

Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Российской академии наук»



На правах рукописи

Капцов Евгений Игоревич

**Симметрии и законы сохранения нелинейных дискретных
моделей сплошной среды**

01.01.07 — вычислительная математика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф-м. н., г.н.с.
Дородницын Владимир Анатольевич

Москва — 2020

Оглавление

	Стр.
Введение	6
Глава 1. Первые интегралы и инвариантные разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих симметриями	17
1.1 Группы преобразований (предварительные сведения)	21
1.1.1 Однопараметрические группы преобразований и алгебры Ли операторов	21
1.1.2 Алгебра бесконечно малых преобразований в пространстве конечно-разностных переменных	25
1.1.3 Конечно-разностные сетки и условия их инвариантности	28
1.1.4 Инвариантные вариационные задачи и законы сохранения	29
1.2 Инвариантные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка	31
1.2.1 Пример 1	36
1.2.2 Метод возмущения инвариантного лагранжиана	37
1.2.3 Пример 2	41
1.2.4 Пример 3	43
1.2.5 Пример 4	44
1.2.6 Численная реализация инвариантных схем	47
1.3 Система ОДУ Ермакова	47
1.3.1 Тождество Нётер для систем ОДУ второго порядка и первые интегралы	48
1.3.2 Система Ермакова и некоторые ее свойства	49
1.3.3 Консервативные разностные схемы систем ОДУ второго порядка	55
Глава 2. Симметрии и законы сохранения для дифференциальных уравнений, не допускающих вариационной формулировки	69

2.1	Сопряженные уравнения дифференциальных уравнений в частных производных	70
2.2	Случай обыкновенных дифференциальных уравнений	72
2.3	Дискретизация обыкновенных дифференциальных уравнений, сохраняющая симметрии и первые интегралы разностных схем	82
2.4	Заключительные замечания	96
Глава 3. Симметрии, разностные схемы и законы сохранения для волновых уравнений		
3.1	Инвариантные разностные схемы уравнений второго порядка, обладающие законами сохранения	98
3.2	Прямой метод поиска законов сохранения инвариантных разностных схем	101
3.3	Примеры. Инвариантные разностные схемы волнового уравнения, обладающие законами сохранения	104
3.3.1	Линейное волновое уравнение	104
3.3.2	Нелинейное волновое уравнение	108
3.4	Заключительные замечания	115
Глава 4. Групповая классификация уравнения Эйлера–Лагранжа специального вида для течения жидкости и газа		
4.1	Рассматриваемое уравнение	119
4.2	Групповая классификация рассматриваемого уравнения	120
4.2.1	Группа эквивалентных преобразований	121
4.2.2	Допускаемая группа Ли преобразований	123
4.2.3	Случай линейного параметра классификации	123
4.2.4	Случай нелинейного параметра классификации	127
4.3	Законы сохранения	132
4.4	Заключительные замечания	133
Глава 5. Уравнения мелкой воды: симметрии, законы сохранения и инвариантные консервативные разностные схемы		
		135

5.1	Уравнения мелкой воды в эйлеровых и лагранжевых массовых координатах	137
5.1.1	Эйлеровы координаты	137
5.1.2	Лагранжевы массовые координаты	140
5.2	Уравнения мелкой воды в потенциальных координатах Лагранжа	141
5.2.1	Случай мелкой воды с произвольным дном	141
5.2.2	Мелкая вода с линейным дном	144
5.3	Инвариантные консервативные разностные схемы для уравнений мелкой воды в лагранжевых координатах	145
5.3.1	Построение инвариантной разностной схемы	146
5.3.2	Выражение полученной схемы через конечно-разностные инварианты	149
5.3.3	Локальные законы сохранения полученной схемы в потенциальных координатах	150
5.3.4	Инвариантные схемы и их локальные законы сохранения в лагранжевых массовых координатах	152
5.3.5	Схемы для случая мелкой воды с произвольным дном	155
5.4	Сравнительный анализ некоторых разностных схем для уравнений мелкой воды	157
5.5	Программный комплекс Schemelib	160
5.6	Заключительные замечания	163
	Заключение	165
	Список литературы	167
	Список рисунков	182
	Список таблиц	183
	Приложение А. Численная реализация точных инвариантных схем для ОДУ второго порядка	184
	Приложение Б. Численная реализация одной инвариантной схемы для системы Ермакова	187

Приложение В. Результаты расчетов по конечно-разностным схемам для уравнений мелкой воды	191
Приложение Г. Законы сохранения уравнений Эйлера–Лагранжа специального вида для течения жидкости и газа	198
Приложение Д. Некоторые детали реализации и примеры использования программного комплекса Schemelib	203
Д.1 Детали реализации Schemelib	203
Д.2 Пример применения Schemelib	204

Введение

Настоящая работа посвящена изучению и построению инвариантных конечно-разностных уравнений, разностных сеток и разностных функционалов. Моделирование заданной системы дифференциальных уравнений с помощью разностных уравнений и сеток может быть основано на симметрии. Более того, так же как и в дифференциальном случае, использование вариационных принципов для получения законов сохранения является следствием симметрий разностной модели. Известно, что одна и та же система дифференциальных уравнений может быть аппроксимирована с помощью неограниченного количества разностных схем. Поэтому при конечно-разностном моделировании всегда стоит вопрос об отборе схем, предпочтительных с какой-либо стороны. В качестве критериев отбора часто выступают фундаментальные физические принципы, присутствующие в исходной модели (выполнение законов сохранения, вариационные принципы и т. д.). В связи с этим большое значение приобретают геометрические соображения при построении численных алгоритмов, позволяющие вносить «физическое содержание» изучаемого объекта в численный метод исследования его математической модели [1; 2]. Такой взгляд привел к созданию методов построения консервативных и полностью консервативных разностных схем [3; 4].

Впервые теория непрерывных групп преобразований была сформулирована С. Ли при развитии им общих методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Дальнейшее развитие группового анализа дифференциальных уравнений и систематическое изучение структуры множества их решений связано с работами Л.В. Овсянникова [5; 6], Г. Биркгофа [7] и их учеников и последователей [8–12]. С годами приложение идей С. Ли к описанию симметрии дифференциальных уравнений оформилось в самостоятельное научное направление. В настоящее время групповой анализ представляет собой общепризнанный метод описания непрерывных симметрии дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений математической физики.

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Исследование групповых свойств дискретных уравнений, заданных на сеточных пространствах, началось в конце 1980-ых годов с работ [13–15] и за последние 30 лет был достигнут значительный прогресс в распространении теории

групп Ли на конечно-разностные уравнения (см. обзор в [1; 2; 16; 17], а также работы [1; 2; 13; 14; 18–36]). В работе [27] была проведена групповая классификация всех обыкновенных разностных уравнений второго порядка, обладающих нетривиальными симметриями. В работах [1; 2; 14; 21; 28; 37] разработан лагранжев формализм, позволяющий строить консервативные разностные модели с помощью разностного аналога теоремы Нётер [8; 38]. Его обобщение на случай систем обыкновенных разностных уравнений проводится в [39]. В работах [24–26] разработан гамильтонов формализм, в рамках которого также дается способ строить схемы, обладающие первыми интегралами.

Законы сохранения уравнений, не имеющих вариационной постановки, могут быть получены с помощью тождества Лагранжа, связывающего симметрию уравнения, решения сопряженного уравнения и законы сохранения (метод сопряженного уравнения) [10; 40–43]. Разностный аналог этой конструкции был разработан в работах [44; 45].

В работах [46; 47] разработан альтернативный подход к законам сохранения (т. н. прямой метод), основанный на нахождении интегрирующего множителя. Прямой метод для разностных уравнений также используется в настоящей работе.

Непрерывные симметрии дискретных уравнений без требования аппроксимации какой-либо системы дифференциальных уравнений также представляют интерес, поскольку дискретные уравнения возникают в качестве первичных математических моделей в механике и физике. Их интегрируемость, наличие точных решений и законов сохранения, безусловно, связаны с присутствием у них непрерывной симметрии. Симметриям дискретных уравнений посвящены работы [48; 49].

Таким образом, групповой анализ дискретных и конечно-разностных уравнений — активно развивающаяся область математики. Его конечная цель состоит в том, чтобы превратить теорию групп Ли в столь же эффективный инструмент анализа и решения разностных уравнений, каковым она является сейчас для уравнений дифференциальных.

Разностные методы находят широкое применение в численном исследовании физических явлений в механике сплошных сред [4; 50–61]. Особый интерес представляют инвариантные конечно-разностные схемы, то есть схемы, обладающие симметриями [1; 2], поскольку это фундаментальное геометрическое свойство исходных уравнений. В качестве примера таких схем можно привести

инвариантные разностные схемы для уравнений мелкой воды, предложенные в [56], в которых, однако, не удалось получить закон сохранения энергии. Законы сохранения представляют собой фундаментальные законы природы и имеют широкое применение в механике сплошных сред: они представляют практическую основу для понимания эффектов, происходящих вследствие движения в сплошной среде и играют значительную роль при конструировании численных схем [4; 50; 51; 57].

Построение консервативных разностных схем — одна из актуальных задач моделирования физических процессов. Важность сохранения разностных аналогов законов сохранения обсуждалась на примере одномерных уравнений газовой динамики и магнитной гидродинамики в [3] и [62]. Этот подход привел к понятию полностью консервативных разностных схем, где помимо собственно консервативности, схемы удовлетворяют дополнительным условиям, выражающим баланс различных компонентов энергии. Примеры построения таких схем в газовой динамике, теории мелкой воды, магнитной гидродинамике можно найти в [3; 52–55].

Важной частью группового анализа является групповая классификация дифференциальных уравнений, поскольку позволяет рассматривать целые классы уравнений с групповой точки зрения как единые объекты. Этому посвящена обширная литература [5; 8; 9; 63–66]. Групповой классификации разностных уравнений посвящены работы [1; 2; 27; 67].

Целью данной работы состоит в разработке методов построения инвариантных разностных схем, обладающих законами сохранения, а также в реализации инвариантных разностных схем для уравнений сплошной среды. В диссертации ставятся и решаются следующие задачи:

1. Построение с помощью разностного аналога теоремы Нётер новой инвариантной разностной схемы для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) второго порядка из классификационного списка Ли, обладающей всеми разностными аналогами первых интегралов дифференциального уравнения, и ее численное исследование (эта интегрируемая схема завершает список интегрируемых инвариантных разностных схем, полученных в результате групповой классификации, проведенной в [27]).

2. Построение точных инвариантных разностных схем для некоторых нелинейных ОДУ второго порядка из классификационного списка Ли и их численное исследование.
3. Обобщение разностного аналога тождества Нётер на случай системы обыкновенных разностных уравнений. Построение, с помощью этого обобщения, инвариантной разностной схемы системы уравнений Ермакова [68] специального вида, обладающей всеми разностными аналогами первых интегралов исходной дифференциальной системы.
4. Разработка разностного аналога метода сопряженных уравнений для случая обыкновенных разностных уравнений, не допускающих вариационной формулировки.
5. Разработка разностного аналога прямого метода [10] для разностных уравнений в частных производных. Построение с его помощью инвариантной разностной схемы волновых уравнений, обладающих разностными законами сохранения.
6. Групповая классификация одномерных уравнений механики сплошной среды специального вида в лагранжевых координатах. Это позволяет рассмотреть, в частности, случай уравнения мелкой воды с произвольным дном, и найти законы сохранения в координатах Лагранжа и Эйлера для последующей дискретизации и численной реализации.
7. Построение инвариантной консервативной разностной схемы для одномерных уравнений мелкой воды с плоским дном, обладающей локальными законами сохранения массы, импульса, энергии и движения центра масс. Разработка комплекса программ с целью упрощения численного исследования схемы и ее сопоставления другими известными схемами уравнений мелкой воды.

Научная новизна:

- Построена интегрируемая инвариантная схема ОДУ второго порядка из списка Ли, являющаяся важным дополнением к групповой классификации инвариантных разностных схем второго порядка [28].
- Построено обобщение разностного аналога тождества Нётер на случай системы обыкновенных разностных уравнений и приведен пример применения нового тождества.
- Разработан разностный аналог метода сопряженных уравнений для обыкновенных разностных уравнений, позволяющий находить разност-

ные первые интегралы и в случаях, когда задача не допускает вариационной постановки.

- Приведен разностный аналог прямого метода нахождения законов сохранения для случая разностных уравнений второго порядка в частных производных. С его помощью построены инвариантные разностные схемы для нелинейного волнового уравнения, обладающие локальными законами сохранения.
- Произведена групповая классификация уравнений сплошной среды в лагранжевых координатах специального вида, дополняющая уже известные классификации. Найдены законы сохранения этих уравнений в координатах Эйлера и Лагранжа. Эти результаты используются при построении инвариантной разностной схемы для уравнений мелкой воды с плоским дном, обладающей локальными законами сохранения.
- Построена новая инвариантная полностью консервативная разностная схема для одномерных уравнений мелкой воды с плоским дном, обладающая локальными законами сохранения вещества, импульса, энергии и движения центра масс.
- Разработан гибкий программный инструментарий, позволяющий эффективно производить численные расчеты по одномерным схемам для уравнений газовой динамики и уравнений мелкой воды, содержащий стандартный набор тестовых заданий и позволяющий без труда добавлять новые тестовые задания, точные решения, отображать численные результаты и сопоставлять результаты, полученные для разных схем.

Теоретическая и практическая значимость. С теоретической точки зрения полученные результаты представляют собой вклад в развитие методов группового анализа разностных уравнений и методов построения инвариантных разностных схем, в том числе для уравнений, не допускающих вариационную постановку.

С практической точки зрения результаты работы могут быть использованы при построении разностных схем — в работе предложен целый ряд методов, помогающих строить схемы, обладающие важными качественными свойствами аппроксимируемых дифференциальных уравнений, такими как инвариантность, наличие законов сохранения (консервативность) и интегрируемость.

Групповая классификация одномерных уравнений сплошной среды специального вида, произведенная в работе, расширяет и дополняет уже известные классификации и ее результаты могут быть использованы в справочных целях.

Методология и методы исследования. При решении поставленных задач использованы методы группового анализа дифференциальных и разностных уравнений. В процессе выполнения работы были использованы методы вычислительной математики. Численное исследование ряда задач проводилось с использованием разработанного программного комплекса.

Основные положения, выносимые на защиту: На защиту выносятся основные результаты диссертационной работы, изложенные в Заключение диссертационной работы.

Достоверность изложенных в диссертационной работе результатов обеспечивается проверкой предложенных численных методик на тестовых задачах, имеющих точные решения, и сравнением результатов с расчетными данными, полученными с помощью других методов. Для полученных в работе точных конечно-разностных схем достоверность результатов обеспечивается именно точностью этих схем (решения точных разностных схем во всех точках совпадают с решениями аппроксимируемых уравнений). Все полученные в работе разностные тождества проверяются прямым вычислением. Результаты проведенной в четвертой главе групповой классификации одномерных уравнений течений жидкости и газа получены стандартными методами классификации (см. [66]) и, кроме того, во многом пересекаются с уже известными классификациями и, таким образом, проверяются путем сопоставления.

Апробация работы. Результаты диссертации обсуждались на следующих конференциях:

- XV Всероссийская конференция–школа «Современные проблемы математического моделирования» пос. Дюрсо, 2013 г., [69];
- XXII Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», им. К.И. Бабенко, пос. Дюрсо, 2018 г., [70];
- Международная конференция «Modern Treatment of Symmetries, Differential Equations and Applications», г. Накхонратчасима, Таиланд, 2019 г., [71].

Результаты научной работы также докладывались автором и обсуждались на научном семинаре кафедры вычислительных методов факультета вычислитель-

ной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова 11 сентября 2019, семинаре теоретического отдела Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 9 сентября 2019, научном семинаре в Институте вычислительного моделирования СО РАН в Красноярске, 6 сентября 2019, и на научном семинаре ИПМ им. М. В. Келдыша под руководством проф. В. Ф. Тишкина и А. А. Кулешова, 12 сентября 2019.

Публикации и личный вклад автора. Основной материал диссертации опубликован в 8 научных работах [22; 39; 44; 45; 72–75] и в 3 статьях [69–71] в сборниках трудов конференций. Все перечисленные научные работы опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК, а работы [45; 74; 75] — в зарубежных рецензируемых журналах. Работы [22; 39; 44; 45; 74; 75] проиндексированы в международных реферативных базах данных Web of Science и Scopus.

В работах [22; 39; 44; 45; 72] постановки задач и общие схемы их исследований принадлежат научному руководителю В. А. Дородницыну. В работах [74; 75] постановка задач осуществлялась В. А. Дородницыным и С. В. Мелешко. В работах [22; 39; 72–74] все основные новые результаты получены автором диссертации самостоятельно. В работах [44; 45] результаты получены авторами совместно. Из опубликованных в соавторстве работ в диссертационную работу включены преимущественно результаты автора.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках следующих грантов:

- грант Российского научного фонда, проект №18-11-00238 «Системы уравнений гидродинамического типа: симметрии, законы сохранения, инвариантные разностные схемы»;
- гранты Правительства РФ по постановлению №220, договоры 15-01-04677-а (2015–2017 гг.) и 18-01-00890-а (2018–2020 гг.) между Минобрнауки РФ, ИПМ им. Келдыша и ведущим ученым В. А. Дородницыным по теме «Симметрии дискретных и непрерывных моделей нелинейных сред»;
- Suranaree University of Technology (Thailand) Full-time Master Researcher Fellowship (15/2561).

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения, списка литературы, списка иллюстративного материала, списка таблиц и 5 приложений. Полный

объем диссертации составляет 208 страниц, включая 20 рисунков и 8 таблиц. Список литературы содержит 157 наименований.

Краткое содержание диссертации

Первая глава посвящена построению инвариантных разностных схем для ОДУ второго порядка и систем ОДУ второго порядка, допускающих вариационную постановку (т. е. являющихся уравнениями Эйлера–Лагранжа для некоторых функций Лагранжа), построению их первых интегралов и точных решений. В качестве примеров рассматриваются ОДУ из классификационного списка С. Ли и система уравнений Ермакова [68].

В *первом* разделе главы кратко приводятся необходимые сведения из группового анализа [5; 8; 9]. Приводятся сведения по применению симметрий к конечно-разностным моделям, в том числе рассмотрена инвариантность разностных сеток [1; 2; 13]. В заключение раздела рассмотрены вариационные задачи и законы сохранения. Во *втором* разделе рассмотрены примеры построения инвариантных разностных моделей для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [22; 28]. В *третьем* разделе рассмотрена система уравнений Ермакова и для нее строится инвариантная разностная модель [39], интегрируемая в той же степени, что и аппроксимируемая дифференциальная система.

Во второй главе рассматриваются задачи, не допускающие вариационной постановки. В случае отсутствия инвариантного Лагранжиана существуют альтернативные методы получения первых интегралов, предложенные в [10; 40–43]. Эти методы сводятся к использованию решений сопряженных уравнений, получаемых из исходного уравнения с помощью вариационной производной, поэтому этот метод был назван “методом сопряженного уравнения”. В главе предлагается разностный аналог этого метода для обыкновенных разностных уравнений, который впервые был предложен в наших публикациях [44; 45]. В качестве примера рассмотрено нелинейное ОДУ третьего порядка, на основе симметрий которого строится полный набор разностных инвариантов. С помощью разностных инвариантов строится инвариантная аппроксимация и инвариантная сетка для данного ОДУ. Строится разностный аналог тождества Лагранжа, позволяющий вычислить три первых интеграла построенной разностной модели.

Разностная модель является алгебраически интегрируемой и ее общее решение совпадает с общим решением исходного ОДУ, то есть разностная модель является точной.

В *первом* разделе главы приводятся теоретические сведения по методу сопряженного уравнения в общем случае дифференциальных уравнений в частных производных. Во *втором* разделе описывается метод сопряженного уравнения для случая обыкновенных дифференциальных уравнений и приводится детальный пример решения нелинейного ОДУ третьего порядка с помощью этого метода. В *третьем* разделе описан разностный аналог метода сопряженного уравнения и приводятся примеры его использования (простой иллюстративный пример уравнения линейного осциллятора и более сложный пример аппроксимации нелинейного ОДУ из второго раздела). В последнем, *четвертом*, разделе приводятся заключительные замечания.

В третьей главе рассматриваются разностные уравнения в частных производных на примерах линейного и нелинейного волновых уравнений. Для случая разностных уравнений в частных производных приводится краткая теория, затем, с помощью разностного аналога т. н. прямого метода [10; 11], производится построение инвариантных разностных схем, обладающих законами сохранения.

В *первом* разделе главы приводятся общие сведения и основные обозначения, касающиеся разностных схем уравнений второго порядка в частных производных. Применение разностного аналога тождества Нётер [1; 2; 14; 21] в случае уравнений в частных производных затруднено в связи с появлением в тождестве “дифференциальных” частных производных независимых переменных. Более эффективным в данном случае оказывается так называемый прямой метод, который описан во *втором* разделе. В *третьем* разделе с помощью прямого метода находятся законы сохранения для схемы линейного волнового уравнения. С помощью того же метода строится инвариантная конечно-разностная схема для нелинейного волнового уравнения, возникающее в эластодинамике [76], обладающая законами сохранения. Показывается, что на 9-точечном разностном шаблоне не существует полиномиальных разностных схем нелинейного волнового уравнения, обладающих всеми законами сохранения, и производится классификация таких схем по количеству законов сохранения.

В четвертой главе проводится групповая классификация нелинейного уравнения специального вида для течения жидкости и газа в лагранжевых координатах. Это уравнение имеет форму

$$u_{tt} + G(u_x)u_{xx} - H(u) = 0, \quad G' \neq 0,$$

где G и H — произвольные функции своих аргументов. При некоторых видах функций G и H получаются известные уравнения механики сплошной среды, такие как одномерные уравнения изэнтропических течений политропного газа и гиперболические уравнения мелкой воды с произвольным дном. Для всех полученных классов уравнений приводятся законы сохранения в лагранжевых и эйлеровых координатах.

В *первом* разделе главы рассматривается уравнение, зависящее от двух произвольных функций, приведенное выше. Оно получается как уравнение Эйлера–Лагранжа для вариационного функционала специального вида. Во *втором* разделе производится групповая классификация этого уравнения. В *третьем* разделе главы даются законы сохранения рассмотренного уравнения в лагранжевых ив эйлеровых координатах, полученные с помощью теоремы Нётер. В последнем, *четвертом*, разделе приводятся заключительные замечания к главе.

Пятая глава посвящена построению инвариантных консервативных конечно-разностных схем уравнений мелкой воды в потенциальных и массовых координатах Лагранжа. Для уравнений мелкой воды такие схемы на подвижных сетках были предложены в работе [56]. Основным недостатком этих схем является отсутствие у них закона сохранения энергии. В [56] отмечается сложность конструирования сохраняющих энергию разностных схем для уравнений мелкой воды. В главе производится построение инвариантной консервативной разностной схемы для одномерных уравнений мелкой воды с плоским дном, обладающей локальными законами сохранения вещества, импульса, энергии и движения центра масс.

В *первом* разделе главы даются вводные замечания и приводятся основные уравнения в эйлеровых и лагранжевых координатах. Во *втором* разделе подробно рассматриваются уравнений мелкой воды в лагранжевых (потенциальных) координатах и в массовых координатах Лагранжа. В *третьем* разделе

для уравнений мелкой воды с плоским дном производится построение инвариантных разностных схем, обладающих локальными законами сохранения энергии, количества вещества, импульса и законом движения центра масс. Также для случая произвольного дна приводится разностная схема, обладающая локальным законом сохранения энергии. Напомним, что локальные законы сохранения не всегда справедливы на разрывных решениях соответствующих уравнений, но всегда выполняются на гладких решениях. В *четвертом* разделе проводится численное исследование одной из полученных инвариантных схем (для случая плоского дна) на примере нескольких тестовых задач. По инвариантной схеме производятся расчеты, результаты которых сравниваются с результатами расчетов по другим существующим схемам [4], адаптированным на случай однослойной мелкой воды. *Пятый* раздел главы посвящен описанию программного комплекса Schemelib, специально разработанного для проведения численных расчетов по различным конечно-разностным схемам для уравнений мелкой воды и одномерных уравнений газовой динамики. В последнем, *шестом*, разделе главы приводятся заключительные замечания.

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Глава 1. Первые интегралы и инвариантные разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих симметриями

Инвариантность дифференциальных уравнений относительно непрерывной группы преобразований является, безусловно, фундаментальным свойством математических моделей физики. Напомним, что знание симметрии дает значительную информацию об исследуемой системе дифференциальных уравнений [5; 8; 9]:

- действие группы Ли преобразований переводит множество всех решений в себя, это позволяет находить новые решения из уже известных;
- стандартная процедура вычисления инвариантов группы позволяет представить дифференциальные уравнения в инвариантной форме, а также находить форму инвариантно-групповых решений, поиск которых приводит к интегрированию уравнений меньшей размерности;
- для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), обладающих симметрией, существуют процедуры понижения порядка вплоть до полной интегрируемости, если размерность симметрии равна (в определенном смысле) или больше порядка уравнения;
- инвариантность дифференциальных уравнений является необходимым условием применения теоремы Э. Нётер [38] для получения законов сохранения (первых интегралов для ОДУ) лагранжевых систем и первых интегралов для гамильтоновых систем.

При конструировании разностных уравнений и сеток инвариантность относительно групп Ли преобразований играет столь же большую роль, что и сохранение других качественных характеристик исходных дифференциальных уравнений. Сохранение симметрии исходной дифференциальной модели в ее разностном аналоге приводит к тем же качественным результатам, которые перечислены выше. Однако здесь есть своя специфика, присущая только разностным, т. е. *нелокальным*, объектам. Группа преобразований может деформировать геометрическую структуру разностной сетки, что повлияет на аппроксимацию и алгебраические свойства разностной схемы. Особенность рассматриваемого здесь подхода к симметрии разностных моделей заключается в том, что к разностному уравнению, аппроксимирующему исходное диффе-

ренциальное уравнение, добавляется еще одно уравнение, характеризующее геометрическую структуру разностной сетки. В работах [13;14;21;27] были выделены классы преобразований, сохраняющих равномерность, ортогональность и другие геометрические характеристики разностных сеток. Это послужило основой для построения серии разностных моделей, в которых полностью сохранена симметрия исходных дифференциальных уравнений [1; 2; 65].

В групповой классификации обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка (см., например, [65]) С. Ли были выделены все уравнения, обладающие нетривиальной симметрией. Именно, им было выделено линейное уравнение с максимальной 8-параметрической симметрией, 4 представителя уравнений с 3-х параметрической группой преобразований, 2 класса уравнений, инвариантных относительно двухпараметрической группы, и один класс ОДУ с одной симметрией (см. Таблицу 1). Важно отметить, что выделенные уравнения являются представителями классов уравнений, эквивалентных по отношению к любым точечным преобразованиям. Заметим также, что уравнения из списка Ли (и им эквивалентные в указанном смысле) представляют собой большинство ОДУ второго порядка, решения и интегралы которых представлены в известных справочниках.

Таблица 1 — Групповая классификация С. Ли

Группа	Базис операторов	ОДУ
G_1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$	$y'' = F(y, y')$
G_2 a)	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = F(y')$
G_2 b)	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = \frac{1}{x} F(y')$
G_3 a)	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = 2 \frac{y' + Cy' \sqrt{y'} + y'^2}{y - x}$

Продолжение таблицы 1

Группа	Базис операторов	ОДУ
G_3 b)	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = 2x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = y^{-3}$
G_3 c)	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + (x + y) \frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = \exp(-y')$
G_3 d)	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + ky \frac{\partial}{\partial y}, k \neq 0, \frac{1}{2}, 1, 2$	$y'' = y^{\frac{k-2}{k-1}}$
G_8	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, X_3 = x \frac{\partial}{\partial y},$ $X_4 = x \frac{\partial}{\partial x}, X_5 = y \frac{\partial}{\partial x}, X_6 = y \frac{\partial}{\partial y},$ $X_7 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}, X_8 = xy \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = 0$

Аналогичная групповая классификация всех обыкновенных разностных уравнений и сеток была проведена в [27], где перечислены все классы разностных моделей, обладающих нетривиальными симметриями. Любопытно, что список разностных моделей, обладающих симметриями, оказался существенно шире аналогичного списка С. Ли для ОДУ. В работах [1; 2; 14; 21; 28; 37] разработан лагранжев формализм, позволяющий строить консервативные разностные модели. В работах [24–26] разработан гамильтонов формализм, в рамках которого также дается способ строить схемы, обладающие первыми интегралами.

В этой главе строится новый пример инвариантной разностной модели, завершающий список [28; 37] интегрируемых уравнений с тремя симметриями. Кроме того, показывается, что среди инвариантных разностных схем присутствуют *точные схемы*, то есть схемы, общее решение которых совпадает с соответствующим множеством решений дифференциальных уравнений в узлах сетки, плотность которых может быть произвольной. Иначе говоря, точные схемы представляют собой дискретное представление ОДУ второго порядка с

симметриями. Тем самым показано, что для рассматриваемых задач существует своеобразный математический дуализм: для одного и того же физического процесса (одномерного движения частицы в поле некоторых потенциалов) существует две эквивалентные математических модели, - непрерывная и дискретная, первая описывается непрерывными кривыми, вторая - точками на этих же кривых.

Отметим, что в случае нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка интегрируемость основана на существовании интегрирующего множителя и его связи с допускаемой группой (см. [5; 8; 9]). Точные разностные схемы для ОДУ первого порядка рассматривались в [77]. Точная разностная модель для системы ОДУ, описывающей кеплеровское движение, получена и протестирована в [78].

В первом разделе этой главы кратко приводятся необходимые сведения из группового анализа [5; 8; 9].

Приводятся сведения по применению симметрий к конечно-разностным моделям, в том числе рассмотрена инвариантность разностных сеток [1; 2; 13]. В заключение раздела рассмотрены вариационные задачи и законы сохранения.

Во втором разделе рассмотрены примеры построения инвариантных разностных моделей для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [22; 28]. Рассматриваются интегрируемые уравнения второго порядка, для которых общее решение известно и которые обладают трехмерной алгеброй симметрий. Это позволяет сравнивать решения полученных схем с решениями исходных дифференциальных уравнений. Заметим, что *интегрируемость этих уравнений при построении схем нигде не используется*. В результате получается семейство инвариантных разностных схем, обладающих всеми аналогами интегралов исходного ОДУ. Среди этих схем находится точная схема, для обнаружения которой используется знание решения исходного ОДУ. Свойства точной схемы совершенно аналогичны свойствам любой схемы из инвариантного семейства.

В третьем разделе рассмотрена система уравнений Ермакова [68] (для которой общее решение не известно) и для нее строится инвариантная разностная модель [39]. Построенная модель обладает всеми разностными аналогами первых интегралов системы Ермакова.

1.1 Группы преобразований (предварительные сведения)

1.1.1 Однопараметрические группы преобразований и алгебры Ли операторов

Рассмотрим Евклидово пространство \mathbb{R}^n точек $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, на котором заданы некоторые гладкие преобразования T_s , $s = 1, 2, \dots$, переводящие \mathbb{R}^n в себя. Действие преобразования может быть записано в виде системы соотношений

$$x^{i*} = f_s^i(x) = f_s^i(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots$$

Предполагается, что функции f_s^i по крайней мере три раза дифференцируемы и определяют локально обратимое преобразование T_s^{-1} . Композиция преобразований $T_1 T_2$

$$f^i(x) = f_1^i(f_2^1(x), \dots, f_2^n(x)), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

называется их *умножением* (или произведением), причем единичным элементом такого умножения является тождественное преобразование. Из приведенного определения следуют ассоциативность преобразований

$$T_1(T_2 T_3) = (T_1 T_2) T_3$$

и формула обратного преобразования

$$(T_1 T_2)^{-1} = T_2^{-1} T_1^{-1}.$$

Рассмотрим семейство $\{T_a\}$ преобразований, $a \in \Delta \subset \mathbb{R}$. Семейство $\{T_a\}$ называется *локально замкнутым по умножению*, если существует $\delta \in \Delta$ такое, что $T_a T_b \in \{T_a\}$ при любых $a, b \in \delta$, или

$$\begin{aligned} T_a : \quad x^{i*} &= f^i(x, a), & i &= 1, 2, \dots, n, \\ T_a T_b : f^i(f(x, b), a) &= f^i(x, \varphi(a, b)), & i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Функция $\varphi(a, b)$ задает *закон умножения* для семейства $\{T_a\}$ так, что произведению $T_a T_b = T_c$ соответствует $c = \varphi(a, b)$. Предполагается, что $\varphi(a, b)$ трижды дифференцируема.

Семейство $\{T_a\}$ называется *локальной однопараметрической непрерывной группой преобразований* (локальной группой Ли преобразований), если

1. $\{T_a\}$ локально замкнуто по умножению.
2. Существует уникальный параметр a_0 , определяющий тождественное преобразование T_{a_0} .
3. Уравнение $\varphi(a, b) = a_0$ имеет единственное решение $b = a^{-1}$ для всех $a \in \delta$. Это означает обратимость преобразования,

$$(T_a)^{-1} = T_{a^{-1}}.$$

Однопараметрические группы преобразований обычно обозначают как G_1 . Согласно теоремам Ли, всякой группе G_1 можно сопоставить *инфинитезимальный оператор* (или *генератор*) группы

$$X = \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

где функции $\xi^i(x)$ называются *координатами* оператора X . Здесь и далее ведется суммирование по повторяющимся индексам. Координаты оператора связаны с преобразованиями G_1 уравнениями Ли

$$\xi^i(x) = \left. \frac{\partial f^i(x, a)}{\partial a} \right|_{a=0}, \quad f^i(x, 0) = x^i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В теории групп Ли одним из центральных является понятие инварианта. Локально аналитическая функция $F(x) \neq 0$ называется *инвариантом группы* G_1 , если $F(x) = F(x^*)$ для любого преобразования группы G_1 . Необходимым и достаточным условием инвариантности $F(x)$ является выполнение равенства

$$XF(x) = 0. \tag{1.1}$$

Известно, что линейное дифференциальное уравнение в частных производных (1.1) имеет ровно $n - 1$ функционально независимых решений $I^1(x), \dots, I^n(x)$ и общее решение вида

$$F(x) = \Phi(I^1(x), \dots, I^n(x)),$$

где Φ — произвольная дифференцируемая функция своих аргументов. Таким образом, группа G_1 имеет $n - 1$ функционально независимых инвариантов.

В случае $n + m$ мерного пространства \mathbb{R}^{n+m} зависимых и независимых переменных $(x, u) = (x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^m)$, где

$$u^k = u^k(x) = u^k(x^1, \dots, x^n), \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

групповые преобразования записывают в виде

$$\begin{aligned}x^{i*} &= f^i(x, u, a), & i &= 1, 2, \dots, n, \\u^{j*} &= g^j(x, u, a), & j &= 1, 2, \dots, m.\end{aligned}$$

и инфинитезимальный оператор имеет вид

$$X = \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^j(x, u) \frac{\partial}{\partial u^j}, \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned}\xi^i(x, u) &= \left. \frac{\partial f^i(x, u, a)}{\partial a} \right|_{a=0}, & i &= 1, 2, \dots, n, \\ \eta^j(x, u) &= \left. \frac{\partial g^j(x, u, a)}{\partial a} \right|_{a=0}, & j &= 1, 2, \dots, m.\end{aligned}$$

Пространство \mathbb{R}^{n+m} продолжается на производные, обозначаемые:

$$u_i^k = \frac{\partial u^k}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Продолжение оператора (1.2) на расширенное пространство имеет вид¹

$$\tilde{X} = \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^k(x, u) \frac{\partial}{\partial u^k} + \zeta_i^k \frac{\partial}{\partial u_i^k} + \zeta_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u_{ij}^k} + \dots, \quad (1.3)$$

где

$$\zeta_i^k = D_i(\eta^k) - u_j^k D_i(\xi^j),$$

$$\zeta_{ij}^k = D_i(\zeta_j^k) - u_{sj}^k D_i(\xi^s),$$

...

$$i, j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

Здесь и далее через D_i обозначены операторы полного дифференцирования по переменной x^i

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^k \frac{\partial}{\partial u^k} + \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Инварианты, соответствующие продолженному оператору (1.3), называются *дифференциальными*.

¹Обычно значок « \sim » при этом опускают.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений s -ого порядка

$$F_\alpha(x, u, u_1, \dots, u_s) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m, \quad (1.4)$$

где

$$u_s = \{u_{i_1 \dots i_s}^k\}, \quad 1 \leq i_1, \dots, i_s \leq n, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

— множество производных порядка s . Система (1.4) рассматривается как многообразие на соответствующем продолженном пространстве. Система (1.4) допускает группу G_1 , если соответствующее многообразие есть дифференциальное многообразие группы G_1 , то есть если система (1.4) не меняется под действием продолженной на производные до s -ого порядка группы преобразований.

Инвариантность системы (1.4) устанавливается при помощи *инфинитезимального критерия инвариантности*

$$\tilde{X}F_\alpha(x, u, u_1, \dots, u_s)|_{[F_\alpha]} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m. \quad (1.5)$$

Запись $[F_\alpha]$ означает, что выражение рассматривается на системе $F_\alpha = 0$ и ее дифференциальных следствиях.

Система (1.5) называется *системой определяющих уравнений*. Множество ее решений образует векторное пространство, называемое алгеброй Ли. Точнее, алгеброй Ли L операторов называется векторное пространство, содержащее инфинитезимальные операторы и все возможные их коммутаторы:

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1 = (X_1\xi_2^i - X_2\xi_1^i)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Операция коммутации обладает следующими свойствами:

1. Билинейность

$$[a_1X_1 + a_2X_2, X_3] = a_1[X_1, X_3] + a_2[X_2, X_3].$$

2. Антисимметричность

$$[X_1, X_2] = -[X_2, X_1].$$

3. Удовлетворяет тождеству Якоби:

$$[[X_1, X_2], X_3] + [[X_2, X_3], X_1] + [[X_3, X_1], X_2] = 0.$$

Размерность r векторного пространства, образованного таким образом, называется *размерностью* алгебры Ли. Если число r конечно, то алгебру обозначают символом L_r . В конечномерной алгебре Ли можно выделить некоторый базис операторов $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_r\}$ вида (1.2). При этом коммутатор любых двух базисных векторов можно разложить по самому базису следующим образом

$$[X_\alpha, X_\beta] = c_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, r,$$

где числа $c_{\alpha\beta}^\gamma$ называются *структурными константами* алгебры L_r в базисе \mathbf{X} .

Всякий базисный оператор алгебры L_r порождает однопараметрическую группу преобразований. Последовательное применение таких однопараметрических групп составляет r -параметрическую группу преобразований G_r . Все основные определения, приведенные для однопараметрических групп G_1 , естественным образом обобщаются на случай многопараметрических групп преобразований G_r .

1.1.2 Алгебра бесконечно малых преобразований в пространстве конечно-разностных переменных

В разностном случае группы преобразований, аналогичные непрерывным группам Ли, вводятся с помощью аппарата формальных рядов [13]. С целью упрощения изложения далее рассматривается случай одной независимой переменной x и одной зависимой переменной u .

Рассматривается пространство Z последовательностей (x, u, u_1, u_2, \dots) , где u_1, u_2, \dots — дифференциальные переменные первого, второго и т. д. порядка. В пространстве Z задается отображение (дифференцирование) D , действующее по правилу

$$D(x) = 1, \quad D(u) = u_1, \quad \dots \quad D(u_s) = u_{s+1}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Пусть A — пространство аналитических функций $F(z)$ от конечного числа переменных z из набора (x, u, u_1, \dots) . Пространство Z является подпространством пространства последовательностей \tilde{Z} формальных степенных рядов $(f^1(z, a), \dots, f^s(z, a), \dots)$, где

$$f^i(z, a) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^i(z) a^k, \quad A_k^i(z) \in A \quad i = 1, 2, \dots$$

Дифференцирование D распространяется на функции из A путем отождествления его с действием линейного дифференциального оператора первого порядка

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + u_1 \frac{\partial}{\partial u} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + \dots$$

С помощью экспоненциального представления преобразования этой группы определяются действием оператора $T_a \equiv e^{aD}$,

$$z^{i*} = e^{aD}(z^i) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} D^{(s)}(z^i),$$

где точка $z \in \tilde{Z}$ имеет координаты

$$x^* = T_a(x) = x + a,$$

$$u^* = T_a(u) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a^s}{s!} u_s,$$

...

$$u_k^* = T_a(u_k) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a^s}{s!} u_{s+k},$$

и т. д.. Последние преобразования образуют так называемую *группу Тэйлора*.

С помощью группы Тэйлора могут быть определены операторы правого и левого *разностных сдвигов*

$$S_{+h} = e^{hD} \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \frac{h^s}{s!} D^s, \quad S_{-h} = e^{-hD} \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-h)^s}{s!} D^s, \quad (1.6)$$

где D — дифференцирование в \tilde{Z} , а величина h имеет смысл шага конечно-разностной сетки. Операторы правого и левого сдвига коммутируют между собой и с оператором $T_a = e^{aD}$ и, кроме того, $S_{+h} S_{-h} = S_{-h} S_{+h} = 1$.

С помощью операторов (1.6) определяют правое и левое *разностные дифференцирования*

$$D_{+h} \equiv \frac{1}{h} (S_{+h} - 1) \equiv \sum_{s=1}^{\infty} \frac{h^{s-1}}{s!} D^s,$$

$$D_{-h} \equiv \frac{1}{h} (1 - S_{-h}) \equiv \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-h)^{s-1}}{s!} D^s.$$

Операторы S_{+h} , S_{-h} , D_{+h} , D_{-h} и оператор T_a попарно коммутируют, и

$$D_{+h} = D_{-h} S_{+h}, \quad D_{-h} = D_{+h} S_{-h}.$$

Действие дискретного сдвига $S_{\pm h}$ распространяется на функции из A :

$$S_{\pm h}(F(z)) = F(S_{\pm h}(z))$$

Разностная производная на функции из A определяется через дискретный сдвиг:

$$D_{\pm h}(F(z)) = \pm \frac{F(S_{\pm h}(z)) - F(z)}{h}.$$

С помощью (1.6) также устанавливается разностное *правило Лейбница*:

$$D_{\pm h}(FG) = D_{\pm h}(F)G + F D_{\pm h}(G) \pm h D_{\pm h}(F) D_{\pm h}(G).$$

По аналогии с дифференциальным случаем, группе однопараметрических преобразований G_1 разностного пространства ставится в соответствие инфинитезимальный оператор

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u},$$

причем формулы продолжения оператора на точки разностного пространства имеют простой вид:

$$\tilde{X} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_{\pm h}^k \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u} \right). \quad (1.7)$$

Понятие инварианта вводится аналогично дифференциальному случаю. Функция $F(z) \neq 0 \in A$ называется *инвариантом группы G_1* , если $F(z) = F(z^*)$ для любого преобразования группы G_1 . Необходимым и достаточным условием инвариантности $F(z)$ является выполнение равенства

$$XF(z) = 0.$$

Определения алгебры Ли, ее базиса и коммутатора инфинитезимальных операторов сохраняют свою силу и в разностном случае.

Замечание 1.1.1. В случае двух независимых переменных все основные определения вводятся аналогично. Если вторая переменная играет роль времени t , то используются символ τ для временных шагов сетки, $S_{\pm \tau}$ и символы $D_{\pm \tau}$ — для операторов сдвига и дифференцирования.

1.1.3 Конечно–разностные сетки и условия их инвариантности

Операторы сдвига $S_{\pm h}$ позволяют провести «дискретизацию» пространства. Счетное множество значений независимой переменной x

$$\omega_h = \{\dots, x_{m-2}, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots\} = S_{+h}^\alpha(x_m), \quad \alpha = 0, \pm 1, \dots$$

образует *неравномерную сетку* в случае, если для каких-либо p и q оказывается $x_{m+p} - x_{m+p-1} \neq x_{m+q} - x_{m+q-1}$ и *равномерную* сетку в противном случае. В случае неравномерной сетки операторы (1.6) уже не коммутируют, а шаг сетки h перестает быть постоянным:

$$h_{m+k} = x_{m+k} - x_{m+k-1}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

В безиндексной форме также записывают

$$h_{--} = S_{-h}(h_-), \quad h_- = x - S_{-h}(x), \quad h_+ = S_{+h}(x) - x, \quad h_{++} = S_{+h}(h_+)$$

и т. д..

В отличие от дифференциальных операторов, конечно-разностные операторы задаются на конечном подмножестве счетного множества точек пространственной сетки, что приводит к их нелокальности. Из этой нелокальности вытекают различные свойства групп преобразований, которые отсутствуют в дифференциальном случае: искажения пропорций, нарушение ортогональности разностной сетки и др.. Это приводит к необходимости введения дополнительных условий инвариантности разностной сетки. Среди них наибольшее значение имеют нижеследующие.

1. Действие оператора (1.7) сохраняет *равномерность* разностной сетки в направлении x^i , если во всей рассматриваемой области выполняется условие

$$D_{+h} D_{-h}(\xi^i(z)) = 0$$

2. Действие оператора (1.7) сохраняет *ортогональность* двумерной разностной сетки (x, t) , если во всей рассматриваемой области выполняется условие

$$D_{\pm h}(\xi^t(z)) = -D_{\pm \tau}(\xi^x(z)).$$

3. В ряде случаев (например, при рассмотрении эволюционных уравнений) важно сохранить плоскими временные слои разностной сетки. Для

этого должно выполняться условие

$$D_{+h} D_{+\tau}(\xi^t(z)) = 0.$$

1.1.4 Инвариантные вариационные задачи и законы сохранения

Одно из главных достижений группового анализа состоит в открытии связи между симметриями дифференциальных уравнений и существованием законов сохранения для их решений для вариационных задач.

Пусть задана система дифференциальных уравнений вида (1.4)

$$F^j(x, u, u_1, \dots, u_s) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (1.8)$$

решения которой являются экстремалими функционала

$$L(u) = \int_{\Omega} \mathcal{L}(x, u, u_1, \dots, u_k) dx, \quad (1.9)$$

где интеграл берется по области $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Уравнения (1.8), соответствующее функционалу (1.9), называются *уравнениями Эйлера* (или Эйлера–Лагранжа) и определяются соотношениями

$$F^j = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

где $\delta/\delta u^j$ — вариационная производная

$$\frac{\delta}{\delta u^j} = \frac{\partial}{\partial u^j} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{i_1} \cdots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_s}^j}.$$

Теорема 1.1.1 (первая теорема Нётер). *Необходимое и достаточное условие инвариантности функционала (1.9) относительно группы G_r^n имеет вид*

$$X_{\alpha} \mathcal{L} + \mathcal{L} D_i(\xi_{\alpha}^i) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, r,$$

где D_i — оператор полного дифференцирования по переменной x^i ,

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial}{\partial u} + u_{ii} \frac{\partial}{\partial u_i} + \dots$$

Операторное тождество Нётер устанавливает связь между инвариантностью вариационного функционала и законами сохранения соответствующего уравнения Эйлера (1.8)

$$\begin{aligned} \xi_\alpha^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} + \eta_\alpha^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^k} + [D_i(\eta_\alpha^k) - u_j^k D_i(\xi_\alpha^j)] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i^k} + \mathcal{L} D_i(\xi_\alpha^i) \\ \equiv (\eta_\alpha^k - u_i^k \xi_\alpha^i) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^k} + D_i \left((\eta_\alpha^k - u_i^k \xi_\alpha^i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^k} + \mathcal{L} \xi_\alpha^i \right), \end{aligned}$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, r$.

Рассмотрим тождество Нётер на решениях уравнений Эйлера.

Теорема 1.1.2 (основная теорема Нётер). *Инвариантность вариационного функционала (1.9) относительно группы G_r^n на решениях уравнений Эйлера (1.8) необходима и достаточна для существования законов сохранения*

$$\sum_{(i)} D_i \left((\eta_\alpha^k - u_i^k \xi_\alpha^i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^k} + \mathcal{L} \xi_\alpha^i \right) \Big|_{[F_\alpha]} = 0.$$

В качестве примера рассмотрим нелинейный осциллятор с кубической нелинейностью.

Пример 1.1.1. Уравнение

$$u_{xxx} + u^3 = 0. \quad (1.10)$$

допускает двумерную алгебру операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} - u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Данное уравнение является уравнением Эйлера для такого, например, лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} u^4 - \frac{1}{2} u_x^2,$$

который допускает лишь X_1 . По-видимому, не существует лагранжиана, инвариантного относительно растяжения X_2 .

В соответствии с теоремой Нётер может быть получен первый интеграл:

$$J_1 = \frac{1}{4} u^4 + \frac{1}{2} u_x^2 = A^0.$$

□

1.2 Инвариантные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим трехточечную разностную схему для ОДУ второго порядка. Переменный индекс для точек разностных уравнений не используется, поскольку для анализа трехточечного разностного уравнения реально необходимо лишь три значения координат и соответствующих функций (см. Рис. 1.1):

$$f = f(x, u), \quad f^+ = f(x^+, u^+), \quad f^- = f(x^-, u^-).$$

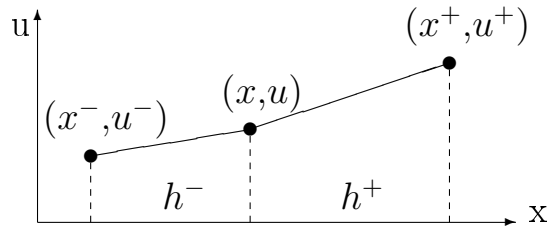


Рисунок 1.1 — Трехточечный шаблон

В многомерном случае ситуация аналогична, — необходимы лишь точки *разностного шаблона*, на котором аппроксимируется уравнение. Также будут использоваться следующие обозначения для разностных производных вправо и влево соответственно:

$$u_x = \frac{u^+ - u}{h^+}, \quad u_{\bar{x}} = \frac{u - u^-}{h^-}.$$

Для отличия разностных производных от непрерывных, последние будем обозначать как u' , u'' , \dots .

Разностную модель для ОДУ второго порядка будем представлять в виде *двух* конечно-разностных уравнений:

$$F(x, x^-, x^+, u, u^-, u^+) = 0; \tag{1.11}$$

$$\Omega(x, x^-, x^+, u, u^-, u^+) = 0,$$

второе из которых представляет собой уравнение для сетки. Это второе уравнение обычно не дописывают, а структуру сетки подразумевают или равномерной, или неравномерной, с заданными шагами сетки

$$h^+ = x^+ - x, \quad h^- = x - x^-,$$

где h^+, h^- - шаги сетки право и влево от данной точки x . В нашем подходе явная запись уравнения сетки имеет принципиальное значение. Именно это позволяет получать разностные схемы, допускающие полную симметрию соответствующего ОДУ.

Первое уравнение в системе (1.11) представляет собой разностное уравнение второго порядка, которое в континуальном пределе ($h \rightarrow 0$) дает ОДУ второго порядка. Второе уравнение, уравнение для сетки, не обязано давать ОДУ второго порядка при стремлении шага сетки к нулю. Например, можно рассматривать равномерную разностную сетку в виде уравнения $h^+ = h^-$, которое «исчезает» в континуальном пределе: $0 = 0$. Геометрически это означает превращение разностного шаблона в точку, не имеющую ни размерности, ни геометрической структуры. Это порождает определенные трудности в разностном моделировании, - уравнение, генерирующее разностную сетку, отсутствует в дифференциальной модели, - его «неоткуда взять». Однако, как будет видно, можно выписать некоторое общее семейство уравнений для разностных сеток, сохраняющих группу исходного дифференциального уравнения. Из этого семейства надлежит выбрать такое уравнение, которое соответствует поставленным целям. Такой целью может быть, например, максимальная простота структуры сетки, адаптация к специфике семейства решений и т. д.

Рассмотрим *непрерывную* группу преобразований, генерируемую алгеброй Ли инфинитезимальных операторов вида

$$X = \xi(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (1.12)$$

Соответствующие непрерывные преобразования определяются коэффициентами $\xi(x, u)$, $\eta(x, u)$. Эти преобразования действуют во всем пространстве (а не только в узлах сетки) и являются обычными *точечными* преобразованиями, так как коэффициенты ξ и η операторов (1.12) зависят только от (x, u) и не зависят от соседних точек (x^+, u^+) и (x^-, u^-) . Векторное поле (ξ, η) определено в каждой точке пространства (x, u) , в том числе и в соседних узловых точках сетки. Поэтому продолжение оператора (1.12) на все точки разностного шаблона геометрически очевидно:

$$\begin{aligned} \tilde{X} = & \xi(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \xi(x^+, u^+) \frac{\partial}{\partial x^+} + \xi(x^-, u^-) \frac{\partial}{\partial x^-} + \\ & + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u} + \eta(x^+, u^+) \frac{\partial}{\partial u^+} + \eta(x^-, u^-) \frac{\partial}{\partial u^-}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Основная идея развиваемого подхода заключается в точном сохранении группы преобразований в конечно-разностных моделях, аппроксимирующих данные непрерывные уравнения. Именно это позволяет в полной мере воспользоваться следствиями допускаемой симметрии, указанными выше.

Известно (см. [9]), что ОДУ второго порядка могут быть получены как уравнения Эйлера некоторого вариационного функционала. В случае инвариантности функционала соответствующее уравнение Эйлера наследует симметрию и имеет столько независимых интегралов, сколько независимых симметрий имеется у вариационного функционала, - в этом и заключается теорема Нетер для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [38]).

В разностных вариационных задачах ситуация усложняется [1;2;14;21;28;37]. Прежде всего, разностный функционал с функцией Лагранжа

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, x^+, u, u^+),$$

определенной на двух точках разностного шаблона, надо рассматривать вместе с сеткой в виде следующей системы

$$L = \sum_{\Omega} \mathcal{L}(x, x^+, u, u^+) h^+, \quad (1.14)$$

$$\Omega(x, u, u^+, u^-, \dots, h^+, h^-) = 0. \quad (1.15)$$

Инвариантность функционала вместе с сеткой нетрудно записать с помощью действия соответствующего инфинитезимального оператора группы:

$$\tilde{X}\mathcal{L} + \mathcal{L} D_{+h}(\xi) = 0, \quad (1.16)$$

$$\tilde{X}\Omega(x, u, u^+, u^-, \dots, h^+, h^-) = 0.$$

Разностный аналог теоремы Нетер (см. [14], [21]) основан на следующем операторном тождестве, которое также надо рассматривать на сетке (1.15):

$$\begin{aligned} & \xi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \xi^+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^+} + \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \eta^+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^+} + \mathcal{L} D_{+h}(\xi) \equiv \\ & \equiv \xi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \frac{h^-}{h^+} \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial x} - D_{+h}(\mathcal{L}^-) \right) + \eta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \frac{h^-}{h^+} \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial u} \right) + \\ & + D_{+h} \left(h^- \eta \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial u} + h^- \xi \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial x} + \xi \mathcal{L}^- \right), \end{aligned} \quad (1.17)$$

где $\xi^+ = \xi(x^+, u^+)$, $\eta^+ = \eta(x^+, u^+)$, а левая часть тождества представляет собой подробную запись уравнения (1.16).

Аналогичные тождества справедливы и для многомерных случаев (см. [1; 2]). Тождество (1.17) при $h \rightarrow 0$ обращается в соответствующее тождество Нетер (см. [8]), однако при конечном h оно имеет существенно более сложную структуру, которая исчезает в континуальном пределе. Это тождество выделяет следующие разностные объекты. Прежде всего, в отличие от непрерывного случая, выделяется не уравнение Эйлера, а некоторое другое уравнение, названное *квазиэкстремальным* или *локально-экстремальным*:

$$\xi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \frac{h^-}{h^+} \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial x} - D_{+h}(\mathcal{L}^-) \right) + \eta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \frac{h^-}{h^+} \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial u} \right) = 0. \quad (1.18)$$

Во-вторых, это уравнение зависит от конкретной подгруппы, так как содержит коэффициенты генератора группы ξ, η в явном виде. Обращение в нуль левой части тождества означает инвариантность функционала (1.14). Обращение в нуль правой части тождества (1.17) позволяет выписать (см. [14], [21]) первый интеграл

$$D_{+h} \left(h^- \eta \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial u} + h^- \xi \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial x} + \xi \mathcal{L}^- \right) \Big|_{(1.15), (1.18)} = 0, \quad (1.19)$$

справедливый на решениях соответствующего квазиэкстремального уравнения.

Таким образом, в случае разностных уравнений ситуация существенно усложняется: разным подгруппам соответствуют разные квазиэкстремальные уравнения, для каждого из которых есть «свой» закон сохранения, соответствующий инвариантности разностного функционала относительно подгруппы с данными ξ, η .

Следующее утверждение дает достаточные условия существования у одного уравнения полного набора законов сохранения (см. [14], [21], [28], [37]).

Теорема 1.2.1. *Пусть на сетке (1.15) функционал (1.14) допускает r -параметрическую группу преобразований. Пусть существует решение системы разностных уравнений (глобальная экстремаль):*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \frac{h^-}{h^+} \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial x} - D_{+h}(\mathcal{L}^-) = 0, \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \frac{h^-}{h^+} \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial u} = 0;$$

Тогда на решениях системы (1.20) справедливы r законов сохранения вида (1.19).

Это утверждение можно рассматривать как разностный аналог теоремы Нетер. Ее применение будет продемонстрировано на примерах. Начнем с наиболее простого нелинейного ОДУ из списка Ли, обладающего тремя симметриями.

Разностный аналог тождества Нётер [1; 2; 14; 21] позволяет находить законы сохранения разностных уравнений.

Продолжим Пример 1.1.1 и построим инвариантную схему уравнения (1.10) на трехточечном шаблоне $(x, x^+, x^-, u, u^+, u^-)$. Два оператора в указанном пространстве переменных имеют четыре разностных инварианта:

$$\frac{h^+}{h^-}, \quad h^+u, \quad h^+u^+, \quad h^-u^-.$$

Общий вид инвариантной сетки такой:

$$h^+ = h^- F(h^+u, h^+u^+, h^-u^-),$$

где F — произвольная функция своих аргументов. Выберем простейшую равномерную сетку:

$$h^+ = h^- = h.$$

В качестве инвариантного разностного лагранжиана выберем простейший:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}u^4 - \frac{(u^+ - u)^2}{2(h^+)^2}.$$

Используя разностное тождество Нётер, нетрудно выписать квазиэкстремальное уравнение

$$u_{x\bar{x}} \frac{u_x + u_{\bar{x}}}{2} + u_{\bar{x}} \frac{(u^2 + (u^-)^2)(u + u^-)}{4} = 0,$$

и соответствующий первый интеграл:

$$\frac{u_{\bar{x}}^2}{2} + \frac{(u^-)^4}{4} = A_0.$$

В следующих примерах будут рассмотрены разностные модели для ОДУ второго порядка из списка Ли, обладающих трехмерными алгебрами симметрий.

1.2.1 Пример 1

Рассмотрим конечно-разностную модель обыкновенного дифференциального уравнения из списка С. Ли

$$u'' = \frac{1}{u^3}. \quad (1.21)$$

Уравнение (1.21) можно рассматривать как уравнение Эйлера инвариантного функционала с функцией Лагранжа $(\frac{1}{u^2} - (u')^2)$. Оно допускает трехпараметрическую группу преобразований с операторами:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}; \quad X_2 = 2x \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial u}; \quad X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xu \frac{\partial}{\partial u};$$

В соответствии с теоремой Нетер у уравнения (1.21) есть три первых интеграла:

$$\begin{aligned} J_1 &= (u')^2 + \frac{1}{u^2} = A^0, & J_2 &= \frac{x}{u^2} - (u - u'x)u' = B^0, \\ J_3 &= \frac{x^2}{u^2} + (u - xu')^2 = C^0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Из трех интегралов первые два получаются из инвариантности указанного лагранжиана, а третий - из его «дивергентной инвариантности» (см., например, [8]). В этой ситуации теорема Нетер гарантирует функциональную независимость лишь двух интегралов. Однако наличие и двух независимых интегралов в (1.22) позволяет выписать общее решение уравнения (1.21)

$$A_0 u^2 = (A_0 x + B_0)^2 + 1.$$

Инвариантная разностная схема может быть построена на основе следующей функции Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{uu^+} - \left(\frac{u^+ - u}{h^+} \right)^2.$$

С помощью методов, описанных в предыдущем разделе, получается следующая разностная схема:

$$\begin{cases} \frac{u_x - u_{\bar{x}}}{h^-} = \frac{1}{u^2 u^-}, \\ \frac{h^+}{uu^+} = \frac{h^-}{uu^-} = \varepsilon, \end{cases} \quad (1.23)$$

где ε — параметр, задающий плотность сетки.

В соответствии с теоремой предыдущего раздела разностная система (1.23) обладает тремя разностными интегралами:

$$\begin{aligned} u_x^2 + \frac{1}{uu^+} &= A, \\ \frac{2x + h^+}{2} u_x^2 + \frac{2x + h^+}{2uu^+} - \frac{u + u^+}{2} u_x &= B, \\ \frac{x(x + h^+)}{uu^+} + \left(\frac{u + u^+}{2} - \frac{2x + h^+}{2} u_x \right)^2 &= C, \end{aligned} \quad (1.24)$$

Путем чисто алгебраических действий с интегралами (1.24) легко получить общее решение схемы (1.23):

$$Au^2 = (Ax + B)^2 + 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}. \quad (1.25)$$

Точное решение (1.25) схемы отличается от общего решения исходного уравнения (1.21) на $\frac{\varepsilon^2}{4}$, причем оценка ошибки носит равномерный характер.

Точная разностная схема может быть получена с помощью вспомогательного параметра δ :

$$\mathcal{L} = \frac{\delta}{uu^+} - \left(\frac{u^+ - u}{h^+} \right)^2.$$

В этом случае точная схема имеет вид

$$\begin{cases} \frac{u_x - u_{\bar{x}}}{h^-} = \frac{\delta}{u^2 u^-}, \\ \frac{h^+}{uu^+} = \frac{h^-}{uu^-} = \varepsilon, \end{cases}$$

Точное решение схемы совпадает с общим решением исходного уравнения (1.21), если принять

$$\delta = 2 \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon^2}.$$

1.2.2 Метод возмущения инвариантного лагранжиана

Прежде чем рассмотреть дальнейшие примеры построения инвариантных консервативных схем, проделаем некоторые вычисления более общего характера.

Рассмотрим случаи, когда у исходного ОДУ имеется три симметрии, но лишь две из них допускаются вариационным функционалом и порождают первые интегралы. В непрерывном случае двух интегралов достаточно для интегрирования одного уравнения. В разностной модели, состоящей из двух уравнений, нам требуется четыре интеграла.

Для нахождения дополнительных интегралов был предложен метод возмущения инвариантного лагранжиана. Идея заключается в том, что условия инвариантности лагранжиана допускает некоторую свободу в аппроксимации его разностным лагранжианом. Поэтому возможно ввести весовые множители в разностный лагранжиан и рассматривать параметрические семейства инвариантных лагранжианов. Рассмотрим следующее семейство лагранжианов:

$$\mathcal{L} = \alpha G(u_x) + \beta u + (1 - \beta)u_+, \quad \alpha \approx 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

где α и β - некоторые параметры, $G(u_x)$ - произвольная функция от разностной производной.

Такие лагранжианы допускают алгебру операторов трансляции

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}. \quad (1.26)$$

Общим уравнением второго порядка, допускающим эту абелеву алгебру, является следующее ОДУ:

$$y'' = F(y'). \quad (1.27)$$

Каждый разностный лагранжиан с некоторым набором весовых коэффициентов порождает свою систему глобальных экстремалей:

$$\alpha [-G'(u_x) + G'(u_{\bar{x}})] + \beta h_+ + (1 - \beta)h_- = 0 \quad (1.28)$$

$$\alpha [u_x G'(u_x) - u_{\bar{x}} G'(u_{\bar{x}}) - G(u_x) + G(u_{\bar{x}})] - \beta(u - u_-) - (1 - \beta)(u_+ - u) = 0 \quad (1.29)$$

Рассмотрим один такой лагранжиан с $\alpha_3 = 1$ и $\beta_3 = 0.5$ как базисный, а остальные, - как его возмущения. Каждый лагранжиан в семействе допускает $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ и дивергентно инвариантен по отношению к $X_2 = \frac{\partial}{\partial u}$. Это порождает первые интегралы для глобальных квазиэкстремалей (1.28), (1.29):

$$\alpha [-u_x G'(u_x) + G(u_x)] + u + (1 - \beta)h_+ u_x = A \quad (1.30)$$

$$\alpha G'(u_x) - x - \beta h_+ = B. \quad (1.31)$$

Выберем три различных набора (α_i, β_i) , которые дадут шесть первых интегралов для шести глобальных экстремальных уравнений. Покажем, что путем выбора констант α_i и β_i и выбора некоторых констант дополнительных интегралов A_i и B_i возможно получить совместную систему разностных уравнений и сетки, которая к тому же будет иметь общее решение благодаря наличию достаточного количества первых интегралов.

Возьмем одно уравнение в форме (1.30) и два уравнения в форме (1.31). Выберем соответствующие константы $\alpha_3 = 1$, $\beta_3 = 0.5$ и $B_2 = B_3 = B$. Рассмотрим разницу двух уравнений с одной и той же константой B как уравнение сетки. В итоге получим

$$\alpha_1 [-u_x G'(u_x) + G(u_x)] + u + (1 - \beta_1)h_+ u_x = A, \quad (1.32)$$

$$G'(u_x) - x - \frac{1}{2}h_+ = B, \quad (1.33)$$

$$(1 - \alpha_2)G'(u_x) - \left(\frac{1}{2} - \beta_2\right)h_+ = 0. \quad (1.34)$$

Из уравнения (1.33) и (1.34) имеем

$$G'(u_x) = \frac{x_+ + x + 2B}{2}, \quad (1.35)$$

$$x_+ - (1 + \varepsilon)x - \varepsilon B = 0, \quad (1.36)$$

где был введен малый параметр

$$\varepsilon = \frac{2(1 - \alpha_2)}{\alpha_2 - 2\beta_2}. \quad (1.37)$$

Заметим, что континуальному пределу соответствует $\varepsilon \rightarrow 0$.

Общее решение линейного разностного уравнения (1.36) легко находится (см., например, [22]):

$$x_n = (x_0 + B)(1 + \varepsilon)^n - B \quad (1.38)$$

и зависит от константы интегрирования x_0 . Это решение дает разностную сетку, соответствующую $h_- > 0$ и $h_+ > 0$ для $x_0 > -B$ если $\varepsilon > 0$, и для $x_0 < -B$, если $\varepsilon < 0$. Для остальных случаев: $x_0 < -B$, если $\varepsilon > 0$, и для $x_0 > -B$, если $\varepsilon < 0$, формула (1.38) дает сетку с обратным порядком нумерации точек сетки: $h_- < 0$ и $h_+ < 0$.

С помощью (1.38), (1.35), выразим u_x через x :

$$G'(u_x) = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) (B + x).$$

Обозначим через H функцию, обратную $G'(u_x)$:

$$u_x = H \left[\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) (B + x) \right]. \quad (1.39)$$

Теперь, используя (1.32) и (1.39), выпишем общее решение системы (1.32), (1.33) и (1.34) в виде

$$u(x) = A - \alpha_1 G(H) + (x + B)H, \quad (1.40)$$

где

$$\alpha_1 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) - (1 - \beta_1)\varepsilon = 1.$$

Величина α_1 , фигурирующая в решении (1.40), должна быть выбрана из требования совместности разностной системы. Именно, x_n и u_n в уравнениях (1.38) и (1.40) должны удовлетворять системе (1.32), (1.33) и (1.34). Следует потребовать, чтобы u_x в (1.39) и $u_x = (u_{n+1} - u_n)/(x_{n+1} - x_n)$ совпали. Из этого требования следует, что α_1 должна удовлетворять соотношению

$$\alpha_1 = (1 + \varepsilon)^{n+1} (x_0 + B) \frac{H_{n+1} - H_n}{G(H_{n+1}) - G(H_n)}. \quad (1.41)$$

Это соотношение, в свою очередь, справедливо если только его правая часть постоянна, то есть не зависит от n . Константы α_i и β_i могут зависеть от ε , и при $\varepsilon \rightarrow 0$ должно быть справедливо: $\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow 1$; $\beta_1, \beta_2 \rightarrow 0.5$.

Из уравнения (1.34) следует, что

$$\frac{h_+}{G'(u_x)} = \frac{2(1 - \alpha_2)}{1 - 2\beta_2}$$

Это выражение должно стремиться к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для этого положим

$$\alpha_2 = 1 + \varepsilon^2, \quad \beta_2 = \frac{1}{2} + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Уравнение (1.37) удовлетворено, и

$$\frac{h_+}{G'(u_x)} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 2}. \quad (1.42)$$

Можно рассматривать (1.38) и (1.40) как общее решение следующей трехточечной схемы:

$$G'(u_x) - G'(u_{\bar{x}}) - \frac{x_+ - x_-}{2} = 0, \quad (1.43)$$

$$\frac{h_+}{G'(u_x)} = \frac{h_-}{G'(u_{\bar{x}})}.$$

Строго говоря, эта полученная нами система не является системой уравнений глобальных экстремалей, поскольку она не была получена вариацией одного лагранжиана. Константы A , B и ε выбраны из выражений интегралов (1.32), (1.33) и (1.42), которые соответствуют трем разным инвариантным лагранжианам. Система (1.43) инвариантна относительно группы с операторами (1.26), поскольку получена из инвариантных лагранжианов.

Итак, ОДУ (1.27) может быть аппроксимировано разностной системой (1.43). Если α_1 в (1.41) постоянна, тогда общее решение системы имеет вид

$$\begin{aligned} x_n &= (x_0 + B)(1 + \varepsilon)^n - B, \\ u(x_n) &= A - \alpha_1 G(H_n) + (x_n + B)H_n, \end{aligned} \quad (1.44)$$

где A , B , ε и x_0 ,- произвольные постоянные.

Не было доказано, что уравнение (1.41) справедливо для любой функции $G(u_x)$, однако в нижеследующих примерах это требование будет удовлетворено. В обоих примерах будем иметь дело с трехмерной алгеброй операторов симметрии, однако только два из них допускаются вариационным функционалом.

1.2.3 Пример 2

Трехмерная алгебра операторов (см. Таблицу 1)

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + ky \frac{\partial}{\partial y}, \quad k \neq 0, \frac{1}{2}, 1, 2,$$

зависящая от параметра k , в качестве инвариантного ОДУ второго порядка имеет следующее уравнение

$$y'' = y'^{\frac{k-2}{k-1}}. \quad (1.45)$$

Это уравнение является уравнением Эйлера для вариационного функционала с такой, например, функцией Лагранжа:

$$L = \frac{(k-1)^2}{k} (y')^{\frac{k}{k-1}} + y.$$

Такой функционал допускает X_1 и X_2 при любом параметре k

$$X_1 L + LD(\xi_1) = 0, \quad X_2 L + LD(\xi_2) = 1 = D(x),$$

а также оператор X_3 при частном значении $k = -1$.

При произвольном k имеется два первых интеграла

$$J_1 = \frac{(1-k)}{k} (y')^{\frac{k}{k-1}} + y = A^0, \quad J_2 = (k-1)(y')^{\frac{1}{k-1}} - x = B^0.$$

Исключая y' , нетрудно найти общее решение в виде

$$y = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k-1} \right)^{k-1} (x + B^0)^k + A^0. \quad (1.46)$$

Приближенная инвариантная разностная модель

Для получения приближенной разностной модели воспользуемся ранее выполненными выкладками. В данном случае

$$G(u_x) = \frac{(k-1)^2}{k} u_x^{\frac{k}{k-1}},$$

а разностная схема принимает вид:

$$\begin{cases} (k-1) \left((u_x)^{\frac{1}{k-1}} - (u_{\bar{x}})^{\frac{1}{k-1}} \right) = \frac{x_+ - x_-}{2}, \\ \frac{h_+}{(u_x)^{\frac{1}{k-1}}} = \frac{h_-}{(u_{\bar{x}})^{\frac{1}{k-1}}} = \frac{2\varepsilon(k-1)}{2+\varepsilon}. \end{cases}$$

Здесь малый параметр ε , как и в Примере 1, определяет плотность сетки.

Решение u_n уравнения (1.44) приобретает конкретный вид

$$u_n = A + \frac{(x+B)^k \varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)^{k-1} (1+\varepsilon)^k - 1}.$$

Полученное разностное решение аппроксимирует решение (1.46) ОДУ (1.45) с точностью до $O(\varepsilon^2)$.

Точная разностная схема

Сравнение общего решения инвариантной схемы с решением исходного ОДУ позволяет найти коэффициент γ небольшого растяжения, преобразующий инвариантную схему в точную:

$$\begin{cases} \gamma(k-1) \left((u_x)^{\frac{1}{k-1}} - (u_{\bar{x}})^{\frac{1}{k-1}} \right) = \frac{x_+ - x_-}{2}, \\ \frac{h_+}{\gamma(u_x)^{\frac{1}{k-1}}} = \frac{h_-}{\gamma(u_{\bar{x}})^{\frac{1}{k-1}}} = \frac{2\varepsilon(k-1)}{2+\varepsilon}, \end{cases}$$

где

$$\gamma = \left[\frac{2\varepsilon k \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^k}{(2+\varepsilon)((1+\varepsilon)^k - 1)} \right]^{\frac{1}{k-1}}.$$

1.2.4 Пример 3

Рассмотрим пример другой трехмерной алгебры:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + (x+y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Соответствующее инвариантное ОДУ имеет вид:

$$y'' = \exp(-y') \tag{1.47}$$

и может быть получено вариацией функционала с функцией Лагранжа

$$L = \exp(y') + y.$$

Лагранжиан допускает лишь две симметрии

$$X_1 L + LD(\xi_1) = 0; \quad X_2 L + LD(\xi_2) = 1 = D(x);$$

которые дают следующие первые интегралы уравнения (1.47)

$$\exp(y')(1 - y') + y = A, \quad \exp(y') - x = B.$$

С помощью двух интегралов строится общее решение уравнения (1.47)

$$y = (x + B)(\ln(x + B) - 1) + A. \tag{1.48}$$

Приближенная инвариантная разностная модель

Теперь рассмотрим разностную схему, следуя общим построениям, приведенным ранее. В данном случае имеем

$$G(u_x) = \exp(u_x),$$

а инвариантная схема имеет следующий вид

$$\begin{cases} \exp(u_x) - \exp(u_{\bar{x}}) = \frac{x_+ - x_-}{2}, \\ \frac{h_+}{\exp(u_x)} = \frac{h_-}{\exp(u_{\bar{x}})} = \frac{2\varepsilon}{2 + \varepsilon}. \end{cases}$$

Решение $u(x)$ на сетке (1.44) будет таким

$$u_n = A + (x_n + B) \ln(x_n + B) + (x_n + B) \left[\ln \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \frac{(1 + \varepsilon) \ln(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} \right].$$

Разностное решение (1.48) совпадает с решением ОДУ (1.47) с точностью до $O(\varepsilon^2)$.

Точная разностная схема

Сравнение общего решения инвариантной схемы с решением исходного ОДУ дает возможность найти коэффициент σ небольшого растяжения, преобразующий инвариантную схему в точную:

$$\sigma (\exp(u_x) - \exp(u_{\bar{x}})) = \frac{x_+ - x_-}{2},$$

$$\frac{h_+}{\sigma \exp(u_x)} = \frac{h_-}{\sigma \exp(u_{\bar{x}})} = \frac{2\varepsilon}{2 + \varepsilon}.$$

где

$$\sigma = \frac{\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \exp(1)}{(1 + \varepsilon)^{1 + \frac{1}{\varepsilon}}}.$$

1.2.5 Пример 4

Рассмотрим теперь новый пример ОДУ, допускающего трехмерную группу преобразований. Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'' + 2 \frac{y' + Cy' \sqrt{y'} + y'^2}{x - y} = 0, \quad C = \text{const}, \quad (1.49)$$

допускает трехмерную алгебру операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y};$$

и является уравнением Эйлера для следующей функции Лагранжа:

$$L = \frac{2\sqrt{y'} + C}{x - y}. \quad (1.50)$$

Лагранжиан (1.50) допускает все три вариационные симметрии, последняя из которых — дивергентная:

$$X_3 L + LD(\xi_3) = C = D(Cx).$$

С помощью тождества Нётер получают следующие первые интегралы:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{x-y} \left(\frac{y'+1}{\sqrt{y'}} + C \right) = A^0, & J_2 &= \frac{1}{x-y} \left(\frac{xy'+y}{\sqrt{y'}} + Cx \right) = B^0, \\ J_3 &= \frac{1}{x-y} \left(\frac{x^2 y' + y^2}{\sqrt{y'}} + Cxy \right) = C^0. \end{aligned}$$

Эти интегралы функционально зависимы и связаны соотношением

$$(J_2)^2 - CJ_2 + 1 = J_1 J_3. \quad (1.51)$$

Исключив y' из интегралов J_1 и J_2 , получим общее решение уравнения (1.49):

$$y = \frac{1}{A^0(B^0 - A^0 x)} + \frac{B^0 - C}{A^0}. \quad (1.52)$$

Приближенная инвариантная разностная модель

Поиск инвариантного лагранжиана для этого примера представляет собой непростую задачу. Эта задача была решена в работе [22] (там же имеются подробности построения точной схемы). Подходящий лагранжиан имеет вид:

$$\mathcal{L} = \frac{2}{\sqrt{(x-u)(x_+ - u_+)}} \sqrt{u_x} + \frac{C}{h_+} \ln \left(\frac{x_+ - u}{x - u} \right)$$

Разностный аналог теоремы Нётер гарантирует существование следующих интегралов на глобальной экстремали:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{u_x + 1}{\sqrt{u_x(x-u)(x_+ - u_+)}} + \frac{C}{x_+ - u} = A, \\ J_2 &= \frac{u_x x_+ + u}{\sqrt{u_x(x-u)(x_+ - u_+)}} + \frac{C x_+}{x_+ - u} = B, \\ J_3 &= \frac{x x_+ u_x + u u_+}{\sqrt{u_x(x-u)(x_+ - u_+)}} + \frac{C x_+ u}{x_+ - u}. \end{aligned}$$

Функциональная зависимость (1.51) в разностном случае уже не имеет места:

$$(J_2)^2 - CJ_2 - J_1 J_3 + 1 = \frac{h_+^2 u_x}{(x-u)(x_+ - u_+)} + \frac{C h_+ \sqrt{u_x}}{\sqrt{(x-u)(x_+ - u_+)}}.$$

Вследствие этого интегралы J_1, J_2 и J_3 порождают новый интеграл

$$\frac{h_+^2 u_x}{(x-u)(x_+ - u_+)} + \frac{C h_+ \sqrt{u_x}}{\sqrt{(x-u)(x_+ - u_+)}} = \delta = \text{const}, \quad 0 < \delta \ll 1.$$

Новый интеграл можно существенно упростить:

$$\frac{h_+^2 u_x}{(x-u_+)(x_+ - u)} = \frac{h_-^2 u_{\bar{x}}}{(x-u_-)(x_- - u)} = \varepsilon, \quad (1.53)$$

где

$$\varepsilon = \frac{2\delta - C(\text{sgn } C \sqrt{C^2 + 4\delta} - C)}{2(1-\delta) + C(\text{sgn } C \sqrt{C^2 + 4\delta} - C)}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Уравнение (1.53) может быть использовано в качестве сетки с плотностью ε .

Таким образом, инвариантная разностная схема имеет вид:

$$\begin{cases} h_- \left(\frac{\sqrt{u_{\bar{x}}}}{\sqrt{(x-u_-)(x_- - u)}} - \frac{(x_+ - u)}{(x_- - u)} \frac{\sqrt{u_x}}{\sqrt{(x-u_+)(x_+ - u)}} \right) = \frac{h_-^2 u_{\bar{x}} C \sqrt{1+\varepsilon}}{(x-u_-)(x_- - u)}, \\ \frac{h_+^2 u_x}{(x-u_+)(x_+ - u)} = \frac{h_-^2 u_{\bar{x}}}{(x-u_-)(x_- - u)} = \varepsilon. \end{cases}$$

Используя первые интегралы и сетку, можно получить общее решение:

$$u_n = \frac{\frac{1}{1+\varepsilon} - C \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}}}{A(B - A x_n)} + \frac{B - C}{A}. \quad (1.54)$$

$$x_n = \frac{\left(B - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+1)}} \right) x_{n-1} + \frac{B}{A} (C - B) - \frac{\varepsilon}{A} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+1)}} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+1)}} - C \right)}{A x_{n-1} - \left(B - C + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+1)}} \right)}. \quad (1.55)$$

Уравнение (1.54) сходится к решению (1.52) с первым порядком точности по ε , т. е. второму порядку по h_+ . Уравнение (1.55) может быть решено (см. [22]).

Точная разностная схема

С целью нахождения точной схемы добавим параметр θ в лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \frac{2\theta \sqrt{u_x}}{\sqrt{(x-u)(x_+ - u_+)}} + \frac{C}{h_+} \ln \left(\frac{x_+ - u}{x - u} \right).$$

Повторяя выкладки, проделанные при поиске приближенной инвариантной схемы, получим аналогичные (1.54), (1.55) выражения для u_n, x_n :

$$u_n = \frac{\frac{\theta^2}{1+\varepsilon} - C \frac{\theta \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}}}{A(B - A x_n)} + \frac{B - C}{A}. \quad (1.56)$$

$$x_n = \frac{\left(B - \frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+1)}}\right) x_{n-1} + \frac{B}{A}(C - B) - \frac{\varepsilon}{A} \frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+1)}} \left(\frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+1)}} - C\right)}{A x_{n-1} - \left(B - C + \frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+1)}}\right)}. \quad (1.57)$$

Сравнивая (1.56) с общим решением (1.52) исходного ОДУ, приходим к условию точности

$$\theta = \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{2} \left(C\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon C^2 + 4}\right).$$

Подставив θ в инвариантную схему, получим окончательно

$$\left\{ \begin{array}{l} h_- \left(\frac{\sqrt{u_{\bar{x}}}}{\sqrt{(x-u_-)(x_- - u)}} - \frac{(x_+ - u)}{(x_- - u)} \frac{\sqrt{u_x}}{\sqrt{(x-u_+)(x_+ - u)}} \right) = \frac{2C}{C\sqrt{\varepsilon} \pm \sqrt{\varepsilon C^2 + 4}} \frac{h_-^2 u_{\bar{x}}}{(x-u_-)(x_- - u)}, \\ \frac{h_+^2 u_x}{(x-u_+)(x_+ - u)} = \frac{h_-^2 u_{\bar{x}}}{(x-u_-)(x_- - u)} = \varepsilon. \end{array} \right.$$

Выражения (1.56), (1.57) для точной схемы принимают вид:

$$u_n = \frac{1}{A(B - Ax_n)} + \frac{B-C}{A},$$

$$x_n = \frac{(B + \frac{\sqrt{\varepsilon C^2 + 4}}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{C}{2})x_{n-1} + \frac{B(C-B)-1}{A}}{Ax_{n-1} - (B - \frac{\sqrt{\varepsilon C^2 + 4}}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{C}{2})}.$$

Последнее уравнение решено в [22]. Процедура получения решения и само решение достаточно громоздки и здесь не приводятся.

1.2.6 Численная реализация инвариантных схем

Численная реализация точных инвариантных схем, полученных в примерах, приводится в Приложении А. Решения точных схем совпадают с точными решениями соответствующих ОДУ при произвольно выбранных шагах сетки. Детальное описание процедуры расчетов можно найти в работе [72].

1.3 Система ОДУ Ермакова

В данном разделе строится пример инвариантных разностных моделей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно, – системы уравнений Ермакова, обладающих рядом нетривиальных алгебраических свойств. Строятся инвариантные разностные схемы и сетки, на решениях которых выполняются разностные аналоги первых интегралов системы Ермакова.

1.3.1 Тожество Нётер для систем ОДУ второго порядка и первые интегралы

Ниже будет выписано операторное тождество Нётер для функционалов, зависящих от первых производных

$$\mathbb{L}[\mathbf{y}] = \int_I \mathcal{L}(x, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) dx, \quad I \in \mathbb{R}, \quad (1.58)$$

где \mathcal{L} – функция Лагранжа, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$, $\dot{\mathbf{y}} = (\dot{y}_1, \dots, \dot{y}_m)$, y_k – функции единственного аргумента x .

Известно, что функционал (1.58) достигает стационарных значений на решениях системы уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta y_l} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_l} - D \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_l} \right) = 0, \quad l = 1, \dots, m, \quad (1.59)$$

представляющей собой систему m обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Через

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y_k} \dot{y}_k + \frac{\partial}{\partial \dot{y}_k} \ddot{y}_k + \dots$$

обозначен оператор полного дифференцирования. о повторяющимся индексам всюду подразумевается суммирование.

Пусть G – группа Ли преобразований, допускаемых системой (1.59), которой соответствует инфинитезимальный оператор:

$$X = \xi(x, \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x} + \eta^k(x, \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

По умолчанию всюду будем предполагать, что оператор продолжен на производные в пространстве переменных $(x, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dots)$ по стандартным формулам:

$$X = \xi(x, \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x} + \eta^k(x, \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_k} + \zeta_1^k \frac{\partial}{\partial \dot{y}_k} + \zeta_2^k \frac{\partial}{\partial \ddot{y}_k} + \dots,$$

где

$$\zeta_l^k = D(\zeta_{l-1}^k) - y_k^{(l)} D(\xi), \quad \zeta_0^k \equiv \eta^k, \quad l \geq 1.$$

Симметрия X называется вариационной, если ее допускает элементарное действие по Лагранжу $\mathcal{L} dx$ (что обеспечивает инвариантность функционала). Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$X \mathcal{L} + \mathcal{L} D(\xi) = 0.$$

то условие допускает обобщение на случай, когда в правой части стоит полная дивергенция от некоторого вектора (так называемая дивергентная инвариантность функционала).

Наиболее наглядно теорема Нетер [38], может быть сформулирована с помощью операторного тождества:

$$X\mathcal{L} + \mathcal{L}D(\xi) \equiv (\eta^k - \xi\dot{y}_k) \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta y_k} + D \left(\xi\mathcal{L} + (\eta^k - \xi\dot{y}_k) \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta y_k} \right).$$

Из тождества вытекает, что из инвариантности функционала (левая часть равна нулю) на решениях экстремальных уравнений (1.59) следует выполнение первых интегралов

$$\xi\mathcal{L} + (\eta^k - \xi\dot{y}_k) \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta y_k} = C = \text{const.}$$

на той же системе (1.59). В этом и заключается теорема Нетер.

Таким образом, если для системы m уравнений второго порядка известны функция Лагранжа и $2m$ вариационных симметрий, дающих функционально независимые интегралы, то эту систему можно проинтегрировать чисто алгебраическим путем. Для этого достаточно из интегралов исключить производные первого порядка. В случае меньшего числа симметрий возможно понижение порядка системы.

1.3.2 Система Ермакова и некоторые ее свойства

Уравнение Ермакова [68]

$$\ddot{y} + \alpha(t)y = ky^{-3}, \quad k = \text{const} \neq 0 \quad (1.60)$$

может быть упрощено с помощью частных решений уравнения осциллятора

$$\ddot{v} + \alpha(t)v = 0. \quad (1.61)$$

Если известно два независимых решения (1.61), $v_1(t)$ и $v_2(t)$, с единичным Вронскианом $\dot{v}_1v_2 - v_1\dot{v}_2$, то (1.61) преобразованием

$$t_* = \frac{v_2(t)}{v_1(t)} \neq \text{const}, \quad v_* = \frac{v(t)}{v_1(t)},$$

приводится к линейному уравнению $\ddot{v}_* = 0$. Таким же преобразованием уравнение (1.60) переводится в уравнение

$$\ddot{y}_* = ky_*^{-3}, \quad k = \text{const.} \quad (1.62)$$

Уравнение (1.62) было выделено С. Ли при групповой классификации ОДУ второго порядка. Позже Пиннэ [79] показал, что решение (1.60) при произвольных начальных данных $y(t_0) = y_0 \neq 0$, $\dot{y}(t_0) = y_1$ имеет форму (нелинейная суперпозиция)

$$y(t) = \sqrt{V_1^2(t) + kW^{-2}V_2^2(t)},$$

где $V_1(t), V_2(t)$ — линейно независимые решения (1.61) такие, что

$$V_1(t_0) = y_0, \quad \dot{V}_1(t_0) = y_1, \quad V_2(t_0) = 0, \quad \dot{V}_2(t_0) \neq 0,$$

и W — определитель Вронского:

$$W = V_1\dot{V}_2 - V_2\dot{V}_1 = \text{const} \neq 0.$$

В работах [80], [81] были построены разностные аналоги (1.60), сохраняющие нелинейную суперпозицию и обладающие свойством Пенлеве.

Система вида

$$\ddot{u} + \alpha(t)u = f(v/u)u^{-3}, \quad \ddot{v} + \alpha(t)v = g(v/u)v^{-3} \quad (1.63)$$

была представлена Реем и Рейдом [82;83] как обобщение (1.60) и названы системами Ермакова. Она обладает первым интегралом (называемым инвариантом Рей-Рейда):

$$\frac{(u\dot{v} - v\dot{u})^2}{2} + \int^{v/u} [\lambda f(\lambda) - \lambda^{-3}g(\lambda)] d\lambda = \text{const}.$$

Если известно два частных решения — $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — линейного уравнения (1.61) с единичным Вронскианом $\varphi_1\dot{\varphi}_2 - \varphi_2\dot{\varphi}_1$, то преобразованием

$$x = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}, \quad z(x) = \frac{u(t)}{\varphi_1(t)}, \quad w(x) = \frac{v(t)}{\varphi_1(t)}, \quad (1.64)$$

Система (1.63) приводится к виду

$$z''_{xx} = z^{-3}f(w/z), \quad w''_{xx} = w^{-3}g(w/z).$$

Последняя система обладает частным решением

$$\begin{aligned} z(x) &= A\sqrt{C_2x^2 + C_1x + C_0}, \\ w(x) &= sA\sqrt{C_2x^2 + C_1x + C_0}, \\ A &= \left(\frac{f(s)}{C_0C_2 - \frac{1}{4}C_1^2} \right)^{\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

где C_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные, s — корень алгебраического уравнения

$$s^4 f(s) = g(s).$$

В данной работе рассмотрим частный случай системы Ермакова [84]

$$\begin{cases} \ddot{u} + \alpha u = \frac{1}{u^2 v}, \\ \ddot{v} + \alpha v = \frac{1}{v^2 u}, \end{cases} \quad (1.65)$$

где α — некоторая константа. Эта система, называемая системой Ермакова-Рей-Рейда, встречается в приложениях, в частности, при описании движения мелкой воды с поверхностью дна, имеющей топографию эллиптического параболоида [84].

В данном случае

$$f\left(\frac{v}{u}\right) \equiv \frac{u}{v}, \quad g\left(\frac{v}{u}\right) \equiv \frac{v}{u}.$$

а решениях системы (1.65) инвариант Рей-Рейда принимает вид [84; 85]:

$$I = \frac{(v\dot{u} - u\dot{v})^2}{2} + \frac{u}{v} + \frac{v}{u} = \text{const.} \quad (1.66)$$

Используя инвариант и замену

$$l(t^*) = \frac{u(t)}{v(t)}, \quad dt^* = v(t)^{-2} dt,$$

получаем

$$l_{t^*} = \sqrt{2(I + l + l^{-1})}$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dl}{\sqrt{(I + l + l^{-1})}} = t^* + C. \quad (1.67)$$

Последняя квадратура в элементарных функциях не интегрируется.

Преобразование (1.64) принимает вид

$$\begin{cases} u(t) = \frac{z(x)\alpha^{1/4}}{\cos \sqrt{\alpha}t}, & v(t) = \frac{w(x)\alpha^{1/4}}{\cos \sqrt{\alpha}t}, & t = \frac{\arctan x}{\sqrt{\alpha}}, & \alpha > 0, \\ u(t) = \frac{z(x)(-\alpha)^{1/4}}{\cosh \sqrt{-\alpha}t}, & v(t) = \frac{w(x)(-\alpha)^{1/4}}{\cosh \sqrt{-\alpha}t}, & t = \frac{\text{arctanh } x}{\sqrt{-\alpha}}, & \alpha < 0, \end{cases}$$

и переводит систему (1.65) в систему

$$\begin{cases} z''_{xx} = \frac{1}{z^2 w}, \\ w''_{xx} = \frac{1}{w^2 z}. \end{cases} \quad (1.68)$$

Система (1.65) может быть получена как уравнение Эйлера-Лагранжа некоторого функционала, обладающего тремя вариационными симметриями. Теорема Нётер позволяет найти три первых интеграла системы (1.65), связанных с инвариантом (1.66).

Исследуем отдельно три случая: $\alpha = 0$, $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$.

1. При $\alpha = 0$ система допускает три симметрии:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}, \quad X_3 = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + xu \frac{\partial}{\partial u} + tv \frac{\partial}{\partial v}.$$

Порождающий систему лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{uv} - \frac{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}{2}$$

инвариантен по отношению к операторам X_1 , X_2 и дивергентно-инвариантен по отношению к X_3 :

$$X_3 \mathcal{L} + \mathcal{L} D(t^2) = D \left(-\frac{u^2 + v^2}{2} \right).$$

С помощью теоремы Нётер могут быть получены следующие первые интегралы:

$$\begin{aligned} J_1^1 &= \frac{1}{uv} + \frac{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}{2} = A_1, \\ J_1^2 &= \frac{2t}{uv} + t(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) - (u\dot{u} + v\dot{v}) = B_1, \\ J_1^3 &= \frac{t^2}{uv} + \frac{t^2(\dot{u}^2 + \dot{v}^2)}{2} - (u\dot{u} + v\dot{v})t + \frac{u^2 + v^2}{2} = C_1. \end{aligned}$$

Инвариант (1.66) в данном случае выражается через первые интегралы:

$$I = 2J_1^1 J_1^3 - \frac{(J_1^2)^2}{2}. \quad (1.69)$$

Исключая \dot{u} , \dot{v} из найденных интегралов, получаем соотношение:

$$A_1 t^2 - B_1 t - \frac{u^2 + v^2}{2} + C_1 = 0.$$

Довести процесс до получения общего решения не удастся, поскольку система обладает только тремя симметриями.

Положив $u^2 = v^2$, можно получить частное решение:

$$u = \pm \sqrt{A_1 t^2 - B_1 t + C_1}, \quad v^2 = u^2.$$

2. При $\alpha > 0$ система допускает три симметрии:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_2 &= \cos(2\sqrt{\alpha t}) \frac{\partial}{\partial t} - \sin(2\sqrt{\alpha t}) \sqrt{\alpha} u \frac{\partial}{\partial u} - \sin(2\sqrt{\alpha t}) \sqrt{\alpha} v \frac{\partial}{\partial v}, \\ X_3 &= \sin(2\sqrt{\alpha t}) \frac{\partial}{\partial t} + \cos(2\sqrt{\alpha t}) \sqrt{\alpha} u \frac{\partial}{\partial u} + \cos(2\sqrt{\alpha t}) \sqrt{\alpha} v \frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned}$$

Порождающий систему лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{uv} - \frac{1}{2}(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 - \alpha u^2 - \alpha v^2),$$

инвариантен к действию оператора X_1 и дивергентно инвариантен по отношению к X_2 и X_3 :

$$X_2 \mathcal{L} + \mathcal{L} D(\cos(2\sqrt{\alpha t})) = D(\alpha \cos(2\sqrt{\alpha t})(u^2 + v^2)).$$

$$X_3 \mathcal{L} + \mathcal{L} D(\sin(2\sqrt{\alpha t})) = D(\alpha \sin(2\sqrt{\alpha t})(u^2 + v^2)),$$

Тождество Нётер дает три интеграла (соответствующих симметриям X_1, X_2 и X_3):

$$J_2^1 = \frac{1}{uv} + \frac{1}{2}(\alpha u^2 + \alpha v^2 + \dot{u}^2 + \dot{v}^2) = A_2.$$

$$\begin{aligned} J_2^2 &= \cos(2\sqrt{\alpha t}) \left(\frac{1}{uv} + \frac{1}{2}(\alpha u^2 + \alpha v^2 - \dot{u}^2 - \dot{v}^2) \right) \\ &\quad + (\sqrt{\alpha} \sin(2\sqrt{\alpha t})u + \dot{u} \cos(2\sqrt{\alpha t})) \dot{u} \\ &\quad + (\sqrt{\alpha} \sin(2\sqrt{\alpha t})v + \dot{v} \cos(2\sqrt{\alpha t})) \dot{v} \\ &\quad - \alpha \cos(2\sqrt{\alpha t})(u^2 + v^2) = B_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_3^2 &= \sin(2\sqrt{\alpha t}) \left(\frac{1}{uv} + \frac{1}{2}(\alpha u^2 + \alpha v^2 - \dot{u}^2 - \dot{v}^2) \right) \\ &\quad - (\sqrt{\alpha} \cos(2\sqrt{\alpha t})u - \dot{u} \sin(2\sqrt{\alpha t})) \dot{u} \\ &\quad - (\sqrt{\alpha} \cos(2\sqrt{\alpha t})v - \dot{v} \sin(2\sqrt{\alpha t})) \dot{v} \\ &\quad - \alpha \sin(2\sqrt{\alpha t})(u^2 + v^2) = C_2. \end{aligned}$$

Исключая \dot{u}, \dot{v} из J_2^1, J_2^2, J_3^2 , можно получить соотношение:

$$B_2 \cos(2\sqrt{\alpha t}) + C_2 \sin(2\sqrt{\alpha t}) + \alpha(u^2 + v^2) = A_2.$$

Откуда, как и в предыдущем случае, отсюда можно получить частное решение:

$$u = \pm \left[\frac{A_2 - B_2 \cos(2\sqrt{\alpha}t) - C_2 \sin(2\sqrt{\alpha}t)}{2\alpha} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad v^2 = u^2.$$

Инвариант (1.66) связан с интегралами соотношением

$$I = \frac{1}{2\alpha} \left((J_2^1)^2 - (J_2^2)^2 - (J_2^3)^2 \right). \quad (1.70)$$

3. При $\alpha < 0$ система допускает три симметрии:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_2 &= e^{2\sqrt{-\alpha}t} \frac{\partial}{\partial t} + e^{2\sqrt{-\alpha}t} \sqrt{-\alpha}u \frac{\partial}{\partial u} + e^{2\sqrt{-\alpha}t} \sqrt{-\alpha}v \frac{\partial}{\partial v}, \\ X_3 &= e^{-2\sqrt{-\alpha}t} \frac{\partial}{\partial t} - e^{-2\sqrt{-\alpha}t} \sqrt{-\alpha}u \frac{\partial}{\partial u} - e^{-2\sqrt{-\alpha}t} \sqrt{-\alpha}v \frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned}$$

Порождающий систему лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{uv} - \frac{1}{2}(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 - \alpha u^2 - \alpha v^2),$$

инвариантен к действию оператора X_1 и дивергентно инвариантен по отношению к X_2 и X_3 :

$$X_2 \mathcal{L} + \mathcal{L} D(e^{2\sqrt{-\alpha}t}) = D \left(\alpha e^{2\sqrt{-\alpha}t} (u^2 + v^2) \right),$$

$$X_3 \mathcal{L} + \mathcal{L} D(e^{-2\sqrt{-\alpha}t}) = D \left(\alpha e^{-2\sqrt{-\alpha}t} (u^2 + v^2) \right).$$

Тождество Нётер дает три первых интеграла, соответствующих симметриям X_1 , X_2 и X_3 :

$$J_3^1 = \frac{1}{uv} + \frac{1}{2}(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \alpha u^2 + \alpha v^2) = A_3.$$

$$J_3^2 = \frac{e^{2\sqrt{-\alpha}t}}{2} \left(\frac{2}{uv} - \alpha(u^2 + v^2) + \dot{u}^2 + \dot{v}^2 - 2\sqrt{-\alpha}(u\dot{u} + v\dot{v}) \right) = B_3.$$

$$J_3^3 = \frac{e^{-2\sqrt{-\alpha}t}}{2} \left(\frac{2}{uv} - \alpha(u^2 + v^2) + \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + 2\sqrt{-\alpha}(u\dot{u} + v\dot{v}) \right) = C_3.$$

Исключая \dot{u}, \dot{v} из J_3^1, J_3^2, J_3^3 , можно получить выражение для суммы квадратов $(u^2 + v^2)$:

$$\frac{C_3 e^{2\sqrt{-\alpha}t} + B_3 e^{-2\sqrt{-\alpha}t}}{2} + \alpha(u^2 + v^2) = A_3.$$

Очевидно, как и в предыдущих случаях, отсюда можно получить частное решение:

$$u = \pm \left[\frac{2A_3 - B_3 e^{-2\sqrt{-\alpha}t} - C_3 B_3 e^{2\sqrt{-\alpha}t}}{4\alpha} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad v^2 = u^2.$$

Инвариант (1.66) связан с интегралами соотношением

$$I = \frac{1}{2\alpha} \left((J_3^1)^2 - J_3^2 J_3^3 \right).$$

1.3.3 Консервативные разностные схемы систем ОДУ второго порядка

Рассмотрим трехточечную разностную схему для системы ОДУ второго порядка. Будем представлять модель в виде двух семейств конечно-разностных уравнений:

$$F^k(x, x_-, x_+, \mathbf{u}, \mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+) = 0, \quad (1.71)$$

$$\Omega^k(x, x_-, x_+, \mathbf{u}, \mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (1.72)$$

второе семейство представляет собой уравнения для сетки. то второе семейство обычно не дописывают, а структуру сетки подразумевают или равномерной, или неравномерной, с заданными шагами сетки

$$h_+ = x_+ - x, \quad h_- = x - x_-,$$

где h_+, h_- — шаги сетки право и влево от данной точки x . В нашем подходе явная запись уравнения сетки имеет принципиальное значение. Именно это позволяет получать разностные схемы, допускающие полную симметрию соответствующего ОДУ.

Первая система разностных уравнений в системе (1.71) представляет собой разностные уравнения второго порядка, которые в континуальном пределе ($h \rightarrow 0$) дают ОДУ второго порядка. Второе семейство уравнений для сетки не обязано давать ОДУ второго порядка при стремлении шага сетки к нулю.

Например, можно рассматривать равномерную разностную сетку в виде уравнения

$$h_+ = h_-,$$

которое «исчезает» в континуальном пределе: $0 = 0$. Геометрически это означает превращение разностного шаблона в точку, не имеющую ни размерности, ни геометрической структуры. то порождает определенные трудности в разностном моделировании, — уравнение, генерирующее разностную сетку, отсутствует в дифференциальной модели. Однако, как будет далее видно, можно выписать некоторое общее семейство уравнений для разностных сеток, сохраняющих группу исходного дифференциального уравнения. Из этого семейства надлежит выбрать такое уравнение, которое соответствует поставленным целям. Такой целью может быть, например, максимальная простота структуры сетки, адаптация к специфике семейства решений и т. д.

В пространстве разностных переменных удобно ввести операторы сдвига вправо и влево соответственно:

$$S_{+h}(f) = f_+ = f(x_+, u_+), \quad S_{-h}(f) = f_- = f(x_-, u_-),$$

и операторы разностного дифференцирования:

$$D_{+h} = \frac{S_{+h} - 1}{h_+}, \quad D_{-h} = \frac{1 - S_{-h}}{h_-}.$$

Через

$$u_x = D_{+h}(u) = \frac{u_+ - u}{h_+}, \quad u_{\bar{x}} = D_{-h}(u) = \frac{u - u_-}{h_-}$$

обозначим правую и левую разностные производные.

Разностная схема инвариантна к действию оператора X , если выполняется условие:

$$\begin{cases} X F^k|_{F^l=0, \Omega^l=0} = 0, \\ X \Omega^k|_{F^l=0, \Omega^l=0} = 0, \end{cases} \quad k, l = 1, \dots, m.$$

где

$$X = \sum_s S_{+h}^{(s)} \left(\xi(x, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x} + \eta^k(x, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u^k} \right)$$

— продолжение оператора X на пространство сеточных переменных. В частности, на трехточечном шаблоне достаточно рассмотреть только три члена этой суммы.

Разностными инвариантами оператора X называют решения линейного уравнения в частных производных

$$X\Phi = 0, \quad (1.73)$$

где Φ — искомая функция, определенная в точках разностного шаблона.

Рассмотрим разностный функционал

$$\mathcal{L} = \sum_s L(x, x_+, \mathbf{u}, \mathbf{u}_+) h_+, \quad (1.74)$$

с двухточечной разностной функцией Лагранжа

$$L(x, x_+, \mathbf{u}, \mathbf{u}_+).$$

Разностный аналог теоремы Нетер (см. [14; 21]) основан на следующем операторном тождестве:

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial L}{\partial x} + \xi_+ \frac{\partial L}{\partial x_+} + \eta^k \frac{\partial L}{\partial u^k} + \eta_+^k \frac{\partial L}{\partial u_+^k} + L D_{+h}(\xi) &\equiv \\ &\equiv \xi \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{h_-}{h_+} \frac{\partial L^-}{\partial x} - D_{+h}(L^-) \right) + \eta^k \left(\frac{\partial L}{\partial u^k} + \frac{h_-}{h_+} \frac{\partial L^-}{\partial u^k} \right) + \\ &\quad + D_{+h} \left(h_- \eta^k \frac{\partial L^-}{\partial u^k} + h_- \xi \frac{\partial L^-}{\partial x} + \xi L^- \right), \end{aligned} \quad (1.75)$$

где $\xi_+ = \xi(x_+, \mathbf{u}_+)$, $\eta_+^k = \eta^k(x_+, \mathbf{u}_+)$.

то тождество выделяет следующие разностные объекты. Прежде всего, в отличие от непрерывного случая, выделяется не уравнение Эйлера, а некоторое другое уравнение, названное *квазиэкстремальным* или локально-экстремальным:

$$\xi \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{h_-}{h_+} \frac{\partial L^-}{\partial x} - D_{+h}(L^-) \right) + \eta^k \left(\frac{\partial L}{\partial u^k} + \frac{h_-}{h_+} \frac{\partial L^-}{\partial u^k} \right) = 0. \quad (1.76)$$

Во-вторых, это уравнение зависит от конкретной подгруппы, так как содержит коэффициенты генератора группы ξ, η в явном виде. Обращение в нуль левой части тождества означает инвариантность разностного функционала. Обращение в нуль правой части тождества (1.75) позволяет выписать первый интеграл

$$D_{+h} \left(h_- \eta^k \frac{\partial L^-}{\partial u^k} + h_- \xi \frac{\partial L^-}{\partial x} + \xi L^- \right) \Big|_{(1.72), (1.76)} = 0, \quad (1.77)$$

справедливый на решениях соответствующего квазиэкстремального уравнения.

Таким образом, в случае разностных уравнений ситуация существенно усложняется: разным подгруппам соответствуют разные квазиэкстремальные уравнения, для каждого из которых есть «свой» закон сохранения, соответствующий инвариантности разностного функционала относительно подгруппы с данными ξ , η .

Следующее утверждение дает достаточные условия существования у одного уравнения полного набора законов сохранения (см. [1; 14; 21]).

Теорема 1.3.1. Пусть функционал (1.74) допускает r -параметрическую группу преобразований на сетке (1.72). Пусть существует решение системы разностных уравнений (глобальная экстремаль):

$$\frac{\delta L}{\delta x} = h_+ \frac{\partial L}{\partial x} + h_- \frac{\partial L^-}{\partial x} + L^- - L, \quad (1.78)$$

$$\frac{\delta L}{\delta u^k} = h_+ \frac{\partial L}{\partial u^k} + h_- \frac{\partial L^-}{\partial u^k}, \quad (1.79)$$

которая эквивалентна (1.71). Тогда на решениях системы (1.71)–(1.72) справедливы r законов сохранения вида (1.77).

Инвариантная разностная схема

Будем искать 3-точечную разностную модель на нерегулярной сетке в подпространстве $(t, u, v, t^+, u^+, v^+, t^-, u^-, v^-)$ (соответствующий разностный шаблон изображен на Рис. 1.2).

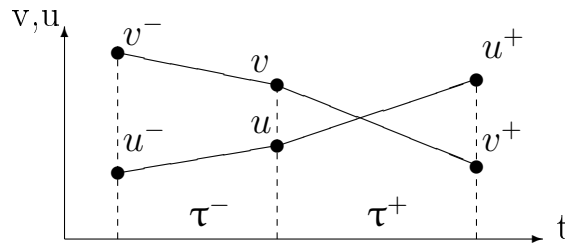


Рисунок 1.2 — Шаблон для разностной системы

Случай $\alpha = 0$.

Выпишем разностные инварианты симметрий X_1 – X_3 , найденные решением уравнений (1.73):

$$I_1^1 = \frac{u}{v}, \quad I_2^1 = \frac{u^+}{v^+}, \quad I_3^1 = \frac{u^-}{v^-},$$

$$I_4^1 = \frac{uvu^-}{\tau^-} \left(\frac{u^+ - u}{\tau^+} - \frac{u - u^-}{\tau^-} \right), \quad I_5^1 = \frac{\tau^+}{uu^+}, \quad I_6^1 = \frac{\tau^-}{uu^-},$$

где $\tau^+ = t^+ - t$, $\tau^- = t - t^-$.

которые понадобятся в дальнейшем для выбора сеточных уравнений. Кроме того, инвариантная разностная схема должна представлять собой некоторую функцию (комбинацию) этих инвариантов.

Выбор подходящей функции Лагранжа представляет определенные трудности, т. к. не всякая разностная функция, аппроксимирующая дифференциальный лагранжиан, окажется инвариантной. Для того, чтобы найти общий вид инвариантной функции Лагранжа, решим систему, составленную из уравнений–условий инвариантности:

$$\begin{aligned} X_1 L + LD_{+h}(\xi_1) &= X_1 L = 0, \\ X_2 L + LD_{+h}(\xi_2) &= X_2 L + 2L = 0, \\ X_3 L + LD_{+h}(\xi_3) + D_{+h}\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right) &= \\ = X_2 L + (t^+ + t)L + \frac{(u^+)^2 + (v^+)^2 - u^2 - v^2}{2(t^+ - t)} &= 0, \end{aligned}$$

Из условия совместности системы можно определить, что:

$$L(t, t^+, u, u^+, v, v^+) = \frac{1}{\tau^+} F\left(\frac{uu^+}{\tau^+}, \frac{vv^+}{\tau^+}, \frac{v}{u}\right) - \frac{(u^+)^2 + (v^+)^2 + (u+v)^2}{2(\tau^+)^2},$$

где F — произвольная функция своих аргументов. Функция L должна аппроксимировать дифференциальный лагранжиан, что позволяет выбрать подходящую функцию F .

Выберем, например, F следующего вида:

$$F\left(\frac{uu^+}{\tau^+}, \frac{vv^+}{\tau^+}, \frac{v}{u}\right) = \frac{\tau^+}{uu^+v} + \frac{uu^+}{\tau^+} + \frac{vv^+}{\tau^+}.$$

Тогда — после некоторых упрощений — получим лагранжиан

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{\tau^+} \frac{\tau^+}{uu^+v} + \left(\frac{uu^+}{(\tau^+)^2} + \frac{vv^+}{(\tau^+)^2} - \frac{(u^+)^2 + (v^+)^2 + (u+v)^2}{2(\tau^+)^2} \right) \\ &= \frac{1}{vu^+} - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{u^+ - u}{\tau^+} \right)^2 + \left(\frac{v^+ - v}{\tau^+} \right)^2 \right) = \frac{1}{uv} - \frac{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}{2} + O(\tau^+). \end{aligned}$$

Лагранжиан

$$L_1 = \frac{1}{vu^+} - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{u^+ - u}{\tau^+} \right)^2 + \left(\frac{v^+ - v}{\tau^+} \right)^2 \right)$$

допускает симметрии X_1, X_2 и дивергентно инвариантен по отношению к X_3 :

$$X_3 L_1 + L_1 D(t^2) = D_{+h} \left(-\frac{u^2 + v^2}{2} \right).$$

Аналогично можно получить семейство лагранжианов:

$$L_\theta = \frac{\theta}{vu^+} + \frac{1-\theta}{uv^+} - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{u^+ - u}{\tau^+} \right)^2 + \left(\frac{v^+ - v}{\tau^+} \right)^2 \right), \quad 0 < \theta < 1,$$

обладающих теми же свойствами.

Выберем $\theta = \frac{1}{2}$, чтобы придать функции более симметричный вид:

$$L = L_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2uv^+} + \frac{1}{2vu^+} - \frac{1}{2} \left(\frac{u^+ - u}{\tau^+} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{v^+ - v}{\tau^+} \right)^2.$$

Выпишем теперь уравнения квазиэкстремалей (1.78), (1.79):

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta t} : \quad & \frac{u_t^2 - u_{\bar{t}}^2 + v_t^2 - v_{\bar{t}}^2}{2} = \frac{1}{2vu^-} + \frac{1}{2uv^-} - \frac{1}{2vu^+} - \frac{1}{2uv^+}, \\ \frac{\delta L}{\delta u} : \quad & u_t - u_{\bar{t}} = \frac{1}{2u^2} \left(\frac{\tau^+}{v^+} + \frac{\tau^-}{v^-} \right), \\ \frac{\delta L}{\delta v} : \quad & v_t - v_{\bar{t}} = \frac{1}{2v^2} \left(\frac{\tau^+}{u^+} + \frac{\tau^-}{u^-} \right). \end{aligned}$$

Необходимо показать, что уравнения квазиэкстремалей совместны (получить «глобальную экстремаль») на некоторой инвариантной сетке.

Упростим вид $\frac{\delta L}{\delta t}$:

$$\frac{u_t + u_{\bar{t}}}{2} \left(u_t - u_{\bar{t}} - \frac{\frac{1}{uv^-} - \frac{1}{uv^+}}{u_t + u_{\bar{t}}} \right) + \frac{v_t + v_{\bar{t}}}{2} \left(v_t - v_{\bar{t}} - \frac{\frac{1}{vu^-} - \frac{1}{vu^+}}{v_t + v_{\bar{t}}} \right) = 0.$$

Теперь видно, что для совмещения квазиэкстремалей должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} \frac{\frac{1}{uv^-} - \frac{1}{uv^+}}{u_t + u_{\bar{t}}} = \frac{1}{2u^2} \left(\frac{\tau^+}{v^+} + \frac{\tau^-}{v^-} \right), \\ \frac{\frac{1}{vu^-} - \frac{1}{vu^+}}{v_t + v_{\bar{t}}} = \frac{1}{2v^2} \left(\frac{\tau^+}{u^+} + \frac{\tau^-}{u^-} \right). \end{cases} \quad (1.80)$$

В качестве сеточных уравнений выберем следующие инвариантные соотношения:

$$\Omega : \quad \frac{\tau^+}{uu^+} = \frac{\tau^-}{uu^-} = \varepsilon_1, \quad \frac{\tau^+}{vv^+} = \frac{\tau^-}{vv^-} = \varepsilon_2, \quad (1.81)$$

где $|\varepsilon_1| \ll 1, |\varepsilon_2| \ll 1$ — некоторые числа.

а инвариантной сетке (1.81) квазиэкстремали совместны. Действительно, уравнения (1.80) после подстановки в них уравнений сетки и упрощений обращаются в тождества $0 = 0$, что проверяется непосредственно.

Теперь инвариантную разностную схему можно записать в виде:

$$\begin{cases} u_t - u_{\bar{t}} = \frac{1}{2u^2} \left(\frac{\tau^+}{v^+} + \frac{\tau^-}{v^-} \right), \\ v_t - v_{\bar{t}} = \frac{1}{2v^2} \left(\frac{\tau^+}{u^+} + \frac{\tau^-}{u^-} \right), \\ \frac{\tau^+}{uu^+} = \frac{\tau^-}{uu^-}, \quad \frac{\tau^+}{vv^+} = \frac{\tau^-}{vv^-}. \end{cases} \quad (1.82)$$

Применение разностного аналога теоремы Нётер позволяет найти следующие первые интегралы:

$$J_1^1 = \frac{1}{2uv^+} + \frac{1}{2vu^+} + \frac{u_t^2 + v_t^2}{2} = A_1,$$

$$J_2^1 = \frac{t + t^+}{2} \left(\frac{1}{vu^+} + \frac{1}{uv^+} \right) + (u_t^2 + v_t^2)t - uu_t - vv_t = B_1,$$

$$\begin{aligned} J_3^1 = & \frac{(t^+)^2}{2} \left(\frac{1}{uv^+} + \frac{1}{vu^+} + u_t^2 + v_t^2 \right) \\ & - t^+ \left(u_t u^+ + v_t v^+ + \frac{\tau^+}{2uv^+} + \frac{\tau^+}{2vu^+} \right) + \frac{(u^+)^2 + (v^+)^2}{2} = C_1. \end{aligned}$$

Исключив u^+, v^+ из интегралов $J_1^1 - J_3^1$, можно получить следующее соотношение:

$$A_1 t^2 - B_1 t - \frac{u^2 + v^2}{2} + C_1 = 0.$$

Точно такое же соотношение имелось в дифференциальном случае. Положив $u^2 = v^2$, можно получить точное частное решение:

$$u = \pm \sqrt{A_1 t^2 - B_1 t + C_1}, \quad v^2 = u^2.$$

Таким образом, построенная инвариантная схема обладает тремя первыми интегралами и является точной на сумме квадратов решений. Схема интегрируема ровно в той степени, в какой интегрируема исходная дифференциальная система.

Воспользуемся соотношением (1.69) с целью получения разностного инварианта Рей-Рейда:

$$I_1 = 2J_1^1 J_3^1 - \frac{(J_2^1)^2}{2} = \frac{(vu_t - uv_t)^2}{2} + \frac{u}{v} + \frac{v}{u} + \frac{1}{2} \left(\frac{u^+}{v^+} - \frac{u}{v} + \frac{v^+}{u^+} - \frac{v}{u} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{\tau^+}{vu^+} + \frac{\tau^+}{uv^+} \right)^2. \quad (1.83)$$

Заметим, что с помощью сетки инвариант (1.83) можно записать в виде:

$$I_1|_{\Omega} = \frac{(vu_t - uv_t)^2}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \frac{u}{v} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \frac{v}{u} - \frac{1}{8} \left(\varepsilon_1 \frac{u}{v} + \varepsilon_2 \frac{v}{u} \right)^2. \quad (1.84)$$

Сделаем теперь замену:

$$l = \frac{u}{v}, \quad \tau_*^+ = \frac{\tau^+}{vv^+}.$$

Тогда из (1.84) получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{l^+ - l}{\tau_*^+} = \sqrt{I_1 + l + l^{-1}}.$$

Последнее соотношение представляет собой разностный аналог (1.67) для случая $\alpha = 0$.

Случай $\alpha > 0$.

Выпишем набор разностных инвариантов симметрий X_1 – X_3 :

$$\begin{aligned} I_1^2 &= \frac{u}{v}, & I_2^2 &= \frac{u^+}{v^+}, & I_3^2 &= \frac{u^-}{v^-}, \\ I_4^2 &= \frac{\sin(\sqrt{\alpha}(\tau^-))}{uu^-}, & I_5^2 &= \frac{\sin(\sqrt{\alpha}(\tau^+))}{uu^+}, \\ I_6^2 &= \frac{\sin(\sqrt{\alpha}(\tau^+ + \tau^-))}{u^-u^+} \end{aligned}$$

Для нахождения общей формы разностного лагранжиана надо решить систему условий инвариантности:

$$\begin{aligned} X_1 L + LD_{+h}(\xi_1) &= X_1 L = 0, \\ X_2 L + LD_{+h}(\cos(2\sqrt{\alpha}t)) &= D_{+h}(\alpha \cos(2\sqrt{\alpha}t)(u^2 + v^2)), \\ X_3 L + LD_{+h}(\sin(2\sqrt{\alpha}t)) &= D_{+h}(\alpha \sin(2\sqrt{\alpha}t)(u^2 + v^2)). \end{aligned}$$

Из условия совместности системы следует, что такой лагранжиан должен иметь вид:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{\tau^+} F \left(\frac{v}{u}, \frac{v^+}{u^+}, \frac{uu^+}{\sin(\sqrt{\alpha} \tau^+)} \right) - \frac{\sqrt{\alpha}}{2\tau^+} \frac{u^2 + v^2 + (u^+)^2 + (v^+)^2}{\operatorname{tg}(\sqrt{\alpha} \tau^+)} = \\ &= \frac{1}{\tau^+} F \left(\frac{v}{u}, \frac{vv^+}{\sin(\sqrt{\alpha} \tau^+)}, \frac{uu^+}{\sin(\sqrt{\alpha} \tau^+)} \right) - \frac{\sqrt{\alpha}}{2\tau^+} \frac{u^2 + v^2 + (u^+)^2 + (v^+)^2}{\operatorname{tg}(\sqrt{\alpha} \tau^+)}, \end{aligned} \quad (1.85)$$

где F — произвольна функция своих аргументов.

Функция L должна аппроксимировать дифференциальный лагранжиан, так что нам придется выбрать и подходящую функцию F .

Если предел

$$\lim_{\tau^+ \rightarrow 0} F$$

конечен, то (1.85) неограниченно возрастает.

Кроме того, в (1.85), разложение в ряд Тейлора

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{2\tau^+} \frac{u^2 + v^2 + (u^+)^2 + (v^+)^2}{\operatorname{tg}(\sqrt{\alpha} \tau^+)}$$

имеет члены порядка $1/(\tau^+)^2$. Итак, F должна иметь разложение в ряд Тейлора порядка $1/\tau^+$, чтобы лагранжиан имел конечное разложение.

Можно заметить, что выражение

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{2\tau^+} \frac{u^2 + v^2 + (u^+)^2 + (v^+)^2}{\operatorname{tg}(\sqrt{\alpha} \tau^+)} - \frac{\sqrt{\alpha}}{\tau^+} \frac{uu^+ + vv^+}{\sin(\sqrt{\alpha} \tau^+)}$$

представляет собой

$$\frac{1}{2} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 - \alpha(u^2 + v^2)) + O(\tau^+),$$

так что в качестве F можно выбрать

$$\sqrt{\alpha} \frac{uu^+ + vv^+}{\sin(\sqrt{\alpha} \tau^+)}.$$

Наконец, приходим к следующей форме лагранжиана:

$$\begin{aligned} L_\theta &= \frac{\sin(\sqrt{\alpha} \tau^+)}{\sqrt{\alpha} \tau^+} \left(\frac{\theta}{vu^+} + \frac{1-\theta}{uv^+} \right) \\ &\quad - \frac{\sqrt{\alpha}}{2\tau^+} \frac{u^2 + v^2 + (u^+)^2 + (v^+)^2}{\operatorname{tg}(\sqrt{\alpha} \tau^+)} + \frac{\sqrt{\alpha}}{\tau^+} \frac{uu^+ + vv^+}{\sin(\sqrt{\alpha} \tau^+)} = \\ &= \frac{1}{uv} - \frac{\dot{u}^2 + \dot{v}^2 - \alpha u^2 - \alpha v^2}{2} + O(\tau^+), \end{aligned}$$

где θ — любое число от 0 до 1.

Как и в случае $\alpha = 0$, выберем $\theta = 1/2$, чтобы придать более симметричный вид функции:

$$L = L_{\frac{1}{2}} = \frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{2\sqrt{\alpha}\tau^+} \left(\frac{1}{vu^+} + \frac{1}{uv^+} \right) - \frac{\sqrt{\alpha}}{2\tau^+} \frac{u^2 + v^2 + (u^+)^2 + (v^+)^2}{\operatorname{tg}(\sqrt{\alpha}\tau^+)} + \frac{\sqrt{\alpha}}{\tau^+} \frac{uu^+ + vv^+}{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^+)}.$$

Выпишем уравнения квазиэкстремалей:

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta t} : & \frac{\cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{2} \left(\frac{1}{vu^-} + \frac{1}{uv^-} \right) - \frac{\cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{2} \left(\frac{1}{vu^+} + \frac{1}{uv^+} \right) \\ & - \frac{\alpha}{2} \frac{(u^+)^2 + (v^+)^2 + u^2 + v^2 - 2(uu^+ + vv^+) \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{\sin^2(\sqrt{\alpha}\tau^+)} \\ & + \frac{\alpha}{2} \frac{(u^-)^2 + (v^-)^2 + u^2 + v^2 - 2(uu^- + vv^-) \cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{\sin^2(\sqrt{\alpha}\tau^-)} = 0, \\ \frac{\delta L}{\delta u} : & \frac{1}{2\sqrt{\alpha}u^2} \left(\frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{v^+} + \frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{v^-} \right) = \\ & = \sqrt{\alpha} \left(\frac{u^+ - u \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^+} + \frac{u^- - u \cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^-} \right), \\ \frac{\delta L}{\delta v} : & \frac{1}{2\sqrt{\alpha}v^2} \left(\frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{u^+} + \frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{u^-} \right) = \\ & = \sqrt{\alpha} \left(\frac{v^+ - v \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^+} + \frac{v^- - v \cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^-} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим квазиэкстремаль $\frac{\delta L}{\delta t}$. осле ряда элементарных преобразований (аналогичных преобразованиям, проведенным в предыдущем разделе) ее можно привести к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta t} : & \frac{1}{2v} \left(\frac{\cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{u^-} - \frac{\cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{u^+} \right) + \frac{1}{2u} \left(\frac{\cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{v^-} - \frac{\cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{v^+} \right) \\ & - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{u^+ - u \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^+} - \frac{u^- - u \cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^-} \right) \left(\frac{u^+ - u \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^+} + \frac{u^- - u \cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^-} \right) \\ & - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{v^+ - v \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^+} - \frac{v^- - v \cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^-} \right) \left(\frac{v^+ - v \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^+} + \frac{v^- - v \cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^-} \right). \end{aligned}$$

В таком виде сходство с квазиэкстремалами $\frac{\delta L}{\delta u}$ и $\frac{\delta L}{\delta v}$ становится весьма заметным. Для того, чтобы привести $\frac{\delta L}{\delta t}$ к линейной комбинации этих квази-

экстремалей, перепишем его в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta t} : \quad 0 &= \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \left(\frac{u^+ - u \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^+} - \frac{u^- - u \cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^-} \right) \times \\ &\times \left[\frac{\frac{\cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{v^-} - \frac{\cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{v^+}}{\sqrt{\alpha}v \left(\frac{u^+ - u \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^+} - \frac{u^- - u \cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^-} \right)} - \sqrt{\alpha} \left(\frac{u^+ - u \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^+} + \frac{u^- - u \cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^-} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \left(\frac{v^+ - v \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^+} - \frac{v^- - v \cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^-} \right) \times \\ &\times \left[\frac{\frac{\cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{u^-} - \frac{\cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{u^+}}{\sqrt{\alpha}u \left(\frac{v^+ - v \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^+} - \frac{v^- - v \cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^-} \right)} - \sqrt{\alpha} \left(\frac{v^+ - v \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^+} + \frac{v^- - v \cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^-} \right) \right]. \end{aligned}$$

Чтобы совместить квазиэкстремали, остается показать, что на сетке справедливы следующие равенства

$$\left[\frac{\frac{\cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{v^-} - \frac{\cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{v^+}}{\frac{u^+ - u \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^+} - \frac{u^- - u \cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^-}} - \frac{v}{2u^2} \left(\frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{v^+} + \frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{v^-} \right) \right]_{\Omega} = 0. \quad (1.86)$$

и

$$\left[\frac{\frac{\cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{u^-} - \frac{\cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{u^+}}{\frac{v^+ - v \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^+} - \frac{v^- - v \cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^-}} - \frac{u}{2v^2} \left(\frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{u^+} + \frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{u^-} \right) \right]_{\Omega} = 0. \quad (1.87)$$

Выберем в качестве сетки следующие инвариантные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{uu^+} &= \frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{uu^-} = \varepsilon_1, \\ \frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{vv^+} &= \frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{vv^-} = \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Выразив из сеточных уравнений, например, u^- , u^+ , v^- , v^+ , и подставив в (1.86), (1.87), получим тождества вида $0 = 0$. Таким образом, квазиэкстремали совмещаются, и можно выписать окончательный вид инвариантной разностной схемы:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\alpha u^2} \left(\frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{v^+} + \frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{v^-} \right) &= \frac{u^+ - u \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^+} + \frac{u^- - u \cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^-}, \\ \frac{1}{2\alpha v^2} \left(\frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{u^+} + \frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{u^-} \right) &= \frac{v^+ - v \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^+} + \frac{v^- - v \cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^-}, \\ \frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{uu^+} &= \frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{uu^-}, \quad \frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{vv^+} = \frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{vv^-}. \end{aligned} \right. \quad (1.88)$$

Разностный аналог теоремы Нётер дает следующие первые интегралы:

$$J_1^2 = \frac{\cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{2} \left(\frac{1}{vu^+} + \frac{1}{uv^+} \right) + \frac{\alpha}{2} \frac{(u^+)^2 + (v^+)^2 + u^2 + v^2 - 2(uu^+ + vv^+) \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{\sin^2(\sqrt{\alpha}\tau^+)} = A_2,$$

$$\begin{aligned}
J_2^2 = & \alpha \cos(2\sqrt{\alpha}t^+) \left(\frac{\cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{2\alpha} \left(\frac{1}{uv^+} + \frac{1}{vu^+} \right) \right. \\
& \left. + \frac{(u^+)^2 + (v^+)^2 + u^2 + v^2 - 2(uu^+ + vv^+) \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{2 \sin^2(\sqrt{\alpha}\tau^+)} \right) \\
& + \alpha \sin(2\sqrt{\alpha}t^+) \left(\frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{2\alpha} \left(\frac{1}{uv^+} - \frac{1}{vu^+} \right) - \frac{uu^+ + vv^+ - ((u^+)^2 + (v^+)^2) \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{2 \sin^2(\sqrt{\alpha}\tau^+)} \right) \\
& - \alpha((u^+)^2 + (v^+)^2) \cos(2\sqrt{\alpha}t^+) = B_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_3^2 = & \alpha \sin(2\sqrt{\alpha}t^+) \left(\frac{\cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{2\alpha} \left(\frac{1}{uv^+} + \frac{1}{vu^+} \right) \right. \\
& \left. + \frac{(u^+)^2 + (v^+)^2 + u^2 + v^2 - 2(uu^+ + vv^+) \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{2 \sin^2(\sqrt{\alpha}\tau^+)} \right) \\
& - \alpha \cos(2\sqrt{\alpha}t^+) \left(\frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{2\alpha} \left(\frac{1}{uv^+} - \frac{1}{vu^+} \right) - \frac{uu^+ + vv^+ - ((u^+)^2 + (v^+)^2) \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{2 \sin^2(\sqrt{\alpha}\tau^+)} \right) \\
& - \alpha((u^+)^2 + (v^+)^2) \sin(2\sqrt{\alpha}t^+) = C_2.
\end{aligned}$$

Исключая u^+, v^+ из интегралов, можно получить следующее соотношение:

$$B_2 \cos(2\sqrt{\alpha}t) + C_2 \sin(2\sqrt{\alpha}t) + \alpha(u^2 + v^2) = A_2.$$

Здесь вновь получен тот же результат, что и в дифференциальном случае.

Положив $u^2 = v^2$, можно получить точное частное решение:

$$u = \pm \left[\frac{A_2 - B_2 \cos(2\sqrt{\alpha}t) - C_2 \sin(2\sqrt{\alpha}t)}{2\alpha} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad v^2 = u^2.$$

Воспользуемся соотношением (1.70) с целью получения разностного инварианта Рей-Рейда:

$$\begin{aligned}
I_2 = & \frac{(\sqrt{\alpha}\tau^+)^2}{\sin^2(\sqrt{\alpha}\tau^+)} \frac{(uv_t - vu_t)^2}{2} + \frac{u}{v} + \frac{v}{u} + \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{u^+}{v^+} - \frac{u}{v} + \frac{v^+}{u^+} - \frac{v}{u} \right) - \frac{\sin^2(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{8\alpha} \left(\frac{1}{uv^+} + \frac{1}{vu^+} \right)^2.
\end{aligned}$$

Замечание 1.3.1. Схема (1.88) переводится в схему вида (1.82) заменой

$$u_n = \frac{\alpha^{1/4} z_n}{\cos \sqrt{\alpha} t_n}, \quad v_n = \frac{\alpha^{1/4} w_n}{\cos \sqrt{\alpha} t_n}, \quad t_n = \frac{\arctan x_n}{\sqrt{\alpha}},$$

где $x, z(x), w(x)$ — новые переменные.

Случай $\alpha < 0$.

Случай $\alpha < 0$ вполне аналогичен случаю $\alpha > 0$, поэтому будет рассмотрен менее подробно.

Выпишем набор разностных инвариантов симметрий $X_1 - X_3$:

$$\begin{aligned} I_1^3 &= \frac{u}{v}, & I_2^3 &= \frac{u^+}{v^+}, & I_3^3 &= \frac{u^-}{v^-}, \\ I_4^3 &= \frac{\sinh(\sqrt{-\alpha}(\tau^-))}{uu^-}, & I_5^3 &= \frac{\sinh(\sqrt{-\alpha}(\tau^+))}{uu^+}, \\ I_6^3 &= \frac{\sinh(\sqrt{-\alpha}(\tau^+ + \tau^-))}{u^-u^+} \end{aligned}$$

Исходя из соображений, схожих с изложенными в предыдущем пункте, можно получить следующий лагранжиан:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sinh(\sqrt{-\alpha}\tau^+)}{2\sqrt{-\alpha}\tau^+} \left(\frac{1}{vu^+} + \frac{1}{uv^+} \right) \\ &\quad - \frac{\sqrt{-\alpha}}{2\tau^+} \frac{u^2 + v^2 + (u^+)^2 + (v^+)^2}{\tanh(\sqrt{-\alpha}\tau^+)} + \frac{\sqrt{-\alpha}}{\tau^+} \frac{uu^+ + vv^+}{\sinh(\sqrt{-\alpha}\tau^+)}. \end{aligned}$$

Аналогично получается и схема

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{-\alpha}u^2} \left(\frac{\sinh(\sqrt{-\alpha}\tau^+)}{v^+} + \frac{\sinh(\sqrt{-\alpha}\tau^-)}{v^-} \right) &= \sqrt{-\alpha} \left(\frac{u^+ - u \cosh(\sqrt{-\alpha}\tau^+)}{\sinh \sqrt{-\alpha}\tau^+} + \frac{u^- - u \cosh(\sqrt{-\alpha}\tau^-)}{\sinh \sqrt{-\alpha}\tau^-} \right), \\ \frac{1}{2\sqrt{-\alpha}v^2} \left(\frac{\sinh(\sqrt{-\alpha}\tau^+)}{u^+} + \frac{\sinh(\sqrt{-\alpha}\tau^-)}{u^-} \right) &= \sqrt{-\alpha} \left(\frac{v^+ - v \cosh(\sqrt{-\alpha}\tau^+)}{\sinh \sqrt{-\alpha}\tau^+} + \frac{v^- - v \cosh(\sqrt{-\alpha}\tau^-)}{\sinh \sqrt{-\alpha}\tau^-} \right), \\ \frac{\sinh(\sqrt{-\alpha}\tau^-)}{uu^-} &= \frac{\sinh(\sqrt{-\alpha}\tau^+)}{uu^+}, & \frac{\sinh(\sqrt{-\alpha}\tau^-)}{vv^-} &= \frac{\sinh(\sqrt{-\alpha}\tau^+)}{vv^+}. \end{aligned} \right. \quad (1.89)$$

Набор первых интегралов системы также схож с набором интегралов для случая $\alpha > 0$. С помощью первых интегралов можно выяснить, что справедливо следующее соотношение:

$$\frac{C_3 e^{2\sqrt{-\alpha}t} + B_3 e^{-2\sqrt{-\alpha}t}}{2} + \alpha(u^2 + v^2) = A_3,$$

где A_3, B_3, C_3 — константы интегрирования.

Положив $u^2 = v^2$, можно получить точное частное решение:

$$u = \pm \left[\frac{2A_3 - B_3 e^{-2\sqrt{-\alpha}t} - C_3 B_3 e^{2\sqrt{-\alpha}t}}{4\alpha} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad v^2 = u^2.$$

Замечание 1.3.2. Схема (1.89) переводится в схему вида (1.82) заменой

$$u_n = \frac{(-\alpha)^{1/4} z_n}{\cos \sqrt{-\alpha} t_n}, \quad v_n = \frac{(-\alpha)^{1/4} w_n}{\cos \sqrt{-\alpha} t_n}, \quad t_n = \frac{\operatorname{arctanh} x_n}{\sqrt{-\alpha}},$$

где $x, z(x), w(x)$ — новые переменные.

Итак, в данном разделе были построены инвариантные разностные схемы системы Ермакова (1.65) для различных параметров α . Построенные инвариантные схемы обладают тремя первыми интегралами и являются точными на сумме квадратов решений и на частном решении. Схемы интегрируемы ровно в той степени, в какой интегрируема исходная дифференциальная система. Для каждой из построенных схем был также получен разностный аналог инварианта Рей-Рейда.

Численная реализация одной из полученных схем приведена в Приложении Б.

В дифференциальном случае все подобные системы сводятся к системе вида (1.68). Выяснилось, что в разностном случае это свойство сохраняется: все построенные схемы сводятся схожим преобразованием к схеме вида (1.82). Наличие такого преобразования в разностном случае указывает на сохранение принципа нелинейной суперпозиции для построенных схем.

Глава 2. Симметрии и законы сохранения для дифференциальных уравнений, не допускающих вариационной формулировки

В этой главе мы рассмотрим задачи, не допускающие вариационной постановки. В случае отсутствия инвариантного Лагранжиана существуют альтернативные методы получения первых интегралов, предложенные в [10; 11; 46; 47] и в работах [41–43]. Эти методы сводятся к использованию решений сопряженных уравнений, получаемых с помощью вариационной производной. Этот метод был нами назван «методом сопряженного уравнения», хотя для него используется и название метод сопряженных симметрий [10], и косимметрий [86]. Разностный аналог «метода сопряженного уравнения» впервые был рассмотрен в наших работах [44; 45].

В главе предлагается новый метод («метод сопряженного уравнения») отыскания первых интегралов обыкновенных разностных уравнений, не обладающих функциями Лагранжа или Гамильтона. В качестве примера рассмотрено нелинейное ОДУ третьего порядка, на основе симметрий которого строится полный набор разностных инвариантов. С помощью разностных инвариантов строится инвариантная аппроксимация и инвариантная сетка для данного ОДУ. Строится разностный аналог тождества Лагранжа, позволяющий вычислить три первых интеграла построенной разностной модели. Разностная модель является алгебраически интегрируемой и ее общее решение совпадает с общим решением исходного ОДУ.

В первом разделе главы приводятся теоретические сведения по методу сопряженного уравнения в общем случае дифференциальных уравнений в частных производных. Во втором разделе описывается метод сопряженного уравнения для случая обыкновенных дифференциальных уравнений и приводится детальный пример решения нелинейного ОДУ третьего порядка с помощью этого метода. В третьем разделе описан разностный аналог метода сопряженного уравнения и приводятся примеры его использования (простой иллюстративный пример уравнения линейного осциллятора и более сложный пример аппроксимации нелинейного ОДУ из второго раздела). В последнем, четвертом, разделе приводятся заключительные замечания.

2.1 Сопряженные уравнения дифференциальных уравнений в частных производных

В этом разделе мы рассмотрим тождество Лагранжа в общем виде. Рассмотрим уравнение в частных производных порядка n

$$F(x^1, \dots, x^p, u, u_1, \dots, u_n) = 0, \quad (2.1)$$

где

$$u_1 := \{u_i\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x^i} \right\}, \dots, u_k := \{u_{i_1 \dots i_k}\} = \left\{ \frac{\partial^k u}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}} \right\}, \dots, \quad i = 1, \dots, p.$$

Пусть L — линейный функционал

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} F_{u_{i_1 \dots i_k}} D_{i_1} \dots D_{i_k},$$

где

$$F_{u_{i_1 \dots i_k}} = \frac{\partial F}{\partial u_{i_1 \dots i_k}}, \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} + u_{ijl} \frac{\partial}{\partial u_{jl}} + \dots,$$

тогда сопряженный оператор задается выражением

$$L^*v = \frac{\delta(vF)}{\delta u} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k D_{i_1} \dots D_{i_k} (v F_{u_{i_1 \dots i_k}}).$$

Он определяет сопряженное уравнение

$$F^* = \frac{\delta(vF)}{\delta u} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k D_{i_1} \dots D_{i_k} (v F_{u_{i_1 \dots i_k}}) = 0. \quad (2.2)$$

Основное операторное тождество (которое, по всей видимости, было установлено Лагранжем — см. например, [87], (2.75) на стр. 90) имеет следующий вид

$$vLw - wL^*v = D_i C^i, \quad (2.3)$$

где u и v — некоторые функции $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^p)$, u и конечного числа производных u . Здесь

$$C^i = \sum_{k=0}^{\infty} D_{i_1} \dots D_{i_k} (w) \frac{\delta}{\delta u_{ii_1 \dots i_k}} (vF),$$

где

$$\frac{\delta}{\delta u_{ii_1 \dots i_k}} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s D_{i_1} \dots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u_{ii_1 \dots i_k i_1 \dots i_s}} (vF)$$

— операторы Эйлера-Лагранжа высших порядков. Рассмотрим симметрии

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{s=1}^{\infty} \zeta_{i_1 \dots i_s} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_s}}, \quad (2.4)$$

где ξ^i и η — некоторые функции \mathbf{x} , u и конечного числа производных u , и

$$\zeta_{i_1 \dots i_s} = D_{i_1} \cdots D_{i_s} (\eta - \xi^i u_i) + \xi^i u_{ii_1 \dots i_s}.$$

каждой симметрии (2.4) соответствует каноническая симметрия (эволюционное векторное поле [9])

$$\bar{X} = \bar{\eta} \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{\zeta}_{i_1 \dots i_s} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_s}},$$

где

$$\bar{\eta} = \eta - \xi^i u_i, \quad \bar{\zeta}_{i_1 \dots i_s} = D_{i_1} \cdots D_{i_s} (\bar{\eta}).$$

С помощью тождества (2.3) может быть установлена связь между симметриями уравнения (2.1), решениями соответствующего сопряженного уравнения (2.2) и законами сохранения. Стоит отметить, что сопряженное уравнение всегда линейно по v (если функция u известна).

Приняв $w = \bar{\eta} = \eta - \xi^i u_i$ в (2.3), можно получить тождества

$$v \bar{X} F = \bar{\eta} F^* + D_i C^i$$

и

$$v X F = v \xi^i D_i (F) + \bar{\eta} F^* + D_i C^i, \quad (2.5)$$

где

$$C^i = \sum_{k=0}^{\infty} D_{i_1} \cdots D_{i_k} (\bar{\eta}) \frac{\delta}{\delta u_{ii_1 \dots i_k}} (v F).$$

Основываясь на тождестве Лагранжа, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.1.1. Система уравнений (2.1), (2.2) обладает законом сохранения вида

$$D_i C^i |_{(2.1), (2.2)} = 0 \quad (2.6)$$

для каждой симметрии (2.4) дифференциального уравнения (2.1) и для каждого решения сопряженного уравнения (2.2).

Доказательство. Приводится в [88]. □

В работах [46; 47] был предложен конструктивный метод, позволяющий избавиться от решения сопряженного уравнения.

Теорема 2.1.2. Пусть существует подстановка

$$v = \varphi(x^1, \dots, x^p, u, u_1, u_2, \dots), \quad \varphi \neq 0,$$

решающая сопряженное уравнение в терминах функций от $(x^1, \dots, x^p, u, u_1, u_2, \dots)$. Тогда закон сохранения (2.6) справедлив на всех решениях исходного уравнения (2.1).

Доказательство. Приводится в [88]. □

Ниже мы рассмотрим частный случай этих результатов для обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка.

2.2 Случай обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим скалярное ОДУ n -ого порядка

$$F(x, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(n)}) = 0, \quad (2.7)$$

обладающее симметриями

$$X = \xi(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{s=1}^{\infty} \zeta_s \frac{\partial}{\partial u^{(s)}}. \quad (2.8)$$

В этом случае оператор полного дифференцирования принимает вид

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + \dot{u} \frac{\partial}{\partial u} + \ddot{u} \frac{\partial}{\partial \dot{u}} + \dots + u^{(k+1)} \frac{\partial}{\partial u^{(k)}} + \dots,$$

а вариационная производная упрощается:

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} - D \frac{\partial}{\partial \dot{u}} + D^2 \frac{\partial}{\partial \ddot{u}} + \dots + (-1)^k D^k \frac{\partial}{\partial u^{(k)}} + \dots$$

Операторы Эйлера-Лагранжа высших порядков имеют вид

$$\frac{\delta}{\delta u^{(i)}} = \frac{\partial}{\partial u^{(i)}} - D \frac{\partial}{\partial \dot{u}^{(i+1)}} + D^2 \frac{\partial}{\partial \ddot{u}^{(i+2)}} + \dots + (-1)^k D^k \frac{\partial}{\partial u^{(i+k)}} + \dots$$

Тождество (2.5) сводится к виду

$$vX(F) = v\xi D(F) + \bar{\eta}F^* + D(I),$$

где

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} D^i(\bar{\eta}) \frac{\delta}{\delta u^{(i+1)}}(vF), \quad \bar{\eta} = \eta - \xi\dot{u}. \quad (2.9)$$

Теорема 2.1.2 принимает следующую форму.

Теорема 2.2.1. Пусть сопряженное уравнение

$$F^* = \frac{\delta}{\delta u}(vF) = v \frac{\partial F}{\partial u} - D \left(v \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right) + \dots + (-1)^n D^n \left(v \frac{\partial F}{\partial \dot{u}^{(n)}} \right) = 0 \quad (2.10)$$

удовлетворяется всеми решениями ОДУ (2.7) при подстановке

$$v = \varphi(x, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(n-1)}), \quad \varphi \not\equiv 0. \quad (2.11)$$

Тогда любая симметрия (2.8) уравнения (2.7) дает первый интеграл (2.9), в котором v и ее производные следует исключить с помощью уравнения (2.11) и его дифференциальных следствий.

Доказательство. Приводится в [88]. □

Первые интегралы I , заданные уравнением (2.9), могут содержать $u^{(n)}$ и производные более высоких порядков. Такие выражения называют *высшими* первыми интегралами. Разумно воспользоваться уравнением (2.7) и его дифференциальными следствиями, чтобы представить эти первые интегралы как функции наименьшего возможного множества переменных, т. е. в форме $\tilde{I}(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})$.

Рассмотрим ОДУ 3-его порядка

$$F = \frac{1}{\dot{u}^2} \left(\dot{u}\ddot{u} - \frac{3}{2}\ddot{u}^2 \right) - f(x) = 0,$$

инвариантной схемы для которого были построены в работах [18; 19].

Первый дифференциальный член уравнения — это производная Шварца, имеющая много важных приложений в математике и физике [89].

В общем случае это ОДУ допускает следующие операторы

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_3 = u^2 \frac{\partial}{\partial u}, \quad (2.12)$$

При $f = M = \text{const}$ имеется дополнительная симметрия

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.13)$$

При $f = M = 0$ имеется еще две симметрии

$$X_5 = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_6 = x^2 \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.14)$$

Далее ограничимся только случаем, когда $f(x)$ — некоторая константа.

Пример 2.2.1. Уравнение

$$F = \frac{1}{\dot{u}^2} \left(\dot{u}\ddot{u} - \frac{3}{2}\dot{u}^2 \right) - M = 0, \quad M = \text{const} \quad (2.15)$$

может быть проинтегрировано с помощью стандартных приемов. Действительно, его можно переписать в виде

$$\left(\frac{1}{\sqrt{|\dot{u}|}} \right)'' + \frac{M}{2} \frac{1}{\sqrt{|\dot{u}|}} = 0$$

и разрешить относительно $\frac{1}{\sqrt{|\dot{u}|}}$ как линейное уравнение (Шрёдингера). Для различных значений параметра M находим следующие решения

$$M = 0 : \quad u(x) = \frac{1}{C_1 x + C_2} + C_3 \quad \text{или} \quad u(x) = C_1 x + C_2;$$

$$\begin{aligned} M < 0 : \quad u(x) &= C_1 \tanh(\omega x + C_2) + C_3 \\ &\text{или} \quad u(x) = C_1 \coth(\omega x + C_2) + C_3 \\ &\text{или} \quad u(x) = C_1 e^{\pm 2\omega x} + C_2, \quad \omega = \sqrt{-M/2}; \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$M > 0 : \quad u(x) = C_1 \text{tg}(\omega x + C_2) + C_3, \quad \omega = \sqrt{M/2}; \quad (2.17)$$

где $C_1 \neq 0$, C_2 и C_3 — константы интегрирования.

Замечание 2.2.1. Можно обойти ограничение $C_1 \neq 0$, если вместо ОДУ (2.15) рассматривать уравнение

$$\dot{u}^2 F = \dot{u}\ddot{u} - \frac{3}{2}\dot{u}^2 - M\dot{u}^2 = 0.$$

К сожалению, этот метод интегрирования не срабатывает в разностном случае. Здесь оказывается полезным метод сопряженного уравнения. Поэтому здесь мы проинтегрируем ОДУ (2.15) с помощью сопряженного уравнения, а позже приведем разностный аналог настоящего примера.

Сопряженное уравнение (2.10), соответствующее (2.15), имеет вид

$$F^* = -\frac{1}{\dot{u}}(\ddot{v} + 2M\dot{v}) = 0. \quad (2.18)$$

Будем отдельно искать решения сопряженного уравнения в виде $v = \varphi(x, u)$ и в виде $v = \varphi(x, u, \dot{u})$.

Решения вида $v = v(x)$. Будем искать решения (2.18) с помощью подстановки $v = v(x)$. Тогда решение представляется в виде следующих трех серий:

$$\begin{aligned} M = 0 : \quad & v_a = 1, \quad v_b = x, \quad v_c = x^2; \\ M = -2\omega^2 < 0 : \quad & v_a = 1, \quad v_b = \cosh(2\omega x), \quad v_c = \sinh(2\omega x); \\ M = 2\omega^2 > 0 : \quad & v_a = 1, \quad v_b = \cos(2\omega x), \quad v_c = \sin(2\omega x). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Воспользуемся симметриями (2.12), (2.13), (2.14) и решениями сопряженного уравнения (2.18) для получения первых интегралов. Обозначение $\tilde{I}_{j\alpha}$ означает, что интеграл соответствует симметрии X_j и решению v_α сопряженного уравнения.

При произвольных значениях M имеется лишь одно решение сопряженного уравнения:

$$v_a(x) = 1. \quad (2.20)$$

Этому решению соответствуют следующие первые интегралы:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{1a} = \frac{1}{2} \frac{\dot{u}^2}{\dot{u}^3} + \frac{M}{\dot{u}}, \quad \tilde{I}_{2a} = u \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{u}^2}{\dot{u}^3} + \frac{M}{\dot{u}} \right) - \frac{\dot{u}}{\dot{u}}, \\ \tilde{I}_{3a} = u^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{u}^2}{\dot{u}^3} + \frac{M}{\dot{u}} \right) - 2u \frac{\dot{u}}{\dot{u}} + 2\dot{u}, \quad \tilde{I}_{4a} \equiv -2M. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Еще два дополнительных интеграла, соответствующих $M = 0$, — тривиальные:

$$\tilde{I}_{5a} \equiv 0, \quad \tilde{I}_{6a} \equiv -2.$$

Можно проверить, что нетривиальные первые интегралы связаны соотношением

$$\tilde{I}_{1a}\tilde{I}_{3a} - \tilde{I}_{2a}^2 = 2M,$$

тем самым имеется лишь два независимых первых интеграла, чего не достаточно для интегрирования ОДУ третьего порядка. Для нахождения достаточного количества первых интегралов рассмотрим решения сопряженного уравнения, соответствующие различным значениям параметра M .

Случай $M = 0$.

В этом случае имеются следующие дополнительные решения сопряженного уравнения

$$v_b(x) = x \quad \text{и} \quad v_c(x) = x^2.$$

Для $v_b(x) = x$ получаем первые интегралы

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{1b} &= \frac{x \ddot{u}^2}{2 \dot{u}^3} + \frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2}, & \tilde{I}_{2b} &= u \left(\frac{x \ddot{u}^2}{2 \dot{u}^3} + \frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2} \right) - x \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} - 1, \\ \tilde{I}_{3b} &= u^2 \left(\frac{x \ddot{u}^2}{2 \dot{u}^3} + \frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2} \right) - 2u \left(x \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} + 1 \right) + 2x\dot{u}, \\ \tilde{I}_{4b} &\equiv 0, & \tilde{I}_{5b} &\equiv 1, & \tilde{I}_{6b} &\equiv 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

В случае $v_c(x) = x^2$ находим

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{1c} &= \frac{x^2 \ddot{u}^2}{2 \dot{u}^3} + 2x \frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2} + \frac{2}{\dot{u}}, & \tilde{I}_{2c} &= u \left(\frac{x^2 \ddot{u}^2}{2 \dot{u}^3} + 2x \frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2} + \frac{2}{\dot{u}} \right) - x^2 \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} - 2x, \\ \tilde{I}_{3c} &= u^2 \left(\frac{x^2 \ddot{u}^2}{2 \dot{u}^3} + 2x \frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2} + \frac{2}{\dot{u}} \right) - 2u \left(x^2 \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} + 2x \right) + 2x^2\dot{u}, \\ \tilde{I}_{4c} &\equiv -2, & \tilde{I}_{5c} &\equiv 0, & \tilde{I}_{6c} &\equiv 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Нетривиальные первые интегралы (2.22), (2.23) вместе с интегралами (2.21) удовлетворяют соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{1a}\tilde{I}_{3a} - \tilde{I}_{2a}^2 &= 0, & \tilde{I}_{1b}\tilde{I}_{3b} - \tilde{I}_{2b}^2 &= -1, & \tilde{I}_{1c}\tilde{I}_{3c} - \tilde{I}_{2c}^2 &= 0, \\ \tilde{I}_{1a}\tilde{I}_{1c} - \tilde{I}_{1b}^2 &= 0, & \tilde{I}_{2a}\tilde{I}_{2c} - \tilde{I}_{2b}^2 &= -1, & \tilde{I}_{3a}\tilde{I}_{3c} - \tilde{I}_{3b}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Это означает, что среди девяти первых интегралов может быть самое большее $9 - 6 = 3$ независимых.

Интегрирование ОДУ.

Выберем три первых интеграла \tilde{I}_{1a} , \tilde{I}_{2a} и \tilde{I}_{1b} и посчитаем значение якобиана

$$J = \det \left(\frac{\partial(\tilde{I}_{1a}, \tilde{I}_{2a}, \tilde{I}_{1b})}{\partial(u, \dot{u}, \ddot{u})} \right) = -\frac{1}{4} \frac{\ddot{u}^2}{\dot{u}^9}.$$

1. В случае $J \neq 0$ можно считать интегралы равными некоторым константам

$$\tilde{I}_{1a} = \frac{1}{2} \frac{\ddot{u}^2}{\dot{u}^3} = A, \quad \tilde{I}_{2a} = \frac{u \ddot{u}^2}{2 \dot{u}^3} - \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} = B, \quad \tilde{I}_{1b} = \frac{x \ddot{u}^2}{2 \dot{u}^3} + \frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2} = C,$$

где $A \neq 0$, B и C — постоянные. Перепишем второе и третье уравнения в виде

$$Au - \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} = B, \quad Ax + \frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2} = C$$

и исключим производные

$$\frac{\ddot{u}}{\dot{u}} \frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2} = (Au - B)(C - Ax) = A.$$

Из этого уравнения можно получить следующее решение

$$u(x) = \frac{1}{C_1 x + C_2} + C_3,$$

где $C_1 \neq 0$, C_2 и C_3 — константы. Это общее (трехпараметрическое) решение ОДУ.

2. В случае $J = 0$ решаем

$$\ddot{u} = 0, \quad \dot{u} \neq 0$$

и

$$u(x) = C_1 x + C_2, \quad C_1 \neq 0.$$

Проверка показывает, что это — решение ОДУ (2.15). Это решение зависит только от двух параметров и является особым решением.

Случай $M < 0$.

В этом случае решения сопряженного уравнения (2.18) даются (2.20) и

$$v_b(x) = \cosh(2\omega x) \quad \text{и} \quad v_c(x) = \sinh(2\omega x), \quad \omega = \sqrt{-\frac{M}{2}}.$$

Для этих решения v_b и v_c находим первые интегралы:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{1b} &= \cosh(2\omega x) \left(\frac{1}{2} \frac{\ddot{u}^2}{\dot{u}^3} - \frac{M}{\dot{u}} \right) + 2\omega \sinh(2\omega x) \left(\frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2} \right), \\ \tilde{I}_{2b} &= \cosh(2\omega x) \left(u \left(\frac{1}{2} \frac{\ddot{u}^2}{\dot{u}^3} - \frac{M}{\dot{u}} \right) - \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} \right) + 2\omega \sinh(2\omega x) \left(u \frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2} - 1 \right), \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\tilde{I}_{3b} = \cosh(2\omega x) \left(u^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\ddot{u}^2}{\dot{u}^3} - \frac{M}{\dot{u}} \right) - 2u \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} + 2\dot{u} \right) + 2\omega \sinh(2\omega x) \left(u^2 \frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2} - 2u \right),$$

$$\tilde{I}_{4b} \equiv 0$$

и

$$\tilde{I}_{1c} = \sinh(2\omega x) \left(\frac{1}{2} \frac{\ddot{u}^2}{\dot{u}^3} - \frac{M}{\dot{u}} \right) + 2\omega \cosh(2\omega x) \left(\frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2} \right),$$

$$\tilde{I}_{2c} = \sinh(2\omega x) \left(u \left(\frac{1}{2} \frac{\ddot{u}^2}{\dot{u}^3} - \frac{M}{\dot{u}} \right) - \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} \right) + 2\omega \cosh(2\omega x) \left(u \frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2} - 1 \right), \quad (2.25)$$

$$\tilde{I}_{3c} = \sinh(2\omega x) \left(u^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\ddot{u}^2}{\dot{u}^3} - \frac{M}{\dot{u}} \right) - 2u \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} + 2\dot{u} \right) + 2\omega \cosh(2\omega x) \left(u^2 \frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2} - 2u \right),$$

$$\tilde{I}_{4c} \equiv 0,$$

соответственно.

Соответствующие данному случаю нетривиальные первые интегралы (2.21), (2.24) и (2.25) связаны соотношением

$$\tilde{I}_{1a} \tilde{I}_{3a} - \tilde{I}_{2a}^2 = 2M, \quad \tilde{I}_{1b} \tilde{I}_{3b} - \tilde{I}_{2b}^2 = -2M, \quad \tilde{I}_{1c} \tilde{I}_{3c} - \tilde{I}_{2c}^2 = 2M,$$

$$\tilde{I}_{1a}^2 + \tilde{I}_{1c}^2 = \tilde{I}_{1b}^2, \quad \tilde{I}_{2a}^2 + \tilde{I}_{2c}^2 = \tilde{I}_{2b}^2 - 2M, \quad \tilde{I}_{3a}^2 + \tilde{I}_{3c}^2 = \tilde{I}_{3b}^2.$$

Интегрирование ОДУ.

Рассмотрим интегралы \tilde{I}_{1a} , \tilde{I}_{2a} и \tilde{I}_{1b} и посчитаем значение якобиана

$$J = \det \left(\frac{\partial(\tilde{I}_{1a}, \tilde{I}_{2a}, \tilde{I}_{1b})}{\partial(u, \dot{u}, \ddot{u})} \right)$$

$$= -\frac{\omega \ddot{u}^2 - 4\omega^2 \dot{u}^2}{2 \dot{u}^9} (\sinh(2\omega x) \ddot{u}^2 + 4\omega \dot{u} \ddot{u} \cosh(2\omega x) + 4\omega^2 \dot{u}^2 \sinh(2\omega x)).$$

1. В случае $J \neq 0$ можно считать интегралы равными некоторым константам

$$u(x) = C_1 \tanh(\omega x + C_2) + C_3$$

или

$$(2.26)$$

$$u(x) = C_1 \coth(\omega x + C_2) + C_3$$

где $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ и C_3 — постоянные.

2. При $J = 0$ следует отдельно рассмотреть два случая.

а) Система

$$\ddot{u}^2 - 4\omega^2 \dot{u}^2 = 0, \quad \dot{u} \neq 0$$

приводит к

$$\ddot{u} = \pm 2\omega \dot{u}, \quad \dot{u} \neq 0.$$

получается два особых решения ОДУ:

$$u(x) = C_1 e^{\pm 2\omega x} + C_2, \quad C_1 \neq 0. \quad (2.27)$$

б) Система

$$\sinh(2\omega x) \ddot{u}^2 + 4\omega \dot{u} \ddot{u} \cosh(2\omega x) + 4\omega^2 \dot{u}^2 \sinh(2\omega x) = 0,$$

$$\dot{u} \neq 0$$

может быть разрешена относительно \ddot{u} как квадратное уравнение:

$$\ddot{u} = -2\omega \dot{u} \coth(\omega x)$$

или

$$\ddot{u} = -2\omega \dot{u} \tanh(\omega x), \quad \dot{u} \neq 0.$$

Последние уравнения можно решить:

$$u(x) = C_1 \tanh(\omega x) + C_3$$

или

$$(2.28)$$

$$u(x) = C_1 \coth(\omega x) + C_3, \quad C_1 \neq 0.$$

В итоге решения (2.26), (2.27) и (2.28) могут совместно быть записаны в виде (2.16).

Случай $M > 0$.

Решения сопряженного уравнения в этом случае представлены (2.20) и

$$v_b(x) = \cos(2\omega x) \quad \text{и} \quad v_c(x) = \sin(2\omega x), \quad \omega = \sqrt{\frac{M}{2}}.$$

Для v_b получаем первые интегралы:

$$\tilde{I}_{1b} = \cos(2\omega x) \left(\frac{1}{2} \frac{\ddot{u}^2}{\dot{u}^3} - \frac{M}{\dot{u}} \right) - 2\omega \sin(2\omega x) \left(\frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2} \right),$$

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{2b} &= \cos(2\omega x) \left(u \left(\frac{1}{2} \frac{\ddot{u}^2}{\dot{u}^3} - \frac{M}{\dot{u}} \right) - \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} \right) - 2\omega \sin(2\omega x) \left(u \frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2} - 1 \right), \\ \tilde{I}_{3b} &= \cos(2\omega x) \left(u^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\ddot{u}^2}{\dot{u}^3} - \frac{M}{\dot{u}} \right) - 2u \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} + 2\dot{u} \right) - 2\omega \sin(2\omega x) \left(u^2 \frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2} - 2u \right), \\ \tilde{I}_{4b} &\equiv 0.\end{aligned}\quad (2.29)$$

Для v_c получаем

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{1c} &= \sin(2\omega x) \left(\frac{1}{2} \frac{\ddot{u}^2}{\dot{u}^3} - \frac{M}{\dot{u}} \right) + 2\omega \cos(2\omega x) \left(\frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2} \right), \\ \tilde{I}_{2c} &= \sin(2\omega x) \left(u \left(\frac{1}{2} \frac{\ddot{u}^2}{\dot{u}^3} - \frac{M}{\dot{u}} \right) - \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} \right) + 2\omega \cos(2\omega x) \left(u \frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2} - 1 \right), \\ \tilde{I}_{3c} &= \sin(2\omega x) \left(u^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\ddot{u}^2}{\dot{u}^3} - \frac{M}{\dot{u}} \right) - 2u \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} + 2\dot{u} \right) + 2\omega \cos(2\omega x) \left(u^2 \frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2} - 2u \right), \\ \tilde{I}_{4c} &\equiv 0.\end{aligned}\quad (2.30)$$

Нетривиальные первые интегралы (2.21), (2.29), (2.30) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{1a}\tilde{I}_{3a} - \tilde{I}_{2a}^2 &= 2M, & \tilde{I}_{1b}\tilde{I}_{3b} - \tilde{I}_{2b}^2 &= -2M, & \tilde{I}_{1c}\tilde{I}_{3c} - \tilde{I}_{2c}^2 &= -2M, \\ \tilde{I}_{1b}^2 + \tilde{I}_{1c}^2 &= \tilde{I}_{1a}^2, & \tilde{I}_{2b}^2 + \tilde{I}_{2c}^2 &= \tilde{I}_{2a}^2 + 2M, & \tilde{I}_{3b}^2 + \tilde{I}_{3c}^2 &= \tilde{I}_{3a}^2.\end{aligned}$$

Интегрирование ОДУ.

Как и в предыдущих случаях, выберем первые интегралы \tilde{I}_{1a} , \tilde{I}_{2a} и \tilde{I}_{1b} . Соответствующий якобиан имеет вид

$$\begin{aligned}J &= \det \left(\frac{\partial(\tilde{I}_{1a}, \tilde{I}_{2a}, \tilde{I}_{1b})}{\partial(u, \dot{u}, \ddot{u})} \right) \\ &= \frac{\omega \ddot{u}^2 + 4\omega^2 \dot{u}^2}{2 \dot{u}^9} (\sin(2\omega x) \ddot{u}^2 + 4\omega \dot{u} \ddot{u} \cos(2\omega x) - 4\omega^2 \dot{u}^2 \sin(2\omega x)).\end{aligned}$$

1. При $J \neq 0$ получаем решения

$$u(x) = C_1 \operatorname{tg}(\omega x + C_2) + C_3, \quad (2.31)$$

где $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$ и C_3 — константы.

2. Равенство $J = 0$ возможно в двух случаях

а) Первая система

$$\ddot{u}^2 + 4\omega^2 \dot{u}^2 = 0, \quad \dot{u} \neq 0$$

не имеет решений.

б) Вторая система

$$\sin(2\omega x)\ddot{u}^2 + 4\omega\dot{u}\ddot{u}\cos(2\omega x) - 4\omega^2\dot{u}^2\sin(2\omega x) = 0,$$

$$\dot{u} \neq 0$$

может быть разрешена относительно \ddot{u} , что приводит к

$$\ddot{u} = 2\omega\dot{u}\operatorname{tg}(\omega x)$$

или

$$\ddot{u} = -2\omega\dot{u}\operatorname{ctg}(\omega x), \quad \dot{u} \neq 0.$$

Решения последних уравнений имеют вид

$$u(x) = C_1 \operatorname{tg}(\omega x) + C_3$$

или

$$u(x) = C_1 \operatorname{ctg}(\omega x) + C_3,$$

(2.32)

где $C_1 \neq 0$ и C_3 — константы интегрирования.

Объединяя решения (2.31) и (2.32), получим общее решение (2.17).

Решения вида $v = \varphi(x, t, \dot{u})$. Если искать решения сопряженного уравнения в виде $v = v(x, u, \dot{u})$, то можно прийти к соотношению

$$v(x, u, \dot{u}) = \frac{A(x, u)}{\sqrt{|\dot{u}|}} + B(x) + \frac{C(u)}{\dot{u}},$$

где

$$A(x, u) = \alpha(x)u + \beta(x), \quad \ddot{\alpha} + \frac{M}{2}\alpha = 0, \quad \ddot{\beta} + \frac{M}{2}\beta = 0,$$

$$\ddot{B} + 2M\dot{B} = 0, \quad C(y) = c_2 y^2 + c_1 y + c_0.$$

Здесь случаи $M = 0$, $M < 0$ и $M > 0$ рассматривать отдельно не будем. В результате получаем

$$M = 0 : \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = x,$$

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = x;$$

$$M < 0 : \alpha_1 = \cosh(\omega x), \quad \alpha_2 = \sinh(\omega x),$$

$$\beta_1 = \cosh(\omega x), \quad \beta_2 = \sinh(\omega x), \quad \omega = \sqrt{-M/2};$$

$$M > 0 : \alpha_1 = \cos(\omega x), \quad \alpha_2 = \sin(\omega x),$$

$$\beta_1 = \cos(\omega x), \quad \beta_2 = \sin(\omega x), \quad \omega = \sqrt{M/2}.$$

Решения $B(x)$ совпадают с решениями (2.19) для функции $v(x)$. В каждом случае получается 10 независимых решений сопряженного уравнения. Естественно, решения исходного ОДУ (2.15) совпадают с решениями, найденными ранее в случае $v = v(x)$. \square

2.3 Дискретизация обыкновенных дифференциальных уравнений, сохраняющая симметрии и первые интегралы разностных схем

Для дискретизации ОДУ (2.7) порядка n требуется разностный шаблон из по меньшей мере $n + 1$ точек. Будем использовать в точности $n + 1$ точек x_m, \dots, x_{m+n} . Эти точки заранее не уточняются и будут определены с помощью дополнительного сеточного уравнения [1; 2]. Рассматриваемая дискретизация представляет собой дискретное уравнение на $n + 1$ точках вида

$$F(x_m, u_m, x_{m+1}, u_{m+1}, \dots, x_{m+n}, u_{m+n}) = 0 \quad (2.33)$$

вместе с сеточным уравнением

$$\Omega(x_m, u_m, x_{m+1}, u_{m+1}, \dots, x_{m+n}, u_{m+n}) = 0. \quad (2.34)$$

Эти два уравнения формируют разностную систему. В континуальном пределе первое уравнение переходит в исходное ОДУ, а второе — в тождество (например, $0 = 0$). Оператор алгебры Ли имеет тот же вид, что и в непрерывном случае

$$X = \xi(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (2.35)$$

а его продолжение на точки разностного шаблона представляет собой

$$X = \xi_m \frac{\partial}{\partial x_m} + \eta_m \frac{\partial}{\partial u_m} + \dots + \xi_{m+n} \frac{\partial}{\partial x_{m+n}} + \eta_{m+n} \frac{\partial}{\partial u_{m+n}},$$

где $\xi_k = \xi(x_k, u_k)$ и $\eta_k = \eta(x_k, u_k)$.

Операторы разностного сдвига (влево) вводятся следующим образом:

$$S_-(m) = m - 1, \quad S_-(u_m) = u_{m-1}, \quad S_-(x_m) = x_{m-1}.$$

Дискретные варьирование определяются соотношением

$$\begin{aligned} & \delta \sum_m \mathcal{F}(m; x_m, u_m, x_{m+1}, u_{m+1}, \dots, x_{m+n}, u_{m+n}) \\ &= \sum_m \left(\delta u_m \sum_{k=0}^{\infty} S_-^k \frac{\partial}{\partial u_{m+k}} + \delta x_m \sum_{k=0}^{\infty} S_-^k \frac{\partial}{\partial x_{m+k}} \right) \mathcal{F}(m; x_m, u_m, \dots, x_{m+n}, u_{m+n}), \end{aligned}$$

которое включает два оператора:

$$\frac{\delta}{\delta u_m} = \sum_{k=0}^{\infty} S_-^k \frac{\partial}{\partial u_{m+k}}, \quad \frac{\delta}{\delta x_m} = \sum_{k=0}^{\infty} S_-^k \frac{\partial}{\partial x_{m+k}}.$$

Предполагается, что $\mathcal{F} \rightarrow 0$ достаточно быстро при $m \rightarrow \pm\infty$ так, что разностный функционал определен однозначно. Следует заметить, что приведенные операторы заданы для схемы (2.33), (2.34) при произвольных значениях n . Системе разностных уравнений (2.33), (2.34) соответствуют разностные сопряженные уравнения

$$F^* = \frac{\delta}{\delta u_m} (v_m F + w_m \Omega) = 0, \quad \Omega^* = \frac{\delta}{\delta x_m} (v_m F + w_m \Omega) = 0, \quad (2.36)$$

которые всегда линейны по сопряженным переменным v_m и w_m . Зафиксируем значение индекса m , который соответствует левой точке в уравнениях (2.33), (2.34), и определим *высшие* дискретные операторы Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\delta}{\delta u_{m(j)}} = \sum_{k=0}^{\infty} S_-^k \frac{\partial}{\partial u_{m+j+k}}, \quad \frac{\delta}{\delta x_{m(j)}} = \sum_{k=0}^{\infty} S_-^k \frac{\partial}{\partial x_{m+j+k}}.$$

Лемма 2.3.1 (Основное тождество). *Справедливо следующее тождество [44; 45]*

$$v_m X(F) + w_m X(\Omega) = \eta_m F^* + \xi_m \Omega^* + (1 - S_-)J,$$

где

$$J = \sum_{j=1}^n \left(\xi_{m+j} \frac{\delta}{\delta x_{m(j)}} + \eta_{m+j} \frac{\delta}{\delta u_{m(j)}} \right) (v_m F + w_m \Omega).$$

С помощью этого тождества получается следующий результат.

Теорема 2.3.1 (Основной результат для дискретизаций ОДУ). Пусть сопряженные уравнения (2.36) удовлетворяют всем решениям исходных уравнений (2.33), (2.34) при подстановке

$$\begin{aligned} v_m &= \varphi_1(m, x_m, u_m, \dots, x_{m+n-1}, u_{m+n-1}), \\ w_m &= \varphi_2(m, x_m, u_m, \dots, x_{m+n-1}, u_{m+n-1}), \end{aligned} \quad (2.37)$$

причем $\varphi_1\varphi_2 \neq 0$. Тогда каждая симметрия (2.35) уравнений (2.33), (2.34) приводит к соответствующему первому интегралу

$$J = \sum_{j=1}^n \left(\xi_{m+j} \frac{\delta}{\delta x_{m(j)}} + \eta_{m+j} \frac{\delta}{\delta u_{m(j)}} \right) (v_m F + w_m \Omega),$$

где $v_m, w_m, \dots, v_{m-n}, w_{m-n}$ следует исключить с помощью уравнений (2.37) и уравнений, полученных из них разностным сдвигом (аналог дифференциальных следствий).

Доказательство. Приводится в [88]. □

Первые интегралы, зависящие более чем от n точек, всегда могут быть представлены как интегралы $\tilde{J}(m, x_m, u_m, \dots, x_{m+n-1}, u_{m+n-1})$ с помощью уравнений (2.33), (2.34).

Пример 2.3.1. Рассмотрим уравнение одномерного гармонического осциллятора

$$\ddot{u} + u = 0.$$

В качестве дискретизации выберем схему

$$\frac{2}{x_{m+2} - x_m} \left(\frac{u_{m+2} - u_{m+1}}{x_{m+2} - x_{m+1}} - \frac{u_{m+1} - u_m}{x_{m+1} - x_m} \right) + \frac{u_{m+2} + 2u_{m+1} + u_m}{4} = 0$$

на равномерной сетке

$$x_{m+2} - x_{m+1} = x_{m+1} - x_m.$$

Эта дискретизация уравнения гармонического осциллятора была рассмотрена в [26].

Перепишем схему в эквивалентной форме

$$F = \frac{u_{m+2} - u_{m+1}}{x_{m+2} - x_{m+1}} - \frac{u_{m+1} - u_m}{x_{m+1} - x_m} + \frac{x_{m+2} - x_m}{2} \frac{u_{m+2} + 2u_{m+1} + u_m}{4} = 0, \quad (2.38)$$

$$\Omega = (x_{m+2} - x_{m+1}) - (x_{m+1} - x_m) = 0.$$

Нетрудно проверить, что последняя система допускает симметрии, соответствующие операторам

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \sin(\omega x) \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_3 = \cos(\omega x) \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (2.39)$$

где

$$\omega = \frac{\arctan(h/2)}{h/2}, \quad h = x_{m+2} - x_{m+1} = x_{m+1} - x_m.$$

Сопряженные уравнения на решениях (2.38) имеют вид

$$\begin{aligned} F^* = & v_m \left(\frac{1}{x_{m+1} - x_m} + \frac{x_{m+2} - x_m}{8} \right) \\ & + v_{m-1} \left(-\frac{1}{x_{m+1} - x_m} - \frac{1}{x_m - x_{m-1}} + \frac{x_{m+1} - x_{m-1}}{4} \right) \\ & + v_{m-2} \left(\frac{1}{x_m - x_{m-1}} + \frac{x_m - x_{m-2}}{8} \right) = 0 \quad (2.40) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \Omega^* = & v_m \left(-\frac{u_{m+1} - u_m}{(x_{m+1} - x_m)^2} - \frac{u_{m+2} + 2u_{m+1} + u_m}{8} \right) \\ & + v_{m-1} \left(\frac{u_{m+1} - u_m}{(x_{m+1} - x_m)^2} + \frac{u_m - u_{m-1}}{(x_m - x_{m-1})^2} \right) \\ & + v_{m-2} \left(-\frac{u_m - u_{m-1}}{(x_m - x_{m-1})^2} + \frac{u_m + 2u_{m-1} + u_{m-2}}{8} \right) \\ & + w_m - 2w_{m-1} + w_{m-2} = 0. \quad (2.41) \end{aligned}$$

На решениях уравнений (2.38) сопряженные уравнения (2.40), (2.41) имеют частное решение

$$v_m^a = 0, \quad w_m^a = x_m. \quad (2.42)$$

Для симметрий

$$X = \xi(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u}$$

при $\xi = 0$ вместо системы (2.40), (2.41) можно рассматривать уравнение (2.40). В этом случае получается следующее особое решение

$$v_m^b = u_m, \quad w_m^b = 0. \quad (2.43)$$

Воспользуемся этими решениями, чтобы найти первые интегралы с помощью Теоремы 2.3.1 и симметрий (2.39). Не выписывая первые интегралы высших порядков, запишем только конечные результаты для обеих пар (2.42) и (2.43).

$$- v_m^a = 0, \quad w_m^a = x_m$$

Применение теоремы и X_1 дает первый интеграл

$$\tilde{J}_1^a = x_m - x_{m+1} = -h. \quad (2.44)$$

Оставшиеся симметрии дают только тривиальные первые интегралы.

$$- v_m^b = u_m, \quad w_m^b = 0$$

Для симметрий X_2 , X_3 и X_4 получаются первые интегралы

$$\tilde{J}_2^b = \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{4} \right) (-u_{m+1} \sin(\omega x_{m+1}) + u_m \sin(\omega x_{m+2})),$$

$$\tilde{J}_3^b = \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{4} \right) (-u_{m+1} \cos(\omega x_{m+1}) + u_m \cos(\omega x_{m+2})),$$

$$\tilde{J}_4^b = -h \left[\left(\frac{u_{m+1} - u_m}{h} \right)^2 + \left(\frac{u_{m+1} + u_m}{2} \right)^2 \right],$$

где обозначено $h = x_{m+1} - x_m$ и $x_{m+2} = x_{m+1} + h$.

С помощью значений первых интегралов \tilde{J}_1^a , \tilde{J}_2^b и \tilde{J}_3^b , можно представить решение разностной системы в форме

$$u_m = A \cos(\omega x_m) + B \sin(\omega x_m).$$

Сеточное уравнение для этой системы

$$x_m = x_0 + mh, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

может быть получено путем интегрирования линейного уравнения (2.44). Здесь A , B , $h > 0$ и x_0 — константы. Значение x_0 возникает в результате интегрирования линейного уравнения (2.44). \square

Пример 2.3.2. Запишем четырехточечное соотношение

$$F = \frac{(u_{m+3} - u_{m+1})(u_{m+2} - u_m)}{(u_{m+3} - u_{m+2})(u_{m+1} - u_m)} - K = 0, \quad K \neq 0. \quad (2.45)$$

Оно встречается в работах [18;19] как часть дискретной системы (2.50), которая будет рассмотрена позже. Исключим случай $K = 0$, поскольку при $K = 0$ уравнение (2.45) переходит в систему

$$\begin{aligned} u_{m+2} - u_m &= 0, \\ u_{m+1} - u_m &\neq 0, \end{aligned}$$

которая элементарно решается:

$$u_m = A(-1)^m + B, \quad A \neq 0.$$

Уравнение (2.45) допускает симметрии

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_3 = u^2 \frac{\partial}{\partial u}.$$

Сопряженное уравнение (2.36) (после подстановки $F = 0$) принимает вид

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{K(u_{m+2} - u_{m+1})}{(u_{m+2} - u_m)(u_{m+1} - u_m)} \times \\ &\quad \times (v_m + (1 - K)v_{m-1} + (K - 1)v_{m-2} - v_{m-3}) = 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Стандартные упрощения приводят к линейному уравнению

$$v_m + (1 - K)v_{m-1} + (K - 1)v_{m-2} - v_{m-3} = 0.$$

Несложно найти решения вида $v_m = v_m(m)$ и получить три независимых решения сопряженного уравнения

$$\begin{aligned} K = 4 : & \quad v_m^a = 1, \quad v_m^b = m, \quad v_m^c = m^2; \\ 0 < K < 4 : & \quad v_m^a = 1, \quad v_m^b = \cos(2\varphi m), \quad v_m^c = \sin(2\varphi m); \\ 0 < K \text{ или } K > 4 : & \quad v_m^a = 1, \quad v_m^b = \mu_1^m, \quad v_m^c = \mu_2^m; \end{aligned}$$

где

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\sqrt{K}}{2} \right) \quad \text{и} \quad \mu_{1,2} = \frac{(K - 2) \pm \sqrt{K^2 - 4K}}{2}.$$

Прежде всего рассмотрим решение сопряженного уравнения $v_m^a = 1$, которое является общим для всех $K \neq 0$. С помощью Теоремы 2.3.1, последнего

решения и симметрий X_1 , X_2 и X_3 соответственно получаются первые интегралы

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{1a} &= 2 \left(\frac{K}{u_{m+2} - u_m} - \frac{1}{u_{m+2} - u_{m+1}} - \frac{1}{u_{m+1} - u_m} \right), \\ \tilde{J}_{2a} &= \frac{K(u_{m+2} + u_m)}{u_{m+2} - u_m} - \frac{2u_{m+1}}{u_{m+2} - u_{m+1}} - \frac{2u_{m+1}}{u_{m+1} - u_m}, \\ \tilde{J}_{3a} &= 2 \left(\frac{Ku_{m+2}u_m}{u_{m+2} - u_m} - \frac{u_{m+1}^2}{u_{m+2} - u_{m+1}} - \frac{u_{m+1}^2}{u_{m+1} - u_m} \right).\end{aligned}$$

Эти три первых интеграла, которые сохраняются при всех $K \neq 0$, не являются независимыми и связаны соотношением

$$\tilde{J}_{1a}\tilde{J}_{3a} - (\tilde{J}_{2a})^2 = 4K - K^2.$$

Требуется еще один первый интеграл, чтобы проинтегрировать (2.45). Как и в дифференциальном случае, следует рассмотреть по отдельности случаи различных значений параметра K .

Случай $K = 4$.

Этот случай был рассмотрен в [44], где было найдено общее решение

$$u_m = \frac{1}{C_1 m + C_2} + C_3, \quad C_1 \neq 0$$

и особое решение

$$u_m = C_1 m + C_2, \quad C_1 \neq 0.$$

Случай $0 < K < 4$.

В этом случае получается два особых решения сопряженного уравнения (2.46)

$$v_m^b = \cos(2\varphi m) \quad \text{и} \quad v_m^c = \sin(2\varphi m), \quad \varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{K}}{2}\right).$$

С помощью Теоремы 2.3.1, симметрии X_1 и решения v_m^b получается первый интеграл

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{1b} &= \cos(2\varphi m) \left[\frac{K}{u_{m+2} - u_m} - \frac{K}{u_{m+1} - u_m} \right] \\ &+ \cos(2\varphi(m-1)) \left[K \left(\frac{1}{u_{m+2} - u_m} + \frac{1}{u_{m+1} - u_m} \right) - \frac{1}{u_{m+2} - u_{m+1}} - \frac{1}{u_{m+1} - u_m} \right] \\ &- \cos(2\varphi(m-2)) \left[\frac{1}{u_{m+2} - u_{m+1}} + \frac{1}{u_{m+1} - u_m} \right].\end{aligned}$$

В качестве трех независимых интегралов можно выбрать интегралы \tilde{J}_{1a} , \tilde{J}_{2a} и \tilde{J}_{1b} с соответствующим якобианом

$$J = \det \left(\frac{\partial(\tilde{J}_{1a}, \tilde{J}_{2a}, \tilde{J}_{1b})}{\partial(u_m, u_{m+1}, u_{m+2})} \right) \\ = \frac{K(u_{m+2} - 2u_{m+1} + u_m)^2 + (4 - K)(u_{m+2} - u_m)^2}{(u_{m+1} - u_m)^3(u_{m+2} - u_m)^3(u_{m+2} - u_{m+1})^3} \frac{KR_1R_2}{\cos(2\varphi(m+1)) - \cos(2\varphi m)},$$

где

$$R_1 = \alpha(u_{m+2} - 2u_{m+1} + u_m) + \beta(u_{m+2} - u_m),$$

$$\alpha = \sin 2\varphi (\sin(2\varphi m) + \sin \varphi), \quad \beta = (1 - \cos 2\varphi) (\cos(2\varphi m) - \cos \varphi)$$

и

$$R_2 = \gamma(u_{m+2} - 2u_{m+1} + u_m) + \delta(u_{m+2} - u_m),$$

$$\gamma = \sin 2\varphi (\sin(2\varphi m) - \sin \varphi), \quad \delta = (1 - \cos 2\varphi) (\cos(2\varphi m) + \cos \varphi).$$

1. В случае $J \neq 0$ получается общее решение

$$u_m = C_1 \operatorname{tg}(\varphi m + C_2) + C_3,$$

где $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq -\frac{3}{2}\varphi + \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$ и C_3 — константы.

2. При $J = 0$ нужно рассмотреть три случая.

а) В случае

$$K(u_{m+2} - 2u_{m+1} + u_m)^2 + (4 - K)(u_{m+2} - u_m)^2 = 0,$$

$$u_{m+1} \neq u_m, \quad u_{m+2} \neq u_m$$

вещественных решений нет.

б) В случае

$$R_1 = 0, \quad u_{m+1} \neq u_m, \quad u_{m+2} \neq u_m$$

имеются решения

$$u_m = C_1 \operatorname{tg}(\varphi m + C_2) + C_3, \quad C_1 \neq 0, \quad C_2 = -\frac{3}{2}\varphi + \pi k.$$

Проверка показывает, что эти функции являются решениями уравнения (2.45).

в) В случае

$$R_2 = 0, \quad u_{m+1} \neq u_m, \quad u_{m+2} \neq u_m$$

получаются следующие решения

$$u_m = C_1 \operatorname{tg}(\varphi m + C_2) + C_3, \quad C_1 \neq 0, \quad C_2 = -\frac{3}{2}\varphi + \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

Объединяя перечисленные случаи, можно получить общее решение в виде

$$u_m = C_1 \operatorname{tg}(\varphi m + C_2) + C_3,$$

где $C_1 \neq 0$, C_2 и C_3 — константы.

Случай $K < 0$ или $K > 4$.

Этот пример был рассмотрен в [88], и решение имеет вид

$$u_m = C_1 \frac{(4 - K)(\mu_2 - \mu_1) - C_2(1 - \mu_1)^2 \mu_2^m + \frac{K}{C_2}(1 - \mu_2)^2 \mu_1^m}{K(\mu_2 - \mu_1) - C_2(1 - \mu_1^2) \mu_2^m + \frac{K}{C_2}(1 - \mu_2^2) \mu_1^m} + C_3, \quad (2.47)$$

где $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ и C_3 — константы, и

$$u_m = C_1 \mu_1^m + C_2 \quad \text{и} \quad u_m = C_1 \mu_2^m + C_2, \quad C_1 \neq 0. \quad (2.48)$$

Общее решение (2.47) может быть переписано следующим образом.

– $K > 4$:

$$u_m = C_1 \tanh(\psi m + C_2) + C_3$$

или

$$u_m = C_1 \operatorname{coth}(\psi m + C_2) + C_3$$

– $K < 0$:

$$u_m = \begin{cases} C_1 \tanh(\psi m + C_2) + C_3 & \text{если } m \text{ четное} \\ C_1 \operatorname{coth}(\psi m + C_2) + C_3 & \text{если } m \text{ нечетное} \end{cases}$$

или

$$u_m = \begin{cases} C_1 \operatorname{coth}(\psi m + C_2) + C_3 & \text{если } m \text{ четное} \\ C_1 \tanh(\psi m + C_2) + C_3 & \text{если } m \text{ нечетное} \end{cases}$$

Здесь

$$\psi = \frac{1}{2} \ln |\mu_1| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{K - 2 + \sqrt{K^2 - 4K}}{2} \right|$$

и $C_1 \neq 0$, C_2 и C_3 — константы.

В дополнение к общим решениям получаются особые решения (2.48), которые можно переписать в виде

$$u_m = C_1 (\operatorname{sgn} K)^m e^{\pm 2\psi m} + C_2.$$

□

Пример 2.3.3. Вернемся к уравнению

$$F = \frac{1}{\dot{u}^2} \left(\dot{u}\ddot{u} - \frac{3}{2}\ddot{u}^2 \right) - M = 0, \quad (2.49)$$

которое было рассмотрено в Примере 2.2.1. Как было указано, в общем случае оно допускает симметрии (2.12) и (2.13). При $M = 0$ имеются дополнительные симметрии (2.14). Эти два случая будут рассмотрены по отдельности.

Случай $M = 0$.

В качестве дискретизации рассмотрим инвариантную схему

$$F = \frac{u_{m+3} - u_{m+1}}{x_{m+3} - x_{m+1}} \frac{u_{m+2} - u_m}{x_{m+2} - x_m} - \frac{u_{m+3} - u_{m+2}}{x_{m+3} - x_{m+2}} \frac{u_{m+1} - u_m}{x_{m+1} - x_m} = 0, \quad (2.50)$$

$$\Omega = \frac{(x_{m+3} - x_{m+1})(x_{m+2} - x_m)}{(x_{m+3} - x_{m+2})(x_{m+1} - x_m)} - K = 0, \quad K \neq 0,$$

которая была предложена в работах [18; 19]. Она допускает все шесть симметрий (2.12), (2.13) и (2.14).

Сопряженная система для приведенной схемы имеет вид

$$F^* = \frac{\alpha(u_{m+2} - u_{m+1})}{(u_{m+2} - u_m)(u_{m+1} - u_m)} (v_m + (1 - K)v_{m-1} + (K - 1)v_{m-2} - v_{m-3}) = 0$$

и

$$\begin{aligned} \Omega^* &= -\frac{\alpha(x_{m+2} - x_{m+1})}{(x_{m+2} - x_m)(x_{m+1} - x_m)} (v_m + (1 - K)v_{m-1} + (K - 1)v_{m-2} - v_{m-3}) \\ &+ \frac{K(x_{m+2} - x_{m+1})}{(x_{m+2} - x_m)(x_{m+1} - x_m)} (w_m + (1 - K)w_{m-1} + (K - 1)w_{m-2} - w_{m-3}) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \frac{u_{m+3} - u_{m+1}}{x_{m+3} - x_{m+1}} \frac{u_{m+2} - u_m}{x_{m+2} - x_m} = \frac{u_{m+3} - u_{m+2}}{x_{m+3} - x_{m+2}} \frac{u_{m+1} - u_m}{x_{m+1} - x_m}.$$

Переменные u_{m+3} и x_{m+3} в коэффициенте α должны быть выражены через переменные, входящие в исходную в схему.

Сопряженные уравнения приводят к системе линейных соотношений

$$v_m + (1 - K)v_{m-1} + (K - 1)v_{m-2} - v_{m-3} = 0,$$

$$w_m + (1 - K)w_{m-1} + (K - 1)w_{m-2} - w_{m-3} = 0.$$

Пары решений (v_m, w_m) могут быть использованы для отыскания первых интегралов и решения схемы.

Однако, более удобно переписать схему (2.50) в эквивалентной форме

$$\tilde{F} = \frac{(u_{m+3} - u_{m+1})(u_{m+2} - u_m)}{(u_{m+3} - u_{m+2})(u_{m+1} - u_m)} - K = 0,$$

$$\Omega = \frac{(x_{m+3} - x_{m+1})(x_{m+2} - x_m)}{(x_{m+3} - x_{m+2})(x_{m+1} - x_m)} - K = 0.$$

Последняя система имеет симметричный вид по переменным u и x . Воспользуемся результатами, полученными для (2.45). При этом вновь нужно рассмотреть различные случаи для различных K .

1. $K = 4$

В этом случае получается решение

$$u_m = \frac{1}{C_1 m + C_2} + C_3 \quad \text{или} \quad u_m = C_1 m + C_2$$

на сетке

$$x_m = \frac{1}{C_4 m + C_5} + C_6 \quad \text{или} \quad x_m = C_4 m + C_5,$$

где $C_1 \neq 0$, $C_2, C_3, C_4 \neq 0$, C_5 и C_6 — константы.

2. $0 < K < 4$

В этом случае получается решение

$$u_m = C_1 \operatorname{tg}(\varphi m + C_2) + C_3$$

на сетке

$$x_m = C_4 \operatorname{tg}(\varphi m + C_5) + C_6$$

где $C_1 \neq 0$, $C_2, C_3, C_4 \neq 0$, C_5 и C_6 — константы. Здесь

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\sqrt{K}}{2} \right).$$

3. При $K > 4$ получается решение

$$u_m = C_1 \tanh(\psi m + C_2) + C_3$$

или

$$u_m = C_1 \coth(\psi m + C_2) + C_3$$

или

$$u_m = C_1 \mu_{1,2}^m + C_2 = C_1 e^{\pm 2\psi m} + C_2$$

на сетке

$$x_m = C_4 \tanh(\psi m + C_5) + C_6$$

или

$$x_m = C_4 \coth(\psi m + C_5) + C_6$$

или

$$x_m = C_4 \mu_{1,2}^m + C_5 = C_4 e^{\pm 2\psi m} + C_5,$$

где $C_1 \neq 0$, $C_2, C_3, C_4 \neq 0$, C_5 и C_6 — константы. Здесь

$$\mu_{1,2} = \frac{K - 2 \pm \sqrt{K^2 - 4K}}{2} \quad (2.51)$$

и

$$\psi = \frac{1}{2} \ln |\mu_1| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{K - 2 + \sqrt{K^2 - 4K}}{2} \right|. \quad (2.52)$$

4. При $K < 0$ получается решение

$$u_m = \begin{cases} C_1 \tanh(\psi m + C_2) + C_3 & \text{если } m \text{ четное} \\ C_1 \coth(\psi m + C_2) + C_3 & \text{если } m \text{ нечетное} \end{cases}$$

или

$$u_m = \begin{cases} C_1 \coth(\psi m + C_2) + C_3 & \text{если } m \text{ четное} \\ C_1 \tanh(\psi m + C_2) + C_3 & \text{если } m \text{ нечетное} \end{cases}$$

или

$$u_m = C_1 \mu_{1,2}^m + C_2 = C_1 (-1)^m e^{\pm 2\psi m} + C_2$$

на сетке

$$x_m = \begin{cases} C_4 \tanh(\psi m + C_5) + C_6 & \text{если } m \text{ четное} \\ C_4 \coth(\psi m + C_5) + C_6 & \text{если } m \text{ нечетное} \end{cases}$$

или

$$x_m = \begin{cases} C_1 \coth(\psi m + C_2) + C_3 & \text{если } m \text{ четное} \\ C_1 \tanh(\psi m + C_2) + C_3 & \text{если } m \text{ нечетное} \end{cases}$$

или

$$x_m = C_4 \mu_{1,2}^m + C_5 = C_4 (-1)^m e^{\pm 2\psi m} + C_5,$$

где $C_1 \neq 0$, $C_2, C_3, C_4 \neq 0$, C_5 и C_6 — константы. Здесь $\mu_{1,2}$ и ψ задаются с помощью (2.51) и (2.52) соответственно.

Замечание 2.3.1. Все приведенные решения для произвольного $K \neq 0$ могут быть представлены в единообразной форме

$$u_m = \frac{1}{\alpha x_m + \beta} + \gamma \quad \text{или} \quad u_m = \alpha x_m + \beta,$$

где $\alpha \neq 0$, β и γ — константы. Эти решения должны быть рассмотрены на соответствующих сетках, которые различаются для различных значений параметра K . Таким образом, дискретизация (2.50) дает точное решение ОДУ (2.49) при $M = 0$. В случае $K = 4$ это было замечено в [18; 19], где результат был по сути угадан и затем проверен. Здесь результат получен с помощью решений сопряженного уравнения и первых интегралов.

Случай $M \neq 0$.

В качестве дискретизации рассмотрим схему

$$F = \frac{(u_{m+3} - u_{m+1})(u_{m+2} - u_m)}{(u_{m+3} - u_{m+2})(u_{m+1} - u_m)} - \frac{(x_{m+3} - x_{m+1})(x_{m+2} - x_m)}{(x_{m+3} - x_{m+2})(x_{m+1} - x_m)} \\ \times \left(1 - \frac{M}{6}(x_{m+3} - x_m)(x_{m+2} - x_{m+1}) \right) = 0,$$

$$\Omega(x_{m+3} - x_{m+2}, x_{m+2} - x_{m+1}, x_{m+1} - x_m) = 0.$$

Она допускает симметрии (2.12) и (2.13). Будем искать решения на равномерной сетке

$$\Omega = x_{m+1} - x_m - h = 0,$$

где $h > 0$ — константа. Первое уравнение примет форму

$$F = \frac{(u_{m+3} - u_{m+1})(u_{m+2} - u_m)}{(u_{m+3} - u_{m+2})(u_{m+1} - u_m)} - \bar{K} = 0, \quad (2.53)$$

где

$$\bar{K} = 4 \left(1 - \frac{M}{2}h^2 \right).$$

Для уравнения (2.53) можно воспользоваться результатами, полученными для (2.45) в Примере 2.3.2. Поскольку $h \neq 0$, то и $\bar{K} \neq 4$. В нетривиальных случаях $\bar{K} \neq 0$ существует три возможности.

1. При $0 < \bar{K} < 4$ ($M > 0$, $0 < h < \sqrt{2/M}$) получается решение

$$u_m = C_1 \operatorname{tg}(\bar{\varphi}m + C_2) + C_3,$$

где $C_1 \neq 0$, C_2 и C_3 — константы, на сетке

$$x_m = x_0 + hm. \quad (2.54)$$

Здесь

$$\bar{\varphi} = \arccos \left(\frac{\sqrt{\bar{K}}}{2} \right).$$

2. При $\bar{K} > 4$ ($M < 0$) решение имеет вид

$$u_m = C_1 \operatorname{tanh}(\bar{\psi}m + C_2) + C_3$$

или

$$u_m = C_1 \coth(\bar{\psi}m + C_2) + C_3$$

или

$$u_m = C_1 \bar{\mu}_{1,2}^m + C_2 = C_1 e^{\pm 2\bar{\psi}m} + C_2,$$

где $C_1 \neq 0$, C_2 и C_3 — константы, на равномерной сетке (2.54). Здесь

$$\bar{\mu}_{1,2} = \frac{\bar{K} - 2 \pm \sqrt{\bar{K}^2 - 4\bar{K}}}{2} \quad (2.55)$$

и

$$\bar{\psi} = \frac{1}{2} \ln |\bar{\mu}_1| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\bar{K} - 2 + \sqrt{\bar{K}^2 - 4\bar{K}}}{2} \right|. \quad (2.56)$$

3. В случае $\bar{K} < 0$ ($M > 0$, $h > \sqrt{2/M}$) получается решение

$$u_m = \begin{cases} C_1 \tanh(\bar{\psi}m + C_2) + C_3 & \text{если } m \text{ четное} \\ C_1 \coth(\bar{\psi}m + C_2) + C_3 & \text{если } m \text{ нечетное} \end{cases}$$

или

$$u_m = \begin{cases} C_1 \coth(\bar{\psi}m + C_2) + C_3 & \text{если } m \text{ четное} \\ C_1 \tanh(\bar{\psi}m + C_2) + C_3 & \text{если } m \text{ нечетное} \end{cases}$$

или

$$u_m = C_1 \bar{\mu}_{1,2}^m + C_2 = C_1 (-1)^m e^{\pm 2\bar{\psi}m} + C_2,$$

где $C_1 \neq 0$, C_2 и C_3 — константы, на равномерной сетке (2.54). Здесь $\bar{\mu}_{1,2}$ и $\bar{\psi}$ задаются уравнениями (2.55) и (2.56).

Из-за требования $h > \sqrt{2/M}$ в данном случае полученная дискретизация не позволяет должным образом производить сгущение сетки. \square

2.4 Заключительные замечания

Метод сопряженных уравнений работает и в случаях, когда для уравнения не существует функции Лагранжа или Гамильтона. Метод применим для

интегрирования как обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравнений в частных производных. В первой части данной главы с его помощью были найдены первые интегралы нелинейных ОДУ третьего порядка. Во второй части главы метод адаптирован на случай обыкновенных разностных уравнений и использован для интегрирования четырехточечной схемы, переходящей в континуальном пределе в уравнение Шварца (2.15). Также был рассмотрен простой пример уравнения линейного гармонического осциллятора, когда функция Лагранжа существует. Анализируя приведенные примеры, можно сделать следующие выводы:

- С помощью метода сопряженного уравнения можно находить полные наборы функционально независимых первых интегралов дифференциальных уравнений и разностных систем, что, в свою очередь, позволяет получать общие решения этих уравнений, если первых интегралов достаточно. Если найденных первых интегралов не достаточно для полного интегрирования уравнений, то метод позволяет понижать порядок разностной системы.
- Инвариантная схема для ОДУ (2.15) при $M = 0$ оказывается точной: решения разностной системы в точности совпадают с решениями исходного ОДУ.
- Метод сопряженного уравнения достаточно конструктивен. Для его применения необходимо знать алгебру симметрий разностного уравнения и по крайней мере некоторые частные решения сопряженного уравнения. Знание решений исходного дифференциального уравнения при этом не требуется.

В данной главе были рассмотрены только обыкновенные разностные уравнения. Однако, представленный метод может быть расширен и на случаи дифференциально-разностных уравнений и разностных уравнений в частных производных.

Глава 3. Симметрии, разностные схемы и законы сохранения для волновых уравнений

В настоящей главе рассматриваются линейное и нелинейное волновые уравнения. В первом разделе приводятся общие сведения и основные обозначения, касающиеся разностных схем уравнений второго порядка в частных производных. Применение разностного аналога тождества Нётер [1; 2; 14; 21] в случае уравнений в частных производных затруднено в связи с появлением в тождестве «дифференциальных» частных производных независимых переменных. Более эффективным в данном случае оказывается так называемый прямой метод, который описан во втором разделе. В третьем разделе с помощью прямого метода находятся законы сохранения для схемы линейного волнового уравнения. Затем с помощью того же метода строится инвариантная конечно-разностная схема для нелинейного волнового уравнения, возникающее в эластодинамике [76], обладающая законами сохранения. Показывается, что на 9-точечном разностном шаблоне не существует полиномиальных разностных схем нелинейного волнового уравнения, обладающих всеми законами сохранения, и производится классификация таких схем по количеству законов сохранения.

3.1 Инвариантные разностные схемы уравнений второго порядка, обладающие законами сохранения

В данном разделе приводятся обобщения основных понятий и обозначений обыкновенных разностных инвариантных схем на случай двух независимых переменных. Далее будут рассмотрены разностные схемы уравнений в частных производных второго порядка.

Значения независимых переменных в узлах разностной сетки обозначаются как

$$t_{n+j}, \quad x_{m+i}, \quad u_{m+i}^{n+j}, \quad i, j \in \mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

Изменение пространственной координаты x и соответствующих индексов $m + i$ идет по горизонтальной оси.

Изменение временной координаты t и соответствующих индексов $n + j$ — по вертикальной оси.

Наравне с указанными будут использоваться следующие обозначения:

$$\begin{aligned} t_{n-1} &\equiv \check{t}, & t_n &\equiv t, & t_{n+1} &\equiv \hat{t}, \\ x_{m-1} &\equiv x_-, & x_m &\equiv x, & x_{m+1} &\equiv x_+, \\ u_{m-1}^{n-1} &\equiv \check{u}_-, & u_m^{n-1} &\equiv \check{u}, & u_{m+1}^{n-1} &\equiv \check{u}_+, \\ u_{m-1}^n &\equiv u_-, & u_m^n &\equiv u, & u_{m+1}^n &\equiv u_+, \\ u_{m-1}^{n+1} &\equiv \hat{u}_-, & u_m^{n+1} &\equiv \hat{u}, & u_{m+1}^{n+1} &\equiv \hat{u}_+. \end{aligned}$$

Через $(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ обозначим шаблон – подмножество (3.1), конкретный вид которого заранее не определен и будет выбираться для каждой конкретной схемы отдельно.

Расстояния между соседними точками шаблона (шаги разностной сетки) будут обозначаться как

$$h_{m+k} = x_{m+k+1} - x_{m+k}, \quad \tau_{n+l} = t_{n+l+1} - t_{n+l}, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

И, в случае равномерной сетки,

$$h_{m+k} = h = \text{const}, \quad \tau_{n+l} = \tau = \text{const}, \quad k, l \in \mathbb{Z}. \quad (3.2)$$

Операторы разностного сдвига и разностного дифференцирования задаются следующим образом:

$$S_{\pm h}^k : m \mapsto m \pm k, \quad S_{\pm \tau}^k : n \mapsto n \pm k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} D_{+h} &= \frac{S_{+h} - 1}{h_m}, & D_{-h} &= \frac{1 - S_{-h}}{h_{m-1}}, \\ D_{+\tau} &= \frac{S_{+\tau} - 1}{\tau_n}, & D_{-\tau} &= \frac{1 - S_{-\tau}}{\tau_{n-1}}. \end{aligned}$$

С помощью операторов разностного дифференцирования могут быть записаны разностные производные:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h_m} = D_{+h}(u), & u_{\bar{x}} &= \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h_{m-1}} = D_{-h}(u), & u_{x\bar{x}} &= D_{+h} D_{-h}(u), \\ u_t &= \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau_n} = D_{+\tau}(u), & u_{\check{t}} &= \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau_{n-1}} = D_{-\tau}(u), & u_{t\check{t}} &= D_{+\tau} D_{-\tau}(u), \\ \hat{u}_x &= S_{+\tau}(u_x), & \hat{u}_{\bar{x}} &= S_{+\tau}(u_{\bar{x}}), & \check{u}_x &= S_{-\tau}(u_x), & \check{u}_{\bar{x}} &= S_{-\tau}(u_{\bar{x}}), & u_t^+ &= S_{+h}(u_t) \end{aligned}$$

и т. д.

В случае равномерной разностной сетки (3.2) вторые разностные производные имеют простой вид:

$$u_{x\bar{x}} = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}, \quad u_{t\bar{t}} = \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{\tau^2}.$$

В общем виде разностная схема для уравнения второго порядка записывается как:

$$\Delta_h = \begin{cases} F(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0, \\ \Omega^1(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0, \\ \Omega^2(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

где функция F аппроксимирует дифференциальное уравнение, а Ω^1, Ω^2 — точные уравнения.

Пусть задана некоторая алгебра Ли операторов

$$X_k = \xi_k^t(t, x, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi_k^x(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta_k(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad k = 1, \dots, r,$$

соответствующая r -параметрической группе преобразований G_r . Как и в случае одной независимой переменной разностным инвариантом группы G_r в многомерном случае называется функция

$$I = I(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (3.4)$$

для которой справедливо условие:

$$X_i I \equiv 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad (3.5)$$

где операторы X_i должны быть продолжены на разностный шаблон $(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ [1; 2; 13].

Разностное уравнение $H(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0$ будет инвариантным по отношению к действию G_r , если [1; 2]

$$X_i H|_{[H]} = 0, \quad i = 1, \dots, r,$$

где через $[H]$ обозначено само уравнение и его разностные следствия.

Схема вида (3.3) инвариантна тогда и только тогда, когда

$$X_i F|_{[\Delta_h]} = 0, \quad X_i \Omega^k|_{[\Delta_h]} = 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad k = 1, 2. \quad (3.6)$$

где через $[\Delta_h]$ обозначена система (3.3) вместе со всеми ее разностными следствиями.

Если уравнения схемы (3.3) составлены из инвариантов вида (3.4), то схема будет удовлетворять приведенным условиям (3.6).

Разностным законом сохранения системы (3.3) называется дивергентное выражение

$$\Phi(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = D_{+\tau}(\Phi^t(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u})) + D_{+h}(\Phi^x(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u})), \quad (3.7)$$

которое на решениях этой системы обращается в ноль, т. е.:

$$\Phi|_{[\Delta_h]} = 0.$$

Для разностных законов сохранения справедливо соотношение:

$$\Phi = \Lambda F,$$

где $\Lambda = \Lambda(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ называется интегрирующим множителем.

Если интегрирующий множитель известен, то может быть найден соответствующий ему закон сохранения.

Для поиска интегрирующих множителей удобно использовать прямой метод.

3.2 Прямой метод поиска законов сохранения инвариантных разностных схем

Рассмотрим сначала прямой метод для дифференциальных уравнений. Дифференциальный оператор Эйлера, заданный на функции двух переменных $u(x_1, x_2)$, имеет вид:

$$E_u = \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k D_{i_1} \cdots D_{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_k}} \right) \quad (1 \leq i_1, \dots, i_k \leq 2), \quad (3.8)$$

где через $u_{i_1 \dots i_k}$ обозначены частные производные u по x_{i_1}, \dots, x_{i_k} .

Под действием оператора (3.8) тождественно обращаются в нуль любые дифференцируемые по своим аргументам дивергентные выражения, заданные на переменных x_1, x_2, u и всех производных u по x_1, x_2 .

Пусть имеется некоторое уравнение второго порядка:

$$P(x_1, x_2, u, u_1, u_2, u_{11}, u_{12}, u_{22}) = 0,$$

обладающее законом сохранения

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, u, u_1, u_2, u_{11}, u_{12}, u_{22}) &= D_1(Q^1(x_1, x_2, u, u_1, u_2)) \\ &+ D_2(Q^2(x_1, x_2, u, u_1, u_2)), \\ Q|_{[P]} &= 0. \end{aligned}$$

Тогда существует интегрирующий множитель $M(x_1, x_2, u, u_1, u_2, u_{11}, u_{12}, u_{22})$ такой, что:

$$Q = MP.$$

Так как левая часть — полная производная, то полной производной будет и правая часть, и (в силу свойства оператора Эйлера) для правой части справедливо:

$$E_u(MP) \equiv 0.$$

Поскольку уравнение P задано, то из последнего тождества можно найти вид интегрирующего множителя M . Множество примеров применения прямого метода можно найти в [10; 11].

Разностный оператор Эйлера (в точке u) на равномерной сетке на шаблоне $(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ имеет вид [1; 2; 90]:

$$\mathcal{E}_u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} S_{-\tau}^k S_{-h}^l \left(\frac{\partial}{\partial u_{m+l}^{n+k}} \right). \quad (3.9)$$

Рассмотрим теперь разностный аналог прямого метода. Как и в дифференциальном случае, для произвольного разностного дивергентного выражения (3.7) на сетке (3.2) справедливо свойство:

$$\mathcal{E}_u \Phi|_{(3.2)} = 0.$$

Таким образом, если известно разностное уравнение

$$F(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u})|_{(3.2)} = 0,$$

то его интегрирующие множители $\Lambda(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ могут быть найдены из условия:

$$\mathcal{E}_u(\Lambda F)|_{(3.2)} = 0.$$

В отличие от дифференциального случая, в котором дифференциальное уравнение всегда задано, разностная аппроксимация F обычно заранее не известна. Если точный вид F не известен, то можно рассматривать F как разностное выражение с произвольными коэффициентами. С целью нахождения значений этих коэффициентов можно использовать условия инвариантности (3.6).

Кроме того, т. к. схема должна аппроксимировать дифференциальную задачу, для уточнения вида F можно применять метод неопределенных коэффициентов [91].

Рассмотрим случай схемы, заданной на равномерной ортогональной сетке (3.2), для которой применим оператор (3.9). Будем также предполагать, что все операторы X_1, \dots, X_r группы G_r оставляют неизменной равномерную ортогональную сетку (3.2). Это равносильно выполнению равенств [1; 2]:

$$D_{+h} D_{-h}(\xi_k^x) = 0, \quad D_{+\tau} D_{-\tau}(\xi_k^t) = 0, \quad (3.10)$$

$$D_{\pm h}(\xi_k^t) = -D_{\pm\tau}(\xi_k^x), \quad k = 1, \dots, r. \quad (3.11)$$

Тогда система (3.3) упрощается и, вместе с условиями (3.5), можно записать следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_h = \begin{cases} F(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0, \\ h_{m+i} = h, \quad i \in \mathbb{Z}, \\ \tau_{n+j} = \tau, \quad j \in \mathbb{Z}. \end{cases} \\ X_k F|_{[\Delta_h]} = 0, \\ D_{+h} D_{-h}(\xi_k^x) = 0, \\ D_{+\tau} D_{-\tau}(\xi_k^t) = 0, \\ D_{\pm h}(\xi_k^t) = -D_{\pm\tau}(\xi_k^x), \quad k = 1, \dots, r. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

С целью отыскания множителей Λ и точного вида F (если схема не задана), последнюю систему дополним уравнениями:

$$\mathcal{E}_u(\Lambda_k(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u})F(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u})) \equiv 0, \quad k = 1, \dots, r. \quad (3.13)$$

3.3 Примеры. Инвариантные разностные схемы волнового уравнения, обладающие законами сохранения

3.3.1 Линейное волновое уравнение

Линейное волновое уравнение

$$W = u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad (3.14)$$

допускает следующий набор симметрий [65]:

$$\begin{aligned} X_\infty = & [\alpha_1(t+x) + \alpha_2(t-x)] \frac{\partial}{\partial t} + [\alpha_1(t+x) - \alpha_2(t-x)] \frac{\partial}{\partial x} \\ & + [Cu + \beta_1(t+x) + \beta_2(t-x)] \frac{\partial}{\partial u}, \end{aligned}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ и β_2 — произвольные функции своих аргументов, и C — константа. Здесь мы будем заниматься только конечными группами и ограничимся рассмотрением следующего набора операторов:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial u}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_3 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_4 &= t \frac{\partial}{\partial u}, & X_5 &= x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$$

и

$$X_\alpha = \alpha(t, x) \frac{\partial}{\partial u},$$

где $\alpha(t, x)$ — произвольное решение уравнения (3.14). Последний оператор эквивалентен линейности уравнения.

Для получения законов сохранения используем тождество Нётер [9; 38].

Уравнение (3.14) может быть получено как уравнение Эйлера-Лагранжа из лагранжиана:

$$L = \frac{u_x^2 - u_t^2}{2}. \quad (3.15)$$

Лагранжиан (3.15) инвариантен по отношению к симметриям X_1 – X_4 . Закон сохранения, соответствующий симметрии X_4 — дивергентный:

$$X_4(L) + L(D_x(\xi_4^x) + D_t(\xi_4^t)) = D_t(u).$$

Используя теорему Нётер, можно получить четыре закона сохранения. Выпишем эти законы и соответствующие им интегрирующие множители M :

$$M_1 = 1, \quad D_t(u_t) - D_x(u_x) = 0, \quad (3.16a)$$

$$M_2 = u_x, \quad D_t(u_t u_x) - D_x\left(\frac{u_t^2 + u_x^2}{2}\right) = 0, \quad (3.16b)$$

$$M_3 = u_t, \quad D_t\left(\frac{u_t^2 + u_x^2}{2}\right) - D_x(u_t u_x) = 0, \quad (3.16c)$$

$$M_4 = t, \quad D_t(tu_t - u) - D_x(tu_x) = 0. \quad (3.16d)$$

Построим инвариантную разностную схему уравнения (3.14) на сетке (3.2), обладающую разностными аналогами законов сохранения (3.16).

В качестве шаблона для схемы выберем 5-точечный «крест» (Рис. 3.1). Операторы X_1 – X_5 сохраняют ортогональность и равномерность сетки, т. к. для

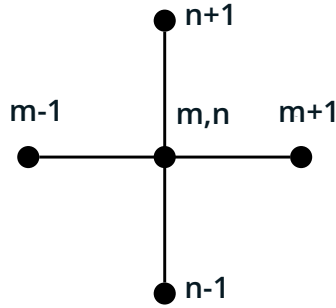


Рисунок 3.1 — 5-точечный шаблон «крест»

них выполняются все условия (3.10)–(3.11). Оператор X_α в общем случае не удовлетворяет условиям (3.10)–(3.11), поэтому займемся поиском обладающей законами сохранения схемы, инвариантной по отношению к операторам X_1 – X_5 .

Случай уравнения (3.14) достаточно прост, ввиду чего будем предполагать вид самой схемы известным:

$$\begin{cases} \mathcal{W} = u_{t\bar{t}} - u_{x\bar{x}} = 0, \\ h_{m+k} = h = \text{const}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \tau_{n+l} = \tau = \text{const}, \quad l \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Все уравнения схемы (3.17) инварианты по отношению к действию операторов X_1 – X_5 . Полученная схема — линейная, что эквивалентно инвариантности по отношению к следующему оператору

$$X_6 = \beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u} + \dots,$$

где β — любое решение той же схемы.

Эта схема аппроксимирует уравнение (3.14) со вторым порядком точности по h и по τ .

Первое уравнение схемы (3.17) может быть переписано в дивергентной форме:

$$\frac{D}{-\tau}(u_t) - \frac{D}{-h}(u_x) = 0,$$

и это дает разностный аналог первого закона сохранения (3.16a), соответствующий постоянному множителю.

Из

$$\mathcal{E}_u(t\mathcal{W}) \equiv 0$$

видно, что t будет интегрирующим множителем, и:

$$t(u_{t\bar{t}} - u_{x\bar{x}}) = \frac{D}{-\tau}(tu_t - u) - \frac{D}{-h}(tu_x) = 0,$$

что соответствует последнему закону сохранения (3.16d).

Остается найти два закона сохранения с интегрирующими множителями, соответствующими (3.16b), (3.16c).

Будем искать интегрирующие множители, заданные на выбранном шаблоне, исходя из соотношения общего вида:

$$\Lambda_z = z_1 u_m^n + z_2 u_{m-1}^n + z_3 u_{m+1}^n + z_4 u_m^{n-1} + z_5 u_m^{n+1},$$

где z_1, \dots, z_5 — некоторые константы.

Рассмотрим тождество:

$$\mathcal{E}_u(\Lambda_z \mathcal{W}) \equiv 0.$$

После упрощений и приведения подобных членов:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_u(\Lambda_z \mathcal{W}) &\equiv \frac{z_4 + z_5}{\tau^2} (u_m^{n-2} + u_m^{n+2}) - \frac{z_2 + z_3}{h^2} (u_{m-2}^n + u_{m+2}^n) \\ &+ \left(\frac{z_2 + z_3}{\tau^2} - \frac{z_4 + z_5}{h^2} \right) (u_{m-1}^{n-1} + u_{m+1}^{n-1} + u_{m-1}^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}) \\ &+ 2 \left(\frac{2z_1 - z_2 - z_3}{h^2} - \frac{2z_1 - z_4 - z_5}{\tau^2} \right) u_m^n \\ &+ 2 \left(\frac{z_2 + z_3 - z_1}{h^2} - \frac{z_2 + z_3}{\tau^2} \right) (u_{m-1}^n + u_{m+1}^n) \\ &+ 2 \left(\frac{z_4 + z_5}{h^2} + \frac{z_1 - z_4 - z_5}{\tau^2} \right) (u_m^{n-1} + u_m^{n+1}) \equiv 0. \end{aligned}$$

Поскольку это выражение должно равняться нулю тождественно, то все входящие в него множители, составленные из постоянных коэффициентов, должны равняться нулю. Решая получившуюся линейную систему на коэффициенты, получим:

$$z_1 = 0, \quad z_3 = -z_2, \quad z_5 = -z_4.$$

Откуда:

$$\Lambda_z = z_2(u_{m-1}^n - u_{m+1}^n) + z_4(u_m^{n-1} - u_m^{n+1}) \equiv -2z_2 \frac{u_x + u_{\bar{x}}}{2} - 2z_4 \frac{u_t + \check{u}_t}{2}.$$

Возьмем тогда интегрирующие множители в виде

$$\Lambda_2 = \frac{u_x + u_{\bar{x}}}{2}, \quad \Lambda_3 = \frac{u_t + \check{u}_t}{2}.$$

Они аппроксимируют соответственно $M_2 = u_x$ и $M_3 = u_t$ из (3.16b) и (3.16c).

Остается записать законы сохранения, соответствующие этим множителям. Для этого воспользуемся следующим полезным наблюдением. В дифференциальном случае поток закона сохранения может быть выражен из (3.16b) с помощью интегрирующего множителя и исходного уравнения:

$$D_t(M_2 u_t) - M_2 W = D_x \left(\frac{u_t^2 + u_x^2}{2} \right).$$

В разностном случае это соотношение сохраняется:

$$D_{-\tau} \left(u_t \underset{+\tau}{S}(\Lambda_2) \right) - \Lambda_2 \mathcal{W} = D_{-h} \left(\frac{u_t u_t^+ + u_x^2}{2} \right),$$

т. е. можно записать закон сохранения, соответствующий (3.16b), в виде:

$$D_{-\tau} \left(u_t \frac{\hat{u}_x + \hat{u}_{\bar{x}}}{2} \right) - D_{-h} \left(\frac{u_t u_t^+ + u_x^2}{2} \right) = 0.$$

Полностью аналогично получается закон сохранения, соответствующий множителю Λ_3 .

Итак, в результате получена инвариантная разностная схема (3.17), обладающая четырьмя законами сохранения:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 1, & D_{-\tau}(u_t) - D_{-h}(u_x) &= 0, \\ \Lambda_2 &= \frac{u_x + u_{\bar{x}}}{2}, & D_{-\tau} \left(u_t \frac{\hat{u}_x + \hat{u}_{\bar{x}}}{2} \right) - D_{-h} \left(\frac{u_t u_t^+ + u_x^2}{2} \right) &= 0, \\ \Lambda_3 &= \frac{u_t + \check{u}_t}{2}, & D_{-\tau} \left(\frac{u_x \hat{u}_x + u_t^2}{2} \right) - D_{-h} \left(u_x \frac{u_t^+ + \check{u}_t^+}{2} \right) &= 0, \\ \Lambda_4 &= t, & D_{-\tau}(t u_t - u) - D_{-h}(t u_x) &= 0. \end{aligned}$$

3.3.2 Нелинейное волновое уравнение

Рассмотрим следующее нелинейное волновое уравнение [76]

$$W'_{\text{NL}} = u_{t't'} - (K + u_{x'}^2)u_{x'x'} = 0, \quad K = \text{const.}$$

С помощью замены

$$t' = t/K, \quad x' = x/\sqrt{K}, \quad K \neq 0.$$

оно приводится к более простому виду:

$$W_{\text{NL}} = u_{tt} - (1 + u_x^2)u_{xx} = 0. \quad (3.18)$$

Это уравнение допускает следующие пять симметрий

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial u}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_3 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_4 &= t \frac{\partial}{\partial u}, & X_5 &= x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Уравнение (3.18) может быть получено как уравнение Эйлера-Лагранжа из лагранжиана

$$L_N = \frac{u_x^2 - u_t^2}{2} + \frac{u_x^4}{12},$$

инвариантного относительно X_1 - X_4 .

Используя теорему Нётер, получим четыре закона сохранения и интегрирующие множители

$$M_1 = 1, \quad D_t(u_t) - D_x\left(u_x + \frac{u_x^3}{3}\right) = 0, \quad (3.20a)$$

$$M_2 = u_x, \quad D_t(u_t u_x) - D_x\left(\frac{u_t^2 + u_x^2}{2} + \frac{u_x^4}{4}\right) = 0, \quad (3.20b)$$

$$M_3 = u_t, \quad D_t\left(\frac{u_t^2 + u_x^2}{2} + \frac{u_x^4}{12}\right) - D_x\left(u_t u_x \left(1 + \frac{u_x^2}{3}\right)\right) = 0, \quad (3.20c)$$

$$M_4 = t, \quad D_t(tu_t - u) - D_x\left(t\left(u_x + \frac{u_x^3}{3}\right)\right) = 0. \quad (3.20d)$$

Перейдем к разностному случаю и попробуем искать схемы на шаблоне «крест» (Рис. 3.1) равномерной ортогональной сетки, инвариантной относительно всех операторов. Нетрудно (по аналогии с линейным случаем) найти схемы, обладающие двумя законами сохранения, которые соответствуют симметриям X_1 , X_4 . В качестве примера приведем схему:

$$\begin{cases} u_{t\bar{t}} - u_{x\bar{x}} - \frac{u_x^3 - u_{\bar{x}}^3}{3h} = 0, \\ h^+ = h^- = h = \text{const}, \\ \hat{\tau} = \check{\tau} = \tau = \text{const} \end{cases} \quad (3.21)$$

с законами сохранения

$$\Lambda_1 = 1, \quad \frac{D}{- \tau}(u_t) - \frac{D}{- h}\left(u_x + \frac{u_x^3}{3}\right) = 0,$$

$$\Lambda_4 = t, \quad \frac{D}{- \tau}(tu_t - u) - \frac{D}{- h}\left(tu_x + t\frac{u_x^3}{3}\right) = 0.$$

Подобных схем существует бесконечное множество, поскольку любую дивергентную аппроксимацию исходного уравнения можно умножить на 1 и t с сохранением дивергентности. Но можно показать, что на шаблоне «крест» не существует полиномиальных схем более чем с двумя законами сохранения, причем эти законы сохранения соответствуют симметриям X_1 и X_4 , как и в примере (3.21). Это будет вытекать в качестве следствия из последующих рассуждений для расширенного, 9-точечного, шаблона.

На шаблоне «крест» также существуют *недивергентные* схемы с одним законом сохранения вида (3.20b). Пример такой схемы будет приведен ниже как частный случай, который получается при поиске схем на 9-точечном шаблоне.

Итак, будем теперь искать схему на 9-точечном шаблоне (Рис. 3.2) на равномерной ортогональной сетке (3.2).

Тогда схема записывается на следующем множестве переменных:

$$\begin{aligned} (\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) &\equiv (\check{t}, t, \hat{t}, x_-, x, x_+, \check{u}_-, \check{u}, \check{u}_+, u_-, u, u_+, \hat{u}_-, \hat{u}, \hat{u}_+) \\ &\equiv (t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, u_{m-1}^{n-1}, u_m^{n-1}, u_{m+1}^{n-1}, \\ &\quad u_{m-1}^n, u_m^n, u_{m+1}^n, u_{m-1}^{n+1}, u_m^{n+1}, u_{m+1}^{n+1}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

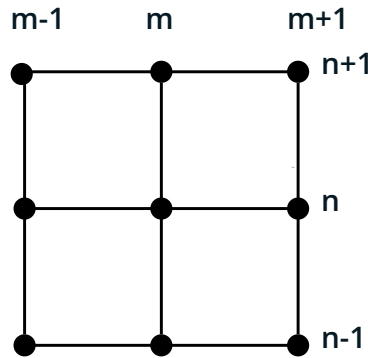


Рисунок 3.2 — 9-точечный шаблон

Поскольку уравнение (3.18) есть полином по u_x , u_{xx} , u_{tt} , будем искать схему, представимую в виде некоторого полинома, заданного на шаблоне (3.22).

Так как схема должна быть инвариантной, и симметрия X_1 из списка (3.19) требует, чтобы первое уравнение схемы (3.12) обладало интегрирующим множителем $\Lambda_1 = 1$, то оно должно быть представимо в дивергентной форме. Поэтому будем искать его в виде дивергентного соотношения:

$$F(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv \mathcal{W}_{\text{NL}} = D_{+\tau}(\Phi^t) + D_{+h}(\Phi^x) = 0, \quad (3.23)$$

где Φ^t и Φ^x — разностные полиномы, аппроксимирующие соответственно плотность и поток закона сохранения (3.20a).

Из вида (3.20a) понятно, что Φ^t будет представлять собой линейное выражение, а Φ^x — некоторый полином третьей степени.

Итак, зададим Φ^t как произвольное линейное выражение на шести точках $u, u_+, u_-, \check{u}, \check{u}_+, \check{u}_-$:

$$\Phi^t = a_1 u + a_2 u_+ + a_3 u_- + a_4 \check{u} + a_5 \check{u}_+ + a_6 \check{u}_-, \quad (3.24)$$

где $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_6)$ — произвольные вещественные коэффициенты. Важно взять именно шесть точек, чтобы не выйти за пределы 9-точечного шаблона в результате действия оператора $D_{+\tau}$ на Φ^t .

Φ^x — произвольный полином третьей степени на шести точках $u, \hat{u}, \check{u}, u_-, \hat{u}_-, \check{u}_-$:

$$\begin{aligned} \Phi^x = & A_1 u^3 + \dots + A_6 (\check{u}_-)^3 + \\ & + B_1^1 u^2 \hat{u} + B_1^2 u \hat{u}^2 + \dots + B_{15}^1 (\hat{u}_-)^2 \check{u}_- + B_{15}^2 \hat{u}_- (\check{u}_-)^2 + \\ & + C_1 u \hat{u} \check{u} + \dots + C_{20} u_- \hat{u}_- \check{u}_- + \\ & + E_1 u^2 + \dots + E_6 (\check{u}_-)^2 + \\ & + F_1 u \hat{u} + \dots + F_{15} \hat{u}_- \check{u}_- + \\ & + G_1 u + \dots + G_6 \check{u}_-, \end{aligned}$$

где $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_6)$, $\mathbf{B} = (B_1^1, \dots, B_{15}^1, B_1^2, \dots, B_{15}^2)$, $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_{20})$, $\mathbf{E} = (E_1, \dots, E_6)$, $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_{15})$, $\mathbf{G} = (G_1, \dots, G_6)$ — произвольные вещественные коэффициенты. Общее их количество равно 83 — это количество всех возможных сочетаний из 6 точек, которые могут входить в полином степени три. Здесь, как и для (3.24) чтобы не выйти за пределы 9-точечного шаблона в результате действия оператора D_{+h} на Φ^x , берется шесть точек шаблона.

Интегрирующие множители будем искать как линейные функции вида

$$\Lambda_z = z_1 u + z_2 u_+ + z_3 u_- + z_4 \hat{u} + z_5 \hat{u}_+ + z_6 \hat{u}_- + z_7 \check{u} + z_8 \check{u}_+ + z_9 \check{u}_-, \quad (3.25)$$

где $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_9)$ — произвольные вещественные коэффициенты.

Итак, требуется найти коэффициенты \mathbf{a} , \mathbf{A} – \mathbf{G} , \mathbf{z} при которых, во-первых, выполняются условия (3.12)–(3.13) и, во-вторых, (3.23) будет аппроксимировать уравнение (3.18). При этом нахождение коэффициентов \mathbf{z} даст все возможные интегрирующие разностные множители, зависящие от u .

Учитывая, что для операторов (3.19) выполняются все условия (3.10)–(3.11) и то, что уравнения вида (3.23) всегда инварианты относительно действия симметрий X_2 , X_3 , запишем уравнения (3.12)–(3.13) в виде системы (3.12)

$$\mathcal{W}_{\text{NL}} = D_{+\tau}(\Phi^t) + D_{+h}(\Phi^x) = 0, \quad (3.26)$$

$$h_+ = h_- = h, \quad \check{\tau} = \hat{\tau} = \tau,$$

$$X_1 \mathcal{W}_{\text{NL}} = \frac{\partial}{\partial u} (\mathcal{W}_{\text{NL}}) = 0, \quad (3.27)$$

$$X_4 \mathcal{W}_{\text{NL}} = t \frac{\partial}{\partial u} (\mathcal{W}_{\text{NL}}) = 0, \quad (3.28)$$

$$\mathcal{E}_u(\Lambda_z \mathcal{W}_{\text{NL}}) \equiv 0. \quad (3.29)$$

Уравнения (3.27)–(3.29), после расщепления по степеням точек шаблона, дают громоздкую систему, состоящую из нескольких сотен билинейных уравнений на коэффициенты \mathbf{a} , \mathbf{A} – \mathbf{G} , \mathbf{z} . Эта система совместна и из нее можно найти большое количество параметризованных пар решений вида:

$$(\Lambda_z^k, \mathcal{W}_{\text{NL}}^k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.30)$$

В действительности, нет необходимости рассматривать все возможные решения. Интерес представляют только те решения, которые в континуальном пределе переходят в дифференциальные производные u_t , u_x или их линейные комбинации. Эти множители соответствуют законам сохранения типа (3.20b), (3.20c).

Начнем с закона сохранения (3.20b). Рассматривая различные пары (3.30), в которых множители Λ_z^k переходят в пределе в u_x , можно заметить, что соответствующие им $\mathcal{W}_{\text{NL}}^k$ аппроксимируют только *линейные* уравнения.

Анализ коэффициентов \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{E} , \mathbf{F} показывает, что в рассматриваемом классе полиномиальных разностных схем не существует интегрирующих множителей, аппроксимирующих множитель u_x (3.25).

Основываясь на этом, можно сделать вывод, что не существует полиномиальной схемы (3.26), аппроксимирующей уравнение (3.18) и обладающей разностным аналогом закона сохранения (3.20b). Вместе с тем, можно найти множество пар вида (3.30), в которых $\mathcal{W}_{\text{NL}}^k$ обладает законом сохранения типа (3.20c). Среди них, по аналогии с линейным случаем, выберем решение

$$\Lambda_3 = \frac{\hat{u} - \check{u}}{2\tau} \equiv \frac{u_t + \check{u}_t}{2}.$$

Это частное значение Λ_z при $z_4 = 1/(2\tau)$, $z_7 = -z_4$, $z_s = 0$ при $s \neq 4, 7$.

При указанных фиксированных значениях уравнение (3.29) оказывается линейным и допускает единственное решение, которое имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{NL}} = \frac{1}{\tau} & \left[a_3 \hat{u}_- - a_5 \check{u}_- + (a_5 - a_3) u_- + \check{u}_+ a_3 \right. \\ & - a_5 \hat{u}_+ + u_+ (a_5 - a_3) + (a_4 + a_6 + a_3) \check{u} \\ & \left. + (a_4 + a_6 + a_3) \hat{u} - 2(a_4 + a_6 + a_3) u \right] + \frac{1}{h} \left[\dots \right], \quad (3.31) \end{aligned}$$

где во второй квадратной скобке расположен громоздкий полином третьей степени, который ниже будет упрощен.

Для исключения оставшихся коэффициентов обратимся к методу неопределенных коэффициентов [91]. Он заключается в том, чтобы разложить оставшееся выражение (3.31) в ряд и, исходя из вида получившегося ряда, выяснить значения еще не исключенных коэффициентов.

Из (3.31) получаем:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{\text{NL}} = & 6h^3 (3B_4^2 + B_{13}^1 - B_{15}^2 + 2C_{20}) u_x^2 u_{xx} \\
& + 2h^2 (E_{13} + 2F_5 + 3F_6) u_x u_{xx} \\
& - h(G_3 + G_4 + G_5) u_{xx} \\
& + \left(\frac{(G_3 + G_6)\tau^2}{h} + (2a_3 + a_4 - a_5 + a_6)\tau \right) u_{tt} \\
& + 2(24\tau^3 (B_{4,2} + B_{13,1}) u_t^2 - 4\tau^2 (E_{13} - F_5) u_t - (G_4 - G_5)\tau - (a_3 + a_5)h) u_{tx} \\
& + \frac{1}{12} \left(\frac{(G_3 + G_6)\tau^4}{h} + (2a_3 + a_4 - a_5 + a_6)\tau^3 \right) u_{ttt} \\
& - \frac{1}{12} h^3 (G_3 + G_4 + G_5) u_{xxxx} \\
& - \frac{1}{3} ((G_4 - G_5)\tau^3 + (a_3 + a_5)h\tau^2) u_{xtt} \\
& - \frac{1}{2} ((G_4 + G_5)h\tau^2 + (a_5 - a_3)h^2\tau) u_{ttx} \\
& - \frac{1}{3} ((G_4 - G_5)h^2\tau + (a_3 + a_5)) u_{xxt} + O((\tau + h)^4).
\end{aligned}$$

Сравнивая с аппроксимируемым дифференциальным уравнением, получаем

$$\begin{aligned}
B_4^2 = \frac{1}{2} B_{15}^2 - C_{20} + \frac{1}{12h^3}, \quad E_{13} = F_5 = -F_6, \\
G_4 = G_5 = a_3 = a_5 = 0, \quad G_3 = -G_6, \\
G_6 = 1/h, \quad a_4 = -a_6 - 1/\tau.
\end{aligned}$$

При этом коэффициенты B_{13}^1, C_{20}, F_6 могут быть взяты совершенно произвольно, т. к. они влияют лишь на члены более высоких порядков по h и τ . Поэтому просто приравняем их нулю.

После подстановки найденных значений и упрощений уравнение (3.31) приобретает вид:

$$\mathcal{W}_{\text{NL}} = u_{t\bar{t}} - u_{x\bar{x}} - \frac{1}{6} D_{-h} (u_x^2 (\hat{u}_x + \check{u}_x)) = 0,$$

и мы можем записать схему:

$$\begin{cases} \mathcal{W}_{\text{NL}} = u_{t\bar{t}} - u_{x\bar{x}} - \frac{1}{6} D_{-h} (u_x^2 (\hat{u}_x + \check{u}_x)) = 0, \\ h_+ = h_- = h = \text{const}, \\ \hat{\tau} = \check{\tau} = \tau = \text{const}. \end{cases} \quad (3.32)$$

Эта схема инвариантна и аппроксимирует (3.18) со вторым порядком точности по h и по τ . Она обладает тремя законам сохранения, которые (при уже известных интегрирующих множителях) находятся по аналогии с линейным случаем:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 1, & D_{-\tau}(u_t) - D_{-h} \left(u_x \left(1 + u_x \frac{\hat{u}_x + \check{u}_x}{6} \right) \right) &= 0, \\ \Lambda_3 &= \frac{u_t + \check{u}_t}{2}, & D_{-\tau} \left(\frac{u_x \hat{u}_x + u_t^2}{2} + \frac{u_x^2 \hat{u}_x^2}{12} \right) \\ & & - D_{-h} \left(u_x \frac{u_t^+ + \check{u}_t^+}{2} \left(1 + u_x \frac{\hat{u}_x + \check{u}_x}{6} \right) \right) &= 0, \\ \Lambda_4 &= t, & D_{-\tau}(tu_t - u) - D_{-h} \left(tu_x \left(1 + u_x \frac{\hat{u}_x + \check{u}_x}{6} \right) \right) &= 0. \end{aligned}$$

Ранее было выяснено, что не существует инвариантной полиномиальной схемы вида (3.26), аппроксимирующей уравнение (3.18) и обладающей разностным аналогом закона сохранения (3.20b).

Ослабив требования, можно найти схему с единственным законом сохранения, который бы соответствовал (3.20b). Для этого будем искать недивергентную схему, т. е. вместо выражения вида (3.26) попытаемся получить некоторое (снова полиномиальное) разностное выражение $\mathcal{W}_{\text{NL}}^*$ для которого выполнялось бы условие вида (3.29):

$$\mathcal{E}_u(\Lambda_z^* \mathcal{W}_{\text{NL}}^*) \equiv 0,$$

где Λ_z^* имеет тот же вид, что и (3.25). Повторяя практически ту же же самую процедуру, что была проведена с целью получения схемы (3.32), получим недивергентную схему:

$$\begin{cases} u_{t\check{t}} - u_{x\bar{x}} - \frac{u_x^2 + u_{\bar{x}}^2}{2} u_{x\bar{x}} = 0, \\ h_+ = h_- = h = \text{const}, \\ \hat{\tau} = \check{\tau} = \tau = \text{const}. \end{cases} \quad (3.33)$$

Она инвариантна по отношению к (3.19) и обладает одним законом сохранения типа (3.20b):

$$\Lambda_2^* = \frac{u_x + u_{\bar{x}}}{2}, \quad D_{-\tau} \left(u_t \frac{\hat{u}_x + \hat{u}_{\bar{x}}}{2} \right) - D_{-h} \left(\frac{u_t u_t^+ + u_x^2}{2} + \frac{u_x^4}{4} \right) = 0.$$

Эта схема задана на шаблоне «крест».

3.4 Заключительные замечания

Итак, на 9-точечном шаблоне (3.22) на равномерной ортогональной сетке (3.2) существуют инвариантные по отношению к действию операторов (3.19) схемы трех классов:

1. Схемы, обладающие одним законом сохранения типа (3.20b). Пример такой схемы дает схема (3.33).
2. Схемы, обладающие двумя законами сохранения типа (3.20a), (3.20d). В качестве примера такой схемы можно привести (3.21) (как было указано выше, подобных схем существует бесконечное число).
3. Схемы, обладающие тремя законами сохранения типа (3.20a), (3.20c), (3.20d). Пример такой схемы дается системой (3.32).

Глава 4. Групповая классификация уравнения Эйлера–Лагранжа специального вида для течения жидкости и газа

Моделирование физических явлений в механике течения сплошных сред может рассматриваться с двух различных позиций. Типичный подход основан на использовании эйлеровых координат. В этом случае параметры течения в каждый отдельно взятый момент времени описываются в фиксированных точках пространства. Напротив, подход Лагранжа основан на сопоставлении каждой частице среды положения в пространстве, которое она занимала в некоторый начальный момент времени (либо некоторого другого начального параметра). Описание с помощью координат Лагранжа на практике оказывается часто слишком подробным и сложным, однако оно всегда подразумевается при формулировке физических законов, однако, в некоторых случаях лагранжево описание несомненно полезно [92].

Многие физические модели в газодинамике, представленные в эйлеровых координатах, могут быть рассмотрены как частные случаи общей модели, описываемой уравнениями [93]¹

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \rho \operatorname{div}(u) &= 0, \quad \rho \dot{u} + \nabla p = 0, \\ p &= \rho \frac{\delta W}{\delta \rho} - W = \rho \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{\rho}} \right) - \operatorname{div} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{\rho}} u \right) \right) - W, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где u — скорость, ρ — плотность, W — заданный потенциал, \dot{f} обозначает материальную производную f : $\dot{f} = \frac{df}{dt} = f_t + u \nabla f$ и $\frac{\delta W}{\delta \rho}$ обозначает вариационную производную W по ρ при фиксированных значениях x и u .

Представляют интерес следующие частные модели.

В случае изэнтропических течений политропного газа [75; 95] функция W определяется следующим образом

$$W(\rho) = \frac{1}{\gamma - 1} \rho^\gamma.$$

Уравнения мелкой воды получаются в качестве аппроксимации потенциальных течений несжимаемой жидкости [96; 97]. В случае плоского дна

$$W = \frac{g}{2} \rho^2,$$

¹Обзор конкретных моделей вида (4.1) может быть найден, например, в [94].

где g — постоянная гравитации, а ρ — сумма высоты столбца жидкости и координаты дна в данной точке. В случае произвольного дна W также зависит от x . Пусть форма дна задана функцией $H = H(x)$. Тогда

$$W = \gamma_1 \rho (\rho - H(x)). \quad (4.2)$$

Традиционно при составлении классических уравнений мелкой воды игнорирует нелинейные члены, описывающие адвективный перенос импульса, возникающий вследствие зависимости горизонтальных потоков мелкой воды от глубины [98;99]. Простая аппроксимация этого эффекта привела авторов [98;99] к модифицированным уравнениям мелкой воды над плоским дном, для которых

$$W = \frac{g}{2} \rho (\rho + K \ln \rho), \quad (4.3)$$

где K — константа. Принимая во внимание оба этих свойства, можно прийти к уравнениям мелкой воды с

$$W = \gamma_1 \rho (\rho + K \ln \rho - H(x)). \quad (4.4)$$

Следует заметить, что различные модели мелкой воды, включающие производные старших порядков, такие как уравнения Серре-Су-Гарднера-Грина-Нагди [100–102] и Буссинеска [96] также могут быть записаны в форме (4.1).

Одна из важных задач моделирования физических процессов — проблема конструирования законов сохранения изучаемой модели. Законы сохранения представляют собой фундаментальные законы природы и имеют широкое применение в механике сплошных сред: они представляют практическую основу для понимания эффектов, происходящих вследствие движения сплошной среде. Более того, фундаментальные математические модели зачастую формулируются в форме законов сохранения.

Законы сохранения также важны при конструировании численных схем [51]. В качестве примера можно упомянуть полностью консервативные схемы одномерных уравнений газовой динамики [3] и магнитогидродинамики [62] (см. также [53–55]).

Существует несколько методов отыскания законов сохранения [11;41;103]. Наиболее известный из них основан на теореме Нётер [38], которая устанавливает связь симметрий дифференциальных уравнений с законами сохранения.

Основное требование теоремы состоит в том, чтобы рассматриваемые уравнения получались с помощью вариационного принципа, т. е., они должны являться уравнениями Эйлера-Лагранжа. Следует иметь в виду, что уравнения (4.1), записанные в координатах Эйлера, уравнениями Эйлера-Лагранжа не являются. Однако, было замечено, что уравнения (4.1), представленные в координатах Лагранжа, оказываются уравнениями Эйлера-Лагранжа следующего лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}u^2 - \rho^{-1}W. \quad (4.5)$$

В частности, в [75;104–106], это было показано для уравнений газовой динамики; согласно [107;108], различные приближения уравнений мелкой воды могут быть также представлены с помощью лагранжиана(4.5).

Результаты [75;106–108] показывают, что все аналитические свойства уравнений (4.1), такие как симметрии и законы сохранения, определяются заданным лагранжианом.

В одномерном случае эйлеровы координаты (t,x) и лагранжевы массовые координаты (t,s) связаны условием [92; 109]

$$x = \varphi(t,s),$$

где функция $\varphi(t,s)$ является решением уравнений

$$\varphi_t(t,s) = u(t,\varphi(t,s)), \quad \varphi_s(t,s) = \rho^{-1}(t,\varphi(t,s)).$$

Здесь $u(t,x)$ — скорость, $\rho(t,x)$ — плотность (или глубина жидкости) в координатах Эйлера.

Рассмотрим уравнения Эйлера-Лагранжа, для которых

$$W = \tilde{g}(\rho) + \rho h(x). \quad (4.6)$$

Функции \tilde{g} и h — произвольные функции своих аргументов. Этот случай включает различные формы гиперболических уравнений мелкой воды и уравнения изэнтропических течений газовой динамики. Интересно, что уравнения, соответствующие (4.2), (4.3) и (4.4) ранее рассматривались только в координатах Эйлера [96; 110–112].

Групповые свойства уравнений газовой динамики в координатах Эйлера ранее изучались в [5]. В работах [64;65;113;114] методы группового анализа были применены к уравнениям газовой динамики политропного газа в массовых

лагранжевых координатах. С помощью функции Лагранжа и теоремы Нётер авторы [113] построили законы сохранения для упомянутого изотропного случая. Для нелинейного случая тот же подход был применен в [75; 95; 115]. Стоит также упомянуть результаты [116], где были получены нелокальные законы сохранения.

Симметрии модифицированных уравнений мелкой воды (4.3) в координатах Эйлера рассмотрены в [111; 117]. Законы сохранения уравнений мелкой воды с переменным дном (4.2) в эйлеровых координатах получены в [112].

В первом разделе главы рассматривается уравнение Эйлер-Лагранжа специального вида, зависящее от двух произвольных функций. Во втором разделе производится групповая классификация этого уравнения. В третьем разделе главы даются законы сохранения рассмотренного уравнения в лагранжевых и эйлеровых координатах, полученные с помощью теоремы Нётер. В последнем, четвертом, разделе приводятся заключительные замечания к главе.

4.1 Рассматриваемое уравнение

Одна из целей настоящей главы — изучение законов сохранения уравнений (4.1) в координатах Эйлера и Лагранжа с потенциальной функцией (4.6). В лагранжевых массовых координатах лагранжиан (4.5) имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{\varphi_t^2}{2} + g(\varphi_s) + h(\varphi). \quad (4.7)$$

С этим лагранжианом соответствующее уравнение становится вариационным (Эйлера-Лагранжа) уравнением, для которого могут быть получены законы сохранения с помощью теоремы Нётер. В работе [11] установлено, что «всякий локальный закон сохранения вариационной системы дифференциальных уравнений возникает из вариационной симметрии».

Рассмотрение лагранжиана (4.7) приводит к следующему уравнению Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} = \varphi_{tt} + G\varphi_{ss} - H = 0, \quad (4.8)$$

где $\frac{\delta}{\delta \varphi}$ — вариационная производная, и, для краткости, введены следующие обозначения: $G \equiv g''$ и $H \equiv h'$. Предполагается, что $G \neq 0$. Более того, $G' \neq 0$ (условие нелинейности).

В координатах Эйлера уравнение (4.8) сводится к системе уравнений

$$\begin{aligned} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0, \\ u_t + uu_x - G\left(\frac{1}{\rho}\right)\rho^{-3}\rho_x - H(x) &= 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

В частности, для уравнений, рассмотренных в [111],

$$G\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\gamma_1\rho^2(\rho + \gamma_2), \quad H(x) = 0,$$

второе уравнение (4.9) принимает вид

$$u_t + uu_x + \gamma_1\left(1 + \frac{\gamma_2}{\rho}\right)\rho_x = 0.$$

Еще один частный случай уравнений (4.9) — уравнения мелкой воды с переменным дном $\chi(x)$ — был рассмотрен в работе [112]. В этом случае

$$G\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\rho^3, \quad H(x) = \chi'(x),$$

и второе уравнение (4.9) принимает вид

$$u_t + uu_x + \rho_x - \chi' = 0.$$

4.2 Групповая классификация рассматриваемого уравнения

Применение теоремы Нётер требует предварительного анализа симметрий рассматриваемых дифференциальных уравнений. Поскольку переход к лагранжевым координатам не является точечным преобразованием, групповой анализ этих уравнений следует производить независимо от анализа их представления в координатах Эйлера.

Следует заметить, что групповому анализу нелинейных уравнений вида

$$\varphi_{tt} = g(s, \varphi, \varphi_s)\varphi_{ss} + h(s, \varphi, \varphi_s).$$

посвящена обширная литература. Для краткости можно упомянуть некоторые результаты² в случае, когда $g_\varphi^2 + g_{\varphi_s}^2 \neq 0$. Полная групповая классификация уравнения

$$\varphi_{tt} + g(\varphi_s)\varphi_{ss} + h(\varphi_s), \quad g' \neq 0.$$

²Обзор результатов в случае $g = \text{const}$ может быть найден в [118].

путем классического прямого подхода Ли была проделана в [119]. Предварительная групповая классификация уравнения

$$\varphi_{tt} + g(s, \varphi_s)\varphi_{ss} + h(s, \varphi_s) = 0, \quad g \neq 0$$

произведена в [120], и, наконец, с помощью алгебраического метода групповой классификации, классификация последнего уравнения была проделана в [121]. В [122] можно также найти групповую классификацию уравнения

$$\varphi_{tt} = \nabla(g(\varphi)\nabla\varphi) + h(\varphi).$$

4.2.1 Группа эквивалентных преобразований

Первый шаг в процедуре групповой классификации уравнений класса (4.3) состоит в описании эквивалентности уравнений в пределах этого класса, с точностью до которой производится эта классификация.

Класс уравнений (4.8) параметризуется двумя произвольными элементами G и H . Преобразования эквивалентности сохраняют структуру уравнений в рамках класса, при этом позволяя изменять вид произвольных элементов.

Генераторы однопараметрических групп преобразований эквивалентности [5; 123] рассматриваются в следующей форме

$$X^e = \xi^t \partial_t + \xi^s \partial_s + \eta \partial_\varphi + \zeta^G \partial_G + \zeta^H \partial_H,$$

где все коэффициенты генератора зависят от (t, s, φ, G, H) .

Класс дифференциальных уравнений (4.8) т. о. определяется следующими вспомогательными уравнениями на G и H :

$$\begin{aligned} G_t = 0, \quad G_s = 0, \quad G_\varphi = 0, \quad G_{\varphi_t} = 0, \\ H_t = 0, \quad H_s = 0, \quad H_{\varphi_s} = 0, \quad H_{\varphi_t} = 0, \end{aligned}$$

С целью нахождения преобразований эквивалентности используется инфинитезимальный критерий [5], т. е. рассматриваются определяющие уравнения на компоненты генераторов однопараметрических групп. Решения этих определяющих уравнений дают общую форму элементов алгебры эквивалентности класса (4.8). Т. о. получаются следующие базисные элементы алгебры

эквивалентности (4.8):

$$\begin{aligned}
X_1^e &= \partial_t, & X_2^e &= \partial_s, & X_3^e &= \partial_\varphi, \\
X_4^e &= t\partial_t + s\partial_s - 2H\partial_H - \varphi_s\partial_{\varphi_s}, \\
X_5^e &= s\partial_s + 2G\partial_G - \varphi_s\partial_{\varphi_s}, \\
X_6^e &= \varphi\partial_\varphi + H\partial_H + \varphi_s\partial_{\varphi_s}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Эти генераторы определяют группу эквивалентности уравнения (4.8).

Следует указать также инволюцию

$$s \mapsto -s, \quad \varphi \mapsto -\varphi, \quad H \mapsto -H,$$

которая также является преобразованием эквивалентности.

В общем случае частные формы произвольных элементов могут допускать расширение группы эквивалентности [5]. Расширение группы (4.10) возникают только при определенных видах функции H , и они приведены в Таблице 2. В каждой колонке таблицы перечислены дополнительные генераторы группы эквивалентных преобразований, соответствующие частным формам функции H .

Таблица 2 — Расширения группы эквивалентности

$H = \alpha$	$H = \alpha\varphi, \alpha \neq 0$	$H = e^{\alpha\varphi}, \alpha \neq 0$	$H = \beta\varphi^\alpha, \beta \neq 0$
$t\partial_\varphi,$ $s\partial_\varphi + \partial_{\varphi_s},$ $t^2\partial_\varphi + 2\partial_\alpha$	$\varphi\partial_\varphi + \varphi_s\partial_{\varphi_s},$ $\sinh(\sqrt{\alpha t})\partial_\varphi$ при $\alpha > 0,$ $\cosh(\sqrt{\alpha t})\partial_\varphi$ при $\alpha > 0,$ $\sin(\sqrt{ \alpha t})\partial_\varphi$ при $\alpha < 0,$ $\cos(\sqrt{ \alpha t})\partial_\varphi$ при $\alpha < 0$	$t\partial_t + s\partial_s$ $-\frac{2}{\alpha}\partial_\varphi - \varphi_s\partial_{\varphi_s},$ $(\alpha\varphi + 1)\partial_\varphi - \alpha^2\partial_\alpha$ $+\alpha\varphi_s\partial_{\varphi_s}$	$t\partial_t + s\partial_s - \frac{2\varphi}{\alpha-1}\partial_\varphi$ $+\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\varphi_s\partial_{\varphi_s},$ $\beta\partial_\beta - \frac{\varphi}{\alpha-1}\partial_\varphi - \frac{\varphi_s}{\alpha-1}\partial_{\varphi_s}$

В ходе групповой классификации будут использованы следующие преобразования эквивалентности: преобразование, соответствующее генератору X_3^e ,

$$\varphi \mapsto \varphi + \varepsilon_1;$$

преобразование, соответствующее генератору X_4^e ,

$$t \mapsto te^{\varepsilon_2}, \quad s \mapsto se^{\varepsilon_2}, \quad H \mapsto He^{-2\varepsilon_2};$$

преобразование, соответствующее генератору $t^2\partial_\varphi + 2\partial_\alpha$,

$$\varphi \mapsto \varphi + \varepsilon_3 t^2, \quad \alpha \mapsto \alpha + 2\varepsilon_3;$$

и преобразование, соответствующее генератору $s\partial_\varphi + \partial_{\varphi_s}$, которое позволяет производить сдвиги производной φ_s ,

$$s \mapsto s\varphi + \varepsilon_4 s, \quad \varphi_s \mapsto \varphi_s + \varepsilon_4.$$

4.2.2 Допускаемая группа Ли преобразований

Генератор, допускаемый уравнением (4.8), рассматривается в общей форме

$$X = \xi^t \partial_t + \xi^s \partial_s + \eta \partial_\varphi,$$

с коэффициентами, зависящими от (t, s, φ) ,

$$\xi^s = C_1 s + C_2, \quad \eta = \left(\frac{1}{2} \xi_t^t + C_3 \right) \varphi + \tau_1 s + \tau_2,$$

где константы C_1, C_2, C_3 — функции $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$ и $\xi^t = \xi^t(t)$, удовлетворяющие классифицирующим уравнениям

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{1}{2} \xi_t^t + C_3 - C_1 \right) \varphi_s + \tau_1 \right) G' + 2(\xi_t^t - C_1)G = 0, \\ & \left(\left(\frac{1}{2} \xi_t^t + C_3 \right) \varphi + \tau_2 \right) H' - \left(C_3 - \frac{3}{2} \xi_t^t \right) H - \frac{1}{2} \xi_{ttt}^t \varphi - \tau_2'' = 0, \\ & \tau_1 H' - \tau_1'' = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь и далее C_i — константы.

Ядро допустимых алгебр Ли получается путем разбиения уравнений (4.11) по элементам G, G', H и H' . Их базис составляют генераторы

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_s. \quad (4.12)$$

Расширения ядра допустимых алгебр Ли возникают в частных случаях функций G и H , которые получаются следующим образом.

Дифференцирование третьего уравнение системы (4.11) по φ дает

$$\tau_1 H'' = 0.$$

Значит, анализ системы (4.11) разделяется на два случая: линейная функция H (т. е., $H'' = 0$), и нелинейная функция H (т. е., $\tau_1 = 0$).

4.2.3 Случай линейного параметра классификации

В случае линейной функции H , т. е., в случае

$$H = \alpha \varphi + \beta,$$

где α и β — константы, можно считать $\beta = 0$. Действительно, если $\alpha = 0$, то, используя преобразования эквивалентности, соответствующие генератору $t^2 \partial_\varphi + 2\partial_\beta$, можно получить $\beta = 0$. Если $\alpha \neq 0$ то можно «избавиться» от β с помощью преобразований эквивалентности, соответствующих генератору X_3^e .

Случай $H = 0$

Подстановка $H = 0$ в (4.11) приводит к

$$\tau_1'' = 0, \quad \tau_2'' = 0, \quad \xi_{ttt}^t = 0.$$

Откуда

$$\xi^t = K_1 t^2 + K_2 t + K_3, \quad \tau_1 = A_1 t + A_2, \quad \tau_2 = B_1 t + B_2,$$

где A_i, B_i, K_i — константы. Подставляя последние соотношения в (4.11) и разбивая по t , можно получить

$$\begin{aligned} (K_1 \varphi_s + A_1) G' + 4K_1 G &= 0, \\ \left(\left(\frac{1}{2} K_2 + C_3 - C_1 \right) \varphi_s + A_2 \right) G' + 2(K_2 - C_1) G &= 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

В случае произвольной функции G оказывается

$$K_1 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad K_2 = C_1 = 2C_3,$$

и расширение ядра (4.12) определяется генераторами

$$\partial_\varphi, \quad t\partial_\varphi, \quad t\partial_t + s\partial_s + \varphi\partial_\varphi. \quad (4.14)$$

Рассматривая систему (4.13), можно прийти к заключению, что существуют константы a, b и c такие, что

$$(a\varphi_s + b)G' + cG = 0.$$

В силу преобразований эквивалентности, для нахождения расширений (4.14) следует рассмотреть два представления функции G .

В первом случае G имеет вид

$$G = -e^{\mu\varphi_s},$$

где $\mu \neq 0$ — константа. Подстановка G в (4.13) дает

$$K_1 = 0, \quad A_1 = 0, \quad K_2 = 2(C_1 - C_3), \quad 2(C_1 - 2C_3) + \mu A_2 = 0.$$

Расширение (4.14) определяется генератором

$$t\partial_t - \frac{2s}{\mu}\partial_\varphi.$$

Вторая форма функции G имеет вид

$$G = -\varphi_s^\lambda,$$

где λ — константа, удовлетворяющая условию $\lambda(1 - \lambda) \neq 0$. Подстановка G в (4.13) приводит к следующим результатам:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad K_1(\lambda + 4) = 0, \quad (\lambda + 4)K_2 - 2C_1(\lambda + 2) + 2\lambda C_3 = 0.$$

Если $\lambda = -4$, то $C_1 = 2C_3$, и расширение (4.14) имеет вид

$$2t\partial_t + \varphi\partial_\varphi \quad t^2\partial_t + t\varphi\partial_\varphi.$$

Если $\lambda = -2$, то $K_1 = 0$ и $K_2 = 2C_3$. Расширение ядра (4.12) суть

$$s\partial_s, \quad t\partial_t + \varphi\partial_\varphi.$$

Если $(\lambda + 4)(\lambda + 2) \neq 0$, то

$$K_1 = 0, \quad K_2 = \frac{2C_1(\lambda + 2) - 2\lambda C_3}{\lambda + 4},$$

и расширение (4.14) представлено генератором

$$t\partial_t - \frac{2}{\lambda}\varphi\partial_\varphi.$$

Случай $H = \alpha\varphi$, $\alpha \neq 0$

Из системы (4.11) следует, что

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{1}{2}\xi_t^t + C_3 - C_1 \right) \varphi_s + \tau_1 \right) G' + 2(\xi_t^t - C_1)G = 0, \\ & \xi_{ttt}^t = 4\alpha\xi_t^t, \quad \tau_1'' = \alpha\tau_1 \quad \tau_2'' = \alpha\tau_2. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Если G — произвольная функция, то

$$\xi_t^t = C_1 = C_3 = 0, \quad \tau_1 = 0,$$

Расширение (4.12) определяется генераторами

$$\begin{aligned} & \sin \sqrt{|\alpha|}t\partial_\varphi, \quad \cos \sqrt{|\alpha|}t\partial_\varphi, \quad \alpha < 0, \\ & \cosh \sqrt{\alpha}t\partial_\varphi, \quad \sinh \sqrt{\alpha}t\partial_\varphi, \quad \alpha > 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Как и в предыдущем случае, следует рассмотреть две формы функции G . Первая из них

$$G = -e^{\mu\varphi_s},$$

где $\mu \neq 0$ — константа. Подстановка G в (4.11), дает

$$C_1 = C_3 = 0, \quad \xi_t^t = 0, \quad \tau_1 = 0, \quad \tau_2'' - \alpha\tau_2 = 0.$$

В этом случае расширений (4.16) нет.

Другая форма G имеет вид

$$G = -(\varphi_s + c)^\lambda,$$

где λ и c — константы, удовлетворяющие условию $\lambda(1 - \lambda) \neq 0$. Подстановка G в первое уравнение (4.11) приводит к соотношениям

$$(\lambda + 4)\xi_t^t - 2(\lambda + 2)C_1 + 2\lambda C_3 = 0, \quad \tau_1 = \frac{2c(\xi_t^t - C_1)}{\lambda}, \quad c(3\xi_t^t + C_1) = 0.$$

В случае $c \neq 0$,

$$\xi_t^t = 0, \quad \tau_1 = 0, \quad C_1 = 0, \quad C_3 = 0,$$

и расширений (4.16) в этом случае так же нет.

Если же $c = 0$, то $\tau_1 = 0$. Интегрирую последние три уравнения (4.15), можно получить

$$\begin{aligned} \xi_t^t &= A_3 + \begin{cases} A_1 \sin 2\sqrt{|\alpha|}t + A_2 \cos 2\sqrt{|\alpha|}t, & \alpha < 0, \\ A_1 \sinh 2\sqrt{\alpha}t + A_2 \cosh 2\sqrt{\alpha}t, & \alpha > 0; \end{cases} \\ \tau_2 &= \begin{cases} B_1 \sin \sqrt{|\alpha|}t + B_2 \cos \sqrt{|\alpha|}t, & \alpha < 0, \\ B_1 \sinh \sqrt{\alpha}t + B_2 \cosh \sqrt{\alpha}t, & \alpha > 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.17)$$

где A_i, B_i — константы. Подстановка (4.17) в первое уравнение системы (4.15) дает

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad \sqrt{|\alpha|}(\lambda + 4)A_1 + C_1(2 + \lambda) - \lambda C_3 = 0,$$

и

$$(\lambda + 4)\sqrt{|\alpha|}(A_2 \sin 2\sqrt{|\alpha|}t - 2A_1 \cos^2 \sqrt{|\alpha|}t) = 0, \quad \alpha < 0;$$

$$(\lambda + 4)\sqrt{\alpha}(A_2 \sinh 2\sqrt{\alpha}t - 2A_1 \cosh^2 \sqrt{\alpha}t) = 0, \quad \alpha > 0.$$

В таком случае, для любого $\lambda \neq 0$ возникает следующее расширение (4.16)

$$s\partial_s + \frac{2 + \lambda}{\lambda} \varphi \partial_\varphi.$$

Если $\lambda = -4$, то возникает три дополнительных к (4.16) генератора:

$$\begin{aligned} \sin 2\sqrt{|\alpha|}t\partial_t + \sqrt{|\alpha|}\varphi \cos 2\sqrt{|\alpha|}t\partial_\varphi, \quad \alpha < 0; \\ \sinh 2\sqrt{\alpha}t\partial_t + \sqrt{\alpha}\varphi \cosh 2\sqrt{\alpha}t\partial_\varphi, \quad \alpha > 0, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \cos 2\sqrt{|\alpha|}t\partial_t - \sqrt{|\alpha|}\varphi \sin 2\sqrt{|\alpha|}t\partial_\varphi, \quad \alpha < 0; \\ \cosh 2\sqrt{\alpha}t\partial_t + \sqrt{\alpha}\varphi \sinh 2\sqrt{\alpha}t\partial_\varphi, \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

4.2.4 Случай нелинейного параметра классификации

Как было упомянуто выше, из нелинейности функции H следует $\tau_1 = 0$. Система (4.11) принимает вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\xi_t^t + C_3 - C_1\right) \varphi_s \frac{G'}{G} + 2(\xi_t^t - C_1) &= 0, \\ \left(\left(\frac{1}{2}\xi_t^t + C_3\right) \varphi + \tau_2\right) H' - \left(C_3 - \frac{3}{2}\xi_t^t\right) H - \frac{1}{2}\xi_{ttt}^t \varphi - \tau_2'' &= 0. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Причем

$$\xi^t = \xi^t(t), \quad \xi^s = C_1 s + C_2, \quad \eta = \left(\frac{1}{2}\xi_t^t + C_3\right) \varphi + \tau_2(t).$$

Дифференцируя первое уравнение системы (4.18) по φ_s приводит к

$$\left(\frac{1}{2}\xi_t^t + C_3 - C_1\right) \left(\varphi_s \frac{G'}{G}\right)' = 0.$$

Случай $\left(\varphi_s \frac{G'}{G}\right)' \neq 0$ Последнее уравнение в сочетании с первым уравнением (4.18) дают

$$\xi_t^t = C_1, \quad C_3 = C_1/2.$$

Второе уравнение (4.18) принимает вид

$$(C_1\varphi + \tau_2) H' + C_1 H - \tau_2'' = 0.$$

Дифференцирование последнего уравнения по φ и затем по t приводит к $\tau_2' H'' = 0$, из чего следует, что τ_2 — константа, и

$$(C_1 \varphi + \tau_2) H' + C_1 H = 0, \quad (4.19)$$

Следует заметить, что если $C_1 = 0$, то в случае нелинейной функции H , это приводит к $\tau_2 = 0$, что означает отсутствие расширений ядра (4.12). То, следует рассмотреть случай $C_1 \neq 0$. В силу преобразований эквивалентности можно считать, что H имеет вид

$$H = \beta \varphi^{-1},$$

где $\beta \neq 0$ — константа. Подстановка последнего в (4.19) приводит к тому, что $\tau_2 = 0$, и G — произвольная нелинейная функция. Значит, для $(\varphi_s \frac{G'}{G})' \neq 0$ расширение (4.12) дается генератором

$$t\partial_t + s\partial_s + \varphi\partial_\varphi.$$

Случай $(\varphi_s \frac{G'}{G})' = 0$ В этом случае

$$G = -(\varphi_s + c)^\lambda,$$

где c и $\lambda \neq 0$ — константы. В силу предполагаемой нелинейности функции G должно быть $(\lambda - 1)\lambda \neq 0$.

Подстановка последнего соотношения в первое уравнение системы (4.18) приводит к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} c(\xi_t^t - C_1) &= 0, \\ (\lambda + 4)\xi_t^t - 2C_1(\lambda + 2) + 2\lambda C_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Если $c \neq 0$, то $\xi_t^t = C_1$, $C_3 = C_1/2$, и уравнение на функцию H переходит в (4.19). Этот случай уже был рассмотрен ранее.

Следовательно, следует рассмотреть случай $c = 0$, т. е. случай, когда $G = -\varphi^\lambda$.

Дважды дифференцируя (4.18) по φ и затем по t приводит к

$$5\xi_{tt}^t H'' + (\xi_{tt}^t \varphi + 2\tau_2') H''' = 0. \quad (4.21)$$

Сперва рассмотрим случай $H''' \neq 0$. Дифференцируя (4.21) по φ , получим

$$\xi_{tt}^t \left(5 \left(\frac{H''}{H'''} \right)' + 1 \right) = 0.$$

Таким образом, возможны следующие случаи.

Случай $(\frac{H''}{H''})' = -1/5$. Интегрирование приводит к

$$H = \alpha(\varphi + \delta)^{-3} + \beta\varphi + \varepsilon,$$

где $\alpha \neq 0$, β и ε , δ — константы. В силу преобразований эквивалентности, соответствующих генератору X_3^e , можно положить $\delta = 0$.

Подстановка H в систему (4.18) дает

$$\begin{aligned} (\lambda + 4)\xi_{tt}^t + 2(C_3 - C_1)\lambda - 4C_1 &= 0, \\ (\xi_{ttt}^t - 4\beta\xi_t^t)\varphi + 2\alpha(4C_3\varphi^{-3} + 3\tau_2\varphi^{-4}) + \varepsilon(2C_3 - 3\xi_t^t) + 2(\tau_2'' - \beta\tau_2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Разбиение последнего уравнения по φ приводит систему (4.20), (4.22) к уравнениям

$$\begin{aligned} C_3 &= 0, \quad \tau_2 = 0, \\ (\lambda + 4)\xi_t^t - 2(\lambda + 2)C_1 &= 0, \\ \xi_{ttt}^t - 4\beta\xi_t^t &= 0, \quad \varepsilon\xi_t^t = 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

В случае, если $\varepsilon \neq 0$, расширение (4.12) возникает только при $\lambda = -2$ и определяется генератором $s\partial_s$. Поэтому предполагается, что $\varepsilon = 0$.

1. Если $\lambda = -4$, то $C_1 = 0$, и система (4.23) приводит к тому, что функция ξ^t должна удовлетворять следующему уравнению,

$$\xi_{ttt}^t - 4\beta\xi_t^t = 0.$$

Если $\beta = 0$, то $\xi_{ttt}^t = 0$, и расширение (4.12) есть

$$\partial_\varphi, \quad t\partial_\varphi, \quad 2t\partial_t + \varphi\partial_\varphi, \quad t^2\partial_t + 2t\varphi\partial_\varphi.$$

Если $\beta \neq 0$, то имеются следующие расширения ядра (4.12):

$$\begin{aligned} \sin 2\sqrt{|\beta|}t\partial_t + \sqrt{|\beta|}\varphi \cos 2\sqrt{|\beta|}t\partial_\varphi, \quad \beta < 0, \\ \sinh 2\sqrt{\beta}t\partial_t + \sqrt{\beta}\varphi \cosh 2\sqrt{\beta}t\partial_\varphi, \quad \beta > 0, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \cos 2\sqrt{|\beta|}t\partial_t - \sqrt{|\beta|}\varphi \sin 2\sqrt{|\beta|}t\partial_\varphi, \quad \beta < 0, \\ \cosh 2\sqrt{\beta}t\partial_t + \sqrt{\beta}\varphi \sinh 2\sqrt{\beta}t\partial_\varphi, \quad \beta > 0. \end{aligned}$$

Следует заметить, что при $H = \alpha\varphi^{-3} + \beta\varphi$ и $G = -\varphi^{-4}$ расширения ядра совпадают со случаем $\alpha = 0$.

2. Если $\lambda = -2$, то расширения (4.12) определяются генератором $s\partial_s$.
3. Если $(\lambda + 2)(\lambda + 4) \neq 0$, то из (4.23) следует

$$\xi_t^t = 2C_1 \frac{\lambda + 2}{\lambda + 4}, \quad \beta C_1(\lambda + 2) = 0.$$

Расширение (4.12) возникает только при $\beta = 0$:

$$2t\partial_t + \frac{\lambda + 4}{\lambda + 2}s\partial_s + \varphi\partial_\varphi.$$

Случай $(\frac{H''}{H'''})' \neq -1/5$. Ранее было показано, что в этом случае $\xi_{tt}^t = 0$, т. е.,

$$\xi^t = A_1 t + A_2,$$

где A_i — константы. Система (4.18) принимает вид

$$\begin{aligned} (\lambda + 4)A_1 - 2(\lambda + 2)C_1 + \lambda C_3 &= 0, \\ ((A_1 + 2C_3)\varphi + 2\tau_2)H' + (3A_1 - 2C_3)H - 2\tau_2'' &= 0. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Дважды дифференцируя (4.24) по φ и t , можно получить, что τ_2 — константа, и рассмотрение второго уравнения (4.24) приводит к двум возможным видам функции: $H = e^{\alpha\varphi}$, где $\alpha \neq 0$, и $H = \beta\varphi^\alpha$, где $\alpha(1 - \alpha) \neq 0$.

1. Если $H = e^{\alpha\varphi}$, то система (4.24) сводится к уравнениям

$$(\lambda + 2)C_1 + 4C_3 = 0, \quad A_1 = -2C_3, \quad \alpha\tau_2 = 4C_3.$$

Если $\lambda \neq -2$, то $\tau_2 = 4C_3/\alpha$ и $C_3 = -C_1(\lambda + 2)/4$. Следовательно, расширение (4.12) дается генератором

$$t\partial_t + \frac{2}{2 + \lambda}s\partial_s - \frac{2}{\alpha}\partial_\varphi.$$

Если $\lambda = -2$, то $C_3 = 0$ и $\tau_2 = 0$, и единственное расширение ядра (4.12) дается генератором $s\partial_s$.

2. В случае $H = \beta\varphi^\alpha$ видно, что из условия $(\frac{H''}{H'''})' \neq -1/5$ следует $\alpha \neq -3$.

Второе уравнение системы (4.24) приводит к уравнениям

$$\tau_2 = 0, \quad A_1 = 2\frac{1 - \alpha}{3 + \alpha}C_3.$$

Если $\lambda \neq -2$, то

$$C_1 = \frac{4C_3(\lambda - \alpha + 1)}{(\lambda + 2)(\alpha + 3)},$$

и расширение ядра (4.12) определяется генератором

$$t\partial_t + \frac{2(\alpha - \lambda - 1)}{(2 + \lambda)(\alpha - 1)}s\partial_s + \frac{2\varphi}{1 - \alpha}\partial_\varphi. \quad (4.25)$$

Если $\lambda = -2$, то первое уравнение системы (4.24) приводится к

$$C_3(\alpha + 1) = 0.$$

Если $\alpha \neq -1$, то $C_3 = 0$, и расширение ядра (4.12) определяется генератором $s\partial_s$. Если же $\alpha = -1$, то расширение (4.12) есть

$$s\partial_s, \quad t\partial_t + \varphi\partial_\varphi.$$

Случай $H''' = 0$. В данном случае получается, что

$$H = \alpha\varphi^2 + \beta\varphi + \delta,$$

где $\alpha \neq 0$, β , δ — константы, и константа δ может быть сведена к нулю преобразованиями эквивалентности.

С помощью разбиения уравнения (4.18) и второго уравнения (4.20), можно получить

$$\xi_t^t = 2\frac{\lambda + 2}{1 - \lambda}C_1, \quad C_3 = -5\frac{\lambda + 2}{1 - \lambda}C_1, \quad \tau_2 = 0.$$

В этом случае расширение ядра (4.12) определяется генератором

$$(\lambda + 2)(t\partial_t - 2\varphi\partial_\varphi) + 2(1 - \lambda)s\partial_s.$$

Следует заметить, что это просто частный случай (4.25).

Результаты проведенной выше классификации сведены в Таблицу 3 и Таблицу 4. Таблица 3 содержит расширения ядра допустимых алгебр Ли в случаях, когда одна из функций — G или H — произвольная. Столбцы таблицы соответствуют различным функциям H , а строки — различным функциям G . На пересечениях строк и столбцов приведены соответствующие расширения (4.12). Генераторы, приведенные в Таблице 4, дополняют содержимое Таблицы 3 на случаи конкретных форм функций G и H . Ограничения, налагаемые на значения констант, также приведены в этой таблице.

Таблица 3 — Расширения (4.12) (G или H — произвольная функция)

	$H = H(\varphi)$	$H = 0$	$H = \alpha\varphi, \alpha \neq 0$	$H = \beta\varphi^{-1}, \beta \neq 0$
$G = G(\varphi_s)$	$X_1 = \partial_t,$ $X_2 = \partial_s$	$X_3 = \partial_\varphi,$ $X_4 = t\partial_\varphi,$ $X_5 = t\partial_t + s\partial_s + \varphi\partial_\varphi$	$X_3 = \begin{cases} \sin \sqrt{ \alpha }t\partial_\varphi, & \alpha < 0, \\ \sinh \sqrt{\alpha}t\partial_\varphi, & \alpha > 0, \end{cases}$ $X_4 = \begin{cases} \cos \sqrt{ \alpha }t\partial_\varphi, & \alpha > 0, \\ \cosh \sqrt{\alpha}t\partial_\varphi, & \alpha > 0. \end{cases}$	$X_3 = t\partial_t + s\partial_s + \varphi\partial_\varphi.$
$G = -\varphi_s^{-2}$	$X_3 = s\partial_s$		-	

Таблица 4 — Расширения (4.12)

	$H = 0$	$H = \beta\varphi^{-3} + \alpha\varphi,$ $\alpha \neq 0$	$H = e^{\alpha\varphi},$ $\alpha \neq 0$	$H = \beta\varphi^\alpha,$ $\alpha \neq 0,1, \beta \neq 0$
$G = -e^{\mu\varphi_s},$ $\mu \neq 0$	$X_6 = t\partial_t - \frac{2}{\mu}s\partial_\varphi$	-	-	-
$G = -\varphi_s^\lambda$ $\lambda \neq 0,1$	$X_6 = t\partial_t - \frac{2}{\lambda}\varphi\partial_\varphi$ При $\lambda = -4$: $X_7 = t^2\partial_t + t\varphi\partial_\varphi$	При $\beta = 0$: $X_5 = s\partial_s + \frac{1}{\lambda}(2 + \lambda)\varphi\partial_\varphi.$ При $\lambda = -4$: $X_6 = \begin{cases} \sin 2\sqrt{ \alpha }t\partial_t + \sqrt{ \alpha }\varphi \cos 2\sqrt{ \alpha }t\partial_\varphi, & \alpha < 0, \\ \sinh 2\sqrt{\alpha}t\partial_t + \sqrt{\alpha}\varphi \cosh 2\sqrt{\alpha}t\partial_\varphi, & \alpha > 0, \end{cases}$ $X_7 = \begin{cases} \cos 2\sqrt{ \alpha }t\partial_t - \sqrt{ \alpha }\varphi \sin 2\sqrt{ \alpha }t\partial_\varphi, & \alpha < 0, \\ \cosh 2\sqrt{\alpha}t\partial_t + \sqrt{\alpha}\varphi \sinh 2\sqrt{\alpha}t\partial_\varphi, & \alpha > 0. \end{cases}$	При $\lambda \neq -2$: $X_3 = t\partial_t + \frac{2}{2+\lambda}s\partial_s - \frac{2}{\alpha}\partial_\varphi.$	При $\lambda \neq -2$: $X_3 = t\partial_t + \frac{2(\alpha-\lambda-1)}{(2+\lambda)(\alpha-1)}s\partial_s + \frac{2\varphi}{1-\alpha}\partial_\varphi.$ При $\lambda = -4, \alpha = -3$ $X_4 = t^2\partial_t + t\varphi\partial_\varphi$

Замечание 4.2.1. Политропный газ соответствует функции $G = -\varphi_s^\lambda$ [109], где λ и показатель политропы γ связаны формулой $\lambda = -\gamma - 1$. В частности, для гиперболических уравнений мелкой воды будет $\lambda = -3$ [107].

4.3 Законы сохранения

С помощью теоремы Нётер можно получить законы сохранения найденных уравнений, используя лагранжиан (4.7) и допустимые симметрии [8]. Теорема устанавливает, что, если лагранжиан \mathcal{L} инвариантен к действию симметрии X , т. е. если

$$X\mathcal{L} + \mathcal{L}(D_t\xi^t + D_s\xi^s) = D_t(V^t) + D_s(V^s),$$

то уравнение Эйлера-Лагранжа (4.8) допускает следующий закон сохранения

$$D_t(T^t) + D_s(T^s) = D_t\left(\xi^t\mathcal{L} + \zeta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_t} - V^t\right) + D_s\left(\xi^s\mathcal{L} + \zeta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_s} - V^s\right) = 0,$$

где $\zeta = \eta - \xi^t\varphi_t - \xi^s\varphi_s$.

Если при этом вектор (V^t, V^s) — не нулевой, то симметрия X называется дивергентной.

Законы сохранения³ в координатах Эйлера

$$({}^e T^t)_t + (T^x)_x = 0$$

связаны с законами сохранения в лагранжевых массовых координатах

$$(T^t)_t + (T^s)_s = 0$$

формулой

$${}^e T^t = \rho T^t, \quad T^x = \rho u T^t + T^s.$$

Отсюда следует, что любой закон сохранения в координатах Эйлера может быть переписан в координатах Лагранжа. Вследствие возможного присутствия массовой координаты s в лагранжевых законах сохранения, обратное, вообще говоря, не верно⁴.

Законы сохранения в координатах Лагранжа и их представления в координатах Эйлера приведены в Таблице 7 и в Таблице 8 Приложения В соответственно.

4.4 Заключительные замечания

В данной главе дан подробный анализ уравнения (4.8), которое описывает движение сплошной среды (4.1) в лагранжевых координатах. В него входят две произвольных функции, $G(\varphi_s)$ и $H(\varphi)$. Конкретный выбор этих функций приводит к различным моделям, изучаемым в рамках механики сплошной среды, таким, как изэнтропические течения идеального газа [109] различных типов и гиперболические уравнения мелкой воды [96; 98]. В главе получены законы сохранения уравнений сплошной среды (4.8).

Поскольку (4.8) — уравнение Эйлера-Лагранжа, для конструирования законов сохранения была использована теорема Нётер. Была проведена полная групповая классификация уравнения (4.8). Результаты классификации представлены в Таблице 3 и Таблице 4. Групповая классификация показывает, что возможны следующие виды функции G : либо эта функция произвольна G , либо

³Здесь рассматриваются только локальные законы сохранения, соответствующие точечным симметриям.

⁴Примеры таких закон сохранения приводятся в [75; 95].

она имеет экспоненциальную форму $-e^{\mu\varphi_s}$, либо степенную форму $-\varphi_s^\lambda$, где μ и λ — константы. Найдены все расширения ядра допустимой алгебры Ли. Они различаются для различных видов функции H .

С помощью теоремы Нётер были получены законы сохранения уравнения (4.9) в лагранжевых координатах, а также их представления в координатах Эйлера. Стоит заметить, что некоторые из полученных законов сохранения не могут быть записаны в координатах Эйлера. Все найденные законы сохранения приведены в Таблице 7 и Таблице 8 Приложения Г.

Глава 5. Уравнения мелкой воды: симметрии, законы сохранения и инвариантные консервативные разностные схемы

Уравнения мелкой воды описывают движение в поле тяжести несжимаемой жидкости со свободной поверхностью, если глубина слоя жидкости достаточно мала. Они широко применяются при описании процессов в атмосфере, водоемах, моделировании приливного движения, волн цунами и гравитационных волн в сравнительно малых областях и рассматриваются в классических работах [50;63;96;124;125]. Подробное изложение с приложениями можно найти, например, в [126;127]. Нахождение точных решений уравнений мелкой воды, даже в случае одномерного плоского дна, оказывается трудной задачей — некоторые точные решения можно найти в [126;128;129]. Некоторые асимптотические решения, в том числе и для случаев неровного дна, приводятся в публикациях [130;131]. Численному моделированию процессов, описываемых уравнениями мелкой воды, посвящены монографии [57–60] и многочисленные статьи [55; 56; 132–137].

При численном моделировании уравнений сплошной среды оказываются особенно полезными Лагранжевы массовые координаты [4; 50] (во избежание терминологической путаницы «обычные» координаты Лагранжа далее также будем называть *потенциальными* лагранжевыми координатами). Лагранжевы массовые координаты связывают с потенциальными лагранжевыми координатами касательными преобразованиями. Причем, кроме общепринятых, существуют и альтернативные подходы к этой процедуре: помимо массовых можно также вводить «импульсные», «энергетические» и т. д. координаты [138;139]. В работах [3; 4] построены полностью консервативные схемы уравнений газовой динамики в лагранжевых массовых координатах. Полностью консервативные схемы, помимо собственно консервативности, удовлетворяют дополнительным условиям, выражающим различные физические аспекты рассматриваемых моделей. Примеры построения таких схем в газовой динамике и магнитной гидродинамике можно найти в [3;52–54]. Полностью консервативная схема уравнений *двухслойной* мелкой воды в координатах Лагранжа была построена в [55].

Особый интерес представляют инвариантные конечно-разностные схемы, т. е. схемы, обладающие симметриями [1; 2], поскольку это фундаментальное геометрическое свойство исходных уравнений. Для уравнений мелкой воды

такие схемы на подвижных сетках (о способах введения подвижных сеток см. [140; 141]) были предложены в работе [56]. Основным недостатком схем [56] является отсутствие у них закона сохранения энергии. В [56] отмечается сложность конструирования сохраняющих энергию разностных схем для уравнений мелкой воды и приводятся ссылки на инвариантные схемы, обладающие законом сохранения энергии (см., например, [61]).

Групповые свойства уравнений мелкой воды достаточно хорошо изучены и описаны, например, в [66; 112; 142; 143]. Групповая классификация и первые интегралы этих уравнений могут быть найдены в работах [74; 144]. В четвертой главе настоящей работы (см. также [74]) было показано, что уравнения мелкой воды в лагранжевых координатах могут быть получены как частный случай уравнений Эйлера–Лагранжа функции Лагранжа специального вида. Расширенные нелинейные модели, такие как уравнения Грина–Нагди и модифицированные уравнения мелкой воды, с групповой точки зрения рассмотрены в [107; 111].

Настоящая глава посвящена построению инвариантных консервативных разностных схем уравнений мелкой воды в потенциальных и массовых координатах Лагранжа.

В первом разделе главы даются вводные замечания и приводятся основные уравнения в эйлеровых и лагранжевых координатах. Во втором разделе подробно рассматриваются уравнения мелкой воды в лагранжевых (потенциальных) координатах и в массовых координатах Лагранжа. В третьем разделе для уравнений мелкой воды с плоским дном производится построение инвариантных разностных схем, обладающих локальными законами сохранения энергии, количества вещества, импульса и законом движения центра масс. Также для случая произвольного дна приводится разностная схема, обладающая локальным законом сохранения энергии. В четвертом разделе проводится численное исследование одной из полученных инвариантных схем (для случая плоского дна) на примере нескольких тестовых задач. По инвариантной схеме производятся расчеты, результаты которых сравниваются с результатами расчетов по другим существующим схемам, адаптированным на случай однослойной мелкой воды. Пятый раздел главы посвящен описанию программного комплекса Schemelib, специально разработанного для проведения численных расчетов по различным конечно-разностным схемам для уравнений мелкой воды и одно-

мерных уравнений газовой динамики. В последнем разделе главы приводятся заключительные замечания.

5.1 Уравнения мелкой воды в эйлеровых и лагранжевых массовых координатах

В этом разделе рассматриваются одномерные уравнения мелкой воды в эйлеровых и в лагранжевых массовых координатах.

5.1.1 Эйлеровы координаты

Система одномерных уравнений мелкой воды с произвольным дном в эйлеровых координатах имеет следующий вид:

$$\eta_t + ((\eta + h)u)_x = 0, \quad (5.1)$$

$$u_t + uu_x + \eta_x = 0. \quad (5.2)$$

Здесь $u(t, x)$ – скорость движения частиц среды, $\eta(t, x)$ – высота столбца жидкости над дном, профиль которого задается с помощью функции $h(x)$. Случай линейного дна $h(x) = kx$, где k – константа, заменой переменных [110]

$$\tau = kt, \quad \xi = k \left(x - \frac{kt^2}{2} \right), \quad u = v(\tau, \xi) + \tau, \quad \eta = w(\tau, \xi) - \xi - \frac{\tau^2}{2}$$

может быть сведен к случаю плоского дна ($h = 0$). В случае плоского дна система (5.1), (5.2) оказывается особенно простой и с помощью преобразования годографа

$$\begin{aligned} x &= x(\rho, u), & x_\rho &= -\frac{ut}{\Delta}, & x_u &= \frac{\rho t}{\Delta}, \\ t &= t(\rho, u), & t_\rho &= \frac{ux}{\Delta}, & t_u &= -\frac{\rho x}{\Delta}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\Delta = \rho_t u_x - \rho_x u_t \neq 0$$

может быть линеаризована [50; 63] и записана в виде системы

$$x_u - ut_u + \rho t_\rho = 0,$$

$$x_\rho + t_u - ut_\rho = 0.$$

В случае произвольной функции $h = h(x)$ уравнения (5.1), (5.2) допускают единственную симметрию

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Для уравнений (5.1), (5.2) введем потенциал:

$$u = w_x.$$

Тогда

$$w_{tx} + w_x w_{xx} + \eta_x = 0,$$

или

$$D_x[w_t + \frac{w_x^2}{2} + \eta] = 0.$$

В результате интегрирования получим

$$[w_t + \frac{w_x^2}{2} + \eta] = K(t), \quad (5.4)$$

где $K(t)$ — произвольная функция, которую заменой переменных можно свести к нулю. Уравнение (5.4) при $K = 0$ дает

$$\eta = -w_t - \frac{w_x^2}{2}.$$

Подставляя последнее в (5.1), получим

$$-w_{tt} - 2w_x w_{tx} + w_{xx} \left(h(x) - w_t - \frac{3}{2}w_x^2 \right) + h_x w_x = 0. \quad (5.5)$$

Последнее уравнение обладает следующими симметриями:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial w}.$$

Уравнение (5.5) является уравнением Эйлера–Лагранжа для следующего лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \frac{w_t^2}{2} - h(x) \frac{w_x^2}{2} + \frac{w_x^4}{8} + w_t \frac{w_x^2}{2}.$$

Это дает возможность получить законы сохранения с помощью теоремы Нётер.

Симметрии

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$$

соответствует следующий закон сохранения

$$\begin{aligned} D_t \left[\frac{w_t^2}{2} - h(x) \frac{w_x^2}{2} + \frac{w_x^4}{8} \right] - D_x \left[-w_t(-h(x)w_x + \frac{w_x^3}{2} + w_t w_x) \right] = \\ = w_t(-w_{tt} - 2w_x w_{tx} + w_{xx} \left(h(x) - w_t - \frac{3}{2}w_x^2 \right) + h_x w_x) = 0. \end{aligned}$$

С помощью подстановки

$$w_x = u, \quad w_t = -\eta - \frac{u^2}{2},$$

вернемся к эйлеровым координатам. Тогда

$$\begin{aligned} D_t \left[-\frac{1}{2}(\eta + \frac{u^2}{2})^2 - h(x) \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{8} \right] + D_x \left[(\eta + \frac{u^2}{2})(-h(x)u + \frac{u^3}{2} - u(\eta + \frac{u^2}{2})) \right] = \\ -\frac{1}{2} \{ D_t [u^2(\eta + h) + \eta^2] + D_x [u(\eta + h(x))(u^2 + 2\eta)] \} = \\ = - \left(\eta + \frac{u^2}{2} \right) (\eta_t + ((\eta + h(x))u)_x) - u(\eta + h(x))(u_t + uu_x + \eta_x) = 0. \end{aligned}$$

Последний закон сохранения существует при произвольной функции $h(x)$ и совпадает с законом сохранения, полученным прямыми вычислениями в [144].

Симметрии

$$X_w = \frac{\partial}{\partial w}$$

соответствует следующий закон сохранения

$$\begin{aligned} D_t \left[w_t + \frac{w_x^2}{2} \right] + D_x \left[-h(x)w_x + \frac{w_x^3}{2} + w_t w_x \right] = \\ = -(-w_{tt} - 2w_x w_{tx} + w_{xx} \left(h(x) - w_t - \frac{3}{2}w_x^2 \right) + h_x w_x) = 0. \end{aligned}$$

Переходя к координатам Эйлера, получаем просто одно из исходных уравнений

$$\begin{aligned} D_t [-\eta] + D_x \left[-h(x)u + \frac{u^3}{2} - u(\eta + \frac{u^2}{2}) \right] = \\ = -(\eta_t + ((\eta + h)u)_x) = 0. \end{aligned}$$

5.1.2 Лагранжевы массовые координаты

Введем следующий оператор дифференцирования по времени в координатах Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} = D_t + uD_x.$$

Этот оператор не коммутирует с оператором D_x :

$$\left[\frac{d}{dt}, D_x \right] \neq 0.$$

Помимо оператора $\frac{d}{dt}$ введем две переменные — «плотность» ρ

$$\rho = h + \eta,$$

и новую независимую (массовую) координату s — с помощью касательного преобразования

$$ds = \rho dx - \rho u dt,$$

где ds — полная дифференциальная форма, т. е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x},$$

что эквивалентно уравнению

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0.$$

Вследствие замены также получают следующие соотношения:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = -\rho u.$$

Введем теперь оператор полного дифференцирования по переменной s следующим образом:

$$D_s = \frac{1}{\rho} D_x.$$

Операторы $\frac{d}{dt}$ и D_s коммутируют на решениях системы (5.1), (5.2):

$$\left[\frac{d}{dt}, D_s \right] = \left[D_t + uD_x, \frac{1}{\rho} D_x \right] = -\frac{1}{\rho^2} (\rho_t + (\rho u)_x),$$

где последнее выражение обращается в ноль на решениях (5.1).

Итак, мы имеем следующую замену переменных:

$$u(t,x) = u(t,s), \quad \rho(t,s) = h(x) + \eta(t,x),$$

$$\frac{du}{dt} = u_t + uu_x, \quad \frac{d\rho}{dt} = \eta_t + u(h + \eta)_x,$$

$$u_x = \rho u_s, \quad \rho_x = \rho \rho_s, \quad ds = \rho dx - \rho u dt, \quad t = t.$$

Теперь исходную систему можно записать в лагранжевых массовых координатах (t,s,u,ρ) :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) - u_s = 0, \quad (5.6)$$

$$\frac{du}{dt} + \rho(\rho - h)_s = 0. \quad (5.7)$$

Эта система допускает следующие симметрии:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial s}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial u}.$$

В случае плоского дна в массовых координатах так же существует преобразование годографа

$$\rho_s = \frac{t_u}{\Delta}, \quad \rho_t = -\frac{s_u}{\Delta}, \quad u_s = -\frac{t_\rho}{\Delta}, \quad u_t = \frac{s_\rho}{\Delta}, \quad \Delta = s_\rho t_u - s_u t_\rho,$$

аналогичное (5.3), линеаризующее систему (5.6),(5.7):

$$s_u + \rho^2 t_\rho = 0,$$

$$s_\rho + \rho t_u = 0.$$

5.2 Уравнения мелкой воды в потенциальных координатах Лагранжа

В этом разделе отдельно рассмотрены случаи произвольного и линейного дна.

5.2.1 Случай мелкой воды с произвольным дном

Рассмотрим потенциальную функцию x , определяемую уравнением

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{\rho}. \quad (5.8)$$

Уравнение неразрывности (5.6) принимает элементарный вид¹

$$x_{ts} = x_{st}, \quad (5.9)$$

а уравнение (5.7) записывается следующим образом

$$x_{tt} - \frac{x_{ss}}{x_s^3} - h_x = 0. \quad (5.10)$$

Замечание 5.2.1. Уравнение (5.10) соответствует одномерным уравнениям газовой динамики в случае политропного газа при показателе адиабаты $\gamma = 2$. В этом случае к уравнениям газовой динамики добавляется уравнение состояния

$$p = A\rho^\gamma,$$

где p — давление, и A — константа. Для получения уравнений мелкой воды следует положить $\gamma = 2$ и $A = \frac{1}{2}$ (см., например, [63]):

$$p = \frac{1}{2}\rho^2, \quad (5.11)$$

что позволяет переписать систему (5.6), (5.7) в альтернативной форме

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho}\right)_t - u_s &= 0, \\ u_t + p_s &= h_x. \end{aligned} \quad (5.12)$$

При построении разностных схем уравнение (5.11) будем аппроксимировать с тем же порядком, что и остальные дифференциальные уравнения (впервые эта идея была высказана в работах [145; 146]).

Уравнение (5.10) допускает две симметрии:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{и} \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial s}$$

и является уравнением Эйлера–Лагранжа для следующего лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \frac{x_t^2}{2} - \frac{1}{2x_s} + h(x).$$

С помощью теоремы Нётер можно получить законы сохранения уравнения (5.10). Рассмотрим случай произвольной функции $h = h(x)$.

¹Здесь и далее, если не указано специально, производная по t означает производную в координатах Лагранжа.

$$1. X_1 = \frac{\partial}{\partial t} :$$

$$D_t \left[\frac{1}{2x_s} + \frac{x_t^2}{2} - h(x) \right] + D_s \left[\frac{x_t}{2x_s^2} \right] = x_t \left\{ x_{tt} - \frac{x_{ss}}{x_s^3} - h_x \right\} = 0. \quad (5.13)$$

$$2. X_2 = \frac{\partial}{\partial s} :$$

$$D_t [x_t x_s] + D_s \left[\frac{1}{x_s} - \frac{x_t^2}{2} - h(x) \right] = x_s \left\{ x_{tt} - \frac{x_{ss}}{x_s^3} - h_x \right\} = 0. \quad (5.14)$$

С помощью касательных преобразований (5.8) перепишем полученные законы сохранения системы (5.6), (5.7) в лагранжевых массовых координатах.

$$1. X_1 = \frac{\partial}{\partial t} :$$

$$D_t \left[\frac{u^2 + \rho}{2} - h(x) \right] + D_s \left[\frac{\rho^2 u}{2} \right] = 0.$$

$$2. X_2 = \frac{\partial}{\partial s} :$$

$$D_t \left[\frac{u}{\rho} \right] + D_s \left[\rho - \frac{u^2}{2} - h(x) \right] = 0.$$

Сравнивая законы сохранения в различных координатах, следует иметь в виду, что:

$$dh = h'(x)dx = h' \left(udt + \frac{ds}{\rho} \right).$$

Перепишем полученные законы сохранения в координатах Эйлера. Первый из них принимает вид

$$D_t^e \left[\rho \left(\frac{u^2 + \rho}{2} - h(x) \right) \right] + D_x \left[\frac{\rho^2 u}{2} + \rho u \left(\frac{u^2 + \rho}{2} - h(x) \right) \right] = 0.$$

или

$$\rho u (u_t + uu_x + (\rho - h)_x) + (\rho_t + (\rho u)_x) \left(\rho + \frac{u^2}{2} - h \right) = 0,$$

где D_t^e обозначает полную производную в эйлеровых координатах по t .

Второй закон сохранения в координатах Эйлера переходит в закон сохранения импульса (одно из исходных уравнений):

$$D_t^e(u) + D_x \left(\rho - h + \frac{u^2}{2} \right) = 0,$$

или

$$u_t + uu_x + \eta_x = 0.$$

5.2.2 Мелкая вода с линейным дном

Рассмотрим случай линейного дна, т. е.

$$h(x) = C_1x + C_2,$$

где C_1 и C_2 — константы. Уравнение (5.7) принимает вид

$$\frac{du}{dt} + \rho(\rho - C_1x)_s = 0,$$

или, в потенциальных координатах,

$$x_{tt} - \frac{x_{ss}}{x_s^3} - C_1 = 0.$$

От константы C_1 можно избавиться с помощью преобразования

$$x = \tilde{x} + \frac{t^2}{2}C_1, \quad (5.15)$$

т. е. можно ограничиться рассмотрением случая плоского дна $h(x) = 0$ и рассматривать уравнение (символ « $\tilde{}$ » здесь и далее опускаем)

$$x_{tt} - \frac{x_{ss}}{x_s^3} = 0. \quad (5.16)$$

Уравнение (5.16) допускает следующие симметрии

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial s}, & X_3 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_4 &= t \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_5 &= 3t \frac{\partial}{\partial t} + 2x \frac{\partial}{\partial x}, & X_6 &= 3s \frac{\partial}{\partial s} + x \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.17)$$

и может быть получено как уравнение Эйлера–Лагранжа для следующей функции Лагранжа

$$\mathcal{L} = \frac{x_t^2}{2} - \frac{1}{2x_s}, \quad (5.18)$$

которая допускает симметрии X_1 – X_4 . При этом для X_4 функция Лагранжа (5.18) дивергентно-инвариантна:

$$X_4\mathcal{L} + \mathcal{L} (D_t \xi_4^t + D_s \xi_4^s) = D_t(-x).$$

С помощью теоремы Нётер можно получить следующие законы сохранения.

1. Симметрии $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ соответствует закон сохранения энергии (5.13) при $h(x) = 0$.
2. Симметрии $X_2 = \frac{\partial}{\partial s}$ соответствует закон сохранения импульса (5.14). В случае $h(x) = 0$ он получается непосредственно из уравнения (5.10).
3. Симметрии $X_3 = \frac{\partial}{\partial x}$ тоже соответствует сохранению импульса:

$$D_t(x_t) + D_s \left(\frac{1}{2} x_s^{-2} \right) = \frac{x_{ss}}{x_s^3} - x_{tt} = 0. \quad (5.19)$$

4. Симметрии $X_4 = t \frac{\partial}{\partial x}$ соответствует закон сохранения движения центра масс:

$$D_t(tx_t - x) + D_s \left(\frac{1}{2} t x_s^{-2} \right) = t \left\{ \frac{x_{ss}}{x_s^3} - x_{tt} \right\} = 0. \quad (5.20)$$

В лагранжевых массовых координатах законы сохранения (5.19) и (5.20) переходят в

$$D_t(u) + D_s \left(\frac{\rho^2}{2} \right) = 0,$$

и

$$D_t(tu - x) + D_s \left(\frac{1}{2} t \rho^2 \right) = 0.$$

В координатах Эйлера они соответственно имеют вид

$$D_t^e(\rho u) + D_x \left(\frac{\rho^2}{2} + \rho u^2 \right) = 0,$$

и

$$D_t^e(\rho(tu - x)) + D_x \left(\frac{1}{2} t \rho^2 + \rho u(tu - x) \right) = 0.$$

5.3 Инвариантные консервативные разностные схемы для уравнений мелкой воды в лагранжевых координатах

Для аппроксимации уравнения второго порядка (5.16) будем рассматривать разностные схемы на следующем 9-точечном шаблоне:

$$(\mathbf{t}, \mathbf{s}, \mathbf{x}) = (t, \check{t}, \hat{t}; s, s_-, s_+; x, x_+, x_-, \hat{x}, \hat{x}_+, \hat{x}_-, \check{x}, \check{x}_+, \check{x}_-) \quad (5.21)$$

Сетка предполагается равномерной и ортогональной:

$$h_-^s = h_+^s = h^s = \text{const}, \quad \tau_- = \tau_+ = \tau = \text{const}. \quad (5.22)$$

В координатах Лагранжа это возможно благодаря тому, что симметрии (5.17) сохраняют условия равномерности и ортогональности сетки [1; 2]:

$$D_{-\tau+\tau} D(\xi^t) = 0, \quad D_{+s-s} D(\xi^s) = 0, \quad D_{\pm s}(\xi^t) = -D_{\pm \tau}(\xi^s).$$

5.3.1 Построение инвариантной разностной схемы

Построим инвариантную разностную схему для случая плоского дна (5.16). Здесь мы рассмотрим несколько отличающийся вид уравнения (5.16), который позволяет переписать уравнение связи p и ρ (5.11) в более простом виде:

$$p = \rho^2. \quad (5.23)$$

Для этого положим $x = \alpha \tilde{x}$, где $2\alpha^3 = 1$. Тогда уравнение (5.16) принимает форму

$$x_{tt} - 2 \frac{x_{ss}}{x_s^3} = 0. \quad (5.24)$$

Будем искать инвариантную дивергентную схему, обладающую разностными аналогами локальных законов сохранения уравнения (5.24).

Нетрудно установить, что выражение

$$\frac{\tau_-^{4/3}}{(h_-^s)^{1/3} \tau_-} D(x_t)$$

допускает полный набор операторов алгебры (5.17). Поэтому далее будем искать инвариантную схему, имеющую следующую дивергентную форму:

$$\frac{\tau_-^{4/3}}{(h_-^s)^{1/3}} \left(\frac{D(x_t)}{\tau_-} + \frac{D(\Phi)}{-s} \right) = 0, \quad (5.25)$$

где Φ — некоторая функция, аппроксимирующая $D_s(1/x_s^2)$ с первым порядком точности по h и τ .

Разумно предположить, что функция Φ есть некоторое рациональное выражение вида

$$\Phi(\mathbf{x}) = 1/P_2(\mathbf{x}), \quad (5.26)$$

где $P_2 \neq 0$ — полином второго порядка, заданный в точках

$$\mathbf{x} = \{x, x^+, \hat{x}, \hat{x}^+, \check{x}, \check{x}^+\}.$$

Как видно, для того, чтобы схема допускала операторы X_1 – X_3 , функция $\Phi(\mathbf{x})$ должна зависеть от разностей

$$\begin{aligned} t_{n+p+1} - t_{n+p} &= \tau_{n+p}, & s_{m+q+1} - s_{m+q} &= h_{m+q}^s, \\ x_{m+q}^{n+p+1} - x_{m+q}^{n+p}, & x_{m+q+1}^{n+p} - x_{m+q}^{n+p}, & p, q &\in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Следовательно, полином P_2 можно искать в виде

$$P_2(\mathbf{x}) = a_{11}x_s^2 + a_{22}\hat{x}_s^2 + a_{33}\check{x}_s^2 + 2a_{12}x_s\hat{x}_s + 2a_{13}x_s\check{x}_s + 2a_{23}\hat{x}_s\check{x}_s + b_1x_s + b_2\hat{x}_s + b_3\check{x}_s + c_1, \quad (5.27)$$

где a_{ij} , b_k и c_1 — некоторые вещественные постоянные, причём не все a_{ij} равны нулю.

Схема (5.25) также должна удовлетворять инфинитезимальным критериям инвариантности:

$$X_k \left(\frac{\tau_-^{4/3}}{(h_-^s)^{1/3}} \left(D_{-\tau}(x_t) + D_{-s}(\Phi) \right) \right) \Big|_{(5.22)} = 0, \quad k = 1, \dots, 6.$$

В результате стандартных упрощений получается, что $b_1 = b_2 = b_3 = c_1 = 0$, а константы a_{ij} могут иметь произвольные значения, удовлетворяющие следующему ограничению, вытекающему из условий аппроксимации:

$$\sum_{i,j} a_{ij} = 1. \quad (5.28)$$

Выражение $D_{-s}(\Phi)$ — дивергентное. Очевидно, оно допускает интегрирующие множители 1 и t (и, вообще, произвольную функцию $f(t)$). В качестве аппроксимации для оставшегося интегрирующего множителя x_t , соответствующему закону сохранения энергии (5.13), выберем следующее разностное выражение:

$$\Lambda = \frac{x_t + \check{x}_t}{2}. \quad (5.29)$$

Согласно разностному аналогу прямого метода (напомним, что этот метод ранее был подробно рассмотрен в Главе 3), должно быть

$$\mathcal{E} \left(\Lambda \left(D_{-\tau}(x_t) + D_{-s}(\Phi) \right) \right) \Big|_{(5.22)} = 0, \quad (5.30)$$

где

$$\mathcal{E} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} S_{+\tau}^k S_{+h}^l \frac{\partial}{\partial x_{m-l}^{n-k}}$$

— разностный вариационный оператор [2].

Подставляя (5.27) и (5.29) в (5.30) и приведя получающиеся в результате рациональные выражения к общему знаменателю, получим

$$\mathcal{E} \left(\Lambda \left(\frac{D(x_t)}{-\tau} + \frac{D(\Phi)}{-s} \right) \right) \Big|_{(5.22)} = \frac{P_{54}}{P_{\dots}} = 0,$$

где P_{54} — полином степени 54, заданный на 20 точках

$$x_{m+j}^{n+i}, \quad i = -2, \dots, 2, \quad j = -1, \dots, 2,$$

а через P_{\dots} обозначен отличный от нуля полином, заданный на том же множестве точек. Вид полинома P_{\dots} в дальнейшем не представляет особого интереса — необходимо только гарантировать, чтобы он не обращался в нуль на получаемых решениях. Рассматривая коэффициенты при старших степенях P_{54} , можно получить следующее ограничение на константы:

$$a_{11}a_{22}a_{33}(a_{33} - a_{22}) = 0. \quad (5.31)$$

Выберем простейшее решение $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$. Подставляя это решение в полином P_{54} и вновь группируя коэффициенты при старших степенях полинома, получим

$$a_{13}a_{23}(a_{13} - a_{23}) = 0. \quad (5.32)$$

Полагая $a_{13} = a_{23} = 0$ приходим к следующей форме искомой функции:

$$\Phi = \frac{1}{P_2} = (a_{23}\hat{x}_s\check{x}_s)^{-1}.$$

Функция Φ удовлетворяет уравнению (5.30) при любых значения коэффициента a_{23} . Учитывая (5.28), положим $a_{23} = 1$. В результате получается следующая схема на равномерной ортогональной сетке:

$$F = x_{t\check{t}} + \frac{1}{h_{\check{s}}} \left((\hat{x}_s\check{x}_s)^{-1} - (\hat{x}_{\check{s}}\check{x}_{\check{s}})^{-1} \right) = 0, \quad (5.33)$$

$$\tau_+ = \tau_-, \quad h_+^s = h_-^s.$$

Схема (5.33) аппроксимирует уравнение (5.24) с порядком $O((h^s)^2 + \tau^2)$.

Заметим, что, хотя выбор решений (5.31), (5.32) был сделан произвольно, можно проверить, что выбор других значений констант в итоге либо вновь приводит к схеме (5.33), либо дает не представляющие интереса тривиальные решения.

Замечание 5.3.1. Можно также записать расширенный вариант схемы (5.33) в следующей, «вязкой», форме:

$$x_{t\check{t}} + \frac{1}{h_-^s} \left((\hat{x}_s \check{x}_s)^{-1} - (\hat{x}_{\bar{s}} \check{x}_{\bar{s}})^{-1} \right) + \mu \frac{\hat{x}_{s\bar{s}} + \check{x}_{s\bar{s}}}{2} = 0, \quad (5.34)$$

где $|\mu| \ll (h^s)^2$ — коэффициент вязкости.

Замечание 5.3.2. С помощью процедур, подобных описанной выше, могут быть получены схемы отличные от (5.33). Например, схема (5.34). Схема (5.34) в свою очередь может быть обобщена следующим образом. Выразим разностные производные x_t и x_s через некоторую функцию w :

$$x_t = \underset{+\tau}{D}(w(x)), \quad x_s = \underset{+s}{D}(w(x)),$$

Подставляя в (5.34), после упрощений и разложения в ряд, получим

$$w'(x_{t\check{t}} - 2x_s^{-3}x_{s\check{s}}) + w''(x_t^2 - 2x_s^2) + O(\tau^2 + h^2).$$

Откуда видно, что схема может быть представлена в следующей обобщенной форме:

$$w(x)_{t\check{t}} + \frac{1}{h_-^s} \left((w(\hat{x})_s w(\check{x})_s)^{-1} - (w(\hat{x})_{\bar{s}} w(\check{x})_{\bar{s}})^{-1} \right) + \mu \frac{w(\hat{x})_{s\bar{s}} + w(\check{x})_{s\bar{s}}}{2} = 0,$$

где

$$w(z) = \nu \varphi(z) + z + c,$$

c — константа, φ — произвольная функция, и ν — коэффициент порядка $O((h^s)^2 + \tau^2)$.

5.3.2 Выражение полученной схемы через конечно-разностные инварианты

При построении схемы (5.33) было использовано свойство инвариантности. Рассмотрим инварианты алгебры Ли операторов (5.17) в пространстве переменных (5.21). Всего существует $15 - 6 = 9$ разностных инвариантов:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{h_+^s}{h_-^s}, & I_2 &= \frac{\tau_+}{\tau_-}, \\ I_3 &= \frac{x-x_-}{\omega}, & I_4 &= \frac{x_+-x}{\omega}, & I_5 &= \frac{\check{x}_+-\check{x}}{\omega}, & I_6 &= \frac{\check{x}-\check{x}_-}{\omega}, \\ I_7 &= \frac{\tau_+(x-\check{x})+\tau_-(x-\hat{x})}{\omega\tau_-}, & I_8 &= \frac{\tau_+(x-\check{x})+\tau_-(x-\hat{x}_+)}{\omega\tau_-}, \\ I_9 &= \frac{\tau_+(x-\check{x})+\tau_-(x-\hat{x}_-)}{\omega\tau_-}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

где обозначено

$$\omega^3 = \tau_-^2 h_-^s, \quad h_+^s = s_+ - s, \quad h_-^s = s - s_-.$$

Схема (5.33) инвариантна к действию всей 6-параметрической группы (5.17):

$$X_i F|_{(5.22),(5.25)} = 0, \quad i = 1, \dots, 6.$$

Таким образом, она может быть записана в инвариантах (5.35):

$$\begin{aligned} & \frac{(\tau_-)^{4/3}}{(h_-^s)^{1/3}} \left(x_{t\check{t}} + D_{-s} \left((\hat{x}_s \check{x}_s)^{-1} \right) \right) \\ &= \frac{I_2 - I_6 I_7 (I_7 - I_9)}{I_2 I_6 (I_7 - I_9)} + \frac{(I_1)^2}{I_5 (I_7 - I_8)} = 0, \\ & I_1 = 1, \quad I_2 = 1. \end{aligned}$$

Замечание 5.3.3. Схема с вязкостью (5.34) также может быть записана в инвариантах:

$$\begin{aligned} & \frac{I_2 - I_6 I_7 (I_7 - I_9)}{I_2 I_6 (I_7 - I_9)} + \frac{(I_1)^2}{I_5 (I_7 - I_8)} + \frac{\mu \alpha^2}{2} \left(\frac{I_5 + I_7 - I_8}{I_1} + I_7 - I_9 - I_6 \right) = 0, \\ & I_1 = 1, \quad I_2 = 1, \end{aligned}$$

где $\alpha = \tau_- / h_-^s$ (величину α на регулярной сетке можно считать постоянной).

5.3.3 Локальные законы сохранения полученной схемы в потенциальных координатах

В разделе 5.3.1 было установлено, что схема (5.33) обладает следующим набором интегрирующих множителей:

$$\Lambda_1 = 1, \quad \Lambda_2 = t, \quad \Lambda_3 = \frac{x_t + \check{x}_t}{2}, \quad (5.36)$$

где последний множитель был задан формулой (5.29). С помощью множителей (5.36) могут быть найдены следующие законы сохранения схемы (5.33) в потенциальных координатах.

1. Количество вещества

$$D_{-\tau}(\hat{x}_s) - D_{-s}(x_t^+) = 0, \quad (5.37)$$

которое является разностным аналогом соотношения (5.9).

2. Закон сохранения импульса

$$\Lambda_1 = 1, \quad D_{-\tau}(x_t) + D_{-s}((\hat{x}_s \check{x}_s)^{-1}) = 0,$$

соответствующий (5.19).

3. Закон сохранения движения центра масс

$$\Lambda_2 = t, \quad D_{-\tau}(tx_t - x) + D_{-s}(t(\hat{x}_s \check{x}_s)^{-1}) = 0,$$

соответствующий (5.20).

4. Сохранение энергии

$$\Lambda_3 = \frac{x_t + \check{x}_t}{2}, \quad \frac{1}{2} D_{-\tau}(x_t^2 + x_s^{-1} + \hat{x}_s^{-1}) + \frac{1}{2} D_{-s}((x_t^+ + \check{x}_t^+)(\hat{x}_s \check{x}_s)^{-1}) = 0,$$

соответствующее (5.13).

Замечание 5.3.4. Для расширенной схемы (5.34) законы сохранения можно записать следующим образом.

1. Импульс:

$$D_{-\tau}(x_t) + D_{-s}\left((\hat{x}_s \check{x}_s)^{-1} + \mu \frac{\hat{x}_s + \check{x}_s}{2}\right) = 0.$$

2. Движение центра масс:

$$D_{-\tau}(tx_t - x) + D_{-s}\left(t(\hat{x}_s \check{x}_s)^{-1} + t\mu \frac{\hat{x}_s + \check{x}_s}{2}\right) = 0.$$

3. Энергия:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} D_{-\tau}(x_t^2 + x_s^{-1} + \hat{x}_s^{-1} + \mu\tau (xx_+ + \hat{x}\hat{x}_+ - 2(x^2 + \hat{x}^2))) \\ & + \frac{1}{2} D_{-s}((x_t^+ + \check{x}_t^+)(\hat{x}_s \check{x}_s)^{-1} + \mu h^s (\hat{x}\check{x}_+ - \check{x}\hat{x}_+)) = 0. \end{aligned}$$

Сделаем важное уточнение. Во всех приводимых здесь и далее примерах законы сохранения записываются в дивергентной (локальной) форме. Законы сохранения, представленные в дивергентной форме (в частности, получаемые с

помощью теоремы Нётер) сами по себе не несут никакой информации о том, каким именно обобщенным решениям (в том числе и каким интегральным законам сохранения) они соответствуют. Поэтому требовать от таких законов сохранения сходимости к каким-либо обобщенным решениям на сильных разрывах не следует [91]. Учитывая это, далее мы ограничиваемся рассмотрением законов сохранения, не содержащих сильных разрывов (преимущественно на гладких решениях).

5.3.4 Инвариантные схемы и их локальные законы сохранения в лагранжевых массовых координатах

В данном разделе, с помощью преобразований вида (5.8), получены две инвариантные консервативные разностные схемы в массовых координатах Лагранжа, соответствующие схеме (5.33). Используя в точности преобразование (5.8), можно получить лишь схему, заданную на трех временных слоях. Это первая из представленных ниже схем. Вторая схема определяется на двух временных слоях с помощью более сложного разностного аналога преобразования (5.8) и записывается в виде трех уравнений.

Трехслойная схема

Воспользуемся следующим разностным аналогом преобразования (5.8):

$$x_t = u, \quad x_s = \rho^{-1}. \quad (5.38)$$

Схема (5.33) принимает вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho}\right)_t &= u_s, \\ D_{-\tau}(u) + D_{-s}(\hat{\rho}\check{\rho}) &= 0, \\ h_+^s &= h_-^s, \quad \tau_+ = \tau_-. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Эта схема определяется на разностном шаблоне, представленном на Рис. 5.1.

Замечание 5.3.5. Напомним, что в случае мелкой воды с плоским дном переменная ρ уже имеет физическое значение не плотности, а высоты столбца жидкости (от дна до свободной поверхности).

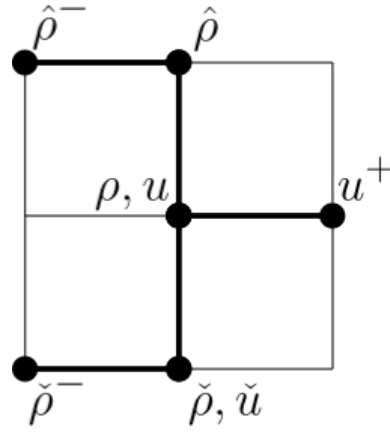


Рисунок 5.1 — Разностный шаблон для трехслойной схемы

С помощью заданного в одной точке разностного соотношения

$$p = \rho^2, \quad (5.40)$$

соответствующего преобразованию (5.23), схема (5.39) может быть записана в форме

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho}\right)_t &= u_s, \\ D_{-\tau}(u) + D_{-s}(\sqrt{\hat{p}\check{p}}) &= 0, \\ h_+^s &= h_-^s, \quad \tau_+ = \tau_-. \end{aligned}$$

Последняя схема обладает следующими законами сохранения.

1. Количество вещества:

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_t = u_s,$$

2. Сохранение импульса:

$$\Lambda = 1, \quad D_{-\tau}(u) + D_{-s}(\hat{\rho}\check{\rho}) = D_{-\tau}(u) + D_{-s}(\sqrt{\hat{p}\check{p}}) = 0.$$

3. Движение центра масс:

$$\Lambda = t, \quad D_{-\tau}(tu - x) + D_{-s}(t\hat{\rho}\check{\rho}) = D_{-\tau}(tu - x) + D_{-s}(t\sqrt{\hat{p}\check{p}}) = 0.$$

4. Сохранение энергии:

$$\Lambda = \frac{u + \check{u}}{2}, \quad \frac{1}{2}D_{-\tau}\left(u^2 + \frac{p}{\rho} + \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}}\right) + \frac{1}{2}D_{-s}\left((u^+ + \check{u}^+)\sqrt{\hat{p}\check{p}}\right) = 0.$$

Двухслойная схема

Использование неточечной замены (5.38) (разностный аналог контактного преобразования) и уравнения состояния (5.40) приводит к необходимости работать с трехслойной схемой, что на практике порождает определенные трудности. Покажем, что подобающим выбором разностной замены переменных и уравнения состояния можно получить двухслойную схему. Вместо замены (5.38) используем замену

$$\check{x}_s + x_s = \frac{2}{\check{\rho}}, \quad x_t = u, \quad (5.41)$$

и воспользуемся следующим неявным разностным аналогом уравнения (5.23)

$$\frac{1}{\sqrt{\check{p}}} + \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{2}{\check{\rho}} \quad \text{или} \quad x_s = \frac{1}{\sqrt{p}}. \quad (5.42)$$

В этом случае схема (5.39) будет иметь вид

$$\begin{aligned} D_{-\tau} \left(\frac{1}{\rho} \right) - D_{-s} \left(\frac{u^+ + \check{u}^+}{2} \right) &= 0, \\ D_{-\tau}(u) + D_{-s}(Q) &= 0, \\ h_+^s &= h_-^s, \quad \tau_+ = \tau_-, \end{aligned} \quad (5.43)$$

где

$$\frac{1}{Q} = \frac{4}{\rho\check{\rho}} - \frac{2}{\sqrt{p}} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\check{\rho}} \right) + \frac{1}{p}. \quad (5.44)$$

Здесь и схема, и уравнение состояния записаны на *двух* временных слоях с помощью трех уравнений (5.43), (5.42). Соответствующий разностный шаблон представлен на Рис. 5.2. Схема (5.43) аппроксимирует дифференциальную систему уравнений мелкой воды с порядком $O(h + \tau)$.

Законы сохранения схемы (5.43) имеют следующий вид.

1. Количество вещества²:

$$D_{-\tau} \left(\frac{1}{\rho} \right) - D_{-s} \left(\frac{u^+ + \check{u}^+}{2} \right) = 0.$$

²Чтобы получить этот закон сохранения, следует сначала переписать (5.37) в виде

$$D_{-\tau}(\hat{x}_s + x_s) - D_{-s}(x_t^+ + \check{x}_t^+) = 0.$$

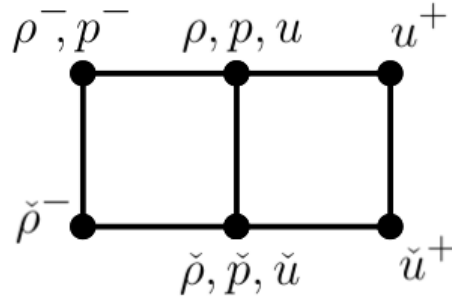


Рисунок 5.2 — Разностный шаблон для двухслойной схемы

2. Импульс:

$$\Lambda = 1, \quad D_{-\tau}(u) + D_{-s}(Q) = 0.$$

3. Движение центра масс:

$$\Lambda = t, \quad D_{-\tau}(tu - x) + D_{-s}(tQ) = 0.$$

4. Энергия:

$$\Lambda = \frac{u + \check{u}}{2}, \quad D_{-\tau} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{2\sqrt{p} - \rho} \right) + D_{-s} \left(\frac{u^+ + \check{u}^+}{2} Q \right) = 0.$$

Замечание 5.3.6. Слагаемое $0.5\mu(\hat{x}_{s\bar{s}} + \check{x}_{s\bar{s}})$, входящее в схему (5.34), принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{h^s} D_{-s} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\check{\rho}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \right) &= \left(\frac{p_s}{2p^{3/2}} - \frac{2\rho_s}{\rho^2} \right) \mu h^s + O(\mu h^s (h^s + \tau)) \\ &= \left(\frac{1}{\rho} \right)_s \mu h^s + O(\mu h^s (h^s + \tau)). \end{aligned}$$

Здесь учтено уравнение (5.23).

5.3.5 Схемы для случая мелкой воды с произвольным дном

В этом случае уравнение (5.24) принимает вид

$$x_{tt} - 2 \frac{x_{ss}}{x_s^3} - H'(x) = 0, \quad (5.45)$$

где через $H(x)$ обозначена функция, описывающая профиль дна.

Случай $H'(x) \neq 0$.

В случае произвольного дна, когда вид функции H не определен, схема для уравнения (5.45) перестает быть дивергентной, и степень ее инвариантности уже зависит от конкретного вида функции H . Схема для случая плоского

дна (5.33) обобщается до следующего вида:

$$x_{t\check{t}} + \frac{1}{h_{\check{s}}^s} \left((\hat{x}_s \check{x}_s)^{-1} - (\hat{x}_{\check{s}} \check{x}_{\check{s}})^{-1} \right) - \frac{\frac{DH(x) + D H(x)}{-\tau} + \frac{DH(x)}{+\tau}}{x_t + \check{x}_t} = 0, \quad (5.46)$$

$$\tau_+ = \tau_-, \quad h_+^s = h_-^s,$$

где

$$\frac{\frac{DH(x) + D H(x)}{-\tau} + \frac{DH(x)}{+\tau}}{x_t + \check{x}_t} = \frac{2}{x_t + \check{x}_t} \left[\frac{\frac{DH(x) + D H(x)}{-\tau} + \frac{DH(x)}{+\tau}}{2} \right] \sim \frac{1}{x_t'} [H'_x x_t'] \sim H'(x).$$

Схема (5.46), кроме закона сохранения массы, обладает также законом сохранения энергии:

$$\frac{D}{-\tau} (x_t^2 + x_s^{-1} + \hat{x}_s^{-1} - H(x) - H(\hat{x})) + \frac{D}{-s} ((x_t^+ + \check{x}_t^+) (\hat{x}_s \check{x}_s)^{-1}) = 0.$$

С помощью преобразований (5.41) и (5.42) последний закон сохранения может быть записан в массовых координатах Лагранжа:

$$\frac{D}{-\tau} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{2\sqrt{p} - \rho} - \frac{H(x) + H(x + \tau u)}{2} \right) + \frac{D}{-s} \left(\frac{u^+ + \check{u}^+}{2} Q \right) = 0,$$

где Q дается формулой (5.44).

Случай $H'(x) = \text{const}$ (линейное дно).

Здесь функция H имеет вид $H(x) = C_1 x + C_2$, и схема (5.46) принимает форму

$$x_{t\check{t}} + \frac{1}{h_{\check{s}}^s} \left((\hat{x}_s \check{x}_s)^{-1} - (\hat{x}_{\check{s}} \check{x}_{\check{s}})^{-1} \right) - C_1 = 0,$$

$$\tau_+ = \tau_-, \quad h_+^s = h_-^s.$$

При $C_1 = 0$ (плоское дно), все результаты для последней схемы совпадают с приведенными в разделе 5.3.2.

В случае $C_1 \neq 0$ уравнение допускает 6-параметрическую группу преобразований (5.17). От случая линейного дна к случаю плоского дна можно перейти заменой

$$x = \tilde{x} + \frac{C_1}{2} t\check{t},$$

которая представляет собой разностный аналог замены (5.15).

5.4 Сравнительный анализ некоторых разностных схем для уравнений мелкой воды

В публикациях [73] и [147] была произведена численная реализация инвариантной разностной схемы (5.33) в лагранжевых массовых координатах. Был рассмотрен набор тестовых задач и осуществлен контроль законов сохранения на соответствующих решениях. Поскольку рассматриваемые законы сохранения схемы (5.33) — локальные, то они гарантированно справедливы лишь на гладких решениях, и именно гладкие решения рассматриваются в [73]. В работе [147] рассмотрены разрывные решения, и в этом случае используется версия схемы с линейно–квадратичной псевдовязкостью, сглаживающей решения вблизи разрывов. Во втором случае, вследствие применения псевдовязкости, информация о точном решении в некоторой окрестности разрыва теряется необратимо. Здесь мы ограничимся рассмотрением лишь некоторых из числа приведенных в [73] достаточно гладких точных решений.

Для сравнения далее рассмотрим следующие разностные схемы:

- (а) Инвариантную схему (5.43), (5.42), полученную ранее.
- (б) Полностью консервативную схему Самарского–Попова уравнений газовой динамики [4], адаптированную под уравнения мелкой воды.
- (с) Явную разностную схему, представляющую собой простую разностную аппроксимацию системы уравнений мелкой воды.

Все схемы рассматриваются на равномерных ортогональных сетках и только для случая плоского дна ($h(x) = 0$).

Рассмотрим последние две схемы подробнее.

(б) Модифицированная схема Самарского–Попова. Одна из неявных полностью консервативных схем, построенных в [4], для одномерных уравнений газовой динамики, может быть следующим образом модифицирована для случая уравнений мелкой воды:

$$u_t + \hat{p}_s = 0, \quad \frac{1}{\rho} = x_s, \tag{5.47}$$

$$x_t = \frac{\hat{u} + u}{2}, \quad p = \rho^2.$$

В состав оригинальной схемы Самарского–Попова для одномерных уравнений газовой динамики входит также закон сохранения энергии

$$D_{+\tau} \left(\varepsilon + \frac{u_+^2}{2} \right) + D_{+s} \left(\frac{(u+\hat{u})(p+\hat{p})}{4} \right) = 0, \quad (5.48)$$

где внутренняя энергия среды ε определяется из уравнения

$$\varepsilon_t = -\hat{p} \left(\frac{1}{\rho} \right)_t, \quad (5.49)$$

связывающего изменение внутренней энергии с работой сил давления.

Уравнение энергии (5.48) в случае мелкой воды, в отличие от оригинальной схемы для уравнений газовой динамики, уже непосредственно не следует из системы (5.47) и частью схемы не является. Уравнение (5.48) можно, с учетом (5.49), записать как

$$\frac{\hat{u}_+ + u_+}{2} (u_t^+ + \hat{p}_s) - \hat{p} \left(\left(\frac{1}{\rho} \right)_t - \frac{1}{2} (\hat{u} + u)_s \right) - \frac{1}{4} ((u + \hat{u})p_t)_s \tau = 0, \quad (5.50)$$

откуда видно, что (5.48) на решениях системы (5.47) не выполняется и не является законом сохранения этой системы. Тем не менее, далее мы будем использовать уравнения (5.48), (5.49) при численных расчетах для контроля сохранения полной энергии на решениях системы.

(с) Простая явная схема. Рассмотрим следующую простую дивергентную аппроксимацию уравнения (5.12):

$$\left(\frac{1}{\rho} \right)_t - u_s = 0, \quad u_t + p_{\bar{s}} = 0, \quad p = \rho \hat{\rho}. \quad (5.51)$$

Первые два уравнения схемы представляют собой законы сохранения массы и импульса соответственно. Кроме того, для схемы можно записать закон сохранения движения центра масс:

$$D_{+\tau}(\check{t}u - x) + D_{+s}(tp) = 0.$$

Закон сохранения энергии для схемы (5.51) не выполняется: видно, что его разностный аналог можно записать лишь с невязкой, пропорциональной величине временного слоя τ :

$$\begin{aligned} & D_{+\tau} \left(\frac{u^2}{2} + \rho \right) + D_{+s} (u\rho^- \hat{\rho}^-) = \\ & = u \left(D_{+\tau}(u) + D_{+s}(\rho^- \hat{\rho}^-) \right) - \rho \hat{\rho} \left(D_{+\tau} \left(\frac{1}{\rho} \right) - D_{+s}(u) \right) + \frac{1}{2} u_t^2 \tau. \end{aligned}$$

Данная схема служит примером того, что обычно достаточно трудно подобрать аппроксимацию системы уравнений, обладающую всеми разностными аналогами законов сохранения, не руководствуясь какими-либо критериями построения и отбора схем (инвариантность, полная консервативность и т. п.).

Рассмотрим некоторые точные решения одномерных уравнений мелкой воды, не содержащие сильных разрывов.

1. Известное автомодельное решение задачи об извлечении поршня с постоянной скоростью из среды, имеющей начальные значения параметров u_0 , ρ_0 , приводится, например, в [4]. В результате образуется простая волна разрежения, которая соединяется с двумя тривиальными постоянными решениями. В случае одномерной мелкой воды параметры в области волны разрежения определяются по формулам

$$\rho(s) = \rho_0(s/s_0)^{\frac{2}{3}}, \quad u(s) = 2c_0 \left((s/s_0)^{\frac{1}{3}} - 1 \right), \quad (5.52)$$

где $s_0 = c_0 \rho_0$ и $c_0^2 = 2\rho_0$.

2. Инвариантное решение, соответствующее подалгебре X_6 алгебры (5.17) в массовых координатах Лагранжа имеет представление [107]

$$x = s^{1/3}\psi, \quad \rho = 1/x_s = 3s^{2/3}/\psi, \quad u = x_t = s^{1/3}\psi', \quad (5.53)$$

где функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет уравнению движения частицы в потенциальном поле [148]

$$\psi''\psi^2 + 12 = 0. \quad (5.54)$$

Последнее уравнение может быть линеаризовано с помощью касательного преобразования (см. подробности в [148]), но его общее решение через элементарные функции не выражается. Также для уравнения (5.54) известен первый интеграл

$$\psi'^2 - 24\psi^{-1} = \text{const}$$

и следующее частное решение [148; 149]:

$$\psi(t) = (54t^2)^{1/3}.$$

Заметим, что при постоянном значении t выражения (5.53) для ρ и u несложными преобразованиями сводятся к (5.52) и, таким образом, в каждый фиксированный момент времени $t > 0$ приведенное решение описывает некоторую волну разрежения или сжатия.

3. Физический смысл последнего рассматриваемого здесь инвариантного решения [107] не столь очевиден, и соответствующее ему дифференциальное уравнение в элементарных функциях не интегрируются. Тем не менее, решение представляют интерес с точки зрения численного анализа разностных схем. Инвариантное решение, которое соответствует подалгебре $X_1 + X_6$, имеет представление

$$x = e^t \psi, \quad \rho = e^{2t} / \psi', \quad u = e^{-2t} (\psi e^{3t} - 3s \psi'),$$

где функция $\psi = \psi(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\psi''(2 - 9\psi'^3 y^2) - \psi'(3\psi' y + \psi) = 0, \quad y = se^{-3t}.$$

Начальные данные для численных расчетов и графики полученных решений для перечисленных схем вынесены в Приложение В. Здесь же проведем анализ полученных результатов.

Рассмотрим графики контроля законов сохранения для задачи о волне разрежения, приведенные на рис. В.4. Вблизи начала координат для инвариантной схемы наблюдается небольшой энтропийный след, но дальше осцилляции, в отличие от остальных схем, не распространяются, и законы сохранения энергии и импульса выполняются на решениях с высокой степенью точности. Та же ситуация наблюдается и на рис. В.6, т. е. для первой и третьей тестовых задач вблизи начала координат происходит резкий скачок скорости u .

Анализируя перечисленные графики, можно в целом сказать, что на решениях, не содержащих сильных разрывов, инвариантная схема (5.33) дает результаты, очень близкие к результатам, получаемым по схеме Самарского–Попова, и при этом ощутимо превосходит явную схему (5.51), особенно при контроле закона сохранения энергии на решениях.

5.5 Программный комплекс Schemelib

Для осуществления расчётов по конечно-разностным схемам (в том числе схемам, рассматриваемым в настоящей главе) и для графического отображения полученных результатов был разработан программный комплекс Schemelib. Комплекс Schemelib позволяет эффективно производить численные расчеты по разностным схемам для одномерным уравнений газовой динамики и уравнений мелкой воды, содержит стандартный набор тестовых заданий и позволяет

добавлять новые тестовые задания, точные решения, отображать численные результаты и сопоставлять результаты, полученные для различных схем.

При разработке комплекса были поставлены и решены следующие задачи:

- комплекс должен содержать базовый набор стандартных схем, тестовых задач и точных решений;
- пользователь должен иметь возможность без труда добавлять новые схемы, тестовые задания и точные решения;
- при тестировании необходима возможность группировать тестовые задания и схемы по различным признакам (например, рассматривать только схемы для уравнений мелкой воды);
- необходима возможность сопоставлять результаты численных расчетов для различных схем;
- необходима возможность экспортировать результаты расчетов в различные форматы³, удобные для публикации как в документах формата PDF (векторная графика), так и для размещения на веб-страницах (растровая графика со сжатием), в том числе в виде анимаций в формате GIF или видео-роликов (в формате MP4);
- работа должна вестись на современном и эффективном языке программирования высокого уровня;
- необходима возможность экспортировать результаты в форматы, пригодные для работы в системах компьютерной алгебры с возможностью проведения символических вычислений (например, Maple [151]).

Общая структура разработанного комплекса, решающего перечисленные задачи, схематически изображена на Рис. 5.3.

В основе комплекса Schemelib лежит модуль, разработанный на высокоуровневом языке программирования Python [152] с помощью библиотеки NumPy [153], предназначенной для научных вычислений, и библиотеки Matplotlib [154] визуализации данных. Библиотека NumPy содержит множество готовых структур данных и алгоритмов, удобных для работы с большими наборами данных, представимыми в виде векторов и матриц, в том числе для работы с разреженными матрицами.

³Краткое описание различных форматов файлов, встречающихся далее, можно найти, например, на ресурсе [150].

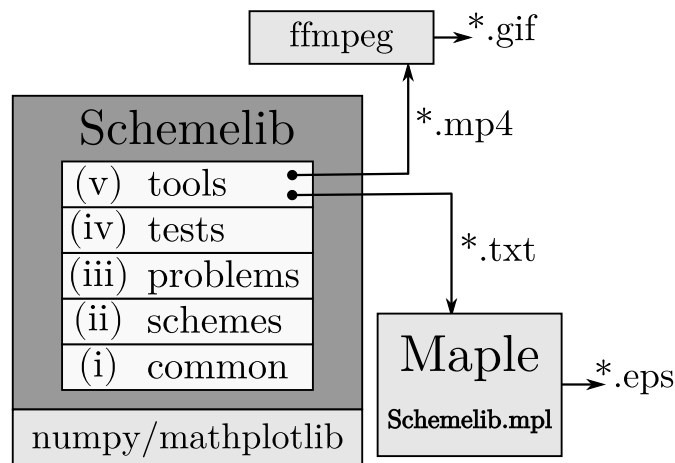


Рисунок 5.3 — Структура программного комплекса Schemelib

Основной модуль Schemelib может быть условно представлен в виде стека, состоящего из следующих пяти программных «слоев» (каждый слой использует в своей реализации нижележащие слои и не затрагивает вышележащие):

- (i) Слой *common* содержит низкоуровневые структуры данных, алгоритмы и утилиты для эффективной работы с конечно-разностными схемами на базе массивов NumPy, а также различные вспомогательные функции и классы.
- (ii) Слой *schemes* содержит набор реализаций стандартных базовых явных и неявных конечно-разностных схем для уравнений одномерной газовой динамики и уравнений мелкой воды. Этот набор может быть расширен пользователем.
- (iii) Слой *problems* включает в себя точные решения для различных тестовых задач и некоторый вспомогательный функционал. Пользователь может добавлять новые точные решения самостоятельно.
- (iv) Слой *test* включает набор стандартных тестовых заданий, которые формируются с помощью точных решений из слоя *problems*. Тестовые задания рассчитываются по схемам из слоя *schemes*. Именно со слоем *test* большую часть времени работает пользователь, используя стандартные задания или формируя собственные на базе уже имеющихся.
- (v) Вспомогательный слой *tools* применяется для графического отображения результатов расчетов, а также с целью экспорта данных в различные форматы, подходящие для публикации результатов рас-

четов или же пригодные для дальнейшей работы с результатами в системах компьютерной алгебры.

Второй модуль, `Schemelib.mpl`, реализован в виде пакета системы Maple и используется в Maple для импорта данных, экспортированных с помощью функций слоя `tools` (в текстовом формате TXT). В первую очередь это удобно для более тонкой работы с графиками решений тестовых задач. Кроме того, с помощью Maple удобно переводить данные в векторные форматы, например в формат EPS.

Ещё один вспомогательный модуль позволяет, используя системную утилиту `ffmpeg` [155], представлять результаты расчетов в виде анимаций формата GIF.

Детали реализации модулей `Schemelib` и примеры применения комплекса приведены в Приложении Д. Множество примеров практического применения `Schemelib` можно найти на веб-сайте автора [156].

5.6 Заключительные замечания

В главе были рассмотрены уравнения мелкой воды в случаях произвольного, линейного и плоского дна в эйлеровых, потенциальных и массовых лагранжевых координатах. Была построена инвариантная консервативная разностная схема для уравнений мелкой воды с плоским дном в лагранжевых потенциальных и массовых координатах, обладающая локальными законами сохранения энергии, количества вещества, импульса и движения центра масс. В отличие от ранее построенных инвариантных схем [56], приведенная схема обладает всеми (локальными) законами сохранения и задается на равномерной ортогональной сетке.

По полученной инвариантной схеме и по двум другим выбранным нами разностным схемам были осуществлены численные расчеты на примерах трех тестовых задач. В большинстве случаев инвариантная схема не уступает модифицированной полностью консервативной схеме Самарского–Попова (5.47) на решениях, не содержащих сильных разрывов, как в плане точности полученных решений, так и в отношении контроля законов сохранения на этих решениях. Для большей части тестовых заданий (см. Приложение В) инвариантная схема показывает даже заметно лучшие результаты по законам сохранения энергии и импульса.

Были приведены также некоторые обобщения инвариантной схемы для уравнений мелкой воды с плоским дном и разностная схема для случая произвольного дна, обладающая законом сохранения энергии.

Все расчеты были осуществлены с помощью специально разработанного программного комплекса Schemelib.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. С помощью разностного аналога теоремы Нётер было построено семейство инвариантных разностных схем для ОДУ второго порядка из классификационного списка Ли, обладающих всеми разностными аналогами первых интегралов дифференциального уравнения. Среди инвариантного семейства схем есть точная схема. Это семейство разностных схем завершает список интегрируемых инвариантных моделей, полученных в результате групповой классификации, проведенной в [27]. Дополнительно были построены точные инвариантные разностные схемы для некоторых нелинейных ОДУ второго порядка из классификационного списка Ли.
2. В работе произведено обобщение разностного аналога тождества Нётер на случай системы обыкновенных разностных уравнений. Построена инвариантная разностная схема для системы уравнений Ермакова специального вида, обладающая всеми разностными аналогами первых интегралов дифференциальной системы.
3. Разработан и применен на конкретных примерах уравнений разностный аналог метода сопряженных уравнений для случая обыкновенных разностных уравнений, не допускающих вариационной формулировки.
4. Предложен разностный аналог прямого метода [11] для разностных уравнений в частных производных на равномерных ортогональных сетках. С его помощью построены инвариантные разностные схемы линейного и нелинейного волнового уравнений, обладающие законами сохранения.
5. Проведена групповая классификация одномерных уравнений Эйлера–Лагранжа специального вида в лагранжевых координатах для течения жидкости и газа. Частными случаями таких уравнений являются уравнения мелкой воды с произвольным и плоским дном, а также одномерные уравнения газовой динамики для изэнтропических течений политропного газа. Приведены законы сохранения для указанных моделей в координатах Лагранжа и Эйлера.

6. Построена инвариантная консервативная разностная схема для одномерных уравнений мелкой воды с плоским дном, обладающая локальными законами сохранения вещества, импульса, энергии и движения центра масс. Разработан комплекс программ, позволяющий эффективно производить численные расчеты одномерных уравнений газовой динамики и уравнений мелкой воды, содержащий стандартный набор тестовых заданий и позволяющий добавлять новые тестовые задания, точные решения, отображать численные результаты и сопоставлять результаты, полученные для различных схем.

Таким образом, в работе предложены новые методы, позволяющие строить инвариантные разностные схемы для ОДУ и уравнений в частных производных. Последние главы посвящены различным уравнениям механики сплошной среды, получены новые инвариантные консервативные разностные схемы уравнений мелкой воды, обладающие рядом преимуществ по сравнению с известными схемами.

Считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. В. А. Дородницыну за заинтересованное участие и неоценимую всестороннюю поддержку на всех этапах работы над диссертацией. Выражаю глубокую признательность д.ф.-м.н. С. В. Мелешко за внимание к работе и поддержку, без которой настоящая работа едва ли увидела бы свет. Хочу поблагодарить д.ф.-м.н. О. В. Капцова за деятельную помощь и за формирование моих первоначальных научных интересов.

Автор также благодарен А. Акиньшину за предоставление \LaTeX -шаблона диссертации [157], на основе которого была подготовлена настоящая работа.

Список литературы

1. *Дородницын В. А.* Групповые свойства разностных уравнений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
2. *Dorodnitsyn V. A.* Applications of Lie Groups to Difference Equations. — Boca Raton: CRC Press, 2011.
3. *Попов Ю. П., Самарский А. А.* Полностью консервативные разностные схемы // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1969. — Т. 9, № 4. — С. 953–958.
4. *Попов Ю. П., Самарский А. А.* Разностные методы решения задач газовой динамики. — М.: Наука, 1992.
5. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
6. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Сиб. отд. АН СССР, 1962.
7. *Birkhoff G.* Hydrodynamics. — Princeton, New Jersey, 1960.
8. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983.
9. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989.
10. *Bluman G. W., Anco S. C.* Symmetry and Integration Methods for Differential Equations. — New York: Springer, 2002. — 01. — P. 422.
11. *Bluman G. W., Cheviakov A. F., Anco S. C.* Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations. — New York: Springer, 2010. — Applied Mathematical Sciences, Vol.168.
12. *Stephani H.* Differential Equations: Their Solution Using Symmetries / Ed. by M. MacCallum. — Cambridge University Press, 1990.

13. Дородницын В. А. Группы преобразований в сеточных пространствах // *Современные проблемы матем. Новейшие достижения.* — 1989. — Т. 34.
14. Дородницын В. А. Конечно-разностный аналог теоремы Нетер // *Докл. Академии Наук.* — 1993. — Т. 328, № 6. — С. 678.
15. Бакирова М. И., Дородницын В. А. Инвариантная разностная модель для уравнения $u_t = u_{xx} + \delta u \ln u$ // *Дифференц. уравнения.* — 1994. — Т. 30. — С. 1697–1702.
16. Levi D., Winternitz P. Continuous symmetries of difference equations // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* — 2005. — 12. — Vol. 39, no. 2. — Pp. R1–R63.
17. Winternitz P. Symmetry preserving discretization of differential equations and Lie point symmetries of differential-difference equations. — 2011.
18. Bourlioux A, Cyr-Gagnon C, Winternitz P. Difference schemes with point symmetries and their numerical tests // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* — 2006. — 05. — Vol. 39, no. 22. — Pp. 6877–6896.
19. Bourlioux A., Rebelo R., Winternitz P. Symmetry Preserving Discretization of $SL(2, \mathbb{R})$ Invariant Equations // *Journal of Nonlinear Mathematical Physics.* — 2007. — 12. — Vol. 15.
20. Dorodnitsyn V. A. Finite Difference Models Entirely Inheriting Continuous Symmetry of Original Differential Equations // *International Journal of Modern Physics C.* — 1994. — Vol. 05, no. 04. — Pp. 723–734.
21. Dorodnitsyn V. A. Noether-type theorems for difference equations // *Applied Numerical Mathematics.* — 2001. — Vol. 39, no. 3. — Pp. 307 – 321. — Themes in Geometric Integration.
22. Дородницын В. А., Капцов Е. И. Дискретизация обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, обладающих симметриями // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2013. — Т. 53. — С. 1329–1355.
23. Dorodnitsyn V. A., Kozlov R. V. A Heat Transfer with a Source: the Complete Set of Invariant Difference Schemes // *Journal of Nonlinear Mathematical Physics.* — 2003. — 10. — Vol. 10.

24. *Dorodnitsyn V. A., Kozlov R. V.* First integrals of difference Hamiltonian equations // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2009. — 10. — Vol. 42. — P. 454007.
25. *Dorodnitsyn V. A., Kozlov R. V.* Invariance and first integrals of continuous and discrete Hamiltonian equations // *Journal of Engineering Mathematics*. — 2010. — Mar. — Vol. 66, no. 1. — Pp. 253–270.
26. *Dorodnitsyn V. A., Kozlov R. V.* Lagrangian and Hamiltonian Formalism for Discrete Equations: Symmetries and First Integrals. — 2011. — P. 7–49.
27. *Dorodnitsyn V. A., Kozlov R. V., Winternitz P.* Lie group classification of second-order ordinary difference equations // *Journal of Mathematical Physics*. — 2000. — Vol. 41, no. 1. — Pp. 480–504.
28. *Dorodnitsyn V. A., Kozlov R. V., Winternitz P.* Continuous symmetries of Lagrangians and exact solutions of discrete equations // *Journal of Mathematical Physics*. — 2004. — Vol. 45, no. 1. — Pp. 336–359.
29. *Hydon P. E.* Symmetries and First Integrals of Ordinary Difference Equations // *Proceedings of the Royal Society of London, (A)*. — 2000. — Vol. 456. — Pp. 2835–2855.
30. *Levi D., Winternitz P.* Continuous symmetries of discrete equations // *Physics Letters A*. — 1991. — Vol. 152, no. 7. — Pp. 335 – 338.
31. *Levi D., Winternitz P.* Symmetries of discrete dynamical systems // *Journal of Mathematical Physics*. — 1996. — Vol. 37, no. 11. — Pp. 5551–5576.
32. *Levi D., Winternitz P., Yamilov I.R.* Lie point symmetries of differential-difference equations // *Journal of Physics A Mathematical General*. — 2010. — 07. — Vol. 43. — Pp. 2002–.
33. *Levi D., Thomova Z., Winternitz P.* Are there contact transformations for discrete equations? // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2011. — may. — Vol. 44, no. 26. — P. 265201.
34. *Levi D., Thomova Z., Winternitz P.* Contact transformations for difference schemes // *Journal of Physics A-mathematical and Theoretical*. — 2011. — 10. — Vol. 45.

35. *Olver P. J.* Geometric Foundations of Numerical Algorithms and Symmetry // *Appl. Alg. Engin. Comp. Commun.* — 2000. — 03. — Vol. 11.
36. *Quispel G. R. W., Capel H. W., Sahadevan R.* Continuous symmetries of differential-difference equations: the Kac-van Moerbeke equation and Painlevé reduction // *Physics Letters A.* — 1992. — Vol. 170, no. 5. — Pp. 379 – 383.
37. *Dorodnitsyn V. A., Kozlov R. V., Winternitz P.* Symmetries, Lagrangian Formalism and Integration of Second Order Ordinary Difference Equations // *Journal of Nonlinear Mathematical Physics Volume Supplement.* — 2003. — 12. — Vol. 10. — Pp. 41–56.
38. *Noether E.* Invariante Variations problem // *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Nachrichten, Mathematisch-Physikalische Klasse Heft 2.* — 1918. — Pp. 235–257. — English translation: *Transport Theory and Statist. Phys.*, 1(3), 1971, 183–207.
39. *Дородницын В. А., Капцов Е. И.* Инвариантные Разностные Схемы Для Системы Ермакова // *Дифференциальные уравнения.* — 2016. — 01. — Т. 52. — С. 965–980.
40. *Anco S. C., Bluman G. W.* Derivation of conservation laws from nonlocal symmetries of differential equations // *Journal of Mathematical Physics.* — 1996. — Vol. 37, no. 5. — Pp. 2361–2375.
41. *Ibragimov N. H.* A new conservation theorem // *J. Math. Anal. Appl.* — 2007. — Vol. 333. — Pp. 311–328.
42. *Ibragimov N. H.* Nonlinear Self-Adjointness and Conservation Laws // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* — 2011. — 10. — Vol. 44. — P. 432002.
43. *Ibragimov N. H.* Nonlinear Self-Adjointness in Constructing Conservation Laws // *Archives of ALGA.* — 2011. — 09. — Vol. 7.
44. Первые интегралы разностных уравнений, не имеющих вариационной постановки / П. Винтерниц, В. Дородницын, Е. Капцов, Р. Козлов // *Доклады Академии наук.* — 2014. — 01. — Т. 454. — С. 627–630.

45. The adjoint equation method for constructing first integrals of difference equations / V. A. Dorodnitsyn, E. I. Kaptsov, R. V. Kozlov, P. Winternitz // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2015. — 01. — Vol. 48, no. 5. — P. 055202.
46. Anco S. C., Bluman G. W. Direct Construction of Conservation Laws from Field Equations // *Physical Review Letters*. — 1997. — 04. — Vol. 78. — Pp. 2869–2873.
47. Anco S. C., Bluman G. W. Integrating factors and first integrals for ordinary differential equations // *European Journal of Applied Mathematics*. — 1998. — 06. — Vol. 9. — Pp. 245 – 259.
48. Grant T. J., Hydon P. E. Characteristics of Conservation Laws for Difference Equations // *Found. Comput. Math.* — 2013. — Vol. 13, no. 4. — Pp. 667–692.
49. Hydon P. E. *Difference Equations by Differential Equation Methods*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. — Cambridge University Press, 2014.
50. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1968.
51. Thomas J. W. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. — Springer-Verlag, 1995.
52. Колдоба А. В., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П. Двухслойные полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1987. — Т. 27. — С. 779–784.
53. Об одной двухслойной полностью консервативной разностной схеме газовой динамики в эйлеровых переменных с адаптивной регуляризацией решения / Ю. А. Повещенко, М. Е. Ладонкина, В. О. Подрыга и др. // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. — 2019.
54. Об одном подходе к построению консервативной разностной схемы для задачи двухфазной фильтрации / И. В. Попов, Ю. А. Повещенко, С. В. Поляков, П. И. Рагимли // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. — 2017.

55. *Еленин Г. Г., Крылов В. В.* Полностью консервативная разностная схема для уравнений двухслойной «мелкой воды» в лагранжевых координатах // *Дифференц. уравнения.* — 1982. — Т. 18, № 7. — С. 1190–1196.
56. *Bihlo A., Popovych R.* Invariant Discretization Schemes for the Shallow-Water Equations // *SIAM Journal on Scientific Computing.* — 2012. — 01. — Vol. 34.
57. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
58. *Vreugdenhil C. B.* Numerical Methods for Shallow-Water Flow. — Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1994.
59. *Tan W. Y.* Shallow Water Hydrodynamics: Mathematical Theory and Numerical Solution for a Two-dimensional System of Shallow Water Equations. — Beijing: Water & Power Press, 2012.
60. *Abbasov I. B.* 3D Modeling of Nonlinear Wave Phenomena on Shallow Water Surfaces. — Hoboken: Wiley, 2018.
61. *Arakawa A., Lamb V. R.* A Potential Enstrophy and Energy Conserving Scheme for the Shallow Water Equations // *Monthly Weather Review.* — 1981. — Vol. 109, no. 1. — Pp. 18–36.
62. *Попов Ю. П., Самарский А. А.* Полностью консервативные разностные схемы для уравнений магнитной гидродинамики // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1970. — Т. 10, № 4. — С. 990–998.
63. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
64. Applications of Group-Theoretic Methods in Hydrodynamics / V. K. Andreev, O. V. Kaptsov, V. V. Pukhnachov, A. A. Rodionov. — Dordrecht: Kluwer, 1998.
65. CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations / Ed. by N. H. Ibragimov. — Boca Raton: CRC Press, 1994. — Vol. 1.
66. CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations / Ed. by N. H. Ibragimov. — Boca Raton: CRC Press, 1995. — Vol. 2.

67. Бакирова М. И., Дородницын В. А., Козлов Р. В. Инвариантные разностные модели уравнения теплопроводности с источником // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. — 1996.
68. Ермаков В. П. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. Условия полной интегрируемости. // *Университетские известия, Серия III*. — 1880. — Т. 9, № 1.
69. Капцов Е. И., Дородницын В. А., Шевяков А. Ф. Инвариантные разностные схемы нелинейного волнового уравнения, обладающие законами сохранения // Труды XV Всероссийской конференции-школы молодых исследователей / Под ред. Б. Н. Четверушкин, Л. А. Крукиер. — Математическое моделирование и современные информационные технологии. — Ростов н/Д.: ЮГИНФО ЮФУ, 2013. — С. 111–115.
70. Капцов Е. И. Первые интегралы обыкновенных разностных уравнений, не обладающих вариационной постановкой // Тезисы докладов XXII Всероссийской конференции «Теоретические основы и конструирования численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященной памяти К. И. Бабенко. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2018. — С. 50.
71. Kaptsov E.I., Meleshko S.V. Conservation laws of the one-dimensional isentropic gas dynamics equations in Lagrangian coordinates // *AIP Conference Proceedings*. — 2019. — Vol. 2153, no. 1. — P. 020009.
72. Дородницын В. А., Капцов Е. И. Инвариантные разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, обладающих симметриями // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. — 2014.
73. Капцов Е. И. Численная реализация инвариантной схемы для одномерных уравнений мелкой воды в лагранжевых координатах // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. — 2019.
74. Kaptsov E.I., Meleshko S.V. Analysis of the one-dimensional Euler–Lagrange equation of continuum mechanics with a Lagrangian of a special form // *Applied Mathematical Modelling*. — 2020. — Vol. 77. — Pp. 1497–1511.

75. *Kaptsov E. I., Meleshko S. V.* Conservation laws of the two-dimensional gas dynamics equations // *International Journal of Non Linear Mechanics*. — 2019. — Vol. 112. — Pp. 126–132.
76. *Cheviakov A. F., Ganghoffer J. F.* One-dimensional nonlinear elastodynamic models and their local conservation laws with applications to biological membranes // *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials*. — 2016. — 05. — Vol. 58. — P. 105–121.
77. *Rodríguez M., Winternitz P.* Lie symmetries and exact solutions of first-order difference schemes // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 2004. — 05. — Vol. 37. — P. 6129.
78. *Kozlov R. V.* Conservative discretizations of the Kepler motion // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2007. — 04. — Vol. 40, no. 17. — Pp. 4529–4539.
79. *Pinney E.* The nonlinear differential equation $y'' + p(x)y + cy^{-3} = 0$ // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1950. — Vol. 1. — P. 681.
80. *Common A. K., Hessameddini E., Musette M.* The Pinney equation and its discretization // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1996. — 10. — Vol. 29, no. 19. — Pp. 6343–6352.
81. *Common A. K., Musette M.* Two discretisations of the Ermakov-Pinney equation // *Physics Letters A*. — 1997. — 11. — Vol. 235. — Pp. 574–580.
82. *Reid J. L., Ray J. R.* More exact invariants for the time-dependent harmonic oscillator // *Physics Letters A*. — 1979. — 05. — Vol. 71. — Pp. 317–318.
83. *Reid J. L., Ray J. R.* Ermakov systems, nonlinear superposition, and solutions of nonlinear equations of motion // *Journal of Mathematical Physics*. — 1980. — 07. — Vol. 21. — Pp. 1583–1587.
84. *Rogers C., An H.* Ermakov-Ray-Reid Systems in (2+1)Dimensional Rotating Shallow Water Theory // *Studies in Applied Mathematics*. — 2010. — 06. — Vol. 125.

85. *Rogers C., Ames W. F.* Nonlinear Boundary Value Problems in Science and Engineering. Mathematics in Science and Engineering. — Elsevier Science, 1989.
86. *Mikhailov A. V., Wang J. P., Xenitidis P.* Cosymmetries and Nijenhuis Recursion Operators for Difference Equations // *Nonlinearity*. — 2011. — 06. — Vol. 24, no. 7. — Pp. 2079–2097.
87. *Mitchell R. A., Dennemeyer R.* Introduction to Partial Differential Equations and Boundary Value Problems // *The Mathematical Gazette*. — 1971. — 12. — Vol. 55. — P. 487.
88. First integrals of ordinary difference equations beyond Lagrangian methods (A pedagogical treatment) / V. A. Dorodnitsyn, E. I. Kaptsov, R. V. Kozlov, P. Winternitz // *arXiv e-prints*. — 2013. — 11. — P. arXiv:1311.1597.
89. *Ovsienko V., Tabachnikov S.* What is... the Schwarzian derivative? // *Notices of the American Mathematical Society*. — 2009. — 01. — Vol. 56.
90. *Kozlov R. V.* Conservation laws of semidiscrete Hamiltonian equations // *Journal of Mathematical Physics*. — 2000. — 12. — Vol. 42.
91. *Годунов С. К. Рябенский В. С.* Разностные схемы (введение в теорию). — М.: Наука, 1973.
92. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. — 5 изд. — М.: Наука, 1994. — Т. 1.
93. *Gavrilyuk S. L., Teshukov V. M.* Generalized vorticity for bubbly liquid and dispersive shallow water equations // *Continuum Mech. Thermodyn.* — 2001. — Vol. 13. — Pp. 365–382.
94. *Gavrilyuk S. L., Shugrin S. M.* Media with equations of state that depend on derivatives // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. — 1996. — Vol. 37, no. 2. — Pp. 177–189.
95. *Dorodnitsyn V. A., Kozlov R. V., Meleshko S. V.* One-dimensional gas dynamics equations of a polytropic gas in Lagrangian coordinates: symmetry classification, conservation laws, difference schemes // *Communications*

- in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* — 2019. — принято к публикации.
96. *Whitham G. B.* Linear and Nonlinear Waves. — New York: Wiley, 1974.
 97. *Matsuno Y.* Hamiltonian formulation of the extended Green-Naghdi equations // *Phys D.* — 2015. — Vol. 301-302. — Pp. 1–7.
 98. *Karelsky K. V., Petrosyan A. S.* Particular solutions and Riemann problem for modified shallow water equations // *Fluid Dyn Res.* — 2006. — Vol. 38, no. 5. — Pp. 339–358.
 99. *Karelsky K. V., Petrosyan A. S.* Modified shallow water equations. Simple waves and Riemann problem // IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence / Ed. by A. V. Borisov, V. V. Kozlov, I. S. Mamaev, M. A. Sokolovskiy. — Dordrecht: Springer, 2008. — Pp. 383–392. — Proceedings of the IUTAM Symposium held in Moscow, 25–30, August, 2006.
 100. *Serre F.* Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux // *Houille Blanche.* — 1953. — Vol. 3. — Pp. 374–388.
 101. *Su C. H., Gardner C. S.* Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. III. Derivation of the Korteweg-de Vries Equation and Burgers Equation // *Journal of Mathematical Physics.* — 1969. — Vol. 10, no. 3. — Pp. 10–23.
 102. *Green A. E., Naghdi P. M.* A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth // *J. Fluid Mech.* — 1976. — Vol. 78. — Pp. 237–246.
 103. *Шмыглевский Ю. Д.* Аналитические исследования динамики газа и жидкости. — М.: Эдиториал УРСС, 1999.
 104. *Webb G. M., Zank G. P.* Fluid relabelling symmetries, Lie point symmetries and the Lagrangian map in magnetohydrodynamics and gas dynamics // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* — 2007. — Vol. 40. — Pp. 545–579.
 105. *Webb G. M.* Magnetohydrodynamics and Fluid Dynamics: Action Principles and Conservation Laws. Lecture Notes in Physics. — Springer, 2018.

106. *Dorodnitsyn V. A., Kozlov R. V., Meleshko S. V.* Analysis of 1D gas dynamics equations of a polytropic gas in Lagrangian coordinates: symmetry classification, conservation laws, difference schemes // *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.* — принято к публикации.
107. *Siriwat P., Kaewmanee C., Meleshko S. V.* Symmetries of the hyperbolic shallow water equations and the Green-Naghdi model in Lagrangian coordinates // *International Journal of Non-Linear Mechanics.* — 2016. — Vol. 86. — Pp. 185–195.
108. *Voraka P., Kaewmanee C., Meleshko S. V.* Symmetries of the shallow water equations in the Boussinesq approximation // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* — 2019. — Vol. 67. — Pp. 1–12.
109. *Черный Г. Г.* Газовая динамика. — М.: Наука, 1988.
110. *Chirkunov Yu. A., Pikmullina E. O.* Symmetry properties and solutions of shallow water equations // *Universal Journal of Applied Mathematics.* — 2014. — Vol. 2, no. 1. — Pp. 10–23.
111. *Szatmari S., Bihlo A.* Symmetry analysis of a system of modified shallow-water equations // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* — 2014. — Vol. 19. — Pp. 530–537.
112. *Аксёнов А. В., Дружков К. П.* Законы сохранения, симметрии и точные решения уравнений мелкой воды над неровным дном // *Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ».* — 2016. — Т. 5, № 1. — С. 38–46.
113. *Vinokurov V. A., Nurgalieva I. G.* Investigation of nonlinear equation of adiabatic motion of an ideal gas // *Nonclassical Equations of Mathematical Physics* / Ed. by V. N. Vragov. — Novosibirsk, 1985. — P. 53.
114. *Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.* Нелокальные симметрии. Эвристический подход // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Нов. достиж.* — 1989. — Т. 34. — С. 3–83.
115. *Webb G. M., Zank G. P.* Scaling symmetries, conservation laws and action principles in one-dimensional gas dynamics // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* — 2009. — Vol. 42. — Paper 475205.

116. *Sjöberg A., Mahomed F. M.* Non-local symmetries and conservation laws for one-dimensional gas dynamics equations // *Applied Mathematics and Computation*. — 2004. — Vol. 150. — Pp. 379–397.
117. *Sekhar T. R., Sharma V. D.* Similarity analysis of modified shallow water equations and evolution of weak waves // *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*. — 2012. — Vol. 17. — Pp. 630–636.
118. *Lahno V., Zhdanov R., Magda O.* Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations // *Acta Appl. Math.* — 2006. — Vol. 91. — P. 253–313.
119. *Gandarias M. L., Torrisi M., Valenti A.* Symmetry classification and optimal systems of a non-linear wave equation // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. — 2004. — 04. — Vol. 39. — P. 389–398.
120. *Ibragimov N. H., Torrisi M., Valenti A.* Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$ // *Journal of Mathematical Physics*. — 1991. — Vol. 32, no. 11. — Pp. 2988–2995.
121. *Bihlo A., Cardoso-Bihlo E., Popovych R.* Complete group classification of a class of nonlinear wave equations // *Journal of Mathematical Physics*. — 2012. — Vol. 53, no. 12. — P. 123515.
122. *Vasilenko O. F., Egorchenko I. A.* Group classification of multidimensional nonlinear wave equations (Ukrainian) // *Group and analytic methods in mathematical physics (Ukrainian)*. — 2001. — Vol. 53, no. 12. — P. 63–66.
123. *Meleshko S. V.* Methods for Constructing Exact Solutions of Partial Differential Equations. Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering Science+Business Media, Inc. — New York: Springer, 2005.
124. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. — М.: Наука, 1988.
125. *Кочин Н.Е, Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая Гидромеханика. — 6 изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1963. — Т. 1.
126. *Петросян А. С.* Дополнительные главы гидродинамики тяжёлой жидкости со свободной границей. — М.: Инст. косм. исследований РАН, 2010.

127. Vallis G. K. Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-scale Circulation. — Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
128. Bernetti R., Titarev V. A., Toro E. F. Exact solution of the Riemann problem for the shallow water equations with discontinuous bottom geometry // *Journal of Computational Physics*. — 2008. — Vol. 227, no. 6. — Pp. 3212 – 3243.
129. Han E. E., Hantke M., Warnecke G. Exact Riemann Solutions to Compressible Euler Equations in Ducts With Discontinuous Cross-Section // *Journal of Hyperbolic Differential Equations*. — 2012. — Vol. 09, no. 03. — Pp. 403–449.
130. Dobrokhotov Sergey, Nekrasov R., Tirozzi Brunello. Asymptotic solutions of the linear shallow-water equations with localized initial data // *Journal of Engineering Mathematics*. — 2010. — 03. — Vol. 69. — Pp. 225–242.
131. Dobrokhotov Sergey, Nazaikinskii Vladimir. Asymptotic localized solutions of the shallow water equations over a nonuniform bottom. — Vol. 2048. — 2018. — 12. — P. 040026.
132. Bihlo A., MacLachlan S. Well-balanced mesh-based and meshless schemes for the shallow-water equations // *BIT Numerical Mathematics*. — 2017. — 02.
133. Variational integrator for the rotating shallow-water equations on the sphere / R. Brecht, W. Bauer, A. Bihlo et al. // *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*. — 2019. — 01. — Vol. 145.
134. Theoretical and numerical studies for energy estimates of the shallow water equations with a transmission boundary condition / Md. Masum Murshed, Kouta Futai, Masato Kimura, Hirofumi Notsu // *arXiv e-prints*. — 2019. — 01. — P. arXiv:1901.05725.
135. Khakimzyanov G., Dutykh D., Gusev O. Dispersive shallow water wave modelling. Part IV: Numerical simulation on a globally spherical geometry // *arXiv e-prints*. — 2017. — 07. — P. arXiv:1707.02552.
136. Dyakonova T., Khoperskov A., Khrapov S. Numerical Model of Shallow Water: The Use of NVIDIA CUDA Graphics Processors // *Supercomputing* / Ed. by V. Voevodin, S. Sobolev. — Cham: Springer International Publishing, 2016. — Pp. 132–145.

137. *Luna T. Morales De, Díaz M. J. Castro, Parés C.* Reliability of first order numerical schemes for solving shallow water system over abrupt topography // *Applied Mathematics and Computation*. — 2013. — Vol. 219, no. 17. — Pp. 9012 – 9032.
138. *Агафонов С. И.* Использование дифференциальных форм для построения нелокальных симметрии // *Матем. моделирование*. — 1994. — Т. 6, № 3. — С. 60–74.
139. *Дарьин Н. А.* Уравнения газовой динамики в импульсных и энергетических лагранжевых переменных // *Дифференц. уравнения*. — 1996. — Т. 32, № 6. — С. 821–824.
140. *Budd C. J., Weizhang H., Russell R. D.* Moving mesh methods for problems with blow-up // *SIAM Journal on Scientific Computing*. — 1996. — 03. — Vol. 17, no. 2. — Pp. 305–327.
141. *Huang W., Russel R. D.* Adaptive Moving Mesh Methods. — New York: Springer, 2010.
142. Group theoretical analysis of a rotating shallow liquid in a rigid container / *D. Levi, M.C. Nicci, C. Rogers, P. Winternitz* // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1989. — Vol. 22. — Pp. 4743–4767.
143. *Bila N., Mansfield E., Clarkson P.* Symmetry group analysis of the shallow water and semi-geostrophic equations // *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. — 2006. — 02. — Vol. 59.
144. *Аксенов А. В., Дружков К. П.* Классификация законов сохранения системы уравнений одномерной мелкой воды над неровным дном в лагранжевых переменных // *Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»*. — 2019. — Т. 8, № 2. — С. 132–140.
145. *Коробицын В. А.* Инвариантные вариационно-разностные схемы и законы сохранения // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1989. — Т. 29. — С. 1067–1078.
146. *Коробицын В. А.* Термодинамически согласованные разностные схемы // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1989. — Т. 29. — С. 309–312.

147. *Dorodnitsyn V. A., Kaptsov E. I.* Shallow water equations in Lagrangian coordinates: symmetries, conservation laws and its preservation in difference models // *arXiv e-prints*. — 2019. — 12. — P. arXiv:1912.13314.
148. *Dorodnitsyn V. A.* On the Linearization of Second-Order Differential and Difference Equations // *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*. — 2006. — 08. — Vol. 2.
149. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — 4 изд. — М.: Наука, 1971.
150. File Extensions: File Associations and Related File Types. — 2019. — URL: <https://pc.net/extensions/>.
151. Maple Programming Guide / L. Bernardin, P. Chin, P. DeMarco et al. — Toronto: Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., 2014. — URL: <https://www.maplesoft.com/>.
152. *van Rossum G.* Python Software Foundation. — 1991. — URL: <https://www.python.org/>.
153. *Oliphant T. E.* A guide to NumPy. — Trelgol Publishing USA, 2006. — Vol. 1. — URL: <https://numpy.org/>.
154. *Hunter J. D.* Matplotlib: A 2D graphics environment // *Computing in Science & Engineering*. — 2007. — Vol. 9, no. 3. — Pp. 90–95. — URL: <https://matplotlib.org/>.
155. *Bellard F.* FFmpeg: A complete, cross-platform solution to record, convert and stream audio and video. — 2018. — URL: <https://ffmpeg.org/>.
156. *Кацов Е. И.* Системы уравнений гидродинамического типа: симметрии, законы сохранения, инвариантные разностные схемы [сайт]. — 2019. — URL: <http://gasdyneqns.atwebpages.com/>.
157. *Акиншин А.* LaTeX-template for russian Phd thesis. — 2019. — URL: <https://github.com/AndreyAkinshin/Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template>.

Список рисунков

1.1	Трехточечный шаблон	31
1.2	Шаблон для разностной системы	58
3.1	5-точечный шаблон «крест»	105
3.2	9-точечный шаблон	109
5.1	Разностный шаблон для трехслойной схемы	153
5.2	Разностный шаблон для двухслойной схемы	155
5.3	Структура программного комплекса Schemelib	162
A.1	Пример 1. Точная схема	185
A.2	Пример 2. Точная схема	185
A.3	Пример 3. Точная схема	186
A.4	Пример 4. Точная схема	186
B.1	Результаты расчетов по схеме (1.88)	189
B.2	Точные решения (Б.2), (Б.3), соответствующие решениям системы (1.88)	190
B.3	Значения разностного инварианта Рей-Рейда на решениях схемы (1.88)	190
B.1	Решения первого тестового задания	193
B.2	Решения второго тестового задания	194
B.3	Решения третьего тестового задания	195
B.4	Законы сохранения на решениях первого тестового задания	196
B.5	Законы сохранения на решениях второго тестового задания	196
B.6	Законы сохранения на решениях третьего тестового задания	197

Список таблиц

1	Групповая классификация С. Ли	18
2	Расширения группы эквивалентности	122
3	Расширения (4.12) (G или H — произвольная функция)	132
4	Расширения (4.12)	132
5	Параметры численных расчетов	184
6	Начальные данные для тестовых задач	192
7	Законы сохранения в координатах Лагранжа	198
8	Законы сохранения в координатах Эйлера	200

Приложение А

Численная реализация точных инвариантных схем для ОДУ второго порядка

В приложении приведены параметры и результаты численных расчетов точных инвариантных схем для ОДУ второго порядка из примеров Главы 1. Детальное описание процедуры расчетов см. в [72].

Параметры расчетов приведены в Таблице 5. В таблице в колонках x_0 , $u(x_0)$ и $u'(x_0)$ даются начальные данные задачи Коши. В последней колонке дополнительно приведены значения констант для тех уравнений, в которых они встречаются. Начальный шаг разностной сетки всюду обозначен символом h_0 . Результаты расчетов приведены на Рис. А.1–А.4.

Таблица 5 — Параметры численных расчетов

Пример	x_0	$u(x_0)$	$u'(x_0)$	Константы
1	-1	2	$\operatorname{tg}(-\pi/6)$	—
2	0	0.1	$\operatorname{tg}(\pi/12)$	$k = -2$
3	0	0.5	$\operatorname{tg}(\pi/36)$	—
4	0.1	1	$\operatorname{tg}(\pi/4)$	$C = 1$

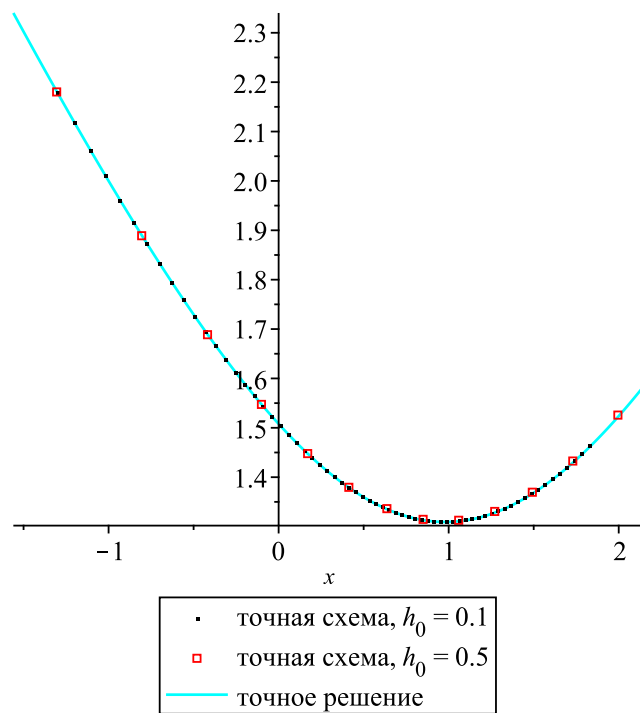


Рисунок А.1 — Пример 1. Точная схема

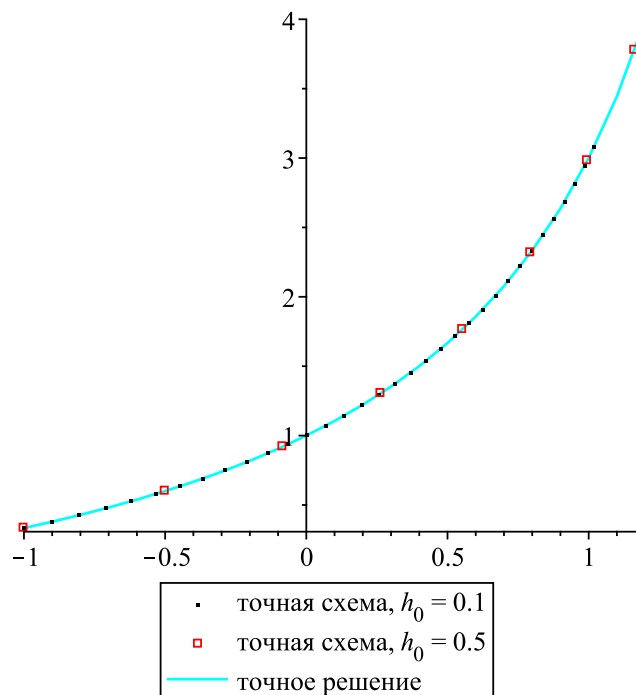


Рисунок А.2 — Пример 2. Точная схема

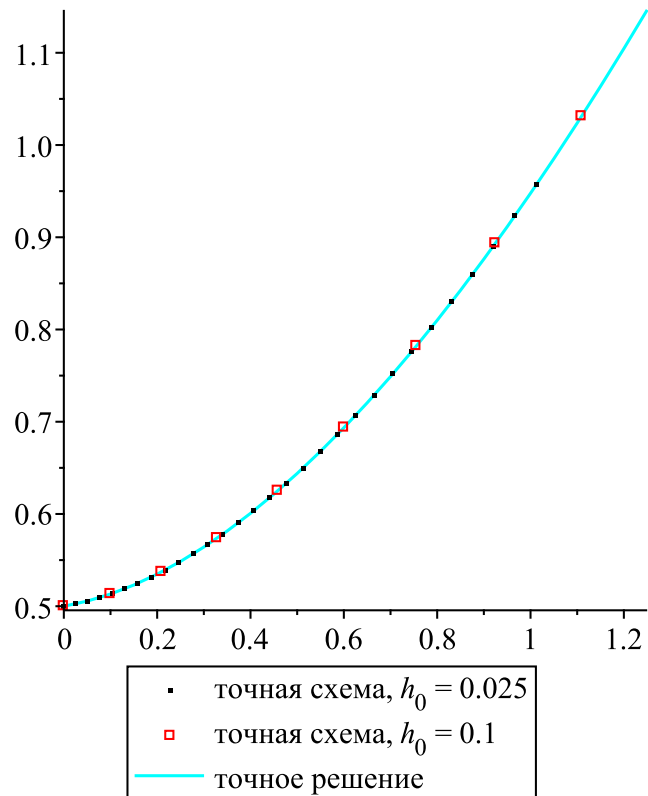


Рисунок А.3 — Пример 3. Точная схема

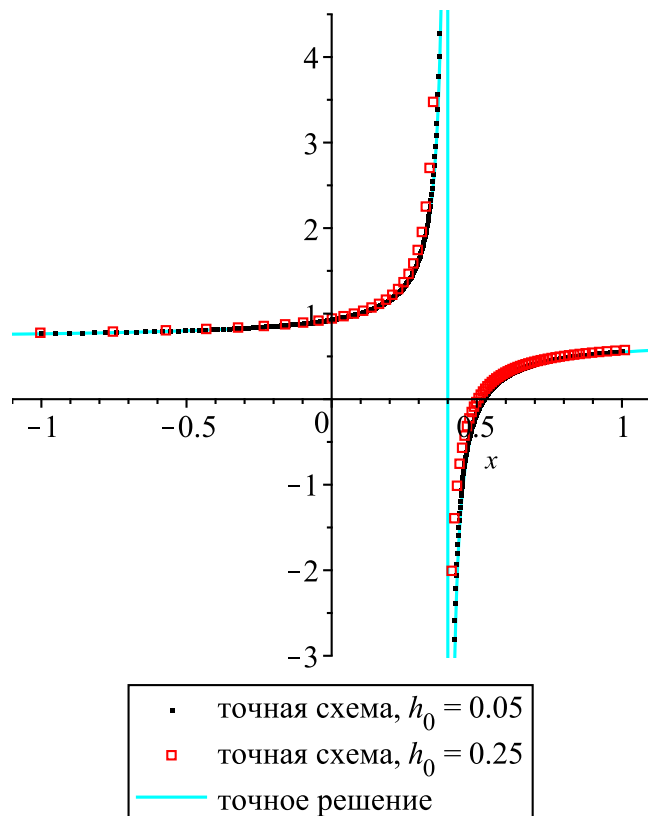


Рисунок А.4 — Пример 4. Точная схема

Приложение Б

Численная реализация одной инвариантной схемы для системы Ермакова

В разделе 1.3.3 были получены инвариантные консервативные разностные схемы для системы Ермакова–Рей–Рейда (1.65):

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \alpha u &= \frac{1}{u^2 v}, \\ \ddot{v} + \alpha v &= \frac{1}{uv^2}. \end{aligned} \quad (1.65)$$

В работе [84] рассматриваются обобщения системы (1.65) и предлагаются их физические интерпретации. Система (1.65) при $\alpha > 0$, как частный случай, возникает в теории мелкой воды и параметризует уравнения мелкой воды без учета центробежных сил и силы Кориолиса в случае дна, имеющего топографию параболоида вращения. В этом частном случае уравнения мелкой воды имеют вид

$$\begin{aligned} h_t + \operatorname{div}(h\mathbf{q}) &= 0, \\ \mathbf{q}_t + \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} + \nabla(Z + h) &= 0, \end{aligned} \quad (B.1)$$

где $h = h(x, y, t)$ — расстояние от поверхности дна до свободной поверхности (т. е. высота столбца жидкости), $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, y, t)$ — вектор скорости движения частиц жидкости и $Z = Z(x, y)$ — поверхность дна, описываемая уравнением

$$Z(x, y) = \frac{1}{2}\alpha(x^2 + y^2).$$

В [84] для случая (1.65) также приводится точное решение уравнений (B.1), которое среди прочего выражается через решения системы (1.65). В этом случае функция h и поле скоростей \mathbf{q} задаются в виде.

$$h = \frac{1}{a^2}(x - q)^2 + \frac{1}{b^2}(y - p)^2 + h_0, \quad (B.2)$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{U}}{U}(x - q) + \dot{q} \\ \frac{\dot{V}}{V}(y - p) + \dot{p} \end{pmatrix}, \quad (B.3)$$

где используется растяжение

$$U = \lambda u, \quad V = \mu v, \quad 2/(C_1 \mu \lambda^3) = 2/(C_2 \lambda \mu^3) = -1,$$

функции $a = a(t)$, $b = b(t)$, $h_0 = h_0(t)$ определяются из уравнений

$$a^2 = C_1 U^3 V, \quad b^2 = C_2 UV^3, \quad h_0 = \frac{C_3}{UV},$$

C_1 , C_2 и C_3 — константы, не равные нулю, и $p = p(t)$, $q = q(t)$ — некоторые решения системы

$$\ddot{q} + \alpha q = 0, \quad \ddot{p} + \alpha p = 0. \quad (\text{Б.4})$$

Таким образом, решения системы (Б.1) параметризуются 12 константами: константы C_1 – C_3 , 4 константы интегрирования системы (Б.4), 4 константы интегрирования системы (1.65) и параметр $\alpha > 0$.

Полученная в разделе 1.3.3 схема для уравнения (1.65) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\alpha u^2} \left(\frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{v^+} + \frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{v^-} \right) = \frac{u^+ - u \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^+} + \frac{u^- - u \cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^-}, \\ \frac{1}{2\alpha v^2} \left(\frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{u^+} + \frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{u^-} \right) = \frac{v^+ - v \cos(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^+} + \frac{v^- - v \cos(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{\sin \sqrt{\alpha}\tau^-}, \\ \frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{uu^+} = \frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{uu^-}, \quad \frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{vv^+} = \frac{\sin(\sqrt{\alpha}\tau^-)}{vv^-}. \end{array} \right. \quad (\text{1.88})$$

Схему (1.88) можно переписать в следующем, удобном для численных расчетов, виде:

$$\begin{aligned} \tau_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin \left\{ \alpha u_{n-1} \sin^2 \sqrt{\alpha} \tau_{n-1} \left[v_{n-1}^6 \varepsilon_2^6 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\alpha \varepsilon_2 u_{n-1} v_{n-1}^2 \sin(\sqrt{\alpha} \tau_{n-1}) \cos(\sqrt{\alpha} \tau_{n-1}) (\varepsilon_2^2 v_{n-1} - 2\alpha u_{n-1}) \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha^2 u_{n-1}^2 \cos^2(\sqrt{\alpha} \tau_{n-1}) \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha^2 (4 \varepsilon_2^2 v_{n-1}^4 + 1) u_{n-1}^2 - 4 \alpha u_{n-1} v_{n-1}^5 \varepsilon_2^4 \right]^{-1/2} \right\}, \\ u_n = \frac{\sin \sqrt{\alpha} \tau_{n-1}}{\varepsilon_1 u_{n-1}}, \quad v_n = \frac{\sin \sqrt{\alpha} \tau_{n-1}}{\varepsilon_2 v_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

где параметры ε_1 и ε_2 определяются из начальных условий задачи Коши.

Зададим начальные данные для задачи. Параметры α и C_1 – C_3 положим следующими: $\alpha = 1.6$, $C_1 = C_2 = 1$, $C_3 = -0.96$. Коэффициенты λ и μ определяются из заданных параметров: $\lambda \doteq -1.1892$, $\mu \doteq 1.1892$. Для уравнений (Б.4) поставим следующую задачу Коши:

$$p(0) = q(0) = 0, \quad \dot{p}(0) = 0.2, \quad \dot{q}(0) = 0.1.$$

Систему (1.65) будем рассматривать на временном интервале $0 \leq t \leq 2.5$ (далее решение системы циклически повторяется) с начальными значениями

$$u_0 = v(0) = 0.8595, \quad v_0 = v(0) = u(0), \quad \dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0.8565.$$

Начальный шаг сетки положим равным $\tau_0 = 0.01$. При помощи метода Рунге–Кутты–Фехлберга (RKF45) можно получить

$$u_1 = u(\tau_0) \doteq -0.2978, \quad v_1 = u_1.$$

Подставляя в (Б.5), получим оставшиеся параметры: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \doteq 0.01718$.

Результаты расчетов, произведенных с выбранными начальными данными по схеме (1.88) и с помощью метода RKF45, представлены на Рис. Б.1– Б.2.

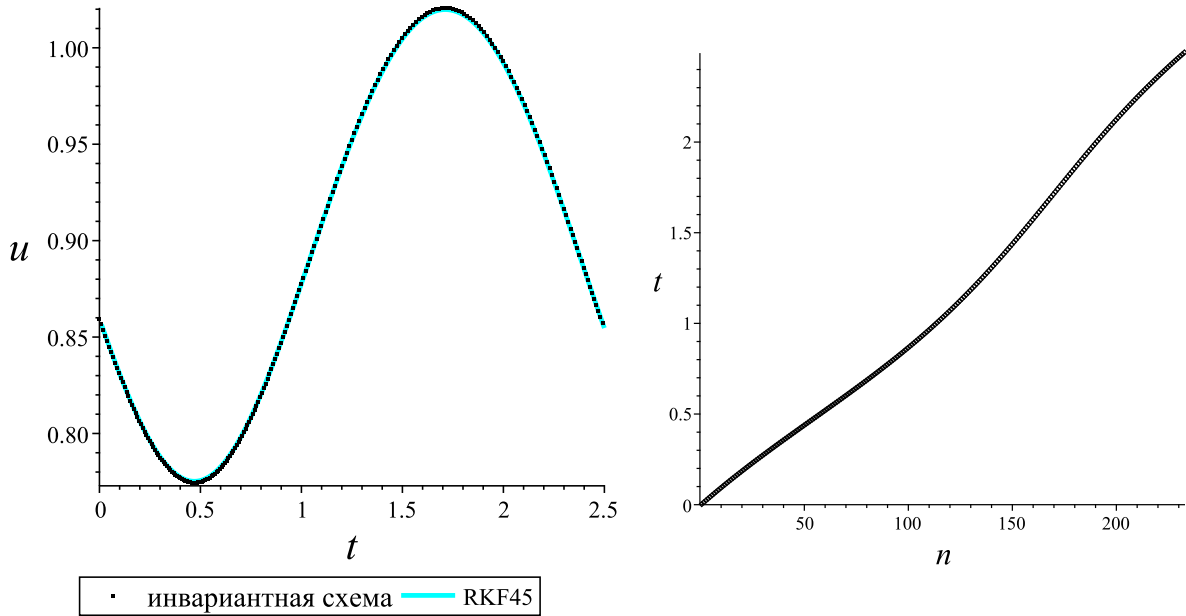


Рисунок Б.1 — Результаты расчетов по схеме (1.88)

На Рис. Б.1 слева изображен график функции $u(t)$ (который в данном случае совпадает с графиком $v(t)$). На всем рассматриваемом интервале решения схемы (1.88) практически совпадают с решениями, полученными методом RKF45. На графике Рис. Б.1 справа изображены значения узлов сетки схемы (1.88) для первых 200 итераций алгоритма (Б.5).

Точные решения (Б.2), параметризованные полученным решением системы (1.88), для двух моментов времени $t_1 = 0.5$ и $t_2 = 1.5$ на участке $[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}] \times [-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]$ представлены на Рис. Б.2 а). На Рис. Б.2 б) изображено поле скоростей (Б.3) поверхности жидкости на этом участке для момента времени t_1 (в момент t_2 поле скоростей мало отличается от представленного на рисунке и здесь не приводится).

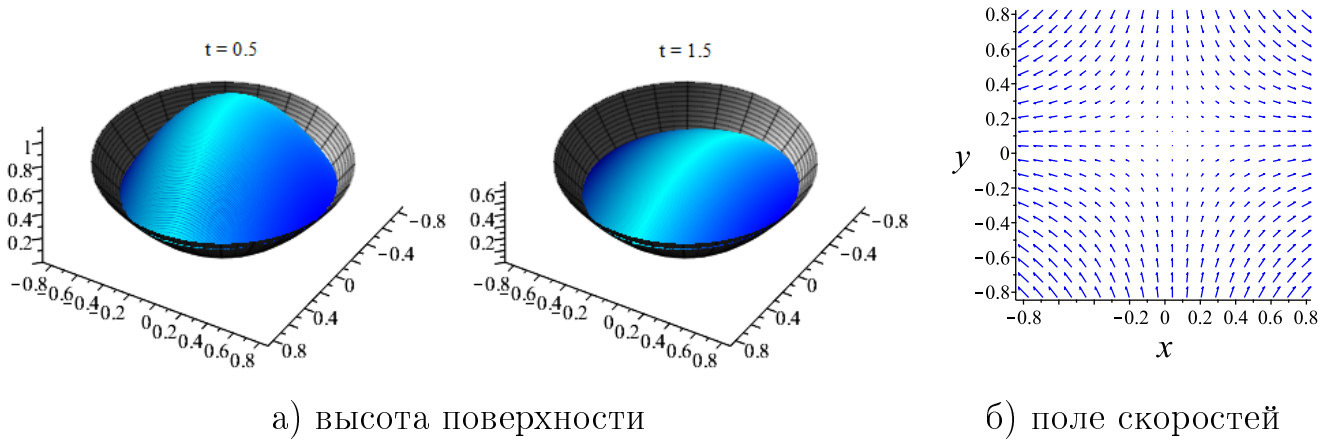


Рисунок Б.2 — Точные решения (Б.2), (Б.3), соответствующие решениям системы (1.88)

В разделе 1.3.3 также получен следующий разностный аналог инварианта Рей-Рейда для схемы (1.88):

$$I = \frac{(\sqrt{\alpha}\tau^+)^2}{\sin^2(\sqrt{\alpha}\tau^+)} \frac{(uv_t - vu_t)^2}{2} + \frac{u}{v} + \frac{v}{u} + \frac{1}{2} \left(\frac{u^+}{v^+} - \frac{u}{v} + \frac{v^+}{u^+} - \frac{v}{u} \right) - \frac{\sin^2(\sqrt{\alpha}\tau^+)}{8\alpha} \left(\frac{1}{uv^+} + \frac{1}{vu^+} \right)^2.$$

Значения разностного инварианта для выбранных начальных данных на рассматриваемом интервале времени приведено на Рис. Б.3. Как видно, на всем участке его значение практически не меняется на решениях схемы (1.88), что соответствует ожидаемому поведению первого интеграла разностной системы.

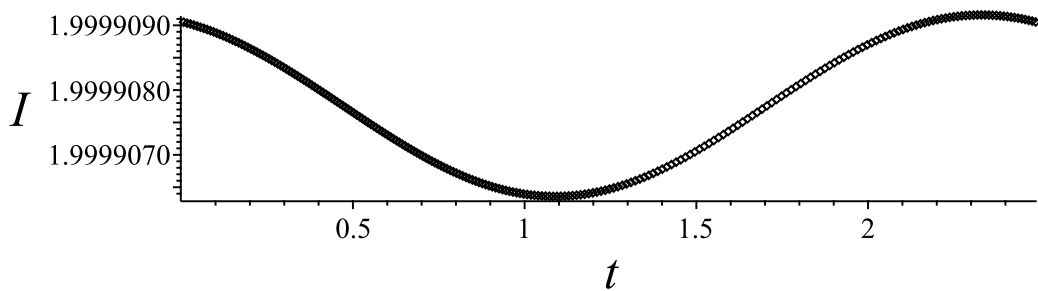


Рисунок Б.3 — Значения разностного инварианта Рей-Рейда на решениях схемы (1.88)

Приложение В

Результаты расчетов по конечно-разностным схемам для уравнений мелкой воды

В этом приложении приводятся результаты расчетов по трем тестовым заданиям для следующих разностных схем для уравнений мелкой воды, описанных в Разделе 5.4:

- модифицированная схема Самарского–Попова (5.47);
- инвариантная схема (5.43), (5.42);
- явная неконсервативная схема (5.51).

Начальные и граничные условия для численных расчетов формируются на основе перечисленных в Разделе 5.4 точных решений. Если точные решения не удастся получить в явном виде или представить в элементарных функциях, то используются методы Рунге–Кутты.

Все рассматриваемые схемы в общем случае не сохраняют монотонность начальных данных, поэтому расчеты по схемам ведутся, когда это целесообразно, с добавлением искусственной линейно-квадратичной вязкости [4]. Для этого давление p заменяется на величину $q = p + \omega$ при

$$\omega = -\nu \rho u_s + \frac{1 + \gamma \kappa h}{2} \frac{\rho u_s^2}{\pi},$$

где $\nu > 0$ и $\kappa > 0$ — коэффициенты вязкости, $\gamma = 2$ — показатель адиабаты.

Для инвариантной схемы (5.43) вместо непосредственного изменения величины давления p мы добавляем искусственную вязкость к величине Q (5.44), которая по смыслу как раз соответствует давлению.

Все данные, используемые при расчетах, приведены в Таблице 6.

В первой колонке указан номер теста согласно приведенному выше порядку их перечисления.

Во второй колонке указаны начальные условия для решения дифференциальной задачи. В случае, когда точное решение известно, приводятся значения входящих в него констант. В противном случае приведены выбранные начальные данные для ведения расчетов методами Рунге–Кутты. В задаче о волне разрежения u_0 означает скорость поршня, а ρ_0 — начальную высоту столбца жидкости.

В третьей и четвертой колонке таблицы указаны общая масса вещества S и количество точек M на каждом временном слое. Величины шагов разностной сетки вычисляются по формулам

$$h = S/(M - 1), \quad \tau = \mu_\tau h,$$

где всюду принято $\mu_\tau = 0.05$.

В пятой колонке указан коэффициент ν линейной вязкости, который берется пропорциональным шагу h и подбирается эмпирически. Для чистоты эксперимента в рамках каждого тестового задания всем схемам устанавливаются одинаковые значения коэффициентов вязкости, причем для квадратичной вязкости всюду взято $\kappa = 4$.

В шестой колонке указано время t_* , для которого приводятся результаты расчетов по тестам.

В последних двух колонках указаны номера рисунков, на которых соответственно приведены решения тестовых задач и значения законов сохранения на этих решениях.

Таблица 6 — Начальные данные для тестовых задач

№	Начальные условия	S	M	ν	t_*	Рис. ρ, u	Рис. ЗС
1	$u_0 = -0.65, \rho_0 = 1$	1.0	151	$0.1h$	0.5	В.1	В.4
2	$\psi(0) = 1, \psi'(0) = 3\pi/8$	0.5	101	h	0.081	В.2	В.5
3	$\psi(0) = 1, \psi'(0) = 3\pi/8$	0.175	101	$0.1h$	0.078	В.3	В.6

Принципы компоновки приведенных ниже графиков поясним на примере графиков решений и контроля законов сохранения первого тестового задания. На рис. **В.1** слева вверху приводится точное решение для высоты столбца жидкости ρ и графики решений, полученные по трем схемам (инвариатной схеме $(-\square-)$, явной схеме $(-\circ-)$ и схеме Самарского–Попова $(-\star-)$). На том же рисунке слева внизу приводятся абсолютные величины отклонений решений, полученных по схемам, от точного решения для ρ . Аналогично, на рис. **В.1** справа

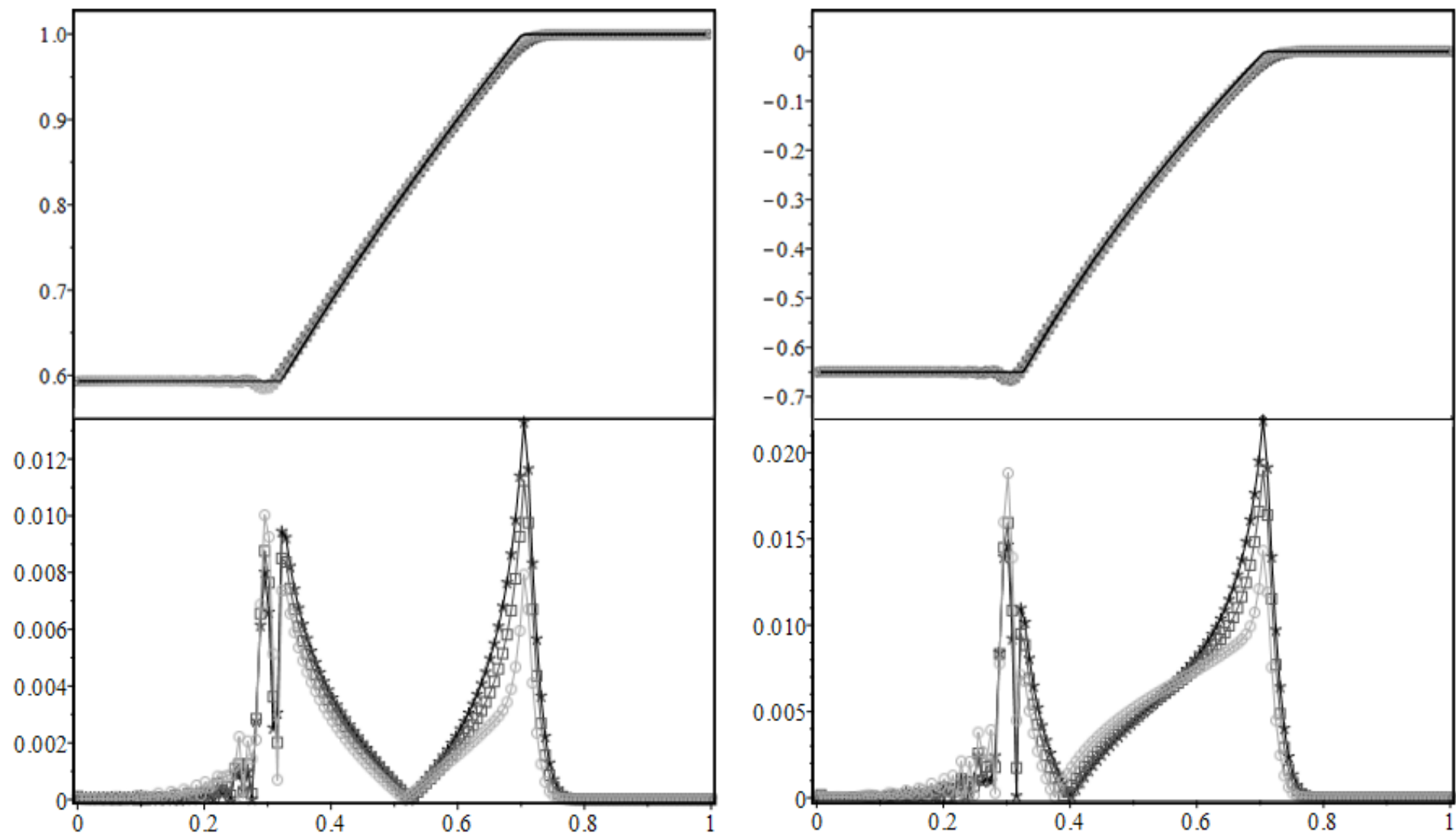


Рисунок В.1 — Решения ρ (слева) и u (справа) первого тестового задания: точное решение (—), инвариатная схема (—□—), явная схема (—○—) и схема Самарского-Попова (—★—)

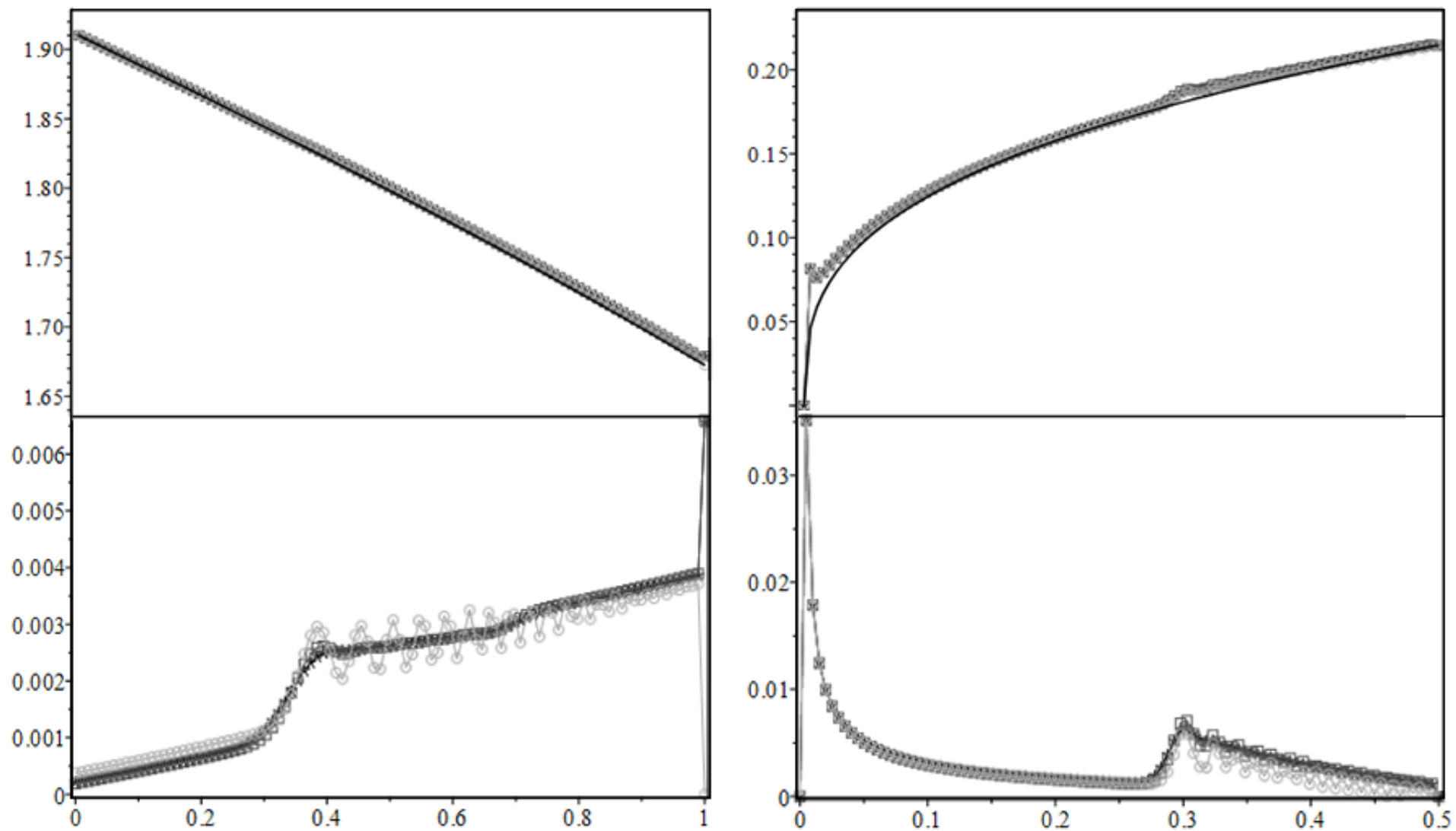


Рисунок В.2 — Решения ρ (слева) и u (справа) второго тестового задания: точное решение (—), инвариатная схема (—□—), явная схема (—○—) и схема Самарского–Попова (—★—)

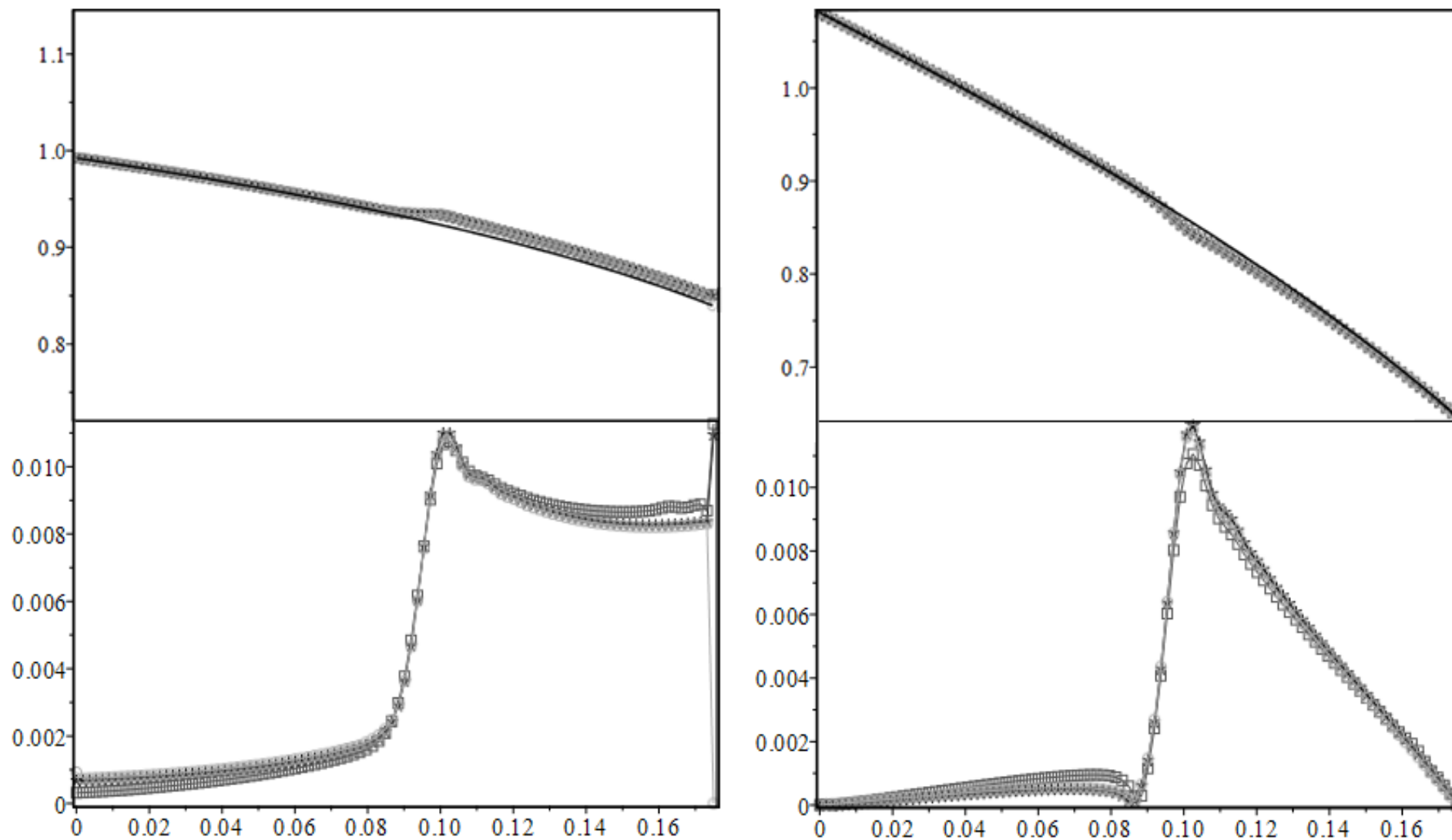


Рисунок В.3 — Решения ρ (слева) и u (справа) третьего тестового задания: точное решение (—), инвариатная схема (—□—), явная схема (—○—) и схема Самарского–Попова (—★—)

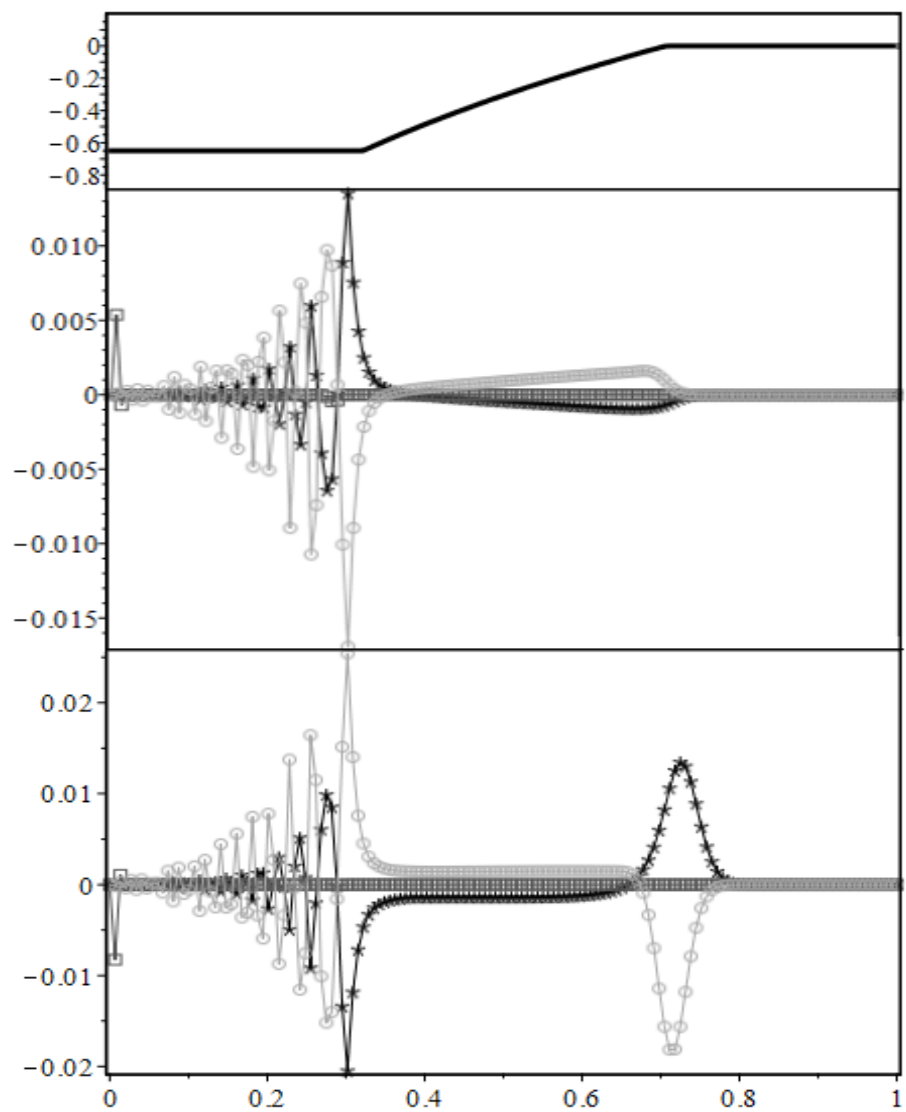


Рисунок В.4 — Значения законов сохранения энергии и импульса на решениях первого тестового задания

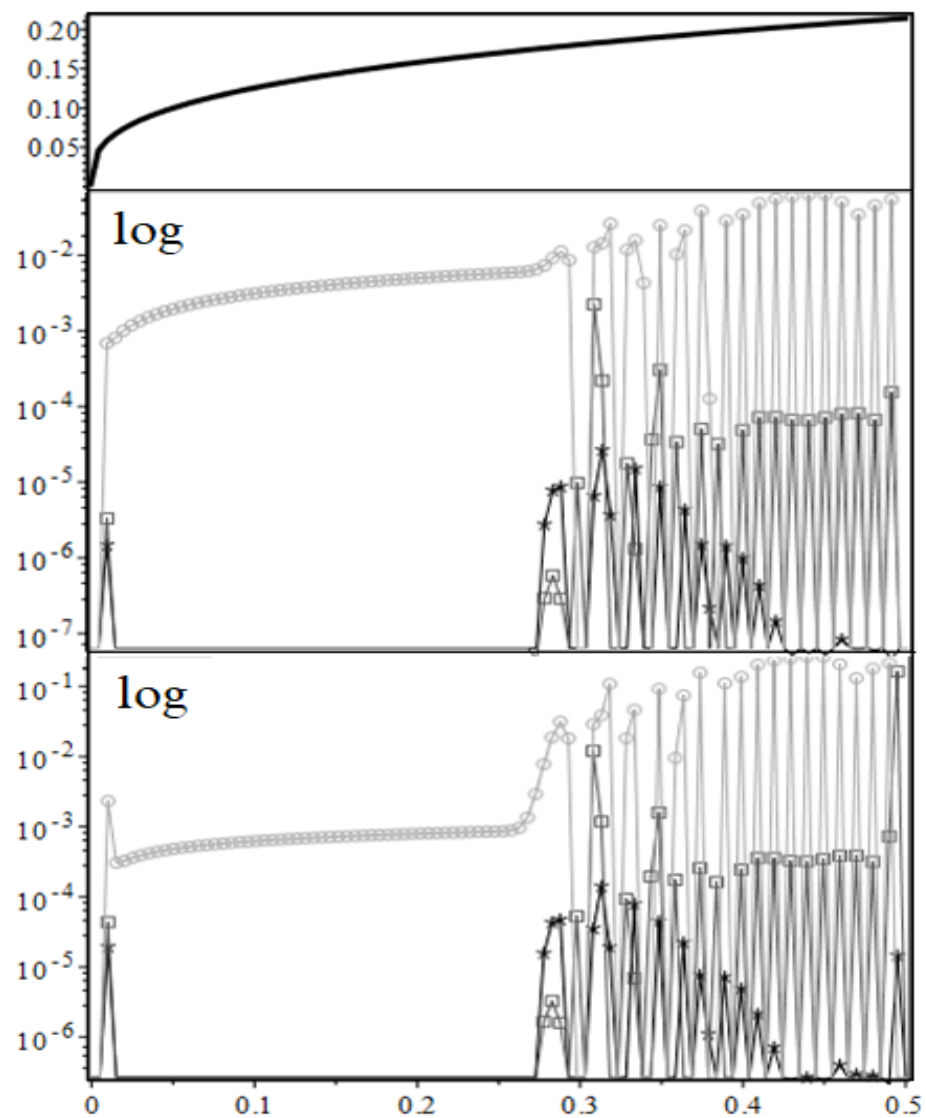


Рисунок В.5 — Значения законов сохранения энергии и импульса на решениях второго тестового задания

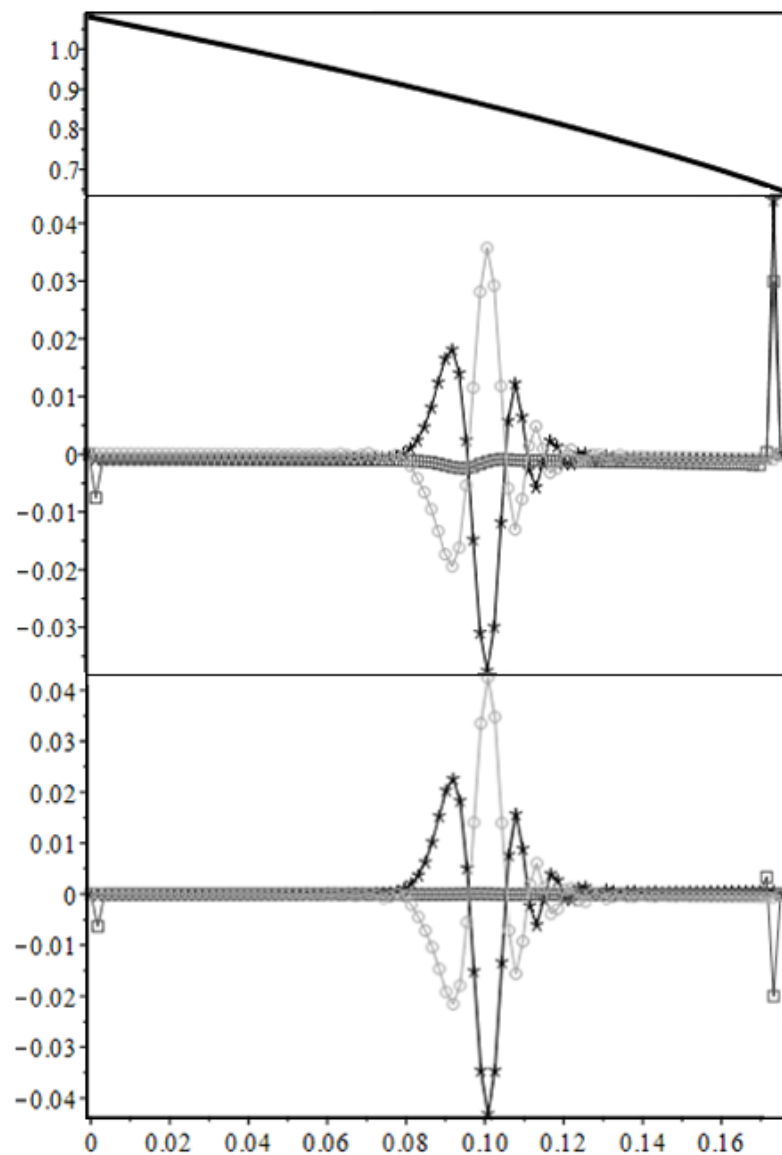


Рисунок В.6 — Значения законов сохранения энергии и импульса на решениях третьего тестового задания

приводятся решения и отклонения от точных решений для скоростей частиц среды u . Далее, на рис. В.4 приведены (сверху вниз) график точного решения для скоростей u и значения законов сохранения энергии и импульса для трех схем на полученных решениях (изображенных на рис. В.1). Значения закона сохранения массы нигде не приводятся, так как в большинстве случаев масса сохраняется схемами достаточно хорошо, и законы сохранения массы имеют на решениях значения близкие к величине погрешности округления.

В одном из случаев графики законов сохранения для большей наглядности приведены в логарифмическом масштабе и снабжены пометкой “log”.

Приложение Г

Законы сохранения уравнений Эйлера–Лагранжа специального вида для течения жидкости и газа

В данном приложении приводятся таблицы, содержащие законы сохранения уравнения (4.8) в координатах Лагранжа и Эйлера. Групповая классификация этого уравнения была произведена в Главе 4.

В первых двух колонках таблиц приводятся различные классы функций G и H . В третьей и четвертой колонках таблиц приводятся симметрии уравнения и ограничения на константы, входящие в коэффициенты инфинитезимальных операторов. В пятой колонке приводятся плотности и потоки соответствующий законов сохранения.

Таблица 7 — Законы сохранения в координатах Лагранжа

G	H	X	Ограничения	Закон сохранения (T^t, T^s) , где $g'' \equiv G, h' \equiv H$
$G(\varphi_s)$	$H(\varphi)$	∂_t	-	$(\frac{1}{2}\varphi_t^2 - g - h, \varphi_t g')$
		∂_s	-	$(\varphi_t \varphi_s, \varphi_s g' - \frac{1}{2}\varphi_t^2 - g - h)$
	0	∂_φ	-	(φ_t, g')
		$t\partial_\varphi$	-	$(t\varphi_t - \varphi, tg')$
	$\alpha\varphi$	$\sin \sqrt{ \alpha }t\partial_\varphi$	$\alpha < 0$	$(\sqrt{ \alpha }\varphi \cos \sqrt{ \alpha }t - \varphi_t \sin \sqrt{ \alpha }t, -g' \sin \sqrt{ \alpha }t)$
		$\cos \sqrt{ \alpha }t\partial_\varphi$	$\alpha < 0$	$(\sqrt{ \alpha }\varphi \sin \sqrt{ \alpha }t + \varphi_t \cos \sqrt{ \alpha }t, g' \cos \sqrt{ \alpha }t)$
		$\sinh \sqrt{\alpha}t\partial_\varphi$	$\alpha > 0$	$(\sqrt{\alpha}\varphi \cosh \sqrt{\alpha}t - \varphi_t \sinh \sqrt{\alpha}t, -g' \sinh \sqrt{\alpha}t)$
		$\cosh \sqrt{\alpha}t\partial_\varphi$	$\alpha > 0$	$(\sqrt{\alpha}\varphi \sinh \sqrt{\alpha}t - \varphi_t \cosh \sqrt{\alpha}t, -g' \cosh \sqrt{\alpha}t)$
$-e^{\mu\varphi_s},$ $\mu \neq 0$	0	$3t\partial_t + s\partial_s + (\varphi - \frac{4}{\mu}s)\partial_\varphi$	-	$(\frac{3}{2}t\varphi_t^2 - (\varphi - (\varphi_s + 4\mu^{-1})s)\varphi_t + 3te^{\mu\varphi_s}\mu^{-2},$ $-\frac{1}{2}s\varphi_t^2 - \mu^{-2}e^{\mu\varphi_s}[(\mu\varphi_s + 3)s + \mu(3t\varphi_t - \varphi)])$

Продолжение таблицы 7

G	H	X	Ограничения	Закон сохранения (T^t, T^s), где $g'' \equiv G, h' \equiv H$
$-(\varphi_s + c)^\lambda,$ $\lambda \neq 0, 1$	0	$(3\lambda + 4)t\partial_t$ $+(\lambda + 4)s\partial_s + \lambda\varphi\partial_\varphi$ $2t\partial_t + \varphi\partial_\varphi$ $t^2\partial_t + t\varphi\partial_\varphi$	- $\lambda = -4$ $\lambda = -4$	$\left(\left(\frac{3}{2}\lambda + 2 \right) t\varphi_t^2 + ((\lambda + 4)\varphi_s s - \lambda\varphi)\varphi_t \right.$ $\left. + \left(\frac{3\lambda+4}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \varphi_s^{\lambda+2} \right) t, \right.$ $\left. -(\lambda + 4)s\varphi_t^2 \left(\frac{1}{\lambda+2} \varphi_s^\lambda + \frac{1}{2} \right) \right.$ $\left. - \frac{1}{\lambda+1} t\varphi_s^{\lambda+1} ((3\lambda + 4)\varphi_t + \lambda\varphi) \right)$ $\left(3\varphi_t (t\varphi_t - \varphi) + t\varphi_s^{-2}, \varphi_s^{-3} (2t\varphi_t - \varphi) \right)$ $\left((3\varphi_t^2 + \varphi_s^{-2}) t^2 - 3\varphi (2\varphi_t t - \varphi), 2t\varphi_s^{-3} (t\varphi_t - \varphi) \right)$
	$\alpha\varphi$	$2s\partial_s - \varphi\partial_\varphi$ $\cos 2\sqrt{ \alpha }t\partial_t$ $-\sqrt{ \alpha }\varphi \sin 2\sqrt{ \alpha }t\partial_\varphi$ $\sin 2\sqrt{ \alpha }t\partial_t$ $+\sqrt{ \alpha }\varphi \cos 2\sqrt{ \alpha }t\partial_\varphi$ $\cosh 2\sqrt{\alpha}t\partial_t$ $+\sqrt{\alpha}\varphi \sinh 2\sqrt{\alpha}t\partial_\varphi$ $\sinh 2\sqrt{\alpha}t\partial_t$ $+\sqrt{\alpha}\varphi \cosh 2\sqrt{\alpha}t\partial_\varphi$	$\lambda = -4/3,$ $c = 0$ $\lambda = -4,$ $\alpha < 0$ $\lambda = -4,$ $\alpha < 0$ $\lambda = -4,$ $\alpha > 0$ $\lambda = -4,$ $\alpha > 0$	$\left((2s\varphi_s + \alpha)\varphi_t, - \left(9\varphi_s^{2/3} + \varphi_t^2 + \alpha\varphi^2 \right) s - 3\varphi_s^{-1/3} (2s\varphi_s + \varphi) \right)$ $\left(\cos 2\sqrt{ \alpha }t \left(3\varphi_t^2 + 3\alpha\varphi^2 + \varphi_s^{-2} + 6\sqrt{ \alpha }\varphi\varphi_t \sin 2\sqrt{ \alpha }t \right), \right.$ $\left. 2\varphi_s^{-3} \left(\varphi_t \cos 2\sqrt{ \alpha }t + \sqrt{ \alpha }\varphi \sin 2\sqrt{ \alpha }t \right) \right)$ $\left(\sin 2\sqrt{ \alpha }t \left(3\varphi_t^2 + 3\alpha\varphi^2 + \varphi_s^{-2} - 6\sqrt{ \alpha }\varphi\varphi_t \cos 2\sqrt{ \alpha }t \right), \right.$ $\left. 2\varphi_s^{-3} \left(\varphi_t \sin 2\sqrt{ \alpha }t - \sqrt{ \alpha }\varphi \cos 2\sqrt{ \alpha }t \right) \right)$ $\left(\cosh 2\sqrt{\alpha}t \left(3\varphi_t^2 + 3\alpha\varphi^2 + \varphi_s^{-2} - 6\sqrt{\alpha}\varphi\varphi_t \sinh 2\sqrt{\alpha}t \right), \right.$ $\left. 2\varphi_s^{-3} \left(\varphi_t \cosh 2\sqrt{\alpha}t - \sqrt{\alpha}\varphi \sinh 2\sqrt{\alpha}t \right) \right)$ $\left(\sinh 2\sqrt{\alpha}t \left(3\varphi_t^2 + 3\alpha\varphi^2 + \varphi_s^{-2} - 6\sqrt{\alpha}\varphi\varphi_t \cosh 2\sqrt{\alpha}t \right), \right.$ $\left. 2\varphi_s^{-3} \left(\varphi_t \sinh 2\sqrt{\alpha}t - \sqrt{\alpha}\varphi \cosh 2\sqrt{\alpha}t \right) \right)$
	$\beta\varphi^\alpha$	$t\partial_t + \frac{\alpha+3}{\alpha-1}s\partial_s + \frac{2\varphi}{1-\alpha}\partial_\varphi$	$\lambda = -\frac{8}{\alpha+5},$ $\alpha \neq \pm 1, 3, -5,$ $c = 0$	$\left(\frac{t\varphi_t^2}{2} + \frac{((\alpha+3)s\varphi_s+2\varphi)\varphi_t}{\alpha-1} + \frac{t}{\alpha+1} \left(\frac{(\alpha+5)^2}{2(\alpha-3)} \varphi_s^{\frac{2(\alpha+1)}{\alpha+5}} - \beta\varphi^{\alpha+1} \right), \right.$ $\left. \frac{t(\alpha+5)}{(3-\alpha)} \varphi_t \varphi_s^{\frac{\alpha-3}{\alpha+5}} - \frac{\alpha+3}{2(\alpha-1)} s\varphi_t^2 + \frac{2(\alpha+5)}{(3-\alpha)(\alpha-1)} \varphi \varphi_s^{\frac{\alpha-3}{\alpha+5}} \right.$ $\left. + \frac{(\alpha+3)s}{2(\alpha^2-1)} \left((\alpha+5)\varphi_s^{\frac{2(1-\alpha)}{\alpha+5}} - 2\beta\varphi^{\alpha+1} \right) \right)$

Продолжение таблицы 7

G	H	X	Ограничения	Закон сохранения (T^t, T^s) , где $g' \equiv G, h' \equiv H$
		$t^2 \partial_t + t \varphi \partial_\varphi$	$\lambda = -4,$ $\alpha = -3,$ $c = 0$	$\left((3 \varphi_t^2 + 3 \beta \varphi^{-2} + \varphi_s^{-2}) t^2 - 3 \varphi (2t \varphi_t - \varphi), \right.$ $\left. 2 t \varphi_s^{-3} (t \varphi_t - \varphi) \right)$

Таблица 8 — Законы сохранения в координатах Эйлера

G	H	X	Ограничения	Закон сохранения $({}^e T^t, T^x)$, где $g' \equiv G, h' \equiv H$
$G \left(\frac{1}{\rho} \right)$	$H(x)$	∂_t	-	$(\rho (u^2 - 2g - 2h), 2u (g' + (\frac{1}{2}u^2 - g - h) \rho))$
		∂_s	-	$(u, \frac{1}{2}u^2 - g - h + \rho^{-1}g')$
	0	∂_φ	-	$(\rho u, \rho u^2 + g')$
		$t \partial_\varphi$	-	$(\rho (x - tu), u \rho (x - tu) - tg')$
$\alpha \varphi$		$\sin \sqrt{ \alpha } t \partial_\varphi$	$\alpha < 0$	$(\rho(\sqrt{ \alpha } x \cos \sqrt{ \alpha } t - u \sin \sqrt{ \alpha } t),$ $x \rho u \sqrt{ \alpha } \cos \sqrt{ \alpha } t - (u^2 \rho + g') \sin \sqrt{ \alpha } t)$
		$\cos \sqrt{ \alpha } t \partial_\varphi$	$\alpha < 0$	$(\rho(\sqrt{ \alpha } x \sin \sqrt{ \alpha } t + u \cos \sqrt{ \alpha } t),$ $x \rho u \sqrt{ \alpha } \sin \sqrt{ \alpha } t + (u^2 \rho + g') \cos \sqrt{ \alpha } t)$
		$\sinh \sqrt{\alpha} t \partial_\varphi$	$\alpha > 0$	$(\rho(\sqrt{\alpha} x \cosh \sqrt{\alpha} t - u \sinh \sqrt{\alpha} t),$ $x \rho u \sqrt{\alpha} \cosh \sqrt{\alpha} t - (u^2 \rho + g') \sinh \sqrt{\alpha} t)$
		$\cosh \sqrt{\alpha} t \partial_\varphi$	$\alpha > 0$	$(\rho(\sqrt{\alpha} x \sinh \sqrt{\alpha} t - u \cosh \sqrt{\alpha} t),$ $x \rho u \sqrt{\alpha} \sinh \sqrt{\alpha} t - (u^2 \rho + g') \cosh \sqrt{\alpha} t)$
$-(\varphi_s + c)^\lambda,$ $\lambda \neq 0, 1$	0	$2t \partial_t + \varphi \partial_\varphi$	$\lambda = -4$	$(\rho ((u^2 + \frac{1}{3} \rho^2) t - ux),$ $\rho (u (\rho^2 + u^2) t - (u^2 + \frac{1}{3} \rho^2) x))$

Продолжение таблицы 8

G	H	X	Ограничения	Закон сохранения (${}^eT^t, T^x$), где $g'' \equiv G, h' \equiv H$
		$t^2\partial_t + t\varphi\partial_\varphi$	$\lambda = -4$	$\left(\rho \left(\left(\frac{1}{3}\rho^2 + u^2 \right) t^2 - x(2tu - x) \right) \right.$ $\left. \rho \left((\rho^2 + u^2)ut^2 - 2x\left(\frac{1}{3}\rho^2 + u^2\right)t + ux^2 \right) \right)$
	$\alpha\varphi$	$\cos 2\sqrt{ \alpha t}\partial_t$ $-\sqrt{ \alpha }\varphi \sin 2\sqrt{ \alpha t}\partial_\varphi$	$\lambda = -4,$ $\alpha < 0$	$\left(\rho \left(xu\sqrt{ \alpha } \sin 2\sqrt{ \alpha t} \right. \right.$ $\left. + \frac{1}{2} \left(u^2 - \alpha x^2 + \frac{1}{3}\rho^2 \right) \cos 2\sqrt{ \alpha t} \right),$ $\left. \rho \left(\sqrt{ \alpha x} \left(u^2 + \frac{1}{3}\rho^2 \right) \sin 2\sqrt{ \alpha t} \right. \right.$ $\left. + \frac{1}{2} u \left(u^2 - \alpha x^2 + \rho^2 \right) \cos 2\sqrt{ \alpha t} \right)$
		$\sin 2\sqrt{ \alpha t}\partial_t$ $+\sqrt{ \alpha }\varphi \cos 2\sqrt{ \alpha t}\partial_\varphi$	$\lambda = -4,$ $\alpha < 0$	$\left(\rho \left(xu\sqrt{ \alpha } \cos 2\sqrt{ \alpha t} \right. \right.$ $\left. - \frac{1}{2} \left(u^2 - \alpha x^2 + \frac{1}{3}\rho^2 \right) \sin 2\sqrt{ \alpha t} \right),$ $\left. \rho \left(\sqrt{ \alpha x} \left(u^2 + \frac{1}{3}\rho^2 \right) \cos 2\sqrt{ \alpha t} \right. \right.$ $\left. - \frac{1}{2} u \left(u^2 - \alpha x^2 + \rho^2 \right) \sin 2\sqrt{ \alpha t} \right)$
		$\cosh 2\sqrt{\alpha t}\partial_t$ $+\sqrt{\alpha}\varphi \sinh 2\sqrt{\alpha t}\partial_\varphi$	$\lambda = -4,$ $\alpha > 0$	$\left(\rho \left(xu\sqrt{\alpha} \sinh 2\sqrt{\alpha t} \right. \right.$ $\left. - \frac{1}{2} \left(u^2 + \alpha x^2 + \frac{1}{3}\rho^2 \right) \cosh 2\sqrt{\alpha t} \right),$ $\left. \rho \left(\sqrt{\alpha x} \left(u^2 + \frac{1}{3}\rho^2 \right) \sinh 2\sqrt{\alpha t} \right. \right.$ $\left. - \frac{1}{2} u \left(u^2 + \alpha x^2 + \rho^2 \right) \cosh 2\sqrt{\alpha t} \right)$
		$\sinh 2\sqrt{\alpha t}\partial_t$ $+\sqrt{\alpha}\varphi \cosh 2\sqrt{\alpha t}\partial_\varphi$	$\lambda = -4,$ $\alpha > 0$	$\left(\rho \left(xu\sqrt{\alpha} \cosh 2\sqrt{\alpha t} \right. \right.$ $\left. - \frac{1}{2} \left(u^2 + \alpha x^2 + \frac{1}{3}\rho^2 \right) \sinh 2\sqrt{\alpha t} \right),$ $\left. \rho \left(\sqrt{\alpha x} \left(u^2 + \frac{1}{3}\rho^2 \right) \cosh 2\sqrt{\alpha t} \right. \right.$ $\left. - \frac{1}{2} u \left(u^2 + \alpha x^2 + \rho^2 \right) \sinh 2\sqrt{\alpha t} \right)$

Продолжение таблицы 8

G	H	X	Ограничения	Закон сохранения $({}^e T^t, T^x)$, где $g'' \equiv G, h' \equiv H$
	$\beta \varphi^\alpha$	$t^2 \partial_t + t \varphi \partial_\varphi$	$\lambda = -4,$ $\alpha = -3,$ $c = 0$	$\left(\rho \left(\left(\frac{1}{3} \rho^2 + u^2 + \beta x^{-2} \right) t^2 - x(2tu - x) \right), \right.$ $\left. \rho \left((\rho^2 + u^2 + \beta x^{-2}) t^2 u - 2tx \left(\frac{1}{3} \rho^2 + u^2 \right) + ux^2 \right) \right)$

Приложение Д

Некоторые детали реализации и примеры использования программного комплекса Schemelib

В этом приложении разбираются некоторые детали реализации программного комплекса Schemelib, описанного в разделе 5.5, и приводится подробный пример его использования. Программный код Schemelib можно найти на веб-сайте [156].

Д.1 Детали реализации Schemelib

Библиотека Schemelib включает в себя следующие основные модули (приблизительно соответствующие абстрактным программным «слоям», описанным в разделе 5.5).

- `schemelib.common` — содержит некоторые вспомогательные структуры общего назначения для работы с ударными волнами, вязкостью и др.
- `schemelib.problems` — содержит классы точных решений некоторых задач, таких как стандартные задачи о поршне (`shock_wave_problem`, `rarefaction_wave_problem`), задача об ускоряющемся поршне (`speeding_piston_problem`), о столкновении двух ударных волн (`two_shock_waves_problem`) и др. Здесь же находятся некоторые вспомогательные программы, написанные на языке программирования Maple.
- `schemelib.schemes` — включает классы некоторых стандартных конечно-разностных схем для уравнений одномерной газовой динамики и мелкой воды, такие как явная и неявная схемы Самарского–Попова (`explicit`, `implicit`), схема Еленина–Крылова (`yelenin`) и др.
- `schemelib.tests` — содержит классы различных тестовых задач, а также наборы тестов (`suits`).
- `schemelib.utils` — содержит различные вспомогательные функции и классы, а также классы для экспорта результатов вычислений.
- `schemelib.Maple` — внешний модуль для работы с Maple.

Модуль, предназначенный для работы с Maple, содержит следующие основные переменные и функции:

- `standardTestNames` — имена стандартных тестов, которые используются `Schemelib` при экспорте данных. Они входят в состав имен соответствующих файлов.
- `standardCLNames` — стандартные имена законов сохранения, которые используются `Schemelib` при экспорте данных. Входят в состав имен соответствующих файлов.
- `readLayers(dir, subname, schemename, subtestName)` — низкоуровневая функция импорта данных из файла. Имя файла складывается из имени директории (`dir`), названия теста (`subname`), схемы (`schemename`) и (опционально) символического имени закона сохранения (`subtestName`).
- `readTest(schemeNames, lineStyles, colors, legends, dir, testName, subtestName, frameNO, animated)` — считать из файлов и отобразить полученные в результате расчетов данные для списка схем `schemeNames` со стилями линий `lineStyles`, цветами `lineStyles` и подписями `legends`. Параметр `animated` указывает, следует ли отобразить графики в виде покадровой анимации. Если параметр `animated` не указан, то параметр `frameNO` определяет номер кадра анимации (т. е. момент времени), для которого следует вывести результаты. Остальные параметры аналогичны параметрам функции `readLayers`.
- `readStandardTest(dir, testName, subtestName, frameNO, animated)` — упрощенная реализация функции `readTest` для стандартных схем. Пример ее использования будет рассмотрен ниже.

Д.2 Пример применения `Schemelib`

В листинге [Д.1](#) приведен исходный код программы на языке Python, в которой, с помощью `Schemelib`, создается и выполняется набор тестов для нескольких стандартных схем. При этом результаты расчетов экспортируются в анимации в формате MP4 и в текстовые файлы данных.

Далее, в листинге [Д.2](#), приводятся некоторые примеры отображения полученных данных с помощью Maple: сначала, с помощью модуля `Schemelib.mpl`, считываются текстовые файлы данных, полученные в результате работы программы, описанной в листинге [Д.1](#), а затем производится графическое отображение этих данных средствами Maple.

Листинг Д.1 — Пример создания сложного теста различных схем для уравнений мелкой воды

```

# -*- coding: utf-8 -*-
# Используем сокращенные названия модулей
# Обратите внимание, что некоторые интерпретаторы Python
# не допускают таких сокращений. Тогда имена модулей
5 # ниже необходимо написать полностью
import schemelib as slib
import slib.schemes as sscms
import slib.tests as stst

10 # Подключение нескольких схем (Самарского, Еленына и др.)
from sscms.implicit import ImplicitScheme as Samarskiy
from sscms.yelenin import ImplicitSchemeYelenin as Yelenin
from sscms.invariant import InvariantScheme as Invariant
from sscms.korobitsyn import SchemeKorobitsyn as Korobitsyn
15 from sscms.explicit_naive import NaiveExplicitScheme as Naive

# Подключение нескольких стандартных тестов из библиотеки
from stst.inserting_piston_test import InsertingPistonTest
from stst.withdrawing_piston_test import WithdrawingPistonTest
20 from stst.overtaking_wave_test import OvertakingWaveTest
from stst.two_shock_waves_test import TwoShockWavesTest

# Подключение вспомогательных классов и функций
import slib.view animator as animator
25 from slib.utils.sw_state_fn import setShallowWaterStateFn
from slib.utils.data.test_results_maple_exporter\
    import TestResultsMapleExporter

# Формируем набор тестовых заданий
30 # в формате [тест, продолжительность]
suit = [
    [WithdrawingPistonTest, 0.6],
    [InsertingPistonTest, 0.6],
    [OvertakingWaveTest, 1.0],
35     [TwoShockWavesTest, 1.4]
]

# Производим обход всех тестовых заданий в цикле
40 for [test, time] in suit:

    testName = test.__name__

```

```
# Некоторые параметры:
## суммарная масса S для каждого теста своя, она
45 ## определяется позднее
S = 0
## начальную высоту столбца жидкости примем всюду равной 1
Rho0 = 1.0
## множитель временного шага сетки: tau = tauMult * h
50 tauMult = 0.025

# Список для хранения результатов расчетов по тесту
datas = []
# Перечисляем набор схем, с которыми будем работать
55 schemes = [Invariant, Naive, Samarskiy, Yelenin, Korobitsyn]

# В цикле обходим все схемы
for scheme in schemes:

60 # Создаем экземпляр теста с параметрами
aTest = test(scheme,
              time=time,
              gamma=2,
              tauMult=tauMult,
65 T0=1,
              Rho0=Rho0,
              R=Rho0)

70 # Вспомогательная функция, устанавливающая схеме
# уравнение состояния для мелкой воды. Нужно для
# некоторых схем уравнений газовой динамики
setShallowWaterStateFn(aTest.scheme)

75 # Производим расчет уровня жидкости (в случае
# газовой динамики - плотности)
data = aTest.testDensity(animateCLs=False,
                          useDefaultAnimator=False)
# Добавляем результат в список посчитанных данных
datas.append(data)
80 # Запишем полную массу жидкости в переменную
S = aTest.S

# Осуществим экспорт полученных данных в формат TXT
# для последующей обработки в Maple
```

```

85     exporter = TestResultsMapleExporter()
        fileName = 'export/{0}_{1}'\
                .format(testName, data.scheme.name)
        exporter.export(data, S, fileName, 'txt')

90     # Сохраним анимацию в формате MP4 для последующей обработки
        anim = animator.Animator()
        # Для всех графиков схем определим цвета и стили линий
        colors=[(0,1,0),(1,0,0),(0,0.5,1),(1,0.8,0),(0,1,0.8)]
        linestyle=[None,None,'--','-.',None]

95     # Выведем все данные по схемам на один график
        # в виде анимации MP4
        anim.animateComparision('mp4/compare-{0}'.format(testName),
                                S, datas, colors=colors,
                                linestyle=linestyle)

```

Листинг Д.2 — Обработка данных в Maple

```

(* Загрузка вспомогательного пакета Schemelib *)
read("Schemelib.mpl"):
with(Schemelib, plots):

5 (* Работа ведется из текущей директории *)
dir := cat(currentdir(), "\\"):

(* Выбирается имя одного из
стандартных тестов (4 - столкновение ударных волн)
и номер кадра *)
10 testName := standardTestNames[4]:
    frameNo := 20:

(* следующая команда отображает совмещенные графики
закон сохранения энергии (standardCLNames[2]) для всех
стандартных схем в виде покадровой анимации *)
15 readStandardTest(dir, testName, standardCLNames[2], frameNo, true);

(* следующая команда отображает совмещенные графики
тестовой задачи и всех законов сохранения для кадра
анимации frameNo *)
20 display(Matrix(2,2, [
    [readStandardTest(dir, testName, standardCLNames[1], frameNo),
      readStandardTest(dir, testName, standardCLNames[2], frameNo)],
    [readStandardTest(dir, testName, standardCLNames[3], frameNo),
      readStandardTest(dir, testName, standardCLNames[4], frameNo)]]));
25

```

Наконец, с помощью командной строки

```
> python mkgif.py
```

модуль `mkgif.py`, являющийся частью `Schemelib`, может преобразовать все ранее созданные (см. листинг [Д.1](#)) анимации MP4 в формат GIF.