

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК им. М.В. КЕЛДЫША

На правах рукописи

Истомина Мария Александровна

**Численное моделирование гидродинамических структур с помощью  
квазигазодинамического алгоритма и создание нового  
вычислительного ядра в открытом программном комплексе  
OpenFOAM**

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени кандидата  
физико–математических наук

Научный руководитель  
доктор физико–математических наук,  
профессор Елизарова Татьяна Геннадьевна

Москва 2018 год

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Квазигазодинамические (КГД) системы уравнений</b>	<b>17</b>
1.1 КГД система уравнений газовой динамики . . . . .	17
1.2 КГД система уравнений мелкой воды (МВ) . . . . .	21
1.2.1 КГД уравнения МВ в векторном виде . . . . .	22
1.2.2 КГД уравнения МВ в декартовой системе координат . . . . .	26
1.2.3 Задача о гидравлическом скачке . . . . .	28
1.3 КГД система уравнений МВ в полярной системе координат . . . . .	31
1.3.1 Уравнения МВ в полярной системе координат . . . . .	32
1.3.2 КГД уравнения МВ в полярной системе координат . . . . .	34
1.3.3 1D-численный алгоритм . . . . .	39
1.3.4 1D-тесты и результаты расчета . . . . .	41
1.3.5 Сбалансированная схема . . . . .	43
1.4 Выводы . . . . .	45
<b>2 Численное моделирование уединенной волны</b>	<b>48</b>
2.1 Описание эксперимента . . . . .	50
2.2 Математическая модель и метод численного решения задачи . . . . .	52
2.3 Результаты численного моделирования . . . . .	55
2.4 Аналитическое исследование . . . . .	58
2.5 Выводы . . . . .	66

<b>3</b>	<b>Численное моделирование спирально–вихревых структур во вращающихся газовых дисках</b>	<b>71</b>
3.1	Уравнения газовой динамики в баротропном приближении в полярной системе координат и их точные стационарные решения	74
3.2	КГД уравнения газовой динамики в баротропном приближении в полярной системе координат . . . . .	78
3.3	Метод численного решения задачи . . . . .	80
3.4	Результаты численного моделирования . . . . .	83
3.4.1	Численное моделирование развития возмущений . . . . .	84
3.4.2	Приближение МВ . . . . .	87
3.4.3	Случай $\gamma = 1$ (изотермическое течение) . . . . .	88
3.5	Выводы . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Включение КГД алгоритма в комплекс программ OpenFOAM</b>	<b>96</b>
4.1	Открытая интегрируемая платформа OpenFOAM . . . . .	96
4.2	Включение КГД алгоритма в комплекс программ OpenFOAM . . . . .	99
4.2.1	КГД уравнения газовой динамики в потоковом виде . . . . .	99
4.2.2	1D–разностный алгоритм . . . . .	107
4.3	1D – тесты для характерных газодинамических течений . . . . .	115
4.4	Выводы . . . . .	121
	<b>Заключение</b>	<b>124</b>
	<b>Приложение. КГД система уравнений МВ с магнитным полем</b>	<b>126</b>
П.1	КГД уравнения МВ с магнитным полем. 1D – случай . . . . .	127
П.2	1D – тесты и результаты расчета . . . . .	134
	<b>Литература</b>	<b>138</b>

# Введение

Данная диссертационная работа посвящена расширению возможностей квазигазодинамического (КГД) алгоритма в областях гидродинамики и астрофизики, а также новому шагу по внедрению квазигазодинамического алгоритма в открытый программный комплекс OpenFOAM.

**Актуальность темы** диссертационной работы состоит в развитии и применении КГД алгоритма для решения актуальных задач гидродинамики и астрофизики, а также для обобщения алгоритма на широкий круг прикладных задач с помощью внедрения КГД алгоритма в открытый программный комплекс OpenFOAM. Многие модели, предназначенные для решения научных и прикладных задач, основаны на использовании уравнений газовой динамики. К таким задачам относятся, в частности, задачи математического моделирования летательных аппаратов при до- и сверхзвуковых скоростях полета, задачи экологии, включая задачи описания течений в акваториях морей и океанов, задачи, связанные с исследованиями астрофизических газовых объектов и многие другие, перечень которых огромен.

К настоящему времени разработаны классы численных алгоритмов решения уравнений газовой динамики в форме уравнений Навье–Стокса как для сжимаемых, так и для несжимаемых течений. Ряд используемых методов оформлен в виде коммерческих программных комплексов и пакетов открытого типа, доступных широкому кругу квалифицированных пользователей. При этом в настоящее время повышенное внимание уделяется возможностям параллельной

реализации газодинамических алгоритмов на современных высокопроизводительных комплексах. Широкое использование численных алгоритмов решения уравнений газовой динамики свидетельствует об актуальности и постоянной необходимости их дальнейшего совершенствования.

Более 30 лет назад были разработаны численные алгоритмы решения уравнений газовой динамики, основанные на использовании предварительного осреднения, или сглаживания газодинамических величин по малому пространственно-временному интервалу. Уравнения, полученные для описания поведения таких сглаженных величин, были названы квазигазодинамическими (КГД) или регуляризованными уравнениями газовой динамики. Описание построения КГД уравнений в рамках кинетической теории, их исследования и применения в расчетах приведены в монографии Б.Н. Четверушкина, а также в монографиях Т.Г. Елизаровой и Ю.В. Шеретова. Важными свойствами численных алгоритмов, основанных на КГД уравнениях, являются простота и эффективность их реализации на высокопроизводительных вычислительных системах.

Успешное развитие и применение численного метода связано не только с его разработкой, но и с реализацией в виде программного обеспечения. Одним из путей повышения качества такой реализации, снижения затрат времени на ее выполнение, упрощения процесса обнаружения и устранения ошибок, а также поддержки совершенствования кода является использование открытого программного обеспечения. Примерами таких открытых библиотек программ для решения задач газо- и гидродинамики являются OpenFOAM, SU2, Nektar++ и др. В частности, OpenFOAM — это современная развивающаяся технология, используемая многими тысячами пользователей по всему миру. Она поддерживается большими корпорациями, ей посвящены специальные конференции, в том числе регулярные встречи рабочих групп и тренинги.

**Цели и задачи** диссертационной работы состоят в расширении возмож-

ностей КГД подхода для численного моделирования течений газа в сложных практически важных случаях. Среди важных научных и практических задач отметим проблему формирования так называемых волн–убийц. Такими волнами называют спонтанно образующиеся и исчезающие волны в больших морских акваториях, высота которых в несколько раз превышает среднюю высоту окружающих их волн. Природа таких волн не ясна, экспериментальное изучение их очень ограничено, в то же время как появление таких волн регулярно фиксируется датчиками, и приносимые ими разрушения нефтяных платформ хорошо известны. Другой целью и задачей работы было подтверждение гипотезы о возможности формирования рукавов плотности в дисках и галактиках на основе чисто гидродинамического механизма, без участия эффектов нагрева и самогравитации в газе. В цели и задачи работы входило также включение разработанного ранее в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН оригинального численного алгоритма решения задач газовой динамики в открытый программный комплекс OpenFOAM, что позволит существенно расширить область его применения для широкого круга пользователей как в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, так и во всем мире.

**Методы исследования**, применяемые в данной работе методы, основаны на использовании КГД подхода. В данной работе применяется один из способов построения КГД подхода, который основан на осреднении по малому интервалу времени с неотрицательным параметром регуляризации. Квазигазодинамический метод является весьма эффективным для численного моделирования широкого круга течений вязкого газа и жидкости. Этот подход основан на математической модели, обобщающей систему уравнений Навье–Стокса и отличающейся от нее дополнительными диссипативными слагаемыми с малым параметром в качестве коэффициента. На основе КГД уравнений возможно построить конечно–разностные алгоритмы расчета вязких нестационарных течений газа

и жидкости.

Универсальность, эффективность и точность построенных алгоритмов обеспечивается заложенными в них математическими свойствами и выполнением для них интегральных законов сохранения и теоремы о балансе энтропии.

Простота и удобство численной реализации позволяют строить КГД алгоритмы для расчета сложных течений и использовать параллельные технологии программирования для ускорения счета. Использование параллельных технологий особенно важно при расчетах нестационарных течений.

**КГД подход.** Описание течений газа и жидкости с помощью уравнений Навье–Стокса имеет богатую историю. В настоящее время созданы и успешно применяются многочисленные коммерческие пакеты программ, реализующие численные алгоритмы решения этих уравнений. Однако используемые в них подходы нельзя считать совершенными. В разное время предпринимались попытки расширить возможности описания течений, заложенные в системе уравнений Навье–Стокса. Однако предлагаемые модели оказались существенно сложнее классической системы и не нашли применения в практических расчетах.

Система квазигазодинамических уравнений, расширяющая возможности модели Навье–Стокса, впервые появилась в ходе исследований, выполненных в восьмидесятых годах небольшой группой сотрудников Института прикладной математики АН СССР им. М.В. Келдыша под руководством профессора, а ныне члена–корреспондента Российской Академии Наук, Б.Н. Четверушкина. Проблемам КГД подхода посвящены труды Б.Н. Четверушкина [51], Т.Г. Елизаровой [12], Ю.В. Шеретова [55] и др. [3], [16], [23].

В самом начале этих исследований в 1982 г. к этим исследованиям присоединилась Т.Г. Елизарова, и первый вариант квазигазодинамических уравнений был выписан с ее непосредственным участием. Эти уравнения отличаются от

классической системы уравнений газовой динамики дополнительными слагаемыми, имеющими вид вторых пространственных производных.

Далее к группе исследователей присоединился Ю.В. Шеретов, существенным вкладом которого является представление квазигазодинамических уравнений в виде законов сохранения, которые были детально исследованы и теоретически обоснованы. Также была построена родственная квазигидродинамическая система уравнений.

Принципиальным и существенным отличием КГД подхода от теории Навье – Стокса является процедура пространственно–временного осреднения для определения основных газодинамических величин — плотности, скорости и температуры. Дополнительное сглаживание по времени отличает КГД систему уравнений от системы уравнений Навье–Стокса и является причиной возникновения дополнительных диссипативных слагаемых. При численном моделировании дополнительные слагаемые проявляют себя как эффективные регуляризаторы. Влияние добавочных членов незначительно для стационарных и квазистационарных газодинамических течений при малых числах Кнудсена. Однако для сильно нестационарных течений, а также при числах  $Kn$ , близких к единице, их вклад становится существенным. Именно в этом классе задач следует искать преимущества квазигазодинамического подхода.

**Структура диссертационной работы.** Диссертация состоит из четырех глав, введения, заключения, приложения и списка используемой литературы.

**Введение** описывает диссертационную работу по следующим параметрам: актуальность темы, цели и задачи, методы исследования, степень разработанности темы диссертации, структура диссертационной работы, научная новизна, теоретическая и практическая значимость, основные положения, выносимые на защиту, достоверность результатов, апробация результатов, публикации и благодарности.



**Первая глава** содержит систему уравнений газовой динамики в векторном виде с общими уравнениями состояния и КГД систему уравнений газовой динамики для идеального политропного газа. Приведен вывод КГД системы уравнений мелкой воды (МВ) в векторном виде и в координатах  $x, y$ . Приведен расчет тестовой задачи о варианте гидравлического скачка, показывающей эффективность КГД уравнений МВ. Приведен вывод КГД система уравнений МВ в полярной системе координат. Полученная КГД система уравнений МВ в полярной системе координат была протестирована на 1D-тестах.

**Вторая глава** содержит результаты прямого численного моделирования задачи гидродинамики о формировании уединенной волны в кольцевом аэро-гидроканале. Постановка задачи ориентирована на эксперимент и в качестве математической модели выбрана система уравнений мелкой воды в 1D-случае. Для численного моделирования использовалась КГД (или регуляризованная) система уравнений мелкой воды. Сравнение полученного численного решения незатухающей уединенной волны с данными эксперимента показывает соответствие между процессом формирования такой волны в эксперименте и численном расчете. Построен аналитический вариант решения в виде уединенной волны, который хорошо согласуется с результатами численного моделирования.

**Третья глава** содержит результаты численного моделирования формирования спирально-вихревых структур во вращающихся газовых дисках в рамках баротропного приближения уравнений газовой динамики в полярной системе координат. Для численного моделирования была построена квазигазодинамическая система баротропных уравнений газовой динамики в полярной системе координат. В результате численного моделирования показана возможность чисто гидродинамической природы формирования и эволюции спирально-вихревых структур. Для этого были выведены новые аксиально симметричные стационарные решения этих уравнений, модифицирующие известные ранее приближен-

ные решения, использующиеся в качестве начальных условий. При внесении малых возмущений в начальные условия в нестационарной задаче формируются рукава плотности с раздвоением и перераспределением углового момента.

**Четвертая глава** посвящена включению КГД алгоритма в открытый программный комплекс OpenFOAM на примере одномерного решателя QGDFoam. OpenFOAM — открытая интегрируемая платформа для численного моделирования задач механики сплошных сред, в которой используется метод конечного объема. Пакет OpenFOAM предназначен для вычисления операций со скалярными, векторными и тензорными полями. Преимуществами OpenFOAM являются ориентированность на пользователя, разделение понятий геометрии, расчетной области, выбор дискретизации основных уравнений и визуализации основных результатов. Одномерный решатель QGDFoam протестирован на характерных тестах о распадах разрывов. Проведено сравнение решений, полученный с помощью решателя QGDFoam и встроенного решателя rhoCentralFoam. Исходные и дальнейшие 3d-версии решателя QGDFoam находятся в открытом доступе на <http://github.com/unicfdlab/QGDSolver/>.

**Приложение** содержит расширение КГД алгоритма для уравнений МВ с магнитным полем. Приведено построение КГД алгоритма в 1D-случае. КГД алгоритм протестирован на одномерных задачах о распаде сильного и слабого разрывов.

**В заключении** сформулированы основные результаты по диссертационной работе и перспективы дальнейшей работы.

**Научная новизна.** Все представленные в диссертации результаты являются новыми. Новыми являются математическая модель описания процесса формирования уединенной волны в аэрогидроканале и результаты прямого численного моделирования процесса формирования такой волны под воздействием ветровой нагрузки. Новой является математическая модель эволюции аккреционного

диска, записанная в баротропном приближении с использованием оригинальных начальных распределений. Новый численный алгоритм, построенный для этой задачи, впервые позволил получить ее численное решение с использованием возможностей персонального компьютера за весьма малое время. Кроме того, впервые в рамках чисто гидродинамического подхода удалось получить эффект раздвоения рукавов плотности газа во вращающемся диске.

Новым является создание вычислительного ядра QGDFoam в открытом программном комплексе OpenFOAM, а также сравнение вычислительного ядра QGDFoam и встроенного решателя rhoCentralFoam на примере характерных одномерных задач газовой динамики.

**Теоретическая значимость** включает в себя ряд важных аспектов, среди которых укажем следующие: построение новой теоретической модели для описания эффекта формирования уединенной волны в гидроканале и построение соответствующего аналитического решения; построение квазигазодинамических уравнений в полярной системе координат совместно с методом их численного решения, а также вывод нового аналитического решения, описывающего стационарные равновесные конфигурации газа в баротропном случае.

**Практической значимостью** обладают все основные результаты диссертационной работы. Результаты численного моделирования уединенной волны в кольцевом аэрогидроканале вносят существенный вклад в теорию образования волн-убийц. Результаты численного моделирования формирования спирально-вихревых структур в аккреционных газовых дисках дают вклад в понимание возможности образования рукавов плотности в рамках чисто гидродинамического приближения. Создание нового вычислительного ядра QGDFoam в открытом программном комплексе OpenFOAM расширяет возможности применения КГД алгоритма и позволяет пользователям, знакомым с КГД алгоритмом, решать свои задачи в рамках этого пакета. В частности, КГД алгоритм теперь

может быть применен для решения задач в произвольной геометрии с помощью произвольных сеток и мощных современных суперкомпьютеров.

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Построена математическая модель, описывающая нелинейный процесс формирования незатухающей уединенной волны в рамках приближения мелкой воды с использованием КГД алгоритма. Впервые на основе КГД алгоритма в численном эксперименте получена уединенная бегущая волна. Анализ задачи показал соответствие между результатами численного моделирования, данными натуральных экспериментов и результатами аналитических исследований задачи об уединенной волне.

2. Впервые построена математическая модель спирально-вихревых структур во вращающемся газовом аккреционном диске в рамках баротропных уравнений Эйлера с применением КГД подхода и использованием уточненных начальных условий. Впервые проведено численное моделирование отстающих рукавов повышенной плотности в рамках программы, использующей квазигазодинамический алгоритм в полярной системе координат. В результате выявлен процесс раздвоения рукавов плотности и перенос углового момента.

3. В рамках открытого программного комплекса OpenFoam создано новое вычислительное ядро на основе КГД алгоритма (QGDFoam), доступное внешним пользователям. Для этого КГД алгоритм переписан в терминах, принятых в указанном программном комплексе и адаптирован к заложенным в нем требованиям. В рамках программного комплекса проведено сравнение решателей QGDFoam и rhoCentralFoam на примере системы одномерных тестов и показано, что QGDFoam позволяет проводить численное моделирование широкого круга прикладных задач.

**Достоверность результатов** подтверждается их сопоставлением с аналитическим исследованием и экспериментальными данными. В частности, досто-

верность численных результатов показана при сопоставлении расчетов, выполненных в рамках КГД алгоритма при его включении в открытый программный комплекс путем прямого сопоставления результатов расчетов задач о распаде разрывов с аналитическим решением этих задач и с помощью решения этих же задач на основе численных алгоритмов, включенных ранее в этот комплекс программ. Для всех рассмотренных примеров приведены невязки решения.

В данной диссертационной работе КГД алгоритм применялся для решения задач, использующих систему уравнений газовой динамики для идеального политропного газа, систему уравнений мелкой воды, систему уравнений мелкой воды в полярных координатах и систему уравнений газовой динамики в баротропном приближении в полярной системе координат.

#### **Апробация результатов:**

Основные результаты докладывались на:

1. Конференция молодых ученых «Ломоносов-2013» Е.В. Юшков, М.А. Истомина Уединенные волны в кольцевых штормовых бассейнах, физ. фак. МГУ, Россия, Москва, 2013 г.
2. XXV IUPAP Conference on Computational Physics T.G. Elizarova and M.A. Istomina Regularized shallow-water equations as a model for a solitary wave generation, Moscow, Russia, August 20–24, 2013.
3. 2nd ECCOMAS Young Investigators Conference T.G. Elizarova and M.A. Istomina Quasi-gasdynamics algorithm for the magnetohydrodynamic shallow water equations, France, Bordeaux, September 02–06, 2013.
4. 4-ая международная научная школа молодых ученых "Волны и вихри в сложных средах" М.А. Истомина, Е.В. Юшков Периодическое разрывное решение системы уравнений мелкой воды для одиночного ветрового солитона в кольцевом канале, Россия, Москва, ИПМех РАН, 26–29 ноября 2013 г.
5. Международная конференция молодых ученых "Современные проблемы

прикладной математики и информатики" Т.Г. Елизарова, М.А. Истомина Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений мелкой воды в полярной системе координат Россия, Дубна, 25–29 августа, 2014 г.

6. XVI Всероссийская конференция–школа молодых исследователей "Современные проблемы математического моделирования" Т.Г. Елизарова, М.А. Истомина Квазигазодинамический алгоритм для расчета течений в полярной системе координат Абрау–Дюрсо, Россия, 14–19 сентября, 2015 г.

7. Ломоносовские чтения — 2017 Секция «Прикладная математика и математическое моделирование» Т.Г. Елизарова, М.А. Истомина, В.С. Полякова, А.В. Иванов Регуляризованные уравнения гидродинамики как основа для численных алгоритмов Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 26 апреля, 2017 г.

8. OpenFOAM Workshop T. Elizarova, M. Istomina, E. Smirnova, M. Kraposhin Development of Solver for Modeling Compressible Flows Using Regularised Gas Dynamic Equations UK, Exeter, 24–27 July, 2017.

9. Открытая конференция ИСП РАН им. В.П. Иванникова М.В. Крапошин, Д.В. Рязанов, Е.В. Смирнова, Т.Г. Елизарова, М.А. Истомина Development of OpenFOAM solver for compressible viscous flows simulation using quasi-gas dynamic equations Москва, 30 ноября — 1 декабря 2017 г., Президиум РАН.

10. Семинар ИПМ им. М.В. Келдыша РАН под руководством В.Ф. Тишкина и А.А. Кулешова «Численное моделирование гидродинамических структур с помощью квазигазодинамического алгоритма и создание нового вычислительного ядра в открытом программном комплексе OpenFOAM», 9 ноября 2017 г.

### **Публикации:**

Результаты, представленные в диссертационной работе, опубликованы в следующих работах:

1. Т.Г. Елизарова, М.А. Истомина, Н.К. Шелковников Формирование уеди-

ненной волны в кольцевом аэрогидроканале // Математическое моделирование, 2012 г., т. 24, № 4, с. 107–116,

2. Т.Г. Елизарова, С.Д. Устюгов, М.А. Истомина Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений мелкой воды для магнитной гидродинамики // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2012 г., № 64, 24 с.

3. Т.Г. Елизарова, М.А. Истомина Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений мелкой воды в полярной системе координат // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2014 г., № 65, 24 с.

4. Е.В. Юшков, М.А. Истомина Катящиеся волны в кольцевом канале // ЖВМиМФ, 2014 г., т. 54, № 1, с. 123–134,

5. Т.Г. Елизарова, А.А. Злотник, М.А. Истомина Гидродинамические аспекты формирования спирально–вихревых структур во вращающихся газовых дисках // Астрономический журнал, 2018 г., т. 95, № 1, с. 1–11,

6. М.А. Истомина, Т.Г. Елизарова Квазигазодинамический алгоритм для полярной системы координат и пример численного моделирования неустойчивостей в аккреционном диске // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2016 г., № 92,

7. Т.Г. Елизарова, А.А. Злотник, М.А. Истомина О двумерном численном КГД моделировании спирально–вихревых структур в аккреционных газовых дисках // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017 г., № 1,

8. М.В. Крапошин, Д.В. Рязанов, Е.В. Смирнова, Т.Г. Елизарова, М.А. Истомина Development of OpenFOAM solver for compressible viscous flows simulation using quasi-gas dynamic equations // Журнал IEEE eXplore, декабрь 2017 г.,

9. Ссылка на разработанный решатель QGDFoam в рамках открытого программного комплекса OpenFOAM:

<https://github.com/unicfdlab/QGDsolver/blob/dev-4.1/QGDFoam/QGDFoam.C>.

10. М.А. Истомина О реализации одномерного квазигазодинамического ал-

горитма в открытом программном комплексе OpenFOAM // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018 г., № 1.

Из них 6 опубликованы в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертационной работы.

## **Благодарности**

Диссертация подготовлена благодаря моему научному руководителю Т.Г. Елизаровой, которой я выражаю большую благодарность. Также я благодарна А.А. Злотнику за вклад в построение точного решения в третьей главе, Е.В. Шильникову за постоянные ценные замечания на протяжении всей работы, В.М. Чечеткину и А.Ю. Луговскому за привлечение моего внимания к тематике аккреционных дисков, за обсуждение задачи и полученных результатов, М.В. Крапошину за помощь в написании программного кода к четвертой главе, Н.К. Шелковникову за помощь в понимании физики эксперимента в первой главе, Е.В. Юшкову за вклад в понимание периодической природы уединенной волны, ныне покойному С.Д. Устюгову за постановку одномерных тестов, помещенных в приложение, А.Г. Свешникову за совет в выборе научного руководителя для обучения в аспирантуре.

Результаты, представленные в диссертационной работе, получены в ходе выполнения работ по проектам РФФИ, в которых автор принимал участие в качестве исполнителя (гранты № 13-01-00703, № 15-01-03654, № 16-01-00048, № 18-01-00587 и программы Президиума РАН № I33 и № 26).



# Глава 1

## Квазигазодинамические (КГД) системы уравнений

### 1.1 КГД система уравнений газовой динамики

Система уравнений газовой динамики в форме Навье–Стокса содержит уравнения баланса массы, импульса и полной энергии и в традиционных обозначениях в евклидовом пространстве  $R^3 \times T$  имеет следующий вид

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.1)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div} \hat{\Pi} + \rho \mathbf{F}, \quad (1.2)$$

$$\partial_t E + \operatorname{div}((E + p)\mathbf{u}) + \operatorname{div} \mathbf{q} = \operatorname{div}(\hat{\Pi} \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} + Q, \quad (1.3)$$

где  $t$  – время,  $\rho(\mathbf{x}, t)$  – плотность,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  – скорость,  $p(\mathbf{x}, t)$  – давление,  $\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t)$  – тензор вязких напряжений,  $E(\mathbf{x}, t)$  – полная энергия единицы объема,  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$  – тепловой поток,  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  – внешняя массовая сила,  $Q(\mathbf{x}, t)$  – мощность тепловых источников. Знак  $\otimes$  обозначает прямое векторное произведение, при вычислении дивергенции дифференцируется первый множитель.

Тензор вязких напряжений  $\hat{\Pi}$  имеет вид

$$\hat{\Pi} = \hat{\Pi}_{NS} = \mu((\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T - \frac{2}{3} \hat{I} \operatorname{div} \mathbf{u}), \quad (1.4)$$

где верхний индекс  $T$  обозначает транспонирование,  $\mu = \mu(\rho, T) > 0$  – коэффициент динамической вязкости,  $T(\mathbf{x}, t)$  – температура,  $\hat{I}$  – единичный тензор.

Вектор теплового потока  $\mathbf{q}$  задается формулой

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_{NS} = -\kappa \nabla T, \quad (1.5)$$

где  $\kappa = \kappa(\rho, T) > 0$  – коэффициент теплопроводности.

Полная энергия  $E$  вычисляется с использованием величины внутренней энергии  $u_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$

$$E = \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 + \rho u_\varepsilon. \quad (1.6)$$

Система уравнений (1.1) – (1.3) замыкается общими уравнениями состояния

$$p = p(\rho, T), \quad u_\varepsilon = u_\varepsilon(\rho, T), \quad (1.7)$$

которые связаны равенством Максвелла

$$p = T \frac{\partial p}{\partial T} + \rho^2 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \rho} \quad (1.8)$$

и удовлетворяют условиям термодинамической устойчивости (согласно, например, [31], [24], [25]).

Для совершенного (или, для простоты, идеального) политропного газа уравнение состояния и уравнения связи упрощаются и принимают вид

$$p = \rho R T, \quad u_\varepsilon = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}, \quad (1.9)$$

$$u_\varepsilon = c_V T, \quad c_V = \frac{R}{(\gamma - 1)}, \quad c_p = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1)}, \quad (1.10)$$

где показатель адиабаты  $\gamma = c_p/c_V > 1$ ,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $c_p$ ,  $c_V$  – теплоемкости при постоянных давлении и объеме, соответственно.

В работах [54], [17], [12] построен регуляризованный вид уравнений Навье–Стокса. Соответствующая система уравнений была названа квазигазодинамиче-

ской (КГД) системой уравнений. КГД алгоритм и родственные ему кинетически согласованные разностные схемы [51] успешно использовались для численного моделирования широкого круга течений вязкого сжимаемого газа.

КГД система может быть рассмотрена как система уравнений Навье–Стокса, осредненная не только по пространству, но и по малому интервалу времени. Такое осреднение приводит к появлению дополнительных нелинейных слагаемых, пропорциональных малому параметру  $\tau$ , имеющему размерность времени. Эти слагаемые имеют вид производных по пространственным координатам второго порядка и являются существенно нелинейными функциями параметров течения.

КГД уравнения с учетом внешних массовой силы и источника тепла для совершенного (идеального) политропного газа были получены в виде уравнений Навье–Стокса (1.1) – (1.3), дополненных диссипативными слагаемыми с малым коэффициентом  $\tau$ , имеющему размерность времени, и имеют следующий вид

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \mathbf{j}_m = 0, \quad (1.11)$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div} (\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div} \hat{\Pi} + (\rho - \tau \operatorname{div} (\rho \mathbf{u})) \mathbf{F}, \quad (1.12)$$

$$\partial_t E + \operatorname{div} ((E + p) \mathbf{j}_m / \rho) + \operatorname{div} \mathbf{q} = \operatorname{div} (\hat{\Pi} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{j}_m \cdot \mathbf{F} + Q. \quad (1.13)$$

При этом поток массы в уравнении неразрывности имеет вид

$$\mathbf{j}_m = \rho (\mathbf{u} - \mathbf{w}), \quad (1.14)$$

тензор вязких напряжений  $\hat{\Pi}$  с КГД добавками задается выражением

$$\hat{\Pi} = \hat{\Pi}_{NS} + \rho \mathbf{u} \otimes \hat{\mathbf{w}} + \tau (\mathbf{u} \cdot \nabla p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u} - (\gamma - 1) Q) \hat{I}, \quad (1.15)$$

а вектор теплового потока  $\mathbf{q}$  – выражением

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T - \tau \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla u_\varepsilon - \frac{p}{\rho^2} \mathbf{u} \cdot \nabla \rho - Q) \mathbf{u}. \quad (1.16)$$

Малые добавки  $\mathbf{w}$  и  $\hat{\mathbf{w}}$  в формулах (1.14) и (1.15) определяются выражениями

$$\mathbf{w} = \frac{\tau}{\rho}(\operatorname{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \rho\mathbf{F}), \quad \hat{\mathbf{w}} = \frac{\tau}{\rho}(\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p - \rho\mathbf{F}) \quad (1.17)$$

и имеют размерности скоростей, причем эти скорости связаны между собой соотношением

$$\mathbf{w} = \hat{\mathbf{w}} + \frac{\tau}{\rho}\mathbf{u}\nabla \cdot (\rho\mathbf{u}). \quad (1.18)$$

Для выписанной выше КГД системы уравнений было получено уравнение баланса энтропии  $S$  в виде

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j}_m S) = -\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) + X, \quad (1.19)$$

где слагаемое  $X$  представляет собой производство энтропии и является неотрицательным

$$X = \kappa \left(\frac{\nabla T}{T}\right)^2 + \frac{\hat{\Pi}_{NS} : \hat{\Pi}_{NS}}{2\mu T} + \frac{p\tau}{\rho^2 T} (\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}))^2 + \frac{\rho}{\tau T} \hat{\mathbf{w}}^2 + \quad (1.20)$$

$$+ \frac{\tau}{\rho u_\varepsilon T} \left(\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)u_\varepsilon + p \operatorname{div}\mathbf{u} - \frac{Q}{2\rho}\right)^2 + \frac{Q}{T} \left(1 - \frac{\tau(\gamma - 1)Q}{4\rho}\right). \quad (1.21)$$

Для применения КГД уравнений к численному моделированию течений с общими уравнениями состояния (1.7) система (1.11) – (1.13) была обобщена в работах [24], [25], [9]. Формально такое обобщение может быть выполнено модификацией в уравнении (1.12) тензора вязких напряжений  $\hat{\Pi}$  путем замены в выражении (1.15) слагаемого  $\gamma\rho \operatorname{div}\mathbf{u}$  на  $\rho C_s^2 \operatorname{div}\mathbf{u}$ , а слагаемого  $(\gamma - 1)Q$  на  $(\gamma_Q - 1)Q$ , где

$$C_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{T}{\rho^2} \frac{(\partial p / \partial T)^2}{\partial u_\varepsilon / \partial T} \geq 0$$

– скорость звука в газе, а

$$\gamma_Q(\rho, T) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p / \partial T}{\partial u_\varepsilon / \partial T} + 1.$$

В результате тензор вязких напряжений примет вид

$$\hat{\Pi} = \hat{\Pi}_{NS} + \rho \mathbf{u} \otimes \hat{\mathbf{w}} + \tau(\mathbf{u} \nabla p + \rho C_s^2 \operatorname{div} \mathbf{u} - (\gamma_Q - 1)Q) \hat{I}. \quad (1.22)$$

Легко проверить, что в случае совершенного (идеального) политропного газа

$$T \partial p / \partial T = p, \quad T \partial u_\varepsilon / \partial T = u_\varepsilon, \quad C_s^2 = \gamma(\gamma - 1)u_\varepsilon, \quad \rho C_s^2 = \gamma p,$$

$$\gamma_Q = \gamma$$

и выражение (1.22) переходит в (1.15).

Для обобщенной КГД системы уравнений (1.11) – (1.13) в [24], [25] показана справедливость уравнения баланса энтропии и построена соответствующая диссипативная функция. Пространственная дискретизация обобщенных таким образом КГД уравнений и тестовые расчеты для них были выполнены в [9].

## 1.2 КГД система уравнений мелкой воды (МВ)

Уравнения МВ являются упрощением полных уравнений Навье–Стокса, описывающих нестационарное течение вязкого сжимаемого газа. В приближении МВ рассматривается несжимаемая жидкость при постоянной температуре в поле силы тяжести. Приближение МВ используют в случае, когда жидкость представляет собой слой, глубина которого много меньше продольной составляющей, поэтому вертикальной составляющей скорости в слое можно пренебречь. При этом полагают продольные компоненты скорости постоянными вдоль вертикальной оси. Классические уравнения МВ также выводятся из уравнений Эйлера в баротропном приближении для вязкого сжимаемого газа. Поэтому КГД методы, развитые для решения задач в рамках уравнений Эйлера, можно использовать для расчета течений в приближении МВ [12], [55].

КГД система уравнений МВ зарекомендовала себя как эффективная модель

для широкого спектра течений со свободной поверхностью. КГД алгоритм для уравнений МВ детально рассмотрен в [63], [15]. Примерами успешного численного моделирования течений в рамках КГД уравнений МВ могут служить задачи с образованием зон сухого дна [15], задачи о расчете нагрузок на стенки бака при колебаниях находящегося в нем слоя жидкости [16] и работы в области моделирования распадов разрывов над уступами и ступеньками дна [3]. Вопросы строгого обоснования модели, однозначности и разрешимости можно найти, например, в [8], [66], [74], [43].

Классическая система уравнений МВ для плоского двумерного течения в потоковом виде выглядит следующим образом (см., например, [34])

$$\partial_t h + \operatorname{div}(h\mathbf{u}) = 0, \quad (1.23)$$

$$\partial_t(h\mathbf{u}) + \operatorname{div}(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = h\mathbf{f} - gh\nabla b. \quad (1.24)$$

где  $h(x, y, t)$  – уровень жидкости,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$  – вектор скорости,  $u_x(x, y, t)$ ,  $u_y(x, y, t)$  – компоненты скорости вдоль осей  $x$  и  $y$ ,  $b(x, y)$  – профиль дна,  $p = \frac{gh^2}{2}$  – давление жидкости,  $\mathbf{f}(x, y, t)$  – внешняя сила с компонентами  $f_x$  и  $f_y$  вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно. Выражение  $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$  представляет собой тензор–инвариант второго ранга, вычисляемый как прямое тензорное произведение векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{u}$ .

### 1.2.1 КГД уравнения МВ в векторном виде

При наличии вязкости Навье–Стокса система уравнений МВ записывается как

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(h\mathbf{u}) = 0, \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial(h\mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla \left( \frac{gh^2}{2} \right) = \operatorname{div} \hat{\Pi}_{NS} + h\mathbf{f} - gh\nabla b, \quad (1.26)$$

где  $\hat{\Pi}_{NS}$  — тензор вязких напряжений Навье–Стокса, или, в недивергентном виде,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla h = 0, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + g \nabla h = \frac{1}{h} \operatorname{div} \hat{\Pi}_{NS} + \mathbf{f} - g \nabla b, \quad (1.28)$$

что вытекает из соотношений

$$\operatorname{div}(h\mathbf{u}) = h \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla h,$$

$$\operatorname{div}(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = h\mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u} + (h\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{u} (\mathbf{u} \nabla h).$$

Для вывода КГД уравнений МВ выразим из уравнений в (1.26) и (1.28) без вязких членов Навье–Стокса следующие производные по времени

$$\frac{\partial(h\mathbf{u})}{\partial t} = -\operatorname{div}(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + h\mathbf{f} - gh \nabla(h + b) = -\bar{\mathbf{w}}, \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} - g \nabla(h + b) + \mathbf{f} = -\hat{\mathbf{w}}, \quad (1.30)$$

где введены обозначения

$$\bar{\mathbf{w}} = \operatorname{div}(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + gh \nabla(h + b) - h\mathbf{f}, \quad (1.31)$$

$$\hat{\mathbf{w}} = (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + g \nabla(h + b) - \mathbf{f}. \quad (1.32)$$

Введем также величины

$$\mathbf{w} = \frac{\tau}{h} \bar{\mathbf{w}} = \frac{\tau}{h} (\operatorname{div}(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + gh \nabla(h + b) - h\mathbf{f}), \quad (1.33)$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \tau \hat{\mathbf{w}} = \tau ((\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + g \nabla(h + b) - \mathbf{f}), \quad (1.34)$$

которые связаны между собой соотношением

$$h\mathbf{w} = h\hat{\mathbf{w}} + \tau \operatorname{div}(h\mathbf{u})\mathbf{u}. \quad (1.35)$$

Далее для получения КГД уравнений МВ применим стандартную процедуру осреднения по малому интервалу времени  $\Delta t$  и вычислим среднее на отрезке  $(t, t + \Delta t)$  [13]. Кроме того, будем разлагать все переменные в ряд Тейлора по  $t$  и пренебрегать вторыми производными по времени и членами с  $\tau$  второго и выше порядков.

Этот алгоритм может быть записан в общем виде для любой осредняемой величины  $f(\mathbf{x}, t)$  как

$$(f(\mathbf{x}, t))^* = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(\mathbf{x}, t') dt' = f(\mathbf{x}, t^*) = f(\mathbf{x}, t) + \tau \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \quad (1.36)$$

где  $t \leq t^* \leq t + \Delta t$ ,  $0 \leq \tau \leq \Delta t$ . Здесь и далее величины со звездочками — это осредненные (или сглаженные) величины,  $\tau$  — параметр сглаживания по времени.

В результате осреднения система (1.25) принимает вид

$$\frac{\partial h^*}{\partial t} + \operatorname{div}(h\mathbf{u})^* = 0, \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial (h\mathbf{u})^*}{\partial t} + \operatorname{div}(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})^* + \nabla \left( \frac{gh^2}{2} \right)^* = \operatorname{div} \hat{\Pi}_{NS} + h^*(\mathbf{f} - g\nabla b), \quad (1.38)$$

где (с учетом (1.36))

$$\begin{aligned} h^* &= h + \tau \frac{\partial h}{\partial t} = h - \tau \operatorname{div}(h\mathbf{u}), \\ \mathbf{u}^* &= \mathbf{u} + \tau \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{w}}, \\ (h\mathbf{u})^* &= h\mathbf{u} + \tau \frac{\partial h\mathbf{u}}{\partial t} = h(\mathbf{u} - \mathbf{w}) = \mathbf{j}_m. \end{aligned} \quad (1.39)$$

При выводе КГД уравнений все производные по времени остаются без изменений.

$$\operatorname{div}(h\mathbf{u})^* = \operatorname{div} \mathbf{j}_m = \operatorname{div}(h\mathbf{u}) - \operatorname{div}(h\mathbf{w}), \quad (1.40)$$



$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})^* &= \operatorname{div}((h\mathbf{u})^* \otimes \mathbf{u}^*) = \\
&= \operatorname{div}(h(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \otimes (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{w}})) = \\
&= \operatorname{div}(\mathbf{j}_m \otimes (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{w}})) = \operatorname{div}(\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div}(h\mathbf{u} \otimes \hat{\mathbf{w}}).
\end{aligned} \tag{1.41}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \left( \frac{gh^2}{2} \right)^* &= \frac{1}{2}g\nabla(h - \tau \operatorname{div} h\mathbf{u})^2 = \\
&= \frac{1}{2}g\nabla(h^2) - g\nabla(\tau h \operatorname{div} h\mathbf{u}).
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Здесь введено обозначение  $\mathbf{j}_m$  для потока.

Следовательно, уравнение (1.37) принимает вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_m = 0, \quad \mathbf{j}_m = h(\mathbf{u} - \mathbf{w}). \tag{1.43}$$

а уравнение (1.38) можно записать двумя способами

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(h\mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{2}g\nabla(h^2) &= \operatorname{div} \hat{\Pi}_{NS} + \\
+ \operatorname{div}(h\mathbf{u} \otimes \hat{\mathbf{w}}) + g\nabla(\tau h \operatorname{div}(h\mathbf{u})) + (h - \tau \operatorname{div}(h\mathbf{u}))(\mathbf{f} - g\nabla b)
\end{aligned} \tag{1.44}$$

или

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(h\mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{2}g\nabla(h^2) &= \operatorname{div} \hat{\Pi}_{NS} + \\
+ \operatorname{div}(h\mathbf{u} \otimes \hat{\mathbf{w}}) + \operatorname{div}(h\mathbf{w} \otimes \mathbf{u}) + g\nabla(\tau h \operatorname{div}(h\mathbf{u})) + \\
+ (h - \tau \operatorname{div}(h\mathbf{u}))(\mathbf{f} - g\nabla b).
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Полученная система (1.43), (1.44) или (1.45) и есть КГД(или регуляризованная) система уравнений МВ.

### 1.2.2 КГД уравнения МВ в декартовой системе координат

Запишем систему (1.23)–(1.24) без вязкости Навье–Стокса в развернутом виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(hu_y)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(hu_x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( hu_x^2 + \frac{gh^2}{2} \right) + \frac{\partial(hu_xu_y)}{\partial y} &= -gh \frac{\partial b}{\partial x} + hf_x, \\ \frac{\partial(hu_y)}{\partial t} + \frac{\partial(hu_xu_y)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( hu_y^2 + \frac{gh^2}{2} \right) &= -gh \frac{\partial b}{\partial y} + hf_y. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Стандартная процедура осреднения (1.36) приводит систему (1.46) к следующему виду

$$\frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{\partial(hu_x)^*}{\partial x} + \frac{\partial(hu_y)^*}{\partial y} = 0, \quad (1.47)$$

$$\frac{\partial(hu_x)^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( hu_x^2 + \frac{gh^2}{2} \right)^* + \frac{\partial(hu_xu_y)^*}{\partial y} = -gh^* \frac{\partial b^*}{\partial x} + h^* f_x, \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial(hu_y)^*}{\partial t} + \frac{\partial(hu_xu_y)^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( hu_y^2 + \frac{gh^2}{2} \right)^* = -gh^* \frac{\partial b^*}{\partial y} + h^* f_y, \quad (1.49)$$

где

$$\begin{aligned} h^* &= h + \tau \frac{\partial h}{\partial t}, \\ u_x^* &= u_x + \tau \frac{\partial u_x}{\partial t}, \\ u_y^* &= u_y + \tau \frac{\partial u_y}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$\frac{\partial(hu_x)^*}{\partial x} = \frac{\partial(hu_x)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial(hu_x)}{\partial t} \right) = j_{mx}, \quad (1.51)$$

$$j_{mx} = h(u_x - w_x), \quad (1.52)$$

$$w_x = \frac{\tau}{h} \left( \frac{\partial(hu_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(hu_xu_y)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gh^2}{2} \right) + gh \frac{\partial b}{\partial x} - hf_x \right), \quad (1.53)$$

$$\frac{\partial(hu_y)^*}{\partial y} = \frac{\partial(hu_y)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \tau \frac{\partial(hu_y)}{\partial t} \right) = j_{my}, \quad (1.54)$$

$$j_{my} = h(u_y - w_y), \quad (1.55)$$

$$w_y = \frac{\tau}{h} \left( \frac{\partial(hu_y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(hu_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{gh^2}{2} \right) + gh \frac{\partial b}{\partial y} - hf_y \right), \quad (1.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( hu_x^2 + \frac{gh^2}{2} \right)^* &= h^*(u_x^*)^2 + \frac{g(h^*)^2}{2} = \\ &= u_x j_{mx} + \frac{gh^2}{2} - \Pi_{xx}, \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\frac{\partial(hu_x u_y)^*}{\partial y} = h^* u_y^* u_x^* = u_y j_{mx} - \Pi_{xy}, \quad (1.58)$$

$$\frac{\partial(hu_x u_y)^*}{\partial x} = h^* u_x^* u_y^* = u_x j_{my} - \Pi_{yx}, \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( hu_y^2 + \frac{gh^2}{2} \right)^* &= h^*(u_y^*)^2 + \frac{g(h^*)^2}{2} = \\ &= u_y j_{my} + \frac{gh^2}{2} - \Pi_{yy}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

КГД система уравнений МВ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial j_{my}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(hu_x)}{\partial t} + \frac{\partial(j_{mx}u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(j_{my}u_x)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gh^2}{2} \right) &= \\ = \left( h - \tau \left( \frac{\partial(hu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(hu_y)}{\partial y} \right) \right) \left( f - g \frac{\partial b}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial y}, & \quad (1.61) \\ \frac{\partial(hu_y)}{\partial t} + \frac{\partial(j_{mx}u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(j_{my}u_y)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{gh^2}{2} \right) &= \\ = \left( h - \tau \left( \frac{\partial(hu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(hu_y)}{\partial y} \right) \right) \left( f - g \frac{\partial b}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yy}}{\partial y}, \end{aligned}$$

где

$$j_{mx} = h(u_x - w_x), \quad (1.62)$$

$$w_x = \frac{\tau}{h} \left( \frac{\partial(hu_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(hu_x u_y)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gh^2}{2} \right) + gh \frac{\partial b}{\partial x} - hf_x \right), \quad (1.63)$$

$$j_{my} = h(u_y - w_y), \quad (1.64)$$

$$w_y = \frac{\tau}{h} \left( \frac{\partial(hu_y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(hu_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{gh^2}{2} \right) + gh \frac{\partial b}{\partial y} - hf_y \right), \quad (1.65)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{xx} = & \tau h u_x \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial b}{\partial x} - f_x \right) + \\ & + \tau g h \left( u_x \frac{\partial h}{\partial x} + u_y \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial u_x}{\partial x} + h \frac{\partial u_y}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (1.66)$$

$$\Pi_{yx} = \tau h u_y \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial b}{\partial x} - f_x \right), \quad (1.67)$$

$$\Pi_{xy} = \tau h u_x \left( u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} + g \frac{\partial b}{\partial y} - f_y \right), \quad (1.68)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{yy} = & \tau h u_y \left( u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial y} + g \frac{\partial b}{\partial y} - f_y \right) + \\ & + \tau g h \left( u_y \frac{\partial h}{\partial y} + u_x \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u_x}{\partial x} + h \frac{\partial u_y}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1.69)$$

### 1.2.3 Задача о гидравлическом скачке

Как пример эффективной численной реализации КГД системы уравнений МВ рассмотрим задачу о распаде разрыва на примере неподвижного гидравлического скачка.

Для классической задачи о распаде КГД система уравнений МВ с плоским дном в отсутствии внешних сил и тензора Навье–Стокса выглядит как

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial j_m}{\partial x} = 0, \quad (1.70)$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(j_m u)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gh^2}{2} \right) = \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x}, \quad (1.71)$$

где

$$j_m = h(u - w),$$

$$w = \frac{\tau}{h} \left( \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} \right),$$

$$\Pi_{xx} = \tau u h \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \tau g h \left( u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Здесь  $h(x, t)$  – высота жидкости,  $u(x, t)$  – скорость жидкости,  $\Pi_{xx}(x, t)$  – тензор вязких напряжений,  $b(x)$  – профиль дна,  $\tau$  – параметр регуляризации, или

сглаживания. Так как случай одномерный, будем опускать индекс  $x$  для  $u$ ,  $j_m$  и  $w$ .

Введем равномерную сетку по координате  $x$  с шагом  $h_x$ , координатами узлов  $x_i$ , а также сетку по времени с шагом  $\Delta t$ . Для решения системы уравнений (1.70)–(1.71) используем явную по времени схему с центральными разностями. Значения газодинамических величин определяются в узлах сетки. Значения потоков определяются в полуцелых узлах. Символ  $(\hat{\phantom{x}})$  указывает значение функции на верхнем временном слое.

Разностная аппроксимация системы уравнений (1.70)–(1.71) имеет вид

$$\hat{h}_i = h_i - \Delta t \frac{j_{i+1/2} - j_{i-1/2}}{h_x}, \quad (1.72)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_i = \frac{1}{\hat{h}_i} & \left( h_i u_i - \Delta t \frac{j_{m i+1/2} u_{i+1/2} - j_{m i-1/2} u_{i-1/2}}{h_x} - \Delta t \frac{g}{2} \frac{h_{i+1/2}^2 - h_{i-1/2}^2}{h_x} + \right. \\ & \left. + \Delta t \frac{\Pi_{xx i+1/2} - \Pi_{xx i-1/2}}{h_x} \right), \end{aligned} \quad (1.73)$$

где поток в полуцелых точках вычисляется как

$$j_{m i+1/2} = h_{i+1/2} (u_{i+1/2} - w_{i+1/2}), \quad (1.74)$$

$$w_{i+1/2} = \frac{\tau_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} \left( \frac{h_{i+1} u_{i+1}^2 - h_i u_i^2}{h_x} + g h_{i+1/2} \frac{h_{i+1} - h_i}{h_x} \right). \quad (1.75)$$

Разностная аппроксимация величины  $\Pi_{i+1/2}$  строится как

$$\begin{aligned} \Pi_{xx i+1/2} = \tau_{i+1/2} u_{i+1/2} h_{i+1/2} & \left( u_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_x} + g \frac{h_{i+1} - h_i}{h_x} \right) + \\ & + \tau_{i+1/2} g h_{i+1/2} \left( u_{i+1/2} \frac{h_{i+1} - h_i}{h_x} + h_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_x} \right). \end{aligned} \quad (1.76)$$

Значения основных гидродинамических переменных в полуцелых узлах (на границах ячеек) определяются как средние от значений в двух соседних ячейках.

Значения вычисляемых выражений в точках  $i - 1/2$  определяются аналогично

точкам  $i + 1/2$ .

Параметр сглаживания вычисляется как

$$\tau = \alpha \frac{h_x}{(|u| + \sqrt{gh})}, \quad (1.77)$$

где числовой коэффициент  $0 < \alpha < 1$ .

Шаг по времени выбирается из условия Куранта

$$\Delta t = \beta \frac{h_x}{\max(|u| + \sqrt{gh})}, \quad (1.78)$$

где  $0 < \beta < 1$  — число Куранта, подбирается во время вычислений для обеспечения устойчивости счета.

Гидравлический скачок [72] рассчитывается в области  $(-50, 50)$ . Разрыв расположен в точке  $x = 0$ . Начальные данные приведены в Таблице 1.1. Значения гидродинамических величин слева от разрыва обозначены индексом L, справа — индексом R.

$h_L$	$u_L$	$h_R$	$u_R$
1	15.66	6.589	2.377

Таблица 1.1. Начальные значения для  $h(x)$  и  $u(x)$

Высота измеряется в метрах (м), скорость — в метрах/секунду (м/сек). Начальные значения выбраны из расчета, что число Фруда  $Fr = 5$ . Шаг сетки  $h_x = 0.2$ .

Граничные условия задаются в разностном виде как

$$h(1) = h_L, \quad h(N) = h_R, \quad u(1) = u_L, \quad u(N) = u_R. \quad (1.79)$$

Число точек  $N$  разностной сетки по пространству равно 500. Шаг по времени постоянный — 0.001 сек. Параметр  $\alpha = 0.5$ , коэффициент сглаживания  $\tau = 0.0319$ . В данной задаче параметр сглаживания выбран постоянным в течение всего процесса вычисления для того, чтобы можно было сравнить численное

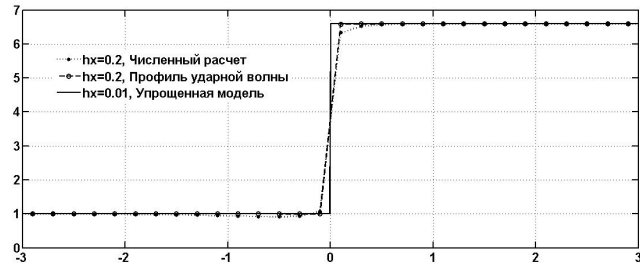


Рис. 1.1. Высота  $h(x)$ : численный расчет и профиль ударной волны, шаг сетки  $h_x = 0.2$ ; упрощенная физическая модель, шаг сетки  $h_x = 0.01$

решение и решение, описывающее профиль ударной волны

$$h(x, t) = h_L + \frac{h_R - h_L}{1 + e^{-x \frac{h_R - h_L}{2\tau}}}. \quad (1.80)$$

Результат численного расчета представлен на Рис. 1.1.

### 1.3 КГД система уравнений МВ в полярной системе координат

Квазигазодинамические (КГД) уравнения и основанные на них численные алгоритмы показали свою эффективность при расчетах разнообразных задач газовой динамики [51], [12], [55]. При этом большинство задач решалось в декартовой и цилиндрической системах координат [12], [55].

Для описания целого ряда течений естественно использовать уравнения гидродинамики, записанные в полярной системе координат. Сюда можно отнести, к примеру, задачи с инженерными приложениями, или задачи, описывающие геофизические и астрофизические процессы (см., например, [5], [4], [53]). В качестве инженерных задач отметим расчеты течений в трубах и зазорах, течения Куэтта–Тейлора между вращающимися цилиндрами, течения во вращающихся сосудах, течения в сепараторах. Важным кругом задач является изучение и моделирование охлаждающих систем для газовых турбин, включая микротурбины ([78], [56], [70]). Уравнения в полярных координатах используются для анализа некоторых вихревых атмосферных течений типа циклонов и смерчей,

а также ряда астрофизических задач ([6], [2], [1], [38], [42], [50], [46]).

Однако большинство существующих разностных алгоритмов решения уравнений гидродинамики построены с использованием декартовой системы координат, а их адаптация для сферических и полярных систем координат оказывается громоздкой, что объясняет ограниченное количество работ в этой области.

### 1.3.1 Уравнения МВ в полярной системе координат

Система уравнений МВ в полярной системе координат  $(r, \varphi)$  (см., например [32]) (Рис. 1.2) с учетом компонент тензора вязких напряжений Навье–Стокса записывается следующим образом

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rhu_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_\varphi)}{\partial \varphi} = 0, \quad (1.81)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (hu_r)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rhu_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_ru_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{gh^2}{2} \right) - \frac{hu_\varphi^2}{r} = \\ & = h \left( f_r - g \frac{\partial b}{\partial r} \right) + \frac{\partial \Pi_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\Pi_{rr} - \Pi_{\varphi\varphi}}{r}, \end{aligned} \quad (1.82)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (hu_\varphi)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 hu_ru_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_\varphi^2)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{gh^2}{2} \right) = \\ & = h \left( f_\varphi - \frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial \Pi_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \Pi_{r\varphi}, \end{aligned} \quad (1.83)$$

где  $h(r, \varphi, t)$  – высота жидкости,  $\mathbf{u} = (u_r(r, \varphi, t), u_\varphi(r, \varphi, t))$  – скорость жидкости,  $b(r, \varphi)$  – профиль дна,  $f_r$  и  $f_\varphi$  – компоненты внешней силы. Компоненты тензора вязких напряжений Навье–Стокса в полярной системе координат равны

$$\begin{aligned} \Pi_{rr} &= 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \Pi_{\varphi\varphi} &= 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right), \\ \Pi_{r\varphi} &= \Pi_{\varphi r} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \end{aligned} \quad (1.84)$$

где  $\mu$  – естественная физическая вязкость,

Система (1.81) – (1.83) может быть получена из исходной системы уравнений



МВ в декартовых координатах

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(h\mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial(h\mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla \left( \frac{gh^2}{2} \right) &= \operatorname{div} \hat{\Pi}_{NS} + h\mathbf{f} - gh\nabla b, \end{aligned} \quad (1.85)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(h\mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial(h\mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{u} \operatorname{div}(h\mathbf{u}) + (h\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + \nabla \left( \frac{gh^2}{2} \right) &= \operatorname{div} \hat{\Pi}_{NS} + h\mathbf{f} - gh\nabla b, \end{aligned} \quad (1.86)$$

с помощью замены переменных

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (1.87)$$

Единичные векторы в полярной системе координат  $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(\varphi)$ ,  $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi(\varphi)$  выражаются через единичные векторы в декартовой системе координат  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.88)$$

При этом  $\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_r$ ,  $\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_\varphi$ . Подставляя в выражение

$$\mathbf{u}(x, y) = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} = u_r \mathbf{e}_r(\varphi) + u_\varphi \mathbf{e}_\varphi(\varphi)$$

значения  $\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{e}_\varphi$  через декартовы координаты, получаем значения компонент вектора скорости  $\mathbf{u}$  в декартовых координатах, выраженных через полярные

$$u_x = u_r \cos \varphi - u_\varphi \sin \varphi, \quad u_y = u_r \sin \varphi + u_\varphi \cos \varphi.$$

Из выражения для производных по координатам в полярной системе координат

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial y} \sin \varphi, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.89)$$

производные по декартовым координатам выглядят как

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r}. \quad (1.90)$$

С помощью соответствующих коэффициентов Ламэ  $H_r = 1$ ,  $H_\varphi = r$  получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (h\mathbf{u}) &= \frac{1}{r} \frac{\partial (rhu_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_\varphi)}{\partial \varphi}, \\ \mathbf{u} \operatorname{div} (h\mathbf{u}) &= \mathbf{e}_r \left( \frac{u_r}{r} \frac{\partial (rhu_r)}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \frac{\partial (hu_\varphi)}{\partial \varphi} \right) + \\ &+ \mathbf{e}_\varphi \left( \frac{u_r}{r} \frac{\partial (rhu_r)}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial (hu_\varphi)}{\partial \varphi} \right), \\ (h\mathbf{u}\nabla) \mathbf{u} &= \mathbf{e}_r \left( hu_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{hu_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{hu_\varphi^2}{r} \right) + \\ &+ \mathbf{e}_\varphi \left( hu_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{hu_r u_\varphi}{r} + \frac{hu_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (1.91)$$

Подставляя (1.91) в (1.86), получим систему (1.81) – (1.83).

### 1.3.2 КГД уравнения МВ в полярной системе координат

Для вывода КГД( или регуляризованных) [13], [63]) уравнений МВ в полярных координатах применим уже известный алгоритм, т.е. гидродинамические переменные осредним по малому интервалу времени  $\Delta t$  и вычислим среднее на отрезке  $(t, t + \Delta t)$ . При этом будем разлагать средние значения переменных в ряд Тейлора и пренебрегать вторыми производными по времени и членами второго порядка малости вида  $\tau^2$  и  $\tau\mu$ , где  $0 \leq \tau \leq \Delta t$  – параметр регуляризации, имеющий размерность времени, по которому производится осреднение,  $\mu$  – естественная физическая вязкость из уравнений (1.84). Таким образом, в КГД уравнениях МВ в полярной системе координат гидродинамические переменные  $h$ ,  $u_r$ ,  $u_\varphi$  заменяются на  $h + \tau \frac{\partial h}{\partial t}$ ,  $u_r + \tau \frac{\partial u_r}{\partial t}$  и  $u_\varphi + \tau \frac{\partial u_\varphi}{\partial t}$ , а потоки  $hu_r$  и  $hu_\varphi$  – на  $hu_r + \frac{\partial hu_r}{\partial t}$  и  $hu_\varphi + \frac{\partial hu_\varphi}{\partial t}$ , соответственно.

Для вывода КГД уравнений МВ в полярной системе координат нам понадо-

бются выражения для производных  $\frac{\partial u_r}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}$ . Для этого выпишем уравнения движения в недивергентном виде без вязких членов Навье–Стокса

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\varphi \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{gh^2}{2} \right) - \frac{u_\varphi^2}{r} = f_r - g \frac{\partial b}{\partial r}, \quad (1.92)$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r} u_r \frac{\partial (ru_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{rh} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{gh^2}{2} \right) = f_\varphi - \frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \varphi}. \quad (1.93)$$

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial u_r}{\partial t} + \hat{w}_r &= 0, \\ \hat{w}_r &= \tau \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\varphi \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + g \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{u_\varphi^2}{r} - f_r + g \frac{\partial b}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (1.94)$$

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + \hat{w}_\varphi, \\ \hat{w}_\varphi &= \tau \left( \frac{1}{r} u_r \frac{\partial (ru_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} g \frac{\partial h}{\partial \varphi} - f_\varphi + \frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (1.95)$$

Далее раскладываем средние значения  $hu_r$  и  $hu_\varphi$  в уравнении неразрывности (1.81) в ряд Тейлора, заменяя их на  $hu_r + \tau \frac{\partial hu_r}{\partial t}$  и  $hu_\varphi + \tau \frac{\partial hu_\varphi}{\partial t}$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( hu_r + \tau \frac{\partial (hu_r)}{\partial t} \right) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( hu_\varphi + \tau \frac{\partial (hu_\varphi)}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.96)$$

Из уравнений (1.92) и (1.93) выразим производные по времени

$$\frac{\partial (hu_r)}{\partial t} = - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (rhu_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_r u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{gh^2}{2} \right) - \frac{hu_\varphi^2}{r} - h \left( f_r - g \frac{\partial b}{\partial r} \right) \right), \quad (1.97)$$

$$\frac{\partial (hu_\varphi)}{\partial t} = - \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 hu_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_\varphi^2)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{gh^2}{2} \right) - h \left( f_\varphi - \frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \varphi} \right) \right) \quad (1.98)$$

и введем обозначения

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial (hu_r)}{\partial t} + w_r &= 0, \\ \tau \frac{\partial (hu_\varphi)}{\partial t} + w_\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (1.99)$$

$$\begin{aligned}
w_r &= \frac{\tau}{h} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (rhu_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_r u_\varphi)}{\partial \varphi} + gh \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{hu_\varphi^2}{r} - h \left( f_r - g \frac{\partial b}{\partial r} \right) \right), \\
w_\varphi &= \frac{\tau}{h} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 hu_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_\varphi^2)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} gh \frac{\partial h}{\partial \varphi} - h \left( f_\varphi - \frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \varphi} \right) \right), \quad (1.100)
\end{aligned}$$

$$j_{mr} = h(u_r - w_r),$$

$$j_{m\varphi} = h(u_\varphi - w_\varphi).$$

Тогда уравнение неразрывности в рамках КГД модели в полярной системе координат записывается как

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rj_{mr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (j_{m\varphi})}{\partial \varphi} = 0. \quad (1.101)$$

Рассмотрим первое уравнение движения (1.82) в регуляризованном виде, где также раскладываются в ряд Тейлора средние значения  $hu_r$ ,  $h$  и  $u_\varphi$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial (hu_r)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( \left( hu_r + \tau \frac{\partial (hu_r)}{\partial t} \right) u_r + hu_r \tau \frac{\partial u_r}{\partial t} \right) \right) + \\
&+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \left( hu_\varphi + \tau \frac{\partial (hu_\varphi)}{\partial t} \right) u_r + hu_\varphi \tau \frac{\partial u_r}{\partial t} \right) + \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left( h + \tau \frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 - \\
&- \frac{1}{r} \left( h + \tau \frac{\partial h}{\partial t} \right) \left( u_\varphi + \tau \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \right)^2 = \left( h + \tau \frac{\partial h}{\partial t} \right) \left( f_r - g \frac{\partial b}{\partial r} \right). \quad (1.102)
\end{aligned}$$

С учетом новых обозначений (1.94) и (1.100) уравнение (1.102) принимает вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial (hu_r)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rj_{mr}u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (j_{m\varphi}u_r)}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{gh^2}{2} \right) - \frac{hu_\varphi^2}{r} = \\
&= \left( h + \tau \frac{\partial h}{\partial t} \right) \left( f_r - g \frac{\partial b}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial (rhu_r \hat{w}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_\varphi \hat{w}_r)}{\partial \varphi} - \\
&- \frac{\partial}{\partial r} \left( gh\tau \frac{\partial h}{\partial t} \right) + \tau \frac{\partial h}{\partial t} \frac{u_\varphi^2}{r} - 2h \frac{u_\varphi}{r} \hat{w}_\varphi + \frac{\partial \Pi_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \\
&+ \frac{\Pi_{rr} - \Pi_{\varphi\varphi}}{r}, \quad (1.103)
\end{aligned}$$

где

$$\tau \frac{\partial h}{\partial t} = -\tau \operatorname{div} (h\mathbf{u}) = -\tau \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (rhu_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_\varphi)}{\partial \varphi} \right). \quad (1.104)$$

Аналогично, из 2-го уравнения движения (1.83) в регуляризованном виде получаем второе уравнение движения КГД системы уравнений МВ в полярной

системе координат

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(hu_\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial(r^2 j_{mr} u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(j_{m\varphi} u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{gh^2}{2} \right) = \\
& = \left( h + \tau \frac{\partial h}{\partial t} \right) \left( f_\varphi - \frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial(r^2 h u_r \hat{w}_\varphi)}{\partial r} + \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial(hu_\varphi \hat{w}_\varphi)}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( gh\tau \frac{\partial h}{\partial t} \right) + \frac{\partial \Pi_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \Pi_{r\varphi}.
\end{aligned} \tag{1.105}$$

Итак, мы получаем следующую КГД систему уравнений МВ в полярной системе координат

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r j_{mr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(j_{m\varphi})}{\partial \varphi} = 0, \tag{1.106}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(hu_r)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r j_{mr} u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(j_{m\varphi} u_r)}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{gh^2}{2} \right) - \frac{hu_\varphi^2}{r} = \\
& = (h - \tau \operatorname{div}(h\mathbf{u})) \left( f_r - g \frac{\partial b}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial(r h u_r \hat{w}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(hu_\varphi \hat{w}_r)}{\partial \varphi} + \\
& + \frac{\partial}{\partial r} (gh\tau \operatorname{div}(h\mathbf{u})) - \tau \frac{u_\varphi^2}{r} \operatorname{div}(h\mathbf{u}) - 2h \frac{u_\varphi}{r} \hat{w}_\varphi + \\
& + \frac{\partial \Pi_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\Pi_{rr} - \Pi_{\varphi\varphi}}{r},
\end{aligned} \tag{1.107}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(hu_\varphi)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 j_{mr} u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(j_{m\varphi} u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{gh^2}{2} \right) = \\
& = (h - \tau \operatorname{div}(h\mathbf{u})) \left( f_\varphi - \frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 h u_r \hat{w}_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(hu_\varphi \hat{w}_\varphi)}{\partial \varphi} + \\
& + \frac{1}{r} g \frac{\partial}{\partial \varphi} (h\tau \operatorname{div}(h\mathbf{u})) + \frac{\partial \Pi_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \Pi_{r\varphi},
\end{aligned} \tag{1.108}$$

где

$$\operatorname{div}(h\mathbf{u}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(hru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(hu_\varphi)}{\partial \varphi},$$

$$j_{mr} = h(u_r - w_r),$$

$$j_{m\varphi} = h(u_\varphi - w_\varphi),$$

$$w_r = \frac{\tau}{h} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r h u_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(hu_r u_\varphi)}{\partial \varphi} + gh \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{hu_\varphi^2}{r} - h \left( f_r - g \frac{\partial b}{\partial r} \right) \right),$$

$$w_\varphi = \frac{\tau}{h} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 h u_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(hu_\varphi^2)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} gh \frac{\partial h}{\partial \varphi} - h \left( f_\varphi - \frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \varphi} \right) \right),$$

$$\begin{aligned}\hat{w}_r &= \tau \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\varphi \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + g \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{u_\varphi^2}{r} - f_r + g \frac{\partial b}{\partial r} \right), \\ \hat{w}_\varphi &= \tau \left( \frac{1}{r} u_r \frac{\partial (r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} g \frac{\partial h}{\partial \varphi} - f_\varphi + \frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \varphi} \right), \\ \Pi_{rr} &= 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \Pi_{\varphi\varphi} &= 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right), \\ \Pi_{r\varphi} &= \Pi_{\varphi r} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right).\end{aligned}$$

При  $\tau = 0$  КГД система уравнений МВ в полярных координатах (1.106) – (1.108) превращается в исходную систему уравнений МВ в полярных координатах (1.81) – (1.83).

Построенная система КГД уравнений МВ в полярной системе координат легко может быть распространена на случай течения политропного газа, рассматриваемого в баротропном приближении. Для этого следует сделать формальную замену переменных  $h$  и  $p = \frac{gh^2}{2}$  системы уравнений МВ на  $\rho$  и  $p = k\rho^\gamma$ .

В 1D-случае  $h = h(r)$ ,  $u_r = u_r(r)$ ,  $u_\varphi = u_\varphi(r)$ ,  $b = b(r)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$  система уравнений МВ в полярных координатах (1.81) – (1.83) имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r h u_r)}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial (h u_r)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r h u_r)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{g h^2}{2} \right) - \frac{h u_\varphi^2}{r} &= \\ &= h \left( f_r - g \frac{\partial b}{\partial r} \right) + \frac{\partial \Pi_{rr}}{\partial r} + \frac{\Pi_{rr} - \Pi_{\varphi\varphi}}{r}, \\ \frac{\partial (h u_\varphi)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 h u_r u_\varphi)}{\partial r} &= h f_\varphi + \frac{\partial \Pi_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{2}{r} \Pi_{r\varphi},\end{aligned}\tag{1.109}$$

где

$$\begin{aligned}\Pi_{rr} &= 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \Pi_{\varphi\varphi} &= 2\mu \frac{u_r}{r}, \\ \Pi_{r\varphi} &= \Pi_{\varphi r} = \mu \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right).\end{aligned}$$

При этом КГД система уравнений МВ в полярной системе координат (1.106)

– (1.108) выглядит как

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r j_{mr})}{\partial r} = 0, \\
& \frac{\partial (h u_r)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r j_{mr} u_r)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{g h^2}{2} \right) - \frac{h u_\varphi^2}{r} = \\
& = \left( h - \tau \frac{1}{r} \frac{\partial (h r u_r)}{\partial r} \right) \left( f_r - g \frac{\partial b}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r h \hat{w}_r)}{\partial r} + \\
& + \frac{\partial}{\partial r} \left( g h \tau \frac{1}{r} \frac{\partial (h r u_r)}{\partial r} \right) - \tau \frac{u_\varphi^2}{r} \frac{1}{r} \frac{\partial (h r u_r)}{\partial r} - 2 h \frac{u_\varphi}{r} \hat{w}_\varphi + \\
& + \frac{\partial \Pi_{rr}}{\partial r} + \frac{\Pi_{rr} - \Pi_{\varphi\varphi}}{r}, \\
& \frac{\partial (h u_\varphi)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 j_{mr} u_\varphi)}{\partial r} = \left( h - \tau \frac{1}{r} \frac{\partial (r h u_r)}{\partial r} \right) f_\varphi + \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 h u_r \hat{w}_\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial \Pi_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{2}{r} \Pi_{r\varphi},
\end{aligned} \tag{1.110}$$

где

$$\begin{aligned}
j_{mr} &= h (u_r - w_r), \\
w_r &= \frac{\tau}{h} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r h u_r^2)}{\partial r} + g h \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{h u_\varphi^2}{r} - h \left( f_r - g \frac{\partial b}{\partial r} \right) \right), \\
\hat{w}_r &= \tau \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + g \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{u_\varphi^2}{r} - f_r + g \frac{\partial b}{\partial r} \right), \\
\hat{w}_\varphi &= \tau \left( \frac{1}{r} u_r \frac{\partial (r u_\varphi)}{\partial r} - f_\varphi \right).
\end{aligned}$$

### 1.3.3 1D–численный алгоритм

Введем равномерную сетку по координате  $r$  с шагом  $\Delta r$ , координатами узлов  $r_i$ , а также сетку по времени с шагом  $\Delta t$ . Для решения системы КГД уравнений МВ в полярной системе координат используем явную по времени схему с центральными разностями. Значения гидродинамических величин определяются в узлах сетки, значения потоков определяются в полуцелых узлах.

1D разностная аппроксимация системы (1.110) выглядит следующим образом

$$\frac{\hat{h}_i - h_i}{\Delta t} + \frac{1}{r_i} \frac{(r j_{mr})_{i+\frac{1}{2}} - (r j_{mr})_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta r} = 0, \tag{1.111}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\hat{h}u_r)_i - (hu_r)_i}{\Delta t} + \frac{1}{r_i} \frac{(rj_{mr}u_r)_{i+\frac{1}{2}} - (rj_{mr}u_r)_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta r} + \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{g}{2} (h_{i+\frac{1}{2}}^2 - h_{i-\frac{1}{2}}^2) \right) - \\
& - \frac{h_i u_{\varphi i}^2}{r_i} = \left( h_i - \tau_i \frac{1}{r_i} \frac{1}{\Delta r} \left( (rhu_r)_{i+\frac{1}{2}} - (rhu_r)_{i-\frac{1}{2}} \right) \right) \left( f_{ri} - g \frac{1}{\Delta r} (b_{i+\frac{1}{2}} - b_{i-\frac{1}{2}}) \right) + \\
& + \frac{1}{\Delta r} \left( \left( \frac{gh\tau}{r} \right)_{i+\frac{1}{2}} \frac{(hru_r)_{i+1} - (hru_r)_i}{\Delta r} - \left( \frac{gh\tau}{r} \right)_{i-\frac{1}{2}} \frac{(hru_r)_i - (hru_r)_{i-1}}{\Delta r} \right) + \\
& + \frac{1}{r_i} \frac{(ru_r h \hat{w}_r)_{i+\frac{1}{2}} - (ru_r h \hat{w}_r)_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta r} - \tau \omega_0^2 \frac{(hru_r)_{i+\frac{1}{2}} - (hru_r)_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta r} - 2h_i \omega_0 \hat{w}_{\varphi} + \\
& + \frac{\Pi_{rr i+\frac{1}{2}} - \Pi_{rr i-\frac{1}{2}}}{\Delta r} + \frac{\Pi_{rr i} - \Pi_{\varphi\varphi i}}{r_i},
\end{aligned} \tag{1.112}$$

где

$$\begin{aligned}
w_{ri+\frac{1}{2}} &= \frac{\tau_{i+\frac{1}{2}}}{h_{i+\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{r_{i+\frac{1}{2}}} \frac{(rhu_r^2)_{i+1} - (rhu_r^2)_i}{\Delta r} + \frac{1}{\Delta r} gh_{i+\frac{1}{2}} (h_{i+1} - h_i) - \right. \\
& \left. - h_{i+\frac{1}{2}} \left( f_{i+\frac{1}{2}} - g \frac{1}{\Delta r} (b_{i+1} - b_i) \right) \right),
\end{aligned} \tag{1.113}$$

$$\begin{aligned}
\hat{w}_{ri+\frac{1}{2}} &= \tau_{i+\frac{1}{2}} \left( u_{ri+\frac{1}{2}} \frac{u_{ri+1} - u_{ri}}{\Delta r} + \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} \frac{1}{\Delta r} gh_{i+\frac{1}{2}} (h_{i+1} - h_i) - \right. \\
& \left. - f_{ri+\frac{1}{2}} + g \frac{1}{\Delta r} (b_{i+1} - b_i) \right),
\end{aligned} \tag{1.114}$$

$$\hat{w}_{\varphi} = \tau_{i+\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{r_{i+\frac{1}{2}}} u_{i+\frac{1}{2}} \frac{(ru_{\varphi})_{i+1} - (ru_{\varphi})_i}{\Delta r} \right), \tag{1.115}$$

$$\Pi_{rr i+\frac{1}{2}} = 2\mu_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{ri+1} - u_{ri}}{\Delta r}, \tag{1.116}$$

$$\Pi_{\varphi\varphi i} = 2\mu_i \frac{u_{ri}}{r_i}. \tag{1.117}$$

Динамическая вязкость  $\mu$  берется пропорциональной давлению в ячейке и рассматривается как регуляризирующая добавка

$$\mu = \tau p = \tau \frac{gh^2}{2}, \tag{1.118}$$



параметр регуляризации пропорционален шагу сетки  $\Delta r$

$$\tau = \alpha \frac{\Delta r}{|u_r| + \sqrt{gh}}, \quad (1.119)$$

где  $0 < \alpha < 1$  – числовой коэффициент. Шаг по времени выбирается из условия Куранта в виде

$$\Delta t = \beta \frac{\Delta r}{|u_r| + \sqrt{gh}}, \quad (1.120)$$

где  $\beta$  – число Куранта.

### 1.3.4 1D–тесты и результаты расчета

**Тест 1.** Численная проверка условия покоящейся жидкости.

Приведем точное решение уравнений МВ (1.109) для покоящейся жидкости. Пусть  $h = h(r)$ ,  $u_\varphi = 0$ , производные по времени равны нулю  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ,  $f_r = 0$ ,  $f_\varphi = 0$ . Тогда из первого уравнения следует, что  $u_r = 0$ . Третье уравнение системы удовлетворяется точно. Из второго уравнения

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{gh^2}{2} \right) + gh \frac{\partial b}{\partial r} = 0$$

получается естественное условие равновесия для покоящейся жидкости

$$h(r) + b(r) = \text{const}. \quad (1.121)$$

Расчетная область в примерах берется от  $r_1 = 10$  см до  $r_2 = 110$  см, ускорение свободного падения  $g = 980$  см/сек<sup>2</sup> (Рис. 1.2).

Начальные условия  $u_r = 0$ ,  $h(r) + b(r) = \text{const}$ , профиль дна задается как небольшой холмик в виде полуокружности  $b(r) = \sqrt{100 - (r - 60)^2}$  радиуса 10 см с центром в точке  $r = 60$  см. Граничные условия для высоты жидкости  $h$  берутся, исходя из условия непротекания жидкости через границу ( $j_{mr} = 0$ )

расчетной области

$$\left. \frac{\partial h}{\partial r} \right|_{\Gamma} = - \left. \frac{\partial b}{\partial r} \right|_{\Gamma}. \quad (1.122)$$

Действительно, поток массы на границе должен быть равен нулю  $j_{mr} = 0$ , и при граничном условии на скорость  $u_r|_{\Gamma} = 0$  получаем  $j_{mr} = -hw_r = 0$ .

На Рис. 1.3 приведен результат расчета этой задачи. Численный коэффициент  $\alpha$  в пределах 0.1 – 1 не влияет на результат расчета.

**Тест 2.** Задача о равновесии вращающейся жидкости.

Пусть  $h = h(r)$ ,  $u_{\varphi} = u_{\varphi}(r)$ ,  $b(r) = \text{const}$ ,  $f_r = 0$ ,  $f_{\varphi} = 0$ . Будем искать решение системы (1.109) в виде  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ,  $u_r = 0$ . Зададим поперечную скорость как  $u_{\varphi} = r\omega_0$ , где  $\omega_0$  – некоторая константа.

Первое и третье уравнения системы удовлетворяются тождественно. Из второго уравнения системы (1.109) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{gh^2}{2} \right) - hr\omega_0^2 = 0,$$

и стационарное, или равновесное, решение системы (1.109) имеет вид

$$\begin{aligned} u(r) &= 0, \\ h(r) &= \frac{\omega_0^2 r^2}{2g} + C_1, \end{aligned} \quad (1.123)$$

где  $C_1$  – константа, которая находится из начальных условий. Эта постановка эквивалентна заданию компоненты центробежной силы  $f_r$  при  $u_{\varphi} = 0$ ,  $h = h(r)$ ,  $u_r = 0$ ,  $u_{\varphi} = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ,  $f_r = r\omega_0^2$ ,  $f_{\varphi} = 0$ .

Константа интегрирования  $C_1$  в аналитическом решении выбирается из задания значения высоты жидкости на левой границе расчетной области  $h(r_1, 0) = 10$  см и равна  $C_1 = 9.95$ . Угловая скорость равна  $\omega_0 = 1.0$  сек<sup>-1</sup> (см. Рис. 1.4).

Начальный уровень жидкости  $h_0$  находится из условия равенства объемов

при  $t = 0$  и  $t = \infty$

$$2\pi \int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{\omega_0^2 r^2}{2g} + C_1 \right) r dr = h_0 \pi (r_2^2 - r_1^2) \quad (1.124)$$

и равен  $h_0 = 13$  см. Начальные условия в данном примере выбраны таким образом, чтобы в процессе эволюции уровня жидкости не образовывались области с сухим дном.

Граничное условие для высоты жидкости  $h$  берется из требования непротекания жидкости через границу ( $j_{mr}|_{\Gamma} = 0$  при  $u_r|_{\Gamma} = 0$ )

$$\frac{\partial h}{\partial r} \Big|_{\Gamma} = r \Big|_{\Gamma} \frac{\omega_0^2}{g}. \quad (1.125)$$

Время расчета составляет 50 сек. Шаги сетки равны  $\Delta r = 2.0, 1.0, 0.5$  см, параметр  $\alpha = 0.5$ , число Куранта  $\beta = 0.1$ . Область расчета для  $\alpha$  от 0.1 до 1.0, для  $\beta$  – до 0.4. Результаты расчетов представлены на Рис. ??.

Оба представленных расчета показывают, что построенная разностная схема монотонно сходится к аналитическим решениям в указанном интервале шагов сетки и чисел Куранта. Точность численного решения для  $h(r)$  и  $u_r = 0$  на сетке с шагом  $\Delta r = 1.0$  при задании начального условия в виде аналитического решения составляет  $\sim 10^{-3}$ .

### 1.3.5 Сбалансированная схема

Для ряда задач важно, чтобы разностная схема обладала свойством "well-balanced" [75], [73]. Указанное условие означает, что в состоянии равновесия ( $u \equiv 0$ ) сила давления должна быть уравновешена приложенной к системе внешней силой. Для уравнения Эйлера это соотношение записывается в виде

$$\nabla p = h \mathbf{f} = h \nabla \varphi, \quad (1.126)$$

где  $p$  – давление,  $h$  – высота жидкости,  $\mathbf{f} = \nabla\varphi$  – массовая сила.

Для сбалансированных схем соотношение (1.126) должно удовлетворяться с высокой точностью на уровне разностного алгоритма. Для "well-balanced" схемы эта точность может составлять порядка  $10^{-13} - 10^{-15}$ . Разработке таких схем посвящено много работ, но построить такие схемы на базе численных алгоритмов повышенного порядка точности достаточно сложно [73].

КГД алгоритм естественным образом можно сделать сбалансированным, поскольку включенная в него адаптивная численная диссипация зануляется на равновесных решениях. Приведем способ построения сбалансированной КГД схемы для двух рассмотренных выше примеров.

**Тест 1.** Аналогом внешней силы в данном случае выступает выражение  $-g\partial b/\partial r$ , и соотношение (1.126) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{gh^2}{2} \right) + gh \frac{\partial b}{\partial r} = 0 \quad (1.127)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial r} (h + b) = 0. \quad (1.128)$$

Разностная аппроксимация соответствующих слагаемых в схеме (1.112) записывается в виде

$$\frac{g}{2} \frac{h_{i+\frac{1}{2}}^2 - h_{i-\frac{1}{2}}^2}{\Delta r} + gh_i \frac{b_{i+\frac{1}{2}} - b_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta r} = 0. \quad (1.129)$$

Для того чтобы получить сбалансированную разностную схему, необходимо заменить  $h_i$  на  $\frac{h_{i+1/2} + h_{i-1/2}}{2}$ . Тогда получается разностное соотношение

$$\frac{1}{\Delta r} \left( h_{i+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2}} + b_{i+\frac{1}{2}} - b_{i-\frac{1}{2}} \right) = 0, \quad (1.130)$$

которое непосредственно аппроксимирует (1.128).

При такой модификации разностного уравнения (1.112) точное решение

$b(r) + h(r) = 13$  см вычисляется с точностью до  $10^{-13}$  и скорость  $u_r = 0$  – с точностью до  $10^{-14}$ . Указанная модификация разностного КГД алгоритма для уравнений МВ впервые была предложена в [63] для плоских одномерных течений и обобщена в [14] на двумерные задачи для схем, построенных на прямоугольных и неструктурированных сетках.

**Тест 2.** Аналогом внешней силы в данном случае выступает выражение  $hrw_0^2$ , и соотношение (1.126) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{gh^2}{2} \right) - hw_0^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{2} \right) = 0. \quad (1.131)$$

Разностная аппроксимация записывается в виде

$$\frac{g}{2} \frac{h_{i+\frac{1}{2}}^2 - h_{i-\frac{1}{2}}^2}{\Delta r} - h_i \omega_0^2 \frac{r_{i+\frac{1}{2}}^2 - r_{i-\frac{1}{2}}^2}{2\Delta r} = 0. \quad (1.132)$$

Для того чтобы получить сбалансированную разностную схему для выражения  $\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\omega_0^2 r}{2g}$ , в схеме (1.112) также необходимо заменить  $h_i$  на  $\frac{h_{i+1/2} + h_{i-1/2}}{2}$ , т.е.

$$\frac{g}{2} \frac{h_{i+\frac{1}{2}}^2 - h_{i-\frac{1}{2}}^2}{\Delta r} - \frac{h_{i+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}}}{2} \omega_0^2 \frac{r_{i+\frac{1}{2}}^2 - r_{i-\frac{1}{2}}^2}{2\Delta r} = 0. \quad (1.133)$$

Точность численного решения при задании начального условия в виде аналитического решения (1.123) составляет  $10^{-14}$  для  $h(r)$  и  $u_r = 0$ .

## 1.4 Выводы

Приведены уравнения газовой динамики в векторном виде с общими уравнениями состояния и КГД система уравнений газовой динамики для идеального политропного газа. Приведен вывод КГД системы уравнений МВ. Приведен расчет тестовой задачи о варианте гидравлического скачка, показывающий эффективность КГД уравнений МВ. Приведен вывод КГД системы уравнений МВ в полярной системе координат. Полученная система протестирована на одномерных тестах.

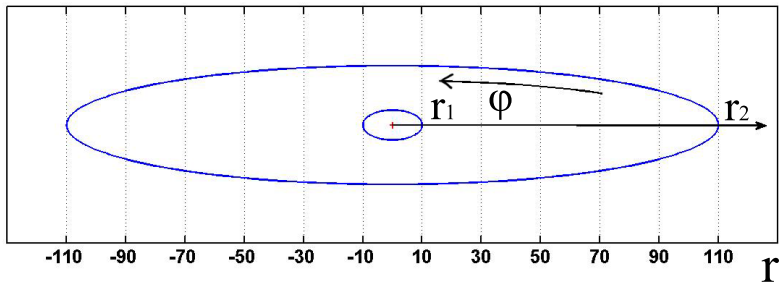
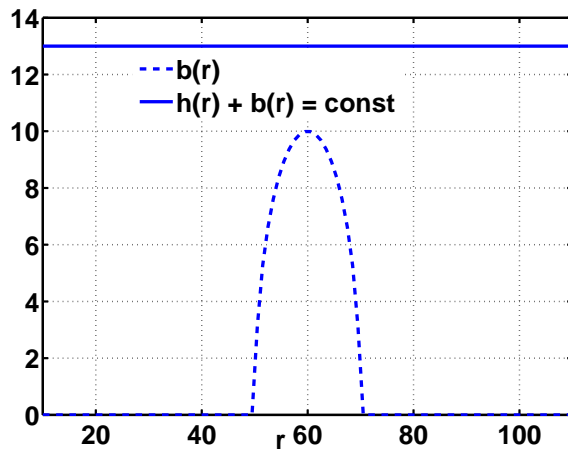


Рис. 1.2. Расчетная область

Рис. 1.3. Тест 1. Высота  $h(r)$  – численный расчет для  $\Delta r = 1.0$  при  $t = 1$  сек.  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.1$

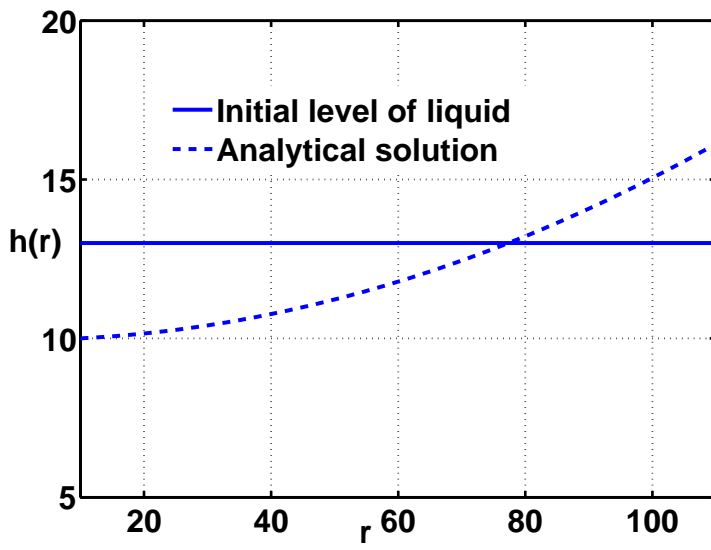


Рис. 1.4. Тест 2. Вычисление начального уровня жидкости. Начальный и конечный уровни жидкости в аналитическом расчете

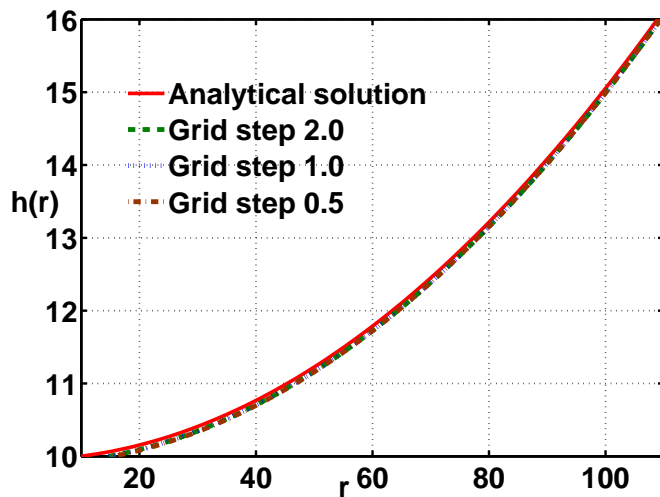


Рис. 1.5. Тест 2. Высота  $h(r)$  – аналитический и численный расчеты для  $\Delta r = 2.0, 1.0, 0.5$ .  $\alpha = 0.5, \beta = 0.1, t = 50$  сек.

## Глава 2

# Численное моделирование уединенной ВОЛНЫ

В данной главе представлены результаты численного моделирования нелинейного процесса формирования незатухающей уединенной волны. Задачей ставился вопрос о возможности прямого численного моделирования процесса возникновения уединенного ветро–волнового солитона на основе уравнений мелкой воды. В основе лежит КГД алгоритм с использованием регуляризованных уравнений [63], [3], [15]. Основные параметры математической модели, положенной в основу описанных ниже результатов, соответствуют данным лабораторных экспериментов [10], [52].

Среди волновых движений, происходящих в морях и океанах, большой интерес представляет возникновение и поведение уединенных волн большой амплитуды, которые в литературе получили название экстремальных, или гигантских волн. В ряде публикаций такие волны называются волнами–убийцами. В мировой практике накоплено большое количество свидетельств о встрече судов и буровых платформ с необычными волнами, обладающими большей высотой по сравнению с окружающими волнами, с неожиданностью их появления и исчезновения [41], [52], [10], [33]. Как и в случае волн–цунами сейсмического происхождения, высота таких волн при подходе к берегу резко увеличивается, что



может причинить существенный ущерб побережью.

Согласно современным представлениям и опыту наблюдений, в ряде случаев такие волны могут образовываться под влиянием ветра и вести себя как уединенный солитон или группа солитонов. В данном случае под солитоном понимается устойчивая уединенная волна, которая проявляет некоторые свойства частицы при взаимодействии таких волн друг с другом и при их отражении от препятствий [11], [7].

Механизм формирования волно-ветровых солитонов до конца не выяснен, поскольку исследование таких солитонов в реальных условиях представляет непреодолимые трудности. Изучение этого явления проводилось на многих экспериментальных установках [10], [52], а для теоретического анализа использовались уравнения Кортевега–де–Фриза и нелинейные уравнения типа уравнения Шредингера [33]. Обе теоретические модели заранее предполагают существование решений в виде солитона.

В 60-х годах 20-го века в Московском гидрофизическом институте под руководством В.В. Шулейкина был построен один из самых больших кольцевых штормовых бассейнов, в котором волны, разгоняясь потоками воздуха, двигались, не встречая препятствий на своем пути. Основной целью строительства этого бассейна являлось изучение волновых процессов, происходящих в условиях открытого моря, среди которых немалый интерес представляли уединенные волны – солитоны [48], [8].

Механизм образования таких волн до сих пор остается не ясным, хотя современные эксперименты позволяют не только зафиксировать сам процесс формирования, но и получить условия возникновения уединенных волн – ограничение на глубину канала, силу ветра, скорость и размеры солитона [52], [33].

## 2.1 Описание эксперимента

Согласно [10], [52], экспериментальная установка представляет собой кольцевой гидроканал с внешним и внутренним диаметрами  $R_1 = 2.02$  м и  $R_2 = 1.65$  м соответственно. Высота канала 0.4 м. Боковые стенки канала изготовлены из оргстекла, благодаря чему через них можно вести непосредственное наблюдение и видео– или фотосъемку волн. Воздушный поток от вентилятора нагнетается в пространство между поверхностью воды и крышкой канала. Вентилятор располагается в центре канала, а поток воздуха, регулируемый специальным устройством, поступает в раструбы через герметические гибкие рукава. В нижней части раструба имеется дно, благодаря которому поток воздуха выравнивается и входит в канал практически в горизонтальном направлении. Скорость ветра можно изменять от 3 до 15 м/сек. Фотография экспериментальной установки приведена на Рис. 2.1.

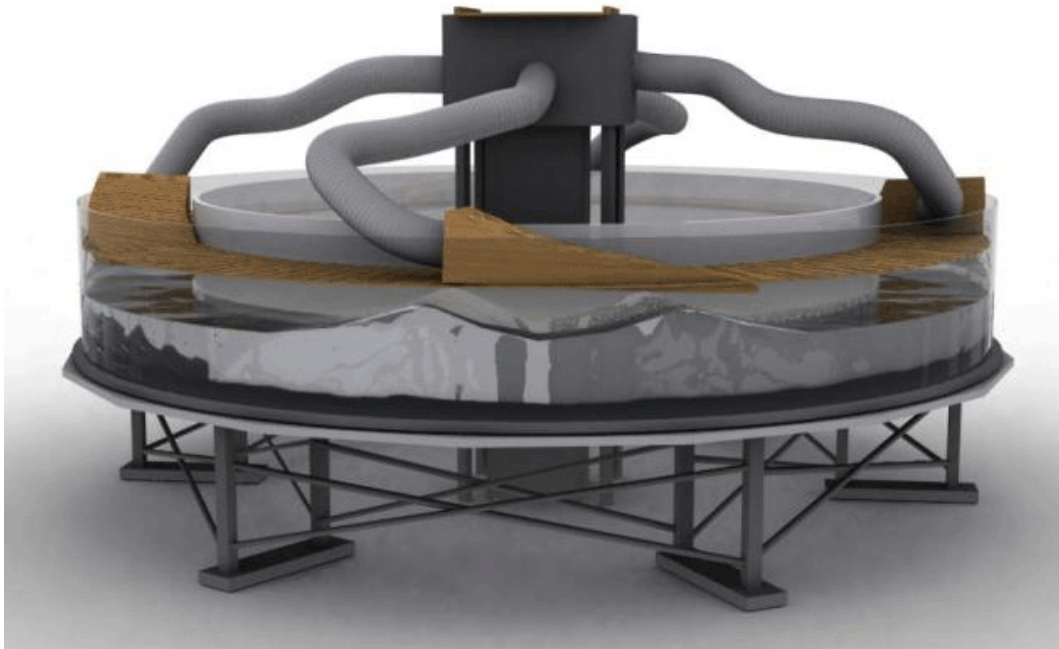


Рис. 2.1. Фотография экспериментальной установки. Кольцевой канал

Регистрация волн проводилась с помощью четырех струнных волнографов, сигнал с которых подавался на вход АЦП–платы компьютера. Кроме того, использовалось 5 видеокамер, расположенных по длине всего канала.

Солитоны возникали при изменении глубины от 0.05 до 0.14 м и при изменении скорости ветра от 12 до 15 м/сек.

В данных условиях процесс образования ветровых уединенных волн проходил следующие основные стадии. После включения вентилятора по прошествии некоторого периода установления на поверхности жидкости образуется последовательность из нескольких волн разных размеров. Характерные особенности этого первичного этапа могут несколько различаться от эксперимента к эксперименту и зависят от скорости ветра, глубины воды и свойств ее поверхности, а также наличия в ней примесей. В результате нелинейного взаимодействия этих образований крупные волны догоняют и поглощают мелкие волны, причем такое поглощение сопровождается сложным процессом их взаимодействия. Одной из стадий этого процесса является формирование в канале двух солитонов, см. Рис. 2.2 и 2.3. В итоге формируется единственный импульс, подветренный склон которого более крутой, а наветренный – растянут, Рис. 2.4. При дальнейшем укрупнении переднего фронта происходит его частичное обрушение, однако общая форма солитона сохраняется. Этот результирующий импульс является устойчивым и движется с постоянной скоростью и амплитудой до тех пор, пока не изменится ветровое воздействие. После выключения вентилятора движение солитона замедляется и он полностью затухает.



Рис. 2.2. Фотография экспериментальной установки. Фрагмент, демонстрирующий наличие двух солитонов

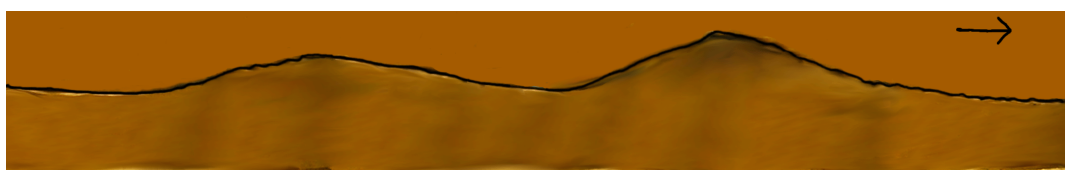


Рис. 2.3. Фотография - два солитона в кольцевом канале

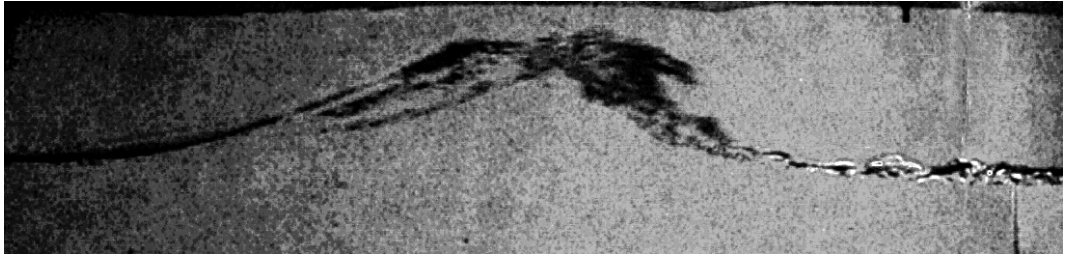


Рис. 2.4. Ветровой солитон в кольцевом канале. Видно частичное обрушение переднего фронта. Реальный размер поля течения составляет  $\sim 1 : 0.2$  м

Ширина аэрогидроканала составляет около 0.4 м, а его длина при среднем радиусе  $R = (R_1 + R_2)/2$  равна 5.76 м, что существенно больше ширины канала. Пренебрегая поперечными возмущениями в жидкости, будем описывать происходящие в ней волновые явления в рамках одномерных плоских уравнений гидродинамики. Высота жидкости в канале составляет  $\sim 0.1$  м, высота солитона также не превышает 0.15 м.

Последнее позволяет использовать в качестве математической модели процесса систему уравнений мелкой воды для плоского одномерного течения.

## 2.2 Математическая модель и метод численного решения задачи

В качестве математической модели используется одномерная система уравнений МВ с учетом силы ветра и силы трения жидкости о стенки канала с плоским профилем дна ( $b = 0$ )

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gh^2}{2} \right) = hf - \mu u|u|. \quad (2.2)$$

Здесь высота несжимаемой жидкости и ее скорость характеризуются неизвестными функциями  $h(x, t)$  и  $u(x, t)$ , параметр  $f$  задает ветровую силу, действующую на поверхность,  $g$  – ускорение силы тяжести, а параметр  $\mu$  – трение жидкости о стенки и дно канала – силу сопротивления.

Сила  $f$ , действующая на поверхность жидкости, пропорциональна скорости

ветра  $U$ :  $f = \gamma U^2$ , где  $U = 3 - 15$  м/с. Коэффициент ветрового трения  $\gamma$  измеряется экспериментально. Его значение зависит от многих параметров, в том числе от состояния поверхности жидкости и от скорости ветра. Например, эксперименты, выполненные для Черного моря, дают значения коэффициента ветрового трения  $\gamma \sim 10^{-2}$ , для Азовского моря  $\gamma \sim 10^{-5}$  (см. [39]). Оценки коэффициента ветрового трения для данного эксперимента дают значения в интервале 0.01–0.2, поэтому значение  $f$  будем рассматривать как параметр задачи. Другим параметром задачи является коэффициент трения о стенки и дно канала  $\mu$ , который для данных экспериментов неизвестен.

Для численного решения задачи используется КГД система уравнений МВ [63] для одномерных течений с учетом силы ветра и силы трения жидкости о стенки канала в отсутствии неровностей дна ( $b = 0$ ) имеет вид [3]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial j_m}{\partial x} = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(j_mu)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gh^2}{2} \right) = \left( h - \tau \frac{\partial hu}{\partial x} \right) f - \mu u |u| + \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x}, \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} j_m &= h(u - w), \\ w &= \frac{\tau}{h} \left( \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} - hf \right), \\ \Pi_{xx} &= \tau uh \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - f \right) + \tau gh \left( u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

$\tau$  – параметр регуляризации, или сглаживания.

Для построения численного решения вводится равномерная сетка по координате  $x$  с шагом  $h_x$ , координатами узлов  $x_i$ , а также сетка по времени с шагом  $\Delta t$ . Для решения системы уравнений (2.3)–(2.4) используем явную по времени схему с центральными разностями ([30]). Значения газодинамических величин определяются в узлах сетки. Значения потоков определяются в полуцелых уз-

лах. Символ  $(\wedge)$  указывает значение функции на верхнем временном слое.

Разностная аппроксимация системы уравнений (2.3)–(2.4) имеет вид

$$\hat{h}_i = h_i - \Delta t \frac{j_{i+1/2} - j_{i-1/2}}{h_x}, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_i = \frac{1}{\hat{h}_i} & \left( h_i u_i - \Delta t \frac{j_{m i+1/2} u_{i+1/2} - j_{m i-1/2} u_{i-1/2}}{h_x} - \Delta t \frac{g}{2} \frac{h_{i+1/2}^2 - h_{i-1/2}^2}{h_x} - \right. \\ & - \Delta t \mu_i u_i |u_i| + \Delta t f_i \left( \frac{h_{i+1/2} + h_{i-1/2}}{2} - \tau_i \frac{h_{i+1/2} u_{i+1/2} - h_{i-1/2} u_{i-1/2}}{h_x} \right) + \\ & \left. + \Delta t \frac{\Pi_{xx, i+1/2} - \Pi_{xx, i-1/2}}{h_x} \right), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где поток в полуцелых точках вычисляется как

$$j_{m i+1/2} = h_{i+1/2} (u_{i+1/2} - w_{i+1/2}), \quad (2.7)$$

$$w_{i+1/2} = \frac{\tau_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} \left( \frac{h_{i+1} u_{i+1}^2 - h_i u_i^2}{h_x} + g h_{i+1/2} \frac{h_{i+1} - h_i}{h_x} - h_{i+1/2} f_{i+1/2} \right). \quad (2.8)$$

Разностная аппроксимация величины  $\Pi_{xx, i+1/2}$  строится аналогично формулам для потока  $w_{i+1/2}$ . Значения основных гидродинамических переменных в полуцелых узлах (на гранях ячеек) определяются как средние от значений в двух соседних ячейках. Значения вычисляемых выражений в точках  $i - 1/2$  определяются аналогично точкам  $i + 1/2$ .

Устойчивость и точность численного алгоритма зависит от параметра сглаживания  $\tau$ , который определяется как

$$\tau = \alpha \frac{h_x}{\max(|u| + \sqrt{g h})}, \quad (2.9)$$

где числовой коэффициент  $0 < \alpha < 1$ .

Шаг по времени задается как

$$\Delta t = \beta \frac{h_x}{\max(|u| + \sqrt{g h})}, \quad (2.10)$$

где число Куранта  $0 < \beta < 1$  подбирается во время вычислений для обеспечения устойчивости счета. Значения  $f$  и  $\mu$  предполагаются априорно известными и рассматриваются как параметры задачи.

Рассматривается задача в области  $0 \leq x \leq L$ ,  $L = 6$  м. Начальные условия для высоты выбираются в виде импульса шириной в шаг сетки  $h_x$ ,  $h(x, 0) = 0.2$ . В начальный момент времени жидкость неподвижна  $u(x, 0) = 0$ . На границе ставятся периодические условия  $u(x) = u(x + L)$ ,  $h(x) = h(x + L)$ , которые в разностном виде задаются как

$$h(1) = h(N - 1), \quad h(N) = h(2), \quad u(1) = u(N - 1), \quad u(N) = u(2). \quad (2.11)$$

Здесь  $N$  – число точек разностной сетки по пространству,  $i = 1, \dots, N$ .

### 2.3 Результаты численного моделирования

Для численного исследования данной задачи была выполнена большая серия расчетов. Пределы варьирования величин параметров задачи  $f$ ,  $\mu$ , сеточных параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  приведены в Таблице 2.1.

$f$	$\mu$	$\alpha$	$\beta$	$h_x$
0 – 100	0.01 – 100	0.1 – 0.3	0.05 – 0.1	0.025, 0.01, 0.005

Таблица 2.1. Диапазоны варьирования параметров задачи  $f$ ,  $\mu$ , сеточных параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и шага пространственной сетки  $h_x$

Также при поиске численного решения изначально рассматривалось несколько вариантов формул для силы трения о дно и стенки гидроканала.

Большинство расчетов выполнены на сетке с шагом  $h_x = 0.01$ . Численные эксперименты показали, что для данной задачи разностный алгоритм устойчив при выборе регуляризатора с коэффициентом  $\alpha \sim 0.1 - 0.3$  и числом Куранта  $\beta \sim 0.05 - 0.1$ . При увеличении  $\alpha$  решение сильно сглаживается, при его уменьшении решение теряет устойчивость. Для сохранения устойчивости расчета в этом случае требуется уменьшение шага по времени. Разностная схема является

условно устойчивой, поэтому при уменьшении числа Куранта ниже указанных значений численное решение не зависит от шага по времени.

Среди 70 выполненных расчетов для 11 вариантов были обнаружены солитонные решения. В остальных случаях начальное возмущение уровня жидкости затухало, либо формировалось нестационарное течение без образования солитонов. Расчеты показали, что формирование одиночного солитона происходит при соотношении силы ветра и коэффициента трения  $f/\mu \sim 50 - 100$  [м/сек<sup>2</sup>]. Далее в аналитическом исследовании формирования уединенной волны будет получено некоторое соотношение, аналитически подтверждающее данные численного эксперимента. Время формирования солитона занимает от 10 до 60 сек, весь расчет проводился до времени  $t = 600$  сек. Полученные в различных расчетах солитоны несколько отличались друг от друга по своей форме, скорости и способу их установления.

На Рис. (2.5) – (2.8) представлены результаты расчета эволюции одиночного солитона при значениях  $\mu = 0.1$ ,  $f = 10$  и параметрах численного алгоритма  $h_x = 0.01$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.05$ . Показано возникновение возмущения поверхности жидкости (Рис. 2.5), его развитие (Рис. 2.6), образование двух солитонов разного размера (Рис. 2.7). Итог взаимодействия этих солитонов — солитон с большей амплитудой догоняет и поглощает солитон меньшего размера (Рис. 2.8). В результате этого процесса формируется одна незатухающая волна. Такой процесс формирования солитона полностью соответствует экспериментальным наблюдениям (Рис. 2.2, 2.3 и 2.4). Наветренный фронт результирующего солитона более пологий, подветренный — более крутой (Рис. 2.8), высота солитона составляет порядка 0.15 м, что также соответствует наблюдаемой в эксперименте картине (Рис. 2.4).

В процессе вычислений можно было наблюдать, что солитон движется быстрее чем жидкость, на поверхности которой он сформировался. Согласно тео-



ретическим оценкам, сделанным в рамках модели уравнения Кортевега–де–Фриза, для случая неподвижной жидкости скорость движения солитона  $C_s$  приближенно выражается соотношением [41], [10], [52]

$$C_s = c \left( 1 + \frac{h_c}{2H} \right), \quad (2.12)$$

где  $c = \sqrt{gH}$  – лагранжева скорость волн,  $h_c$  – высота солитона,  $H$  – глубина жидкости. Относительно движущейся жидкости скорость солитона для случая из Рис. 2.8 составляет  $C_s \approx 1.6$ . Согласно (2.12)  $h_c \sim 0.15$ ,  $H \sim 0.1$ , то есть  $1 + h_c/2H = 1.75$ ,  $c \approx 1$ , и оценка (2.12) дает  $C_s \sim 1.75$ , что качественно согласуется с данными расчета.

Как и в эксперименте, при выключении внешней силы импульс быстро затухает. Если в качестве начального условия задано не возвышение, а понижение уровня жидкости, то как в натурном, так и в численном эксперименте солитон не формируется.

Существование солитона обусловлено аккуратным выполнением баланса гидродинамических нелинейных процессов, приводящих к увеличению крутизны переднего фронта волны, и дисперсионных и вязких процессов, направленных на расплывание уединенной волны (см., например, [11], [7]). Очевидно, вязкие эффекты играют важную роль в процессе формирования солитонного решения.

В разностной схеме присутствует искусственная диссипация, величина которой пропорциональна шагу пространственной сетки. На Рис. 2.9 приведены профили солитона в установившемся режиме, полученные в расчетах на сетках с шагами  $h_x = 0.005$ ,  $0.01$  и  $0.025$ . Для всех трех сеток существует солитонное решение, при этом передний фронт солитона на более подробной сетке  $h_x = 0.005$  оказывается немного круче, а его максимум немного выше, чем в расчетах на более грубых сетках. В целом форма солитона слабо зависит от шага сетки, что говорит о малой численной диссипации разностной схемы.

Впоследствии было проведено аналитическое исследование задачи. В результате задача была обобщена на длины канала от 2 до 8 м, исходя из факта образования одной уединенной волны.

Процесс формирования волны при длине канала 2 м наиболее четко можно представить себе по Рис. 2.10 – 2.11, из которых даже без специального сравнения видно, что профиль устоявшейся волны (Рис. 2.11, справа) также, как и для длины канала 6 м, соответствует, как будет показано ниже, теоретически полученному профилю разрывного периодического решения (Рис. 2.12). Аналитические профили для скорости жидких частиц  $u(x, t)$  также соответствуют данным численного эксперимента.

Получаемый в рамках численного эксперимента результирующий одиночный импульс всегда является устойчивым и движется с постоянной скоростью и амплитудой до тех пор, пока не меняется ветровое воздействие.

## 2.4 Аналитическое исследование

Удалось показать, что наблюдаемые в кольцевых каналах "солитоны" являются не уединенными, а периодическими волнами, с длиной  $\lambda$  равной длине канала.

Для удобства преобразуем исходную систему (2.1)–(2.2) в квазигиперболическую систему уравнений

$$h_t + (hu)_x = 0, \quad u_t + (uu)_x + gh_x = f - \mu \frac{u|u|}{h}. \quad (2.13)$$

Будем искать решение (2.13) в виде бегущих волн

$$u(x, t) = U(x - Ct) = U(\xi), \quad h(x, t) = H(x - Ct) = H(\xi). \quad (2.14)$$

Разумно сделать предположение, что если изменится скорость жидкости относительно стенок канала, то должна измениться и сила сопротивления. В част-

ности, при равенстве относительной скорости нулю сила сопротивления стенок отсутствует. Таким образом, мы не можем перейти в систему отсчета, движущуюся с постоянной скоростью, и рассматривать бегущие волны как установившийся поток, как было сделано в работе [82]. Вместо этого подставим (2.14) в уравнения (2.13) и получим

$$HU' + (U - C)H' = 0, \quad (U - C)U' + gH' = f - \mu \frac{U|U|}{H}. \quad (2.15)$$

Разрешая систему (2.15) относительно первых производных, приходим к уравнениям

$$U' = \frac{(U - C)(f - \mu U|U|/H)}{(U - C)^2 - gH}, \quad (2.16)$$

$$H' = -\frac{H(f - \mu U|U|/H)}{(U - C)^2 - gH}. \quad (2.17)$$

Деля (2.17) на (2.16), получаем дифференциальное выражение

$$\frac{dH}{dU} = \frac{H}{C - U},$$

которое легко интегрируется, и его решение можно записать в виде

$$(C - U)H = K = \text{const}. \quad (2.18)$$

Подставляя теперь (2.18) в (2.17), мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, определяющее профиль бегущей волны

$$\frac{dH}{d\xi} = -\frac{fH^3 - \mu(CH - K)|CH - K|}{K^2 - gH^3}. \quad (2.19)$$

Это уравнение, получившее в литературе имя Чейзи, хорошо изучено. Оно было точно проинтегрировано для всех возможных случаев [57], [82]. Известно 60 типов его решений, однако среди них нет ни одного всюду непрерывного периодического, кроме, естественно, стационарного решения.

Ниже получены разрывные периодические решения уравнения (2.19) в виде

катящихся волн в кольцевом канале, не противоречащие ударным условиям на разрыве аналогично катящимся волнам по наклонным плоскостям [48], [57], [58], [74].

Любые разрывы, возникающие в жидкости, принято называть "ударными" волнами, хотя сам термин исходно использовался для разрывов сжимаемых газовых потоков. Кроме того, для разрывных решений можно встретить название "бора" или "гидравлический прыжок". В случае горизонтальных каналов при отсутствии сил сопротивления требования, которым должна удовлетворять жидкость на границе "гидравлического прыжка", можно найти во многих книгах по гидродинамике (см., например, [36], [45]).

Рассмотрим в точке  $x = \xi(t)$  разрыв, движущийся с течением времени. Будем обозначать нижним индексом "-" и "+" значения функций, взятых слева и справа от разрыва соответственно. Запишем законы изменения массы и импульса для жидкости между двумя плоскостями  $a_-(t)$  и  $a_+(t)$ , проведенными с двух сторон от точки  $x = \xi(t)$

$$\frac{d}{dt} \int_{a_-}^{a_+} \rho h dx = 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{a_-}^{a_+} \rho h u dx = \int_0^{h(a_-,t)} p_- dy - \int_0^{h(a_+,t)} p_+ dy - \mu \rho \int_0^h \int_{a_-}^{a_+} \frac{u^2}{h} dx dy, \quad (2.21)$$

где через  $p_-$  и  $p_+$  обозначено давление соответственно слева и справа от разрыва. Предполагая, что скорость  $u(x, t)$  нигде не обращается в бесконечность, мы

можем записать еще одно условие, вытекающее из закона изменения энергии

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{a_-}^{a_+} (\rho h u^2 + g \rho h^2) dx + \int_0^{h(a_+, t)} p_+ u_+ dy - \\ & - \int_0^{h(a_-, t)} p_- u_- dy + \mu \rho \int_0^h \int_{a_-}^{a_+} \frac{u^3}{h} dx dy. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Очевидно, что для любой величины вида (см., например, [29])

$$I = \int_{a_-(t)}^{a_+(t)} \Psi(x, t) dx,$$

где подынтегральная функция  $\Psi(x, t)$  терпит разрыв в точке  $x = \xi(t)$ , ее производную по времени можно записать следующим образом

$$\frac{dI}{dt} = \int_{a_-}^{a_+} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dx + (\Psi(\xi_-, t) \xi' - \Psi(a_-, t) u_-) + (\Psi(a_+, t) u_+ - \Psi(\xi_+, t) \xi'), \quad (2.23)$$

здесь штрих обозначает производную по времени,  $a'_- = u_-$ ,  $a'_+ = u_+$ . Тогда, вводя замену  $v_+ = u_+ - \xi'$ ,  $v_- = u_- - \xi'$  и устремляя  $a_- \rightarrow a_+$ , мы получаем предельное равенство

$$\lim_{a_- \rightarrow a_+} \frac{dI}{dt} = \Psi_- v_- - \Psi_+ v_+, \quad (2.24)$$

которое позволяет нам легко перейти к пределу в равенствах (2.20), (2.21) и (2.22)

$$\bar{\rho}_+ v_+ = \bar{\rho}_- v_- = M, \quad \text{для } \bar{\rho} = \rho h, \quad (2.25)$$

$$M(v_+ - v_-) = \bar{p}_- - \bar{p}_+, \quad \text{для } \bar{p} = \frac{1}{2} g \rho h^2, \quad (2.26)$$

$$\lim \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \bar{\rho}_+ u_+^2 v_+ - \frac{1}{2} \bar{\rho}_- u_-^2 v_- + \bar{p}_+ v_+ - \bar{p}_- v_- + \bar{p}_+ u_+ - p_- u_- < 0. \quad (2.27)$$

Сравнивая полученные условия (2.24)–(2.27) с условиями при отсутствии сил сопротивления, можно заметить, что сопротивление не вносит никаких измене-

ний, а следовательно, выражение (2.27) для баланса энергии в случае горизонтальных каналов принимает следующий вид ([47])

$$\lim \frac{dE}{dt} = \frac{Mg(\bar{\rho}_- - \bar{\rho}_+)^3}{\rho 4\bar{\rho}_- \bar{\rho}_+} < 0. \quad (2.28)$$

Из неравенства Рэля (2.28) можно сделать вывод, что частицы, преодолевая разрыв ( $\bar{\rho}_- \neq \bar{\rho}_+$ ), теряют свою энергию, и, следовательно, переходят из области с меньшей глубиной в область с большей глубиной. Далее мы предполагаем для определенности, что ветер дует направо. Будем искать бегущие направо волны, скорость которых больше, чем скорость жидких частиц, другими словами, будем полагать, что в системе отсчета, связанной с бегущей волной, все жидкие частицы движутся налево, при этом в области с большей глубиной они движутся с "докритической" скоростью  $v < \sqrt{gh}$ , а в области с меньшей глубиной – с "суперкритической" скоростью  $v > \sqrt{gh}$ . Сделанное предположение является традиционным, и его обоснованность подробно описана, например, в работах [82], [57], [58].

Построим периодическое возмущение с разрывом, движущееся со скоростью  $C = \text{const}$ , непрерывное в критической точке. Если мы обозначим высоту волны в критической точке через  $H_0$ , то относительную скорость можно записать в виде  $v_0 = C - U_0 = \sqrt{gH_0}$ . Тогда из формулы (2.19) следует, что профиль волны

$$\frac{dH}{d\xi} = -\frac{fH^3 - \mu(CH - K)^2}{H^2((U - C)^2 - gH)} \quad (2.29)$$

становится вертикальным в критической точке, если числитель дроби в правой части (2.29) не зануляется. Предположим для начала, что в каждой критической точке, в которой

$$(U_0 - C)^2 - gH_0 = \frac{K^2}{H_0^2} - gH_0 = 0, \quad (2.30)$$

числитель (2.29) не обращается в нуль, т.е.

$$f - \mu \frac{(CH_0 - K)^2}{H_0^3} \neq 0.$$

Следовательно, обращается в бесконечность производная  $dH/d\xi$ . Тогда можно сделать единственный физически осмысленный вывод, что в критической точке находится перегиб:  $d^2\xi/dH^2 = 0$ . Дифференцируя  $d\xi/dH$  по  $H$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dH^2} = & \frac{H(2K^2/H^3 + g)}{H^2(f - \mu(CH - K)^2/H^3)} + \\ & + \frac{(K^2/H^2 - gH)(f - 2\mu K(CH - K)/H^3)}{H^2(f - \mu(CH - K)^2/H^3)^2}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

В критической точке (2.30) только последнее слагаемое выражения (2.31) обращается в нуль.

Таким образом,  $d^2\xi/dH^2 \neq 0$ . Следовательно, профиль в критической точке не становится вертикальным, а значит и знаменатель, и числитель (2.29) обязаны зануляться одновременно

$$f - \mu \frac{(CH_0 - K)^2}{H_0^3} = f - \mu \frac{U_0^2}{H_0} = 0. \quad (2.32)$$

Разрешая (2.32) относительно  $U_0$  и  $H_0$ , получаем

$$U_0 = \frac{C}{1 + \sqrt{g\mu/f}} < C, \quad H_0 = \frac{1}{g} \frac{C^2}{(1 + \sqrt{f/g\mu})^2}, \quad K = \frac{1}{g} \frac{C^3}{(1 + \sqrt{f/g\mu})^3}. \quad (2.33)$$

Выражение 2.29) (после сокращения числителя и знаменателя на  $(H - H_0)$ ) можно переписать следующим образом

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{1}{g} \frac{fH^2 + (fH_0 - C^2\mu)H + g\mu H_0^2}{H^2 + HH_0 + H_0^2}. \quad (2.34)$$

Чтобы получить катящиеся направо волны, необходимо потребовать, чтобы в

критической точке выполнялось неравенство

$$\left. \frac{dH}{d\xi} \right|_{H_0} > 0. \quad (2.35)$$

Отсюда получаем

$$4g\mu < f. \quad (2.36)$$

Из условия (2.36) следует, что при достаточной силе сопротивления или при малом ветре возмущения в виде периодических ударных волн образовываться не должны.

Уравнение (2.34) можно проинтегрировать, разложив на множители числитель. Можно убедиться в действительности корней  $H_1$ ,  $H_2$  [57] этого уравнения

$$H_{1,2} = H_0 \frac{1 + 2q \pm \sqrt{1 + 4q}}{2q^2}, \quad \text{где } q = \sqrt{\frac{f}{g\mu}} > 2. \quad (2.37)$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (2.34) с точностью до аддитивной константы имеет вид

$$\begin{aligned} \xi(H) = & \frac{g}{f}(H - H_0) + \frac{g}{f} \frac{H_1^2 + H_1 H_0 + H_0^2}{H_1 - H_2} \ln \frac{H - H_1}{H_0 - H_1} - \\ & - \frac{g}{f} \frac{H_2^2 + H_2 H_0 + H_0^2}{H_1 - H_2} \ln \frac{H - H_2}{H_0 - H_2}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Используя формулу (2.38), можно построить профиль волны, который, однако, не будет определен однозначно, пока не будет задана длина волны  $\lambda$ . Пример профиля для случая  $f = 10$ ,  $\mu = 0,1$  приведен на Рис. 2.12 (пунктирная линия), из которого видно, что профиль волны монотонный, то есть возрастает от минимального значения  $H_{min}$  в точке гидравлического прыжка  $\xi_n$  до максимального  $H_{max}$  в точке  $\xi_{n+1} = \xi_n + \lambda$ .

Запишем ударные условия (2.25), (2.26) в точке прыжка для массы и импуль-



са

$$-\rho H_{max}(C - U_{max}) = \bar{\rho}_+ v_+ = M = \bar{\rho}_- v_- = -\rho H_{min}(C - U_{min}), \quad (2.39)$$

$$M((C - U_{min}) - (C - U_{max})) = \bar{p}_- - \bar{p}_+ = \frac{1}{2}g\rho(H_{min}^2 - H_{max}^2). \quad (2.40)$$

Первое условие обеспечивается равенством  $(C - U_{max})H_{max} = (C - U_{min})H_{min} = K$ , второе задает связь между  $H_{max}$  и  $H_{min}$

$$\frac{2K^2}{gH_{min}H_{max}} = H_{min} + H_{max}. \quad (2.41)$$

Разрешая уравнение (2.41) в предположении  $H_{max} > 0$ , мы получаем

$$H_{min} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{H_{max}^2 + \frac{8K^2}{gH_{max}}} - H_{max} \right). \quad (2.42)$$

Теперь, используя выражение (2.42) и монотонный характер профиля, можно связать длину волны с ее максимальной высотой через соотношение  $|\xi(H_{min}) - \xi(H_{max})| = \lambda$

$$\bar{\lambda} = \hat{h} - \check{h} + \frac{h_1^2 + h_1 + 1}{h_1 - h_2} \ln \frac{\hat{h} - h_1}{\check{h} - h_1} - \frac{h_2^2 + h_2 + 1}{h_1 - h_2} \ln \frac{\hat{h} - h_2}{\check{h} - h_2}. \quad (2.43)$$

Для сокращения записи здесь введены следующие обозначения

$$\bar{\lambda} = \frac{f\lambda}{gH_0} = \frac{f\lambda}{C^2}(1+q)^2, \quad \hat{h} = \frac{H_{max}}{H_0} = \frac{gH_{max}}{C^2}(1+q)^2, \quad \check{h} = \frac{H_{min}}{H_0} = \frac{gH_{min}}{C^2}(1+q)^2,$$

$$q = \sqrt{\frac{f}{g\mu}}, \quad h_{1,2} = \frac{H_{1,2}}{H_0} = \frac{1 + 2q \pm \sqrt{1 + 4q}}{2q^2}.$$

Таким образом, если заданы параметры  $f, \mu, C, \lambda$ , то можно с помощью (2.43) и (2.42) найти  $H_{max}$ , затем посчитать  $H_{min}$ , и, наконец, пользуясь формулой (2.38), построить периодическую бегущую волну (пример, непрерывная линия на Рис. 2.12).

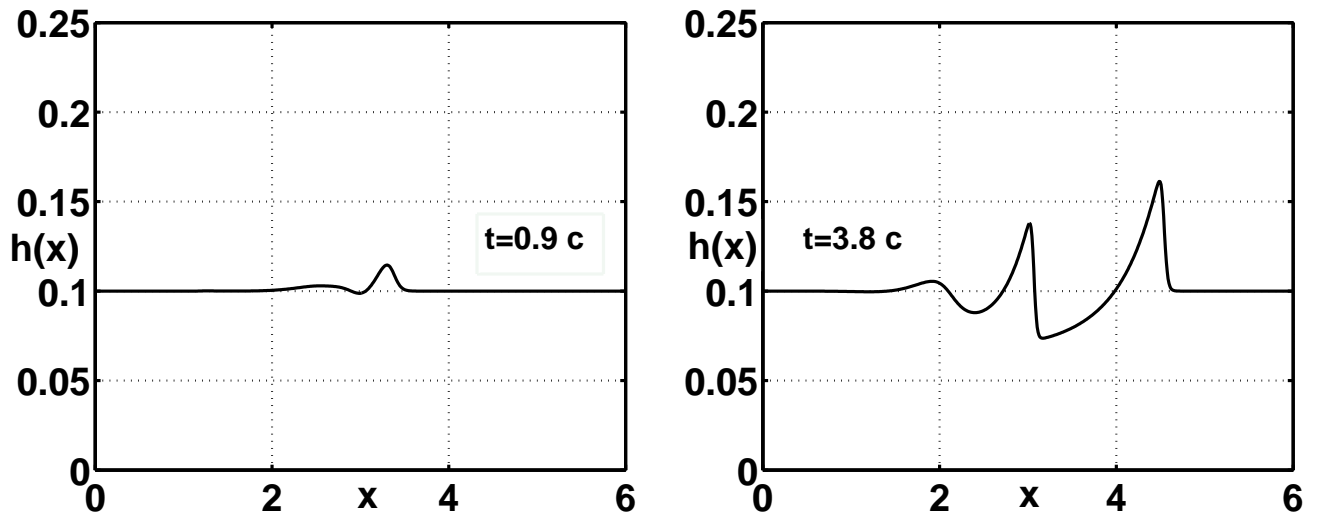
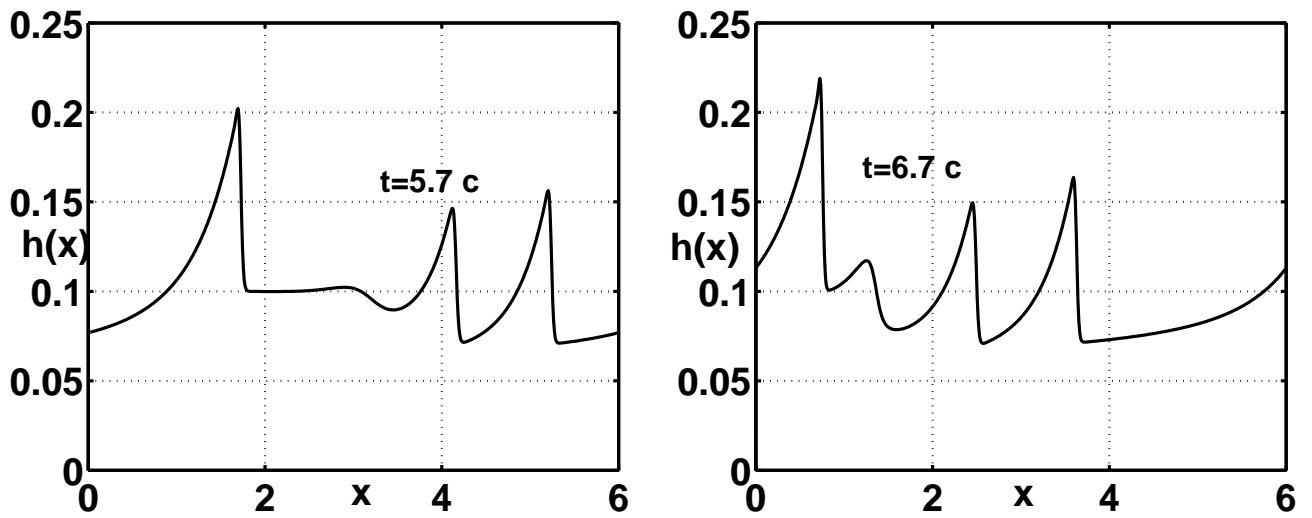
В априорном задании скорости бегущей волны  $C$  возникают сложности [58],

поэтому вместо скорости бегущей волны  $C$  в качестве входного параметра можно использовать высоту невозмущенной поверхности жидкости или исходный объем жидкости в кольцевом канале.

## 2.5 Выводы

Приведено краткое описание экспериментов в аэрогидроканале и впервые построена математическая модель ветро–волнового солитона в рамках приближения мелкой воды. Модель представляет собой уравнения мелкой воды для плоского одномерного течения с учетом силы трения о дно и стенки гидроканала и влияния ветра. Для численного моделирования используется регуляризованный вид уравнений мелкой воды. Полученные решения правильно отражают особенности формирования и поведения уединенных волн, обнаруженные в эксперименте. Изучение механизма формирования ветро–волновых солитонов в лабораторном эксперименте достаточно трудоемко, а в природных условиях практически невозможно. Поэтому описание указанного явления в приближении уравнений мелкой воды и его исследование в численном эксперименте представляют большой интерес.

Полученное численное решение исследовано аналитически. Доказано отсутствие непрерывных решений и построена разрывная одиночная волна в канале, удовлетворяющая классическим законам сохранения на разрыве. Проведено сравнение численных результатов с аналитическим решением, показавшее правильность выведенного теоретически ограничения на образующие силы.

Рис. 2.5. Высота  $h(x)$  при  $t = 0.9$  и  $3.8$  с.Рис. 2.6. Высота  $h(x)$  при  $t = 5.7$  и  $6.7$  с.

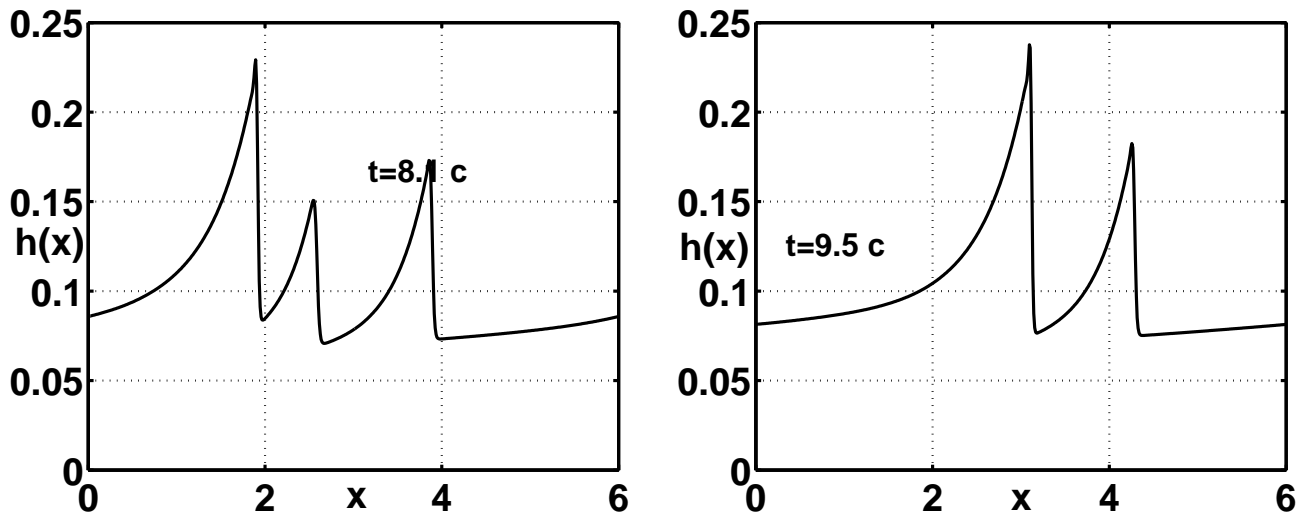


Рис. 2.7. Высота  $h(x)$  при  $t = 8.1$  и  $9.5$  с.

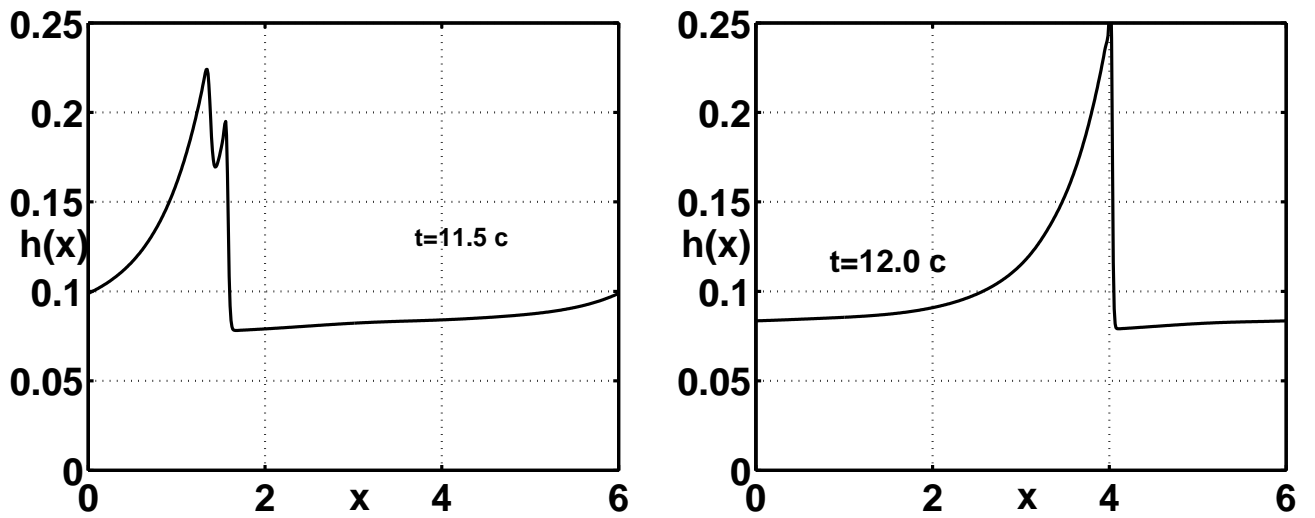


Рис. 2.8. Высота  $h(x)$  при  $t = 11.5$  и  $12.0$  с.

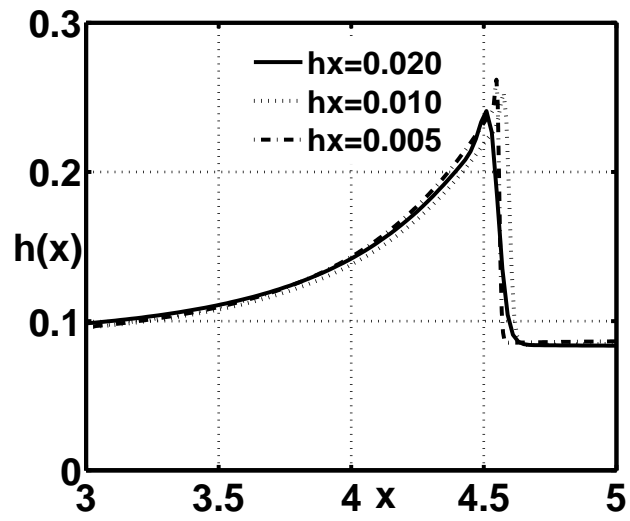


Рис. 2.9. Влияние сетки. Форма солитона в установившемся режиме  $h(x)$  при  $f = 10.0$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$  для  $h_x = 0.025$ ,  $0.010$  и  $0.005$

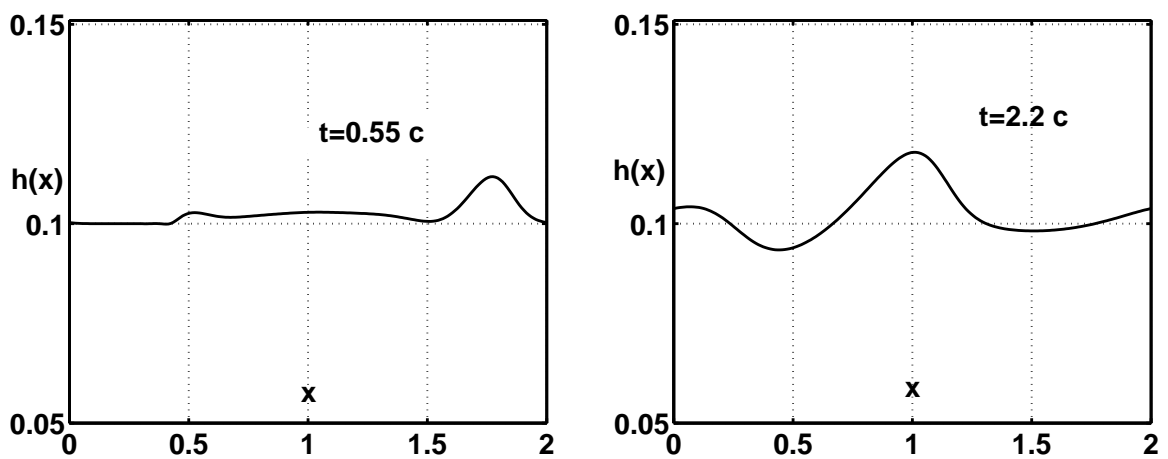


Рис. 2.10. Развитие солитона  $h(x)$  при  $t = 0.55$  с и  $t = 2.2$  с.

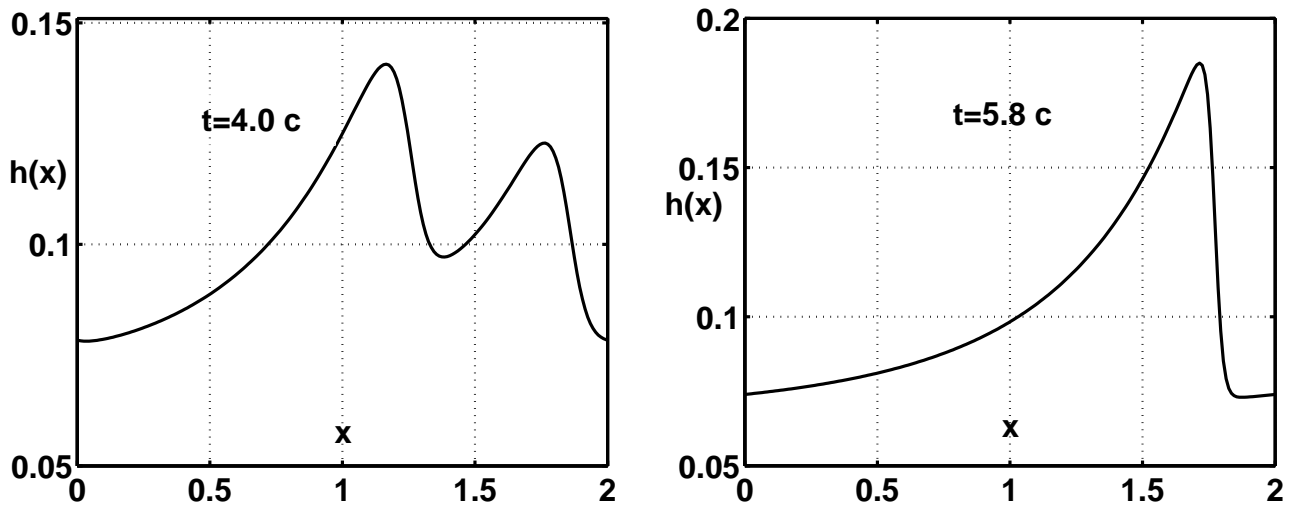


Рис. 2.11. Развитие солитона  $h(x)$  при  $t = 4.0$  с и  $t = 5.8$  с.

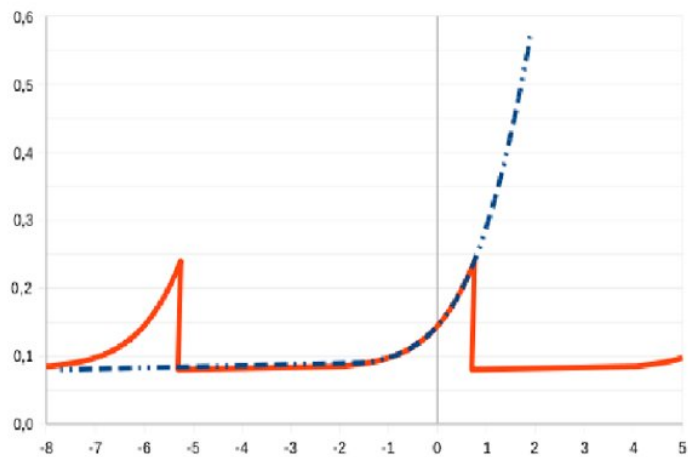


Рис. 2.12. Аналитический профиль волны при  $f = 10$ ,  $\mu = 0,1$ . пунктирная линия – монотонный профиль, непрерывная – разрывная периодическая волна

## Глава 3

# Численное моделирование спирально–вихревых структур во вращающихся газовых дисках

В данной главе изучается численное моделирование эволюции аккреционного диска на основе уравнений газовой динамики в баротропном приближении в полярной системе координат. Целью численного моделирования было изучение возможностей формирования спирально–вихревых структур в газовых дисках в данном приближении.

Изучение эволюционных процессов, протекающих в аккреционных дисках различной природы, является одной из активно исследуемых задач астрофизики.

Согласно [49], [50] спиральная структура туманностей впервые была замечена в наблюдениях лорда Росса в 1845 г. Позднее спиральные рукава и гигантские вихри — циклоны и антициклоны — были обнаружены в двумерном поле скоростей газовых дисков ряда галактик. Наиболее часто встречаются отстающие спирали, которые вращаются концами назад и имеют естественную аэродинамическую форму. Распространенным явлением является ветвление спиралей, при котором рукава раздваиваются в направлении их концов. Наблюдаются галактические диски в виде концентрических колец.

В [49], [40] обсуждались механизмы возникновения спирально-вихревых структур в астрофизических объектах — галактиках и аккреционных дисках. В частности, генерация спиральных волн плотности связывалась с нелинейным взаимодействием гравитационной и гидродинамической неустойчивости, которая в реальных галактиках может быть вызвана быстрыми локальными падениями скорости вращения газа. Последние хорошо заметны на кривых вращения галактик, полученных ранее в наблюдениях на телескопах.

Для экспериментального моделирования генерации спиральной структуры в газовом галактическом диске, вызванной развитием гидродинамической неустойчивости из-за наличия градиента скорости вращения, использовалась вращающаяся мелкая вода. В частности, на установке "Спираль" была подтверждена правильность гравитационно-гидродинамической теории генерации спиральной структуры. Наблюдалось ветвление рукавов и были обнаружены антициклонические вихри [40].

Большой интерес представляет использование аппарата прямого численного моделирования для проверки гипотез о чисто гидродинамической природе формирования рукавов в астрофизических дисках и аналогии между гравитационной неустойчивостью в газовых дисках и в течениях мелкой воды.

Аккреционные диски представляют собой вращающиеся газовые образования в окрестности компактных притягивающих центров. Такие среды можно описывать на основе уравнений Эйлера газовой динамики с использованием пространственного разрешения, в котором шаг сетки существенно превышает характерные длины свободного пробега молекул в газовом диске.

Численное моделирование гравитационных неустойчивостей в аккреционных дисках проводилось, в частности, в работах [6], [1]. Поскольку, согласно [49], при генерации спиральных рукавов в реальных галактиках роль вязкости пренебрежимо мала, то расчеты были выполнены именно на основе решения уравнений



Эйлера (без учета вязких слагаемых).

В выполненных расчетах исходным является начальное распределение плотности и скорости, выведенное для стационарной трехмерной конфигурации в баротропном приближении в [1]. В отличие от [6], [1] для редуцирования трехмерной задачи к двумерной применяется не приближенное, а точное усреднение исходных уравнений по вертикальной координате. При этом стационарные решения построены не только для изэнтропического течения (для показателя адиабаты  $\gamma > 1$ ), но и для популярного в литературе изотермического течения ( $\gamma = 1$ ).

Эти новые аксиально симметричные стационарные решения используются в качестве начального распределения (с внесением малого возмущения) для нестационарных уравнений. Устойчивость начальных распределений к малым возмущениям аналитически в данной работе не исследовалась, однако из физических соображений известно, что баротропные течения газа в поле гравитационных сил являются неустойчивыми [5], [49].

В настоящей главе в отличие от [6], [1] задача решается в рамках уравнений Эйлера в баротропном приближении, что представляется естественным, поскольку начальные распределения построены именно для него. Применяемый в расчетах численный алгоритм основан на разностной аппроксимации предварительно регуляризованных КГД уравнений, адаптированных для описания данной задачи. Уравнения и их разностный аналог записываются в естественной полярной системе координат.

### 3.1 Уравнения газовой динамики в баротропном приближении в полярной системе координат и их точные стационарные решения

Система уравнений Эйлера в баротропном приближении в полярной системе координат  $(r, \varphi)$  представляет собой следующие уравнения баланса массы и импульса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial(\rho u_r)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u_r \mathbf{u}) + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\rho u_\varphi^2}{r} = \rho f_r, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial(\rho u_\varphi)}{\partial t} + \frac{1}{r} \operatorname{div}(r \rho u_\varphi \mathbf{u}) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \rho f_\varphi, \quad (3.3)$$

где  $\rho(r, \varphi, t)$  – плотность,  $\mathbf{u} = (u_r, u_\varphi)$  – вектор скорости,  $u_r(r, \varphi, t)$  и  $u_\varphi(r, \varphi, t)$  — его радиальная и азимутальная компоненты и

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

для любой вектор-функции  $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi)$ . Давление газа определяется как  $p = k \rho^\gamma$ , где  $\gamma = \operatorname{const} \geq 1$  – показатель адиабаты, а коэффициент  $k = p_0 / \rho_0^\gamma$  определяется постоянной удельной энтропией течения при  $\gamma > 1$  (изэнтропический случай) либо постоянной температурой при  $\gamma = 1$  (изотермический случай). При этом скорость звука  $c_s = \sqrt{\gamma p / \rho}$ . Также  $f_r$  и  $f_\varphi$  – радиальная и азимутальная компоненты внешней массовой силы.

В работе [1] изучены стационарные уравнения газовой динамики с учетом силы гравитации в  $(r, \varphi, z)$ -геометрии

$$\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\rho u_\varphi^2}{r} = -\frac{\rho r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\rho z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (3.4)$$

записанные в предположении, что  $\rho = \rho(r, z)$ ,  $u_\varphi = u_\varphi(r)$  и  $u_r = u_z = 0$ .

Пусть  $p = k\rho^\gamma$  с  $k > 0$ ,  $\gamma \geq 1$  и задана функция

$$\zeta \in C^1(\bar{\Omega}_r), \quad \zeta(r) > 0, \quad r + \zeta(r)\zeta'(r) > 0 \quad \text{на } \bar{\Omega}_r,$$

где  $\Omega_r = (r_1, r_2)$  с  $r_1 > 0$ .

1. При  $\gamma > 1$  для уравнений (3.4) в области  $((r, z); r \in \bar{\Omega}_r, |z| \leq \zeta(r))$  найдено решение

$$\rho(r, z) = \left( \frac{1}{k\gamma'} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \zeta^2(r)}} \right) \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad (3.5)$$

$$u_\varphi(r) = \left( r \frac{r + \zeta(r)\zeta'(r)}{(r^2 + \zeta^2(r))^{3/2}} \right)^{1/2}, \quad (3.6)$$

где  $\gamma' = \gamma/(\gamma - 1)$ . Найденное решение обладает свойством

$$\rho(r, \pm\zeta(r)) = 0 \quad \text{на } \bar{\Omega}_r. \quad (3.7)$$

Справедливость выражений (3.5)–(3.7) легко проверить, подставив их в уравнения (3.4), записанные в виде

$$k\gamma' \frac{\partial}{\partial r} (\rho^{\gamma-1}) - \frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad k\gamma' \frac{\partial}{\partial z} (\rho^{\gamma-1}) = -\frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.8)$$

В [6], [1] использовались приближенные решения, полученные интегрированием (3.5) по  $z$ .

Оказывается, что можно точно выполнить усреднение решений по  $z$  так, чтобы новые решения  $\bar{\rho}(r) > 0$ ,  $u_\varphi(r)$  подчинялись стационарному уравнению

$$\frac{dp}{dr} - \frac{\rho u_\varphi^2}{r} = \rho F(r) \quad \text{на } \bar{\Omega}_r. \quad (3.9)$$

Для этого при фиксированном  $r$  проинтегрируем первое уравнение (3.8) по  $z \in [-\zeta(r), \zeta(r)]$  и разделим результат на  $2\zeta(r)$ . Поскольку справедливо свойство

(3.7), то

$$k\gamma' \frac{1}{2\zeta(r)} \frac{d}{dr} \int_{-\zeta(r)}^{\zeta(r)} \rho^{\gamma-1} dz - \frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{r\sqrt{r^2 + \zeta^2(r)}}. \quad (3.10)$$

Введем функцию

$$\bar{\rho}(r) = \left( \frac{1}{2\zeta(r)} \int_{-\zeta(r)}^{\zeta(r)} \rho^{\gamma-1}(r, z) dz \right)^{1/(\gamma-1)} = \left( \frac{1}{\zeta(r)} \int_0^{\zeta(r)} \rho^{\gamma-1}(r, z) dz \right)^{1/(\gamma-1)}.$$

Возводя обе части (3.5) в степень  $\gamma - 1$  и интегрируя результат по  $z$ , имеем

$$\bar{\rho}(r) = \left( \frac{\lambda(r)}{k\gamma'} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad (3.11)$$

где

$$\lambda(r) = \frac{1}{\zeta(r)} \ln \left( \frac{\zeta(r)}{r} + \sqrt{\frac{\zeta^2(r)}{r^2} + 1} \right) - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \zeta^2(r)}}. \quad (3.12)$$

Теперь перепишем равенство (3.10) в виде

$$k\gamma' \frac{d}{dr} (\bar{\rho}^{\gamma-1}) - k\gamma' \left( \frac{d}{dr} \frac{1}{\zeta(r)} \right) \zeta(r) \bar{\rho}^{\gamma-1} - \frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{r\sqrt{r^2 + \zeta^2(r)}},$$

откуда

$$k\gamma' \frac{d}{dr} (\bar{\rho}^{\gamma-1}) - \frac{u_\varphi^2}{r} = F(r) = -\frac{1}{r\sqrt{r^2 + \zeta^2(r)}} - \frac{\zeta'(r)}{\zeta(r)} \lambda(r).$$

Найденные функции  $\bar{\rho}$  и  $u_\varphi$ , см. формулы (3.11), (3.12) и (3.6), удовлетворяют и стационарному уравнению (3.9) с введенной  $F$ .

2. При  $\gamma = 1$  фиксируем  $\rho_0 > 0$  и перепишем уравнения (3.4) в виде

$$k \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{\rho}{\rho_0} - \frac{u_\varphi^2(r)}{r} = -\frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (3.13)$$

$$k \frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.14)$$

Из уравнения (3.13) имеем

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{k} \left( \int \frac{u_\varphi^2(r)}{r} dr + \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \psi(z) \right), \quad (3.15)$$

а из (3.14) можно взять  $\psi(z) = 0$  (соответствующая формула имеется в [1]).

Отметим, что тогда, согласно (3.15), функция  $\rho(r, z)$  убывает с ростом  $|z|$ .

Найдем решение, обладающее свойством

$$\rho(r, \pm\zeta(r)) = \rho_0 \text{ на } \bar{\Omega}_r. \quad (3.16)$$

Подставим  $z = \zeta(r)$  в (3.15) и, продифференцировав обе части полученного равенства по  $r$  с учетом последнего свойства, получим

$$\frac{u_\varphi^2(r)}{r} = -\frac{d}{dr} \frac{1}{\sqrt{r^2 + \zeta^2(r)}}.$$

Поэтому  $u_\varphi$  по-прежнему задается формулой (3.6). Теперь из (3.15) и (3.16) следует формула

$$\frac{\rho(r, z)}{\rho_0} = \exp \left( \frac{1}{k} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \zeta^2(r)}} \right) \right). \quad (3.17)$$

С той же целью, что и в п. 1, выполним усреднение найденного решения по  $z$ . Введем функцию  $\bar{\rho}$  такую, что

$$\frac{\bar{\rho}(r)}{\rho_0} = \exp \left( \frac{1}{2\zeta(r)} \int_{-\zeta(r)}^{\zeta(r)} \ln \frac{\rho(r, z)}{\rho_0} dz \right) = \exp \left( \frac{1}{\zeta(r)} \int_0^{\zeta(r)} \ln \frac{\rho(r, z)}{\rho_0} dz \right).$$

В силу (3.17) подобно (3.11) имеем

$$\bar{\rho}(r) = \rho_0 \exp \left( \frac{\lambda(r)}{k} \right). \quad (3.18)$$

Интегрирование уравнения (3.13) при фиксированном  $r$  по  $z \in [-\zeta(r), \zeta(r)]$

и деление результата на  $2\zeta(r)$  дает

$$k \frac{1}{2\zeta(r)} \int_{-\zeta(r)}^{\zeta(r)} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{\rho(r, z)}{\rho_0} dz - \frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{2\zeta(r)} \int_{-\zeta(r)}^{\zeta(r)} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz.$$

Рассуждая так же, как и в п. 1, с учетом свойства (3.16) получим уравнение

$$k \frac{d}{dr} \ln \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} - \frac{u_\varphi^2}{r} = F \quad \text{на } \bar{\Omega}_r$$

с прежней функцией  $F$ . Тем самым найденные функции  $\bar{\rho}$  и  $u_\varphi$  (см. формулы (3.18), (3.12) и (3.6)) удовлетворяют и стационарному уравнению (3.9) при  $\gamma = 1$  с введенной  $F$ .

### 3.2 КГД уравнения газовой динамики в баротропном приближении в полярной системе координат

КГД система уравнений газовой динамики в баротропном приближении в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_m = 0, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u_r)}{\partial t} + \operatorname{div}(u_r \mathbf{j}_m) + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\rho u_\varphi^2}{r} &= (\rho - \tau \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})) f_r + \\ + \operatorname{div}(\rho w_r^* \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial r} (\tau c_s^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})) - \tau \frac{u_\varphi^2}{r} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) - 2\rho \frac{u_\varphi}{r} w_\varphi^*, & \quad (3.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u_\varphi)}{\partial t} + \frac{1}{r} \operatorname{div}(r u_\varphi \mathbf{j}_m) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= (\rho - \tau \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})) f_\varphi + \\ + \frac{1}{r} \operatorname{div}(r \rho w_\varphi^* \mathbf{u}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tau c_s^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})). & \quad (3.21) \end{aligned}$$

В них регуляризованный поток массы  $\mathbf{j}_m$  и другие слагаемые имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{j}_m &= (j_{mr}, j_{m\varphi}), \quad j_{mr} = \rho(u_r - w_r), \quad j_{m\varphi} = \rho(u_\varphi - w_\varphi), \\ w_r &= \frac{\tau}{\rho} \left( \operatorname{div}(\rho u_r \mathbf{u}) + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\rho u_\varphi^2}{r} - \rho f_r \right), \\ w_\varphi &= \frac{\tau}{\rho} \left( \frac{1}{r} \operatorname{div}(r \rho u_\varphi \mathbf{u}) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \rho f_\varphi \right), \\ w_r^* &= \tau \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\varphi \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{u_\varphi^2}{r} - f_r \right), \\ w_\varphi^* &= \tau \left( \frac{u_r}{r} \frac{\partial (r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - f_\varphi \right).\end{aligned}$$

КГД система тесно связана с соответствующей системой уравнений Эйлера и отличается от нее тем, что включает в себя диссипативные регуляризующие слагаемые с малым коэффициентом — параметром  $\tau > 0$ , имеющим размерность времени. Точные решения стационарной системы Эйлера являются одновременно и точными решениями стационарной КГД системы согласно структуре ее  $\tau$ -диссипации.

Баротропная КГД система в декартовых координатах была предложена и математически изучена в [28], далее она модифицировалась и исследовалась в [26], [27].

Найденные в предыдущем разделе аксиально симметричные стационарные решения  $\rho = \rho(r)$ ,  $u_r = 0$ ,  $u_\varphi = u_\varphi(r)$  при  $f_r = f_r(r)$  и  $f_\varphi = 0$  являются точными решениями не только системы Эйлера, но и ее КГД расширения. Действительно, для таких решений  $w_\varphi = w_\varphi^* = 0$ , а уравнение (3.20) сводится к уравнению (3.9) с  $F = f_r$ . Кроме того,  $w_r = w_r^* = j_{mr} = 0$ , и поэтому выполняются также уравнения (3.19) и (3.21).

### 3.3 Метод численного решения задачи

КГД подход позволяет применять классический вариант метода конечного объема с аппроксимацией всех потоковых слагаемых с помощью центральных разностей по пространству в сочетании с явной аппроксимацией по времени. Все газодинамические величины относятся к расчетным узлам сетки, а потоки вычисляются на границах ячеек в полуцелых узлах. При этом  $\tau$ -слагаемые обеспечивают условную устойчивость построенной разностной схемы.

Параметр регуляризации задается в виде

$$\tau = \alpha \frac{\sqrt{\Delta S}}{c_s + \sqrt{u_r^2 + u_\varphi^2}}, \quad (3.22)$$

где  $0 < \alpha < 0.5$  — числовой параметр, подбираемый из соображений устойчивости и точности расчета, а  $\Delta S = r\Delta r\Delta\varphi$  оценивает площадь ячейки пространственной сетки.

Запишем разностную схему в компактном операторном виде. Введем на  $\bar{\Omega}_r$  равномерную сетку  $\bar{\omega}_r$  по переменной  $r$  с узлами  $r^{(i)} = r_1 + i\Delta r$ ,  $0 \leq i \leq N_r$  с шагом  $\Delta r = (r_2 - r_1)/N_r$ . Введем вторую сетку  $\bar{\omega}_r^*$  с узлами  $r_{i-1/2} = (i - 0.5)h$ ,  $0 \leq i \leq N_r + 1$ . Узлы  $r_{-1/2}$ ,  $r_{N_r+1/2}$  выходят за пределы  $\bar{\Omega}_r$  и называются фиктивными. Пусть  $\omega_r^*$  состоит из ее внутренних узлов  $r_{i-1/2}$ ,  $1 \leq i \leq N_r$ .

Обозначим через  $H(\omega)$  пространство функций, заданных на сетке  $\omega$ . Для  $v \in H(\bar{\omega}_r)$  и  $z \in H(\bar{\omega}_r^*)$  введем сеточные усреднения и разностные отношения

$$(s_r v)_{i-1/2} = \frac{v_{i-1} + v_i}{2}, \quad \delta_r v_{i-1/2} = \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta r},$$

$$(s_r^* z)_i = \frac{z_{i-1/2} + z_{i+1/2}}{2}, \quad \delta_r^* z_i = \frac{z_{i+1/2} - z_{i-1/2}}{\Delta r}.$$

Ясно, что  $s_r, \delta_r$  действуют из  $H(\bar{\omega}_r)$  в  $H(\omega_r^*)$ , а  $s_r^*, \delta_r^*$  — из  $H(\bar{\omega}_r^*)$  в  $H(\bar{\omega}_r)$ .

Введем также на  $[0, 2\pi]$  равномерную сетку  $\bar{\omega}_\varphi$  с узлами  $\varphi^{(j)} = j\Delta\varphi$ ,  $0 \leq j \leq N_\varphi$  с шагом  $\Delta\varphi = 2\pi/N_\varphi$ . Введем фиктивный узел  $\varphi^{(-1)} = -\Delta\varphi$  и для



$v \in H(\bar{\omega}_\varphi)$  будем предполагать, что  $v_0 = v_{N_\varphi}$ ,  $v_{-1} = v_{N_\varphi-1}$ . Пусть  $\omega_\varphi = \bar{\omega}_\varphi \setminus \{\varphi^{(N_\varphi)}\}$ . Введем также вторую сетку  $\omega_\varphi^*$  с узлами  $\varphi^{(j+1/2)} = (j+1/2)\Delta_\varphi$ ,  $0 \leq j \leq N_\varphi - 1$ . Введем фиктивный узел  $\varphi^{(-1/2)} = -\Delta_\varphi/2$  и для  $z \in H(\omega_\varphi^*)$  будем предполагать, что  $z_{-1/2} = z_{N_\varphi-1/2}$ .

Операторы  $s_\varphi, \delta_\varphi, \overset{\circ}{\delta}_\varphi, s_\varphi^*, \delta_\varphi^*$  по переменной  $\varphi$  вводятся совершенно аналогично соответствующим операторам по  $r$ . Пусть также  $s = s_r^* s_\varphi$ .

Введем сетку по  $t$  с узлами  $t_m = m\Delta t$ ,  $m \geq 0$  и шагом  $\Delta t > 0$  и положим  $\delta_t v^m = (v^{m+1} - v^m)/\Delta t$ .

Явная по времени разностная аппроксимация КГД уравнений с вычислением всех пространственных производных с помощью введенных центральных разностных отношений на сетке  $\omega_r^* \times \omega_\varphi$  имеет операторный вид

$$\delta_t \rho + \frac{1}{r} \delta_r (r j_{mr}) + \frac{1}{r} \delta_\varphi^* j_{m\varphi} = 0, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} & \delta_t (\rho u_r) + \frac{1}{r} \delta_r (r j_{mr} s_r^* u_r) + \frac{1}{r} \delta_\varphi^* (j_{m\varphi} s_\varphi u_r) + \delta_r p(s_r^* \rho) - \rho \frac{u_\varphi^2}{r} = \\ & = (\rho - \tau \operatorname{div}_\omega(\rho \mathbf{u})) f_r + \frac{1}{r} \delta_r (r (s_r^* \rho) (s_r^* u_r) w_r^*) + \frac{1}{r} \delta_\varphi^* ((s_\varphi \rho) (s_\varphi u_\varphi) \tilde{w}_r^*) + \\ & + \delta_r \left( (s_r^* \tau) \gamma \frac{p(s_r^* \rho)}{s_r^* \rho} \operatorname{div}_{\omega_r}(\rho \mathbf{u}) \right) - \tau \frac{u_\varphi^2}{r} \operatorname{div}_\omega(\rho \mathbf{u}) - 2\rho \frac{u_\varphi}{r} \widehat{w}_\varphi^*, \\ & \delta_t (\rho u_\varphi) + \frac{1}{r^2} \delta_r (\hat{r}^2 j_{mr} s_r^* u_\varphi) + \frac{1}{r} \delta_\varphi^* (j_{m\varphi} s_\varphi u_\varphi) + \frac{1}{r} \delta_\varphi^* p(s_\varphi \rho) = \\ & = (\rho - \tau \operatorname{div}_\omega(\rho \mathbf{u})) f_\varphi + \frac{1}{r^2} \delta_r (\hat{r}^2 (s_r^* \rho) (s_r^* u_r) \tilde{w}_\varphi^*) + \frac{1}{r} \delta_\varphi^* ((s_\varphi \rho) (s_\varphi u_\varphi) w_\varphi^*) + \\ & + \frac{1}{r} \delta_\varphi^* \left( (s_\varphi \tau) \gamma \frac{p(s_\varphi \rho)}{s_\varphi \rho} \operatorname{div}_{\omega_\varphi^*}(\rho \mathbf{u}) \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Здесь основные искомые функции  $\rho, u_r, u_\varphi$  и функции  $\tau, f_r, f_\varphi$  определены на сетке  $\bar{\omega}_r^* \times \bar{\omega}_\varphi$ .

Аппроксимации потока массы и соответствующих слагаемых имеют вид

$$\begin{aligned}
j_{mr} &= (s_r^* \rho)(s_r^* u_r - w_r), \quad j_{m\varphi} = (s_\varphi \rho)(s_\varphi u_\varphi - w_\varphi), \\
w_r &= \frac{s_r^* \tau}{s_r^* \rho} \left( \frac{1}{r} \delta_r^*(r \rho u_r^2) + \frac{1}{r} \delta_\varphi^*((s \rho)(s u_r) s u_\varphi) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_r^* p(\rho) - \frac{(s_r^* \rho)(s_r^* u_\varphi)^2}{r} - (s_r^* \rho) s_r^* f_r \right), \\
w_\varphi &= \frac{s_\varphi \tau}{s_\varphi \rho} \left( \frac{1}{r^2} \delta_r(\hat{r}^2 (s \rho)(s u_r) s u_\varphi) + \frac{1}{r} \delta_\varphi(\rho u_\varphi^2) + \frac{1}{r} \delta_\varphi p(\rho) - (s_\varphi \rho) s_\varphi f_\varphi \right), \\
w_r^* &= (s_r^* \tau) \left( (s_r^* u_r) \delta_r^* u_r + \frac{1}{r} (s_r^* u_\varphi) \delta_\varphi^* s u_r + \frac{1}{s_r^* \rho} \delta_r^* p(\rho) - \frac{(s_r^* u_\varphi)^2}{r} - s_r^* f_r \right), \\
\tilde{w}_r^* &= (s_\varphi \tau) \left( (s_\varphi u_r) \delta_r s u_r + \frac{1}{r} (s_\varphi u_\varphi) \delta_\varphi u_r + \frac{1}{s_\varphi \rho} \delta_\varphi p(\rho) - \frac{(s_\varphi u_\varphi)^2}{r} - s_\varphi f_r \right), \\
w_\varphi^* &= (s_\varphi \tau) \left( \frac{1}{r} (s_\varphi u_r) \delta_r (r s u_\varphi) + \frac{1}{r} (s_\varphi u_\varphi) \delta_\varphi u_\varphi + \frac{1}{r s_\varphi \rho} \delta_\varphi p(\rho) - s_\varphi f_\varphi \right), \\
\tilde{w}_\varphi^* &= (s_r^* \tau) \left( \frac{1}{r} (s_r^* u_r) \delta_r^* (r u_\varphi) + \frac{1}{r} (s_r u_\varphi) \delta_\varphi^* s u_\varphi + \frac{1}{r s_r^* \rho} \delta_\varphi^* p(s \rho) - s_r^* f_\varphi \right), \\
\hat{w}_\varphi^* &= \tau \left( \frac{1}{r} u_r \delta_r (r s_r^* u_\varphi) + \frac{1}{r} u_\varphi \delta_\varphi^* s_\varphi u_\varphi + \frac{1}{r \rho} \delta_\varphi^* p(s_\varphi \rho) - f_\varphi \right),
\end{aligned}$$

где  $\hat{r} = s_r^* r$ . Функции  $j_{mr}$ ,  $w_r$ ,  $\tilde{w}_\varphi^*$  определены на сетке  $\bar{\omega}_r \times \bar{\omega}_\varphi$ , а  $j_{m\varphi}$ ,  $w_\varphi$ ,  $\tilde{w}_r^*$  — на сетке  $\omega_r^* \times \omega_\varphi^*$ ,  $\hat{w}_\varphi^*$  — на сетке  $\omega_r^* \times \bar{\omega}_\varphi$ .

Входящие в предыдущие выражения сеточные дивергенции имеют вид

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_\omega(\rho \mathbf{u}) &= \frac{1}{r} \delta_r(r(s_r^* \rho) s_r^* u_r) + \frac{1}{r} \delta_\varphi^*((s_\varphi \rho) s_\varphi u_\varphi), \\
\operatorname{div}_{\omega_r}(\rho \mathbf{u}) &= \frac{1}{r} \delta_r^*(r \rho u_r) + \frac{1}{r} \delta_\varphi^*((s \rho) s u_\varphi), \\
\operatorname{div}_{\omega_\varphi^*}(\rho \mathbf{u}) &= \frac{1}{r} \delta_r(r(s \rho) s u_r) + \frac{1}{r} \delta_\varphi(\rho u_\varphi)
\end{aligned}$$

на сетках  $\omega_r^* \times \omega_\varphi$ ,  $\omega_r \times \omega_\varphi$ ,  $\omega_r^* \times \omega_\varphi^*$  соответственно.

### 3.4 Результаты численного моделирования

Для системы уравнений (3.19)–(3.21) ставится начально–краевая задача в кольце  $\Omega_r \times \Omega_\varphi = (r_1, r_2) \times [0, 2\pi)$ , где  $0 < r_1 < r_2$ .

В соответствии с [6], [2] задача решается в безразмерных переменных. Для перехода к ним в качестве масштабных множителей выбраны характерный пространственный размер  $R$ , характерная масса  $M$  и гравитационная постоянная  $G$ . Безразмерные переменные введены в соответствии с формулами

$$r = Rr', \quad t = t_0t', \quad \rho = \rho_0\rho', \quad u_r = u_0u'_r, \quad u_\varphi = u_0u'_\varphi, \quad p = p_0p'.$$

Множители  $t_0$ ,  $\rho_0$ ,  $u_0$ ,  $p_0$  выражаются следующим образом

$$t_0^2 = \frac{R^3}{GM}, \quad \rho_0 = \frac{M}{R^3}, \quad u_0^2 = \frac{GM}{R}, \quad p_0 = \frac{GM^2}{R^4}.$$

Характерные диапазоны масштабных множителей для астрофизических величин имеют следующий вид:

$$G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ см}^3 \text{ г}^{-1} \text{ с}^{-2}, \quad M = 2 \times 10^{33} - 6 \times 10^{33} \text{ г}, \quad R = 10^{11} - 10^{14} \text{ см}.$$

Переход к безразмерным переменным не меняет вида КГД системы.

Расчетная область — это  $\Omega = \Omega_r \times \Omega_\varphi$  с границами по радиусу  $r_1 = 0.2$  и  $r_2 = 1.4$ .

Форма исходного газового облака задается с помощью функции

$$\zeta(r) = \pm ar \exp(-b(r - r_0)^2)$$

с параметрами  $a = 0.2$ ,  $b = 9.0$ ,  $r_0 = 0.8$  в соответствии с [2].

Начальное распределение плотности берется согласно формулам (3.11), (3.12) при  $\gamma > 1$  и (3.18), (3.12) при  $\gamma = 1$ . Начальное распределение скорости — это

$u_r^0 = 0$  и

$$u_\varphi^0(r, \varphi) = u_\varphi(r) \left(1 + A e^{-b(r-r_0)^2} \sin(N_0 \varphi)\right), \quad (3.25)$$

являющееся возмущенной функцией  $u_\varphi$ , см. (3.6). По сравнению с [2] возмущение сглажено по  $r$ . Параметр  $A > 0$  — амплитуда, а  $N_0$  — число периодов возмущения на  $[0, 2\pi]$ . Массовая сила задается в виде  $f_r = F$ , см. (3.1), и  $f_\varphi = 0$ .

Ставятся "мягкие" граничные условия сноса для искомых функций

$$\delta_r^* \rho|_{i=0, N_r} = 0, \quad \delta_r^* u_r|_{i=0, N_r} = 0, \quad \delta_r^* u_\varphi|_{i=0, N_r} = 0.$$

Для их задания используются фиктивные узлы по радиусу.

По углу ставятся условия  $2\pi$ -периодичности тех же функций.

Коэффициент  $\alpha$  в (3.22) для базовых вариантов составлял 0.2 и 0.3. Шаг по времени выбран постоянным  $\Delta t = 0.0005$ ; это значение не оптимизировалось. Используются равномерные пространственные сетки. Для базовых вариантов расчетов число узлов  $(N_r + 2) \times (N_\varphi + 1) = 80 \times 260$ . Безразмерное время расчета было ограничено значением  $T = 10$ . Все расчеты выполнены на персональном компьютере.

Численный расчет течения с указанными невозмущенными начальными распределениями оказывается устойчивым. Распределения плотности на моменты времени  $t=0$  и 10 практически совпадают.

### 3.4.1 Численное моделирование развития возмущений

Здесь представлены результаты расчетов течений для параметров из [6], [2], [1], а именно, в случае  $\gamma = 5/3$ ,  $k = 0.012$ . Взяты параметры  $A=0.1$  и  $N_0 = 1, 2, 3, 5, 7, 10$  в начальном распределении  $u_\varphi$  (3.25).

Согласно [49] типичные значения  $c_s$  в газовом диске составляют порядка 10 км/с при угловой скорости его вращения  $\omega$  порядка 200 км/с, что определяет число Маха  $Ma \sim 20$ . При таких значениях  $Ma$  существует центробежная

неустойчивость, относящаяся к классу неустойчивостей сдвиговых течений и вызванная тем, что угловая скорость вращения центральной части диска больше, чем его периферии. Оценки показывают, что при выбранном  $k=0.012$  в центре диска  $Ma_1 \sim 23$ ,  $\omega_1 \sim 11.5$ , а вблизи внешней его границы  $Ma_2 \sim 8$ ,  $\omega_2 \sim 0.6$ . Таким образом, в данной задаче должна иметь место центробежная неустойчивость.

Основные расчеты выполнены при выборе  $\alpha = 0.3$  в формуле для  $\tau$  (3.22). Уменьшение  $\alpha$  до 0.1 приводит к появлению осцилляций численного решения. Увеличение его до 0.4 несколько сглаживает численное решение. Дальнейшее увеличение  $\alpha$  приводит к излишнему размазыванию плотности. Сгущение пространственной сетки практически не меняет картину течения, что говорит об адекватности ее выбора. Уменьшение амплитуды возмущения  $A$  до 0.01 или увеличение ее до 0.2 приводит к пропорциональному изменению максимумов плотности без изменения физической картины решения.

На Рис. 3.2 показано развитие возмущений для  $N_0 = 1, 2, 3, 5, 7$ . Для всех вариантов малое начальное возмущение, внесенное в  $u_\varphi$ , приводит к развитию крупномасштабных образований и формированию отстающих рукавов плотности характерной аэродинамической формы. Заметно раздвоение максимумов плотности в спиральных рукавах, то есть формирование в одном рукаве двух максимумов плотности. Раздвоение рукавов развивается от начала рукава к его концу. Подобный эффект наблюдается в реальных галактиках.

Из приведенных графиков эволюции плотности видно, что крупные вихревые структуры более свободно формируются при малых  $N_0$ . При больших  $N_0$  формируются более мелкие структуры, которые с течением времени эволюционируют в кольцевые образования.

Детальная эволюция распределения плотности (а также графики скорости) представлены на Рис. 3.3 при  $N_0=10$  для моментов времени  $t=0.6, 1.1, 3, 9.4$ .

Наблюдается развитие возмущений плотности и формирование классических спиральных рукавов в виде отстающих спиралей. С течением времени система рукавов сглаживается, и распределение плотности принимает форму концентрических колец на временах  $t \sim 8 - 9$ .

Отметим, что сложная вихревая структура решений хорошо видна, хотя использующаяся пространственная сетка не является подробной. Это свидетельствует о достаточно высокой точности алгоритма, несмотря на его первый порядок точности. Распределение плотности на момент времени  $t=1.1$  на Рис. 3.3 приведено в виде, аналогичном [38]. Подчеркнем его близкое соответствие результатам из [38], где данная задача решалась в рамках полных (не баротропных) уравнений Эйлера на основе методов более высокого порядка точности на аналогичной пространственной сетке.

На двух последних графиках из Рис. 3.3 приведены распределения радиальной скорости  $u_r$  на момент  $t = 1.55$  и типичного распределения азимутальной скорости  $u_\varphi$ , которая мало меняется со временем. Видно, что  $u_r$  меняет знак, что в принципе может вызывать появление в течении циклонических вихрей. Однако по абсолютной величине  $u_r$  не велика и не превосходит 1% от  $u_\varphi$  (эти возмущения обусловлены постановкой граничных условий сноса). Поэтому линии тока в полученном течении по своей форме близки к концентрическим окружностям, и циклонические вихри в данных расчетах не наблюдаются.

Результаты расчетов показывают, что формирование крупных структур в газовых дисках сопровождается перераспределением мгновенного углового момента  $M(r) = r\rho u_\varphi$  и смещением его максимума к внутренней границе диска. Данный процесс может способствовать выпадению вещества на центральное притягивающее тело. Перенос углового момента происходит за счет движения вихревых структур без нагрева газа, который в данной модели считается малым.

На Рис. 3.4 приведены распределения углового момента для трех характерных моментов времени во всех рассмотренных случаях. Видно, что наиболее интенсивный перенос момента импульса наблюдается для течений с малым числом  $N_0$ , когда наблюдается формирование наиболее крупных вихревых структур и ярко выраженных рукавов в распределении плотности. При числе возмущений  $N_0 = 10$  перенос момента затруднен из-за взаимного влияния возникающих вихрей.

### 3.4.2 Приближение МВ

В [49], [40] натурные эксперименты с мелкой водой использовались для анализа вихревых течений в аккреционных дисках. Поэтому сопоставление результатов численного моделирования одной и той же задачи для этих постановок представляет доказательство правомерности такой аналогии.

Для рассматриваемой системы уравнений, записанной в баротропном приближении, значение  $\gamma = 5/3$  соответствует течению идеального газа, а вариант  $\gamma = 2$  позволяет моделировать гидродинамическое течение в приближении мелкой воды. При этом плотность газа  $\rho$  соответствует толщине слоя жидкости  $h$  в метрах, давление выражается формулой гидростатики  $p = gh^2/2$ , то есть  $k = g/2$ , где  $g = 9.8 \text{ м/с}^2$  — ускорение силы тяжести.

На Рис. 3.5 приведен расчет задачи в рамках приближения мелкой воды, когда  $\gamma = 2$ ,  $k = g/2$ , где  $g = 9.8 \text{ м/с}^2$  — ускорение силы тяжести. Представлен вариант с  $N_0 = 10$ . Тем самым результаты расчета соответствуют эксперименту в кольцевом канале с радиусами  $r_1 = 0.2 \text{ м}$  и  $r_2 = 1.4 \text{ м}$ . При этом плотность газа  $\rho$  соответствует толщине слоя жидкости  $h$  в метрах, время измеряется в секундах.

Из приведенного рисунка Рис. 3.5 и его сопоставления с Рис. 3.3 следует, что приближение мелкой воды дает картину течения, близкую к газодинамической, что подтверждает возможность использования этого приближения для анализа

гидродинамических процессов в галактических облаках.

### 3.4.3 Случай $\gamma = 1$ (изотермическое течение)

В случае  $\gamma=1$  вид исходных уравнений упрощается, скорость звука становится постоянной:  $c_s = \sqrt{k}$ . Вид начального распределения плотности (3.18) также становится проще. Оно содержит два свободных параметра:  $\rho_0$  и  $k$ , определяющих распределение  $\rho$  по радиусу и общую массу газа в диске. Вид начального распределения при  $\rho_0 = 1.0$  и  $k = 0.12, 0.012$  приведен на Рис. 3.6. Изменение  $\rho_0$  пропорционально меняет полную массу газового диска, а увеличение коэффициента  $k$  делает форму распределения плотности в диске более плоской и уменьшает полную массу.

Для определенности в численных расчетах выбрано  $N_0 = 10$ . Эволюция решения при  $\rho_0 = 1, k = 0.012$  на моменты  $t = 1.0, 2.0, 3.0, 6.0$  представлена на Рис. 3.7. На последнем рисунке хорошо видно раздвоение максимума плотности в каждом из рукавов, и выход возмущения плотности на внешнюю границу области.

Рис. 3.8 демонстрирует эволюцию газового диска малой массы и с близким к постоянному распределением осредненной плотности по радиусу для  $\rho_0 = 0.01, k = 0.12$  на моменты  $t = 0.5$  и  $0.6$ . Общее время расчета  $T = 10$ . Для этого варианта наглядно видно раздвоение рукавов плотности.

Данная серия расчетов показывает, что в дисках малой массы с "плоским" распределением осредненной плотности раздвоение рукавов проявляется наиболее сильно.

## 3.5 Выводы

Проведено численное моделирование неустойчивостей в аккреционном диске с использованием КГД приближения.



Получены новые аксиально симметричные стационарные решения баротропных уравнений Эйлера с массовой силой. Проанализирован изэнтропический и изотермический случаи. Эти решения использованы в качестве начальных распределений в нестационарной задаче (с внесением малых возмущений в распределение азимутальной скорости).

Численный алгоритм построен на использовании КГД уравнений. Программная реализация численного алгоритма позволила в численном эксперименте наблюдать развитие малых начальных возмущений азимутальной скорости и порождаемое ими формирование крупных структур в виде отстающих спиралей — рукавов плотности, которые имеют характерную "аэродинамическую" форму и в которых наблюдается раздвоение. Этот эффект наиболее выражен для уплотненных дисковых образований относительно малой массы, когда происходит отрыв дополнительного максимума плотности и его перемещение наружу через внешнюю границу расчетной области.

Наблюдается перенос момента импульса от центральной области диска к его периферии. При этом чем меньшее число возмущений скорости мы вносим, тем сильнее проявляется перенос момента импульса.

В численном эксперименте подтверждено, что приближение мелкой воды корректно описывает гидродинамическую картину образования рукавов.

Проанализировано влияние на решение параметров алгоритма. Увеличение параметра  $\tau$  приводит к дополнительному размазыванию решения, уменьшение — к появлению осцилляций, что свидетельствует о рациональности сделанного его выбора. Сгущение сетки не приводит к заметным изменениям решения, т.е. достигнута сходимость численного решения по сетке.

Построенный численный алгоритм достаточно универсален и позволяет проводить численные эксперименты с другими начальными распределениями угловой скорости, плотности и притягивающими силами, представляющими интерес

для астрофизики. Этот алгоритм таков, что расчеты быстро выполняются даже на персональном компьютере.

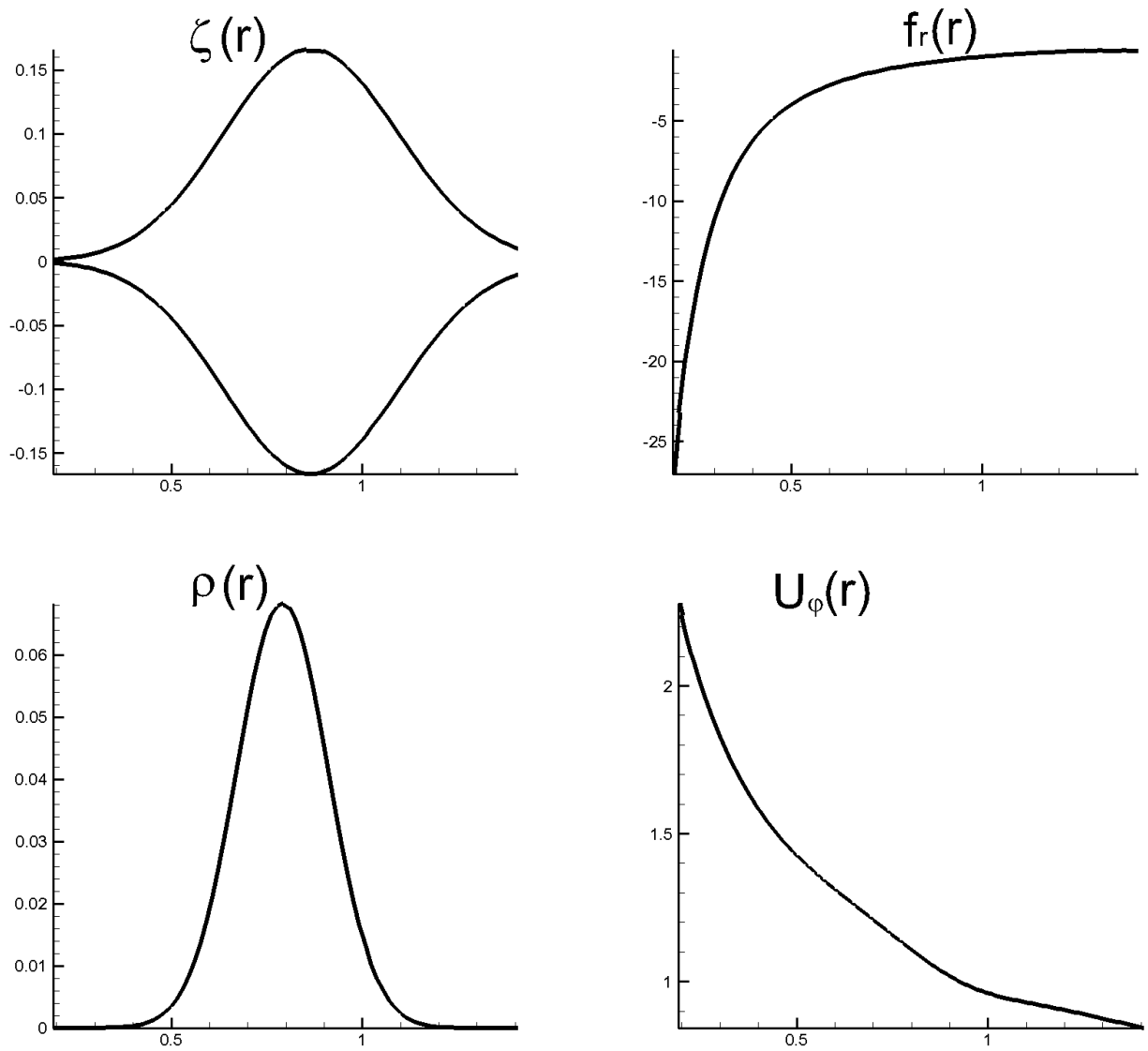


Рис. 3.1. Границы вещества  $\pm\zeta(r)$ , сила  $f_r(r)$  и стационарные распределения  $\rho(r)$  и  $u_\varphi(r)$  при  $\gamma = 5/3$

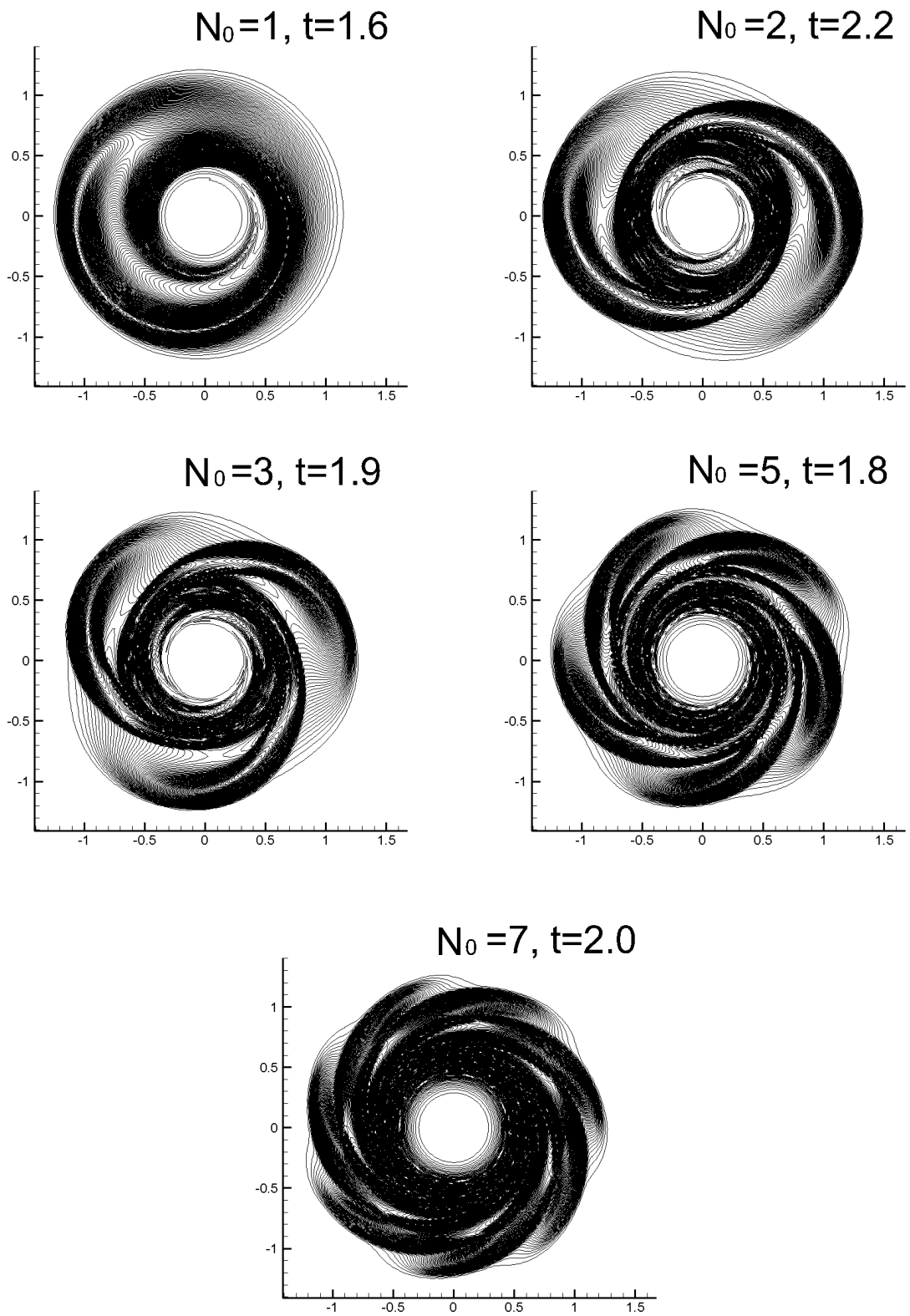


Рис. 3.2. Распределения  $\rho$  для различных  $N_0$  при указанных  $t$

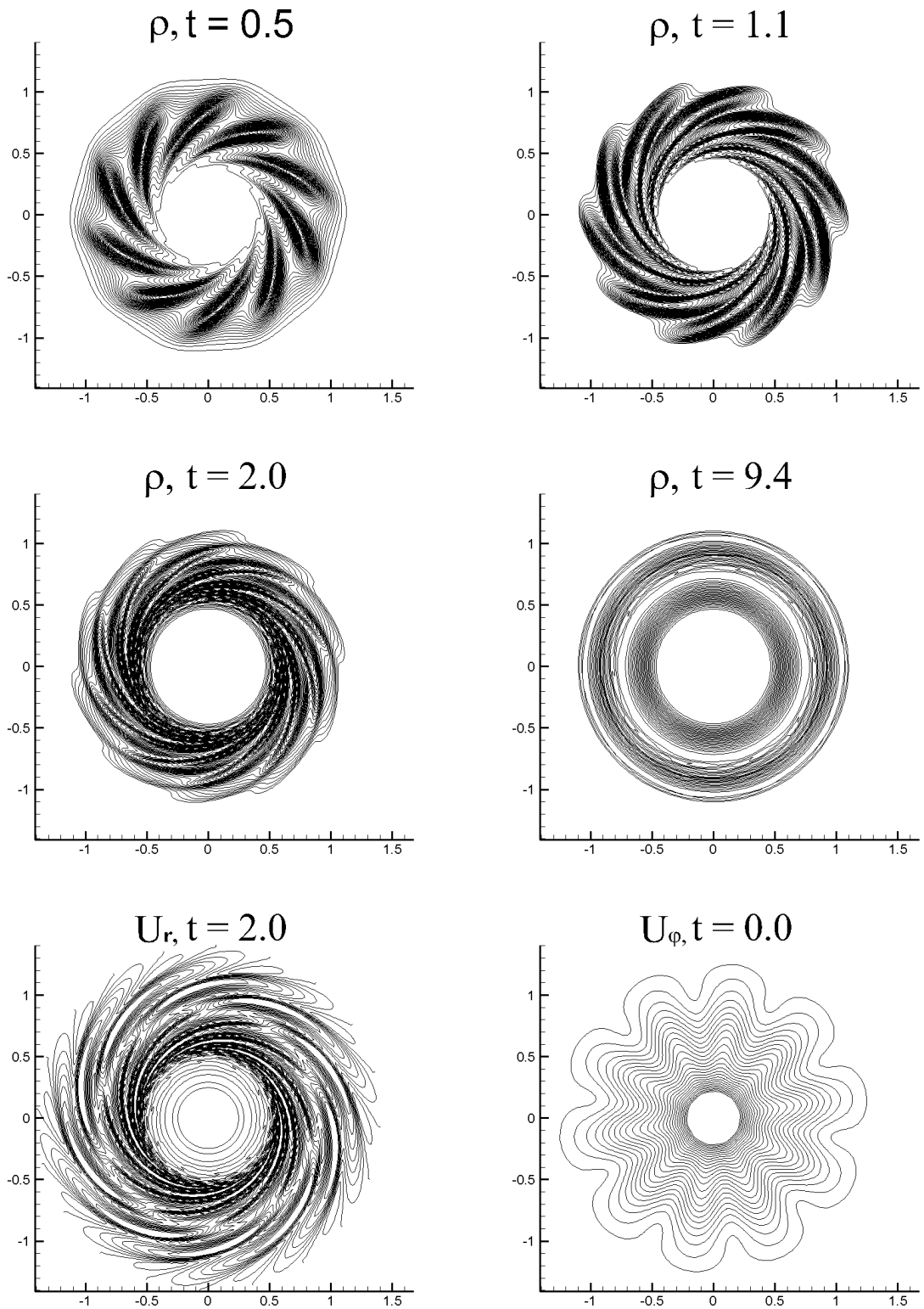


Рис. 3.3. Распределения  $\rho$  для  $t = 1.0, 1.1, 2.0, 9.4$  и распределения  $u_r$  для  $t = 2.0$  и  $u_\phi$  для  $t = 0.0$ , при  $N_0 = 10$

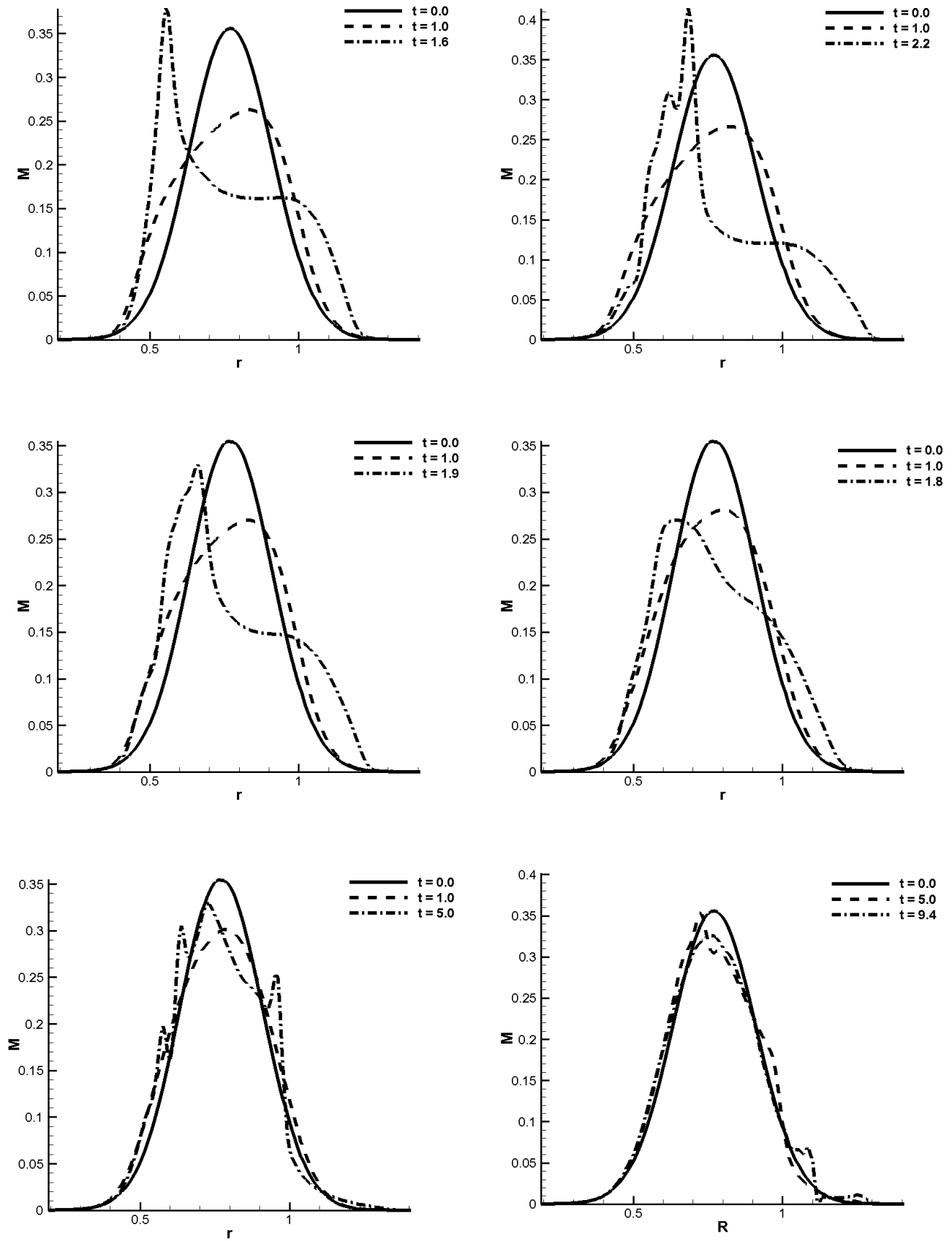


Рис. 3.4. Распределения углового момента при  $N_0 = 1, 2, 3, 5, 7, 10$  соответственно

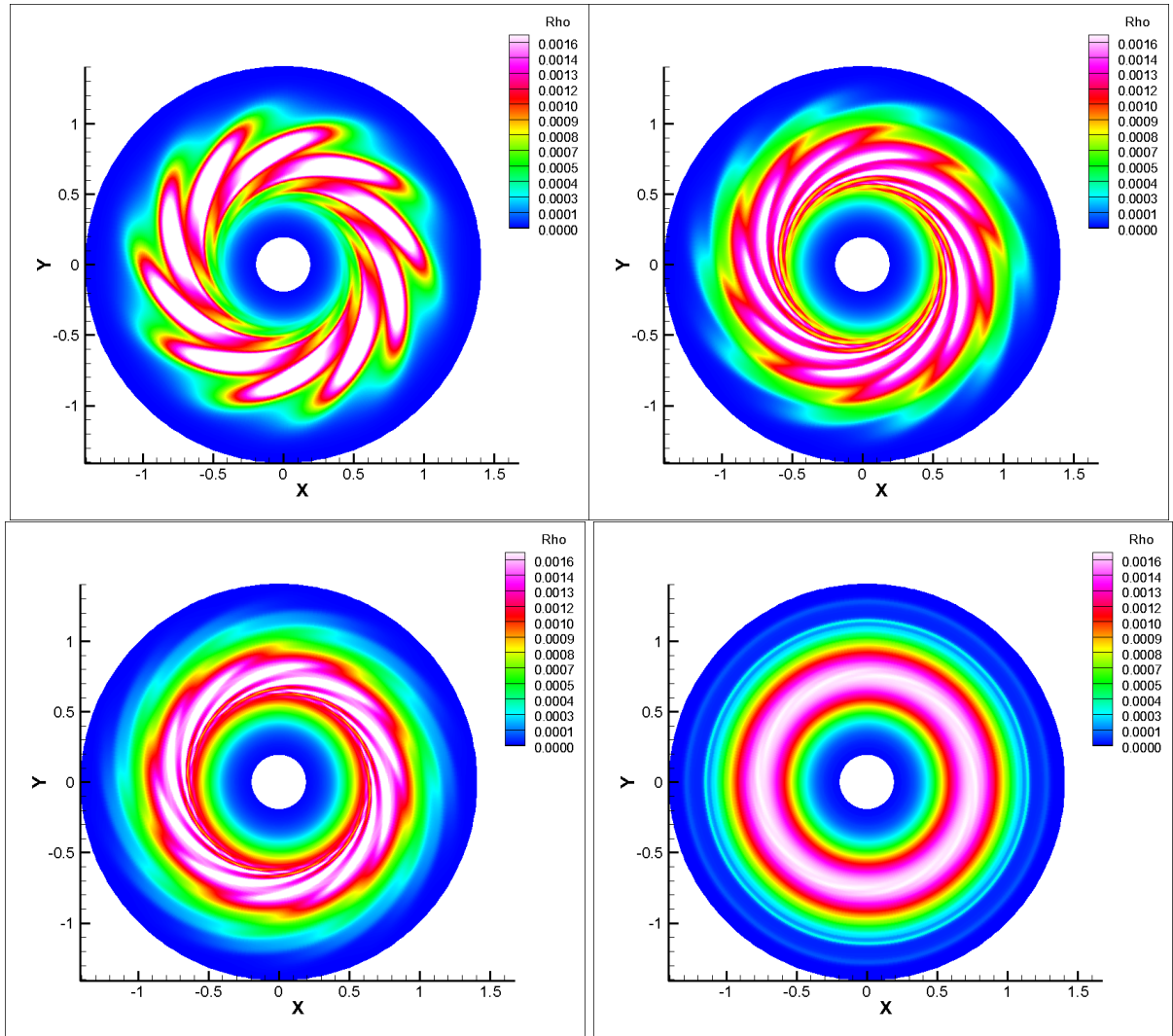


Рис. 3.5. Распределение  $\rho$  для  $t = 1.0, 2.0, 3.0, 10.0$  при  $\gamma = 2$  (приближение мелкой воды),  $k = 9.8/2$ ,  $N_0 = 10$ . Общее время расчета  $T = 10.0$

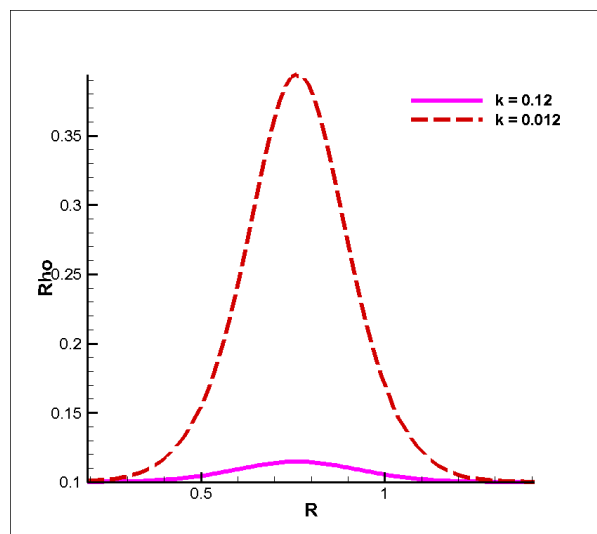


Рис. 3.6. Начальное распределение  $\rho$  по радиусу при  $\gamma = 1$ ,  $k = 0.12$  и  $k = 0.012$

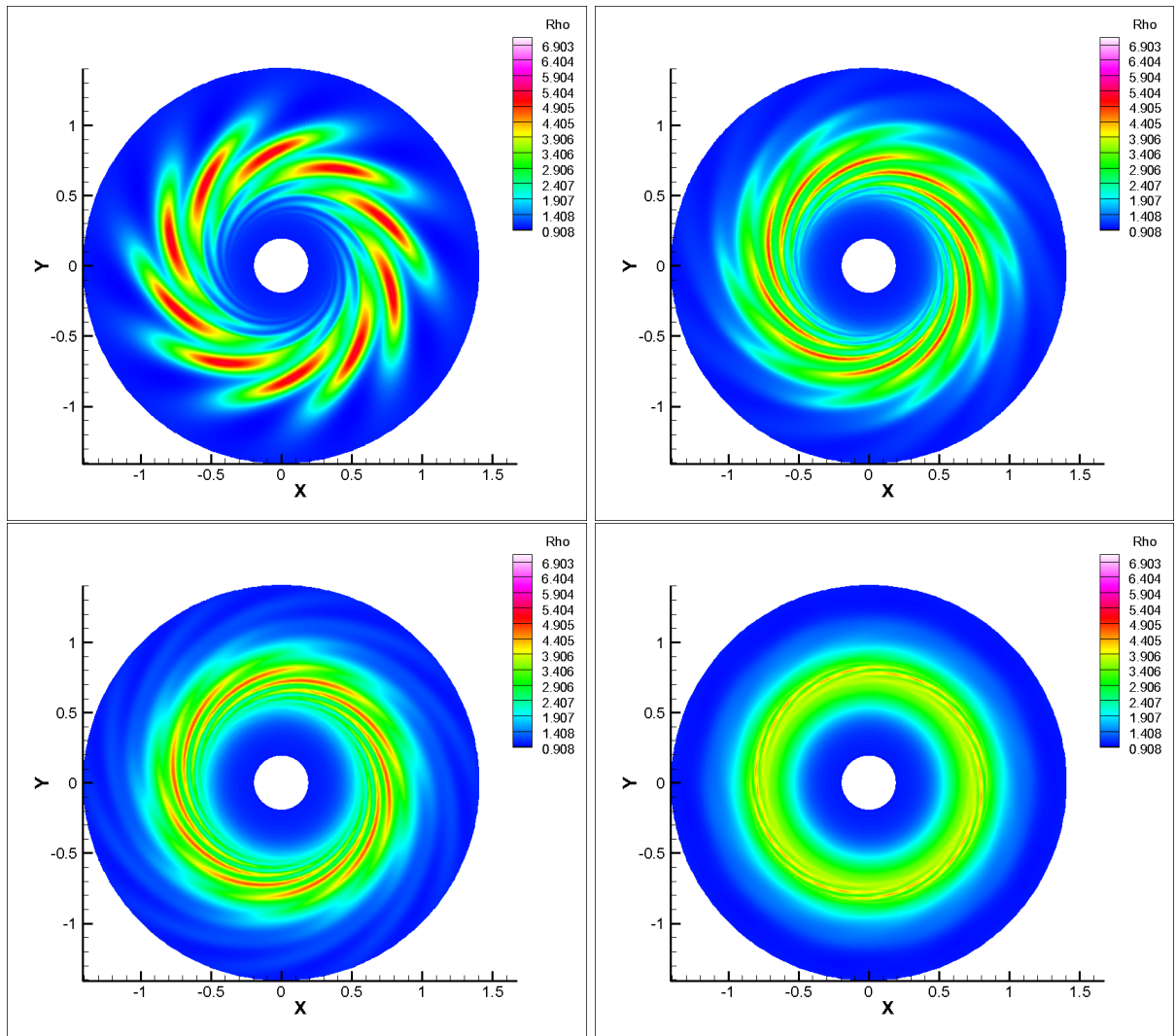


Рис. 3.7. Распределение  $\rho$  для  $t = 1.0, 2.0, 3.0, 6.0$  при  $\gamma = 1$  (изотермический случай),  $k = 0.012$ ,  $N_0 = 10$ ,  $\rho_0 = 1$ . Общее время расчета  $T = 10.0$

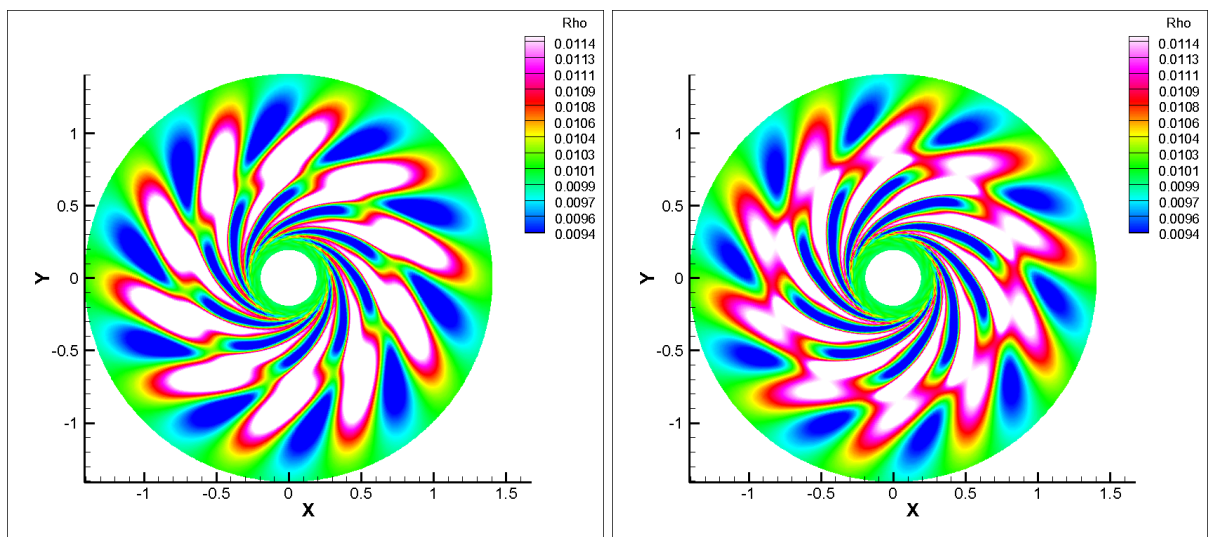


Рис. 3.8. Распределение  $\rho$  для  $t = 0.5, 0.6$  при  $\gamma = 1$  (изотермический случай),  $k = 0.12$ ,  $N_0 = 10$ ,  $\rho_0 = 0.01$ . Общее время расчета  $T = 10.0$

## Глава 4

# Включение КГД алгоритма в комплекс программ OpenFOAM

### 4.1 Открытая интегрируемая платформа OpenFOAM

На основании введенной в работах [51], [12], [55] КГД системы уравнений газовой динамики было проведено множество расчетов течений вязкого сжимаемого газа для различных модельных и прикладных задач. КГД алгоритм позволяет применять классический вариант метода конечного объема с аппроксимацией всех потоковых слагаемых с помощью центральных разностей в сочетании с явной по времени разностной схемой. Однако все эти расчеты были выполнены с использованием индивидуальных программ и программных комплексов. Для того, чтобы расширить применение КГД подхода на более широкий круг задач и предоставить возможность использования этого метода широкому кругу пользователей, КГД алгоритм был реализован в программном пакете OpenFOAM. В разработке и развитии открытого пакета OpenFOAM принимают участие множество организаций и сотни разработчиков по всему миру.

Пакет OpenFOAM (англ. Open Source Field Operation And Manipulation) — открытая интегрируемая платформа для численного моделирования задач механики сплошных сред, предназначенная для вычисления операций со скалярными, векторными и тензорными полями, в которой используется метод конечного



объема. В основе кода лежит набор библиотек, предоставляющих инструменты для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных. Рабочим языком кода является ООП C++. В коде разделяются такие понятия, как геометрия, расчетная сетка, дискретизация основных уравнений и визуализация полученных результатов (SALOME/OpenFOAM/ParaView).

Пакет OpenFOAM (см. [86], [71], [65]) разрабатывался в Имперском колледже Лондона в 1991–2003 гг. (Н. Weller and Н. Jasak) и находится в открытом доступе с 2004 г. на условиях GPL лицензии. Входит в состав CAE Linux. Название и идеология взяты от предшественника FOAM (Field Operation And Manipulation). В настоящее время параллельно разрабатываются несколько ответвлений от пакета OpenFOAM, поддерживаемых разными компаниями. Основная версия открытого пакета OpenFOAM принадлежит компании OpenCFD, UK, во главе с основателем Н. Weller – [www.openfoam.org](http://www.openfoam.org).

Преимуществом OpenFOAM является ориентация на пользователя, возможность использования как готовых решателей и утилит, так и средств решения задач механики сплошной среды в виде классов C++.

Для решения задач механики сплошной среды в открытом пакете OpenFOAM представлен широкий круг решателей. Исходный код различных решателей OpenFOAM объединен по следующему классу задач: DNS (прямое численное моделирование), basic (простейшие уравнения), combustion (задачи горения), compressible (сжимаемые течения), discreteMethods (дискретные методы), electromagnetics (электромагнетизм), financial (экономические задачи), heatTransfer (тепло- и массообмен), incompressible (несжимаемые течения), lagrangian (течение жидкости с учетом движения отдельных частиц), multiphase (многофазные течения), stressAnalysis (задачи прочности).

Этот пакет включает в себя целый ряд возможностей, в частности, использование трехмерных неструктурированных сеток, генерацию сеток, возможность

изменения топологии сетки, непосредственную работу с ячейками, гранями, ребрами и узлами, вытягивание сетки из 2D в 3D, удаление границ, деформацию сетки, создание подвижных сеток и постановку различных видов граничных условий, изменение явности и неявности численной схемы, применение более 50 различных комбинаций расчетных схем. Также возможна конвертация различных форматов сеток (например, Fluent, TecPlot, EnSight, UNS, GMV). Также OpenFOAM может производить мониторинг показателей сходимости и осуществлять запуск задачи в параллельном режиме, применяя различные методы декомпозиции области.

Все это делает пакет OpenFOAM перспективным для использования в нем нового КГД алгоритма в качестве одного из вычислительных ядер.

Доступ к вычислительным ресурсам пакета OpenFOAM, а также SALOME и ParaView (пре- и постпроцессинг), может быть осуществлен на базе технологической платформы UniHUB Web-лаборатории механики сплошной среды UniCFD (<http://www.unicluster.ru/unihub.html>), созданной в рамках программы "Университетский кластер". UniHUB – технологическая платформа, созданная для организации виртуальных информационно-вычислительных лабораторий. Она представляет собой программный комплекс, построенный из компонентов на базе свободно распространяемого программного обеспечения с открытыми исходными кодами. Лаборатория, построенная на базе UniHUB, позволяет получить доступ к размещенным ресурсам, публиковать информацию о себе и своих исследовательских работах, осуществлять поиск коллег в своей области, поддерживать связь со своими коллегами, организовывать коллективы по интересам для дальнейшей совместной работы, получать актуальную информацию о направлениях деятельности различных научных коллективов, использовать материалы лаборатории, запускать приложения в вычислительной инфраструктуре лаборатории, получать помощь исследователей в

разработке, установке и дальнейшей поддержке приложений.

Доступ к сервисам UniHUB реализован как доступ к виртуальному рабочему столу. Для этого нужен Web-браузер (Chrome, MS IE, FireFox, Opera и др.), нахождение в открытой сети и создание учетной записи (для этого можно обратиться в ИСП РАН – unihub@ispras.ru). Авторизация производится по ссылке <http://desktop.weblab.cloud.unihub.ru>. На сегодняшний день возможно одновременное создание трех рабочих столов. Можно выбрать более или менее экономичные оболочки с точки зрения сетевого трафика.

В данной главе представлен вариант включения КГД алгоритма в комплекс программ OpenFOAM.

## 4.2 Включение КГД алгоритма в комплекс программ OpenFOAM

### 4.2.1 КГД уравнения газовой динамики в потоковом виде

Создание встроенного вычислительного ядра (или решателя) QGDFoam, основанного на КГД алгоритме, в открытом программном комплексе OpenFOAM было начато с внедрения полной системы уравнений газовой динамики в форме Навье–Стокса в виде уравнений баланса массы, импульса и полной энергии без внешней массовой силы и тепловых источников с уравнением состояния для идеального политропного газа, т.е. для следующей исходной системы

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (4.1)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div} \hat{\Pi}, \quad (4.2)$$

$$\partial_t E + \operatorname{div}[(E + p)\mathbf{u}] + \operatorname{div} \mathbf{q} = \operatorname{div}(\hat{\Pi} \cdot \mathbf{u}). \quad (4.3)$$

Тензор вязких напряжений  $\hat{\Pi}$  имеет вид

$$\hat{\Pi} = \hat{\Pi}_{NS} = \mu((\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T - \frac{2}{3} \hat{I}(\nabla \cdot \mathbf{u})), \quad (4.4)$$

где коэффициент динамической вязкости  $\mu = \mu(\rho, T) > 0$ ,  $\hat{I}$  – единичный тензор.

Тепловой поток  $\mathbf{q}$  задается формулой

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_{NS} = -\kappa \nabla T, \quad (4.5)$$

где  $\kappa = \kappa(\rho, T) > 0$  – коэффициент теплопроводности.

Полная энергия  $E$  вычисляется с использованием величины внутренней энергии  $u_\varepsilon$

$$E = \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 + \rho u_\varepsilon. \quad (4.6)$$

Система уравнений (4.1) – (4.3) замыкается уравнениями состояния для идеального политропного газа

$$p = \rho R T, \quad u_\varepsilon = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}, \quad (4.7)$$

$$u_\varepsilon = c_V T, \quad c_V = \frac{R}{(\gamma - 1)}, \quad c_p = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1)}, \quad (4.8)$$

где показатель адиабаты  $\gamma = c_p/c_V > 1$ .

Для создания нового вычислительного ядра QGDFoam используется КГД система уравнений газовой динамики в форме Навье–Стокса, соответствующая (4.1) – (4.3), с дополнительными диссипативными слагаемыми с малым коэффициентом  $\tau$  размерности времени

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j}_m = 0, \quad (4.9)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \nabla \cdot \hat{\Pi}, \quad (4.10)$$

$$\partial_t(\rho E) + \nabla \cdot ((E + p)\mathbf{j}_m/\rho) + \nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla \cdot (\hat{\Pi} \cdot \mathbf{u}), \quad (4.11)$$

где  $\rho E$  – полная энергия единицы объема,  $\frac{E + p}{\rho}$  или  $H$  – полная удельная

энтальпия. При этом поток массы в уравнении неразрывности принимает вид

$$\mathbf{j}_m = \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}), \quad (4.12)$$

тензор вязких напряжений  $\hat{\Pi}$  имеет вид

$$\hat{\Pi} = \hat{\Pi}_{NS} + \tau \mathbf{u} \otimes \rho((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p) + \tau \hat{I}(\mathbf{u} \cdot \nabla p + \gamma p(\nabla \cdot \mathbf{u})). \quad (4.13)$$

Тепловой поток  $\mathbf{q}$  задается формулой

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_{NS} - \tau \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \nabla u_\varepsilon + p \mathbf{u} \cdot \nabla(\frac{1}{\rho})). \quad (4.14)$$

Для КГД системы уравнений газовой динамики пространственные дискретизации были выписаны в [12], [55], [21], [22], [23]. Для обобщенной таким образом КГД системы уравнений в [24], [25] было показано выполнение уравнения баланса энтропии и построена соответствующая диссипативная функция. Пространственная дискретизация, сохраняющая энтропийные свойства разностных уравнений, построена и опробована в работе [9].

В основе OpenFOAM лежит метод конечного объема, т.е. конечнообъемная аппроксимация записывается для центров конечных объемов. Значение каждой величины в центре ячейки есть среднее этой величины по ячейке

$$\langle a \rangle = \frac{1}{V} \int_V a dV,$$

где  $V$  – объем ячейки. Интегрирование по объему сводится к вычислению потоков через грани

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.15)$$

Индекс  $f$  указывает на значение величины на грани конечного объема,

$\mathbf{S}_f = S_f \mathbf{n}_f$  – нормаль к грани, умноженная на ее площадь (Рис. 4.1).

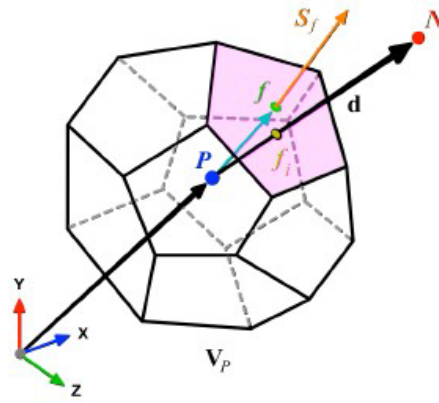


Рис. 4.1. Контрольный объем в OpenFOAM.

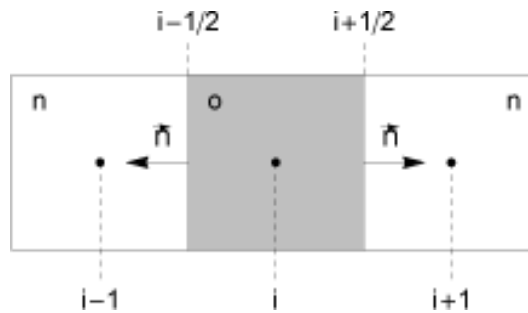


Рис. 4.2. Трехточечный оригинальный шаблон пакета OpenFOAM.

Если рассматривается величина в центре конкретной ячейки, она помечается индексом  $o$  (own, значение в своей ячейке). Величины в соседних к своей ячейкам помечаются индексом  $n$  (neighbour, значение в соседней ячейке). Предполагается, что положительное направление нормали граней своей ячейки совпадает с внешними нормальями к грани (Рис. 4.2).

Для реализации разностной схемы уравнений (4.27), (4.28) и (4.29) в OpenFOAM использовались специальные операторы. Интерполяция задается оператором  $af = fvc :: interpolate(a)$ . Здесь  $a$  — поле некоторой величины, заданное в центрах контрольных объемов,  $a_f$  — поле, заданное в центрах граней конечных объемов, полученное линейной интерполяцией значений поля  $a$  (например,  $a_{i+1/2} = (a_i + a_{i+1})/2$ ).

Для производной по времени величины  $\frac{\hat{a} - a}{\Delta t}$  используется  $fvm :: ddt(a)$ . Здесь  $a$  — поле, заданное в центрах контрольных объемов.

Дивергенция величины вычисляется с помощью оператора  $fvc :: div(phi)$ , по-

током которой через грани ячейки является поле  $\varphi$ .

`fv::snGrad(a)` — поле, заданное в центрах граней конечных объемов, значения которого равны производной величины  $\mathbf{a}$  по внешней нормали к контрольному объему.

Рассмотрим поле  $\mathbf{a}$  и интерполяцию этого поля на грани конечных объемов  $\mathbf{a}_f$ . Пусть требуется найти величину дивергенции поля  $\mathbf{a}$ . Согласно соглашениям метода конечного объема, значение некоторого поля в центре конечного объема примерно равно среднему значению этого поля по ячейке. В таком случае, дивергенция поля  $\mathbf{a}$  в центре конечного объема приближенно равна

$$(\nabla \cdot \mathbf{a})_o \approx \langle \nabla \cdot \mathbf{a} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS \approx \quad (4.16)$$

$$\approx \frac{1}{V} \sum_f \mathbf{a}_f \cdot \mathbf{n}_f S_f = \frac{1}{V} \sum_f \mathbf{a}_f \cdot \mathbf{S}_f = \frac{1}{V} \sum_f \varphi. \quad (4.17)$$

Здесь величина  $\varphi$  — поток поля  $\mathbf{a}$  через грани ячейки, и именно эта величина является аргументом функции `fv::div`.

Для уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\tau \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})) - \nabla \cdot (\tau \nabla p) = 0 \quad (4.18)$$

первое слагаемое аппроксимируется следующим образом

$$\langle \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \approx \frac{1}{V} \sum_f \rho_f \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f,$$

где величины, стоящие под суммой, легко вычисляются с помощью интерполирования полей соответствующих величин, заданных в центрах конечных объемов, на грани (например, `rho::fv::interpolate(rho)`). Значение  $\mathbf{S}_f$  хранится в переменной `mesh.Sf()`. Для второго слагаемого среднее значение по ячейке рас-

писывается следующим образом

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla \cdot (\tau \nabla p) \rangle &= \frac{1}{V} \int_V \nabla \cdot (\tau \nabla p) dV = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \tau \nabla p \cdot \mathbf{n} dS = \\
 &= \frac{1}{V} \int_{\partial V} \tau \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \cdot d\mathbf{S} \approx \frac{1}{V} \sum_f \tau_f \left( \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right)_f \cdot \mathbf{S}_f,
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

где производная на грани контрольного объема вычисляется как

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \approx \frac{p_n - p_0}{h},$$

где  $p_n$  – значение поля в соседней ячейке,  $p_0$  – значение поля в своей ячейке. Вычисление производной по нормали к грани конечного объема от поля, заданного в центрах конечных объемов, производится командой `fvc::snGrad()`. Значение площади грани хранится в переменной `mesh.magSf()`. Для последнего слагаемого

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla \cdot (\tau \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})) \rangle &= \frac{1}{V} \int_{\partial V} \tau \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS \approx \\
 &\approx \frac{1}{V} \sum_f \tau_f (\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}))_f \cdot \mathbf{S}_f.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

В OpenFOAM дивергенция некоторой величины можно вычислить, если поле данной величины задано на гранях контрольных объемов. После применения оператора дивергенции результат будет известен в центрах контрольных объемов. Для того, чтобы вычислить значение данного слагаемого на грани стандартными средствами OpenFOAM, необходимо вычислить значение слагаемого в центрах конечных объемов, а затем интерполировать полученные значения на грани конечного объема. Однако, в этом случае для вычисления значения слагаемого на грани потребуются значения величин с четырех ячеек (для прямоугольной сетки), что не согласуется с оригинальным шаблоном. В одномерном случае для вычисления дивергенции остается достаточным использование



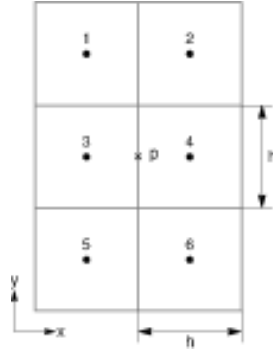


Рис. 4.3. Сетка для расчета градиента на грани между ячейками 3 и 4

стандартного трехточечного шаблона (Рис. 4.2).

В 2D–случае расчет градиента скалярного поля на гранях ячеек в случае равномерной сетки осуществляется следующим образом.

Пусть требуется найти градиент поля  $f(\mathbf{x})$ , заданного в центрах ячеек равномерной прямоугольной сетки, в точке  $p$ , являющейся центром грани между ячейками 3 и 4 (Рис. 4.3). Для вычисления частных производных на грани будем использовать метод наименьших квадратов.

Пусть необходимо вычислить градиент функции  $f(\mathbf{x})$  в точке с координатами  $\mathbf{x}_p$ , зная координаты точек  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , а также значения функции  $f_p$ ,  $f_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Градиент функции с помощью метода наименьших квадратов вычисляется как

$$(\nabla f)|_p = \sum_{i=1}^N w_i^2 \mathbf{G}^{-1} \mathbf{d}_i (f_i - f_p),$$

где индекс  $i$  относится к номерам точек, по которым осуществляется расчет,  $N$  — количество точек,  $\mathbf{d}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_p$ ,  $w_i = \frac{1}{|\mathbf{d}_i|}$ ,  $\mathbf{G} = \sum_{i=1}^N w_i^2 \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_i$ .

Т.е. формулы для вычисления частных производных в точке  $p$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_p = \frac{1}{7h} (f_2 - f_1 + 5(f_4 - f_3) + f_6 - f_5),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_p = \frac{1}{2h} \left( \frac{f_1 + f_2}{2} - \frac{f_5 + f_6}{2} \right).$$

В стандартном случае симметричных схем получаем

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_p &= \frac{1}{h} (f_4 - f_3), \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_p &= \frac{1}{2h} \left( \frac{f_1 + f_2}{2} - \frac{f_5 + f_6}{2} \right).\end{aligned}$$

Заметим, что в рассматриваемом встроенном 1D-решателе QGDFoam вычисления производной по  $x$  с помощью двух методов производится по одной и той же схеме.

Для включения в открытый программный комплекс OpenFOAM исходная КГД система уравнений газовой динамики была переписана в следующем потоковом виде

$$\rho^t = \rho^0 - \frac{\Delta t}{V} \sum_f F_f^0(\rho^0), \quad (4.21)$$

$$F_f^0(\rho^0) = \rho_f \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f - \tau_f ((\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}))_f + (\nabla p)_f) \cdot \mathbf{S}_f,$$

$$(\rho \mathbf{u})^t = (\rho \mathbf{u})^0 - \frac{\Delta t}{V} \sum_f F_f^0((\rho \mathbf{u})^0), \quad (4.22)$$

$$F_f^0((\rho \mathbf{u})^0) = F_f^0(\rho^0) \mathbf{u}_f + p_f \mathbf{S}_f - \mathbf{S}_f \cdot \hat{\Pi}_f^{QGD},$$

$$\hat{\Pi}_f^{QGD} = \tau_f \mathbf{u}_f \otimes (\rho_f \mathbf{u}_f \cdot (\nabla \otimes \mathbf{u}))_f + (\nabla p)_f +$$

$$+ \tau_f \hat{I}(\mathbf{u}_f \cdot (\nabla p)_f + \gamma_f p_f (\nabla \cdot \mathbf{u})_f) + \mu_f ((\nabla \otimes \mathbf{u})_f + (\nabla \otimes \mathbf{u})_f^T) - \frac{2}{3} \hat{I}(\nabla \cdot \mathbf{u})_f,$$

$$(\rho E)^t = (\rho E)^0 - \frac{\Delta t}{V} \sum_f F_f^0((\rho E)^0), \quad (4.23)$$

$$F_f^0((\rho E)^0) = F_f^0(\rho^0) H_f - \hat{\Pi}_f^{QGD} \cdot \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f - (\tau_f \mathbf{u}_f \rho_f (\mathbf{u}_f \cdot (\nabla u_\varepsilon)_f +$$

$$+ p_f \mathbf{u}_f \cdot (\nabla \frac{1}{\rho})_f) \cdot \mathbf{S}_f.$$

### 4.2.2 1D-разностный алгоритм

При реализации 1D-численной схемы некоторые слагаемые имеют собственные названия.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(j_m u)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x}, \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(j_m H)}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial(\Pi_{xx} u)}{\partial x}, \quad (4.26)$$

где  $j_m = \rho u - \rho w$ ,  $\rho w = \tau \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p)$ ,  $\Pi_{xx} = uw^* + R^*$ ,

$$w^* = \tau \left( \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad R^* = \tau \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$E = \rho \left( \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} \right), \quad H = \frac{E + p}{\rho} = \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{p}{\rho},$$

$$q = -uR^q, \quad R^q = \tau \rho \left( \frac{u}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) + pu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right).$$

Для системы уравнений (4.24) – (4.26) также воспользуемся явной схемой по времени и центральными разностями для вычисления производных.

Разностная схема для уравнения (4.24)

$$\hat{\rho}_i = \rho_i - \frac{\Delta t}{h} (j_{mi+1/2} - j_{mi-1/2}), \quad (4.27)$$

$$j_{mi+1/2} = (\rho u)_{i+1/2} - (\rho w)_{i+1/2} = \rho_{i+1/2} u_{i+1/2} - (\rho w)_{i+1/2},$$

$$j_{mi-1/2} = (\rho u)_{i-1/2} - (\rho w)_{i-1/2} = \rho_{i-1/2} u_{i-1/2} - (\rho w)_{i-1/2},$$

$$(\rho w)_{i+1/2} = \tau_{i+1/2} \frac{1}{h} (\rho_{i+1} u_{i+1}^2 + p_{i+1} - \rho_i u_i^2 - p_i),$$

$$(\rho w)_{i-1/2} = \tau_{i-1/2} \frac{1}{h} (\rho_i u_i^2 + p_i - \rho_{i-1} u_{i-1}^2 - p_{i-1}),$$

Разностная схема для уравнения (4.25)

$$\begin{aligned} \rho \hat{u}_i &= (\rho u)_i - \frac{\Delta t}{h} (j_{mi+1/2} u_{i+1/2} - j_{mi-1/2} u_{i-1/2}) - \frac{\Delta t}{h} (p_{i+1/2} - p_{i-1/2}) + \\ &+ \frac{\Delta t}{h} (\Pi_{xx i+1/2} - \Pi_{xx i-1/2}), \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\Pi_{xx i+1/2} = u_{i+1/2} w_{i+1/2}^* + R_{i+1/2}^*,$$

$$\Pi_{xx i-1/2} = u_{i-1/2} w_{i-1/2}^* + R_{i-1/2}^*,$$

$$w_{i+1/2}^* = \tau_{i+1/2} \left( \rho_{i+1/2} u_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \frac{p_{i+1} - p_i}{h} \right),$$

$$w_{i-1/2}^* = \tau_{i-1/2} \left( \rho_{i-1/2} u_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + \frac{p_i - p_{i-1}}{h} \right),$$

$$R_{i+1/2}^* = \tau_{i+1/2} \left( u_{i+1/2} \frac{p_{i+1} - p_i}{h} + \gamma_{i+1/2} p_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right),$$

$$R_{i-1/2}^* = \tau_{i-1/2} \left( u_{i-1/2} \frac{p_i - p_{i-1}}{h} + \gamma_{i-1/2} p_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right),$$

Разностная схема для уравнения (4.26)

$$\begin{aligned} \hat{E}_i &= E_i - \frac{\Delta t}{h} (j_{mi+1/2} H_{i+1/2} - j_{mi-1/2} H_{i-1/2}) - \frac{\Delta t}{h} (q_{i+1/2} - q_{i-1/2}) + \\ &+ \frac{\Delta t}{h} (\Pi_{xx i+1/2} u_{i+1/2} - \Pi_{xx i-1/2} u_{i-1/2}), \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$E_i = \frac{\rho_i u_i^2}{2} + \frac{p_i}{\gamma_i - 1},$$

$$H_{i+1/2} = \frac{E_{i+1/2} + p_{i+1/2}}{\rho_{i+1/2}} = \frac{u_{i+1/2}^2}{2} + \frac{p_{i+1/2}}{\rho_{i+1/2}(\gamma_{i+1/2} - 1)} + \frac{p_{i+1/2}}{\rho_{i+1/2}},$$

$$H_{i-1/2} = \frac{E_{i-1/2} + p_{i-1/2}}{\rho_{i-1/2}} = \frac{u_{i-1/2}^2}{2} + \frac{p_{i-1/2}}{\rho_{i-1/2}(\gamma_{i-1/2} - 1)} + \frac{p_{i-1/2}}{\rho_{i-1/2}},$$

$$q_{i+1/2} = -u_{i+1/2} R_{i+1/2}^q,$$

$$q_{i-1/2} = -u_{i-1/2} R_{i-1/2}^q,$$

$$R_{i+1/2}^q = \tau_{i+1/2} \rho_{i+1/2} \left( \frac{u_{i+1/2}}{\gamma_{i+1/2} - 1} \frac{p_{i+1/2}/\rho_{i+1/2} - p_i/\rho_i}{h} + p_{i+1/2} u_{i+1/2} \frac{1/\rho_{i+1} - 1/\rho_i}{h} \right),$$

$$R_{i-1/2}^q = \tau_{i-1/2} \rho_{i-1/2} \left( \frac{u_{i-1/2}}{\gamma_{i-1/2} - 1} \frac{p_i/\rho_i - p_{i-1/2}/\rho_{i-1/2}}{h} + p_{i-1/2} u_{i-1/2} \frac{1/\rho_i - 1/\rho_{i-1}}{h} \right).$$

КГД уравнение (4.24) с учетом принятых и введенных названий реализуется в OpenFOAM следующим образом

$$\text{fvM} :: \text{ddt}(\text{rho}) + \text{fvc} :: \text{div}(\text{phi}) - \text{fvc} :: \text{div}(\text{phiRhoW}) = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi &= \rho_f \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f, \\ \varphi_{\rho w} &= \tau_f \left( \frac{\partial(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}_f} \cdot \mathbf{n}_f \right) \cdot \mathbf{S}_f + \tau_f \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_f} S_f. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{fvc} :: \text{div}(\text{phi}) &= \frac{1}{V} \sum_f \varphi = \\ &= \frac{1}{V} (\rho_{i+1/2} u_{i+1/2} S + \rho_{i-1/2} u_{i-1/2} (-S)) = \frac{1}{h} (\rho_{i+1/2} u_{i+1/2} + \rho_{i-1/2} u_{i-1/2}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{fvc} :: \text{div}(\text{phiRhoW}) &= \frac{1}{V} \sum_f \varphi_{\rho w} = \frac{1}{V} \left( \frac{\tau_{i+1/2}}{h} (u_{i+1}^2 \rho_{i+1} - u_i^2 \rho_i + p_{i+1} - p_i) S + \right. \\ &+ \left. \frac{\tau_{i-1/2}}{h} (u_{i-1}^2 \rho_{i-1} - u_i^2 \rho_i - p_i + p_{i-1}) S \right) = \\ &= \frac{1}{h} \left( \frac{\tau_{i+1/2}}{h} (u_{i+1}^2 \rho_{i+1} - u_i^2 \rho_i + p_{i+1} - p_i) - \frac{\tau_{i-1/2}}{h} (u_{i-1}^2 \rho_{i-1} - u_i^2 \rho_i - p_i + p_{i-1}) \right). \end{aligned}$$

Разностная схема для уравнения (4.24) в OpenFOAM в 1D-случае совпадает с оригинальной разностной схемой

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = & \rho - \frac{\Delta t}{h}(\rho_{i+1/2}u_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}u_{i-1/2}) + \\ & + \frac{\Delta t}{h} \left( \frac{\tau_{i+1/2}}{h}(u_{i+1}^2\rho_{i+1} - u_i^2\rho_i + p_{i+1} - p_i) - \frac{\tau_{i-1/2}}{h}(u_i^2\rho_i - u_{i-1}^2\rho_{i-1} + p_i - p_{i-1}) \right). \end{aligned}$$

КГД уравнение (4.25) реализуется в OpenFOAM следующим образом

$$\begin{aligned} \text{fvM} :: \text{ddt}(\rho\mathbf{U}) + \text{fvc} :: \text{div}(\phi\mathbf{U}p) - \text{fvc} :: \text{div}(\phi\mathbf{W}) - \\ - \text{fvc} :: \text{div}(\phi\mathbf{U}\mathbf{W}) - \text{fvc} :: \text{div}(\phi\mathbf{R}) = 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_{up} &= \rho_f \mathbf{u}_f (\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f) + p_f \mathbf{S}_f, \\ \varphi_w &= \tau_f \mathbf{u}_f \left( \mathbf{S}_f \cdot \left( \mathbf{n}_f \cdot \frac{\partial(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}_f} \right) \right) + \tau_f \mathbf{u}_f \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_f} (\mathbf{S}_f \cdot \mathbf{n}_f), \\ \varphi_{uw} &= \tau_f (\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f) \left( \rho (\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n}_f) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_f} + \mathbf{n}_f \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_f} \right), \\ \varphi_R &= \tau_f \mathbf{S}_f \left( (\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n}_f) \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_f} + \gamma_f p_f (\mathbf{n}_f \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_f}) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{fvc} :: \text{div}(\phi\mathbf{U}p) &= \frac{1}{V} \sum_f \varphi_{up} = \\ &= \frac{1}{V} (u_{i+1}^2 S \rho_{i+1/2} - u_{i-1}^2 S \rho_{i-1/2} + (p_{i+1/2} - p_{i-1/2}) S) = \\ &= \frac{1}{h} (u_{i+1/2}^2 \rho_{i+1/2} - u_{i-1/2}^2 \rho_{i-1/2} + p_{i+1/2} - p_{i-1/2}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{fvc} :: \text{div}(\phi\mathbf{W}) &= \frac{1}{V} \sum_f \varphi_w = \\ &= \frac{1}{V} \left( u_{i+1/2} S \tau_{i+1/2} \left( \frac{u_{i+1}^2 \rho_{i+1} - u_i^2 \rho_i}{h} + \frac{p_{i+1} - p_i}{h} \right) - \right. \\ &\quad \left. - u_{i-1/2} S \tau_{i-1/2} \left( \frac{-(u_i^2 \rho_i - u_{i-1}^2 \rho_{i-1})}{h} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{h} \left( \frac{u_{i+1/2} \tau_{i+1/2}}{h} (u_{i+1}^2 \rho_{i+1} - u_i^2 \rho_i + p_{i+1} - p_i) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{u_{i-1/2} \tau_{i-1/2}}{h} (u_i^2 \rho_i - u_{i-1}^2 \rho_{i-1} + p_i - p_{i-1}) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{fvc} :: \text{div}(\text{phiUW}) &= \frac{1}{V} \sum_f \varphi_{uw} = \\
&= \frac{1}{V} \left( \tau_{i+1/2} u_{i+1/2} \left( \rho_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} u_{i+1/2} S + \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{h} S \right) \right) + \\
&+ \tau_{i-1/2} u_{i-1/2} \left( \rho_{i-1/2} \frac{-(u_{i-1} - u_i)}{h} u_{i-1/2} (-S) + \frac{p_i - p_{i-1}}{h} (-S) \right) = \\
&= \frac{1}{h} \left( \tau_{i+1/2} u_{i+1/2} \left( \rho_{i+1/2} u_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \frac{p_{i+1} - p_i}{h} \right) - \right. \\
&\left. - \tau_{i-1/2} u_{i-1/2} \left( \rho_{i-1/2} u_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + \frac{p_i - p_{i-1}}{h} \right) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{fvc} :: \text{div}(\text{phiR}) &= \frac{1}{V} \sum_f \varphi_R = \frac{1}{V} \left( \tau_{i+1/2} u_{i+1/2} \frac{p_{i+1} - p_i}{h} S + \right. \\
&\tau_{i+1/2} S \left( p_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \gamma_{i+1/2} \right) + \tau_{i-1/2} u_{i-1/2} \frac{p_i - p_{i-1}}{h} (-S) + \\
&\left. \tau_{i-1/2} (-S) \left( p_{i-1/2} \frac{u_{i-1} - u_i}{h} (-1) \gamma_{i-1/2} \right) \right) = \frac{1}{h} \left( \tau_{i+1/2} u_{i+1/2} \frac{p_{i+1} - p_i}{h} + \right. \\
&\left. + \tau_{i+1/2} p_{i+1/2} \gamma_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \tau_{i-1/2} u_{i-1/2} \frac{p_i - p_{i-1}}{h} - \tau_{i-1/2} p_{i-1/2} \gamma_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right).
\end{aligned}$$

Разностная схема для уравнения (4.25) в OpenFOAM в 1D-случае совпадает с оригинальной разностной схемой

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}u_i &= \rho_i u_i - \frac{\Delta t}{h} (u_{i+1/2}^2 \rho_{i+1/2} - u_{i-1/2}^2 \rho_{i-1/2}) + \\
&+ \frac{\Delta t}{h} \left( \frac{u_{i+1/2} \tau_{i+1/2}}{h} (u_{i+1}^2 \rho_{i+1} - u_i^2 \rho_i + p_{i+1} - p_i) - \right. \\
&- \left. \frac{u_{i-1/2} \tau_{i-1/2}}{h} (u_i^2 \rho_i - u_{i-1}^2 \rho_{i-1} + p_i - p_{i-1}) \right) + \\
&+ \frac{\Delta t}{h} \left( \tau_{i+1/2} u_{i+1/2}^2 \rho_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \tau_{i+1/2} u_{i+1/2} \frac{p_{i+1} - p_i}{h} - \right. \\
&- \left. \tau_{i-1/2} u_{i-1/2}^2 \rho_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \tau_{i-1/2} u_{i-1/2} \frac{p_i - p_{i-1}}{h} \right) + \\
&+ \frac{\Delta t}{h} \left( \tau_{i+1/2} u_{i+1/2} \frac{p_{i+1} - p_i}{h} + \tau_{i+1/2} p_{i+1/2} \gamma_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \right. \\
&- \left. \tau_{i-1/2} u_{i-1/2} \frac{p_i - p_{i-1}}{h} + \tau_{i-1/2} p_{i-1/2} \gamma_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) - \frac{\Delta t}{h} (p_{i+1/2} - p_{i-1/2}).
\end{aligned}$$

КГД уравнение (4.26) реализуется в OpenFOAM следующим образом

$$\begin{aligned}
&\text{fvM} :: \text{ddt}(\text{rhoE}) + \text{fvc} :: \text{div}(\text{phiE}_p) - \text{fvc} :: \text{div}(\text{phiWE}) + \\
&+ \text{fvc} :: \text{div}(\text{phiQ}) - \text{fvc} :: \text{div}(\text{phiPixxU}) = 0.
\end{aligned}$$

Здесь величина  $E$  из уравнения (4.26) соответствует величине под названием rhoE (стандарт, принятый в OpenFOAM) в рамках уравнений Эйлера. Поэтому диссипативные коэффициенты выписываются в виде

$$\varphi_{E_p} = \rho_f H_f(\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f) = \rho_f (\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f) \left( \frac{\mathbf{u}_f^2}{2} + u_{\varepsilon f} + \frac{p_f}{\rho_f} \right),$$

$$\varphi_{\omega E} = \varphi_{\rho \omega} \left( \frac{\mathbf{u}_f^2}{2} + u_{\varepsilon f} + \frac{p_f}{\rho_f} \right),$$

$$\varphi_Q = -\tau_f \rho_f \left( \mathbf{u}_f \cdot \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}_f} \cdot \mathbf{n}_f \right) - p_f \mathbf{u}_f \cdot \left( \frac{\partial(1/\rho)}{\partial \mathbf{n}_f} \cdot \mathbf{n}_f \right) \right) (\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f),$$



$$\begin{aligned}
\varphi_{\Pi_{xx}u} &= \tau_f ((\rho_f \mathbf{u}_f \cdot (\nabla \otimes \mathbf{u})_f + (\nabla p)_f) \cdot \mathbf{u}_f) (\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f) + \\
&+ \tau_f (\mathbf{u}_f \cdot (\nabla p)_f) (\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f) + \tau_f \gamma_f p_f (\nabla \cdot \mathbf{u})_f (\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f) = \\
&= \tau_f \left( \rho_f \left( \mathbf{u}_f \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_f} \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \cdot \mathbf{n}_f \right) \right) + \left( \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_f} \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{u}_f \right) \right) (\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f) + \\
&+ \tau_f \left( \mathbf{u}_f \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_f} \mathbf{n}_f \right) \right) (\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f) + \tau_f \gamma_f p_f \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_f} \cdot \mathbf{n}_f \right) (\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{fvc} :: \text{div}(\text{phiEp}) &= \frac{1}{V} \sum_f \varphi_{Ep} = \\
&= \frac{1}{V} \left( u_{i+1/2} S(\rho_{i+1/2}(u_{\varepsilon i+1/2} + u_{i+1/2}^2/2) + p_{i+1/2}) - \right. \\
&\quad \left. - u_{i-1/2} S(\rho_{i-1/2}(u_{\varepsilon i-1/2} + u_{i-1/2}^2/2) + p_{i-1/2}) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{fvc} :: \text{div}(\text{phiWE}) &= \frac{1}{V} \sum_f \varphi_{wE} = \\
&= \frac{1}{V} \left( \left( \frac{u_{i+1}^2 \rho_{i+1} - u_i^2 \rho_i^2}{h} S \tau_{i+1/2} + \frac{p_{i+1} - p_i}{h} S \tau_{i+1/2} \right) \left( u_{\varepsilon i+1/2} + \frac{u_{i+1/2}^2}{2} + \frac{p_{i+1/2}}{\rho_{i+1/2}} \right) \right) \\
&+ \left( \frac{u_{i-1}^2 \rho_{i-1} - u_i^2 \rho_i}{h} S \tau_{i-1/2} + \frac{p_i - p_{i-1}}{h} (-S) \tau_{i-1/2} \right) \left( u_{\varepsilon i-1/2} + \frac{u_{i-1/2}^2}{2} + \frac{p_{i-1/2}}{\rho_{i-1/2}} \right) \\
&= \frac{1}{h} \left( \frac{\tau_{i+1/2}}{h} (u_{i+1}^2 \rho_{i+1} - u_i^2 \rho_i + p_{i+1} - p_i) \left( u_{\varepsilon i+1/2} + \frac{u_{i+1/2}^2}{2} + \frac{p_{i+1/2}}{\rho_{i+1/2}} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\tau_{i-1/2}}{h} (u_i^2 \rho_i - u_{i-1}^2 \rho_{i-1} + p_i - p_{i-1}) \left( u_{\varepsilon i-1/2} + \frac{u_{i-1/2}^2}{2} + \frac{p_{i-1/2}}{\rho_{i-1/2}} \right) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{fvc} :: \text{div}(\text{phiQ}) &= \frac{1}{V} \sum_f \varphi_q = \\
&= -\frac{1}{V} \left( \frac{\tau_{i+1/2} \rho_{i+1/2} u_{i+1/2}^2}{\gamma_{i+1/2} - 1} \frac{p_{i+1}/\rho_{i+1} - p_i/\rho_i}{h} S + \right. \\
&+ p_{i+1/2} u_{i+1/2}^2 \frac{1/\rho_{i+1} - 1/\rho_i}{h} S \tau_{i+1/2} \rho_{i+1/2} + \\
&\left. + \frac{\tau_{i-1/2} \rho_{i-1/2} u_{i-1/2}^2}{\gamma_{i-1/2} - 1} \frac{p_{i-1}/\rho_{i-1} - p_i/\rho_i}{h} S + p_{i-1/2} u_{i-1/2}^2 \frac{1/\rho_{i-1} - 1/\rho_i}{h} S \tau_{i-1/2} \rho_{i-1/2} \right) = \\
&= -\frac{1}{h} \left( \frac{\tau_{i+1/2} \rho_{i+1/2} u_{i+1/2}^2}{(\gamma_{i+1/2} - 1)h} \left( \frac{p_{i+1}}{\rho_{i+1}} - \frac{p_i}{\rho_i} \right) + \frac{p_{i+1/2} u_{i+1/2}^2 \tau_{i+1/2} \rho_{i+1/2}}{h} \left( \frac{1}{\rho_{i+1}} - \frac{1}{\rho_i} \right) - \right. \\
&\left. - \frac{\tau_{i-1/2} \rho_{i-1/2} u_{i-1/2}^2}{(\gamma_{i-1/2} - 1)h} \left( \frac{p_i}{\rho_i} - \frac{p_{i-1}}{\rho_{i-1}} \right) + \frac{p_{i-1/2} u_{i-1/2}^2 \tau_{i-1/2} \rho_{i-1/2}}{h} \left( \frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\rho_{i-1}} \right) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{fvc} :: \text{div}(\text{phiPixxU}) &= \frac{1}{V} \sum_f \varphi_{\Pi_{xx}u} = \\
&= \frac{1}{V} \left( \left( \tau_{i+1/2} \left( \rho_{i+1/2} u_{i+1/2}^2 \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + u_{i+1/2} \frac{p_{i+1} - p_i}{h} \right) + \tau_{i+1/2} u_{i+1/2} \frac{p_{i+1} - p_i}{h} \right) \right. \\
&u_{i+1/2} S + \left( \tau_{i-1/2} \left( \rho_{i-1/2} u_{i-1/2}^2 \frac{u_{i-1} - u_i}{h} (-1) + u_{i-1/2} \frac{p_i - p_{i-1}}{h} \right) + \right. \\
&\left. + \tau_{i-1/2} u_{i-1/2} \frac{p_i - p_{i-1}}{h} \right) u_{i-1/2} (-S) \left. \right) + \frac{1}{V} \left( p_{i+1/2} \tau_{i+1/2} \gamma_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} u_{i+1/2} S + \right. \\
&\left. + p_{i-1/2} \tau_{i-1/2} \gamma_{i-1/2} \frac{u_{i-1} - u_i}{h} u_{i-1/2} S \right) = \frac{1}{h} \left( u_{i+1/2} \tau_{i+1/2} \left( \rho_{i+1/2} u_{i+1/2}^2 \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \right. \right. \\
&\left. + 2u_{i+1/2} \frac{p_{i+1} - p_i}{h} \right) - u_{i-1/2} \tau_{i-1/2} \left( \rho_{i-1/2} u_{i-1/2}^2 \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + 2u_{i-1/2} \frac{p_i - p_{i-1}}{h} \right) \left. \right) + \\
&+ \frac{1}{h} \left( p_{i+1/2} \tau_{i+1/2} \gamma_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} u_{i+1/2} - p_{i-1/2} \tau_{i-1/2} \gamma_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} u_{i-1/2} \right).
\end{aligned}$$

Легко удостовериться, что разностная схема для уравнения (4.26) в OpenFOAM в 1D-случае совпадает с оригинальной разностной схемой.

### 4.3 1D – тесты для характерных газодинамических течений

В качестве тестов решателя QGDFoam рассматриваются задачи Римана о распаде разрывов, собранных в [76], [77], [23]. Эти тесты отражают характерные особенности нестационарных газодинамических течений с ударными волнами и решаются в рамках уравнений Эйлера. Поэтому диссипативные коэффициенты выписываются в виде

$$\tau = \alpha \frac{h_x}{c_s}, \mu = p \tau Sc, \kappa = \frac{p \tau Sc}{Pr} \quad (4.31)$$

и рассматриваются как коэффициенты искусственной диссипации, где  $c_s$  – скорость звука,  $Sc$  – число Шмидта,  $Pr$  – число Прандтля.

Начальные данные к задачам о распаде разрывов приведены в Таблице 4.1. Значения газодинамических величин слева от разрыва обозначены индексом L, справа – индексом R. Моменты времени, для которого построены графики, указан в Таблице 4.1 как  $t_{fin}$ . Задачи решаются на интервале  $(-0.5, 0.5)$ . Разрыв расположен в точке  $x = 0$ . Для сравнения на всех рисунках с задачами о распаде разрывов приведено автомодельное решение (см. [83]).

Граничные условия соответствуют начальным условиям на границе области. Во всех тестах  $\gamma = 1.4$ , кроме теста 3, где  $\gamma = 5/3$ .

Было проведено сравнение результатов расчетов характерных тестов с помощью решателей QGDFoam и rhoCentralFoam. Все тесты можно посчитать с параметром  $\alpha$ , равным 0.4 и численными коэффициентами  $Sc = Pr = 1$ . Параметры, характеризующие улучшение решателей QGDFoam и rhoCentralFoam, зафиксированы в описании конкретных тестов. Решатели QGDFoam и rhoCentralFoam используют постоянное число Куранта  $C_0$  и переменный шаг по времени.

В OpenFOAM задачи решаются в размерной области. Размерный вид характеризуется следующими величинами:  $L = 1$  м,  $c_v = 1.0$  J/(Kg K),  $R/\mu =$

$0.4 J/(Kg K)$ , где  $\mu = 20785$  – молекулярная масса. Выражение  $c_p = \frac{\gamma R/\mu}{\gamma - 1} J/(Kg K)$  используется для получения значения  $\gamma$ . Для  $\gamma = 1.4$   $c_p = 1.4 J/(Kg K)$ , для  $\gamma = 5/3$   $c_p = 1.0 J/(Kg K)$ . Далее размерность величин не будет указываться, но все величины считаются размерными – шаги сетки вычисляются в метрах, время – в секундах.

Шаг по времени вычисляется в соответствии с условием Куранта

$$\Delta t \leq C_0 \frac{h_x}{|\mathbf{u}| + c}, \quad (4.32)$$

где  $c = \sqrt{\gamma RT}$  – скорость звука, вычисляющаяся в OpenFOAM через  $\psi = (RT)^{-1}$  как  $c = \sqrt{\gamma/\psi}$ .

Одномерные задачи, являющиеся в OpenFOAM формально 3D, были протестированы с помощью решателя QGDFoam, написанного в рамках ранее встроенного решателя для моделирования вязких сжимаемых течений.

Тест	$\rho_L$	$u_L$	$p_L$	$\rho_R$	$u_R$	$p_R$	$t_{fin}$
1	1	0.75	1	0.125	0	0.1	0.2
2	1	-2	0.4	1	2	0.4	0.15
3 Нох	1	1	$10^{-6}$	1	-1	$10^{-6}$	1
3а	1	-19.59745	1000	1	-19.59745	0.01	0.012
4	5.99924	19.5975	460.894	5.99924	-6.19633	46.095	0.035
5	1.4	0	1	1	0	1	2
6	1.4	0.1	1	1	0.1	1	2
7	0.1261192	8.9047029	782.92899	6.591493	2.2654207	3.1544874	0.0039

Таблица 4.1. Начальные условия для задач Римана.

**Тест 1.** Тест представляет собой вариант задачи о распаде разрыва. В образующемся течении имеются все характерные особенности сверхзвукового течения – звуковые точки на границах волны разрежения, контактный разрыв и ударная волны. На Рис. 4.4 приведен результат расчета плотности для пространственной сетки с шагом  $h_x = 0.0025$ . Число Куранта в rhoCentralFoam  $C_0 = 0.1$ , в QGDFoam  $C_0 = 0.4$ . Наилучшее решение в QGDFoam достигается при выборе  $\alpha = 0.2$  и  $Sc = 1.0$ . Для rhoCentralFoam использовалась стандарт-

ная интерполяция vanLeer.

**Тест 2.** Здесь течение представляет собой две волны разрежения, разбегающиеся от центра области. Сложность численного решения этой задачи обусловлена тем, что плотность, скорость и давление в центре очень малы (между разбегающимися потоками), но внутренняя энергия  $u_\varepsilon = p/(\rho(\gamma - 1))$  к нулю не стремится. В этой задаче никакая разностная схема в переменных Эйлера не описывает поведение внутренней энергии с высокой точностью.

На Рис. 4.4 справа приведен расчет внутренней энергии для пространственной сетки с шагом  $h_x = 0.0003125$ . Число Куранта в rhoCentralFoam  $C_0 = 0.025$ , в QGDFoam  $0 = 0.1$ . Для решателя QGDFoam минимальный энтропийный след достигался при  $\alpha = 0.3$  и  $Sc = Pr = 1.0$ . При этом на Рис. 4.4 представлен результат, в котором в начальный момент скорость на разрыве в двух точках полагалась равной 0. Также этот нефизический максимум может быть сглажен с помощью варьирования числа Прандтля  $Pr = 0.001$ . В решателе rhoCentralFoam в словаре fvSchemes использовался параметр Minmod, и также в начальный момент времени скорость на разрыве в двух точках полагалась равной 0.

**Тест 3. Задача Ноха.** Течение представляет собой столкновение двух гиперзвуковых потоков холодного плотного газа, которое приводит к образованию двух расходящихся "бесконечно сильных" ударных волн, между которыми остается неподвижный газ с постоянными плотностью и давлением. Оценки числа Маха в ударной волне составляют  $Ma = u_L/c = 775$ , что значительно выше земных условий. В решении rhoCentralFoam вблизи точки  $x = 0$  появляется энтропийный след. В решении QGDFoam энтропийный след менее заметен, дополнительная КГД диссипация (члены с  $\tau$  – слагаемыми) в центре расчетной области обращается в 0 (скорость течения равна нулю, давление газа постоянно).

На Рис. 4.5 приведен расчет плотности для пространственной сетки с шагом

$h_x = 0.005$ . Число Куранта в rhoCentralFoam  $C_0 = 0.2$ , в QGDFoam  $C_0 = 0.001$ . Оптимальным был выбран параметр  $\alpha = 0.3$ . В решателе rhoCentralFoam в словаре fvSchemes использовался параметр Minmod.

**Тест 3а.** В данной задаче рассматривается газодинамическое течение с сжатием газа, в котором перепад давления  $p_L/p_R$  составляет  $10^5$ .

На Рис. 4.5 справа приведен расчет плотности для пространственной сетки с шагом  $h_x = 0.0008$ . Число Куранта в rhoCentralFoam и в QGDFoam составляет  $C_0 = 0.01$ . В решателе QGDFoam параметр  $\alpha = 0.4$ ,  $Sc = Pr = 1$ . Для rhoCentralFoam использовалась стандартная интерполяция vanLeer.

**Тест 4.** Здесь рассматривается течение газа в виде двух расходящихся по газу ударных волн, между которыми располагается движущийся разрыв. Для этой задачи характерно малое время протекания рассматриваемого процесса.

На Рис. 4.6 приведен расчет плотности для пространственной сетки с шагом  $h_x = 0.003$ . Число Куранта в rhoCentralFoam  $C_0 = 0.2$ , в QGDFoam  $C_0 = 0.1$ . В решателе QGDFoam  $\alpha = 0.3$ ,  $Sc = 0.1$ , для rhoCentralFoam использовалась стандартная интерполяция vanLeer.

#### **Тест 5. Неподвижный контактный разрыв.**

На Рис. 4.6 справа приведен расчет плотности для пространственной сетки с шагом  $h_x = 0.01$ . Число Куранта в rhoCentralFoam  $C_0 = 0.2$ , в QGDFoam  $C_0 = 0.1$ . При отключении вязкости и теплопроводности ( $Sc = 0$ ), КГД алгоритм дает ширину контактного разрыва в один шаг сетки. КГД диссипация стабилизирует неподвижный контактный разрыв, вязкость типа Навье–Стокса его размывает. При отключении всей вязкости ( $\tau = 0$ ) решение оказывается абсолютно неустойчивым. Параметр регуляризации выбирается равным  $\alpha = 0.4$ . Для rhoCentralFoam использовалась стандартная интерполяция vanLeer.

#### **Тест 6. Медленно движущийся контактный разрыв.**

На Рис. 4.7 приведен расчет плотности для пространственной сетки с шагом

$h_x = 0.01$ . Число Куранта в rhoCentralFoam  $C_0 = 0.2$ , в QGDFoam  $C_0 = 0.1$ . В случае уменьшения искусственной вязкости и теплопроводности ( $Sc = 0.1$ ) в QGDFoam получается более точное численное решение, которое лучше соотносится с решением rhoCentralFoam. Параметр регуляризации выбирается равным  $\alpha = 0.5$ . Для rhoCentralFoam использовалась стандартная интерполяция vanLeer.

### Тест 7. Задача, известная как "Peak"problem.

На Рис. 4.7 справа приведен расчет плотности для пространственной сетки с шагом  $h_x = 0.00005$ . Число Куранта в rhoCentralFoam равно  $C_0 = 0.3$ , а для QGDFoam  $C_0 = 0.05$ . Для QGDFoam  $\alpha = 0.4$  и  $Sc = 1.0$ , для rhoCentralFoam использовалась интерполяция upwind.

Для задач о распаде разрывов в Таблице 4.2 приведены значения погрешностей величин, посчитанных в норме  $L_1$  как

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_N |a_{\text{exact}} - a_{\text{numerical}}|, \quad (4.33)$$

где  $a_{\text{exact}}$  – значение газодинамической величины, соответствующей автомодельному решению,  $a_{\text{numerical}}$  – значение газодинамической величины, посчитанной решателем rhoCentralFoam или QGDFoam. В тестах 1, 3, 3а, 5, 6, 7 в качестве величины  $a$  берется плотность  $\rho$ , в тестах 2 и 4 – внутренняя энергия  $u_\varepsilon$ .

Решатель, № теста	Тест 1	Тест 2	Тест 3	Тест 3а	Тест 4	Тест 5	Тест 6	Тест 7
rhoCentralFoam	0.0024	0.2726	0.0287	0.6935	1.3929	0.0103	0.0103	0.0532
QGDFoam	0.0065	0.2909	0.0368	0.6849	3.6953	0.0021	0.0116	0.0775

Таблица 4.2. Погрешности в норме  $L_1$

**Тест 8. "Blast" задача.** В качестве последнего теста рассматривается задача Вудворда – Колелла о взаимодействии двух разрывов ( Woodward–Collela

blast wave problem, см. в [76], [77], [23], [35], [44]). Этот тест часто выбирают в качестве тестов для алгоритмов решения уравнений Эйлера на сетках, динамически адаптирующихся к решению. Данная задача представляет собой задачу о взаимодействии двух волн, образующихся в результате распада двух разрывов типа Римана ([23], [35]). Для этой задачи нет автомодельного решения. Задача также решается на интервале  $(-0.5, 0.5)$ . В начальный момент задаются разрывы в точках  $x_1 = -0.4$  и  $x_2 = 0.4$ . Во всей расчетной области задается плотность  $\rho = 1.0$  и скорость  $u = 0.0$ . Начальные значения давления в трех соответствующих областях (левой  $p_l$ , средней  $p_m$  и правой  $p_r$ ) равны  $(p_l, p_m, p_r) = (1000, 0.01, 100)$ . В качестве граничных условий ставятся условия отражения вида

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \frac{\partial p}{\partial x} = 0, u = 0. \quad (4.34)$$

Расчет ведется до времени  $t_{fin} = 0.038$ . В этой задаче  $\gamma = 1.4$ .

На Рис. 4.8 приведен расчет плотности для пространственной сетки с шагом  $h_x = 0.0003125$ . Число Куранта в rhoCentralFoam  $C_0 = 0.2$ , у QGDFoam  $C_0 = 0.4$ . Для QGDFoam  $\alpha = 0.3$  и  $Sc = 0.1$ ,  $Pr = 1.0$ , для rhoCentralFoam использовалась интерполяция Minmod.

Сравнение двух решателей QGDFoam и rhoCentralFoam – первое сравнение КГД алгоритма с численным методом, встроенным в программный пакет OpenFoam. Сопоставление погрешностей численного решения, представленное в Таблице 4.2, показывает, что для всех тестов значения погрешностей для обоих методов близки между собой, при этом в ряде тестов у rhoCentralFoam погрешность больше (тесты 3а, 5), а в других тестах больше погрешность у QGDFoam. У обоих решателей значения чисел Куранта  $C_0$  близки между собой (одного порядка), кроме тестов 3а и 7. В тесте 3 число Куранта у решателя QGDFoam в 200 раз меньше, чем у rhoCentralFoam, в тесте 7 – в 6 раз меньше. В те-



стах 1 и 2 число Куранта у решателя QGDFoam превышает число Куранта у rhoCentralFoam в 4 раза. В тесте 3а числа Куранта совпадают для обоих решателей. В тестах 4, 5, 6 и 8 числа Куранта отличаются в 2 раза. В тесте 5 решение QGDFoam совпадает с аналитическим решением. Тем не менее, дополнительная настройка решателей QGDFoam и rhoCentralFoam может принести усовершенствование численных решений (например, варьирование чисел  $Sc$  и  $Pr$  у QGDFoam и изменение схемных интерполяций у rhoCentralFoam).

Сопоставление времени счета для приведенных примеров показывает, что время численного расчета задач решателем QGDFoam на 20 – 30% меньше, чем время расчета задач, посчитанных с помощью решателя rhoCentralFoam.

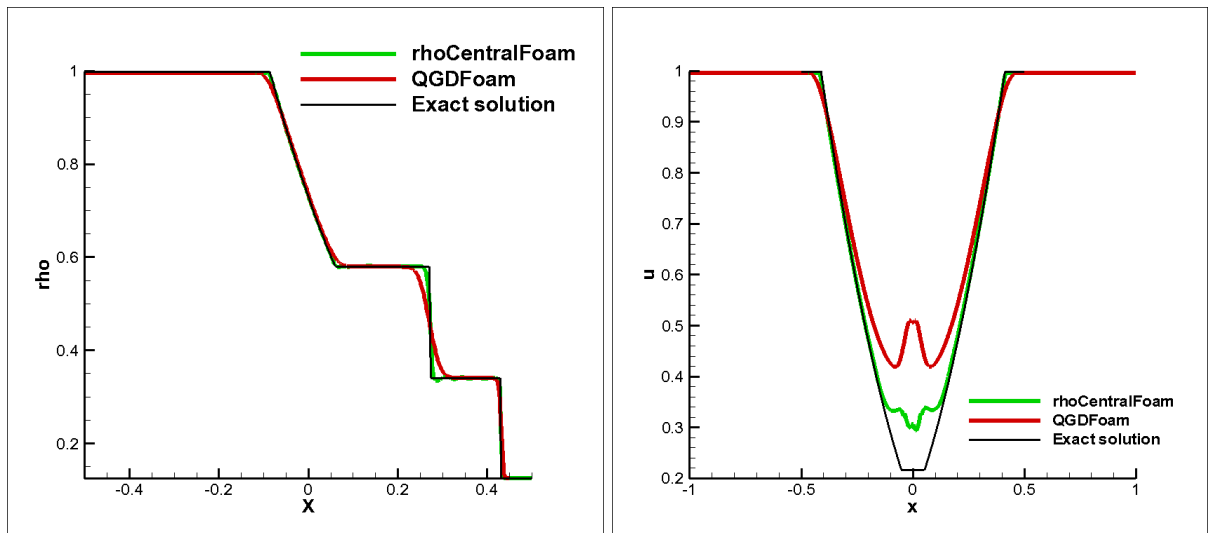
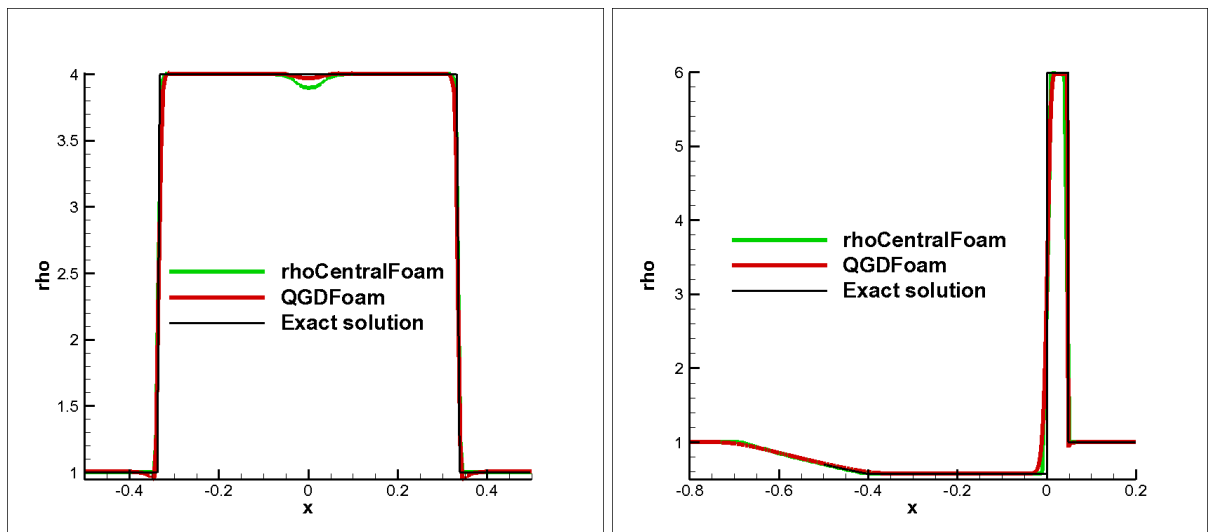
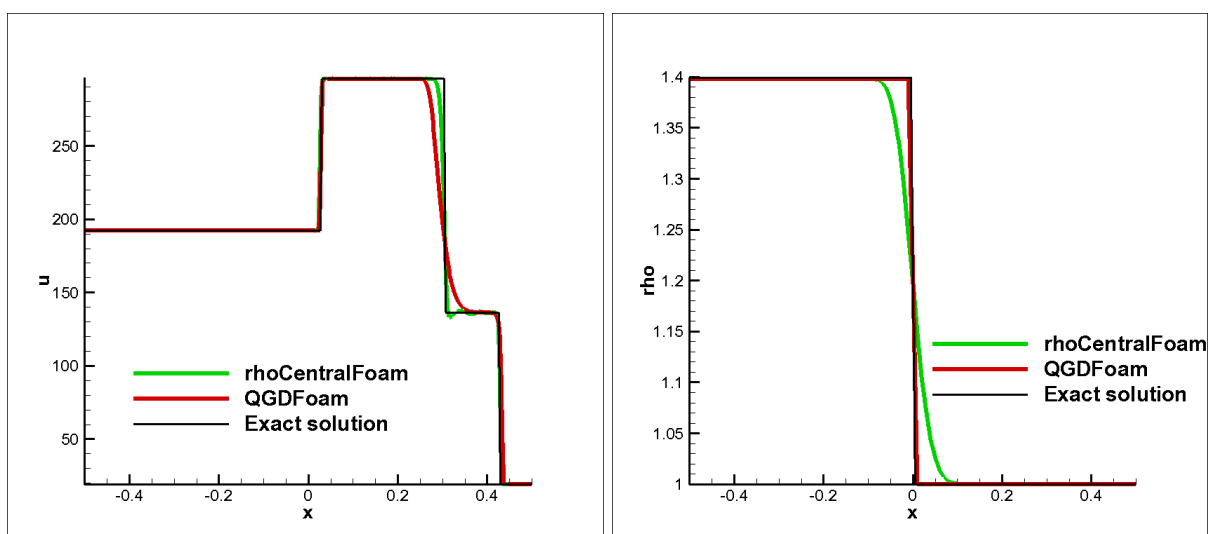
Данное сравнение показывает высокую конкурентоспособность КГД алгоритма и превосходство в ряде случаев.

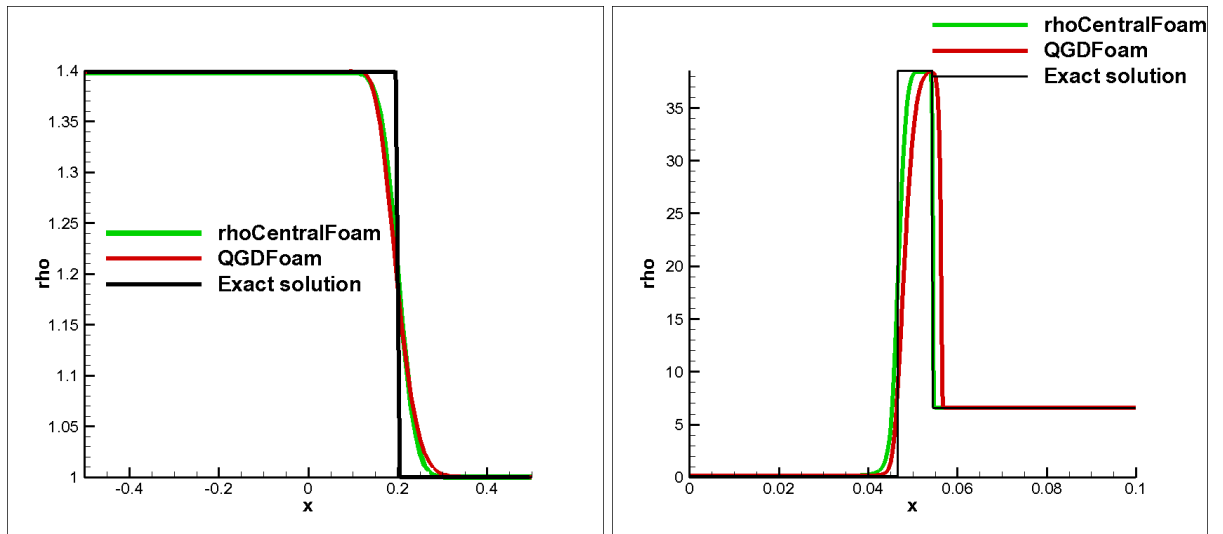
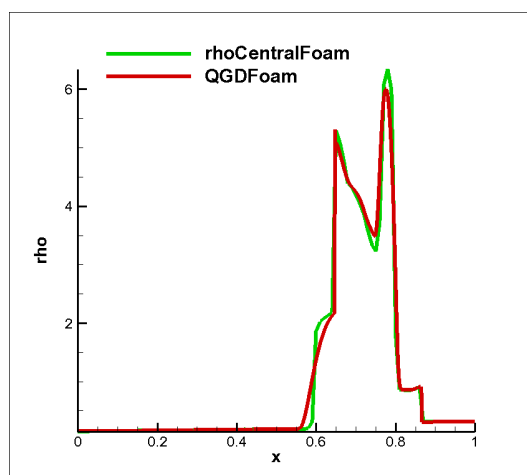
#### 4.4 Выводы

Проведено включение КГД алгоритма в открытый программный комплекс OpenFOAM, результатом которого является создание нового вычислительного ядра — решателя QGDFoam. Исходные и дальнейшие 3D-версии решателя QGDFoam находятся в открытом доступе для скачивания в интернет-архиве исходных кодов GitHub: <http://github.com/unicfdlab/QGDSolver/>.

Проведено сравнение решателей QGDFoam и rhoCentralFoam на примере системы одномерных тестов и показано, что QGDFoam позволяет проводить численное моделирование широкого круга прикладных задач.

Использование библиотеки OpenFOAM в качестве платформы для программной реализации КГД алгоритма позволяет упростить применение параллельной версии кода, расширить область применения КГД системы уравнений с помощью сопряжения их аппроксимации с различными стандартными модулями библиотеки OpenFOAM и упростить разработку новых моделей сплошных сред.

Рис. 4.4. Тесты 1, 2. Распределение плотности  $\rho$  и внутренней энергии  $u_\varepsilon$ Рис. 4.5. Тест 3, 3а. Распределения плотности  $\rho$ Рис. 4.6. Тесты 4, 5. Распределение внутренней энергии  $u_\varepsilon$  и плотности  $\rho$

Рис. 4.7. Тесты 6, 7. Распределения плотности  $\rho$ Рис. 4.8. Тест 8. Распределение плотности  $\rho$

# Заключение

## Основные результаты диссертационной работы:

1. Построена математическая модель, описывающая нелинейный процесс формирования незатухающей уединенной волны в рамках приближения мелкой воды с использованием КГД алгоритма. Впервые на основе КГД алгоритма в численном эксперименте получена уединенная бегущая волна. Анализ задачи показал соответствие между результатами численного моделирования, данными натуральных экспериментов и результатами аналитических исследований задачи об уединенной волне.

2. Впервые построена математическая модель спирально-вихревых структур во вращающемся газовом аккреционном диске в рамках баротропных уравнений Эйлера с применением КГД подхода и использованием уточненных начальных условий. Впервые проведено численное моделирование отстающих рукавов повышенной плотности в рамках программы, использующей КГД алгоритм в полярной системе координат. В результате выявлен процесс раздвоения рукавов плотности и перенос углового момента.

3. В рамках открытого программного комплекса OpenFOAM создано новое вычислительное ядро на основе КГД алгоритма (QGDFoam), доступное внешним пользователям. Для этого КГД алгоритм переписан в терминах, принятых в указанном программном комплексе и адаптирован к заложенным в нем требованиям. В рамках программного комплекса проведено сравнение решателей QGDFoam и rhoCentralFoam на примере системы одномерных тестов и пока-

зано, что QGDFoam позволяет проводить численное моделирование широкого круга прикладных задач.

**Перспективы** дальнейшей работы включают в себя несколько направлений: численное моделирование формирования одиночных волно–ветровых солитонов при их исследованиях на других волно–ветровых каналах; изучение гидродинамических моделей эволюции околозвездных газовых облаков и возможностей формирования планет при развитии многорукавной структуры газовых дисков; включение многомерных вариантов КГД алгоритма в открытый комплекс OpenFOAM и решение на его основе научных и практических задач, предусмотренных планами ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

# Приложение. КГД система уравнений МВ с магнитным полем

Приближение МВ с магнитным полем интересно в некоторых задачах астрофизики [79], [69], [68], [67], [59], [60], [61], [62], [84], [85]. В работе [79] в задаче о сохранении тороидального магнитного поля в солнечном тахоклине сравниваются полная система уравнений магнитной гидродинамики с уравнениями магнитной гидродинамики в приближении МВ. С помощью приближения МВ в [79] впервые были описаны глобальные неустойчивости в солнечном тахоклине, несмотря на то, что данная модель не описывает, например, неустойчивость плавучести. Также глобальные неустойчивости в солнечном тахоклине с помощью приближения мелкой воды исследуются в [68], [67], [60], [59], [61], [62]. В работе [69] впервые поставлен лабораторный эксперимент, основанный на гидравлических скачках для изучения модели, соответствующей в земных условиях процессу зарождения нейтронных звезд. В работе [81] основные свойства магнитной гидродинамической системы уравнений МВ выводятся из гиперболических законов сохранения. С помощью магнитной гидродинамической системы уравнений МВ исследуются решения Рэнкина–Гюгонио. В настоящее время наиболее широкое применение система магнитных гидродинамических уравнений МВ нашла в исследовании внутренних солнечных звездных слоев.

Распространение КГД алгоритма на задачи газовой магнитной гидродинамики впервые было сделано в работах [18] и [19] для одномерного и многомерного случаев.

## П.1 КГД уравнения МВ с магнитным полем. 1D – случай

Классические уравнения МВ с магнитным полем в одномерном случае имеют следующий вид [80]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu_x)}{\partial x} = 0, \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial(hu_x)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hu_x^2 - hB_x^2 + \frac{gh^2}{2}\right)}{\partial x} = -gh\frac{\partial b}{\partial x}, \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial(hu_y)}{\partial t} + \frac{\partial(hu_xu_y - hB_xB_y)}{\partial x} = 0, \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial(hB_x)}{\partial t} = 0, \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial(hB_y)}{\partial t} + \frac{\partial(hB_yu_x - hB_xu_y)}{\partial x} = 0, \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial(hB_x)}{\partial x} = 0, \quad (4.40)$$

где  $h(x, t)$  – высота жидкости,  $u_x(x, t)$ ,  $u_y(x, t)$  – компоненты вектора скорости,  $B_x(x, t)$ ,  $B_y(x, t)$  – продольная и поперечная компоненты магнитного поля,  $b(x)$  – профиль дна. Отметим, что в используемой системе уравнений МВ с магнитным полем (4.35) – (4.40) в 1D-случае присутствует вторая компонента скорости, которая зависит только от  $x$  и не зависит от  $y$ .

Для вывода КГД уравнений МВ с магнитным полем применяется стандартный метод осреднения

$$(f(x, t))^* = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(x, t') dt' = f(x, t^*) = f(x, t) + \tau \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}, \quad (4.41)$$

где  $t \leq t^* \leq t + \Delta t$ ,  $0 \leq \tau \leq \Delta t$ .

Осредняя систему (4.35)–(4.40) с помощью алгоритма (4.41), получаем сле-

дующую систему

$$\frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{\partial(hu_x)^*}{\partial x} = 0, \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial(hu_x)^*}{\partial t} + \frac{\partial\left(hu_x^2 - hB_x^2 + \frac{gh^2}{2}\right)^*}{\partial x} = -gh^* \frac{\partial b^*}{\partial x}, \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial(hu_y)^*}{\partial t} + \frac{\partial(hu_x u_y - hB_x B_y)^*}{\partial x} = 0, \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial(hB_x)^*}{\partial t} = 0, \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial(hB_y)^*}{\partial t} + \frac{\partial(hB_y u_x - hB_x u_y)^*}{\partial x} = 0, \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial(hB_x)^*}{\partial x} = 0, \quad (4.47)$$

в которой основные гидродинамические величины в соответствии с (4.41) имеют вид

$$\begin{aligned} h^* &= h + \tau \frac{\partial h}{\partial t}, \\ u_x^* &= u_x + \tau \frac{\partial u_x}{\partial t}, \\ u_y^* &= u_y + \tau \frac{\partial u_y}{\partial t}, \\ B_x^* &= B_x + \tau \frac{\partial B_x}{\partial t}, \\ B_y^* &= B_y + \tau \frac{\partial B_y}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

При выводе КГД уравнений все производные по времени остаются без изменений. Используя выражение (4.41) для остальных величин  $(\ )^*$ , преобразуем систему (4.42)–(4.47).

Для уравнения (4.42) имеем соотношение

$$(hu_x)^* = hu_x + \tau \frac{\partial(hu_x)}{\partial t} = hu_x - hw_x = j_{mx}, \quad (4.49)$$

где введены обозначения для осредненного потока массы  $j_{mx}$  и добавки  $w_x$

$$j_{mx} = h(u_x - w_x), w_x = \frac{\tau}{h} \left( gh \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial(hu_x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(hB_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gh^2}{2} \right) \right). \quad (4.50)$$



Для уравнения (4.43) получим следующие выражения

$$(hu_x^2)^* = (hu_x)^* u_x^* = j_{mx}(u_x + \Delta u_x) = j_{mx}u_x + hu_x \Delta u_x, \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} (hB_x^2)^* &= (hB_x)^* B_x^* = (hB_x + \Delta(hB_x))(B_x + \Delta B_x) = \\ &= hB_x^2 + \tau B_x^2 \frac{\partial(hu_x)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \Delta u_x &= \tau \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\tau \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{h} \frac{\partial(hB_x^2)}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gh^2}{2} \right) + g \frac{\partial b}{\partial x} \right), \\ \Delta(hB_x) &= \tau \frac{\partial(hB_x)}{\partial t} = 0, \quad \Delta B_x = \tau \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\tau}{h} B_x \frac{\partial(hu_x)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Давление преобразуется следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gh^2}{2} \right)^* = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{g}{2} (h + \Delta h)^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gh^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau gh \frac{\partial(hu_x)}{\partial x} \right), \quad (4.53)$$

$$\text{где } \Delta h = \tau \frac{\partial h}{\partial t} = -\tau \frac{\partial hu_x}{\partial x}.$$

Рельеф дна со временем не меняется ( $b^* = b$ ), поэтому

$$gh^* \frac{\partial b^*}{\partial x} = g(h + \Delta h) \frac{\partial b}{\partial x} = gh \frac{\partial b}{\partial x} - g\tau \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial(hu_x)}{\partial x}. \quad (4.54)$$

Для уравнения (4.44) имеем соотношения

$$(hu_y)^* = hu_y + \tau \frac{\partial(hu_y)}{\partial t} = hu_y - hw_y = j_{my}, \quad (4.55)$$

$$(hu_x u_y)^* = (hu_y)^* u_x^* = j_{my} u_x + hu_y \Delta u_x, \quad (4.56)$$

где введены обозначения для осредненного потока массы  $j_{my}$  и добавки  $w_y$

$$j_{my} = h(u_y - w_y), \quad w_y = -\frac{\tau}{h} \frac{\partial(hB_x B_y - hu_x u_y)}{\partial x}. \quad (4.57)$$

Далее

$$(hB_x B_y)^* = (hB_x)^* B_y^* = hB_x B_y + hB_x \Delta B_y, \quad (4.58)$$

$$\text{где } \Delta B_y = \tau \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\tau}{h} \left( B_y \frac{\partial(hu_x)}{\partial x} - \frac{\partial(hB_y u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(hB_x u_y)}{\partial x} \right).$$

Уравнение (4.45) сохраняет свой вид, но без знака  $(\ )^*$ .

Для уравнения (4.46) имеем соотношения

$$(hB_y u_x)^* = (hu_x)^* B_y^* = j_{mx} B_y + hu_x \Delta B_y, \quad (4.59)$$

$$(hu_y B_x)^* = (hu_y)^* B_x^* = j_{my} B_x + hu_y \Delta B_x. \quad (4.60)$$

Уравнение (4.47), как и уравнение (4.45), сохраняет свой вид (без знака  $(\ )^*$ ).

Отсюда следует, что  $hB_x = \text{const}$ .

Из системы (4.35)–(4.40) с учетом всех преобразований и обозначений (4.48)–(4.60) получаем КГД систему уравнений МВ с магнитным полем, профилем дна  $b(x)$  и тензором вязких напряжений Навье–Стокса

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx}}{\partial x} = 0, \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(hu_x)}{\partial t} + \frac{\partial(j_{mx}u_x)}{\partial x} - \frac{\partial(hB_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gh^2}{2} \right) = -gh \frac{\partial b}{\partial x} + g\tau \frac{\partial(hu_x)}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau hu_x \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{h} \frac{\partial(hB_x^2)}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gh^2}{2} \right) + g \frac{\partial b}{\partial x} \right) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau B_x^2 \frac{\partial(hu_x)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau gh \frac{\partial(hu_x)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(hu_y)}{\partial t} + \frac{\partial(j_{my}u_x)}{\partial x} - \frac{\partial(hB_xB_y)}{\partial x} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau B_x \left( B_y \frac{\partial(hu_x)}{\partial x} - \frac{\partial(hB_yu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(hB_xu_y)}{\partial x} \right) \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau hu_y \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{h} \frac{\partial(hB_x^2)}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gh^2}{2} \right) + g \frac{\partial b}{\partial x} \right) \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \tag{4.63}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial(hB_x)}{\partial t} = 0, \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(hB_y)}{\partial t} + \frac{\partial(j_{mx}B_y)}{\partial x} - \frac{\partial(j_{my}B_x)}{\partial x} = \\
& = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \tau u_x \left( B_y \frac{\partial(hu_x)}{\partial x} - \frac{\partial(hB_yu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(hB_xu_y)}{\partial x} \right) \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau u_y B_x \frac{\partial(hu_x)}{\partial x} \right), \tag{4.65}
\end{aligned}$$

где слагаемые с множителем  $\mu = \tau p = \tau \frac{gh^2}{2}$ , соответствующие тензору Навье–Стокса, являются компонентами естественной физической вязкости.

Уравнение (4.47)  $hB_x = \text{const}$  переопределяет систему.

Следует заметить, что если положить  $\tau = 0$ , то полученная КГД система уравнений МВ с магнитным полем (4.42)–(4.47), или (4.61)–(4.65), превратится в исходную классическую систему уравнений МВ с магнитным полем (4.35)–(4.40).

Численный алгоритм для уравнений МВ с магнитным полем строится аналогично уравнениям МВ без магнитного поля. Параметр сглаживания  $\tau$  определяется как

$$\tau = \alpha \frac{h_x}{|u_x| + \sqrt{B_x^2 + gh}}. \tag{4.66}$$

Шаг по времени соответствует условию Куранта

$$\Delta t = \beta \frac{h_x}{\max \left( |u_x| + \sqrt{B_x^2 + gh} \right)}, \tag{4.67}$$

где  $0 < \beta < 1$ .

Для удобства вычислений введем следующие обозначения

$$T_{xx} = j_{mx}u_x + \frac{gh^2}{2} - hB_x^2, \quad \Pi_{xx} = -hu_x\Delta u_x + hB_x\Delta B_x - gh\Delta h, \quad (4.68)$$

$$T_{yx} = j_{my}u_x - hB_xB_y. \quad (4.69)$$

Разностная аппроксимация для КГД системы уравнений (4.61)–(4.65) при гладкой подстилающей поверхности ( $b = 0$ ) имеет вид

$$\hat{h}_i = h_i - \Delta t \frac{j_{mx\,i+1/2} - j_{mx\,i-1/2}}{h_x}, \quad (4.70)$$

где

$$j_{mx\,i+1/2} = h_{i+1/2} (u_{x\,i+1/2} - w_{x\,i+1/2}),$$

$$w_{x\,i+1/2} = \frac{\tau_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} \left( \frac{h_{i+1}u_{x\,i+1}^2 - h_i u_{x\,i}^2}{h_x} - \frac{h_{i+1}B_{x\,i+1}^2 - h_i B_{x\,i}^2}{h_x} + \frac{g}{2} \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{h_x} \right).$$

Компонента скорости по оси  $x$  вычисляется как

$$\begin{aligned} \hat{u}_{x\,i} = & \frac{1}{\hat{h}_i} \left( h_i u_{x\,i} - \frac{\Delta t}{h_x} (T_{xx\,i+1/2} - T_{xx\,i-1/2}) + \right. \\ & + \frac{\Delta t}{h_x} (\Pi_{xx\,i+1/2} - \Pi_{xx\,i-1/2}) + \\ & \left. + \frac{\Delta t}{h_x} \left( \mu_{i+1/2} \frac{u_{x\,i+1} - u_{x\,i}}{h_x} - \mu_{i-1/2} \frac{u_{x\,i} - u_{x\,i-1}}{h_x} \right) \right), \quad (4.71) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T_{xx\,i+1/2} = & j_{mx\,i+1/2} u_{x\,i+1/2} + \frac{gh_{i+1/2}^2}{2} - h_{i+1/2} B_{x\,i+1/2}^2, \\ \Pi_{xx\,i+1/2} = & -h_{i+1/2} u_{x\,i+1/2} \Delta u_{x\,i+1/2} + B_{x\,i+1/2}^2 \Delta h_{i+1/2} + \\ & + 2h_{i+1/2} B_{x\,i+1/2} \Delta B_{x\,i+1/2} - gh_{i+1/2} \Delta h_{i+1/2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta h_{i+1/2} &= -\tau_{i+1/2} \frac{h_{i+1}u_{x,i+1} - h_i u_{x,i}}{h_x}, \\
\Delta u_{x,i+1/2} &= \frac{\tau_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} \left( u_{x,i+1/2} \frac{h_{i+1}u_{x,i+1} - h_i u_{x,i}}{h_x} - \frac{h_{i+1}u_{x,i+1}^2 - h_i u_{x,i}^2}{h_x} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{h_{i+1}B_{x,i+1}^2 - h_i B_{x,i}^2}{h_x} - \frac{g}{2} \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{h_x} \right), \\
\Delta B_{x,i+1/2} &= \frac{\tau_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} B_{x,i+1/2} \frac{h_{i+1}u_{x,i+1} - h_i u_{x,i}}{h_x}.
\end{aligned}$$

Компонента скорости по оси  $y$  вычисляется как

$$\begin{aligned}
\hat{u}_{yi} &= \frac{1}{\hat{h}_i} \left( h_i u_{yi} - \frac{\Delta t}{h_x} (T_{yx,i+1/2} - T_{yx,i-1/2}) + \right. \\
&\quad + \frac{\Delta t}{h_x} (h_{i+1/2} B_{x,i+1/2} \Delta B_{yi+1/2} - h_{i-1/2} B_{x,i-1/2} \Delta B_{yi-1/2}) - \\
&\quad - \frac{\Delta t}{h_x} (h_{i+1/2} u_{y,i+1/2} \Delta u_{x,i+1/2} - h_{i-1/2} u_{y,i-1/2} \Delta u_{x,i-1/2}) + \\
&\quad \left. + \frac{\Delta t}{h_x} \left( \mu_{i+1/2} \frac{u_{y,i+1} - u_{y,i}}{h_x} - \mu_{i-1/2} \frac{u_{y,i} - u_{y,i-1}}{h_x} \right) \right), \tag{4.72}
\end{aligned}$$

где  $T_{yx,i+1/2} = j_{my,i+1/2} u_{x,i+1/2} - h_{i+1/2} B_{x,i+1/2} B_{y,i+1/2}$ ,

$$\begin{aligned}
\Delta B_{y,i+1/2} &= \frac{\tau_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} \left( B_{y,i+1/2} \frac{h_{i+1}u_{x,i+1} - h_i u_{x,i}}{h_x} - \frac{h_{i+1}B_{y,i+1}u_{x,i+1} - h_i B_{y,i}u_{x,i}}{h_x} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{h_{i+1}B_{x,i+1}u_{y,i+1} - h_i B_{x,i}u_{y,i}}{h_x} \right),
\end{aligned}$$

$$j_{my,i+1/2} = h_{i+1/2} (u_{y,i+1/2} - w_{y,i+1/2}),$$

$$w_{y,i+1/2} = -\frac{\tau_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} \frac{(hB_x B_y - hu_x u_y)_{i+1} - (hB_x B_y - hu_x u_y)_i}{h_x}.$$

Для компонент магнитного поля имеем

$$\hat{B}_{xi} = \frac{h_i B_{xi}}{\hat{h}_i}, \tag{4.73}$$

$$\begin{aligned}
\hat{B}_{yi} = & \frac{1}{\hat{h}_i} \left( h_i B_{yi} - \frac{\Delta t}{h_x} (j_{mx i+1/2} B_{y i+1/2} - j_{mx i-1/2} B_{y i-1/2}) + \right. \\
& + \frac{\Delta t}{h_x} (j_{my i+1/2} B_{x i+1/2} - j_{my i-1/2} B_{x i-1/2}) - \\
& - \frac{\Delta t}{h_x} (h_{i+1/2} u_{x i+1/2} \Delta B_{y i+1/2} - h_{i-1/2} u_{x i-1/2} \Delta B_{y i-1/2}) + \\
& \left. + \frac{\Delta t}{h_x} (h_{i+1/2} u_{y i+1/2} \Delta B_{x i+1/2} - h_{i-1/2} u_{y i-1/2} \Delta B_{x i-1/2}) \right). \tag{4.74}
\end{aligned}$$

Значения основных гидродинамических переменных в полуцелых узлах (на гранях ячеек) определяются как средние от значений в двух соседних ячейках. Значения вычисляемых выражений в точках  $i - 1/2$  определяются аналогично точкам  $i + 1/2$ .

## П.2 1D – тесты и результаты расчета

Ускорение свободного падения  $g$  в численных расчетах берется равным 1.

**Тест 1.** В качестве первого теста решается задача, рассмотренная в [80]. Начальные условия имеют вид

$$\mathbf{U}_L = (1, 0, 0, 1, 0), \quad \mathbf{U}_R = (2, 0, 0, 0.5, 1), \tag{4.75}$$

где  $\mathbf{U} = (h, u_x, u_y, B_x, B_y)$ . Эта задача соответствует распаду сильного разрыва. Время расчета соответствует  $t = 0.4$  с. В [81] аналогичный тест решается для  $t \sim 0.5$  с. На Рис. 4.9 – 4.11 приведены расчеты на сгущающихся сетках при параметрах счета  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.1$ .

**Тест 2.** В качестве второго теста решается weak-test из [81], соответствующий распаду слабого разрыва. Начальные условия имеют вид

$$\mathbf{U}_L = (1, 0, 1, 1, 1), \quad \mathbf{U}_R = \mathbf{U}_L + 10^{-4} (-1, 0, 0, (1 - 10^{-4})^{-1}, 2). \tag{4.76}$$

Время расчета  $t = 0.5$  с. В данном тесте соответствие с результатами из [81], которые были посчитаны с помощью явных схем Лакса–Фридрихса второго

порядка по пространству, было достигнуто при  $\alpha = 0.3$ ,  $\beta = 0.1$ . Алгоритм устойчив при  $\alpha = 0.1 - 0.5$ ,  $\beta = 0.1 - 0.25$ . Результаты расчетов приведены на Рис. 4.12, 4.13. Результаты, эквивалентные результатам из [81], [80], получаются при увеличении количества точек сетки относительно [81] в 2 – 4 раза. Условие  $hB_x = \text{const}$  выполняется в обоих случаях автоматически с точностью порядка  $10^{-15}$ .

Тесты о распаде сильного и слабого разрывов демонстрируют сходимость численного решения к эталонным результатам, приведенным в работах [81], [80]. Аналог условия соленоидальности – уравнение (4.40) – выполняется автоматически с машинной точностью.

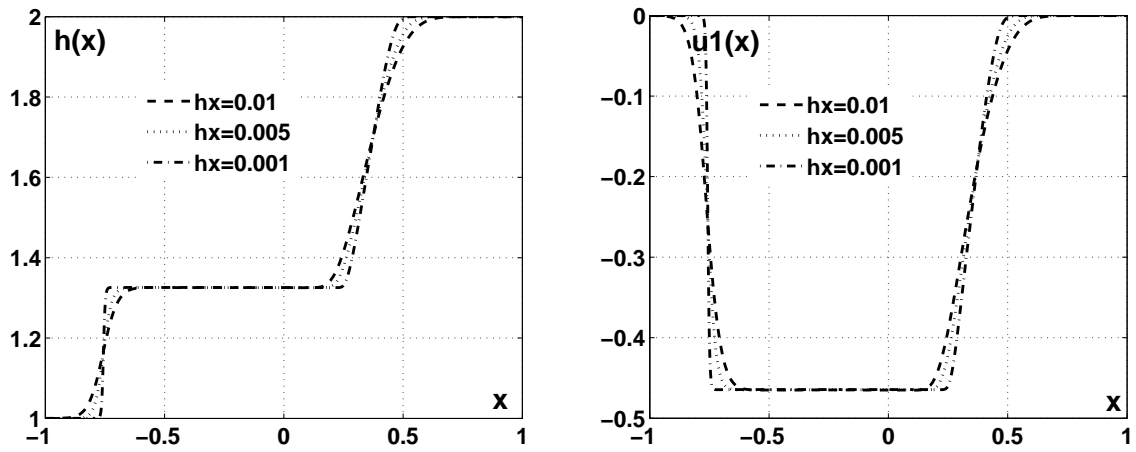


Рис. 4.9. Тест 1. Высота  $h$  и скорость  $u_x$  (на рис.  $u_1(x)$ ) на сгущающихся сетках

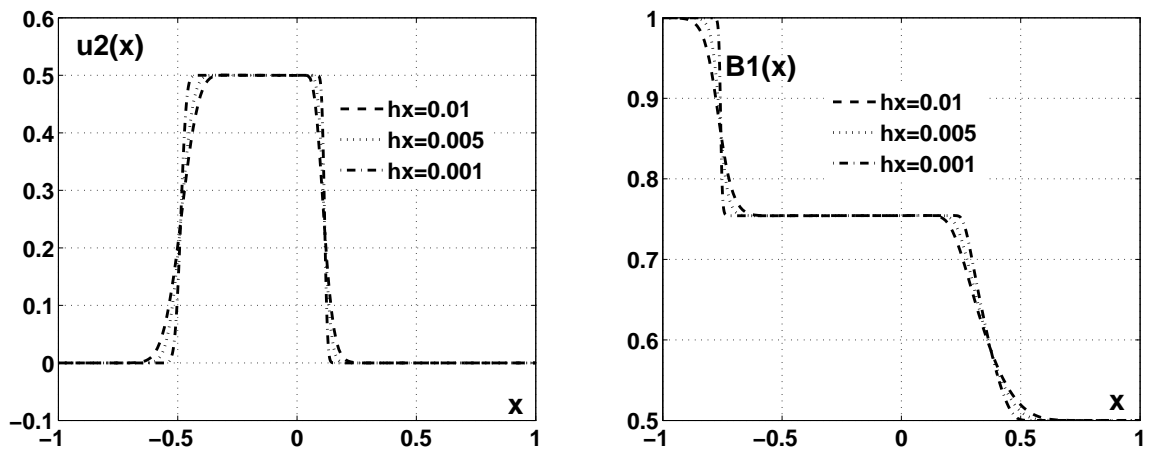


Рис. 4.10. Тест 1. Скорость  $u_y$  (на рис.  $u_2(x)$ ) и магнитная индукция  $B_x$  (на рис.  $B_1(x)$ ) на сгущающихся сетках



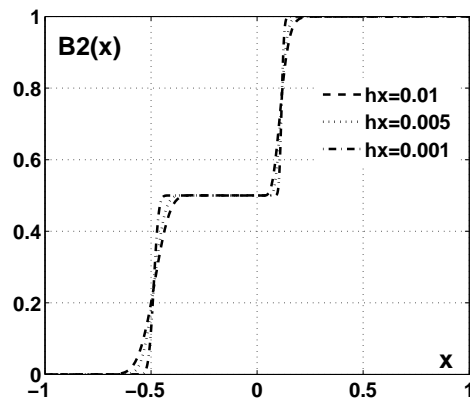


Рис. 4.11. Тест 1. Магнитная индукция  $B_y$  (на рис.  $B_2(x)$ ) на сгущающихся сетках

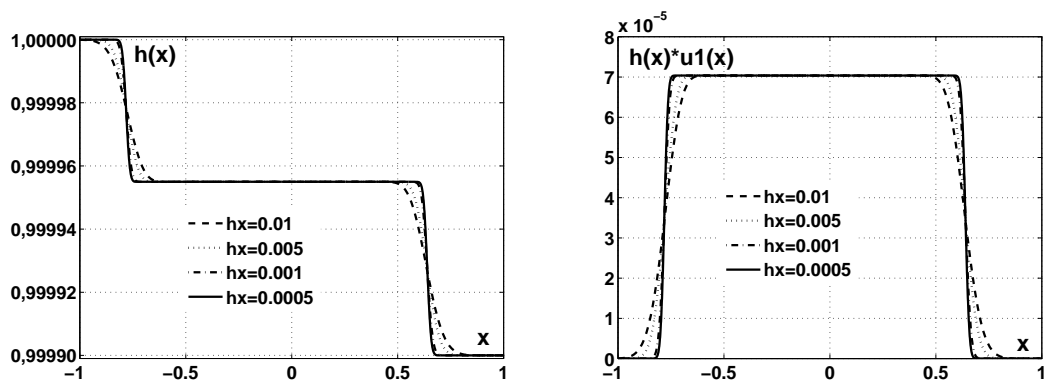


Рис. 4.12. Тест 2. Высота  $h$  и  $hu_x$  (на рис.  $hu_1(x)$ ) на сгущающихся сетках

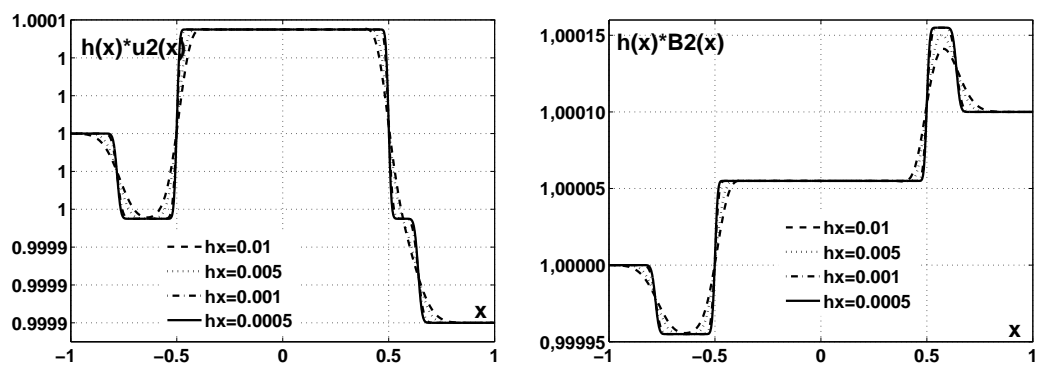


Рис. 4.13. Тест 2.  $hu_y$  (на рис.  $u_2(x)$ ) и  $hB_y$  (на рис.  $B_2(x)$ ) на сгущающихся сетках

# Литература

- [1] *М.В. Абакумов, С.И. Мухин, Ю.П. Попов, В.М. Чечеткин* Исследование равновесных конфигураций газового облака вблизи гравитирующего центра // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 1995 г., № 33, <http://library.keldysh.ru//preprint.asp?lg=r&id=1995-33>.
- [2] *М.В. Абакумов, С.И. Мухин, Ю.П. Попов, В.М. Чечеткин* Газодинамические процессы в аккреционном диске двойной звездной системы // Матем. моделирование, 1998 г., т. 10, № 5, с. 35–47.
- [3] *О.В. Булатов, Т.Г. Елизарова* Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах // ЖВМиМФ, 2011 г., т. 51, № 1, с. 170–184.
- [4] *О.М. Белоцерковский, В.В. Денисенко, А.В. Конюхов, А.М. Опарин, О.В. Трошкин, В.М. Чечеткин* Численное исследование устойчивости течения Тейлора между двумя цилиндрами в двумерном случае // ЖМВиМФ, 2009 г., т. 49, № 4, с. 754 – 768.
- [5] *О.М. Белоцерковский, А.М. Опарин, В.М. Чечеткин* Турбулентность. Новые подходы. — М.: Наука, 2003 г., 286 с., гл. 3, 4.
- [6] *Е.П. Велихов, А.Ю. Луговский, С.И. Мухин, Ю.П. Попов, В.М. Чечеткин* Роль крупномасштабной турбулентности в перераспределении углового момента в аккреционных звездных дисках // Астрономический журнал, 2007 г., т. 84, № 2, с. 1–8.

- [7] *А.Н. Волобуев, В.И. Кошев, Е.С. Петров* Биофизические принципы гемодинамики. — Самара: Самарский Дом печати, 2009 г., 183 с.
- [8] *С.А. Габов* Введение в теорию нелинейных волн. — М.: Изд-во МГУ, 1988 г.
- [9] *В.А. Гаврилин, А.А. Злотник* О пространственной дискретизации одномерной квазигазодинамической системы уравнений с общими уравнениями состояния и балансе энтропии // ЖВМиМФ, 2015 г., т. 55, № 2, с. 267–284.
- [10] *О.А. Глебова, А.В. Кравцов, Н.К. Шелковников* Экспериментальное и численное исследование ветровых уединенных волн на воде // Изв. Акад. наук, физическая серия, 2002 г., т. 66, № 12, с. 1727–1729.
- [11] *Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М., Мир, 1988 г., 696 с.
- [12] *Т.Г. Елизарова* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. — Москва: Научный мир, 2007 г.
- [13] *Т.Г. Елизарова* Осреднение по времени как приближенный способ построения квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений // ЖВМиМФ, 2011 г., т. 51, № 11, с. 2096 – 2105.
- [14] *Т.Г. Елизарова, О.В. Булатов* Численный алгоритм решения регуляризованных уравнений мелкой воды на неструктурированных сетках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2014 г., № 21, <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-21>.
- [15] *Т.Г. Елизарова, А.А. Злотник, О.В. Никитина* Моделирование одномерных течений мелкой воды на основе регуляризованных уравнений // Пре-

- принты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2011 г., № 33,  
[www.keldysh.ru/papers/2011/source/prep2011\\_33.pdf](http://www.keldysh.ru/papers/2011/source/prep2011_33.pdf).
- [16] *Т.Г. Елизарова, Д.А. Сабурин* Численное моделирование колебаний жидкости в топливных баках // Математическое моделирование, 2013 г., т. 25, № 3, с. 75–88.
- [17] *Т.Г. Елизарова, М.Е. Соколова, Ю.В. Шеретов* Квазигазодинамические уравнения и численное моделирование течений вязкого газа // ЖВМиМФ, 2005 г., т. 45, № 3, с. 544–555.
- [18] *Т.Г. Елизарова, С.Д. Устюгов* Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений магнитной гидродинамики. Одномерный случай // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2011 г., № 1,  
[www.keldysh.ru/papers/2011/source/prep2011\\_01.pdf](http://www.keldysh.ru/papers/2011/source/prep2011_01.pdf).
- [19] *Т.Г. Елизарова, С.Д. Устюгов* Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений магнитной гидродинамики. Многомерный случай // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2011 г., № 30,  
[http://www.keldysh.ru/papers/2011/source/prep2011\\_30.pdf](http://www.keldysh.ru/papers/2011/source/prep2011_30.pdf).
- [20] *Т.Г. Елизарова, Б.Н. Четверушкин* Использование кинетических моделей для расчета газодинамических течений // Математическое моделирование: процессы в нелинейных средах. — М.: Наука, 1986 г., с. 261–278.
- [21] *Т.Г. Елизарова, Е.В. Шильников* Анализ вычислительных свойств квазигазодинамического алгоритма на примере решения уравнений Эйлера // ЖВМиМФ, 2009 г., т. 49, № 11, с. 1953–1969.
- [22] *Т.Г. Елизарова, Е.В. Шильников* Возможности квазигазодинамического алгоритма для численного моделирования течений невязкого газа // ЖВМиМФ, 2009 г., т. 49, № 3, с. 549–566.

- [23] *Т.Г. Елизарова, И.А. Широков* Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений. — М.: МАКС Пресс, 2017 г.
- [24] *А.А. Злотник* О квазигазодинамической системе уравнений с общими уравнениями состояния и источником тепла // Математическое моделирование, 2010 г., т. 22, № 7, с. 53–64.
- [25] *А.А. Злотник* Квазигазодинамическая система уравнений с общими уравнениями состояния // Доклады Академии наук, 2010 г., т. 431, № 5, с. 605–609.
- [26] *А.А. Злотник* Энергетические равенства и оценки для баротропных квазигазо- и квазигидродинамических систем уравнений // ЖВМиМФ, 2010 г., т. 50, № 2, с. 325–337.
- [27] *А.А. Злотник* О построении квазигазодинамических систем уравнений и баротропной системы с потенциальной массовой силой // Матем. моделирование, 2012 г., т. 24, № 4, с. 65–79.
- [28] *А.А. Злотник, Б.Н. Четверушкин* О параболичности квазигазодинамической системы уравнений, ее гиперболической 2-го порядка модификации и устойчивости малых возмущений для них // ЖВМиМФ, 2008 г., т. 48, № 3, с. 445–472.
- [29] *В.А. Ильин, Э.Г. Позняк* Основы математического анализа. — М.: Физматлит. Ч.2, 2005 г., — 464 с.
- [30] *Н.Н. Калиткин* Численные методы. — М.: Наука, 1978 г., — 512 с.
- [31] *И.А. Квасников* Термодинамика и статистическая физика. Т.1. Теория равновесных систем. Термодинамика. Изд. 2-е. — М.: Едиториал УРСС, 2002 г.

- [32] *Н.Е. Кочин* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — М.: Наука, 1965 г.
- [33] *А.Н. Кравцов, В.В. Кравцов, Н.К. Шелковников* Численный эксперимент по моделированию уединенных волн на поверхности жидкости в кольцевом канале // ЖВМиМФ, 2004 г., т. 44, № 3, с. 559–561.
- [34] *А.Г. Куликовский, Н.В. Погорелов, А.Ю. Семенов* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2001 г.
- [35] *М.Е. Ладонкина, О.А. Неклюдова, В.Ф. Тишкин* Использование усреднений для сглаживания решений в разрывном методе Галеркина // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017 г., № 89, <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-89>.
- [36] *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц* Теоретическая физика. Гидродинамика. Т.4. — М.:Наука, 1989 г., — 767 с.
- [37] *Л.Г. Лойцянский* Механика жидкости и газа. — М: Дрофа, 2003 г., — 840 с.
- [38] *А.Ю. Луговский, Ю.П. Попов* Использование схемы Роу–Эйнфельдта–Ошера при математическом моделировании аккреционных звездных дисков на компьютерах с параллельной архитектурой // ЖВМиМФ, 2015 г., т. 55, № 8, с. 1444–1456.
- [39] *Г.И. Марчук* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. — Москва, Наука, 1982 г.
- [40] *А.М. Незлин, Е.Н. Снежкин* Вихри и спиральные структуры. Астрофизика и физика плазмы в опытах на мелкой воде. — М.: Наука, 1990 г.

- [41] *Б.В. Левин, М.А. Носов* Физика цунами. — Москва, Янус-К., 2005 г., 360 с.
- [42] *Д.Н. Раздобурдин, В.В. Журавлев* Оптимальный рост малых возмущений в тонких газовых дисках // Письма в астрономический журнал, 2012 г., т. 38, № 1, с. 1–11.
- [43] *Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — Изд. Наука, Москва, 1968 г.
- [44] *Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко* Системы квазилинейных уравнений. — М.: Наука, 1978 г.
- [45] *Дж. Стокер* Волны на воде, пер. с англ. — М., 1959 г.
- [46] *Л.Г. Страховская* Модель эволюции самогравитирующего газового диска // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2012 г., № 80, [http://keldysh.ru/papers/2012/rep2012\\_80.pdf](http://keldysh.ru/papers/2012/rep2012_80.pdf).
- [47] *Дж. Стретт (лорд Рэлей)* Теория звука. Т. 2. — М.: ГИТТЛ, 1955 г., — 474 с.
- [48] *Дж. Уизем* Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977 г., — 622 с.
- [49] *А.М. Фридман* Предсказание и открытие новых структур в спиральных галактиках // УФН, 2007 г., т. 177, № 2, с. 121–147.
- [50] *А.М. Фридман, Д.В. Бисикало* Природа аккреционных дисков тесных двойных звезд: неустойчивость сверхотражения и развитая турбулентность // УФН, 2008 г., т. 178, № 6, с. 577–603.
- [51] *Б.Н. Четверушкин* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. — М.: Макс Пресс, 2004 г.
- [52] *Н.К. Шелковников* Вынужденный солитон в жидкости // Письма в ЖЭТФ, 2005 г., т. 82, вып. 10, с. 720–723.

- [53] *М.А. Шеремет* Нестационарная сопряженная задача термогравитационной конвекции в горизонтальном цилиндре // Вестник Томского государственного университета, 2010 г., № 2(10), с. 102–111.
- [54] *Ю.В. Шеретов* Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. — Тверь: Тверской гос. ун-т, 2000 г.
- [55] *Ю.В. Шеретов* Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. — М.— Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2008 г.
- [56] *R. Deam, E. Lemma, B. Mace, R. Collins* On scaling down turbines to millimeter size // J. Eng. Gas Turbines Power, v. 130, 052301, (2008).
- [57] *R.F. Dressler* Roll-waves in inclined open channels // Communications on Applied Mathematics, II, New York University, 1949, № 2/3.
- [58] *R. F. Dressler* Stability of uniform flow and roll-wave formation // Symposium on Gravity Waves, NBS Circular, 521.
- [59] *Mausumi Dikpati, Peter A. Gilman, Matthias Rempel* Stability analysis of tachocline latitudinal differential rotation and coexisting toroidal band using a shallow-water model // The Astroph. Journal, 596:680–697, 2003.
- [60] *Mausumi Dikpati, Peter A. Gilman* Analysis of hydrodynamic stability of solar tachocline latitudinal differential rotation using a shallow-water model // The Astroph. Journal, 551:536–564, 2001.
- [61] *Mausumi Dikpati* Nonlinear evolution of global hydrodynamic shallow-water instability in the solar tachocline // The Astroph. Journal, 745:128(20pp), 2012.



- [62] *Mausumi Dikpati, Peter A. Gilman* A shallow–water theory for the sun’s active longitudes // *The Astroph. Journal*, 635:L193–L196, 2005.
- [63] *T.G. Elizarova, O.V. Bulatov* Regularized shallow water equations and a new method of simulation of the open channel flows // *Comp. Fluids*, 2011, № 46, pp. 206–211.
- [64] *T.G. Elizarova, O.V. Bulatov* Regularized shallow water equations and a new method of simulation of the open channel flows // *Computers and Fluids*, 2011, v. 46, pp. 206–211.
- [65] *J. Ferziger and M. Peric* *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer–Verlag, Berlin et al.: Springer, 2002.
- [66] *K.O. Friedrichs* On the Derivation of the shallow water theory // *Comm. on Applied Math, Institute for Mathematics and Mechanics*, 1948, v. 1, № 1, pp. 81–85.
- [67] *Peter A. Gilman* Magnetohydrodynamic "shallow–water" equation for the solar tachocline // *The Astroph. Journal*, 544:L79–L82, 2000.
- [68] *Peter A. Gilman, Mausumi Dikpati* Analysis of instability of latitudinal differential rotation and toroidal field in the solar tachocline using a magnetohydrodynamic shallow–water model. I. Instability for broad toroidal field profiles // *The Astroph. Journal*, 576:1031–1047, 2002.
- [69] *Thierry Goglizzo, Frederic Masset, Jerome Guilet, Gilles Durand* Shallow water analogue of the standing accretion shock instability: experimental demonstration and a two–dimensional model // *Physical review letters* 108, 051103, 2012.
- [70] *B. Herrmann–Priesnitz, W.R. Calderon–Munoz, E.A. Salas, A. Vargas–Uscategni, M.A. Duarte–Mermoud, D.A. Torres* Hydrodynamic structure of

- the boundary layer in a rotating cylindrical cavity with radial inflow // *Phys. Fluids*, 28, 033601 (2016).
- [71] *H. Jasak, H. Weller, A. Gosman* High resolution NVD differencing scheme for arbitrarily unstructured meshes // *Int. J. For Numer. Methods In Fluids*, 1999, v. 31, pp. 431–449.
- [72] *Tatiana G. Elizarova and Jean–Claude Lengrand* A regularization method for the numerical solution of shallow water equations // V European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD, Portugal, Lisbon, 2010.
- [73] *R. Kapelli, S. Mishra* Well–balanced schemes for the Euler equations with gravitation // Research Report № 2013–05, Swiss Federal Institute of Technology Zurich.
- [74] *J.B. Keller* The Solitary Wave and Periodic Waves in Shallow Water // *Comm. on Applied Math*, Institute for Mathematics and Mechanics, 1948, v. 1, № 4, pp. 323–339.
- [75] *R.J. LeVeque* Balancing Source Terms and Flux Gradients in High–Resolution Godunov Methods: The Quasi–Steady Wave–Propagation Algorithm // *J. Comput. Phys.* 146, 346 (1998).
- [76] *R. Liska and B. Wendroff* Comparison of Several Difference Schemes on 1D and 2D Test Problems for Euler Equations // Technical Report LA–UR–01–6225, LANL, LOS Alamos, 2001.
- [77] *R. Liska and B. Wendroff* Comparison of Several Difference Schemes on 1D and 2D Test Problems for Euler Equations // *SIAM J. Sci. Comput.*, 2003, v. 25, № 3, pp. 995–1017.
- [78] *J. Owen* Air–cooled gas turbine discs: A review of recent research // *Int. J. Heat Fluid Flow*, 1988, v. 9, p. 354.

- [79] *Matthias Rempel, Mausumi Dikpati* Storage and equilibrium of toroidal magnetic fields in the solar tachocline: a comparison between MHD shallow-water and full MHD approaches // *The Astroph. Journal*, 584:524-527, 2003.
- [80] *J. A. Rossmannith* A wave propagation method with constrained transport for ideal and shallow water magnetohydrodynamics // Ph.D. Dissertation, 2002.
- [81] *H. De Sterck* Hyperbolic theory of the "shallow water" magnetohydrodynamics equations // *Physics of plasmas*, 2001, v. 8, № 7, pp. 3293–3304.
- [82] *H.A. Thomas* The propagation of waves in steep prismatic conduits // *Proc. Hydraulic Conf.*, Univ. of Iowa, 1939, pp. 214–229.
- [83] *E. Toro* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. — Berlin, Heidelberg: Springer, 1997.
- [84] *O.M. Umurhan* Potential vorticity dynamics in the frame work of disk shallow-water theory: I. The Rossby wave instability // *ArXiv:1008.2073v1 [astro-ph.SR]*, 2010.
- [85] *O.M. Umurhan* A shallow-water theory for annular sections of Keplerian Disks // *ArXiv:0802.3486v5 [astro-ph]*, 2008.
- [86] *H. Weller, G. Tabor, H. Jasak and C. Fureby* A Tensorial Approach to CFD using Object Orientated Techniques // *Computers in Physics*, 1998, v. 12, № 6, pp. 620–631.