

ЗАКЛЮЧЕНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОГО СОВЕТА 24.1.237.01,  
СОЗДАННОГО НА БАЗЕ  
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УЧРЕЖДЕНИЯ  
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР ИНСТИТУТ  
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М.В. КЕЛДЫША РАН»  
МИНИСТЕРСТВА НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ПО ДИССЕРТАЦИИ НА СОИСКАНИЕ  
УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ КАНДИДАТА НАУК

аттестационное дело № \_\_\_\_\_

решение диссертационного совета от 29 февраля 2024 № 2

О присуждении **Кальметьеву Рустему Шайнуровичу**, гражданину Российской Федерации, ученой степени кандидата физико-математических наук.

Диссертация «Метод итераций Фейнмана-Чернова аппроксимации полугрупп» по специальности 1.1.6 – «Вычислительная математика» принята к защите 26.12.2023 (протокол заседания №17/пз) диссертационным советом 24.1.237.01, созданным на базе Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук» (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН), 125047, Москва, Миусская пл., д. 4. Диссертационный совет утвержден приказом Минобрнауки России №105/нк от 11 апреля 2012 года.

Соискатель **Кальметьев Рустем Шайнурович**, 1988 года рождения, в 2012 году окончил Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» (МФТИ) с присвоением квалификации магистр по направлению подготовки «Прикладные математика и физика».

В 2015 году окончил очную аспирантуру МФТИ по специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

В настоящее время соискатель работает в должности младшего научного сотрудника в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

Диссертация выполнена в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

**Научный руководитель – Орлов Юрий Николаевич**, доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник отдела №6 «Вычислительная физика и кинетические уравнения» ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

**Официальные оппоненты:**

**Трушечкин Антон Сергеевич**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела математической физики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук,

**Лобода Артём Александрович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова» дали **положительный** отзыв на диссертацию.

Ведущая организация Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет» (КФУ) в своем **положительном** отзыве, подписанном **Туриловой Екатериной Александровной**, доктором физико-математических наук, заведующим кафедрой математической статистики КФУ, и **Тазюковым Булатом Фэридовичем**, кандидатом физико-математических наук, заместителем директора по научной деятельности, и утвержденным **Таюрским Дмитрием Альбертовичем**, доктором физико-математических наук, первым проректором - проректором по научной деятельности КФУ, указала, что работа выполнена на высоком научном уровне. Численное решение эволюционных уравнений в частных производных в больших размерностях актуально для большого числа приложений, таких как моделирование динамики квантовых систем, задачи

финансовой математики, модели эволюционной биологии. И одним из интенсивно развивающихся на сегодняшний день направлений в этой области является теория аппроксимации однопараметрических полугрупп с помощью композиций операторнозначных функций.

В работе разработан имеющий широкое поле применения метод аппроксимации эволюционных полугрупп с помощью усреднения случайных итераций Фейнмана-Чернова и доказаны достаточные условия сходимости для случая операторнозначных функций, порождаемых аффинными преобразованиями аргумента. Разработанные численные алгоритмы могут быть использованы в задачах оптимального управления квантовыми системами при моделировании квантового шума.

Диссертация Кальметьева Рустема Шайнуровича является научно-квалификационной работой, в которой содержится решение задачи аппроксимации полугрупп операторов с помощью усреднения итераций Фейнмана-Чернова, имеющей значение для развития вычислительной математики, что соответствует требованиям п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24.09.2013 г. № 842, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а ее автор заслуживает присуждения искомой ученой степени.

Соискатель имеет 8 опубликованных работ по теме диссертации, в том числе 6 публикаций в изданиях, входящих в перечень ВАК, 4 – в журналах, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus.

1. Kalmetev R.Sh., Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh. Generalized Coherent States Representation // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2021. — Vol. 42, no. 11.— Pp. 2608–2614. (**WoS, Scopus, ВАК**)
2. Кальметьев Р.Ш., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж. Итерации Чернова как метод усреднения случайных аффинных преобразований // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2022. — Т. 62, no 6. — С. 1030–1041. (**WoS, Scopus, ВАК**)

3. Кальметьев Р.Ш., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж. Усреднение случайных аффинных преобразований аргумента функций // Уфимский математический журнал. — 2023. — Т. 15, No 2. — С. 55–64. (**WoS, Scopus, ВАК**)
4. Kalmetev R.Sh., Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh. Quantum Decoherence via Chernoff Averages // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol. 44, no. 6. — P. 2044–2050. (**WoS, Scopus, ВАК**)
5. Кальметьев Р.Ш. Усреднение по Чернову линейных дифференциальных уравнений // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2023. — 12 стр. (**ВАК**)
6. Кальметьев Р.Ш. Аппроксимация решений многомерного уравнения Колмогорова с помощью итераций Фейнмана-Чернова // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2023. — 15 стр. (**ВАК**)
7. Кальметьев Р.Ш. Об операторах сдвига для обобщенных когерентных состояний // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. — 2021. — 61. — С. 51–54.
8. Kalmetev R.Sh. Quantum decoherence via Chernoff averages // International Online Conference «One-Parameter Semigroups of Operators 2023». — 2023. — Pp. 48-49.

В работе [1] автором получены представления когерентных состояний для двух частных случаев коммутационных соотношений и построено преобразование к стандартной скобке Пуассона. В работе [2] автором доказаны достаточные условия сходимости последовательности усреднений итераций Фейнмана-Чернова для случайных аффинных преобразований аргумента к предельной сильно непрерывной полугруппе, разрешающей задачу Коши для соответствующего уравнения переноса. Также автором проведено численное моделирование последовательностей итераций Фейнмана-Чернова для случайных аффинных преобразований. В работе [3] автором доказаны достаточные условия сходимости последовательности усреднений итераций Фейнмана-Чернова для случайных аффинных

преобразований аргумента к предельной сильно непрерывной полугруппе, разрешающей задачу Коши для соответствующего уравнения Фоккера-Планка. В работе [4] автором разработан алгоритм моделирования необратимой эволюции квантовых систем.

Научные статьи отражают основные результаты диссертационной работы. Сведения об опубликованных соискателем работах достоверны.

На диссертацию поступили отзывы ведущей организации и оппонентов. Все отзывы положительные. В отзывах содержится ряд замечаний:

*В отзыве ведущей организации КФУ:*

1. В первой главе не приведены примеры случайных операторнозначных функций, для которых отсутствует сходимость к сильно непрерывной полугруппе при усреднении итераций Фейнмана-Чернова.
2. Во второй главе приведены оценки сложности алгоритма аппроксимации для случая, когда значения операторнозначных функций принадлежат представлению какой-либо произвольной конечномерной группы Ли, при этом далее рассмотрен только один пример усреднения аффинных преобразований аргумента.
3. В третьей главе рассматриваются квадратичные по операторам рождения и уничтожения гамильтонианы, для которых эволюция конечных моментов квазивероятностного распределения может быть вычислена аналитически. В работе не приводится сравнение разработанного метода с этим подходом.
4. В четвертой главе приводится пример семейства неканонических коммутационных соотношений, для которых существуют унитарные обобщенные операторы сдвига. При этом не проведено исследование единственности этого семейства.

*В отзыве официального оппонента, д.ф.-м.н. Трушечкина А.С.:*

1. Как отмечено в начале, тематика, связанная с представлением решений эволюционных уравнений через итерации Фейнмана-Чернова, активно

представлена в России и за рубежом во множестве работ и ранее защищенных кандидатских и докторских диссертаций. Поэтому во вводной части не хватает обзора того, какие результаты были здесь получены и какие вопросы остаются открытыми. Такой обзор позволил бы лучше понять, в чем состоит новизна результатов первой главы. К сожалению, автор ограничивается фразой во введении: «О современном состоянии исследований в данной области можно судить по статьям [8–27] и обзорам [28–31], а также ссылкам в этих работах».

2. Одно из положений, выносимых на защиту, сформулировано следующим образом: «Разработан и реализован в виде программного комплекса численный метод моделирования необратимой эволюции квантовых систем». Такая формулировка представляется слишком общей. Из этой формулировки можно сделать вывод, что разработан численный метод моделирования необратимой эволюции квантовых систем достаточно общего вида, тогда как на самом деле в главе 3 речь идет об очень частной модели.
3. В начале второй главы говорится, что использование сеточных алгоритмов становится практически невозможным для задач достаточно больших размерностей. Здесь хорошо было бы указать, начиная с каких размерностей в настоящее время применение сеточных методов становится практически невозможным и какие характерные размерности задач, которые приходится решать в различных науках или прикладной сфере.
4. Один из ключевых результатов работы – это меньшая вычислительная сложность предложенного алгоритма решения уравнения Колмогорова по сравнению с методом Фейнмана–Каца в случае, когда значения операторнозначной функции принадлежат представлению какой-либо конечномерной группы Ли. Однако объясняется это только на словах: «Возможность уменьшения сложности возникает здесь из-за того, что операторы  $A_k$  в алгоритме MCFCh в этом случае однозначно

восстанавливаются из элемента порождающей группы, и для вычисления  $A_{ku_0}(x)$  во втором внутреннем цикле не требуется вычисления всех промежуточных шагов для каждой целевой точки». Ввиду важности этого результата стоило пояснить этот пункт подробнее: привести конкретную формулу восстановления и описание соответствующего улучшенного алгоритма.

5. На графиках на рисунках 2.1–2.3, иллюстрирующих преимущества предложенного численного алгоритма, не указано, что отложено по оси абсцисс (мне также не удалось найти этой информации и в тексте).
6. Во вводной части главы 3 говорится, что, среди прочего, будет приведено уравнение Фоккера–Планка для эволюции функции квазивероятностного распределения. Однако в последующем тексте главы уравнение Фоккера–Планка не упоминается. По-видимому, речь идет об уравнении (3.33), но необходимо было после этого уравнения явно написать, что это и есть искомое уравнение Фоккера–Планка.
7. Перед формулой (3.20) написано: «Пусть начальное состояние системы задается оператором плотности, определенным с помощью некоторой функции квазивероятностного распределения [92] (например, функции Вигнера, Q-функции Хушими или P-функции Глаубера–Сударшана)». Однако в формуле (3.20) приведено вполне конкретное квазивероятностное представление из этого списка – P-представление Глаубера–Сударшана.
8. Наконец, согласно правилам русского языка в написании терминов, образованных соединением разных имен собственных («итерации Фейнмана–Чернова», «уравнение Фоккера–Планка» и т.п.), между именами следует использовать не дефис, а тире.

*В отзыве официального оппонента, к.ф.-м.н. Лободы А.А.:*

1. В теореме 1.3.1 о сходимости итераций Фейнмана–Чернова для части случайных коэффициентов предполагается ограниченность множества значений (условие A1). Не ясно можно ли обобщить, полученный

результат, на случай случайных величин лишь с конечными моментами до некоторого порядка.

2. В диссертации не прояснена разница между итерациями Чернова и итерациями Фейнмана-Чернова, хотя применяются оба типа итераций.
3. В диссертации в основном рассматриваются усреднения по Чернову аффинных преобразований аргумента функций. При этом не ясно какие из полученных результатов могут быть обобщены на другие классы случайных операторнозначных функций.
4. В работе не проведено исследование зависимости скорости сходимости рассматриваемых алгоритмов от выбора аппроксимирующей операторнозначной функции.
5. Работа содержит опечатки (см. стр. 11, 32, 42, 57 и др.). В частности, в нескольких местах вместо ссылки на уравнение (1.52) приводится ссылка на уравнение (3.33).

Выбор официальных оппонентов и ведущей организации обосновывается их широкой известностью и высоким уровнем компетентности по всем основным вопросам, рассмотренным в диссертации, включая аппроксимацию однопараметрических полугрупп операторов, разработку и анализ новых вычислительных алгоритмов, реализации их в виде программного комплекса, применение методов и средств математического моделирования для решения сложных научно-практических задач, что подтверждается списком публикаций официальных оппонентов и сотрудников ведущей организации.

**Диссертационный совет отмечает, что на основании выполненных соискателем исследований:**

1. **Сформулированы и доказаны** достаточные условия сходимости последовательности усреднений итераций Фейнмана-Чернова для случайных аффинных преобразований аргумента к предельной сильно непрерывной полугруппе, разрешающей задачу Коши для соответствующего уравнения Фоккера-Планка.



2. **Разработан и реализован** в виде программного комплекса алгоритм численной аппроксимации решений многомерных уравнений Колмогорова, порождаемых случайными аффинными преобразованиями аргумента.
3. **Найдено** однопараметрическое семейство операторов рождения и уничтожения, для которых операторнозначная функция сдвига является унитарной и удовлетворяет полугрупповому свойству на прямых, проходящих через начало координат.
4. **Разработан и реализован** в виде программного комплекса численный метод моделирования необратимой эволюции квантовых систем.

**Теоретическая значимость исследования** состоит в том, что разработан имеющий широкое поле применения метод аппроксимации эволюционных полугрупп с помощью усреднения случайных итераций Фейнмана-Чернова и доказаны достаточные условия сходимости для случая операторнозначных функций, порождаемых аффинными преобразованиями аргумента.

**Практическое значение результатов исследования** заключается в том, что на основе изложенных в работе алгоритмов автором разработан параллельный программный комплекс, позволяющий проводить исследования эволюции открытых квантовых систем, имеющих прикладное значение в задачах квантовых вычислений с шумом. Применение разработанного метода аппроксимации операторов сдвига для неклассических коммутационных соотношений открывает новые возможности для теоретико-вычислительных исследований обобщенных когерентных состояний, активно применяемых в квантовой оптике.

**Достоверность** научных положений и выводов диссертации подтверждается использованием строгих математических доказательств и рассуждений, а также известных в научной практике методов численного анализа. Верификация разработанного программного комплекса проводилась с помощью сравнительного анализа результатов расчетов с аналитическими

решениями и результатами расчетов с помощью альтернативных численных методов.

**Личный вклад соискателя.** Автором самостоятельно сформулированы и доказаны достаточные условия сходимости последовательности усреднений итераций Фейнмана-Чернова для случайных аффинных преобразований аргумента к предельной полугруппе, доказаны унитарность и выполнение полугруппового свойства для конкретного семейства лестничных операторов, разработаны численные алгоритмы и проведена серия вычислительных экспериментов. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю.

В ходе защиты диссертации соискателю был задан вопрос, о том, какие прикладные задачи можно решать с помощью итераций Фейнмана-Чернова. Отвечая на этот вопрос, Р.Ш. Кальметьев привел пример актуальной задачи учета шума в квантовых компьютерах. Следующий вопрос касался применения разработанных соискателем методов к конкретным физическим задачам. Соискатель ответил, что в одной из глав диссертации описано моделирование эволюции кубита, соединенного со средой, и шум среды моделируется с помощью случайных операторов. Еще один вопрос был задан об ограничениях, налагаемых на случайные функции. Соискатель продемонстрировал имеющиеся ограничения на слайде из презентации. Эти ограничения налагаются на случайные параметры  $A$ ,  $B$ ,  $h$ ,  $g$  - случайные матрицы и случайные векторы, входящие в условия, при выполнении которых теорема верна.

Далее соискатель ответил на указанные в письменных отзывах замечания, согласившись с большинством из них и дав аргументированные пояснения в необходимых случаях.

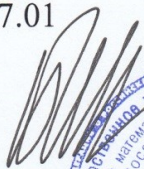
Подводя итоги защиты, в поддержку диссертационной работы выступил председатель совета Б.Н. Четверушкин. Он подчеркнул оригинальность тематики диссертации и актуальность работы для

исследования квантовых систем, а также отметил высокую научную квалификацию соискателя и высказал мнение, что он, безусловно, заслуживает присуждения ученой степени.

На заседании 29 февраля 2024 года диссертационный совет принял решение за разработку и исследование численных методов аппроксимации полугрупп операторов с помощью итераций Фейнмана-Чернова, вносящих существенный вклад в развитие вычислительной математики, присудить Кальметьеву Рустему Шайнуровичу ученую степень кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.6 – «Вычислительная математика».

При проведении тайного голосования диссертационный совет в количестве 16 человек, из них 6 докторов наук по специальности рассматриваемой диссертации, участвовавших в заседании, из 24 человек, входящих в состав совета, проголосовали: за – 16, против – нет, недействительных бюллетеней – нет.


Председатель  
диссертационного совета 24.1.237.01



Четверушкин Борис Николаевич



Ученый секретарь  
диссертационного совета 24.1.237.01



Корнилина Марина Андреевна

29.02.2024 г.