

На правах рукописи

Казаков Александр Олегович

**Численное моделирование волновых процессов в
задачах ультразвукового неразрушающего контроля
сеточно-характеристическим методом**

Специальность 05.13.18 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)».

Научный руководитель: **Васюков Алексей Викторович**,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры информатики
и вычислительной математики МФТИ

Официальные оппоненты: **Левин Владимир Анатольевич**,
доктор физико-математических наук,
профессор,
федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
образования «Московский государственный
университет имени М.В.Ломоносова»,
кафедра «Вычислительная механика» меха-
нико-математического факультета,

Терехов Кирилл Михайлович,
кандидат физико-математических наук,
научный сотрудник,
Институт вычислительной математики
им. Г.И. Марчука Российской академии наук,
ВНК №2,

Ведущая организация: Автономная некоммерческая организация
высшего образования «Университет Иннополис»

Защита состоится 19 декабря 2019 г. в __ часов на заседании диссертационного совета Д 002.024.03 при ИПМ им. М.В. Келдыша РАН по адресу: 125047, Москва, Миусская пл., д.4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН и на сайте <https://keldysh.ru>.

Автореферат разослан __ октября 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.024.03,
канд. физ.-мат. наук

Корнилина Марина Андреевна

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Роль композиционных материалов в науке и технике растёт начиная с середины XX века. Их основные преимущества – большая лёгкость и устойчивость к коррозии при сохранении полезных свойств своих некомпозиционных аналогов.

Вместе с тем, переход к использованию композиционных материалов в авиации и других областях с высокой ответственностью проводится очень осторожно, так как требования к точности сборки и бережности эксплуатации повышаются. Одной из опасностей использования многослойных материалов является возможность потери образцом необходимых прочностных качеств из-за внутреннего повреждения – расслоения, не обнаружимого без использования специальных приборов неразрушающего контроля.

Ввиду того, что авиационные композиты производятся из слоёв материала, обладающего анизотропными свойствами, волновая картина в исследуемых образцах значительно сложнее, чем в однослойных образцах с изотропной реологией, что в свою очередь увеличивает сложность анализа показаний приборов неразрушающего контроля.

Точно так же ультразвуковые исследования в медицине имеют дело с волнами, сложным образом отражёнными от различных поверхностей неоднородной структуры человеческого органа или части тела.

Всё это говорит о важности изучения внутренней волновой картины в исследуемых образцах при проведении ультразвуковых исследований для лучшего понимания результирующих показаний приборов на поверхности. Возникает необходимость в моделировании динамических процессов, происходящих в телах при их неразрушающем контроле. Для моделирования сложной геометрии и неоднородной структуры образцов даже в случае линейной реологии среды необходимо применение компьютерного расчёта.

Данная работа посвящена применению сеточно-характеристического метода к моделированию волновых процессов при различных типах ультразвуковых исследований.

Целью данной работы является разработка, программная реализация и верификация математической модели и численного метода для расчётов процессов ультразвукового неразрушающего контроля конструкций сложной геометрии и реологии. Для достижения поставленной цели в рамках работы были рассмотрены и решены следующие задачи:

1. Разработка математической модели процесса ультразвукового исследования образцов сложной реологии и геометрии (инженерных конструкций из многослойных анизотропных композиционных материалов, биологических тканей головы человека). Модель должна обеспечить воспроизведение эффектов, наблюдаемых в натуральных

- экспериментах, и позволить проводить прямое численное моделирование ультразвукового исследования в сложных случаях.
2. Разработка численного метода, учитывающего волновую природу уравнений и позволяющего проводить расчёты как на структурированных, так и на неструктурированных сетках для расчётов в областях сложной формы с явным выделением контактных границ между материалами.
 3. Создание параллельного программного комплекса, реализующего данный численный метод, с возможностью последующего расширения круга решаемых волновых задач путём добавления других типов уравнений. Добавление новой математической модели должно происходить с минимальным дублированием уже имеющегося кода, но такая гибкость не должна приводить к уменьшению вычислительной эффективности программы.
 4. Численное моделирование волновых процессов, происходящих при ультразвуковом исследовании компонент обшивки самолёта из многослойных композиционных материалов. Моделирование процесса неразрушающего контроля вплоть до расчёта показаний датчика, сравнение численных расчётов с экспериментальными данными, верификация реализованных модели и метода по данным натурных экспериментов.
 5. Численное моделирование медицинского ультразвукового исследования биологических тканей головы человека с явным выделением границ между тканями различных типов. Демонстрация стабильной работы модели и метода на сторонних сетках сложной геометрии, построенных по анатомическим данным конкретного пациента.

Научная новизна:

1. Произведён анализ возможности применения сеточно-характеристического метода на треугольных и тетраэдральных расчётных сетках существенной неперIODичности. Выявлены неизвестные ранее причины осцилляций на границах областей интегрирования. Предложены модификации метода для устранения выявленных проблем. Для эффективной реализации метода предложена схема интерполяции второго порядка точности на неперIODических треугольных и тетраэдральных сетках, не требующая хранения значений интерполируемой функции в центрах рёбер ячеек.
2. Благодаря использованию техник метапрограммирования (шаблонов C++) созданный параллельный программный комплекс позволяет без потери вычислительной эффективности добавлять новые типы волновых уравнений, только описывая их свойства в коде. Все остальные компоненты, в том числе и численный метод, переиспользуются.

3. Предложенная модель позволила получить соответствие расчётов и натуральных экспериментов по неразрушающему контролю композитных панелей. В ходе данных расчётов продемонстрирована важность прямого учёта распространения волн в материалах прибора, так как переотражение волн внутри кристаллической призмы датчика оказывает существенное влияние на его показания.
4. Расчёты с использованием сетки головы человека с явным выделением контактов между различными биологическими тканями показали применимость модели, метода и программной реализации для задач со сложной геометрией с большим количеством пустот, выпуклостей и изгибов. Автору неизвестно о других успешных расчётах сеточно-характеристическим методом на непериодических сетках с геометрией такой сложности.

Теоретическая и практическая значимость Теоретическая ценность работы состоит в том, что область применения сеточно-характеристического метода была расширена на сетки сложной геометрии. Это стало возможно в результате выполненного анализа работы метода на сетках сложной геометрии, разбора причины осцилляций на границах областей интегрирования, реализации ряда модификаций метода для устранения обнаруженных проблем.

Практическая значимость заключается в том, что результаты численного моделирования ультразвукового неразрушающего контроля образца из многослойного анизотропного композиционного материала могут быть применены для детального анализа волновых процессов, происходящих в исследуемом образце и приборе, что даёт возможность глубже понять вид графиков и А- и В-сканов – результирующих показаний прибора.

Аналогично результаты численного моделирования ультразвукового исследования биологических тканей человека с явным выделением различных видов тканей дают возможность изучения волновых картин внутри обследуемых органов, что позволяет интерпретировать результаты, получаемые на экранах приборов ультразвукового исследования и оценивать возможности данной техники для решения тех или иных задач медицинской диагностики.

Наконец, созданный программный комплекс спроектирован с учётом возможности быстрого добавления новых типов волновых уравнений, что позволит в дальнейшем использовать его для численных расчётов в рамках других физических и математических моделей.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработана математическая модель для расчётов волновых процессов в среде при проведении ультразвукового неразрушающего контроля изотропных и анизотропных материалов, в том числе сложной геометрии, в приближении малых деформаций.

2. Разработан численный метод из семейства сеточно-характеристических. Метод рассчитан на применение как на периодических прямоугольных, так и на непериодических тетраэдральных расчётных сетках, благодаря чему позволяет проводить расчёты в областях сложной формы, вплоть до моделирования распространения волн в частях тела человека с выделением различных тканей. Произведён подробный анализ метода на треугольных и тетраэдральных расчётных сетках с указанием сложностей, связанных с непериодичностью сетки и вызывающих неустойчивость расчёта. Предложенные в работе модификации метода позволили провести ряд расчётов, до этого неустойчивых.
3. Создан параллельный программный комплекс на C++, реализующий предложенные модель и метод. За счёт использования техники шаблонизации программный комплекс расширяемый без потери производительности, на данный момент реализованы модели изотропного и анизотропного упругого тела и акустики, периодические прямоугольные и непериодические тетраэдральные и треугольные расчётные сетки.
4. Проведены расчёты, моделирующие эксперимент по ультразвуковому неразрушающему контролю композитной панели с учётом её анизотропной реологии и с учётом влияния геометрии прибора на его показания. Результаты моделирования сверены с экспериментальными данными для верификации модели, метода и программной реализации.
5. Проведены расчёты, моделирующие ультразвуковые исследования в биологических тканях головы человека с явным выделением соединительной, костной, мозговой, мышечной ткани и сосудов. На сетках такой неоднородности и непериодичности, исходя из известных автору работ, устойчивый расчёт сеточно-характеристическим методом удался впервые.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью используемого математического аппарата, выполнением тестовых расчётов модельных постановок с известным решением, верификацией по данным натурных экспериментов.

Апробация работы. Результаты работы были доложены, обсуждены и получили одобрение специалистов на следующих научных конференциях:

1. XVIII Всероссийская конференция молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям. Иркутск, 21-25 августа 2017 г.
2. 2nd International Conference on Computer Simulation in Physics and beyond (CSP2017). Moscow, 9-12 October 2017.

3. Quasilinear equations, inverse problems and their applications. Dolgoprudny, 12-15 Sept. 2016.
4. 50 years of the development of grid-characteristic method. MIPT & ICAD RAS, Dolgoprudniy, March 31 - April 3, 2018.
5. XLI Академическое чтение по космонавтике. Секция 22 им. академика В.Н. Челомея (Ракетные комплексы и ракетно-космические системы. Проектирование, экспериментальная отработка, лёгкие испытания, эксплуатация). Реутов, 24-27 января 2017 г.
6. 58-я научная конференция МФТИ. Долгопрудный, 23–28 ноября 2015 г.
7. 59-я научная конференция МФТИ. Долгопрудный, 21–26 ноября 2016 г.

Работа поддержана рядом государственных грантов:

1. Грант РФФИ 16-07-00884 А “Численное исследование поведения композиционных материалов под действием динамической нагрузки”, 2016-2018 гг.
2. Грант РФФИ 17-07-00972 А “Разработка параллельных численных методов для моделирования на суперкомпьютерах воздействия на композитные конструкции высокоскоростных соударений и интенсивных пучков частиц”, 2017-2018 гг.
3. Грант РФФИ 18-29-02127 мк “Разработка методики моделирования процессов, протекающих в теле человека при применении интеллектуальных систем неинвазивной хирургии” 2018-2019 гг.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 статьях [1–7], 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1–5], в том числе 5 – в изданиях, входящих в Scopus [1–5], в том числе 3 – в журналах, индексируемых Web of Science [1; 3; 4].

Личный вклад. Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем. Заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Среди публикаций соискателя [1] выполнена и опубликована без соавторов. В [2; 4] соискателю принадлежат предложенный численный метод и программный комплекс для выполнения расчётов. В [3] соискателем разработаны существенные модификации численного метода, которые позволили выполнить расчёты, бывшие ранее неустойчивыми; расчёты с использованием модифицированного метода также выполнены соискателем. В [5] соискателем предложена модель процесса неразрушающего контроля и выполнены расчёты с использованием данной модели. В [6; 7] соискателем также предложена модель и выполнены расчёты на её основе.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается её научная новизна, теоретическая и практическая значимость, формулируются положения, выносимые на защиту, перечисляются конференции и научные статьи, в которых были доложены результаты работы, с указанием вклада автора.

Первая глава посвящена математической модели процесса ультразвукового исследования инженерных конструкций из многослойных анизотропных композиционных материалов и биологических тканей.

Изначально принимается приближение малости деформаций, оправданное для задач ультразвукового неразрушающего контроля. Описываются две модели: линейной упругости и акустики. С использованием обозначений:

- ρ — плотность среды в данной точке,
- \vec{v} — вектор скорости частиц среды в данной точке,
- σ — симметричный тензор напряжений в данной точке,
- p — давление,
- \vec{f} — массовые силы, действующие на единицу объёма среды,
- \mathbf{F} — силы, обусловленные вязкостью,
- \mathbf{q} — 4-тензор упругих постоянных,
- K — модуль объёмного сжатия

уравнения для модели упругости записываются в виде

$$\begin{aligned}\rho \dot{\vec{v}} &= \nabla \cdot \sigma + \vec{f} \\ \dot{\sigma} &= \frac{1}{2} \mathbf{q} : (\nabla \otimes \vec{v} + (\nabla \otimes \vec{v})^T) + \mathbf{F},\end{aligned}$$

а уравнения для модели акустики:

$$\begin{aligned}\rho \dot{\vec{v}} &= -\nabla p + \vec{f} \\ \dot{p} &= -K(\nabla \cdot \vec{v}) + F.\end{aligned}$$

Для модели линейной упругости возможная анизотропия материала учитывается в явном виде через тензор упругих постоянных \mathbf{q} . Рассматриваются различные виды анизотропии: произвольно анизотропный материал с 21 независимой упругой компонентой, ортотропный материал с 9 компонентами, трансверсально-изотропный материал с 5 компонентами и изотропный материал с 2 компонентами.

Далее рассматриваются простейшие модели учёта пластической реологии материала — критерий Мизеса, и вязкой реологии материала — модели вязкости Максвелла и Фойхта.

Также приводятся некоторые аналитические формулы, используемые в дальнейшем для верификации численных расчётов.

Вторая глава посвящена описанию общих вопросов численного метода, не связанных напрямую с моделированием распространения волн: Эйлера и Лагранжевы подходы к описанию сплошной среды, расщепление по физическим процессам, движение расчётной сетки в Лагранжевом подходе, реализация простейших моделей пластичности и вязкости как ступеней расщепления по физическим процессам.

В части движения расчётной сетки описывается способ смещения узлов сетки в стиле метода предиктор-корректор, обеспечивающий истинно второй порядок точности решения. Верификация порядка точности этого подхода для одномерной постановки есть в секции результатов. Для реализации модели пластического течения используется правило Уилкинса. Модель вязкости Максвелла реализуется решением обыкновенного дифференциального уравнения как дополнительной ступени расщепления по физическим процессам.

Однако, большинство расчётов в данной работе посвящены ультразвуковому неразрушающему контролю, поэтому сделаны в приближении малых деформаций, в связи с чем движение расчётной сетки не производится, как не применяется и модель пластичности.

Третья глава посвящена численному методу для расчёта распространения волн в областях сложной геометрической формы – версии сеточно-характеристического метода для непериодических треугольных и тетраэдральных расчётных сеток. Приведём здесь её описание в сжатом виде.

В произвольной D -мерной области ($D = 2, 3$) решается система уравнений в частных производных гиперболического типа:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^D \mathbf{A}_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} = 0.$$

Здесь $\{x_1, \dots, x_D\}$ – декартова система координат с ортонормированным базисом, $\vec{u} = \vec{u}(t, x_1, \dots, x_D)$ – вектор неизвестных размерности N , матрицы \mathbf{A}_i считаются постоянными по времени и пространству. Кроме того, ставятся начальные условия – значения \vec{u} во всей области интегрирования в нулевой момент времени и граничные условия – некоторое количество скалярных условий на \vec{u} на границе области интегрирования в любой момент времени.

В качестве вектора решения \vec{u} в модели линейной упругости в 3D в приближении малых деформаций, описанной в первой главе, используются значения компонент скорости \vec{v} и тензора напряжений σ . В трёхмерном пространстве это составляет $N = 9$ независимых переменных:

$$\vec{u} = (v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})^T.$$

\mathbf{A}_i ввиду громоздкой записи здесь приводить не будем. Число положительных (отрицательных) собственных значений матрицы \mathbf{A}_i в этом случае

составляет $M = 3$, что соответствует одной продольной волне сжатия-разрежения (р-волна) и двум взаимно перпендикулярным поперечным волнам сдвига (s-волны).

Для модели акустики имеем:

$$\vec{u} = (\vec{v}^T, p)^T.$$

В явном виде выписывать матрицы \mathbf{A}_i нет смысла, достаточно записать их действие на вектор решения \vec{u} :

$$\mathbf{A}_i \vec{u} = \begin{pmatrix} (p/\rho) \cdot \vec{l}_i \\ K \cdot (\vec{l}_i \cdot \vec{v}) \end{pmatrix},$$

где \vec{l}_i – единичный вектор вдоль направления действия этой матрицы. К примеру, для матрицы \mathbf{A}_1 , действующей вдоль оси x , он равен $\vec{l}_1 = (1 \ 0 \ 0)^T$ в 3D.

Итоговый вид спектрального разложения для матрицы вдоль направления \vec{l} для модели акустики в 3D:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{l} & \vec{l}' & \vec{l}'' & \vec{l}''' \\ c\rho & -c\rho & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{l}^T & \frac{1}{c\rho} \\ \vec{l}'^T & -\frac{1}{c\rho} \\ 2\vec{l}''^T & 0 \\ 2\vec{l}'''^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь вектора \vec{l} , \vec{l}' , \vec{l}'' образуют ортонормированный базис.

Все рассуждения ведутся в свете применения СХМ к расчёту на непериодических расчётных сетках. Таким образом, они могут быть применены и к периодическим сеткам, но в случае последних метод можно сильно упростить благодаря структурированности геометрии.

Схематично двумерная область интегрирования, покрытая непериодической треугольной сеткой, изображена на рисунке 1. Значения интегрируемой функции в СХМ хранятся в узлах, а не в ячейках расчётной сетки.

Подразумевается, что внутри каждой области интегрирования матрицы \mathbf{A}_i , которые определяются реологией среды, постоянны. Для моделирования неоднородностей явно выделяются дополнительные области интегрирования, между которыми рассчитывается контакт – взаимозависимые граничные условия для каждой из контактирующих областей.

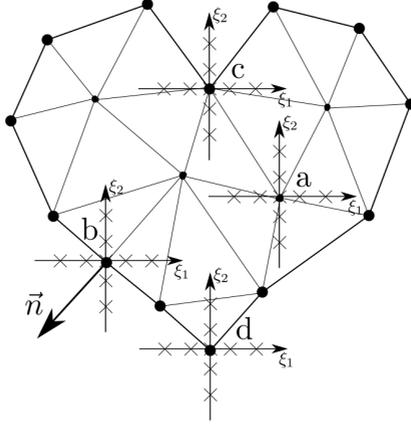


Рис. 1 — Иллюстрация сеточно-характеристического метода на треугольной расчётной сетке

Для численного решения многомерной системы уравнений необходимо перейти к решению квазиодномерных систем уравнений вдоль различных направлений в пространстве — так называемое расщепление по направлениям:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi_i} = 0, \quad i = 1 \dots D.$$

Здесь под $\{\xi_i\}$ подразумевается произвольный ортонормированный базис, не обязательно совпадающий с $\{x_i\}$.

Матрицы \mathbf{A}_i диагонализуются с полным набором собственных векторов:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}.$$

Здесь \mathbf{U}^{-1} — матрица собственных векторов, $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица собственных значений, \mathbf{U} — матрица собственных строк. Поэтому умножив данное уравнение слева на \mathbf{U} , внося постоянную матрицу \mathbf{U} под знак дифференциала и обозначая $\vec{r} = \mathbf{U} \vec{u}$ — инварианты Римана, получаем:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} = 0.$$

В новых переменных система распалась на независимые уравнения переноса. Их численное решение заключается в интерполяции значения функции на предыдущем временном слое в точке, где характеристика из узла на новом временном слое пересекает предыдущий. После переноса инвариантов с предыдущего временного слоя на новый производится обратная замена переменных $\vec{u} = \mathbf{U}^{-1} \vec{r}$.

Для полностью одномерного случая сказанное проиллюстрировано на рисунке 2.

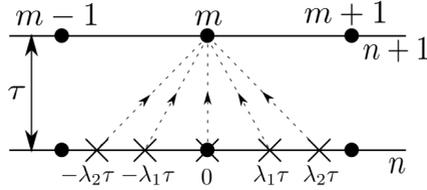


Рис. 2 — Основная идея сеточно-характеристического метода

Перейдём к описанию расчёта граничных узлов (расчёт контактных узлов в целом ему аналогичен). Произвольное линейное граничное условие для произвольной модели в общем виде записывается:

$$\mathbf{B} \cdot \vec{u} = \vec{b}.$$

Здесь \mathbf{B} — матрица размерности $M \times N$, \vec{b} — вектор размерности M , определяющие собой конкретный вид граничного условия.

К примеру, условие фиксированного напряжения \vec{f} , приложенного к полупространству с внешней нормалью \vec{n} в модели упругого тела:

$$\sigma \cdot \vec{n} = \vec{f}.$$

Примем для упрощения формул, что значение \vec{f} указано в глобальном базисе, тогда это условие для трёхмерного случая запишется в виде:

$$\vec{b} = \vec{f},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_x & 0 & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_x & 0 & n_y & n_z \end{pmatrix}.$$

Другой пример — условие фиксированной нормальной скорости v_n в модели акустики:

$$\vec{b} = (v_n),$$

$$\mathbf{B} = (\vec{n}^T, \quad 0).$$

На первом этапе делается расчёт граничных узлов по алгоритму для внутренних, при этом все инварианты Римана, соответствующие внешним характеристикам, приравниваются к нулю. Получается \vec{u}^{inner} . Затем

выполняется граничная коррекция – добавление к результату такой линейной комбинации внешних волн, которая обеспечит выполнение граничного условия:

$$\mathbf{B} \cdot (\vec{u}^{inner} + \mathbf{\Omega} \cdot \vec{\alpha}) = \vec{b}.$$

Здесь $\mathbf{\Omega}$ – матрица размерности $N \times M$, в столбцах которой стоят собственные векторы матрицы \mathbf{A} , соответствующие внешним характеристикам. По физическому смыслу эти столбцы можно назвать внешними волнами, то есть фиктивными волнами, как бы пришедшими извне области интегрирования. Вектор $\vec{\alpha}$ размерности M – это вектор коэффициентов линейной комбинации, которые нужно определить.

К примеру, если направление расчёта вдоль оси x , то для трёхмерной модели упругого тела матрица $\mathbf{\Omega}$ – это три однонаправленных волны вдоль оси x :

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{\lambda+2\mu}{c_p} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{c_s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{c_s} \\ \frac{\lambda}{c_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{c_p} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь первый столбец – р-волна, далее – две s-волны, λ, μ – параметры Ламе, $c_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$, $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ – скорости продольной и поперечной волн.

Другой пример: для модели акустики матрица $\mathbf{\Omega}$ состоит всего из одного столбца – продольной волны вдоль направления расчёта. Если ввести обозначения \vec{l} – единичный вектор вдоль направления расчёта, c – скорость продольной волны, ρ – плотность, то она запишется:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \vec{l} \\ c\rho \end{pmatrix}.$$

Для определения $\vec{\alpha}$ необходимо решить СЛАУ с матрицей $\mathbf{B}\mathbf{\Omega}$ размерностью $M \times M$:

$$\mathbf{B}\mathbf{\Omega} \cdot \vec{\alpha} = \vec{b} - \mathbf{B} \cdot \vec{u}^{inner}.$$

После определения коэффициентов линейной комбинации производится собственно коррекция, обеспечивающая выполнение граничных условий:

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^{inner} + \mathbf{\Omega} \cdot \vec{\alpha}$$

Описанный подход к расчёту граничных и контактных узлов сталкивается с несколькими проблемами. Во-первых, матрица СЛАУ граничного корректора может быть вырожденной при определённых углах между направлением расчёта и нормалью к поверхности. Иллюстрация этой проблемы для модели акустики и граничного условия фиксированной нормальной скорости показана на рисунке 3.

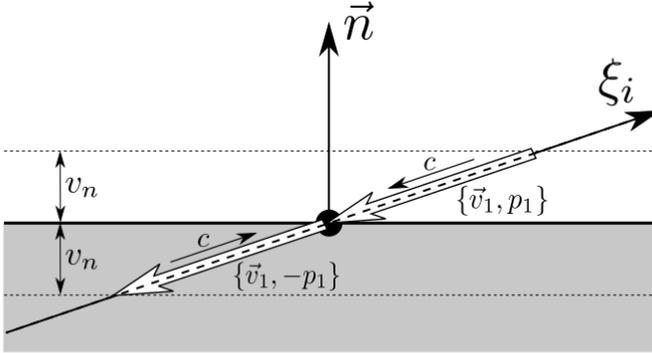


Рис. 3 — К пояснению возможности влияния волн вдоль направления расчёта на выполнение граничных условий

Решение этой проблемы заключается в том, что если волны, пришедшие снаружи расчётной области вдоль данного направления, не могут повлиять на выполнение граничного условия, то не могут и волны, пришедшие изнутри вдоль того же направления. Поэтому вначале каждого шага по времени к решению сразу добавляется такая добавка вдоль нормали к границе, которая обеспечивает выполнение граничного условия на следующем шаге по времени, благодаря чему граничная коррекция, описанная выше, выполняется в адекватном объёме.

Следующие несколько модификаций метода, предложенные в данной главе, направлены на обработку ситуаций под буквами с) и d) на рисунке 1 при расчёте вдоль горизонтальной оси, когда число внешних характеристик не равно числу положительных собственных значений матриц \mathbf{A}_i . Они заключаются в применении полусуммы коррекций с обеих сторон от узла и в случайном повороте расчётного базиса на каждом шаге по времени для минимизации этого явления.

Далее демонстрируется необходимость расчёта на тетраэдральных сетках, построенных стандартными сеточными генераторами, с шагом, большим классического Курантовского, ввиду систематического вырождения тетраэдров. Рассматриваются возникающие с этим сложности при

расчёте узлов граничных и внутренних, близких к границе, и предлагают модификации для их преодоления.

Оставшаяся часть главы посвящена описанию метода интерполяции на тетраэдральной сетке и задаче поиска ячейки триангуляции, содержащей искомую точку пространства.

Интерполяция второго порядка на треугольной (аналогично тетраэдральной) сетке, не требующая хранения значений функции в центрах рёбер ячеек, осуществляется следующим образом. Введём барицентрические координаты $\lambda_i(\vec{x})$ точки \vec{x} в треугольнике с вершинами $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ из условия:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \lambda_1(\vec{x})\vec{p}_1 + \lambda_2(\vec{x})\vec{p}_2 + \lambda_3(\vec{x})\vec{p}_3, \\ \lambda_1(\vec{x}) + \lambda_2(\vec{x}) + \lambda_3(\vec{x}) &= 1.\end{aligned}$$

Пусть известны значения функции $f(\vec{x})$ в вершинах треугольника $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ и необходимо интерполировать её значение в некоторой точке \vec{q} внутри треугольника. Следующий интерполяционный многочлен в точности воспроизводит линейную функцию:

$$P(\vec{x}) = \sum_i \lambda_i(\vec{x})f(\vec{p}_i),$$

а если в вершинах треугольника \vec{p}_i известны ещё и значения градиента функции $\nabla f(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{x})$, то можно получить многочлен, в точности воспроизводящий квадратичную функцию:

$$P(\vec{x}) = \sum_i \lambda_i(\vec{x}) \left(f(\vec{p}_i) + \frac{1}{2} \vec{g}(\vec{p}_i) \cdot (\vec{x} - \vec{p}_i) \right).$$

Значение градиента в узле расчётной сетки предлагается получать, записывая определение градиента для узла и его ближайших соседей. Это даёт переопределённую СЛАУ, решаемую методом наименьших квадратов.

Задачу поиска ячейки триангуляции, содержащей искомую точку пространства, в применении к сеточно-характеристическому методу удобнее всего решать с помощью алгоритма “Walk in triangulation”, который основан на анализе взаимной ориентации точек тетраэдров и отрезка между узлом сетки и искомой точки пространства. Описываются сложности, связанные с численной неточностью при поиске вдоль границ областей интегрирования, и модификации алгоритма для их преодоления.

В **четвертой главе** приведено описание созданного на основе предложенного численного метода программного комплекса.

Численные расчёты и работа с большими массивами данных – ресурсоёмкие задачи, требующие отсутствия лишних расходов при вычислениях и быстрой работы с памятью. Это возможно только при исключении лишних уровней абстракции при вызовах функций и доступе к данным в памяти. А исключение лишних уровней абстракции возможно только

при использовании компилируемых языков программирования с возможностью прямого управления выделением и освобождением памяти. На сегодняшний день среди таких языков стандартом де-факто являются С и С++. Поэтому программный комплекс в данной работе был реализован на языке С++, более подробное обоснование можно найти в тексте работы.

Одним из доводов в пользу С++ по сравнению с С является возможность использования техник метапрограммирования – так называемых шаблонов. В программном комплексе, реализованном в данной работе, шаблонная техника позволила существенно сократить объём кода при реализации различных структур и алгоритмов с однотипными интерфейсами. При написании программы изначально учитывалась необходимость создать расширяемую по функционалу систему, а именно обеспечить возможность расчёта:

- в одномерном, двумерном и трёхмерном пространстве,
- на различных типах расчётных сеток (прямоугольная, тетраэдральная и другие),
- различными типами численных методов (сеточно-характеристический, конечных разностей и другие),
- с различными типами реологии материалов (изотропная и анизотропная, упругая, упруго-пластическая, вязкоупругая и другие).

Поскольку почти каждая из этих опций может меняться независимо от других, общее количество возможных конфигураций растёт полиномиально, и написание собственного кода для каждой по отдельности неприемлемо. Данная задача, однако, эффективно решается с помощью шаблонизации. Во-первых, все классы расчётных сеток, численных методов и классы материалов, описывающие реологию среды, шаблонизируются по размерности пространства. Во-вторых, классы численных методов шаблонизируются по типам расчётных сеток и материалов, а классы расчётных сеток – по типам материалов, от которых зависит количество переменных и тип уравнений. Кроме того, для класса тетраэдральной (в 2D треугольной) расчётной сетки была сделана шаблонизация по типу используемой триангуляции, что позволяет менять реализацию функционала, связанного с топологией расчётной сетки, с собственной на функционал из библиотеки CGAL. Всё это позволило существенно снизить ненужное дублирование кода при добавлении нового функционала.

Пятая глава содержит результаты численных расчётов и состоит из трёх частей.

В **первой части** приводятся несколько расчётов на сравнение работы программы с аналитическими решениями: прохождение упругой волны через контакт слоёв с различными упругими параметрами при нормальном падении волны на границу раздела, численное исследование сходимости

метода в одномерном случае. Также демонстрируется моделирование упруго-пластической волны в трёхмерном случае с наблюдением характерных явлений: волны-упругого предвестника и волны упругой разгрузки.

Во **второй части** главы демонстрируются расчёты волновых процессов в многослойных анизотропных композиционных материалах. Проведено моделирование эксперимента по ультразвуковому неразрушающему контролю композитной пластины обшивки самолёта с внутренним расслоением. Экспериментальные данные были предоставлены сотрудниками НИО-3 Центрального аэрогидродинамического института имени Жуковского В.И. Голованом, А.О. Шустровым и М.О. Тарасовым.

Ультразвуковой эхо-импульсный контроль композитной пластины проводится после низкоскоростного удара по ней металлического бойка, который формирует расслоение внутри пластины между слоями композитного материала. Для диагностики внутренних повреждений применяется прибор-дефектоскоп, с которого снимаются показания интенсивности отражённой волны во времени.

Фотография тестируемой панели представлена на рисунке 4, на поверхности панели отмечены точки с указанием экспериментально определённой глубины расслоения.

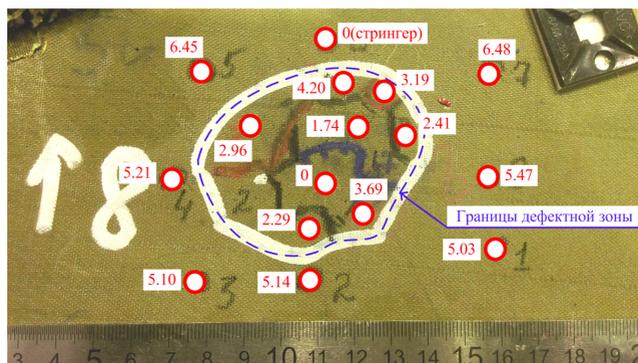


Рис. 4 — Фото эксперимента. Размеченные по глубинам зоны расслоения на верхней поверхности пластины

Схематически та часть экспериментальной постановки, которая моделируется численно, изображена на рисунке 5.

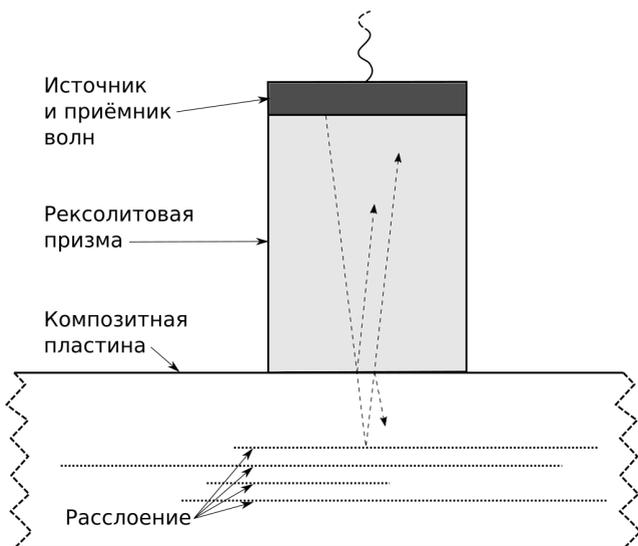


Рис. 5 — Схема эксперимента

Образец – многослойная пластина из композиционного материала толщиной порядка 6 миллиметров. Волна в призме датчика возбуждается на её верхней поверхности, проходит через призму, дальше часть отражается обратно, а часть проходит в материал, откуда затем часть приходит обратно в призму. Вот эта последняя пришедшая из образца волна и несёт информацию о его внутреннем состоянии.

Экспериментальные показания прибора и показания прибора, моделируемые численно, находятся в соответствии для всех точек измерения с рисунка 4, что демонстрируется в работе для нескольких точек. Здесь для иллюстрации продемонстрируем графики только для одной точки с глубиной расслоения 3.19, рисунок 6.

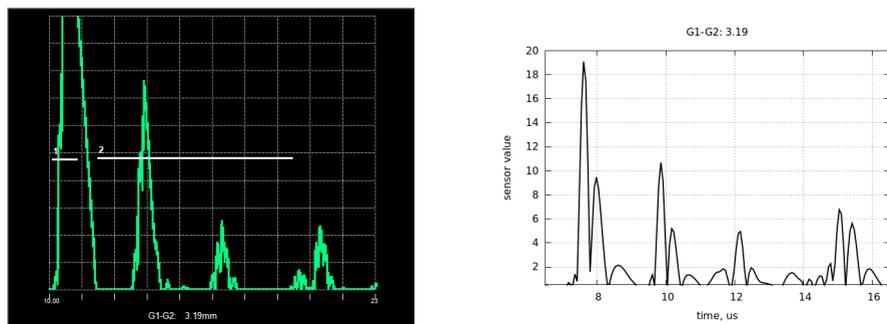
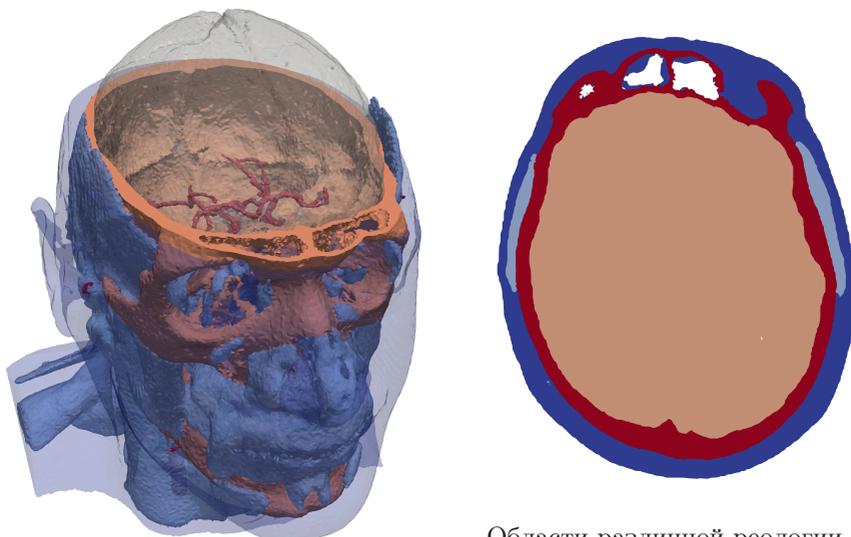


Рис. 6 — Сравнение экспериментальных (слева) и численных (справа) результатов. Модуль вертикальной компоненты скорости

В **третьей части** главы демонстрируется расчёт ультразвукового исследования головы человека с явным выделением различных биологических тканей: соединительной, мышечной, костной, мозга и сосудов (см. рисунок 7).



Области различной реологии в 3D

Области различной реологии в горизонтальном срезе

Рис. 7 — Расчётная область: геометрия и материалы

Волновая картина в трёхмерном пространстве представлена на рисунке 9, на горизонтальном срезе — на рисунке 10, соответствующая им цветовая схема — рисунок 8. Размер шага по времени равен $8 \cdot 10^{-7}$ секунд.

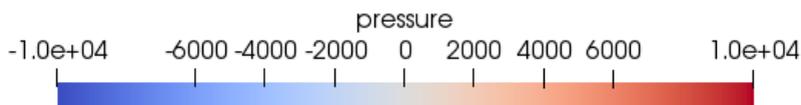


Рис. 8 — Соответствие цвета значениям давления для рисунков 9 и 10

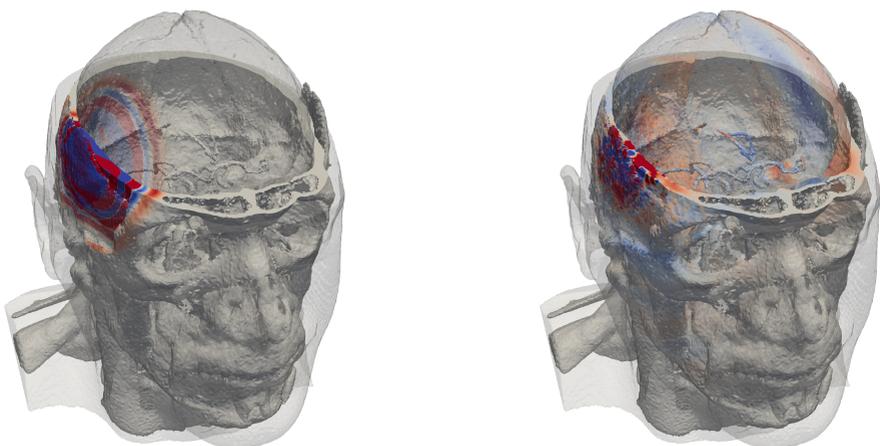


Рис. 9 — Волновая картина в 3D. Слева направо 7-й и 31-й шаги по времени. Цветом показаны значения давления (см. рис. 8)

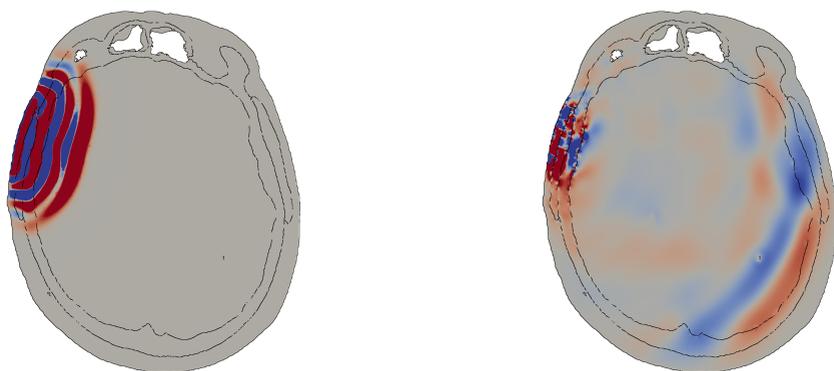


Рис. 10 — Волновая картина в горизонтальном срезе. Слева направо 8-й и 40-й шаги по времени. Цветом показаны значения давления (см. рис. 8), чёрными линиями разделены области различной реологии

Расчёт был проведён на существенно неперiodической тетраэдральной сетке с большим количеством криволинейных поверхностей и неоднородностей. Без применения модификаций к методу, описанных в третьей главе диссертации, расчёт был неустойчив.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Разработана математическая модель для расчётов волновых процессов в среде при проведении ультразвукового неразрушающего

- контроля изотропных и анизотропных материалов, в том числе сложной геометрии, в приближении малых деформаций.
2. Разработан численный метод из семейства сеточно-характеристических. Метод рассчитан на применение как на периодических прямоугольных, так и на непериодических тетраэдральных расчётных сетках, благодаря чему позволяет проводить расчёты в областях сложной формы, вплоть до моделирования распространения волн в частях тела человека с выделением различных тканей. Произведён подробный анализ метода на треугольных и тетраэдральных расчётных сетках с указанием сложностей, связанных с непериодичностью сетки и вызывающих неустойчивость расчёта. Предложенные в работе модификации метода позволили провести ряд расчётов, до этого неустойчивых.
 3. Создан параллельный программный комплекс на C++, реализующий предложенные модель и метод. За счёт использования техники шаблонизации программный комплекс расширяемый без потери производительности, на данный момент реализованы модели изотропного и анизотропного упругого тела и акустики, периодические прямоугольные и непериодические тетраэдральные и треугольные расчётные сетки.
 4. Проведены расчёты, моделирующие эксперимент по ультразвуковому неразрушающему контролю композитной панели с учётом её анизотропной реологии и с учётом влияния геометрии прибора на его показания. Результаты моделирования сверены с экспериментальными данными для верификации модели, метода и программной реализации.
 5. Проведены расчёты, моделирующие ультразвуковые исследования в биологических тканях головы человека с явным выделением соединительной, костной, мозговой, мышечной ткани и сосудов. На сетках такой неоднородности и непериодичности, исходя из известных автору работ, устойчивый расчёт сеточно-характеристическим методом удался впервые.

Список публикаций автора по теме диссертации
В изданиях из списка ВАК РФ

1. *Казаков, А. О.* К вопросу расчёта граничных и контактных узлов в сеточно-характеристическом методе на непериодических тетраэдральных сетках / А. О. Казаков // Сиб. журн. вычисл. матем. — 2018. — Т. 21, № 4. — С. 375—391.
2. Grid-Characteristic Numerical Method for Low-Velocity Impact Testing of Fiber-Metal Laminates / K. Beklemysheva, A. Vasyukov, A. Kazakov, I. Petrov // Lobachevskii J Math. — 2018. — Vol. 39, no. 7. — P. 874—883.

3. Transcranial ultrasound of cerebral vessels in silico: proof of concept / Y. Vassilevski, K. Beklemysheva, G. Grigoriev, A. Kazakov, N. Kulberg, I. Petrov, V. Salamatova, A. Vasyukov // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2016. — Vol. 31, no. 5. — P. 317–328.
4. О численном моделировании волновых процессов в анизотропных средах / И. Б. Петров, А. В. Фаворская, А. В. Васюков, А. С. Ермаков, К. А. Беклемышева, А. О. Казаков, А. В. Новиков // Доклады Академии Наук. — 2014. — Т. 495, № 3. — С. 285–287.
5. Numerical Modelling of Composite Delamination and Non-destructive Testing / K. A. Beklemysheva, A. V. Vasyukov, A. O. Kazakov, A. S. Ermakov // Innovations in Wave Processes Modelling and Decision Making: Grid-Characteristic Method and Applications / ed. by A. Favorskaya, I. Petrov. — Springer International Publishing, 2018. — (Smart Innovation, Systems and Technologies). — URL: <https://books.google.ru/books?id=E2RZtAEACAAJ>.

В прочих изданиях

6. Numerical Modeling of Transcranial Ultrasound / I. B. Petrov, A. V. Vasyukov, K. A. Beklemysheva, A. S. Ermakov, A. O. Kazakov, Y. V. Vassilevski, V. Y. Salamatova, A. A. Danilov, G. K. Grigoriev, N. S. Kulberg. — Springer, Cham, 2018. — (Mondaini R. (eds) Trends in Biomathematics: Modeling, Optimization and Computational Problems).
7. Численное моделирование волновых процессов при неразрушающем контроле анизотропных композиционных материалов / А. Васюков, К. Беклемышева, А. Ермаков, А. Казаков // Модели и методы обработки информации, изд-во МФТИ, 2016. — 2016.

Казаков Александр Олегович

Численное моделирование волновых процессов в задачах ультразвукового неразрушающего контроля сеточно-характеристическим методом

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 80 экз.

Типография _____

