_{ij}^C - \sigma a \frac{f_{ij}^R - f_{ij}^L}{2}$ – соответственно центрально-разностная и противопоточная аппроксимация конвективного потока, вычисляемые по схеме Роу или Хуанг в зависимости от типа переменных на входе. Величины f_{ij}^L и f_{ij}^R представляют собой значения, полученные на основе квазиодномерной реберно-ориентированной реконструкции физических (схема Роу) или потоковых (схема Хуанг) переменных слева и справа от грани S_{ij} вычислительной ячейки. $a = |A_{ij}|$ в случае использования схемы Роу, $a = \text{sgn}A_{ij}$ для схемы Хуанг, где A_{ij} – матрица Якоби на грани ячейки. Легко видеть, что численный поток F_{ij} в (2.18) может быть записан так же в форме параметрической противопоточной схемы как

$$F_{ij} = F_{ij}^C - \sigma a \frac{f_{ij}^R - f_{ij}^L}{2} \quad (2.19)$$

Параметр σ в выражениях (2.18) и (2.19) обозначает количество численной вязкости и меняется от 0 в LES зонах до 1 в пристеночных областях, где расчет ведется в RANS режиме. Для его определения можно использовать различные критерии. Он может быть представлен в виде функции, зависящей от моделируемого течения. Также его распределение может быть задано статически. В рамках программного комплекса NOISEtte реализованы различные способы задания функции распределения количества численной вязкости.

2.4. Калибровка константы C_{DES} в гибридных RANS-LES подходах

Основная эмпирическая константа C_{DES} гибридных подходов семейства DES в общем случае зависит от используемого численного метода для дискретизации основных уравнений. Ее калибровка была осуществлена путем решения классической задачи о затухании однородной изотропной турбулентности, которая представляет собой простейшую математическую реализацию турбулентного течения, и поэтому является одним из фундаментальных тестов для проверки LES методик к моделированию турбулентности. В рамках подхода DES при моделировании затухания однородной изотропной турбулентности исходно RANS модель Спаларта-Аллмараса выступала в качестве дифференциальной подсеточной модели. Задача хороша тем, что позволяет при минимальной вычислительной стоимости проверить используемые подход и солвер на способность корректно моделировать турбулентные структуры и энергетический каскад.

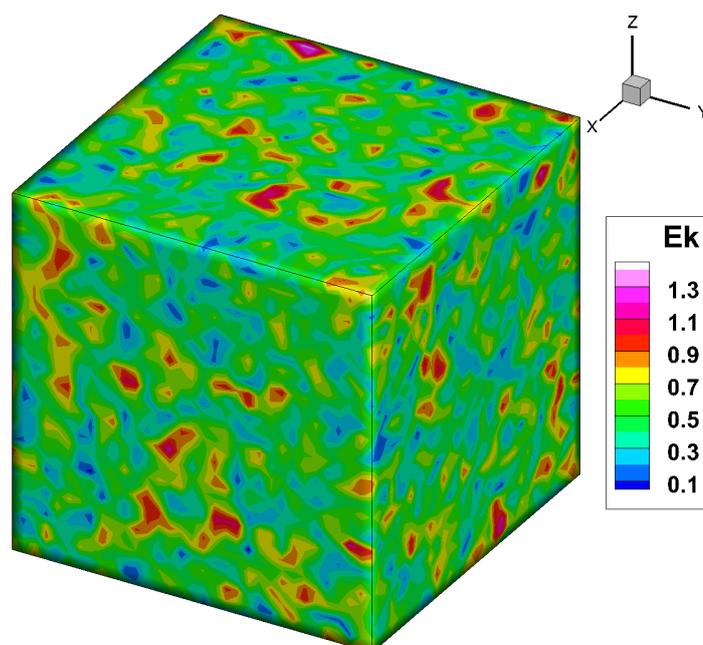


Рисунок 2.2: Начальное распределение кинетической энергии турбулентности для задачи о затухании однородной изотропной турбулентности

Физический эксперимент [66], данные из которого использовались для калибровки константы C_{DES} , представлял собой течение, возбуждаемое турбулентной решеткой при прохождении через нее однородного потока. По мере удаления от решетки возникшая турбулентность постепенно затухала ввиду отсутствия причин, способствующих ее дальнейшей генерации. Выходные данные эксперимента представляют собой спектры кинетической энергии турбулентности, построенные по полям течения на различных расстояниях от решетки, где влияние ее геометрии минимально.

Расчетной областью задачи, изображенной на Рис.2.2, для проведения численного моделирования является куб размерами $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$. Для того чтобы течение было изотропным, по всем трем направлениям ставились периодические граничные условия. Расчет и сравнение с результатами моделирования проводились следующим образом. В качестве начальных условий задавалось случайное распределение скоростей, полученное с помощью обратного преобразования Фурье от экспериментального спектра, полученного по полю на определенном расстоянии от решетки. Далее проводилось численное моделирование течения, представляющего собой постепенное естественное затухание турбулентности. Характерное число Рейнольдса задачи $Re = 1600$.

Результаты расчета представляли собой поля трех компонент скорости в безразмерные моменты времени $T=0.87$ и $T=2$, по которым потом строился энергетический спектр и происходило сравнение с экспериментальными данными. При этом каждый из указанных моментов времени соответствует определенному расстоянию по мере удаления от решетки в эксперименте. Для построения трехмерных пространственных спектров и генерации начального распределения использовалась утилита, разработанная в лаборатории «Вычислительная гидроакустика и турбулентность» НИИ ММИСУ, г. Санкт-Петербург.

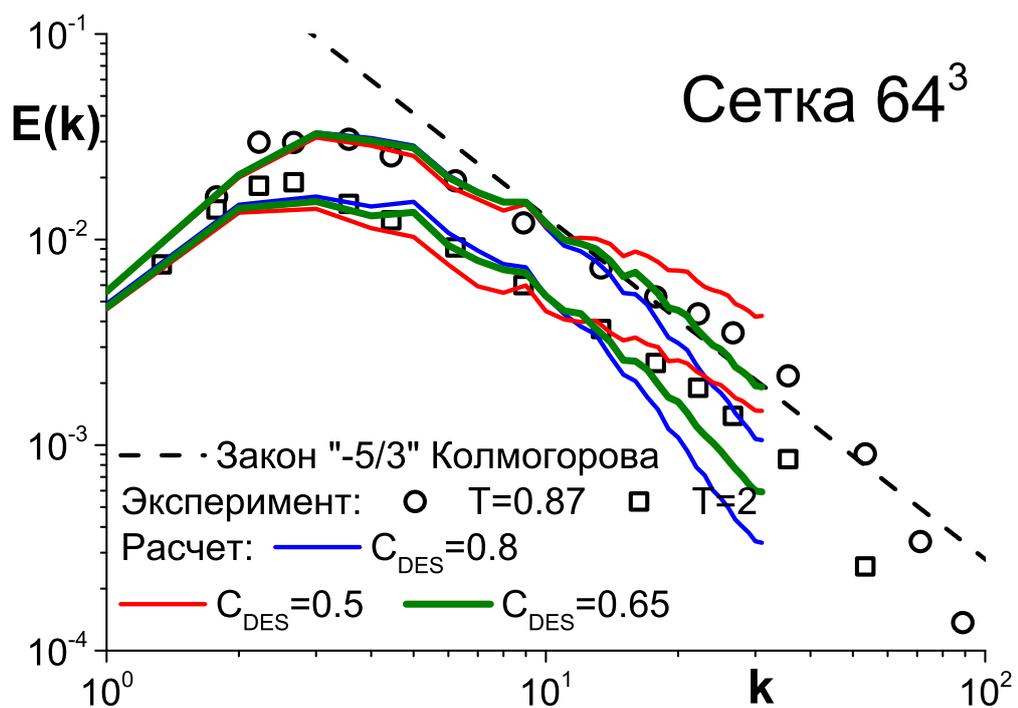
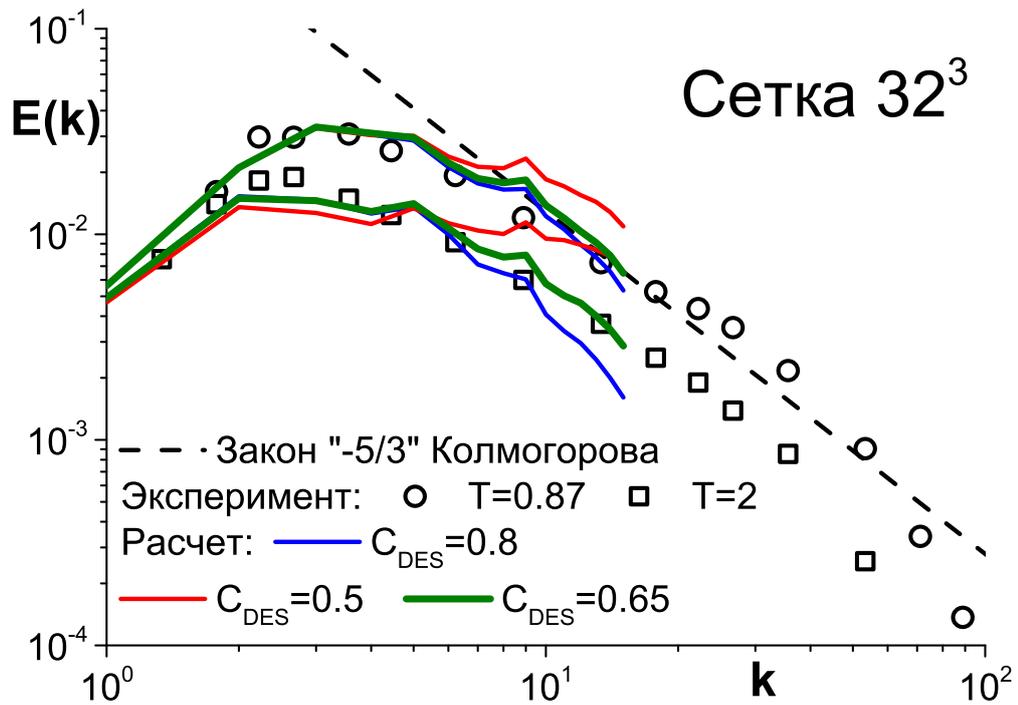


Рисунок 2.3: Энергетический спектр турбулентности на моменты времени $T=0.87$ и $T=2$ на сетках 32^3 (сверху) и 64^3 (снизу)

Расчеты проводились на двух равномерных сетках с разрешением в 32 и 64 ячейки на ширину области. Для дискретизации по пространству использовалась чистая центрально-разностная схема повышенного порядка точности. Интегрирование по времени происходило с помощью явной схемы Рунге-

Кутты, при этом максимальное значение числа Куранта в области моделирования достигало 0.5.

На Рис. 2.3 представлены результаты моделирования в виде энергетических спектров для сеток 32^3 и 64^3 на моменты времени $T=0.87$ и $T=2$ для значений константы $C_{DES} = 0.5, 0.65$ и 0.8 . Близость результатов расчетов с экспериментальными данными говорит об адекватности работы LES режима в рамках гибридного подхода DES с моделью замыкания Спаларта-Аллмараса. С одной стороны, правильно моделируется каскадный перенос энергии и постепенное затухание общей турбулентной энергии. С другой стороны, на оба момента времени уклон кривой энергетического спектра в инерционном интервале соответствует как теоретическим оценкам (закону «-5/3» Колмогорова), так и экспериментальным данным. Как видно из графиков, значение $C_{DES} = 0.65$ является наиболее оптимальным для используемой численной схемы. Также можно заметить, что для всех рассмотренных значений эмпирической константы наблюдается незначительное отклонение графиков от экспериментальных значений начиная примерно с $k = 11$, что вполне соответствует лучшим известным результатам, полученным на структурированных сетках.

Глава 3

Верификация реализованных моделей на примере канонических турбулентных течений

3.1. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине

Первая задача представляет собой стационарное течение возле бесконечной пластины. Расчеты были проведены с целью подтверждения корректности реализованного подхода RANS с моделью замыкания Спаларта-Аллмараса (SA RANS).

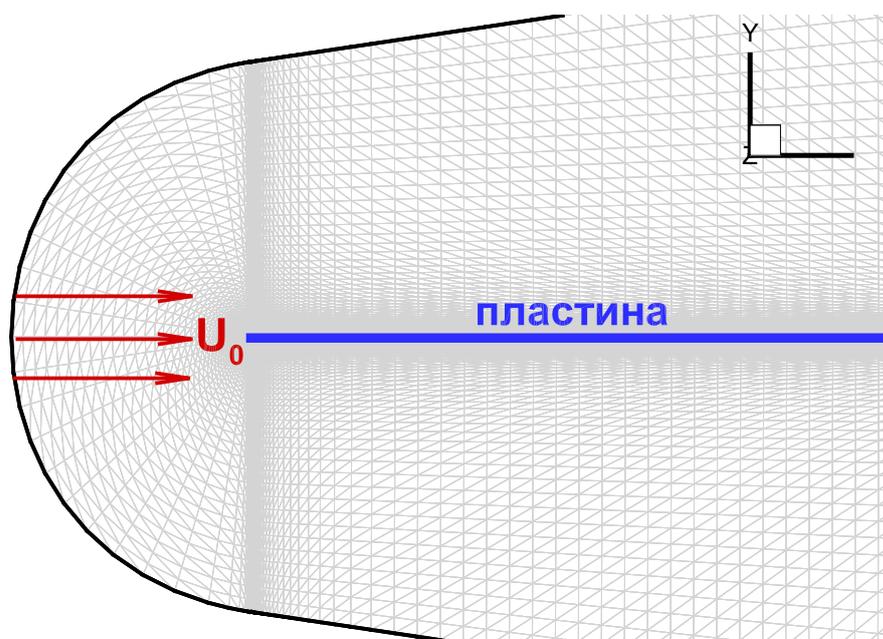


Рисунок 3.1: Вид расчетной области и сетки в поперечном сечении для задачи о стационарном обтекании бесконечной пластины

Рассматриваемая конфигурация представляет собой поток, набегающий на бесконечную пластину (см. Рис. 3.1). Характерное число Рейнольдса задачи $Re = 2.3 \cdot 10^6$, посчитанное по скорости $U_0 = 34$ м/с и длине $L = 1$ м. В поперечном направлении (ось Z) ставились условия периодичности.

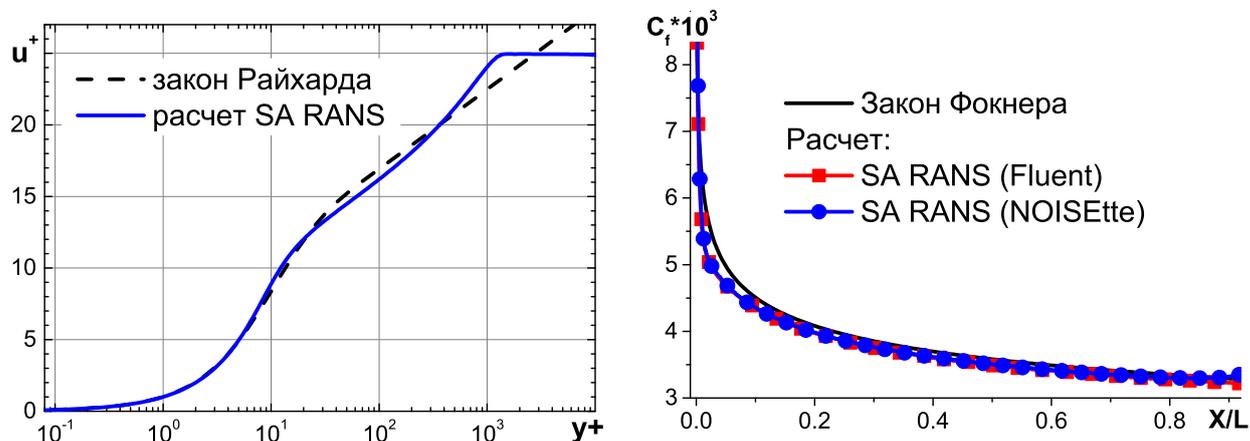


Рисунок 3.2: Осредненный профиль скорости (слева) и осредненное значение коэффициента трения (справа) для задачи о стационарном обтекании бесконечной пластины

Из сравнения результатов моделирования (см. Рис. 3.2 в центре и справа) с аналитическими оценками и результатами, полученными с помощью коммерческого пакета Fluent, можно судить о правильной работе внедренной в комплекс NOISEtte и адаптированной к расчетам на неструктурированных сетках модели турбулентности Спаларта-Аллмараса.

3.2. Турбулентное течение в плоском канале

Рассматривается задача для верификации реализованной методики, представляющая собой установившееся течение в плоском канале. Такая постановка является хорошим тестом для проверки возможностей LES-модели для корректного расчета нестационарного пристеночного турбулентного течения.

В задаче воспроизводится развитое турбулентное течение в бесконечном по продольному и поперечному направлениям канале. Расчетная область представляет собой параллелепипед размерами $4H \times 1H \times 1.5H$ ($L_x \times L_y \times L_z$),

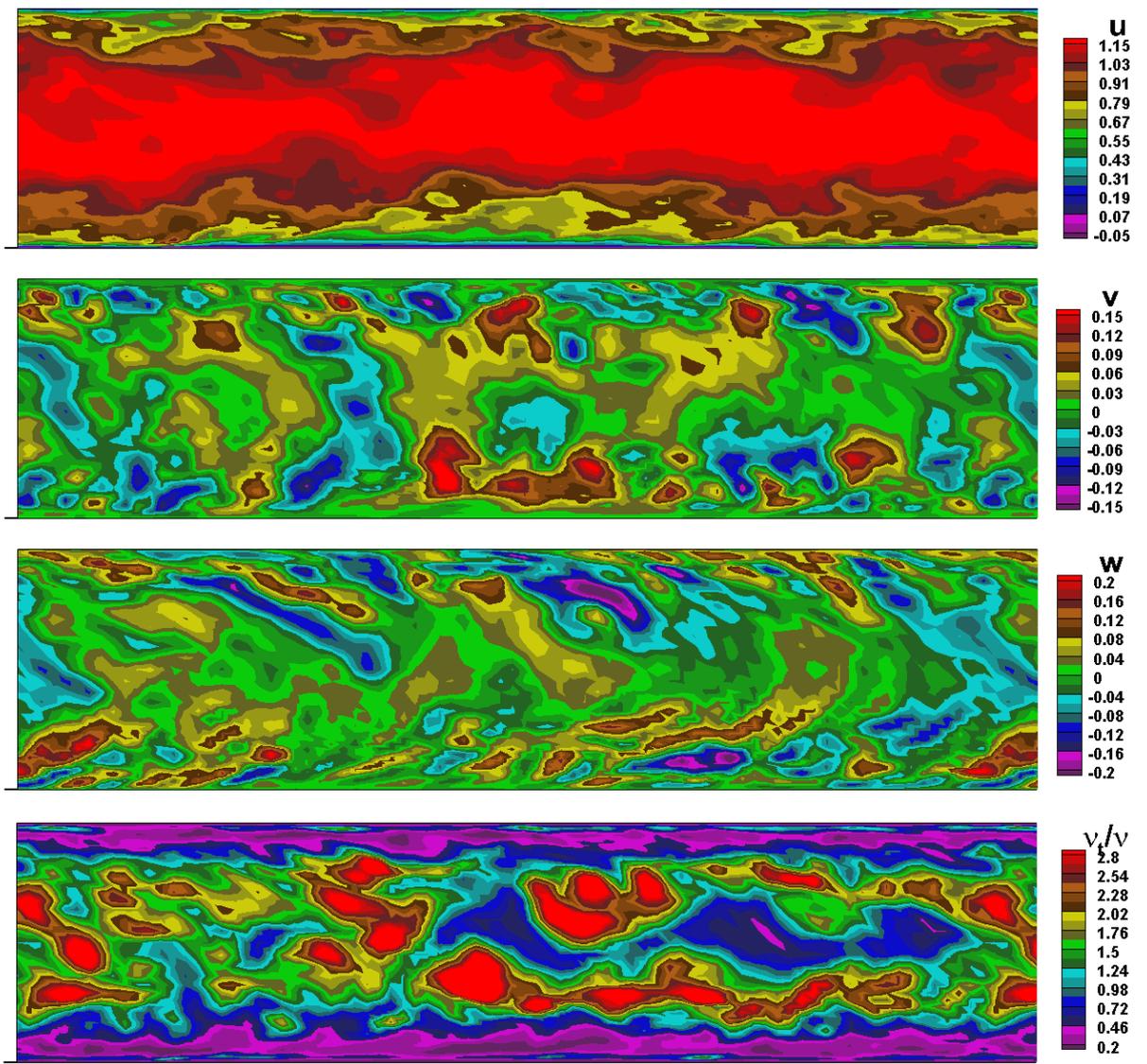


Рисунок 3.3: Мгновенные поля течения для задачи о развитом турбулентном течении в плоском канале

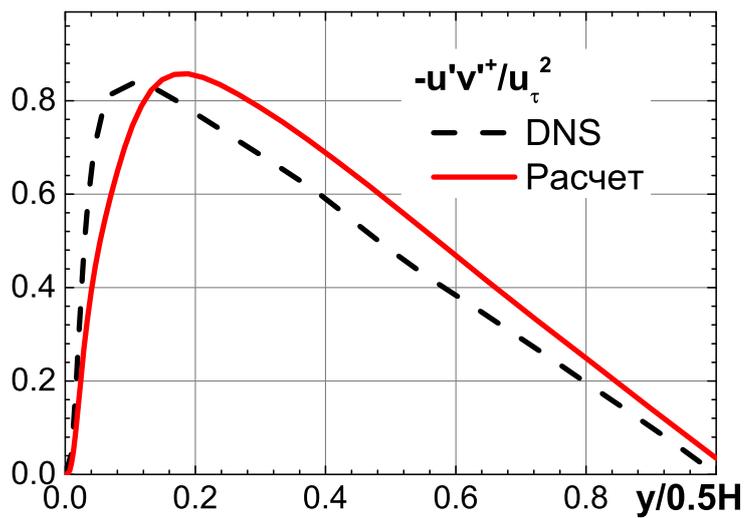
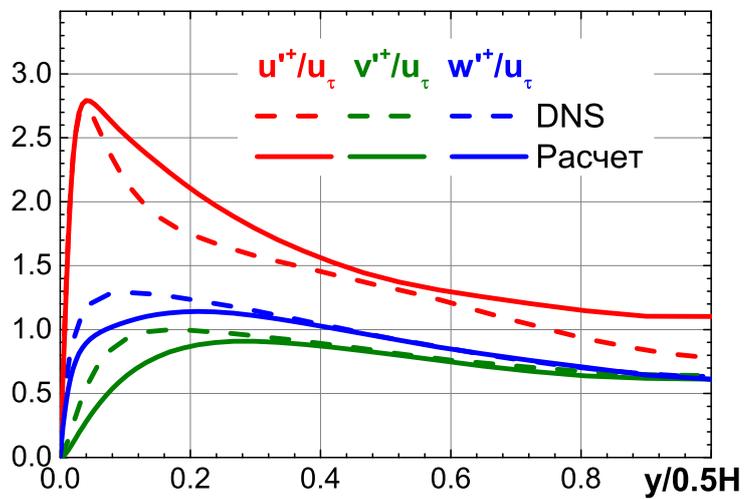
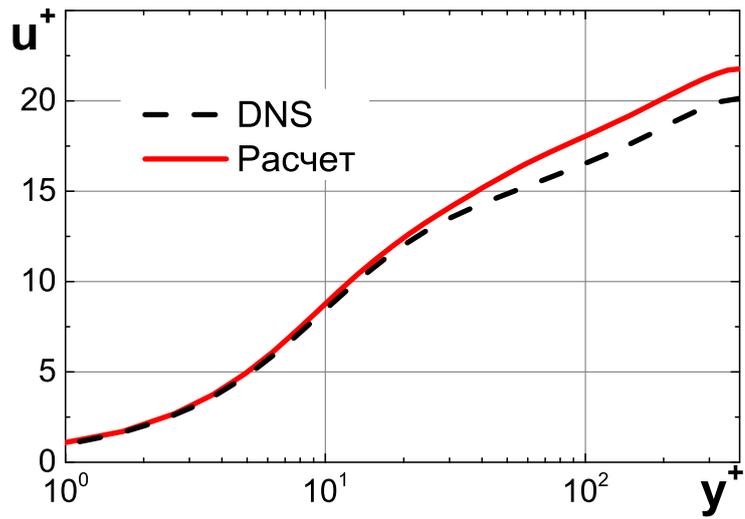


Рисунок 3.4: Профили средней скорости (сверху) и разрешенных напряжений Рейнольдса (в центре и снизу) в сравнении с экспериментальными данными для задачи о развитом турбулентном течении в плоском канале

где H – безразмерная ширина канала. Для поддержания расхода вдоль координаты X и возможности использовать условие периодичности в данном направлении, в уравнение для продольной компоненты скорости вводился источник член, обеспечивающий фиксированный градиент давления. На твердых стенках строились условия прилипания. Вычислительная сетка была построена с учетом требований для LES расчета с хорошим разрешением турбулентных структур ($\Delta x^+ = 40, \Delta z^+ = 20, \Delta y_1^+ < 1$).

Моделирование проводилось для $Re_\tau = 400$ с использованием подхода IDDES, что соответствовало $Re = 1.4 \cdot 10^4$, рассчитанному по соответствующей среднерасходной скорости. Для сравнения были взяты данные из расчета методом прямого численного моделирования (DNS) [67].

Ввиду того, что возмущение для данной задачи обусловлено только начальными условиями, которые задавались в виде некоего нефизичного распределения скоростей, любое вовлечение дополнительной (численной) вязкости может сказаться на корректном воспроизведении течения и на конечных результатах. Поэтому для дискретизации по пространству использовалась чистая центрально-разностная схема повышенного порядка точности. Интегрирование по времени проводилось с помощью явной схемы Рунге-Кутты, шаг выбирался таким образом, чтобы значение числа Куранта во всей области не превышало 0.5.

На Рис. 3.3 изображены мгновенные поля компонент скорости и отношения турбулентной вязкости к молекулярной в центральном сечении (плоскости XY). На нем можно увидеть принципиально нестационарный характер течения. При этом развитие турбулентных пульсаций и образование турбулентных структур наблюдается во всех областях, относящихся к различным подслоям пограничного слоя.

Корректность моделирования нестационарного пристеночного турбулентного течения подтверждается сравнением выходных данных расчета с DNS данными по моментам первого и второго порядка. Из графиков, представ-

ленных на Рис. 3.4, на которых изображены профили средней скорости и разрешенных напряжений Рейнольдса, можно судить о том, что исследуемое течение воспроизводится достаточно правильно. Постановка задачи позволяет проводить осреднение не только по времени, но и по пространству по продольной (X) и поперечной (Z) координате, что способствует более быстрой сходимости результатов.

Хорошее согласование данных из расчета с данными DNS позволяет сделать вывод о возможности эффективного использования реализованной методики для расчетов по конфигурациям, которые предполагают пристеночное LES-моделирование для получения корректных аэродинамических и акустических характеристик.

3.3. Нестационарное турбулентное течение в канале с обратным уступом

Третьей задачей, выбранной для верификации реализованных RANS-LES методов, является моделирование пристеночного турбулентного течения возле бесконечного обратного уступа в канале, для которого характерно наличие отрыва потока и дальнейшее его присоединение. Для данной задачи использование вихреразрешающих подходов приводит к существенным улучшениям в предсказании осредненных характеристик течения по сравнению с результатами моделирования методом стационарного RANS [56].

Для анализа и верификации были взяты соответствующие экспериментальные данные [68]. Задача хороша тем, что она позволяет проверить работу всех трех режимов, которые предусмотрены в рамках подхода IDDES: нестационарный RANS в области перед уступом, LES и WMLES в областях за уступом вдали от стенки и в ее окрестности соответственно, переключение в которые обусловлено срывом потока и переходом течения в нестационарный режим.

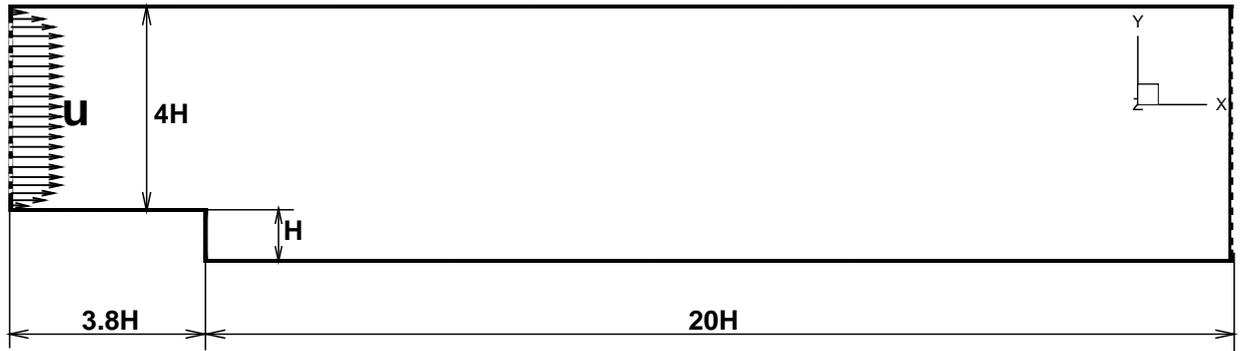


Рисунок 3.5: Схема расчетной области для задачи обтекания бесконечного обратного уступа в канале

На Рис. 3.5 изображена схема расчетной области исследуемой конфигурации в двумерном сечении. Пунктирной линией обозначены неотражающие входные и выходные граничные условия. Сплошная линия соответствует твердым стенкам и условиям прилипания. В поперечном направлении (вдоль оси Z) использовались периодические граничные условия, при этом ширина расчетной области составляла $L_Z = 2H$.

Характерное число Рейнольдса задачи, основанное на высоте уступа $H=3.8$ см. и скорости входного потока $U_0 = 1.3$ м/с, что соответствует числу Маха $M \cong 0.033$, равно $Re = 28000$.

Расчетная неструктурированная сетка для задачи содержит 1311690 узлов и 7597800 тетраэдров. Характерный размер ячейки в поперечном направлении составляет $\Delta z = 0.05H$. При построении вычислительной сетки было уделено особое внимание области за обратным уступом, в которой происходит образование слоя смешения и его присоединение к нижней стенке, что приводит к возникновению нестационарного пристеночного турбулентного течения.

На входной границе расчетной области задавались соответствующие условиям эксперимента профили скорости и турбулентной вязкости, полученные в результате дополнительного расчета на плоской пластине. Было проведено четыре расчета: методами RANS, DDES и два расчета методом IDDES. Последние отличались между собой способом дискретизации конвективного

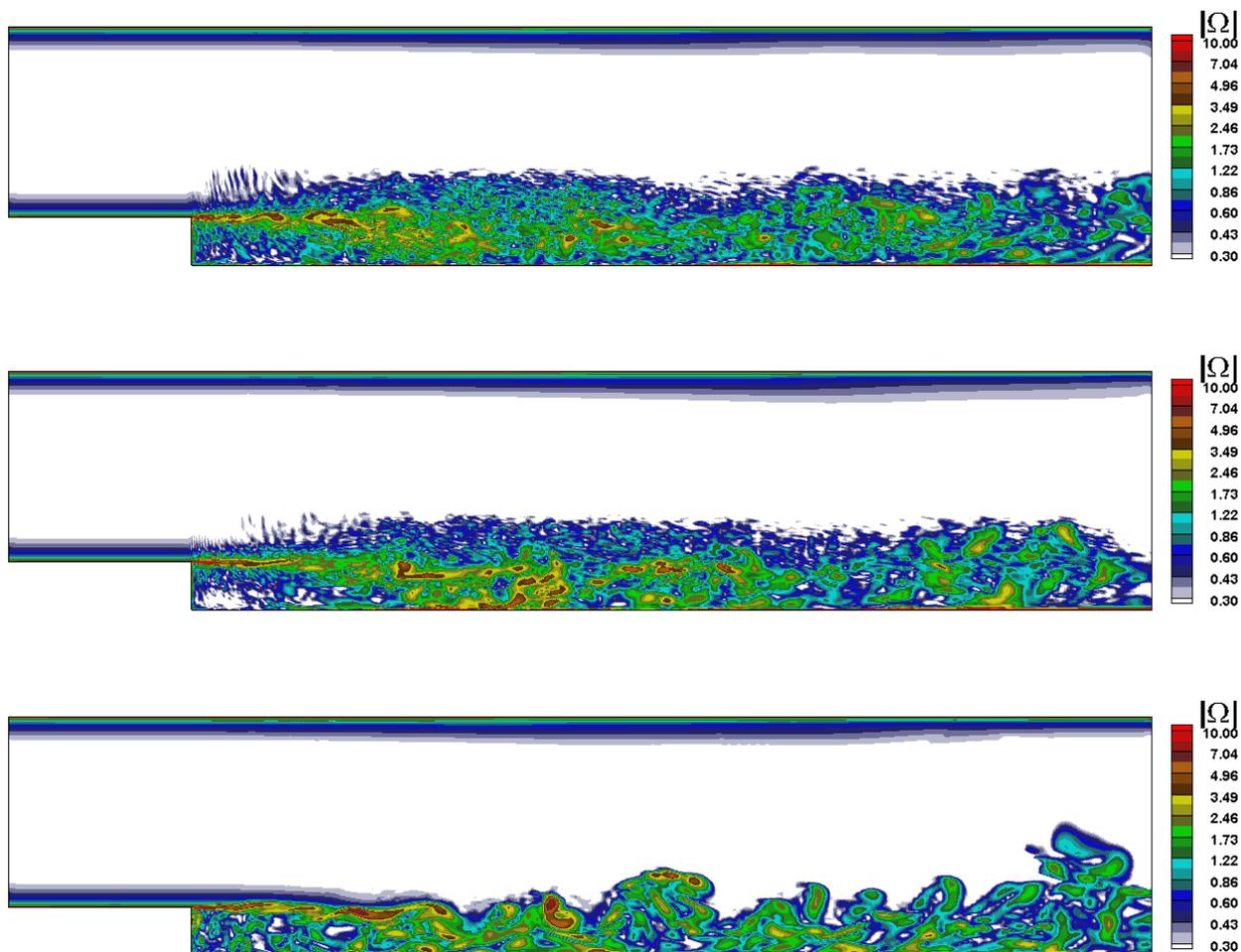


Рисунок 3.6: Мгновенные поля завихренности для задачи обтекания бесконечного обратного уступа в канале из расчетов DDES (сверху), IDDES1 (в центре) и IDDES2 (снизу)

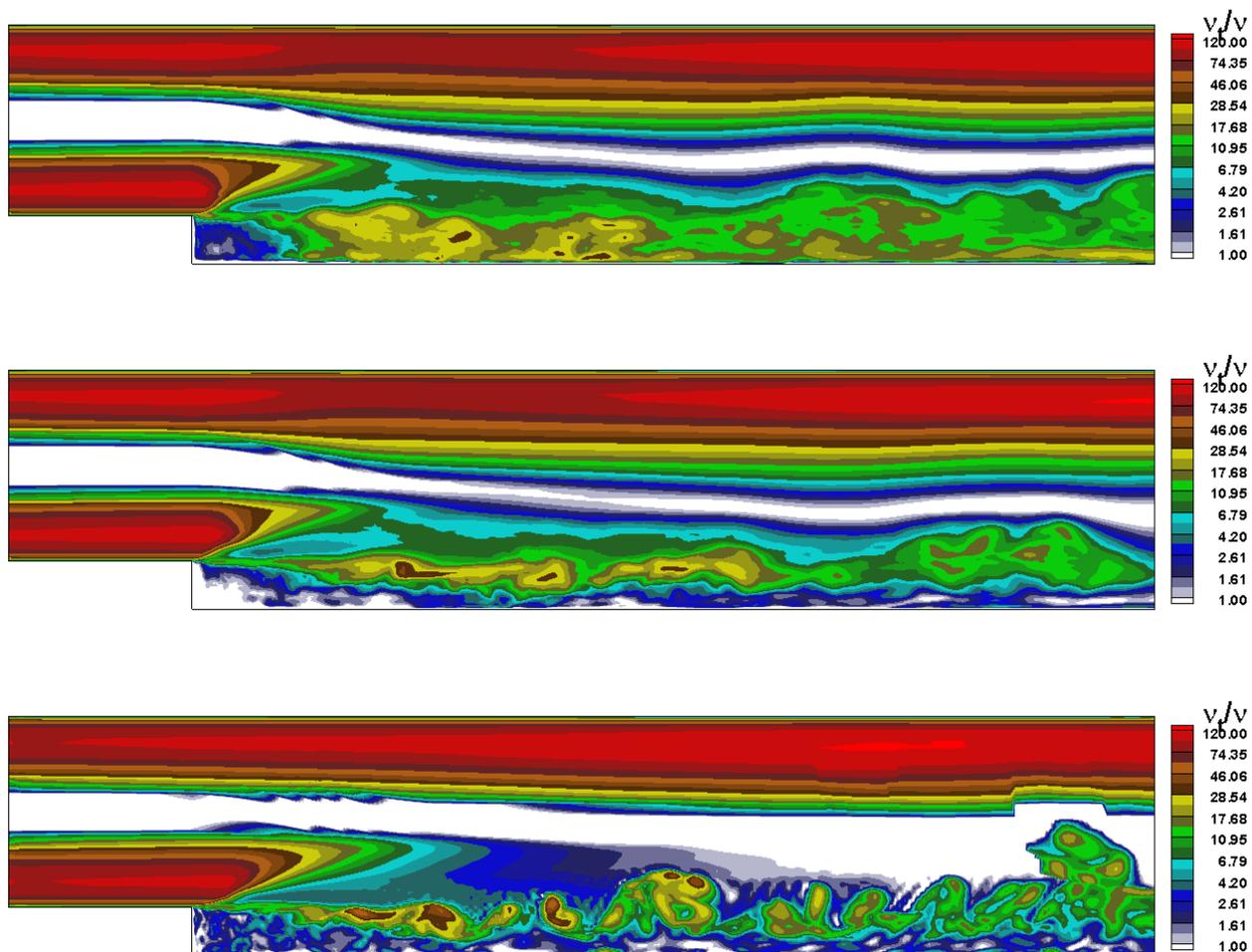


Рисунок 3.7: Мгновенные поля отношения турбулентной вязкости к молекулярной для задачи обтекания бесконечного обратного уступа в канале из расчетов DDES (сверху), IDDES1 (в центре) и IDDES2 (снизу)

члена в уравнении Спаларта-Аллмараса: расчеты IDDES1 (сегрегированный подход) и IDDES2 (связанный подход).

На Рис 3.6 и Рис 3.7 представлены картины распределения модуля завихренности и отношения турбулентной вязкости к молекулярной соответственно, характерные для расчетов вихреразрешающими гибридными методами DDES и IDDES. При общей схожести течений можно заметить, что при использовании IDDES подхода в окрестности нижней стенки за уступом наблюдается большее количество разрешенных турбулентных структур. Это может объясняться работой WMLES ветви данного подхода, в отличие от DDES метода, где присоединенный пограничный слой рассчитывается в режиме URANS. Кроме того, из мгновенных картин течения можно увидеть наличие осцилляций решения при использовании сегрегированного подхода для дискретизации конвективного члена в модели Спаларта-Аллмараса (расчеты DDES и IDDES1). Это может объясняться тем, что исследуемое течение достаточно низкомаховое, и это, в свою очередь, может приводить к возникновению неустойчивости при численном решении уравнения неразрывности, связанной с малыми изменениями плотности.

Графики осредненного по времени коэффициента трения в сечении $z=0$ на поверхности за обратным уступом (Рис. 3.8) показывают, что несмотря на то, что методом RANS более точно предсказана координата точки присоединения, соответствующая нулевому значению коэффициента трения, использование гибридных подходов DDES и особенно IDDES ведет к более корректному моделированию рассматриваемого течения. При этом использование связанного подхода для дискретизации конвективного члена в уравнении Спаларта-Аллмараса (расчет IDDES2) обеспечивает существенно более точное предсказание распределения осредненных характеристик.

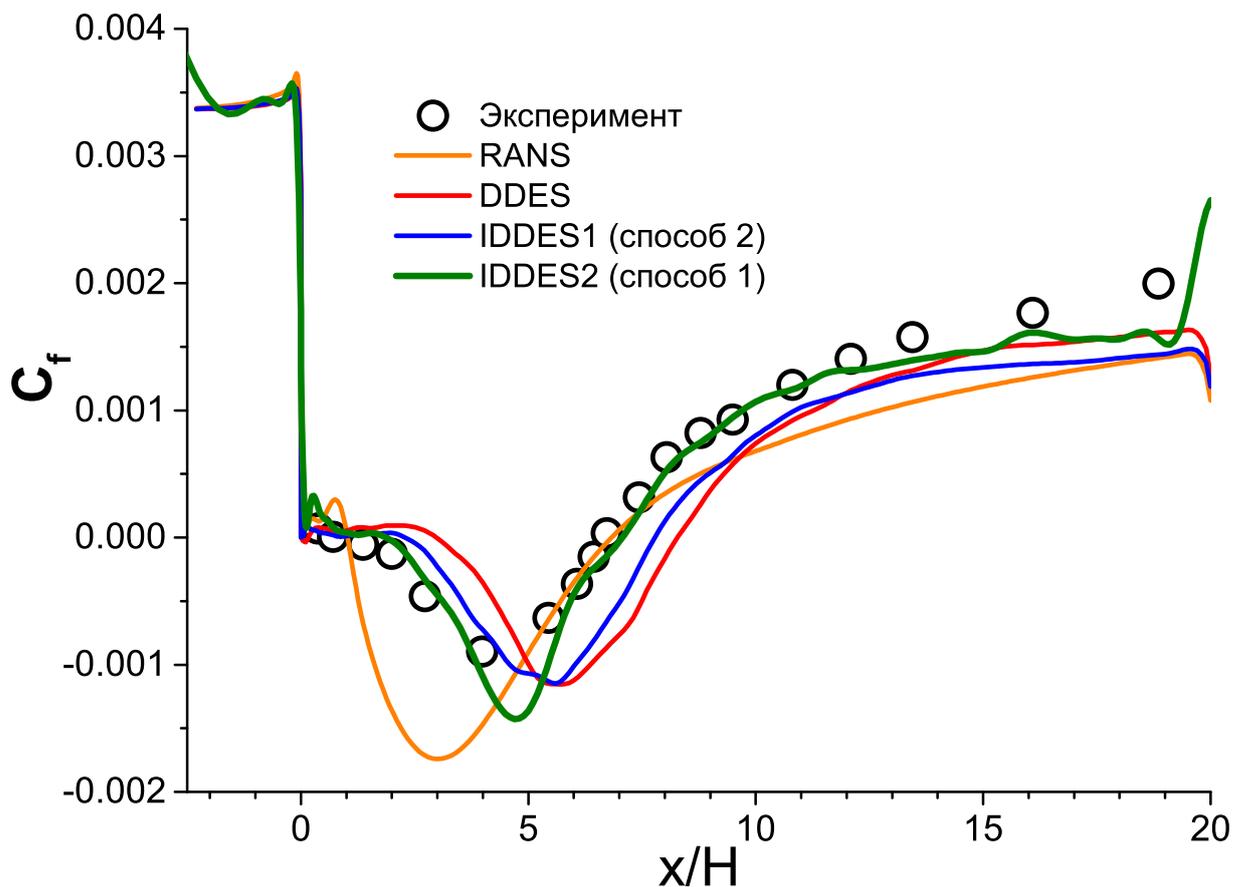


Рисунок 3.8: Графики осредненного по времени коэффициента трения на поверхности для задачи обтекания бесконечного обратного уступа в канале

На Рис. 3.9 изображены профили осредненной продольной скорости. Использование вихреразрешающих подходов привело к более корректному предсказанию течения в окрестности нижней стенки за уступом, особенно это видно из графиков из расчетов методом IDDES. При этом также можно заметить, что более или менее заметные расхождения относительно экспериментальных данных наблюдаются лишь в области слоя смешения на расстоянии порядка 2 и 3 высот уступа от его кромки. Они могут быть связаны с проблемами в «серой зоне», области переключения от RANS к LES режиму, где численный переход слоя смешения в трехмерный нестационарный режим может происходить с некоторой задержкой. Тем не менее, результаты расчетов явно указывают на то, что использование вихреразрешающих подходов, особенно дающих возможность вести моделирование в режиме WMLES, яв-

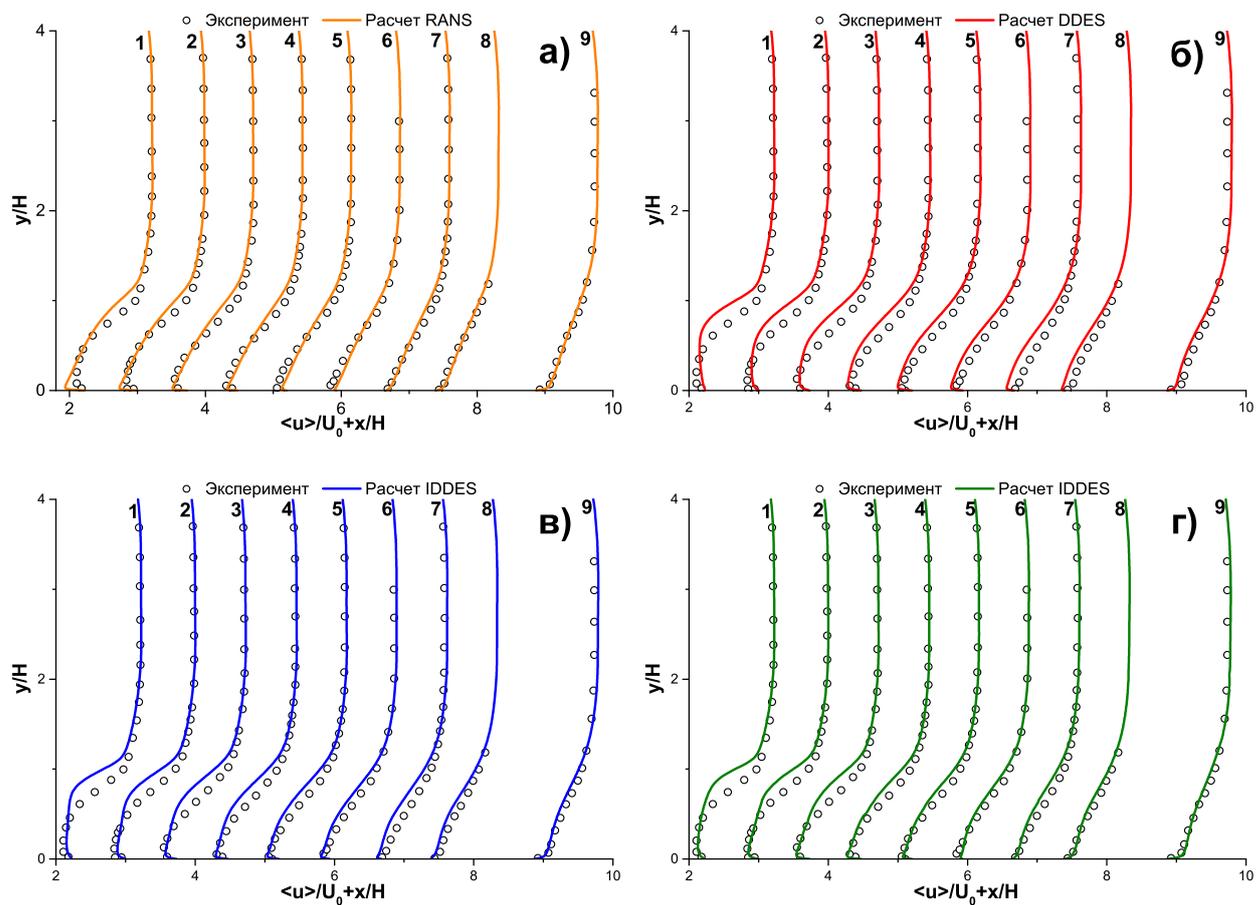


Рисунок 3.9: Профили продольной скорости в сравнении с экспериментальными данными в сечении $z=0$ за обратным уступом для задачи обтекания бесконечного обратного уступа в канале

ляется целесообразным и позволяет достичь наилучшего предсказания аэродинамических характеристик течения.

Таким образом, результаты расчетов, представленные в данной главе показывают, что реализованные и адаптированные применительно к неструктурированным сеткам в рамках программного комплекса NOISEtte гибридные методы семейства DES позволяют достаточно хорошо моделировать нестационарные пристеночные турбулентные течения.

Глава 4

Использование гибридных подходов семейства DES для моделирования сложных нестационарных турбулентных течений

4.1. Задача о взаимодействии турбулентного потока с зазором

4.1.1 Постановка задачи

Первая задача представляет собой турбулентное взаимодействие набегающего потока с зазором в тонкой пластине. Для данной конфигурации, рассматриваемой в рамках европейского проекта FP7 VALIANT, в ЦАГИ были проведены экспериментальные исследования и получены данные для осредненных по времени характеристик течения, а также данные по акустике в дальнем поле. Проект VALIANT был нацелен на валидацию и улучшение современных численных методов для обнаружения механизмов образования шума от элементов планера самолета. При этом стоит отметить, что предсказание акустических характеристик невозможно без корректного моделирования нестационарного турбулентного течения.

На Рис. 4.1 изображена схема расчетной области исследуемой конфигурации в двумерном сечении. Пунктирной линией обозначены ее границы, на которых ставились условия неотражения. Сплошная линия соответствует твер-

дым стенкам, на которых использовались условия прилипания. Характерным размером задачи является толщина обтекаемой пластины $H=5$ мм. При проведении численного моделирования длина зазора в поперечном направлении предполагалась бесконечной, что позволило использовать периодические граничные условия. В эксперименте же она была конечной, равной $8H$. Такое упрощение существенно снизило вычислительную нагрузку для данной задачи. В расчетах ширина области в поперечном (ось Z) направлении бралась равной $2H$.

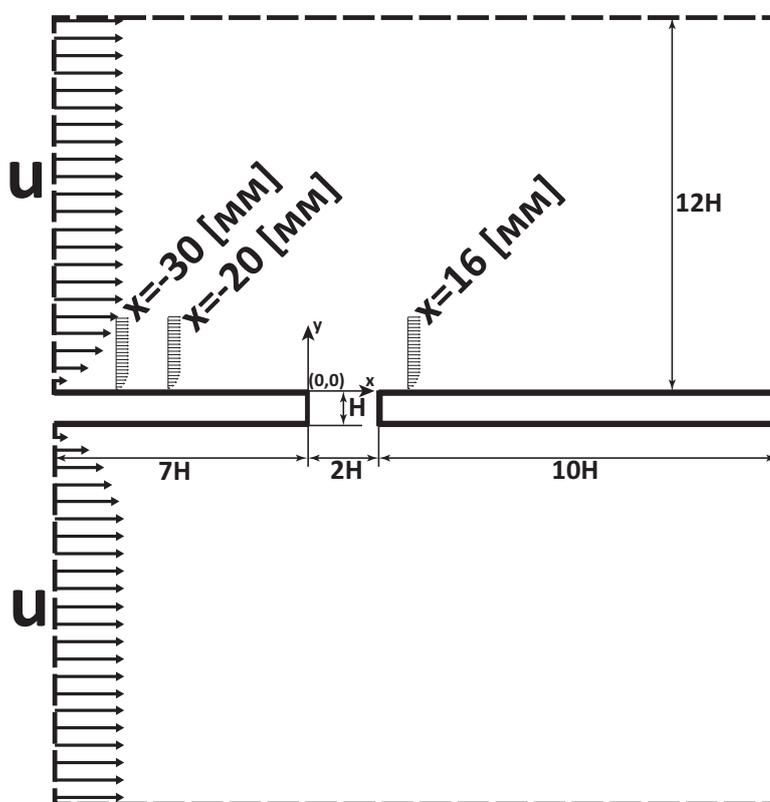


Рисунок 4.1: Схема расчетной области для задачи турбулентного взаимодействия потока с зазором

Характерное число Рейнольдса для исследуемой конфигурации, основанное на толщине пластины H и скорости входного потока $U_0 = 60$ м/с, что соответствует числу Маха $M \cong 0.175$, равно 19680.

Для того, чтобы воспроизвести полученный в условиях эксперимента пограничный слой заданной толщины, набегающий на переднюю кромку зазо-

ра, на входной границе области держался профиль скорости, полученный при дополнительном расчете на бесконечной пластине.

Для проведения численного моделирования была построена неструктурированная сетка, состоящая из 8 млн. узлов и 48 млн. тетраэдров. Основное внимание уделялось области внутри зазора, течение в котором формирует основной механизм образования шума для данной конфигурации.

На первом этапе исследования расчет проводился методом DDES. Для дискретизации по пространству использовалась гибридная схема [46], переключающаяся между противопоточной в области RANS и невозмущенной части потока и центрально-разностной в районе зазора. Шаг по времени для неявной схемы выбирался таким образом, чтобы внутри зазора локальное число Куранта было меньше единицы.

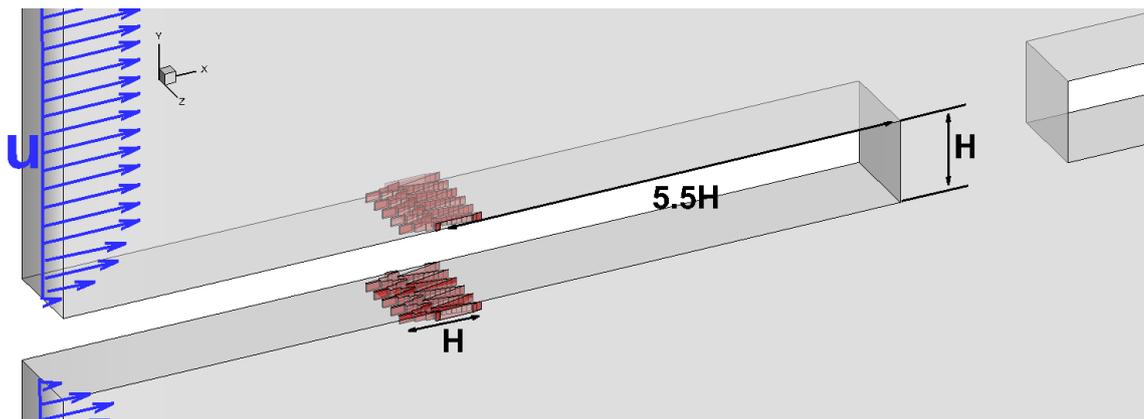


Рисунок 4.2: Схема расположения виртуальных препятствий для турбулизации входящего течения для задачи турбулентного взаимодействия потока с зазором из расчета методом IDDES

На втором этапе моделирования расчет проводился с использованием подхода IDDES. При этом для того чтобы набегающее на зазор течение было нестационарным с наличием разрешенных турбулентных структур в области пограничного слоя, на определенном расстоянии до кромки ставились виртуальные зигзагообразные препятствия, реализованные методом погруженных граничных условий. Форма и расположение турбулизаторов потока схематически изображены на Рис. 4.2.

Вместе с добавлением виртуальных препятствий была перестроена расчетная сетка: во всей области вблизи пограничного слоя она была измельчена. Это было сделано для того, чтобы расчет пристеночного течения вверх по потоку от передней кромки зазора велся в режиме WMLES с наличием разрешенных турбулентных структур. Это привело к увеличению размера сетки до 16 млн. узлов.

4.1.2 Результаты моделирования методом DDES

По мгновенным полям из расчета методом DDES на Рис. 4.3 можно увидеть, что нестационарное турбулентное течение образуется в результате срыва потока с передней кромки зазора и имеет симметричный относительно оси X характер течения.

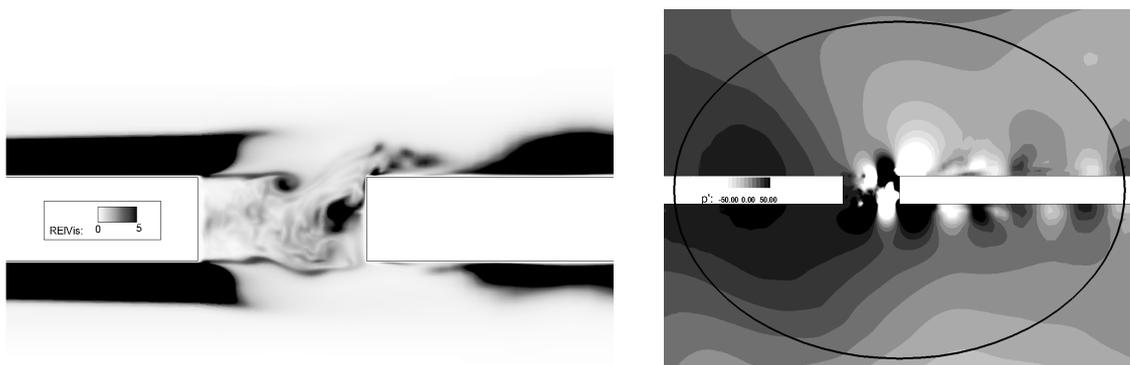


Рисунок 4.3: Мгновенные поля течения для задачи турбулентного взаимодействия потока с зазором из расчета методом DDES

Из картин осредненных по времени полей течения (Рис. 4.4) можно увидеть, что повышенные уровни как турбулентных (компоненты интенсивности турбулентности Рис. 4.4 слева), так и акустических (осредненные уровни пульсаций давления Рис. 4.4 справа) пульсаций локализованы возле задней кромки зазора.

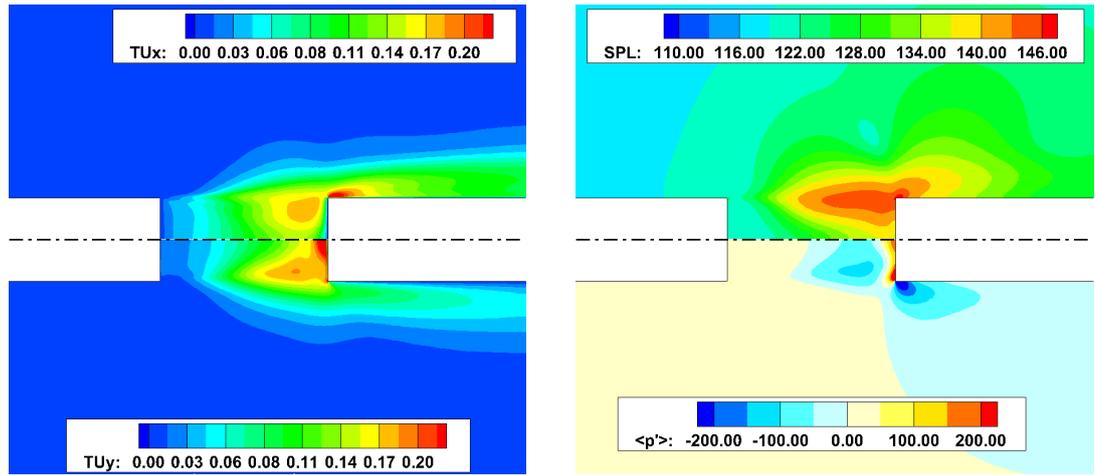


Рисунок 4.4: Осредненные поля компонент интенсивности турбулентности (слева) и уровня пульсаций давления (справа) для задачи турбулентного взаимодействия потока с зазором из расчета методом DDES

Результаты расчета пограничного слоя методом DDES довольно хорошо согласовались с экспериментальными данными (см. Рис. 4.5 слева) в точках на пластине вверх по потоку от кромки зазора, что говорит об адекватной работе RANS режима гибридного подхода в пограничном слое стационарного входящего течения. Некоторое отклонение вниз по потоку за задней кромкой может быть связано с тем, что присоединенный пограничный слой при наличии входящих возмущений в рамках DDES подхода считается в URANS режиме, что не совсем корректно.

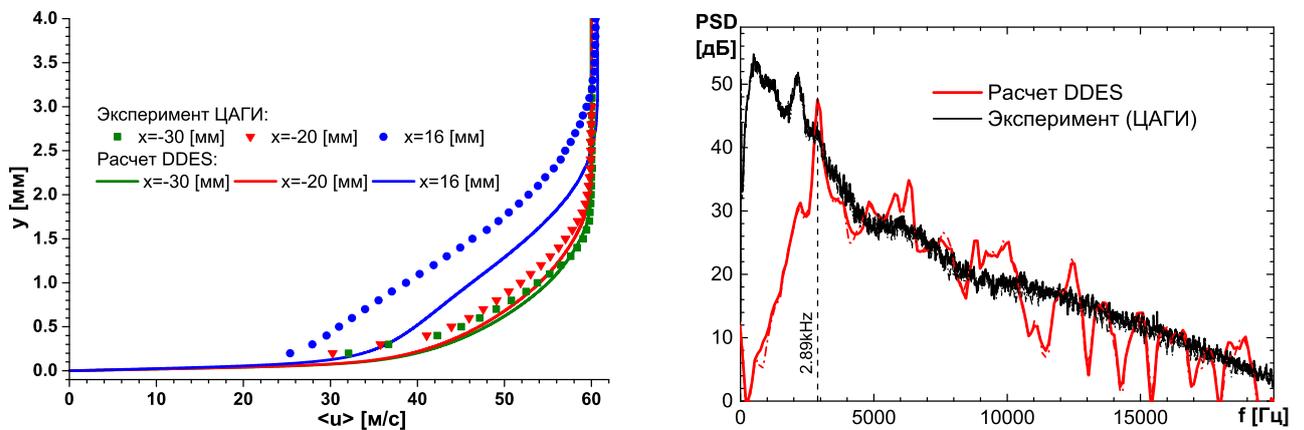


Рисунок 4.5: Осредненные профили продольной компоненты скорости (слева) и спектральная плотность мощности пульсации давления в точке дальнего поля (справа) для задачи турбулентного взаимодействия потока с зазором из расчета методом DDES

Графики спектральной плотности мощности пульсаций давления в точке дальнего поля (Рис. 4.5 справа) показывают достаточно хорошее согласование с экспериментом. Осцилляции на высоких частотах связаны, по всей видимости, с недостаточно удачным выбором контрольной поверхности. Высокие уровни шума на низких частотах в эксперименте, в том числе первый пик, связаны с инсталляционными эффектами.

Из сравнения графиков на Рис. 4.5 справа можно увидеть различие на величину порядка 800 Гц в значениях основной дискретной частоты (2.1 кГц — экспериментальная, 2.89 кГц — расчетная). Оно может быть обусловлено недостаточно корректным моделированием основного механизма образования шума для данной задачи с помощью метода DDES. Это связано с проблемой серой зоны, когда моделирование из режима RANS переходит в LES режим в окрестности слоя смещения за передней кромкой зазора. Для исследования этой проблемы был проведен расчет в рамках подхода IDDES, в котором пограничный слой, набегающий на переднюю кромку зазора, считался в нестационарном WMLES режиме. Возбуждение входящего течения достигалось путем установки специальных турбулизаторов на стенке вверх по потоку.

4.1.3 Результаты моделирования методом IDDES

Изменение структуры набегающего на зазор турбулентного течения привело к увеличению разрешенных турбулентных структур, что можно увидеть из Рис. 4.6, на котором изображено распределение осредненной кинетической энергии турбулентности.

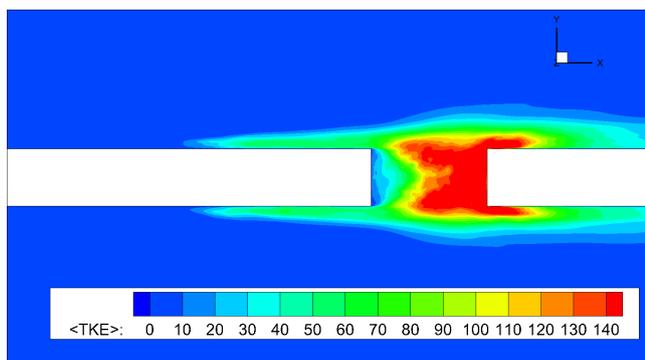


Рисунок 4.6: Распределение осредненной кинетической энергии турбулентности для задачи турбулентного взаимодействия потока с зазором из расчета методом IDDES

Также турбулизация пограничного слоя привела к изменению структуры течения внутри зазора, проявляющееся смещении осредненных вихрей от задней к передней кромке. Это можно увидеть из Рис. 4.7, где изображены поля компонент скорости.

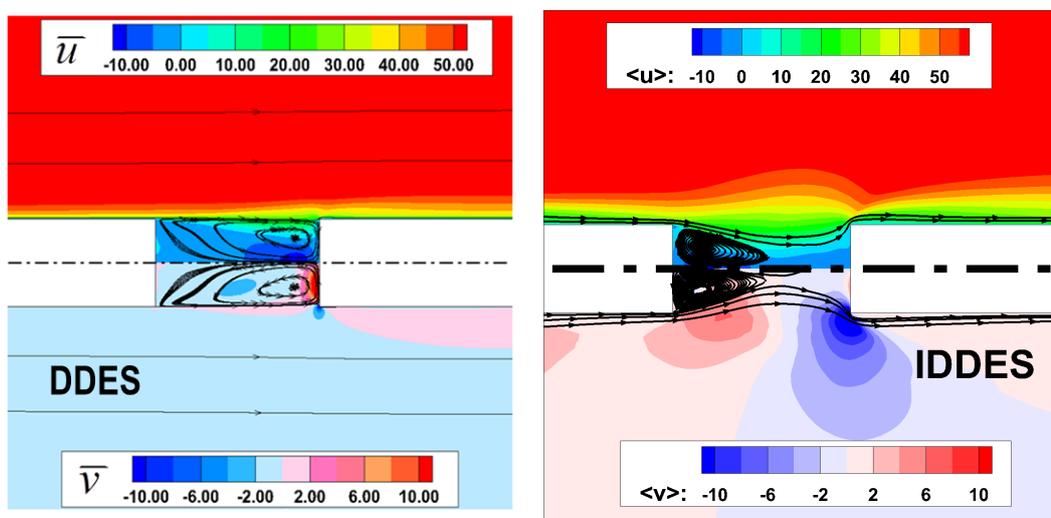


Рисунок 4.7: Сравнение осредненных распределений продольной и поперечной компонент скорости из расчетов методами DDES (сверху слева) и IDDES (сверху справа)

В расчете методом IDDES наблюдался неустойчивый характер поведения исследуемого течения с переключением между двумя режимами. Из спектров в точках ближнего поля (Рис. 4.9 справа) можно увидеть, что при перестроении течения наблюдается и скачок по значению дискретной частоты, связанной с основным механизмом образования шума для конфигурации «вза-

имодействие турбулентного потока с зазором». При первом режиме течения (режим 1 Рис. 4.8 слева) основной акустический источник подобен тому, что наблюдается в каверне с существенным влиянием расположения задней стенки. Второй режим (режим 2 Рис. 4.8 справа) аналогичен течению в следе за плохообтекаемым телом, в данном случае пластины с острыми кромками. Характерными размерами в этих случаях являются ширина зазора и толщина пластины соответственно. Это приводит к существенной разнице в пиковых частотах ($f_0 = 2130$ Гц и $f_0 = 1700$ Гц соответственно). Смену режимов течения можно наблюдать по графику зависимости пульсаций давления от времени в точке ближнего поля на Рис. 4.9 слева.

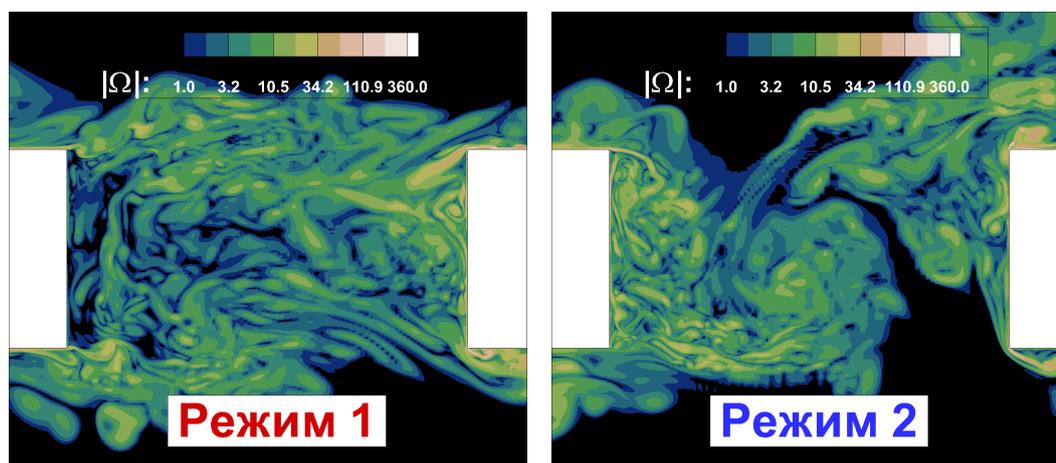


Рисунок 4.8: Мгновенные поля завихренности для двух режимов течения для задачи турбулентного взаимодействия потока с зазором из расчета методом IDDES

Таким образом, анализ представленных в работе результатов моделирования для задачи турбулентного взаимодействия потока с зазором при использовании различных подходов показал, что исследуемое течение имеет неустойчивый характер, и механизм образования шума сильно зависит от входных условий течения и точности их воспроизведения при численном моделировании.

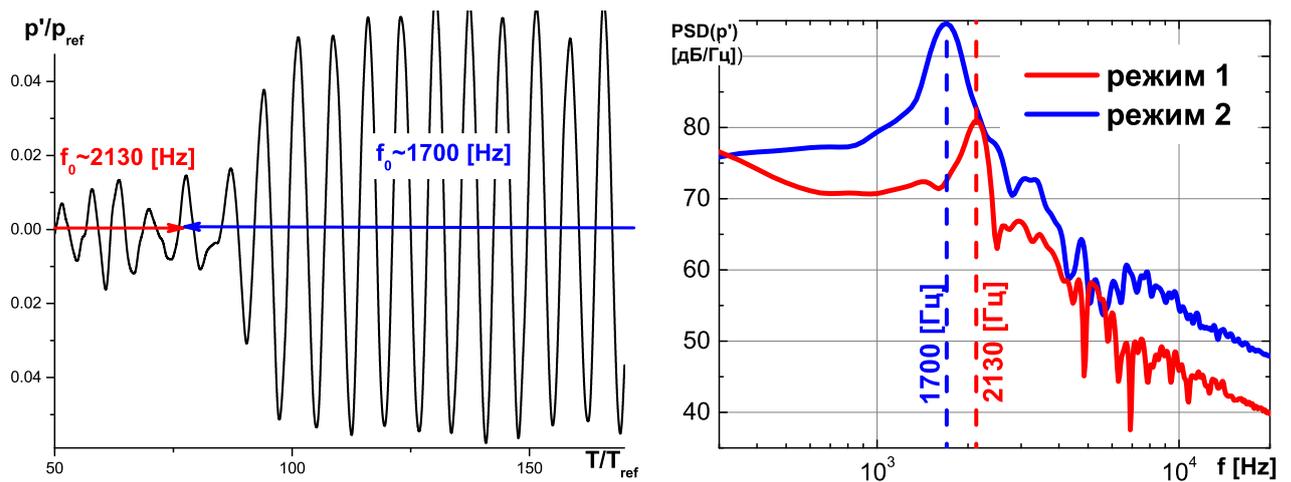


Рисунок 4.9: График зависимости давления от времени в момент перехода течения из режима 1 в режим 2 и спектральная плотность мощности пульсаций давления в точке ближнего поля (в центре) для задачи турбулентного взаимодействия потока с зазором из расчета методом IDDES

4.2. Задача о трансзвуковом обтекании клиновидного тела с обратным уступом

4.2.1 Постановка задачи

Вторая задача представляет собой обтекание клиновидного тела с обратным уступом, трехмерная модель которого изображена на Рис. 4.10.

Для исследуемой конфигурации характерно наличие обширной отрывной зоны, которая образуется за обратным уступом, и возникшим в результате этого сложным трехмерным нестационарным турбулентным пристеночным течением, а также вторичной отрывной зоны за задней вертикальной стенкой клиновидного тела.

Задача характеризуется следующими параметрами: трансзвуковое число Маха $M = 0.913$, число Рейнольдса, рассчитанное по длине L поверхности перед уступом, $Re = 7.24 \cdot 10^6$. Расчетная область для задачи обтекания клиновидного тела с обратным уступом представляет собой параллелепипед, границы которого существенно отдалены от обтекаемого тела.

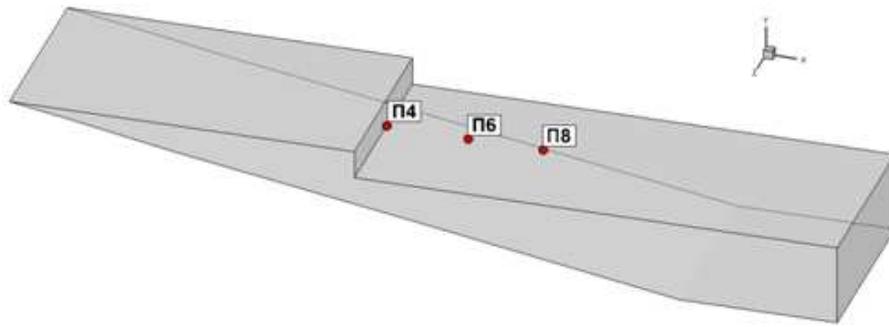


Рисунок 4.10: Модель клиновидного тела с обратным уступом

Для проведения численного моделирования использовались две неструктурированные тетраэдральные сетки, грубая и подробная. Первая сетка содержала 16 млн. узлов и 96 млн. тетраэдров. При ее построении акцент был сделан на области за уступом для возможности проведения пристеночного LES моделирования с достаточным разрешением турбулентных структур. После того, как расчеты на изначальной сетке не позволили получить удовлетворительные результаты, была построена подробная сетка, состоящая из 25 млн. узлов и 148 млн. тетраэдров, которая от грубой отличалась улучшенным сеточным разрешением в поперечном (Z) направлении в центральной области за уступом.

Для описания течения использовались подходы RANS и IDDES. Для дискретизации по пространству использовалась гибридная схема [46], переключающаяся между противопоточной в области RANS и невозмущенной части потока и центрально-разностной в области за уступом. Шаг по времени для неявной схемы выбирался таким образом, чтобы локальное число Куранта было меньше единицы в регионе, где присутствуют разрешенные турбулентные пульсации.

Также ввиду возникновения несогласованности результатов моделирования на грубой сетке с экспериментальными данными был проведен тестовый расчет для конфигурации, представляющей собой вырезанную центральную часть сетки клиновидного тела (см. Рис. 4.11). В поперечном направлении были поставлены условия периодичности.

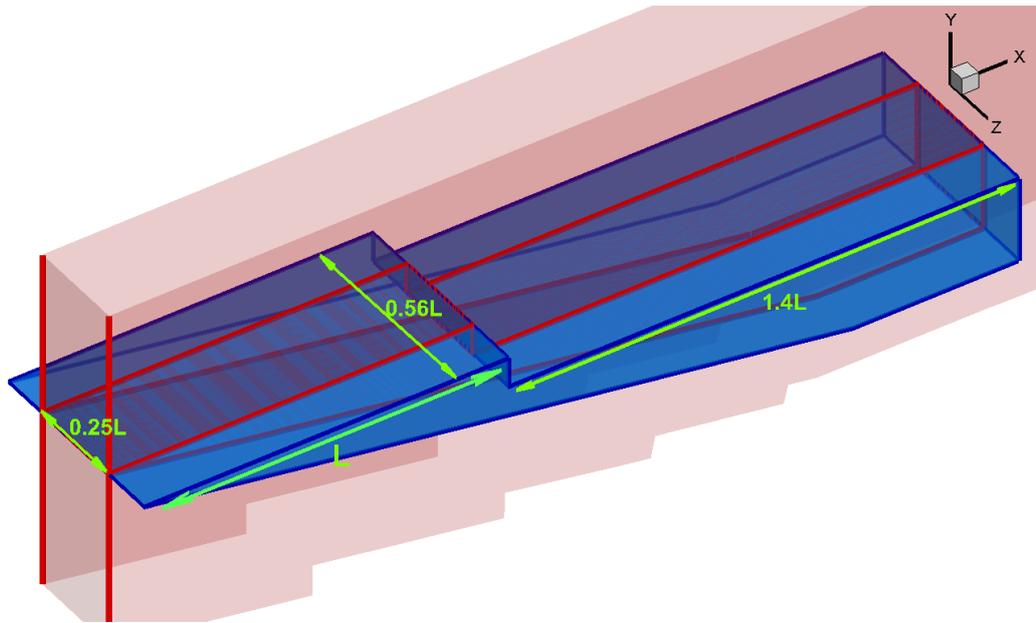


Рисунок 4.11: Конфигурация модели для тестовой конфигурации в виде бесконечного клиновидного тела с обратным уступом в поперечном направлении

Расчеты проводились на суперкомпьютере «Ломоносов» и МВС при одновременном задействовании 1500 процессорных ядер.

4.2.2 Результаты численного моделирования

Как видно из мгновенного поля течения на Рис. 4.14 сверху из IDDES расчета на грубой сетке, численный переход в трёхмерный нестационарный режим слоя смешения, отрывающегося от кромки обратного уступа, происходит достаточно далеко. Вследствие этого координата точки присоединения в осреднённой картине течения к нижней стенке за уступом существенно отодвинута вверх по потоку относительно её экспериментального значения на величину порядка высоты уступа при в общем близких значениях (см. Рис. 4.15 справа, красная пунктирная линия). Это возникает, по всей видимости, из-за следующих причин. Во-первых, из-за недостаточного сеточного разрешения по поперечному (Z) направлению, которое составляет порядка $\delta/3$, где δ – толщина пограничного слоя на стенке перед уступом. Такое достаточно грубое разрешение обусловлено требованиями к вычислительной

стоимости задачи и необходимости за разумное время получить достаточную для построения спектральных характеристик выборку. Во-вторых, это может быть объяснено используемой гибридной численной схемой для невязких потоков, где вследствие малой устойчивости центрально-разностной схемы на неструктурированной сетке приходилось вводить небольшую диссипацию, а также учитывать наличие вблизи слоя смешения сверхзвуковых зон и скачков уплотнения.

Для решения возникшей проблемы были проведены исследования для упрощённой конфигурации, представляющей собой вырезанную часть уступа шириной $0.25L$ с периодическими граничными условиями в поперечном направлении (см. область красного цвета на Рис. 4.11). При этом сеточное разрешение во всех направлениях осталось неизменным.

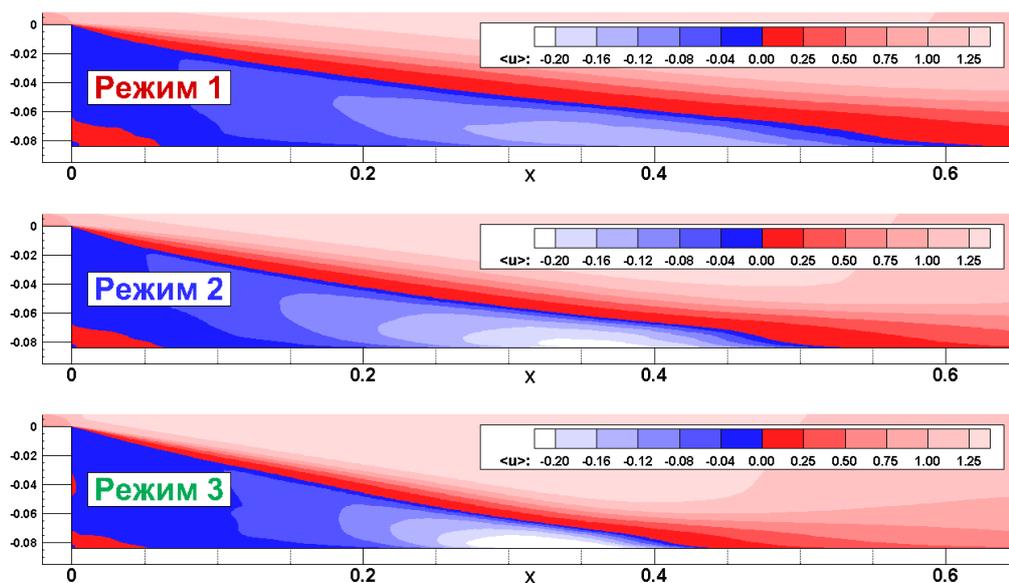


Рисунок 4.12: Распределение осредненной продольной компоненты скорости для трех режимов течения из расчета для тестовой конфигурации в виде бесконечного клиновидного тела с обратным уступом в поперечном направлении

Расчеты проводились в рамках подхода IDDES в трёх режимах: при использовании полностью противопоточной схемы во всей области (режим 1); при использовании гибридной численной схемы для невязких потоков (режим 2); при использовании гибридной численной схемы для невязких потоков

и модифицированного характерного масштаба сетки $\Delta = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ в области за уступом шириной порядка полторы высоты уступа, где искусственно занижалось значение Δz (режим 3). В результате модификаций численный переход в слое смешения произошёл раньше, что привело к изменению осредненной картины течения и характеристик, что можно увидеть из рисунков 4.12 и 4.13.

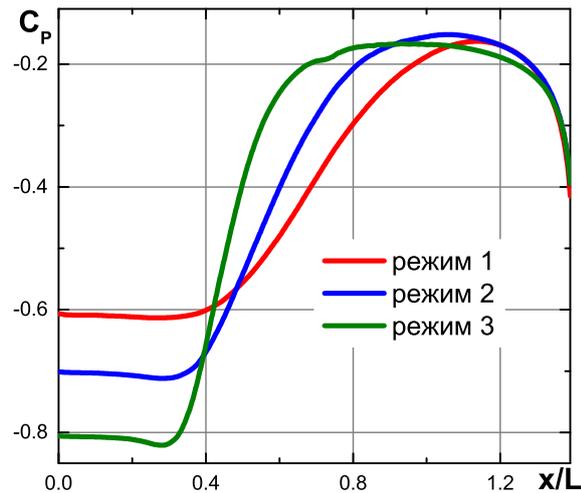


Рисунок 4.13: Распределение коэффициента давления на горизонтальной стенке за уступом для трех режимов течения из расчета для тестовой конфигурации в виде бесконечного клиновидного тела с обратным уступом в поперечном направлении

Далее для исходной задачи была построена более подробная сетка, в которой шаг сетки в центральной области за уступом был $\Delta z = 0.002L$ вместо $\Delta z = 0.005L$, что был в расчете на грубой сетке. Кроме того, при численном моделировании, как и в тестовом расчете, искусственно занижалось значение поперечной компоненты характерного масштаба вычислительной сетки, то есть $\Delta = \max(\Delta x, \Delta y, 0.1\Delta z)$.

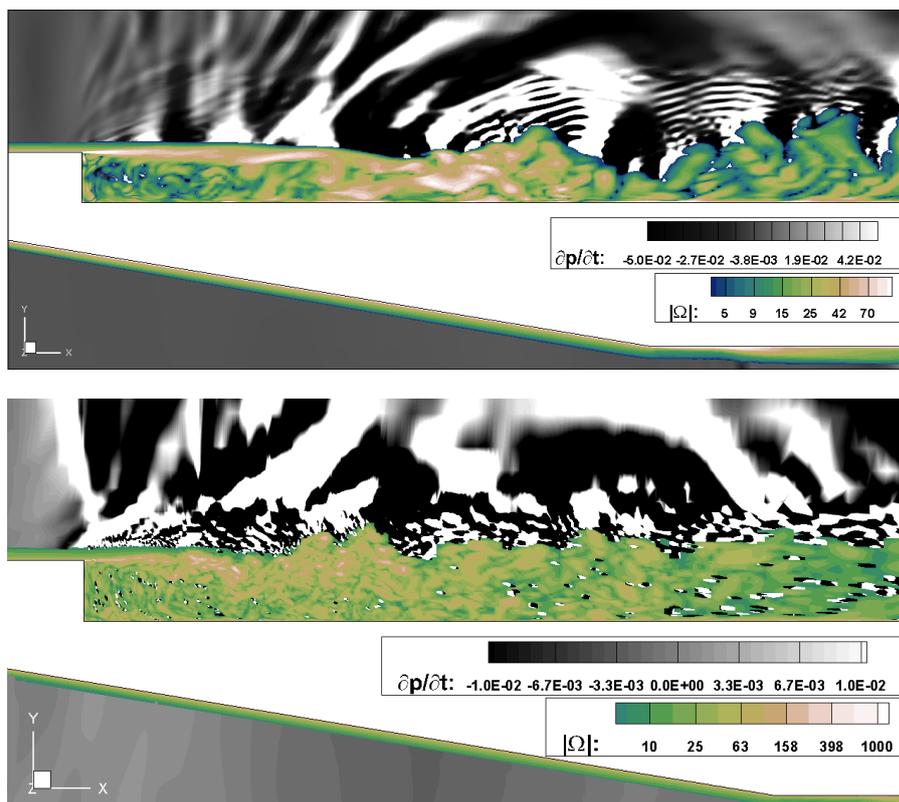


Рисунок 4.14: Сравнение мгновенных полей течения из расчетов на грубой (сверху) и подробной (снизу) сетке методом IDDES для задачи об обтекании клиновидного тела с трехмерным обратным уступом

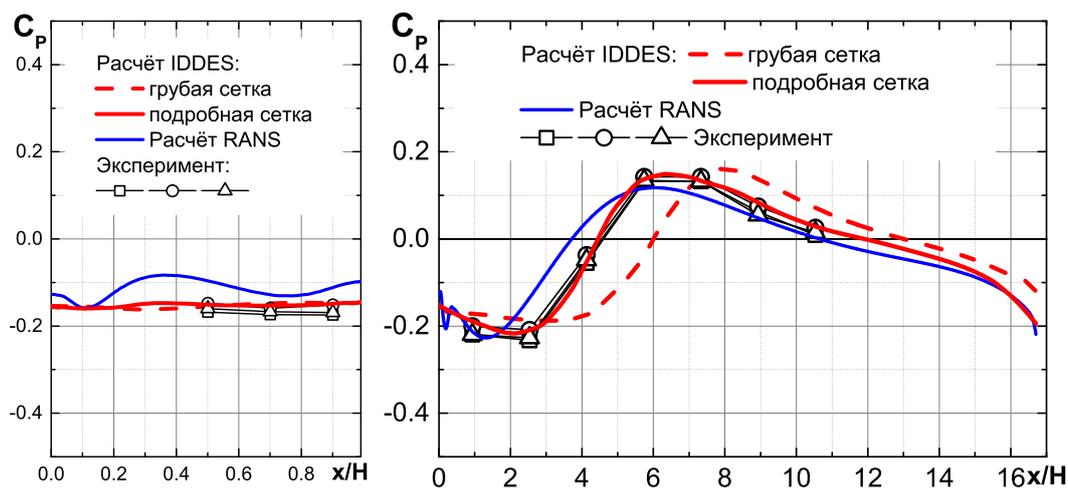


Рисунок 4.15: Распределение коэффициента давления на вертикальной стенке обратного уступа (слева) и на поверхности за уступом (справа) в центральном сечении клиновидного тела из расчетов методами RANS и IDDES на грубой и подробной сетках в сравнении с экспериментальными данными

Изменение сетки привело к существенному улучшению результатов моделирования по осредненному значению коэффициента давления на стенке за уступом, что можно увидеть из Рис. 4.15. Изменение структуры течения по сравнению с расчетом на грубой сетке заметно на Рис. 4.14, где изображены мгновенные картины модуля завихренности. На нижней картине заметно, что численный переход слоя смещения происходит существенно раньше. Кроме того, моделирование на подробной сетке позволило получить более мелкомасштабную турбулентность, в том числе в пристенной области.

Также при моделировании на подробной сетке удалось получить неплохое согласование с экспериментом по осредненным уровням пульсаций давления (см. Рис. 4.16). Высокие уровни включают пульсации, связанные с турбулентной, а также акустической составляющей. Отклонение от экспериментальных данных может быть обусловлено тем, что расчет ведется в режиме WMLES, и турбулентные структуры самых мелких масштабов не разрешаются, а моделируются. Поэтому их вклад в общие уровни не учитывается.



Рисунок 4.16: Распределение осредненных уровней пульсаций давления на поверхности за уступом в центральном сечении клиновидного тела из расчета методом IDDES на подробной сетке в сравнении с экспериментальными данными

Исходя из результатов, описанных выше, можно сделать вывод о том, что разработанные и реализованные в рамках диссертации методики моделиро-

вания сложных пристеночных турбулентных течений позволяют эффективно и с достаточной точностью предсказывать как аэродинамические характеристики, так и акустические нагрузки для конфигураций, характерных для авиационной промышленности.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем.

1. Современные RANS-LES методы семейства DES (DES97, DDES и IDDES) адаптированы применительно к расчетам сложных нестационарных турбулентных течений на неструктурированных сетках.
2. Гибридные подходы для моделирования турбулентных течений реализованы в рамках программного комплекса NOISEtte, предназначенного для расчета задач аэродинамики и аэроакустики на неструктурированных сетках, в том числе с возможностью эффективного использования суперкомпьютеров высокой мощности.
3. Произведена верификация реализованных гибридных RANS-LES методов путем решения задач по моделированию канонических турбулентных течений:
 - моделирование турбулентного пограничного слоя на пластине;
 - моделирование установившегося турбулентного течения в плоском канале;
 - моделирование течения возле бесконечного обратного уступа в канале.
4. Решены две задачи по моделированию сложных нестационарных турбулентных течений с наличием отрыва и присоединения потока, характерных для приложений авиационной промышленности.

- В задаче о взаимодействии турбулентного течения с зазором в механизации крыла, выявлена возможность неустойчивого поведения течения с переключением в различные режимы.
- В результате моделирования трансзвукового обтекания клиновидного тела с обратным уступом показаны особенности сложного, существенно трехмерного турбулентного течения.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. А.П. Дубень, Т.К. Козубская, М.А. Миронов. Численное исследование резонаторов в волноводе Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа.– 2012.– № 1.– С. 146–156.– (список ВАК).
2. А.П. Дубень, Т.К. Козубская., С.И. Королев, В.П. Маслов, А.К. Миронов, Д.А. Миронова, В.М. Шахпаронов. Исследования акустического течения в горле резонатора Акустический журнал.– 2012.– Т. 58, № 1.– С. 80–92.– (список ВАК).
3. Абалакин И.В., Бахвалов П.А., Горобец А.В., Дубень А.П., Козубская Т.К. Параллельный программный комплекс NOISEtte для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики Вычислительные методы и программирование.– 2012.– Т. 13.– С. 110–125.– (список ВАК).
4. А.П. Дубень. Вычислительные технологии для моделирования сложных пристеночных турбулентных течений на неструктурированных сетках Математическое моделирование.– 2013.– Т. 25, № 9.– С. 4–16.– (список ВАК).
5. Tatiana Kozubskaya, Alexey Duben, Thilo Knacke, Frank Thiele, Viktor Kopiev, Mikhail Zaitsev. Joint experimental and numerical study of gapturbulence interaction AIAA paper 2013-2214.– 2013.
6. I.V. Abalakin, P.A. Bakhvalov, A.V. Gorobets, A.P. Duben, T.K. Kozubskaya. Exploiting modern supercomputers in a research towards quieter aircrafts Parallel CFD.– Barcelona, Spain, 2011.– May 16-20.– <http://parcfd2011.bsc.es/accepted-paper-list-book-abstracts>.
7. И.А. Абалакин, П.А. Бахвалов, А.В. Горобец, А.П. Дубень, Т.К. Козубская. Программный комплекс NOISEtte для расчетов задач газовой

- динамики и аэроакустики на неструктурированных сетках В Тезисах докладов *Второй всероссийской открытой конференции по авиационной акустике*, сентябрь 2011 г.– г. Звенигород, Московская обл., 2011.– С. 135.
8. И.В. Абалакин, А.П. Дубень, Т.К. Козубская, И.В. Беляев, М.Ю. Зайцев, В.Ф. Копьев. Программный комплекс NOISEtte для расчетов задач газовой динамики и аэроакустики на неструктурированных сетках В Тезисах докладов *Второй всероссийской открытой конференции по авиационной акустике*, сентябрь 2011 г.– г. Звенигород, Московская обл., 2011.– С. 93–94.
9. И.А. Абалакин, П.А. Бахвалов, А.В. Горобец, А.П. Дубень, Т.К. Козубская. Комплекс программ NOISEtte для супервычислений в области аэродинамики и аэроакустики В Тезисах докладов *XIII международного семинара «Супервычисления и математическое моделирование»*, 3-7 октября 2011 г.– г. Саров, Нижегородская обл.: ИПК ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2011.– С. 63.
10. I.V. Abalakin, A.P. Duben, P.A. Bakhvalov, A.V. Gorobets, T.K. Kozubskaya. Parallel technologies for simulation of aeroacoustic fields in external turbulent flows Parallel CFD.— Atlanta, GA, USA, 2012.– May 21-25.– <http://sites.jsums.edu/parcfd2012/book-of-abstracts/>.
11. И.В. Абалакин, П.А. Бахвалов, А.В. Горобец, А.П. Дубень, Т.К. Козубская. Исследование аэродинамического шума на модельных задачах проекта FP7 VALIANT В Сборнике тезисов *Четвертой всероссийской конференции «Вычислительный эксперимент в аэроакустике»*, 17-22 сентября 2012 г.— г. Светлогорск, Калининградская обл. : МАКС Пресс, 2012.— С. 7–9.

12. И.В.Абалакин, Б.Н.Даньков, А.П.Дубень, Т.К.Козубская. Численное исследование нестационарных режимов отрывных турбулентных течений В Сборнике тезисов *Четвертой всероссийской конференции «Вычислительный эксперимент в аэроакустике»*, 17-22 сентября 2012 г.— г. Светлогорск, Калининградская обл.: МАКС Пресс, 2012.— С. 10–12.
13. I. Abalakin, A. Gorobets, A. Duben, T. Kozubskaya. Fighting against the airframe noise with square struts and gaps in FP7 VALIANT Project In Book of Abstracts of *International Workshop «Computational Experiment in AeroAcoustics»*, September 19-22, 2012.— Svetlogorsk, Kaliningrad region, Russia: MAKS Press, 2012.— P. 24–26.
14. И. В.Абалакин, А.В. Горобец, А.П. Дубень, Т.К. Козубская. Моделирование сложных турбулентных течений на неструктурированных сетках с использованием суперкомпьютеров В Тезисах *XIV Международной конференции «Супервычисления и математическое моделирование»*, 1-5 октября 2012 г.— г. Саров, Нижегородская обл.: ИПК ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2012.— С. 11.
15. И.В. Абалакин, А.П. Дубень, Т.К. Козубская, И.В. Беляев, Б.Н. Даньков, А.П. Косенко. Численное моделирование течений вокруг тел с обратным уступом В Тезисах докладов *Третьей всероссийской открытой конференции по аэроакустике*, 1-3 октября 2013 г.— г. Звенигород, Московская обл., 2013.— С. 213–214.

Список рисунков

2.1	Расчетная ячейка и окружающий ее параллелепипед (слева) и тетраэдры, имеющие общую вершину I и часть расчетной ячейки (справа)	35
2.2	Начальное распределение кинетической энергии турбулентности для задачи о затухании однородной изотропной турбулентности	39
2.3	Энергетический спектр турбулентности на моменты времени $T=0.87$ и $T=2$ на сетках 32^3 (сверху) и 64^3 (снизу)	41
3.1	Вид расчетной области и сетки в поперечном сечении для задачи о стационарном обтекании бесконечной пластины	43
3.2	Осредненный профиль скорости (слева) и осредненное значение коэффициента трения (справа) для задачи о стационарном обтекании бесконечной пластины	44
3.3	Мгновенные поля течения для задачи о развитом турбулентном течении в плоском канале	45
3.4	Профили средней скорости (сверху) и разрешенных напряжений Рейнольдса (в центре и снизу) в сравнении с экспериментальными данными для задачи о развитом турбулентном течении в плоском канале	46
3.5	Схема расчетной области для задачи обтекания бесконечного обратного уступа в канале	49

3.6	Мгновенные поля завихренности для задачи обтекания бесконечного обратного уступа в канале из расчетов DDES (сверху), IDDES1 (в центре) и IDDES2 (снизу)	50
3.7	Мгновенные поля отношения турбулентной вязкости к молекулярной для задачи обтекания бесконечного обратного уступа в канале из расчетов DDES (сверху), IDDES1 (в центре) и IDDES2 (снизу)	51
3.8	Графики осредненного по времени коэффициента трения на поверхности для задачи обтекания бесконечного обратного уступа в канале	53
3.9	Профили продольной скорости в сравнении с экспериментальными данными в сечении $z=0$ за обратным уступом для задачи обтекания бесконечного обратного уступа в канале	54
4.1	Схема расчетной области для задачи турбулентного взаимодействия потока с зазором	57
4.2	Схема расположения виртуальных препятствий для турбулизации входящего течения для задачи турбулентного взаимодействия потока с зазором из расчета методом IDDES	58
4.3	Мгновенные поля течения для задачи турбулентного взаимодействия потока с зазором из расчета методом DDES	59
4.4	Осредненные поля компонент интенсивности турбулентности (слева) и уровня пульсаций давления (справа) для задачи турбулентного взаимодействия потока с зазором из расчета методом DDES	60
4.5	Осредненные профили продольной компоненты скорости (слева) и спектральная плотность мощности пульсации давления в точке дальнего поля (справа) для задачи турбулентного взаимодействия потока с зазором из расчета методом DDES	60

4.6	Распределение осредненной кинетической энергии турбулентности для задачи турбулентного взаимодействия потока с зазором из расчета методом IDDES	62
4.7	Сравнение осредненных распределений продольной и поперечной компонент скорости из расчетов методами DDES (сверху слева) и IDDES (сверху справа)	62
4.8	Мгновенные поля завихренности для двух режимов течения для задачи турбулентного взаимодействия потока с зазором из расчета методом IDDES	63
4.9	График зависимости давления от времени в момент перехода течения из режима 1 в режим 2 и спектральная плотность мощности пульсаций давления в точке ближнего поля (в центре) для задачи турбулентного взаимодействия потока с зазором из расчета методом IDDES	64
4.10	Модель клиновидного тела с обратным уступом	65
4.11	Конфигурация модели для тестовой конфигурации в виде бесконечного клиновидного тела с обратным уступом в поперечном направлении	66
4.12	Распределение осредненной продольной компоненты скорости для трех режимов течения из расчета для тестовой конфигурации в виде бесконечного клиновидного тела с обратным уступом в поперечном направлении	67
4.13	Распределение коэффициента давления на горизонтальной стенке за уступом для трех режимов течения из расчета для тестовой конфигурации в виде бесконечного клиновидного тела с обратным уступом в поперечном направлении	68
4.14	Сравнение мгновенных полей течения из расчетов на грубой (сверху) и подробной (снизу) сетке методом IDDES для задачи об обтекании клиновидного тела с трехмерным обратным уступом	69

4.15	Распределение коэффициента давления на вертикальной стенке обратного уступа (слева) и на поверхности за уступом (справа) в центральном сечении клиновидного тела из расчетов методами RANS и IDDES на грубой и подробной сетках в сравнении с экспериментальными данными	69
4.16	Распределение осредненных уровней пульсаций давления на поверхности за уступом в центральном сечении клиновидного тела из расчета методом IDDES на подробной сетке в сравнении с экспериментальными данными	70

Список таблиц

1.1	Зависимость числа узлов в расчетной сетке от числа Рейнольдса для течения в канале прямоугольного сечения при использовании подхода DNS.	15
1.2	Сравнение размеров сеток, необходимых для расчетов с помощью методов DNS и LES для чисел Рейнольдса 12300 и 230000.	17
Б.1	Порядок точности схемы в зависимости от параметров	104

Литература

1. И.А. Белов, С.А. Исаев. Моделирование турбулентных течений. — СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2001.
2. К.Н. Волков, В.Н. Емельянов. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
3. Frolich J., Terzi D. Hybrid LES/RANS Methods for the Simulation of Turbulent Flows // Progress in Aerospace Sciences. — 2008. — Vol. 44. — P. 349–377.
4. DESider — A European Effort on Hybrid RANS-LES Modelling / Ed. by Haase W., Braza M., Revell A. — Springer, 2009.
5. Casey M., Wintergerste T. Best Practices Guidelines: ERCOFTAC Special Interest Group on «Quality and Trust in Industrial CFD». — ERCOFTAC, 2000.
6. Proceedings of ERCOFTAC Workshop on Data Bases and Testing of Calculation Methods for Turbulent Flows / Ed. by Rodi W., Bonnin J.C., Buchal T. ; University of Karlsruhe, Germany. — 1995.
7. Proceedings of 8th ERCOFTAC/IAHR/COST Workshop on Refined Turbulence Modelling / Ed. by Hellsten A., Rautahaimo P. ; Helsinki University of Technology. — 1999.

8. Proceedings of 9th ERCOFTAC/IAHR/COST Workshop on Refined Turbulence Modelling / Ed. by Hellsten A., Rautahaimo P. ; Darmstadt University of Technology. — 2001.
9. Proceedings 10th ERCOFTAC/IAHR/QNET-CFD Workshop on Refined Turbulence Modelling / Ed. by Manceau R., Bonnet J.P. ; Laboratoire d'etudes Aerodynamiques, UMR CNRS 6609, Universite de Poitiers, France. — 2003.
10. Spalart P.R. Strategies for turbulence modeling and simulations // Int. J. Heat Fluid Flow. — 2000. — Vol. 21. — P. 252–263.
11. Durbin P. Separated flow computations with the $k - \epsilon - v^2$ model // AIAA J. — 1995. — Vol. 33, no. 4. — P. 659–664.
12. W. Rodi, J.H. Ferziger, M. Breuer, M. Pourquie. Status of large eddy simulation: Results of a workshop // J. Fluids Engng. — 1997. — Vol. 119. — P. 248–262.
13. Girimaji S. Partially-averaged navier-stokes model for turbulence: A reynolds-averaged navier-stokes to direct numerical simulation bridging method // ASME Journal of Applied Mechanics. — 2006. — Vol. 73, no. 3. — P. 413–421.
14. Girimaji S., Jeong E., Srinivasan R. Partially-averaged navier-stokes method for turbulence: Fixed point analysis and comparison with unsteady partially averaged navier-stokes // ASME Journal of Applied Mechanics. — 2006. — Vol. 73, no. 3. — P. 422–429.
15. F.R. Menter, M. Kuntz, R. Bender. A scale-adaptive simulation model for turbulent flow predictions // AIAA Paper 2003-0767. — 2003.

16. Menter F., Egorov Y. Sas turbulence modeling of technical flows // Direct and Large-Eddy Simulation VI. — 2006. — Vol. 10. — P. 687–694.
17. E. Garnier, N. Adams, P. Sagaut. Large Eddy Simulation for Compressible Flows. — Springer, 2009.
18. Implicit Large Eddy Simulation: Computing Turbulent Fluid Dynamics / Ed. by Grinstein F.F., Margolin L.G., Rider W.J. — Cambridge University Press, 2007.
19. Bogey C., Bailly C., Juve D. Noise investigation of a high subsonic, moderate Reynolds number jet using a compressible LES // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. — 2003. — Vol. 16, no. 4. — P. 273–297.
20. Bogey C., Marsden O., Bailly C. Large-Eddy Simulation of the flow and acoustic fields of a Reynolds number 10^5 subsonic jet with tripped exit boundary layers // Physics of Fluids. — 2011. — Vol. 23, no. 035104. — P. 1–20.
21. Frohlich J., Rodi W. LES of the flow around a circular cylinder of finite height // International Journal of Heat and Fluid Flow. — 2004. — Vol. 25, no. 3. — P. 537–548.
22. O. Frederich, E. Wassen, F. Thiele. Prediction of the Flow Around a Short Wall-Mounted Finite Cylinder using LES and DES // Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics. — 2008. — Vol. 3, no. 3-4. — P. 231–247.
23. Ferziger J. Large eddy simulation // Simulation and modelling of turbulent flows / Ed. by T.B. Gatski, M.Y. Hussaini, J.L. Lumley. — New York : Oxford University Press, 1996. — P. 109–154.

24. D. Drikakis. Very large eddy simulation // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* — 2002. — Vol. 39, no. 9. — P. 763–864.
25. Smagorinsky J. General Circulation Experiments with the Primitive Equations // *Month. Wea. Rev.* — 1963. — Vol. 99. — P. 99–164.
26. H.L. Zhang, C. Bachman, H.F. Fasel. Application of a new methodology for simulations of complex turbulent // *AIAA Paper 2000-2535.* — 2000.
27. H.F. Fasel, J. Seidel, S. Wernz. A methodology for simulation of complex turbulent flows // *J. Fluids Engng.* — 2002. — Vol. 124. — P. 933–942.
28. D.A. von Terzi, R.D. Sandberg, J. Sivasubramanian, H.F. Fasel. High-accuracy dns and les of high reynolds number, supersonic base flows and passive control of the near wake // *High Performance Computing Modernization Program: Proceedings of the User Group Conference.* — 2005.
29. J. Sivasubramanian, R.D. Sandberg, D.A. von Terzi, H.F. Fasel. Numerical investigation of flow control mechanisms for drag reduction in supersonic base flows // *AIAA Paper 2006-902.* — 2006.
30. J. Sivasubramanian, R.D. Sandberg, D.A. von Terzi, H.F. Fasel. Numerical investigation of transitional supersonic base flows with flow control // *J. Spacecraft Rockets.* — 2007. — Vol. 44, no. 5. — P. 1021–1028.
31. T.C. Fan, M. Tian, J.R. Edwards et al. Validation of a hybrid reynoldsaveraged / large-eddy simulation method for simulating cavity flameholder configurations // *AIAA Paper 2001-2929.* — 2001.
32. T.C. Fan, M. Tian, J.R. Edwards et al. Hybrid large-eddy/reynoldsaveraged navier-stokes simulations of shock-separated flows // *J. Spacecraft Rockets.* — 2004. — Vol. 41, no. 6. — P. 897–906.

33. X. Xiao, J.R. Edwards, H.A. Hassan. Blending functions in hybrid Large Eddy/Reynolds-Averaged Navier-Stokes simulations // AIAA J. — 2004. — Vol. 42, no. 12. — P. 2508–2515.
34. F.R. Menter. Two-equation eddy viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA J. — 1994. — Vol. 32. — P. 1598–1605.
35. On the feasibility of merging LES with RANS for the near-wall region of attached turbulent flows : Annual Research Briefs / Center for Turbulence Research ; Executor: J.S. Baggett : 1998.
36. Subgrid-scale models in finite-difference simulations of complex wall bounded flows : Rep. / AGARD ; Executor: Balaras E., Benocci C. : 1994.
37. Balaras E., Benocci C., Piomelli U. Two layer approximate boundary conditions for large-eddy simulations // AIAA J. — 1996. — Vol. 34, no. 6. — P. 1111–1119.
38. N.V. Nikitin, F. Nicoud, B. Wasistho et al. An approach to wall modeling in large-eddy simulations // Physics of Fluids. — 2000. — Vol. 12, no. 7. — P. 1629–1632.
39. Davidson L., Dahlstrom S. Hybrid RANS-LES an approach to make LES applicable at high Reynolds number // International Journal of Computational Fluid Dynamics. — 2005. — Vol. 19, no. 6. — P. 415–427.
40. Germano M. Properties of the hybrid RANS/LES filter // Theoret. Comput. Fluid Dyn. — 2004. — Vol. 17. — P. 225–231.
41. Andrey K. Travin, Mikhail L. Shur, Philippe R. Spalart, Mikhail Kh. Strelets. Improvement of Delayed Detached-Eddy Simulation for LES with wall modelling // ECCOMAS CFD. — 2006.

42. Lilly D.K. A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method // *Physics of Fluids*. — 1991. — Vol. 4. — P. 633–635.
43. Spalart P.R., Allmaras S.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // *AIAA Paper 92-0439*. — 1992.
44. Shur M., Spalart P., Strelets M., Travin, A. Detached-eddy simulation on an airfoil at high angle of attack // *Engineering Turbulence Modelling and Experiments* / Ed. by Rodi W., Laurence D. — Elsevier, 1999. — P. 669–678.
45. Travin, A., Shur M., Strelets M., Spalart P. Detached-Eddy Simulation Past a Circular Cylinder // *J. Flow, Turbulence and Combustion*. — 2000. — Vol. 63, no. 1-4. — P. 293–313.
46. Travin, A., Shur M., Strelets M., Spalart P. Physical and numerical upgrades in the detached-eddy simulation of complex turbulent flows // *Advances in LES of Complex Flows. Proceedings of the Euromech Colloquium 412* / Ed. by R.Friedrich, W. Rodi. — Vol. 65. — 2000. — P. 239–254.
47. Hedges L.S., Spalart, P.R., Travin, A.K. Detached-Eddy Simulations Over a Simplified Landing Gear // *Journal of Fluids Engineering*. — 2002. — Vol. 124, no. 2. — P. 413–423.
48. Rung T., Eschricht D., Yan J., Thiele F. Sound Radiation from the Vortex Flow Past a Generic Side Mirror // *AIAA paper 2002-2549*. — 2000.
49. Souliez F., Long L.N., Morris P.J., Sharma A. Landing Gear Aerodynamic Noise Prediction using Unstructured Grids // *International Journal of Aeroacoustics*. — 2002. — Vol. 1, no. 1. — P. 115–135.

50. Greschner B., Thiele F., Casalino D., Jacob M.C. Influence of turbulence modeling on the broadband noise simulation for complex flows // AIAA paper 2004-2943. — 2004.
51. Allen R., Mendonca F., Kirkham D. RANS and DES turbulence model predictions of noise on the M219 cavity at $M=0.85$ // International Journal of Aeroacoustics. — 2005. — Vol. 4, no. 1-2. — P. 135–152.
52. Gurr A., Greschner B., Thiele F. et al. Prediction of Sound generated by a rod-airfoil configuration using EASM DES and the generalised Lighthill/FW-H analogy // Proceedings of the Euromech Colloquium no. 467 – Turbulent Flow and Noise Generation / Ed. by R.Friedrich, W. Rodi. — 2005.
53. Michel, U. Simulation of the sound radiation of turbulent flows with DES // Proceedings of the West-East High Speed Flow Field Conference, Moscow, Russia. — 2007.
54. Mockett C.M. A comprehensive study of detached-eddy simulation : Ph. D. thesis / Mockett C.M. ; Technische Universitat Berlin. — 2008.
55. Spalart P.R., Deck S., Shur M. et al. A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. — 2006. — Vol. 20. — P. 181–195.
56. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.Kh., Travin A.K. A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modeled LES capabilities // International Journal of Heat and Fluid Flow. — 2008. — Vol. 29, no. 6. — P. 1638–1649.
57. Mockett C., Greschner B., Knacke T. et al. Demonstration of improved DES methods for generic and industrial applications // Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. Advances in Hybrid

- RANS-LES Modelling / Ed. by S.-H. Peng, W. Haase. — Springer, 2007. — Vol. 97. — P. 222–231.
58. Mockett Ch., Perrin R., Reimann Th. et al. Analysys of Detached-Eddy Simulation for the flow around a circular cylinder with reference to PIV data // Flow Turbulence Combust. — 2010. — Vol. 85, no. 2. — P. 167–180.
59. M. Weinmann, R. D. Sandberg, C. J. Doolan. Flow and noise predictions for a tandem cylinder con?guration using novel hybrid RANS/LES approaches // AIAA paper 2010-3787. — 2010.
60. L. Davidson. Inlet Boundary Conditions for Embedded LES // Proceedings of The First CEAS European Air and Space Conference, 10-13 September, Berlin, Germany. — 2007.
61. Адамьян Д.Ю. Метод генерации синтетической турбулентности на входных границах для расчета турбулентных течений в рамках вихреразрешающих подходов : Дисс... кандидата наук / Адамьян Д.Ю. ; СПбГПУ, г. Санкт-Петербург. — 2011.
62. Грицкевич М.С. Расчет турбулентных пристенных течений с использованием зонного RANS-LES подхода с объемным источником турбулентных пульсаций : Дисс... кандидата наук / Грицкевич М.С. ; СПбГПУ, г. Санкт-Петербург. — 2012.
63. Shur M.L., Strelets M.Kh., Travin A.K., Spalart P.R. Generation of turbulent inflow conditions for aeroacoustics // VKI Lecture Series ; Accurate and Efficient Aeroacoustic Prediction Approaches for Airframe Noise // Ed. by C. Schram, R. Denos, E.Lecomte. — von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2013.
64. Абалакин И.В., Козубская Т.К. Схема повышенной точности на основе реберно-ориентированной квазидномерной реконструкции переменных

для решения задач аэродинамики и аэроакустики на неструктурированных сетках // Математическое моделирование. — 2013. — Т. 25, № 8. — С. 109–136.

65. Huang L.C. Pseudo-unsteady difference schemes for discontinuous solution of steady-state, one-dimensional fluid dynamics problems // J. Comput. Phys. — 1981. — Vol. 42, no. 1. — P. 195–211.
66. Comte-Bellot G, Corrsin S. Simple eulerian time correlation of full- and narrow-band velocity signals in grid-generated, isotropic turbulence // J. Fluid. Mech. — 1971. — Vol. 48. — P. 273–337.
67. Moser R., Kim J., Mansour N. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$ // Physics of Fluids. — 1999. — Vol. 11, no. 4. — P. 943.
68. Vogel J.C., Eaton J.K. Combined Heat Transfer and Fluid Dynamic Measurements Downstream of a Backward-Facing Step // Journal of Heat Transfer. — 1985. — Vol. 107, no. 4. — P. 922–929.

Приложение А: Формулировка методов DES, DDES и IDDES

Модель турбулентности Спаларта-Аллмараса

В модели турбулентности Спаларта-Аллмараса вихревая вязкость, участвующая в определении эффективной вязкости, через которую замыкаются уравнения RANS, определяется выражением

$$\mu_t = f_{\nu 1} \rho \tilde{\nu}, \quad f_{\nu 1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{\nu 1}^3}, \quad \chi = \frac{\rho \tilde{\nu}}{\tilde{\mu}} \quad (\text{A.1})$$

Величина $\rho \tilde{\nu}$ находится из решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \tilde{\nu} u_i}{\partial x_i} = D_\nu + G_\nu - Y_\nu \quad (\text{A.2})$$

где D_ν – член, описывающий диффузию турбулентности

$$D_\nu = \frac{1}{\sigma_\nu} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\tilde{\mu} + \rho \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right\} + C_{b2} \rho \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right], \quad (\text{A.3})$$

G_ν – производство турбулентности

$$\begin{aligned} G_\nu &= C_{b1} \tilde{S} \rho \tilde{\nu}, \quad \tilde{S} = S + f_{\nu 2} \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d_w^2}, \quad f_{\nu 2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{\nu 1}}, \\ S &= |\Omega_{ij}| + 2 \min(0, |S_{ij}| - |\Omega_{ij}|), \quad |S_{ij}| = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}, \quad |\Omega_{ij}| = \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}}, \\ S_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Y_ν – диссипация турбулентности

$$\begin{aligned} Y_\nu &= C_{w1} \rho f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{d_w} \right)^2, \\ f_w &= g \left(\frac{1+C_{w3}}{g^6+C_{w3}^6} \right)^{1/6}, \quad g = r + C_{w2} (r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d_w^2} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Величина d_w в вышеприведенных формулах есть расстояние от твердой стенки, что в данной модели характеризует линейный масштаб турбулентности. Величины σ_ν , C_{b1} , C_{b2} , $C_{\nu1}$, C_{w1} , C_{w2} , C_{w3} – константы модели Спаларта-Аллмараса.

$C_{\nu1}$	σ_ν	C_{b1}	C_{b2}	C_{w1}	C_{w2}	C_{w3}	κ
7.1	$\frac{2}{3}$	0.1335	0.622	$C_{w1} = \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + C_{b2}}{\sigma_\nu}$	0.3	2.0	0.41

Подход DES

В рамках подхода DES97 в модели Спаларта-Аллмараса величина d_w в уравнениях (A.2-A.5) заменяется на

$$l_{DES} = \min(d_w, C_{DES} \Delta), \quad C_{DES} = O(1), \quad (\text{A.6})$$

где $\Delta = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ – характерный размер ячейки сетки. **Подход DDES**

Подход DDES отличается от DES97 модификацией линейного масштаба

$$\begin{aligned} l_{DES} &= d_w - f_d \max(d_w - C_{DES} \Psi \Delta, 0) \\ f_d &= 1 - \text{th} \left((8 r_d)^3 \right), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

где

$$r_d = \frac{\nu + \nu_T}{\kappa^2 d_w^2 \max \left(\sqrt{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}, 10^{-10} \right)}, \quad (\text{A.8})$$

$$\Psi = \min \left[10, \sqrt{\frac{1}{f_{\nu1}} - \frac{f_{\nu2} C_{b1}}{f_w f_{\nu1} \kappa^2 C_{w1}}} \right]. \quad (\text{A.9})$$

Подход IDDES В рамках подхода IDDES определение линейного масштаба выглядит следующим образом:

$$l_{IDDES} = \tilde{f}_d (1 + f_e) l_{RANS} + (1 - \tilde{f}_d) l_{LES}, \quad (\text{A.10})$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{f}_d &= \max(1 - f_{dt}, f_B) \\ f_{dt} &= 1 - \text{th} \left((8 r_{dt})^3 \right) \\ r_{dt} &= \frac{\nu_T}{\kappa^2 d_w^2 \max \left(\sqrt{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}, 10^{-10} \right)} \\ f_B &= \min [2 \exp(-2\alpha^2), 1.0] \\ \alpha &= 0.25 - \frac{d_w}{h_{\max}} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} f_e &= \max(f_{e1} - 1, 0) \Psi f_{e2} \\ f_{e1} &= \begin{cases} 2 \exp(-11.09\alpha^2), & \alpha \geq 0 \\ 2 \exp(-9.0\alpha^2), & \alpha < 0 \end{cases} \\ f_{e2} &= 1 - \max(f_t, f_l) \\ f_t &= \tanh \left[(c_t^2 r_{dt})^3 \right] \quad f_l = \tanh \left[(c_l^2 r_{dt})^3 \right] \\ r_{dl} &= \frac{r_d \nu}{\nu + \nu_t} \quad c_t = 3.55 \quad c_l = 1.63 \quad (SA) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

При этом в рамках подхода IDDES модифицируется определение подсеточного масштаба следующим образом:

$$\Delta = \min [\max (C_w d_w, C_w h_{\max}, h_{wn}), h_{\max}], \quad (\text{A.13})$$

где h_{wn} – масштаб сетки в направлении, перпендикулярном стенке, а $C_w = 0.15$ – эмпирическая константа.

Приложение Б: Используемые математические модели и численные методы

Уравнения Навье-Стокса

Для описания течения используется система безразмерных уравнений Навье-Стокса, записанная в дивергентной форме (в виде законов сохранения) относительно вектора искомых консервативных переменных $\mathbf{Q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E)^T$ — плотности, трех компонент импульса и полной энергии

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{Q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{Q})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_3(\mathbf{Q})}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{F}_1^{NS}(\mathbf{Q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2^{NS}(\mathbf{Q})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_3^{NS}(\mathbf{Q})}{\partial z} \quad (\text{Б.14})$$

Параметры обезразмеривания:

- D — характерный линейный размер задачи;
- ρ_∞ — плотность невозмущенного потока;
- U_∞ — скорость набегающего потока, $c_\infty = U_\infty/M_\infty$ — скорость звука в невозмущенном потоке и M_∞ — число Маха;
- μ_∞ — коэффициент динамической вязкости невозмущенного потока.

Безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{D}, & y^* &= \frac{y}{D}, & z^* &= \frac{z}{D}, & t^* &= \frac{D}{U_\infty}, \\ \bullet \quad \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_\infty}, & u^* &= \frac{u}{U_\infty}, & v^* &= \frac{v}{U_\infty}, & w^* &= \frac{w}{U_\infty}, \\ p^* &= \frac{p}{\rho_\infty U_\infty^2}, & T^* &= \frac{R}{U_\infty^2} T, & \mu^* &= \frac{\mu}{\mu_\infty}, & E^* &= \frac{E}{\rho_\infty U_\infty^2} \end{aligned}$$

- $\text{Re}_\infty = \frac{\rho_\infty U_\infty D}{\mu_\infty}$ — число Рейнольдса;
- $\text{Pr} = \frac{\mu_\infty c_p}{\lambda}$ — число Прандтля.

Здесь λ и c_p есть коэффициенты теплопроводности и теплоемкости газа. В дальнейшем для простоты записи символ «звездочку» в обозначениях безразмерных переменных будем опускать. Конвективные потоки \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_3 :

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E + p) \end{pmatrix}, \mathbf{F}_2(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho vu \\ \rho vw \\ v(E + p) \end{pmatrix}, \mathbf{F}_3(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w^2 + p \\ \rho wv \\ \rho wu \\ w(E + p) \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Здесь введены следующие обозначения:

- $\mathbf{u} = (u, v, w)$ — декартовы компоненты скорости;
- ρ, p — плотность и давление;
- $E = \rho(u^2 + v^2 + w^2)/2 + \rho\varepsilon$ — полная энергия, ε — внутренняя энергия.

Система уравнений (B.14)-(B.15) замыкается уравнением состояния совершенного газа — $p = \rho\varepsilon(\gamma - 1)$, где γ есть показатель адиабаты. Вязкие

ПОТОКИ \mathbf{F}_1^{NS} , \mathbf{F}_2^{NS} , \mathbf{F}_3^{NS} :

$$\mathbf{F}_1^{NS} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + q_x \end{pmatrix}, \mathbf{F}_2^{NS} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + q_y \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_3^{NS} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + q_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Компоненты вязкого тензора напряжений τ_{ij} и вектора теплового потока q_j могут быть записаны в виде следующих выражений

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{\mu}{\text{Re}} \left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\text{div}\mathbf{u} \right), & \tau_{yy} &= \frac{\mu}{\text{Re}} \left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\text{div}\mathbf{u} \right), \\ \tau_{zz} &= \frac{\mu}{\text{Re}} \left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\text{div}\mathbf{u} \right), & \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), & \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$q_x = \frac{\gamma}{\text{Pr}(\gamma - 1)} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = \frac{\gamma}{\text{Pr}(\gamma - 1)} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = \frac{\gamma}{\text{Pr}(\gamma - 1)} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{B.18})$$

Граничные условия

На твердой поверхности ставятся граничные условия прилипания $\mathbf{u} = 0$ и условия адиабатической $\left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}_B} = 0 \right)$ или изотермической $(T = T_w)$ стенки. На плоскостях симметрии — граничные условия отражения $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_B = 0)$. Значение T_w — заданная температура стенки и \mathbf{n}_B — внешний вектор нормали к границе.

Численные алгоритмы

Пространственная дискретизация системы уравнений Навье–Стокса проводится на тетраэдрической сетке; используется смешанный метод аппроксимации, а именно, члены конвективного переноса аппроксимируются с использованием метода конечных объёмов, а диффузная часть уравнений Навье–Стокса — методом конечных элементов. Интегрирование по времени осуществляется явными методами типа Рунге–Кутты и неявными методами с линеаризацией по Ньютону разностной системы уравнений.

Пространственная аппроксимация

Разобьём расчетную область Ω с границей Γ на тетраэдры: $\Omega = \bigcup_{j=1}^{N_T} T_j$, где N_T — число тетраэдров, покрывающих расчетную область. Формулировка метода конечных объёмов требует определения расчетной ячейки C_i около каждого узла i , причем $\Omega = \bigcup_{j=1}^{N_P} C_j$, где N_P — число узлов расчетной сетки.

Определим расчетную ячейку или барицентрический контрольный объём C_i следующим образом. Рассмотрим один из тетраэдров с вершиной в узле i . Разделим его поверхностью, которая образуется пересечением плоскостей проходящих через следующие точки:

- M_1, M_2, M_3 — середины ребер тетраэдра, содержащих узел i ;
- G_1, G_2, G_3 — центры тяжести граней, содержащих узел i ;
- G — центр тяжести тетраэдра.

Разбиение такой поверхностью определяет гексаэдр с вершиной в узле i . Тогда расчетная ячейка вокруг узла i представляет собой объединение гексаэдров, имеющих общий узел i .

Пусть I_i есть множество узлов, соседних с узлом i . Определим поверхность, разделяющую узлы i и j — ∂C_{ij} , как объединение частей поверхности

контрольного объема ∂C_{ij} по всем узлам соседних с узлом i :

$$\partial C_{ij} = \bigcup_{j \in I_i} \partial C_i$$

Запишем вариационную формулировку уравнений Навье–Стокса. Для этого умножим правую и левую части равенства (Б.14) на пробную функцию Ψ , где i есть номер узловой точки и проинтегрируем по объему C_i :

$$\begin{aligned} & \iiint_{C_i} \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial z} \right) \Psi_i dx dy dz \\ &= \iiint_{C_i} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_1^{NS}(\mathbf{Q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2^{NS}(\mathbf{Q})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_3^{NS}(\mathbf{Q})}{\partial z} \right) \Psi_i dx dy dz \end{aligned} \quad (\text{Б.19})$$

Выбор пробной функции Ψ_i определяет метод аппроксимации:

- для гиперболической части (члены конвективного переноса) зададим пробную функцию константой на ячейке, что и определяет аппроксимацию методом конечных объёмов

$$\Psi_i = \chi(C_i),$$

где $\Psi_i = \chi(C_i)$ есть характеристическая функция ячейки C_i ;

- для диффузной части потоков пробная функция — кусочно линейна на каждом тетраэдре, что определяет метод конечных элементов (P1 метод Галеркина)

$$\Psi_i = \varphi_i, \quad \varphi_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad S_i = \bigcup_{T|a_i \in T} T, \quad (\text{Б.20})$$

где S_i — множество тетраэдров соседних к узлу i , а a_j есть вершины тетраэдров из этого множества. Тогда функция f представима на тетраэдре T в виде

$$f(x, y)|_T = \bigcup_{a_k \in T} f(a_k) \varphi_k(x, y)|_T, \quad (\text{B.21})$$

а ее градиент вычисляется следующим образом

$$\nabla f(x, y)|_T = \bigcup_{a_k \in T} f(a_k) \nabla \varphi_k(x, y)|_T \quad (\text{B.22})$$

Предполагая, что значение временной производной постоянно на ячейке и, используя теорему Гаусса и соответствующие значения пробных функций, выражение (B.19) запишется в виде:

$$\begin{aligned} & |C_i| \left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right)_i + \iint_{\partial C_i} (\mathbf{F}_1(\mathbf{Q})n_x + \mathbf{F}_2(\mathbf{Q})n_y + \mathbf{F}_3(\mathbf{Q})n_z) d\sigma \\ & = - \iiint_{S_i} \left(\mathbf{F}_1^{NS} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \mathbf{F}_2^{NS} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + \mathbf{F}_3^{NS} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) dT + \mathbf{O}_i^\Gamma + \mathbf{D}_i^\Gamma \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

В (B.23) введены следующие обозначения:

- $|C_i|$ — объем ячейки;
- $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ есть вектор внешней нормали к элементу поверхности контрольного объема $d\sigma$;
- $\mathbf{O}_i^\Gamma = \int_{\partial C_{ij} \cap \Gamma} (\mathbf{F}_1 \cdot n_x^\Gamma + \mathbf{F}_2 \cdot n_y^\Gamma + \mathbf{F}_3 \cdot n_z^\Gamma) d\sigma$ — граничный конвективный поток;
- $\mathbf{D}_i^\Gamma = \int_{\Gamma} (\mathbf{F}_1^{NS} \cdot n_x^\Gamma + \mathbf{F}_2^{NS} \cdot n_y^\Gamma + \mathbf{F}_3^{NS} \cdot n_z^\Gamma) \varphi_i d\sigma$ — граничный диффузионный поток;
- Γ — граница расчетной области и $\mathbf{n}^\Gamma = (n_x^\Gamma, n_y^\Gamma, n_z^\Gamma)$ есть внешняя единичная нормаль к Γ .

Пусть \mathbf{Q}_{ij} — среднее значение на поверхности ∂C_{ij} . Тогда интеграл по поверхности ячейки C_i в левой части выражение (Б.23) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial C_{ij}} (\mathbf{F}_1(\mathbf{Q})n_x + \mathbf{F}_2(\mathbf{Q})n_y + \mathbf{F}_3(\mathbf{Q})n_z) d\sigma &= \sum_{j=1}^{I_i} (\mathbf{F}_1(\mathbf{Q}_{ij}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{Q}_{ij}) + \mathbf{F}_3(\mathbf{Q}_{ij}))\mathbf{n}_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{I_i} \mathbf{O}(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j, \mathbf{n}_{ij}) \end{aligned} \quad (\text{Б.24})$$

В (Б.24) \mathbf{n}_{ij} есть вектор нормали к поверхности (сегменту) ∂C_{ij} или его среднее по сегменту значение: $\mathbf{n}_{ij} = \iint_{\partial C_{ij}} \mathbf{n} d\sigma$, а $\mathbf{O}(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j, \mathbf{n}_{ij})$ — численный поток, ассоциированный с сегментом ∂C_{ij} .

Определение конвективного численного потока

Конвективную часть численного потока можно представить в следующем в виде:

$$\mathbf{O}(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j, \mathbf{n}_{ij}) = \|\mathbf{n}_{ij}\| \mathbf{R}^{-1} \text{Flux}(\hat{\mathbf{Q}}_i, \hat{\mathbf{Q}}_j) \quad (\text{Б.25})$$

где функция $\text{Flux}(\hat{\mathbf{Q}}_i, \hat{\mathbf{Q}}_j)$ есть локально одномерный поток в направлении \mathbf{n}_{ij} , а $\|\mathbf{n}_{ij}\|$ определяет площадь сегмента ∂C_{ij} . Далее приведем конкретный вид локально-одномерного численного потока, реализованного в программном комплексе NOISEtte.

Поток в схеме Роу определяется из линеаризованного решения задачи Римана в схеме Годунова:

$$\text{Flux}(\hat{\mathbf{Q}}_i, \hat{\mathbf{Q}}_j) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_1(\hat{\mathbf{Q}}_j) + \mathbf{F}_1(\hat{\mathbf{Q}}_i)) - \frac{1}{2} |\mathbf{A}_1^{\text{Roe}}| (\hat{\mathbf{Q}}_j - \hat{\mathbf{Q}}_i) \quad (\text{Б.26})$$

где матрица $\mathbf{A}_1^{\text{Roe}}(\hat{\mathbf{Q}}_i, \hat{\mathbf{Q}}_j)$ вычисляется через осредненные по Роу газодинамические параметры

$$\tilde{f} = \frac{\sqrt{\rho_i} f_i + \sqrt{\rho_j} f_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}}, \quad f = u_n, u_s, u_t, \frac{E + p}{\rho} \quad (\text{Б.27})$$

Поток противоположной «upwind» схемы определяется по аналогии с линейным уравнением переноса:

$$Flux(\hat{\mathbf{Q}}_i, \hat{\mathbf{Q}}_j) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}_1(\hat{\mathbf{Q}}_j) + \mathbf{F}_1(\hat{\mathbf{Q}}_i) \right) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\tilde{\mathbf{A}}_1) \left(\mathbf{F}_1(\hat{\mathbf{Q}}_j) - \mathbf{F}_1(\hat{\mathbf{Q}}_i) \right), \quad (\text{Б.28})$$

где матрица $\operatorname{sgn}(\tilde{\mathbf{A}}_1(\hat{\mathbf{Q}}_i, \hat{\mathbf{Q}}_j))$ вычисляется через разложение

$$\operatorname{sgn}(\tilde{\mathbf{A}}_1(\hat{\mathbf{Q}}_i, \hat{\mathbf{Q}}_j)) = \mathbf{T} \left(\frac{\hat{\mathbf{Q}}_i + \hat{\mathbf{Q}}_j}{2} \right) \left[\operatorname{sgn} \Lambda \left(\frac{\hat{\mathbf{Q}}_i + \hat{\mathbf{Q}}_j}{2} \right) \right] \mathbf{T}^{-1} \left(\frac{\hat{\mathbf{Q}}_i + \hat{\mathbf{Q}}_j}{2} \right) \quad (\text{Б.29})$$

При дальнейшем рассмотрении для сокращения записи индекс «1» и символ «шапочка» в определении потока будет опускаться.

Численный конвективный поток повышенного порядка точности на основе MUSCL аппроксимации

Функция численного потока, определенная формулами (Б.28)-(Б.29) зависит от переменных \mathbf{Q}_i и \mathbf{Q}_j , которые являются константами на ячейках C_i и C_j , поэтому схема имеет только первый порядок точности. Для повышения порядка аппроксимации воспользуемся методом MUSCL, в котором кусочно-постоянное распределения искомой функции на ячейке заменяется на кусочно-линейные значения \mathbf{Q}_{ij} и \mathbf{Q}_{ji} . Эти значения определяются путем параметрической экстраполяции (параметр $\beta \in [0, 1]$) переменных \mathbf{Q}_i и \mathbf{Q}_j на грань ∂C_{ij}

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{ij} &= \mathbf{Q}_i + \frac{1}{2} \left[(1 - \beta)(\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i) + \beta (\nabla \mathbf{Q})_{ij}^U \cdot \mathbf{ij} \right] = [\mathbf{Q}]_{I_{ij}^-} \\ \mathbf{Q}_{ji} &= \mathbf{Q}_j - \frac{1}{2} \left[(1 - \beta)(\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i) + \beta (\nabla \mathbf{Q})_{ji}^D \cdot \mathbf{ij} \right] = [\mathbf{Q}]_{I_{ij}^+} \end{aligned} \quad (\text{Б.30})$$

Градиенты $(\nabla \mathbf{Q})_{ij}^U$ и $(\nabla \mathbf{Q})_{ji}^D$ вычисляется как градиенты по «противопотоковым» тетраэдрам T_U и T_D

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{Q})_{ij}^U &= \sum_{\alpha=1}^4 \mathbf{Q}_\alpha \nabla \varphi_\alpha (T^U), \quad \alpha = i, n, l, m \\ (\nabla \mathbf{Q})_{ji}^D &= \sum_{\alpha=1}^4 \mathbf{Q}_\alpha \nabla \varphi_\alpha (T^D), \quad \alpha = j, q, r, s \end{aligned}, \quad (\text{Б.31})$$

где функция ϕ и ее градиент определены в (Б.20)–(Б.22). Параметр β характеризует степень диссипативности разностной производной ($\beta = 1$ — максимально диссипативная схема с разностью против потока, $\beta = 0$ — минимально диссипативная центрально-разностная схема). Выбор параметра $\beta = 1/3$ обеспечивает третий порядок аппроксимации для декартовой сетки в случае линейного уравнения переноса.

Определенный таким образом численный поток может приводить к появлению нефизических осцилляций разностного решения в окрестности разрывных течений (ударных волн). Для этого необходимо в окрестностях разрывов и больших градиентов делать локальное переключение на схему первого порядка в зависимости от знака соседних разностных градиентов. С учетом этого требования определим модифицированные значения функций на грани ∂C_{ij} :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{Q}_i + \frac{1}{2} \text{Lim} \left(2[\mathbf{Q}]_{I_{ij}^-} \cdot \mathbf{ij} - (\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i), \mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i \right) \\ \mathbf{Q}_{ji} = \mathbf{Q}_j - \frac{1}{2} \text{Lim} \left(2[\mathbf{Q}]_{I_{ij}^+} \cdot \mathbf{ij} - (\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i), \mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i \right) \end{cases}$$

где $\text{Lim}(a, b)$ есть функция-ограничитель, определяющая поведение локальных градиентов. Рассматриваются два вида такого типа функций:

- ограничитель Альбада-Лир

$$\text{Lim}(a, b) = \begin{cases} \frac{((a^2 + \varepsilon)b + (b^2 + \varepsilon)a)}{a^2 + b^2 + 2\varepsilon}, & ab > 0 \\ 0, & ab \leq 0 \end{cases};$$

- «MinMod»-ограничитель

$$Lim(a, b) = \frac{sign(a) + sign(b)}{2} \min(|a|, |b|).$$

Численный конвективный поток повышенного порядка точности

Для повышения порядка точности численного потока, определенного формулами (Б.20)–(Б.22) произведем замену кусочно-постоянных потоковых переменных \mathbf{F}_i и \mathbf{F}_j на кусочно-полиномиальное распределение, аналогично предыдущему параграфу. Но в случае полиномиального представления потоковых переменных порядок точности численной аппроксимации можно повысить до пятого порядка. Для этого введем определение нодального градиента $(\nabla \mathbf{F})_i$, вычисляемого как среднее по ячейке C_i от градиентов по тетраэдрам, примыкающим к узлу i

$$(\nabla \mathbf{F})_{ij} = \frac{\iint_{C_i} \nabla \mathbf{F} dx dy dz}{\iint_{C_i} \nabla dx dy dz} = \frac{1}{|C_i|} \sum_{T, i \in T} \frac{|T|}{4} \sum_{\alpha=1}^4 \mathbf{F}_{i^\alpha} \nabla \varphi_{i^\alpha}(T) \quad (\text{Б.32})$$

где функция ϕ определена в (Б.20)–(Б.22). Тогда новые значения потоковых переменных на грани ∂C_{ij} определяются путем параметрической экстраполяции (подобно выражению (Б.30)) с использованием градиентов типа (Б.31)–(Б.32)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ij} &= \mathbf{F}_i + \frac{1}{2} \left[(1 - \beta)(\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_i) + \beta (\nabla \mathbf{F})_{ij}^U \cdot \mathbf{ij} \right. \\ &\quad + \xi^c \left((\nabla \mathbf{F})_{ij}^D \cdot \mathbf{ij} - 2(\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_i) + (\nabla \mathbf{F})_{ij}^U \cdot \mathbf{ij} \right) \\ &\quad \left. + \xi^d \left((\nabla \mathbf{F})_{ij}^{D^*} \cdot \mathbf{ij} - 2(\nabla \mathbf{F})_i \cdot \mathbf{ij} + (\nabla \mathbf{F})_j \cdot \mathbf{ij} \right) \right] \\ \mathbf{F}_{ji} &= \mathbf{F}_j - \frac{1}{2} \left[(1 - \beta)(\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_i) + \beta (\nabla \mathbf{F})_{ji}^D \cdot \mathbf{ij} \right. \\ &\quad + \xi^c \left((\nabla \mathbf{F})_{ij}^D \cdot \mathbf{ij} - 2(\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_i) + (\nabla \mathbf{F})_{ij}^U \cdot \mathbf{ij} \right) \\ &\quad \left. + \xi^d \left((\nabla \mathbf{F})_{ij}^{E^*} \cdot \mathbf{ij} - 2(\nabla \mathbf{F})_j \cdot \mathbf{ij} + (\nabla \mathbf{F})_i \cdot \mathbf{ij} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{Б.33})$$

Номер схемы	δ	β	ξ^c	ξ^d	Порядок
MPS-1	1	1/3	0	0	3
MPS-2	1	1/3	-1/6	0	4
MPS-3	1	1/3	0	-1/6	4
MPS-4	0	1/3	0	0	4
MPS-5	1	1/3	-1/30	-2/15	5
MPS-6	0	1/3	-1/30	-2/15	6

Таблица Б.1: Порядок точности схемы в зависимости от параметров

где градиент $(\nabla \mathbf{F})_{ij}^{D*}$ определен с помощью линейной интерполяции подалельных градиентов $(\nabla \mathbf{F})_n$, $(\nabla \mathbf{F})_m$ и $(\nabla \mathbf{F})_l$ на грани «противопотокового» тетраэдра T_U . Градиент $(\nabla \mathbf{F})_{ij}^{E*}$ определяется аналогично на тетраэдре T_D .

В таблице ?? приведен порядок аппроксимации схемы на «декартовом подмножестве» неструктурированных тетраэдральных сеток для линейного уравнения переноса

Определение вязкого численного потока

Диффузионный численный поток определяется методом конечных элементов с базисной линейной функцией (Б.20)–(Б.22) на тетраэдральном элементе. Полагая постоянными значения газодинамических переменных \mathbf{F} на тетраэдре, запишем интеграл по множеству тетраэдров соседних к узлу i (S_i) в правой части выражение (Б.23) следующим образом

$$\begin{aligned} & \iiint_{S_i} \left(\mathbf{F}_1^{NS} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \mathbf{F}_2^{NS} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + \mathbf{F}_3^{NS} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) dT = \\ & \sum_{k, i \in T_k} |T_k| \left(\mathbf{F}_1^{NS}(\mathbf{Q})|_{T_k} \frac{\partial \varphi_i^{T_k}}{\partial x} + \mathbf{F}_2^{NS}(\mathbf{Q})|_{T_k} \frac{\partial \varphi_i^{T_k}}{\partial y} + \mathbf{F}_3^{NS}(\mathbf{Q})|_{T_k} \frac{\partial \varphi_i^{T_k}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (\text{Б.34})$$

В (Б.34) суммирование ведется по тетраэдрам T_k , имеющих общую вершину i и объем $|T_k|$. Величины $\mathbf{F}_l^{NS}(\mathbf{Q})|_{T_k}$ ($l = 1, 2, 3$) есть значение диффузионных потоков на тетраэдре T_k . Например, рассмотрим определение ком-

поненты диссипативной функции $(u\tau_{xy})|_{T_k}$:

$$(u\tau_{xy})|_{T_k} = (u)|_{T_k}(\mu)|_{T_k} \sum_{j=1}^4 \left(u_j \frac{\partial \varphi_j^{T_k}}{\partial y} + v_j \frac{\partial \varphi_j^{T_k}}{\partial x} \right) \quad (\text{Б.35})$$

В (Б.35) суммирование ведется по вершинам тетраэдра T_k , а величина скаляров $(u)|_{T_k}$ и $(\mu)|_{T_k}$ есть среднее по тетраэдру значение $f|_{T_k} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 f_j$. Остальные компоненты $\mathbf{F}_l^{NS}(\mathbf{Q})|_{T_k}$ ($l = 1, 2, 3$) вычисляются аналогично.

Определение потоков на границе расчетной области

Далее предполагается, что i — граничная точка, лежащая на границе расчетной области Γ , а \mathbf{n}^Γ есть внешняя нормаль к Γ .

1. Граничные условия прилипания $\mathbf{u} = 0$ и заданная температура стенки $T = T_w$ (случай адиабатической твердой поверхности $\partial T / \partial \nu = 0$ сводится к заданию температуры стенки равной $T_w = 1 + (\gamma - 1) M^2 / 2$, где M — число Маха). При такой постановке граничных условий потоки \mathbf{O}_i^Γ и \mathbf{D}_i^Γ равны нулю. Значение газодинамических параметров на границе определяется начальными условиями и потоками через грани ячейки, не лежащими на границе.

$$\mathbf{O}_i^\Gamma = \mathbf{D}_i^\Gamma = 0.$$

2. Условия симметрии, задаваемые условием равенства нулю нормальной к поверхности скорости $un_x^\Gamma + vn_y^\Gamma + wn_z^\Gamma = 0$, приводят к следующему виду граничного потоков:

$$\mathbf{O}_i^\Gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ p_i \mathbf{n}_i^\Gamma \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_i^\Gamma = 0.$$

3. Условия Дирихле $\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_B$, где \mathbf{Q}_B — заданные значения газодинамических параметров на границе. Задание такого типа граничных условий ограничено сверхзвуковыми входными условиями. При задании этих условий потоки на границе определяются следующим образом:

$$\mathbf{O}_i^\Gamma = \begin{pmatrix} (\rho \mathbf{u})_B \cdot \mathbf{n}^\Gamma \\ u_B (\rho \mathbf{u} + p)_B \cdot \mathbf{n}^\Gamma \\ v_B (\rho \mathbf{u} + p)_B \cdot \mathbf{n}^\Gamma \\ w_B (\rho \mathbf{u} + p)_B \cdot \mathbf{n}^\Gamma \\ (E + p) \mathbf{u}_B \cdot \mathbf{n}^\Gamma \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_i^\Gamma = 0.$$

4. Граничные условия на дозвуковых входных и выходных границах определяются расщепленным по знаку характеристических скоростей нормальным к границе потоком (граничные условия типа Стегера-Уорминга). При этом предполагается, что внешняя граница расчетной области достаточно далеко удалена от обтекаемого тела и течение в окрестности этой границы однородно $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_\infty$. Делая расщепление матрицы \mathbf{H} по знаку ее собственных значений, получаем выражение для граничного потока:

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_i^\Gamma &= \mathbf{H}^+ (\mathbf{Q}_i, \mathbf{n}_i^\Gamma) \mathbf{Q}_i + \mathbf{H}^- (\mathbf{Q}_i, \mathbf{n}_i^\Gamma) \mathbf{Q}_\infty, \\ \mathbf{H}^\pm &= \mathbf{T} \text{diag} \left[\frac{1}{2} (|\lambda_k| \pm \lambda_k) \right] \mathbf{T}^{-1}, \quad k = 1 \dots 5 \\ \mathbf{D}_i^\Gamma &= 0. \end{aligned}$$

5. Неотражающие граничные условия Тама, основанные на точном асимптотическом решении линейных уравнений Эйлера.

Аппроксимация по времени

Для рассмотрения временной аппроксимации воспользуемся методом линий. Запишем полудискретную аппроксимацию уравнений Навье-Стокса (или используемых нами моделей) в виде

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_i = -\Psi_i(\mathbf{Q}_{\Omega_i}) \quad (\text{Б.36})$$

где правая часть $\Psi_i(\mathbf{Q}_{\Omega_i})$ представляет собой пространственную аппроксимацию уравнений Навье-Стокса в точке i и зависит от переменных \mathbf{Q}_{Ω_i} , определенных на шаблоне Ω_i .

Явные алгоритмы интегрирования по времени

Систему (Б.36) можно интерпретировать как систему обыкновенных дифференциальных по времени уравнений для каждой точки пространственной сетки.

Запишем для системы (Б.36) явную N шаговую линейную схему Рунге-Кутты

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_i^{(0)} = \mathbf{Q}_i^n \\ \mathbf{Q}_i^{(k)} = \mathbf{Q}_i^{(0)} - \alpha_k \Delta t \Psi(\mathbf{Q}_{\Omega_i}^{(k-1)}), \quad k = 1, \dots, N. \\ \mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^{(N)} \end{cases} \quad (\text{Б.37})$$

При выборе коэффициентов

$$\alpha_k = \frac{1}{N - k + 1} \quad (\text{Б.38})$$

получаем схему N -го порядка, если функция Ψ_i является линейной относительно всех переменных на шаблоне Ω_i (система линейных уравнения Эйлера) или схему 2-го порядка, если функция Ψ_i нелинейна.

Проводя анализ устойчивости этого метода при $N = 4$, примененного к линейному уравнению переноса, получаем следующий набор коэффициен-

тов α_k , при которых схема устойчива при числе Куранта $CFL \approx 2$

$$\alpha_1 = 0.11, \alpha_2 = 0.2766, \alpha_3 = 0.5, \alpha_4 = 1 \quad (\text{Б.39})$$

и имеет второй порядок точности.

Для получения 4-го порядка точности использовалась «классическая» 4-х шаговая схема Рунге-Кутты

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 = \Psi(\mathbf{Q}_{\Omega_i}^n), & \mathbf{k}_2 = \Psi\left[\left(\mathbf{Q}_i^n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1\right)_{\Omega_i}\right] \\ \mathbf{k}_3 = \Psi\left[\left(\mathbf{Q}_i^n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2\right)_{\Omega_i}\right], & \mathbf{k}_4 = \Psi\left[\left(\mathbf{Q}_i^n + \mathbf{k}_3\right)_{\Omega_i}\right] \\ \mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \end{cases} \quad (\text{Б.40})$$

Неявные алгоритмы интегрирования по времени

$$V_i \left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right)_i = -\Psi_i(\mathbf{Q}_{\Omega_i}) \quad (\text{Б.41})$$

где V_i — объем расчетной ячейки, $\Psi_i(\mathbf{Q}_{\Omega_i})$ — аппроксимация уравнений поверхностного интеграла в методе конечного объема. Функция $\Psi_i(\mathbf{Q}_{\Omega_i})$ зависит от переменных, определенных в точках пространственного шаблона Ω_i и представима в виде суммы конвективных потоков Ψ_2^{conv} , вязких потоков Ψ_2^{vis} и источника S

$$\Psi_i(\mathbf{Q}_{\Omega_i}) = \Psi_2^{conv} + \Psi_2^{vis} + S.$$

Обозначим через $\mathbf{Q}_i^{n+1} \equiv \mathbf{Q}_i(t + \Delta t^n)$, $\mathbf{Q}_i^n \equiv \mathbf{Q}_i(t)$, $\mathbf{Q}_i^{n-1} \equiv \mathbf{Q}_i(t - \Delta t^{n-1})$. Запишем для (Б.41) полностью неявную схему с первым порядком аппроксимации по времени на момент времени $t + \Delta t^n$

$$\frac{V_i}{\Delta t^n} (\mathbf{Q}_i^{n+1} - \mathbf{Q}_i^n) = -\Psi_i(\mathbf{Q}_{\Omega_i}^{n+1}) \quad (\text{Б.42})$$

и со вторым порядком аппроксимации $t + \Delta t^n$

$$\begin{aligned} V_i (a\mathbf{Q}_i^{n+1} + b\mathbf{Q}_i^n + c\mathbf{Q}_i^{n-1}) &= -\Psi_i (\mathbf{Q}_{\Omega_i}^{n+1}) \\ a &= \frac{1}{\Delta t^n} \frac{2\tau+1}{\tau+1}, \quad b = -\frac{1}{\Delta t^n} (\tau+1), \quad c = \frac{1}{\Delta t^n} \frac{\tau^2}{\tau+1} \\ \tau &= \frac{\Delta t^n}{\Delta t^{n-1}} \end{aligned} \quad (\text{Б.43})$$

Если шаг по времени постоянный ($\tau = 1$), то левая часть (Б.43) есть стандартная направленная разность 2-го порядка

$$\left. \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \right|_{t=t^{n+1}} = \frac{3\mathbf{Q}^{n+1} - 4\mathbf{Q}^n + \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2).$$

Рассмотрим отдельно реализацию схемы (Б.42) или (Б.43) для стационарных и нестационарных расчетов.

Стационарный случай

Для стационарного случая достаточно ограничиться схемой первого порядка (Б.42) и рассматривать ее как квазинестационарную схему метода установления. Построим итерационный процесс, сходящийся к стационарному решению. Для этого введем приращение вектора переменных

$$\Delta \mathbf{Q}^n = \mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n$$

и линеаризуем правую часть (Б.42) в каждой точке (далее пространственные индексы опускаем)

$$\begin{aligned} \Psi (\mathbf{Q}^{n+1}) &= \Psi (\mathbf{Q}^n) + \frac{\partial \Psi (\mathbf{Q}^n)}{\partial t} \Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= \Psi (\mathbf{Q}^n) + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \right)^n \Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= \Psi (\mathbf{Q}^n) + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} \Delta \mathbf{Q}^n + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (\text{Б.44})$$

Подставляя (Б.42) в (Б.45), имеем

$$\left(\frac{V}{\Delta t} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} \right) \Delta \mathbf{Q}^n = -\Psi (\mathbf{Q}^n). \quad (\text{Б.45})$$

Здесь под матрицей Якоби правой части понимается дифференцирование по переменным, определенным на шаблоне Ω_i

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} \equiv \frac{\partial \Psi_i(\Omega_i)}{\partial \mathbf{Q}_j}, \quad i, j \in \Omega_i.$$

Вводя обозначение оператора неявной части

$$\mathfrak{M} = \left(\frac{V}{\Delta t} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} \right).$$

и обращая его, получаем $\Delta \mathbf{Q}^n = -\mathfrak{M}^{-1} \Psi(\mathbf{Q}^n)$. Откуда следует, что при $n \rightarrow \infty$ приращение $\Delta \mathbf{Q}^n$ стремится к нулю, следовательно, $\Psi(\mathbf{Q}^n) \rightarrow 0$. Это означает сходимость к стационарному решению $\Psi(\mathbf{Q}) = 0$.

Нестационарный случай

Для нестационарного случая рассмотрим схему 2-го порядка аппроксимации (Б.43) и построим ньютоновский итерационный процесс для нелинейного уравнения $F(\mathbf{Q}_i^{n+1}) = 0$, где функция F определяется следующим образом

$$F(\mathbf{Q}_i^{n+1}) = V_i a \mathbf{Q}_i^{n+1} + \Psi(\mathbf{Q}_i^{n+1}) - V_i b \mathbf{Q}_i^n - V_i c \mathbf{Q}_i^{n-1} \quad (\text{Б.46})$$

Далее пространственный индекс i опускаем. Тогда для определения величины \mathbf{Q}^{n+1} ньютоновский итерационный процесс запишется в виде (w — номер итерации)

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{n+1} &= \mathbf{Q}^n \\ \mathbf{Q}^{n+1} &= \mathbf{Q}^{n+1} - \left[F' \left(\mathbf{Q}^{n+1} \right) \right]^{-1} F \left(\mathbf{Q}^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (\text{Б.47})$$

где матрица Якоби F' в точке i имеет вид

$$F' = \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{Q}_j^{n+1}} = a V_i + \frac{\partial \Psi(\Omega_i)}{\partial \mathbf{Q}_j^{n+1}}, \quad i, j \in \Omega_i, \quad (\text{Б.48})$$

Подставляя (Б.46) и (Б.48) в (Б.47) и обозначая приращение на s -ой через $\Delta \mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^{(s+1)} - \mathbf{Q}^{(s)}$, получаем линеаризованную версию схемы (Б.43)

$$\left[aV + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} \left(\mathbf{Q}^{(s)} \right) \right] \Delta \mathbf{Q}^{n+1} = -\Psi \left(\mathbf{Q}^{(s)} \right) - V \left(a \mathbf{Q}^{(s)} + b \mathbf{Q}^n + c \mathbf{Q}^{n-1} \right). \quad (\text{Б.49})$$

Обращая оператор в левой части, получаем

$$\Delta \mathbf{Q}^{n+1} = -1 \left[-\Psi \left(\mathbf{Q}^{(s)} \right) - V \left(a \mathbf{Q}^{(s)} + b \mathbf{Q}^n + c \mathbf{Q}^{n-1} \right) \right]$$

Если $s \rightarrow \infty$ и присутствует сходимость ньютоновских итераций, то $\Delta \mathbf{Q}^{n+1} \rightarrow 0$, а это означает, что предельное значение ньютоновского процесса \mathbf{Q}^{n+1} удовлетворяет полностью неявной консервативной схеме (Б.43).

Замечание 1. Для ускорения сходимости ньютоновского процесса в качестве начального приближения можно выбрать значение $\mathbf{Q}^{(0)} = (1 + \tau) \mathbf{Q}^n + \mathbf{Q}^{n-1}$, полученное экстраполяцией значений с временных слоев n и $n - 1$.

Замечание 2. Вместо ньютоновского процесса (Б.49) можно использовать упрощенный ньютоновский процесс, заменив вычисления матрицы Якоби потоков на каждой итерации, вычислением только на нулевой

$$\left[aV + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} \left(\mathbf{Q}^{(0)} \right) \right] \Delta \mathbf{Q}^{n+1} = -\Psi \left(\mathbf{Q}^{(s)} \right) - V \left(a \mathbf{Q}^{(s)} + b \mathbf{Q}^n + c \mathbf{Q}^{n-1} \right).$$

Замечание 3. Для упрощения вычисления матрицы Якоби потока в качестве потока можно брать поток, конвективная часть которого подсчитана на более узком шаблоне, чем шаблон Ω_i , например, по схеме первого порядка $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} (\Psi_2^{conv} + \Psi_2^{vis} + S)$ заменяется на $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} (\Psi_1^{conv} + \Psi_2^{vis} + S)$. При этом улучшаются свойства матрицы оператора \mathfrak{M} , но ухудшается сходимость ньютоновских итераций (сходимость уже не квадратична).

Замечание 4. Все выкладки, приведенные выше для нестационарного случая и второго порядка аппроксимации по времени, верны и для аппроксимации первого порядка, если положить $a = -b = -\frac{1}{\Delta t}$ и $c = 0$. Линейная система уравнений (Б.49) решается стабилизированным методом бисопряженных градиентов (BiGStab).