

Бюджетное учреждение высшего образования Ханты-Мансийского автономного  
округа – Югры «Сургутский государственный университет»

*На правах рукописи*



Дубовик Алексей Олегович

Численные и аналитические методы решения задач динамики  
магнитной жидкости, протекающей в трубах

05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д. ф.-м. н., профессор  
Галкин Валерий Алексеевич

Сургут – 2017

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
Глава 1. Обзор численных методов решения и точных решений задач МГД .....	18
1.1 Численные методы решения задач МГД .....	18
1.2 Точные решения уравнений МГД .....	21
1.3 Спектральные методы в исследовании задач динамики магнитной жидкости .....	25
Выводы по первой главе.....	29
Глава 2. Моделирование слоистого течения вязкой магнитной несжимаемой жидкости в неограниченном плоском слое .....	31
Введение.....	31
2.1 Моделирование слоистого течения жидкости в рамках модели гидродинамики .....	33
2.1.1 Исследование точного решения уравнений гидродинамики .....	33
2.1.2 Решение тестовой задачи .....	36
2.2 Моделирование слоистого течения в рамках модели МГД .....	39
2.2.1 Исследование точного решения уравнений МГД .....	39
2.2.2 Решение тестовой задачи .....	40
2.2.3 О возможности объемного воздействия магнитным полем на слоистое течение жидкости .....	44
2.3. Характеристика разработанного программного обеспечения .....	46
2.3.1 Общая характеристика .....	46
2.3.2. Оценка погрешности расчетов .....	47
Выводы по второй главе.....	48
Глава 3. Моделирование слоистого течения вязкой магнитной несжимаемой жидкости в бесконечном цилиндре, бесконечном коаксиальном цилиндре .....	50
Введение.....	50
3.1 Слоистое течение жидкости в бесконечном цилиндре .....	53

3.1.1 Вычисление поля скоростей и напряженности магнитного поля .....	53
3.1.2 Вычисление фазового потока .....	56
3.1.3 Расчет тепловыделения .....	58
3.2 Слоистое течение жидкости в бесконечном коаксиальном цилиндре	60
3.2.1 Вычисление поля скоростей и напряженности магнитного поля .....	60
3.2.2 Вычисление фазового потока .....	63
3.2.3 Расчет тепловыделения .....	65
3.3. Характеристика разработанного программного обеспечения .....	66
3.3.1. Общая характеристика .....	66
3.3.2. Оценка погрешности расчетов поля скоростей и фазового потока .....	67
3.3.3. Оценка погрешности расчетов тепловыделения .....	69
Выводы по третьей главе .....	72
Глава 4. Итерационный алгоритм нахождения спектра квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов .....	74
Введение.....	74
4.1. Теоретическое обоснование.....	75
4.1.1 Предварительные сведения и замечания.....	75
4.1.2 Доказательство сходимости.....	77
4.1.3 Доказательство полноты системы собственных функций .....	84
4.2 Численная апробация итерационного алгоритма на задаче о резонансной потере устойчивости трубы с протекающей магнитной жидкостью.....	89
4.2.1 Постановка прикладной задачи.....	89
4.2.2 Формализация прикладной задачи.....	92

4.2.3 Аналитическое решение тестовой задачи .....	94
4.2.4 Замечание о спектре исследуемой прикладной задачи.....	95
4.2.5 Результаты расчетов .....	97
4.2.6. Характеристика разработанного программного обеспечения .	101
Выводы по четвертой главе .....	104
Заключение .....	106
Список литературы .....	109

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность.** В рамках приближения магнитной гидродинамики (МГД), описывающей течение магнитной жидкости по трубам, может быть рассмотрено решение проблем в различных отраслях отечественного хозяйства. Решение проблемы управляемого термоядерного синтеза (УТС) позволит на долгие годы обеспечить практически неиссякаемым запасом энергии. Перспективным устройством для осуществления технологии УТС является отечественная разработка ТОКАМАК. В медицине в настоящее время активно исследуется технология электромагнитной гипертермии, применяемой при лечении онкологических заболеваний. При этом разрушение пораженных клеток происходит за счет нагрева магнитных жидкостей, введенных в организм человека. Ферромагнитные жидкости могут быть использованы в качестве смазочных материалов в технических устройствах для максимального уменьшения сил трения, что позволяет снизить непроизводительные затраты энергии и износ взаимодействующих деталей. В условиях микрогравитации, после продолжительного пребывания на орбите, топливо космических станций распадается на страты. Поэтому, чтобы вновь завести двигатель, топливо необходимо перемешать, для чего может быть использовано объемное воздействие магнитным полем.

В большинстве месторождений вместе с нефтью и газом залегает вода, в которой растворены соли натрия, калия, кальция, магния и других металлов, и образует вместе с продуктивной частью пласта связанную гидродинамическую систему. Кроме того, в процессе добычи нефти и совместного движения ее с пластовой водой образуются устойчивые эмульсии. Поэтому исследование задач динамики магнитной жидкости имеет непосредственное отношение к задачам управления течением несжимаемой жидкости, рассматриваемым в нефтегазовой отрасли в связи с необходимостью создания технологии «цифровое месторождение». Например, решение данного класса задач позволит моделировать отклик месторождения на динамические воздействия: механические, тепловые,

электромагнитные и другие, с помощью которых возможно изменять во времени геометрию области течения, что позволит ставить оптимизационные задачи с целью повышения коэффициента извлечения углеводородов. При этом важным является учет тепловыделения в течении вязкой несжимаемой жидкости, одним из факторов появления которого служит явление внутреннего трения в жидкости. Тепловыделение в течении вязкой несжимаемой жидкости может оказывать существенное влияние на характеристики крупномасштабных течений с большим коэффициентом вязкости и являться причиной фазовых переходов, электрических пробоев и т. д.

Современные тенденции развития экономики предполагают применение высокопроизводительных вычислений (по англ. HPC, High Performance Computing) на суперкомпьютерах в самых разных секторах отечественного хозяйства. Перечисленные проблемы не являются исключениями ввиду иногда не доступности проведения натурного эксперимента или его высокой стоимости. Проведение вычислительных экспериментов предполагает разработку соответствующего программного обеспечения, которое необходимо верифицировать точными решениями во избежание принятия неправильных выводов, полученных на основе неверных результатов расчетов. Поэтому, актуальным является исследование точных решений уравнений МГД, описывающих течение жидкости по трубам.

**Степень разработанности.** Анализ литературы, проведенный в главе 1, показывает, что на данный момент нет однозначно лучшего численного метода для решения задач динамики магнитной жидкости, выбор конкретного метода может варьироваться в зависимости от прикладной задачи. Задачи динамики магнитной жидкости, протекающей в трубах, предполагают использование декартовой или цилиндрической систем координат. В первом случае, в качестве численного метода решения, подходит метод конечных разностей ввиду легкости его реализации и распараллеливания. Во втором – метод контрольных объемов из-за его консервативности на произвольных сетках, что является важным преимуществом применительно к задачам динамики жидкости. Точные решения уравнений МГД в

нестационарном случае, позволяющие описать движение магнитной жидкости по трубам, могут быть исследованы спектральными методами дифференциальных операторов. Также спектральный метод позволяет исследовать задачи о резонансной потере устойчивости различных конструкций с протекающей магнитной жидкостью, приводящей к спектральным задачам для квадратичного пучка операторов. Обзор численных методов решения данного класса задач показывает, что в большинстве своем они используют линеаризацию, при этом данным методам не хватает точности или возможности получения всего спектра решения. Кроме того, в некоторых работах отсутствует обоснование применения численных методов, а именно, верификация результатов точными решениями.

**Целью диссертационной работы** является разработка программного обеспечения, позволяющего решать задачи динамики магнитной жидкости, протекающей по трубам, с применением высокопроизводительных технологий параллельного программирования, а также исследование точных решений уравнений МГД спектральными методами дифференциальных операторов.

**Задачи работы:**

1. Разработка, на основе методов конечных разностей и контрольных объемов, отладка и тестирование комплекса программ, позволяющего моделировать течение магнитной жидкости по трубам с применением высокопроизводительных технологий параллельного программирования.
2. Исследование точных нестационарных решений уравнений МГД, применимых для описания движения жидкости по трубам, спектральными методами дифференциальных операторов.
3. Разработка, обоснование и тестирование эффективных численных методов нахождения спектра квадратичного пучка операторов.

**Научная новизна:**

1. Исследована модель слоистого течения жидкости в неограниченном плоском слое. Доказана теорема о равносильности решения уравнений теплопроводности для компонент вектора скорости и системы уравнений МГД (при предположении единственности решения) для слоистого

течения жидкости при условии параллельности векторов скорости и напряженности магнитного поля, пропорциональности поля давления скалярному квадрату вектора напряженности магнитного поля, равенства кинематической и магнитной вязкости.

2. Показана принципиальная возможность объемного воздействия магнитным полем на слоистое течение жидкости в неограниченном плоском слое, при линейной зависимости от времени скорости жидкости в случае условий прилипания или при однородных граничных условиях второго рода.
3. Исследована модель слоистого течения жидкости в бесконечном цилиндре, в бесконечном коаксиальном цилиндре. Доказана теорема о равносильности решения уравнений теплопроводности для компонент вектора скорости и вектора напряженности магнитного поля и системы уравнений МГД (при предположении единственности решения) для слоистого течения жидкости. Предполагается, что вектор напряженности магнитного поля имеет единственную ненулевую компоненту, зависящую только от радиальной координаты и времени, параллельную оси цилиндра, коаксиального цилиндра, при этом поле давления выражается через найденные значения векторных полей скорости и магнитной напряженности.
4. Создан и протестирован комплекс программ «Локальная 3D модель слоистых управляемых течений» для проведения вычислительных экспериментов по моделированию трехмерных локальных слоистых течений вязкой магнитной несжимаемой жидкости. Программное обеспечение создано на основе методов конечных разностей и контрольных объемов с применением технологии параллельных вычислений OpenMP и позволяет моделировать слоистое течение магнитной жидкости, протекающей в плоском слое, трубе, коаксиальной трубе.



5. Предложен новый итерационный алгоритм нахождения спектра квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов. Доказана теорема о существовании решения спектрального уравнения при каждом значении параметра из некоторого диапазона, сходимости итерационного алгоритма.
6. Доказана теорема о полноте системы собственных функций квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов на своем образе, монотонности и неограниченности последовательности модулей собственных значений, найденных по итерационному алгоритму, и существовании двусторонней оценки для каждого члена последовательности.
7. Доказана равносильность решения задачи о резонансной потере устойчивости трубы с протекающей магнитной жидкостью, имеющей дифференциальную постановку, задаче нахождение спектра квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов.
8. Впервые проведено тестирование итерационного алгоритма нахождения спектра квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов. Впервые вычислены собственные частоты колебания трубы при переменном растягивающем усилии.

**Теоретическая значимость** диссертационной работы заключается в описании нового класса точных решений системы нестационарных уравнений МГД вязкой несжимаемой жидкости, соответствующих слоистому течению магнитной жидкости в следующих областях: неограниченный плоский слой, бесконечный цилиндр, бесконечный коаксиальный цилиндр; доказательстве существования решения спектральной задачи для квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов, сходимости итерационного метода, полноты системы собственных функций на своем образе, монотонности и неограниченности последовательности модулей собственных значений, найденных по итерационному алгоритму, существования двусторонней оценки для каждого члена последовательности; на примере прикладной задачи показана

равносильность исследования ее дифференциальной постановки и спектральной задачи для квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов.

**Практическая значимость.** Разработанный программный комплекс может быть использован для моделирования отклика трехмерного слоистого течения магнитной жидкости на движение границы области течения и на объемное воздействие магнитным полем. Модель слоистых течений жидкости может быть использована для описания течения нефти в малых полостях и зазорах. Поэтому разработка подобного программного обеспечения, позволяющего, прежде всего, качественно оценить эффект, оказываемый различными типами воздействий на течение несжимаемой жидкости, может быть рассмотрено как одно из направлений исследований на пути освоения трудноизвлекаемых запасов нефти и создания отечественной технологии «цифровое месторождение».

Найденные точные решения уравнений МГД могут быть использованы для верификации программного обеспечения, разработанного для решения задач гемодинамики, УТС, освоения трудноизвлекаемых запасов углеводородов, рассматриваемых не обязательно в рамках уравнений МГД несжимаемой жидкости, но и сжимаемой жидкости, поскольку МГД модель несжимаемой жидкости является подмоделью МГД модели сжимаемой жидкости.

**Объектом исследования** являются модели жидкости и газа, допускающие слоистую структуру течений, динамика которых подвержена изменению магнитным полем.

**Предметом исследования** являются система уравнений МГД для вязкой несжимаемой жидкости, уравнение колебания трубы с протекающей магнитной жидкостью, рассматриваемой в тросовом приближении.

**Методы исследования** включают в себя методы функционального анализа, теории дифференциальных операторов и методы математического моделирования: разработка и тестирование численного алгоритма решения задачи и его реализация в виде программного комплекса, проведение вычислительного эксперимента, анализ его результатов.

В диссертационной работе используется понятие компактных частично симметричных операторов, введенное профессором В. И. Таракановым. Класс таких операторов является расширением класса компактных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Компактные частично симметричные операторы – это компактные операторы, симметричные на своем образе, являющемся подмножеством гильбертова пространства. Если это подмножество совпадает с гильбертовым пространством, то в этом случае компактные частично симметричные операторы являются компактными самосопряженными.

#### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Исследована модель слоистого течения жидкости, выделен класс точных решений системы нестационарных уравнений МГД вязкой несжимаемой жидкости, соответствующих слоистому течению жидкости в следующих областях: неограниченный плоский слой, бесконечный цилиндр, бесконечный коаксиальный цилиндр.
2. Разработан итерационный алгоритм нахождения спектра квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов. Проведено его теоретическое обоснование. Выполнена численная апробация итерационного алгоритма на задаче о резонансной потере устойчивости трубы с протекающей магнитной жидкостью, показавшая его эффективность.
3. Разработан комплекс программ с применением технологии параллельных вычислений OpenMP для проведения вычислительного эксперимента по моделированию слоистого течения вязкой магнитной несжимаемой жидкости. Найденные точные решения уравнений МГД использованы для верификации разработанного программного обеспечения, показавшей его эффективность.

#### **Соответствие диссертации паспорту специальности**

Содержание диссертации соответствует формуле специальности 05.13.18 – «математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» по отрасли «физико-математические науки» и пунктам 2, 3, 4 областей исследования:

- *Пункт 2: «развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей».* Этому пункту соответствует следующее: исследована модель слоистого течения жидкости, спектральными методами дифференциальных операторов, выделен класс точных решений уравнений МГД, соответствующих слоистому течению магнитной жидкости в неограниченном плоском слое, бесконечном цилиндре, бесконечном коаксиальном цилиндре.
- *Пункт 3: Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.* Этому пункту соответствует разработка итерационного алгоритма нахождения спектра квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов. Доказана теорема о существовании решения, сходимости итерационного алгоритма. Доказана теорема о полноте системы собственных функции квадратичного пучка операторов на своем образе, монотонности и неограниченности последовательности модулей собственных значений, найденных по итерационному алгоритму, существовании двусторонней оценки для каждого члена последовательности. Проведена верификация и оценка погрешностей алгоритма, показавшие его эффективность.
- *Пункт 4: Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.* Этому пункту соответствует реализация методами конечных разностей и контрольных объемов с применением технологии параллельных вычислений OpenMP комплекса программ, позволяющего моделировать слоистое течение вязкой несжимаемой магнитной жидкости.

**Степень достоверности результатов.** Достоверность аналитических результатов обеспечивается использованием классической модели магнитной гидродинамики и корректностью математических доказательств. Достоверность численных результатов обеспечивается применением теоретически обоснованных

численных методов, верификацией результатов вычислительного эксперимента, показавшей эффективность разработанного программного обеспечения.

**Апробация результатов.** Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

- Международные конференции «Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе», посвященные дню рождения великого русского математика академика П. Л. Чебышева (Сургут, 2014, 2016).
- XVI Международная конференция «Супервычисления и математическое моделирование» (Саров, 2016).
- Международная конференция «Марчуковские научные чтения – 2017» (Новосибирск, Академгородок, 2017).
- Всероссийские конференции «Север России: стратегии и перспективы развития» (Сургут, 2015, 2016).
- XXI Всероссийская конференция – молодежная школа-конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики», посвященная памяти К. И. Бабенко (Новороссийск, Абрау-Дюрсо, 2016).
- Семинар кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».
- Объединенный семинар «Численный анализ» ИВМиМГ СО РАН и кафедры вычислительной математики ММФ НГУ.
- Семинар отдела гидродинамических исследований и моделирования в нефтегазовой отрасли ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН.
- Объединенный семинар кафедры прикладной математики и научного центра междисциплинарных исследований «БУ ВО Сургутский государственный университет».

**Публикации.** Результаты диссертационной работы опубликованы в 18 научных работах, из них:

- 7 статей в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК [1-7];
- 3 из которых переведены на англ. язык и опубликованы в международных журналах, входящих в систему цитирования Scopus [8–10];
- 1 статья в рецензируемом научном издании [11];
- 6 в сборниках трудов и тезисов конференций [12–17];
- 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [18].

**Работа выполнена при поддержке** гранта РФФИ №15-41-00059 р\_урал\_a «Моделирование термодинамики органов человека в условиях стационарности и нестационарности». Результаты диссертационной работы использовались при выполнении государственного задания «Аналитические и вычислительные задачи нелинейной математической физики, связанные с актуальными задачами развития Ханты-Мансийского автономного округа-Югры».

**Личный вклад.** В совместных исследованиях автор принимал участие на всех этапах работы: в выборе и формулировке модели, теоретическом исследовании модели, исследовании операторных уравнений на собственные значения, теоретическом обосновании нового итерационного алгоритма. Автор самостоятельно реализовал в виде комплекса программ модель слоистых течений, выполнил отладку и тестирование, провел серию вычислительных экспериментов, реализовал численный итерационный алгоритм, провел его отладку и тестирование.

**Благодарности.** Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору Валерию Алексеевичу Галкину за поддержку и полезные замечания при проведении научных исследований. Автор глубоко признателен профессору Виктору Ивановичу Тараканову за проявленное большое внимание и терпение к первым шагам в науке.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы. Диссертация изложена на 119 страницах,

включает 26 иллюстраций, 19 таблиц. Список цитируемой литературы содержит 109 источников и занимает 11 страниц.

**В первой главе** дается обзор численных методов решения и точных решений задач МГД. Отдельно рассмотрена связь задач динамики магнитной жидкости со спектральными методами дифференциальных операторов, представлены численные методы нахождения спектра квадратичного пучка операторов.

**Во второй главе** рассматривается модель слоистого течения вязкой несжимаемой жидкости в неограниченном плоском слое, сначала в рамках гидродинамики, затем – магнитной гидродинамики. Доказывается теорема о равносильности решения уравнений гидродинамики (при предположении единственности решения) и уравнений теплопроводности для слоистого течения жидкости в неограниченном плоском слое при равенстве поля давления потенциалу внешней объемной силы. Доказана теорема о равносильности решения уравнений теплопроводности для компонент вектора скорости и системы уравнений МГД (при предположении единственности решения) для слоистого течения жидкости в неограниченном плоском слое при условии параллельности векторов скорости и напряженности магнитного поля, пропорциональности поля давления скалярному квадрату вектора напряженности магнитного поля, равенства кинематической и магнитной вязкости. Показана принципиальная возможность объемного воздействия магнитным полем на слоистое течение жидкости в неограниченном плоском слое при реализации на границе линейной зависимости от времени скорости течения в случае граничных условий первого рода или при однородных граничных условиях второго рода. Представлены результаты вычислительного эксперимента по моделированию слоистого течения вязкой несжимаемой магнитной жидкости в плоском слое. Представлены результаты расчетов тепловыделения в слоистом течении жидкости в плоском слое, являющегося следствием внутреннего трения жидкости и джоулева подогрева. Установлен закон диссипации кинетической энергии и магнитной энергии потока во внутреннюю энергию. Представлены расчеты фазового потока, соответствующего слоистому течению жидкости. Область, занимаемая жидкостью,

изменяется в результате объемного воздействия магнитным полем и движения границы области течения. Проведена верификация результатов расчетов. Материалы главы нашли отражение в работах [2–4, 9 – 11, 13 – 17], получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [18].

**В третьей главе** рассматривается модель слоистого течения вязкой несжимаемой магнитной жидкости в неограниченном цилиндре, неограниченном коаксиальном цилиндре. Доказана теорема о равносильности решения уравнений теплопроводности для компонент вектора скорости и вектора напряженности магнитного поля и системы уравнений МГД (при предположении единственности решения) для слоистого течения жидкости в бесконечном цилиндре, в бесконечном коаксиальном цилиндре. При этом предполагается, что вектор напряженности магнитного поля имеет единственную ненулевую компоненту, зависящую только от радиальной координаты и времени, параллельную оси цилиндра, коаксиального цилиндра, а поле давления выражается через найденные значения векторных полей скорости и магнитной напряженности. Представлены результаты расчетов тепловыделения в слоистом течении жидкости, протекающей в неограниченном цилиндре, коаксиальном цилиндре из-за внутреннего трения жидкости и джоулева подогрева, полученные с использованием технологии параллельных вычислений OpenMP. Представлены расчеты фазового потока, соответствующего слоистому течению жидкости. Область, занимаемая жидкостью, изменяется в результате объемного воздействия магнитным полем и движения границы области течения, а именно, вращения и движения вдоль оси цилиндра, коаксиального цилиндра. Проведена верификация результатов расчетов. Материалы главы нашли отражение в работах [5–7], получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [18].

**В четвертой главе** представлен новый итерационный алгоритм нахождения спектра квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов. Доказана теорема о существовании решения спектрального уравнения при каждом значении параметра  $\varepsilon$  из некоторого диапазона, оценки которого представлены, и сходимости итерационного алгоритма. Доказана теорема о полноте системы



собственных функций квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов на своем образе, монотонности и неограниченности последовательности модулей собственных значений, найденных по итерационному алгоритму, существование двусторонней оценки для каждого члена последовательности. Проведена численная апробация итерационного алгоритма на задаче о резонансной потере устойчивости трубы, рассматриваемой в тросовом приближении, с протекающей магнитной жидкостью. Доказана эквивалентность дифференциальной постановки данной задачи спектральной задаче для квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов. Растягивающее усилие, действующее на трубу, конкретизировалось в линейном виде. Представлены результаты расчетов собственных частот колебания трубы в зависимости от параметров, определяющих линейный вид растягивающего усилия и  $\varepsilon$ . Проведена оценка погрешности и верификация численного метода. По материалам главы опубликованы работы [1, 8, 12].

**В заключении** формулируются основные результаты выполненных исследований, рекомендации и направления дальнейшей разработки темы.

# ГЛАВА 1. ОБЗОР ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ И ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ МГД

## 1.1 Численные методы решения задач МГД

1. В рамках приближения магнитной гидродинамики рассматриваются решения проблем УТС, добычи трудноизвлекаемых запасов нефти, задач гемодинамики и др. Решение этих и других задач невозможно без применения высокопроизводительных вычислений. Член-корреспондент, профессор С. М. Абрамов считает, что «Сегодня критические (прорывные) технологии в государствах, строящих экономику, основанную на знаниях, исследуются и разрабатываются на базе широкого использования высокопроизводительных вычислений на суперЭВМ. И другого пути — нет» [19]. Тактика параллельных вычислений, применяемая при решении задач математического моделирования, описана в [20].

Применение высокопроизводительной вычислительной техники позволило заметно усложнить модели, исследуемые при изучении проблемы УТС. "Более адекватное описание явлений дало возможность объяснить некоторые наблюдаемые эффекты, спрогнозировать поведение плазмы в различных условиях, повысить эффективность использования дорогостоящего оборудования, избежать его разрушения, снизить расходы на строительство новых установок" [21]. В работах [22] рассматриваются приближенные уравнения движения плазмы в рамках МГД. Перспективным устройством для осуществления технологии УТС является ТОКАМАК [23].

По мнению академика В. Б. Бетелина, необходимым условием сохранения контроля над сегментом мирового энергетического рынка, достаточного для обеспечения устойчивого социально-экономического развития России, является создание принципиально новой технологии контроля и управления процессами разработки месторождений («цифровое месторождение»), основанной на использовании постоянно обновляемой суперкомпьютерной геолого-

гидродинамической модели месторождения [24]. Работа [25] посвящена экспериментальному изучению магнитной активации нефти для защиты скважин от парафиновых отложений, переходящих в твердое кристаллическое состояние вследствие изменения температуры на забое, что снижает добычу нефти. В [26] тестируется программный комплекс, позволяющий определять параметры воздействия на режимы течения жидкости. При этом течение нефти в пористой среде моделируется как течение магнитной жидкости в трубе.

Исследование задачи динамики магнитной жидкости, протекающей в трубах, актуально также в гемодинамике, например, при освоении технологии электромагнитной гипертермии, применяемой для лечения онкологических заболеваний. Магнитные жидкости внутривенно вводятся в организм человека и доставляются до опухолевых тканей, при этом происходит нагревание пораженных тканей [27 – 29]. Известно, что раковые клетки гибнут при более низкой температуре, чем здоровые.

2. Численные методы решения уравнений МГД могут быть разделены на четыре вида: конечно разностный метод, метод конечных элементов (МКЭ), метод контрольных объемов (МКО) и псевдо-спектральные методы. Подробнее о перечисленных методах применительно к задачам динамики жидкости можно узнать в работах [30 – 34].

Главным достоинством конечно разностного метода является его простота в реализации и распараллеливании. Главным недостатком является отсутствие универсального способа адаптации метода для вычислений на неструктурированных сетках, отсутствие гарантии удовлетворения требования консервативности на таких сетках. Имеются сложности при применении метода к областям, описываемых другой, кроме плоской, геометрией. Имеются обобщения в случае поиска разрывных решений [35, 36].

Метод контрольных объемов сохраняет консервативность на произвольных структурированных и неструктурированных сетках, что является очень важным в задачах динамики жидкости. Также достоинством метода является его более легкая адаптация, по сравнению с методом конечных разностей и МКЭ, к численному

решению в отличных от декартовых координатах. Недостатком МКО является сложность получения решения, обладающего более чем вторым порядком точности по пространственным координатам. Имеются модификации метода, применяемые для исследования решений, допускающих разрывы [35, 37].

МКЭ позволяет достигать высокой точности аппроксимации на произвольных сетках. Однако, этот метод является достаточно сложным для реализации и даже при использовании явной схемы дискретизации по времени требует обращения большой СЛАУ, что негативно сказывается на производительности алгоритма. Разрывы также являются проблемой для стандартного МКЭ.

Псевдо-спектральные методы сводят задачу нахождения неизвестной функции к задаче поиска ее коэффициентов разложения в ряд Фурье. Псевдо-спектральные методы могут быть чрезвычайно точными при использовании лишь нескольких отличных от нуля коэффициентов разложения. Эта высокая точность метода является преимуществом при рассмотрении, например, турбулентных течений. Псевдо-спектральные методы испытывают проблемы при их применении на неструктурированных сетках, удовлетворении произвольных граничных условий и точном представлении разрывных решений. Эти методы проигрывают МКО в быстродействии при параллельном выполнении программы. Кроме того, необходимо делать дополнительное предположение относительно выбора числа ненулевых коэффициентов, используемых при разложении в ряд искомой функции.

Таким образом, все представленные численные методы решения задач МГД имеют свои достоинства и недостатки, и нет однозначно лучшего метода. Поэтому развитие получили смешанные подходы. Например, в [38] разрабатываются численные методы, основанные на расчете электромагнитных полей схемами, основанными на методе Галеркина, относящегося к МКЭ, в сочетании с МКО, используемого для решения законов сохранения механики жидкости. В [39] при рассмотрении задач конвекции применяется смешанный метод, включающий в себя метод конечных разностей и спектральный метод.

**3.** В рамках модели МГД, описывающей движение жидкости по трубам, может быть рассмотрено решения таких важных и трудоемких задач как освоение трудноизвлекаемых запасов углеводородов, освоение технологии УТС, управление гемодинамикой и др., при этом является актуальным применение высокопроизводительных вычислений. Поскольку нет однозначно лучшего численного метода для решения задач динамики магнитной жидкости, необходимым является знание достоинств и недостатков каждого, и применение различных методов для решения разных задач. Для описания течения жидкости по трубам могут быть использованы декартова и цилиндрическая системы координат. Соответственно, для моделирования динамики магнитной жидкости, в силу сказанного в пункте 2, были выбраны конечно разностный метод и МКО.

Отсюда следует необходимость решения задачи в данной диссертационной работе: разработка, на основе методов конечных разностей и контрольных объемов, отладка и тестирование комплекса программ, позволяющего моделировать течение магнитной жидкости по трубам с применением высокопроизводительных технологий параллельного программирования.

## **1.2 Точные решения уравнений МГД**

Представляется весьма естественным применение компьютерного моделирования при рассмотрении сложных проблем, таких как, УТС, управление течением жидкости и др. Разрабатываемые при этом программные комплексы необходимо тестировать, с целью оценки качества, принимаемых на основе их результатов, решений. Необходимость проведения верификации с использованием точных решений и валидации разрабатываемого программного обеспечения отмечается в [40]. В этом параграфе рассмотрены точные решения уравнений МГД в областях, описываемых декартовыми  $\{x, y, z\}$  (пункт 2) и цилиндрической  $\{r, \varphi, z\}$  (пункт 1) системами координат, поскольку именно они используются для описания течения жидкости в трубах и каналах.

**1.1.** В [41] получено точное решение уравнений МГД, описывающих стационарное вихревое течение внутри цилиндра, на оси которого находится

проводник, по которому течет заданный ток. Предполагается, что жидкость невязкая, несжимаемая и имеет конечную проводимость, движение жидкости и магнитное поле осесимметричны (т. е. не зависят от угла  $\phi$ ), радиальная составляющая магнитного поля равна нулю, для радиальной компоненты вектора скорости на границе задано условие непротекания, остальные граничные условия следуют из используемой подстановки. В случае вязкой жидкости компоненты вектора скорости жидкости могут быть найдены только численно [42].

**1.2.** В [43] получено точное решение уравнений МГД в случае электровихревого стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости между двумя параллельными стенками при использовании автомодельного подхода. Уравнения рассматриваются в форме не содержащей давления  $p$ . Магнитная вязкость отлична от нуля. Вектор скорости  $\mathbf{v}$  и вектор напряженности магнитной индукции  $\mathbf{B}$  имеют вид

$$\mathbf{v} = \left\{ -\frac{A}{a} r f' \left( \frac{z}{a} \right), 0, 2A f \left( \frac{z}{a} \right) \right\}, \quad \mathbf{B} = \left\{ 0, \mu_0 A_1 r \frac{z}{a}, 0 \right\},$$

где  $a$  – расстояние между параллельными плоскостями,  $A$ ,  $A_1$  – константы, определяемые из граничных условий,  $\mu_0$  – магнитная проницаемость. Имеется уравнение третьего порядка для определения функции  $f$ . Течение возбуждается электрическим током с заданным полным током. Граничными условиями для  $f$  служат условия прилипания. Также рассмотрен случай свободной поверхности, когда имеет место равенство нулю нормальной составляющей скорости на свободной поверхности и отсутствие на ней касательного напряжения трения.

**1.3.** В случае задачи магнитной гидростатики предполагается [44]

$$\mathbf{v} \equiv 0, \quad p \equiv const, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \alpha(\mathbf{r}) \mathbf{H}.$$

Последнее равенство означает, что ток всюду параллелен магнитному полю. Такие поля носят названия бессилловые. Частное решение, соответствующее винтовому полю в бесконечно длинном цилиндре, получено S. Lunquist (1950) и имеет вид  $\mathbf{H} \equiv \{0, A J_1(\alpha r), A J_0(\alpha r)\}$ , где  $A$ ,  $\alpha$  – постоянные,  $J_0$ ,  $J_1$  – функции Бесселя первого рола нулевого и первого порядка соответственно. Отметим, что в таком

случае вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  является собственной функцией оператора ротор.

**2.1.** Задача Гартмана [45] позволяет описать течение вязкой электропроводной несжимаемой жидкости между двумя параллельными стенками. Предполагается, что стенки покоятся, а движение происходит за счет перепада давления. При выборе линии тока, параллельной оси  $Ox$ , имеет место

$$\mathbf{v} = \{u(z), 0, 0\}, \quad \mathbf{H} = \{H_x(z), 0, const\}, \quad \frac{\partial p^*}{\partial x} = const, \quad p^* = p + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}.$$

На стенках задаются нулевые значения  $u$ ,  $H_x$  и  $H_z \neq 0$ . Остальные величины, как и в случае задач 2.2, 2.3, определяются после нахождения  $u$ ,  $H_x$  [46].

Нестационарный случай течения Гартмана при равенстве нулю начальных данных и мгновенном нарастании давления от нуля до некоторого постоянного значения исследован методом разделения переменных в [47].

**2.2.** Течение Куэтта [48] также позволяет описывать движение вязкой электропроводной несжимаемой жидкости между двумя параллельными стенками. Предполагается, что жидкость приводится в движение верхней стенкой, являющейся диэлектриком, а перепад давления отсутствует вдоль оси  $Ox$ . Как и в случае задачи Гартмана, динамика жидкости задается компонентами вектора скорости и напряженности магнитного поля вдоль оси  $Ox$ . На верхней стенке задается скорость жидкости, на нижней стенке скорость жидкости и проекция градиента  $H_x$  на ось  $Oz$  равны нулю,  $H_x \neq 0$ . Течение Куэтта может быть рассмотрено в качестве приближения к задаче о пограничном слое [46]. Отметим, что в случае течений Куэтта и Гартмана поле скоростей имеет лишь одну ненулевую компоненту.

Нестационарный случай течения Куэтта при нулевых начальных данных, при мгновенном изменении скоростей стенок от нуля до некоторых значений исследовано спектральными методами в [47]. При этом предполагается, что внешнее пространство заполнено неподвижной проводящей средой, стенки бесконечно тонкие, непроводящие. Там же исследуются колебательные течения с подвижными границами и перепадом давления, зависящем от времени, резонанс.

**2.3.** [46] Пусть полупространство  $z > 0$ , занятое вязкой электропроводной жидкостью, ограничено плоскостью, движущейся с постоянной скоростью вдоль оси  $Ox$ . Предполагается, что  $u$ ,  $H_x$  ограничены при  $z \rightarrow \infty$ . При  $H_z = 0$  имеется только тривиальное решение.

**2.4.** При стационарном движении вязкой несжимаемой жидкости с конечной проводимостью вдоль магнитного поля  $\mathbf{H} = K\mathbf{v}$ ,  $K = const$ , любое потенциальное течение  $\mathbf{v} = \nabla\phi$  для некоторого  $\phi$  является решением уравнений МГД [46]. При этом задача сводится к поиску решения уравнения Лапласа на потенциал  $\phi$  с заданными граничными условиями.

В случае невязкой, бесконечно проводящей жидкости, для которой  $\mathbf{H} = K\mathbf{v}$ ,  $K = 4\pi\rho$ , где  $\rho = const$  – плотность жидкости и на бесконечности поле скоростей постоянно  $\mathbf{v}_\infty = const = \frac{\mathbf{H}_\infty}{K}$ , решением будут волны Альфвена  $\mathbf{v}_{A,\infty} = \pm \frac{\mathbf{H}_\infty}{\sqrt{4\pi\rho}}$  [44, 46].

**2.5.** Для идеальной, несжимаемой, бесконечно проводящей жидкости решение уравнений МГД можно найти в виде плоской волны [49, 50]. В этом случае все величины зависят только от двух переменных  $x, t$ ,  $v_x = 0$ ,  $H_x = const$ ,  $p + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}$ . Решение некоторых задач в данном классе для пространства и полупространства рассмотрено в [46].

**2.6.** В [51] рассмотрены гармонические альфвеновские волны, возбуждаемые в однородном переменном токовом слое. Ток течет в направлении оси  $Oy$  в тонкой изолированной твердой пластине, погруженной в невязкую жидкость с конечной проводимостью, занимающую значительный объем. Предполагается, что  $v_x = 0$ ,  $B_x = const$ , компоненты  $v_z, B_z$  равны нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$   $p + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} = const$ . Граничное условие на пластине связывает скачок  $B_z$  с током в ней. Для компонент векторов скорости и магнитной индукции вдоль оси  $Oy$  справедливы те же условия, что и вдоль оси  $Oz$ .



**2.7.** Магнитогидродинамическая задача Рэлея описывает движение непроводящей жидкости, примыкающей к плоской стенке, которая внезапно приобретает постоянную скорость вдоль плоскости стенки [51]. Данная задача тесно связана с задачами роста пограничного слоя. Предполагается  $v_z = 0$ ,  $B_x = const$ . При равенстве кинематической вязкости и магнитной вязкости, задача сводится к решению уравнения теплопроводности и имеет точное решение. Для нахождения компонент  $v_z$ ,  $B_z$  задаются следующие условия: при  $t = 0$  ( $x > 0$ ) или  $x = \infty$   $B_z = v_z = 0$ , при  $x = 0$  ( $t > 0$ )  $B_z = 0$ ,  $v_z = U = const$ .

**3.** Разработка программных комплексов необходима для лучшего понимания законов динамики магнитной жидкости для реализации технологий УТС, «цифровое месторождение», решение задач гемодинамики и др. Верификация численных алгоритмов может быть проведена точными решениями уравнений МГД. Анализ описанных точных решений уравнений МГД показывает, что нестационарные решения получены при применении спектральных методов дифференциальных операторов, за исключением 2.6, 2.7, которые не пригодны для описания течения магнитной жидкости по трубам ввиду неограниченности области изменения независимой переменной. Интерес к нестационарным решениям объясняется актуальностью исследования способов изменения во времени геометрии области течения несжимаемой жидкости. Отсюда возникает задача: исследование точных нестационарных решений уравнений МГД, применимых для описания движения жидкости по трубам, спектральными методами дифференциальных операторов.

### **1.3 Спектральные методы в исследовании задач динамики магнитной жидкости**

Одним из эффективных методов исследования задач динамики магнитной жидкости является применение методов, основанных на решении задач на собственные значения и собственные функции для операторов, связанных с рассматриваемыми классами дифференциальных уравнений.

Отметим классы точных решений уравнений МГД, рассмотренных в предыдущем параграфе, которые могут быть описаны собственными функциями оператора ротор. В задаче гидростатики при рассмотрении бессильных полей, если положить вектор напряженности магнитного поля собственной функцией оператора ротор. В задаче о стационарном движении вязкой несжимаемой жидкости с конечной проводимостью вдоль магнитного поля, решением будет любое потенциальное течение, т. е., в этом случае вектор скорости жидкости является собственной функцией оператора ротор, отвечающей нулевому собственному значению. Решению спектрального уравнения для оператора ротор посвящена работа [52].

На основе спектрального метода исследованы нестационарные течения Гартмана и Куэтта, что также отражено в предыдущем параграфе.

В [53] на основе анализа спектра собственных частот и собственных колебаний связанных Альфвеновских и медленных магнитозвуковых волн исследуется дипольное геомагнитное поле с различной ионосферной проводимостью в рамках уравнений МГД.

В [54] рассматривается спектр ионосферных электромагнитных возмущений планетарного масштаба. Показывается соответствие гидродинамическому и электромагнитному равновесному состоянию ионосферы найденным собственным частотам.

В [55] используется метод разделения переменных для поиска точных решений уравнения биотеплопроводности Пенна для простых областей, которые затем сравниваются с результатами экспериментов. Исследуемый класс уравнений связан с разработкой технологии магнитной гипертермии – способа лечения онкологических заболеваний, основанный на нагревании магнитной жидкостью пораженных участков тела.

Работа [56] посвящена исследованию свойства резонанса в ферромагнитных суспензиях в зависимости от температуры состава. В [57] рассматривается параметрический резонанс волн Фарадея в магнитных и ферромагнитных жидкостях. В [58] исследуется влияние конечной электрической проводимости как

диссипативного фактора на собственные колебания невязкой несжимаемой жидкости при наличии внешнего магнитного поля.

2. Важным классом задач на собственные значения составляют задачи на собственные значения для квадратичного пучка операторов (в англ. литературе QEP, quadratic eigenvalue problem):

$$\lambda^2 Ax + \lambda Bx + Cx = 0,$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – некоторые операторы (например, матрицы порядка  $n$ ),  $\lambda$  – спектральный параметр,  $x$  – собственный вектор соответствующий  $\lambda$ .

Подробный обзор численных методов решения QEP и его приложений приведен в [59], а также [60]. Необходимость решения QEP возникает при рассмотрении различных приложений: динамический анализ строительных, механических, акустических систем, моделировании механических систем, моделировании микроэлектронных механических систем а также механики жидкости. Примером такого класса задач может служить использование внешней силы для предотвращения резонансной потери устойчивости. В [61] рассматривается магнитное поле в качестве управляющего воздействия на нагруженный ротор, поддерживаемый гидродинамическими подшипниками с помощью магнитных приводов, для предотвращения резонанса.

Численные методы решения QEP могут быть разделены на два класса [59]. При использовании первого: решение задачи на собственные значения для квадратичного пучка операторов ищется в исходной постановке. К таким численным методам относятся различные варианты метода Ньютона. В этом случае решение задачи на собственные значения для квадратичного пучка операторов сводится к задаче нахождения нулей некоторой функции [62, 63]. Данные методы вычисляют одну собственную пару за раз. На практике, скорость сходимости зависит от близости начального приближения к решению, а иногда даже близость к решению не гарантирует, что метод будет сходиться к нужному решению [59].

Численные методы решения QEP второго класса исходную постановку задачи сводят линеаризацией к обобщенной задаче на собственные значения (в англ. литературе GEP, generalized eigenvalue problem)  $Mx = \lambda Kx$ . В этом случае

размерность задачи (матриц  $M$ ,  $K$ ) увеличивается в два раза и применяются более исследованные, по сравнению с QEP, методы для решения обобщенной задачи на собственные значения. Этот класс численных методов может быть также разделен на два подкласса. Методы первого позволяют вычислить все собственные значения, но мало пригодны для использования матриц большого порядка. При этом решение GER часто сводится к поиску более удобной формы, “раскрывающей” собственные пары, например, к форме, представляющей собой обобщенное разложение Шура [64]. Однако, использование такого подхода может приводить к большим численным ошибкам [60]. Ко второму подклассу относятся итерационные методы, позволяющие вычислить лишь некоторое множество собственных значений и векторов. Для некоторых прикладных задач это бывает вполне достаточно. В большинстве таких методов рассматривается последовательность подпространств, содержащих все более точные аппроксимации собственных пар. При этом используется проекционный метод для их извлечения из подпространства большой размерности. К такому классу методов относятся применяемые и активно развиваемые в настоящее время методы Арнольди [65, 66], Ланцоша [67, 68], Якоби-Дэвидсона [69] и др.

**3.** Процитированные работы показывают разнообразие задач динамики магнитной жидкости, исследование которых предполагает нахождение спектральных чисел. Важным классом задач среди них являются задачи, посвященные исследованию резонанса различных конструкций при протекании магнитной жидкости. Решение этих задач может приводить к необходимости поиска спектра квадратичного пучка операторов. На наш взгляд, имеющиеся численные методы решения QEP имеют свои недостатки и рассмотрены в предыдущем пункте данного параграфа. Кроме того, в указанных здесь работах [64 – 69] не проводится верификация точными решениями исходных задач, имеющими, как правило, дифференциальную постановку. Не рассматриваются и вопросы о сходимости численного метода к решению исходной задачи и существует ли, вообще, решение у исходной задачи. В связи с этим приведем показательный пример.

Рассмотрим метод простой итерации, применительно к задаче

$$x = f(x), \quad f(x) \equiv x + 1. \quad (1.1)$$

Итерационный алгоритм имеет вид

$$x_{n+1} = x_n + 1, \quad x_0 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Критерием его остановки выберем малость относительной погрешности  $\delta_n$

$$\delta_n = \left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \right| \leq 10^{-4}.$$

Если переписать оценку этой невязки применительно к (1.1) будем иметь

$$\delta_n = \frac{1}{n} \leq 10^{-4},$$

и тогда получим “решение”  $x = 10^4$  на шаге  $n = 10^4$ . При этом относительная погрешность составляет всего 0.01%. Однако задача (1.1) решения не имеет.

Таким образом, возникает необходимость решения в данной диссертационной работе следующей задачи: разработка, обоснование и тестирование эффективных численных методов нахождения спектра квадратичного пучка операторов.

### **Выводы по первой главе.**

Суммируем сказанное в каждом из параграфов данной главы. Для решения сложных и перспективных задач, таких как освоение технологий УТС, управление гемодинамикой и создание технологии «цифровое месторождение», могут быть рассмотрены уравнения МГД, описывающие движение жидкости по трубам. При этом является необходимым применение, наряду с аналитическими и экспериментальными исследованиями, высокопроизводительных вычислений. В качестве численных методов решения уравнения МГД могут быть выбраны конечно разностный метод из-за легкости его реализации и распараллеливания в случае декартовой системы координат и МКО из-за консервативности на произвольных сетках, что является важным при решении задач динамики жидкости.

Для более полного доверия к результатам вычислительного эксперимента, их необходимо верифицировать точными решениями. Анализ имеющихся точных решений уравнений МГД, описывающих нестационарное течение жидкости по трубам, показывает эффективность использования спектральных методов дифференциальных операторов для их исследования. Важный класс задач составляют задачи, посвященные исследованию устойчивости различных конструкций при протекании магнитной жидкости, приводящим к задачам поиска спектра квадратичного пучка операторов. Имеющиеся численные методы, позволяющие находить спектр квадратичного пучка операторов, в большинстве своем применяют линейризацию, не рассматривая задачу в исходной постановке, и страдают либо отсутствием достаточной точности, либо отсутствием возможности находить весь спектр. Кроме того, в некоторых работах, на наш взгляд, не хватает обоснованности применения численных методов, например, из-за отсутствия верификации точными решениями. Таким образом, приходим к постановке следующих задач в данной диссертационной работе:

1. Разработка на основе метода конечных разностей и МКО, отладка и тестирование комплекса программ, позволяющего моделировать течение магнитной жидкости по трубам.
2. Исследование точных нестационарных решений уравнений МГД, применимых для описания движения жидкости по трубам, спектральными методами дифференциальных операторов.
3. Разработка, обоснование и тестирование эффективных численных методов нахождения спектра квадратичного пучка операторов.

## ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОИСТОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ МАГНИТНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПЛОСКОМ СЛОЕ

Материалы главы нашли отражение в работах [2–4, 9 – 11, 13 – 17], численные результаты получены на основе разработанного программного обеспечения, для которого имеется свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [18].

### Введение

В общем случае система уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости, протекающей в открытой пространственной области  $D \in \mathbb{R}^3$ , в декартовых координатах  $\{x_1, x_2, x_3\} \in D$  имеет вид [70]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} - \nabla U, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \chi \Delta T + \frac{1}{c_p} \frac{\mu}{2} \sum_{i,l=1}^3 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right)^2, \quad (2.3)$$

где  $t$  – время,  $\mathbf{u}$  – скорость жидкости,  $p$  – давление,  $\rho_0$  – плотность,  $\mu$  – кинематическая вязкость жидкости,  $U(\mathbf{x}, t)$  – потенциал внешней объемной силы,  $T$  – температура жидкости,  $\chi$  – коэффициент температуропроводности среды,  $c_p$  – теплоемкость жидкости при постоянном давлении. В качестве граничных условий для поля скоростей рассматривается условие Дирихле, а для поля температур – условие Неймана.

Для выполнения закона сохранения энергии уравнения движения (2.1) необходимо рассматривать, учитывая динамику температурного поля жидкости  $T(\mathbf{x}, t)$ , от которого зависит вязкость  $\mu$  [70, 71]. Тепловыделение в течении вязкой несжимаемой жидкости вызвано диссипативными процессами и задается

уравнением для поля температур (2.3) [71, 72]. Отметим, что последнее слагаемое в правой части уравнения (2.3) позволяет описать общее прогревание среды, вызванное внутренним трением в жидкости [73].

Согласно [73] приведем постановку задачи управления параметрами течения несжимаемой жидкости при изменении во времени геометрии области течения ( $D \equiv D(t)$ ). В качестве факторов изменения геометрии области течения жидкости могут быть рассмотрены воздействия различных типов: механические, электромагнитные, тепловые, химические и т. д.

На границе течения  $\partial D(t)$  задается условие  $\mathfrak{F}(\mathbf{u}, p, t)|_{\partial D(t)} = 0$ . Вид данного условия конкретизируется типом взаимодействия жидкости с окружающей средой на границе области течения. Система уравнений (2.1) – (2.3) также дополняется заданием начальных условий  $\mathfrak{F}_0(\mathbf{u}, p)|_{\partial D(0)} = 0, \mathbf{x} \in D(0), t = 0$ . В общем случае граничное и начальное условия могут быть заменены на условия связи  $\mathfrak{p}(\mathbf{u}, p, T)|_S = 0$  на некотором многообразии  $S$  размерности  $n$  в цилиндре  $C = \bigcup_i D_i$ .

Пусть некоторым образом определен целевой функционал  $J(\mathbf{u}, p, T, C) \geq 0$ .

**Определение.** Задача управления состоит в определении вида управляющих воздействий  $\mathfrak{p}(\mathbf{u}, p, T)|_S = 0$ , минимизирующего функционал  $J$  на некотором заданном пространстве управлений.

При этом класс прикладных задач, для которых задается вид  $J$ , определяет выбор такого пространства.

В дальнейшем, считая разности температур малыми, будем пренебрегать температурными изменениями величин  $\mu, c_p, \chi$ , а область  $D$  полагать постоянной.

Отметим, что связь уравнений (2.1) – (2.3) с моделированием фильтрации жидкости в пористой среде показана в [74], где в качестве пористой среды рассматривается сплошная среда с периодически расположенными полостями. Доказывается, что главным членом, осредненной по периоду системы уравнений Навье-Стокса, является уравнение Дарси.



Заметим, что в большинстве месторождений с нефтью и газом в пласте залегают минерализованная вода, а основными минеральными веществами являются соли натрия, калия, кальция, магния и т. д. [75]. При этом водоносная и продуктивная часть пластов связаны и образуют единую гидродинамическую систему [75], т. е. изменение параметров минерализованной воды, например, давления или вязкости, отразится на динамике нефти. Пластовая вода часто является агентом, вытесняющим нефть из пласта [75]. Кроме того, в процессе добычи нефти и совместного движения ее с пластовой водой образуются устойчивые эмульсии [76]. Исследованию магнитных свойств горных пород нефтегазовых месторождений посвящена работа [77]. Из вышесказанного следует, что исследование задач динамики магнитной жидкости имеет непосредственное отношение к задачам освоения трудноизвлекаемых запасов нефти.

## **2.1 Моделирование слоистого течения жидкости в рамках модели гидродинамики**

### **2.1.1 Исследование точного решения уравнений гидродинамики**

Далее в данной главе сначала в рамках гидродинамики, затем МГД исследуется модель слоистого течения жидкости. Для описания этого класса течений применяются уравнения Навье-Стокса [78, 79]. Примерами слоистого течения жидкости служат течения в зазорах и малых полостях, в особенности таких вязких жидкостей, как нефть, масла и др. [79]. Слоистое течение жидкости позволяет описать течение жидкости по трубам и каналам [78, 79].

В стационарном случае слоистое течение вязкой несжимаемой жидкости описано в [78, 79]. Изучению адвекции и конвекции слоистого течения жидкости в рамках приближения Буссинеска посвящена работа [80]. Исследование слоистого течения жидкости может быть связано с исследованием пограничного слоя – слоя жидкости, расположенного вблизи обтекаемого тела, где существенное влияние оказывает вязкость жидкости [78, 79].

Рассмотрим задачу о слоистом течении несжимаемой жидкости (ортогонально оси  $Ox_2$ ,  $x_2 \in [0; l]$ , вдоль плоскости  $x_1Ox_3$ , рис. 2.1), при котором динамика жидкости задается полем скоростей

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} u_1(x_2, t) \\ 0 \\ u_3(x_2, t) \end{pmatrix}, \quad x_2 \in [0; l] \quad t > 0. \quad (2.4)$$

Иллюстрацией к слоистому течению жидкости может служить движение стопки листов бумаги, лежащих на столе (рис 2.1), когда каждый лист имеет свое направление движения, параллельное плоскости стола.

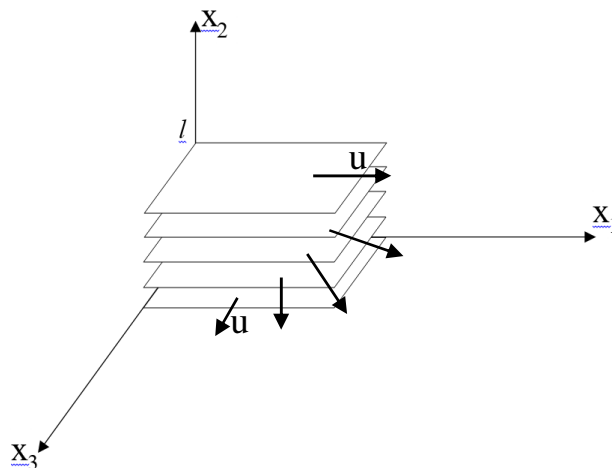


Рис. 2.1. Слоистое течение жидкости, где стрелками указано направление вектора скорости  $\mathbf{u}(x_2, t)$  для каждого слоя жидкости

При предположении единственности решения уравнений гидродинамики справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.1.** Пусть  $\mathbf{u}$  – скорость жидкости, компоненты которой являются решениями одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2}, \quad i = 1, 3, \quad x_2 \in (0; l) \quad t > 0, \quad (2.5)$$

где  $\mu$  – вязкость жидкости, а давление  $p = -\rho_0 U$ , тогда пара  $(u, p)$  удовлетворяет уравнениям (2.1), (2.2).

**Доказательство.** Для доказательства достаточно вычислить  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ . С учетом (2.4) имеем  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = 0$  и следовательно, с учетом (2.5), имеем  $p = -\rho_0 U$ .

Для вектора скорости  $\mathbf{u}(x_2, t)$  на концах интервала  $[0; l]$  задаются следующие граничные условия

$$u_i(x_2, t)|_{x_2=0} = \psi_i^{(1)}(t), \quad u_i(x_2, t)|_{x_2=l} = \psi_i^{(2)}(t), \quad i=1, 3. \quad (2.6)$$

Начальное условие для  $\mathbf{u}(x_2, t)$  имеет вид

$$u_i(x_2, 0) = \phi_i(x_2), \quad i=1, 3. \quad (2.7)$$

Для поля температур  $T(\mathbf{x}, t) \equiv T(x_2, t)$  на концах интервала  $[0; l]$  задаются условия третьего рода

$$\left( \alpha T + \beta \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=0} = q_1(t), \quad \left( \alpha T + \beta \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=l} = q_2(t). \quad (2.8)$$

Начальное условие задается в виде

$$T(x_2, 0) = T_0(x_2). \quad (2.9)$$

Таким образом, решение уравнений гидродинамики (2.1), (2.2) для слоистого течения жидкости (2.4) с граничными (2.6) и начальными (2.7) условиями, согласно [81], имеет вид:

$$u_i(x_2, t) = \psi_i^{(1)}(t) + \frac{x_2}{l} (\psi_i^{(2)}(t) - \psi_i^{(1)}(t)) + \int_0^l G(x_2, \xi, t) \bar{\phi}_i(\xi) d\xi + \\ + \int_0^t \int_0^l G(x_2, \xi, t - \tau) \bar{f}_i(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad i=1, 3, \quad (2.10)$$

$$p = -\rho_0 U,$$

где  $G(x_2, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \mu t\right) \sin \frac{\pi n}{l} x_2 \sin \frac{\pi n}{l} \xi$  – функция Грина задачи (2.5),

(2.6), (2.7) с однородными граничными условиями Дирихле на концах интервала

$$[0; l] \quad \text{вместо} \quad (2.6), \quad \bar{\phi}_i(x_2) = \phi_i(x_2) - \psi_i^{(1)}(0) - \frac{x_2}{l} \left[ \psi_i^{(2)}(0) - \psi_i^{(1)}(0) \right], \quad \text{а}$$

$$\bar{f}_i(x_2, t) = -\psi_i^{(1)'}(t) - \frac{x_2}{l} \left[ \psi_i^{(2)'}(t) - \psi_i^{(1)'}(t) \right], \quad i=1, 3, \quad \text{а поле давления } p(\mathbf{x}, t) \text{ определено}$$

с точностью до произвольной функции времени. В случае несжимаемой жидкости поле температур  $T(\mathbf{x}, t)$ , определяемое уравнением (2.3), может быть найдено после вычисления поля скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ .

Пусть  $E_k$  – кинетическая энергия и  $U_{in}$  – внутренняя энергия жидкости, вычисляемые по формулам [70]

$$E_k(t) = \int_D \rho_0 \frac{\mathbf{u}^2}{2} dx, \quad (2.11)$$

$$U_{in}(t) = \int_D c_p T dx. \quad (2.12)$$

### 2.1.2 Решение тестовой задачи

Описание характеристик программного обеспечения, на основе которого получены результаты расчетов, описанные в этом пункте, представлено в параграфе 2.3. Задачу (2.1) – (2.3) с полем скоростей (2.4) будем рассматривать на отрезке  $x_2 \in [0; 1]$  с условием прилипания на границе и условием теплоизолированности стенок

$$u_i(x_2, t)|_{x_2=0} = 0, \quad u_i(x_2, t)|_{x_2=1} = 0, \quad i = 1, 3, \quad (2.13)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x_2} \right|_{x_2=1} = 0. \quad (2.14)$$

Начальными условиями для поля скоростей являются собственные функции оператора Лапласа, соответствующие собственным числам  $\pi^2$  и  $4\pi^2$

$$u_1(x_2, 0) = \sin \pi x_2, \quad u_3(x_2, 0) = \sin 2\pi x_2. \quad (2.15)$$

Для температуры начальным условием является

$$T(x_2, 0) = 0. \quad (2.16)$$

Отметим, что решением (2.3), (2.15), (2.16) без учета эффекта диссипации энергии, описываемого последним слагаемым в уравнении (2.3), было бы поле температур тождественно равное нулю.

Если положить параметры жидкости  $\rho_0$ ,  $c_p$ ,  $\chi$  равными 1, а вязкость  $\mu = 0.1$ , то тестовая задача (2.3) – (2.5) с начальными и граничными условиями (2.13) – (2.16) имеет следующее аналитическое решение:

$$u_1 = \exp(-0.1\pi^2 t) \sin \pi x_2 \quad u_3 = \exp(-0.4\pi^2 t) \sin 2\pi x_2, \quad (2.17)$$

$$T = -\frac{1}{4} \exp(-0.2\pi^2 t) - \frac{1}{4} \exp(-0.8\pi^2 t) + \frac{1}{2} + \cos 2\pi x_2 \left( -\frac{1}{76} \exp(-4\pi^2 t) + \frac{1}{76} \exp(-0.2\pi^2 t) \right) + \cos 4\pi x_2 \left( -\frac{1}{76} \exp(-16\pi^2 t) + \frac{1}{76} \exp(-0.8\pi^2 t) \right). \quad (2.18)$$

Тогда для кинетической (2.11) и внутренней энергии (2.12) справедливы соотношения

$$E_k(t) = 0.25 \left( \exp(-0.2\pi^2 t) + \exp(-0.8\pi^2 t) \right), \quad (2.19)$$

$$U_{in}(t) = -0.25 \left( \exp(-0.2\pi^2 t) - \exp(-0.8\pi^2 t) \right) + 0.5, \quad (2.20)$$

и следовательно справедлив закон сохранения для кинетической энергии  $E_k(t)$  и внутренней энергии  $U_{in}(t)$

$$E \stackrel{def}{=} E_k(t) + U_{in}(t) \equiv 0.5. \quad (2.21)$$

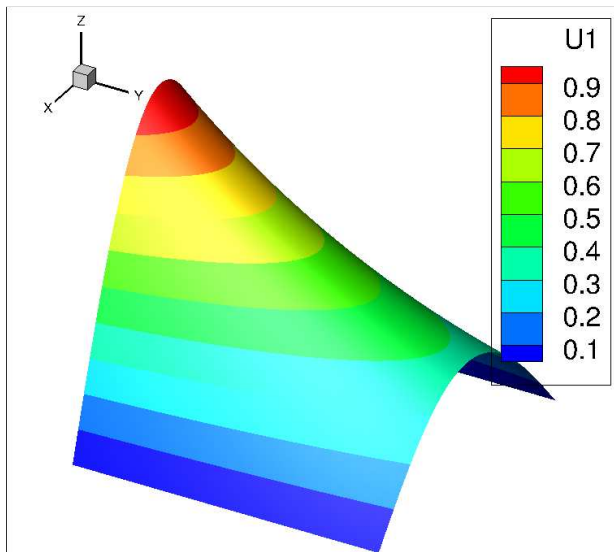


Рис. 2.2 а) Поверхность  $u_1(x_2, t)$  в зависимости от  $x_2, t$

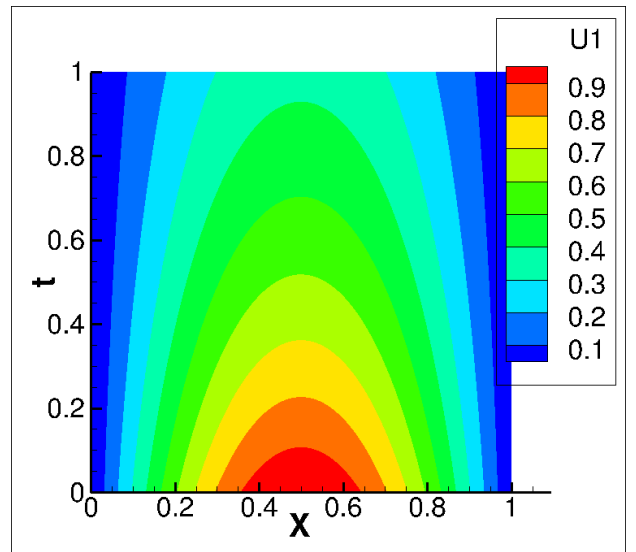


Рис. 2.2 б) Проекция  $u_1(x_2, t)$  на плоскость  $x_2, t$

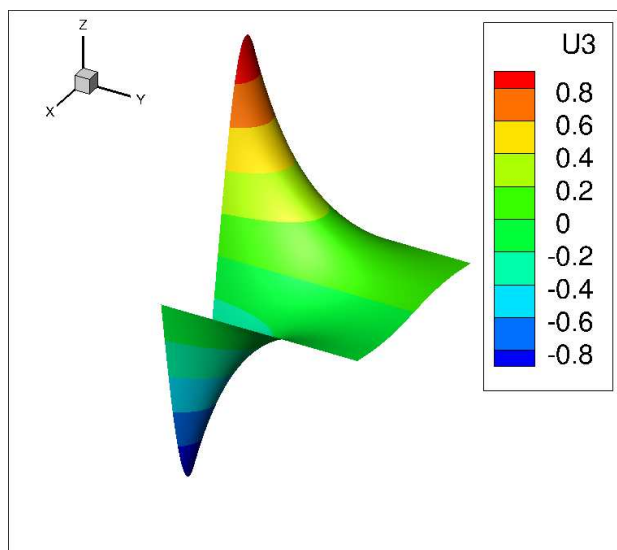


Рис. 2.3 а) Поверхность  $u_3(x_2, t)$  в зависимости от  $x_2, t$

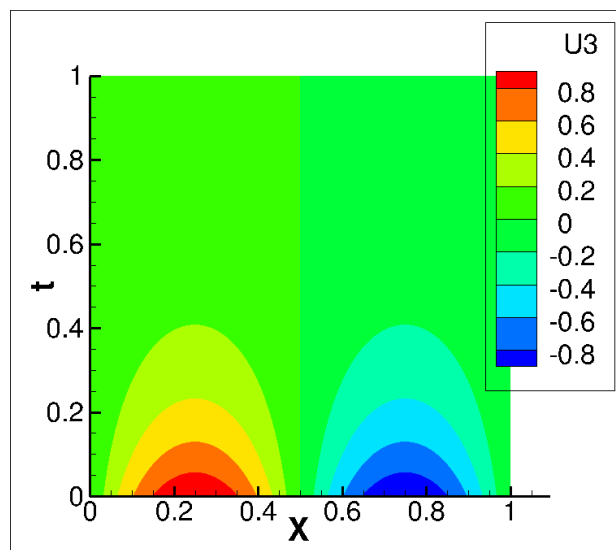


Рис. 2.3 б) Проекция  $u_3(x_2, t)$  на плоскость  $x_2, t$

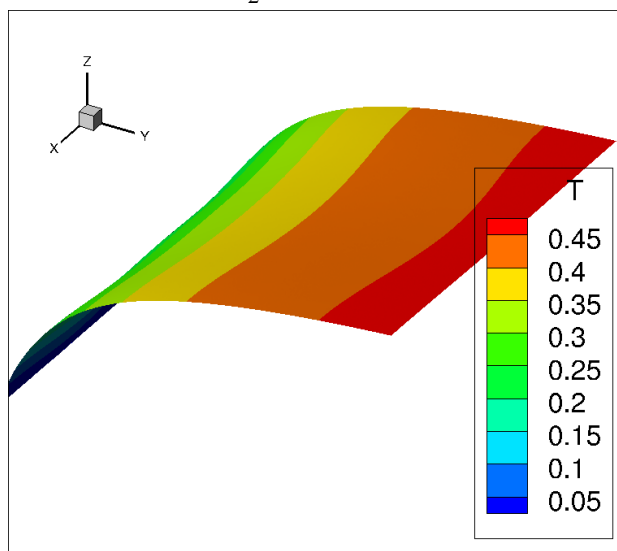


Рис. 2.4 а) Поверхность  $T(x_2, t)$  в зависимости от  $x_2, t$

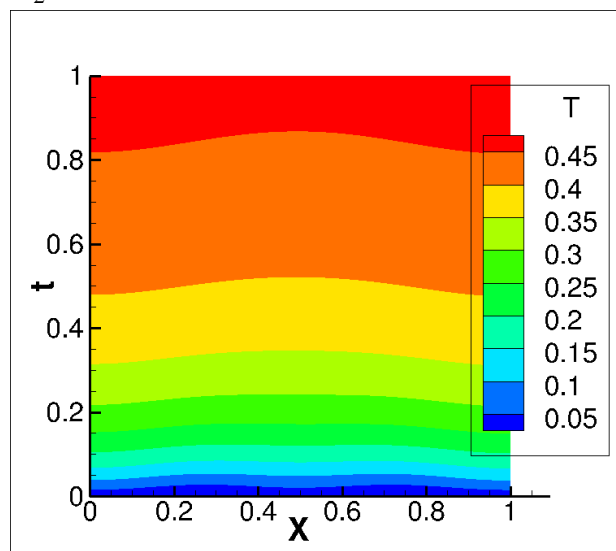


Рис. 2.4 б) Проекция поля температур  $T(x_2, t)$  на плоскость  $x_2, t$

Результаты расчета решения задачи (2.3) – (2.5) с граничными и начальными условиями (2.13) – (2.16) представлен на рис. 2.2 – 2.4. Компоненты  $u_1(x_2, t)$ ,  $u_3(x_2, t)$  вектора скорости  $\mathbf{u}(x_2, t)$  имеют вид, представленный на рис. 2.2 и рис. 2.3 соответственно. Значения поля температур  $T(x_2, t)$  представлено на рис. 2.4. На рис. 2.5 приведены численные значения кинетической энергии  $E_k(t)$ , рассчитанной по (2.11), внутренней энергии  $U_{in}(t)$ , рассчитанной по (2.16), и выражения  $E_k(t) + U_{in}(t)$ . Рис. 2.5 иллюстрирует закон диссипации кинетической энергии потока в тепловую, соответствующий (2.21).

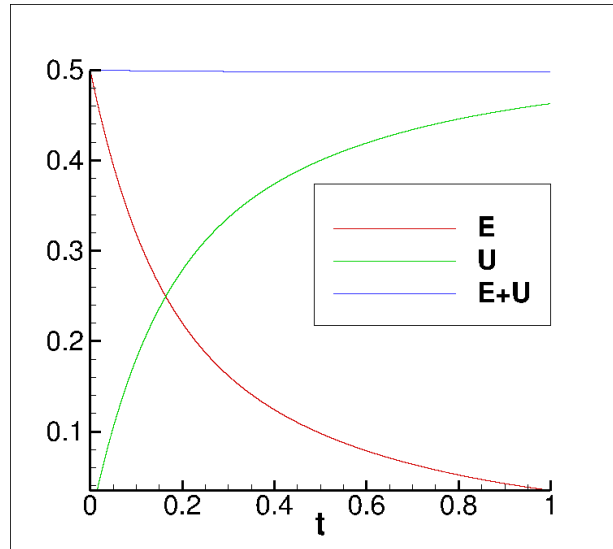


Рис. 2.5. Диссипация кинетической энергии ( $E$ ) во внутреннюю энергию ( $U$ ), их сумма ( $E+U$ )

## 2.2 Моделирование слоистого течения в рамках модели МГД

### 2.2.1 Исследование точного решения уравнений МГД

В этом параграфе рассматривается модель МГД вязкой несжимаемой жидкости [82] применительно к задаче о слоистом течении жидкости, где поле скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  имеет вид (2.4):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \left( p + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} \right) + \mu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{4\pi\rho_0} (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H}, \quad (2.22)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{H} = (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{u} + \mu_m \Delta \mathbf{H}, \quad (2.24)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \chi \Delta T + \frac{1}{c_p} \frac{\mu}{2} \sum_{i,l=1}^3 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\mu_m}{4\pi\rho_0 c_p} (\operatorname{rot} \mathbf{H})^2, \quad (2.26)$$

где  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$  – напряженность магнитного поля,  $\mu_m$  – магнитная вязкость жидкости,  $T(\mathbf{x}, t)$  – температура жидкости,  $\mathbf{x} \in D$ ,  $t > 0$ , остальные обозначения те же. Справедлива следующая теорема при предположении единственности решения уравнений МГД:

**Теорема 2.2.** Пусть  $\mathbf{u}$  – вектор скорости жидкости, компоненты которого являются решениями одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} \quad i=1, 3, \quad x_2 \in (0;l), \quad t > 0, \quad (2.27)$$

кроме того, положим  $\mu_m = \mu$ ,

$$\mathbf{H} = \alpha \mathbf{u}, \quad \alpha = const, \quad (2.28)$$

$$p = -\frac{1}{8\pi} \mathbf{H}^2, \quad (2.29)$$

тогда тройка  $(\mathbf{u}, p, \mathbf{H})$  является решением системы (2.22) – (2.25).

**Доказательство.** Из (2.4) следует  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \equiv 0$ ,  $(\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H} \equiv 0$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{u} \equiv 0$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{H} \equiv 0$ . Из (2.4), (2.28) следует  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{H} \equiv 0$ ,  $(\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{u} \equiv 0$ . Тогда из равенства кинематической и магнитной вязкостей и (2.29) следует эквивалентность (2.22), (2.24) и (2.27). Что и требовалось доказать.

Граничные и начальные условия для полей скорости  $\mathbf{u}(x_2, t)$  и температуры  $T(x_2, t)$  имеют те же выражения (2.6) – (2.9). Тогда решение уравнений МГД (2.22) – (2.25) будет следующим: поле скоростей  $\mathbf{u}(x_2, t)$  с учетом (2.4) имеет вид (2.10), вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}(x_2, t)$  отличается от (2.10) множителем  $\alpha = const$ , поле давления  $P(x_2, t)$  имеет вид (2.29). Поле температуры  $T(\mathbf{x}, t)$  может быть найдено после вычисления поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  и напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$ . Энергия магнитного поля  $W_{mag}$  может быть вычислена по формуле [82]

$$W_{mag} = \int_D \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}. \quad (2.30)$$

### 2.2.2 Решение тестовой задачи

Описание характеристик программного обеспечения, на основе которого получены результаты расчетов, описанные в этом пункте, представлено в параграфе 2.3.



Граничные и начальные условия, при которых сделаны расчеты имеют тот же вид (2.13) – (2.16). Параметры жидкости полагаем теми же, что и в пункте 2.2.1. Тестовая задача (2.22) – (2.25) имеет следующее аналитическое решение:

$$u_1 = \exp(-0.1\pi^2 t) \sin \pi x_2, \quad u_3 = \exp(-0.4\pi^2 t) \sin 2\pi x_2, \quad (2.31)$$

$$T = \left[ -\frac{1}{4} \exp(-0.2\pi^2 t) - \frac{1}{4} \exp(-0.8\pi^2 t) + \frac{1}{2} + \cos 2\pi x_2 \left( -\frac{1}{76} \exp(-4\pi^2 t) + \frac{1}{76} \exp(-0.2\pi^2 t) \right) + \right. \\ \left. + \cos 4\pi x_2 \left( -\frac{1}{76} \exp(-16\pi^2 t) + \frac{1}{76} \exp(-0.8\pi^2 t) \right) \right] \left( 1 + \frac{\alpha^2}{4\pi} \right), \quad (2.32)$$

$$H_1 = \alpha \exp(-0.1\pi^2 t) \sin \pi x_2, \quad H_3 = \alpha \exp(-0.4\pi^2 t) \sin 2\pi x_2, \quad (2.33)$$

$$p = -\frac{\alpha^2}{8\pi} \left( \exp(-0.2\pi^2 t) \sin^2 \pi x_2 + \exp(-0.8\pi^2 t) \sin^2 2\pi x_2 \right). \quad (2.34)$$

Выражения для кинетической энергии (2.11), внутренней энергии (2.12) и энергии магнитного поля (2.30) имеют вид

$$E_k(t) = 0.25 \left( \exp(-0.2\pi^2 t) + \exp(-0.8\pi^2 t) \right), \quad (2.35)$$

$$U_{in}(t) = \left( 1 + \frac{\alpha^2}{4\pi} \right) \left[ -0.25 \left( \exp(-0.2\pi^2 t) - \exp(-0.8\pi^2 t) \right) + 0.5 \right], \quad (2.36)$$

$$W_{mag}(t) = \frac{\alpha^2}{16\pi} \left( \exp(-0.2\pi^2 t) + \exp(-0.8\pi^2 t) \right) \quad (2.37)$$

и, следовательно, справедлив закон диссипации кинетической энергии, энергии магнитного поля во внутреннюю энергию течения жидкости

$$E \stackrel{def}{=} E_k(t) + W_{mag}(t) + U_{in}(t) \equiv 0.5 \left( 1 + \frac{\alpha^2}{4\pi} \right). \quad (2.38)$$

Расчет решения задачи (2.22) – (2.25) с граничными и начальными условиями (2.13) – (2.16) выполнен при  $\alpha^2 = \pi$ . Компоненты  $u_1(x_2, t)$ ,  $u_3(x_2, t)$  вектора скорости  $\mathbf{u}(x_2, t)$  имеют тот же вид, представленный на рис. 2.2 и рис. 2.3 соответственно. Расчетные значения поля давления  $p(x_2, t)$  представлены на рис. 2.6. Значения поля температур  $T(x_2, t)$  представлено на рис. 2.7. Значения

кинетической, внутренней энергии потока и энергии магнитного поля рассчитывались также по формулам (2.11), (2.12), (2.30). На рис. 2.8 приведены численные значения кинетической энергии  $E_k(t)$ , энергии магнитного поля  $W_{mag}(t)$ , внутренней энергии  $U_{in}(t)$  и их суммы  $E_k(t) + W_{mag}(t) + U_{in}(t)$ . Рис. 2.8 иллюстрирует закон диссипации кинетической энергии потока, энергии магнитного поля во внутреннюю энергию (2.38).

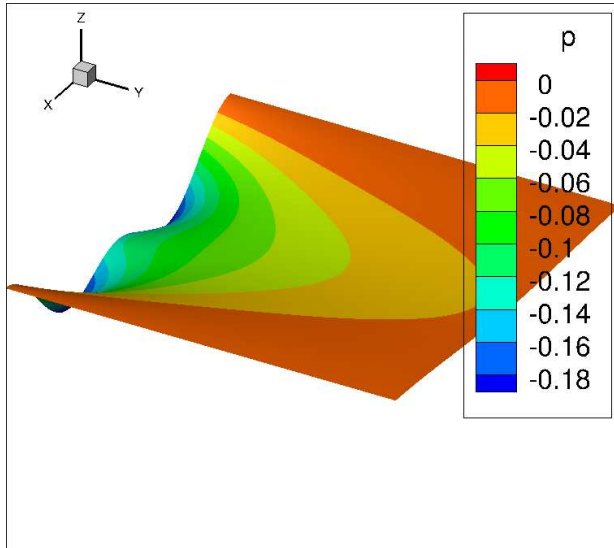


Рис. 2.6 а) Поверхность  $p(x_2, t)$  в зависимости от  $x_2, t$

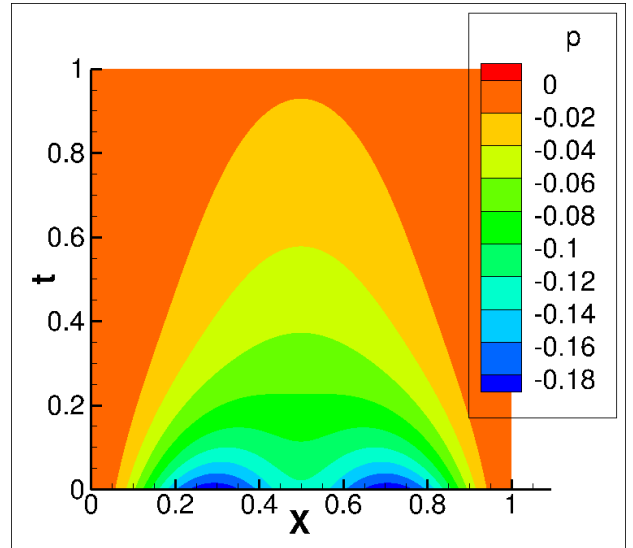


Рис. 2.6 б) Проекция  $p(x_2, t)$  на плоскость  $x_2, t$

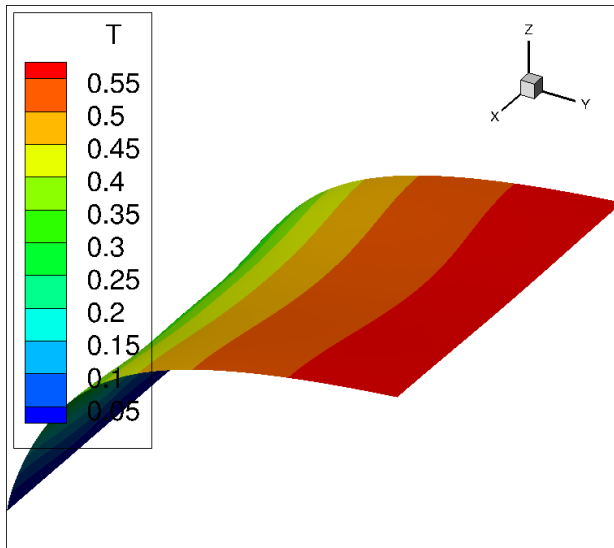


Рис. 2.7 а) Поверхность  $T(x_2, t)$  в зависимости от  $x_2, t$

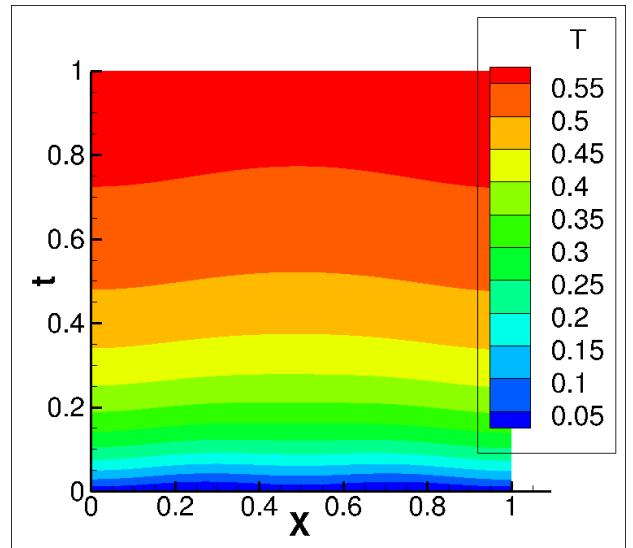


Рис. 2.7 б) Проекция  $T(x_2, t)$  на плоскость от  $x_2, t$

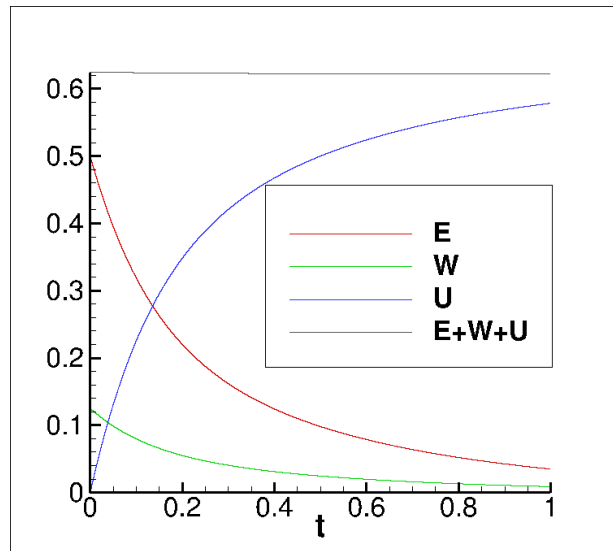


Рис. 2.8. Диссипация кинетической энергии ( $E$ ), энергии магнитного поля ( $W$ ) во внутреннюю энергию ( $U$ ), их сумма ( $E+W+U$ )

Сравнивая аналитическое решение задачи о слоистом течении жидкости в рамках гидродинамики (2.17) – (2.21) и МГД (2.31) – (2.38) можно сделать следующий вывод: если рассматривать слоистое течение жидкости при условии параллельности векторов напряженности магнитного поля и скорости (2.28), обозначить индексом  $mag$  значения параметров жидкости при рассмотрении слоистого течения в рамках МГД, а без индексов – в рамках гидродинамики, то исследование уравнений МГД можно свести к исследованию уравнений ГД, если положить

$$p = p_{mag} + \frac{\alpha^2}{8\pi} \mathbf{H}^2, \quad \rho = \rho_{mag} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{4\pi} \right), \quad c_p = c_{p,mag} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{4\pi} \right),$$

остальные параметры жидкости остаются неизменными. Подобный вывод в стационарном случае движения вдоль магнитного поля сделан в [46].

Для описания изменения геометрии области жидкости для слоистого течения рассмотрим фазовый поток [83] дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (2.39)$$

Для слоистого течения жидкости (2.4) решение (2.39) для вектора скорости, соответствующего решению тестовой задачи (2.31), имеет вид

$$x_1 = \frac{10}{\pi^2} \left( 1 - \exp(-0.1\pi^2 t) \right) \sin \pi x_2 + x_{1,0}, \quad (2.40)$$

$$x_2 = x_{2,0}, \quad (2.41)$$

$$x_3 = \frac{5}{2\pi^2} \left(1 - \exp(-0.4\pi^2 t)\right) \sin 2\pi x_2 + x_{3,0}, \quad (2.42)$$

где  $\{x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}\}$  – начальное положение точки  $\mathbf{x}(t)$ . Если из неограниченного плоского слоя выделить куб рис. 2.9а, занимаемый жидкостью в начальный момент времени, то в момент времени  $t = 1$  геометрия области, в которой течет жидкость, в результате движения границы области течения и объемного воздействия магнитным полем примет вид рис. 2.9б.

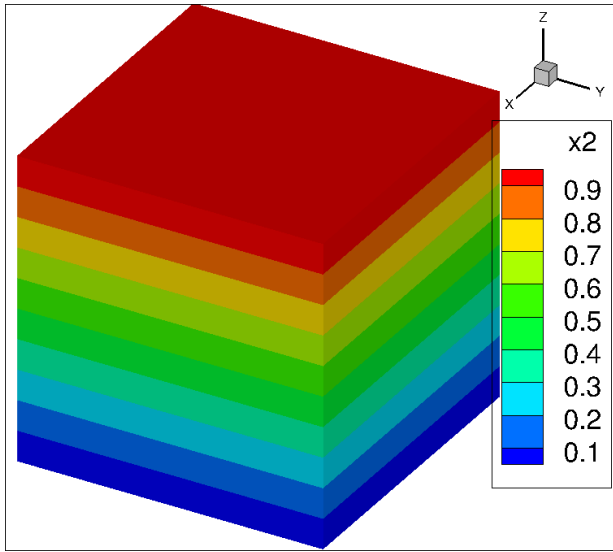


Рис. 2.9 а) Геометрия области, занимаемой жидкостью при  $t=0$ , для слоистого течения.

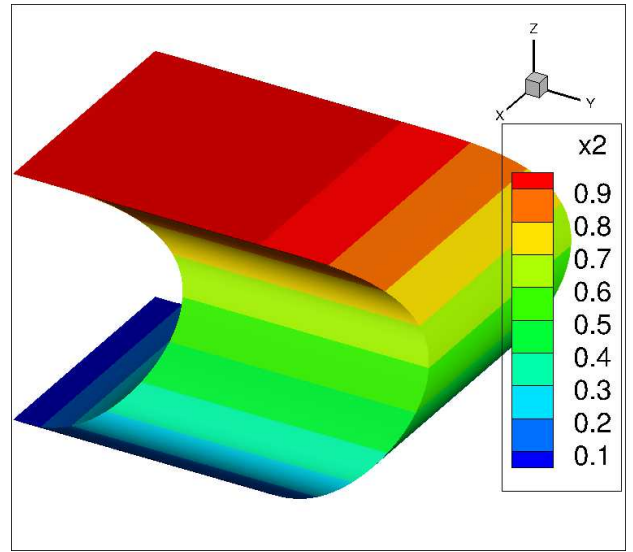


Рис. 2.9 б) Геометрия области, занимаемой жидкостью при  $t=1$ , для слоистого течения.

### 2.2.3 О возможности объемного воздействия магнитным полем на слоистое течение жидкости

В этом пункте исследуется возможность объемного воздействия магнитным полем на слоистое течение жидкости. Перед тем как рассматривать задачу управления течением жидкости (обратную задачу) необходимо исследовать задачу существования магнитного поля (прямую задачу), вектор напряженности которого параллелен вектору скорости жидкости, т. е. удовлетворяет условию (2.28).

Пусть на отрезке  $x_2 \in [0; l]$  слой заполнен магнитной жидкостью, выполняется условие  $\mathbf{H} = \alpha \mathbf{u}$ ,  $\alpha = const$ , и справедлива теорема 2.2 пункта 2.2.1. Продолжим вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  по непрерывности

потенциально и соленоидально во внешнюю область по отношению к отрезку  $[0; l]$ , в которой находится, например, вакуум (рис. 2.10). Для слоистого течения жидкости такие условия будут частным случаем условий, приведенных в [46].

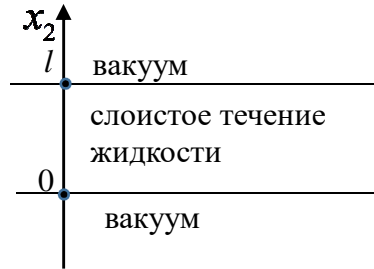


Рис. 2.10. Иллюстрация к рассматриваемой задаче

Рассмотрим уравнения Максвелла, получаемые из [46, стр. 19] если положить плотность тока и заряда равной нулю

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{H} = 0, \\ \text{div } \mathbf{E} = 0, \\ \text{div } \mathbf{H} = 0, \end{cases} \quad (2.43)$$

где  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  – вектор напряженности электрического поля. Из (2.43) следует  $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}(\mathbf{x})$  не зависит от времени  $t$  (т. к.  $\text{rot } \mathbf{H} \equiv 0$ ) и тогда  $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{const}$ , а  $\mathbf{H} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{x})t + \mathbf{B}(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{B}(\mathbf{x})$  будут определены ниже. Из векторного тождества  $\text{rot}^2 \mathbf{E} \equiv -\Delta \mathbf{E} + \text{grad div } \mathbf{E}$ ,  $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{const}$ ,  $\text{rot } \mathbf{H} \equiv 0$  и двух последних уравнений (2.43) следует, что  $\Delta \mathbf{E} = 0$ ,  $\Delta \mathbf{A} = 0$ ,  $\Delta \mathbf{B} = 0$ . Далее проведем выкладки справедливые для полупространства  $\{x_2 < 0\}$ , для полупространства  $\{x_2 > l\}$  будет справедливо аналогичное.

В случае условий Дирихле (2.6) на границе для поля скоростей  $\mathbf{u}$  имеем с одной стороны  $\mathbf{H}|_{x_2=0} = (\mathbf{A}(\mathbf{x})t + \mathbf{B}(\mathbf{x}))|_{x_2=0}$ , а с другой  $\mathbf{H}|_{x_2=0} \equiv \{\alpha \psi_1^{(1)}(t), 0, \alpha \psi_3^{(1)}(t)\}$ . Тогда получаем, что  $\psi_{(i)}^{(1)} = \gamma_i t + \mu_i$ , где  $\gamma_i, \mu_i$  некоторые константы,  $A_i(\mathbf{x})|_{x_2=0} = \text{const}$ ,  $B_i(\mathbf{x})|_{x_2=0} = \text{const}$ ,  $i = 1, 3$ ,  $A_2(\mathbf{x})|_{x_2=0} = 0$ ,  $B_2(\mathbf{x})|_{x_2=0} = 0$ . Т. о. приходим к внешней задаче для уравнения Лапласа для полупространства для функций  $\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{B}(\mathbf{x})$  с

постоянными значениями на плоскости  $x_2 = 0$ . Решение этой задачи известно [84]. В случае постоянных граничных условий получаем  $A_i(\mathbf{x}) \equiv \alpha\gamma_i$ ,  $B_i(\mathbf{x}) \equiv \alpha\mu_i$ ,  $i = 1, 3$ ,  $A_2(\mathbf{x}) \equiv 0$ ,  $B_2(\mathbf{x}) \equiv 0$ . Итого имеем  $\mathbf{H} \equiv \{\alpha\psi_1^{(1)}(t), 0, \alpha\psi_3^{(1)}(t)\}$ ,  $\psi_{(i)}^{(1)}$  – линейные функции времени,  $i = 1, 3$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  – гармоническая функция для полупространства  $\{x_2 < 0\}$ .

Граничные условия для слоистого течения жидкости могут быть заданы как условия Неймана для поля скоростей  $\mathbf{u}(x_2, t)$  на границе

$$\left. \frac{\partial u_i(x_2, t)}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = \theta_i^{(1)}(t), \quad \left. \frac{\partial u_i(x_2, t)}{\partial x_2} \right|_{x_2=l} = \theta_i^{(2)}(t), \quad i = 1, 3, \quad (2.44)$$

В этом случае также справедливо  $\mathbf{H} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{x})t + \mathbf{B}(\mathbf{x})$ ,  $\Delta \mathbf{E} = 0$ ,  $\Delta \mathbf{A} = 0$ ,  $\Delta \mathbf{B} = 0$ . Рассмотрим полупространство  $\{x_2 < 0\}$ , для полупространства  $\{x_2 > l\}$  будет справедливо аналогично сказанное. Т. к.  $\Delta A_2 \equiv 0$ ,  $\Delta B_2 \equiv 0$  и  $A_2(\mathbf{x})|_{x_2=0} = 0$ ,  $B_2(\mathbf{x})|_{x_2=0} = 0$ , то  $A_2(\mathbf{x}) \equiv 0$ ,  $B_2(\mathbf{x}) \equiv 0$ . С учетом этого, а также того факта, что  $\text{rot } \mathbf{H} \equiv 0$ , то  $\frac{\partial H_3}{\partial x_2} = \frac{\partial H_1}{\partial x_2} = 0$  всюду в полупространстве  $\{x_2 < 0\}$ . А из условий Неймана (2.44) следует, что для того чтобы не было разрыва на плоскости  $x_2 = 0$  для  $\text{rot } \mathbf{H}$ , необходима однородность граничных условий в (2.44)  $\theta_i^{(1)} \equiv 0$ ,  $i = 1, 3$ . Тогда из (2.44) и непрерывности  $\mathbf{H}$  следует  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv 0$  в полупространстве  $\{x_2 < 0\}$ . Для  $B_1$ ,  $B_3$  получаем внешнюю задачу Неймана с однородным граничным условием.  $B_1 \equiv \text{const}$ ,  $B_3 \equiv \text{const}$  и тогда  $\mathbf{H} \equiv \text{const}$ ,  $H_2 = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ .

## 2.3. Характеристика разработанного программного обеспечения

### 2.3.1 Общая характеристика

Все результаты расчетов, проиллюстрированные рисунками в пунктах 2.1.2 и 2.2.2, получены на основе разработанного программного обеспечения. Расчеты проведены на одном ядре персонального компьютера с процессором i5-3470. Время

выполнения всех расчетов, представленных в п. 2.2.2 не превысило 3 минуты. Использовались кроссплатформенная среда разработки QT, язык программирования C и компилятор gcc (Gnu Compiler Collection). Результаты расчетов визуализировались в программе Tecplot 360.

Сетка по пространственной координате  $x_2$  и времени  $t$  является равномерной с шагом 0.005 и  $10^{-5}$  соответственно. При расчетах полагалось  $x_2 \in [0;1]$ ,  $t \in [0;1]$ . В качестве численного метода использовался метод конечных разностей с полностью явной аппроксимацией производных по времени и центрально-разностной схемой аппроксимации производных по пространственной переменной [85]. Интегралы при расчетах кинетической, внутренней энергии потока и энергии магнитного поля вычислялись методом трапеций.

### 2.3.2. Оценка погрешности расчетов

Табл. 2.1. Оценка максимальной абсолютной и относительной погрешностей расчетов в сравнении с аналитическим решением при  $t=1$

Результаты расчетов	$\max_{x_2}  f_{an} - f_{calc} $	$\max_{x_2} \frac{ f_{an} - f_{calc} }{ f_{an} } \cdot 100\%$
Поле скоростей $\mathbf{u}(x_2,1)$	$6 \cdot 10^{-6}$	0.02
Поле давления $p(x_2,1)$	$5 \cdot 10^{-7}$	0.05
Магнитное поле $\mathbf{H}(x_2,1)$	$1.2 \cdot 10^{-6}$	0.02
Поле температуры $T(x_2,1)$	0.005	0.9
Геометрия области $\mathbf{x}(1)$	$1.0 \cdot 10^{-5}$	0.006
Сохранение энергии $E_{kin}(1) + U_{in}(1) + W_{mag}(1)$	0.003	0.5

Далее приведем оценки точности проведенных расчетов в сравнении с аналитическим решением 2.31 – 2.38, 2.40 – 2.42 на момент времени  $t=1$ . Во втором столбце табл. 2.1 приводится максимальная по пространственной переменной абсолютная погрешность, соответствующая величине из первого столбца. В третьем столбце табл. 2.1 приводится максимальная по

пространственной переменной относительная погрешность соответствующая величине из первого столбца. Для векторных полей, представленных в табл. 2.1, максимум берется также по всем компонентам. Численные значения вектора скорости, поля давления, магнитного поля и температуры жидкости, в пределах точности разностной схемы, совпали с аналитическими результатами.

### **Выводы по второй главе**

В этой главе рассматривалось слоистое течение вязкой несжимаемой жидкости в неограниченном плоском слое в рамках модели гидродинамики и МГД. Описан класс точных решений уравнений МГД, соответствующий слоистому течению жидкости. Показана принципиальная возможность объемного воздействия магнитным полем на слоистое течение жидкости. На примере задачи о слоистом течении вязкой несжимаемой жидкости, исследовано явление тепловыделения в результате вязкого трения в жидкости и джоулева подогрева. При этом строго выполняется закон диссипации кинетической энергии и энергии магнитного поля во внутреннюю. Разработано программное обеспечение, позволяющее моделировать слоистое течение вязкой несжимаемой магнитной жидкости, тепловыделение в течении и изменение геометрии течения в результате воздействий на границе области течения и объемного воздействия магнитным полем.

Исследование как численное, так и аналитическое различных моделей течений жидкости а также способов изменения ее геометрии актуально в связи с потребностью создания отечественной технологии «цифровое месторождение» [86, 87].

Исследованию воздействий внутреннего трения в вязкой несжимаемой жидкости посвящены работы [70 – 72, 88, 89]. Подчеркнем важность учета тепловыделения при течении жидкости в пористых средах согласно [73]. Эффект тепловыделения в течении жидкости в крупномасштабном случае при больших значениях вязкости может оказывать серьезное влияние на тепловые и электрические характеристики течения и, в некоторых случаях, приводить к



фазовым переходам, электрическим пробоям и т. п. Необходима переоценка эксплуатационных режимов с учетом данного эффекта при управлении пластами. Такие же проблемы связаны с управлением гемодинамикой, например, с теплоэлектрическими процессами, имеющими место при течении в пористых средах, характерных для теплокровных организмов, и, кроме того, с оптимизационными задачами плавания в вязкой несжимаемой жидкости.

В [89] приведено экспериментальное подтверждение важности учета вязкого тепловыделения для масляных подшипников. Такой же природой обладает эффект дросселирования, имеющий место для течений вязких жидкостей в пористых средах [73]. В [90] приводится таблица, содержащая значения тепловыделения нефтепродуктов, воды и метилового спирта при наличии дроссельного движения вследствие перепада давления.

### ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОИСТОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ МАГНИТНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В БЕСКОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ, БЕСКОНЕЧНОМ КОАКСИАЛЬНОМ ЦИЛИНДРЕ

Материалы главы нашли отражение в работах [5–7], численные результаты получены на основе разработанного программного обеспечения для которого имеется свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [18].

#### Введение

В данной главе продолжается исследование модели слоистого течения вязкой магнитной несжимаемой жидкости в неограниченном цилиндре, неограниченном коаксиальном цилиндре. Выделен класс точных решений уравнений МГД, соответствующих слоистому течению в этих областях. Однако, в отличие от предыдущей главы, рассматривать этот класс удобнее в цилиндрической системе координат. Система уравнений МГД (2.22) – (2.26) в цилиндрической системе координат  $\{\rho, \varphi, z\} \in D$  в покомпонентной записи и при  $t > 0$  имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) H_\rho = (\mathbf{H} \cdot \nabla) u_\rho + \mu_m \left( \Delta H_\rho - \frac{H_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} \right), \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) H_\varphi + \frac{u_\varphi H_\rho}{\rho} = (\mathbf{H} \cdot \nabla) u_\varphi + \frac{u_\rho H_\varphi}{\rho} + \mu_m \left( \Delta H_\varphi - \frac{H_\varphi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} \right), \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) H_z = (\mathbf{H} \cdot \nabla) u_z + \mu_m \Delta H_z, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\rho - \frac{u_\varphi^2}{\rho} = & -\frac{1}{\rho_0} \nabla \left( p + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} \right) + \\ & + \frac{1}{4\pi\rho_0} (\mathbf{H} \cdot \nabla) H_\rho - \frac{H_\varphi^2}{4\pi\rho_0\rho} + \mu \left( \Delta u_\rho - \frac{u_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\varphi + \frac{u_\varphi u_\rho}{\rho} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \left( p + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} \right) +$$

$$+\frac{1}{4\pi\rho_0}(\mathbf{H}\cdot\nabla)H_\varphi+\frac{H_\varphi H_\rho}{4\pi\rho_0\rho}+\mu\left(\Delta u_\varphi-\frac{u_\varphi}{\rho^2}+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}\right), \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)u_z=-\frac{1}{\rho_0}\nabla\left(p+\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\right)+\frac{1}{4\pi\rho_0}(\mathbf{H}\cdot\nabla)H_z+\mu\Delta u_z, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)T &= \chi\Delta T+\frac{\mu}{c_p}\left\{2\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}\right)^2+\right. \\ & \left.+2\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}\right)^2+2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_\rho}{\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}-\frac{u_\varphi}{\rho}\right)^2\right\}+\frac{\mu_m}{4\pi\rho_0 c_p}(\text{rot } \mathbf{H})^2, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $\mathbf{H}\equiv\{H_\rho, H_\varphi, H_z\}$  – вектор напряженности магнитного поля,  $\mathbf{u}\equiv\{u_\rho, u_\varphi, u_z\}$  – вектор скорости жидкости,  $t$  – время,  $\mu_m$  – магнитная вязкость жидкости,  $\rho_0$  – плотность жидкости,  $p$  – давление,  $\mu$  – кинематическая вязкость жидкости,  $c_p$  – теплоемкость при постоянном давлении,  $T$  – температура жидкости,  $\chi$  – коэффициент температуропроводности. Операторы  $\text{div}$ ,  $(\mathbf{u}\cdot\nabla)$ ,  $\Delta$ ,  $(\text{rot } \cdot)^2$  определяются следующими выражениями

$$\text{div } \mathbf{F}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}, \quad (\mathbf{u}\cdot\nabla)f=u_\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}+\frac{u_\varphi}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}+u_z\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\Delta f=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

$$(\text{rot } \mathbf{H})^2=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho H_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial\varphi}\right)^2.$$

В качестве граничных условий для вектора скорости и вектора напряженности магнитного поля рассматриваются условия Дирихле. Для поля температуры – условие теплоизолированности стенок.

Для слоистого течения жидкости вектор скорости имеет вид

$$\mathbf{u}\equiv\{0, u_\varphi(\rho, t), u_z(\rho, t)\}. \quad (3.9)$$

Иллюстрация к слоистому течению жидкости представлена на рис. 3.1. При этом слоем является боковая поверхность бесконечного цилиндра или

бесконечного коаксиального цилиндра радиуса  $\rho$ , где  $0 \leq \rho \leq R$  и  $R_1 \leq \rho \leq R_2$  соответственно.

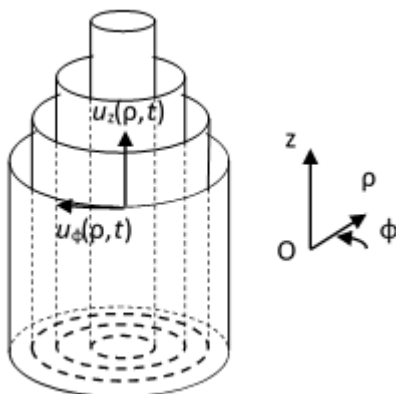


Рис. 3.1. Слоистое течение жидкости в цилиндре

Магнитное поле предполагается параллельным оси цилиндра, коаксиального цилиндра  $Oz$  и также, как и давление зависит только от радиальной компоненты и времени

$$\mathbf{H} \equiv \{0, 0, H_z(\rho, t)\}, \quad p \equiv p(\rho, t). \quad (3.10)$$

Справедлива теорема при предположении единственности решения уравнений МГД:

**Теорема 3.1.** *Решение системы уравнений МГД (3.1) – (3.8) в бесконечном цилиндре, бесконечном коаксиальном цилиндре для слоистого течения жидкости (3.9) при предположениях (3.10) сводится к решению следующей системы уравнений*

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \mu_m \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \right), \quad (3.11)$$

$$\frac{u_\phi^2}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{1}{4\pi\rho_0} H_z \frac{\partial H_z}{\partial \rho}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} = \mu \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} \right) \right) - \mu \frac{u_\phi}{\rho^2}, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = \mu \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right) \right), \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{u_\varphi}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \Delta T + \frac{\mu_m}{4\pi\rho_0 c_p} \left( \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{\mu}{c_p} \left\{ \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right)^2 \right\}. \quad (3.15)$$

**Доказательство.** Достаточно подставить вектор скорости (3.9) и вектор напряженности магнитного поля и давления (3.10) в уравнения (3.1) – (3.8).

**Замечание 3.1.** Для слоистого течения жидкости система уравнений МГД является линейной. Компоненты вектора скорости  $u_\varphi$ ,  $u_z$  и вектора напряженности магнитного поля  $H_z$  находятся независимо друг от друга из уравнений (3.12), (3.13) и (3.11) соответственно. После решения этих уравнений могут быть найдены поле давления из уравнения (3.12) и поле температуры из уравнения (3.15).

В связи с исследованием задач изменения геометрии области течения несжимаемой жидкости, интересным представляется вычисление фазового потока [83] для уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (3.16)$$

В цилиндрической системе координат уравнение (3.16) для слоистого течения жидкости (3.9) примет вид

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{u_\varphi}{\rho}, \quad \frac{dz}{dt} = u_z. \quad (3.17)$$

### 3.1 Слоистое течение жидкости в бесконечном цилиндре

#### 3.1.1 Вычисление поля скоростей и напряженности магнитного поля

Рассмотрим в бесконечном цилиндре  $D$ ,  $\{\rho, \varphi, z\} \in D$ ,  $\rho \in [0; R]$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi)$ ,  $z \in [-\infty; +\infty]$  слоистое течение (3.9) жидкости при предположениях относительно магнитного поля и поля давления (3.10). Граничные и начальные условия имеют вид

$$H_z|_{\rho=R} = H_R(t), \quad H_z(\rho, 0) = H_0(\rho), \quad (3.18)$$

$$u_\varphi|_{\rho=R} = \Omega(t)R, \quad u_z|_{\rho=R} = q(t), \quad u_z(\rho, 0) = \psi_z(\rho), \quad u_\varphi(\rho, 0) = \psi_\varphi(\rho). \quad (3.19)$$

Аналитическое решение уравнений МГД, сводящихся согласно теореме 3.1 к решению (3.11) – (3.14), с граничными и начальными условиями (3.18), (3.19) для слоистого течения жидкости имеет вид

$$H_z(\rho, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\gamma_n \rho}{R}\right)}{J_1^2(\gamma_n)} \left[ \exp\left\{-\mu_m \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2 t\right\} \int_0^R \rho (H_0(\rho) - H_R(0)) J_0\left(\frac{\gamma_n \rho}{R}\right) d\rho - \int_0^t \exp\left\{-\mu_m \left(\frac{\gamma_n \rho}{R}\right)^2 (t - \tau)\right\} H_R'(\tau) \int_0^R \rho J_0\left(\frac{\gamma_n}{R}\right) d\rho d\tau \right] + H_R(t), \quad (3.20)$$

$$p(\rho, t) = \rho_0 \int_0^{\rho} \frac{u_\varphi^2}{\rho} d\rho - \frac{1}{8\pi} H_z^2(\rho, t) + \theta(t), \quad (3.21)$$

$$u_\varphi(\rho, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\gamma_n \rho}{R}\right)}{J_2^2(\gamma_n)} \left[ \exp\left\{-\mu \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2 t\right\} \int_0^R \rho \left(\psi_\varphi(\rho) - \frac{\rho}{R} \Omega(0) R\right) J_1\left(\frac{\gamma_n \rho}{R}\right) d\rho - \int_0^t \exp\left\{-\mu \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2 (t - \tau)\right\} \Omega'(\tau) R \int_0^R \frac{\rho^2}{R} J_1\left(\frac{\gamma_n \rho}{R}\right) d\rho d\tau \right] + \frac{\rho}{R} \Omega(t) R, \quad (3.22)$$

$$u_z(\rho, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\gamma_n \rho}{R}\right)}{J_1^2(\gamma_n)} \left[ \exp\left\{-\mu \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2 t\right\} \int_0^R \rho (\psi_z(\rho) - q(0)) J_0\left(\frac{\gamma_n \rho}{R}\right) d\rho - \int_0^t \exp\left\{-\mu \left(\frac{\gamma_n \rho}{R}\right)^2 (t - \tau)\right\} q'(\tau) \int_0^R \rho J_0\left(\frac{\gamma_n}{R}\right) d\rho d\tau \right] + q(t), \quad (3.23)$$

где в формулах (3.20), (3.23)  $\{\gamma_n\}$  – нули функции Бесселя первого рода нулевого порядка  $J_0(\gamma_n) = 0$ , в формуле (3.22)  $\{\gamma_n\}$  – нули функции Бесселя первого рода первого порядка  $J_1(\gamma_n) = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , а  $\theta(t)$  – произвольная функция времени.

**Замечание 3.2.** Уравнение (3.12) для поля давления  $p(\rho, t)$  вполне определено.

Левая часть – слагаемое  $\frac{u_\varphi^2}{\rho}$  имеет устранимую особенность при  $\rho = 0$ , что следует

из решения (3.21) и асимптотики  $J_\nu(\rho) = O(\rho^\nu)$  при  $\rho \rightarrow 0$  [91].

В качестве граничных и начальных условий (3.18), (3.19) были выбраны следующие условия

$$H_z|_{\rho=R} = H_R \sin 2\pi t, \quad H_z(\rho, 0) = H_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right), \quad (3.24)$$

$$u_\varphi|_{\rho=R} = Re^{-t}, \quad u_\varphi(\rho, 0) = \rho, \quad u_z(\rho, 0) = u_{z,R} \equiv const, \quad u_z(\rho, 0) = u_{z,R} \frac{\rho^2}{R^2}. \quad (3.25)$$

Тогда выражения (3.20) – (2.23) могут быть упрощены. Аналитическое решение задачи (3.11) – (3.14) с граничными и начальными условиями (3.24), (3.25) имеет вид

$$u_z(\rho, t) = u_{z,R} \left[ 1 - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-t\mu \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2\right\} \frac{J_0\left(\gamma_n \frac{\rho}{R}\right)}{\gamma_n^3 J_1(\gamma_n)} \right], \quad (3.26)$$

$$u_\varphi(\rho, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\gamma_n \frac{\rho}{R}\right)}{J_2(\gamma_n)} \left( \frac{\exp\{-t\} - \exp\left\{-\mu t \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2\right\}}{\mu \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^3 - \frac{\gamma_n}{R}} \right) + \rho \exp\{-t\}, \quad (3.27)$$

$$H_z(\rho, t) = H_R \sin 2\pi t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\gamma_n \frac{\rho}{R}\right)}{J_1(\gamma_n)} \left[ 8 \frac{H_0}{\gamma_n^3} \exp\left\{-t\mu_m \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2\right\} - \frac{H_R}{\gamma_n} \left\{ \frac{2R^2}{\gamma_n^2} + \sin 2\pi t + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\mu_m}{\pi} \cos 2\pi t - \frac{\mu_m}{\pi} \exp\left\{-t\mu_m \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2\right\} \right\} / \left( \frac{R^2}{\gamma_n^2} + \frac{\mu_m^2}{4\pi^2} \frac{\gamma_n^2}{R^2} \right) \right], \quad (3.28)$$

где в формулах (3.26), (3.28)  $J_0(\gamma_n) = 0$ , в формуле (3.25)  $J_1(\gamma_n) = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , а для поля давления  $p(\rho, t)$  справедливо (3.21).

Описание разработанного программного обеспечения на основе которого получены результаты расчетов, представленные далее, приводится в параграфе 3.3. На рис. 3.2 – 3.5 представлены результаты решения уравнений (3.11) – (3.14) при  $t = 1$ . Все параметры жидкости полагались равными единице. Рис. 3.2 соответствует расчетным значениям  $H_z$ , константы в (3.24) полагались равными единице  $H_0 = H_R = 1$ . Рис. 3.3 соответствует расчетным значениям поля давления. Рис. 3.4

соответствует расчетным значениям  $u_\phi$ . Рис. 3.5 соответствует расчетным значениям  $u_z$  при  $u_{z,R} = 4$ .

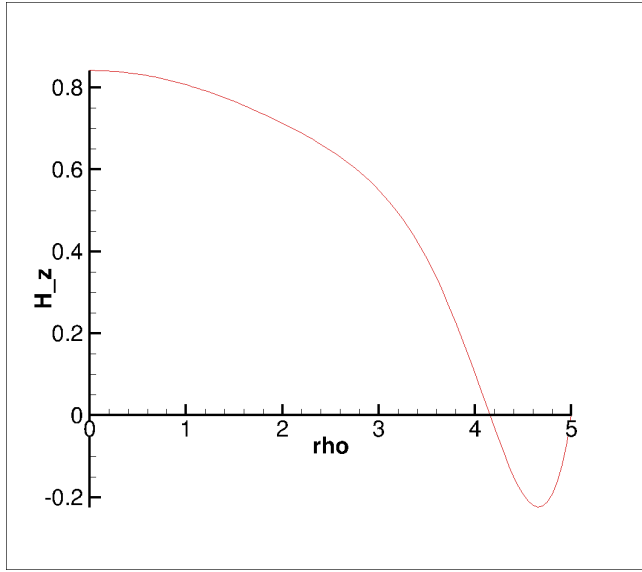


Рис. 3.2. График функция  $H_z(\rho, t)$  при  $t=1$ .

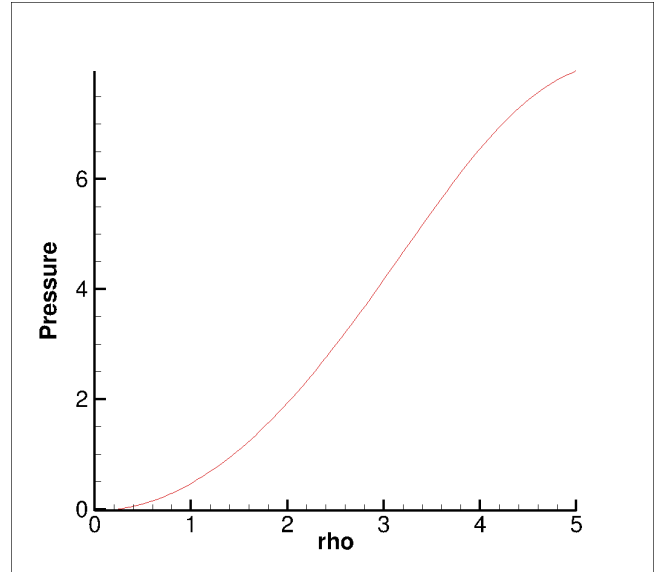


Рис. 3.3. График функция  $p(\rho, t)$  при  $t=1$ .

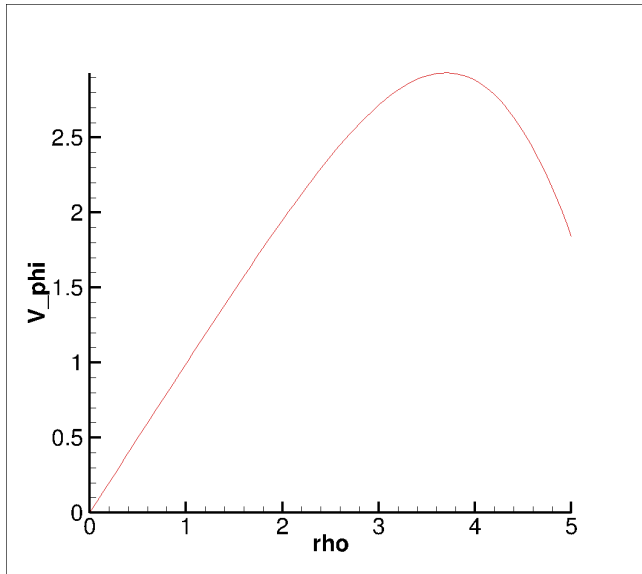


Рис. 3.4. График функция  $u_\phi(\rho, t)$  при  $t=1$ .

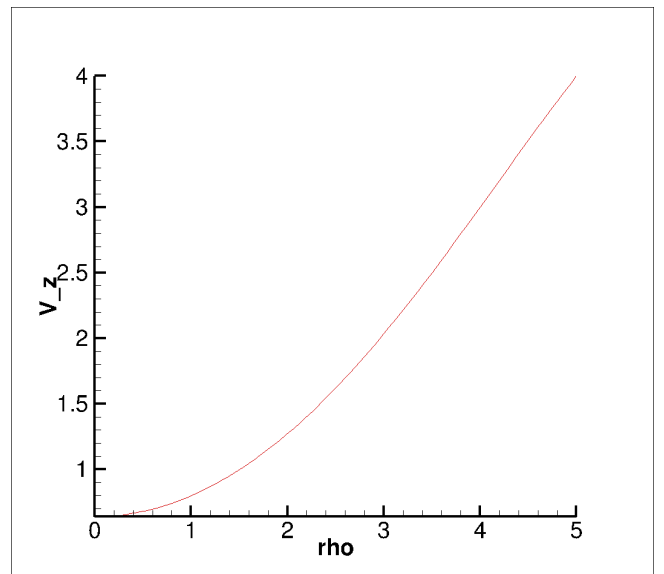


Рис. 3.5. График функция  $u_z(\rho, t)$  при  $t=1$ .

### 3.1.2 Вычисление фазового потока

Аналитическое решение уравнений (3.17) при условиях (3.18), (3.19) имеет вид

$$\rho(t) \equiv \rho(0),$$

$$z(\rho, t) = \frac{2}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\gamma_n \rho}{R}\right)}{\gamma_n^2 J_1^2(\gamma_n)} \left[ \left( 1 - \exp\left\{ -\mu \left( \frac{\gamma_n}{R} \right)^2 t \right\} \right) \int_0^R \rho(\psi_z(\rho) - q(0)) J_0\left(\frac{\gamma_n \rho}{R}\right) d\rho + \right.$$



$$\begin{aligned}
& + \int_0^R \rho J_0\left(\frac{\gamma_n \rho}{R}\right) d\rho \left\{ \int_0^t \exp\left\{-\mu\left(\frac{\gamma_n \rho}{R}\right)^2 (t-\tau)\right\} q'(\tau) d\tau - q(t) + q(0) \right\} + \int_0^t q(t) dt + z(0), \\
\varphi(\rho, t) = & \frac{2}{\rho \mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\gamma_n \rho}{R}\right)}{\gamma_n^2 J_2^2(\gamma_n)} \left[ \left(1 - \exp\left\{-\mu\left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2 t\right\}\right) \int_0^R \rho \left(\psi_\varphi(\rho) - \frac{\rho}{R} \Omega(0) R\right) J_1\left(\frac{\gamma_n \rho}{R}\right) d\rho + \right. \\
& \left. + \int_0^R \frac{\rho^2}{R} J_1\left(\frac{\gamma_n \rho}{R}\right) d\rho \left\{ \int_0^t \exp\left\{-\mu\left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2 (t-\tau)\right\} \Omega'(\tau) R - \Omega(t) R + \Omega(0) R \right\} \right] + \int_0^t \Omega(t) dt + \varphi(0),
\end{aligned}$$

где  $\{\rho(0), \varphi(0), z(0)\}$  – начальное положение точки  $\{\rho(t), \varphi(t), z(t)\}$ . Здесь и в формулах ниже этого пункта, при рассмотрении функции  $z(\rho, t)$  полагаем  $J_0(\gamma_n) = 0$ , а в случае  $\varphi(\rho, t) - J_1(\gamma_n) = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Функция  $\varphi$  при  $\rho=0$  имеет вид

$$\begin{aligned}
\varphi(0, t) = & \frac{1}{R \mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n J_2^2(\gamma_n)} \left[ \left(1 - \exp\left\{-\mu\left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2 t\right\}\right) \int_0^R \rho \left(\psi_\varphi(\rho) - \frac{\rho}{R} \Omega(0) R\right) J_1\left(\frac{\gamma_n \rho}{R}\right) d\rho + \right. \\
& \left. + \int_0^R \frac{\rho^2}{R} J_1\left(\frac{\gamma_n \rho}{R}\right) d\rho \left\{ \int_0^t \exp\left\{-\mu\left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2 (t-\tau)\right\} \Omega'(\tau) R - \Omega(t) R + \Omega(0) R \right\} \right] + \int_0^t \Omega(t) dt + \varphi(0).
\end{aligned}$$

При выбранных граничных и начальных условиях (3.24), (3.25) эти выкладки могут быть упрощены. Решение уравнений (3.17) с условиями (3.24), (3.25) имеет вид

$$\begin{aligned}
\rho(t) \equiv \rho(0), \quad z(\rho, t) = & u_{z,R} \left[ t + \frac{8R^2}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \exp\left\{-t\mu\left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2\right\} - 1 \right) \frac{J_0\left(\gamma_n \frac{\rho}{R}\right)}{\gamma_n^5 J_1(\gamma_n)} \right] + z(0), \\
\varphi(\rho, t) = & \frac{2}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\gamma_n \frac{\rho}{R}\right)}{J_2(\gamma_n)} \cdot \frac{1 - \exp\{-t\} + R^2 \frac{\exp\left\{-\mu t \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2\right\} - 1}{\mu \gamma_n^2}}{\mu \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^3 - \frac{\gamma_n}{R}} + 1 - \exp\{-t\} + \varphi(0).
\end{aligned}$$

При  $\rho=0$  имеем

$$\varphi(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \exp\{-t\} + R^2 \frac{\exp\left\{-\mu t \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2\right\} - 1}{\mu \gamma_n^2}}{J_2(\gamma_n) \left(\mu \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2 - 1\right)} + 1 - \exp\{-t\} + \varphi(0).$$

Для иллюстрации изменения геометрии области течения рассмотрим цилиндр конечного размера, занимаемой жидкостью в случае слоистого течения в нем. Пусть жидкость начинает движение из цилиндра (см. рис. 3.6а)  $\rho \in [0;5]$ ,  $\varphi \in [0;2\pi]$ ,  $z \in [0;5]$  и при  $t=1$  занимает следующую область (кружка) (см. рис. 3.6б). Цвет на рис. 3.6 соответствует координате по оси  $Oz$ . Рис. 3.6б иллюстрирует изменение во времени области, занимаемой жидкостью в случае слоистого течения из-за объемного воздействия на нее магнитным полем параллельном оси цилиндра и в результате вращения и движения вдоль оси  $Oz$  стенки цилиндра.

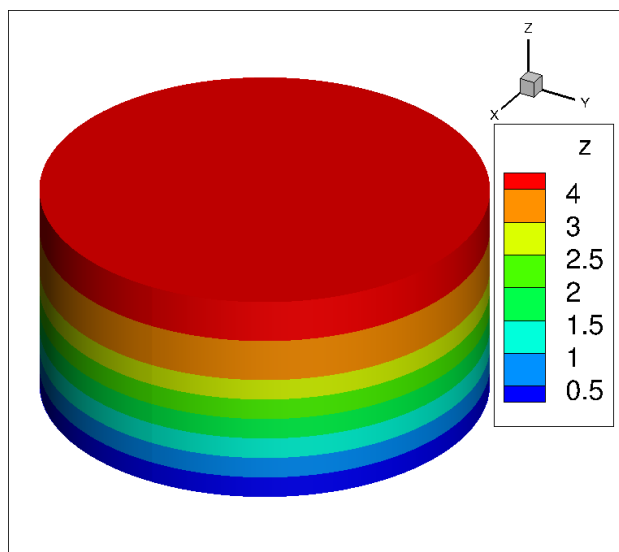


Рис. 3.6а. Геометрия области слоистого течения жидкости при  $t=0$

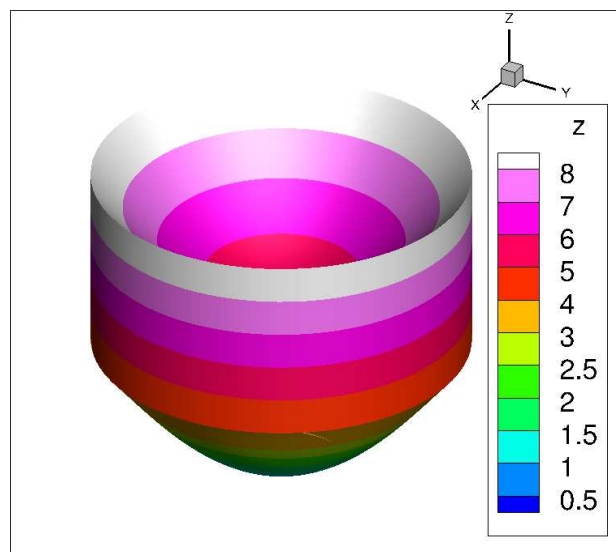


Рис. 3.6б. Геометрия области слоистого течения жидкости при  $t=1$

### 3.1.3 Расчет тепловыделения

В этом пункте рассмотрено численное решение уравнения (3.8), которое для слоистого течения жидкости (3.9) при предположениях (3.10) примет вид (3.15). Для поля температуры  $T(\rho, \varphi, z, t)$  начальные и граничные условия полагаются однородными

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial D} = 0, \quad T|_{t=0} = 0, \quad (3.29)$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к поверхности цилиндра  $\partial D$ .

Рассмотрим цилиндр  $D$ ,  $\{\rho, \varphi, z\} \in D$ , для которого  $\rho \in [0; 5]$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi)$ ,  $z \in [0; 1]$ . При численном решении все параметры жидкости полагались равными единице. Расчетные значения компонент вектора скорости  $u_\varphi$ ,  $u_z$  и компоненты  $H_z$  вектора напряженности магнитного поля соответствуют выражениям (3.24) – (3.26). Производные по переменной  $\rho$  для этих компонент, определяющие источник член уравнения (3.15), рассчитывались по центрально-разностной схеме, а затем полученная функция интерполировалась в недостающих точках методом полиномов Эрмита [92]. На рис 3.7 представлены результаты расчетов поля температур, соответствующие слоистому течению жидкости в цилиндре. Рис. 3.7а иллюстрирует поле температуры на поверхности цилиндра, рис. 3.7б – в сечении плоскостью  $XOZ$ . Тепловыделение в слоистом течении является следствием джоулева подогрева и вязкого трения в жидкости.

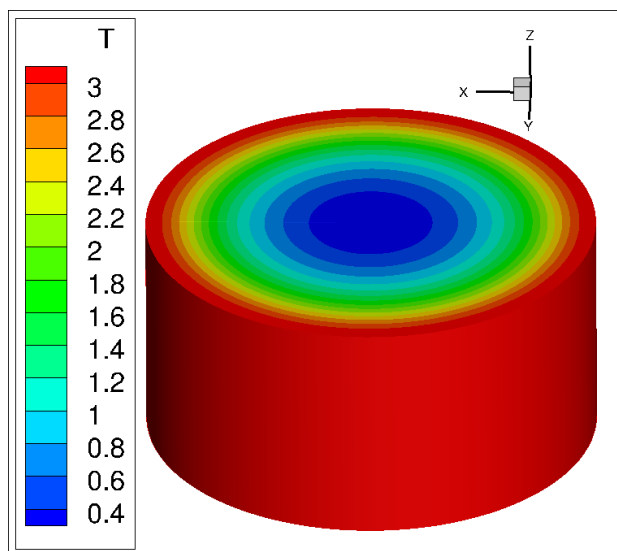


Рис. 3.7 а). Результат расчета поля температуры соответствующего слоистому течению жидкости при  $t=1$  на поверхности цилиндра

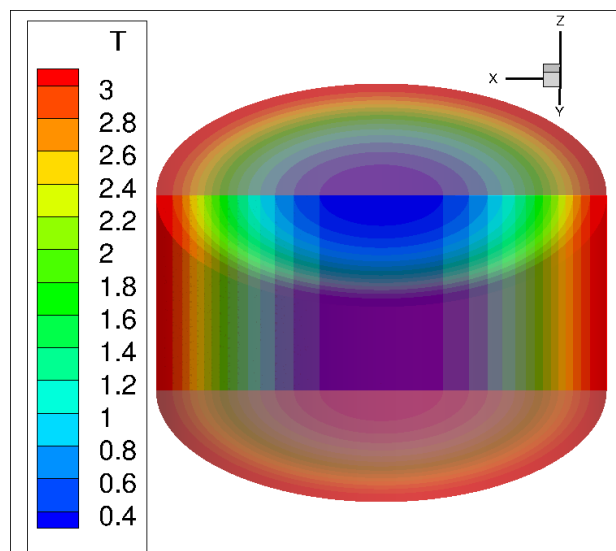


Рис. 3.7 б) Результат расчета поля температуры, соответствующего слоистому течению жидкости при  $t=1$  в сечении плоскостью  $XOZ$

### 3.2 Слоистое течение жидкости в бесконечном коаксиальном цилиндре

#### 3.2.1 Вычисление поля скоростей и напряженности магнитного поля

Рассматривается в бесконечном коаксиальном цилиндре  $\{\rho, \varphi, z\}$ ,  $\rho \in [R_1; R_2]$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi)$ ,  $z \in [-\infty; +\infty]$  слоистое течение (3.9) вязкой несжимаемой жидкости при предположениях относительно магнитного поля и поля давления (3.10). Граничные и начальные условия имеют вид

$$H_z|_{\rho=R_1} = H_1(t), \quad H_z|_{\rho=R_2} = H_2(t), \quad H_z|_{t=0} = H_0(\rho), \quad (3.30)$$

$$u_z|_{\rho=R_1} = u_z^{(1)}(t), \quad u_z|_{\rho=R_2} = u_z^{(2)}(t), \quad u_z|_{t=0} = \Psi_z(\rho), \quad (3.31)$$

$$u_\varphi|_{\rho=R_1} = u_\varphi^{(1)}(t), \quad u_\varphi|_{\rho=R_2} = u_\varphi^{(2)}(t), \quad u_\varphi|_{t=0} = \Psi_\varphi(\rho), \quad (3.32)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial D} = 0, \quad T|_{t=0} = 0, \quad (3.33)$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к поверхности коаксиального цилиндра  $\partial D$ .

Аналитическое решение системы уравнений МГД, сводящихся согласно теореме 3.1 к решению уравнений (3.11) – (3.15), с граничными и начальными условиями (3.30) – (3.32) имеет вид

$$\begin{aligned} u_z(\rho, t) = & \frac{\pi^2}{2R_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\gamma_n) \gamma_n^2 Z_0 \left( \frac{\gamma_n \rho}{R_1} \right)}{J_0^2(\gamma_n) - J_0^2(\gamma_n k)} \left\{ \exp \left\{ -\mu \left( \frac{\gamma_n}{R_1} \right)^2 t \right\} \int_{R_1}^{R_2} \rho \left( \Psi_z(\rho) - \frac{u_z^{(2)}(0) - u_z^{(1)}(0)}{R_2 - R_1} \rho - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{u_z^{(1)}(0)R_2 - u_z^{(2)}(0)R_1}{R_2 - R_1} \right) \cdot Z_0 \left( \frac{\gamma_n \rho}{R_1} \right) d\rho + \int_0^t \exp \left\{ -\mu \left( \frac{\gamma_n}{R_1} \right) (t - \tau) \right\} \int_{R_1}^{R_2} \rho \left[ \frac{\mu (u_z^{(2)}(\tau) - u_z^{(1)}(\tau))}{\rho (R_2 - R_1)} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{u_z'^{(2)}(\tau) - u_z'^{(1)}(\tau)}{R_2 - R_1} \rho - \frac{u_z'^{(1)}(\tau)R_2 - u_z'^{(2)}(\tau)R_1}{R_2 - R_1} \right] \cdot Z_0 \left( \gamma_n \frac{\rho}{R_1} \right) d\rho d\tau \right\} + \\ & + \frac{u_z^{(2)}(t) - u_z^{(1)}(t)}{R_2 - R_1} \rho + \frac{u_z^{(1)}(t)R_2 - u_z^{(2)}(t)R_1}{R_2 - R_1}, \quad (3.34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_\varphi(\rho, t) = & \frac{\pi^2}{2R_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\gamma_n) \gamma_n^2 Z_1\left(\frac{\gamma_n \rho}{R_1}\right)}{J_1^2(\gamma_n) - J_1^2(\gamma_n k)} \left\{ \exp\left\{-\mu\left(\frac{\gamma_n}{R_1}\right)^2 t\right\} \int_{R_1}^{R_2} \rho \left( \Psi_\varphi(\rho) - \frac{u_\varphi^{(2)}(0) - u_\varphi^{(1)}(0)}{R_2 - R_1} \rho - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{u_\varphi^{(1)}(0) R_2 - u_\varphi^{(2)}(0) R_1}{R_2 - R_1} \right) Z_1\left(\frac{\gamma_n \rho}{R_1}\right) d\rho - \int_0^t \exp\left\{-\mu\left(\frac{\gamma_n}{R_1}\right)(t - \tau)\right\} \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot \right. \\
& \left. \left[ \frac{\mu(u_\varphi^{(1)}(\tau) R_2 - u_\varphi^{(2)}(\tau) R_1)}{\rho^2 (R_2 - R_1)} + \frac{u_\varphi'^{(2)}(\tau) - u_\varphi'^{(1)}(\tau)}{R_2 - R_1} \rho + \frac{u_\varphi'^{(1)}(\tau) R_2 - u_\varphi'^{(2)}(\tau) R_1}{R_2 - R_1} \right] \cdot \right. \\
& \left. \cdot Z_1\left(\gamma_n \frac{\rho}{R_1}\right) d\rho d\tau \right\} + \frac{u_\varphi^{(2)}(t) - u_\varphi^{(1)}(t)}{R_2 - R_1} \rho + \frac{u_\varphi^{(1)}(t) R_2 - u_\varphi^{(2)}(t) R_1}{R_2 - R_1}, \quad (3.35)
\end{aligned}$$

$$p(\rho, t) = \rho_0 \int_{R_1}^{\rho} \frac{u_\varphi^2}{\rho} d\rho - \frac{1}{8\pi} H_z^2(\rho, t) + \theta(t), \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned}
H_z(\rho, t) = & \frac{\pi^2}{2R_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\gamma_n) \gamma_n^2 Z_0\left(\frac{\gamma_n \rho}{R_1}\right)}{J_0^2(\gamma_n) - J_0^2(\gamma_n k)} \left\{ \exp\left\{-\mu_m\left(\frac{\gamma_n}{R_1}\right)^2 t\right\} \int_{R_1}^{R_2} \rho \left( H_0(\rho) - \frac{H_2(0) - H_1(0)}{R_2 - R_1} \rho - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{H_1(0) R_2 - H_2(0) R_1}{R_2 - R_1} \right) Z_0\left(\frac{\gamma_n \rho}{R_1}\right) d\rho + \int_0^t \exp\left\{-\mu_m\left(\frac{\gamma_n}{R_1}\right)(t - \tau)\right\} \int_{R_1}^{R_2} \rho \left[ \frac{\mu_m(H_2(\tau) - H_1(\tau))}{\rho(R_2 - R_1)} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{H_2'(\tau) - H_1'(\tau)}{R_2 - R_1} \rho - \frac{H_1'(\tau) R_2 - H_2'(\tau) R_1}{R_2 - R_1} \right] Z_0\left(\gamma_n \frac{\rho}{R_1}\right) d\rho d\tau \right\} + \\
& + \frac{H_2(t) - H_1(t)}{R_2 - R_1} \rho + \frac{H_1(t) R_2 - H_2(t) R_1}{R_2 - R_1}. \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Здесь используются следующие обозначения. В выражениях (3.34) – (3.37)

$k = \frac{R_2}{R_1}$ . В формулах (3.36), (3.39)  $Z_0\left(\gamma_n \frac{\rho}{R_1}\right) \stackrel{def}{=} J_0\left(\gamma_n \frac{\rho}{R_1}\right) Y_0(\gamma_n k) - J_0(\gamma_n k) Y_0\left(\gamma_n \frac{\rho}{R_1}\right)$ ,

$\{\gamma_n\}$  – корни  $J_0(\gamma_n) Y_0(\gamma_n k) - J_0(\gamma_n k) Y_0(\gamma_n) = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . В равенстве (3.35)

$Z_1\left(\gamma_n \frac{\rho}{R_1}\right) \stackrel{def}{=} J_1\left(\gamma_n \frac{\rho}{R_1}\right) Y_1(\gamma_n k) - J_1(\gamma_n k) Y_1\left(\gamma_n \frac{\rho}{R_1}\right)$ ,  $\{\gamma_n\}$  – корни

$J_1(\gamma_n) Y_1(\gamma_n k) - J_1(\gamma_n k) Y_1(\gamma_n) = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .  $J_0(\rho)$ ,  $J_1(\rho)$  – функции Бесселя первого

рода нулевого и первого порядка соответственно.  $Y_0(\rho)$ ,  $Y_1(\rho)$  – функции Бесселя

второго рода нулевого и первого порядка,  $\theta(t)$  – произвольная функция времени.

Описание разработанного программного обеспечения, на основе которого получено представленные далее результаты расчетов, приведено в параграфе 3.3. Граничные и начальные условия (3.30) – (3.32), при которых выполнены расчеты, имеют вид

$$H_z|_{\rho=R_1} = 2 \sin 2\pi t, \quad H_z|_{\rho=R_2} = 4(1 - e^{-t}), \quad H_z(\rho, 0) = 3 \left(1 - \frac{\rho}{R_1}\right) \left(1 - \frac{\rho}{R_2}\right), \quad (3.38)$$

$$u_z|_{\rho=R_1} = 2, \quad u_z|_{\rho=R_2} = 4, \quad u_z(\rho, 0) = \frac{2\rho}{R_2 - R_1} + \frac{2R_2 - 4R_1}{R_2 - R_1}, \quad (3.39)$$

$$u_\phi|_{\rho=R_1} = te^{-t}, \quad u_\phi|_{\rho=R_2} = (1 - t^2)e^{-t^2}, \quad u_\phi(\rho, 0) = \ln \frac{\rho}{R_1} \cdot \left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right)^{-1}. \quad (3.40).$$

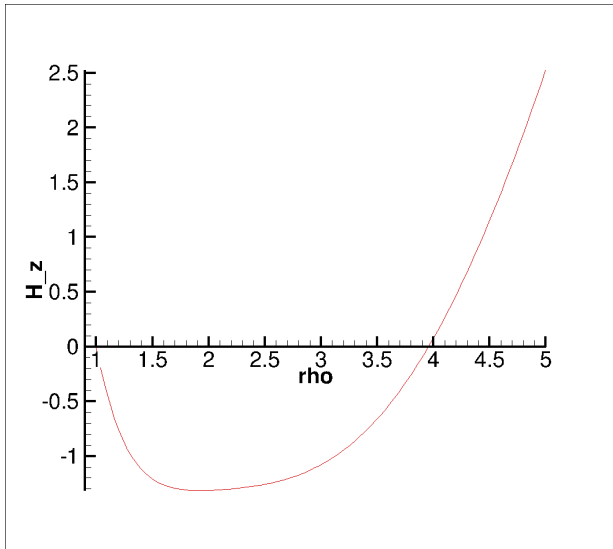


Рис. 3.8. График функция  $H_z(\rho, t)$  при  $t=1$ .

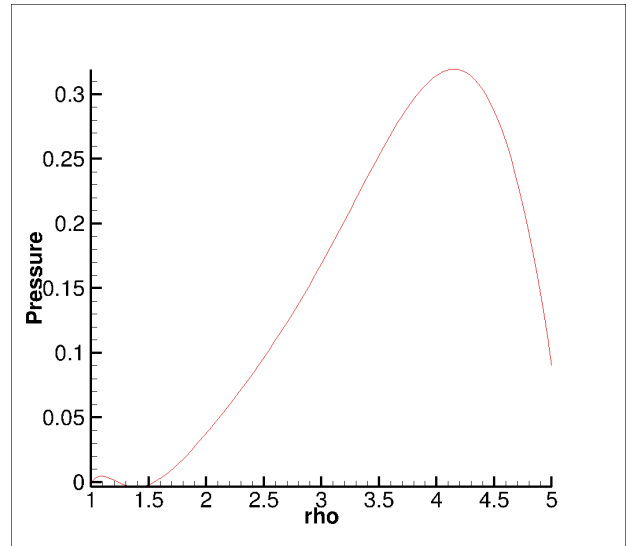


Рис. 3.9. График функция  $p(\rho, t)$  при  $t=1$ .

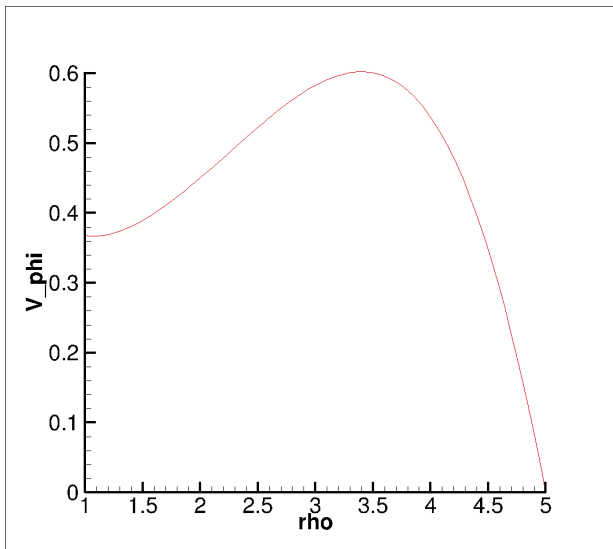


Рис. 3.10. График функция  $u_\phi(\rho, t)$  при  $t=1$

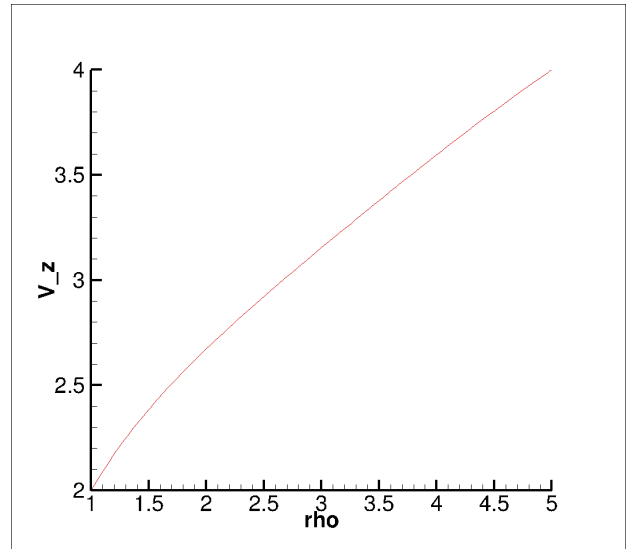


Рис. 3.11. График функция  $u_z(\rho, t)$  при  $t=1$ .

На рис. 3.8 – 3.11 приведены результаты численного решения уравнений (3.11) – (3.14) на момент времени  $t=1$ . Все параметры жидкости полагались равными единице. Рис. 3.8 соответствует расчетным значениям  $H_z$ . Рис. 3.9 соответствует расчетным значениям поля давления. Рис. 3.10 соответствует расчетным значениям  $u_\varphi$ . Рис. 3.11 соответствует расчетным значениям  $u_z$ .

### 3.2.2 Вычисление фазового потока

Аналитическое решение уравнений (3.17) с учетом начальных и граничных условий (3.30) – (3.32) имеет вид

$$\rho(t) \equiv \rho(0),$$

$$\begin{aligned} z(\rho, t) = & \frac{\pi^2}{2\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\gamma_n) Z_0\left(\frac{\gamma_n \rho}{R_1}\right)}{J_0^2(\gamma_n) - J_0^2(\gamma_n k)} \left\{ \left( 1 - \exp\left\{ -\mu \left( \frac{\gamma_n}{R_1} \right)^2 t \right\} \right) \int_{R_1}^{R_2} \rho \left( \psi_z(\rho) - \frac{u_z^{(2)}(0) - u_z^{(1)}(0)}{R_2 - R_1} \rho - \right. \right. \\ & - \left. \frac{v_z^{(1)}(0)R_2 - v_z^{(2)}(0)R_1}{R_2 - R_1} \right) Z_0\left(\frac{\gamma_n \rho}{R_1}\right) d\rho - \int_0^t \exp\left\{ -\mu \left( \frac{\gamma_n}{R_1} \right) (t - \tau) \right\} \int_{R_1}^{R_2} \rho \left[ \frac{\mu(u_z^{(2)}(\tau) - u_z^{(1)}(\tau))}{\rho(R_2 - R_1)} - \right. \\ & - \left. \frac{u_z^{(2)}(\tau) - u_z^{(1)}(\tau)}{R_2 - R_1} \rho - \frac{u_z^{(1)}(\tau)R_2 - u_z^{(2)}(\tau)R_1}{R_2 - R_1} \right] Z_0\left(\gamma_n \frac{\rho}{R_1}\right) d\rho d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu(u_z^{(2)}(\tau) - u_z^{(1)}(\tau))}{R_2 - R_1} Z_0\left(\gamma_n \frac{\rho}{R_1}\right) d\rho d\tau - \\ & - \int_{R_1}^{R_2} \left( \frac{u_z^{(2)}(t) - u_z^{(2)}(0) - u_z^{(1)}(t) + u_z^{(1)}(0)}{R_2 - R_1} \rho^2 + \frac{(u_z^{(1)}(t) - u_z^{(1)}(0))R_2 - (u_z^{(2)}(t) - u_z^{(2)}(0))R_1}{R_2 - R_1} \rho \right) \cdot \\ & \cdot Z_0\left(\gamma_n \frac{\rho}{R_1}\right) d\rho \left. \right\} + \int_0^t \left( \frac{u_z^{(2)}(\tau) - u_z^{(1)}(\tau)}{R_2 - R_1} \rho + \frac{u_z^{(1)}(\tau)R_2 - u_z^{(2)}(\tau)R_1}{R_2 - R_1} \right) d\tau + z(0), \\ \varphi(\rho, t) = & \frac{\pi^2}{2\rho\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\gamma_n) Z_1\left(\frac{\gamma_n \rho}{R_1}\right)}{J_1^2(\gamma_n) - J_1^2(\gamma_n k)} \left\{ \left( 1 - \exp\left\{ -\mu \left( \frac{\gamma_n}{R_1} \right)^2 t \right\} \right) \int_{R_1}^{R_2} \rho (\psi_\varphi(\rho) - \right. \\ & - \left. \frac{u_\varphi^{(2)}(0) - u_\varphi^{(1)}(0)}{R_2 - R_1} \rho - \frac{u_\varphi^{(1)}(0)R_2 - u_\varphi^{(2)}(0)R_1}{R_2 - R_1} \right) Z_1\left(\frac{\gamma_n \rho}{R_1}\right) d\rho + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \exp \left\{ -\mu \left( \frac{\gamma_n}{R_1} \right) (t - \tau) \right\} \int_{R_1}^{R_2} \left[ \frac{\mu (u_\varphi^{(1)}(\tau) R_2 - u_\varphi^{(2)}(\tau) R_1)}{\rho (R_2 - R_1)} + \frac{u_\varphi^{(2)}(\tau) - u_\varphi^{(1)}(\tau)}{R_2 - R_1} \rho^2 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{u_\varphi^{(1)}(\tau) R_2 - u_\varphi^{(2)}(\tau) R_1}{R_2 - R_1} \rho \right] Z_1 \left( \gamma_n \frac{\rho}{R_1} \right) d\rho d\tau - \\
& - \int_{R_1}^{R_2} \int_0^t \frac{\mu (u_\varphi^{(1)}(\tau) R_2 - u_\varphi^{(2)}(\tau) R_1)}{\rho (R_2 - R_1)} Z_1 \left( \gamma_n \frac{\rho}{R_1} \right) d\rho d\tau - \\
& - \int_{R_1}^{R_2} \left( \frac{u_\varphi^{(2)}(t) - u_\varphi^{(2)}(0) - u_\varphi^{(1)}(t) + u_\varphi^{(1)}(0)}{R_2 - R_1} \rho^2 + \frac{(v_\varphi^{(1)}(t) - u_\varphi^{(1)}(0)) R_2 - (u_\varphi^{(2)}(t) - u_\varphi^{(2)}(0)) R_1}{R_2 - R_1} \rho \right) \cdot \\
& \quad \cdot Z_1 \left( \gamma_n \frac{\rho}{R_1} \right) d\rho \left. \right\} + \int_0^t \left( \frac{u_\varphi^{(2)}(\tau) - u_\varphi^{(1)}(\tau)}{R_2 - R_1} + \frac{u_\varphi^{(1)}(\tau) R_2 - u_\varphi^{(2)}(\tau) R_1}{\rho (R_2 - R_1)} \right) d\tau + \varphi(0),
\end{aligned}$$

где  $\{\rho(0), \varphi(0), z(0)\}$  – начальное положение некоторой точки  $\{\rho(t), \varphi(t), z(t)\}$ , остальные обозначения те же, что и в выражениях (3.34), (3.35).

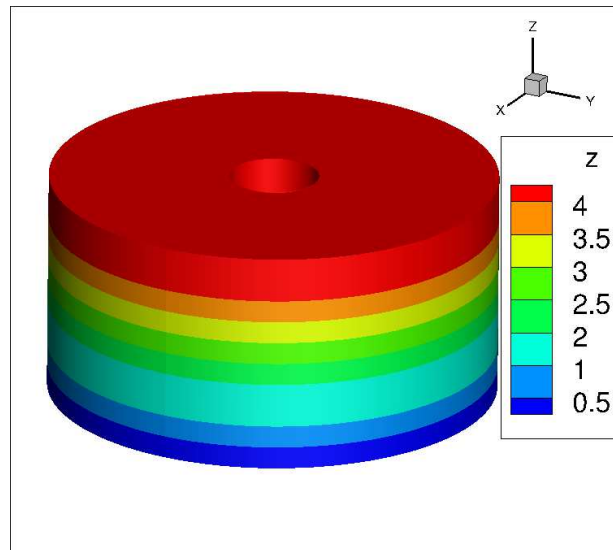


Рис. 3.12 а) Геометрия области слоистого течения жидкости при  $t=0$ .

Для иллюстрации изменения геометрии области слоистого течения жидкости выделим из неограниченного коаксиального цилиндра коаксиальный цилиндр конечного размера  $\rho \in [R_1; R_2]$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi)$ ,  $z \in [0; L]$ ,  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 5$ ,  $L = 5$ . Пусть жидкость начинает движение из коаксиального цилиндра (рис. 3.12а) и при  $t=1$  занимает следующую область (рис. 3.12б, 3.12в). Рис. 3.12а – 3.12в иллюстрируют изменение во времени геометрии области слоистого течения жидкости в результате



эффекта, оказываемого магнитным полем и вращением, движением вдоль оси  $Oz$  стенок коаксиального цилиндра. Цвет на рис. 3.12 соответствует координате по оси  $Oz$ .

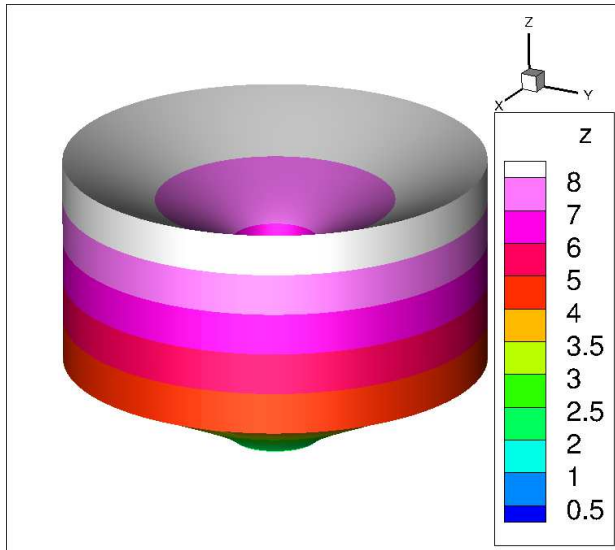


Рис. 3.12 б) Геометрия области слоистого течения жидкости при  $t=1$ . Вид сверху.

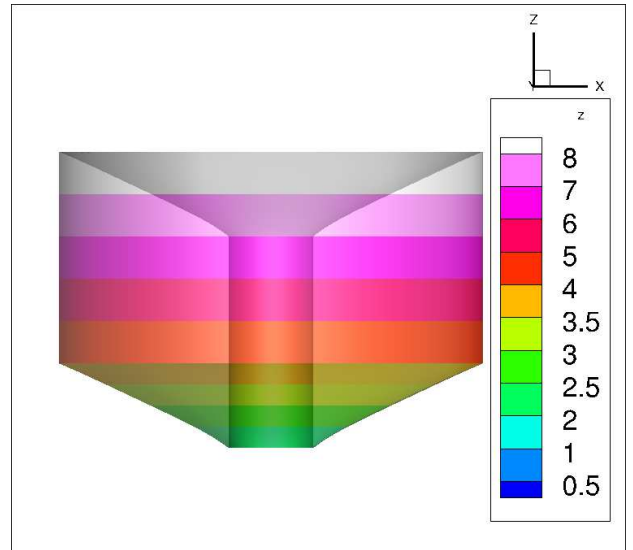


Рис. 3.12 в) Геометрия области слоистого течения жидкости при  $t=1$ , в разрезе плоскостью ортогональной  $XOY$ .

### 3.2.3 Расчет тепловыделения

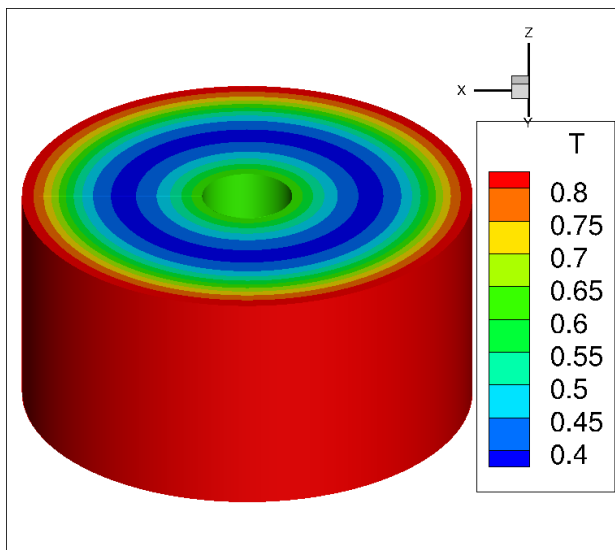


Рис. 3.13 а) Результат расчета поля температуры соответствующего слоистому течению жидкости при  $t=1$  на поверхности цилиндра

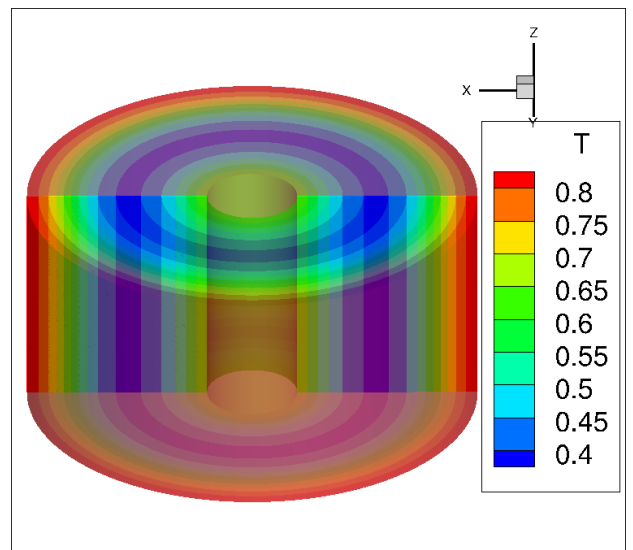


Рис. 3.13 б) Результат расчета поля температуры, соответствующего слоистому течению жидкости при  $t=1$  в сечении плоскостью  $XOZ$

Рассмотрим результаты расчетов поля температур  $T(\rho, \varphi, z, t)$ , определяемого уравнением (3.15) и условиями (3.33), для слоистого течения жидкости. Расчетные значения компонент вектора скорости  $u_\varphi$ ,  $u_z$  и компоненты  $H_z$  вектора напряженности магнитного поля найдены в результате решения уравнений

(3.11) – (3.14). Производные по переменной  $\rho$  для этих компонент, определяющие источниковый член уравнения (3.15), рассчитывались по центрально-разностной схеме, а затем полученная функция интерполировалась в недостающих точках методом полиномов Эрмита [92]. На рис 3.13 представлены результаты расчетов поля температур, соответствующие слоистому течению жидкости в коаксиальном цилиндре. Рис. 3.13а иллюстрирует поле температуры на поверхности коаксиального цилиндра  $\rho \in [1;5]$ ,  $\varphi \in [0;2\pi)$ ,  $z \in [0;5]$ , рис. 3.13б – в сечении плоскостью  $XOZ$ . Тепловыделение в слоистом течении является следствием джоулева подогрева и вязкого трения в жидкости.

### 3.3. Характеристика разработанного программного обеспечения

#### 3.3.1. Общая характеристика

Все численные результаты, проиллюстрированные рисунками в параграфах 3.1, 3.2, получены на основе разработанного программного обеспечения. Использовались кроссплатформенная среда разработки QT, язык программирования C и компилятор gcc (Gnu Compiler Collection). Результаты расчетов визуализировались в программе Tecplot 360.

В обоих случаях для расчетов в цилиндре и коаксиальном цилиндре использовался МКО [93] с полностью неявной схемой по времени. Число расчетных точек по координатам  $\{\rho, \varphi, z\}$  составляет  $102 \times 100 \times 102$ , шаг по времени равен  $10^{-4}$ . Сетка является равномерной, за исключением случая радиальной переменной при расчетах в цилиндре, где расстояние между точкой  $\rho=0$  и следующей расчетной точкой равно половине шага сетки, что связано с учетом отсутствия граничного условия в точке  $\rho=0$  при расчетах МКО.

Расчеты проведены на четырехъядерном персональном компьютере с процессором i5-3470, за исключением поля температур для которого расчеты проводились на усиленной рабочей станции с процессором Intel Xeon E5-2690 имеющем 10 ядер. Технология распараллеливания OpenMP была использована для вычисления частичных сумм рядов, необходимых для верификации результатов

расчетов векторов скорости и напряженности магнитного поля (п. 3.1.1, 3.2.1) и фазового потока (п. 3.1.2, 3.2.2), а также при вычислении тепловыделения (п. 3.1.3, 3.2.3). При вычислении частичных сумм рядов получено ускорение в  $\approx 3.5$  раза на четырехъядерном ПК по сравнению с расчетами на одном ядре. При вычислении поля температур использовалась сторонняя библиотека LIS (Library of iterative solvers), находящаяся в свободном доступе по адресу [www.ssisc.org](http://www.ssisc.org), для решения СЛАУ, уже распараллеленная под OpenMP. Она позволила сократить время расчетов в  $\approx 4$  раза по сравнению с вычислениями на одном ядре усиленной рабочей станции. Время вычисления векторных полей скорости и напряженности магнитного поля, фазового потока – расчетов, представленных в п. 3.1.1, 3.1.2, 3.2.1, 3.2.2 не превысило 35 секунд. Время расчетов поля температур для слоистого течения в неограниченном цилиндре составило  $\approx 6$  часов, для неограниченного коаксиального цилиндра –  $\approx 2.8$  часа.

### 3.3.2. Оценка погрешности расчетов поля скоростей и фазового потока

Результаты расчетов поля скоростей и фазового потока для слоистого течения жидкости в неограниченном цилиндре, неограниченном коаксиальном цилиндре сравнивались с аналитическим решением, представленным в пунктах 3.1.1, 3.1.2 и 3.2.1, 3.2.2. Функции Бесселя первого и второго рода целого порядка реализованы в стандарте языка Си в расширении X/Open. Нули функций  $J_0(\rho)$ ,  $J_1(\rho)$ , необходимые для представления аналитического решения в случае слоистого течения жидкости в бесконечном цилиндре, и  $Z_1(\rho)$ ,  $Z_0(\rho)$ , позволяющих описать аналитическое решение в бесконечном коаксиальном цилиндре, находились численно методом золотого сечения и сравнивались с результатами, представленными в [94, 95] и [96] соответственно. Точность вычисленных нулей для  $J_0(\rho)$ ,  $J_1(\rho)$  составляет шесть значащих цифр после запятой с работой [94], а с [95] – четыре, но здесь приводится всего пять значащих цифр для каждого корня. При отношении радиусов  $k=4$  вычисленные нули  $Z_0(\rho)$  сравнивались с [96] и совпали с представленными там первыми пятью значениями.

И для бесконечного цилиндра и для бесконечного коаксиального цилиндра было вычислено 1000 нулей, используемых для вычисления аналитического решения – сумм рядов (3.20), (3.22), (3.23), (3.26) – (3.28) и (3.36), (3.37), (3.39) соответственно.

Точность усеченного разложения в ряд по функциям  $J_0(\rho)$ ,  $J_1(\rho)$  была проверена для функций  $\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)$  и  $\sin \frac{2\pi\rho}{R}$ , по функциям  $Z_1(\rho)$ ,  $Z_0(\rho)$  – для

$$\left(1 - \frac{\rho}{R_1}\right)\left(1 - \frac{\rho}{R_2}\right), \quad R_2 \left( \ln \frac{\rho}{R_1} \cdot \left( \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^{-1} - \frac{\rho - R_1}{R_2 - R_1} \right).$$

Значение нормы  $L^2$  разницы этих функций и их усеченных разложений имеют значащими соответственно одиннадцать и десять нулей после запятой. Интеграл здесь вычислялся методом трапеций с равномерным разбиением отрезка интегрирования с шагом равным  $10^{-4}$ . Вычисление интегралов по времени и по радиальной переменной для нахождения сумм рядов (3.20), (3.22), (3.23), (3.26) (3.36), (3.37), (3.39), позволяющих описать аналитическое решение, также выполнено методом трапеций с равномерным шагом  $10^{-4}$ .

При численном решении радиус цилиндра полагался равным  $R=5$ , радиусы коаксиального цилиндра полагались  $R_1=1$ ,  $R_2=5$ . СЛАУ решалась методом Гаусса-Зейделя.

В табл. 3.1, 3.2 представлены оценки максимальных по радиальной переменной  $\rho$  абсолютной и относительных погрешностей на момент времени  $t=1$  результатов расчетов в случае бесконечного цилиндра и бесконечного коаксиального цилиндра соответственно. Аналитическое решение величин в первых столбцах табл. 3.1 и 3.2 описаны в пунктах 3.1.1, 3.1.2 и 3.2.1 и 3.2.2. Во втором и третьем столбце табл. 3.1, 3.2 приводится максимальная по пространственной переменной абсолютная и относительная погрешности результатов расчетов соответственно

$$\Delta f \stackrel{def}{=} \max_{\rho} |f_{an} - f_{calc}|, \quad \delta f \stackrel{def}{=} \max_{\rho} \frac{|f_{an} - f_{calc}|}{|f_{an}|} \cdot 100\%$$

в сравнении с аналитическим решением, где  $f_{an}$  и  $f_{calc}$  – соответственно аналитическое и рассчитанное значение величины из первого столбца. Разница в порядках относительной погрешности для  $H_z$  по сравнению с  $u_z$ ,  $u_\varphi$  объясняется наличием двух нулей у функции  $H_z$  при  $t=1$ . Анализ табл. 3.1, 3.2 показывает высокую точность результатов расчетов.

Табл. 3.1. Оценка погрешностей расчетов для слоистого течения жидкости в бесконечном цилиндре в сравнении с аналитическим решением при  $t=1$

Величина	$\Delta f$	$\delta f$
$u_z(\rho,1)$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	0.02
$u_\varphi(\rho,1)$	$2 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-3}$
$H_z(\rho,1)$	$5 \cdot 10^{-4}$	0.9
$z(1)$	$5 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-3}$
$\varphi(1)$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	0.03

Табл. 3.2. Оценка погрешностей расчетов для слоистого течения жидкости в бесконечном коаксиальном цилиндре в сравнении с аналитическим решением при  $t=1$

Величина	$\Delta f$	$\delta f$
$u_z(\rho,1)$	$2 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-4}$
$u_\varphi(\rho,1)$	$5 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-3}$
$H_z(\rho,1)$	$5 \cdot 10^{-4}$	0.05
$z(1)$	$2 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-4}$
$\varphi(1)$	$1.0 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-3}$

### 3.3.3. Оценка погрешности расчетов тепловыделения

Аппроксимация конвективно-диффузионного члена, входящего в уравнение (3.15) была выполнена по экспоненциальной схеме, адаптированной для цилиндрической системы координат. Для декартовых координат эта схема для метода контрольных объемов описана в [93]. СЛАУ решалась методом сопряженных градиентов, реализованным в сторонней библиотеке LIS.

Проведены тестовые расчеты для оценки точности вычисления по экспоненциальной схеме, аппроксимирующей конвективно-диффузионный член уравнения (3.15). Для этого рассмотрено два вспомогательных уравнения. Первое (3.41) использовалось для оценки точности расчетов поля температур для слоистого течения в цилиндре, второе (3.42) – в коаксиальном цилиндре.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{l}{\pi} \frac{\partial T}{\partial z} = \Delta T - \left( \left( \frac{\gamma_1}{R} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \right) J_1 \left( \gamma_1 \frac{\rho}{R} \right) \cos \left( \pi \frac{z}{l} \right) (\cos \varphi - \sin \varphi) + \\ + J_1 \left( \gamma_1 \frac{\rho}{R} \right) \left( \exp \left\{ -t \left( \left( \frac{\gamma_1}{R} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \right) \right\} - 1 \right) \cdot \\ \cdot \left[ \cos \left( \pi \frac{z}{l} \right) (\cos \varphi - \sin \varphi) - \sin \left( \pi \frac{z}{l} \right) (\cos \varphi + \sin \varphi) \right]. \quad (3.41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{L}{\pi} \frac{\partial T}{\partial z} = \Delta T + Z_1 \left( \gamma_1 \frac{\rho}{R_1} \right) \left( \exp \left\{ -t \left( \left( \frac{\gamma_1}{R_1} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \right) \right\} - 1 \right) \cdot \\ \cdot \left[ \cos \left( \pi \frac{z}{L} \right) (\cos \varphi - \sin \varphi) - \sin \left( \pi \frac{z}{L} \right) (\cos \varphi + \sin \varphi) \right] - \\ - \left( \left( \frac{\gamma_1}{R_1} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \right) Z_1 \left( \gamma_1 \frac{\rho}{R_1} \right) \cos \left( \pi \frac{z}{L} \right) (\cos \varphi - \sin \varphi), \quad (3.42) \end{aligned}$$

В уравнении (3.42)

$$Z_1 \left( \gamma_1 \frac{\rho}{R_1} \right) \stackrel{def}{=} J_1 \left( \gamma_1 \frac{\rho}{R_1} \right) Y_1'(\gamma_1 k) - J_1'(\gamma_1 k) Y_1 \left( \gamma_1 \frac{\rho}{R_1} \right),$$

$\gamma_1$  – корень  $J_1'(\gamma_1) Y_1'(\gamma_1 k) - J_1'(\gamma_1 k) Y_1'(\gamma_1) = 0$ ,  $k = \frac{R_2}{R_1}$ . Аналитическое решение

задачи (3.41), (3.29) имеет вид

$$J_1 \left( \gamma_1 \frac{\rho}{R} \right) \left( \exp \left\{ -t \left( \left( \frac{\gamma_1}{R} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \right) \right\} - 1 \right) \cos \left( \pi \frac{z}{l} \right) (\cos \varphi + \sin \varphi), \quad (3.43)$$

где  $J_1'(\gamma_1) = 0$ . Аналитическое решение задачи (3.42), (3.33) имеет вид

$$Z_1 \left( \gamma_1 \frac{\rho}{R_1} \right) \left( \exp \left\{ -t \left( \left( \frac{\gamma_1}{R_1} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \right) \right\} - 1 \right) \cos \left( \pi \frac{z}{L} \right) (\cos \varphi + \sin \varphi). \quad (3.44)$$

Отметим, что решения (3.43), (3.44) получено на основе решения уравнения теплопроводности, рассматриваемого в цилиндре и в коаксиальном цилиндре с условиями Неймана на границе, методом разделения переменных.

На рис. 3.14 представлен результат численного решения уравнения (3.41) с начальными и граничными условиями (3.29) для слоистого течения в цилиндре, при этом  $R = 5$ ,  $z \in [0;5]$ . Рис. 3.14а иллюстрирует поле температуры при  $t = 1$  на поверхности цилиндра. Рис. 3.14б иллюстрирует поле температуры при  $t = 1$  в сечении плоскости, образованной осью  $Oz$  и биссектрисой угла  $XOY$ , при этом изоповерхностями выделены области с отличной от нуля температурой.

Аналогично на рис. 3.15 представлен результат численного решения уравнения (3.42) с начальными и граничными условиями (3.29) для слоистого течения в коаксиальном цилиндре, при этом  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 5$ ,  $z \in [0;5]$ . Рис. 3.15а иллюстрирует поле температуры при  $t = 1$  на поверхности цилиндра. Рис. 3.15б иллюстрирует поле температуры при  $t = 1$  в сечении плоскости, образованной осью  $Oz$  и биссектрисой угла  $XOY$ , при этом изоповерхностями выделены области с отличной от нуля температурой.

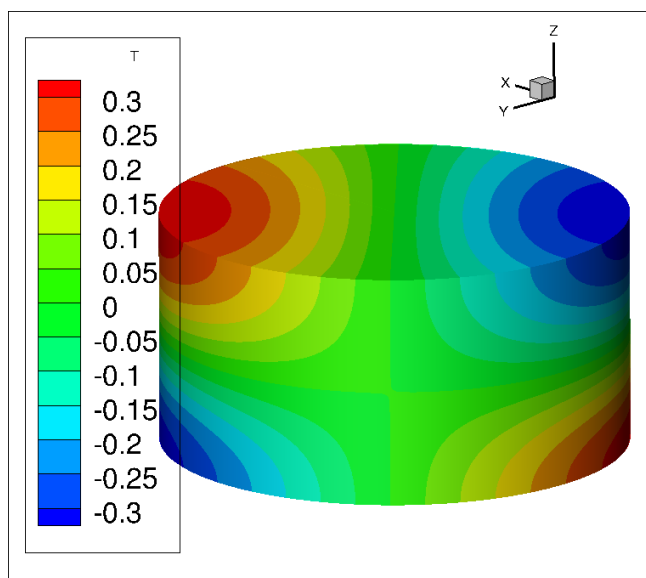


Рис. 3.14 а). Результат тестового расчета поля температуры при  $t=1$  на поверхности цилиндра

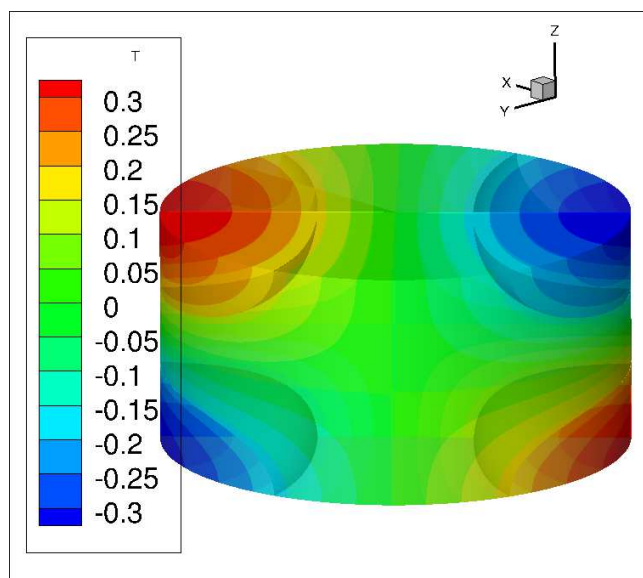


Рис. 3.14 б). Результат тестового расчета поля температуры при  $t=1$  в сечении плоскости, образованной осью  $Oz$  и биссектрисой угла  $XOY$  с изоповерхностями

Погрешность вычисления в сравнении с аналитическим решением (3.43), (3.44) оценивалась максимальной абсолютной величиной  $\delta_{abs}$  и средней относительной  $\delta_{rel}$

$$\delta_{abs} = \max \{|T_{calc} - T_{an}|\}, \quad \delta_{rel} = \frac{1}{V} \int_D \frac{|T_{an} - T_{calc}|}{|T_{an}| + 10^{-14}} \cdot 100\%,$$

где  $T_{an}$  – аналитическое значение температуры,  $T_{calc}$  – вычисленное значение температуры, максимум ищется по всем расчетным точкам,  $V$  – объем цилиндра (коаксиального цилиндра)  $D$ . По итогам расчетов получено, что погрешность расчетов для слоистого течения в цилиндре составляет  $\delta_{abs} = 9 \cdot 10^{-4}$ ,  $\delta_{rel} = 0.6\%$ , а в случае коаксиального цилиндра равна  $\delta_{abs} = 6 \cdot 10^{-4}$ ,  $\delta_{rel} = 0.6\%$ .

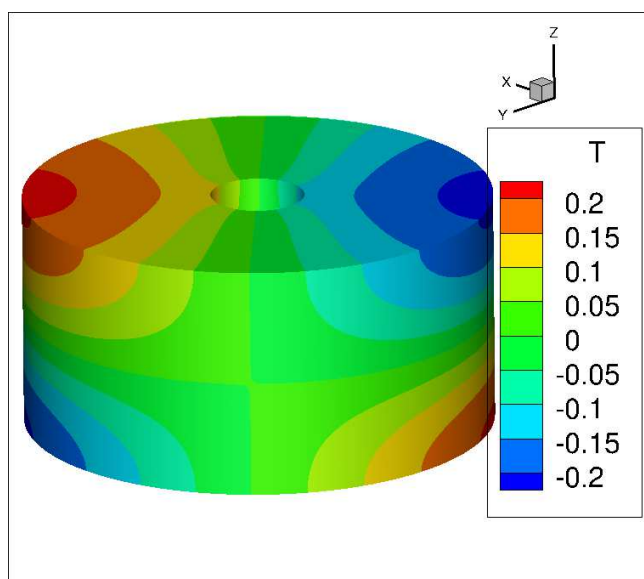


Рис. 3.15 а). Результат тестового расчета поля температуры при  $t=1$  на поверхности коаксиального цилиндра

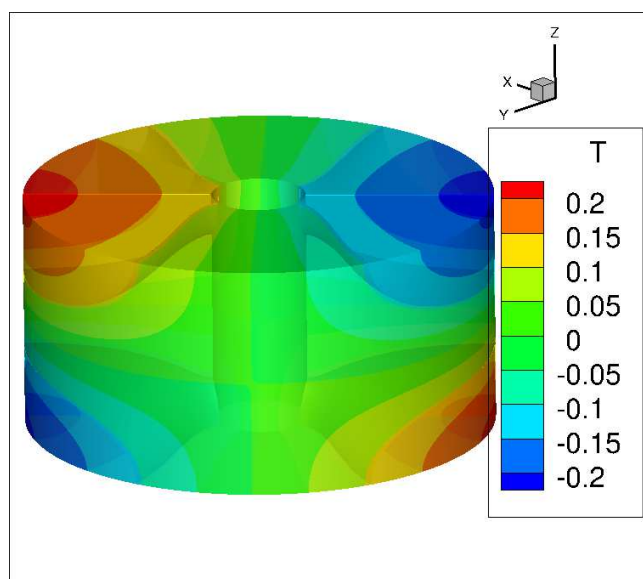


Рис. 3.15 б). Результат тестового расчета поля температуры при  $t=1$  в сечении плоскости, образованной осью  $Oz$  и биссектрисой угла  $XOY$  с изоповерхностями

### Выводы по третьей главе

В этой главе представлены результаты исследования модели слоистого течения вязкой магнитной несжимаемой жидкости в цилиндре, коаксиальном цилиндре, по итогам которого выделен класс точных нестационарных решений уравнений МГД. Разработано программное обеспечение, позволяющее моделировать слоистое течение магнитной жидкости в трубе, коаксиальной трубе, тепловыделение в течении и изменение геометрии области в случае слоистого течения жидкости в результате воздействий на границе области течения и объемного воздействия магнитным полем. Оценка погрешности расчетов показала работоспособность разработанного программного обеспечения.



Отметим, что задача о моделировании течения жидкости в трубе может быть актуальна в связи с исследованием задач транспортировки нефти или газа по трубопроводу. Задача о моделировании тепловыделения в течении жидкости в коаксиальной трубе может быть, также, связана с задачами обеспечения безопасности проведения буровых работ. Повышение температуры циркулирующей жидкости может существенно влиять на работу отдельных узлов бурового оборудования [97].

Аналитическое решение, полученное для компонент вектора скорости и вектора напряженности магнитного поля, имеет представление в виде бесконечного ряда. Для использования в задачах верификации программного обеспечения это неудобно, поскольку в таком случае требуется дополнительная оценка точности представления решения в виде усеченного ряда по сравнению с полным. Поэтому можно поступить при проверке расчетов также, как сделано в главе 2 и в главе 3 в пунктах 3.1.3, 3.2.3 – задать при расчетах в качестве начального и граничного условия спроецированные на соответствующие подобласти расширенного фазового пространства первые члены рядов, описывающих аналитическое решение.

## ГЛАВА 4. ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ СПЕКТРА КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА КОМПАКТНЫХ ЧАСТИЧНО СИММЕТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

По материалам главы опубликованы работы [1, 8, 12].

### Введение

В данной главе рассматривается новый итерационный алгоритм для нахождения спектра квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов. Параграф 4.1 посвящен его теоретическому обоснованию. Его численная апробация проводится при решении задачи о резонансной потере устойчивости трубы с протекающей магнитной жидкостью (см. параграф 4.2). Под численной апробацией понимается не только верификация и оценка погрешностей (пункт 4.2.5), но также демонстрация наличия класса прикладных задач (пункт 4.2.1), для решения которых может быть использован данный алгоритм (пункт 4.2.2).

Подчеркнем отличие представленного в этой главе итерационного алгоритма от имеющихся популярных алгоритмов нахождения спектра квадратичного пучка, активно развиваемых в настоящее время и кратко освещенных в параграфе 1.3.

Теоретическое обоснование рассматриваемого здесь итерационного алгоритма проводится в терминах компактных частично симметричных операторов, определенных в гильбертовом пространстве, т.е. бесконечномерном полном пространстве со скалярным произведением. Алгоритмы, освещенные в параграфе 1.3, обосновываются в терминах матриц конечного порядка. В таком случае любая симметричная матрица, рассматриваемая в гильбертовом пространстве, будет компактным самосопряженным оператором, а множество таких матриц отнюдь не исчерпывает множество компактных частично симметричных операторов.

Если говорить о численной стороне итерационного алгоритма, представленного здесь, то отметим, что популярные на сегодняшний день

алгоритмы нахождения спектра квадратичного пучка операторов подразумевают линейризацию исходной задачи (см. параграф 1.3). При численном решении, рассматриваемым в этой главе итерационным алгоритмом, данный подход не использовался.

## 4.1. Теоретическое обоснование

### 4.1.1 Предварительные сведения и замечания

Для квадратичного пучка  $\lambda \varepsilon B + \lambda^2 A$  компактных в гильбертовом пространстве  $H$  операторов рассматривается спектральное уравнение

$$\varphi = \lambda \varepsilon B + \lambda^2 A \varphi, \quad (4.1)$$

где  $A, B$  – компактные операторы,  $\lambda$  – спектральный параметр,  $\varepsilon$  – некоторое заданное число  $0 \leq \varepsilon < p$ ,  $p$  – параметр, зависящий от операторов  $A, B$ .

Действительный спектр этого уравнения ищется на основе итерационного алгоритма

$$y_{k+1} = \sigma_k \varepsilon B y_k + \sigma_k^2 A y_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad y_1 = A h, \quad h \in H, \quad (4.2)$$

где  $\sigma_k$  – один из действительных корней уравнения

$$\sigma_k^4 \|A y_k\|^2 + 2 \sigma_k^3 \varepsilon (A y_k, B y_k) + \sigma_k^2 \varepsilon^2 \|B y_k\|^2 - \|y_k\|^2 = 0. \quad (4.3)$$

Предполагается, что функции  $\varphi, h, y_k$  зависят от одной или нескольких переменных, операторы  $A, B$  – интегральные,  $\|h\| \neq 0$ ,  $\ker A = 0$ . Интегральное уравнение (4.1) получено на основе спектрального уравнения в дифференциальной форме. Существует множество функций  $\{\psi_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n \geq 1$ , для которых выполняются условия

$$(\psi_i, A v) = 0, \quad (\psi_i, B v) = 0, \quad \forall v \in H \quad (4.4)$$

Условия (4.4) эквиваленты краевым условиям для дифференциальных спектральных уравнений.

Вводится множество  $E$ ,  $H = E \oplus \text{span} \{ \psi_i \}$ , где  $\text{span} \{ \psi_i \}$  – конечномерное подпространство  $H$ , натянутое на вектора  $\psi_i$ , и предполагается

выполнение условий  $A: H \rightarrow E$ ,  $B: H \rightarrow E$ . Рассматриваются частично симметричные операторы  $A, B$

$$(u, Av) = (Au, v), \quad (u, Bv) = (Bu, v), \quad \forall u, v \in E, \quad (4.5)$$

$$\forall u \in H \setminus E \quad \exists v_1 \in E: (u, Av_1) \neq (Au, v_1), \quad \exists v_2 \in E: (u, Bv_2) \neq (Bu, v_2) \quad (4.6)$$

Соотношение (4.6) действительно выполняется при выполнении условий (4.4), если за  $v_1$  взять  $A\psi_i$ , а за  $v_2$  взять  $B\psi_i$ . В этом случае  $(u, Av_1) = 0$  и  $(u, Bv_2) = 0$  на основе (4.4), а  $(v_1, Au) = (A\psi_i, A\psi_i) = \|A\psi_i\|^2 \neq 0$ ,  $(v_2, Bu) = (B\psi_i, B\psi_i) = \|B\psi_i\|^2 \neq 0$ .

Кроме того, что операторы  $A, B$  частично симметричны, предполагается, что оператор  $A$  положительный в  $E$ :  $(v, Av) > 0$ ,  $\forall v \in E$ . Понятие частично симметричных операторов (4.5), (4.6) введены здесь в более удобной для проверки форме, чем в [98].

При  $\varepsilon = 1$  теория уравнения (4.1) и итерационный алгоритм (4.2), (4.3) рассмотрены в [98]. Обобщение на случай, когда  $\varepsilon \neq 1$  связано с необходимостью получения более удовлетворительных результатов по нахождению критерия сходимости итерационного алгоритма. В [98] для этого использовался дополнительно сконструированный оператор  $S$ , зависящий от операторов  $A, B$ , а в качестве критерия сходимости выбиралось условие знакоопределенности этого оператора  $S$ . Такой критерий неудобен с практической точки зрения, т. к. значительно усложняет процедуру численного решения задачи. Кроме того, этот критерий неудовлетворителен и с теоретической точки зрения, т. к. поведение алгоритма носит частично предсказуемый характер. Если для оператора  $S$  не выполняется условие знакоопределенности, то ничего сказать о сходимости итерационного алгоритма не представляется возможным.

Представленный здесь итерационный алгоритм (4.2), (4.3), как и алгоритмы нахождения спектра одного компактного частично симметричного оператора, линейного пучка таких операторов, описанные в работах профессора В. И. Тараканова вместе со своими учениками [98 – 102], являются развитием идей, заложенных в статье Келлога О., опубликованной на немецком языке в 1922г. и неоднократно воспроизводимая на русском языке, например [103, 104].

Введение подобных алгоритмов, реализуемых в гильбертовом пространстве, связано с возможностью перехода от спектральной задачи в дифференциальной постановке к спектральной задаче в интегральной форме. При этом решается задача получения уравнений с компактными операторами.

#### 4.1.2 Доказательство сходимости

Прежде всего докажем ряд вспомогательных утверждений относительно итерационного алгоритма (4.2) – (4.3).

**Утверждение 4.1.** *Алгебраическое уравнение относительно параметра  $\sigma_k$  имеет, по крайней мере, два действительных корня  $\sigma^+$  и  $\sigma^-$ , один из которых положителен, а другой отрицателен.*

**Доказательство.** Функция  $f(x) \equiv x^4 \|Ay_k\|^2 + 2x^3 \varepsilon (Ay_k, By_k) + x^2 \varepsilon^2 \|By_k\|^2 - \|y_k\|^2$  является непрерывной и для нее справедливы соотношения  $f(x) < 0$  и  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ . Тогда, по крайней мере, существуют два действительных корня, один из которых положителен, а другой отрицателен.

Ради краткости, будем называть итерационный алгоритм с положительным корнем  $\sigma^+$  положительным итерационным алгоритмом, а с отрицательным корнем  $\sigma^-$  — отрицательным итерационным алгоритмом. Если имеется два положительных или два отрицательных корня, то берется наименьший по модулю.

**Утверждение 4.2** *На первой итерации выполняется неравенство*

$$\|y_1\|^2 - \varepsilon \sigma_1^2(\varepsilon) \|By_1\|^2 \geq \|y_1\|^2 \left[ 1 - \varepsilon^2 \sigma_1^2(\varepsilon) \|B\|^2 \right] > 0, \quad (4.7)$$

$$\forall \varepsilon \in \{0 \leq \varepsilon < p^+\}, \quad \forall \varepsilon \in \{0 \leq \varepsilon < p^-\}, \quad (4.8)$$

где  $p^+$ ,  $p^-$  относятся к положительному и отрицательному итерационным алгоритмам соответственно и находятся по формуле

$$p = \frac{\|Ay_1\|}{\sqrt{\|B\|}} \left\{ \mp (Ay_1, By_1) + \sqrt{(Ay_1, By_1)^2 + \|Ay_1\|^2 [\|B\|^2 \|y_1\|^2 - \|By_1\|^2]} \right\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.9)$$

при этом выполняются неравенства  $p^+ > 0$ ,  $p^- > 0$ .

**Доказательство.** Функция  $\varphi_1(\varepsilon) = 1 - \varepsilon^2 \sigma_1^2(\varepsilon) \|B\|^2$  непрерывна по  $\varepsilon$  и при  $\varepsilon = 0$  принимает значение  $\varphi_1(0) = 1$ . Пусть  $p^+$ ,  $p^-$  — первые корни уравнений  $\varphi_1(p^+) = 0$ ,  $\varphi_1(p^-) = 0$ , тогда они удовлетворяют соотношению

$$p^\pm \sigma_1^\pm \|B\| = \pm 1, \quad (4.10)$$

а на промежутке (4.8) выполняется (4.7). На первой итерации выполняется соотношение (4.3), имеющее следующий вид

$$|\sigma_1^\pm|^4 \|Ay_1\|^2 + 2|\sigma_1^\pm|^2 \sigma_1^\pm p^\pm (Ay_1, By_1) + |\sigma_1^\pm|^2 |p^\pm|^2 \|By_1\|^2 - \|y_1\|^2 = 0. \quad (4.11)$$

Исключая из (4.10), (4.11) величину  $p^\pm$ , можно получить квадратное уравнение относительно  $|\sigma_1^\pm|^2$ :

$$|\sigma_1^\pm|^4 \pm 2|\sigma_1^\pm|^2 \frac{(Ay_1, By_1)}{\|Ay_1\|^2 \|B\|} + \frac{1}{\|Ay_1\|^2} \left\{ \frac{\|By_1\|^2}{\|B\|^2} - \|y_1\|^2 \right\} = 0. \quad (4.12)$$

Из (4.12) находится  $|\sigma_1^\pm|^2$ :

$$|\sigma_1^\pm|^2 = \frac{1}{\|B\| \|Ay_1\|^2} \left\{ \mp (Ay_1, By_1) + \sqrt{(Ay_1, By_1)^2 + \|Ay_1\|^2 [\|B\|^2 \|y_1\|^2 - \|By_1\|^2]} \right\}. \quad (4.13)$$

В силу неравенства Коши под корнем стоит положительная величина и, кроме этого, имеет место неравенство

$$\sqrt{(Ay_1, By_1)^2 + \|Ay_1\|^2 [\|B\|^2 \|y_1\|^2 - \|By_1\|^2]} > |(Ay_1, By_1)|,$$

поэтому правая часть равенства (4.13) положительна. На основе (4.13), имея ввиду (4.10), получается искомое выражение (4.9).

В некоторых случаях может быть удобным рассматривать пересечение интервалов допустимых значений параметра  $\varepsilon$  для положительного и отрицательного итерационных алгоритмов — интервал  $\{0 \leq \varepsilon < p\}$ , тогда в качестве оценки величины  $p$  следует принять величину

$$p = \frac{\|Ay_1\|}{\sqrt{\|B\|}} \left\{ |(Ay_1, By_1)| + \sqrt{(Ay_1, By_1)^2 + \|Ay_1\|^2 [\|B\|^2 \|y_1\|^2 - \|By_1\|^2]} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.14)$$

**Теорема 4.1.** Для каждого  $\varepsilon \in \{0 \leq \varepsilon < p\}$  и произвольных, компактных частично симметричных операторов  $A, B$ , из которых  $A$  является положительным и имеющим нулевое ядро, существует одно положительное и одно отрицательное значение  $\lambda^+, \lambda^-$  спектрального параметра в спектральных уравнениях

$$\varphi^+ = \lambda^+ \varepsilon B \varphi + |\lambda^+|^2 A \varphi^+, \quad (4.15)$$

$$\varphi^- = \lambda^- \varepsilon B \varphi + |\lambda^-|^2 A \varphi^-, \quad (4.16)$$

а итерационный алгоритм (4.2), (4.3) сходится к решению либо уравнения (4.15), либо уравнения (4.16) в смысле

$$|\sigma_{k+1}| < |\sigma_k| \quad \forall k \in \{1, 2, 3, \dots\}, \quad (4.17)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^+ = \lambda^+, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^- = \lambda^-,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k^+ - \varphi^+\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k^- - \varphi^-\| = 0,$$

если итерационный процесс реализуется отдельно для положительного значения корня  $\sigma_k^+$  и для отрицательного значения корня  $\sigma_k^-$  уравнения (4.3), а в качестве значения  $p$  берется выражение (4.14).

**Доказательство.** При доказательстве индексы  $\pm$  в элементах  $y_k^\pm$  опускаются, при этом подразумевается, что все соотношения для  $y_k$  справедливы как для  $y_k^+$ , так и для  $y_k^-$ . Умножая скалярно левую и правую части равенства (4.2) сами на себя, можно получить  $\|y_{k+1}\|^2 = \sigma_k^4 \|Ay_k\|^2 + 2\sigma_k^3 \varepsilon (Ay_k, By_k) + \sigma_k^2 \varepsilon^2 \|By_k\|^2$ . Откуда, с учетом (4.3), следует

$$\|y_{k+1}\|^2 = \|y_k\|^2 = \|y_{k-1}\|^2 = \dots = \|y_1\|^2, \quad \forall k \in \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (4.18)$$

В уравнении (4.2), увеличивая индекс  $k$  на единицу, получаем

$$y_{k+2} = \sigma_{k+1} \varepsilon B y_{k+1} + \sigma_{k+1}^2 A y_{k+1}. \quad (4.19)$$

Умножим скалярно (4.2) на  $y_{k+1}$ , а уравнение (4.19) на  $y_k$  и вычтем из первого равенства второе, с учетом (4.18) и частичной симметричности операторов  $A, B$ , получим

$$\|y_{k+1}\|^2 - (y_{k+2}, y_k) \equiv \frac{\|y_{k+2} - y_k\|^2}{2} = (\sigma_k - \sigma_{k+1})\varepsilon(y_{k+1}, By_k) + (\sigma_k^2 - \sigma_{k+1}^2)(y_{k+1}, Ay_k). \quad (4.20)$$

Умножая скалярно (4.2) на  $\varepsilon By_k$ , затем на  $Ay_k$  получим

$$\varepsilon(y_{k+1}, By_k) = \sigma_k \varepsilon^2 \|By_k\|^2 + \varepsilon \sigma_k^2 (Ay_k, By_k), \quad (4.21)$$

$$(y_{k+1}, Ay_k) = \varepsilon \sigma_k (Ay_k, By_k) + \varepsilon \sigma_k^2 \|Ay_k\|^2. \quad (4.22)$$

Из равенства (4.3) следует

$$\sigma_k \varepsilon (Ay_k, By_k) = \frac{1}{2\sigma_k^2} \left[ \|y_k\|^2 - \sigma_k^2 \varepsilon^2 \|By_k\|^2 - \sigma_k^2 \|Ay_k\|^2 \right]. \quad (4.23)$$

Подставляя (4.23) в (4.21), (4.22), а затем получаемые выражения  $\varepsilon(y_{k+1}, By_k)$  и  $(y_{k+1}, Ay_k)$  в (4.20) и учитывая равенство  $\sigma_k^2 - \sigma_{k+1}^2 = (\sigma_k - \sigma_{k+1})(2\sigma_k + \sigma_{k+1} - \sigma_k)$ , вместо (4.20) получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|y_{k+2} - y_k\|^2 &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k} \right) \left[ \|y_k\|^2 + \sigma_k^2 \varepsilon^2 \|By_k\|^2 - \sigma_k^4 \|Ay_k\|^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k} \right) \left( 2 - \left( 1 - \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k} \right) \right) \left[ \|y_k\|^2 - \sigma_k^2 \varepsilon^2 \|By_k\|^2 + \sigma_k^4 \|Ay_k\|^2 \right] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k} \right) \left[ 3 \|y_k\|^2 - \sigma_k^2 \varepsilon^2 \|By_k\|^2 + \sigma_k^4 \|Ay_k\|^2 \right] - \\ &- \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k} \right)^2 \left[ \|y_k\|^2 - \sigma_k^2 \varepsilon^2 \|By_k\|^2 + \sigma_k^4 \|Ay_k\|^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Окончательно (4.24) записывается в виде

$$\begin{aligned} \|y_{k+2} - y_k\|^2 + \left( 1 - \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k} \right) \left[ \|y_k\|^2 - \sigma_k^2 \varepsilon^2 \|By_k\|^2 + \sigma_k^4 \|Ay_k\|^2 \right] = \\ = \left( 1 - \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k} \right) \left[ 3 \|y_k\|^2 - \sigma_k^2 \varepsilon^2 \|By_k\|^2 + \sigma_k^4 \|Ay_k\|^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

На основании утверждения 4.2 для первой итерации, когда  $k=1$ , из (4.25) следует  $1 - \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k} > 0$ , что можно записать в виде  $|\sigma_2| < |\sigma_1|$ . Тогда для второй итерации будет выполняться условие  $|\sigma_3| < |\sigma_2|$ . Используя метод математической индукции,



получим для любого номера  $k$  неравенство (4.7), с учетом (4.18) и последовательно выполняемых неравенств  $|\sigma_{k+1}| < |\sigma_k|$  соотношение  $\|y_k\|^2 - \varepsilon^2 \sigma_k^2(\varepsilon) \|By_k\|^2 > 0$ ,  $\forall k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . Тогда для любого номера  $k$  на основании (4.25) следует неравенство (4.17).

Бесконечная числовая последовательность  $\{|\sigma_k|\}$  является монотонно убывающей и ограниченной снизу нулем, поэтому она имеет предел  $\lambda$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\sigma_k| = \lambda. \quad (4.26)$$

При этом можно показать, что  $\lambda > 0$ . Допустим противное, что  $\lambda = 0$ , тогда переходя к пределу в выражении (4.3) при  $k \rightarrow \infty$  и, учитывая (4.18), получим  $\|y_1\|^2 = 0$ , что противоречит постановке задачи. Таким образом, действительно  $\lambda > 0$ , что означает выполнение для предельных соотношений модулей  $|\lambda^+|$ ,  $|\lambda^-|$  неравенств  $|\lambda^+| > 0$ ,  $|\lambda^-| > 0$ .

Из сходимости монотонно убывающей последовательности  $|\sigma_k|$  следует  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k}\right) = 0$ , тогда из (4.25) получается предельное соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_{k+2} - y_k\|^2 = 0. \quad (4.27)$$

Вычитая из равенства (4.2) равенство (4.19), можно получить, с учетом обозначения  $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ , соотношение  $\Delta y_k + \lambda \varepsilon B \Delta y_k + \lambda^2 A \Delta y_k \equiv$

$$\equiv y_{k+2} - y_k + (\sigma_k - \lambda) \varepsilon B y_k - (\sigma_{k+1} - \lambda) \varepsilon B y_{k+1} + (\sigma_k^2 - \lambda^2) A y_k - (\sigma_{k+1}^2 - \lambda^2) A y_{k+1}.$$

Переходя в этом соотношении к пределу при  $k \rightarrow \infty$  с учетом (4.26), (4.27) получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta y_k + \lambda \varepsilon B \Delta y_k + \lambda^2 A \Delta y_k\| = 0.$$

В силу компактности операторов  $A$ ,  $B$  множество элементов  $\{y_k\}$  будет компактным, тогда будет компактным и множество элементов  $\{\Delta y_k\}$ . Из компактности этих множеств следует существование бесконечной

подпоследовательности  $\{\Delta y_{k_j}\} \subset \{\Delta y_k\}$  и элемента  $f \in H$ , для которого выполняется предельное соотношение

$$\lim_{k_j \rightarrow \infty} \|\Delta y_{k_j} - f\| = 0. \quad (4.28)$$

В этом случае будут справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{k_j \rightarrow \infty} \|\Delta y_{k_j} + \lambda \varepsilon B \Delta y_{k_j} + \lambda^2 A \Delta y_{k_j}\| &= 0, \\ \|f + \lambda \varepsilon B f + \lambda^2 A f\| &= 0, \\ f + \lambda \varepsilon B f + \lambda^2 A f &= 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Умножая скалярно (4.29) на  $f$ , получим

$$\|f\|^2 + \lambda \varepsilon (f, Bf) + \lambda^2 (f, Af) = 0. \quad (4.30)$$

Так как  $|\lambda| < |\sigma_1|$  в силу монотонного убывания последовательности  $|\sigma_k|$ , то из утверждения 4.2 и формулы (4.7) следует неравенство

$$\|f\|^2 + \lambda \varepsilon (f, Bf) \geq \|f\|^2 - |\lambda| \varepsilon (f, Bf) \geq \|f\|^2 (1 - |\lambda| \varepsilon (f, Bf)) \geq 0. \quad (4.31)$$

В силу положительности оператора  $A$  из (4.30), (4.31) следует  $(f, Af) = 0$ , а так как по предположению теоремы  $\ker A = 0$ , то тогда  $f = 0$  и следует из (4.28)

$$\lim_{k_j \rightarrow \infty} \|\Delta y_{k_j}\| = 0. \quad (4.32)$$

Покажем, что справедливым будет более сильное соотношение чем соотношение (4.32)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta y_k\| = 0. \quad (4.33)$$

Доказательство соотношения (4.33) проводится от противного. Предположим, что (4.33) не выполняется, тогда существует подпоследовательность  $\{\Delta y_{k_j}\} \subset \{\Delta y_k\}$ , удовлетворяющая неравенству

$$\|y_{k_i}\| \geq \varepsilon_1 > 0, \quad \forall k_i \quad (4.34)$$

и в силу компактности элементов  $\Delta y_{k_i}$ , будет существовать элемент  $\psi \in H$ , для которого выполняется  $\lim_{k_i \rightarrow \infty} \|\Delta y_{k_i} - \psi\| = 0, \forall k_i$ ,

$$\psi + \lambda \varepsilon B\psi + \lambda^2 A\psi = 0. \quad (4.35)$$

Скалярно умножая (4.35) на  $\psi$ , получим  $\|\psi\|^2 + \lambda \varepsilon (\psi, B\psi) + \lambda^2 (\psi, A\psi) = 0$ . Из неравенства (4.7) и утверждения 4.2 следует  $\|\psi\|^2 + \lambda \varepsilon (\psi, B\psi) \geq 0$ . Из этого неравенства и (4.35) получаем  $(\psi, A\psi) = 0$ ,  $\psi = 0$  и  $\lim_{k_i \rightarrow \infty} \|\Delta y_{k_i}\| = 0$ , но это противоречит предложению (4.34), следовательно оно неверно.

В силу компактности множества  $\{y_k\}$  существует  $\varphi \in H$  и подпоследовательность  $\{\Delta y_{k_i}\} \subset \{\Delta y_k\}$  такая, что выполняется предельное соотношение

$$\lim_{k_i \rightarrow \infty} \|y_{k_i} - \varphi\| = 0. \quad (4.36)$$

Можно доказать также как доказывалось, по аналогии, что не только выполняется предельное соотношение (4.32), но и более сильное предельное соотношение (4.33), выполнимость более сильного соотношения, чем (4.36)

$$\lim_{k_i \rightarrow \infty} \|y_{k_i} - \varphi\| = 0. \quad (4.37)$$

Используя запись уравнения (4.2) в виде  $y_k + \Delta y_k = \sigma_k \varepsilon B y_k + \sigma_k^2 A y_k$  и переходя в нем к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , с учетом соотношений (4.26), (4.33) получим, что элемент  $\varphi$  удовлетворяет уравнению

$$\varphi = \lambda \varepsilon B\varphi + \lambda^2 A\varphi. \quad (4.38)$$

Соотношения (4.37), (4.38) являются в развернутом виде соотношениями (4.15), (4.16) теоремы, что и требовалось доказать.

Отметим, что доказательство данной теоремы похоже на доказательство, приведенное в [98] для квадратичного пучка операторов при  $\varepsilon = 1$ , при этом главное отличие основывается на утверждении 4.2.

**Замечание 4.1.** Выводом теоремы 1 не является тот факт, что собственные функции  $\varphi^+$ ,  $\varphi^-$  спектральных уравнений (4.15), (4.16) линейно независимы. Имея ввиду дополнительные свойства оператора  $B$ , можно получить как линейно независимые собственные функции, так и линейно зависимые.

### 4.1.3 Доказательство полноты системы собственных функций

Далее рассмотрим итерационный алгоритм для нахождения всего множества действительных собственных чисел и собственных функций квадратичного пучка операторов. Для этого будет рассматривать тот же итерационный алгоритм (4.2), (4.3), только уже с модифицированными операторами  $A_j, B_j, j = 1, 2, 3, \dots$ , который позволяет найти следующие собственные числа  $\lambda_j$  и нормированные собственные функции  $\varphi_j : \|\varphi_j\| = 1$ . Модифицированные операторы  $A_j, B_j$  находятся по рекуррентным соотношениям

$$A_{j+1}u = A_j u - \varphi_j(\varphi_j, A_j u), \quad B_{j+1}u = B_j u - \varphi_j(\varphi_j, B_j u), \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (4.39)$$

Операторы  $A_j, B_j$  отображают множества  $E_j \rightarrow E_{j+1}, E_j = E_{j+1} \oplus \text{span}\{\varphi_j\}$ , при этом справедливо вложение  $E_{j+1} \subset E_j \subset \dots \subset E$ . Рекуррентное соотношение (4.39) реализуется при начальном условии

$$A_1 u \equiv A u, \quad B_1 u \equiv \varepsilon B u, \quad \varphi_1 \equiv \varphi. \quad (4.40)$$

Очередным итерационным циклом будем называть каждое повторение итерационного алгоритма и будем нумеровать его индексом  $j$ . Начальная итерация в каждом итерационном цикле начинается с функции

$$y_j(1) = \frac{Ah - \sum_{m=1}^{j-1} \varphi_m(Ah, \varphi_m)}{\left\| Ah - \sum_{m=1}^{j-1} \varphi_m(Ah, \varphi_m) \right\|}. \quad (4.41)$$

Здесь целочисленный параметр в скобках указывает на номер итерации, а индекс  $j$  — на номер итерационного цикла. В каждом итерационном цикле  $j$  в качестве предельных соотношений получаются

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_j(k) = \lambda_j, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_j(k) = \varphi_j,$$

где множество  $\{\lambda_j\}$  является множеством собственных чисел уравнения

$$\varphi_j = \varepsilon \lambda_j B \varphi_j + \lambda_j^2 A \varphi_j. \quad (4.42)$$

Собственные числа  $\lambda_j$  и собственные функции  $\varphi_j$  соответствуют  $\lambda_j^+$ ,  $\varphi_j^+$  или  $\lambda_j^-$ ,  $\varphi_j^-$ . Если некоторому собственному числу соответствуют несколько собственных функций, то тогда данное собственное значение  $\lambda_j$  повторяется с разными номерами  $j$  столько раз сколько ему принадлежит собственных функций  $\varphi_j$ . Таким образом, каждое собственное число  $\lambda_j$  и собственную функцию  $\varphi_j$  можно найти из очередного итерационного цикла.

**Теорема 4.2.** 1. Существует бесконечное множество действительных собственных чисел  $\lambda_j$  и соответствующих собственных функций  $\varphi_j$ , которые представляют полную ортонормированную систему на множестве  $E \subset H$

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \{1, i = j; 0, i \neq j\}.$$

Собственные числа и собственные функции удовлетворяют одному и тому же уравнению (4.42) и находятся последовательно путем реализации итерационного алгоритма (4.2), (4.3) с модифицированными операторами  $A_j, B_j, j \in \mathbb{N}$ .

2. Собственные числа  $|\lambda_j|$  неограниченно растут с ростом номера  $j$ , причем существует нижняя граница собственных чисел, больше нуля. Существуют двусторонние оценки каждого числа  $|\lambda_j|$ , которые растут с ростом номера  $j$ , причем нижняя оценка растет монотонно  $0 < \alpha_j \leq |\lambda_j| \leq \beta_j, \alpha_{j+1} \geq \alpha_j$ .

Собственные числа  $|\lambda_j|$  представляют почти упорядоченное множество в следующем смысле. Для любого номера  $i \geq 1$  существует число  $t_* \equiv t_*(i) \geq 1$ , такое, что если произвести перенумерацию собственных чисел на промежутке  $1 \leq j \leq i$ , то они будут меньше всех собственных чисел, определенных на промежутке  $i < j < \infty$ . Число  $t_*$  находится из условия, при котором неравенство  $\alpha_{i+t_*} < \beta_i$  меняется на неравенство  $\beta_i < \alpha_{i+t_*}$ .

**Доказательство.** На основании начальных условий (4.40) за первый итерационный цикл можно взять итерационный цикл (4.2), (4.3), а для него справедливы все результаты теоремы 4.1 и дополнительный результат  $\|\varphi_j\| = 1$ .

Рассмотрим второй итерационный цикл, который можно записать, вводя операторы  $A_2, B_2$  и учитывая начальное условие (4.41) для  $j=2$ , в виде аналогичном уравнениям (4.1) – (4.3)

$$y_2 = \lambda_2 \varepsilon B_2 y_2 + \lambda_2^2 A_2 y_2, \quad y_2 \in E_2, \quad E \equiv E_2 \oplus \text{span}\{\varphi_1\}, \quad (4.43)$$

$$y_2(k+1) = \sigma_2(k) \varepsilon B_2 y_2(k) + \sigma_2^2(k) A_2 y_2(k), \quad (4.44)$$

$$\sigma_2^4(k) \|A_2 y_2(k)\|^2 + 2\sigma_2^3(k) \varepsilon (A_2 y_2(k), B_2 y_2(k)) + \sigma_2^2(k) \varepsilon^2 \|B_2 y_2(k)\|^2 - \|y_2(k)\|^2 = 0. \quad (4.45)$$

Поэтому для итерационного алгоритма (4.44), (4.45) справедливы все результаты теоремы 4.1 и, кроме того, следующие дополнительные результаты  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_2(k) = \varphi_2$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_2(k) = \lambda_2, \quad \|\varphi_2\| = 1. \quad \text{На основании (4.39) при } j=2 \text{ выполняются}$$

$$(\varphi_1, A_2 y_2(k)) = 0, \quad (\varphi_1, B_2 y_2(k)) = 0, \text{ тогда из (4.18) следует при предельном переходе}$$

$$k \rightarrow \infty \quad (\varphi_2, \varphi_1) = 0, \quad \|\varphi_2\|^2 = 1. \quad \text{На основании предельных соотношений}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_2 y_2(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} A y_2(k), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} B_2 y_2(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} B y_2(k) \text{ получается выполнение не}$$

только соотношений (4.43), но и уравнения  $\varphi_2 = \lambda_2 \varepsilon B \varphi_2 + \lambda_2^2 A \varphi_2$ .

Рассмотрим третий итерационный цикл, который можно записать, вводя операторы  $A_3, B_3$  и учитывая начальное условие (4.41) для  $j=3$ , в виде аналогичном уравнениям (4.1)–(4.3)

$$y_3 = \lambda_3 \varepsilon B_3 y_3 + \lambda_3^2 A_3 y_3, \quad y_3 \in E_3, \quad E \equiv E_3 \oplus \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2\}, \quad (4.46)$$

$$y_3(k+1) = \sigma_3(k) \varepsilon B_3 y_3(k) + \sigma_3^2(k) A_3 y_3(k), \quad (4.47)$$

$$\sigma_3^4(k) \|A_3 y_3(k)\|^2 + 2\sigma_3^3(k) \varepsilon (A_3 y_3(k), B_3 y_3(k)) + \sigma_3^2(k) \varepsilon^2 \|B_3 y_3(k)\|^2 - \|y_3(k)\|^2 = 0. \quad (4.48)$$

Поэтому для итерационного алгоритма (4.47), (4.48) справедливы все результаты теоремы 4.1 и, кроме того, следующие дополнительные результаты  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_3(k) = \varphi_3$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_3(k) = \lambda_3, \quad \|\varphi_3\| = 1. \quad \text{На основании (4.39) при } j=3 \text{ выполняются}$$

$$(\varphi_1, A_3 y_3(k)) = 0, \quad (\varphi_1, B_3 y_3(k)) = 0, \quad (\varphi_2, A_3 y_3(k)) = 0, \quad (\varphi_2, B_3 y_3(k)) = 0, \text{ тогда из (4.18)}$$

следует при предельном переходе  $k \rightarrow \infty$   $(\varphi_3, \varphi_1) = 0, (\varphi_3, \varphi_2) = 0, \|\varphi_3\|^2 = 1$ . На

основании предельных соотношений  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_3 y_3(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} A y_3(k)$ ,

$\lim_{k \rightarrow \infty} B_3 y_3(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} B y_3(k)$  получается выполнение не только соотношений (4.46), но и уравнения  $\varphi_3 = \lambda_3 \varepsilon B \varphi_3 + \lambda_3^2 A \varphi_3$ .

Рассмотрим, далее, по индукции итерационный цикл с номером  $j$ , который можно записать, вводя операторы  $A_j, B_j$  и учитывая начальное условие (4.41), в виде аналогичном уравнениям (4.1)–(4.3)

$$y_j = \lambda_j \varepsilon B_j y_j + \lambda_j^2 A_j y_j, \quad y_j \in E_j, \quad E \equiv E_j \oplus \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{j-1}\}, \quad (4.49)$$

$$y_j(k+1) = \sigma_j(k) \varepsilon B_j y_j(k) + \sigma_j^2(k) A_j y_j(k), \quad (4.50)$$

$$\sigma_j^4(k) \|A_j y_j(k)\|^2 + 2\sigma_j^3(k) \varepsilon (A_2 y_j(k), B_j y_j(k)) + \sigma_j^2(k) \varepsilon^2 \|B_j y_j(k)\|^2 - \|y_j(k)\|^2 = 0. \quad (4.51)$$

Поэтому для итерационного алгоритма (4.50), (4.51) справедливы все результаты теоремы 4.1 и, кроме того, следующие дополнительные результаты  $(\varphi_i, A_j y_j(k)) = 0$ ,  $(\varphi_i, B_j y_j(k)) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, j-1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда при предельном переходе  $k \rightarrow \infty$ , с учетом (4.18), следует  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_j y_j(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} A y_j(k)$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_j y_j(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} B y_j(k), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_j(k) = \varphi_j, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_j(k) = \lambda_j, \quad \|\varphi_j\|^2 = 1, \quad (\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}.$$

Выполняется не только соотношение (4.49), но и уравнения

$$y_j = \lambda_j \varepsilon B_j y_j + \lambda_j^2 A_j y_j, \quad y_j \in E_j, \quad E \equiv E_j \oplus \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{j-1}\}. \quad (4.52)$$

Вторая часть теоремы доказывается на основе уравнения (4.51), в котором делается предельный переход при  $k \rightarrow \infty$ , и уравнения (4.52)

$$\lambda_j^4 \|A \varphi_j\|^2 + 2\lambda_j^3 \varepsilon (A \varphi_j, B \varphi_j) + \lambda_j^2 \varepsilon^2 \|B \varphi_j\|^2 - 1 = 0. \quad (4.53)$$

Уравнение (4.52) скалярно умножается на  $\lambda_j^2 A \varphi_j$ , а затем на  $\varepsilon \lambda_j B \varphi_j$ , при этом получают два уравнения

$$\lambda_j^2 (\varphi_j, A \varphi_j) = \lambda_j^3 \varepsilon (A \varphi_j, B \varphi_j) + \lambda_j^4 \|B \varphi_j\|^2, \quad (4.54)$$

$$\varepsilon \lambda_j (\varphi_j, B \varphi_j) = \lambda_j^2 \varepsilon^2 \|B \varphi_j\|^2 + \lambda_j^3 \varepsilon (A \varphi_j, B \varphi_j), \quad (4.55)$$

исключая из (4.53) – (4.55) слагаемые  $\lambda_j^4 \|A \varphi_j\|^2$ ,  $\lambda_j^3 \varepsilon (A \varphi_j, B \varphi_j)$ , получаем квадратное уравнение для нахождения величины  $\lambda_j$

$$\lambda_j = \frac{1}{2(\varphi_j, A\varphi_j)} \left[ -\varepsilon(\varphi_j, B\varphi_j) \pm \sqrt{\varepsilon^2(\varphi_j, B\varphi_j)^2 + 4(\varphi_j, A\varphi_j)} \right].$$

Из этого равенства следует двусторонняя оценка  $\gamma(\varphi_j) < |\lambda_j| < \beta(\varphi_j)$ ,

$$\beta(\varphi_j) = \frac{1}{2(\varphi_j, A\varphi_j)} \left[ \sqrt{\varepsilon^2(\varphi_j, B\varphi_j)^2 + 4(\varphi_j, A\varphi_j)} + \varepsilon(\varphi_j, B\varphi_j) \right], \quad (4.56)$$

$$\gamma(\varphi_j) = \frac{1}{2(\varphi_j, A\varphi_j)} \left[ \sqrt{\varepsilon^2(\varphi_j, B\varphi_j)^2 + 4(\varphi_j, A\varphi_j)} - \varepsilon(\varphi_j, B\varphi_j) \right], \quad (4.57)$$

Если числитель и знаменатель (4.57) умножить на сопряженное выражение, то получим еще одну оценку снизу

$$\gamma(\varphi_j) \geq \alpha_j \equiv \frac{2}{\sqrt{\varepsilon^2 \|B\|_{E_j}^2 + 4\|A\|_{E_j}^2} + \varepsilon \|B\|_{E_j}}. \quad (4.58)$$

Из (4.56) – (4.58) следует двусторонняя оценка для величины  $|\lambda_j|$

$$0 < \alpha_j < |\lambda_j| < \beta(\varphi_j) < \infty.$$

В силу вложения  $E_j \subset E_{j-1} \subset \dots \subset E_1 \subset H$  нормы  $\|B\|_{E_j}$ ,  $\|A\|_{E_j}$  являются монотонно убывающими числовыми последовательностями с ростом  $j$ , тогда параметр  $\alpha_j$  является монотонно возрастающей последовательностью и выполняется

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \infty, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \beta(\varphi_j) = \infty, \quad \alpha_{j+1} > \alpha_j. \quad (4.59)$$

На основе соотношения (4.59) и основана методика частичного позиционирования любой начальной группы спектральных параметров по степени возрастания модуля. При этом после процедуры перенумерации начальной группы самое маленькое значение имеет  $\lambda_1$ , все остальные  $\lambda_j$ ,  $1 < j < \infty$  будут больше  $\lambda_1$ .

Изложенный выше результат во многом аналогичен методу исчерпывания, приведенному в [105], за исключением того факта, что оперируют при этом не симметричными матрицами, а компактными частично симметричными операторами в гильбертовом пространстве.



## 4.2 Численная апробация итерационного алгоритма на задаче о резонансной потере устойчивости трубы с протекающей магнитной жидкостью

### 4.2.1 Постановка прикладной задачи

Итерационный алгоритм (4.2) – (4.3) был апробирован при численном решении задачи о нахождении собственных частот колебаний трубы с протекающей магнитной жидкостью.

Предполагается, что жидкость невязкая, вектор скорости имеет вид  $\mathbf{u} \equiv \{V, 0, 0\}$ ,  $V \equiv \text{const}$ . В таком случае, очевидно, поле скорости будет удовлетворять уравнениям Эйлера с условием непротекания на границе. Положим вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H} \equiv \text{const}$  постоянной величиной, принимающий соответствующее значение на границе. В качестве растягивающего усилия  $N(x)$  (см. (4.60) ниже) может быть рассмотрена сила тяжести. Тогда справедливо уравнение Бернулли [46]

$$p + \rho gx + \frac{\mathbf{H}^2}{4\pi} + \rho \frac{V^2}{2} = \text{const}.$$

В таком случае тройка  $\{\mathbf{u}, p, \mathbf{H}\}$  является решением уравнений МГД и жидкость можно считать магнитной, поэтому в дальнейшем, в этой главе вместо словосочетания “магнитная жидкость” будет употребляться просто жидкость.

Математическая модель колебания трубы в тросовом приближении имеет вид [98]

$$\left[ (N(x) - \rho V^2) W_x \right]_x - \rho V W_{xt} = \rho_0 W_{tt}, \quad 0 < x < l. \quad (4.60)$$

Предполагается, что концы трубы закреплены

$$W|_{x=0} = 0, \quad W|_{x=l} = 0. \quad (4.61)$$

В уравнениях (4.60), (4.61)  $W \equiv W(x, t)$  – поперечное смещение трубы рис. 4.1,  $x$  – координата вдоль трубы,  $t$  – время,  $V$  – скорость жидкости, при этом  $V > 0$  когда жидкость течет по направлению координаты  $x$  и  $V < 0$  в противном случае.  $N \equiv N(x)$  – растягивающее усилие, действующее на трубу по направлению

оси  $x$ ,  $l$  – длина трубы,  $\rho$  – погонная плотность жидкости,  $\rho_0$  – погонная плотность и жидкости и трубы.  $\rho$ ,  $\rho_0$  – постоянные величины.

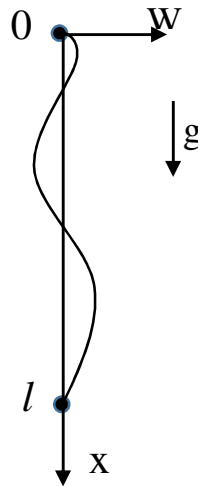


Рис. 4.1 Колебание трубы с протекающей жидкостью в тросовом приближении

Слагаемые  $-\rho V^2 W_{xx}$ ,  $-\rho V W_{xt}$  впервые ввел Феодосьев [106]. Они учитывают реакцию жидкости на поперечные колебания трубы, первое учитывает центробежную силу, а второе – силу Кориолиса. Задача (4.60) – (4.61) была исследована во многих работах при ограничении  $N(x) \equiv const$ , например, в [107]. В условиях, когда  $N(x)$  – произвольная непрерывная функция от переменной  $x$ , эта задача никем не рассматривалась. Исследованию зависимости собственных частот колебания трубы от параметров жидкости посвящена работа [108]. Там же рассматривается задача сохранения заданных частот колебания трубы с протекающей жидкостью.

Необходимость нахождения собственных частот колебаний трубы с протекающей жидкостью связана с исследованием резонансной потери устойчивости. Труба рассматривается в тросовом приближении, как шланг. Данное приближение допустимо, если материал, из которого сделана труба, обладает малыми модулями упругости, например, в случае резины, либо в случае металла, но при этом труба должна иметь большую длину.

Данная задача стала актуальной в начале XX века, когда рассматривалась проблема дозаправки горючим самолета в воздухе. В настоящее время эта задача встречается в нефтегазовой промышленности, при использовании длинных

стальных труб с протекающей жидкостью. Например, при изучении резонансной потери устойчивости бурильной колонны, которая может обладать длиной до нескольких километров, и подвешивается на буровой установке, вследствие чего испытывает из-за действия силы тяжести и трения бурового раствора, протекающего по трубе, растягивающее усилие переменное по длине. Ввиду того, что между бурильной колонной и стенками скважины имеет место кольцевой зазор, бурильная колонна может совершать поперечные колебания. Другой пример необходимости рассмотрения данной задачи связан с исследованием резонансной потери устойчивости трубопровода, соединяющего буровую платформу с устьем скважины на дне моря, при извлечении нефти на шельфе.

Собственные колебания трубы ищутся методом разделения переменных

$$W(x,t) = U(x)e^{i\omega t}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (4.62)$$

где  $\omega$  – собственная частота колебаний. При подстановке (4.62) в (4.60), (4.61) получаем спектральную задачу

$$\left[ (N(x) - \rho V^2) U_x \right]_x - i\omega \rho V U_x + \rho_0 \omega^2 U = 0, \quad 0 < x < l, \quad (4.63)$$

$$U|_{x=0} = 0, \quad U|_{x=l} = 0, \quad (4.64)$$

Соотношения (4.63), (4.64) могут быть приведены к безразмерному виду, вводя безразмерную координату  $\xi = \frac{x}{l}$ , безразмерную частоту колебаний  $\lambda = \omega \frac{l}{V}$ ,

безразмерный параметр  $\varepsilon = \frac{\rho}{\rho_0}$ ,  $\varepsilon < 1$ , и безразмерную функцию

$$h(\xi) = \frac{\rho}{\rho_0} \left[ \frac{N(\xi)}{\rho V^2} - 1 \right], \quad h(\xi) > 0,$$

$$\left[ h(\xi) U_\xi \right]_\xi - i\lambda \varepsilon U_\xi + \lambda^2 U = 0, \quad 0 < \xi < 1, \quad (4.65)$$

$$U|_{x=0} = 0, \quad U|_{x=l} = 0, \quad (4.66)$$

Если ввести функцию

$$y = U_\xi, \quad U = \int_0^\xi y(\xi_1) d\xi_1,$$

то соотношения (4.65), (4.66) можно записать в виде

$$\left[ h(\xi) y \right]_{\xi\xi} - i\lambda \varepsilon y_{\xi} + \lambda^2 y = 0, \quad 0 < \xi < 1, \quad (4.67)$$

$$\int_0^1 y(\xi) d\xi = 0. \quad (4.68)$$

Таким образом, получена спектральная задача в дифференциальной форме относительно спектрального параметра  $\lambda$ , являющегося действительным числом. Из (4.67) следует, что функция  $y = y(\xi)$  должна быть комплексной.

Частота колебаний по физическому смыслу больше нуля, в то время как безразмерная частота колебаний  $\lambda$ , в зависимости от знака скорости жидкости, может быть как положительной так и отрицательной.

#### 4.2.2 Формализация прикладной задачи

Элементами гильбертова пространства  $H$  служат комплексные функции действительного аргумента. Скалярное произведение является действительным числом и вводится с учетом условия  $h(\xi) > 0$ . Для двух элементов  $u(\xi) = u_1 + iu_2$ ,  $v(\xi) = v_1 + iv_2$  оно имеет вид  $(u, v) = \frac{1}{2} \int_0^1 h(\xi)(u\bar{v} + v\bar{u})d\xi$ , где  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  комплексно сопряженные величины к величинам  $u$ ,  $v$ . При этом можно записать

$$(u, v) = \int_0^1 h(\xi)(u_1 v_1 + u_2 v_2) d\xi.$$

В таком случае, скалярное произведение  $(u, u)$  является положительным и норму для  $u \in H$  можно ввести в виде  $\|u\|^2 = (u, u)$ . Задаются множества  $H$ ,  $E$ ,  $P$ :

$$H = \{u \mid u \in L_2(0,1)\}, \quad E = \left\{ u \mid u \in L_2(0,1), \int_0^1 u d\xi = 0 \right\},$$

$$P = \left\{ u \mid u \in C(0,1), \int_0^1 u d\xi = 0 \right\}, \quad P \subset E \subset H.$$

В приведенных выше соотношениях выражения  $u \in L_2(0,1)$ ,  $u \in C(0,1)$  означают, что они имеют место как для действительной так и для мнимой части  $u$ . В  $H$  вводятся операторы  $A$ ,  $B$ :

$$Ay = \frac{1}{h(\xi)} \left[ - \int_0^{\xi} \int_0^{\xi_1} y(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 + a(y) \right], \quad a(y) = \left( \int_0^1 \frac{d\xi}{h(\xi)} \right)^{-1} \int_0^1 \frac{1}{h(\xi)} \left( \int_0^{\xi} \int_0^{\xi_1} y(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 \right) d\xi$$

$$By = \frac{i}{h(\xi)} \left[ \int_0^{\xi} y(\xi_1) d\xi_1 - b(y) \right], \quad b(y) = \left( \int_0^1 \frac{d\xi}{h(\xi)} \right)^{-1} \int_0^1 \frac{1}{h(\xi)} \left( \int_0^{\xi} y(\xi_1) d\xi_1 \right) d\xi$$

Функционалы  $a(y)$ ,  $b(y)$  записываются исходя из условий

$$\int_0^1 Ay d\xi = 0, \quad \int_0^1 By d\xi = 0. \quad (4.69)$$

В таком случае приходим к спектральному уравнению с компактными операторами  $A$ ,  $B$

$$y = \lambda \epsilon By + \lambda^2 Ay. \quad (4.70)$$

**Утверждение 4.3.** Операторы  $A$ ,  $B$  компактны в  $H$  и справедливы вложения

$$R(A) \subset P, \quad R(B) \subset P. \quad (4.71)$$

**Доказательство** компактности основывается на критерии Ф. Рисса [103] и того факта, что операторы  $A$ ,  $B$  состоят из интегралов с переменным верхним пределом, для которых этот критерий выполняется, а при умножении на функцию  $\frac{1}{h(\xi)}$ ,  $h(\xi) > 0$  операторы остаются компактными в силу утверждения [109], что произведение компактного оператора на ограниченный снова является компактным оператором. Операторы  $A$ ,  $B$  отображают  $H \rightarrow C[0,1]$ , а из соотношения (4.69) следует выполнение вложений (4.71).

Справедливо и более сильное утверждение, что оператор  $A: H \rightarrow C[0,1]$  – компактный оператор. Это следует из представления  $A$  в виде оператора Вольтерра

$$\text{с непрерывным ядром } K(\xi, \xi_2) = \begin{cases} \xi - \xi_2, & \xi_2 \leq \xi \\ 0, & \xi_2 > \xi \end{cases}$$

**Утверждение 4.4.** Операторы  $A$ ,  $B$  являются частично симметричными.

$$(u, Av) = (v, Au), \quad (u, Bv) = (v, Bu), \quad \forall u, v \in E.$$

**Доказательство** основано на интегрировании по частям и использовании (4.69).

**Утверждение 4.5.** *Оператор  $A$  положительный  $(u, Au) > 0, \forall u \in E$ .*

**Доказательство** основано на интегрировании по частям и использовании (4.69).

**Утверждение 4.6.** *Оператор  $A$  имеет нулевое ядро.*

**Доказательство.** Допустим, противное, тогда существует  $u_0 \in H, \|u_0\| \neq 0$  и  $Au_0 = 0$ . Умножим это равенство на  $h(\xi)$  и продифференцируем дважды по  $\xi$ . В результате получим  $u_0 = 0$ , что противоречит предположению.

**Утверждение 4.7.** *Спектральное уравнение для квадратичного пучка операторов (4.70) эквивалентно спектральной задаче (4.67), (4.68).*

**Доказательство** основано на интегрировании (4.67) дважды по  $\xi$  и использовании граничных условий (4.69).

Таким образом, операторы  $A, B$  удовлетворяют всем необходимым требованиям, которые налагались в пункте 4.1. Из утверждений 4.3 – 4.7 следует, что вместо исследования спектральной задачи в дифференциальной форме (4.67), (4.68) можно рассматривать спектральную задачу в операторной форме (4.70).

### 4.2.3 Аналитическое решение тестовой задачи

В качестве верификации проведенных расчетов используется сравнение с аналитическим решением тестовой задачи, имеющее место для частного случая задания функции  $h(\xi)$  в виде  $h(\xi) \equiv \alpha = const$ . При этом уравнения (4.67), (4.68) имеют вид

$$\alpha U_{\xi\xi} - i\lambda\varepsilon U_{\xi} + \lambda^2 U = 0, \quad 0 < \xi < 1, \quad (4.72)$$

$$U|_{\xi=0} = 0, \quad U|_{\xi=1} = 0.$$

Аналитическое решение этой задачи ищется в виде

$$U = \sin k\pi\xi e^{i\gamma\xi}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.73)$$

Подставив производные (4.73) в (4.72) и приравняв коэффициенты при выражениях  $\sin k\pi\xi e^{i\gamma\xi}$  и  $\cos k\pi\xi e^{i\gamma\xi}$  к нулю, получаем два алгебраических уравнения относительно неизвестных  $\lambda, \gamma$

$$\lambda = 2 \frac{\alpha\gamma}{\varepsilon},$$

$$\lambda\varepsilon\gamma + \lambda^2 - \alpha(\gamma^2 + k^2\pi^2) = 0.$$

Из этой системы находим выражение для  $\lambda, \gamma$

$$\begin{aligned} \gamma &= \pm \frac{k\pi\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + 4\alpha}}, \\ \lambda &= \pm \frac{2k\pi\alpha}{\sqrt{\varepsilon^2 + 4\alpha}}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Так как итерационный алгоритм (4.2), (4.3), на основании дополнительного исследования по результатам теоремы 4.2, позволяет получить минимальные корни  $|\lambda^+|, |\lambda^-|$  то для сравнения с аналитическим решением (4.74) необходимо положить  $k=1$ , т. е. получится

$$|\lambda_1| = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{\varepsilon^2 + 4\alpha}}. \quad (4.75)$$

#### 4.2.4 Замечание о спектре исследуемой прикладной задачи

Здесь будет доказан ряд утверждений, являющихся следствием рассмотрения гильбертова пространства комплексных функций действительного аргумента, значимость которых раскрывается в замечании, приведенном в конце данного пункта.

Комплексная функция  $\phi$  действительного аргумента называется невырожденной, если выполняется условие  $\|\phi + \bar{\phi}\| \neq 0, \|\phi - \bar{\phi}\| \neq 0$ ; называется вырожденной, если выполняется условие  $\|\phi + \bar{\phi}\| = 0, \|\phi - \bar{\phi}\| = 0$ ; называется действительной, если выполняется условие  $\|\phi + \bar{\phi}\| \neq 0, \|\phi - \bar{\phi}\| = 0$ .

**Утверждение 4.8.** Любая невырожденная комплексная функция действительного аргумента представляется в виде двух взаимно ортогональных невырожденных, комплексно сопряженных функций действительного аргумента в виде

$$\phi_1 = \|\phi - \bar{\phi}\|(\phi + \bar{\phi}) - \|\phi + \bar{\phi}\|(\phi - \bar{\phi}), \quad (4.76)$$

$$\phi_2 = \|\phi - \bar{\phi}\|(\phi + \bar{\phi}) + \|\phi + \bar{\phi}\|(\phi - \bar{\phi}), \quad (4.77)$$

$$(\phi_1, \phi_2) = 0, \quad (4.78)$$

$$\|\phi_1\|^2 = \|\phi_2\|^2 = 2\|\phi - \bar{\phi}\|^2 \|\phi + \bar{\phi}\|^2. \quad (4.79)$$

**Доказательство.** Из (4.76), (4.77) следует  $(\phi_1, \phi_2) = \|\phi - \bar{\phi}\|^2 (\phi + \bar{\phi}, \phi + \bar{\phi}) - \|\phi + \bar{\phi}\|^2 (\phi - \bar{\phi}, \phi - \bar{\phi})$  и получаем (4.78). Расписывая  $\|\phi_1\|^2 = \|\phi - \bar{\phi}\|^2 \|\phi + \bar{\phi}\|^2 + \|\phi + \bar{\phi}\|^2 \|\phi - \bar{\phi}\|^2 - 2\|\phi - \bar{\phi}\| \|\phi + \bar{\phi}\| [\|\phi\|^2 - \|\bar{\phi}\|^2]$ . С учетом тождества  $\|\phi\| = \|\bar{\phi}\|$  отсюда следует  $\|\phi_1\|^2 = 2\|\phi - \bar{\phi}\|^2 \|\phi + \bar{\phi}\|^2$ . Аналогично доказывается такая же формула для  $\|\phi_2\|^2$ , при этом получается равенство (4.79).

**Утверждение 4.9.** Если невырожденная комплексная функция  $\phi$  действительного аргумента является решением некоторого линейного дифференциального (или) интегрального уравнения, то функция  $\bar{\phi}$  также является решением этого уравнения и, следовательно, решениями являются функции  $\phi_1, \phi_2$  определяемые (4.76), (4.77).

**Доказательство.** Для простоты доказательства рассмотрим применительно к исходному уравнению

$$\alpha U_{\xi\xi} - i\lambda U_{\xi} + \lambda^2 U = 0. \quad (4.80)$$

Полагая  $U = U_1 + iU_2$ ,  $\|U_1\| \neq 0$ ,  $\|U_2\| \neq 0$  и подставляя в (4.80), затем, отделяя действительные и мнимые части, получим систему действительных уравнений

$$\alpha U_{1,\xi\xi} - i\lambda U_{2,\xi} + \lambda^2 U_1 = 0, \quad (4.81)$$

$$\alpha U_{2,\xi\xi} - i\lambda U_{1,\xi} + \lambda^2 U_2 = 0. \quad (4.82)$$

В этом случае можно проверить, что решение (4.81), (4.82) не является вырожденным. Предположим противное, что  $U_1 = 0$ , тогда из (4.81) получаем



$U_{2,\xi} = 0, \Rightarrow U_2 = C \neq 0$ , но тогда из (4.82) следует  $U_2 = 0$  и система (4.81), (4.82) имеет только тривиальное решение.

При подстановке сопряженного выражения  $\bar{U} = U_1 - iU_2$  в (4.80) опять получается система (4.81), (4.82). Следовательно, и  $\bar{U}$  также является решением (4.80), тогда решением являются и функции  $U - \bar{U}$ ,  $U + \bar{U}$ . Значит решением являются функции  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  (4.76), (4.77) если обозначить  $U = \phi$ .

**Следствие.** Каждому действительному собственному числу  $\lambda$  уравнения (4.80) соответствует две собственные функции, являющиеся невырожденными комплексно сопряженными функциями (4.76), (4.77) со свойствами (4.78), (4.79).

Других линейно независимых комплексных функций, кроме функций (4.76), (4.77) нет. Действительно, если за исходную функцию  $\phi$  брать  $\phi_1$ , то  $\bar{\phi}_1 = \phi_2$  и на основе функции  $\phi_1$  снова получаются с точностью до множителя (4.76), (4.77).

**Замечание 4.2.** Собственные числа и собственные функции можно находить по теореме 4.2, при этом каждый четный итерационный цикл дает то же значение собственного числа, что и предшествующий нечетный итерационный цикл.

#### 4.2.5 Результаты расчетов

Описание характеристик разработанного программного обеспечения приведено в следующем параграфе 4.2.6. Для корректного использования итерационного алгоритма (4.2), (4.3) необходимо найти границы задания параметра  $\varepsilon$ , при которых он сходится. Для этого были проведены вспомогательные расчеты по нахождению нормы оператора  $B$ , зависящей от функции  $h(\xi)$ . Эта функция полагалась в виде  $h(\xi) \equiv \alpha + \beta\xi$ , где  $\alpha$ ,  $\beta$  — произвольно варьируемые параметры. Во всех расчетах, приводимых далее, требовалось 15-40 итераций. В качестве параметров  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  брались следующие значения:

$$\varepsilon = 0.001, 0.01, 0.05, \quad \alpha = 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, \quad \beta = 0, 0.01, 0.02, 0.03.$$

Норма  $\|B\|$  была найдена численно по следующей итерационной схеме [98]

$$\tau_{k+1} y_{k+1} = B B y_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad y_1 = A y_0, \quad y_0 \in H, \quad (4.83)$$

$$\tau_{k+1} = \frac{(By_k, By_k)}{\|y_k\|^2}, \quad \tau_{k+1} > \tau_k, \quad (4.84)$$

$$\|B\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\tau_k}, \quad (4.85)$$

где  $y_0$  — произвольный элемент, в качестве которого бралась функция  $y_0(\xi) \equiv 1$ .

По значению  $\|B\|$  была найдена величина  $p$  из формулы (4.14). Величины  $\|B\|$  и  $p$  зависят от функции  $h(\xi)$  и, следовательно, параметров  $\alpha, \beta$ . Эта зависимость представлена в табл. 4.1, 4.2.

Табл. 4.1. Численные значения  $\|B\|$

$\alpha \backslash \beta$	0.00	0.01	0.02	0.03
0.10	1.59	1.57	1.53	1.50
0.15	1.06	1.05	1.04	1.02
0.20	0.80	0.79	0.78	0.78
0.25	0.64	0.63	0.63	0.62

Табл. 4.2. Численные значение  $p$

$\alpha \backslash \beta$	0.00	0.01	0.02	0.03
0.10	0.82	0.76	0.73	0.71
0.15	1.01	0.95	0.92	0.89
0.20	1.16	1.11	1.08	1.05
0.25	1.30	1.25	1.22	1.19

Табл. 4.3. Зависимость спектральных чисел  $\lambda_1^+$ , полученных по итерационному алгоритму (4.2), (4.3) от параметров  $\varepsilon, \alpha, \beta$

$\varepsilon$	$\alpha \backslash \beta$	0	0.01	0.02	0.03
0.001	0.10	0.993457	1.017673	1.040758	1.062855
	0.15	1.216732	1.236668	1.255959	1.274664
	0.20	1.404962	1.422299	1.439208	1.455718
	0.25	1.570795	1.586342	1.601577	1.616519
0.01	0.10	0.993334	1.017553	1.040641	1.062740
	0.15	1.216632	1.236569	1.255862	1.274568
	0.20	1.404875	1.422213	1.439123	1.455634
	0.25	1.570718	1.586265	1.601501	1.616443
0.05	0.10	0.990368	1.014656	1.037807	1.059963
	0.15	1.214206	1.234182	1.253511	1.272251
	0.20	1.402773	1.420136	1.437070	1.453604
	0.25	1.568836	1.584402	1.599655	1.614615

За величину  $p$  взята наименьшее значение из табл. 4.2  $p=0.71$ , в этом случае диапазон изменения  $\varepsilon$  имеет вид  $0 \leq \varepsilon < 0.71$ . Результаты расчетов положительного спектрального параметра  $\lambda^+$  представлены в табл. 4.3. Для отрицательного спектрального параметра  $\lambda^-$  расчеты не представлены, т. к. они с точностью до

погрешности (см. пункт 4.2.6) совпадают по модулю с результатами табл. 4.3,  $\lambda^+ = |\lambda^-|$ . Расчеты собственных функций  $\varphi^+$ ,  $\varphi^-$  показали, что они линейно зависимы, что не противоречит теореме 4.1, согласно замечанию 4.1 к ней.

Табл. 4.4 представляет результат вычисления третьих собственных значений. Согласно замечанию 4.2 четвертый итерационный цикл, дает те же значения спектрального числа, что и третий. С точностью до погрешностей, приведенных в табл. 4.12 – 4.13 (см. следующий пункт 4.2.6), расчетные значения, полученные по четвертому итерационному циклу совпали с результатами, представленными в табл. 4.4.

Табл. 4.4. Зависимость спектральных чисел  $\lambda_3^+$ , полученных по модифицированному итерационному алгоритму (4.2), (4.3) от параметров  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$

$\varepsilon$	$\beta$	0	0.01	0.02	0.03
	$\alpha$				
0.001	0.10	1.986	2.035	2.081	2.126
	0.15	2.433	2.473	2.512	2.549
	0.20	2.809	2.844	2.878	2.911
	0.25	3.141	3.172	3.203	3.233
0.01	0.10	1.986	2.034	2.081	2.125
	0.15	2.433	2.473	2.511	2.549
	0.20	2.809	2.844	2.878	2.911
	0.25	3.141	3.172	3.202	3.232
0.05	0.10	1.980	2.025	2.073	2.118
	0.15	2.427	2.464	2.504	2.542
	0.20	2.805	2.836	2.871	2.905
	0.25	3.137	3.165	3.196	3.227

Следует также отметить, что каждый итерационный цикл имеет свою границу задания  $p$  спектрального параметра  $\varepsilon$  при которой сходится итерационный алгоритм (4.2), (4.3), т.к. на каждом итерационном цикле используются новые модифицированные операторы  $A_j$ ,  $B_j$  и  $\|B\|$  изменяется. Норма оператора  $B$  также находится по итерационной схеме (4.83) – (4.85), при этом операторы  $A$ ,  $B$  уже являются модифицированными, а значение  $p$  находится по формуле (4.14). В табл. 4.5 – 4.7 приведена оценка верхней границы интервала сходимости итерационного алгоритма. Анализ этих таблиц показывает, что выбор параметра  $\varepsilon$ , сделанный в начале этого пункта, является допустимым.

Результаты оценки верхней границы диапазона сходимости (табл. 4.2, 4.5 – 4.7) итерационного алгоритма удобно привести в более компактной форме. Табл. 4.8 содержит значения верхней границы  $p$  диапазона сходимости итерационного алгоритма для каждого итерационного цикла для всех наборов параметров  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ . По значениям таблицы 4.8, можно судить о том, что выбранные значения  $\varepsilon$  являются допустимыми.

Табл. 4.5. Значение параметра  $p$  для второго итерационного цикла

$\varepsilon$	$\beta$ $\alpha$	0	0.01	0.02	0.03
0.001	0.10	0.46	0.41	0.41	0.42
	0.15	0.57	0.51	0.50	0.50
	0.20	0.66	0.59	0.58	0.58
	0.25	0.74	0.67	0.65	0.64
0.01	0.10	0.44	0.40	0.40	0.41
	0.15	0.54	0.49	0.49	0.49
	0.20	0.63	0.58	0.57	0.57
	0.25	0.71	0.65	0.64	0.63
0.05	0.10	0.35	0.35	0.36	0.38
	0.15	0.45	0.44	0.45	0.46
	0.20	0.53	0.52	0.52	0.53
	0.25	0.61	0.59	0.59	0.59

Табл. 4.6. Значение параметра  $p$  для третьего итерационного цикла

$\varepsilon$	$\beta$ $\alpha$	0	0.01	0.02	0.03
0.001	0.10	0.56	0.53	0.52	0.51
	0.15	0.69	0.66	0.53	0.63
	0.20	0.80	0.77	0.75	0.74
	0.25	0.89	0.87	0.85	0.84
0.01	0.10	0.55	0.52	0.51	0.50
	0.15	0.68	0.65	0.63	0.62
	0.20	0.79	0.76	0.74	0.73
	0.25	0.88	0.86	0.84	0.82
0.05	0.10	0.50	0.48	0.46	0.46
	0.15	0.63	0.60	0.59	0.58
	0.20	0.74	0.71	0.69	0.68
	0.25	0.83	0.81	0.79	0.78

Табл. 4.7. Значение параметра  $p$  для четвертого итерационного цикла

$\varepsilon$	$\beta$ $\alpha$	0	0.01	0.02	0.03
0.001	0.10	0.42	0.36	0.34	0.33
	0.15	0.52	0.46	0.44	0.43
	0.20	0.60	0.55	0.52	0.51
	0.25	0.67	0.62	0.60	0.58
0.01	0.10	0.39	0.26	0.26	0.27
	0.15	0.49	0.33	0.31	0.31
	0.20	0.57	0.42	0.37	0.35
	0.25	0.64	0.50	0.43	0.41
0.05	0.10	0.31	0.27	0.42	0.37
	0.15	0.40	0.40	0.48	0.54
	0.20	0.47	0.41	0.49	0.64
	0.25	0.54	0.43	0.49	0.55

Табл. 4.8. Значение параметра  $p$

	номер итерационного цикла			
	1	2	3	4
$p$	0.71	0.35	0.46	0.26

#### 4.2.6. Характеристика разработанного программного обеспечения

Расчеты, представленные в пункте 4.2.5 выполнены на одном ядре ноутбука с процессором i5-2450m. Интегралы в операторах  $A$ ,  $B$  на промежутке  $0 < \xi < 1$  были посчитаны методом трапеций с равномерным разбиением отрезка на 2000 интервалов. Время расчетов собственных значений для четырех итерационных циклов для всех наборов параметров  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  составило  $\approx 40$  минут. Для вычисления первой собственной пары требовалось 15-40 итераций, для вычисления последующих не более 10 итераций.

Возникновение погрешности при численной реализации итерационного алгоритма (4.2), (4.3) связано с нахождением корней уравнения (4.3), заменой бесконечного итерационного процесса конечным, использованием представления чисел с конечной разностью, погрешностями интегрирования при вычислении операторов. В итоге приближенное уравнение

$$y_k = \sigma_k \varepsilon B y_k + \sigma_k^2 A y_k \quad (4.86)$$

точно не выполняется, кроме того, начиная с некоторого номера  $k$  не будет выполняться и неравенство

$$|\sigma_{k+1}| < \sigma_k, \quad (4.87)$$

являющееся следствием теоремы 4.1.

Невыполнение неравенства (4.87) можно рассматривать как потерю устойчивости итерационного процесса и он может быть остановлен, а за результаты решения приняты значения, полученные на  $k$ -ом итерационном шаге. Потеря устойчивости итерационного алгоритма с практической точки зрения не представляет проблемы, если до потери устойчивости достигнута приемлемая точность решения, при этом итерационный алгоритм можно считать работоспособным, в противном случае — неработоспособным. Итерационный процесс останавливался при наступлении его неустойчивости, т. е. когда выполнялось неравенство  $|\sigma_{k+1}| > \sigma_k$ .

Точность решения оценивалась величинами  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , задаваемыми в виде

$$\delta_1 = \frac{\|y_k - \sigma_k \varepsilon B y_k - \sigma_k^2 A y_k\|}{\|y_k\| + |\sigma_k| \varepsilon \|B y_k\| + \sigma_k^2 \|A y_k\|}, \quad \delta_2 = \left| 1 - \frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}} \right|.$$

Величина  $\delta_1$  характеризует относительную погрешность в выполнении уравнения (4.86), а величина  $\delta_2$  — относительную погрешность в вычислении собственных значений. Оценка величин  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  приведены в табл. 4.9, 4.10 соответственно. В табл. 4.11. представлены расчеты абсолютной и относительной погрешностей, имеющих порядок  $10^{-7}$  и  $10^{-5}$ , в сравнении с аналитическим решением (4.75), описанным в пункте 4.2.3.

Табл. 4.9. Погрешность решения  $\delta_1 \cdot 10^8$  в зависимости от параметров

$\varepsilon$	$\beta$	0	0.01	0.02	0.03
	$\alpha$				
0.001	0.10	0.09	0.04	0.08	0.12
	0.15	0.35	0.02	0.05	0.07
	0.20	0.35	0.02	0.03	0.04
	0.25	1.40	0.01	0.02	0.03
0.01	0.10	0.35	0.43	0.81	1.15
	0.15	0.35	0.24	0.46	0.66
	0.20	0.35	0.16	0.31	0.44
	0.25	0.35	0.11	0.22	0.32
0.05	0.10	7.17	2.09	3.93	5.58
	0.15	1.67	1.17	2.24	3.23
	0.20	1.59	0.77	1.50	2.17
	0.25	1.55	0.56	1.09	1.59

Табл. 4.10. Погрешность решения  $\delta_2 \cdot 10^{15}$  в зависимости от параметров

$\varepsilon$	$\beta$	0	0.01	0.02	0.03
	$\alpha$				
0.001	0.10	0.147	0.328	0.085	0.962
	0.15	0.212	0.449	0.193	0.523
	0.20	0.114	0.085	0.120	0.211
	0.25	0.059	0.088	0.059	0.126
0.01	0.10	0.135	0.682	0.349	0.409
	0.15	0.854	0.079	0.034	0.453
	0.20	0.079	0.076	0.037	0.011
	0.25	0.023	0.207	0.211	0.281
0.05	0.10	0.230	0.150	0.725	1.657
	0.15	0.601	0.589	0.536	0.150
	0.20	0.564	0.448	0.007	0.037
	0.25	0.189	0.005	0.176	0.055

Табл. 4.11. Абсолютная и относительная погрешность расчета первых собственных чисел  $\lambda_1$ , полученных по итерационному алгоритму (4.2), (4.3), относительно аналитического решения  $\lambda_1^{\text{ан}}$ , полученного при  $\beta = 0$  по (4.75)

Погрешность	$\alpha$	0.10	0.15	0.20	0.25
	$\varepsilon$				
$ \lambda_1^{\text{ан}} - \lambda_1  \cdot 10^7$	0.001	2	3	3	3
	0.01	2	3	3	3
	0.05	2	3	3	3
$\frac{ \lambda_1^{\text{ан}} - \lambda_1 }{ \lambda_1^{\text{ан}} } \cdot 10^5 \cdot 100\%$	0.001	2	2	2	2
	0.01	2	2	2	2
	0.05	2	2	2	2

Погрешности  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ , соответствующие вычислению третьей собственной пары, приведены в таблицах 4.12, 4.13. В табл. 4.14 представлена оценка

абсолютной и относительной погрешностей расчетов третьих спектральных чисел относительно аналитического решения (4.74), полученного при  $k=2$  и описанного в пункте 4.2.3. Результаты приведенных таблиц показывают, что для третьих собственных значений получены вполне удовлетворительные результаты.

Табл. 4.12. Погрешность решения  $\delta_1 \cdot 10^8$  для третьих собственных чисел в зависимости от параметров

$\varepsilon$	$\beta$	0	0.01	0.02	0.03
	$\alpha$				
0.001	0.10	2.37	2.40	1.75	1.03
	0.15	0.56	0.44	0.49	0.98
	0.24	0.92	0.09	0.31	1.42
	1.39	0.54	0.86	1.12	1.01
0.01	0.10	1.19	0.83	1.63	2.05
	0.15	1.37	0.28	0.82	1.40
	0.20	0.52	0.70	0.58	0.71
	0.25	0.87	1.25	0.93	1.82
0.05	0.10	0.37	1.65	2.52	3.12
	0.15	1.82	0.83	1.57	2.39
	0.20	1.29	0.27	1.10	1.92
	0.25	1.23	0.77	0.83	1.77

Табл. 4.13. Погрешность решения  $\delta_2 \cdot 10^{15}$  для третьих собственных чисел в зависимости от параметров

$\varepsilon$	$\beta$	0	0.01	0.02	0.03
	$\alpha$				
0.001	0.10	1.380	0.455	0.189	0.519
	0.15	0.111	0.257	0.129	0.220
	0.20	0.027	0.040	0.300	0.160
	0.25	0.029	0.206	0.001	0.956
0.01	0.10	0.363	0.001	0.087	0.140
	0.15	0.250	0.202	0.371	0.373
	0.20	0.174	0.214	0.097	0.125
	0.25	0.143	1.276	0.058	0.426
0.05	0.10	0.170	0.057	0.687	0.211
	0.15	0.048	0.168	0.038	0.135
	0.20	0.170	0.057	0.687	0.211
	0.25	0.141	2.322	0.417	1.156

Табл. 4.14. Абсолютная и относительная погрешности вычисления третьих собственных чисел  $\lambda_3$  по модифицированному алгоритму относительно аналитического решения  $\lambda_3^{\text{ан}}$ , полученного при  $\beta = 0$  по (4.74)

Погрешность	$\alpha$	0.10	0.15	0.20	0.25
	$\varepsilon$				
$ \lambda_3^{\text{ан}} - \lambda_3 $	0.001	$0.8 \cdot 10^{-6}$	$0.05 \cdot 10^{-6}$	$0.6 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-6}$
	0.01	$4 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$
	0.05	$7 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$
$\frac{ \lambda_3^{\text{ан}} - \lambda_3 }{ \lambda_3^{\text{ан}} } \cdot 100\%$	0.001	$4 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$
	0.01	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$0.9 \cdot 10^{-3}$
	0.05	0.04	0.017	0.011	0.01

Приведем некоторые результаты численной апробации итерационного алгоритма в более компактной форме. В табл. 4.15 представлены оценки максимальных абсолютной и относительной погрешностей вычисления спектральных чисел в сравнении с аналитическим решением в зависимости от номера итерационного цикла. Максимум берется по всем значениям  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ , при этом

$\beta = 0$ .  $\lambda^{an}$  и  $\lambda$  – аналитическое и вычисленное значения спектрального параметра, соответствующие некоторому набору параметров  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  и  $\beta = 0$ . Напомним, что итерационным циклом мы назвали каждое повторение итерационного алгоритма с модифицированными операторами  $A_j$ ,  $B_j$ .

Табл. 4.15. Оценка погрешностей расчетов в сравнении с аналитическим решением

	номер итерационного цикла	
	1	3
$\max_{\varepsilon, \alpha}  \lambda^{an} - \lambda $	$3 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-4}$
$\max_{\varepsilon, \alpha} \frac{ \lambda^{an} - \lambda }{ \lambda^{an} } \cdot 100\%$	$7 \cdot 10^{-4}$	0.04

Табл. 4.16. Оценка погрешностей  $\delta_1$  и  $\delta_2$ 

	номер итерационного цикла	
	1	3
$\max_{\varepsilon, \alpha, \beta} \delta_1$	$7.17 \cdot 10^{-8}$	$2.25 \cdot 10^{-8}$
$\max_{\varepsilon, \alpha, \beta} \delta_2$	$0.85 \cdot 10^{-15}$	$1.38 \cdot 10^{-15}$

Из табл. 4.15. следует, что вычисленные значения спектральных чисел имеют достоверными, по крайней мере, шесть значащих цифр для первого и второго итерационных циклов и имеют три значащие цифры для третьего и четвертого итерационных циклов. Табл. 4.16 содержит оценки максимальных по всем вариантам параметров  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  значений погрешностей  $\delta_1$  и  $\delta_2$  для итерационных циклов  $j=1$ ,  $j=3$ . Анализ результатов, представленный в табл. 4.15 – 4.16 показывает устойчивость расчетов на серии параметров  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ .

### Выводы по четвертой главе

В данной главе рассматривался новый итерационный алгоритм, позволяющий находить спектр квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов. Проведено теоретическое обоснование данного



алгоритма. Доказана сходимость итерационного алгоритма. Из этой же теоремы следует существование решения спектрального уравнения для некоторого диапазона значений параметра  $\varepsilon$ , границы которого определены. Доказана теорема о полноте системы собственных функций квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов на своем образе, монотонности и неограниченности последовательности модулей собственных значений, найденных по итерационному алгоритму, существование двусторонней оценки для каждого члена последовательности.

Проведена численная апробация итерационного алгоритма на задаче о резонансной потере устойчивости трубы, рассматриваемой в тросовом приближении, с протекающей магнитной жидкостью. Доказана эквивалентность дифференциальной постановки данной задачи спектральной задаче для квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов. Из этого следует наличие класса прикладных задач, для решения которых представленный итерационный алгоритм может быть применен. Проведена верификация и оценка погрешностей численного метода, показавшая его эффективность. При этом впервые были рассчитаны частоты собственных колебаний трубы при переменном растягивающем усилии. Результаты расчетов показали устойчивость алгоритма на серии параметров.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная диссертационная работа посвящена численному и аналитическому исследованию задач динамики магнитной жидкости, протекающей в трубах. В рамках приближения модели МГД, описывающей динамику течения жидкости по трубам, может быть рассмотрено решение задач УТС, управления гемодинамикой, освоение трудноизвлекаемых запасов нефти и др. Все перечисленные задачи требуют применения численных методов, адаптированных для высокопроизводительных вычислений. При этом аналитическое исследование этих задач необходимо, хотя бы, для поиска классов точных решений уравнений МГД и использования их для верификации разрабатываемого программного обеспечения.

Перечислим основные результаты диссертационной работы и рекомендации по их использованию:

**1.** Разработан на основе методов конечных разностей и МКО комплекс программ с применением технологии параллельных вычислений OpenMP, позволяющий моделировать динамику слоистого течения вязкой магнитной несжимаемой жидкости. Данное программное обеспечение рекомендуется для проведения оценки, прежде всего качественной, эффекта тепловыделения в результате явлений вязкого трения и джоулева подогрева, а также для исследования изменения геометрии области течения в результате воздействий на границе области течения и объемного воздействия магнитным полем. Разработка подобного программного обеспечения связана с исследованием задач моделирования отклика нефтяного месторождения на воздействия различных типов с целью повышения коэффициента извлечения нефти [73]. Решение данного класса задач необходимо на пути освоения трудноизвлекаемых запасов нефти и создания отечественной технологии «цифровое месторождение» [86].

**2.** Исследована модель слоистого течения жидкости в неограниченном плоском слое, неограниченном цилиндре, неограниченном коаксиальном цилиндре. Выделен класс точных решений нестационарных уравнений МГД вязкой несжимаемой жидкости, соответствующих слоистому течению жидкости в этих

областях и использован для верификации разработанного программного обеспечения, показавшей его эффективность. Найденные точные решения рекомендуются для верификации программного обеспечения, основанного на решении уравнений МГД, используемых для описания не только течения несжимаемой жидкости, но и сжимаемой, поскольку модель МГД несжимаемой жидкости является подмоделью модели МГД сжимаемой жидкости.

**3.** Разработан новый итерационный алгоритм нахождения спектра квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов. Доказана теорема о существовании решения спектрального уравнения при каждом значении параметра из некоторого диапазона и сходимости итерационного алгоритма. Доказана теорема о полноте системы собственных функций квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов на своем образе, монотонности и неограниченности последовательности модулей собственных значений, найденных по итерационному алгоритму, существование двусторонней оценки для каждого члена последовательности. Проведена численная апробация итерационного алгоритма на задаче о резонансной потере устойчивости трубы, рассматриваемой в тросовом приближении, с протекающей магнитной жидкостью. Собственные частоты вычислены впервые при переменном растягивающем усилии. Доказана эквивалентность дифференциальной постановки данной задачи спектральной задаче для квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов. Показано наличие прикладных задач, для решения которых может быть использован рассмотренный итерационный алгоритм. Проведена верификация и оценка погрешностей алгоритма, показавшие его эффективность.

Результаты исследования данного итерационного алгоритма рекомендуются, с одной стороны, для теоретического исследования прикладных задач, например, для ответа на вопрос о существовании решения для некоторой прикладной задачи, в таком случае ее можно попробовать свести к спектральной задаче для квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов, а этот результат доказан. С другой стороны, итерационный алгоритм может быть использован в качестве численного метода для решения прикладных задач, для

которых предполагается нахождение спектра квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов.

Дальнейшими перспективными направлениями исследований автор считает следующие: анализ экспериментальных данных, подтверждающих возможность управления магнитным полем течением нефти; исследование различных структур, позволяющих моделировать пористую среду; моделирование течения жидкости в этих структурах, эффекта тепловыделения, изменения геометрии области течения посредством магнитного поля; разработка соответствующего программного обеспечения; верификация его известными или исследованными точными решениями.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Тараканов В.И., Дубовик А.О. Итерационный алгоритм нахождения спектра квадратичного пучка операторов в гильбертовом пространстве // Сиб. журн. вычисл. матем.- Новосибирск. 2015.Т.18. № 1.С. 79-93.
2. Бетелин В.Б., Галкин В.А., Дубовик А.О. Об управляемом слоистом течении вязкой несжимаемой жидкости в модели МГД // ДАН. 2016. Т. 470. № 2. С. 150-152.
3. Галкин В.А., Дубовик А.О., Епифанов А.А. Приближенные методы для уравнений несжимаемой жидкости // ЖВМ и МФ. 2017. Т. 57. № 2. С. 275-284.
4. Галкин В.А., Дубовик А.О. Об управлении тепловыделением в течении вязкой несжимаемой жидкости посредством движения границы области течения // Вест. кибернетики. Сургут: СурГУ. 2015. № 3 (19). С. 144–147.
5. Галкин В.А., Дубовик А.О. О моделировании слоистого течения вязкой магнитной несжимаемой жидкости во вращающейся трубе // Вестн. кибернетики. Сургут: СурГУ. 2017. № 2 (26). С. 58 – 65.
6. Галкин В.А., Дубовик А.О. О моделировании слоистого течения вязкой магнитной несжимаемой жидкости во вращающейся коаксиальной трубе // Вест. кибернетики. Сургут: СурГУ. 2017. № 3 (27). С. 128–137.
7. Галкин В.А., Дубовик А.О. О моделировании тепловыделения в слоистом течении вязкой магнитной несжимаемой жидкости во вращающейся трубе // Вест. кибернетики. Сургут: СурГУ. 2017. № 4 (28). С. 56–61.
8. Tarakanov V.I., Dubovik A.O. An iterative algorithm for calculation of spectral parameters of a quadratic bunch of operators in the Hilbert space // Numerical Analysis and Applications. Pleiades Publishing. 2015. V. 8. I. 1. P. 68-80.
9. Betelin V.B., Galkin V.A., Dubovik A.O. On the control of layered flow of a viscous incompressible fluid within MHD // Doklady Mathematics. Pleiades Publishing. 2016. V 94. I. 2. P. 591-593.

10. Galkin V.A., Dubovik A.O., Epifanov A.A. Approximate Methods for equations of incompressible fluid // Comput. Math. and Math. Phys. Pleiades Publishing. 2017. V 57. No. 2. P. 272-280.
11. Галкин В.А., Дубовик А.О. Об управлении параметрами течения вязкой несжимаемой жидкости посредством движения границы области течения // Вест. кибернетики. Сургут: СурГУ. 2016. № 1(21). С. 25-28.
12. Тараканов В. И., Дубовик А. О. Численная апробация итерационного алгоритма нахождения спектра квадратичного пучка операторов в гильбертовом пространстве // Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе : тез. докладов. Сургут : ИЦ СурГУ, 2014. С. 51–53.
13. Галкин В. А., Дубовик А. О. Задачи управления слоистым течением вязкой несжимаемой жидкости в рамках модели МГД // Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе : тез. докладов. Сургут : ИЦ СурГУ. 2016. С. 41–42.
14. Галкин В. А., Дубовик А. О. Исследование тепловыделения в течении вязкой несжимаемой жидкости // Северный регион: наука, образование, культура. Сургут : СурГУ, 2015. Т. 2. № 2 (32). С. 63–65.
15. Галкин В. А., Дубовик А. О. Управление слоистым течением вязкой магнитной несжимаемой жидкости // Супервычисления и математическое моделирование : тез. XVI Междунар. конф. Саров : ИПК ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2016. С. 41–42.
16. Галкин В. А., Дубовик А. О. Моделирование слоистого течения вязкой магнитной несжимаемой жидкости // Теоретические основы конструирования численных алгоритмов и решение задач математической физики : тез. докл. XXI Всерос. конф. и молодеж. шк.-конф. М. : ИПМ им. М. В. Келдыша, 2016. С. 75–76.
17. Галкин В. А., Дубовик А. О. О моделировании слоистого течения вязкой магнитной несжимаемой жидкости // Марчуковские научные чтения – 2017 : тез. междунар. конф. Новосибирск : Омега Принт. 2017. С. 26.

18. Галкин В.А, Дубовик А.О. Локальная 3D модель слоистых управляемых течений: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017611813; правообладатель БУ ВО ХМАО-Югры «Сургутский государственный университет». – Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 09.02.2017.
19. Абрамов С.М. Суперкомпьютерные технологии России: объективные потребности и реальные возможности // сб. трудов конф. Параллельные вычислительные технологии 2010. Уфа. 2010. С. 5 – 17.
20. P'in V. P. On the parallel strategies in mathematical modeling. Lectures notes // CCIS. Springer. 2017. V. 753. P. 69-81.
21. Зайцев Ф.С. Математическое моделирование эволюции тороидальной плазмы. – М.:МАКС Пресс. 2005. –524 с.
22. Кадомцев Б.Б. Избранные труды. Т. 1. / Под. ред. Шафранова В.Д. – М. ФИЗМАТЛИТ. 2003. – 560 с.
23. Кадомцев Б.Б., Шафранов В.Д. Магнитное удержание плазмы // Успехи физических наук. – 1983. Т. 139. № 3. С.399 – 434.
24. Бетелин В.Б. «Цифровое месторождение» – путь к трудноизвлекаемым запасам углеводородов // Инновации. 2014. № 1 (183). С. 37 – 38.
25. Злобин А.А. Изучение механизма магнитной активации нефти для защиты добывающих скважин от асфальтеносмолопарафиновых отложений // Вестник ПНИПУ. Геология. Нефтегазовое и горное дело. 2017. Т16. № 1. С. 49 – 63.
26. Бычин И.В., Гореликов А.В., Ряховский А.В., Гавриленко А.В. МГД-течение вязкой несжимаемой жидкости в пористой среде при постоянной мощности потока // Вестник кибернетики. 2016. № 4. С. 42 – 49.
27. Брусенцов Н.А., Полянский В.А, Жуков А.В., Голубева И.С., Анисимов Н.В., Гуляев М.В., Пирогов Ю.А., Хохлов А.Р., Тищенко Д.А., Петухов В.Б., Никитин П.И., Никитин М.П., Ксенович Т.И., Брусенцова Т.Н., Кузнецов В.Д., Бочарова О.А., Барышников А.Ю. Ферримагнитогидродинамическая термохимиотерапия злокачественных опухолей магнитоуправляемыми

- нанолекарствами. Часть 1 // Сборник научных трудов 16-ой Международной Плесской научной конференции по нанодисперсным магнитным жидкостям. 2014. С. 293 – 298.
28. Брусенцов Н.А., Полянский В.А, Жуков А.В., Голубева И.С., Анисимов Н.В., Гуляев М.В., Пирогов Ю.А., Хохлов А.Р., Тищенко Д.А., Петухов В.Б., Никитин П.И., Никитин М.П., Ксенович Т.И., Брусенцова Т.Н., Кузнецов В.Д., Бочарова О.А., Барышников А.Ю. Ферромагнитогидродинамическая термохимиотерапия злокачественных опухолей магнитоуправляемыми нанолекарствами. Часть 2 // Сборник научных трудов 16-ой Международной Плесской научной конференции по нанодисперсным магнитным жидкостям. 2014. С. 299 – 306.
  29. Кашевский Б.Э., Кашевский С.Б., Терпинская Т.И., Улащик В.С. Магнитная гипертермия реальная и мнимая // Сборник научных трудов 16-ой Международной Плесской научной конференции по нанодисперсным магнитным жидкостям. 2014. с. 293 – 298.
  30. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х томах: Т. 1: Пер. с. англ. – М.: Мир. 1991. – 504 с.
  31. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х томах: Т. 2: Пер. с. англ. – М.: Мир. 1991. – 552 с.
  32. Hirsch C. Numerical computation of internal and external flows. V. 1: Fundamentals of computational fluid dynamics. Second Edition. Elsevier Science 2007. 680 p.
  33. Hirsch C. Numerical computation of internal and external flows. V. 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows. John Wiley & Sons Ltd. 1990. 714 p.
  34. Решетняк М.Ю. Моделирование в геодинамо. Монография. Германия. Саарбрюкен. Изд: Palmarium academic publishing. 2013. 180 с.
  35. Куликовский А.Г. Погорелов Н. В. Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит. 2004. – 608 с.



36. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – 3-е изд. – М.: Наука. 1992. – 424 с.
37. Murawski M. Numerical solutions of magnetohydrodynamic equations // Bulletin of the polish academy of sciences. Technical sciences. V. 59. №. 2. 2011. P. 219 – 226.
38. Pagliantini C. Computational Magnetohydrodynamics with Discrete Differential Forms. A thesis submitted to attain the degree of doctor of sciences of eth Zurich. 2016. 188 p.
39. Glatzmaier G. A. Introduction to Modeling Convection in Planets and Stars. Magnetic Field, Density Stratification, Rotation. Princeton. Princeton university press. 2014. 352 p.
40. Oberkampf W. L., Roy C. J. Verification and Validation in Scientific Computing. Cambridge University Press. 2010. 790 P.
41. Байкин А. Н., Головин С. В. Стационарный цилиндрический вихрь в вязкой электропроводной жидкости // Прикладная математика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 4. С. 33 – 44.
42. Аристов С.Н. Стационарный цилиндрический вихрь в вязкой жидкости // ДАН. 2001. Т. 377. № 4. С. 477 – 480.
43. Бояревич В. В., Фрайберг Я. Ж., Шилова Е. И., Щербинин Э. В. Электровихревые течения. / Под. ред. Щербинина Э. В. – Рига. Зинатие. 1985. – 315 с.
44. Сыроватский С. И. Магнитная гидродинамика // Успехи физических наук. 1957. Т. 62. № 3. С. 247 – 303.
45. Hartmann J. Hg-dynamics I: Theory of the laminar flow of anelectrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field. Det. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Matematiskfysiske Meddelser. T. XV (1937). № 6.
46. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. – Изд. 2-е. испр. и доп. – М.: Логос. 2005. – 328 с.
47. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регигер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Наука. 1970. 673 с.

48. Blewiss Z. O. Magneto-gas dynamics of hypersonic Couette flow, *JAS*, т. 25 (1958), № 10.
49. Alfven H. Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves // *Nature*. т. 150 (1942). № 3805.
50. Alfven H. On the existence of electromagnetic-hydrodynamic waves // *Arkiv f. mat., astron., o. fys.* т. 29 В (1943). № 2.
51. Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики. Пер. с. англ. / Под. ред. Любимова Г.А. – М. Мир. 1967. – 320 с.
52. Сакс Р.С., Решение спектральных задач для оператора ротора и стокса // *Уфимский мат. жур.*, Т. 5. №2.С. 63-81.
53. Parnowski A. S. Eigenmode analysis of ballooning perturbations in the inner magnetosphere of the Earth // *Ann. Geophys.* –2007. V. 25(6). pp. 1391–1403.
54. Aburjania G. D., Chargazia K. Z., Jandieri G. V., Khantadze A. G., Kharshiladze O. A. On the new modes of planetary-scale electromagnetic waves in the Ionosphere // *Annales Geophysicae* .– 2004. V. 22. pp. 1203–1211.
55. Rodrigues D. B., Pereira P. J. S., Limão-Vieiraa P., Stauffer P. R., Maccarini P. F. Study of the one dimensional and transient bioheat transfer equation: multi-layer solution development and applications // *Int J Heat Mass Transf.* –2013. V.62. pp. 153–162.
56. Poperechny I.S., Raikher Yu. L, Stepanov V.I. Ferromagnetic resonance in a dilute suspension of uniaxial superparamagnetic particles // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2017. V. 424. P. 185-188.
57. Ibrahim R. A. Recent Advances in Physics of Fluid Parametric Sloshing and Related Problems // *Journal of Fluids Engineering*. 2015. V. 137. ID 090801-1.
58. Задорожный А. И., Грунтфест Р. А. Собственные колебания жидкости конечной электропроводимости при наличии внешнего магнитного поля // *Прикладная математика и техническая физика*. 2000. Т. 41. № 3. С. 3 – 10.
59. Tisseur F. and Meerbergen K. The quadratic eigenvalue problem // *Siam review*. – 2001. V. 43. № 2. pp. 235–286.

60. Chu E.-K., Huang T.-M., Lin W.-W., Wu C.-T. Palindromic eigenvalue problems: a brief survey // *Taiwanese journal of mathematics*. –2010. V. 14. № 3A. pp. 743-779.
61. Dzedzic K., Kurnik W. Resonant vibrations in active magneto-hydrodynamic journal bearing subjected to kinematic excitation // *Proceedings of the Mini Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies*. 2004. pp. 553-560.
62. Xiao X., Gu J, Zhang L. Quadratic model updating with gyroscopic structure from partial eigendata // *Optimization and Engineering*. V. 14. I. 3 2013. pp. 431-455.
63. Кублановская В. Н. Метод Ньютона для определения собственных значений и собственных векторов матрицы // *ЖВМ и МФ*. 1972. Т. 12. № 6. с. 1371–1380.
64. Kılıc E., Schnattinger G., Siart U., Eibert T.F Electromagnetic Modelling of Material Loaded Cavity Resonators with a Filling Hole for Complex Resonant Frequency Determination // *EMTS 2013 – Proceedings*. 2013. № 6565842. Pages 726-729.
65. Bai Z., Su Y. SOAR: A second-order Arnoldi method for the solution of the quadratic eigenvalue problem // *Siam j. matrix anal. appl.* 2005. V. 26. № 3. pp. 640–659.
66. Wang X., Tang X.-B., Mao L.-Z. A modified second-order Arnoldi method for solving the quadratic eigenvalue problems // *Computers and Mathematics with Applications*. 2017. V. 73. I. 2. pp. 327-338.
67. Benner P., Faßbender H., Stoll M. Solving Large-Scale Quadratic Eigenvalue Problems with Hamiltonian eigenstructure using a Structure-Preserving Krylov Subspace Method // *Electronic Transactions on Numerical Analysis*. 2007. V. 29. P. 212-229.
68. Campos C., Roman J. E. Restarted Q-Arnoldi-type methods exploiting symmetry in quadratic eigenvalue problems // *BIT Numerical Mathematics*. 2016. V. 56. I. 4. P. 1213-1236.

69. Li T., Huang T.-M., Lin W.-W., Wang J.-N. An efficient numerical algorithm for computing densely distributed positive interior transmission eigenvalues // *Inverse Problems*. 2017. V. I. 3. № 035009.
70. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Том 6. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 С.
71. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч.1. М.: Наука. 1986. 640 С.
72. Валландер С.В., Лекции по гидроаэромеханике. Л: Из-во ЛГУ. 1978. 294 С.
73. Бетелин В. Б., Галкин В. А. Задачи управления параметрами несжимаемой жидкости при изменении во времени геометрии течения // *ДАН*. М.: Изд-во Академиздатцентр «Наука». 2015. Т.463. №2. С. 149-151.
74. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука. 1984. 352 с.
75. Гиматудинов Ш. К. Физика нефтяного и газового пласта. Изд. 2. М.: Недра. 1971. 312 с.
76. Ермеев А. М., Елпидинский А. А. О применении магнитного поля в процессах разрушения водонефтяных эмульсий // *Вестник казанского технологического университета*. 2013. Т. 16 № 2. С. 170-173.
77. Иголкина Г. В., Мезенина З. С. Исследование магнитных характеристик пород при изучении нефтегазовых бассейнов (на примере Кечимовского и Тевлино-Русскинского месторождений Западной Сибири) // *Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело»*. 2013. № 2. 52-71 С.
78. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. Т. 1. М.: Наука. 1991. 600 с.
79. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика. М.: Машиностроение. 1987. 440 с.
80. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. О слоистых течениях свободной конвекции // *Нелинейная динамика*. 2013. Т. 9. № 4. С. 651-657.
81. Тихонов А. Н, Самарский А. А., Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ. 1999.

82. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. 1982. 621 с.
83. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. 4-е. – Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. – 368 с.
84. Араманович И. Г., Левин В.И. Уравнения математической физике. Изд. 2-ое. – М.: Наука. 1969. 288 с.
85. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы (введение в теорию). М.: Наука. 1977. 441 С.
86. Бетелин В. Б. Проблемы создания отечественной технологии «Цифровое месторождение» // Международная конференция «Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе». Сургут. 2014. С. 15-17.
87. Вольпин С. Г., Юдин В. А., Кац Р. М., Афанаскин И. В., Галкин В. А. Применение суперкомпьютерных технологий — ключ к решению проблем повышения нефтеотдачи на месторождениях России // Санкт-Петербургский научный форум, VIII встреча лауреатов нобелевской премии. Санкт-Петербург. 2013. С. 90-92.
88. Галич Н. Е. Тепловая неустойчивость и пробой движущихся вязких жидкостей в электрическом поле и при поглощении света // Журнал технической физики. 1989. Т. 59. №. 7. С. 10-17.
89. Алтоиз Б. А., Савин Н. В, Шатагина Е. А. Влияние тепловыделения в микропрослойке жидкости при измерении ее вязкости // Журнал технической физики. 2014. Т. 84. № 5. С.21-27.
90. Круштанова Г. Г. Физика геосферы. Из-во КазГУ. Казань. 2004. 44 С.
91. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1981. 512 с.
92. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука. 1978. 512 с.
93. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат. 1984. 152 с.

94. Алгазин С. Д. О табулировании с высокой точностью нулей функций Бесселя // Известия ТулГУ. Естест. науки. 2013. Вып. 1. С. 132-141.
95. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука. 1965. 780 с.
96. Будаков Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука. 1980. 688 с.
97. Есьман Б. И., Дедусенко Г. Я., Яишникова Е. А. Влияние температуры на процесс бурения глубоких скважин. М.: Гостоптехиздат. 1962. 152 с.
98. Тараканов В. И. Уравнения с компактными операторами в гильбертовом пространстве и итерационные алгоритмы их решения. – Томск: Изд-во Томского политехн. университета. 2007. –251с.
99. Тараканов В. И., Нестеренко М. В. Итерационный алгоритм исследования и численного решения спектральных задач для линейного пучка компактных, частично симметричных операторов // СибЖВМ/РАН.Сиб.отд-ние. – Новосибирск, 2010. –Т.13.№3. –С.343-359.
100. Тараканов В. И., Лысенкова С. А. Итерационные алгоритмы определения устойчивости колебаний при наличии демпфирования // СибЖВМ/РАН.Сиб.отд-ние. –Новосибирск, 2012. –Т.15.№1. –С.103-119.
101. Tarakanov V. I., Nesterenko M. V. Iterative algorithm of investigation and numerical solving spectral problems for a linear bunch of compact, partially symmetrical operators //Numerical Analysis and Application, Pleiades Publishing Inc. –2012. –Vol. 3, №3, P. 279-293:DOI:10.1134/S1995423910030079.
102. Tarakanov V. I. and Lysenkova S. A. Iterative Algorithm of Determining the Stability of an Equation of Oscillations with Damping // Numerical analysis and application. Pleiades Publishing Inc., –2012. –Vol. 5, №1, P.84-98:DOI: 10.1134/S1995423912010089.
103. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир. 1979. 587с.
104. Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. М.: Изд-во МГУ. 1986. 366 с.

105. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. М.: Мир. 1983. 366 с.
106. Феодосьев В.И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инж. сборник. –1951. –Т. 10. –С.169 – 178.
107. Березовой В. П., Тур А. В., Яновский В. В. Динамика тонких труб под воздействием потока жидкости // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 2. С. 183 – 194.
108. Сафина Г. Ф. Сохранение частот колебания трубы с жидкостью // Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т. 15. № 3. С. 124 – 134.
109. Садовничий В.А. Теория операторов.— М.: Изд-во МГУ. 1983. 366 с.