На правах рукописи

Капцов Евгений Игоревич

Симметрии и законы сохранения нелинейных дискретных моделей сплошной среды

Специальность 01.01.07 — вычислительная математика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2020

Работа выполнена в Федеральном государственном учреждении «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук».

Научный руководитель: **Дородницын Владимир Анатольевич**, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник ИПМ им. М. В. Келдыша РАН

Официальные оппоненты: **Еленин Георгий Георгиевич,** доктор физико-математических наук, профессор, кафедра вычислительных методов факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, профессор

Гердт Владимир Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, лаборатория информационных технологий ОИЯИ, начальник сектора

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск

Защита состоится 22 октября 2020 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.024.03, созданного на базе ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, расположенного по адресу: 125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН и на сайте www.keldysh.ru.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4, ученому секретарю диссертационного совета Д 002.024.03.

Автореферат разослан
Телефон для справок: +7 (499) 220-78-23.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.024.03,
канд. физ.-мат. наук Корнилина М. А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Исследование групповых свойств дискретных уравнений, заданных на сеточных пространствах, началось в конце 1980-ых годов с работ [14–16] и за последние 30 лет был достигнут значительный прогресс в распространении теории групп Ли на конечно-разностные уравнения (см. обзор в [17–19]). В работе [20] была проведена групповая классификация всех обыкновенных разностных уравнений второго порядка, обладающих нетривиальными симметриями. В работах [15; 17; 21] разработан лагранжев формализм, позволяющий строить консервативные разностные модели с помощью разностного аналога теоремы Нётер [22; 23]. Его обобщение на случай систем обыкновенных разносных уравнений проводится в [1]. В работах [24; 25] разработан гамильтонов формализм, в рамках которого также дается способ строить схемы, обладающие первыми интегралами.

Законы сохранения уравнений, не имеющих вариационной постановки, могут быть получены с помощью тождества Лагранжа, связывающего симметрию уравнения, решения сопряженного уравнения и законы сохранения (метод сопряженного уравнения) [26; 27]. Разностный аналог этой конструкции был разработан в работах [2; 3].

В работах [28; 29] разработан альтернативный подход к законам сохранения (т. н. прямой метод), основанный на нахождении интегрирующего множителя. Прямой метод для разностных уравнений также используется в настоящей работе.

Непрерывные симметрии дискретных уравнений без требования аппроксимации какой-либо системы дифференциальных уравнений также представляют интерес, поскольку дискретные уравнения возникают в качестве первичных математических моделей в механике и физике. Их интегрируемость, наличие точных решений и законов сохранения, безусловно, связаны с присутствием у них непрерывной симметрии. Симметриям дискретных уравнений посвящены работы [30; 31].

Таким образом, групповой анализ дискретных и конечно-разностных уравнений — активно развивающаяся область математики. Его конечная цель состоит в том, чтобы превратить теорию групп Ли в столь же эффективный инструмент анализа и решения разностных уравнений, каковым она является сейчас для уравнений дифференциальных.

Разностные методы находят широкое применение в численном исследовании физических явлений в механике сплошных сред [32–38]. Особый интерес представляют инвариантные конечно-разностные схемы, то есть схемы, обладающие симметриями [17], поскольку это фундаментальное геометрическое свойство исходных уравнений. В качестве примера таких схем можно привести инвариантные разностные схемы для уравнений мелкой воды, предложенные в [37], в которых, однако, не удалось получить закон сохранения энергии. Законы сохранения представляют собой фундаментальные законы природы и имеют широкое применение в механике сплошных сред: они представляют практическую основу для понимания эффектов, происходящих вследствие движения в сплошной среде и играют значительную роль при конструировании численных схем [32; 33; 38].

Построение консервативных разностных схем — одна из актуальных задач моделирования физических процессов. Важность сохранения разностных аналогов законов сохранения обсуждалась на примере одномерных уравнений газовой динамики и магнитной гидродинамики в [39] и [40]. Этот подход привел к понятию полностью консервативных разностных схем, где помимо собственно консервативности, схемы удовлетворяют дополнительным условиям, выражающим баланс различных компонентов энергии. Примеры построения таких схем в газовой динамике, теории мелкой воды, магнитной гидродинамике можно найти в [34–36; 39; 41].

Важной частью группового анализа является групповая классификация дифференциальных уравнений, поскольку позволяет рассматривать целые классы уравнений с групповой точки зрения как единые объекты. Этому посвящена обширная литература [23; 42–46]. Групповой классификации разностных уравнений посвящены работы [17; 20].

Целью данной работы состоит в разработке методов построения инвариантных разностных схем, обладающих законами сохранения, а также в реализации инвариантных разностных схем для уравнений сплошной среды. В диссертации ставятся и решаются следующие задачи:

1. Построение с помощью разностного аналога теоремы Нётер новой инвариантной разностной схемы для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) второго порядка из классификационного списка Ли, обладающей всеми разностными аналогами первых интегралов дифференциального уравнения, и ее численное исследование (эта интегрируемая схема завершает список интегрируемых инвариантных разностных схем, полученных в результате групповой классификации, проведенной в [20]).
2. Построение точных инвариантных разностных схем для некоторых нелинейных ОДУ второго порядка из классификационного списка Ли и их численное исследование.
3. Обобщение разностного аналога тождества Нётер на случай системы обыкновенных разносных уравнений. Построение, с помощью этого обобщения, инвариантной разностной схемы системы уравнений Ермакова [47] специального вида, обладающей всеми разностными аналогами первых интегралов исходной дифференциальной системы.
4. Разработка разностного аналога метода сопряженных уравнений для случая обыкновенных разностных уравнений, не допускающих вариационной формулировки.

5. Разработка разностного аналога прямого метода [48] для разностных уравнений в частных производных. Построение с его помощью инвариантной разностной схемы волновых уравнений, обладающих разносными законами сохранения.
6. Групповая классификация одномерных уравнений механики сплошной среды специального вида в лагранжевых координатах. Это позволяет рассмотреть, в частности, случай уравнения мелкой воды с произвольным дном, и найти законы сохранения в координатах Лагранжа и Эйлера для последующей дискретизации и численной реализации.
7. Построение инвариантной консервативной разностной схемы для одномерных уравнений мелкой воды с плоским дном, обладающей локальными законами сохранения массы, импульса, энергии и движения центра масс. Разработка комплекса программ с целью упрощения численного исследования схемы и ее сопоставления другими известными схемами уравнений мелкой воды.

Научная новизна:

– Построена интегрируемая инвариантная схема ОДУ второго порядка из списка Ли, являющаяся важным дополнением к групповой классификации инвариантных разностных схем второго порядка [21].
– Построено обобщение разностного аналога тождества Нётер на случай системы обыкновенных разностных уравнений и приведен пример применения нового тождества.
– Разработан разностный аналог метода сопряженных уравнений для обыкновенных разностных уравнений, позволяющий находить разностные первые интегралы и в случаях, когда задача не допускает вариационной постановки.
– Приведен разностный аналог прямого метода нахождения законов сохранения для случая разностных уравнений второго порядка в частных производных. С его помощью построены инвариантные разностные схемы для нелинейного волнового уравнения, обладающие локальными законами сохранения.
– Произведена групповая классификация уравнений сплошной среды в лагранжевых координатах специального вида, дополняющая уже известные классификации. Найдены законы сохранения этих уравнений в координатах Эйлера и Лагранжа. Эти результаты используются при построении инвариантной разностной схемы для уравнений мелкой воды с плоским дном, обладающей локальными законами сохранения.
– Построена новая инвариантная полностью консервативная разностная схема для одномерных уравнений мелкой воды с плоским дном,

обладающая локальными законами сохранения вещества, импульса, энергии и движения центра масс.
- Разработан гибкий программный инструментарий, позволяющий эффективно производить численные расчеты по одномерным схемам для уравнений газовой динамики и уравнений мелкой воды, содержащий стандартный набор тестовых заданий и позволяющий без труда добавлять новые тестовые задания, точные решения, отображать численные результаты и сопоставлять результаты, полученные для разных схем.

Теоретическая и практическая значимость. С теоретической точки зрения полученные результаты представляют собой вклад в развитие методов группового анализа разностных уравнений и методов построения инвариантных разностных схем, в том числе для уравнений, не допускающих вариационную постановку.

С практической точки зрения результаты работы могут быть использованы при построении разностных схем — в работе предложен целый ряд методов, помогающих строить схемы, обладающие важными качественными свойствами аппроксимируемых дифференциальных уравнений, такими как инвариантность, наличие законов сохранения (консервативность) и интегрируемость.

Групповая классификация одномерных уравнений сплошной среды специального вида, произведенная в работе, расширяет и дополняет уже известные классификации и ее результаты могут быть использованы в справочных целях.

Методология и методы исследования. При решении поставленных задач использованы методы группового анализа дифференциальных и разностных уравнений. В процессе выполнения работы были использованы методы вычислительной математики. Численное исследование ряда задач проводилось с использованием разработанного программного комплекса.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Построено семейство инвариантных разностных схем для ОДУ второго порядка из классификационного списка Ли, обладающих всеми разностными аналогами первых интегралов дифференциального уравнения. Это семейство разностных схем завершает список интегрируемых инвариантных моделей, полученных в результате групповой классификации, проведенной в [20].
2. Произведено обобщение разностного аналога тождества Нётер на случай системы обыкновенных разносных уравнений. Построена инвариантная разностная схема для системы уравнений Ермакова специального вида, обладающая всеми разностными аналогами первых интегралов дифференциальной системы.

3. Разработан и применен на конкретных примерах уравнений разностный аналог метода сопряженных уравнений для случая обыкновенных разностных уравнений, не допускающих вариационной формулировки.
4. Предложен разностный аналог прямого метода [49] для разностных уравнений в частных производных на равномерных ортогональных сетках. С его помощью построены инвариантные разностные схемы линейного и нелинейного волнового уравнений, обладающие законами сохранения.
5. Проведена групповая классификация одномерных уравнений Эйлера–Лагранжа специального вида в лагранжевых координатах для течения жидкости и газа. Частными случаями таких уравнений являются уравнения мелкой воды с произвольным и плоским дном, а также одномерные уравнения газовой динамики для изэнтропических течений политропного газа. Приведены законы сохранения для указанных моделей в координатах Лагранжа и Эйлера.
6. Построена инвариантная консервативная разностная схема для одномерных уравнений мелкой воды с плоским дном, обладающая законами сохранения вещества, импульса, энергии и движения центра масс. Разработан комплекс программ, позволяющий эффективно производить численные расчеты одномерных уравнений газовой динамики и уравнений мелкой воды, содержащий стандартный набор тестовых заданий и позволяющий добавлять новые тестовые задания, точные решения, отображать численные результаты и сопоставлять результаты, полученные для различных схем.

Достоверность изложенных в диссертационной работе результатов обеспечивается проверкой предложенных численных методик на тестовых задачах, имеющих точные решения, и сравнением результатов с расчетными данными, полученными с помощью других методов. Для полученных в работе точных конечно-разностных схем достоверность результатов обеспечивается именно точностью этих схем (решения точных разностных схем во всех точках совпадают с решениями аппроксимируемых уравнений). Все полученные в работе разностные тождества проверяются прямым вычислением. Результаты проведенной в четвертой главе групповой классификации одномерных уравнений течений жидкости и газа получены стандартными методами классификации (см. [46]) и, кроме того, во многом пересекаются с уже известными классификациями и, таким образом, проверяются путем сопоставления.

Апробация работы. Результаты диссертации обсуждались на следующих конференциях:

– XV Всероссийская конференция–школа «Современные проблемы математического моделирования» пос. Дюрсо, 2013 г., [4];

– XXII Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», им. К.И. Бабенко, пос. Дюрсо, 2018 г., [5];
– Международная конференция «Modern Treatment of Symmetries, Differential Equations and Applications», г. Накхонратчасима, Таиланд, 2019 г., [6].

Результаты научной работы также докладывались автором и обсуждались на научном семинаре кафедры вычислительных методов факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова 11 сентября 2019, семинаре теоретического отдела Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 9 сентября 2019, научном семинаре в Институте вычислительного моделирования СО РАН в Красноярске, 6 сентября 2019, и на научном семинаре ИПМ им. М. В. Келдыша под руководством проф. В. Ф. Тишкина и А. А. Кулешова, 12 сентября 2019.

Публикации и личный вклад автора. Основной материал диссертации опубликован в 8 научных работах [1–3;7;9–12] и в 3 статьях [4–6] в сборниках трудов конференций. Все перечисленные научные работы опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК, а работы [3; 11; 12] — в зарубежных рецензируемых журналах. Работы [1–3; 7; 11; 12] проиндексированы в международных реферативных базах данных Web of Science и Scopus.

В работах [1–3; 7; 9] постановки задач и общие схемы их исследований принадлежат научному руководителю В. А. Дородницыну. В работах [11; 12] постановка задач осуществлялась В. А. Дородницыным и С. В. Мелешко. В работах [1; 7; 9–11] все основные новые результаты получены автором диссертации самостоятельно. В работах [2; 3] результаты получены авторами совместно. Из опубликованных в соавторстве работ в диссертационную работу включены преимущественно результаты автора.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках следующих грантов:
– грант Российского научного фонда, проект №18-11-00238 «Системы уравнений гидродинамического типа: симметрии, законы сохранения, инвариантные разностные схемы»;
– гранты Правительства РФ по постановлению №220, договоры 15-01-04677-а (2015–2017 гг.) и 18-01-00890-а (2018–2020 гг.) между Минобрнауки РФ, ИПМ им. Келдыша и ведущим ученым В. А. Дородницыным по теме «Симметрии дискретных и непрерывных моделей нелинейных сред»;
– Suranaree University of Technology (Thailand) Full-time Master Researcher Fellowship (15/2561).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения, списка литературы, списка иллюстративного материала, списка таблиц и 5 приложений. Полный объем диссертации составляет 208 страниц, включая 20 рисунков и 8 таблиц. Список литературы содержит 157 наименований.

Содержание работы

Первая глава посвящена построению инвариантных разностных схем для ОДУ второго порядка и систем ОДУ второго порядка, допускающих вариационную постановку (т. е. являющихся уравнениями Эйлера–Лагранжа для некоторых функций Лагранжа), построению их первых интегралов и точных решений. В качестве примеров рассматриваются ОДУ из классификационного списка С. Ли и система уравнений Ермакова [47].

В **первом** разделе главы кратко приводятся необходимые сведения из группового анализа [23; 42; 44]. Приводятся сведения по применению симметрий к конечно-разностным моделям, в том числе рассмотрена инвариантность разностных сеток [17]. В заключение раздела рассмотрены вариационные задачи и законы сохранения.

Во **втором** разделе рассмотрены примеры построения инвариантных разностных моделей для ОДУ второго порядка из классификационного списка С. Ли. Основное внимание уделено построению *точной* разностной схемы для уравнения

$$y'' + 2\,\frac{y' + Cy'\sqrt{y'} + {y'}^2}{x - y} = 0, \qquad C = \mathrm{const}.$$

Эта схема может быть записана в следующем виде:

$$\begin{gathered} u_n = \tfrac{1}{A(B - Ax_n)} + \tfrac{B-C}{A}, \\ x_n = \frac{(B + \frac{\sqrt{\varepsilon C^2+4}}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{C}{2})x_{n-1} + \frac{B(C-B)-1}{A}}{Ax_{n-1} - (B - \frac{\sqrt{\varepsilon C^2+4}}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{C}{2})}, \end{gathered} \qquad (1)$$

где A и B — константы интегрирования, и ε — малый вещественный параметр, характеризующий плотность разностной сетки. Особенность точных схем состоит в том, что их общее решение совпадает с соответствующим множеством решений дифференциальных уравнений в узлах сетки, плотность которых может быть произвольной. Пример численной реализации точной разностной схемы (1) приведен на Рис. 1. Из рисунка видно, что даже заданные на грубой сетке (h_0 — начальный шаг сетки) и вблизи сингулярности решения точной схемы практически совпадают с точным решением ОДУ, чего нельзя сказать о решениях, полученных стандартными методами, такими как метод Рунге–Кутты.

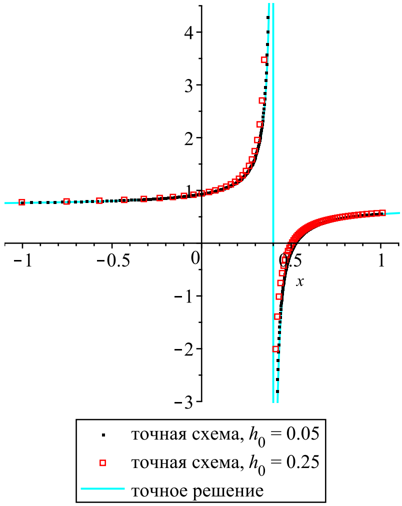

Рис. 1 — Точная схема для ОДУ второго порядка

В **третьем** разделе рассмотрена система ОДУ второго порядка Ермакова–Рей–Рейда

$$\begin{aligned} &\ddot{u} + \alpha u = \tfrac{1}{u^2 v}, \\ &\ddot{v} + \alpha v = \tfrac{1}{v^2 u}, \quad \alpha = \text{const}. \end{aligned} \tag{2}$$

Эта система встречается в приложениях при описании движения мелкой воды с поверхностью дна, имеющей топографию эллиптического параболоида [50]. Система (2) обладает следующим физически значимым первым интегралом, который называется инвариантом Рей–Рейда:

$$I = \frac{(v\dot{u} - u\dot{v})^2}{2} + \frac{u}{v} + \frac{v}{u} = \text{const}. \tag{3}$$

Для системы (2) строится инвариантная разностная модель, интегрируемая в той же степени, что и аппроксимируемая дифференциальная система. Наибольший физический интерес она представляет при $\alpha > 0$. В этом случае инвариантная разностная модель имеет вид

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2\alpha u^2}\left(\tfrac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{v^+} + \tfrac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{v^-}\right) = \tfrac{u^+ - u\cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{\sin\sqrt{\alpha}\tau^+} + \tfrac{u^- - u\cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{\sin\sqrt{\alpha}\tau^-}, \\ &\tfrac{1}{2\alpha v^2}\left(\tfrac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{u^+} + \tfrac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{u^-}\right) = \tfrac{v^+ - v\cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{\sin\sqrt{\alpha}\tau^+} + \tfrac{v^- - v\cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{\sin\sqrt{\alpha}\tau^-}, \\ &\tfrac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{uu^+} = \tfrac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{uu^-}, \qquad \tfrac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{vv^+} = \tfrac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{vv^-}. \end{aligned} \tag{4}$$

Для схемы (4) проводятся численные расчеты (см. Рис. 2, на котором изображены графики функций $u(t)$ и $t(n)$, где n — число итераций алгоритма расчета по разностной схеме).

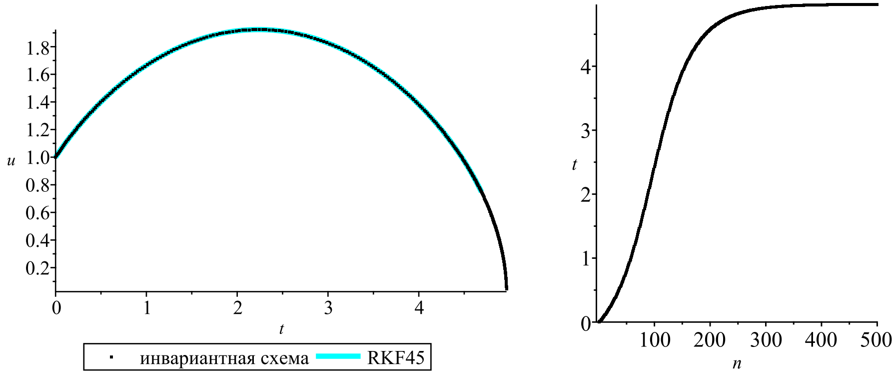

Рис. 2 — Результаты расчетов по схеме (4)

Результаты практически совпадают с решениями системы ОДУ, полученными методом типа Рунге—Кутты (RKF45). Более того, в отличие от RKF45, схема выдает значения даже вблизи сингулярности (на Рис. 2 это соответствует моменту времени $t = 4.97$).

Разностный аналог инварианта Рей–Рейда (3), полученный для схемы (4), практически не меняется на решениях (см. Рис 3), что соответствует ожидаемому поведению первого интеграла разностной системы.

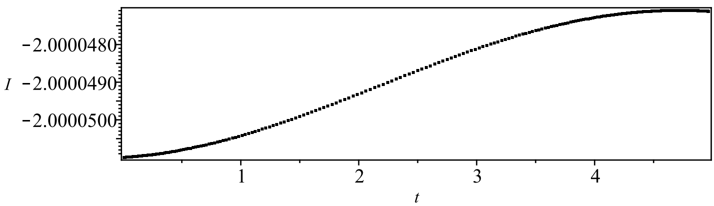

Рис. 3 — Значения разностного аналога инварианта Рей–Рейда на решениях (4)

Во второй главе рассматриваются задачи, не допускающие вариационной постановки. В случае отсутствия инвариантного Лагранжиана существуют альтернативные методы получения первых интегралов, предложенные в [26]. Эти методы сводятся к использованию решений сопряженных уравнений, получаемых из исходного уравнения с помощью вариационной производной, поэтому этот метод был назван «методом сопряженного уравнения». В главе предлагается разностный аналог этого метода для обыкновенных разностных уравнений, который впервые был предложен в наших публикациях [2; 3]. В качестве примера рассмотрено нелинейное ОДУ третьего порядка, на основе симметрий которого строится полный набор разносных инвариантов. С помощью разносных инвариантов строится инвариантная аппроксимация и инвариантная сетка для данного ОДУ. Строится разностный аналог тождества Лагранжа, позволяющий вычислить три первых интеграла построенной разностной модели. Разностная модель является алгебраически интегрируемой и ее общее решение совпадает с общим решением исходного ОДУ, то есть разностная модель является точной.

В **первом** разделе главы приводятся теоретические сведения по методу сопряженного уравнения в общем случае дифференциальных уравнений в частных производных. Во **втором** разделе описывается метод сопряженного уравнения для случая обыкновенных дифференциальных уравнений и приводится детальный пример решения нелинейного ОДУ третьего порядка

$$F = \frac{1}{\dot{u}^2}\left(\dot{u}\dddot{u} - \frac{3}{2}\ddot{u}^2\right) = 0 \tag{5}$$

с помощью этого метода. В **третьем** разделе описан разностный аналог метода сопряженного уравнения и приводятся примеры его использования. В качестве основного примера выбрана схема для уравнения (5), построенная в работе [51]:

$$\begin{gathered} F = \frac{u_{m+3} - u_{m+1}}{x_{m+3} - x_{m+1}}\,\frac{u_{m+2} - u_{m}}{x_{m+2} - x_{m}} - \frac{u_{m+3} - u_{m+2}}{x_{m+3} - x_{m+2}}\,\frac{u_{m+1} - u_{m}}{x_{m+1} - x_{m}} = 0, \\ \Omega = \frac{(x_{m+3} - x_{m+1})(x_{m+2} - x_{m})}{(x_{m+3} - x_{m+2})(x_{m+1} - x_{m})} - K = 0, \quad K \neq 0. \end{gathered} \tag{6}$$

С помощью разностного аналога метода сопряженного уравнения получается общее решение схемы (6), являющееся точным.

В последнем, **четвертом**, разделе главы приводятся заключительные замечания.

В третьей главе рассматриваются разностные уравнения в частных производных на примерах линейного и нелинейного волновых уравнений. Для случая разностных уравнений в частных производных приводится краткая теория, затем, с помощью разностного аналога т. н. прямого метода [48], производится построение инвариантных разностных схем, обладающих законами сохранения.

В **первом** разделе главы приводятся общие сведения и основные обозначения, касающиеся разностных схем уравнений второго порядка в частных производных. Значения независимых переменных в узлах разностной сетки обычно обозначаются как

$$t_{n+j}, \quad x_{m+i}, \quad u^{n+j}_{m+i}, \qquad i, j \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Через $(\mathbf{t},\mathbf{x},\mathbf{u})$ обозначают *шаблон* — подмножество (7), конкретный вид которого выбирается для каждой конкретной схемы отдельно. Операторы разностного сдвига и разностного дифференцирования обобщаются на случай двух независимых переменных:

$$\underset{\pm h}{S}^k f(u_m^n) = f(u_{m\pm k}^n), \qquad \underset{\pm\tau}{S}^k f(u_m^n) = f(u_m^{n\pm k}), \qquad k = 0, 1, 2, \dots .$$

$$\begin{aligned} \underset{+h}{D} &= \frac{\underset{+h}{S} - 1}{h_m}, \quad \underset{-h}{D} = \frac{1 - \underset{-h}{S}}{h_{m-1}}, \\ \underset{+\tau}{D} &= \frac{\underset{+\tau}{S} - 1}{\tau_n}, \quad \underset{-\tau}{D} = \frac{1 - \underset{-\tau}{S}}{\tau_{n-1}}. \end{aligned} \tag{8}$$

С помощью операторов (8) могут быть записаны разностные производные:

$$u_x = \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h_m} = \underset{+h}{D}(u), \quad u_{\bar{x}} = \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h_{m-1}} = \underset{-h}{D}(u), \quad u_{x\bar{x}} = \underset{+h}{D}\,\underset{-h}{D}(u),$$

$$u_t = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau_n} = \underset{+\tau}{D}(u), \quad u_{\check{t}} = \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau_{n-1}} = \underset{-\tau}{D}(u), \quad u_{t\check{t}} = \underset{+\tau}{D}\,\underset{-\tau}{D}(u)$$

и т. д. Все разностные схемы в рамках главы рассматриваются на равномерной сетке

$$h_{m+k} = h = \text{const}, \qquad \tau_{n+l} = \tau = \text{const}, \qquad k, l \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Применение разностного аналога тождества Нётер [15] в случае уравнений в частных производных затруднено в связи с появлением в тождестве «дифференциальных» частных производных независимых переменных. Более эффективным в данном случае оказывается так называемый прямой метод, которые описан во **втором** разделе и основан на применении разносного оператора Эйлера. Разностный оператор Эйлера (в точке u) на равномерной сетке на шаблоне $(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ имеет вид [17]:

$$\mathcal{E}_u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \underset{-\tau}{S}^k \underset{-h}{S}^l \left(\frac{\partial}{\partial u_{m+l}^{n+k}} \right).$$

Для произвольного разностного дивергентного выражения

$$\Phi(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \ = \underset{+\tau}{D}(\Phi^t(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u})) + \underset{+h}{D}(\Phi^x(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u})), \tag{10}$$

на равномерной ортогональной сетке (9) справедливо свойство:

$$\mathcal{E}_u \Phi|_{(9)} = 0.$$

Таким образом, если известно разностное уравнение

$$F(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u})|_{(9)} = 0,$$

то его интегрирующие множители $\Lambda(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ могут быть найдены из условия

$$\mathcal{E}_u(\Lambda F)|_{(9)} = 0.$$

Напомним, что функция Λ называется *разностным интегрирующим множителем*, соответствующим закону сохранения Φ вида (10) разностного уравнения F, если справедливо соотношение

$$\Phi = \Lambda F.$$

В отличие от дифференциального случая, в котором дифференциальное уравнение всегда задано, разностная аппроксимация F обычно заранее не известна, что делает разностную задачу значительно сложнее дифференциальной.

В **третьем** разделе главы с помощью описанного прямого метода находятся законы сохранения для схемы линейного волнового уравнения

$$u_{t\check{t}} - u_{x\bar{x}} = 0,$$
$$h_{m+k} = h = \text{const}, \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$\tau_{n+l} = \tau = \text{const}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

С помощью того же метода строится инвариантная конечно–разностная схема

$$u_{t\check{t}} - u_{x\bar{x}} - \frac{1}{6} \underset{-h}{D} \left(u_x^2 \left(\hat{u}_x + \check{u}_x \right) \right) = 0,$$
$$h_+ = h_- = h = \text{const},$$
$$\hat{\tau} = \check{\tau} = \tau = \text{const}$$

для нелинейного волнового уравнения

$$u_{tt} - (1 + u_x^2) u_{xx} = 0,$$

возникающего в эластодинамике [52], *обладающая законами сохранения.* Показывается, что на 9–точечном разностном шаблоне

$$(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv \big(t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, u_{m-1}^{n-1}, u_m^{n-1}, u_{m+1}^{n-1},$$
$$u_{m-1}^{n}, u_m^{n}, u_{m+1}^{n}, u_{m-1}^{n+1}, u_m^{n+1}, u_{m+1}^{n+1} \big)$$

не существует полиномиальных разностных схем нелинейного волнового уравнения, обладающих всеми законами сохранения, и производится классификация таких схем по количеству законов сохранения.

<u>В четвертой главе</u> проводится групповая классификация нелинейного уравнения специального вида для течения жидкости и газа в лагранжевых координатах. Это уравнение имеет форму

$$u_{tt} + G(u_x) u_{xx} - H(u) = 0, \qquad G' \neq 0,$$

где G и H — произвольные функции своих аргументов. При некоторых видах функций G и H получаются известные уравнения механики сплошной среды, такие как одномерные уравнения изэнтропических течений политропного газа и гиперболические уравнения мелкой воды с произвольным дном. Для всех полученных классов уравнений приводятся законы сохранения в лагранжевых и эйлеровых координатах.

В **первом** разделе главы рассматривается уравнение, зависящее от двух произвольных функций, приведенное выше. Оно получается как уравнение Эйлера–Лагранжа для вариационного функционала специального вида. Во **втором** разделе производится групповая классификация этого уравнения. В **третьем** разделе главы даются законы сохранения рассмотренного уравнения в лагранжевых ив эйлеровых координатах, полученные с помощью теоремы Нётер. В последнем, **четвертом**, разделе приводятся заключительные замечания к главе.

Пятая глава посвящена построению *инвариантных* консервативных конечно-разностных схем для уравнений мелкой воды в потенциальных и массовых координатах Лагранжа. Для уравнений мелкой воды такие схемы на подвижных сетках были предложены в работе [37]. Основным недостатком этих схем является отсутствие у них закона сохранения энергии. В [37] отмечается сложность конструирования сохраняющих энергию разностных схем для уравнений мелкой воды. В главе производится построение инвариантной консервативной разностной схемы для одномерных уравнений мелкой воды с плоским дном, обладающей локальными законами сохранения вещества, импульса, энергии и движения центра масс.

В **первом** разделе главы даются вводные замечания и приводятся система одномерных уравнений мелкой воды с произвольным дном, имеющая в эйлеровых координатах следующий вид

$$\eta_t + ((\eta + H)u)_x = 0,$$
$$u_t + uu_x + \eta_x = 0,$$

где $u(t,x)$ – скорость движения частиц среды, $\eta(t,x)$ — высота столбца жидкости над дном, профиль которого задается с помощью функции $H(x)$.

Во **втором** разделе подробно рассматриваются уравнений мелкой воды в лагранжевых (потенциальных) координатах и в массовых координатах Лагранжа. Система уравнений мелкой воды с произвольным дном в лагранжевых координатах может быть записана в виде

$$x_{tt} - \frac{x_{ss}}{x_s^3} - H_x = 0, \qquad x_{ts} = x_{st}, \tag{11}$$

где s — лагранжева массовая координата.

В случае произвольной функции H система допускает две симметрии,

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{и} \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial s},$$

а в случае плоского дна — уже шесть симметрий:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial s}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4 = t\frac{\partial}{\partial x},$$
$$X_5 = 3t\frac{\partial}{\partial t} + 2x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_6 = 3s\frac{\partial}{\partial s} + x\frac{\partial}{\partial x}.$$

С помощью преобразования

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{\rho}, \qquad \frac{d}{dt} = D_t + uD_x$$

система (11) может быть представлена в лагранжевых *массовых* координатах:

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_t - u_s = 0,$$
$$u_t + p_s = H_x,$$

где $p = \rho^2/2$. Последняя система обладает тем же набором симметрий (в массовых координатах), что и система (11).

В **третьем** разделе для уравнений мелкой воды с плоским дном $H(x) = 0$ производится построение инвариантных разностных схем, обладающих локальными законами сохранения энергии, количества вещества, импульса и законом движения центра масс. Одна из таких схем, исследование которой проводится в следующих разделах главы, имеет вид

$$x_{t\check{t}} + \frac{1}{h_-}\left((\hat{x}_s\check{x}_s)^{-1} - (\hat{x}_{\bar{s}}\check{x}_{\bar{s}})^{-1}\right) = 0,$$
$$\tau_+ = \tau_-, \qquad h_+ = h_-.$$

В лагранжевых массовых координатах последняя схема может быть записана в виде

$$\begin{gathered}
\underset{-\tau}{D}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \underset{-s}{D}\left(\frac{u^+ + \check{u}^+}{2}\right) = 0,\\
\underset{-\tau}{D}(u) + \underset{-s}{D}\left(\left\{\frac{4}{\rho\check{\rho}} - \frac{2}{\sqrt{p}}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\check{\rho}}\right) + \frac{1}{p}\right\}^{-1}\right) = 0,\\
x = u_t, \qquad x_s = \frac{1}{\sqrt{p}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\check{p}}} + \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{2}{\check{\rho}},\\
h_+ = h_-, \quad \tau_+ = \tau_-.
\end{gathered} \tag{12}$$

Здесь схема дополнена разностными уравнениями, связывающими потенциальные и массовые лагранжевы координаты и разностным аналогом уравнения состояния $p \propto \rho^2$.

Также в разделе приводится инвариантная разностная схема для случая произвольного дна, обладающая локальным законом сохранения энергии.

В **четвертом** разделе главы проводится численное исследование инвариантной схемы (12) на примере нескольких тестовых задач. По этой схеме производятся расчеты, результаты которых сравниваются с результатами расчетов по другим схемам:

(a) явной разностную схеме, представляющей собой простую разностную аппроксимацию системы уравнений мелкой воды;

(b) полностью консервативной схеме Самарского–Попова уравнений газовой динамики [32], адаптированной под уравнения мелкой воды.

В публикации [10], посвященной численному исследованию полученной инвариантной схемы, в качестве тестовых задач рассматриваются различные известные гладкие решения одномерных уравнений мелкой воды с плоским дном и производится контроль выполнения (локальных) разностных законов сохранения энергии и импульса на этих решениях. В [13] рассмотрены тестовые задачи, имеющие разрывные решения, причем для сглаживания решений на разрывах применяется искусственная вязкость.

Ограничимся здесь рассмотрением известного автомодельное решения задачи об извлечении поршня с постоянной скоростью из среды, имеющей начальные значения параметров u_0 и ρ_0 (подробное описание задачи приводится, например, в [32]). В результате образуется простая волна разрежения, которая соединяется с двумя тривиальными постоянными решениями. В случае одномерной мелкой воды параметры в области волны разрежения определяются по формулам

$$\rho(s) = \rho_0 (s/s_0)^{\frac{2}{3}}, \qquad u(s) = 2c_0 \left((s/s_0)^{\frac{1}{3}} - 1 \right), \tag{13}$$

где $s_0 = c_0 \rho_0$ и $c_0^2 = 2\rho_0$.

Результаты рачетов для выбранных начальных данных приведены на Рис. 4 и 5.

На Рис. 4 в верхней половине показаны точные решения для плотности и для скоростей частиц среды и полученные по рассматриваемым схемам решения тестовой задачи. В нижней части рисунка изображены отклонения решений, полученных по схемам, от точного решения.

На Рис. 5 представлены значения локальных разностных законов сохранения на полученных решениях. В верхней части рисунка изображено точное решение. В центральной и нижней частях — значения законов сохранения энергии и импульса соответственно.

В рассматриваемом здесь примере, равно как и во всех остальных примерах, рассмотренных в диссертационной работе, полученная *инвариантная* разностная схема показывает сравнительно точные значения законов сохранения на решениях.

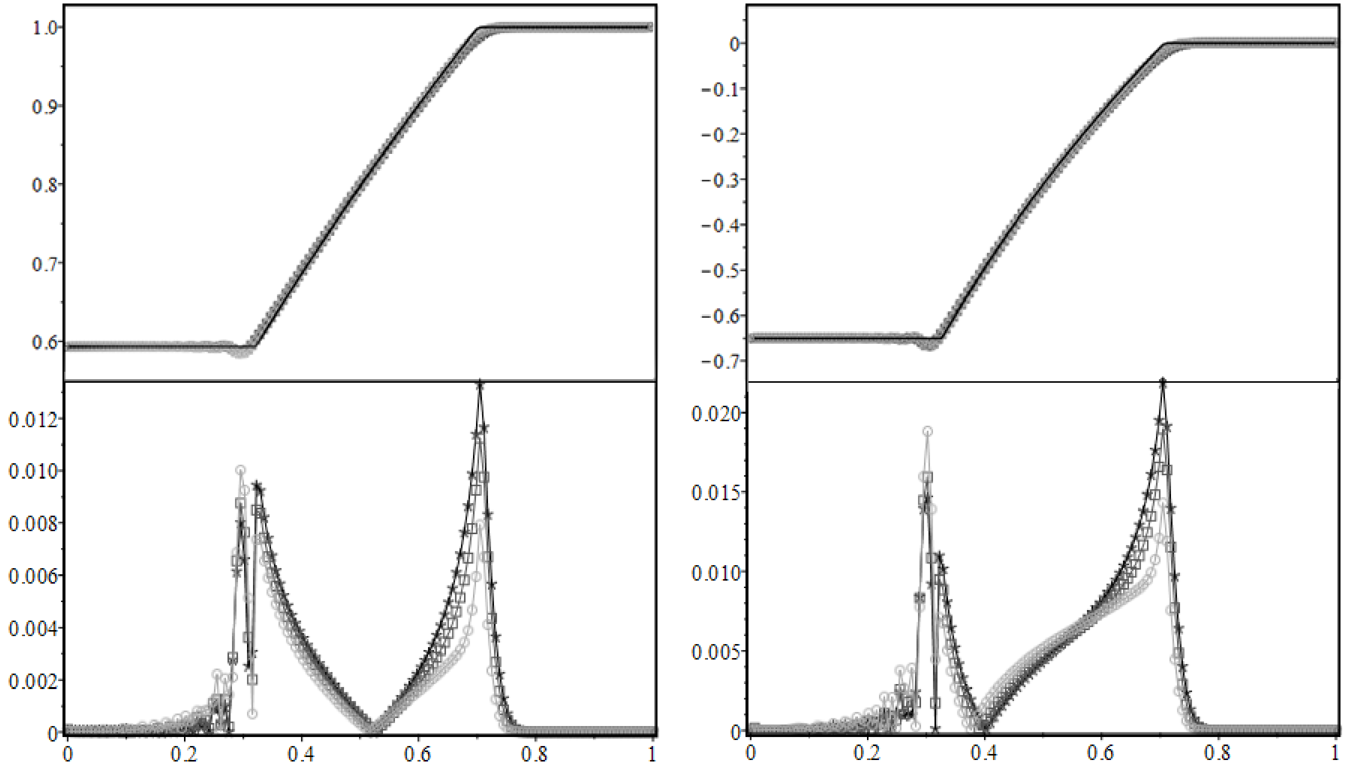

Рис. 4 — Решения ρ (слева) и u (справа) тестового задания: точное решение (—), инвариатная схема (—□—), явная схема (—○—) и схема Самарского–Попова (—★—)

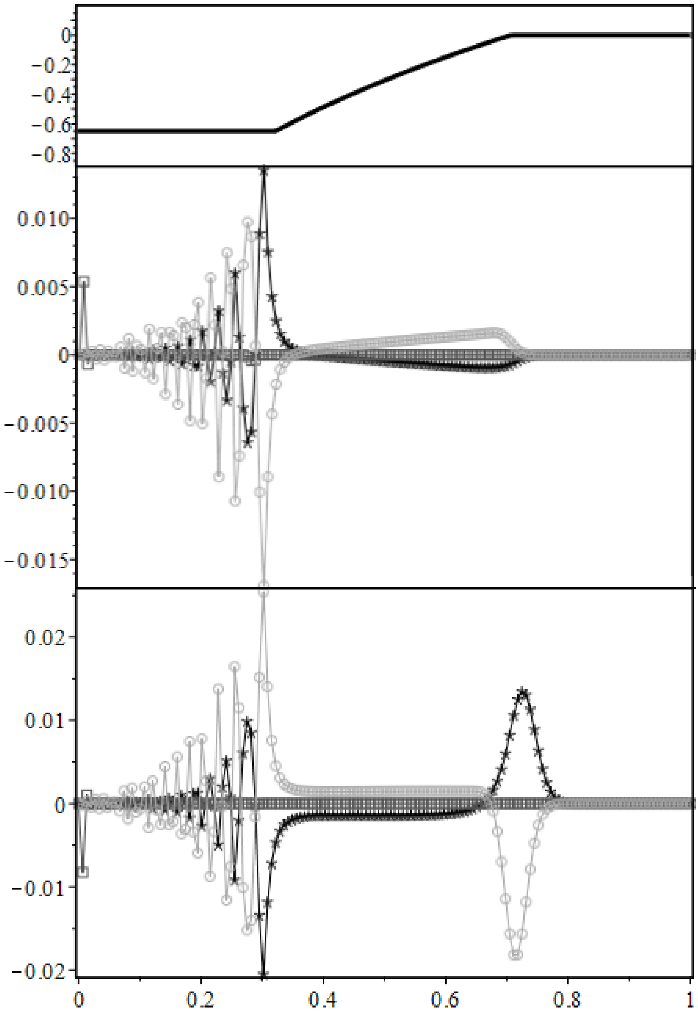

Рис. 5 — Значения законов сохранения энергии и импульса на решениях тестового задания. Обозначения: инвариатная схема (—□—), явная схема (—○—), схема Самарского–Попова (—⋆—)

Пятый раздел главы посвящен описанию программного комплекса Schemelib, специально разработанного для проведения численных расчетов по различным конечно-разностным схемам для уравнений мелкой воды и одномерных уравнений газовой динамики.

Комплекс Schemelib позволяет эффективно производить численные расчеты по разностным схемам для одномерным уравнений газовой динамики и уравнений мелкой воды, содержит стандартный набор тестовых заданий и позволяет добавлять новые тестовые задания, точные решения, отображать численные результаты и сопоставлять результаты, полученные для различных схем. Общая структура разработанного комплекса, решающего перечисленные задачи, схематически изображена на Рис. 6. В основе

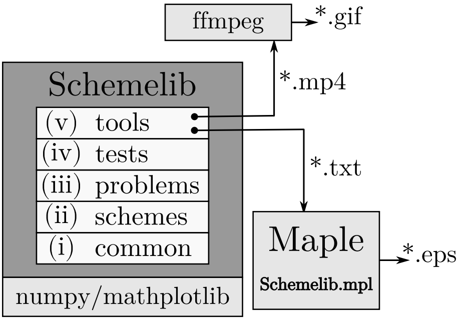

Рис. 6 — Структура программного комплекса Schemelib

комплекса Schemelib лежит модуль, разработанный на высокоуровневом языке программирования Python с помощью библиотеки NumPy, предназначенной для научных вычислений, и библиотеки Matplotlib визуализации данных. Основной модуль Schemelib может быть условно представлен в виде стека, состоящего из следующих пяти программных «слоев»:

(i) Слой *common* содержит низкоуровневые структуры данных, алгоритмы и утилиты для эффективной работы с конечно-разностными схемами на базе массивов NumPy, а также различные вспомогательные функции и классы.

(ii) Слой *schemes* содержит набор реализаций стандартных базовых явных и неявных конечно-разностных схем для уравнений одномерной газовой динамики и уравнений мелкой воды. Этот набор может быть расширен пользователем.

(iii) Слой *problems* включает в себя точные решения для различных тестовых задач и некоторый вспомогательный функционал. Пользователь может добавлять новые точные решения самостоятельно.

(iv) Слой *test* включает набор стандартных тестовых заданий, которые формируются с помощью точных решений из слоя *problems*. Тестовые задания расчитываются по схемам из слоя *schemes*. Именно со слоем *test* большую часть времени работает пользователь, используя стандартные задания или формируя собственные на базе уже имеющихся.

(v) Вспомогательный слой *tools* применяется для графического отображения результатов расчетов, а также с целью экспорта данных в различные форматы, подходящие для публикации результатов расчетов или же пригодные для дальнейшей работы с результатами в системах компьютерной алгебры.

Второй модуль, Schemelib.mpl, реализован в виде пакета системы Maple и используется в Maple для импорта данных, экспортированных с помощью функций слоя *tools* (в текстовом формате TXT). В первую очередь это удобно для более тонкой работы с графиками решений тестовых задач. Кроме того, с помощью Maple удобно переводить данные в векторные форматы, например в формат EPS.

Еще один вспомогательный модуль позволяет, используя системную утилиту ffmpeg, представлять результаты расчетов в виде анимаций формата GIF.

Детали реализации модулей Schemelib и примеры применения комплекса приведены в одном из приложений диссертационной работы. Множество примеров практического применения Schemelib можно найти на веб-сайте автора [54].

В последнем, **шестом**, разделе главы приводятся заключительные замечания.

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы.

В приложения вынесены

– численные реализации полученных в работе инвариантных разностных схем;
– детали реализации и примеры применения разработанного программного комплекса Schemelib;
– таблицы, содержащие законы сохранения уравнений Эйлера—Лагранжа специального вида для течения жидкости и газа, рассмотренных в четвертой главе.

Основные результаты

1. С помощью разностного аналога теоремы Нётер было построено семейство инвариантных разностных схем для ОДУ второго порядка из классификационного списка Ли, обладающих всеми разностными аналогами первых интегралов дифференциального уравнения. Среди инвариантного семейства схем есть точная

схема. Это семейство разностных схем завершает список интегрируемых инвариантных моделей, полученных в результате групповой классификации, проведенной в [20]. Дополнительно были построены точные инвариантные разностные схемы для некоторых нелинейных ОДУ второго порядка из классификационного списка Ли.

2. В работе произведено обобщение разностного аналога тождества Нётер на случай системы обыкновенных разносных уравнений. Построена инвариантная разностная схема для системы уравнений Ермакова специального вида, обладающая всеми разностными аналогами первых интегралов дифференциальной системы.
3. Разработан и применен на конкретных примерах уравнений разностный аналог метода сопряженных уравнений для случая обыкновенных разностных уравнений, не допускающих вариационной формулировки.
4. Предложен разностный аналог прямого метода [49] для разностных уравнений в частных производных на равномерных ортогональных сетках. С его помощью построены инвариантные разностные схемы линейного и нелинейного волнового уравнений, обладающие законами сохранения.
5. Проведена групповая классификация одномерных уравнений Эйлера–Лагранжа специального вида в лагранжевых координатах для течения жидкости и газа. Частными случаями таких уравнений являются уравнения мелкой воды с произвольным и плоским дном, а также одномерные уравнения газовой динамики для изэнтропических течений политропного газа. Приведены законы сохранения для указанных моделей в координатах Лагранжа и Эйлера.
6. Построена инвариантная консервативная разностная схема для одномерных уравнений мелкой воды с плоским дном, обладающая локальными законами сохранения вещества, импульса, энергии и движения центра масс. Разработан комплекс программ, позволяющий эффективно производить численные расчеты одномерных уравнений газовой динамики и уравнений мелкой воды, содержащий стандартный набор тестовых заданий и позволяющий добавлять новые тестовые задания, точные решения, отображать численные результаты и сопоставлять результаты, полученные для различных схем.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Дородницын В. А., Капцов Е. И.* Инвариантные Разностные Схемы Для Системы Ермакова // *Дифференциальные уравнения.* — 2016. —

01. — Т. 52. — С. 965–980.

2. First integrals of difference equations which do not possess a variational formulation / P. Winternitz, V. A. Dorodnitsyn, E. I. Kaptsov, R. V. Kozlov // *Doklady Mathematics.* — 2014. — 01. — Vol. 89, no. 1. — Pp. 106–109.

3. The adjoint equation method for constructing first integrals of difference equations / V. A. Dorodnitsyn, E. I. Kaptsov, R. V. Kozlov, P. Winternitz // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* — 2015. — 01. — Vol. 48, no. 5. — P. 055202.

4. *Капцов Е. И., Дородницын В. А., Шевяков А. Ф.* Инвариантные разностные схемы нелинейного волнового уравнения, обладающие законами сохранения // Труды XV Всероссийской конференции-школы молодых исследователей / Под ред. Б. Н. Четверушкин, Л. А. Крукиер. — Математическое моделирование и современные информационные технологии. — Ростов н/Д.: ЮГИНФО ЮФУ, 2013. — С. 111–115.

5. *Капцов Е. И.* Первые интегралы обыкновенных разностных уравнений, не обладающих вариационной постановкой // Тезисы докладов XXII Всероссийской конференции «Теоретические основы и конструирования численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященной памяти К. И. Бабенко. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2018. — С. 50.

6. *Kaptsov E.I., Meleshko S.V.* Conservation laws of the one-dimensional isentropic gas dynamics equations in Lagrangian coordinates // *AIP Conference Proceedings.* — 2019. — Vol. 2153, no. 1. — P. 020009.

7. *Дородницын В. А., Капцов Е. И.* Дискретизация обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, обладающих симметриями // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2013. — Vol. 53. — Pp. 1329–1355.

8. First integrals of ordinary difference equations beyond Lagrangian methods (A pedagogical treatment) / V. A. Dorodnitsyn, E. I. Kaptsov, R. V. Kozlov, P. Winternitz // *arXiv e-prints.* — 2013. — 11. — P. arXiv:1311.1597.

9. *Дородницын В. А., Капцов Е. И.* Инвариантные разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, обладающих симметриями // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша.* — 2014.

10. *Капцов Е. И.* Численная реализация инвариантной схемы для одномерных уравнений мелкой воды в лагранжевых координатах // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша.* — 2019.

11. *Kaptsov E.I., Meleshko S.V.* Analysis of the one-dimensional Euler–Lagrange equation of continuum mechanics with a Lagrangian of a special form // *Applied Mathematical Modelling.* — 2020. — Vol. 77. — Pp. 1497–1511.

12. *Kaptsov E. I., Meleshko S. V.* Conservation laws of the two-dimensional gas dynamics equations // *International Journal of Non Linear Mechanics.* — 2019. — Vol. 112. — Pp. 126–132.

13. *Dorodnitsyn V. A., Kaptsov E. I.* Shallow water equations in Lagrangian coordinates: symmetries, conservation laws and its preservation in difference models // *arXiv e-prints.* — 2019. — 12. — P. arXiv:1912.13314.

Цитированные статьи

14. *Дородницын В. А.* Группы преобразований в сеточных пространствах // *Современные проблемы матем. Новейшие достижения.* — 1989. — Vol. 34.

15. *Дородницын В. А.* Конечно-разностный аналог теоремы Нетер // *Докл. Академии Наук.* — 1993. — Т. 328, № 6. — С. 678.

16. *Бакирова М. И., Дородницын В. А.* Инвариантная разностная модель для уравнения $u_t = u_{xx} + \delta u \ln u$ // *Дифференц. уравнения.* — 1994. — Т. 30. — С. 1697–1702.

17. *Дородницын В. А.* Групповые свойства разностных уравнений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

18. *Levi D., Winternitz P.* Continuous symmetries of difference equations // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* — 2005. — 12. — Vol. 39, no. 2. — Pp. R1–R63.

19. *Winternitz P.* Symmetry preserving discretization of differential equations and Lie point symmetries of differential-difference equations. — 2011.

20. *Dorodnitsyn V. A., Kozlov R. V., Winternitz P.* Lie group classification of second-order ordinary difference equations // *Journal of Mathematical Physics.* — 2000. — Vol. 41, no. 1. — Pp. 480–504.

21. *Dorodnitsyn V. A. Kozlov R. V. Winternitz P.* Continuous symmetries of Lagrangians and exact solutions of discrete equations // *Journal of Mathematical Physics.* — 2004. — Vol. 45, no. 1. — Pp. 336–359.

22. *Noether E.* Invariante Variations problem // *Konigliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen, Nachrichten, Mathematisch-Physikalische Klasse Heft 2.* — 1918. — Pp. 235–257. — English translation: Transport Theory and Statist. Phys., 1(3), 1971, 183-207.

23. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983.

24. *Dorodnitsyn V. A., Kozlov R. V.* First integrals of difference Hamiltonian equations // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* — 2009. — 10. — Vol. 42. — P. 454007.

25. Lagrangian and Hamiltonian formalism for discrete equations: symmetries and first integrals / V. A. Dorodnitsyn, R. V. Kozlov, D. Levi et al. // *Symmetries and Integrability of Difference Equations.* — 2011. — 01. — Pp. 7–49.

26. *Anco S. C., Bluman G. W.* Derivation of conservation laws from nonlocal symmetries of differential equations // *Journal of Mathematical Physics.* — 1996. — Vol. 37, no. 5. — Pp. 2361–2375.

27. *Ibragimov N. H.* Nonlinear Self-Adjointness and Conservation Laws // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* — 2011. — 10. — Vol. 44. — P. 432002.

28. *Anco S. C., Bluman G. W.* Direct Construction of Conservation Laws from Field Equations // *Physical Review Letters.* — 1997. — 04. — Vol. 78. — Pp. 2869–2873.

29. *Anco S. C., Bluman G. W.* Integrating factors and first integrals for ordinary differential equations // *European Journal of Applied Mathematics.* — 1998. — 06. — Vol. 9. — Pp. 245 – 259.

30. *Grant T. J., Hydon P. E.* Characteristics of Conservation Laws for Difference Equations // *Found. Comput. Math.* — 2013. — Vol. 13, no. 4. — Pp. 667–692.

31. *Hydon P. E.* Difference Equations by Differential Equation Methods. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. — Cambridge University Press, 2014.

32. *Попов Ю. П., Самарский А. А.* Разностные методы решения задач газовой динамики. — М.: Наука, 1992.

33. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1968.

34. *Колдоба А. В., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П.* Двухслойные полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1987. — Т. 27. — С. 779–784.

35. Об одной двухслойной полностью консервативной разностной схеме газовой динамики в эйлеровых переменных с адаптивной регуляризацией решения / Ю. А. Повещенко, М. Е. Ладонкина, В. О. Подрыга и др. // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша.* — 2019.

36. *Еленин Г. Г., Крылов В. В.* Полностью консервативная разностная схема для уравнений двухслойной «мелкой воды» в лагранжевых координатах // *Дифференц. уравнения.* — 1982. — Т. 18, № 7. — С. 1190–1196.

37. *Bihlo A., Popovych R.* Invariant Discretization Schemes for the Shallow-Water Equations // *SIAM Journal on Scientific Computing.* — 2012. — 01. — Vol. 34.

38. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

39. *Попов Ю. П., А. Самарский А.* Полностью консервативные разностные схемы // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1969. — Т. 9, № 4. — С. 953–958.

40. *Попов Ю. П., А. Самарский А.* Полностью консервативные разностные схемы для уравнений магнитной гидродинамики // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1970. — Т. 10, № 4. — С. 990–998.

41. Об одном подходе к построению консервативной разностной схемы для задачи двухфазной фильтрации / И. В. Попов, Ю. А. Повещенко, С. В. Поляков, П. И. Рагимли // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша.* — 2017.

42. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.

43. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

44. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989.

45. Applications of Group-Theoretic Methods in Hydrodynamics / V. K. Andreev, O. V. Kaptsov, V. V. Pukhnachov, A. A. Rodionov. — Dordrecht: Kluwer, 1998.

46. CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations / Ed. by N. H. Ibragimov. — Boca Raton: CRC Press, 1995. — Vol. 2.

47. *Ермаков В. П.* Обыновенные дифференциальные уравнения второго порядка. Условия полной интегрируемости. // *Университетские известия, Серия III.* — 1880. — Т. 9, № 1.

48. *Bluman G. W., Anco S. C.* Symmetry and Integration Methods for Differential Equations. — New York: Springer, 2002. — 01. — P. 422.

49. *Bluman G. W., Cheviakov A. F., Anco S. C.* Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations. — New York: Springer, 2010. — Applied Mathematical Sciences, Vol.168.

50. *Rogers C., An H.* Ermakov-Ray-Reid Systems in (2+1)Dimensional Rotating Shallow Water Theory // *Studies in Applied Mathematics.* — 2010. — 06. — Vol. 125.

51. *Bourlioux A, Cyr-Gagnon C, Winternitz P.* Difference schemes with point symmetries and their numerical tests // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* — 2006. — 05. — Vol. 39, no. 22. — Pp. 6877–6896.

52. *Cheviakov A. F., Ganghoffer J. F.* One-dimensional nonlinear elastodynamic models and their local conservation laws with applications to biological membranes // *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials.* — 2016. — 05. — Vol. 58. — P. 105—121.

53. *Коробицын В. А.* Термодинамически согласованные разностные схемы // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1989. — Т. 29. — С. 309–312.

54. *Капцов Е. И.* Системы уравнений гидродинамического типа: симметрии, законы сохранения, инвариантные разностные схемы [сайт]. — 2019. — URL: http://gasdyneqns.atwebpages.com/.

Капцов Евгений Игоревич

Симметрии и законы сохранения нелинейных дискретных моделей сплошной среды

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ______________________________________