

На правах рукописи

Работа выполнена в Институте проблем безопасного развития атомной энергетики РАН (ИБРАЭ РАН)

Глотов Вячеслав Юрьевич

**Математическая модель свободной турбулентности на
основе принципа максимума**

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2015

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Головизнин Василий Михайлович

Официальные оппоненты: **Смирнов Евгений Михайлович**
доктор физико-математических наук,
профессор, зав. кафедрой гидро-
аэродинамики Санкт-Петербургского
Государственного Политехнического
Университета

Глазунов Андрей Васильевич
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник Института
Вычислительной Математики РАН

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Вычислительный центр
им. А.А. Дородницына РАН

Защита состоится _____ 201_ г. в ____ часов на заседании
диссертационного совета Д 002.024.03 при Институте прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН по адресу 125047, г. Москва, Миусская пл., 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМ им. Келдыша РАН и
на сайте _____.

Автореферат разослан _____ 201_ года.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук

Н.В. Змитренко

Глотов Вячеслав Юрьевич

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СВОБОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА
ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

АВТОРЕФЕРАТ

Подписано в печать _____ г. Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 1.0.
Тираж 70 экз. Заказ №.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ghosal S. *An Analysis of Numerical Errors in Large-Eddy Simulation of Turbulence* // Journal of Computational Physics, 1996. **125**: p. 187-206.
2. Boris J.P. et al. *New Insights into Large Eddy Simulation* // Fluid Dynamics Research, 1992. **10**: p. 199-228.
3. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. *Compact Accurately Boundary-Adjusting high-REsolution Technique for fluid dynamics* // Journal of Computational Physics, 2009. **228**(19): p. 7426-7451.
4. Hirsch C. *Numerical computation of internal and external flows*. Vol. 1. 2001: Eastbourne: Antony Rowe Ltd.
5. Головизнин В.М., Карабасов С.А. *Нелинейная коррекция схемы КАБАРЕ* // Математическое моделирование, 1998. **10**(12): p. 107-123.
6. Jiang G.S., Shu C.W. *Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes* // Journal of Computational Physics, 1996. **126**: p. 202-228.
7. Smagorinsky J. *General Circulation Experiments with the Primitive Equations* // Monthly Weather Review, 1963. **91**(3): p. 99-164.
8. Jameson A. *The Construction of Discretely Conservative Finite Volume Schemes that Also Globally Conserve Energy or Entropy* // J. Sci. Comput, 2008. **34**: p. 152-187.
9. Kraichnan R.H. *Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence* // The Physics of Fluids, 1967. **10**(7): p. 1417-1423.
10. Saffman P.G. // Stud. Appl. Maths, 1971. **50**.
11. Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. *Введение в теорию концентрированных вихрей*. 2003, Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН. 504.
12. Роуч П., *Вычислительная гидродинамика*. 1980, Мир: Москва. p. 606.
13. Walsh O. *Eddy solutions of the Navier-Stokes equations* // The NSE II-Theory and Numerical Methods, 1992: p. 306-309.
14. Brachet M. *Direct simulation of the three-dimensional turbulence in the Taylor-Green vortex* // Fluid Dynamics Research, 1991. **8**: p. 1-8.
15. Garnier E. et al. *On the use of shock-capturing schemes for large-eddy simulation* // Journal of Computational Physics, 1999. **153**: p. 273-311.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Проблема моделирования турбулентности по-прежнему остаётся одной из наиболее сложных и актуальных проблем механики жидкостей. Неудовлетворенность существующими полуэмпирическими моделями турбулентности, с одной стороны, и возросшие возможности современной вычислительной техники с другой, стимулируют поиск новых более строгих и универсальных подходов к расчету турбулентных течений. Такие подходы зачастую опираются непосредственно на нестационарные трехмерные уравнения Навье-Стокса.

В работе [1] было показано, что численная диссипация схемы может быть сравнима с диссипацией подсеточной модели, и, вообще, маскировать её. Это значит, что усилия по совершенствованию вычислительных моделей турбулентности можно (может быть, даже с большим успехом) сосредоточить на разработке разностных схем с улучшенными диссипативными и дисперсионными свойствами.

В 1992 году группа авторов во главе с J.P. Boris [2] предложила новую технику монотонного интегрирования крупных вихрей MILES (ILES). Идея MILES довольно простая. Так как турбулентность характеризуется высоким уровнем флуктуаций завихренности, то для моделирования течения с большими градиентами завихренности можно попытаться использовать т.н. схемы высокой разрешающей способности, использующиеся для моделирования невязких течений с ударными волнами. Одним из способов построения таких схем является использование нелинейной коррекции потоков, например, TVD-лимитеров. Фильтрация «подсеточных» пульсаций осуществляется в них неявно, без введения искусственной вязкости.

Существуют как сторонники, так и противники этого подхода. К плюсам MILES моделирования можно отнести отсутствие каких-либо полуэмпирических моделей турбулентности и настроечных параметров (прямое моделирование уравнение Навье-Стокса), нет проблем с устойчивостью и сходимостью численных решений, а значит MILES обладают большей универсальностью и простотой по сравнению с LES/RANS. Главный недостаток MILES – это их плохое физическое обоснование. Несмотря на вычислительную эффективность и имеющиеся примеры использования, полученные результаты нуждаются в тщательной проверке. В существенной степени успех применения подхода определяется удачным выбором разностной схемы для дискретизации конвективных потоков. В этой связи разработка новых эффективных MILES алгоритмов, исследование и понимание их свойств и возможностей является актуальной задачей вычислительной математики.

Исходной точкой для построения математической модели стал выбор базового вычислительного алгоритма (разностной схемы). Основным

требованием к исходному алгоритму стала его минимальная внутренняя (схемная) диссипация и максимально компактный вычислительный шаблон. Среди схем второго порядка точности этим требованиям удовлетворяют только две схемы – это схема КАБАРЕ [3] и схема Крест [4] (LeapFrog). Схема КАБАРЕ хорошо зарекомендовала себя в случае сжимаемых сред (в ударно-волновых и аэроакустических задачах) и ее нужно было обобщить на случай несжимаемой жидкости. Схема Крест нуждалась в обобщении на неравномерные пространственно-временные расчетные сетки с сохранением свойств бездиссипативности и консервативности.

Также в работе исследовался новый класс гибридных схем «*hybrid a*», полученных в результате линейной комбинации направленной (КАБАРЕ) и центральной (Крест) аппроксимации конвективных членов. Введение такой гибридизации позволило в широком диапазоне изменять диссипативные и дисперсионные свойства базовой схемы, заложенной в модели турбулентности, и, тем самым, оптимизировать её свойства. К отличительным особенностям рассматриваемых схем можно отнести *компактность* их вычислительного шаблона (схемы строятся в пределах одной пространственно-временной ячейки), *улучшенные дисперсионные и диссипативные свойства, явность, консервативность, второй порядок аппроксимации по пространству и времени*, простота и естественность задания граничных условий (*балансно-характеристическая форма*), простота параллельной реализации. Наличие таких свойств делает их потенциально весьма перспективными в задачах со свободной турбулентностью и выделяет их вычислительной простотой из ряда схем высокой разрешающей способности.

Далее, нужно было сконструировать сеточный диссипативный механизм, который сохранял бы статистические характеристики турбулентных течений в инерционном интервале для вихрей всех размеров, представимых на заданной расчетной сетке. Исходным было предположение, что таким механизмом может оказаться нелинейная коррекция потоков на основе принципа максимума [5], предложенная ранее для схемы КАБАРЕ для обеспечения монотонности газодинамических течений. И оно в полной мере подтвердилось.

Цель работы

Разработка математической модели, относящейся к классу Implicit LES, для расчета течений со свободной турбулентностью в несжимаемой жидкости на основе принципа максимума.

Научная новизна

1. Методика КАБАРЕ обобщена на случай несжимаемой жидкости в переменных «скорость-давление» и «завихренность-функция тока» на ортогональных сетках. На серии тестовых расчетов проведено

1. Глотов В.Ю., Данилин А.В. Надсеточное моделирование двумерных вихревых течений в несжимаемой жидкости в переменных вихрь-функция тока // Препринт №IBRAE-2010-01. – М.: ИБРАЭ РАН, 2010. – 188 с.
2. Глотов В.Ю., Головизнин В.М. Схема КАБАРЕ для несжимаемой жидкости в переменных скорость-давление // Труды 53-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук», Часть VIII, Проблемы современной физики. – М.: МФТИ, 2010. – С. 119-121.
3. Глотов В.Ю. Схема КАБАРЕ для трехмерной несжимаемой жидкости // Препринт №IBRAE-2011-03. – М.: ИБРАЭ РАН, 2011. – 166 с.
4. Глотов В.Ю. Схема КАБАРЕ для несжимаемой жидкости // Труды XIV молодежной конференции-школы с международным участием «Современные проблемы математического моделирования». – Ростов-на-Дону: издательство Южного федерального университета, 2011. – С. 96-101.
5. **Глотов В.Ю., Головизнин В.М. Схема КАБАРЕ для двумерной несжимаемой жидкости в переменных завихренность-функция тока // Математическое моделирование – 2011. – Т. 23, № 9 – С. 89-104.**
6. Глотов В.Ю., Яковлев П.Г. Методика КАБАРЕ на треугольных сетках // Препринт №IBRAE-2012-02. – М.: ИБРАЭ РАН, 2012. – 146 с.
7. Глотов В.Ю. Схема КАБАРЕ для двухуровневой технологии расчетов задач флуктуационной гидродинамики // Препринт №IBRAE-2013-03. – М.: ИБРАЭ РАН, 2013. – 181 с.
8. **Глотов В.Ю., Головизнин В.М. Схема КАБАРЕ для двумерной несжимаемой жидкости в переменных давление-скорость // Журнал вычислительной математики и математической физики – 2013. – Т. 53, № 6 – С.721-735.**
9. Goloviznin V.M., Glotov V.Yu., Markesteijn A.P., Karabasov S.A. Computational modeling of multiscale problems of fluctuating hydrodynamics // Суперкомпьютерные технологии математического моделирования: Тез. докл. – Якутск: издательский дом СВФУ, 2013. – С. 29.
10. Глотов В.Ю., Головизнин В.М., Карабасов С.А., Маркештейн А.П. Математическое моделирование задач флуктуационной гидродинамики с использованием алгоритмов следующего поколения // 11-ый Международный Междисциплинарный Семинар LPrM3-XI: Сборник тезисов – Будва, 2013 – С. 44.
11. Головизнин В.М., Глотов В.Ю. Моделирование однородной изотропной турбулентности по схеме КАБАРЕ // Сборник тезисов докладов научной конференции «Тихоновские чтения». – М.: МАКС Пресс, 2013. – 84 с.
12. **Глотов В.Ю., Головизнин В.М., Карабасов С.А., Маркештейн А.П. Новая схема «нелинейный крест» для моделирования стохастических уравнений Ландау-Лифшица // Журнал вычислительной математики и математической физики – 2014. – Т. 54, № 2 – С. 165-184.**

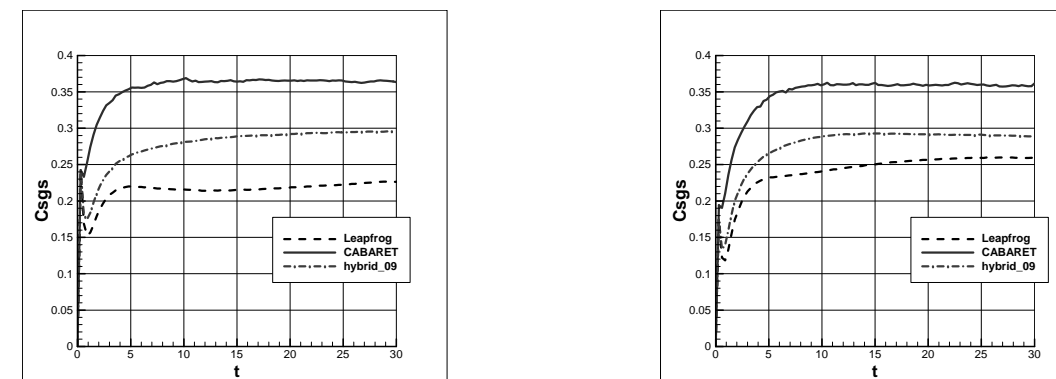


Рис. 17. Обобщенная константа Смагоринского в зависимости от времени для схем КАБАРЕ, «двухслойный крест» и «hybrid_09» на сетках 64^3 (слева) и 128^3 (справа).

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Предложена консервативная форма представления схемы Крест посредством введения консервативных и потоковых переменных. По аналогии со схемой КАБАРЕ предложен алгоритм монотонизации потоковых переменных на основе принципа максимума, устраняющий нелинейную неустойчивость Филлипса.
2. Методика КАБАРЕ обобщена на случай несжимаемой жидкости в переменных «скорость-давление» и «завихренность-функция тока». Проведен сравнительный анализ решений в разных наборах переменных.
3. Разработан комплекс параллельных программ (ориентированный на многопроцессорный вычислительный комплекс «Ломоносов»), для моделирования уравнений Навье-Стокса в несжимаемой жидкости на ортогональных сетках (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012618645).
4. Исследованы свойства полученных алгоритмов на серии модельных задач. Проведено сравнение решений с популярными в литературе схемами Аракавы, WENO-5. Показано, что при моделировании стационарных одиночных вихрей схема КАБАРЕ обладает свойством бездиссипативности.
5. Сформулирована концепция Perfect LES-алгоритма. Разработана математическая модель, относящаяся к классу Implicit LES, для расчета течений со свободной турбулентностью, обладающая свойством Perfect LES-алгоритма.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Результаты работы были опубликованы в 12 печатных работах, в том числе в трех (выделенных жирным шрифтом) из списка ВАК.

комплексное исследование свойств полученных алгоритмов. Новым элементом является обратимость по времени полученного алгоритма, при отсутствии пересечений характеристики одного семейства.

2. Предложена новая двухслойная консервативная модификация схемы Крест (Leapfrog), с разнесенными консервативными и потоковыми переменными, сохраняющая второй порядок аппроксимации на неравномерных пространственно-временных расчетных сетках. Введена коррекция потоковых переменных по принципу максимума, предотвращающая развитие нелинейной неустойчивости Филлиппса.
3. На основе схем «двухслойный крест» и КАБАРЕ построен целый класс гибридных схем, как линейной комбинации центральной и направленной экстраполяции при вычислении потоковых переменных. Проведен сравнительный анализ схем в одномерном, двумерном и трехмерном случаях.
4. Предложена математическая модель свободной турбулентности на основе принципа максимума, принадлежащая к классу Implicit LES.

Научная и практическая значимость

Данная работа имеет полностью методический характер. В работе построена математическая модель свободной турбулентности, принадлежащая к классу Implicit LES, проведено комплексное исследование свойств полученной модели на задаче об однородной изотропной турбулентности. Результаты проделанной работы являются основой для дальнейшего обобщения предложенной методики на более сложные виды течений, геометрию и расчетные сетки. В настоящее время они используются в ИБРАЭ РАН при расчетах перемешивания турбулентных затопленных струй водорода под защитным куполом АЭС при вероятностном анализе безопасности.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

1. XI Школа молодых ученых ИБРАЭ РАН, доклад на тему «Надсеточное моделирование двумерных вихревых течений в несжимаемой жидкости в переменных вихрь-функция тока», Москва, ИБРАЭ РАН, 22-23 апреля 2010.
2. 53-я научная конференция МФТИ, доклад на тему «Схема КАБАРЕ для несжимаемой жидкости в переменных скорость давление», МФТИ, 22-29 ноября 2010.
3. XII Школа молодых ученых ИБРАЭ РАН, доклад на тему «Схема КАБАРЕ для несжимаемой жидкости», Москва, ИБРАЭ РАН, 28-29 апреля 2011.

4. XIV Всероссийская молодежная конференция-школа с международным участием «Современные проблемы математического моделирования», доклад на тему «Схема КАБАРЕ для несжимаемой жидкости», Абрау-Дюрсо, 12-17 сентября 2011.
5. XIII Школа молодых ученых ИБРАЭ РАН, доклад на тему «Методика КАБАРЕ на треугольных сетках», Москва, ИБРАЭ РАН, 26-27 апреля 2012.
6. XIV Школа молодых ученых ИБРАЭ РАН, доклад на тему «Схема КАБАРЕ для двухуровневой технологии расчетов задач флуктуационной гидродинамики», Москва, ИБРАЭ РАН, 25-26 апреля 2013.
7. SSTEMM 2013, Вторая международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования», доклад на тему «Computational modeling of multiscale problems of fluctuating hydrodynamics», Якутск, 8-11 июля 2013.
8. 11-ый Международный Междисциплинарный Семинар LPrM3-XI. Доклад на тему «Математическое моделирование задач флуктуационной гидродинамики с использованием алгоритмов следующего поколения», Черногория, г. Будва, 14-21 сентября 2013.
9. Научная конференция «Тихоновские чтения 2013», доклад на тему «Моделирование однородной изотропной турбулентности по схеме КАБАРЕ», Москва, ВМК МГУ, 28 октября - 1 ноября, 2013.

Личный вклад автора

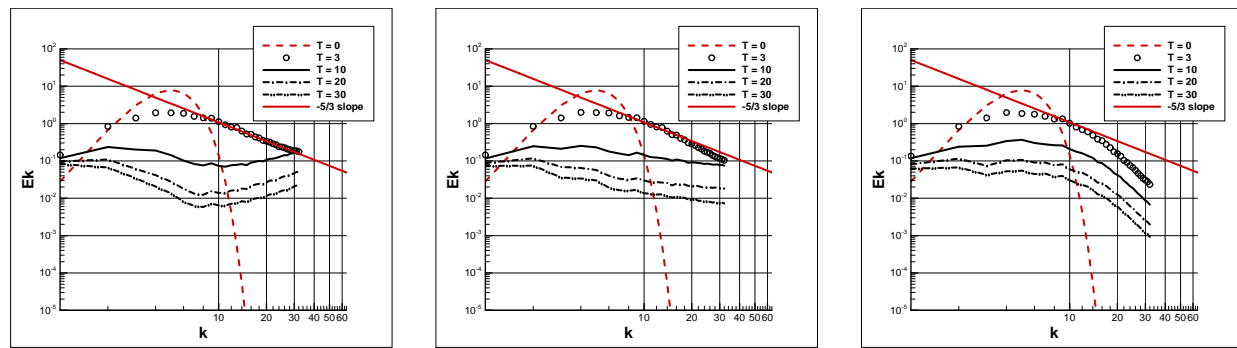
Все научные результаты, вынесенные на защиту, получены лично автором. Цели, задачи, основные идеи и результаты работы детально обсуждались с научным руководителем В.М. Головизниным.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Общий объём диссертации составляет 134 страницы. Список литературы содержит 97 наименований.

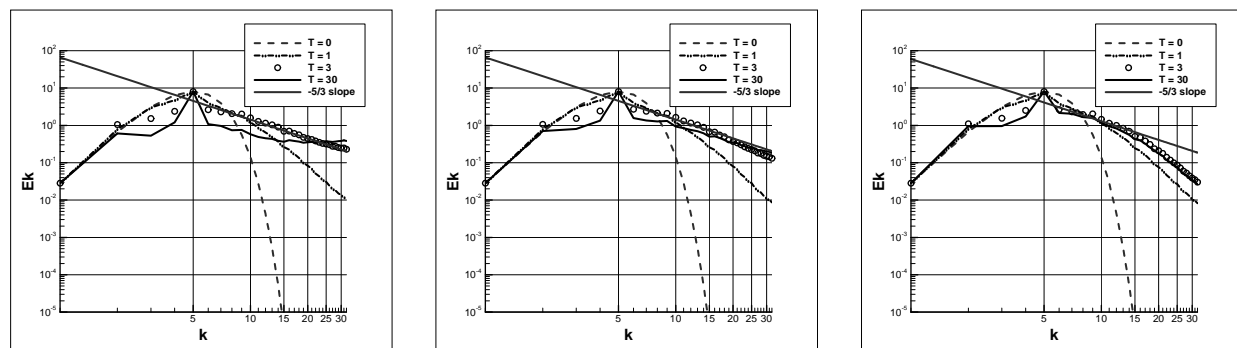
ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приведен краткий обзор существующих методов моделирования турбулентности и истории их развития: прямое численное моделирование DNS, полуэмпирические модели RANS, модели подсеточной вязкости LES, гибридные модели LES-RANS (DES), неявное моделирование крупных вихрей ILES/MILES. Подчеркиваются их достоинства и недостатки.



«двухслойный крест»
 «hybrid_09»
 КАБАРЕ
 Рис. 15. Энергетические спектры в задаче со случайным полем скоростей на больших временах. Сетка 64^3 . Число Куранта $CFL=0.3$.

Такое же поведение спектров обнаруживается и в квазистационарном случае при наличии форсинга на низких частотах (рис. 16).



«двухслойный крест»
 «hybrid_09»
 КАБАРЕ
 Рис. 16. Энергетические спектры в задаче со случайным полем скоростей с форсингом на больших временах. Сетка 64^3 . Число Куранта $CFL=0.3$.

В заключительном шестом параграфе делается попытка оценить способность внутренней диссипации схем имитировать действие подсеточной вязкости в LES моделях. Вводится обобщенная константа Смагоринского [15] из отношения численной диссипации, к диссипации подсеточной модели $C_{sgs} = \sqrt{\varepsilon_{num} / \varepsilon_{sgs}}$. Для моделирования однородной изотропной турбулентности используется значение константы Смагоринского $C_s \approx 0.2$. Степень близости обобщенной константы к этому значению и будет критерием для оценки диссипации схем (рис. 17).

К примеру, в статье (Brachet, 1991) [14] проводится прямое численное моделирование вихря Тейлора-Грина на сетке 864^3 при числе Рейнольдса $Re=5000$ спектральным методом. В данной работе решения, полученные на грубых сетках, сравниваются с результатами DNS-моделирования (рис. 13).

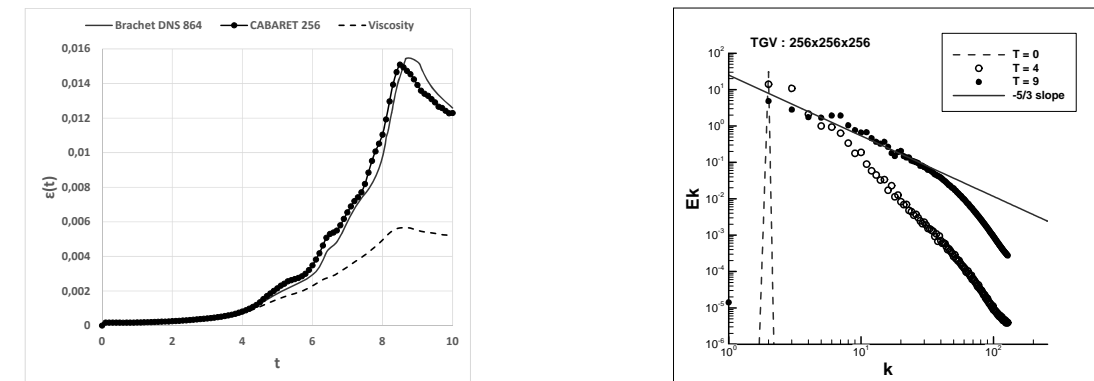


Рис. 13. Скорость диссипации кинетической энергии (слева) и энергетический спектр (справа). Схема КАБАРЕ. Сетка 256^3 . Число Куранта $CFL=0.3$.

Было показано, что схема КАБАРЕ дает хорошее совпадение результатов с DNS-расчетами на сетках примерно в 3 раза более грубых по каждому направлению. Вместе с этим заметно сильное численное демпфирование структур определенных менее чем на 5 узлах расчетной сетки. В схеме «двухслойный крест» такого демпфирования нет. Это хорошо видно из расчетов без молекулярной вязкости (рис. 14).

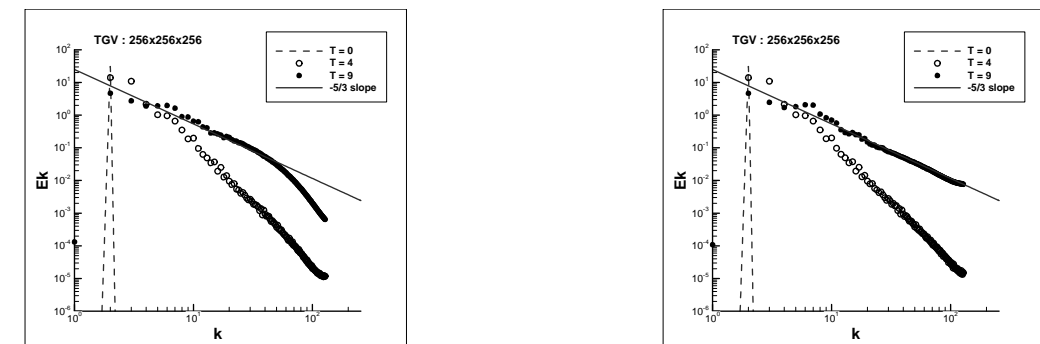


Рис. 14. Сравнение энергетических спектров в задаче о невязком вихре Тейлора-Грина по схеме КАБАРЕ (слева) и «двухслойный крест» (справа)

Однако в схеме «двухслойный крест» есть значительный недостаток. На больших временах спектры загибаются вверх. В четвертом параграфе это отчетливо прослеживается в задаче со случайным полем скоростей, где начальные параметры спектральной кривой можно сильно варьировать. Использование гибридных схем позволяет избавиться от этого недостатка (рис. 15).

Вводится концепция идеального LES-алгоритма (Perfect LES, PLES). Формулируются цели и задачи работы, даётся краткое содержание работы.

В первой главе диссертации на примере простейшего одномерного линейного уравнения переноса приводятся разностные схемы КАБАРЕ и «двухслойный крест». Сравниваются диссипативные и дисперсионные поверхности этих схем. Вводится понятие гибридной схемы как линейной комбинации направленной и центральной экстраполяции при вычислении потоковых переменных. Проводится спектральный анализ гибридных схем (рис. 1).

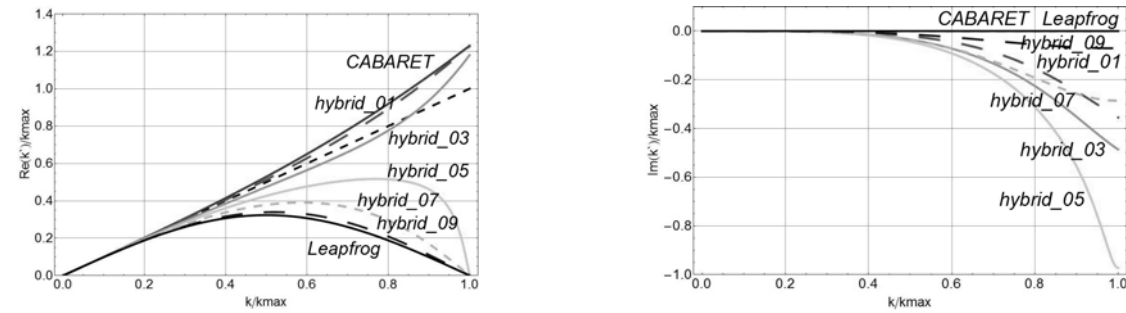


Рис. 1. Дисперсионные (слева) и диссипативные (справа) кривые гибридных схем. Число Куранта CFL=0.3.

В четвертом параграфе первой главы вводится нелинейная коррекция потоковых переменных по принципу максимума. Далее, проводится численный расчет диссипативных и дисперсионных ошибок в нелинейных схемах с коррекцией. Результат сравнивается со схемами «WENO5-LF-RK3» [6] и центральными разностями второго порядка «CD2_020» с вязкостью фон Неймана-Рихтмайера. Коэффициент вязкости взят равным 0.2, как в модели Смагоринского [7]. Наименее диссипативна схема «двухслойный крест». Если сравнить её диссипацию с вязкой диссипацией в LES-модели Смагоринского («CD2_020»), то она примерно вдвое меньше. Минимальная дисперсия в схеме КАБАРЕ (рис. 2).

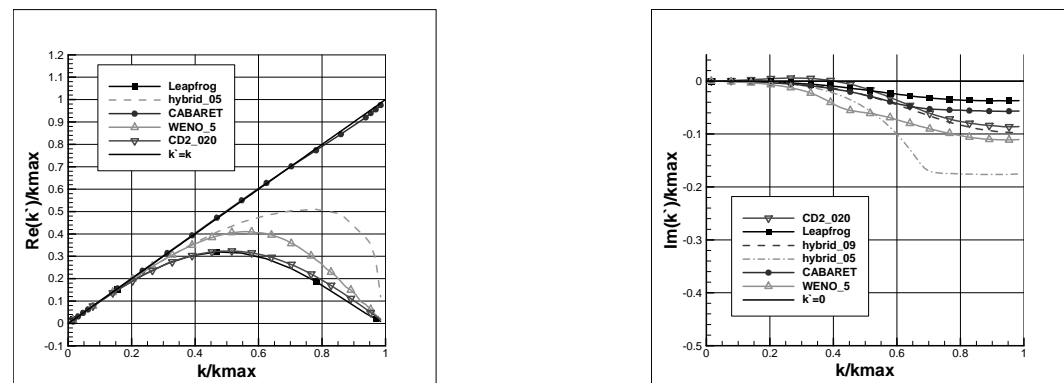


Рис. 2. Дисперсионные (слева) и диссипативные (справа) кривые нелинейных схем. Число Куранта CFL=0.3.

В шестом параграфе приводится расчет задачи о переносе начального профиля на неравномерных сетках. Далее, рассматривается уравнение Бюргерса, содержащее нелинейность в адвективном слагаемом. Приводятся результаты решения задачи Коши для закона сохранения $\partial_t u + \partial_x (u^2/2) = 0$ с периодическими граничными условиями и начальным профилем в виде прямоугольника (рис. 3).

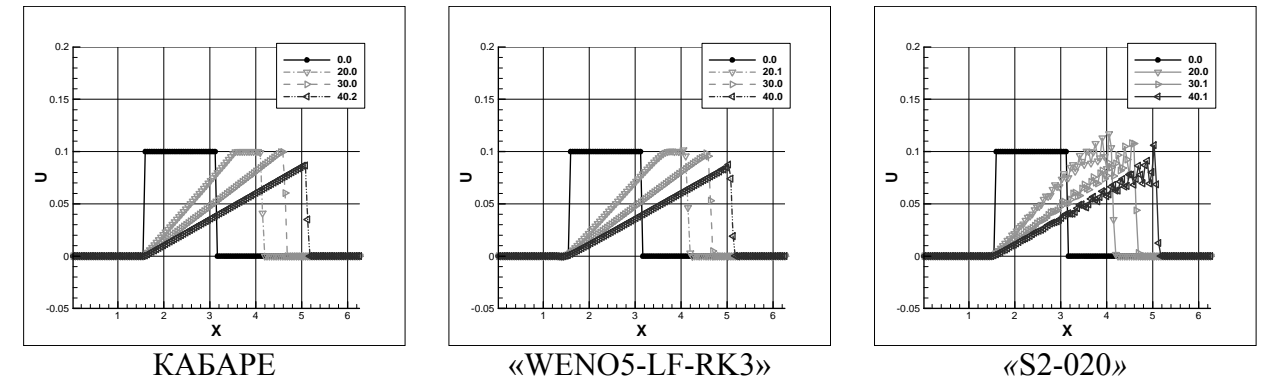
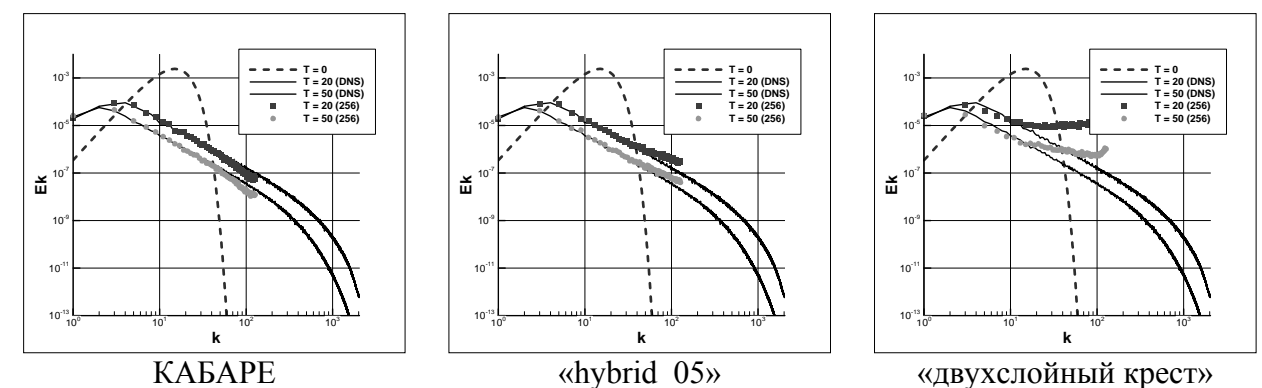


Рис. 3. Расчет «ступеньки» по разным схемам. Числа Куранта CFL=0.3

Схема КАБАРЕ монотонна и размывает передний фронт «ступеньки» на одну расчетную ячейку, что характерно для схем высокой разрешающей способности. Схема «WENO5-LF-RK3» также монотонна и размывает передний фронт на две ячейки, а кососимметричная схема второго порядка [8] «S2-020» с вязкостью фон Неймана-Рихтмайера примерно на 3 и за фронтом образуются нефизические осцилляции. Схема «двухслойный крест» и гибридные схемы также не монотонны и размывают передний фронт на 2-3 ячейки.

Далее проводится прямое численное моделирование (DNS) одномерной турбулентности («бюргюленции») на сетке $N=4096$ по всем рассматриваемым схемам. Колмогоровский масштаб разрешается на 4-ех узлах сетки. Результаты различаются только в области коротких волн. В последнем параграфе первой главы сравниваются расчеты «бюргюленции» на грубых сетках, не разрешающих колмогоровский масштаб, с DNS расчетом. Результаты для сетки $N=256$ и числа Куранта $CFL=0.3$ приведены на рис. 4.



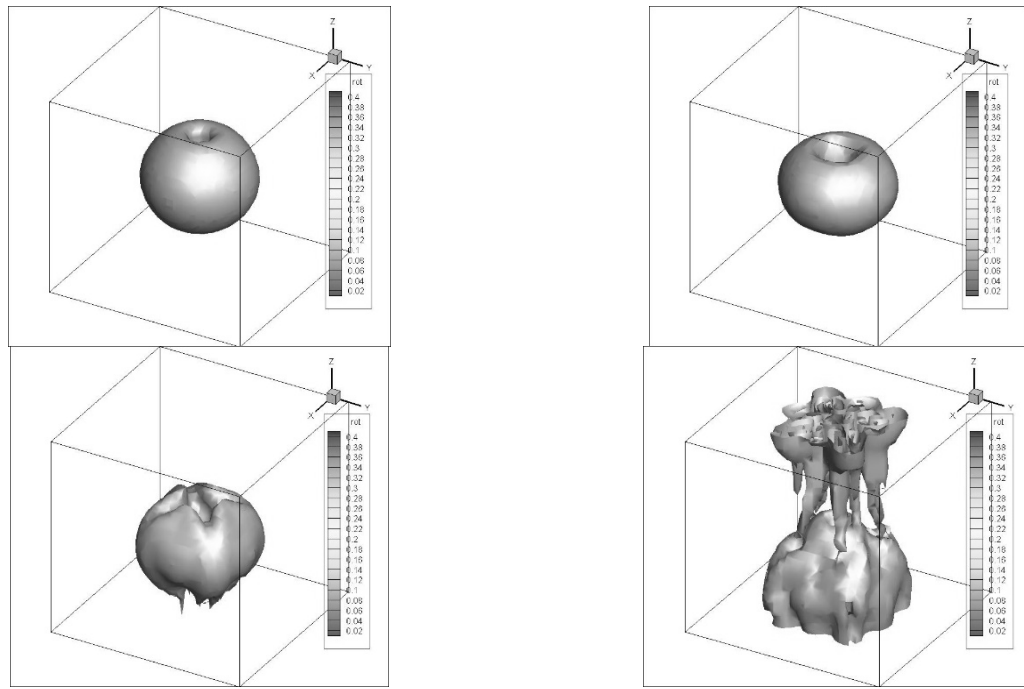


Рис. 11. Изоповерхности модуля завихренности вихря Хилла в начальный момент времени и через 1, 2 и 3 пролета вдоль оси Z. Схема КАБАРЕ. Сетка 32^2 . Число Куранта $CFL=0.3$.

В третьем параграфе моделируется одночастотный вихрь Тейлора-Грина, в результате распада которого происходит возбуждение малых масштабов и формирование энергетического спектра (рис. 12).

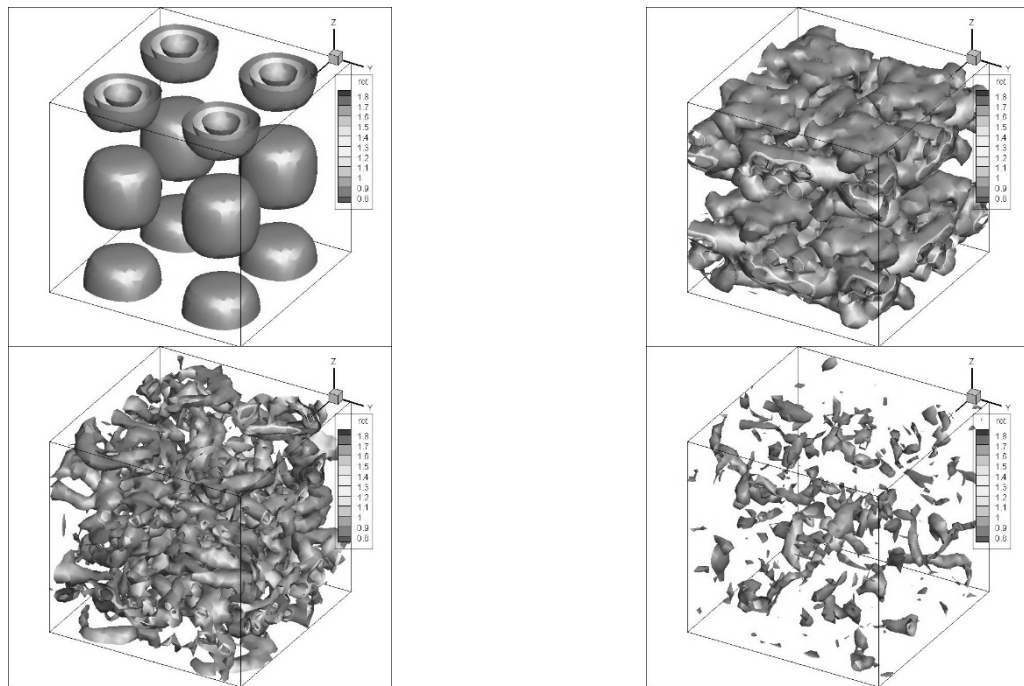


Рис. 12. Эволюция во времени изоповерхности модуля завихренности вихря Тейлора-Грина. Схема «КАБАРЕ». Сетка 32^2 . Число Куранта $CFL=0.3$.

В литературе широко распространен подход моделирования затухающей однородной изотропной турбулентности, порождаемой вихрем Тейлора-Грина.

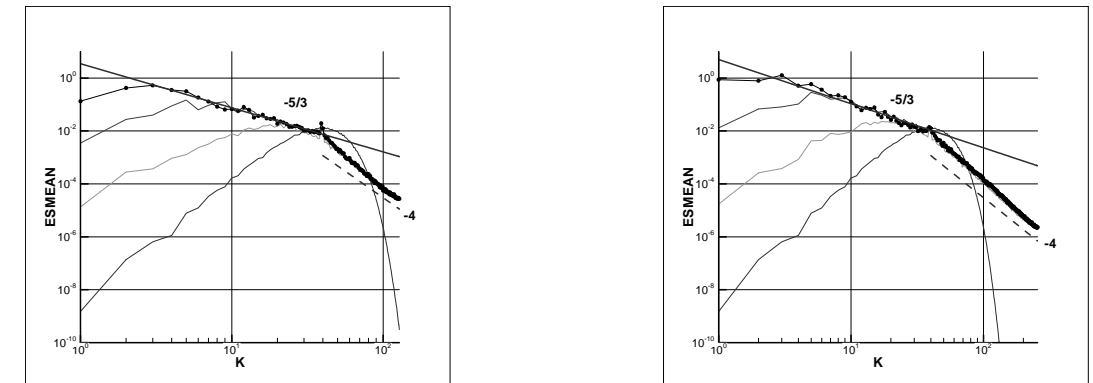


Рис. 9. Энергетические спектры на сетках 256^2 (слева) и 512^2 (справа) с форсингом.

В четвертой главе в первом параграфе моделируется устойчивый колоннообразный вихрь Рэнкина [11] (рис. 10).

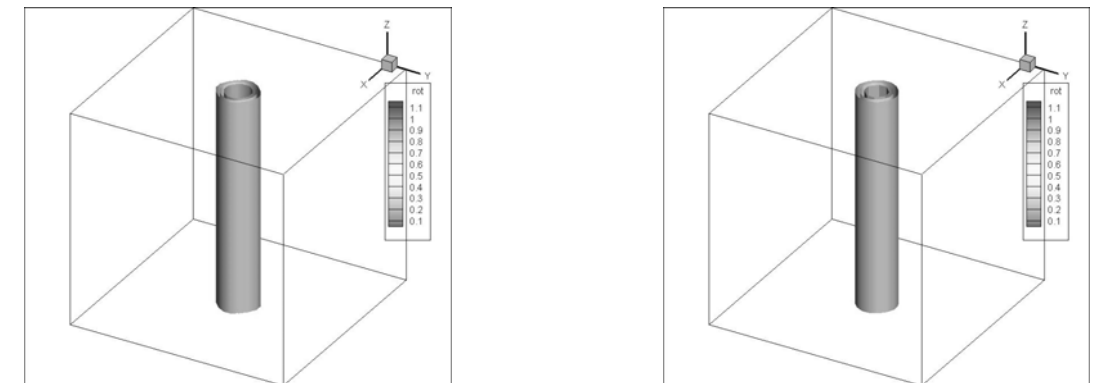


Рис. 10. Изоповерхности модуля завихренности вихря Рэнкина в начальный момент времени (слева) и через 100 оборотов (справа). Схема КАБАРЕ. Сетка 32^2 (5 точек на диаметр вихря). Число Куранта $CFL=0.3$.

Решение по схеме КАБАРЕ устойчиво и стационарно. Диссипация возникает только в начальный момент времени, на первом обороте вихря, и тем меньше, чем подробнее сетка.

Во втором параграфе моделируется другой тип вихрей, широко встречающихся в обыденной жизни – вихревые кольца. Простейшая модель вихревого кольца – сферический вихрь Хилла [11]. Вихревые линии являются концентрическими окружностями с общей осью, проходящей через центр сферы, а линии тока лежат в меридиональных плоскостях. Вихрь Хилла движется вдоль некоторой оси и неустойчив (рис. 11).

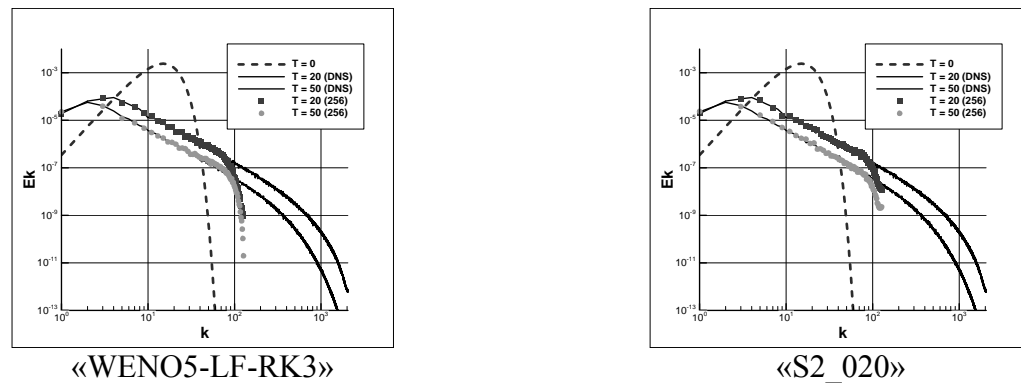


Рис. 4. Энергетические спектры «бюргюленции» на грубой сетке 256 в сравнении с DNS
4096

Наилучшие результаты получаются по схеме КАБАРЕ – наклон инерционного интервала сохраняется на всех частотах, разрешенных сеткой. В схеме «двухслойный крест» внутренней диссипации не достаточно для увода энергии пульсаций на подсеточный уровень, происходит накопление энергии на коротких волнах. Гибридные схемы более диссипативны и дают промежуточные результаты между схемами КАБАРЕ и «двухслойный крест». Для сравнения приводятся расчеты по схемам «WENO5-LF-RK3» (MILES) и «S2_020» с моделью Смагоринского (LES). Спектры в области высоких частот сильно загнуты вниз, т.е. мелкомасштабные структуры испытывают сильное численное демпфирование.

Прежде чем переходить к двумерным и трехмерным задачам во **второй главе** приводится краткий обзор существующей теории двумерной и трехмерной однородной изотропной турбулентности, результатов её численного моделирования и экспериментальных данных. Основное внимание уделено двумерным течениям, т.к. в этом случае есть некоторая неопределённость с теорией энстрофийного каскада (существуют несколько конкурирующих теорий: KLB [9], Саффмана [10], Моффата, Полякова и другие).

В **третьей главе** в первом параграфе предложено обобщение схемы КАБАРЕ на двумерные ортогональные сетки для решения уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости. Схема КАБАРЕ может быть представлена в виде трех этапов или фаз. На первой фазе (предиктор) вычисляются промежуточные значения консервативных переменных на полуслое по времени. Силы давления вычисляются как реакция системы на нарушение условия соленидальности поля скоростей. На втором этапе проводится линейная экстраполяция инвариантов Римана (которые для несжимаемой жидкости совпадают с компонентами скорости) на новый слой по времени, коррекция потоковых переменных по принципу максимума и дивергенизация нормальных к граням компонент скорости. На третьем этапе (корректор) вычисляются консервативные переменные на новом временном слое.

Во втором параграфе проводится обобщение методики КАБАРЕ в другой паре переменных – «завихренность-функция тока». Это делается для

демонстрации того, что свойства схемы сохраняются в разных наборах переменных, что не очевидно.

Далее, приводятся примеры тестовых расчетов. В задаче об одиночном вихре Гаусса [11] демонстрируется бездиссипативность схемы КАБАРЕ. Вихрь стационарен, устойчив, сохраняет свою форму в течении длительного времени (рис. 5). Это уникальное свойство связано с временной обратимостью схемы при отсутствии пересечения характеристик одного семейства.

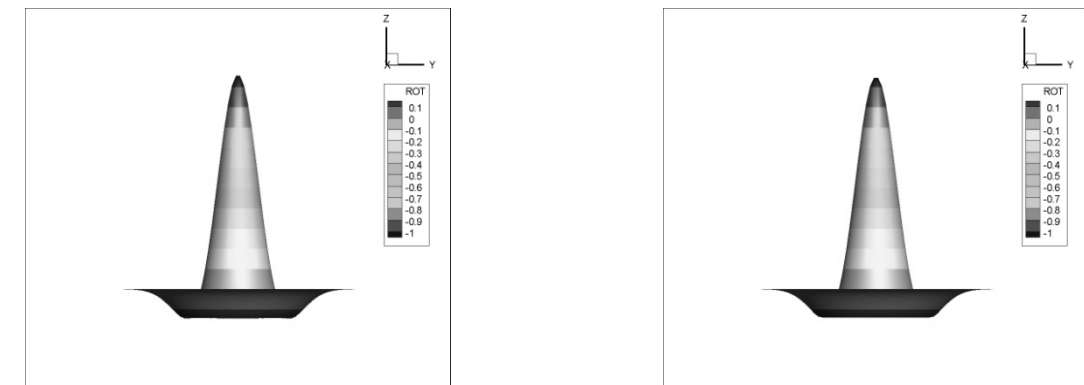


Рис. 5. Начальный профиль завихренности одиночного вихря Гаусса (слева) и через ~3000 оборотов (справа).

Для демонстрации дисперсионных свойств задается трансляционное движение (снос с постоянной скоростью вдоль какого-либо направления). В моменты времени кратные трансляционному периоду вихрь должен возвратится в своё начальное положение. На рис. 6 показаны профили движущегося вихря в начальный момент времени и через 8 периодов по схемам КАБАРЕ и Аракавы [12] на сетке 32^2 , число Куранта $CFL=0.2$.

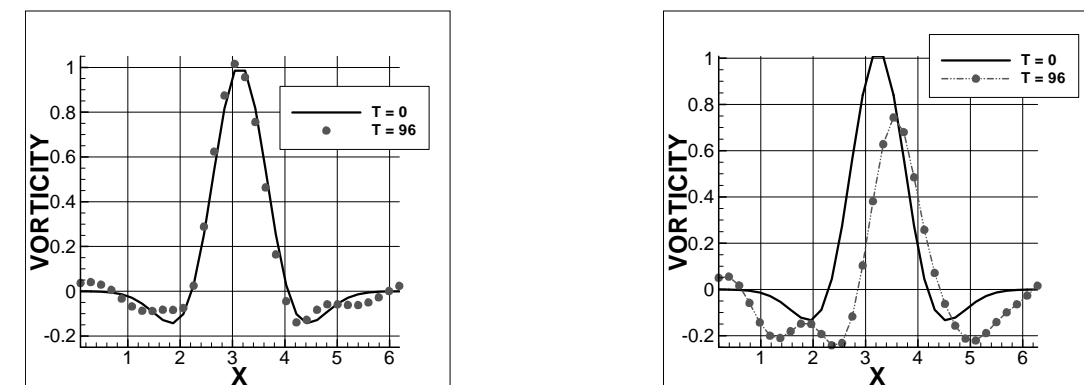


Рис. 6. Профили завихренности движущегося вихря Гаусса в начальный момент времени и через 8 периодов по схемам КАБАРЕ (слева) и Аракавы (справа).

В другом тесте, задача Уолша [13], численное решение сравнивается с аналитическими. Показан второй порядок сходимости схемы КАБАРЕ на серии сгущающихся сеток.

Во третьем параграфе второй главы моделируется затухающая однородная изотропная турбулентность (рис. 7).

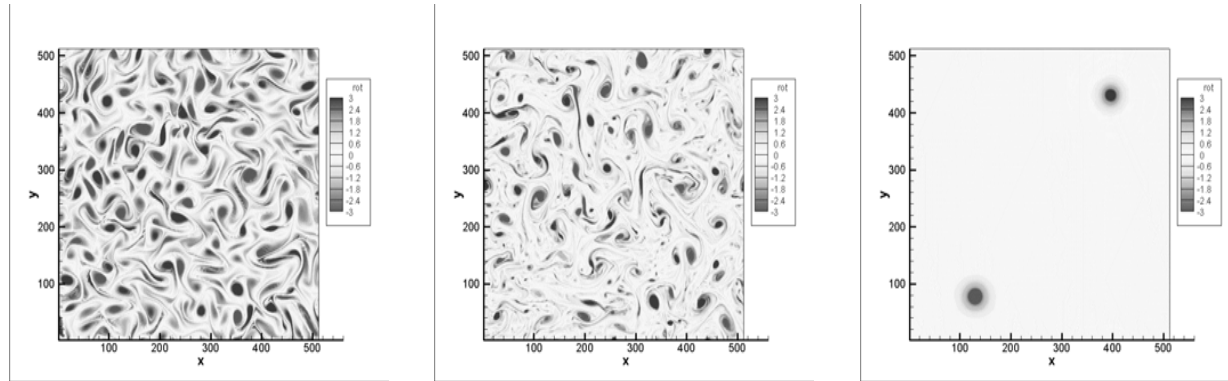


Рис. 7. Эволюция поля завихренности (конденсация) в задаче о затухающей однородной изотропной турбулентности. Сетка 512^2 . Число Куранта $CFL=0.3$.

Строятся энергетические спектры и структурные функции на серии сеток в невязком случае (рис. 8).

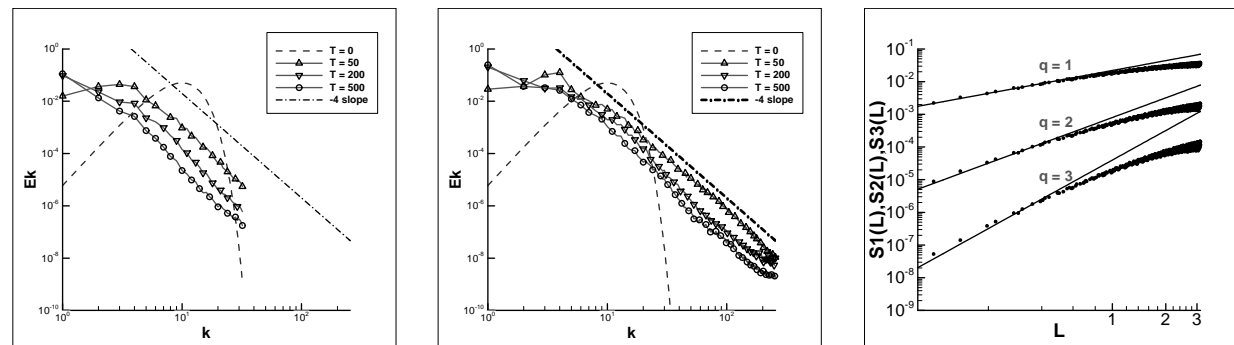


Рис. 8. Энергетические спектры на сетках 64^2 (слева) и 512^2 (в центре) и структурные функции на сетке 128^2 (справа) по схеме КАБАРЕ в невязком случае

Наклоны спектральных кривых близки к «-4», что соответствует теории энстрофийного каскада Саффмана. Следует отметить, что на всех расчетных сетках наклоны спектров сохраняют свое значение вплоть до частоты Найквиста. Также результаты сравниваются со схемой Аракавы с искусственной вязкостью, гибридными схемами и схемой «двухслойный крест».

В четвертом параграфе моделируется обратный энергетический каскад. Для этого задается «форсинг» – подкачка в систему энергии и энстрофии на некотором промежуточном масштабе вдали от границ спектра (рис. 9). В длинноволновой области формируется обратный энергетический каскад с наклоном в инерционном интервале равным «-5/3», что соответствует теории Колмогорова. В коротковолновой области формируется энстрофийный каскад с наклоном «-4» (Саффман [10]).