

Автономная некоммерческая организация высшего образования
«Университет Иннополис»

На правах рукописи

Холодов Ярослав Александрович

РАЗРАБОТКА СЕТЕВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ
НА ГРАФАХ

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
Член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н., профессор
Петров Игорь Борисович

Иннополис
2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
<i>Актуальность работы. Степень разработанности.</i>	4
<i>Цели и задачи работы</i>	6
<i>Научная новизна работы</i>	6
<i>Теоретическая и практическая значимость работы</i>	8
<i>Методология и методы исследования</i>	9
<i>Основные результаты работы, выносимые на защиту</i>	9
<i>Достоверность полученных результатов</i>	10
<i>Апробация работы</i>	10
<i>Публикации автора по теме работы</i>	15
<i>Краткое содержание работы</i>	16
ГЛАВА 1. Сетевые вычислительные модели для нелинейных систем уравнений гиперболического типа	19
ГЛАВА 2. Алгоритм численного решения	24
<i>2.1 Построение монотонных схем высокого порядка аппроксимации для уравнения переноса</i>	26
<i>2.2 Построение монотонных схем высокого порядка аппроксимации для одномерной гиперболической системы уравнений</i>	51
<i>2.3 Построение монотонных схем высокого порядка аппроксимации для многослойных неявных сеточных шаблонов</i>	60
<i>2.4 Построение монотонных схем высокого порядка аппроксимации для многомерных гиперболических систем уравнений</i>	66
<i>2.5 Результаты расчетов</i>	68
ГЛАВА 3. Моделирование трафика в городской транспортной сети	83
<i>3.1 Входные данные транспортных потоков</i>	85
<i>3.2 Микроскопические модели транспортных потоков</i>	97
<i>3.3 Макроскопические модели транспортных потоков</i>	108
<i>3.4 Построение вычислительных моделей на дорожном перекрестке</i>	147

<i>3.5 Адаптивное регулирование транспортной сети</i>	173
<i>3.6 Выводы по главе 3</i>	182
<i>3.7 Краткое описание разработанных программных комплексов</i>	183
ГЛАВА 4. Моделирование потоков данных в пакетных сетях	185
<i>4.1 Постановка задачи</i>	186
<i>4.2 Модель среды</i>	189
<i>4.3 Результаты расчетов</i>	193
<i>4.4 Краткое описание разработанного программного комплекса</i>	203
ГЛАВА 5. Моделирование распространения примесей в вентиляционных сетях	205
<i>5.1 Система уравнений в вентиляционной трубе</i>	206
<i>5.2 Система уравнений в узлах вентиляционной сети</i>	208
<i>5.3 Математическая модель вентилятора</i>	211
<i>5.4 Результаты расчетов</i>	216
<i>5.5 Краткое описание разработанного программного комплекса</i>	226
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	227
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	230

Введение

Свою научную работу я посвящаю светлой памяти выдающегося ученого, академика РАН Холодова А.С., чьи идеи легли в ее основу и обеспечили возможность успешного решения всех поставленных в ней задач

Актуальность работы. Степень разработанности.

В различных приложениях возникают задачи, описываемые уравнениями в частных производных на графах (сетях, деревьях). В качестве примера можно указать глобальные модели дыхательной и кровеносной систем человека [Kholodov et al., 2005; Simakov et al., 2005, 2006, 2006, Simakov, 2018; Carson, 2018; Gognieva, 2018; Gognieva, 2019], интенсивного уличного движения в мегаполисе [Kholodov, Kholodov, 2004; Kholodov et al., 2006; Холодов и др., 2010; Morozov et al., 2011; Kholodov et al., 2014; Alekseenko et al., 2015; Kholodov et al., 2015; Alekseenko et al., 2017; Prokoptsev et al., 2018], динамики стержневых конструкций и каркасных сооружений [Kholodov et al., 2006], переходных процессов в электроэнергетических системах [Морозов, Холодов, 2008; Bordonos et al., 2009; Морозов и др., 2010], интенсивных информационных потоков в компьютерных и телекоммуникационных сетях [Северов и др., 2008; Трифонов и др., 2008; Severov et al., 2012; Trifonov, Kholodov, 2012], распространения мелкодисперсных примесей в вентиляционных сетях [Geller et al., 2010; Kholodov et al., 2017] и др.

Сетевые вычислительные модели (уравнения в частных производных) на графах используют различные численные методы и оригинальные математические алгоритмы, в том числе алгоритм построения систем уравнений в узлах графа. Особенность этих алгоритмов заключается в том, что они должны обеспечивать непрерывную связь моделируемых величин вдоль всего графа, путем задания корректных граничных условий для всех его ветвей входящих и выходящих в каждый из его узлов.

Проблема задания корректных граничных условий при численном моделировании гиперболических систем уравнений возникла довольно давно, практически одновременно с появлением первых ЭВМ и численных методов. С тех пор много что изменилось: на порядки выросло быстродействие вычислительных систем, появились весьма сложные и высокоточные методы численного расчета и вычислительные пакеты их использующие, но проблема корректного задания граничных условий никуда не ушла. И дело здесь не в том, что её в принципе невозможно решить, а в том, что каждый раз её приходится решать снова, как только возникает новая постановка задачи или усложняется использованная ранее.

Именно эта проблема является первостепенной в данной работе. Принципиальная новизна заключается в том, что нам приходится её решать в узле графа. В типичный узел входит и выходит из него несколько ветвей, вдоль каждой из которых используется своя одномерная система уравнений. При этом сам узел, как правило, имеет сложную структуру со своей собственной двумерной или трехмерной системой уравнений, заданной внутри него. Поэтому задача корректного сопряжения граничных условий для одномерных и многомерных систем уравнений внутри и снаружи узла выходит на первый план.

Задача корректного сопряжения граничных условий для систем уравнений различной размерности весьма интересна и перспективна для вычислительной науки. В первую очередь потому, что понижение размерности моделируемой задачи приводит к уменьшению вычислительных операций и упрощению численных алгоритмов, используемых при её решении. Это, в свою очередь, повышает их надежность. И не стоит надеяться, что повышение производительности ЭВМ автоматически решит эти проблемы, поскольку вместе с ростом количества операций, производимых в единицу времени, возрастает и сложность решаемых задач.

Хорошей аналогией для сравнения здесь может быть использование адаптивных иерархических сеток в численном моделировании. Это научное направление давно и плодотворно развивается, и рост производительности ЭВМ не уменьшает его актуальности.

С этой точки зрения использование разной размерности задачи в различных частях одной области интегрирования, по своей сути близко к идее использования адаптивных сеток и является в некотором смысле дальнейшим её развитием. Но для ее реализации необходимо научиться корректно решать задачу сопряжения граничных условий для систем уравнений различной размерности. Именно этой цели и посвящена настоящая работа.

Цели и задачи работы

Разработать вычислительную модель решения краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа на графах (сетях, деревьях).

Для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа разработать алгоритм построения монотонных при произвольном виде искомого решения схем высокого порядка аппроксимации на основе их анализа в пространстве неопределённых коэффициентов.

С использованием разработанной вычислительной модели в рамках общего подхода решить три различные по своей физической постановке сетевые задачи:

- моделирование дорожного движения (трафика) в городских транспортных сетях;
- моделирование интенсивных потоков данных в компьютерных сетях;
- моделирование распространения газовых примесей в вентиляционных сетях зданий и сооружений.

Провести вычислительные эксперименты по решению трех указанных задач на основе разработанных программных комплексов.

Научная новизна работы

Построена оригинальная вычислительная модель решения краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа на графах (сетях, деревьях). В качестве исследуемых приложений для применения данной модели были выбраны три различные по своей физической постановке задачи.

Первая - моделирование дорожного движения (трафика) в городской транспортной сети. При решении данной задачи использовался макроскопический подход, в котором транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений второго порядка. Проведенные расчеты и полученные результаты показали, что разработанная в рамках предложенного подхода оригинальная модель хорошо воспроизводит реальную ситуацию на различных участках городских транспортных сетей, а также может быть использована для выбора оптимальной стратегии организации движения трафика в городе.

Вторая - моделирование интенсивных потоков данных в компьютерных сетях. В этой задаче потоки данных различных соединений в пакетной сети передачи данных моделировались в виде несмешивающихся потоков сплошной среды. Предложены новые концептуальная и математическая модели сети. Проведено численное моделирование в сравнении с системой имитационного моделирования сети NS-2 [<http://www.isi.edu/nsnam/ns>].

Третья - моделирование распространения газовых примесей в вентиляционных сетях. Была разработана оригинальная вычислительная математическая модель распространения мелкодисперсных или газовых примесей в вентиляционных сетях с использованием уравнений газовой динамики путем численного сопряжения областей разной размерности. Использование алгоритма сопряжения областей разной размерности является ключевым элементом разработанной модели, поскольку его использование уменьшает математическую сложность и одновременно повышает её вычислительную эффективность. Проведенные расчеты показали, что модель с хорошей точностью позволяет определять распределение газодинамических параметров в трубопроводной сети и решать задачи динамического управления вентиляцией.

Для численного решения нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа, используемых в разработанной вычислительной модели, был реализован оригинальный алгоритм построения монотонных (при произвольном

виде искомого решения) схем высокого порядка аппроксимации на основе их анализа в пространстве неопределённых коэффициентов.

Теоретическая и практическая значимость работы

В настоящей работе построена вычислительная модель решения краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа на графах (сетях, деревьях). В качестве практических приложений были выбраны три различные по физической постановке задачи, решаемые в рамках общего подхода сетевых вычислительных моделей.

Первая — это моделирование движения трафика в городской транспортной сети. Проведенные расчеты и полученные результаты показали, что разработанная в рамках предложенного подхода модель хорошо воспроизводит реальную ситуацию на различных участках транспортной сети Москвы на значительных временных интервалах, а также может быть использована для выбора оптимальной стратегии организации дорожного движения в городе.

Вторая — моделирование интенсивных потоков данных в компьютерных сетях. Проведено численное моделирование сложных конфигураций компьютерных сетей в сравнении с системой имитационного моделирования сети NS-2 [<http://www.isi.edu/nsnam/ns>]. Полученные результаты показали, что в сравнении с пакетной моделью NS-2, разработанная нами потоковая модель демонстрирует значительную экономию вычислительных ресурсов, обеспечивая при этом хорошую степень подобия. Позволяет моделировать поведение сложных глобально распределенных IP – сетей передачи данных.

Третья — моделирование распространения газовых примесей в вентиляционных сетях. Были выполнены расчеты нестационарных процессов вентиляции в модельной сети выработок угольной шахты, рассмотренные ранее в работе [Vasenin et al., 2011]. В частности, был проведен расчет проветривания тупиковой выработки вентилятором местного проветривания. Проведенные расчеты показали, что модель с хорошей точностью позволяет определять распределение концентрации

примесей метана в шахтенной сети выработок и решать задачи динамического управления вентиляцией.

Методология и методы исследования

В диссертации в качестве основного метода исследования нелинейных волновых процессов на графах использовался вычислительный эксперимент на базе численных методов, разработанных для нелинейных уравнений и систем гиперболического типа. При разработке численных методов использовался универсальный робастный алгоритм построения монотонных (при произвольном виде искомого решения) схем высокого порядка аппроксимации на основе их анализа в пространстве неопределённых коэффициентов. В качестве математической модели использовалась оригинальная вычислительная модель, основанная на решении краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа на графах. Для программной реализации использовался язык программирования С.

Основные результаты работы, выносимые на защиту

1. Разработана оригинальная вычислительная модель решения краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа на графах (сетях, деревьях).
2. Для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа разработан универсальный робастный алгоритм построения монотонных при произвольном виде искомого решения схем высокого порядка аппроксимации на основе их анализа в пространстве неопределённых коэффициентов.
3. С использованием разработанной вычислительной модели в рамках предлагаемого подхода получено численное решение трех различных по своей физической постановке сетевых задач:
 - 3.1 Моделирование дорожного движения (трафика) в городских транспортных сетях;
 - 3.2 Моделирование интенсивных потоков данных в компьютерных сетях;

- 3.3 Моделирование распространения газовых примесей в вентиляционных сетях зданий и сооружений.
4. Проведены сложные вычислительные эксперименты по решению трех указанных задач на основе разработанных программных комплексов.

Достоверность полученных результатов

Достоверность результатов диссертации и выносимых на защиту положений обеспечивается следующим. При разработке математических моделей и методов автор применяет обоснованные теоретические выводы и строгий математический аппарат. Выполнен ряд верификационных расчётов, произведено сравнение с экспериментом.

Разработанные в диссертационной работе методы исследования нелинейных волновых процессов на графах проходили тщательную верификацию на каждом этапе их разработки. Верификация проводилась путем сопоставления результатов расчетов с известными аналитическими и эталонными решениями тестовых задач, с расчетами других авторов, а также с экспериментальными данными.

Результаты работы представлены в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК РФ и в том числе международные системы научного цитирования WOS и Scopus, а также доложены на международных научных конференциях.

Апробация работы

Основные результаты работы были представлены на следующих российских и международных конференциях:

1. A.S. Kholodov, Y.A. Kholodov, A.E. Evdokimov. Numerical simulation circulatory and respiratory system of human body including their interaction and external factors influence. 2003 Summer Bioengineering Conference (the American Society of Mechanical Engineers), Sonesta Beach Resort, Key Biscayne, FL, 25-29 June 2003.

2. A.S. Kholodov, Y.A. Kholodov, A.V. Evdokimov. Global numerical models of circulatory and respiratory systems of human body including their interaction and matter transport. 14th European Society of Biomechanics conference, Hertogenbosch, Nederland's, 4-7 July 2004.
3. Kholodov A. S., Kholodov Y.A. Computational models on graphs for the nonlinear hyperbolic system of equations. ASME PVP Conference, 25-29 July 2004, San Diego, CA, USA.
4. Kholodov A. S., Kholodov Y.A. Computational models on graphs for nonlinear hyperbolic and parabolic system of equations. Third MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, 14-17 June 2005, Cambridge, MA, USA.
5. Simakov S.S., Kholodov A.S., Evdokimov A.V., Kholodov Y.A. Matter transport simulations using 2D model of peripheral circulation coupled with the model of large vessels. Proceedings of II International Conference on Computational Bioengineering, 14-16 September 2005, Lisbon, Portugal.
6. Kholodov A.S., Simakov S.S., Kholodov Y.A. Global dynamical model of the cardiovascular system. III European Conference on Computational Mechanics, 5–8 June 2006, Lisbon, Portugal.
7. Kholodov Y.A, Kholodov A.S., Kovshov N.V., Simakov S.S., Severov D.S., Bordonos A.K., Bapaev A.Z., Computational models on graphs for nonlinear hyperbolic and parabolic systems of equations. III European Conference on Computational Mechanics, 5–8 June 2006, Lisbon, Portugal.
8. Y.A. Kholodov, E.G. Evseev, E.V. Morozov, A.Z. Bapaev. Simulation model for the rod system graphs dynamics. PVP 2006-ICPVT-11 ASME Conference, 23-27 July 2006, Vancouver, Canada.
9. Y.A. Kholodov, A.S. Kholodov, N.V. Kovshov. The road flows model for heavy traffic in big cities. Fourth MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, June 13-15 2007, Cambridge, USA.

10. Y.A. Kholodov, A.S. Kholodov, N.V. Kovshov. About one model of road flow interactions for heavy traffic in big cities. Traffic and Granular Flow, 20-22 June 2007, Orsay, France.
11. S.S. Simakov, A.S. Kholodov, Y.A. Kholodov, K.M. Perfilov. Heart Valve Dynamics in the Model of Global Circulation. APCOM'07 in conjunction with EP-MESC XI, 3-6 December 2007, Kyoto, Japan.
12. Морозов И.И., Холодов Я.А., Холодов А.С. Численное моделирование динамики транспортных потоков. XV Конференция – Математика. Компьютер. Образование, 28 января - 2 февраля 2008, Дубна, Россия.
13. Морозов И.И., Холодов Я.А. Моделирование режимов глобальных электрических сетей. V Всероссийская межвузовская конференция молодых ученых, 15-18 апреля 2008, Санкт-Петербург, Россия.
14. Д.С. Северов, Холодов Я.А., С.В. Трифонов, М.И. Миненко. Численное моделирование IP-сетей передачи данных в рамках уравнений сплошной среды. V Всероссийская межвузовская конференция молодых ученых, 15-18 апреля 2008, Санкт-Петербург, Россия.
15. С.В. Трифонов, Холодов Я.А., М.И. Миненко, Т.Е. Истомина, А.В. Чечендаев. Алгоритмы оптимизации работы беспроводной сенсорной сети на базе протокола ZigBee. V Всероссийская межвузовская конференция молодых ученых, 15-18 апреля 2008, Санкт-Петербург, Россия.
16. Y.A. Kholodov, A.K. Bordonos, A.S. Kholodov, N.E. Lavrinenko, I.I. Morozov, E.L. Stupitsky. Damage factors estimation for global distributed high-voltage grids under the influence of the electromagnetic disturbances. EUROEM 2008 European Electromagnetics, 21-25 July 2008, Lausanne, Switzerland.
17. Я.А. Холодов, О.В. Геллер. Моделирование распространения мелкодисперсных примесей в воздуховодах. Молодежная научная конференция "Физика и прогресс-2008", Санкт-Петербург, Россия.
18. B.R. Bulyakov, Y.A. Kholodov, A.S. Kholodov. Developing monotone difference schemes for hyperbolic type equations. The International Conference

- Mathematical Modeling and Computational Physics (MMCP 2009), 7-11 July 2009, Dubna, Russia.
19. M.O. Vasiliev, Y.A. Kholodov, O.V. Geller. Simulation of Propagation of Fine and Ultra Fine Particle Aerosols in Airway Systems. The 7th EUROMECH Solid Mechanics Conference (ESMC2009), 7-11 September 2009, Lisbon, Portugal.
 20. А.В. Гасников, Я.А. Холодов. О некоторых математических задачах, возникающих при моделировании транспортных потоков. VI Всероссийская научная конференция «Математическое моделирование развивающейся экономики и экологии» (ЭКОМОД-2011), 27 июня – 3 июля 2011, Киров, Россия.
 21. Y.A. Kholodov, A.S. Kholodov, A.V. Gasnikov, I.I. Morozov, V.N. Tarasov. The higher-order traffic flow models analysis. Traffic and Granular Flow '11, 28 September - 01 October 2011, Moscow, Russia.
 22. Gasnikov A.V., Dorn Y.V., Kholodov Y.A., Hohlov M.A., Chehovich Y.V. Some actual problems of traffic flow mathematical modelling. International conference “Intelligent Information Processing” IIP-9, 16-22 September 2012, Budva, Montenegro.
 23. Холодов Я.А., Алексеенко А.Е., Холодов А.С. Моделирование динамики транспортных сетей. Международная конференция «Моделирование и управление устойчивыми транспортными системами городов», 3-5 октября 2013, Калининград, Россия.
 24. Холодов Я.А., Холодов А.С., Алексеенко А.Е. Моделирование динамики транспортных сетей в условиях крупного мегаполиса. Международная конференция «Транспортное моделирование», НИПИ Генерального плана города Москвы, 28-29 октября 2013, Москва, Россия.
 25. Yaroslav A. Kholodov, Andrey E. Alekseenko and Alexander S. Kholodov. The traffic flow model for road networks. 2014 Spring International Conference on Applied and Engineering Mathematics (AEM-S), 16-18 April 2014, Shanghai, China.
 26. Y.A. Kholodov, A.S. Kholodov, I.V. Tsybulin. Developing Monotone Conservative Difference Schemes for Hyperbolic Type Equations with High-Order

- Accuracy. 27th Nordic Seminar on Computational Mechanics. 22-24 October 2014, Stockholm Sweden.
27. Холодов Я.А., Гасников А.В., Алексеенко А.Е., Холодов А.С. Перспективные задачи транспортной науки. Международный практический семинар по интеллектуальным транспортным системам, 15-16 октября 2014, Казань, Россия.
 28. Холодов А.С., Холодов Я.А., Алексеенко А.Е. Математическое моделирование транспортных потоков. Международная конференция «Стойкость сложных социо-технических систем - Resilience2014», 25-28 ноября 2014, Протвино, Россия.
 29. Y.A. Kholodov, A.S. Kholodov, I.V. Tsybulin. Developing of High Order Nonlinear Numerical Methods for Hyperbolic Type Equations. European Conference on High Order Nonlinear Numerical Methods for Evolutionary PDEs: Theory and Applications, HONOM 2015, 16-20 March 2015, University of Trento and CIRM-FBK, Italy.
 30. А.Е. Алексеенко, Я.А. Холодов, А.С. Холодов, Ю.В. Чехович, В.М. Старожилец. Оптимальное светофорное регулирование при въездах на автостраду. IV Международная научно-практическая конференция «Современные проблемы безопасности жизнедеятельности: Интеллектуальные Транспортные Системы», 25-26 февраля 2016, Казань, Россия.
 31. Andrey Alekseenko, Yaroslav Kholodov, Alexander Kholodov. The optimal traffic light control for highway on-ramps. WCCM XII & APCOM VI, 24-29 July 2016, Seoul, Korea.
 32. Я.А. Холодов. Интеллектуальные транспортные системы: прошлое, настоящее, будущее. III Всероссийский научно-практический семинар «Беспилотные транспортные средства с элементами искусственного интеллекта» (БТС-ИИ-2016). 22-23 сентября 2016, Иннополис, Россия.

33. Y. Kholodov, A. Alekseenko, Y. Chehovich, A. Kholodov, V. Starozhilets. Optimizing urban highway through on-ramp traffic light control. 12th ITS European Congress, 19-22 June 2017, Strasbourg, France.
34. A.E. Alekseenko, Y.A. Kholodov, A.S. Kholodov, Y.V. Chehovich, V.M. Starozhilets. Adaptive traffic light control on highway entrances. 2017 IEEE 20th ITSC, 16-19 October 2017, Yokohama, JAPAN.
35. Sergey Verentsov, Emil Magerramov, Vlad Vinogradov, Ramil Gizatullin, Andrey Alekseenko, Yaroslav Kholodov and Evgeniy Nikolskiy. Bayesian Framework for Vehicle Localization Using Crowdsourced Data. 2018 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV), 26-30 June 2018, Changshu, Suzhou, China.
36. Yaroslav Kholodov, Andrey Alekseenko, Yuri Chekhovich, and Aleksey Karachev. Optimizing urban highway through on-ramp traffic light control. ORM 2018 - GERMEYER100, 22-27 October 2018, Moscow, Russia.
37. Yaroslav Kholodov. Bayesian Framework for Vehicle Localization Using Crowdsourced Data. Huawei Workshop Fundamental and Applied Problems of Machine Learning, 18-20 December 2019, Nizhny Novgorod, Russia.

Публикации автора по теме работы

По теме диссертации опубликована 30 работ [Морозов, Холодов, 2008; Морозов и др., 2010; Морозов, Холодов, 2012; Северов и др., 2008; Трифонов и др., 2008; Холодов и др., 2010; Alekseenko et al., 2015; Alekseenko et al., 2016; Alekseenko et al., 2017; Bordonos et al., 2009; Geller et al., 2010; Kholodov, Kholodov, 2004; Kholodov, Kholodov, 2006; Kholodov et al., 2006; Kholodov et al., 2006; Kholodov et al., 2014; Kholodov et al., 2015; Kholodov et al., 2017; Kholodov et al., 2018; Kholodov, 2019; Morozov et al., 2011; Prokoptsev et al., 2018; Severov et al., 2012; Simakov et al., 2005; Simakov et al., 2006; Simakov et al., 2006; Trifonov, Kholodov, 2012; Verentsov et al., 2018; Verentsov et al., 2018; Xiuzheng et al., 2015] в печатных изданиях, рекомендованных ВАК для опубликования научных результатов докторских диссертаций, включая в том числе 17 журнальных публикаций [Alekseenko et al., 2016;

Alekseenko et al., 2017; Kholodov, Kholodov, 2004; Kholodov et al., 2005; Kholodov, Kholodov, 2006; Kholodov et al., 2006; Kholodov et al, 2006; Kholodov et. al., 2017; Kholodov et. al., 2018; Kholodov, 2019; Prokoptsev et. al., 2018; Severov et al., 2012; Simakov et. al., 2006; Simakov et. al., 2006; Verentsov et al., 2018; Verentsov et al., 2018; Xiuzheng et. al, 2015], входящих в реферативные базы Scopus и Web of Science. Получены четыре свидетельства о регистрации программ [Алексеевко, Холодов, 2017; Геллер и др., 2011; Морозов, Холодов, 2012; Холодов и др., 2011].

Автор выражает искреннюю благодарность всем соавторам и коллегам за сотрудничество.

Краткое содержание работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы.

В первой главе сформулирован общий математический подход к моделированию задач, описываемых уравнениями в частных производных на графах (сетях, деревьях). Для исследования данных проблем была построена обобщенная вычислительная математическая модель решения соответствующих краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа.

Во второй главе на основе характеристического критерия монотонности разработан универсальный алгоритм построения монотонных при произвольном виде искомого решения схем высокого порядка аппроксимации на основе их анализа в пространстве неопределённых коэффициентов. Приводятся результаты тестирования построенных разностных схем высокого порядка аппроксимации для нелинейных систем уравнений гиперболического типа в различных модельных постановках.

В третьей главе исследовалась задача моделирования движения трафика в городской транспортной сети. При решении данной задачи использовался макроскопический подход, при котором транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений второго порядка. Проведенные расчеты и

полученные результаты показали, что разработанная в рамках предложенного подхода оригинальная макроскопическая модель второго порядка хорошо воспроизводит реальную ситуацию на различных участках городских транспортных сетей, а также может быть использована для выбора оптимальной стратегии организации движения трафика в городе.

В четвертой главе решалась задача моделирования интенсивных потоков данных в компьютерных сетях. В этой задаче потоки данных различных соединений в пакетной сети передачи данных моделировались в виде несмешивающихся потоков сплошной среды. В ходе решения были разработаны новые концептуальная и математическая модели сети. Проведено численное моделирование в сравнении с системой имитационного моделирования сети NS-2 [<http://www.isi.edu/nsnam/ns>]. Полученные результаты показали, что в сравнении с известной пакетной моделью NS-2, разработанная нами потоковая модель, за счет использования потоков данных вместо пакетов демонстрирует значительную экономии вычислительных ресурсов, обеспечивая при этом хорошую степень подобия как пиковых, так и усредненных характеристик. Позволяет моделировать поведение сложных глобально распределенных IP – сетей передачи данных

Пятая глава посвящена моделированию распространения газовых примесей в вентиляционных сетях. Разработана оригинальная вычислительная математическая модель распространения мелкодисперсных или газовых примесей в вентиляционных сетях с использованием уравнений газовой динамики путем численного сопряжения областей разной размерности. Использование алгоритма сопряжения областей разной размерности является ключевым элементом разработанной модели, поскольку его использование уменьшает математическую сложность и одновременно повышает её вычислительную эффективность. Проведенные расчеты показали, что модель с хорошей точностью позволяет определять распределение газодинамических параметров в трубопроводной сети и решать задачи динамического управления вентиляцией.

В заключении диссертации в кратком виде сформулированы основные результаты работы. Завершается диссертация списком литературы.

Глава 1. Сетевые вычислительные модели для нелинейных систем уравнений гиперболического типа

В данной главе используются материалы, опубликованные ранее в следующих работах и статьях: [Kholodov, 2004; Kholodov et al., 2006; Kholodov et al., 2006; Холодов и др., 2006; Холодов, 2019].

Пусть на каждом ребре k направленного графа (сети, дерева, Рис. 1.1) необходимо найти решение одномерной системы уравнений гиперболического типа

$$v_t + Av_{x_k} = f_k, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x_k \leq X_k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (1.1)$$

Здесь $v = \{v_1, \dots, v_I\}$ вектор искомых параметров, $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, \dots, I$, матрица, которая может быть разной на каждой из ветвей, I - размерность системы уравнений (1.1), K - число ветвей (ребер) графа. Эта система может быть линейной или нелинейной, дивергентной или нет, иметь ненулевую правую часть f_k и т.д., что не принципиально для последующего изложения [Холодов, 2019].

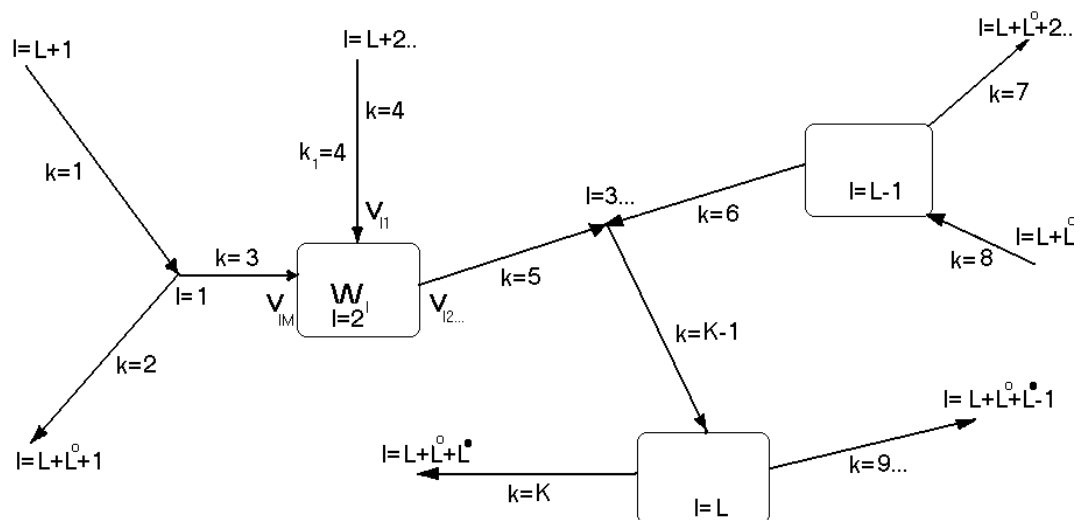


Рис. 1.1. Пример направленного графа, k – номера направленных (по стрелке) ребер. Чтобы подчеркнуть тот факт, что для определения искомых параметров W_l во внутренних узлах графа $l = 1, \dots, L$, могут привлекаться самые разные математические модели, часть узлов обозначена точками (например, $l = 1, 3$), а остальные – прямоугольниками ($l = 2, L - 1, L$).

Из предположения о гиперболичности (1.1) следует, что матрица A имеет только действительные собственные значения (возможно и кратные) $\Lambda = \{\lambda_i\}$, $i = 1, \dots, I$. Они определяются как корни уравнения

$$P_I(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda E) = 0 \quad (1.2)$$

(E - единичная матрица) и существует базис

$$\Omega = \{\omega_i\}, \quad \text{Det}\Omega \neq 0 \quad (1.3)$$

из левых собственных векторов ω_i , $i = 1, \dots, I$ (являющихся строками матрицы Ω), для каждого λ_i с точностью до длины определяемых из однородных систем линейных уравнений

$$\omega_i(A - \lambda_i E) = 0, \quad i = 1, \dots, I. \quad (1.4)$$

Тогда $A \equiv \Omega^{-1} \Lambda \Omega$, (где Ω^{-1} обратная к Ω матрица) и систему (1.1) можно привести к эквивалентному виду

$$\Omega v_t + \Omega A v_{x_k} = \Omega v_t + \Lambda \Omega v_{x_k} = 0 \quad (1.5)$$

(взяв I соответствующих линейных комбинаций исходных уравнений (1.1)).

Каждое из условий совместности (1.5)

$$\omega_i^T \frac{dv}{dt_i} = \omega_i^T \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, I \quad (1.6)$$

является по сути обыкновенным дифференциальным уравнением вдоль i -й характеристики системы (1.1).

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, I. \quad (1.7)$$

Такая характеристическая форма уравнений (1.1) (или ее модификации с использованием инвариантов Римана, если удастся найти соответствующее точное решение (1.6)), часто используется для построения эффективных разностных схем для решения (1.1). В граничных точках она необходима для замыкания краевых условий.

По крайней мере, в линейном случае с $a_{ij} = \text{const}$ (тогда $\lambda_i = \text{const}$, $\omega_i = \{\omega_{i1}, \dots, \omega_{iI}\}$, $\omega_{ij} = \text{const}$), каждое из условий совместности (1.6) после введения

новых искомым параметров (инвариантов Римана) $q_i = \omega_i v = \sum_{j=1}^l \omega_{ij} v_j$, $i = 1, \dots, l$ содержит только $dq_i/dt_i = 0$ и его решением является $q_i = const$ вдоль соответствующей характеристики (1.7).

Как известно, корректная постановка задачи для (1.1) заключается в задании начальных условий

$$v(0, x_k) = v^0(x_k), \quad k = 1, \dots, K \quad (1.8)$$

и граничных условий при $x_k = 0$ и $x_k = X_k$ в узлах графа $l = 1, \dots, L, L + 1, \dots, L + L^\circ, L + L^\circ + 1, \dots, L + L^\circ + L^\bullet$. Здесь L число внутренних узлов графа (с которыми связано более одной ветви), L° - число узлов - входов графа (из которых исходит только одна ветвь графа), L^\bullet - число узлов - выходов графа (в которые входит только одна ветвь графа). На Рис. 1.1 приведены примеры нумерации ветвей ($k = 1, \dots, K$) и узлов ($l = 1, \dots, L, L + 1, \dots, L + L^\circ, L + L^\circ + 1, \dots, L + L^\circ + L^\bullet$) направленного графа. Эта нумерация может быть и любой другой.

Чтобы подчеркнуть тот факт, что для определения искомым параметров w_i во внутренних узлах графа $l = 1, \dots, L$, могут привлекаться самые разные математические модели (алгебраические или обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных и т.д.), часть таких узлов обозначена точками (например, на Рис. 1.1 $l = 1, 3$), а остальные – прямоугольниками ($l = 2, L - 1, L$ на Рис. 1.1).

На свободных концах ветвей (ребер) графа (в узлах $l = L + 1, \dots, L + L^\circ$ - входах графа, для которых $x_k = 0$ и в узлах $l = L + L^\circ + 1, \dots, L + L^\circ + L^\bullet$ - выходах графа для которых $x_k = X_k$) постановка краевых условий ничем не отличается от обычной постановки краевых условий одномерной гиперболической системы, а именно, в каждый момент времени число граничных условий (r_k° - для входов, r_k^\bullet - для выходов) должно быть равно числу уходящих за область интегрирования характеристик (1.7) и вместе с условиями совместности (1.6) вдоль идущих внутрь области интегрирования характеристик. В каждый момент времени они должны

составлять линейно-независимую дифференциально-алгебраическую систему. Например, для входов:

$$\varphi_{ki}^{\circ}(t, v(t, 0)) = 0, \quad i = 1, \dots, r_k^{\circ} \quad (1.9)$$

для выходов:

$$\varphi_{ki}^{\bullet}(t, v(t, X_k)) = 0, \quad i = I - r_k^{\bullet} + 1, \dots, I. \quad (1.10)$$

Тогда при расчете таких граничных точек можно использовать r_k° граничных условий (1.9) или r_k^{\bullet} условий (1.10) вместе с $I - r^{\circ}$ (для $i = r_k^{\circ} + 1, \dots, I$) или $I - r_k^{\bullet}$ (для $i = 1, \dots, I - r_k^{\bullet}$) условий совместности (1.6). Матрицы:

$$\Omega^{\circ} = \begin{pmatrix} \omega_1^{\circ} \\ \vdots \\ \omega_{r_k^{\circ}}^{\circ} \\ \omega_{r_k^{\circ}+1}^{\circ} \\ \vdots \\ \omega_I \end{pmatrix}, \quad \Omega^{\bullet} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_{I-r_k^{\bullet}} \\ \omega_{I-r_k^{\bullet}+1} \\ \vdots \\ \omega_I \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

(соответственно для входов и выходов) должны быть неособенными: $Det\Omega^{\circ} \neq 0$, $Det\Omega^{\bullet} \neq 0$. Здесь ω_i — левые собственные векторы матрицы A из (1.4), векторы ω_i° , ω_i^{\bullet} получаем, дифференцируя (1.9) и (1.10):

$$\frac{d\varphi_{ki}^{\circ}}{dt} = \frac{\partial\varphi_{ki}^{\circ}}{\partial t} + \sum_{j=1}^I \frac{\partial\varphi_{ki}^{\circ}}{\partial v_j} \frac{dv_j}{dt} = \frac{\partial\varphi_{ki}^{\circ}}{\partial t} + \omega_i^{\circ} \frac{dv}{dt} = 0, \quad \omega_i^{\circ} = \left\{ \frac{\partial\varphi_{ki}^{\circ}}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial\varphi_{ki}^{\circ}}{\partial v_I} \right\}, \quad (1.12)$$

$$\frac{d\varphi_{ki}^{\bullet}}{dt} = \frac{\partial\varphi_{ki}^{\bullet}}{\partial t} + \sum_{j=1}^I \frac{\partial\varphi_{ki}^{\bullet}}{\partial v_j} \frac{dv_j}{dt} = \frac{\partial\varphi_{ki}^{\bullet}}{\partial t} + \omega_i^{\bullet} \frac{dv}{dt} = 0, \quad \omega_i^{\bullet} = \left\{ \frac{\partial\varphi_{ki}^{\bullet}}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial\varphi_{ki}^{\bullet}}{\partial v_I} \right\}. \quad (1.13)$$

В точках ветвления графа $l = 1, \dots, L$, обозначая через M число входящих в узел l и выходящих из него ветвей, а через $m = k_1, \dots, k_M$ их номера (Рис. 1.2), будем считать искомыми величинами (помимо значений векторов v_{l1}, \dots, v_{lM} в окончаниях входящих в узел l и выходящих из него ветвей) также вектор $w_l(t) = \{w_{l1}, \dots, w_{lJ_l}\}$ с размерностью J_l , для определения которых имеется некоторое количество дифференциальных или алгебраических уравнений, например

$$\psi_{lr}(t, w_l, v_{l1}, \dots, v_{lM}) = 0, \quad r = 1, \dots, r_l. \quad (1.14)$$

Для расчета таких узлов графа, помимо граничных условий (1.14), необходимо использовать условия совместности (1.6), выбирая их аналогично (1.9)-(1.13).

Если в некоторый момент времени t число положительных собственных чисел $\lambda_i(t, 0)$ матрицы A в прилегающей к узлу l точке выходящей из этого узла ветви m° равно $r_{lm^\circ}^\circ$, а число отрицательных собственных чисел $\lambda_i(t, X_m)$ матрицы A в прилегающей к узлу l точке входящей в этот узел ветви m^\bullet равно $r_{lm^\bullet}^\bullet$, то необходимо выполнения условия:

$$r_l = IM + J_l - \sum_{m^\circ} r_{lm^\circ}^\circ - \sum_{m^\bullet} r_{lm^\bullet}^\bullet \quad (1.15)$$

Кроме того, для обеспечения линейной независимости используемых уравнений (1.14), (1.6) необходимо, чтобы

$$Det \tilde{\Omega} = \left\{ \begin{array}{cccccc} \omega_{a1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_{b1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{am} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{bm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{aM} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{bM} & 0 \\ \tilde{\omega}_{l11} & \cdots & \tilde{\omega}_{l1m} & \cdots & \tilde{\omega}_{l1M} & \tilde{\omega}_{l1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\omega}_{lr_1} & \cdots & \tilde{\omega}_{lr_m} & \cdots & \tilde{\omega}_{lr_M} & \tilde{\omega}_{lr_l} \end{array} \right\} \neq 0, \quad (1.16)$$

$$\tilde{\omega}_{lr} = \left\{ \frac{\partial \psi_{lr}}{\partial w_{l1}}, \dots, \frac{\partial \psi_{lr}}{\partial w_{lJ_l}} \right\}, \quad \tilde{\omega}_{lrm} = \left\{ \frac{\partial \psi_{lr}}{\partial v_{lm1}}, \dots, \frac{\partial \psi_{lr}}{\partial v_{lmI}} \right\} \quad (1.17)$$

$\omega_{am}, \dots, \omega_{bm}$ – собственные векторы матрицы A , для каждой из ветвей $m = 1, \dots, M$, соответствующие привлекаемым для расчета узла l условиям совместности (1.6). Для выходящей из узла ветви с номером m° : $a = 1$, $b = r_{lm^\circ}^\circ$, для входящей в узел ветви с номером m^\bullet : $a = I - r_{lm^\bullet}^\bullet + 1$, $b = I$. В соответствии с (1.15) размерность матрицы $\tilde{\Omega}$ должна быть равна $IM + J_l = r_l + \sum_{m^\circ} r_{lm^\circ}^\circ + \sum_{m^\bullet} r_{lm^\bullet}^\bullet$.

Глава 2. Алгоритм численного решения

В данной главе используются материалы, опубликованные ранее в следующих работах и статьях: [Холодов, Холодов, 2006; Холодов и др., 2015; Холодов и др., 2018; Холодов, 2019].

При численном решении задач, содержащих в области интегрирования разрывы искомых функций и другие особенности, важную роль играют монотонные разностные схемы (по другой терминологии — схемы с положительной аппроксимацией или мажорантные схемы). Они оставляют монотонным начальное распределение во все последующие моменты времени, в том числе для разрывных начальных данных. Для уравнений и систем гиперболического типа понятие о таких схемах впервые введено Фридрихсом в [Friedrichs, Nyers, 1954] (схемы с положительной аппроксимацией или мажорантные схемы). К этому классу принадлежат известные разностные схемы Куранта-Изаксона-Риса [Courant et. al., 1952], С.К. Годунова [Годунов, 1959], П. Лакса [Lax, 1954], сеточно-характеристический [Магомедов, Холодов, 1969] и ряд других известных численных методов.

Как было доказано в [Годунов, 1959] для простейшего одномерного линейного уравнения переноса

$$u_t + \lambda u_x = 0, \quad \lambda = \text{const}, \quad (2.1)$$

и для явных двухслойных линейных разностных схем на регулярных сетках

$$u_m^{n+1} = \sum_{\mu} \alpha_{\mu}(\tau, h) u_{m+\mu}^n, \quad \mu = 0, \pm 1, \dots, \quad (2.2)$$

монотонные по С.К. Годунову линейные схемы (1.2), для которых

$$u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1} \geq 0, \quad \text{если} \quad u_{m+1}^n - u_m^n \geq 0, \quad (2.3)$$

(или наоборот), могут иметь только первый порядок точности.

Там же доказано, что в линейном случае (2.1), (2.2) условие монотонности (1.3) и неотрицательность коэффициентов $\alpha_{\mu}(\tau, h) \geq 0$ эквивалентны. Эта теорема, как показано в [Холодов, 1978; Холодов, 1980; Холодов, 1987; Холодов, 1990; Магомедов, Холодов, 1988], справедлива и для линейных схем с положительной по

Фридрихсу аппроксимацией [Friedrichs, Nyers, 1954] в самом общем случае линейных разностных схем.

$$\begin{cases} u_m^{n+1} = \sum_{\mu, \nu} \alpha_\mu^\nu(\tau, h) u_{m+\mu}^{n+\nu}, \\ \alpha(\tau, h)_\mu^\nu \geq 0, \quad \mu = 0, \pm 1, \dots, \quad \nu = 1, 0, -1, \dots, \end{cases} \quad (2.4)$$

в том числе для многослойных и многомерных схем. Это, конечно, несколько ограничивает область применения таких схем, однако, переход к нелинейным разностным схемам (в том числе для линейного уравнения (2.1)), когда коэффициенты α_μ^ν могут менять свои значения в зависимости от локальных свойств решения: $\alpha_\mu^\nu = \alpha_\mu^\nu(\tau, h)$, позволяет строить монотонные схемы с более высоким, чем первый, порядком аппроксимации. К этому классу монотонных схем относятся гибридные схемы ([Федоренко, 1962; Петров, Холодов, 1984; Воробьев, Холодов, 1996] и др.), TVD схемы ([Harten, 1983] и др.), в которых, для схем вида (2.2), (2.4), монотонность определяется из условий:

$$\sum_m |u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}| \leq \sum_m |u_{m+1}^n - u_m^n|, \quad (2.5)$$

(монотонные по [Harten, 1983] схемы).

В [Холодов, 1978; Холодов, 1980; Холодов, 1987; Магомедов, Холодов, 1988; Холодов, 1990] для уравнений и систем гиперболического типа была построена общая теория линейных разностных схем с положительной аппроксимацией и близких к ним схем более высокого, чем первый порядка точности, основанная на использовании метода неопределенных коэффициентов и введении линейных пространств этих коэффициентов $\alpha_\mu^\nu = \{\alpha_\mu^\nu(\tau, h)\}$.

Более детальное освещение данного вопроса читатель может найти в монографии [Магомедов, Холодов, 1988] и других оригинальных и обзорных работах. В данном разделе с использованием результатов работы [Холодов, Холодов, 2006], полученных для простейшего уравнения переноса (1.1), в продолжение этой работы для нелинейных одномерных систем уравнений гиперболического типа

[Холодов, 2018; Холодов, 2019] конструируются монотонные разностные схемы высокого порядка аппроксимации. В качестве критерия монотонности также, как и в работах [Холодов, Холодов, 2006; Холодов и др., 2018], для этих систем используется следующее характеристическое свойство точного решения (1.1)

$$\begin{cases} \min \{u_m^n, u_{m-1}^n\} \leq u_m^{n+1} \leq \max \{u_m^n, u_{m-1}^n\}, & \text{if } 0 < \sigma = \lambda\tau / h < 1, \\ \min \{u_m^n, u_{m+1}^n\} \leq u_m^{n+1} \leq \max \{u_m^n, u_{m+1}^n\}, & \text{if } -1 < \sigma = \lambda\tau / h < 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

обобщённое на случай нелинейных одномерных систем уравнений гиперболического типа. Можно показать, что в линейном случае (2.1), (2.2) критерии монотонности (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) эквивалентны в общей области определения, однако их возможности использования в нелинейном случае существенно различаются.

2.1 Построение монотонных схем высокого порядка аппроксимации для уравнения переноса

Рассмотрим вначале простейшее из уравнений гиперболического типа - однородное линейное уравнение переноса:

$$\begin{aligned} u_t + \lambda u_x &= 0, \quad \lambda = \text{const} > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad u(t, 0) = u^1(t). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Как известно, его решение для произвольной точки (t, x) есть

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u^0(x - \lambda t) = u_*, & \text{if } x - \lambda t \geq 0, \\ u(t, x) &= u^1(t - x / \lambda) = u_*, & \text{if } x - \lambda t < 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

т.е. решение (2.7) u постоянно вдоль характеристики $dx = \lambda dt$. В плоскости (t, x) введем, например, равномерную разностную сетку:

$$t^n = n\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x_m = mh, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

с пространственным шагом h и временным шагом τ . Обозначим число Куранта, как $0 < \sigma = \lambda\tau/h < 1$. Используем явный сеточный шаблон (t^{n+1}, x_m) , (t^n, x_{m-2}) , (t^n, x_{m-1}) , (t^n, x_m) , (t^n, x_{m+1}) (см. Рис. 2.1). Запишем все линейные разностные

схемы с неопределенными коэффициентами $\alpha_{-2}^0, \alpha_{-1}^0, \alpha_0^0, \alpha_1^0$ на этом шаблоне в виде:

$$u_m^{n+1} = \alpha_{-2}^0 u_{m-2}^n + \alpha_{-1}^0 u_{m-1}^n + \alpha_0^0 u_m^n + \alpha_1^0 u_{m+1}^n = \sum_{\mu, \nu} \alpha_{\mu}^{\nu}(\sigma) u_{m+\mu}^{n+\nu}. \quad (2.9)$$

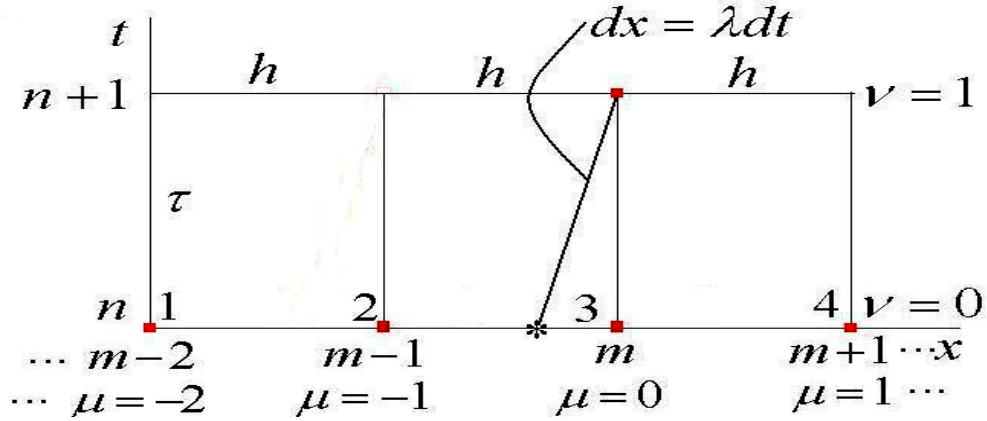


Рис. 2.1. Пятиточечный явный двухслойный сеточный шаблон разностной схемы.

Условиями аппроксимации первого (2.10), второго (2.10)-(2.11) и третьего порядка (2.10)-(2.12) на решениях (2.7) будут линейные относительно неопределенных коэффициентов уравнения:

$$\sum_{\mu, \nu} \alpha_{\mu}^{\nu}(\sigma) = 1, \quad \sum_{\mu, \nu} (\mu - \nu\sigma) \alpha_{\mu}^{\nu}(\sigma) = -\sigma, \quad (2.10)$$

$$\sum_{\mu, \nu} (\mu - \nu\sigma)^k \alpha_{\mu}^{\nu}(\sigma) = (-\sigma)^k, \quad k = 2, \quad (2.11)$$

$$\sum_{\mu, \nu} (\mu - \nu\sigma)^k \alpha_{\mu}^{\nu}(\sigma) = (-\sigma)^k, \quad k = 3. \quad (2.12)$$

Эти условия можно легко получить, если разложить все значения сеточной проекции точного решения дифференциальной задачи $u_{m\pm\mu}^n$ в ряд Тейлора относительно любой точки нашего сеточного шаблона, например (t^n, x_m) , и подставить в (2.9):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_m^{n+1} = u_m^n + \tau (u_t)_m^n + \frac{\tau^2}{2} (u_{tt})_m^n + \frac{\tau^3}{6} (u_{ttt})_m^n + O(\tau^4), \\ \alpha_1^0 u_{m+1}^n = \alpha_1^0 \left(u_m^n + h (u_x)_m^n + \frac{h^2}{2} (u_{xx})_m^n + \frac{h^3}{6} (u_{xxx})_m^n + O(h^4) \right), \\ \alpha_0^0 u_m^n = \alpha_0^0 u_m^n, \\ \alpha_{-1}^0 u_{m-1}^n = \alpha_{-1}^0 \left(u_m^n - h (u_x)_m^n + \frac{h^2}{2} (u_{xx})_m^n - \frac{h^3}{6} (u_{xxx})_m^n + O(h^4) \right), \\ \alpha_{-2}^0 u_{m-2}^n = \alpha_{-2}^0 \left(u_m^n - 2h (u_x)_m^n + 2h^2 (u_{xx})_m^n - \frac{4h^3}{3} (u_{xxx})_m^n + O(h^4) \right). \end{array} \right.$$

Также нужно воспользоваться следствиями уравнения (2.7):

$$\begin{aligned} u_t &= -\lambda u_x, \quad u_{tt} = \lambda^2 u_{xx}, \quad u_{tx} = -\lambda u_{xx}, \\ u_{ttt} &= -\lambda^3 u_{xxx}, \quad u_{ttx} = \lambda^2 u_{xxx}, \quad u_{txx} = -\lambda u_{xxx}. \end{aligned}$$

С использованием этих выражений можно избавиться от частных производных по времени, выражая их через пространственные производные.

Приравнивая значения u_m^n , $(u_x)_m^n$, $(u_{xx})_m^n$, $(u_{xxx})_m^n$ в левой и правой частях (2.9), получаем условия аппроксимации (2.10–2.12), при этом надо понимать, что количество уравнений в (2.10)–(2.12) не может быть больше, чем число неопределенных коэффициентов α_μ^ν нашего сеточного шаблона. Поэтому разностные схемы более высокого порядка аппроксимации на данном сеточном шаблоне построить невозможно без перехода к продолженной (расширенной) системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + \lambda u_x = 0, \\ v(t, x) = u_x(t, x), \\ v_t + \lambda v_x = 0. \end{array} \right.$$

Следующий вопрос, который также необходимо упомянуть, почему схема (2.9) не может иметь порядок аппроксимации выше третьего при том, что значения проекции решения функции в узлах нашего сеточного шаблона мы раскладывали в ряд Тейлора вплоть до 4-го порядка по τ и h . Следуя [Шокин, Яненко, 1985],

запишем первое дифференциальное приближение схемы (2.9). Для этого из условий аппроксимации (2.10–2.12) найдем все коэффициенты α_μ^ν и подставим их в (2.9), заменив значения функции $u_{m\pm\mu}^n$ (проекции на сетку точного решения дифференциальной задачи) в узлах сеточного шаблона на их приближения по формуле Тейлора в малой окрестности точки $\{t^n, x_m\}$:

$$u_t + \lambda u_x = \frac{h^4 u_{xxxx}}{24\tau} \left(\sigma^4 + \sum_{\mu=-2}^1 \mu^4 \alpha_\mu^0 \right) = \frac{u_{xxxx}}{24} (\lambda^4 \tau^3 + 2\lambda^3 \tau^2 h + \lambda^2 \tau h^2 - 2\lambda h^3).$$

Перегруппировав слагаемые в получившемся выражении так, чтобы слева от знака равенства осталось само уравнение переноса, легко увидеть, что порядок главного члена невязки для схемы (2.9) будет третий $- O(\tau^3, h^3)$.

Важный класс для (2.7) составляют монотонные разностные схемы, переводящие монотонный профиль u_m^n на слое $t = t^n$ в монотонный профиль u_m^{n+1} на слое $t = t^{n+1}$. В случае выполнения условия $0 < \sigma = \lambda\tau/h < 1$, характеристика $dx = \lambda dt$ выходящая из точки (t^{n+1}, x_m) пересекает слой t^n в точке (t^n, x_*) , где $x_{m-1} < x_* < x_m$ (Рис. 2.1). Тогда, в соответствии с (2.7), характеристическое условие монотонности (2.8) записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} u_{m-1}^n < u_m^{n+1} = u_* < u_m^n, & \text{if } \Delta_0 = u_{m-1}^n - u_m^n < 0, \\ u_{m-1}^n > u_m^{n+1} = u_* > u_m^n, & \text{if } \Delta_0 = u_{m-1}^n - u_m^n > 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Используя условия аппроксимации (2.6-2.11) и подставляя их в (2.9), получаем однопараметрическое семейство схем второго порядка аппроксимации с одним свободным параметром, например, α_{-2} :

$$u_m^{n+1} = u_* = u_m^n + \frac{\sigma}{2} (\Delta_0 + \Delta_1) + \frac{\sigma^2}{2} (\Delta_0 - \Delta_1) + \alpha_{-2}^0 (\Delta_{-1} - 2\Delta_0 + \Delta_1), \quad (2.14)$$

где $\Delta_1 = u_m^n - u_{m+1}^n$ и $\Delta_{-1} = u_{m-2}^n - u_{m-1}^n$. Подставляя (2.14) в (2.13) и вычитая из обеих частей u_m^n , получим характеристическое условие монотонности разностных схем второго порядка аппроксимации (2.10-2.11) в виде:

$$\begin{cases} \Delta_0 < \frac{\sigma}{2}(\Delta_0 + \Delta_1) + \frac{\sigma^2}{2}(\Delta_0 - \Delta_1) + \alpha_{-2}^0(\Delta_{-1} - 2\Delta_0 + \Delta_1) < 0, & \text{если } \Delta_0 < 0, \\ \Delta_0 > \frac{\sigma}{2}(\Delta_0 + \Delta_1) + \frac{\sigma^2}{2}(\Delta_0 - \Delta_1) + \alpha_{-2}^0(\Delta_{-1} - 2\Delta_0 + \Delta_1) > 0, & \text{если } \Delta_0 > 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Разделив затем оба неравенства на Δ_0 , получаем характеристическое условие монотонности в виде одного неравенства:

$$0 \leq w = \frac{\sigma}{2}(1 + \delta_1) + \frac{\sigma^2}{2}(1 - \delta_1) + \alpha_{-2}^0(\delta_{-1} - 2 + \delta_1) \leq 1, \quad (2.16)$$

где $\delta_{-1} = \Delta_{-1}/\Delta_0$, $\delta_1 = \Delta_1/\Delta_0$, $\Delta_0 \neq 0$. Случай $\Delta_0 = 0$ дает тривиальное решение $u_m^{n+1} = u_{m-1}^n = u_m^n$ и далее не рассматривается.

На плоскости $\{\delta_{-1}, \delta_1\}$ (Рис. 2.2) условие монотонности (2.16) выделяет полосу между пучками параллельных прямых:

$$\begin{cases} w(\delta_{-1}, \delta_1, \alpha_{-2}^0) = \frac{\sigma}{2}(1 + \delta_1) + \frac{\sigma^2}{2}(1 - \delta_1) + \alpha_{-2}^0(\delta_{-1} - 2 + \delta_1) = 0, \\ w(\delta_{-1}, \delta_1, \alpha_{-2}^0) = \frac{\sigma}{2}(1 + \delta_1) + \frac{\sigma^2}{2}(1 - \delta_1) + \alpha_{-2}^0(\delta_{-1} - 2 + \delta_1) = 1. \end{cases} \quad (2.17)$$

проходящих через неподвижные точки:

$$\left\{ \delta_{-1} = \frac{(3 - \sigma)}{(1 - \sigma)}, \delta_1 = \frac{(1 + \sigma)}{(\sigma - 1)} \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ \delta_{-1} = \frac{(\sigma - 2)}{\sigma}, \delta_1 = \frac{(\sigma + 2)}{\sigma} \right\}. \quad (2.18)$$

При изменении свободного параметра α_{-2}^0 от $-\infty$ до $+\infty$ прямые (2.17), оставаясь параллельными, поворачиваются относительно точек (2.18), покрывая всю плоскость $\{\delta_{-1}, \delta_1\}$. Предельным значениям свободного параметра $\alpha_{-2}^0 = \pm\infty$ соответствует прямая $\delta_{-1} + \delta_1 = 2$.

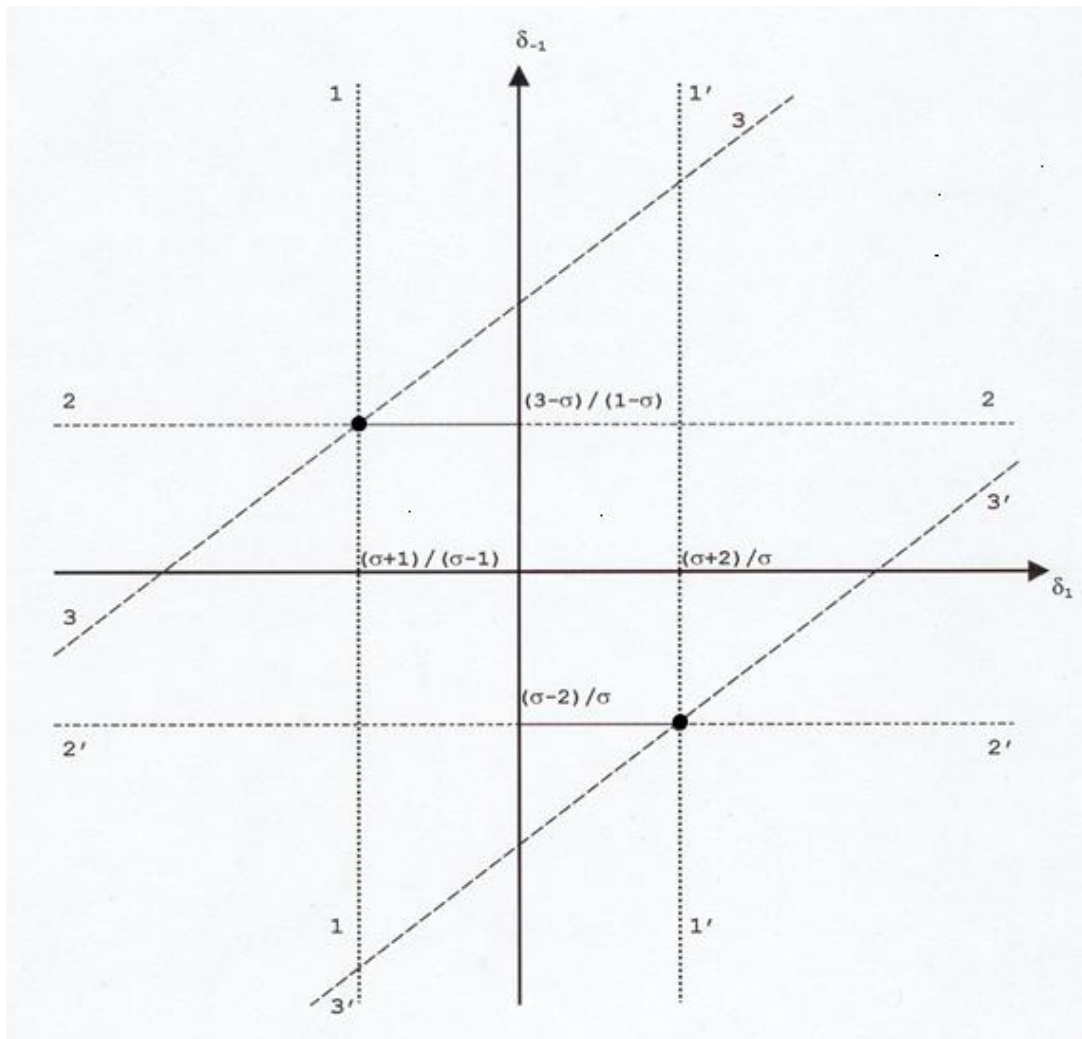


Рис. 2.2. Области монотонности схем на плоскости $\{\delta_{-1}, \delta_1\}$.

Наиболее известным на данном сеточном шаблоне схемам 2-го и 3-го порядка аппроксимации соответствуют следующие области монотонности, ограниченные линиями (2.17):

- при $\alpha_{-2}^0 = 0$ – схема [Lax, Wendroff, 1960], область между прямыми (1-1) и (1'-1') на Рис. 2.2;
- при $\alpha_{-2}^0 = \frac{\sigma}{2}(\sigma - 1)$ – схема [Warming, Beam, 1975], область между прямыми (2-2) и (2'-2') на Рис. 2.2;
- при $\alpha_{-2}^0 = \frac{\sigma}{6}(\sigma^2 - 1)$ – единственная на выбранном сеточном шаблоне схема третьего порядка аппроксимации – схема [Русанов, 1968], область между прямыми (3-3) и (3'-3') на Рис. 2.2.

Эти схемы (каждая в своей области монотонности) могут быть выбраны в качестве базовых для построения монотонной схемы 2-3 порядка аппроксимации при произвольных значениях $\{\delta_{-1}, \delta_1\}$, т.е. при достаточно широком наборе возможных значений сеточной функции в узлах выбранного шаблона, включающем и разрывные решения исходной дифференциальной задачи.

Алгоритм такого выбора может быть различным. Например, вначале определяется возможность использования наиболее точной на данном сеточном шаблоне схемы [Русанов, 1968], т.к. для достаточно гладких решений соответствующие точки в плоскости $\{\delta_{-1}, \delta_1\}$ располагаются вблизи начала координат. В противном случае выбирается одна из схем [Lax, Wendroff, 1960] или [Warming, Beam, 1975], в зависимости от того, области монотонности какой из них принадлежит набор значений сеточной функции, т.к. для разрывных решений исходной дифференциальной задачи соответствующие точки в плоскости $\{\delta_{-1}, \delta_1\}$ располагаются вдали от начала координат, но вблизи линий $\delta_{-1} = 0$ или $\delta_1 = 0$ (осей координат). Обычно этого набора базовых схем бывает достаточно, но в случае необходимости можно построить алгоритм выбора свободного коэффициента α_{-2}^0 , допускающего произвольный набор значений сеточных функций в узлах выбранного сеточного шаблона.

Поведение численного решения уравнения переноса (2.7) в момент времени $T = N\tau$ при $\lambda = 1$, $\sigma = 0.5$, $N = 2000$, $x \in [0,1]$, на разностной сетке с числом узлов $M = 1000$ для различных базовых схем в случае разрывных начальных данных: $u_0(x) = 1$, если $x \in [x_0, x_0 + 0.08]$, иначе $u_0(x) = 0$, показано на Рис. 2.3 (a-f).

С точным решением сравниваются результаты расчетов по известным схемам первого, второго и третьего порядков аппроксимации: явной двухслойной монотонной схеме «левый уголок» $u_m^{n+1} = u_m^n + \sigma(u_m^n - u_{m-1}^n)$, $x_0 = 0.15$, (Рис. 2.3-a); явной двухслойной схемы [Lax, Wendroff, 1960], $x_0 = 0.28$, (Рис. 2.3-b); [Warming, Beam, 1975], $x_0 = 0.41$, (Рис. 2.3-c); их монотонной комбинации, $x_0 =$

0.64, (Рис. 2.3-d); явной двухслойной схеме третьего порядка аппроксимации [Русанов, 1968], $x_0 = 0.77$, (Рис. 2.3-e); и явной схеме второго-третьего порядка аппроксимации, полученной путем монотонной комбинации схем [Lax, Wendroff, 1960], [Warming, Beam, 1975] и [Русанов, 1968], для $x_0 = 0.9$, (Рис. 2.3-f).

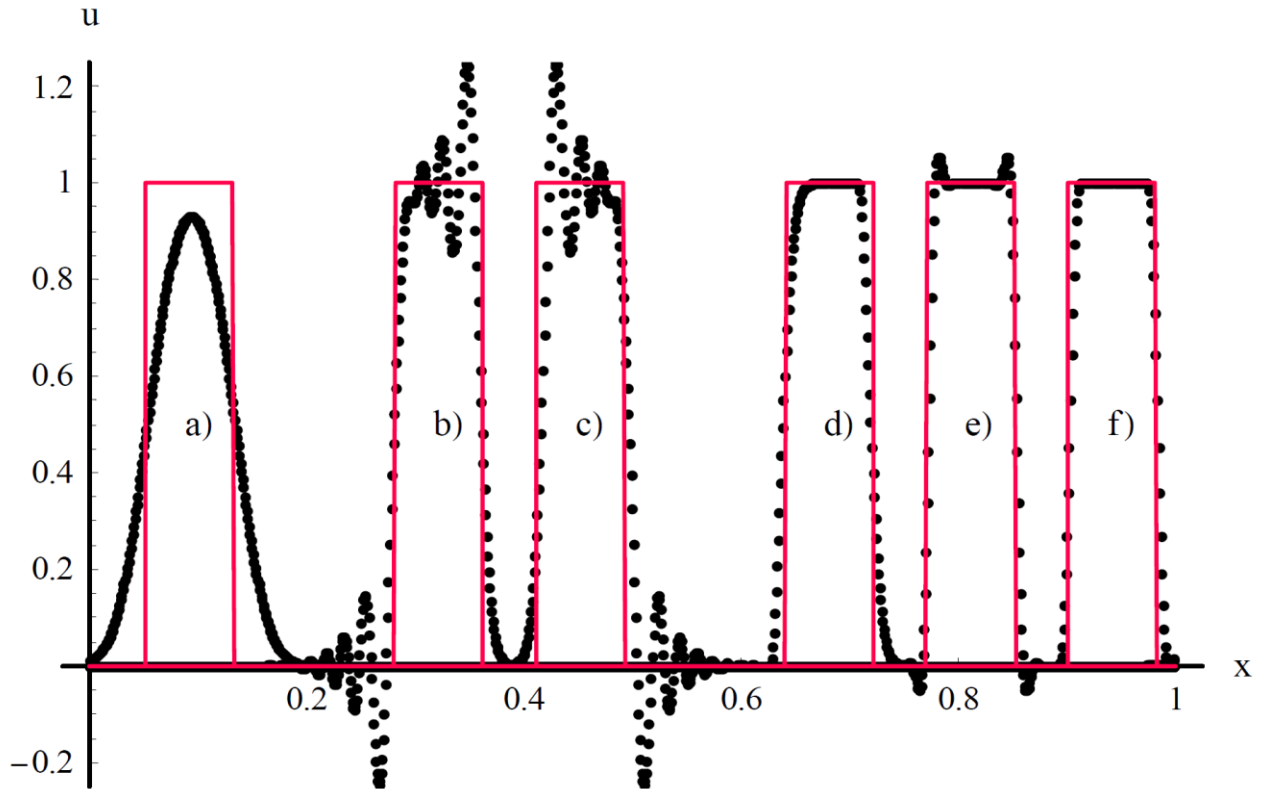


Рис. 2.3. Сравнение численного решения (точки) с точным решением (красная линия) уравнения переноса для различных базовых схем при периодических граничных условиях $u(t, 0) = u(t, 1)$, в момент времени $T = N\tau$, при $\lambda = 1$, $\sigma = 0.5$, $N = 2000$, $x \in [0, 1]$, на разностной сетке с числом узлов $M = 1000$, $u_0(x) = 1$ если $x \in [x_0, x_0 + 0.08]$, иначе $u_0(x) = 0$.

Видно, что устойчивые, но немонотонные схемы второго порядка аппроксимации осциллируют на разрывах заметно сильнее, чем схема третьего порядка. Также стоит отметить, что схемы [Lax, Wendroff, 1960], [Warming, Beam, 1975], имеющие ортогональные границы областей монотонности на плоскости $\{\delta_{-1}, \delta_1\}$, осциллируют на противоположных углах ступеньки разрывных начальных данных (Рис.2.3-b, c). Это можно легко объяснить, если посмотреть на первое дифференциальное приближение схем второго порядка аппроксимации на заданном сеточном шаблоне:

$$u_t + \lambda u_x = \frac{h^3 u_{xxx}}{6\tau} \left(\sigma^3 + \sum_{\mu=-2}^1 \mu^3 \alpha_\mu^0 \right) = \frac{u_{xxx}}{6} \left(\lambda^3 \tau^2 - \lambda h^2 - \frac{6\alpha_{-2}^0 h^3}{\tau} \right). \quad (2.19)$$

Если в него подставить значения коэффициентов α_{-2}^0 схем [Lax, Wendroff, 1960], [Warming, Beam, 1975], то мы получим при $\sigma = \frac{1}{2}$, что $u_t + \lambda u_x = \frac{-\lambda u_{xxx} h^2}{8}$ для схемы [Lax, Wendroff, 1960] с $\alpha_{-2}^0 = 0$ и $u_t + \lambda u_x = \frac{\lambda u_{xxx} h^2}{8}$ для схемы [Warming, Beam, 1975] с $\alpha_{-2}^0 = \frac{(\sigma^2 - \sigma)}{2}$, то есть равные по абсолютному значению и противоположные по знаку величины дисперсии.

Использование характеристического критерия монотонности (2.16) приводит к полному исчезновению осцилляций на данном разрывном решении, как это видно на Рис. 2.3-*d, f*. При этом добавление схемы третьего порядка аппроксимации [Русанов, 1968] в набор базовых схем заметно увеличивает точность численного решения.

Хотя в соответствии с теоремой С.К. Годунова [Годунов, 1959] линейных монотонных по Фридрихсу схем (с неотрицательными коэффициентами) выше первого порядка аппроксимации не существует, в классе нелинейных схем $\alpha_\mu^v = \alpha_\mu^v(\sigma, u)$, как показывают приведенные выше построения, всегда возможно построить монотонную в определении (2.6) схему с порядком аппроксимации не ниже второго. Из характеристического критерия монотонности (2.10) можно получить отрезок значений α_{-2}^0 , соответствующий области монотонности схем второго порядка аппроксимации (2.8) при любых значениях (δ_{-1}, δ_1) :

$$\alpha_{-2}^0 \in \left[\frac{\sigma(1+\delta_1) + \sigma^2(1-\delta_1)}{2(2-\delta_{-1}-\delta_1)}, \frac{2-\sigma(1+\delta_1) + \sigma^2(1-\delta_1)}{2(\delta_{-1} + \delta_1 - 2)} \right]. \quad (2.20)$$

Этот отрезок значений α_{-2}^0 получается приравниваем значения $w = 0$ и $w = 1$ в (2.16). Он может содержать или не содержать в себе схему третьего порядка аппроксимации [Русанов, 1968], но монотонные схемы второго порядка на нём всегда присутствуют.

Тем не менее, вопрос – как выбирать наилучшим образом монотонную схему второго порядка аппроксимации, если решение, полученное с помощью единственно возможной схемы третьего порядка, не удовлетворяет критерию монотонности (2.16) – остается открытым. Схему более высокого порядка, не используя продолженной системы уравнений, на выбранном шаблоне (см. Рис. 2.1) не построить. Выбор наилучшей из схем второго порядка, удовлетворяющей критерию монотонности (2.16), не очевиден. Любая из них, исходя из вида первого дифференциального приближения (2.19), исключает влияние на остаточный член аппроксимации производных исходной функции до второй степени включительно. Если исключить еще и третью производную – получим соответственно единственно возможную схему третьего порядка.

Самый простой алгоритм выбора оставшегося свободного коэффициента α_{-2} вроде бы очевиден: если возможно, то используем схему третьего порядка, а если нет, то достаточно просто взять то из значений α_{-2} , которое лежит ближе всего к значению этой схемы $\alpha_{-2} = \sigma(\sigma^2 - 1)/6$, то есть один из концов отрезка (2.20). Таким образом, мы минимизируем влияние значения третьей производной на первое дифференциальное приближение, но это не есть наилучший вариант. Понятно, что в этом случае рассчитываемое значение u_m^{n+1} будет просто равно одному из значений u_{m-1}^n или u_m^n и, сохраняя, таким образом, монотонность решения мы нарушаем монотонность его производных. Как было показано в [Шокин, Яненко, 1985] немонотонность в производных решения приводит к нарушению гладкости численного решения даже в области непрерывного поведения функции решения исходной дифференциальной задачи.

И все-таки, как осуществить выбор оставшегося свободного коэффициента α_{-2} так, чтобы удовлетворить всем необходимым критериям? Для начала давайте представим схему (2.14), заменив значения сеточной функции $u_{m\pm\mu}^n$ в узлах заданного шаблона на их приближения по формуле Тейлора в малой окрестности точки (t^n, x_m) : в следующем виде:

$$\begin{aligned}
u_m^{n+1} &= u_m^n + \frac{\sigma}{2}(u_{m-1}^n - u_{m+1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + \alpha_{-2}(u_{m-2}^n - 3u_{m-1}^n + 3u_m^n - u_{m+1}^n) = \\
&= u_m^n \cong u_m^n - \sigma h \left(u_x + \frac{h^2}{6} u_{xxx} \right)_m^n + \frac{\sigma^2 h^2}{2} \left(u_{xx} + \frac{h^2}{12} u_{xxxx} \right)_m^n - \alpha_{-2} h^3 \left(u_{xxx} - \frac{h}{2} u_{xxxx} \right)_m^n,
\end{aligned}$$

или в малой окрестности точки (t^n, x_*) :

$$u_m^{n+1} = u_m^n = u_m^n - \sigma h (u_x + \lambda \tau u_{xx})_*^n + \frac{\sigma^2 h^2}{2} (u_{xx} + \lambda \tau u_{xxx})_*^n - \alpha_{-2} h^3 \left(u_{xxx} + \left(\lambda \tau - \frac{h}{2} \right) u_{xxxx} \right)_*^n. \quad (2.21)$$

Глядя на вид схемы (2.21), можно сделать вывод о влиянии поведения производных решения на конечный результат расчета. Хорошо видно, что наибольший вклад дает первая производная решения, затем вторая и уже потом третья, поэтому надо накладывать ограничения на выбор α_{-2} , так чтобы сохранялась монотонность поведения не только самого решения, но и его производных в заданной последовательности.

Также, если посмотреть на вид схемы (2.21) с точки зрения использования продолженных систем уравнений для (2.7), то её можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} u_m^{n+1} = u_m^n = u_m^n + \beta_0 h (u_x)_*^n + \gamma_0 h^2 (u_{xx})_*^n + \eta_0 h^3 (u_{xxx})_*^n + O(h^4), \\ \beta_0 = -\sigma, \quad \gamma_0 = -\frac{\sigma^2}{2}, \quad \eta_0 = \frac{\sigma^3}{2} - \alpha_{-2}. \end{cases} \quad (2.22)$$

и логично предположить, что в процессе вычисления производных $(u_x)_*^n$, $(u_{xx})_*^n$ и $(u_{xxx})_*^n$, мы бы использовали монотонный алгоритм расчета всех их значений в смысле критерия (2.16).

Для начала разложим проекции точного решения в узлах нашего сеточного шаблона $u_{m \pm \mu}^n$ в ряд Тейлора относительно точки (t^n, x_*) , из которой характеристика приходит в точку (t^{n+1}, x_m) , как показано на Рис. 2.1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{m-2}^n = u_*^n - (2h - \lambda\tau)u_x + \frac{(2h - \lambda\tau)^2}{2}u_{xx} - \frac{(2h - \lambda\tau)^3}{6}u_{xxx} + \dots \\ u_{m-1}^n = u_*^n - (h - \lambda\tau)u_x + \frac{(h - \lambda\tau)^2}{2}u_{xx} - \frac{(h - \lambda\tau)^3}{6}u_{xxx} + \dots \\ u_m^n = u_*^n + \lambda\tau u_x + \frac{(\lambda\tau)^2}{2}u_{xx} - \frac{(\lambda\tau)^3}{6}u_{xxx} + \dots \\ u_{m+1}^n = u_*^n + (h + \lambda\tau)u_x + \frac{(h + \lambda\tau)^2}{2}u_{xx} + \frac{(h + \lambda\tau)^3}{6}u_{xxx} + \dots \end{array} \right. \quad (2.23)$$

и найдем значение первой производной в этой же точке $(u_x)_*^n$ с максимально возможным на заданном шаблоне порядком аппроксимации.

$$(u_x)_*^n = \beta_{-2}u_{m-2}^n + \beta_{-1}u_{m-1}^n + \beta_*u_*^n + \beta_0u_m^n + \beta_1u_{m+1}^n, \quad (2.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{-2} + \beta_{-1} + \beta_* + \beta_0 + \beta_1 = 0, \\ -(2 - \sigma)\beta_{-2} - (1 - \sigma)\beta_{-1} + \sigma\beta_0 + (1 + \sigma)\beta_1 = \frac{1}{h}, \\ (2 - \sigma)^2\beta_{-2} + (1 - \sigma)^2\beta_{-1} + \sigma^2\beta_0 + (1 + \sigma)^2\beta_1 = 0, \\ -(2 - \sigma)^3\beta_{-2} - (1 - \sigma)^3\beta_{-1} + \sigma^3\beta_0 + (1 + \sigma)^3\beta_1 = 0, \\ (2 - \sigma)^4\beta_{-2} + (1 - \sigma)^4\beta_{-1} + \sigma^4\beta_0 + (1 + \sigma)^4\beta_1 = 0. \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Условие монотонности первой производной в этой точке можно записать аналогично (2.13):

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_x)_{m-1}^n \leq (u_x)_*^n \leq (u_x)_m^n, \text{ если } (u_x)_{m-1}^n - (u_x)_m^n \leq 0, \\ (u_x)_{m-1}^n \geq (u_x)_*^n \geq (u_x)_m^n, \text{ если } (u_x)_{m-1}^n - (u_x)_m^n \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.26)$$

здесь

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_x)_{m-1}^n = \frac{u_m^n - u_{m-2}^n}{2h} + O(h^2), \\ (u_x)_m^n = \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + O(h^2). \end{array} \right.$$

Далее, выражая $(u_x)_*^n$ через u_*^n с использованием (2.24), можно преобразовать (2.26) к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta_*} (u_x)_{m-1}^n - \sum_{\mu=-2}^1 \frac{\beta_\mu}{\beta_*} u_{m+\mu}^n \leq u_*^n \leq \frac{1}{\beta_*} (u_x)_m^n - \sum_{\mu=-2}^1 \frac{\beta_\mu}{\beta_*} u_{m+\mu}^n, & \text{если } (u_x)_{m-1}^n - (u_x)_m^n \leq 0, \\ \frac{1}{\beta_*} (u_x)_{m-1}^n - \sum_{\mu=-2}^1 \frac{\beta_\mu}{\beta_*} u_{m+\mu}^n \geq u_*^n \geq \frac{1}{\beta_*} (u_x)_m^n - \sum_{\mu=-2}^1 \frac{\beta_\mu}{\beta_*} u_{m+\mu}^n, & \text{если } (u_x)_{m-1}^n - (u_x)_m^n \geq 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Решаем систему (2.25):

$$\begin{cases} \beta_{-2} = \frac{\sigma - \sigma^3}{6h(2 - \sigma)}, & \beta_{-1} = \frac{\sigma(2 + \sigma - \sigma^2)}{2h(\sigma - 1)}, \\ \beta_* = \frac{-2 + 2\sigma + 6\sigma^2 - 4\sigma^3}{h\sigma(2 - \sigma - 2\sigma^2 + \sigma^3)}, \\ \beta_0 = \frac{(\sigma^2 - 1)(\sigma - 2)}{2h\sigma}, & \beta_1 = \frac{\sigma(\sigma - 1)(\sigma - 2)}{6h(1 + \sigma)}. \end{cases}$$

и подставляя найденные значения коэффициентов β_μ , $\mu = -2, \dots, 1$, в (2.27), получаем отрезок значений $u_*^n \equiv u_m^{n+1}$, который дает нам монотонное поведение первой производной. Зная его, мы можем вычислить дополнительный интервал значений коэффициента α_{-2} , соответствующий области монотонности численного решения, полученного для первой производной исходной дифференциальной задачи в окрестности точки u_*^n :

$$\alpha_{-2} \in \left[\frac{\frac{(u_x)_{m-1}^n}{\beta_*} - \sum_{\mu=-2}^1 \frac{\beta_\mu}{\beta_*} u_{m+\mu}^n - \left(u_m^n + \frac{\sigma}{2} (u_{m-1}^n - u_{m+1}^n) + \frac{\sigma^2}{2} (u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) \right)}{(u_{m-2}^n - 3u_{m-1}^n + 3u_m^n - u_{m+1}^n)}, \frac{\frac{(u_x)_m^n}{\beta_*} - \sum_{\mu=-2}^1 \frac{\beta_\mu}{\beta_*} u_{m+\mu}^n - \left(u_m^n + \frac{\sigma}{2} (u_{m-1}^n - u_{m+1}^n) + \frac{\sigma^2}{2} (u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) \right)}{(u_{m-2}^n - 3u_{m-1}^n + 3u_m^n - u_{m+1}^n)} \right]. \quad (2.28)$$

Находя область пересечения отрезков (2.20) и (2.28), мы можем найти такое значение коэффициента α_{-2} , которое лежит ближе всего к значению схемы третьего порядка $\alpha_{-2}^0 = \frac{\sigma(\sigma^2-1)}{6}$, и при этом обеспечивает как монотонность численного решения, так и монотонность первой производной в рассчитываемой точке u_*^n .

Продолжим этот подход и учтём поведение второй производной решения при выборе оставшегося коэффициента α_{-2} . По аналогии с (2.24-2.25) получаем:

$$(u_{xx})_*^n = \gamma_{-2}u_{m-2}^n + \gamma_{-1}u_{m-1}^n + \gamma_*u_*^n + \gamma_0u_m^n + \gamma_1u_{m+1}^n, \quad (2.29)$$

$$\begin{cases} \gamma_{-2} + \gamma_{-1} + \gamma_* + \gamma_0 + \gamma_1 = -1, \\ -(2-\sigma)\gamma_{-2} - (1-\sigma)\gamma_{-1} + \sigma\gamma_0 + (1+\sigma)\gamma_1 = 0, \\ (2-\sigma)^2\gamma_{-2} + (1-\sigma)^2\gamma_{-1} + \sigma^2\gamma_0 + (1+\sigma)^2\gamma_1 = \frac{2}{h^2}, \\ -(2-\sigma)^3\gamma_{-2} - (1-\sigma)^3\gamma_{-1} + \sigma^3\gamma_0 + (1+\sigma)^3\gamma_1 = 0, \\ (2-\sigma)^4\gamma_{-2} + (1-\sigma)^4\gamma_{-1} + \sigma^4\gamma_0 + (1+\sigma)^4\gamma_1 = 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

Условие монотонности второй производной в этой точке можно записать аналогично (2.13) или (2.26):

$$\begin{cases} (u_{xx})_{m-1}^n \leq (u_{xx})_*^n \leq (u_{xx})_m^n, & \text{если } (u_{xx})_{m-1}^n - (u_{xx})_m^n \leq 0, \\ (u_{xx})_{m-1}^n \geq (u_{xx})_*^n \geq (u_{xx})_m^n, & \text{если } (u_{xx})_{m-1}^n - (u_{xx})_m^n \geq 0. \end{cases} \quad (2.31)$$

соответственно здесь

$$\begin{cases} (u_{xx})_{m-1}^n = \frac{u_m^n - 2u_{m-1}^n + u_{m-2}^n}{h^2} + O(h^2), \\ (u_{xx})_m^n = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + O(h^2). \end{cases}$$

Также, выражая $(u_{xx})_*^n$ через u_*^n , с использованием (2.29), преобразуем (2.31) к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma_*} (u_{xx})_{m-1}^n - \sum_{\mu=-2}^1 \frac{\gamma_\mu}{\gamma_*} u_{m+\mu}^n \leq u_*^n \leq \frac{1}{\gamma_*} (u_{xx})_m^n - \sum_{\mu=-2}^1 \frac{\gamma_\mu}{\gamma_*} u_{m+\mu}^n, & \text{если } (u_{xx})_{m-1}^n - (u_{xx})_m^n \leq 0, \\ \frac{1}{\gamma_*} (u_{xx})_{m-1}^n - \sum_{\mu=-2}^1 \frac{\gamma_\mu}{\gamma_*} u_{m+\mu}^n \geq u_*^n \geq \frac{1}{\gamma_*} (u_{xx})_m^n - \sum_{\mu=-2}^1 \frac{\gamma_\mu}{\gamma_*} u_{m+\mu}^n, & \text{если } (u_{xx})_{m-1}^n - (u_{xx})_m^n \geq 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

Решая систему (2.30):

$$\begin{cases} \gamma_{-2} = \frac{1-3\sigma^2}{3h^2(\sigma-2)}, & \gamma_{-1} = \frac{2+\sigma(2-3\sigma)}{h^2(1-\sigma)}, \\ \gamma_* = \frac{2(6\sigma(\sigma-1)-1)}{h^2\sigma(2-\sigma)(1-\sigma^2)}, \\ \gamma_0 = \frac{1+\sigma(4-3\sigma)}{h^2\sigma}, & \gamma_1 = \frac{2+3\sigma(\sigma-2)}{3h^2(1+\sigma)}. \end{cases} \quad (2.33)$$

и подставляя найденные значения коэффициентов γ_μ , $\mu = -2, \dots, 1$ в (2.32), получаем отрезок значений $u_*^n \equiv u_m^{n+1}$, который дает нам монотонное поведение второй производной. Зная его, мы можем вычислить дополнительный интервал значений коэффициента α_{-2} , соответствующий области монотонности второй производной решения исходной дифференциальной задачи в окрестности точки u_*^n :

$$\alpha_{-2} \in \left[\frac{\frac{(u_{xx})_{m-1}^n}{\gamma_*} - \sum_{\mu=-2}^1 \frac{\gamma_\mu}{\gamma_*} u_{m+\mu}^n - \left(u_m^n + \frac{\sigma}{2} (u_{m-1}^n - u_{m+1}^n) + \frac{\sigma^2}{2} (u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) \right)}{(u_{m-2}^n - 3u_{m-1}^n + 3u_m^n - u_{m+1}^n)}, \right. \\ \left. \frac{\frac{(u_{xx})_m^n}{\gamma_*} - \sum_{\mu=-2}^1 \frac{\gamma_\mu}{\gamma_*} u_{m+\mu}^n - \left(u_m^n + \frac{\sigma}{2} (u_{m-1}^n - u_{m+1}^n) + \frac{\sigma^2}{2} (u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) \right)}{(u_{m-2}^n - 3u_{m-1}^n + 3u_m^n - u_{m+1}^n)} \right]. \quad (2.34)$$

Находя область пересечения отрезков (2.20), (2.28) и (2.34), мы можем найти такое значение коэффициента α_{-2} , которое лежит ближе всего к значению схемы третьего порядка $\alpha_{-2}^0 = \frac{\sigma(\sigma^2-1)}{6}$, и при этом обеспечивает как монотонность

численного решения, так и монотонность первой и второй производных в рассматриваемой точке: $u_*^n \equiv u_m^{n+1}$.

Этот же подход можно продолжить дальше и учесть поведение уже третьей производной решения при выборе оставшегося свободным коэффициента α_{-2} . Дальнейших ограничений на значения коэффициента α_{-2} для четвертой производной численного решения, как видно из (2.21) получить уже невозможно.

С целью проверки предложенных выше подходов к построению монотонных разностных схем высокого порядка аппроксимации было выполнено численное решение уравнения переноса (2.7) при различных начальных данных и периодических граничных условиях $u(t, 0) = u(t, 1)$, а также его сравнение с аналитическим решением. В качестве начальных данных бралась известная непрерывная функция с разрывной первой производной в двух точках x_1 и x_2 :

$$\begin{cases} u(x) = \sqrt{1 - (x - x_0)^2 / \Delta_1^2}, & \text{если } x \in [x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1], \\ u(x) = 0, & \text{если } x \notin [x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1], \quad \Delta_1 = \frac{x_2 - x_1}{2}. \end{cases} \quad (2.35)$$

Значения координат x_0 , x_1 , x_2 варьировались. Некоторые результаты этих расчетов представлены на Рис. 2.4. Основное внимание уделялось исследованию поведения численных решений при больших временах $t = N\tau$ (большом числе шагов по времени N от 10^3 до 3×10^4), так как именно в этом случае схемы высокого порядка аппроксимации позволяют существенно сократить время расчета, сохраняя необходимую точность.

Поведение различных вариантов численного решения в момент времени $T = N\tau$ при $\lambda = 1$, $\sigma = 0.51$, $N = 3 \times 10^4$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.3$ на разностной сетке с числом узлов $M = 10^3$ в случае начальных данных (2.35) показано на Рис. 2.4. С точным решением (синяя линия) сопоставляются результаты трех расчетов (красная линия). Первого, сделанного по монотонной комбинации в смысле (2.16) схеме второго порядка аппроксимации [Lax, Wendroff, 1960] и [Warming, Beam, 1975] (левый график), второго – монотонной за счет комбинации критериев (2.16), (2.26)

схеме второго порядка аппроксимации (средний график) и третьего – монотонной за счет комбинации критериев (2.16), (2.26) схеме второго-третьего порядка аппроксимации (правый график).

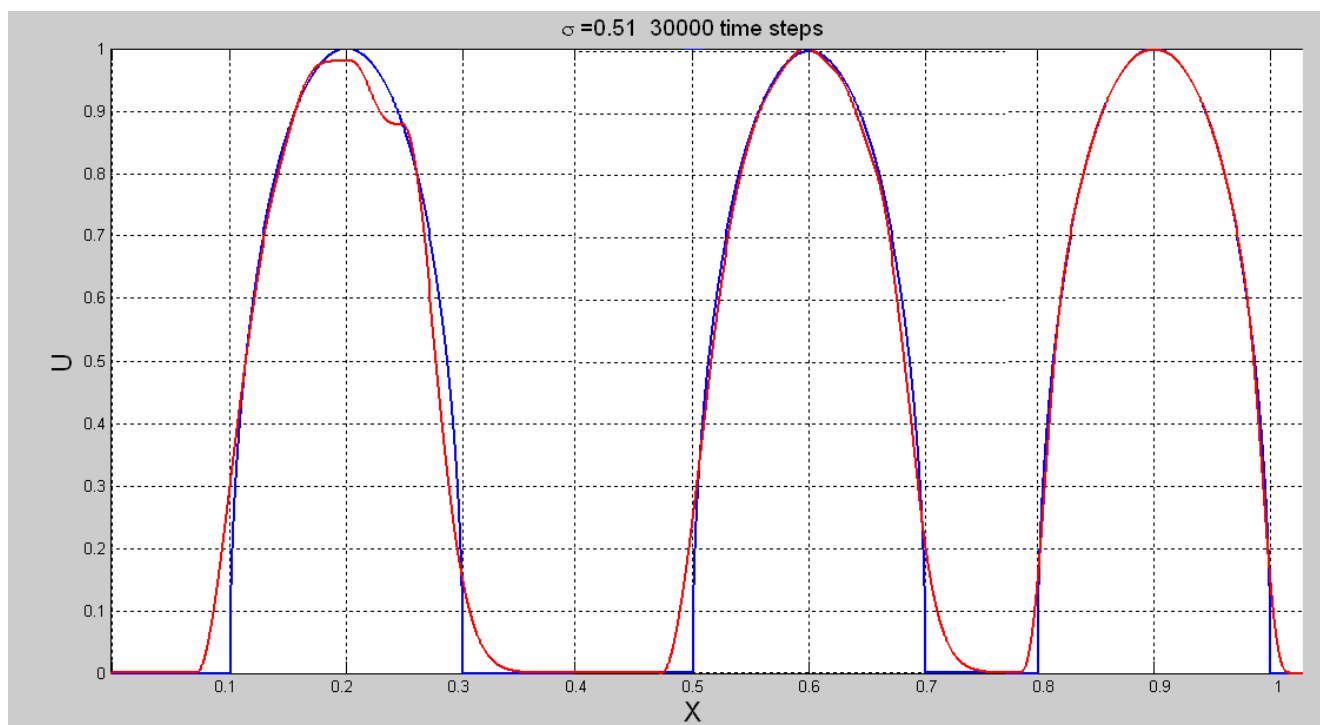


Рис. 2.4. Сравнение численного решения (красная линия) в момент времени $T = N\tau$ при $\lambda = 1$, $\sigma = 0.51$, $N = 3 \times 10^4$, $x_0 = 0.2$, $\Delta_1 = 0.1$ на разностной сетке с числом узлов $M = 10^3$ в случае начальных данных (2.35) с точным решением (синяя линия). Левое – монотонная комбинация по (2.16) схем второго порядка аппроксимации [Lax, Wendroff, 1960] и [Warming, Beam, 1975], среднее – монотонная комбинации по (2.16), (2.26) схем второго порядка аппроксимации (средний график) и правое – монотонная комбинация по (2.16), (2.26) схем второго-третьего порядка.

Из результатов представленных на Рис. 2.4 хорошо видно, что добавление условия монотонности для первой производной (2.26) к критерию (2.16) (средний график) повышает точность численного решения. При этом мы видим, что численное решение на левом графике остается монотонным, но его точность теряется из-за невыполнения критерия (2.26). Добавление в расчет схемы третьего порядка [Русанов, 1968] (правый график), позволяет нам ожидаемым образом заметно повысить точность решения в сравнении с двумя предыдущими вариантами.

Если в исходном уравнении (2.7) $\lambda < 0$, то можно повторить все шаги, сделанные выше, при соответствующем изменении сеточного шаблона на

$(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1}), (t^n, x_{m+2})$ и коэффициентов на $\{\alpha_{-1}^0, \alpha_0^0, \alpha_1^0, \alpha_2^0\}$ или воспользоваться всеми предыдущими соотношениями, в которых сделать замену σ на $-\sigma$ и коэффициентов α_μ^v на $\alpha_{-\mu}^v$. В этом случае мы получим однопараметрическое семейство схем второго порядка аппроксимации со свободным параметром α_2^0 :

$$u_m^{n+1} = u_* = u_m^n + \frac{\sigma}{2}(\Delta_0 + \Delta_1) + \frac{\sigma^2}{2}(\Delta_0 - \Delta_1) + \alpha_2^0(\Delta_{-1} - 2\Delta_0 + \Delta_1), \quad (2.36)$$

где теперь $\Delta_{-1} = u_{m+2}^n - u_{m+1}^n$, $\Delta_0 = u_{m+1}^n - u_m^n$, $\Delta_1 = u_m^n - u_{m-1}^n$ и характеристическим условием монотонности (2.16) в следующем виде:

$$0 \leq w = \frac{|\sigma|}{2}(1 + \delta_1) + \frac{\sigma^2}{2}(1 - \delta_1) + \alpha_2^0(\delta_{-1} - 2 + \delta_1) \leq 1, \quad (2.37)$$

где $\delta_{-1} = \Delta_{-1} / \Delta_0$, $\delta_1 = \Delta_1 / \Delta_0$, $\Delta_0 \neq 0$.

Если теперь отказаться от знакопостоянства λ и соответственно σ , то нам придется использовать сеточный шаблон $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-2}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1}), (t^n, x_{m+2})$, в который будут входить обе точки (t^n, x_{m-2}) и (t^n, x_{m+2}) одновременно. В таком случае мы получаем уже двухпараметрическое семейство схем второго порядка аппроксимации:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{\sigma}{2}(u_{m-1}^n - u_{m+1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + \alpha_{-2}^0(u_{m-2}^n - 3u_{m-1}^n + 3u_m^n - u_{m+1}^n) + \alpha_2^0(-u_{m-1}^n + 3u_m^n - 3u_{m+1}^n + u_{m+2}^n). \quad (2.38)$$

Его можно преобразовать к однопараметрическому виду с учетом того, что разностные схемы, построенные на шаблонах симметричных относительно прямой $(\{m, n\}, \{m, n + 1\})$, получаются заменой σ на $-\sigma$ и коэффициентов α_μ^v на $\alpha_{-\mu}^v$. Для этого заменим коэффициенты $(\alpha_{-2}^0, \alpha_2^0)$ на один коэффициент с учетом знака σ , $(\alpha_{-2}^0 = c \frac{\sigma + |\sigma|}{2}, \alpha_2^0 = c \frac{\sigma - |\sigma|}{2})$:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{\sigma}{2}(u_{m-1}^n - u_{m+1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + \\ + c \frac{\sigma + |\sigma|}{2}(u_{m-2}^n - 3u_{m-1}^n + 3u_m^n - u_{m+1}^n) + c \frac{|\sigma| - \sigma}{2}(-u_{m-1}^n + 3u_m^n - 3u_{m+1}^n + u_{m+2}^n).$$

Упростив получившееся выражение, мы получим схемы (2.14) для $\lambda^+ = \frac{\lambda + |\lambda|}{2}$, $\sigma^+ = \frac{\sigma + |\sigma|}{2}$ и (2.36) для $\lambda^- = \frac{\lambda - |\lambda|}{2}$, $\sigma^- = \frac{\sigma - |\sigma|}{2}$, записанные в одном общем виде:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{\sigma}{2}(u_{m-1}^n - u_{m+1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + \\ + \frac{c}{2}(\sigma(u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + 2u_{m+1}^n - u_{m+2}^n) + |\sigma|(u_{m-2}^n - 4u_{m-1}^n + 6u_m^n - 4u_{m+1}^n + u_{m+2}^n)), \quad (2.39)$$

где $c = \frac{\alpha_{\pm 2}^0}{|\sigma|}$, а критерии монотонности (2.16), (2.37) могут быть приведены к одной общей форме:

$$0 \leq w = \frac{|\sigma|}{2}(1 + \delta_1) + \frac{\sigma^2}{2}(1 - \delta_1) + c|\sigma|(\delta_{-1} - 2 + \delta_1) \leq 1. \quad (2.40)$$

Основным недостатком рассмотренных выше монотонных явных двухслойных схем с порядком аппроксимации выше первого является некомпактность сеточного шаблона с Рис. 2.1, не позволяющего рассчитывать граничные точки, а также ближайшие к границам внутренние сеточные узлы без перехода на другой сеточный шаблон (неоднородность схем). Избежать этих трудностей можно переходом на компактные неявные или/и многослойные схемы, используя, например, изображенный на Рис. 2.5 ($0 \leq \sigma \leq 0.5$) трехслойный неявный пятиточечный сеточный шаблон с узлами:

$$(t^{n+1}, x_m), (t^{n-1}, x_{m-1}), (t^{n-1}, x_m), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m). \quad (2.41)$$

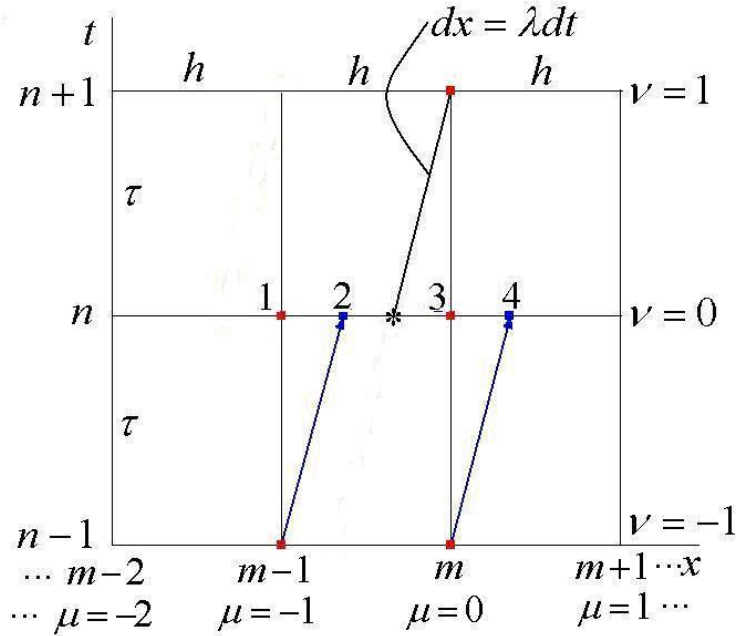


Рис. 2.5. Трехслойный пятиточечный неявный сеточный шаблон, преобразованный к «виртуальному» явному, двухслойному виду.

Пространственные координаты $x_{m+\mu}^{n+\nu}$, $\mu = -1, 0, \nu = 1, 0, -1$ шаблона на Рис. 2.5 имеют двойную индексацию для обеспечения возможности их произвольного расположения на временных слоях $t = const$. При этом, однако, возникает проблема обобщения критерия монотонности (2.13), (2.16) на случай многослойных или/и неявных сеточных шаблонов. Для такого обобщения поступим следующим образом. Используя характеристическое свойство (2.8) точного решения (2.7), найдем координаты x_i^n , $i = \overline{1, 4}$, точек пересечения с временным слоем $t = t^n$ характеристик (2.8), исходящих из всех сеточных узлов (2.41) (с координатами $(t^{n+\nu}, x_{m+\mu}^{n+\nu})$, $\nu = 1, 0, -1$, $\mu = 0, -1$), как это показано на Рис. 2.5: $x_i^n - x_{m+\mu}^{n+\nu} = \lambda(t^n - t^{n+\nu})$, $i = \overline{1, 4}$, пронумеровав их (без рассчитываемой точки (t^{n+1}, x_m^{n+1})) в порядке возрастания значений x_i^n .

Для показанной на Рис. 2.5 равномерной сетки, введя обозначения $X_i = x_i^n - x_m^n = h(\mu - \nu\sigma)$, $i = \overline{1, 4}$, получим при $0 \leq \sigma \leq 1$:

$$X_1 = -h, \quad X_2 = -h(1 - \sigma), \quad X_3 = 0, \quad X_4 = h\sigma, \quad (2.42)$$

при этом значения сеточной функции в точках пересечения X_i , в соответствии с (2.8), равны

$$u_1^n = u_{m-1}^n, \quad u_2^n = u_{m-1}^{n-1}, \quad u_3^n = u_m^n, \quad u_4^n = u_m^{n-1}. \quad (2.43)$$

Далее все построения можно повторить так же, как это было сделано в случае сеточного шаблона с Рис. 2.1, у которого: $u_1^n = u_{m-2}^n$, $u_2^n = u_{m-1}^n$, $u_3^n = u_m^n$, $u_4^n = u_{m+1}^n$ и соответственно $X_1 = -2h$, $X_2 = -h$, $X_3 = 0$, $X_4 = h$. При этом исходные формулы несколько усложнятся из-за неравномерного расположения новых сеточных узлов на временном слое $t = const$, а характеристическое условие монотонности (2.13) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} u_2^n = u_{m-1}^{n-1} < u_m^{n+1} = u_* < u_m^n = u_3^n, & \text{if } \Delta_0 = u_2^n - u_3^n < 0, \\ u_2^n = u_{m-1}^{n-1} > u_m^{n+1} = u_* > u_m^n = u_3^n, & \text{if } \Delta_0 = u_2^n - u_3^n > 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

Влияния выбора сеточного шаблона на ошибку численного решения проверялось на примере бесконечно гладкой функции вида $\sin\left(\frac{1}{x-\lambda t}\right)\sin(1/x)$ на отрезке, не включающем ноль, но достаточно близко к нему подходящему. Кроме бесконечной дифференцируемости эта функция хороша тем, что при приближении к нулю все производные достаточно быстро растут по абсолютной величине, что весьма существенно для анализа поведения численного решения. Сравнивались три сеточных шаблона, показанных на Рис. 2.6.

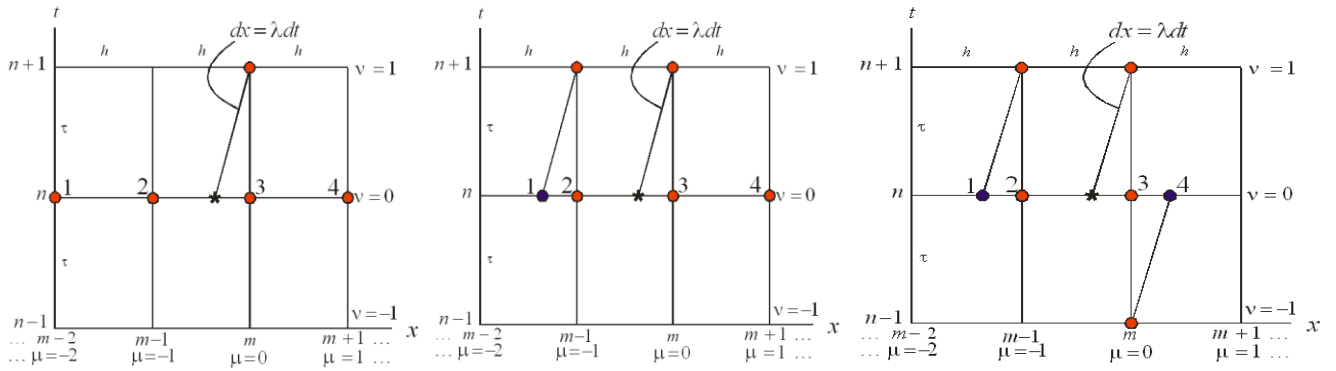


Рис. 2.6. Пятиточечные сеточные шаблоны, представленные в явном, двухслойном виде: слева – $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-2}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1})$; посередине – $(t^{n+1}, x_{m-1}), (t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1})$; справа – $(t^{n+1}, x_{m-1}), (t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^{n-1}, x_m)$.

Для каждого из них строилась единственная схема третьего порядка аппроксимации, возможная на заданном сеточном шаблоне, расчет проводился для трех значений числа Куранта: $\sigma = 0.1, 0.5, 0.9$. Сравнивалось поведение численного решения, полученного при помощи трех разных схем третьего порядка аппроксимации, построенных на этих шаблонах и ошибки вычислений, которая получалась вычитанием численного решения из аналитического.

Три следующих рисунка отражают поведение численного решения при различных значениях $\sigma = 0.1, 0.5, 0.9$ на этих трех сеточных шаблонах. Желтым цветом изображено точное решение, красным – результат работы схемы, построенной на шаблоне $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-2}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1})$, синим – результат работы схемы, построенной на шаблоне $(t^{n+1}, x_{m-1}), (t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1})$, голубым – на шаблоне $(t^{n+1}, x_{m-1}), (t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^{n-1}, x_m)$. Внизу рисунков показано поведение ошибки для тех же значений числа Куранта σ .

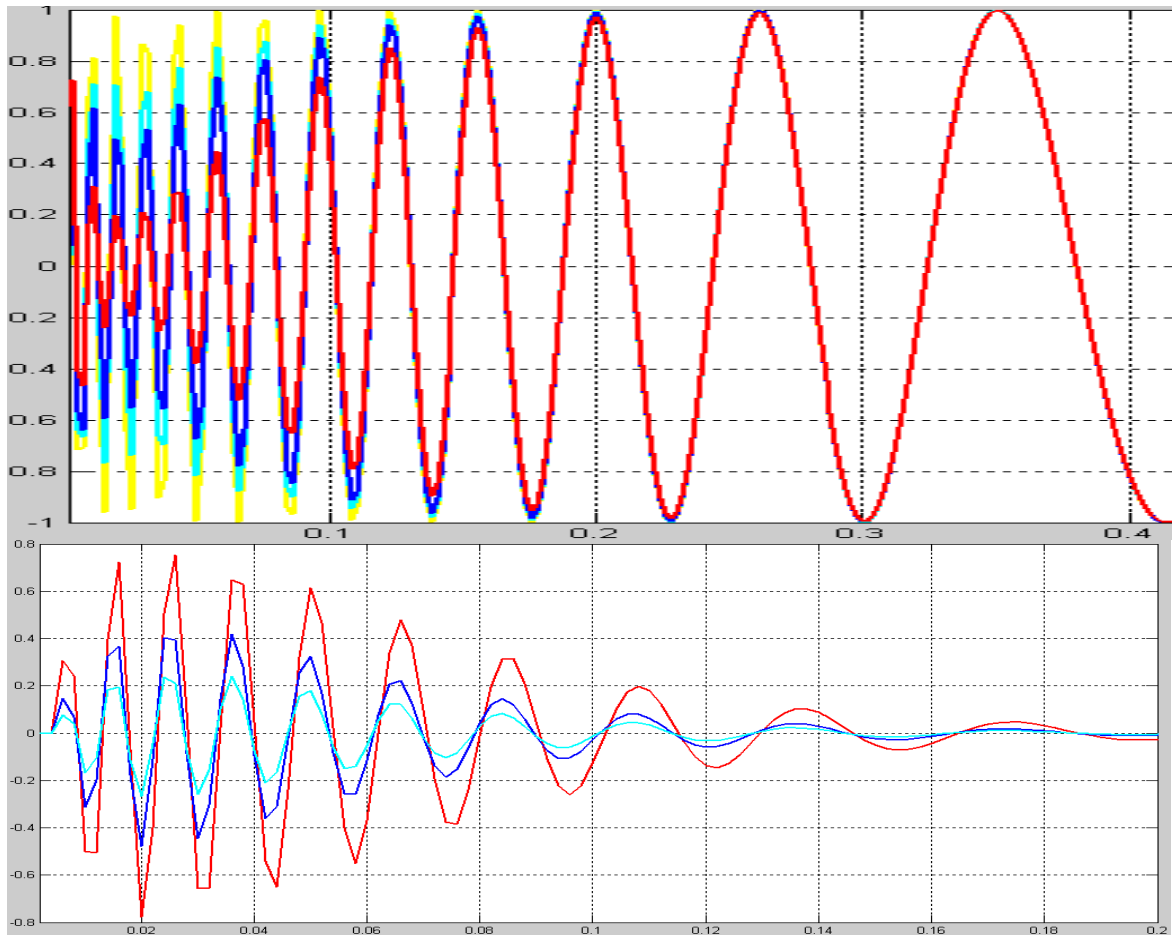


Рис. 2.7. Поведение численного решения (вверху) и его ошибки (внизу) при $\sigma = 0.1$. Желтым цветом изображено точное решение, красным – результат работы схемы, построенной на шаблоне $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-2}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1})$, синим – результат работы схемы, построенной на шаблоне $(t^{n+1}, x_{m-1}), (t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1})$, голубым – на шаблоне $(t^{n+1}, x_{m-1}), (t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^{n-1}, x_m)$.

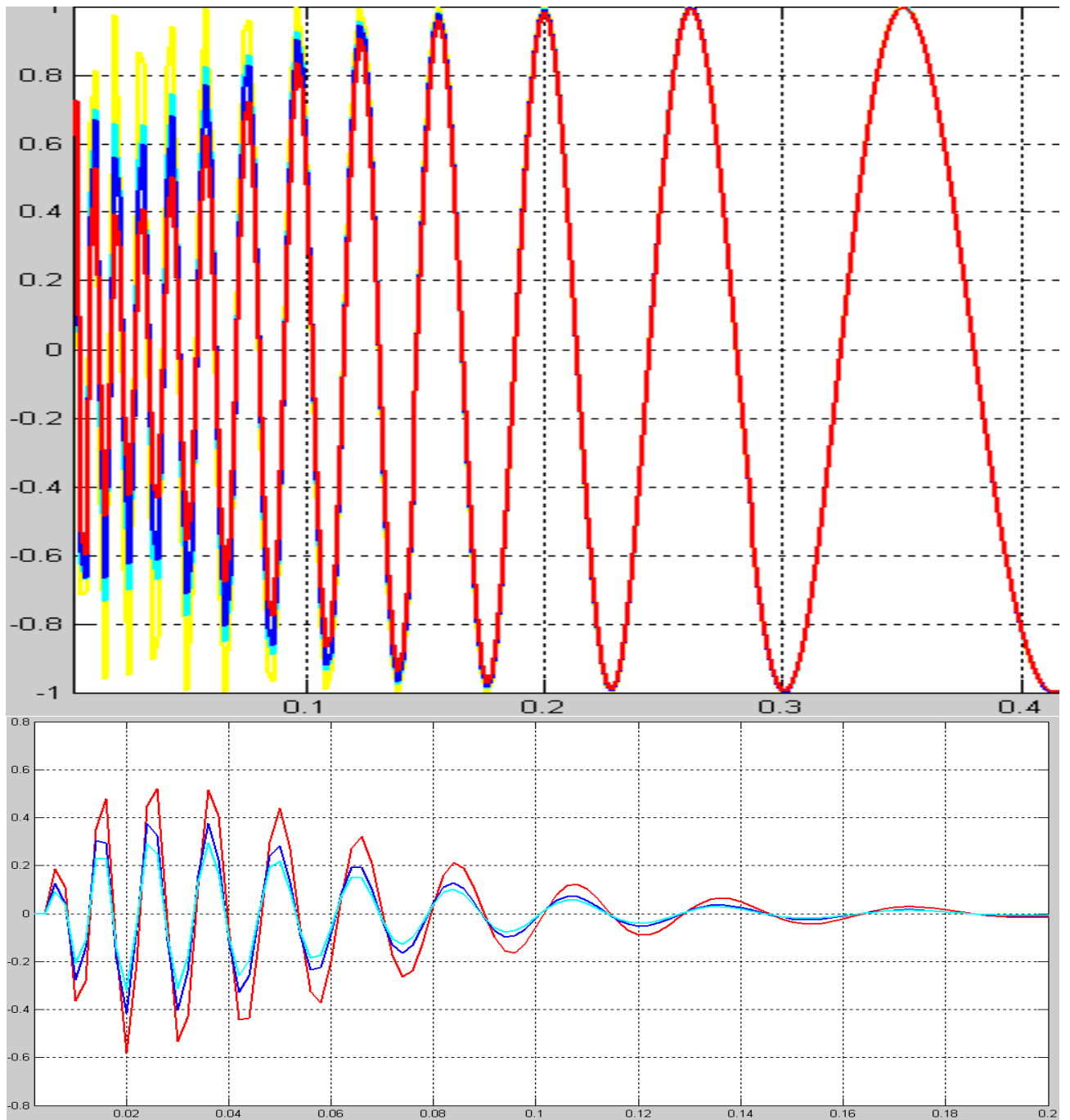


Рис. 2.8. Поведение численного решения (вверху) и его ошибки (внизу) при $\sigma = 0.5$. Желтым цветом изображено точное решение, красным – результат работы схемы, построенной на шаблоне $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-2}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1})$, синим – результат работы схемы, построенной на шаблоне $(t^{n+1}, x_{m-1}), (t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1})$, голубым – на шаблоне $(t^{n+1}, x_{m-1}), (t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^{n-1}, x_m)$.

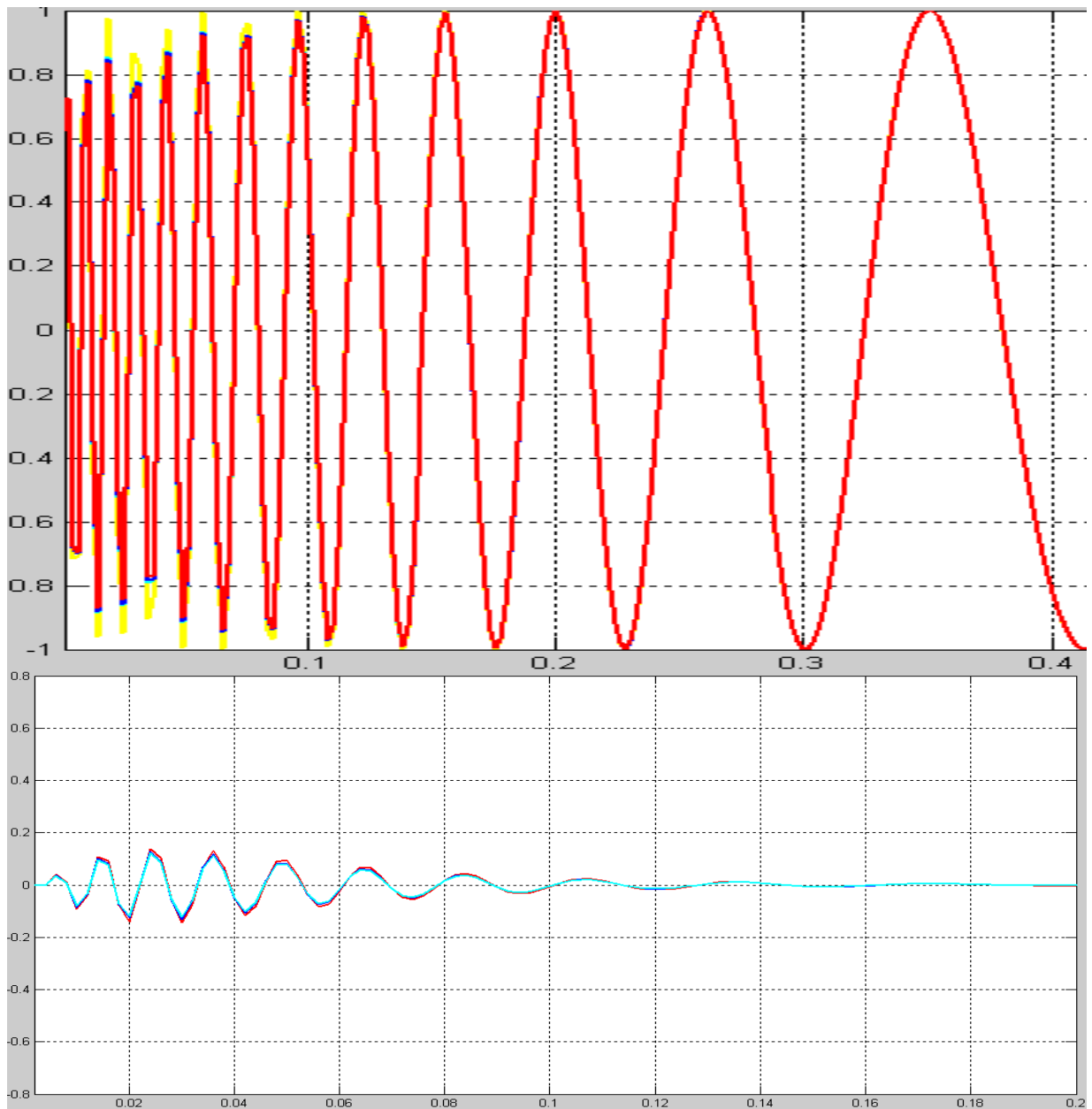


Рис. 2.9. Поведение численного решения (вверху) и его ошибки (внизу) при $\sigma = 0.9$. Желтым цветом изображено точное решение, красным – результат работы схемы, построенной на шаблоне $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-2}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1})$, синим – результат работы схемы, построенной на шаблоне $(t^{n+1}, x_{m-1}), (t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1})$, голубым – на шаблоне $(t^{n+1}, x_{m-1}), (t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^{n-1}, x_m)$.

Из результатов расчетов, представленных на Рис. 2.7-2.9, хорошо видно, что чем компактнее шаблон и ближе значение числа Куранта σ к единице, тем точнее разностная схема воспроизводит точное решение.

2.2 Построение монотонных схем высокого порядка аппроксимации для одномерной гиперболической системы уравнений

Рассмотрим теперь обобщение описанного выше метода на случай нелинейной одномерной системы гиперболического типа, записанной в дивергентной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0. \quad (2.45)$$

Вначале преобразуем её к эквивалентной системе уравнений:

$$U_t + F_x = U_t + \tilde{A}U_x = 0, \quad (2.46)$$

где $\tilde{A} = \frac{\partial F}{\partial U} = [a_{ij}]$ матрица Якоби системы уравнений (2.45). Предполагая гиперболичность (2.45), представим матрицу в виде $\tilde{A} = \Omega^{-1}\Lambda\Omega$, где $\Lambda = [\lambda_i]$ - диагональная матрица из действительных (в силу гиперболичности (2.45)) собственных чисел матрицы \tilde{A} , определяемых из уравнения $Det(\tilde{A} - \lambda E) = 0$ (E - единичная матрица). $\Omega = [\omega_i]$ – невырожденная матрица ($Det\Omega \neq 0$), строками которой являются левые собственные векторы матрицы \tilde{A} , определяемые из однородных линейных систем уравнений $\omega_i(\tilde{A} - \lambda_i E) = 0$, $i = 1, 2, \dots, I$. I – размерность системы (2.45). Тогда система (2.45) может быть представлена в следующем виде:

$$U_t + F_x = U_t + \tilde{A}U_x = U_t + (\Omega^{-1}\Lambda\Omega)U_x = 0. \quad (2.47)$$

Далее, систему уравнений (2.47) умножим слева на матрицу собственных векторов Ω (т.е. составим I линейно-независимых комбинаций исходных уравнений) и приведем ее к характеристическому виду:

$$\Omega(U_t + \Omega^{-1}\Lambda\Omega U_x) = \Omega U_t + \Lambda\Omega U_x = 0, \quad (2.48)$$

или в скалярной, покомпонентной форме:

$$(\omega_i \cdot U_t) + \lambda_i(\omega_i \cdot U_x) = \omega_i \cdot (U_t + \lambda_i U_x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (2.49)$$

в виде условий совместности вдоль характеристических направлений $dx/dt = \lambda_i$ на плоскости (t, x) .

Каждое из уравнений, входящих в условия совместности исходной одномерной гиперболической системы (2.49) является аналогом уравнения переноса (2.7) для соответствующего значения λ_i

$$U_t + \lambda_i U_x = 0, \quad i = 1, \dots, I. \quad (2.50)$$

Соответственно для каждого из уравнений (2.50) может быть построена разностная схема в виде:

$$U_m^{n+1} = \sum_{\mu, \nu} \alpha_\mu^\nu(\sigma_i) U_{m+\mu}^{n+\nu}, \quad \sigma_i = \frac{\lambda_i \tau}{h}. \quad (2.51)$$

Подставим (2.51) в (2.49):

$$\begin{aligned} \omega_i \cdot (U_t + \lambda_i U_x) &= \omega_i \cdot \left(U_m^{n+1} - \sum_{\mu, \nu} \alpha_\mu^\nu(\sigma_i) U_{m+\mu}^{n+\nu} \right) = \\ &= \left(\omega_i \cdot U_m^{n+1} \right) - \sum_{\mu, \nu} \alpha_\mu^\nu(\sigma_i) \left(\omega_i \cdot U_{m+\mu}^{n+\nu} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, I, \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \omega_1^T \\ \vdots \\ \omega_I^T \end{bmatrix} U_m^{n+1} - \sum_{\mu, \nu} \begin{bmatrix} \alpha_\mu^\nu(\sigma_1) \omega_1^T \\ \vdots \\ \alpha_\mu^\nu(\sigma_I) \omega_I^T \end{bmatrix} U_{m+\mu}^{n+\nu} = \\ &= \begin{bmatrix} \omega_1^T \\ \vdots \\ \omega_I^T \end{bmatrix} U_m^{n+1} - \sum_{\mu, \nu} \begin{bmatrix} \alpha_\mu^\nu(\sigma_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_\mu^\nu(\sigma_I) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^T \\ \vdots \\ \omega_I^T \end{bmatrix} U_{m+\mu}^{n+\nu} = \\ &= \Omega U_m^{n+1} - \sum_{\mu, \nu} A_\mu^\nu \Omega U_{m+\mu}^{n+\nu} = 0, \end{aligned} \quad (2.52)$$

и умножим слева на матрицу Ω^{-1} , обратную к матрице собственных векторов. В итоге получим схему для исходной системы уравнений гиперболического типа (2.45), которую теперь можно записать в одном общем виде:

$$U_m^{n+1} = \sum_{\mu, \nu} \Omega^{-1} A_\mu^\nu \Omega U_{m+\mu}^{n+\nu}. \quad (2.53)$$

В (2.53) $A_\mu^\nu = \text{diag}\{\alpha_\mu^\nu(\sigma_i)\}$, $(\sum_{\mu, \nu} A_\mu^\nu = E)$ – диагональные матрицы, на главной диагонали которых находятся схемные коэффициенты $\alpha_\mu^\nu(\sigma_i)$, $i = 1, 2, \dots, I$.

Поясним работу данного алгоритма на простых примерах. В качестве первого примера рассмотрим схему [Courant et. al., 1952], имеющую первый порядок аппроксимации $O(\tau, h)$. С учетом знакопеременных значений $\sigma_i^+ = \frac{\sigma_i + |\sigma_i|}{2}$ и $\sigma_i^- = \frac{\sigma_i - |\sigma_i|}{2}$, $\sigma_i = \frac{\sigma_i^+ + \sigma_i^-}{2}$, $i = 1, 2, \dots, I$, мы получаем линейный её вариант вида (2.51) для сеточного шаблона $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1})$:

$$\begin{aligned} U_m^{n+1} &= U_m^n - \frac{\sigma_i^+ + |\sigma_i|}{2} (U_m^n - U_{m-1}^n) - \frac{\sigma_i^- - |\sigma_i|}{2} (U_{m+1}^n - U_m^n) = \\ &= U_m^n + \frac{\sigma_i}{2} (U_{m-1}^n - U_{m+1}^n) + \frac{|\sigma_i|}{2} (U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Используя матрицу собственных векторов Ω и обратную к ней матрицу Ω^{-1} , переходим к нелинейному варианту схемы (2.54) для системы уравнений (2.45):

$$U_m^{n+1} = (\Omega^{-1} E \Omega) U_m^n + \frac{\tau}{2h} (\Omega^{-1} \Lambda \Omega) (U_{m-1}^n - U_{m+1}^n) + \frac{\tau}{2h} (\Omega^{-1} |\Lambda| \Omega) (U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n).$$

Воспользуемся следующим упрощением:

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{2h} (\Omega^{-1} \Lambda \Omega) (U_{m-1}^n - U_{m+1}^n) &= \frac{\tau}{2h} \tilde{A} (U_{m-1}^n - U_{m+1}^n) \approx \\ &\approx \frac{\tau}{2h} \frac{(F_{m-1}^n - F_{m+1}^n)}{(U_{m-1}^n - U_{m+1}^n)} (U_{m-1}^n - U_{m+1}^n) = \frac{\tau}{2h} (F_{m-1}^n - F_{m+1}^n). \end{aligned}$$

В итоге получаем окончательный вариант разностной схемы для исходной нелинейной системы уравнений (2.45):

$$U_m^{n+1} = U_m^n + \frac{\tau}{2h} (F_{m-1}^n - F_{m+1}^n) + \frac{\tau}{2h} (\Omega^{-1} |\Lambda| \Omega) (U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) \quad (2.55)$$

В (2.55) мы используем следующие диагональные матрицы A_μ^v из (2.53): $A_0^0 = (E - \frac{\tau}{h} |\Lambda|) = \text{diag}\{1 - |\sigma_i|\}$; $A_{-1}^0 = \frac{\tau}{2h} (\Lambda + |\Lambda|) = \text{diag}\{\frac{\sigma_i + |\sigma_i|}{2}\}$ и $A_1^0 = \frac{\tau}{2h} (|\Lambda| - \Lambda) = \text{diag}\{\frac{|\sigma_i| - \sigma_i}{2}\}$.

В качестве второго примера рассмотрим схему [Lax, Wendroff, 1960] на том же сеточном шаблоне $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1})$. Она является

единственной схемой второго порядка аппроксимации $O(\tau^2, h^2)$ возможной для данного шаблона, к тому же в силу симметричности шаблона относительно прямой, проходящей через точки $\{(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_m)\}$ её вид не зависит от знака σ_i , $i = 1, 2, \dots, I$.

$$U_m^{n+1} = U_m^n + \frac{\sigma_i}{2}(U_{m-1}^n - U_{m+1}^n) + \frac{\sigma_i^2}{2}(U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) \quad (2.56)$$

Переходим к нелинейному виду схемы (2.56):

$$U_m^{n+1} = U_m^n + \frac{\tau}{2h}(F_{m-1}^n - F_{m+1}^n) + \frac{\tau^2}{2h^2}(\Omega^{-1}\Lambda^2\Omega)(U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n)$$

с матрицами A_μ^v : $A_0^0 = (E - \frac{\tau}{h}|\Lambda|) = \text{diag}\{1 - |\sigma_i|\}$, $A_{-1}^0 = \frac{\tau}{2h}(\Lambda + \Lambda^2) = \text{diag}\{\frac{\sigma_i + \sigma_i^2}{2}\}$ и $A_1^0 = \frac{\tau}{2h}(\Lambda^2 - \Lambda) = \text{diag}\{\frac{\sigma_i^2 - \sigma_i}{2}\}$.

Возьмём теперь разностную схему (2.39) для сеточного шаблона с узлами $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-2}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1}), (t^n, x_{m+2})$:

$$\begin{aligned} U_m^{n+1} = & U_m^n + \frac{\sigma_i}{2}(U_{m-1}^n - U_{m+1}^n) + \frac{\sigma_i^2}{2}(U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) + \\ & + \frac{c_i\sigma_i}{2}(U_{m-2}^n - 2U_{m-1}^n + 2U_{m+1}^n - U_{m+2}^n) + \\ & + \frac{c_i|\sigma_i|}{2}(U_{m-2}^n - 4U_{m-1}^n + 6U_m^n - 4U_{m+1}^n + U_{m+2}^n). \end{aligned} \quad (2.57)$$

В таком виде (2.57) является множеством схем второго порядка аппроксимации $O(\tau^2, h^2)$ со свободным параметром c_i . Если теперь вернуться к исходной системе уравнений (2.45), то для неё мы получим следующее однопараметрическое семейство схем второго порядка аппроксимации со свободными параметрами c_i , $i = 1, \dots, I$, находящимися на диагонали матрицы $C = \text{diag}\{c_i(\sigma_i)\}$, $i = 1, 2, \dots, I$:

$$\begin{aligned}
U_m^{n+1} = & U_m^n + \frac{\tau}{2h} (F_{m-1}^n - F_{m+1}^n) + \frac{\tau^2}{2h^2} (\Omega^{-1} \Lambda^2 \Omega) (U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) + \\
& + \frac{\tau}{2h} (\Omega^{-1} C \Lambda \Omega) (U_{m-2}^n - 2U_{m-1}^n + 2U_{m+1}^n - U_{m+2}^n) + \\
& + \frac{\tau}{2h} (\Omega^{-1} C |\Lambda| \Omega) (U_{m-2}^n - 4U_{m-1}^n + 6U_m^n - 4U_{m+1}^n + U_{m+2}^n).
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Вид (2.58) значительно упрощается, если перейти к двухшаговой (т.е. типа предиктор-корректор) форме записи:

$$\begin{cases} \tilde{U}_m = U_m^n + \frac{\tau}{2h} (F_{m-1}^n - F_{m+1}^n) + \frac{\tau}{2h} \Omega^{-1} |\Lambda| \Omega (U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n), \\ U_m^{n+1} = \tilde{U}_m + \Omega^{-1} \left(\frac{\tau^2}{2h^2} \Lambda^2 - \frac{\tau}{2h} |\Lambda| \right) \Omega (U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) + \\ + \Omega^{-1} C \Omega \left((\tilde{U}_{m-1} - 2\tilde{U}_m + \tilde{U}_{m+1}) - (U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) \right). \end{cases} \tag{2.59}$$

Форму записи (2.59) также можно сократить, если воспользоваться предложенным в [Холодов, 1980] двухпараметрическим подходом при записи разностных схем на выбранном сеточном шаблоне:

$$\begin{cases} \tilde{U}_m = U_m^n - \frac{\tau}{h} (F_{m+1/2}^n - F_{m-1/2}^n), \\ U_m^{n+1} = \tilde{U}_m + (\Omega^{-1} B \Omega) (U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) + \\ + (\Omega^{-1} C \Omega) (\tilde{U}_{m-1} - 2\tilde{U}_m + \tilde{U}_{m+1}) \\ F_{m\pm 1/2}^n = \frac{1}{2} (F_m^n + F_{m\pm 1}^n) \pm \frac{1}{2} (\Omega^{-1} |\Lambda| \Omega)_{m\pm 1/2}^n (U_m^n - U_{m\pm 1}^n). \end{cases} \tag{2.60}$$

Здесь $B = \text{diag}\{b_i(\sigma_i)\}$, $i = 1, 2, \dots, I$ диагональная матрица, если её коэффициенты выбирать произвольно, то (2.60) будет иметь первый порядок аппроксимации $O(\tau, h)$, если же её связать с матрицей C следующим соотношением: $B = \left(\frac{\tau^2}{2h^2} \Lambda^2 - \frac{\tau}{2h} |\Lambda| \right) - C$, то мы получим, как и в (2.59), второй порядок аппроксимации $O(\tau^2, h^2)$.

В исходной системе уравнений (2.45), мы также должны учесть нелинейность при нахождении промежуточных значений Λ , Ω , Ω^{-1} , B и C между узлами нашего сеточного шаблона. Для этого нам следует представить двухпараметрическое семейство схем (2.60) в следующем виде:

$$\begin{cases} \tilde{U}_m = U_m^n - \frac{\tau}{h} (F_{m+1/2}^n - F_{m-1/2}^n), \\ U_m^{n+1} = \tilde{U}_m + (\Omega^{-1} B \Omega)_{m+1/2}^{n+1/2} (U_{m+1}^n - U_m^n) - (\Omega^{-1} B \Omega)_{m-1/2}^{n+1/2} (U_m^n - U_{m-1}^n) + \\ + (\Omega^{-1} C \Omega)_{m+1/2}^{n+1/2} (\tilde{U}_{m+1} - \tilde{U}_m) - (\Omega^{-1} C \Omega)_{m-1/2}^{n+1/2} (\tilde{U}_m - \tilde{U}_{m-1}). \end{cases} \quad (2.61)$$

Такая форма записи возникает как следствие зависимости элементов матрицы Якоби $\tilde{A} = \Omega^{-1} \Lambda \Omega$ от самого решения. Соответственно, значения собственных чисел $\Lambda_m = [\lambda_{im}]$ и собственных векторов $\Omega_m = [\omega_{im}]$ матрицы \tilde{A} будут различны для каждой из точек нашего сеточного шаблона. Как показывает практика, для их вычисления вполне можно обойтись простым алгоритмом усреднения. Например, если мы хотим найти значения $\{\Omega, \Lambda, \Omega^{-1}\}_{m+1/2}^{n+1/2}$ в точке $(t^{n+1/2}, x_{m+1/2})$, мы находим среднее значение вектора $U_{m+1/2}^{n+1/2}$ по простейшей интерполяционной формуле:

$$U_{m+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{8} (U_{m-1}^n + U_m^n + U_{m+1}^n + U_{m+2}^n + \tilde{U}_{m-1} + \tilde{U}_m + \tilde{U}_{m+1} + \tilde{U}_{m+2}). \quad (2.62)$$

затем из значений его компонент выражаем компоненты матриц $\{\Omega, \Lambda, \Omega^{-1}\}_{m+1/2}^{n+1/2}$ в точке $(t^{n+1/2}, x_{m+1/2})$.

Следует также заметить, что интерполяционная формула (2.62) сохраняет в силу своей симметричности консервативность разностной схемы (2.61) относительно заданной точки $(t^{n+1/2}, x_{m+1/2})$, как это будет показано далее. Выбор предиктора в схеме (2.61) не является принципиальным, в случае разрывов большой интенсивности в начальных условиях он может быть взят, например, из схемы Годунова [Годунов, 1959] (для уравнений газовой динамики), или это может быть

консервативный вариант сеточно-характеристического метода [Магомедов, Холодов, 1969]:

$$\begin{cases} \tilde{U}_m = U_m^n - \frac{\tau}{h} (F_{m+1/2}^n - F_{m-1/2}^n), \\ F_{m\pm 1/2}^n = \frac{1}{2} (F_m^n + F_{m\pm 1}^n) \pm \frac{1}{2} (\Omega^{-1} |\Lambda| \Omega)_{m\pm 1/2}^n (U_m^n - U_{m\pm 1}^n). \end{cases}$$

Полученное семейство схем второго порядка аппроксимации $O(\tau^2, h^2)$ при выборе свободного параметра $c_i = 0$ является единственной на сеточном шаблоне $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1})$ схемой, аналогичной схеме [Lax, Wendroff, 1960]. При выборе $c_i = (|\sigma_i| - 1)/2$ получим также схему второго порядка, аналогичную схеме [Warming, Beam, 1975] на сеточном шаблоне $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-2}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m)$ при $\sigma_i > 0$, а при $\sigma_i < 0$ получим аналогичную схему на шаблоне $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1}), (t^n, x_{m+2})$. При выборе $c_i = (\sigma_i^2 - 1)/6$ получим единственную схему третьего порядка аппроксимации $O(\tau^3, h^3)$, аналогичную схеме [Русанов, 1968] на сеточном шаблоне $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-2}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1})$ при $\sigma_i > 0$, а при $\sigma_i < 0$ получим аналогичную схему на шаблоне $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1}), (t^n, x_{m+2})$.

Таким образом, для каждого из уравнений системы (2.45) существует свое уравнение типа (2.7). Разностный аналог которого (2.39) может быть исследован на монотонность в точке (t^{n+1}, x_m) с помощью характеристического критерия (2.40). После чего те коэффициенты c_i , которые дают монотонное поведение решения, подставляются в схему (2.61). Данный подход не ограничивается в использовании выбранным нами сеточным шаблоном $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-2}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1}), (t^n, x_{m+2})$ и, как будет показано ниже, может быть легко перенесен на любые другие сеточные шаблоны.

Давайте теперь подойдем к проблеме построения разностных схем для системы уравнений (2.45) через ее интегральную форму:

$$\iint_G (U_t + F_x) dx dt = \oint_L (U dx - F dt) = 0. \quad (2.63)$$

В (2.63) G - конечная область интегрирования на плоскости (x, t) , а L – ограничивающий ее контур. Выберем контур интегрирования L так, как это показано на Рис. 2.10.

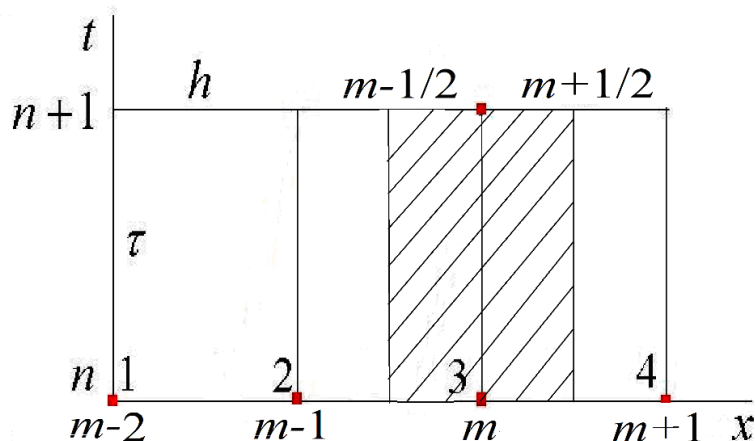


Рис. 2.10. Контур L , ограничивающий ячейку интегрирования.

Проинтегрируем (2.63) по контуру L :

$$\int_{x_{m-1/2}}^{x_{m+1/2}} U^{n+1}(x) dx - \int_{x_{m-1/2}}^{x_{m+1/2}} U^n(x) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} F_{m+1/2}^{n+1/2} dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} F_{m-1/2}^{n+1/2} dt = 0,$$

в результате получаем, что

$$(U_m^{n+1} - U_m^n) h + (F_{m+1/2}^{n+1/2} - F_{m-1/2}^{n+1/2}) \tau = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\tau} + \frac{F_{m+1/2}^{n+1/2} - F_{m-1/2}^{n+1/2}}{h} = 0,$$

или

$$U_m^{n+1} = U_m^n - \frac{\tau}{h} (F_{m+1/2}^{n+1/2} - F_{m-1/2}^{n+1/2}). \quad (2.64)$$

Все дальнейшие свойства схемы (2.64) определяются видом выражений, которые будут интерполировать значения векторов $F_{m\pm 1/2}^{n+1/2}$ в промежуточных точках $(t^{n+1/2}, x_{m\pm 1/2})$, не являющихся узлами сеточного шаблона. По этой причине, данный

метод получил название интегро-интерполяционный [Самарский, Попов, 1992], также его ещё называют методом конечных объемов [Куликовский и др., 2012].

Выше подробно обсуждались условия необходимые для аппроксимации и монотонности разностных схем. Остановимся сейчас подробнее на свойстве консервативности. Под консервативностью разностной схемы подразумевается то, что при численном интегрировании она сохраняет аддитивность. Это означает, что значение интеграла, взятого по контуру, ограничивающему область интегрирования, будет равняться сумме интегралов, взятых по всем непересекающимся контурам, построенных на узлах разностной сетки, заданной в данной области. В случае, показанном на Рис. 2.10, это будет означать, что интеграл, взятый по нескольким сеточным ячейкам, будет равняться сумме интегралов, взятых по каждой из них. Данное свойство накладывает определенные требования на значения векторов потока, вычисляемых с разных сторон от границы сеточной ячейки - они должны быть равны по значению и противоположны по знаку.

Если теперь сравнить выражение (2.64) со схемой (2.61), записанной в следующем виде:

$$\begin{aligned}
U_m^{n+1} = & U_m^n - \left(\frac{\tau}{2h} (F_m^n + F_{m+1}^n) - \frac{\tau}{2h} (\Omega^{-1} |\Lambda| \Omega)_{m+1/2}^{n+1/2} (U_m^n - U_{m+1}^n) - \right. \\
& \left. - (\Omega^{-1} B \Omega)_{m+1/2}^{n+1/2} (U_m^n - U_{m+1}^n) - (\Omega^{-1} C \Omega)_{m+1/2}^{n+1/2} (\tilde{U}_m - \tilde{U}_{m+1}) \right) + \\
& + \left(\frac{\tau}{2h} (F_m^n + F_{m-1}^n) + \frac{\tau}{2h} (\Omega^{-1} |\Lambda| \Omega)_{m-1/2}^{n+1/2} (U_{m-1}^n - U_m^n) + \right. \\
& \left. + (\Omega^{-1} B \Omega)_{m-1/2}^{n+1/2} (U_{m-1}^n - U_m^n) + (\Omega^{-1} C \Omega)_{m-1/2}^{n+1/2} (\tilde{U}_{m-1} - \tilde{U}_m) \right),
\end{aligned}$$

то становится понятным, как вычисляются значения векторов потока $F_{m\pm 1/2}^{n+1/2}$ в промежуточных точках $(t^{n+1/2}, x_{m\pm 1/2})$, так чтобы схема (2.61) при этом сохраняла консервативность:

$$F_{m\pm 1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (F_m^n + F_{m\pm 1}^n) \pm \frac{1}{2} (\Omega^{-1} |\Lambda| \Omega)_{m\pm 1/2}^{n+1/2} (U_m^n - U_{m\pm 1}^n) \pm \frac{h}{\tau} \left((\Omega^{-1} B \Omega)_{m\pm 1/2}^{n+1/2} (U_m^n - U_{m\pm 1}^n) + (\Omega^{-1} C \Omega)_{m\pm 1/2}^{n+1/2} (\tilde{U}_m - \tilde{U}_{m\pm 1}) \right).$$

2.3 Построение монотонных схем высокого порядка аппроксимации для многослойных неявных сеточных шаблонов

В данном разделе будет изложена процедура построения монотонных схем высокого порядка аппроксимации для многослойных неявных сеточных шаблонов. В качестве примера возьмем следующий неявный многослойный сеточный шаблон $(t^{n+1}, x_{m-1}), (t^{n+1}, x_m), (t^{n+1}, x_{m+1}), (t^n, x_{m-2}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1}), (t^n, x_{m+2}), (t^{n-1}, x_{m-2}), (t^{n-1}, x_{m-1}), (t^{n-1}, x_m), (t^{n-1}, x_{m+1}), (t^{n-1}, x_{m+2})$, представленный на Рис. 2.11.

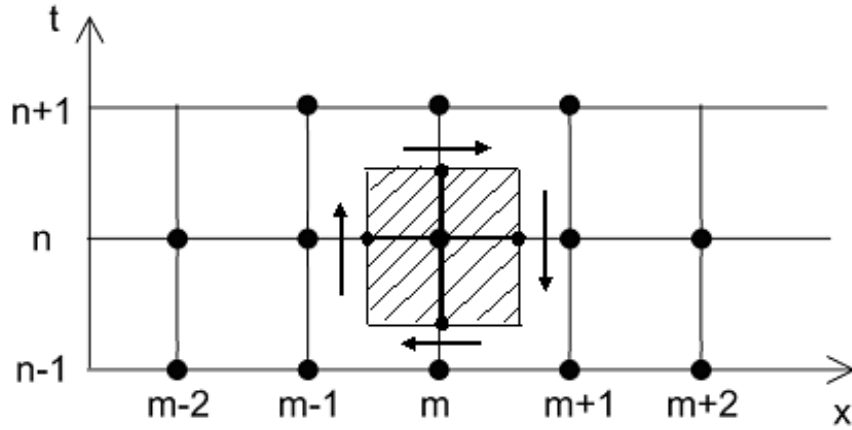


Рис. 2.11. Неявный многослойный сеточный шаблон $(t^{n+1}, x_{m-1}), (t^{n+1}, x_m), (t^{n+1}, x_{m+1}), (t^n, x_{m-2}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1}), (t^n, x_{m+2}), (t^{n-1}, x_{m-2}), (t^{n-1}, x_{m-1}), (t^{n-1}, x_m), (t^{n-1}, x_{m+1}), (t^{n-1}, x_{m+2})$ с контуром, ограничивающим ячейку интегрирования для сеточного узла (t^n, x_m) .

Из условий аппроксимации первого порядка для уравнения переноса (2.10)

$$\sum_{\mu=-2}^2 \sum_{\nu=-1}^1 \alpha_{\mu}^{\nu}(\sigma) = 1, \quad \sum_{\mu=-2}^2 \sum_{\nu=-1}^1 (\mu - \nu\sigma) \alpha_{\mu}^{\nu}(\sigma) = -\sigma, \quad \alpha_{-2}^1 = \alpha_0^1 = \alpha_2^1 = 0, \quad (2.65)$$

выражаем схемные коэффициенты α_{-1}^0 и α_1^0 в сеточных узлах $(t^n, x_{m-1}), (t^n, x_{m+1})$ через десять остальных:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{-1}^0 = \frac{1}{2} \left(1 + \sigma + (\sigma - 3) \alpha_{-2}^{-1} + (\sigma - 2) \alpha_{-1}^{-1} + (\sigma - 1) \alpha_0^{-1} + \right. \\ \left. + \sigma \alpha_1^{-1} + (\sigma + 1) \alpha_2^{-1} - 3 \alpha_{-2}^0 - \alpha_0^0 + \alpha_2^0 - (\sigma + 2) \alpha_{-1}^1 - \sigma \alpha_1^1 \right) \\ \alpha_1^0 = \frac{1}{2} \left(1 - \sigma - (\sigma - 1) \alpha_{-2}^{-1} - \sigma \alpha_{-1}^{-1} - (\sigma + 1) \alpha_0^{-1} - (\sigma + 2) \alpha_1^{-1} - \right. \\ \left. - (\sigma + 3) \alpha_2^{-1} + \alpha_{-2}^0 - \alpha_0^0 - 3 \alpha_2^0 + \sigma \alpha_{-1}^1 + (\sigma - 2) \alpha_1^1 \right), \end{array} \right. \quad (2.66)$$

отсюда получаем многопараметрическое семейство схем первого порядка аппроксимации для уравнения переноса (2.7) на заданном сеточном шаблоне:

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} &= \alpha_{-2}^{-1} u_{m-2}^{n-1} + \alpha_{-1}^{-1} u_{m-1}^{n-1} + \alpha_0^{-1} u_m^{n-1} + \alpha_1^{-1} u_{m+1}^{n-1} + \alpha_2^{-1} u_{m+2}^{n-1} + \alpha_{-2}^0 u_{m-2}^n + \alpha_{-1}^0 u_{m-1}^n + \alpha_0^0 u_m^n + \alpha_1^0 u_{m+1}^n + \alpha_2^0 u_{m+2}^n + \alpha_{-1}^1 u_{m-1}^{n+1} + \\ &+ \alpha_1^1 u_{m+1}^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{m-1}^n + u_{m+1}^n) + \frac{\sigma}{2} (u_{m-1}^n - u_{m+1}^n) + \alpha_{-2}^{-1} (u_{m-2}^{n-1} - u_{m-1}^n) + \alpha_{-2}^0 (u_{m-2}^n - u_{m-1}^n) + \alpha_{-1}^{-1} (u_{m-1}^{n-1} - u_{m-1}^n) + \\ &+ \left((\alpha_2^{-1} - \alpha_{-2}^{-1} - \alpha_0^0 + \alpha_2^0 - \alpha_{-2}^0) + \sigma (\alpha_{-2}^{-1} + \alpha_{-1}^{-1} + \alpha_0^{-1} + \alpha_1^{-1} + \alpha_2^{-1} - \alpha_{-1}^1 - \alpha_1^1) \right) \frac{(u_{m-1}^n - u_m^n)}{2} - \\ &- \frac{\alpha_0^{-1}}{2} (u_{m-1}^n - u_m^{n-1}) + \left(\frac{1}{2} (\alpha_2^{-1} - \alpha_{-2}^{-1} - \alpha_0^0 + \alpha_2^0 - \alpha_{-2}^0) + \frac{\sigma}{2} (\alpha_{-2}^{-1} + \alpha_{-1}^{-1} + \alpha_0^{-1} + \alpha_1^{-1} + \alpha_2^{-1} - \alpha_{-1}^1 - \alpha_1^1) \right) (u_m^n - u_{m+1}^n) + \\ &+ \frac{\alpha_0^{-1}}{2} (u_m^{n-1} - u_{m+1}^n) + \alpha_1^{-1} (u_{m+1}^{n-1} - u_{m+1}^n) - \alpha_2^{-1} (u_{m+1}^n - u_{m+2}^{n-1}) + \alpha_2^0 (u_{m+2}^n - u_{m+1}^n) + \alpha_{-1}^1 (u_{m-1}^{n+1} - u_{m-1}^n) + \alpha_1^1 (u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Далее преобразуем схему (2.67) для уравнения переноса к схеме в форме (2.51) для нелинейной системы уравнений (2.45), так как это было описано в предыдущем разделе:

$$\begin{aligned} U_m^{n+1} &= \frac{1}{2} (U_{m-1}^n + U_{m+1}^n) + \frac{\tau}{2h} (F_{m-1}^n - F_{m+1}^n) + (\Omega^{-1} A_{-2}^{-1} \Omega) (U_{m-2}^{n-1} - U_{m-1}^n) + \\ &+ (\Omega^{-1} A_{-2}^0 \Omega) (U_{m-2}^n - U_{m-1}^n) + (\Omega^{-1} A_{-1}^{-1} \Omega) (U_{m-1}^{n-1} - U_{m-1}^n) - \frac{1}{2} (\Omega^{-1} A_0^{-1} \Omega) (U_{m-1}^n - U_m^{n-1}) + \\ &+ \left(\Omega^{-1} \left(\frac{1}{2} (A_2^{-1} - A_{-2}^{-1} - A_0^0 + A_2^0 - A_{-2}^0) + \frac{\tau}{2h} \Lambda (A_{-2}^{-1} + A_{-1}^{-1} + A_0^{-1} + A_1^{-1} + A_2^{-1} - A_{-1}^1 - A_1^1) \right) \Omega \right) (U_{m-1}^n - U_m^n) + \\ &+ \left(\Omega^{-1} \left(\frac{1}{2} (A_2^{-1} - A_{-2}^{-1} - A_0^0 + A_2^0 - A_{-2}^0) + \frac{\tau}{2h} \Lambda (A_{-2}^{-1} + A_{-1}^{-1} + A_0^{-1} + A_1^{-1} + A_2^{-1} - A_{-1}^1 - A_1^1) \right) \Omega \right) (U_m^n - U_{m+1}^n) + \\ &+ \frac{1}{2} (\Omega^{-1} A_0^{-1} \Omega) (U_m^{n-1} - U_{m+1}^n) + (\Omega^{-1} A_1^{-1} \Omega) (U_{m+1}^{n-1} - U_{m+1}^n) - (\Omega^{-1} A_2^{-1} \Omega) (U_{m+1}^n - U_{m+2}^{n-1}) + \\ &+ (\Omega^{-1} A_2^0 \Omega) (U_{m+2}^n - U_{m+1}^n) + (\Omega^{-1} A_{-1}^1 \Omega) (U_{m-1}^{n+1} - U_{m-1}^n) + (\Omega^{-1} A_1^1 \Omega) (U_{m+1}^{n+1} - U_{m+1}^n), \end{aligned} \quad (2.68)$$

здесь $A_\mu^v = \text{diag}\{\alpha_{i,\mu}^v(\sigma_i)\}$ – диагональные матрицы, на диагоналях которых находятся схемные коэффициенты $\alpha_{i,\mu}^v(\sigma_i)$, $i = 1, 2, \dots, I$. Учтем теперь нелинейность системы уравнений (2.45) через использование промежуточных значений Λ , Ω , Ω^{-1} и A_μ^v между узлами нашего сеточного шаблона. Для этого преобразуем многопараметрическое семейство схем (2.68) к следующему виду:

$$\begin{aligned}
U_m^{n+1} = & \frac{1}{2}(U_{m-1}^n + U_{m+1}^n) + \frac{\tau}{2h}(F_{m-1}^n - F_{m+1}^n) + (\Omega^{-1}A_{-2}^{-1}\Omega)_{m-3/2}^{n-1/2}(U_{m-2}^{n-1} - U_{m-1}^n) + \\
& + (\Omega^{-1}A_{-2}^0\Omega)_{m-3/2}^n(U_{m-2}^n - U_{m-1}^n) + (\Omega^{-1}A_{-1}^{-1}\Omega)_{m-1}^{n-1/2}(U_{m-1}^{n-1} - U_{m-1}^n) - \frac{1}{2}(\Omega^{-1}A_0^{-1}\Omega)_{m-1/2}^{n-1/2}(U_{m-1}^n - U_m^{n-1}) + \\
& + \left(\Omega^{-1} \left(\frac{1}{2}(A_2^{-1} - A_{-2}^{-1} - A_0^0 + A_2^0 - A_{-2}^0) + \frac{\tau}{2h}\Lambda(A_{-2}^{-1} + A_{-1}^{-1} + A_0^{-1} + A_1^{-1} + A_2^{-1} - A_{-1}^1 - A_1^1) \right) \Omega \right)_{m-\frac{1}{2}}^n (U_{m-1}^n - U_m^n) + \\
& + \left(\Omega^{-1} \left(\frac{1}{2}(A_2^{-1} - A_{-2}^{-1} - A_0^0 + A_2^0 - A_{-2}^0) + \frac{\tau}{2h}\Lambda(A_{-2}^{-1} + A_{-1}^{-1} + A_0^{-1} + A_1^{-1} + A_2^{-1} - A_{-1}^1 - A_1^1) \right) \Omega \right)_{m+\frac{1}{2}}^n (U_m^n - U_{m+1}^n) + \\
& + \frac{1}{2}(\Omega^{-1}A_0^{-1}\Omega)_{m+1/2}^{n-1/2}(U_m^{n-1} - U_{m+1}^n) + (\Omega^{-1}A_1^{-1}\Omega)_{m+1}^{n-1/2}(U_{m+1}^{n-1} - U_{m+1}^n) - (\Omega^{-1}A_2^{-1}\Omega)_{m+3/2}^{n-1/2}(U_{m+1}^n - U_{m+2}^{n-1}) + \\
& + (\Omega^{-1}A_2^0\Omega)_{m+3/2}^n(U_{m+2}^n - U_{m+1}^n) + (\Omega^{-1}A_{-1}^1\Omega)_{m-1}^{n+1/2}(U_{m-1}^{n+1} - U_{m-1}^n) + (\Omega^{-1}A_1^1\Omega)_{m+1}^{n+1/2}(U_{m+1}^{n+1} - U_{m+1}^n). \tag{2.69}
\end{aligned}$$

Для сохранения консервативности получившейся схемы (2.69) необходимо правильно вычислить промежуточные значения $\{\Lambda, \Omega, \Omega^{-1}, A_\mu^v\}_{m\pm 1/2}^{n\pm 1/2}$ между узлами нашего сеточного шаблона. Для этого проинтегрируем нелинейную систему уравнений (2.45) по контуру, представленному на Рис. 2.11, также как мы это сделали в (2.63). В результате мы получим следующий интегральный вид схемы (2.69):

$$U_m^{n+1/2} = U_m^{n-1/2} - \frac{\tau}{h}(F_{m+1/2}^n - F_{m-1/2}^n). \tag{2.70}$$

Сопоставляя выражения (2.69) и (2.70), можно выразить вид векторов $F_{m\pm 1/2}$ в (2.70) и заметить, что консервативность и монотонность схем сохранятся, если промежуточные значения $\{\Lambda, \Omega, \Omega^{-1}, A_\mu^v\}_{m\pm 1/2}^{n\pm 1/2}$ будут получены из значений

компонент векторов $U_{m\pm 1/2}^{n\pm 1/2}$, вычисленных с использованием простейшей линейной интерполяции:

$$\begin{cases} U_m^{n+1/2} = \frac{1}{6}(\tilde{U}_{m-1}^{n+1} + \tilde{U}_m^{n+1} + \tilde{U}_{m+1}^{n+1} + U_{m-1}^n + U_m^n + U_{m+1}^n), \\ U_m^{n-1/2} = \frac{1}{6}(U_{m-1}^n + U_m^n + U_{m+1}^n + U_{m-1}^{n-1} + U_m^{n-1} + U_{m+1}^{n-1}), \\ U_{m-1/2}^n = \frac{1}{6}(\tilde{U}_{m-1}^{n+1} + \tilde{U}_m^{n+1} + U_{m-1}^n + U_m^n + U_{m-1}^{n-1} + U_m^{n-1}), \\ U_{m+1/2}^n = \frac{1}{6}(\tilde{U}_m^{n+1} + \tilde{U}_{m+1}^{n+1} + U_m^n + U_{m+1}^n + U_m^{n-1} + U_{m+1}^{n-1}). \end{cases} \quad (2.71)$$

В интерполяционных формулах (2.71) значения векторов $\tilde{U}_{m\pm\mu}^{n+1}$ на временном слое $t = n + 1$ рассчитываются по сеточно-характеристической монотонной схеме первого порядка аппроксимации:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_m^{n+1} = & U_m^n + \frac{\tau}{2h}(F_{m-1}^n - F_{m+1}^n) + \frac{\tau}{2h}(\Omega^{-1}|\Lambda|\Omega)_{m-1/2}^n (U_{m-1}^n - U_m^n) - \\ & - \frac{\tau}{2h}(\Omega^{-1}|\Lambda|\Omega)_{m+1/2}^n (U_m^n - U_{m+1}^n). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Это делается для того, чтобы избежать нелинейности в выражении (2.69) относительно значений векторов $U_{m\pm\mu}^{n+1}$. Расчет по схеме (2.69) также можно упростить, если в ней вместо значений $U_{m\pm 1}^{n+1}$ использовать $\tilde{U}_{m\pm 1}^{n+1}$, полученные по схеме (2.72). Это позволит не применять алгоритм прогонки и таким образом уменьшить количество вычислительных операций. Делать это можно в два этапа. На первом этапе параллельно выполняются два расчета, один слева направо, от первого узла к последнему:

$$\begin{aligned}
U_{L,m}^{n+1} &= \frac{1}{2}(U_{m-1}^n + U_{m+1}^n) + \frac{\tau}{2h}(F_{m-1}^n - F_{m+1}^n) + (\Omega^{-1}A_{-2}^{-1}\Omega)_{m-3/2}^{n-1/2}(U_{m-2}^{n-1} - U_{m-1}^n) + \\
&+ (\Omega^{-1}A_{-2}^0\Omega)_{m-3/2}^n(U_{m-2}^n - U_{m-1}^n) + (\Omega^{-1}A_{-1}^{-1}\Omega)_{m-1}^{n-1/2}(U_{m-1}^{n-1} - U_{m-1}^n) - \frac{1}{2}(\Omega^{-1}A_0^{-1}\Omega)_{m-1/2}^{n-1/2}(U_{m-1}^n - U_m^{n-1}) + \\
&+ \left(\Omega^{-1} \left(\frac{1}{2}(A_2^{-1} - A_{-2}^{-1} - A_0^0 + A_2^0 - A_{-2}^0) + \frac{\tau}{2h}\Lambda(A_{-2}^{-1} + A_{-1}^{-1} + A_0^{-1} + A_1^{-1} + A_2^{-1} - A_{-1}^1 - A_1^1) \right) \Omega \right)_{m-\frac{1}{2}}^n (U_{m-1}^n - U_m^n) + \\
&+ \left(\Omega^{-1} \left(\frac{1}{2}(A_2^{-1} - A_{-2}^{-1} - A_0^0 + A_2^0 - A_{-2}^0) + \frac{\tau}{2h}\Lambda(A_{-2}^{-1} + A_{-1}^{-1} + A_0^{-1} + A_1^{-1} + A_2^{-1} - A_{-1}^1 - A_1^1) \right) \Omega \right)_{m+\frac{1}{2}}^n (U_m^n - U_{m+1}^n) + \\
&+ \frac{1}{2}(\Omega^{-1}A_0^{-1}\Omega)_{m+1/2}^{n-1/2}(U_m^{n-1} - U_{m+1}^n) + (\Omega^{-1}A_1^{-1}\Omega)_{m+1}^{n-1/2}(U_{m+1}^{n-1} - U_{m+1}^n) - (\Omega^{-1}A_2^{-1}\Omega)_{m+3/2}^{n-1/2}(U_{m+1}^n - U_{m+2}^{n-1}) + \\
&+ (\Omega^{-1}A_2^0\Omega)_{m+3/2}^n(U_{m+2}^n - U_{m+1}^n) + (\Omega^{-1}A_{-1}^1\Omega)_{m-1}^{n+1/2}(U_{m-1}^{n+1} - U_{m-1}^n) + (\Omega^{-1}A_1^1\Omega)_{m+1}^{n+1/2}(\tilde{U}_{m+1}^{n+1} - U_{m+1}^n), \tag{2.73}
\end{aligned}$$

второй справа налево, от последнего узла к первому:

$$\begin{aligned}
U_{R,m}^{n+1} &= \frac{1}{2}(U_{m-1}^n + U_{m+1}^n) + \frac{\tau}{2h}(F_{m-1}^n - F_{m+1}^n) + (\Omega^{-1}A_{-2}^{-1}\Omega)_{m-3/2}^{n-1/2}(U_{m-2}^{n-1} - U_{m-1}^n) + \\
&+ (\Omega^{-1}A_{-2}^0\Omega)_{m-3/2}^n(U_{m-2}^n - U_{m-1}^n) + (\Omega^{-1}A_{-1}^{-1}\Omega)_{m-1}^{n-1/2}(U_{m-1}^{n-1} - U_{m-1}^n) - \frac{1}{2}(\Omega^{-1}A_0^{-1}\Omega)_{m-1/2}^{n-1/2}(U_{m-1}^n - U_m^{n-1}) + \\
&+ \left(\Omega^{-1} \left(\frac{1}{2}(A_2^{-1} - A_{-2}^{-1} - A_0^0 + A_2^0 - A_{-2}^0) + \frac{\tau}{2h}\Lambda(A_{-2}^{-1} + A_{-1}^{-1} + A_0^{-1} + A_1^{-1} + A_2^{-1} - A_{-1}^1 - A_1^1) \right) \Omega \right)_{m-\frac{1}{2}}^n (U_{m-1}^n - U_m^n) + \\
&+ \left(\Omega^{-1} \left(\frac{1}{2}(A_2^{-1} - A_{-2}^{-1} - A_0^0 + A_2^0 - A_{-2}^0) + \frac{\tau}{2h}\Lambda(A_{-2}^{-1} + A_{-1}^{-1} + A_0^{-1} + A_1^{-1} + A_2^{-1} - A_{-1}^1 - A_1^1) \right) \Omega \right)_{m+\frac{1}{2}}^n (U_m^n - U_{m+1}^n) + \\
&+ \frac{1}{2}(\Omega^{-1}A_0^{-1}\Omega)_{m+1/2}^{n-1/2}(U_m^{n-1} - U_{m+1}^n) + (\Omega^{-1}A_1^{-1}\Omega)_{m+1}^{n-1/2}(U_{m+1}^{n-1} - U_{m+1}^n) - (\Omega^{-1}A_2^{-1}\Omega)_{m+3/2}^{n-1/2}(U_{m+1}^n - U_{m+2}^{n-1}) + \\
&+ (\Omega^{-1}A_2^0\Omega)_{m+3/2}^n(U_{m+2}^n - U_{m+1}^n) + (\Omega^{-1}A_{-1}^1\Omega)_{m-1}^{n+1/2}(\tilde{U}_{m-1}^{n+1} - U_{m-1}^n) + (\Omega^{-1}A_1^1\Omega)_{m+1}^{n+1/2}(U_{m+1}^{n+1} - U_{m+1}^n). \tag{2.74}
\end{aligned}$$

Когда расчет выполняется слева направо, значение U_{m-1}^{n+1} в (2.73) уже вычислено, а вместо U_{m+1}^{n+1} , мы используем \tilde{U}_{m+1}^{n+1} из схемы (2.72). В (2.74) все делается ровно наоборот. На втором этапе остается только вычислить U_m^{n+1} по формуле:

$$U_m^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{L,m}^{n+1} + U_{R,m}^{n+1}). \tag{2.75}$$

Важный вопрос, который осталось обсудить, это то, как при вычислении U_m^{n+1} , должен работать характеристический критерий монотонности (2.44). Из условия совместности $\omega_i \cdot (U_t + \lambda_i U_x) = 0$, $i = 1, 2, \dots, I$ следует, что в неравенствах (2.44), для каждого из собственных значений λ_i , $i = 1, 2, \dots, I$, надо сравнивать не значения $U_{m+\mu}^{n+\nu}$, а значения скалярного произведения этих векторов на соответствующий левый собственный вектор:

$$\begin{cases} (\omega_{i,m}^n \cdot U_l) \leq (\omega_{i,m}^n \cdot U_m^{n+1}) \leq (\omega_{i,m}^n \cdot U_r), & \text{if } (\omega_{i,m}^n \cdot U_l) \leq (\omega_{i,m}^n \cdot U_r) \\ (\omega_{i,m}^n \cdot U_l) \geq (\omega_{i,m}^n \cdot U_m^{n+1}) \geq (\omega_{i,m}^n \cdot U_r), & \text{if } (\omega_{i,m}^n \cdot U_l) \geq (\omega_{i,m}^n \cdot U_r) \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, I. \quad (2.76)$$

В (2.76) $\omega_{i,m}^n = \begin{cases} \omega_{i,m-1/2}^n, & \text{if } \lambda_{i,m}^n \leq 0 \\ \omega_{i,m+1/2}^n, & \text{if } \lambda_{i,m}^n > 0 \end{cases}$, а векторы U_l и U_r обозначают собой те значения

вектора $U_{m+\mu}^{n+\nu}$ в узлах сеточного шаблона $(t^{n+1}, x_{m-1}), (t^{n+1}, x_m), (t^{n+1}, x_{m+1}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1}), (t^{n-1}, x_{m-1}), (t^{n-1}, x_m), (t^{n-1}, x_{m+1})$, которые ближе всего лежат к характеристике, проходящей в узел (t^{n+1}, x_m) , слева - U_l и справа - U_r . Например, в случае, показанном на Рис. 2.12 слева: $U_l = U_{m-1}^{n-1}$ и $U_r = U_m^n$, а в случае, изображенном на Рис. 2.12 справа: $U_l = U_{m+1}^{n-1}$ и $U_r = U_{m+1}^n$.

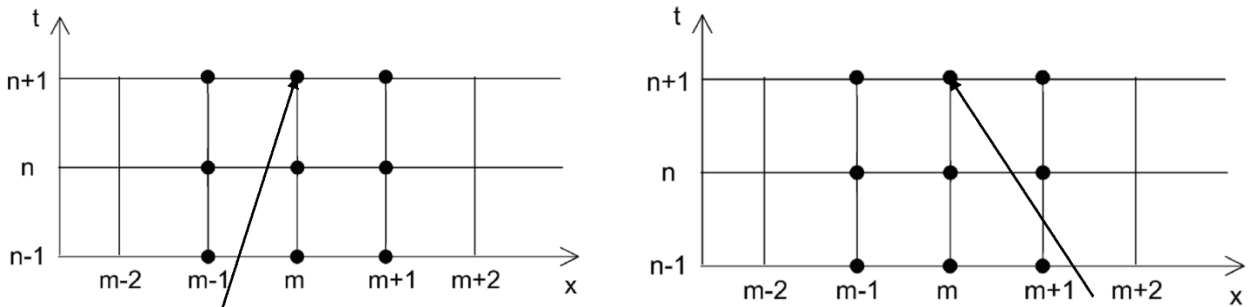


Рис. 2.12. Неявный многослойный сеточный шаблон $(t^{n+1}, x_{m-1}), (t^{n+1}, x_m), (t^{n+1}, x_{m+1}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1}), (t^{n-1}, x_{m-1}), (t^{n-1}, x_m), (t^{n-1}, x_{m+1})$ с характеристиками, проходящей с разных направлений в узел (t^{n+1}, x_m) .

Конкретный набор коэффициентов α_μ^ν в (2.67) определяет ту или иную разностную схему на заданном сеточном шаблоне. Например, если мы захотим перейти от сеточного шаблона, представленного на Рис. 2.11 к сеточному шаблону на

Рис. 2.12, то необходимо просто положить $\alpha_{-2}^{-1} = \alpha_{-2}^0 = \alpha_2^0 = \alpha_2^{-1} = 0$ в (2.67) или $A_{-2}^{-1} = A_{-2}^0 = A_2^0 = A_2^{-1} = 0$ в (2.69). Данный подход применим к любому сеточному шаблону, который может быть получен из исходного, путём удаления каких-либо точек из него, через обнуление соответствующих коэффициентов α_μ^ν .

2.4 Построение монотонных схем высокого порядка аппроксимации для многомерных гиперболических систем уравнений

При наличии вектора правой части в системе уравнений (2.45)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial U}{\partial x} = f(U, t, x), \quad (2.77)$$

учет его влияния на решение (2.77) может быть реализован посредством численного интегрирования правой части $\int_0^{\Delta t} f(U, x, t) dt$ в (2.77), при этом выбор порядка

аппроксимации метода можно соотнести с точностью разностной схемы (2.53):

$$\begin{cases} \tilde{U}_m^{n+1} = \sum_{\mu, \nu} \Omega^{-1} A_\mu^\nu \Omega U_{m+\mu}^{n+\nu}, \\ U_m^{n+1} = \tilde{U}_m^{n+1} + \int_0^\tau f(\tilde{U}_m^{n+1}, x_m, t) dt. \end{cases} \quad (2.78)$$

В случае использования в точках ветвления рассчитываемого графа трехмерной системы гиперболических уравнений в частных производных

$$U_t + \tilde{A}_1 U_{x_1} + \tilde{A}_2 U_{x_2} + \tilde{A}_3 U_{x_3} = f(U, t, x_k), \quad t \geq 0, \quad x_k \in [0, X_k], \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.79)$$

расщепление по пространственным переменным x_1, x_2, x_3 можно выполнить в соответствии с построениями, предложенными в работе [Холодов, 1990]. Для этого многомерная нелинейная система уравнений гиперболического типа в левой части (2.4) представляется в виде суммы трех одномерных операторов (заклучены в скобки):

$$\begin{cases} \gamma_1 \left(U_t + \frac{\tilde{A}_1}{\gamma_1} U_{x_1} \right) + \gamma_2 \left(U_t + \frac{\tilde{A}_2}{\gamma_2} U_{x_2} \right) + \gamma_3 \left(U_t + \frac{\tilde{A}_3}{\gamma_3} U_{x_3} \right) = \left(\sum_{k=1}^3 \gamma_k \right) f(U, t, x_k), \\ 0 < \gamma_k < 1, \quad \sum_{k=1}^3 \gamma_k = 1. \end{cases} \quad (2.80)$$

Каждое из слагаемых в скобках системы (2.80)

$$U_t + \frac{\tilde{A}_k}{\gamma_k} U_{x_k} = f(U, t, x_k), \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.81)$$

является одномерной системой уравнений в векторной форме вида (2.77), поэтому при численном решении любой из систем уравнений (2.81) мы можем использовать любую из разностных схем (2.78).

Стандартный алгоритм расчета многомерных систем типа (2.80) на каждом временном шаге, состоит либо в последовательном решении одномерных уравнений при $\gamma_k \equiv 1$, при этом общий шаг интегрирования по времени Δt выбирается из условия $\max_{i,k} \left| \frac{\tau \lambda_{i,k}}{h_k} \right| < 1$, $i = 1, \dots, I$, $k = 1, 2, 3$, либо в их параллельном решении с нахождением свободных параметров γ_k , $k = 1, 2, 3$ и временного шага τ из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^3 \gamma_k = 1, \quad \lambda_k = \max_i \{ |\lambda_{i,k}| \}, \quad i = 1, \dots, I, \\ \frac{\tau \lambda_1}{\gamma_1 h_1} = \frac{\tau \lambda_2}{\gamma_2 h_2} = \frac{\tau \lambda_3}{\gamma_3 h_3} = \sigma. \end{cases} \quad (2.82)$$

Решая (2.82) получаем, что

$$\begin{cases} \tau = \frac{\sigma h_1 h_2 h_3}{(\lambda_1 h_2 h_3 + \lambda_2 h_1 h_3 + \lambda_3 h_1 h_2)}, & \gamma_1 = \frac{\lambda_1 h_2 h_3}{(\lambda_1 h_2 h_3 + \lambda_2 h_1 h_3 + \lambda_3 h_1 h_2)}, \\ \gamma_2 = \frac{\lambda_2 h_1 h_3}{(\lambda_1 h_2 h_3 + \lambda_2 h_1 h_3 + \lambda_3 h_1 h_2)}, & \gamma_3 = \frac{\lambda_3 h_1 h_2}{(\lambda_1 h_2 h_3 + \lambda_2 h_1 h_3 + \lambda_3 h_1 h_2)}. \end{cases} \quad (2.83)$$

Окончательные значения вектора U_m^{n+1} на следующем временном слое t^{n+1} в каждой рассчитываемой точке получаем следующим образом:

$$U_m^{n+1} = \sum_{k=1}^3 \gamma_k U_{m,k}^{n+1}.$$

Стоит также обратить внимание на тот факт, что когда мы используем выражения (2.83) при выборе свободных параметров γ_k и τ , это приводит к тому, что при численном интегрировании каждого из уравнений (2.81) у нас уменьшается общий шаг по времени, но при этом выполняются соотношения: $\frac{\tau\lambda_1}{\gamma_1 h_1} = \frac{\tau\lambda_2}{\gamma_2 h_2} = \frac{\tau\lambda_3}{\gamma_3 h_3}$, $\lambda_k = \max_i \{|\lambda_{i,k}|\}$, $i = 1, \dots, I$. Это особенно важно при расчете возмущений, распространяющихся под различными углами к осям координат: x_1, x_2, x_3 .

Как правило, элементы узлов графа имеют прямоугольную структуру, что позволяет использовать декартову систему координат и ортогональные сетки, если же при численном интегрировании в узле графа возникает область с непрямоугольной топологией, то внутри неё можно использовать разностную аппроксимацию системы уравнений (2.79) с многомерной реконструкцией значений вектора $U(t, x_k)$ на гранях ячеек Дирихле, имеющих центры в узлах (t^n, \vec{r}_m) (см. [Куликовский и др., 2012]).

2.5 Результаты расчетов

Для проверки работоспособности предложенного подхода в нелинейном случае воспользуемся гиперболической системой уравнений одномерной газовой динамики:

$$\begin{cases} U_t + F_x = 0, \\ V = \{\rho, u, \varepsilon\}^T, \\ U = U(V) = \{\rho, \rho u, e\}^T, \\ F = F(V) = \{\rho u, \rho u^2 + p, u(e + p)\}^T. \end{cases} \quad (2.84)$$

В (2.84) используются следующие обозначения для идеального газа: ρ – плотность; u – скорость вдоль оси x ; ε – удельная внутренняя энергия; $e = \rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho u^2$ –

полная энергия единицы объёма; $p = \rho(\gamma - 1)\varepsilon$ – давление; $\gamma = 1.4$ – показатель адиабаты, область интегрирования: $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq 1$, начальные условия:

$$V(0, x) = \begin{cases} V_{out} = \{\rho_{out}, u_0, \varepsilon_{out}\}^T, & 0 \leq x < 0.4 \text{ \& } 0.6 < x \leq 1, \\ V_{in} = \{\rho_{in}, u_0, \varepsilon_{in}\}^T, & 0.4 \leq x \leq 0.6, \end{cases} \quad (2.85)$$

граничные условия – периодические. Шаг по оси x зададим равномерным: $h = \frac{1}{(M-1)}$, M – число сеточных узлов на оси, шаг по t на каждом временном слое $t^n =$

$const$ выбирался из условия устойчивости Куранта: $\frac{\tau \max(\lambda_i)_m^n}{h} < 1$, $m = 1, \dots, M$, $i = 1, \dots, I$.

В (2.85) начальные значения плотности и внутренней энергии выбирались таким образом, чтобы образовалось два контактных разрыва в виде ступеньки, двигающейся со скоростью u_0 . Этого можно достичь, если будет выполняться простое начальное условие: $\rho_{out}\varepsilon_{out} = \rho_{in}\varepsilon_{in}$. Периодические граничные условия обеспечивают возвращение ступеньки назад в расчетную область после того, как она выходит из неё через одну из границ, это позволяет продолжить расчет на любое необходимое количество шагов до заданного момента времени.

В расчетах, представленных на Рис. 2.12, для тестового шаблона с Рис. 2.1 задавались следующие начальные значения переменных: $V_{out} = \{\rho_{out} = 2; u_0 = 0.1, 1, 10; \varepsilon_{out} = 2\}^T$, $V_{in} = \{\rho_{in} = 0.5; u_0 = 0.1, 1, 10; \varepsilon_{in} = 8\}^T$. Расчеты проводились до момента времени $T \approx 1$, число сеточных узлов на оси x : $M = 100$, число Куранта $\sigma = 0.5$. В качестве разностной схемы использовалась монотонная комбинация нелинейных аналогов схем [Русанов, 1968], [Lax, Wendroff, 1960] и [Warming, Beam, 1975].

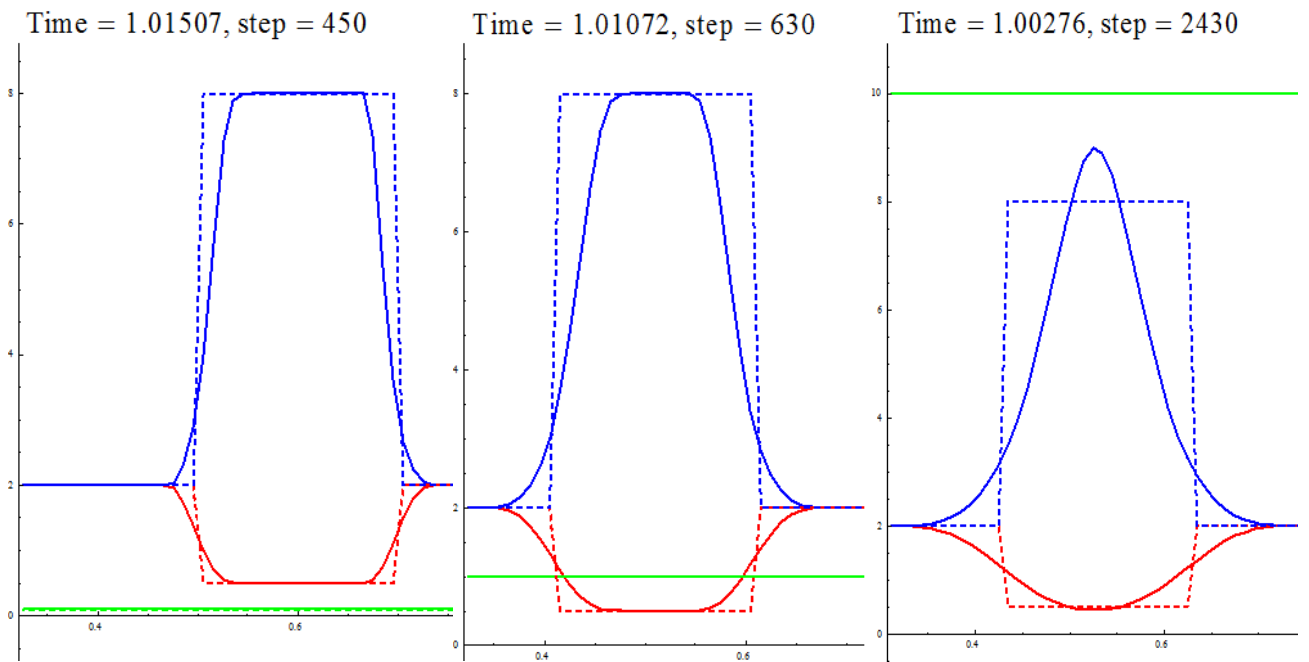


Рис. 2.12. Расчет движения двух контактных разрывов в виде ступеньки с тремя различными скоростями: $u_0 = 0.1$ – слева; $u_0 = 1$ – посередине; $u_0 = 10$ – справа; на сеточном шаблоне $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-2}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1}), (t^n, x_{m+2})$, до момента времени $T \approx 1$, число сеточных узлов на оси x : $M = 100$, число Куранта: $\sigma = 0.5$. Красным цветом показаны значения плотности, зеленым – скорости и синим – внутренней энергии.

Из результатов расчетов хорошо видно, что изменение скорости движения разрывов потребовало различного количества шагов по времени для каждого из значений скорости $u_0 = \{0.1, 1, 10\}$. Это связано с тем, что шаг по времени $\tau = \frac{1}{2(M-1)(u_0 + c_{max})}$ обратно пропорционален максимальной скорости разрыва (c_{max} - максимальное значение скорости звука в области интегрирования).

Также, увеличение начальной скорости u_0 , которая является одним из собственных значений тестируемой гиперболической системы уравнений (2.84), приводит к потере точности численного решения, что следует из вида первого дифференциального приближения схемы [Русанов, 1968]:

$$u_t + \lambda u_x = \frac{h^4 u_{xxx}}{24\tau} \left(\sigma^4 + \sum_{\mu=-2}^1 \mu^4 \alpha_\mu^0 \right) = \frac{u_{xxx}}{24} (\lambda^4 \tau^3 + 2\lambda^3 \tau^2 h + \lambda^2 \tau h^2 - 2\lambda h^3).$$

Даже если мы проведем расчеты для каждой из скоростей $u_0 = \{0.1, 1, 10\}$ по нашей схеме на одно и то же количество шагов по времени: $N = 450$, точность

решения заметно будет заметно падать с увеличением скорости u_0 , что хорошо видно на Рис. 2.13.

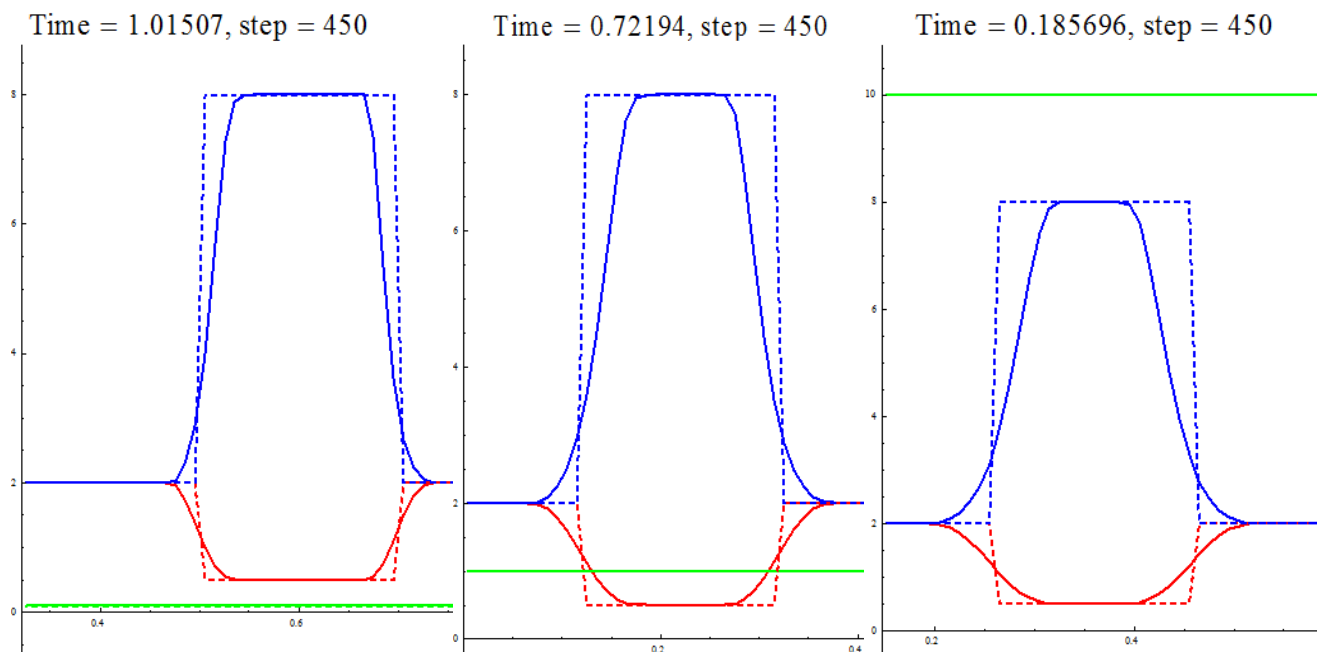


Рис. 2.13. Расчет движения двух контактных разрывов в виде ступеньки с тремя различными скоростями: $u_0 = 0.1$ – слева; $u_0 = 1$ – посередине; $u_0 = 10$ – справа; на сеточном шаблоне $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-2}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1}), (t^n, x_{m+2})$, число сеточных узлов на оси x : $M = 100$, число Куранта: $\sigma = 0.5$, количество шагов по времени: $N = 450$. Красным цветом показаны значения плотности, зеленым – скорости и синим – внутренней энергии.

Следующие два вопроса, которые стоит обсудить, это то, как влияет на точность расчётов увеличение количества сеточных узлов на оси x и выбор используемых узлов шаблона разностной схемы. Для этого повторим те же самые расчеты, но уже с числом сеточных узлов на оси x : $M = 200$, Рис. 2.14. Из результатов расчета хорошо видно, что точность вычислений по сравнению с Рис. 2.12 увеличилась примерно в два раза, но и количество шагов по времени (продолжительность расчета) при этом также увеличивается вдвое.

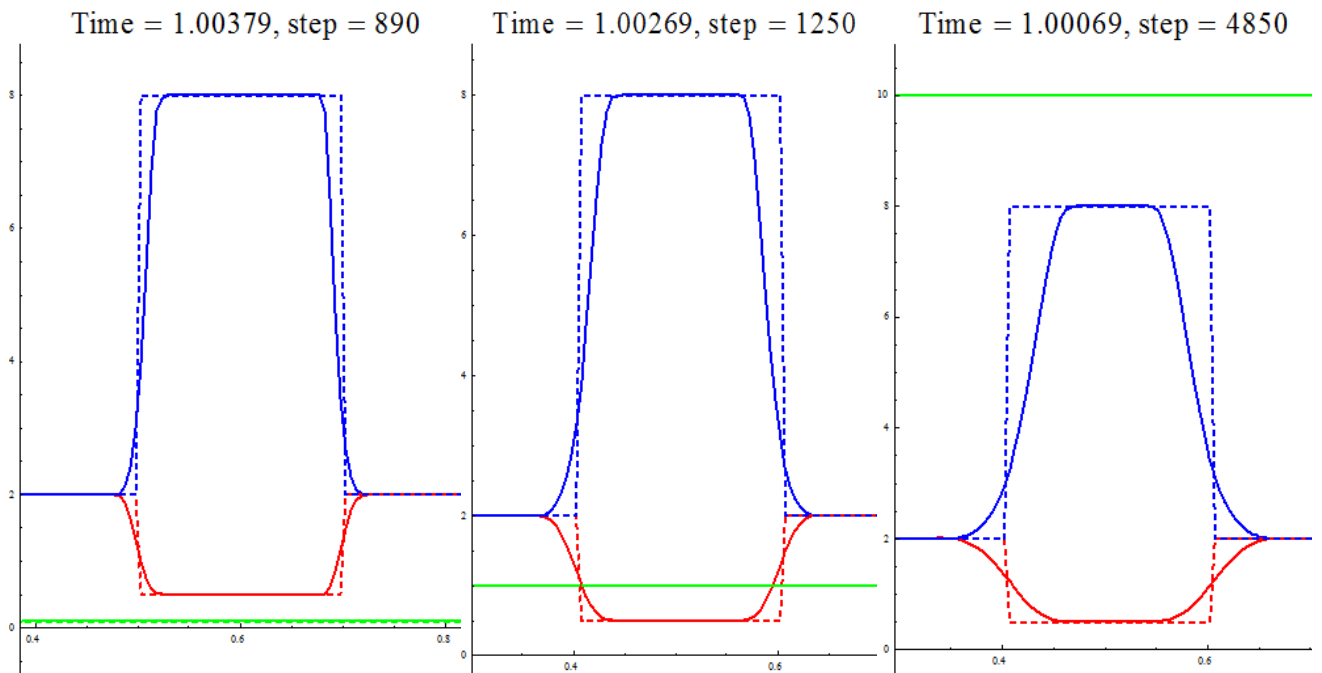


Рис. 2.14. Расчет движения двух контактных разрывов в виде ступеньки с тремя различными скоростями: $u_0 = 0.1$ – слева; $u_0 = 1$ – посередине; $u_0 = 10$ – справа; на сеточном шаблоне $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-2}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1}), (t^n, x_{m+2})$, до момента времени $T \approx 1$, число сеточных узлов на оси x : $M = 200$, число Куранта: $\sigma = 0.5$. Красным цветом показаны значения плотности, зеленым – скорости и синим – внутренней энергии.

Если же мы будем использовать в качестве расчетного шаблон (2.19), изображенный на Рис. 2.5, то увидим, что при том же количестве сеточных узлов на оси x : $M = 100$ и количестве шагов по времени, точность расчета также увеличилась практически вдвое: Рис. 2.15. Этот эффект легко объяснить, если обратиться к формуле (2.42), подставив туда значение $\sigma = 0.5$, мы получим, что при преобразовании шаблона (2.41) к явному, двухслойному виду, его узлы будут иметь следующие координаты: $X_1 = -h$, $X_2 = \frac{h}{2}$, $X_3 = 0$, $X_4 = \frac{h}{2}$, что по сути будет эквивалентно удвоению количества сеточных узлов для исходного тестового шаблона с Рис. 2.1.

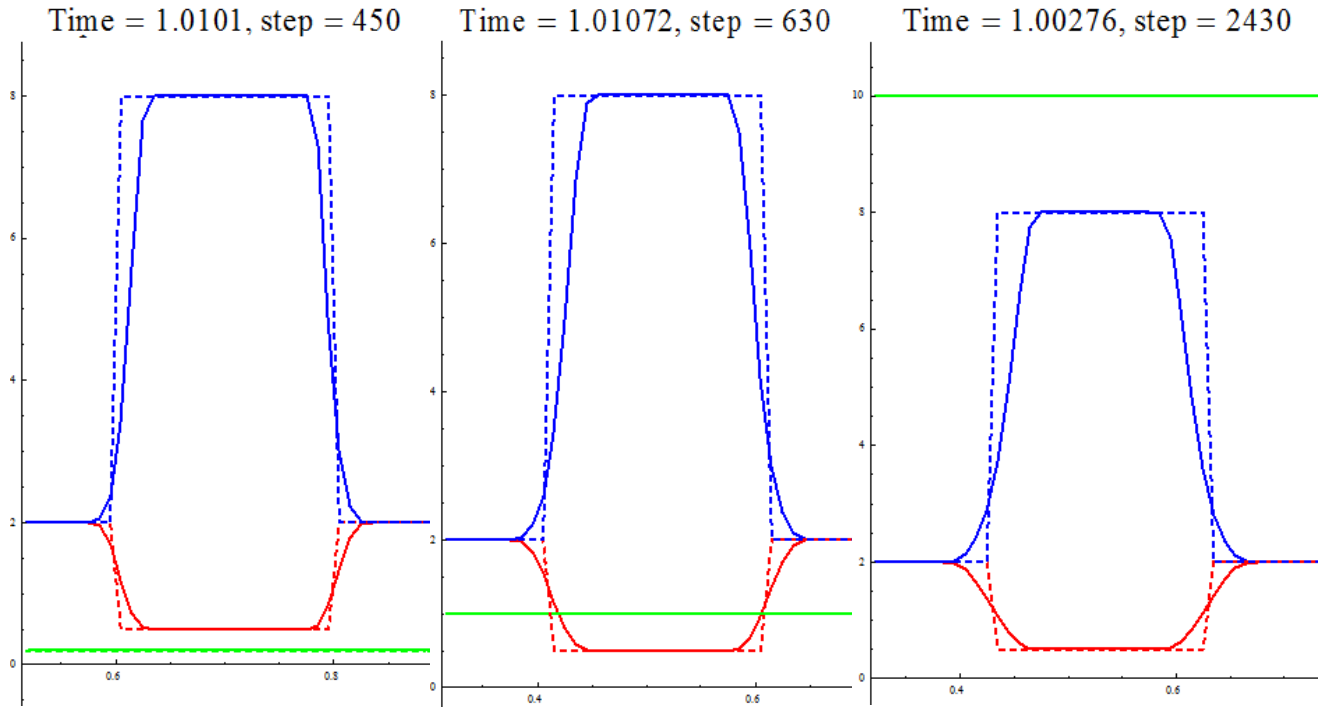


Рис. 2.15. Расчет движения двух контактных разрывов в виде ступеньки с тремя различными скоростями: $u_0 = 0.1$ – слева; $u_0 = 1$ – посередине; $u_0 = 10$ – справа; на сеточном шаблоне $(t^{n+1}, x_m), (t^{n-1}, x_{m-1}), (t^{n-1}, x_m), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^{n-1}, x_{m+1})$ до момента времени $T \approx 1$, число сеточных узлов на оси x : $M = 100$, число Куранта: $\sigma = 0.5$. Красным цветом показаны значения плотности, зеленым – скорости и синим – внутренней энергии.

Для сравнительного тестирования нами была реализована монотонная схема WENO3 с третьим порядком аппроксимации по пространству и вторым по времени (четвертая глава [Cockburn et. al, 1998]). Функция численного потока в WENO3 схеме использовалась такая же, как и в предикторе схемы (3.17), а именно:

$$F_{m\pm 1/2}^n = \frac{1}{2}(F_m^n + F_{m\pm 1}^n) \pm \frac{1}{2}(\Omega^{-1} |\Lambda| \Omega)_{m\pm 1/2}^n (U_m^n - U_{m\pm 1}^n).$$

В качестве исходных данных для расчета использовался модифицированный тест Сода [Sod, 1978] со следующими начальными условиями задачи Римана:

$$V(0, x) = \{\rho, u, \varepsilon\}^T = \begin{cases} V_{left} = \{1, 0.75, 2.5\}^T, & 0 \leq x \leq 0.5, \\ V_{right} = \{0.125, 0, 2\}^T, & 0.5 < x \leq 1. \end{cases}$$

Конфигурация распада-разрыва аналогична стандартному тесту Сода [Sod, 1978], решение состоит из правой ударной волны, движущегося вправо

контактного разрыва и левой волны разрежения. На волне разрежения имеется звуковая точка (в которой знак одного из собственных чисел меняется), из-за этого в её окрестности иногда возникает искусственный разрыв (энтропийный след).

Расчеты, представленные на Рис. 2.16, проводились до момента времени $T = 0.2$, число сеточных узлов на оси x : $M = 100$. В качестве тестовой разностной схемы использовалась монотонная комбинация аналогов схем [Русанов, 1968], [Lax, Wendroff, 1960] и [Warming, Beam, 1975] (2.61), полученная с использованием характеристического критерия монотонности на сеточном шаблоне с Рис. 2.1 и числа Куранта $\sigma = 0.8$, ее результаты показаны слева на рисунке. Справа показаны результаты, полученные с использованием монотонной схемы WENO3 [Cockburn et. al, 1998] для тех же начальных данных, $M = 100$ и числа Куранта $\sigma = 0.25$, поскольку при $\sigma \geq 0.3$ данная схема становится неустойчивой.

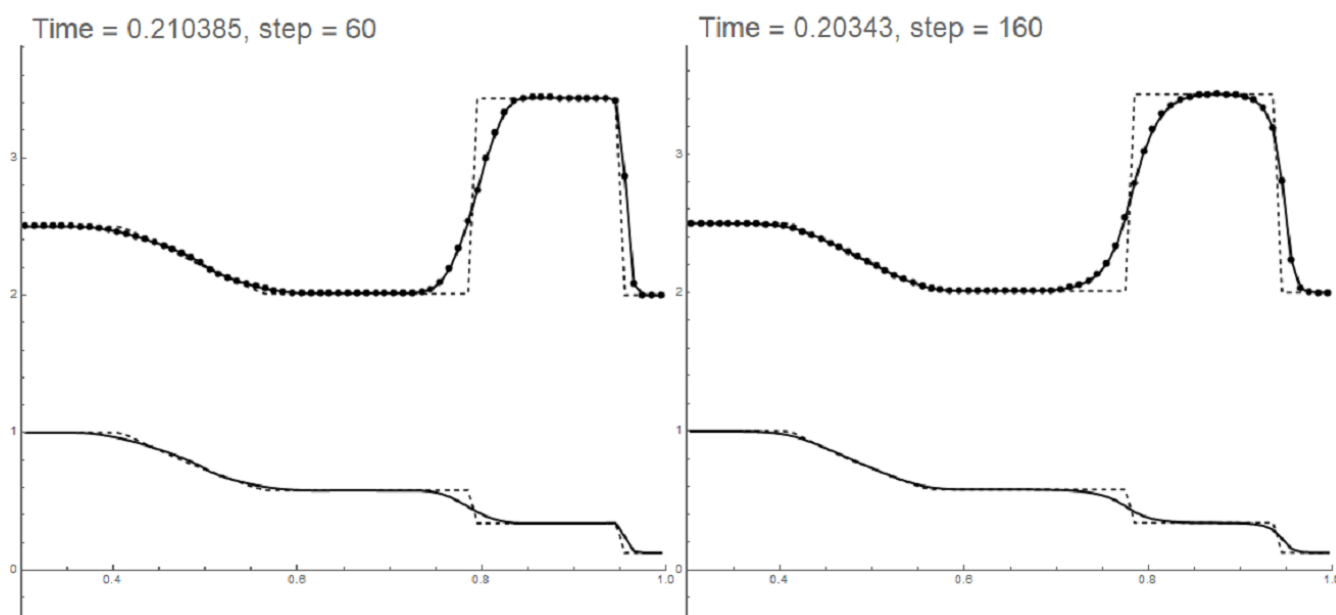


Рис. 2.16. Решение задачи Римана, полученное в момент времени $T \approx 0.2$ в виде правой ударной волны, движущейся вправо, контактного разрыва и левой волны разрежения, число сеточных узлов на оси x : $M = 100$. Слева показаны результаты расчетов по монотонной комбинации схем [Русанов, 1968], [Lax, Wendroff, 1960] и [Warming, Beam, 1975] (2.61) для числа Куранта $\sigma = 0.8$. Справа показаны результаты, полученные с использованием монотонной схемы WENO3 [Cockburn et. al, 1998] для числа Куранта $\sigma = 0.25$. Сплошной линией показаны значения плотности, линией с маркерами – внутренней энергии и пунктирными линиями их точные решения.

Результаты гибридной монотонной тестовой схемы (2.61) получились более точными, чем у WENO3 [Cockburn et. al, 1998]. Это связано в первую очередь с тем, что наша схема достигает заданного времени $T \approx 0.2$ за существенно меньшее количество шагов: $N = 60$, что также позволяет заметно экономить машинное время. Не в нашей тестовой, не в схеме WENO3 [Cockburn et. al, 1998] заметного энтропийного следа на волне разряжения при расчетах не наблюдается.

Для проверки работоспособности предложенного подхода в многомерном нелинейном случае воспользуемся гиперболической системой уравнений трехмерной газовой динамики:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_t + F_x + G_y + W_z = 0, \\ V = \{\rho, u, v, w, \varepsilon\}^T, \\ U = U(V) = \{\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e\}^T, \\ F = F(V) = \{\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uw, u(e + p)\}^T, \\ G = G(V) = \{\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho vw, v(e + p)\}^T, \\ W = W(V) = \{\rho w, \rho uw, \rho vw, \rho w^2 + p, w(e + p)\}^T. \end{array} \right. \quad (2.86)$$

В (2.86) добавились следующие обозначения: v – скорость вдоль оси y ; w – скорость вдоль оси z ; $e = \rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2 + w^2)$ – полная энергия единицы объёма; область интегрирования: $0 \leq t \leq T, 0 \leq \{x, y, z\} \leq 1$.

В первом тесте задавались следующие начальные условия при $t = 0$:

$$V_0 = \left\{ \begin{array}{l} V_{out} = \{\rho_{out}, u_0, v_0, w_0, \varepsilon_{out}\}^T, \quad 0 \leq \{x, y, z\} < 0.4 \ \& \ 0.6 < \{x, y, z\} \leq 1 \\ V_{in} = \{\rho_{in}, u_0, v_0, w_0, \varepsilon_{in}\}^T, \quad 0.4 \leq \{x, y, z\} \leq 0.6 \end{array} \right. \quad (2.87)$$

Граничные условия были периодические. Шаги по координатным осям заданы равномерными: $h = \frac{1}{(M-1)}$, $M = 101$ – число сеточных узлов на каждой координатной оси, шаг по t на каждом временном слое $t^n = const$ выбирался из условия (2.83).

В (2.87) начальные значения плотности и внутренней энергии выбирались таким образом, чтобы образовались контактные разрывы в виде прямоугольного

параллелепипеда, двигающейся со скоростью $\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}$. Этого можно достичь, если будет выполняться простое начальное условие: $\rho_{out}\varepsilon_{out} = \rho_{in}\varepsilon_{in}$. Периодические граничные условия обеспечивают возвращение возмущения назад в расчетную область после того, как оно выходит через её границы. Это позволяет продолжить расчет на любое необходимое количество шагов до заданного момента времени. Форма начального распределения плотности и внутренней энергии должна сохраняться при движении возмущения в области интегрирования, что позволяет сравнивать с ним полученное численное решение.

В расчетах, представленных на Рис. 2.17, для тестового шаблона с Рис. 2.1 задавались следующие начальные значения переменных: $V_{out} = \{\rho_{out} = 2, u_0 = 1, v_0 = 1, w_0 = 1, \varepsilon_{out} = 2\}^T$, $V_{in} = \{\rho_{in} = 0.5, u_0 = 1, v_0 = 1, w_0 = 1, \varepsilon_{in} = 8\}^T$. Расчеты проводились до момента времени $T \approx 8$, число сеточных узлов на осях $\{x, y, z\}$: $M = 101$, число Куранта $\sigma = 0.5$, общее число шагов численного интегрирования по времени $N = 5000$. Сравнивались результаты расчетов двух разностных схем: монотонной консервативной комбинации нелинейных аналогов схем [Русанов, 1968], [Lax, Wendroff, 1960] и [Warming, Beam, 1975] второго-третьего порядков аппроксимации (2.61) с предиктором, полученным сеточно-характеристическим методом [Магомедов, Холодов, 1969], и монотонной консервативной схемы [Годунов, 1959] первого порядка аппроксимации.

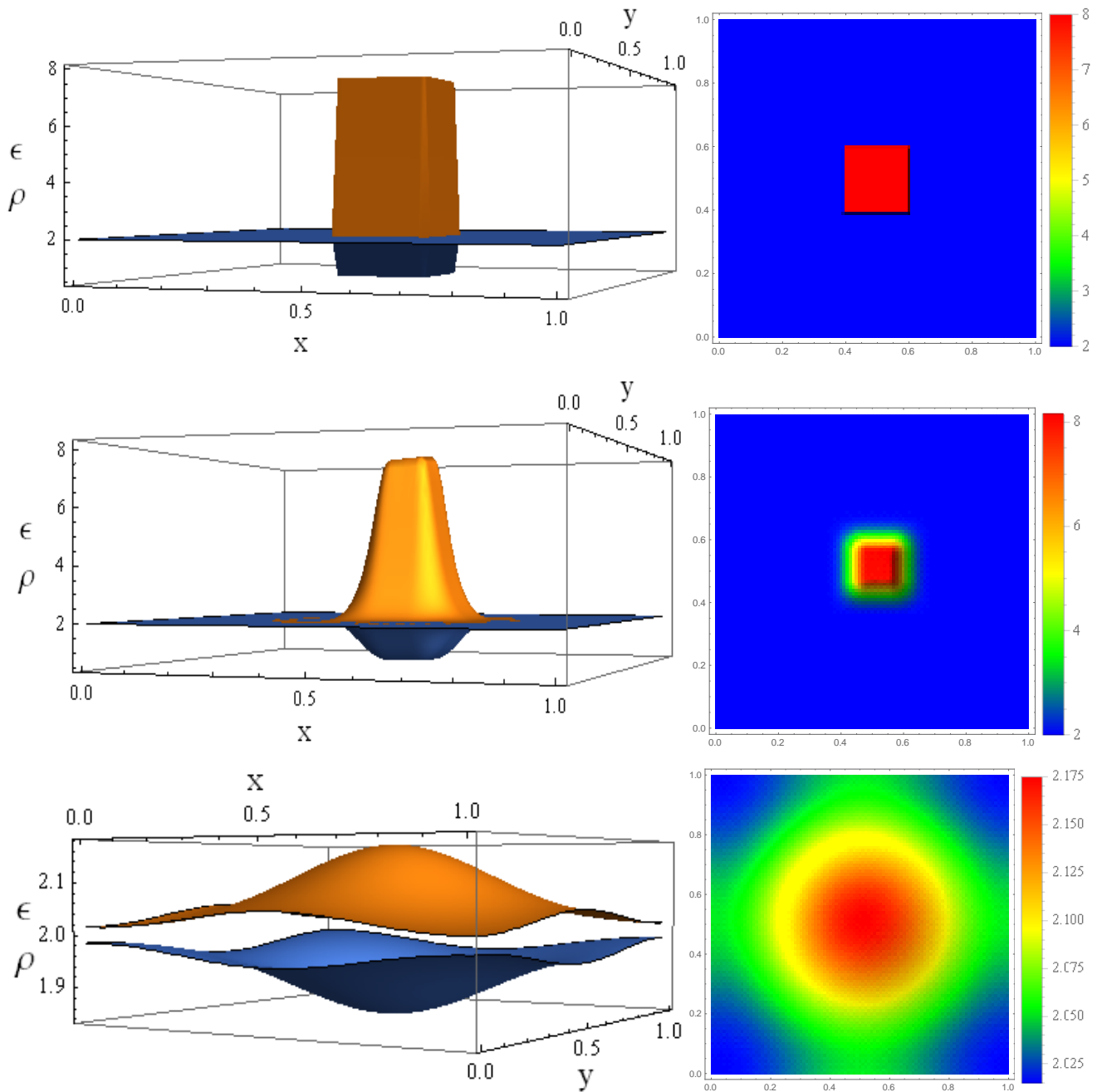


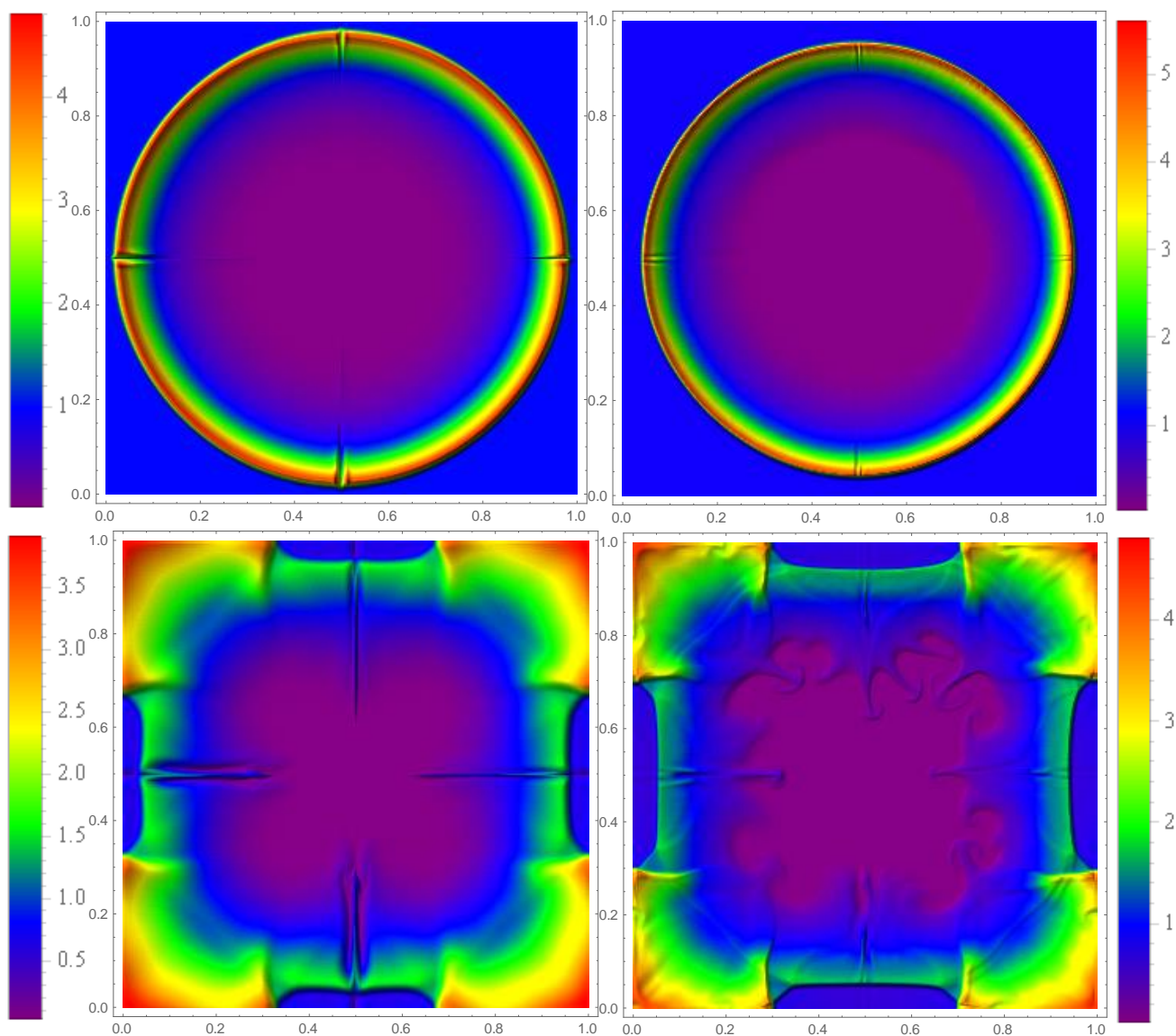
Рис. 2.17. Расчет движения контактных разрывов в виде прямоугольного параллелепипеда,двигающегося по диагонали области интегрирования $0 \leq \{x, y, z\} \leq 1$ со скоростью: $\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2} = \sqrt{3}$, число сеточных узлов на осях $\{x, y, z\}$: $M = 101$, число Куранта $\sigma = 0.5$, общее число шагов интегрирования по времени $N = 5000$. Слева на графиках показаны распределения внутренней энергии (сверху) и плотности (снизу), справа только внутренней энергии. Верху показано исходное распределение внутренней энергии и плотности в начальный момент времени $t = 0$. Посередине показаны результаты расчетов по монотонной комбинации аналогов схем [Русанов, 1968], [Lax, Wendroff, 1960] и [Warming, Beam, 1975] (2.61) второго-третьего порядков аппроксимации в момент времени $T \approx 8$. Внизу показаны результаты расчетов по монотонной схеме [Годунов, 1959] первого порядка аппроксимации, также в момент времени $T \approx 8$.

Следующим тестом был сделан расчет, в котором в начальный момент времени внутри круга радиусом $r = 0.05$ с центром в точке $\{x, y, z\} = 0.5$ начальные условия задавалась в той же самой области интегрирования $0 \leq \{x, y, z\} \leq 1$, как $V_{in} = \{\rho_{in} = 1, u_0 = v_0 = w_0 = 0, \varepsilon_{in} = 10^6\}^T$ – внутри круга и $V_{out} = \{\rho_{out} = 1, u_0 = v_0 = w_0 = 0, \varepsilon_{out} = 1\}^T$ – снаружи. Расчеты проводились с условиями симметрии по оси z и условиями непротекания на границах по осям x и y . При $0 < t < 3 \times 10^{-3}$, как видно на верхней части Рис. 2.18, первоначальный разрыв распадается на движущуюся к центру волну разрежения, движущуюся к стенкам ударную волну и контактный разрыв между ними.

Дальнейшая эволюция этой конфигурации показана на Рис. 2.18 для плотности и на Рис. 2.19 для внутренней энергии, на которых в левой части показаны распределения, полученные по монотонной консервативной схеме первого порядка аппроксимации [Годунов, 1959], а в правой – по монотонной комбинации нелинейных аналогов схем [Русанов, 1968], [Lax, Wendroff, 1960] и [Warming, Beam, 1975] второго-третьего порядков аппроксимации (2.61) с предиктором, полученным по схеме [Годунов, 1959], поскольку линеаризованный предиктор [Магомедов, Холодов, 1969] не позволяет проводить расчет при столь сильных возмущениях начальных параметров.

Расчеты проводились в декартовой системе координат, поэтому начальная форма границы области энерговыделения имела возмущения порядка пространственных шагов разностной сетки (301 узел в каждом направлении), которые, как видно в средней левой части рисунков, практически полностью подавляются в монотонной схеме [Годунов, 1959] первого порядка аппроксимации. В реальности же эти начальные возмущения на границе ударных волн после их отражения от стенок в углах области и взаимодействия с такой же возмущенной границей малоплотного горячего газа в центральной части порождают многочисленные неустойчивости Рэлея-Тэйлора (средняя правая часть рисунков). Схема высокого порядка аппроксимации (2.61) в отличие от схемы первого порядка [Годунов, 1959] позволила

проследить за развитием возникших неустойчивостей практически до стадии турбулентного перемешивания $T \approx 6 \times 10^{-2}$, $N = 8000$ (нижняя правая часть рисунков), что достаточно убедительно демонстрирует ее высокую эффективность.



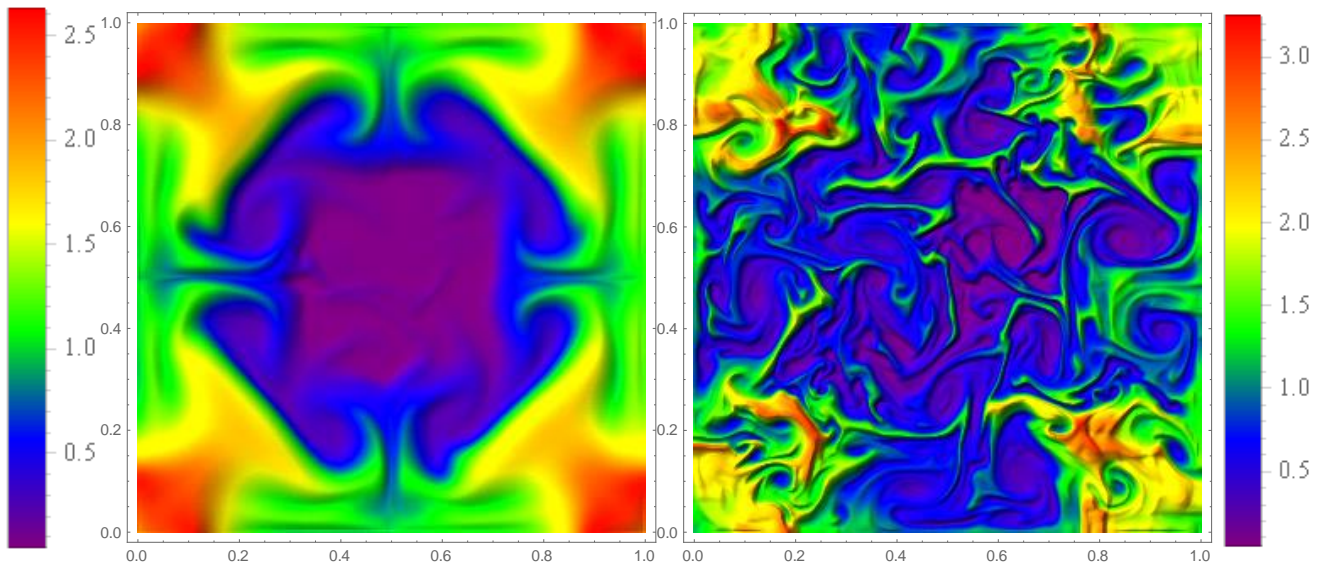


Рис. 2.18. Расчеты эволюции распределения плотности внутри замкнутого объема в различные моменты времени: сверху при $T \approx 2.3 \times 10^{-3}$, $N = 400$; посередине при $T \approx 9.5 \times 10^{-3}$, $N = 1400$; внизу при $T \approx 6 \times 10^{-2}$, $N = 8000$. Слева – по монотонной консервативной схеме первого порядка аппроксимации [Годунов, 1959]. Справа – по монотонной комбинации нелинейных аналогов схем [Русанов, 1968], [Lax, Wendroff, 1960] и [Warming, Beam, 1975] второго-третьего порядков аппроксимации (2.61) с предиктором, полученным по схеме [Годунов, 1959].

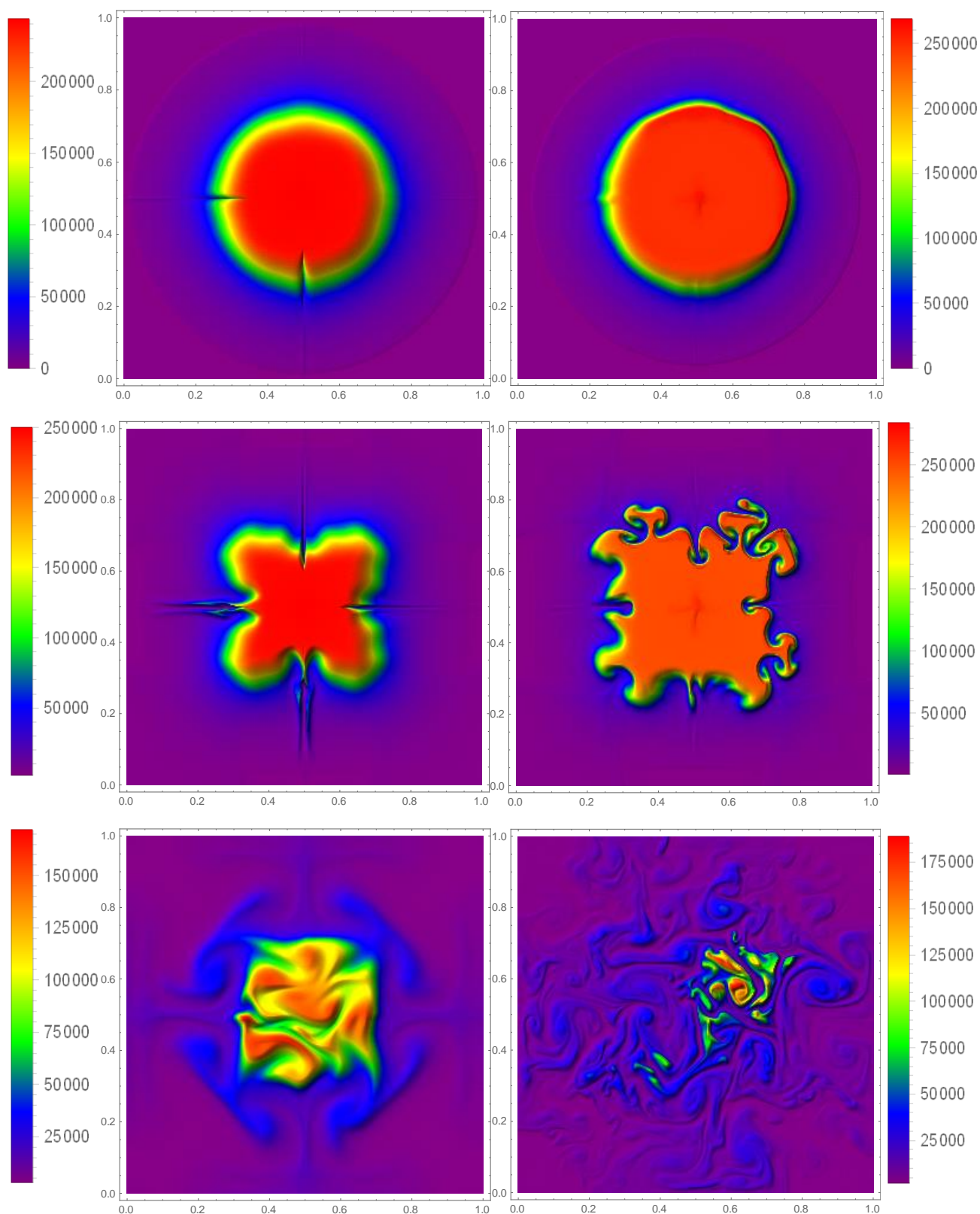


Рис. 2.19. Расчеты эволюции распределения внутренней энергии внутри замкнутого объема в различные моменты времени: сверху при $T \approx 2.3 \times 10^{-3}$, $N = 400$; посередине при $T \approx 9.5 \times 10^{-3}$, $N = 1400$; внизу при $T \approx 6 \times 10^{-2}$, $N = 8000$. Слева – по монотонной консервативной схеме первого порядка аппроксимации [Годунов, 1959]. Справа – по монотонной комбинации нелинейных аналогов схем [Русанов, 1968], [Lax, Wendroff, 1960] и [Warming, Beam, 1975] второго-третьего порядка аппроксимации (2.61) с предиктором, полученным по схеме [Годунов, 1959].

Проведённые многочисленные расчеты с использованием предложенных гибридных консервативных разностных схем высокого порядка аппроксимации на основе характеристического критерия монотонности для нелинейных систем уравнений гиперболического типа показали заметное преимущество предложенных схем при расчетах на грубых пространственных сетках и больших временах расчета. В таких условиях схемы высокого порядка аппроксимации позволяют существенно сократить количество вычислений при сохранении заданной точности.

Глава 3. Моделирование трафика в городской транспортной сети

В данной главе используются материалы, опубликованные ранее в следующих работах и статьях: [Холодов и др., 2010; Гасников и др., 2010; Гасников и др., 2013; Холодов и др., 2014; Алексеенко и др., 2015; Холодов и др., 2015; Алексеенко, 2017; Alekseenko et. al., 2017; Холодов, 2019].

В 50-ые годы прошлого века наблюдалось бурное развитие газовой динамики (обобщенные решения законов сохранения, устойчивые разностные схемы расчета решений). Тогда же появились первые макроскопические (гидродинамические) модели, в которых транспортный поток уподобляется потоку «мотивированной» сжимаемой жидкости. В модели Лайтхилла – Уизема – Ричардса (LWR) [Lighthill, Whitham, 1955; Richards, 1956] транспортный поток уподобляется потоку сжимаемой жидкости (баротропного газа), и описывается законом сохранения количества автомобилей. При этом в модели постулируется существование однозначной функциональной зависимости между величиной интенсивности/скорости транспортного потока автомобилей и его плотностью. Эту зависимость называют фундаментальной диаграммой. В последующие годы класс макромоделей был значительно расширен [Алексеенко и др., 2015; Холодов и др., 2015; Холодов, 2019]. В современном макроскопическом подходе транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений второго порядка (для плотности и скорости потока) в различных постановках [Payne, 1971; Daganzo, 1995; Papageorgiou, 1998; Aw, Rascle, 2000; Zhang, 2002; Zhang, 2003; Siebel, Mauser, 2006], в которых уже не предполагается однозначной зависимости скорости потока от его плотности. Несмотря на элементарность, модель LWR [Lighthill, Whitham, 1955; Richards, 1956] достаточно популярна в прикладных расчетах. Во многом это связано с недостаточным объемом имеющихся данных, для использования моделей более высокого уровня, поскольку поправки, привносимые более точными моделями, нивелируются неточностью данных.

Несмотря на то, что с момента появления первых фундаментальных работ прошло более полувека, по мнению ряда известных специалистов в области математического моделирования дорожного движения, проблема образования предзаторных и заторных ситуаций еще до конца не изучена [Гасников и др, 2013]. В теории трех фаз транспортного потока, предложенной Кернером [Kerner, 2009], разделение на свободный и плотный поток точно такое же, как и в классических теориях Лайтхилла-Уизема [Lighthill, Whitham, 1955; Richards, 1956] и Дженерал Моторс [Gazis, 1974]. Фундаментальное отличие теории Б.С. Кернера состоит в том, что он выделяет две отдельные фазы в плотном потоке на основе общих эмпирических свойств транспортного потока, которые за все годы измерений остаются одни и те же на разных автодорогах мира. Определение всех трех фаз транспортного потока Кернером основано на эмпирических данных, которые наблюдаются на скоростных магистралях.

Характерным атрибутом многих современных работ, в которых предлагаются новые математические модели транспортного потока [Siebel, Mauser, 2006], является проверка предложенных моделей на возможность описания ими трех фаз Кернера транспортного потока [Kerner, 2009], наблюдаемых в многочисленных эмпирических (измеренных) данных. Данная проверка является хорошим тестом на работоспособность разрабатываемых моделей.

На сегодняшний день формат данных о поведении транспортной системы в виде собранных GPS-треков автомобилей вместе с данными, полученными с транспортных детекторов, позволяет контролировать и корректировать параметры, разрабатываемых моделей и их ключевых свойств. Собирая данные о движении трафика, можно получать количественные оценки и одновременно корректировать параметры используемой модели на исследуемом графе транспортной сети. Тем не менее, стоит отметить, что такой способ крайне чувствительный к точности (полноте) собираемых данных.

3.1 Входные данные транспортных потоков

Начнем с детекторов транспорта, обычно используемых для калибровки любой транспортной математической модели, а по сути идентификации фундаментальных диаграмм (зависимостей интенсивности транспортного потока [АТС/с] от его плотности [АТС/м], вместо термина “автомобиль” и, тем более, “машина” в транспортной литературе принято использовать АТС) для всех ребер (дорог) графа транспортной сети. Эта работа является, как правило, весьма затратной по времени, так как не существует универсальных алгоритмов, автоматически обрабатывающих данные с детекторов транспорта, необходимых для выполнения этой задачи. Например, популярный метод линейной регрессии (см., например, [Wang et al., 2011]) неточно аппроксимирует данные в заторных областях фундаментальной диаграммы из-за малого количества наблюдений в них. Именно поэтому важно создать такой алгоритм, поскольку обрабатывать данные вручную при том, что на сегодняшний день в одной только Москве установлено более 3000 детекторов транспорта, не представляется возможным.

Данные измерений с автострадных датчиков позволяют идентифицировать фундаментальные диаграммы – зависимостей интенсивности транспортного потока от его плотности для соответствующих участков автострады. Дадим описание алгоритма калибровки:

1. Для каждого надёжного детектора транспорта извлечём данные измерений плотности (количество АТС на единицу длины дороги) и интенсивности потока (количество АТС, проходящих в единицу времени через заданное сечение) на заданном участке дороги за наблюдаемый временной интервал. Каждая точка на плоскости $Q(\rho)$ задается парой значений плотность – интенсивность транспортного потока, (см. например Рис. 3.1);

2. Фильтруем данные, удаляя их экстремальные значения с помощью алгоритма построения альфа-оболочек [Edelsbrunner et. al., 1983, Eddie, 1982]. Начинаем с того, что масштабируем данные вдоль осей Q и ρ с линейным коэффициентом $Q/\rho = 6,7$, так чтобы они имели те же порядки величин. Затем, по оставшимся

точкам строим альфа-оболочку [Edelsbrunner et. al., 1983, Eddie, 1982] и удаляем те точки, которые попали на нее. Повторяем процедуру до тех пор, пока текущая разница в площади альфа-оболочек между последними итерациями станет меньше 5%. После этого мы делаем обратную операцию и возвращаемся к исходным величинам Q и ρ (Рис. 3.1 - нижние графики);

3. Среди измерений найдём максимальный поток $Q_1(\rho_1) = \max_{\rho} [Q(\rho)]$ и его плотность ρ_1 , которая является критической, поскольку при значениях плотности больше ρ_1 интенсивность транспортного потока начинает уменьшаться;

4. Для промежуточных значений плотности $\rho \in [\frac{3}{8}\rho_1, \frac{5}{8}\rho_1]$ находим максимальное значение интенсивности $(\rho_0, Q_0) = \operatorname{argmax}_{\rho \in [\frac{3}{8}\rho_1, \frac{5}{8}\rho_1]} Q$. Эта точка позволит провести параболу, соответствующую свободной фазе движения транспортного потока;

5. Далее на плоскости $Q(\rho)$ найдём точку, максимально удаленную от начала координат: $Q_2(\rho_2) = \max \sqrt{\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{\rho_{max}}\right)^2}$;

6. Зная количество полос дороги, определим максимально возможную плотность ρ_* , как произведение количества дорожных полос на значение 0.145 АТС/м. Известна стандартная оценка, что при количестве АТС больше чем 145 на один километр однополосной дороги автомобильное движение становится невозможным: $\rho_* = 0.145$ [АТС/м];

7. Далее переходим к получению функциональной зависимости интенсивности транспортного потока от его плотности $Q(\rho)$.

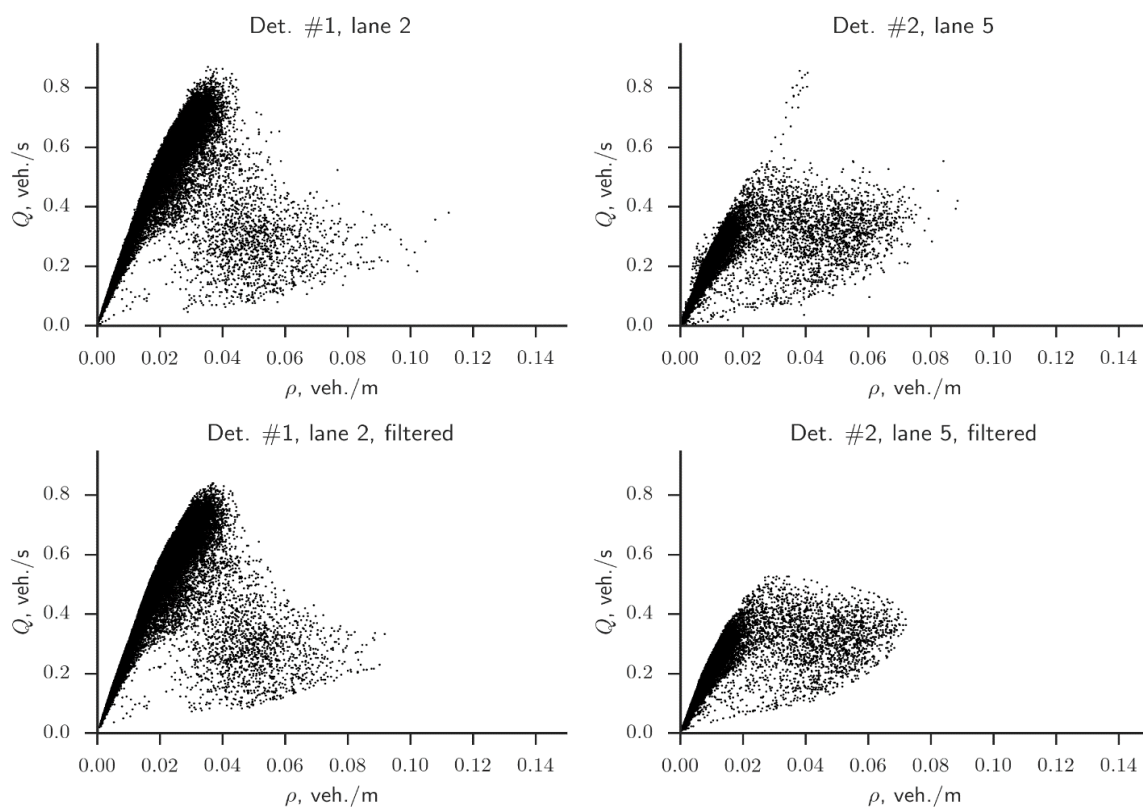


Рис. 3.1. Экспериментальные данные с двух детекторов, установленных на различных полосах МКАД — замеренные интенсивности транспортного потока $Q(\rho)$ [АТС/с] при различной плотности [АТС/м]. Данные представлены за 2012 г. в количестве 288 измерений за день. Сверху исходные данные, снизу отфильтрованные.

В соответствии с теорией трех фаз транспортного потока Б.С. Кернера на скоростных автомагистралях [Kerner, 2009] выделяем три фазы транспортного потока:

1. Свободный поток - $Q(0 \leq \rho < \rho_1)$;
2. Синхронизованный поток - $Q(\rho_1 \leq \rho < \rho_2)$;
3. Заторный поток - $Q(\rho_2 \leq \rho \leq \rho_*)$.

Для каждой из фаз транспортного потока задаем её собственную функциональную зависимость $Q(\rho)$, сшивая их в точках фазового перехода:

1. Свободный поток - $Q(\rho) = \alpha_2 \rho^2 + \alpha_1 \rho, \quad 0 \leq \rho < \rho_1$;
2. Синхронизованный поток - $Q(\rho) = \beta_2 \rho^2 + \beta_1 \rho + \beta_0, \quad \rho_1 \leq \rho < \rho_2$;
3. Заторный поток - $Q(\rho) = c_*(\rho_* - \rho), \quad \rho_2 \leq \rho \leq \rho_*$.

Коэффициенты функциональных зависимостей находим, приравнивая значения функций в найденных точках к значениям интенсивностей в них, в результате получаем следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 \rho_0^2 + \alpha_1 \rho_0 = Q(\rho_0), \\ \alpha_2 \rho_1^2 + \alpha_1 \rho_1 = Q(\rho_1), \\ \beta_2 \rho_1^2 + \beta_1 \rho_1 + \beta_0 = Q(\rho_1), \\ \beta_2 \rho_2^2 + \beta_1 \rho_2 + \beta_0 = Q(\rho_2), \\ 2\beta_2 \rho_1 + \beta_1 = c_1 = \left. \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_1}, \\ c_*(\rho_* - \rho_2) = Q(\rho_2), \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{4Q_0 - Q_1}{\rho_1}, \quad \alpha_2 = 2 \frac{Q_1 - 2Q_0}{\rho_1^2}, \\ \beta_0 = \frac{\rho_1^2 Q_2 + \rho_2 (c_1 \rho_1 (\rho_1 - \rho_2) + (\rho_2 - 2\rho_1) Q_1)}{(\rho_1 - \rho_2)^2}, \\ \beta_1 = \frac{c_1 \rho_2^2 - \rho_1 (c_1 \rho_1 - 2Q_1 + 2Q_2)}{(\rho_1 - \rho_2)^2}, \\ \beta_2 = \frac{c_1 (\rho_1 - \rho_2) - Q_1 + Q_2}{(\rho_1 - \rho_2)^2}, \quad c_* = \frac{Q_2}{\rho_* - \rho_2}. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Осталось только понять, чему будет равна производная функции интенсивности после прохождения критической точки: $c_1 = \left. \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_1}$ в (3.1)? Из наблюдений за дорожным трафиком мы знаем, что интенсивность транспортного потока после прохождения критической точки заметно падает. Это означает, что поток начинает тормозиться, поэтому логично предположить, что c_1 есть скорость волны торможения. Её можно найти, построив пространственно-временную диаграмму суточных значений скорости транспортного потока для исследуемой автомагистрали (см. Рис. 3.2).

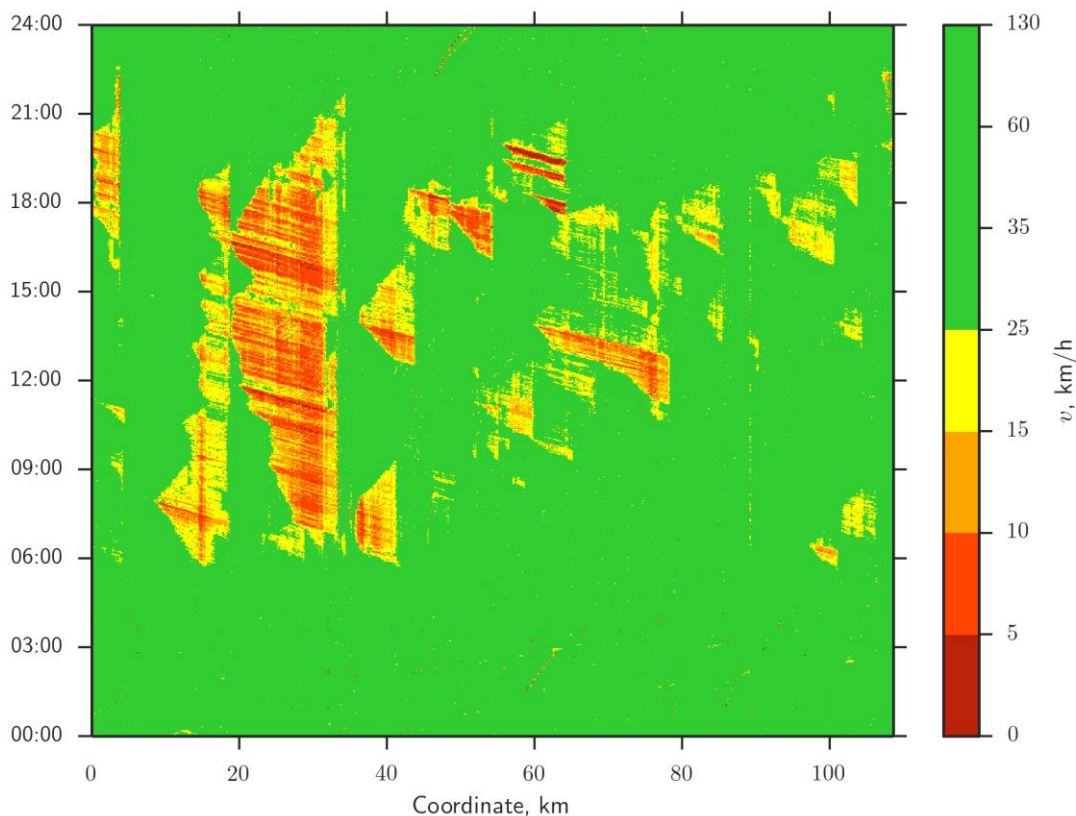


Рис. 3.2. Пространственно-временная диаграмма суточных значений скорости транспортного потока на внешней стороне МКАД за 5 декабря 2012 г.

На Рис. 3.2. показана диаграмма суточных значений скорости транспортного потока, построенная по данным обезличенных GPS треков пользователей сервиса Яндекс-пробки за 5 декабря 2012 г. На диаграмме хорошо видны красные линии движения волн торможения навстречу транспортному потоку. Наклон этих линий, которые остаются параллельными, дает нам значение скорости движения волны торможения c_1 навстречу потоку.

Следующая проблема, которую необходимо решить – это автоматизация нахождения значений скорости волн торможения по диаграмме скоростей для выбранного участка дороги. Эта задача была решена с использованием алгоритмов компьютерного зрения [Bradski, 2000] в три этапа (см. Рис. 3.3):

1. Этап – выделение границ методом Кэнни [Canny, 1986], когда границами назначаются те пиксели, где достигается локальный максимум в направлении

вектора градиента. [Canny, 1986] – Рис. 3.3 (слева). Метод Кэнни [Canny, 1986] можно разбить на несколько стадий:

- а) Фильтрация – из данных удаляется шум при помощи гауссова размытия.
- б) Вычисление градиента – для каждой точки на диаграмме находим ее направление и значение градиента яркости (в нашем случае – скорости).
- в) Подавление не-максимумов – значение в каждой точке сравнивается со значениями двух ближайших к ней в направлении возрастания и убывания градиента яркости; если хоть в одной из этих двух точек значение градиента больше, чем в исследуемой точке, то в этой точке значение градиента обнуляется.
- г) Отсечение по двум границам – разделяем точки на три типа: ниже грани (значение градиента на них меньше нижней границы), «слабая» грань (значение градиента в этих точках находится между нижней и верхней границей), и «сильная» грань (значение градиента в точках лежит выше верхней границы); точки, отнесенные к «сильной» грани, считаются лежащими на границе, и удаляются из дальнейшего анализа.
- д) Классификация «слабых» граней – если среди 8 точек, соседних с точкой, классифицированной как «слабая» грань, есть хотя бы одна «сильная» грань, то рассматриваемая точка классифицируется как лежащая на границе, в противном случае она отбрасывается.

2. Поиск отрезков среди выделенных границ методом Хафа [Matas, 2000] – Рис. 3.3 (центр). К двумерному бинарному массиву $A(x, t) = \{1, \text{если на предыдущем шаге мы решили, что точка } (x, t) \text{ лежит на границе, и } 0 \text{ иначе}\}$ применяется преобразование Хафа: $H(r, \theta) = \sum_{x,y: |r-x \cos \theta - y \sin \theta| < \epsilon} A(x, y)$, где r и θ берутся с некоторым шагом, также влияющим на используемое значение ϵ . Таким образом, полученный массив $H(r, \theta)$ содержит количество граничных точек, лежащих на прямой с параметрами (r, θ) . Это задает нам прямые, на которых лежит большое

число граничных точек, и затем, определяя связанность таких точек, выделяем отрезки, соответствующие движению фронтов волн.

3. Отсевивание ложных линий: сначала мы определяем все точки со скоростью $v < 10$ км/ч и сегментируем их; затем мы оставляем только те сегменты, которые имеют более 65% точек со скоростью $v < 10$ км/ч и при этом менее 65% таких точек в ближайшем окружении; поскольку именно эти сегменты будут представлять собой фронты волн торможения— Рис. 3.3 (справа).

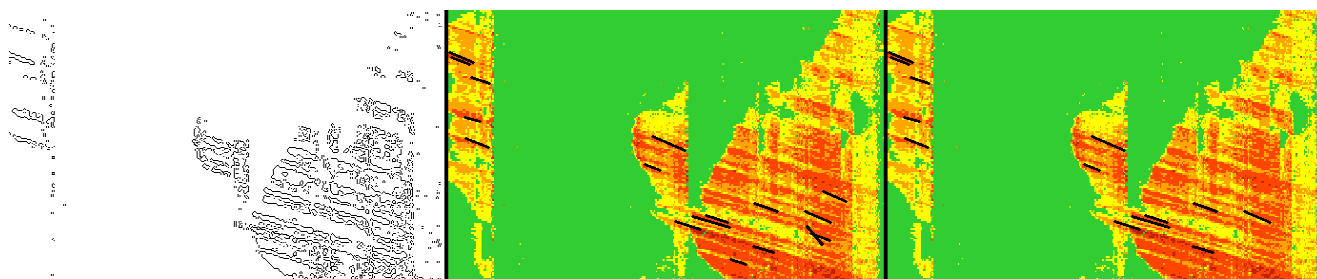


Рис. 3.3. Нахождение значений скорости волн торможения на пространственно-временной структуре значений скорости транспортного потока на внешней стороне МКАД: выделение границ методом Кэнни [Canny, 1986] (слева); Поиск отрезков среди выделенных границ методом Хафа [Matas, 2000] (центр); отсеивание ложных линий (справа).

Как результат этой работы, была получена гистограмма значений скоростей волны торможения транспортного потока на внешней стороне МКАД (Рис. 3.4) за 2012 г.

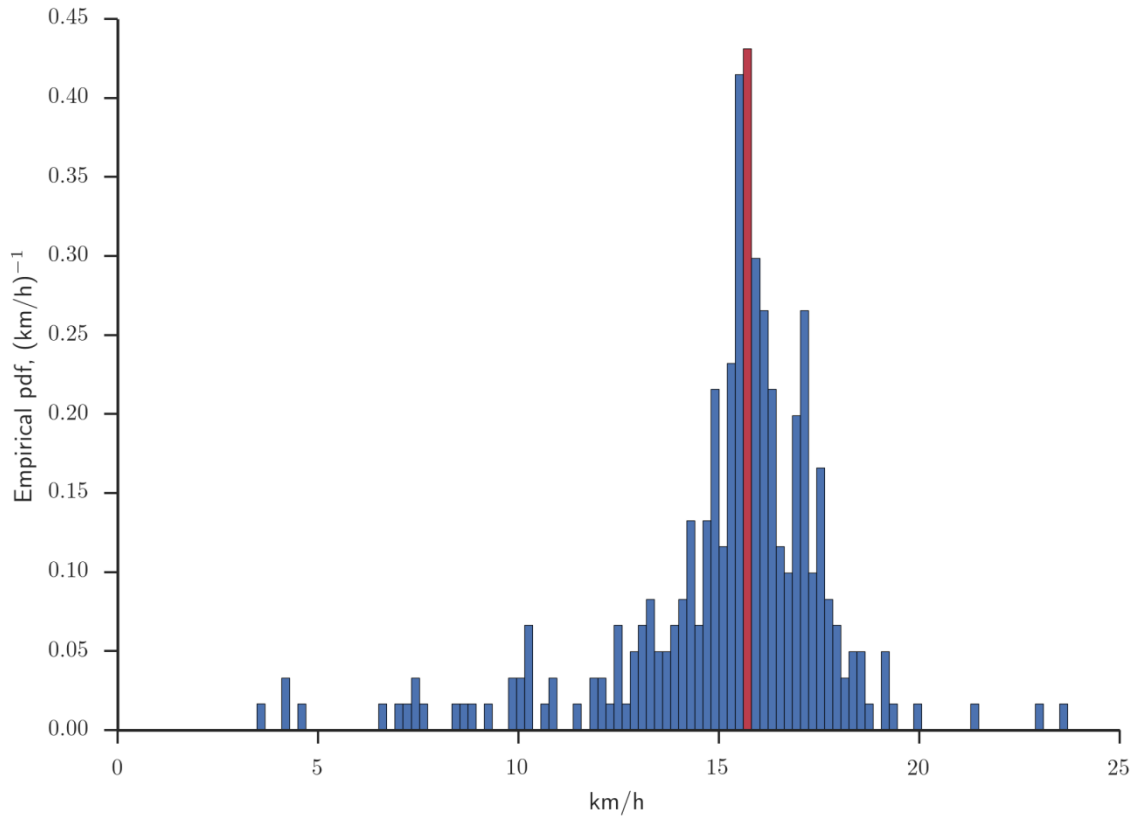


Рис. 3.4. Гистограмма значений скоростей волны торможения транспортного потока на МКАД за 2012 г.

Отсеяв ложные значения, мы установили, что скорость волны торможения на МКАД $c_1 = \left. \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_1} \approx 15.8$ [км/ч], также мы выяснили, что она не зависит от времени года, дня недели и определяется исключительно геометрией дороги. Стоит отдельно отметить, что по своей величине скорость волны торможения на МКАД совпадает с характеристической средней скоростью «заднего фронта широкого движущегося кластера» в терминологии Кернера [Kerner, 2009].

Для транспортных данных (Рис. 3.1) с детекторов, представленных на Рис. 3.5, получим значения параметров для калибровки фундаментальных диаграмм ($c_1 = 4.4$ [м/с], $\rho_* = 0.145$ [Атс/м]):

- детектор № 1: $Q_1 = \max_{\rho}[Q(\rho)] = 0.84 \text{ АТC/с}$, $\rho_1 = 0.037 \text{ АТC/м}$,

$$Q_2 = \max \sqrt{\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)^2} = Q_1 = 0.84 \text{ АТC/с}, \rho_2 = \rho_1 = 0.037 \text{ АТC/м}, c_* \approx 7.8$$

[м/с];

- детектор № 2: $Q_1 = \max_{\rho}[Q(\rho)] = 0.59 \text{ АТC/с}$, $\rho_1 = 0.034 \text{ АТC/м}$,

$$Q_2 = \max \sqrt{\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)^2} = 0.44 \text{ АТC/с}, \rho_2 = 0.076 \text{ АТC/м}, c_* \approx 6.4 \text{ [м/с];}$$

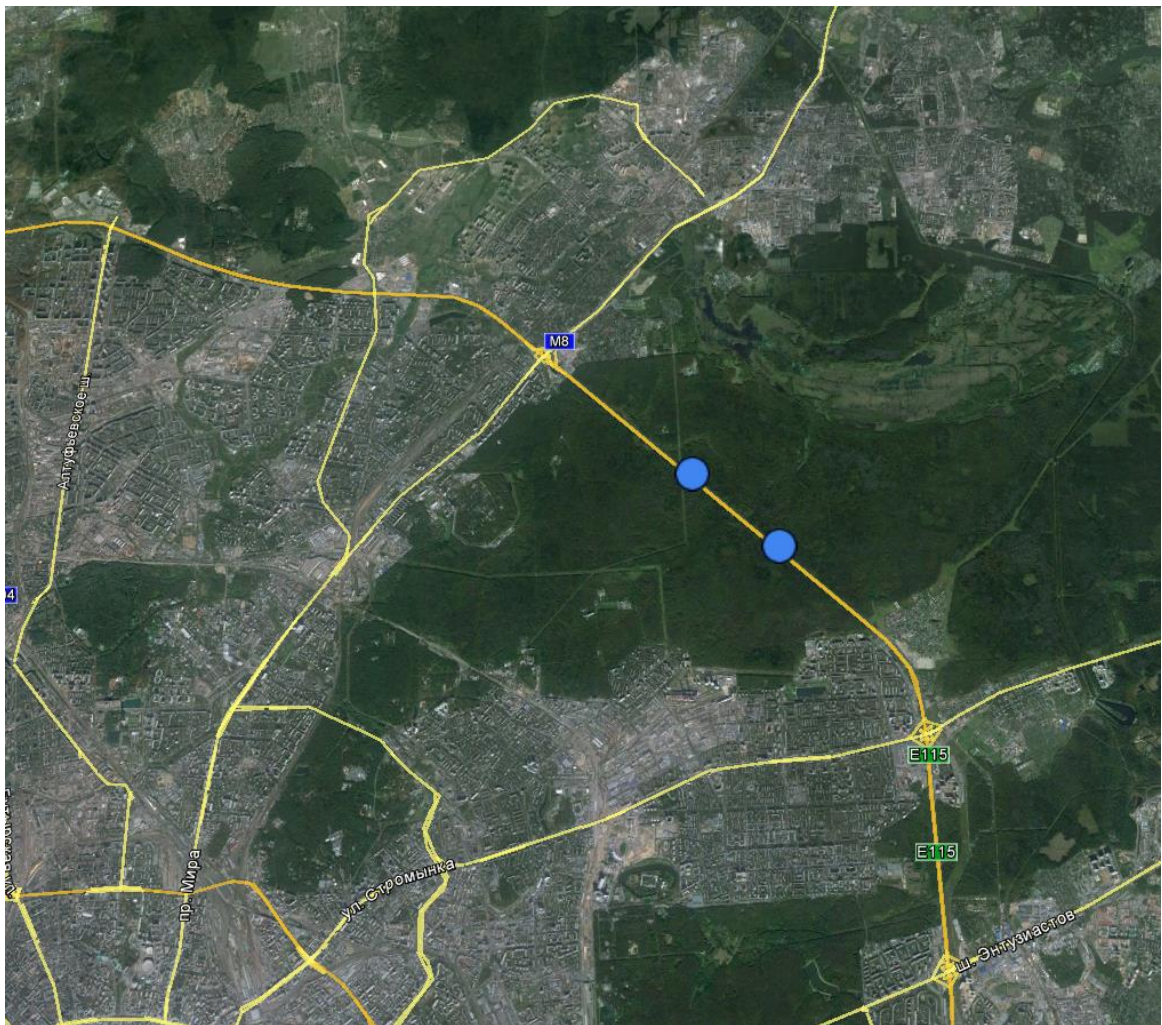


Рис. 3.5. Взаимное расположение двух исследуемых детекторов на МКАД.

Полученные фундаментальные диаграммы для найденных параметров представлены на Рис. 3.6. Как мы видим, на второй диаграмме отсутствует фаза синхронизованного потока, которая имеет место в первом случае. Присутствие или

отсутствие фазы синхронизованного потока на фундаментальной диаграмме обычно определяется количеством перестроений водителей, едущих по измеряемой полосе дороги. В данном случае (Рис. 3.6) отсутствие фазы синхронизованного потока для второй полосы МКАД легко объяснить. По ней едет в основном грузовой транспорт или водители, предпочитающие спокойную манеру вождения. Они перестраиваются довольно редко, тем более что на этом участке МКАД (см. Рис. 3.5) нет поблизости въездов и выездов. А вот в пятой (самой левой полосе), наоборот, едут водители, предпочитающие активный стиль вождения. Поэтому в ней происходит много перестроений, которые приводят к образованию синхронизованной фазы при возрастании плотности потока.

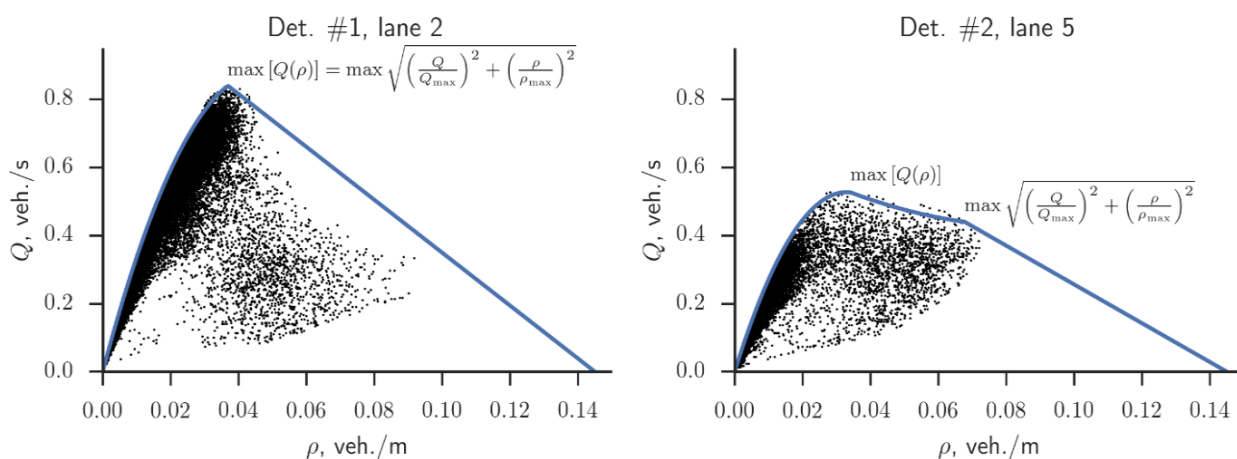


Рис. 3.6. Фундаментальные диаграммы для двух разных участков МКАД. Слева для данных со второй полосы (детектор № 1), справа с пятой полосы (детектор №2).

Построим также диаграммы зависимости оптимальной скорости $V(\rho) = \frac{Q(\rho)}{\rho}$ от плотности для выбранных участков МКАД. Зависимость оптимальной скорости от плотности найдем с использованием всех фаз фундаментальной диаграммы $Q(\rho)$:

1. Свободный поток - $V(\rho) = \alpha_2 \rho + \alpha_1, \quad 0 \leq \rho < \rho_1;$
2. Синхронизованный поток - $V(\rho) = \beta_2 \rho + \beta_1 + \frac{\beta_0}{\rho}, \quad \rho_1 \leq \rho < \rho_2; \quad (3.2)$
3. Заторный поток - $V(\rho) = c_* \left(\frac{\rho_*}{\rho} - 1 \right), \quad \rho_2 \leq \rho \leq \rho_*.$

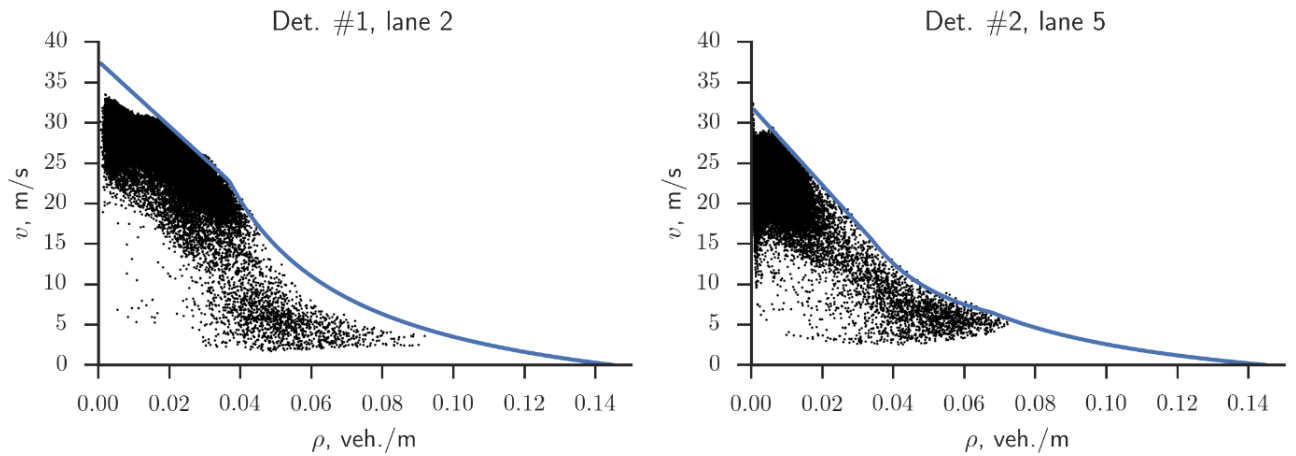


Рис. 3.7. Диаграммы зависимости оптимальной скорости $V(\rho) = \frac{Q(\rho)}{\rho}$ от плотности для двух разных участков МКАД. Слева для данных со второй полосы (детектор № 1), справа с пятой полосы (детектор №2).

Следующий вопрос, который следует обсудить, что делать, в случае если данных измерений, полученных с детекторов транспорта, недостаточно для построения фундаментальной диаграммы во всем диапазоне значений плотности транспортного потока $0 < \rho < \rho_*$. В качестве примера рассмотрим данные, полученные с детектора транспорта, установленного на трехполосном Мамадышском тракте возле города Казань (см. Рис. 3.8).

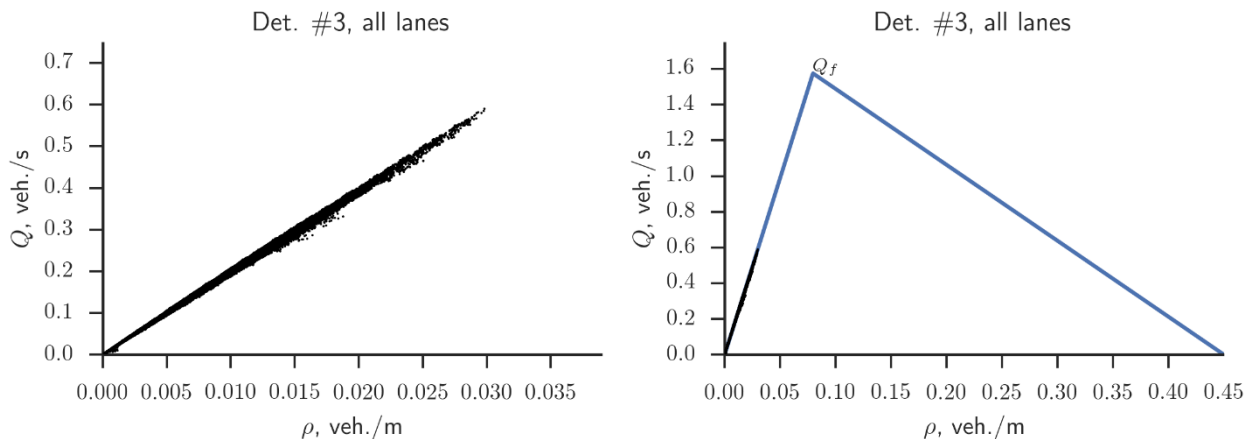


Рис. 3.8. Экспериментальные данные для участка Мамадышского тракта из трех полос — замеренные интенсивности транспортного потока $Q(\rho)$ [АТС/с] при различной плотности [АТС/м]. Данные представлены за февраль-сентябрь 2014 г. В количестве 288 измерений за день. Слева исходные данные, справа фундаментальная диаграмма, построенная по этим данным.

Как видно из Рис. 3.8 (левая часть), данных недостаточно чтобы покрыть всю область значений плотности: $0 \leq \rho \leq \rho_* = 0.45$. Поэтому нам надо оценить каким может быть значение максимальной интенсивности транспортного потока. Будем исходить из того, что поток насыщения $Q_f = \max_{\rho} [Q(\rho)] = 0.525 \times 3 = 1.575$ [Атс/с], (на практике принимается от 1800 до 2000 АТС/час на полосу). Далее переходим к построению фундаментальной диаграммы:

1. Среди измерений найдём наибольшее значение потока $Q_1(\rho_1) = \max_{\rho} [Q(\rho)]$ и его плотность ρ_1 , которая в данном случае уже не будет является критической;

2. Находим максимальное значение интенсивности $(\rho_0, Q_0) = \operatorname{argmax}_{\rho \in [\frac{3}{8}\rho_1, \frac{5}{8}\rho_1]} Q$ для промежуточных значений плотности на участке свободного движения $\rho \in [\frac{3}{8}\rho_1, \frac{5}{8}\rho_1]$.

3. Коэффициенты функциональных зависимости свободного потока $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ находим, приравнивая значения функций в найденных точках к значениям интенсивностей в них:

$$\begin{cases} \alpha_2 \rho_0^2 + \alpha_1 \rho_0 = Q(\rho_0) \\ \alpha_2 \rho_1^2 + \alpha_1 \rho_1 = Q(\rho_1) \end{cases}.$$

4. Находим значение критической плотности ρ_f для потока насыщения Q_f , решая уравнение: $\alpha_2 \rho_f^2 + \alpha_1 \rho_f = Q_f$.

5. Находим значение скорости волны торможения c_f из соотношения: $c_f = \frac{Q_f}{(\rho_* - \rho_f)}$.

6. Получаем окончательный вид функциональной зависимости интенсивности транспортного потока от его плотности $Q(\rho)$ для двух фаз транспортного потока - свободной $Q(\rho) = \alpha_2 \rho^2 + \alpha_1 \rho$, ($0 \leq \rho < \rho_f$) и заторной $Q(\rho) = c_f(\rho_f - \rho)$, ($\rho_f \leq \rho \leq \rho_*$) (см. Рис. 3.8, правая часть).

Так как, согласно эмпирическим данным, заторная фаза наблюдается редко, то подобная грубая оценка фундаментальной диаграммы для неё не должна оказать существенного влияния на точность моделирования. Синхронизованную фазу мы здесь не учитываем.

3.2 Микроскопические модели транспортных потоков

Пусть АТС в однополосном потоке пронумерованы слева направо. Обозначим через $x_m(t)$ - координату центра m -го АТС в момент времени $t \geq 0$ и положим

$$\Delta x_m(t) = x_{m+1}(t) - x_m(t) = \frac{1}{\rho_m}, \quad v_m(t) = x'_m(t). \quad (3.3)$$

В микроскопической модели Ньюэлла [Newell, 1961] (эта модель была предложена в 1961 г. и является одной из первых нелинейных моделей *оптимальной скорости*) постулируется, что (для каждого водителя существует “безопасная” скорость движения, зависящая от дистанции до лидера)

$$\frac{dx_m}{dt}(t + \tau) = V_m(t + \tau) = V\left(\frac{1}{\Delta x_m(t)}\right) = V(\rho_m) = \frac{Q(\rho_m)}{\rho_m}, \quad (3.4)$$

где τ - время, характеризующее реакцию водителей, ρ_m - плотность транспортного потока в координате $x_m(t)$ и $\frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} < 0$.

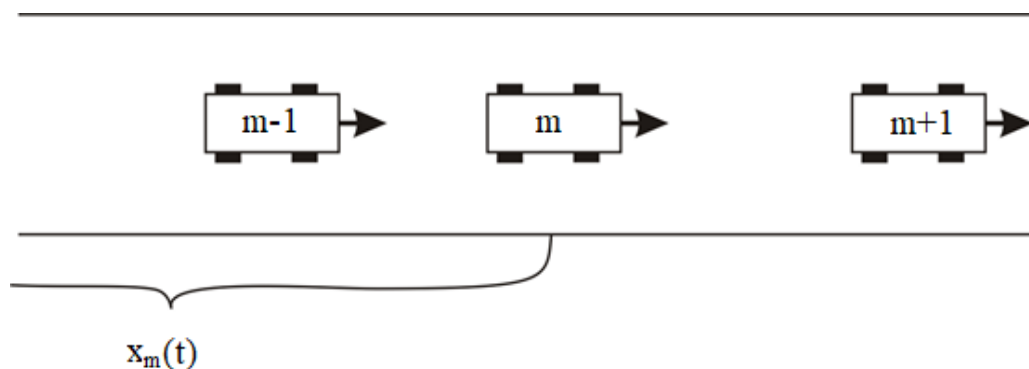


Рис. 3.9. Микроскопическое представление транспортного потока.

Заметим, что по зависимости интенсивности потока $Q(\rho) = \rho V(\rho)$ от плотности ρ в окрестности ρ_{max} (максимально возможное значение плотности также часто обозначается, как ρ_*) можно определить τ , если известна средняя длина АТС

$L \sim 6$ м. Действительно, путь, пройденный АТС за время τ , $S(\tau) = V(\rho_m)\tau$ не должен превышать расстояния до впереди идущего АТС: $\frac{1}{\rho_m} - L$. Тогда скорость потока вблизи точки $\rho \frac{1}{L_{max}}$ можно описать следующим образом: $V(\rho) = \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\rho} - L \right)$. Откуда имеем в левой окрестности точки ρ_{max} : $Q(\rho) = -\frac{L}{\tau} (\rho - \rho_{max})$. Иногда в этих формулах вместо средней длины АТС: L фигурирует среднее расстояние между соседними АТС в заторе $d \sim 7,5$ м.

Вернемся к модели (3.4) и вспомним как выражается плотность в ней через координаты центров АТС:

$$\frac{dx_m}{dt}(t + \tau) = \frac{Q(\rho_m)}{\rho_m} = (x_{m+1}(t) - x_m(t))Q(\Delta x_m(t)). \quad (3.5)$$

Из (3.5) видно, что даже в самом простейшем случае, когда у нас всего две машины, едущие по кругу длины S с начальными координатами $x_1(0) = X_1$, $x_2(0) = X_2$ и линейная зависимость интенсивности от плотности $Q_3(\rho) = c_*(\rho_* - \rho)$, возникает система из двух дифференциальных уравнений $\left(\frac{dx_m}{dt}(t + \tau) = \frac{Q_3(\rho_m)}{\rho_m} = \frac{c_*}{\rho_m} (\rho_* - \rho_m) = c_*\rho_*(x_{m+1}(t) - x_m(t)) - c_* \right)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt}(t + \tau) = c_*\rho_*(x_2(t) - x_1(t)) - c_*, \\ \frac{dx_2}{dt}(t + \tau) = c_*\rho_*(S - (x_2(t) - x_1(t))) - c_*, \\ x_1(t) = X_1, \quad x_2(0) = X_2, \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t + \tau) = \frac{1}{4} e^{-2c_* \rho_* t} \left(S(-e^{2c_* \rho_* t}) + 2c_* \rho_* Ste^{2c_* \rho_* t} - 4c_* te^{2c_* \rho_* t} + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + 2X_1 e^{2c_* \rho_* t} + 2X_2 e^{2c_* \rho_* t} + S + 2X_1 - 2X_2 \right), \\ x_2(t + \tau) = \frac{1}{4} e^{-2c_* \rho_* t} \left(Se^{2c_* \rho_* t} + 2c_* \rho_* Ste^{2c_* \rho_* t} - 4c_* te^{2c_* \rho_* t} + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + 2X_1 e^{2c_* \rho_* t} + 2X_2 e^{2c_* \rho_* t} - S - 2X_1 + 2X_2 \right), \end{array} \right.$$

которая имеет довольно громоздкое аналитическое решение.

В случае нелинейной зависимости интенсивности от плотности: $\frac{Q_1(\rho)}{\rho} = \alpha_2 \rho + \alpha_1 = \frac{\alpha_2}{x_{n+1}(t) - x_n(t)} + \alpha_1$ аналитического решения системы уравнений (3.5) уже не существует и его можно найти только численно.

На самом деле решение можно искать проще. На небольшом интервале времени Δt , будем считать скорость $V_m(t) = V(\rho_m) = \frac{Q(\rho_m)}{\rho_m}$ постоянной. Тогда система уравнений (3.5) распадется на m независимых уравнений для каждой из АТС с известным аналитическим решением:

$$x_m(t + \Delta t + \tau) = \Delta t V_m(t) + x_m(t). \quad (3.6)$$

Оценить шаг по времени Δt можно исходя из предположения о том, что за это время любая из АТС на дороге не врежется в предыдущую, если та внезапно остановиться:

$$\Delta t = \min_m \left\{ \frac{x_{m+1}(t) - x_m(t)}{V_m(t)} \right\}. \quad (3.7)$$

Дальше все операции повторяются по циклу. Для новых значений координат АТС: $x_m(t + \Delta t + \tau)$ находим их скорости V_m из фундаментальной диаграммы, оцениваем величину временного шага Δt и выполняем интегрирование уравнений (3.6).

Другим важным классом микроскопических моделей (наряду с моделями оптимальной скорости) являются модель *следования за лидером*. В 1959 г. сотрудники

концерна Дженерал Моторс Д. Газис, Р. Херман, Р. Потс [Gazis et.al., 1959] предложили одну из первых нетривиальных микроскопических моделей однополосного транспортного потока (обозначения те же, что и выше). Простейшим вариантом предложенной модели является:

$$x_m''(t+\tau) = \alpha \frac{x_{m+1}'(t) - x_m'(t)}{x_{m+1}(t) - x_m(t)}, \Leftrightarrow \begin{cases} x_m'(t) = v_m(t), \\ v_m'(t+\tau) = \alpha \frac{v_{m+1}(t) - v_m(t)}{x_{m+1}(t) - x_m(t)}, \quad \alpha(\Delta x_m) > 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Ускорение m -го АТС $x_m''(t)$ прямо пропорционально разности скоростей в (3.8): $\Delta v_m(t) = x_{m+1}'(t) - x_m'(t)$, (если $\Delta v_m(t) > 0$, то $x_m''(t) > 0$ и АТС ускоряется; $\Delta v_m(t) < 0$ – тормозиться; $\Delta v_m(t) = 0$ – стационарный режим (ускорение равно нулю)), с коэффициентом обратно пропорциональным расстоянию до впереди идущего АТС: $\Delta x_m(t) = x_{m+1}(t) - x_m(t)$.

Обратим внимание на одно существенное отличие модели следования за лидером (3.8) от модели оптимальной скорости (3.4). В (3.4) предполагается, что все водители едут с оптимальной скоростью $V(\rho)$. Которая может быть получена из фундаментальной диаграммы как $V(\rho) = \frac{Q(\rho)}{\rho}$. Значение скорости каждой АТС, таким образом, зависит только от расстояния $\Delta x_m(t) = x_{m+1}(t) - x_m(t) = \frac{1}{\rho_m}$, что не всегда верно, так как скорость каждого конкретного АТС может меняться в зависимости от предпочтений его водителя. В (3.8) избавились от этого упрощения и ввели реальную скорость АТС, обозначив ее $x_m'(t) = v_m(t)$. Это позволяет учитывать отклонение реальной скорости индивидуального АТС от ее оптимального значения $V(\rho)$, найденного из фундаментальной диаграммы.

Для нахождения зависимости коэффициента $\alpha(\Delta x_m) > 0$ от плотности перепишем (3.8) следующим образом:

$$\frac{dv_m(t)}{dt} = \alpha \frac{d}{dt} \ln \Delta x_m(t).$$

Проинтегрируем это уравнение теперь от t до $t + \Delta t$ (или от ρ до $\rho + \Delta \rho$) и получим

$$v_m(t + \Delta t) - v_m(t) = \alpha \ln \frac{\Delta x_m(t + \Delta t)}{\Delta x_m(t)}.$$

Это позволяет нам получить зависимость коэффициента $\alpha(\Delta x_m) = \alpha(\rho_m)$ от плотности:

$$\begin{aligned} v(\rho + \Delta \rho) - v(\rho) &= \alpha \ln \frac{\rho}{\rho + \Delta \rho}, \Rightarrow \\ v(\rho) + \Delta \rho \frac{\partial v(\rho)}{\partial \rho} - v(\rho) &\approx -\alpha \ln \left(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho} \right), \Rightarrow \\ \Delta \rho \frac{\partial v(\rho)}{\partial \rho} &\approx -\alpha \frac{\Delta \rho}{\rho} \Rightarrow \alpha(\rho) \approx -\rho \frac{\partial v(\rho)}{\partial \rho} > 0. \end{aligned}$$

Зависимость коэффициента $\alpha(\rho)$ от плотности позволяет учитывать в (3.8) характерные особенности соответствующего участка дороги и повышает предсказательную точность модели.

Аналитический вид зависимости коэффициента $\alpha(\rho) \approx -\rho \frac{\partial v(\rho)}{\partial \rho} \approx -\rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}$ от плотности для заданного участка дороги можно получить из фундаментальной диаграммы с использованием найденной нами зависимости оптимальной скорости $V(\rho) = \frac{Q(\rho)}{\rho}$ от плотности:

1. Свободный поток - $\alpha(\rho) = -\alpha_2 \rho, \quad 0 \leq \rho < \rho_1;$
2. Синхронизованный поток - $\alpha(\rho) = \frac{\beta_0}{\rho} - \beta_2 \rho, \quad \rho_1 \leq \rho < \rho_2;$ (3.9)
3. Заторный поток - $\alpha(\rho) = \frac{c_* \rho_*}{\rho}, \quad \rho_2 \leq \rho \leq \rho_*.$

Далее решаем систему уравнений (3.8) рекуррентно так же, как и в предыдущем случае. Оцениваем шаг интегрирования по времени: $\Delta t = \min_m \left\{ \frac{\Delta x_m(t)}{v_m(t)} \right\}$ и получаем решение (3.8) в момент времени $t + \Delta t + \tau$ в известном аналитическом виде:

$$\begin{cases} v_m(t + \Delta t + \tau) = v_m(t) + \Delta t \alpha_m \frac{(v_{m+1}(t) - v_m(t))}{\Delta x_m(t)}, \\ x_m(t + \Delta t + \tau) = x_m(t) + \Delta t v_m(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \alpha_m \frac{(v_{m+1}(t) - v_m(t))}{\Delta x_m(t)}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Отдельно стоит упомянуть ситуацию, когда автомобиль движется по дороге и перед ним уже нет другого автомобиля (лидера) до самого конца моделируемой дороги. В этом случае мы полагаем ускорение автомобиля в (3.8) $v_m'(t + \tau) = 0$:

$$\begin{cases} x_m'(t) = v_m(t) \\ v_m'(t + \tau) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_m(t + \Delta t + \tau) = v_m(t) \\ x_m(t + \Delta t + \tau) = x_m(t) + \Delta t v_m(t) \end{cases}$$

Модели оптимальной скорости и следования за лидером можно объединить в одну общую микроскопическую модель *разумного водителя* (Intelligent Driver Model (IDM)):

$$x_m''(t) = F(x_{m+1}(t) - x_m(t), x_{m+1}'(t) - x_m'(t), x_m'(t)).$$

Как показали численные эксперименты, наиболее “удачной” моделью этого класса является модель Трайбера [Treiber et. al., 2000]:

$$\begin{cases} x_m'(t) = v_m(t), \\ v_m'(t) = a_m \cdot \left[1 - \left(\frac{v_m(t)}{V_0} \right)^\delta - \left(\frac{d_m(v_m(t), \Delta v_m(t))}{x_{m+1}(t) - x_m(t)} \right)^2 \right]. \end{cases} \quad (3.11)$$

Первое слагаемое $a_m \left[1 - \left(\frac{v_m(t)}{V_0} \right)^\delta \right]$ в правой части (3.11) описывает динамику ускорения АТС на свободной дороге, в то время как второе слагаемое $-a_m \left(\frac{d_m}{\Delta x_m} \right)^2$ описывает его торможение из-за взаимодействия с лидером (впереди идущим АТС).

Параметр δ отвечает за поведение при разгоне, при $\delta = 1$ имеет место экспоненциальный по времени разгон, в пределе при $\delta \rightarrow \infty$ разгон происходит с постоянным “комфортным” ускорением a_m вплоть до достижения желаемой (максимально допустимой для данного участка дороги) скорости $V_0 \sim 120$ [км/ч]. Тормозящий член определяется отношением *желаемой дистанции* d_m (*безопасным*

расстоянием) к фактической дистанции $\Delta x_m(t) = x_{m+1}(t) - x_m(t)$. Желаемая дистанция определяется следующим образом:

$$d_m(v_m(t), \Delta v_m(t)) = d_* + \tau v_m(t) + \frac{v_m(t)(v_{m+1}(t) - v_m(t))}{2\sqrt{a_m b_m}}, \quad (3.12)$$

где d_* - расстояние между АТС (m -ым и $m + 1$ -ым) в заторе (естественно, что $d_* \geq L$, где $L \sim 6$ м – средняя длина АТС, и действительно, принято считать, что $d_* \sim 7,5$ м), b_m – ускорение “комфортного” торможения ($a_m \sim b_m \sim 2 \frac{M}{c^2}$), τ – время, характеризующее реакцию водителей.

Поясним предложенную для безопасного расстояния формулу. Пока водитель m -ого АТС среагирует на изменение ситуации впереди он проедет путь $\tau v_m(t)$. Потом, “поняв, что надо тормозить” ($v_{m+1}(t) < v_m(t)$), он успеет выровнять свою скорость со скоростью впереди идущего АТС (двигаясь с ускорением торможения b_m) до момента, когда достигнет $m + 1$ -ое АТС, только если расстояние в момент, когда “пришло понимание” между m -ым и $m + 1$ -ым АТС было больше $-\frac{v_m(t)(v_{m+1}(t) - v_m(t))}{2\sqrt{a_m b_m}}$.

Ситуация, когда надо ускориться ($v_{m+1}(t) > v_m(t)$) рассматривается аналогичным образом. Собственно, из-за желания охватить “одной формулой” две довольно разные ситуации (ускорение и торможение) и возник знаменатель $2\sqrt{a_m b_m}$.

Заметим, что в правилах дорожного движения (ПДД) некоторых стран величина безопасного расстояния до впереди едущего АТС достаточно жестко регламентирована. Так, например, в США от водителя требуют увеличивать безопасное расстояние (считается, что впереди идущее АТС имеет ту же скорость) на длину АТС L при увеличении скорости на 5 м/с (т.е. на 18 км/ч). Таким образом получается, что $\tau \sim \frac{6 \frac{M}{c}}{5 \frac{M}{c}} = 1,2$ сек.

В равновесном потоке одинаковых АТС, когда $v'_m(t) \equiv 0$, $v_{m+1}(t) = v_m(t)$ получаем, используя (3.11-3.12), что

$$\begin{cases} d_m(v_m(t), \Delta v_m(t)) = d_* + \tau v_m(t), \\ 1 - \left(\frac{v_m(t)}{V_0}\right)^\delta = \left(\frac{d_m}{\Delta x_m(t)}\right)^2. \end{cases} \quad (3.13)$$

Систему уравнений (3.13) можно свести к одному уравнению для плотности:

$$\rho^2 (d_* + \tau v(\rho))^2 = 1 - \left(\frac{v(\rho)}{V_0}\right)^\delta.$$

Из этого уравнения, считая, что зависимость скорости от плотности должна быть такой же, как и в фундаментальной диаграмме ($v(\rho) = V(\rho)$), можно найти зависимость параметра $\delta(\rho)$ от плотности для каждой из фаз фундаментальной диаграммы (3.19):

$$\delta(\rho) = \frac{\ln\left(1 - \rho^2 (d_* + \tau V(\rho))^2\right)}{\ln(V(\rho)) - \ln V_0}.$$

Например, для фундаментальной диаграммы, представленной справа на Рис. 3.10, зависимость $\delta(\rho)$ показана в левой части рисунка. Из которой хорошо видно, что задавать значение данного параметра постоянным, да еще в интервале значений: $0 \leq \delta(\rho) < \infty$ будет не совсем корректно. Данное несоответствие с приведенными выше оценками видимо объясняется тем, что не следует считать ускорения a_n и b_n постоянными при интегрировании уравнений (3.11).

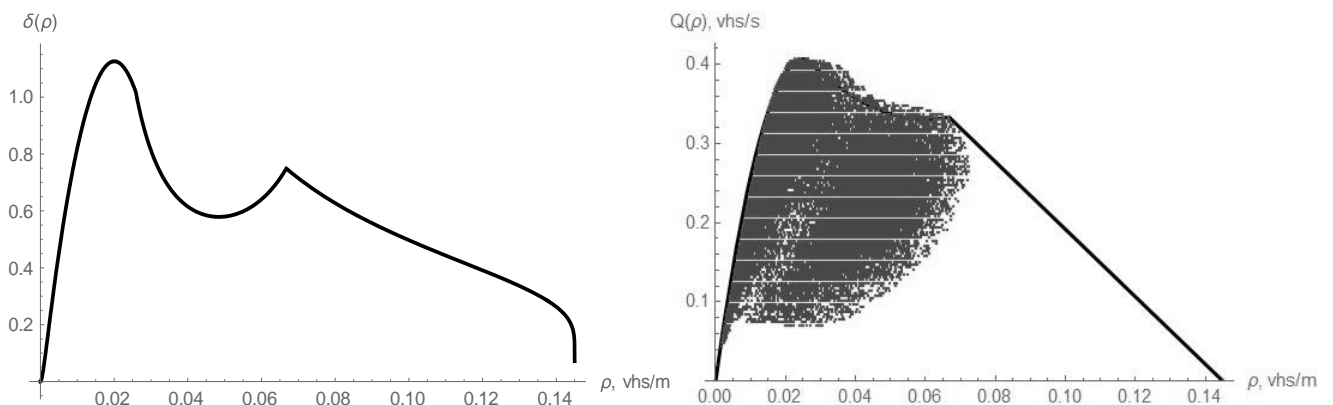


Рис. 3.10. Зависимость параметра $\delta(\rho)$ (слева) для фундаментальной диаграммы $Q(\rho)$, показанной в правой части рисунка.

Систему уравнений (3.11-3.12) решаем по циклу так же, как и в предыдущих двух случаях. Оцениваем шаг интегрирования по времени: $\Delta t = \min_m \left\{ \frac{\Delta x_m}{v_m(t)} \right\}$ и получаем решение в момент времени $t + \Delta t$ в известном аналитическом виде:

$$\begin{cases} d_m(t) = d_* + \tau v_m(t) + \frac{v_m(t)(v_{m+1}(t) - v_m(t))}{2\sqrt{a_m b_m}}, \\ v_m(t + \Delta t) = v_m(t) + \Delta t a_m \cdot \left[1 - \left(\frac{v_m(t)}{V_0} \right)^\delta - \left(\frac{d_m(t)}{\Delta x_m(t)} \right)^2 \right], \\ x_m(t + \Delta t) = x_m(t) + \Delta t v_m(t) + \frac{\Delta t^2}{2} a_m \cdot \left[1 - \left(\frac{v_m(t)}{V_0} \right)^\delta - \left(\frac{d_m(t)}{\Delta x_m(t)} \right)^2 \right]. \end{cases}$$

Последнее, что осталось сделать для замыкания микроскопической модели транспортной сети, это корректно описать автомобильное движение на регулируемом перекрестке произвольной конфигурации, которое мы будем рассматривать с использованием систем уравнений (3.8-3.9).

Модель следования за лидером (3.8) удобна тем, что в отличие от модели разумного водителя (3.11-3.12) в ней присутствует только один дополнительный параметр $\alpha(\rho) = -\rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}$, зависящий от плотности, причем эту зависимость (3.9) можно получить с использованием найденной из фундаментальной диаграммы - оптимальной скорости $V(\rho) = \frac{Q(\rho)}{\rho}$, при этом в (3.8) отсутствует упрощение модели (3.4), что все водители едут с оптимальной скоростью и используют реальные скорости АТС.

Прежде чем перейти к расчету движения автомобилей на перекрестке произвольной конфигурации, рассмотрим в качестве примера перекресток, представленный на Рис. 3.11.

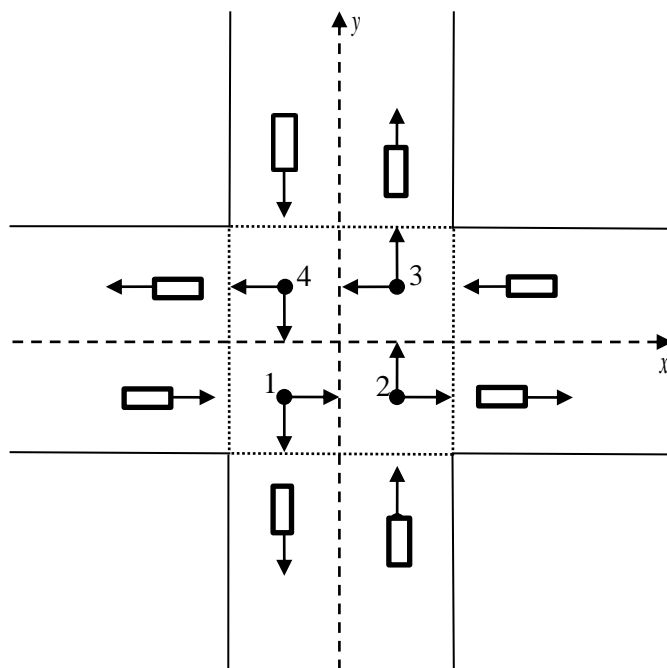


Рис. 3.11. Пример регулируемого перекрестка с двухсторонним движением по каждой из дорог. Разрешенные направления движения на перекрестке показаны стрелками в его четырех секторах с центрами в точках 1-4.

Для заданного перекрестка ограничимся для наглядности двумя светофорными фазами, а именно, когда для одной дороги (идушей вдоль оси x) на Рис. 3.11, горит зеленый свет, а для другой (идушей вдоль оси y) горит красный и наоборот. В силу симметрии перекрестка выбор светофорной фазы для каждой из дорог не принципиален. Считаем, что значения скоростей и координат автомобилей на въездах и выездах с перекрестка в данный момент времени нам известны.

Перекресток, показанный на Рис. 3.11, можно представить в виде комбинации четырех более простых элементов (секторов) (см. Рис. 3.12).

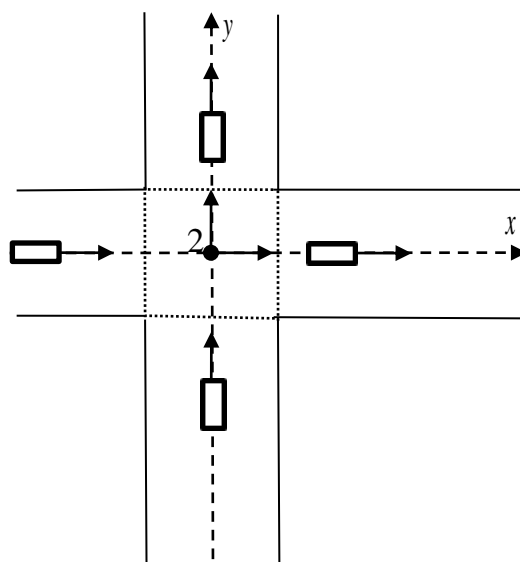


Рис. 3.12. Пример одного из четырех составных элементов регулируемого перекрестка, представленного на Рис. 3.11 (сектор № 2), разрешенные направления движения показаны стрелками.

Движение каждого из автомобилей через центр сектора № 2 можно продолжать рассматривать в одномерной постановке с использованием уравнений (3.8)-(3.9). Все, что нам нужно знать, это геометрические размеры сектора и куда поедет конкретный автомобиль с учетом его маршрута после пересечения им центра сектора. Независимо от того, по какой дороге он дальше поедет, мы лидером для него назначаем ближайший к нему автомобиль, движущийся по той же дороге сразу после выезда из сектора. Главное при этом – правильно рассчитать расстояние Δx_m между ними с учетом того, что они до пересечения сектора находятся на разных дорогах, с каждой из которых связана своя локальная одномерная система координат.

Проблема может возникнуть только в том случае, если автомобиль, движущийся по дороге прямо и другой, поворачивающий на эту же дорогу, одновременно окажутся в центре сектора. Чтобы избежать их столкновения, в этом случае в соответствии с правилами дорожного движения мы должны для поворачивающего автомобиля временно назначить виртуальным лидером с нулевой скоростью центр ближайшего сектора перекрестка, чтобы он мог пропустить автомобиль, едущий прямо. Как только движущийся прямо автомобиль достигает центра сектора, мы

назначаем его лидером для сворачивающего автомобиля вместо виртуального, стоящего в центре сектора.

Если автомобиль приближается к границе сектора и перед ним загорается красный сигнал светофора, причем его текущий лидер уже въехал на перекресток, тогда для него в уравнении (3.8) мы задаем $x_{m+1}(t)$ равной координате ближайшей к нему границе сектора перекрестка, а скорость $x_{m+1}'(t) = v_{m+1}(t) = 0$:

$$\begin{cases} x_m'(t) = v_m(t), \\ v_m'(t + \tau) = -\alpha_m \frac{v_m(t)}{x_{m+1}(t) - x_m(t)}. \end{cases}$$

3.3 Макроскопические модели транспортных потоков

В 1955 г. была предложена, по-видимому, первая макроскопическая (гидродинамическая) модель первого (по количеству уравнений в модели) порядка для однополосного транспортного потока, получившая впоследствии название модели Лайтхилла – Уизема – Ричардса (LWR) [Lighthill, Whitham, 1955; Richards, 1956]. В этой модели поток АТС рассматривается как поток одномерной сжимаемой жидкости. В модели LWR предполагается, что

- существует взаимно-однозначная зависимость между скоростью $v(t, x)$ и плотностью (погонной) $\rho(t, x)$ транспортного потока;
- выполняется закон сохранения количества АТС.

Запись $\rho(t, x)$ – обозначает число АТС на единицу длины в момент времени t в окрестности точки трассы с координатой x . Аналогично, $v(t, x)$ – скорость АТС в момент времени t в окрестности точки трассы с координатой x . Везде в дальнейшем предполагается, что пространственные масштабы, на которых транспортный поток описывается макроскопическими (гидродинамическими) моделями, значительно превышают характерный размер АТС (т.е. составляют не менее сотни метров).

Предположение о взаимно-однозначной зависимости между скоростью $v(t, x)$ и плотностью $\rho(t, x)$ транспортного потока выразим через его

оптимальную скорость: $v(t, x) = V(\rho(t, x))$. Относительно функциональной зависимости $V(\rho)$ также делается следующее предположение: $V'(\rho) < 0$.

Закон сохранения количества АТС представим в интегральной форме для прямоугольного контура, изображенного на Рис. 3.3:

$$\int_a^b \rho(t+\Delta t, x) dx - \int_a^b \rho(t, x) dx = \int_t^{t+\Delta t} Q(\rho(\tau, a)) d\tau - \int_t^{t+\Delta t} Q(\rho(\tau, b)) d\tau, \Rightarrow$$

$$\left(\int_a^b \rho(t+\Delta t, x) dx - \int_a^b \rho(t, x) dx \right) - \left(\int_t^{t+\Delta t} Q(\rho(\tau, a)) d\tau - \int_t^{t+\Delta t} Q(\rho(\tau, b)) d\tau \right) = 0. \quad (3.14)$$

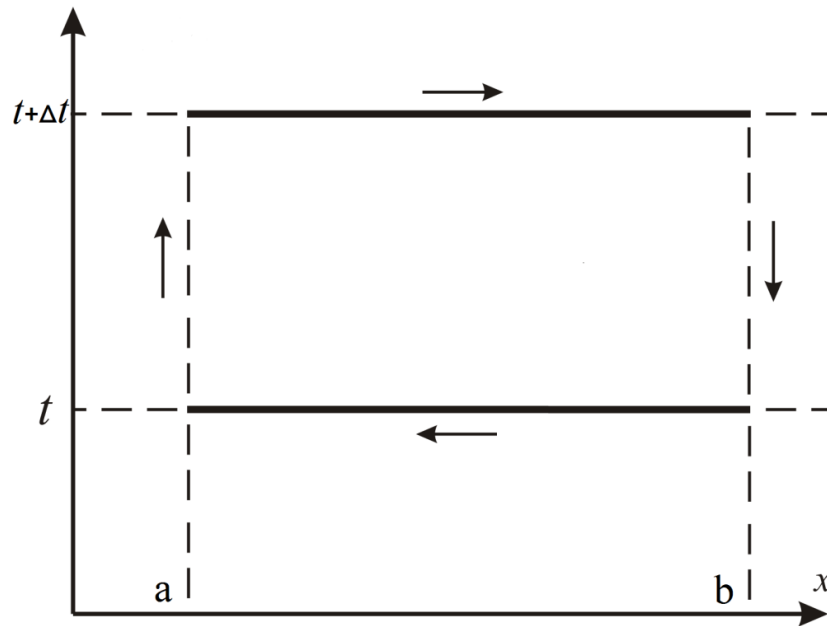


Рис. 3.13. Интегрируемый контур с обходом по часовой стрелке в плоскости (x, t) .

Итоговое интегральное уравнение (3.14) отражает собой тот очевидный факт, что изменение количества автомобилей на участке дороги $[a, b]$ за время Δt равно разности транспортных потоков, въехавших в точке a и выехавших в точке b на дорогу $[a, b]$ за это же время. Отсюда следует, что для любого прямоугольного контура L в полуплоскости $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$ со сторонами параллельными осям (можно доказать, что это выполняется для любого кусочно-гладкого контура L), справедливо следующее интегральное равенство:

$$\oint_L (\rho(t, x) dx - Q(\rho(t, x)) dt) = 0. \quad (3.15)$$

С использованием теоремы Остроградского-Гаусса интеграл по контуру (3.15) преобразуем в интеграл по ограниченной им области G :

$$\int_G \left(\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho(t, x))}{\partial x} \right) dx dt = 0. \quad (3.16)$$

Поскольку интегральное равенство (3.16) должно выполняться для любой заданной области G , то по основной лемме вариационного исчисления должно быть равным нулю подынтегральное выражение. Это позволяет нам перейти от интегральной к дифференциальной форме уравнений (3.16):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V(\rho))}{\partial x} = 0, \quad (3.17)$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (3.18)$$

Уравнение (3.18) также можно получить с использованием микроскопического подхода из предыдущего раздела:

$$\begin{cases} \frac{dx_m}{dt} = v_m(t) \\ \frac{dx_{m+1}}{dt} = v_{m+1}(t) \end{cases}, \Rightarrow \frac{d(x_{m+1} - x_m)}{dt} = \frac{d(\Delta x_m)}{dt} = v_{m+1}(t) - v_m(t), \Rightarrow$$

$$\frac{d(\Delta x_m)}{dt} = \frac{d(1/\rho_m)}{dt} = -\frac{1}{\rho_m^2} \frac{d\rho_m}{dt} = v_{m+1}(t) - v_m(t), \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\rho_m}{dt} = -\rho_m^2 (v_{m+1}(t) - v_m(t)) = -\rho_m \frac{v_{m+1}(t) - v_m(t)}{\Delta x_m}.$$

Перейдем в последнем выражении к пределу при $\Delta x_m \rightarrow 0$:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \lim_{\Delta x_m \rightarrow 0} \frac{v_{m+1}(t) - v_m(t)}{\Delta x_m} = -\rho \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (3.19)$$

возьмем полный дифференциал плотности, как функции двух переменных $\rho(t, x)$:

$$d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial t} dt + \frac{\partial\rho}{\partial x} dx, \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v \frac{\partial\rho}{\partial x}$$

и подставим его в (3.19):

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v \frac{\partial\rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial v}{\partial x}, \Leftrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + v \frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Получаем в итоге уравнение (3.18).

Переходим к решению уравнения (3.18). Для каждой из фаз транспортного потока задаем, полученные в разделе № 3.1, функциональные зависимости $Q(\rho)$, сшивая их в точках фазового перехода:

1. Свободный поток – $Q(\rho) = \alpha_2 \rho^2 + \alpha_1 \rho, \quad 0 \leq \rho < \rho_1;$
2. Синхронизованный поток – $Q(\rho) = \beta_2 \rho^2 + \beta_1 \rho + \beta_0, \quad \rho_1 \leq \rho < \rho_2;$ (3.20)
3. Заторный поток – $Q(\rho) = c_*(\rho_* - \rho), \quad \rho_2 \leq \rho \leq \rho_*.$

Это позволяет нам задать аналитические зависимости $\frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho}$ на всем интервале значений $0 \leq \rho \leq \rho_*$:

1. Свободный поток – $\frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} = 2\alpha_2 \rho + \alpha_1, \quad 0 \leq \rho < \rho_1;$
2. Синхронизованный поток – $\frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} = 2\beta_2 \rho + \beta_1, \quad \rho_1 \leq \rho < \rho_2;$ (3.21)
3. Заторный поток – $\frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} = -c_*, \quad \rho_2 \leq \rho \leq \rho_*.$

Зная теперь аналитическую зависимость $\frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho}$, мы можем найти решение уравнения (3.18) в любой момент времени в любой точке дороги.

Для третьей – заторной фазы транспортного потока когда $\frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} = -c_* = const$ (3.18) представляет собой обычное уравнение переноса. Его решение полностью определяется его начальными и граничными условиями:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \rho} \frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{\partial\rho}{\partial t} - c_* \frac{\partial\rho}{\partial x} = 0, \quad c_* = const > 0.$$

Для первых двух фаз уравнение (3.18) переходит в уравнение Хопфа, которое тоже можно решать аналитически. Мы этого делать не будем, поскольку интегрировать (3.18) будем численно с небольшими шагами по времени и пространству, при которых значение $\frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} \approx const$ можно считать постоянным. Следовательно, для всех трех фаз транспортного потока мы можем рассматривать (3.18) как уравнение переноса с постоянным значением $\frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} \approx const$ в течение заданных шагов интегрирования Δt и Δx :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + Q_\rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \\ Q_\rho = const : \left\{ t_n \leq t < t_n + \Delta t, \quad x_m - \frac{\Delta x}{2} \leq x < x_m + \frac{\Delta x}{2} \right\}. \end{cases}$$

Покажем, как находится его аналитическое решение при заданных начальных и граничных условиях

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + Q_\rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad Q_\rho = const, \quad 0 \leq x \leq X, \\ \rho(0, x) = \rho_0(x), \quad \rho(t, 0) = \rho_I(t), \quad \rho(t, X) = \rho_{II}(t). \end{cases} \quad (3.22)$$

Воспользуемся снова полным дифференциалом плотности, как функции двух переменных $\rho(t, x)$:

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (3.23)$$

В рассматриваемом здесь случае будем интегрировать (3.23) вдоль линии с уравнением $\frac{dx}{dt} = Q_\rho = const$:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + Q_\rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \Leftrightarrow \\ \frac{d\rho}{dt} &= 0 \Leftrightarrow \rho(x - Q_\rho t) = \rho(x(t=0)) = const, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + Q_\rho \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

Линия $\frac{dx}{dt} = Q_\rho \Rightarrow x(t) = Q_\rho t + x(t=0)$ называется характеристикой уравнения (3.23) и играет ключевую роль при исследовании его решения, поскольку вдоль характеристики оно остаётся постоянным:

$$\begin{cases} \rho(t, x) = \rho_0(x - Q_\rho t), & \text{if } 0 \leq x(t=0) = x - Q_\rho t \leq X, \\ \rho(t, x) = \rho_I(t - x/Q_\rho), & \text{if } x - Q_\rho t < 0 \ \& \ Q_\rho > 0, \\ \rho(t, x) = \rho_{II}(t - x/Q_\rho), & \text{if } x - Q_\rho t > X \ \& \ Q_\rho < 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

Несмотря на его простоту мы не будем использовать аналитическое решение (3.24) напрямую и воспользуемся разностной аппроксимацией уравнения (3.23). Мы это делаем по двум причинам.

Первая – мы не можем интегрировать (3.23) на большом интервале по времени, так как за это время могут произойти непредвиденные события (например, дорожная авария), которые существенно изменяют дорожную ситуацию. Аналитическое решение (3.15), полученное за большой временной промежуток, не будет ничего знать об этом событии. Нам придётся возвращаться к нему назад по времени.

Вторая причина – что в случае большого графа транспортной сети нереально связать все отдельные аналитические решения, полученные для каждого из его ребер, в одно единственное с использованием граничных условий в узловых точках графа.

Поэтому мы переходим к численному решению (3.23) с использованием конечных разностей. Запишем снова эту систему в интегральной форме (3.15-3.16):

$$\iint_G \left(\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho(t, x))}{\partial x} \right) dx dt = \oint_L (\rho(t, x) dx - Q(\rho(t, x)) dt) = 0, \quad (3.25)$$

здесь G – конечная область интегрирования на плоскости (x, t) , а L – контур, её ограничивающий. Выберем контур интегрирования L так, как это показано на Рис. 3.4.

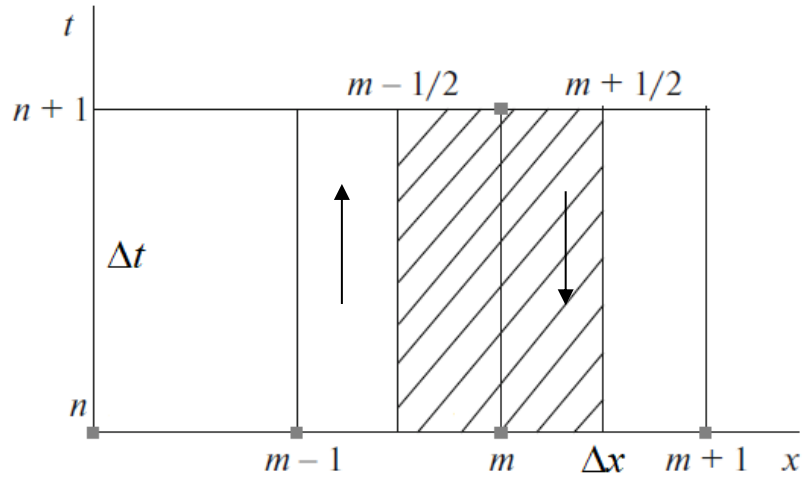


Рис. 3.14. Контур L , ограничивающий ячейку интегрирования.

Проинтегрировав (3.25) по контуру L

$$\int_{x_{m-1/2}}^{x_{m+1/2}} \rho^{n+1}(x) dx - \int_{x_{m-1/2}}^{x_{m+1/2}} \rho^n(x) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} Q_{m+1/2}^{n+1/2} dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} Q_{m-1/2}^{n+1/2} dt = 0$$

получаем, что

$$\left(\rho_m^{n+1} - \rho_m^n\right)\Delta x + \left(Q_{m+1/2}^{n+1/2} - Q_{m-1/2}^{n+1/2}\right)\Delta t = \frac{\rho_m^{n+1} - \rho_m^n}{\Delta t} + \frac{Q_{m+1/2}^{n+1/2} - Q_{m-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0,$$

или

$$\rho_m^{n+1} = \rho_m^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(Q_{m+1/2}^{n+1/2} - Q_{m-1/2}^{n+1/2}\right). \quad (3.26)$$

В (3.26) $\Delta x = \frac{X}{(M-1)}$ и $\Delta t = \min_{m=1, \dots, M} \left\{ \frac{\Delta x}{(Q_\rho)_m^n} \right\}$ – шаги численного интегрирования по пространству и времени. Выбор интерполяционных выражений для $Q_{m\pm 1/2}^{n+1/2}$ в (3.28) является определяющим для получения заданных свойств разностной схемы. При выборе численного метода нам стоит учитывать, что решение уравнения (3.22) на каждом из ребер графа транспортной сети определяется изменением значений рассчитываемых параметров на входах и выходах заданной транспортной сети.

В качестве простого примера рассмотрим схему [Courant et. al., 1952], имеющую первый порядок аппроксимации $O(\Delta t, \Delta x)$. С учетом знакопеременных

значений $Q_\rho^+ = \frac{Q_\rho + |Q_\rho|}{2}$ и $Q_\rho^- = \frac{Q_\rho - |Q_\rho|}{2}$, мы получаем следующую разностную аппроксимацию (3.14) для сеточного шаблона $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1})$:

$$\begin{aligned} \rho_m^{n+1} &= \rho_m^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{Q_\rho + |Q_\rho|}{2} (\rho_m^n - \rho_{m-1}^n) - \frac{Q_\rho - |Q_\rho|}{2} (\rho_{m+1}^n - \rho_m^n) \right) = \\ &= \rho_m^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta \rho} (\rho_{m-1}^n - \rho_m^n) + \frac{\Delta Q}{\Delta \rho} (\rho_m^n - \rho_{m+1}^n) \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{|Q_\rho|}{2} (\rho_{m-1}^n - 2\rho_m^n + \rho_{m+1}^n) = \\ &= \rho_m^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (Q_{m-1}^n - Q_{m+1}^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(|Q_\rho|_{m-1/2}^n (\rho_{m-1}^n - \rho_m^n) + |Q_\rho|_{m+1/2}^n (\rho_{m+1}^n - \rho_m^n) \right). \end{aligned}$$

Полученная схема называется сеточно-характеристической и впервые была предложена в [Магомедов, Холодов, 1969]. При этом интерполяционные выражения для $Q_{m\pm 1/2}^{n+1/2}$ в ней имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} Q_{m\pm 1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2} (Q_m^n + Q_{m\pm 1}^n) \pm \frac{1}{2} |Q_\rho|_{m\pm 1/2}^n (\rho_m^n - \rho_{m\pm 1}^n), \\ |Q_\rho|_{m\pm 1/2}^n &= \frac{1}{2} \left((Q_\rho)_m^n + (Q_\rho)_{m\pm 1}^n \right). \end{aligned}$$

В общем случае это могут быть более сложные выражения, позволяющие построить схему более высокого порядка аппроксимации на используемом сеточном шаблоне. Например, можно использовать схему второго порядка $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ [Lax, Wendroff, 1960]:

$$\begin{cases} \rho_m^{n+1} = \rho_m^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (Q_{m-1}^n - Q_{m+1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} \left((Q_\rho^2)_{m-1/2}^n (\rho_{m-1}^n - \rho_m^n) + (Q_\rho^2)_{m+1/2}^n (\rho_{m+1}^n - \rho_m^n) \right), \\ Q_{m\pm 1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (Q_m^n + Q_{m\pm 1}^n) \pm \frac{\Delta t}{2\Delta x} (Q_\rho^2)_{m\pm 1/2}^n (\rho_m^n - \rho_{m\pm 1}^n), \quad (Q_\rho)_{m\pm 1/2}^n = \frac{(Q_\rho)_m^n + (Q_\rho)_{m\pm 1}^n}{2}. \end{cases}$$

Уравнение (3.22) также необходимо численно интегрировать в граничных точках: $(x_1 = 0, x_M = X)$. На въезде дороги в граничной точке $(x_1 = 0)$ получаем:

$$\begin{cases} \rho_1^{n+1} = \rho_I(t^{n+1}), & \text{if } (Q_\rho)_{1/2}^n > 0, \\ \rho_0^n = \rho_1^n, \quad Q_0^n = Q_1^n, & \text{if } (Q_\rho)_{1/2}^n \leq 0. \end{cases}$$

На выезде дороги в граничной точке ($x_M = X$) наоборот берем:

$$\begin{cases} \rho_M^{n+1} = \rho_{II}(t^{n+1}), & \text{if } (Q_\rho)_{M-1/2}^n < 0, \\ \rho_{M+1}^n = \rho_M^n, \quad Q_{M+1}^n = Q_M^n, & \text{if } (Q_\rho)_{M-1/2}^n \geq 0. \end{cases}$$

В случае кольцевой дороги используем периодические граничные условия в точках ($x_1 = 0, x_M = X$):

$$\begin{cases} \rho_1^{n+1} = \rho_1^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(Q_M^n - Q_2^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(|Q_\rho|_{1/2}^n(\rho_M^n - \rho_1^n) + |Q_\rho|_{3/2}^n(\rho_2^n - \rho_1^n)), \\ \rho_M^{n+1} = \rho_M^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(Q_{M-1}^n - Q_1^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(|Q_\rho|_{M-1/2}^n(\rho_{M-1}^n - \rho_M^n) + |Q_\rho|_{1/2}^n(\rho_1^n - \rho_M^n)). \end{cases}$$

Еще один вопрос, который необходимо рассмотреть здесь – это возможность существования въездов и выездов с моделируемой дороги. В этом случае возникает необходимость корректного учета въезжающих и выезжающих с дороги АТС. Мы будем осуществлять учет этих АТС, задавая в правой части уравнения (3.22) изменение плотности в месте въезда или выезда с дороги с координатой ($x = x_*$) в виде локального источника или стока транспортного потока с значением $f_0(x_*, t)$ [АТС/м/с]. Уравнение (3.22) соответственно преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + Q_\rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = f_0(x_*, t), \quad Q_\rho = const, \\ \rho(0, x) = \rho_0(x), \quad \rho(t, 0) = \rho_I(t), \quad \rho(t, X) = \rho_{II}(t), \quad 0 \leq x \leq X \end{cases} \quad (3.27)$$

с аналитическим решением в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(t, x) = \rho_0(x - Q_\rho t), \text{ if } 0 \leq x - Q_\rho t \neq x_* \leq X, \\ \rho(t, x) = \rho_0(x - Q_\rho t) + \int_0^t f_0(x_*, \tau) d\tau, \text{ if } 0 \leq x - Q_\rho t = x_* \leq X, \\ \rho(t, x) = \rho_I(t - x / Q_\rho), \text{ if } x - Q_\rho t < 0 \text{ \& } Q_\rho > 0, \\ \rho(t, x) = \rho_{II}(t - x / Q_\rho), \text{ if } x - Q_\rho t > X \text{ \& } Q_\rho < 0, \end{array} \right. \quad (3.28)$$

и с численным решением в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_m^{n+1} = \rho_m^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_{m-1/2}^n - Q_{m+1/2}^n), \text{ if } x_m \neq x_*, \\ \rho_m^{n+1} = \rho_m^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_{m-1/2}^n - Q_{m+1/2}^n) + \Delta t \times f_0(t^n, x_m), \text{ if } x_m = x_*, \\ Q_{m\pm 1/2}^n = \frac{1}{2} (Q_m^n + Q_{m\pm 1}^n) \pm \frac{1}{2} |Q_\rho|_{m\pm 1/2}^n (\rho_m^n - \rho_{m\pm 1}^n). \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Уравнение (3.22) решаем рекуррентно. Оцениваем текущий шаг интегрирования по времени: $\Delta t = \min_m \left\{ \frac{\Delta x}{(Q_\rho)_m^n} \right\}$ и находим его решение в момент времени $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ с использованием разностных схем (3.26) или (3.29) для ненулевой правой части в (3.27).

Несмотря на элементарность, модель LWR (а также ее разностные аналоги) достаточно популярна в прикладных расчетах. Во многом это связано с недостаточным объемом данных для использования моделей более высокого уровня. Поправки, привносимые более точными моделями, нивелируются неточностью исходных данных.

Известно, что использование одного уравнения в модели LWR (3.27) не является достаточным для корректного описания всех фаз (состояний) транспортного потока [Daganzo, 1995]. Изменить это можно, если воспользоваться хорошо известным дифференциальными преобразованиями законов сохранения (см., например, [Годунов, Роменский, 1998]). Для этого умножим (3.27) на $\frac{\partial v}{\partial \rho}$:

$$\frac{\partial v}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = \frac{\partial v}{\partial \rho} f_0, \quad (3.30)$$

откуда получим:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho} f_0. \quad (3.31)$$

В итоге получаем макроскопическую модель второго порядка (порядок определяется числом уравнений в системе), в которой уже не используется взаимно-однозначная зависимость скорости от плотности транспортного потока (то есть не предполагается, что желаемая скорость устанавливается мгновенно):

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = f_0(x, t), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho} f_0(x, t). \end{cases} \quad (3.32)$$

Если у нас есть прибывающие или убывающие с дороги или ее полосы АТС, то правая часть $f_0(x, t)$ первого уравнения в (3.32) будет представлять собой количество АТС, въезжающих (знак плюс) или съезжающих (знак минус) в единицу времени на единицу длины. Соответственно правая часть второго уравнения в (3.32) показывает нам, как это влияет на изменение импульса транспортного потока.

Число граничных условий, задаваемое в начале-конце автодороги, зависит от знака собственных чисел модельной системы уравнений (3.32): $\lambda_1 = v$, $\lambda_2 = v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$. Поскольку $\lambda_1 = v$ всегда ≥ 0 , нам необходимо учитывать знак второго собственного значения $\lambda_2 = v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$. Поэтому на въезде их количество должно быть равно двум при положительном $\lambda_2 > 0$ или одному при $\lambda_2 \leq 0$. На выездах ровно наоборот: граничные условия не задаются при $\lambda_2 > 0$ или задается одно при $\lambda_2 \leq 0$. Исходя из этого, в начале-конце автодороги в качестве граничных условий могут быть заданы изменяющиеся во времени интенсивность $Q(t)$ и скорость $v(t)$ потока

АТС. Помимо граничных условий, для системы (3.32) необходимо задать также некоторые начальные условия:

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x). \quad (3.33)$$

Во многих макроскопических моделях второго порядка в правой части уравнения изменения импульса (3.32) присутствует дополнительный релаксационный член: $\frac{1}{\tau}(V(\rho) - v)$, учитывающий стремления реальной скорости транспортного потока v к желаемой (оптимальной) скорости $V(\rho)$, в котором $\tau \sim 1 - 1.5$ секунды – характеризует время реакции водителя. В нашу модель (3.32) мы его не включили, исходя из соображений, что все необходимые характеристики поведения транспортного потока автоматически учитываются при получении функциональной зависимости интенсивности транспортного потока от его плотности $Q(\rho)$ по данным измерений с автострадных датчиков. Данная зависимость может быть добавлена во второе уравнение системы через оптимальную скорость $V(\rho) = Q(\rho)/\rho$ путем замены $\rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$ на $\rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = f_0(x, t), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho} f_0(x, t). \end{cases} \quad (3.34)$$

Уравнение изменения импульса системы (3.32) с нулевой правой частью ($f_0 = 0$) можно получить с использованием микроскопического подхода, например, с использованием модели следования за лидером [Gazis, 1959] и полного дифференциала скорости:

$$\left\{ \begin{array}{l} dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial x} dx, \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{dv_m}{dt} = \alpha \frac{v_{m+1}(t) - v_m(t)}{x_{m+1}(t) - x_m(t)}, \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\frac{dv_m}{dt} = \frac{\partial v_m}{\partial t} + v_m \frac{\partial v_m}{\partial x} = \alpha \frac{v_{m+1}(t) - v_m(t)}{\Delta x_m(t)}.$$

Перейдем в последнем уравнении к пределу при $\Delta x_m(t) \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha \lim_{\Delta x_m \rightarrow 0} \frac{v_{m+1}(t) - v_m(t)}{\Delta x_m(t)} = \alpha \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (3.35)$$

вспомним как зависит коэффициент α от плотности: $\alpha(\rho) = -\rho \frac{\partial v(\rho)}{\partial \rho}$ и подставим эту зависимость в (3.35):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = - \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

В итоге получаем второе уравнение (3.32) с нулевой правой частью.

Здесь мы должны понимать, что получить правую часть второго уравнения (3.32): $\frac{\partial v}{\partial \rho} f_0(x, t)$ с использованием любой из микромоделей практически невозможно. В случае первого уравнения системы это было не так важно, поскольку мы всегда ее можем добавить, исходя из требования выполнения закона сохранения числа АТС. В случае второго уравнения у нас уже нет работающего закона сохранения, так как в транспортном потоке импульс не сохраняется.

Выше мы подробно изложили алгоритм численного решения уравнения – закона сохранения количества АТС в форме (3.27). В случае использования системы из двух уравнений (3.32), построение алгоритма его численного решения усложняется, но не сильно. С использованием векторов $W = [\rho, v]^T$ и $f = \left[f_0, \frac{\partial v}{\partial \rho} f_0 \right]^T$ гиперболическая система уравнений (3.32) может быть представлена в векторной форме:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial t} + (\Omega^{-1} \Lambda \Omega) \frac{\partial W}{\partial x} = f, \quad (3.36)$$

с матрицей Якоби A :

$$A = \Omega^{-1} \Lambda \Omega = \begin{bmatrix} v & \rho \\ 0 & v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v & \rho \\ 0 & v + c(\rho) \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

В (3.37), $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v & 0 \\ 0 & v + c(\rho) \end{bmatrix}$ – диагональная матрица собственных значений матрицы Якоби A , $\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c(\rho)}{\rho} & -1 \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$ – матрица левых собственных векторов матрицы Якоби и $\Omega^{-1} = \begin{bmatrix} \rho & \rho \\ c(\rho) & 1 \end{bmatrix}$ – обратная к ней. Мы также ввели в (3.37)

обозначение $c(\rho) = -\alpha(\rho) = \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$ или $c(\rho) = \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}$, его физический смысл будет

обсуждаться ниже.

Далее запишем конечно-разностную аппроксимацию системы уравнений (3.36) на сеточном шаблоне, представленном на Рис. 3.14, полагая значения рассчитываемых переменных постоянными на ребрах контура L , ограничивающего ячейку интегрирования:

$$\frac{W_m^{n+1} - W_m^n}{\Delta t} + A \left(\frac{W_{m+1/2}^{n+1/2} - W_{m-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) = \frac{W_m^{n+1} - W_m^n}{\Delta t} + \frac{(AW)_{m+1/2}^{n+1/2} - (AW)_{m-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = f_m^n,$$

или в виде:

$$W_m^{n+1} = W_m^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (G_{m+1/2}^{n+1/2} - G_{m-1/2}^{n+1/2}) + f_m^n. \quad (3.38)$$

В (3.38) $\Delta x = \frac{X}{(M-1)}$ и $\Delta t = \min_{m=1, \dots, M} \left\{ \frac{\Delta x}{|\lambda_{1,2}|_m^n} \right\}$ – шаги численного интегрирования по пространству и времени. Выбор интерполяционных формул для $G_{m\pm 1/2}^{n+1/2} =$

$(AW)_{m\pm 1/2}^{n+1/2}$ является критическим для получения необходимых свойств разностной

схемы (3.38). Мы будем использовать монотонный сеточно-характеристический метод первого порядка аппроксимации [Магомедов, Холодов, 1969] в котором:

$$G_{m\pm 1/2}^{n+1/2} = (AW)_{m\pm 1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} A_{m\pm 1/2}^n (W_m^n + W_{m\pm 1}^n) \pm \frac{1}{2} (\Omega^{-1} |\Lambda| \Omega)_{m\pm 1/2}^n (W_m^n - W_{m\pm 1}^n).$$

Можно использовать и более точные выражения для интерполяции $G_{m\pm 1/2}^{n+1/2} = (AW)_{m\pm 1/2}^{n+1/2}$, которые позволили бы получить более высокий порядок аппроксимации разностной схемы (3.38). Но нам стоит принять во внимание тот факт, что решение системы модельных уравнений (3.36), описывающих автомобильное движение, на каждом из ребер графа транспортной сети определяется изменением значений рассчитываемых параметров в его граничных точках или в правой части. С этой точки зрения выбор порядка аппроксимации разностной схемы в (3.38) или интерполяции $G_{m\pm 1/2}^{n+1/2} = (AW)_{m\pm 1/2}^{n+1/2}$ не имеет определяющего влияния на точность получаемого решения.

Значения модельных переменных в промежуточных узлах $m\pm 1/2$ при вычислении $G_{m\pm 1/2}^{n+1/2} = (AW)_{m\pm 1/2}^{n+1/2}$ могут быть получены с использованием простейшей линейной интерполяции используемых матриц без потери точности численного решения:

$$A_{m\pm 1/2}^n = \begin{bmatrix} \frac{v_m^n + v_{m\pm 1}^n}{2} & \frac{\rho_m^n + \rho_{m\pm 1}^n}{2} \\ 0 & \frac{v_m^n + v_{m\pm 1}^n}{2} + c \left(\frac{\rho_m^n + \rho_{m\pm 1}^n}{2} \right) \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{m\pm 1/2}^n = \begin{bmatrix} \lambda_{1,m\pm 1/2}^n & 0 \\ 0 & \lambda_{2,m\pm 1/2}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_m^n + v_{m\pm 1}^n}{2} & 0 \\ 0 & \frac{v_m^n + v_{m\pm 1}^n}{2} + c \left(\frac{\rho_m^n + \rho_{m\pm 1}^n}{2} \right) \end{bmatrix},$$

$$\Omega_{m\pm 1/2}^n = \begin{bmatrix} \omega_{1,m\pm 1/2}^n \\ \omega_{2,m\pm 1/2}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\rho_m^n + \rho_{m\pm 1}^n} c \left(\frac{\rho_m^n + \rho_{m\pm 1}^n}{2} \right) & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(\Omega^{-1})_{m\pm 1/2}^n = \begin{bmatrix} \frac{\rho_m^n + \rho_{m\pm 1}^n}{2c \left(\frac{\rho_m^n + \rho_{m\pm 1}^n}{2} \right)} & \frac{\rho_m^n + \rho_{m\pm 1}^n}{2c \left(\frac{\rho_m^n + \rho_{m\pm 1}^n}{2} \right)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Чтобы получить условия совместности для (3.36) вдоль характеристик $\lambda_{1,2} = \frac{dx}{dt}$, мы умножаем систему уравнений (3.36) слева на матрицу левых собственных векторов matrix Ω и приводим ее к характеристическому виду:

$$\Omega \left(W_t + (\Omega^{-1} \Lambda \Omega) W_x \right) = \Omega W_t + \Lambda \Omega W_x = \Omega f. \quad (3.39)$$

По отдельности для каждого из собственных векторов $\omega_{1,2}$ это дает нам скалярную форму для каждого из двух уравнений в (3.39):

$$(\omega_i \cdot W_t) + \lambda_i (\omega_i \cdot W_x) = \omega_i^T \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial W}{\partial x} \right) = \omega_i^T \cdot f, \quad i = 1, 2. \quad (3.40)$$

Обычно условия совместности (3.40) используются при численном интегрировании системы уравнений (3.36) в граничных (узловых) точках. Например, в начале рассчитываемой дороги в граничной точке (t^{n+1}, x_1) мы будем использовать следующую аппроксимацию (3.40):

$$\begin{cases} \left(\omega_2^T \right)_{3/2}^n \cdot \left(\frac{W_1^{n+1} - W_1^n}{\Delta t} + (\lambda_2)_{3/2}^n \frac{W_2^n - W_1^n}{\Delta x} \right) = \left(\omega_2^T \right)_{3/2}^n \cdot f_1^n, & \text{if } (\lambda_2)_{3/2}^n < 0, \\ v_1^{n+1} = v(t^{n+1}, x_1) \\ \left. \begin{cases} Q_1^{n+1} = Q(t^{n+1}, x_1) \\ v_1^{n+1} = v(t^{n+1}, x_1) \end{cases} \right\}, & \text{if } (\lambda_2)_{3/2}^n \geq 0. \end{cases}$$

В конце дороги мы будем использовать разностную аппроксимацию (3.40) если $(\lambda_2)_{M-1/2}^n = \frac{v_M^n + v_{M-1}^n}{2} + c \left(\frac{\rho_M^n + \rho_{M-1}^n}{2} \right) > 0$ для обоих условий совместности, поскольку первое собственное значение всегда неотрицательно: $(\lambda_1)_{m\pm 1/2}^n = \frac{v_m^n + v_{m\pm 1}^n}{2} \geq 0$:

$$\left(\omega_{1,2}^T\right)_{M-1/2}^n \cdot \left(\frac{W_M^{n+1} - W_M^n}{\Delta t} + \left(\lambda_{1,2}\right)_{M-1/2}^n \frac{W_M^n - W_{M-1}^n}{\Delta x} \right) = \left(\omega_{1,2}^T\right)_{M-1/2}^n \cdot f_1^n, \text{ if } \left(\lambda_2\right)_{M-1/2}^n > 0.$$

Если же $\left(\lambda_2\right)_{M-1/2}^n \leq 0$, то к первому условию совместности добавляем граничное условие непрерывности скорости транспортного потока:

$$\begin{cases} \left(\omega_1^T\right)_{M-1/2}^n \cdot \left(\frac{W_M^{n+1} - W_M^n}{\Delta t} + \left(\lambda_1\right)_{M-1/2}^n \frac{W_M^n - W_{M-1}^n}{\Delta x} \right) = \left(\omega_1^T\right)_{M-1/2}^n \cdot f_1^n, \text{ if } \left(\lambda_2\right)_{M-1/2}^n \leq 0. \\ v_M^{n+1} = v_{M-1}^{n+1} \end{cases}$$

В случае кольцевой дороги используем периодические граничные условия в точках $(x_1 = 0, x_M = X)$:

$$\begin{cases} \rho_0^n = \rho_M^n, & v_0^n = v_M^n, \\ \rho_{M+1}^n = \rho_1^n, & v_{M+1}^n = v_1^n. \end{cases}$$

Систему уравнений (3.36) решаем как обычно рекуррентно. Оцениваем текущий шаг интегрирования по времени: $\Delta t = \min_m \left\{ \frac{\Delta x}{|(\lambda_{1,2})_m^n|} \right\}$, затем находим его решение в момент времени $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ с использованием разностной схемы (3.38) и снова все повторяем.

Обратим внимание на одно существенное отличие разностной схемы (3.38) от схемы (3.29). В интерполяционных формулах (3.29) при расчете значений $(Q_\rho)_{m\pm 1/2}^n$ в промежуточных узлах нашей сетки используется аналитическая зависимость $\frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho}$, поскольку уравнение (3.27) предполагает, что все водители едут с оптимальной скоростью $V(\rho)$. Эта скорость в свою очередь может быть получена из фундаментальной диаграммы как $V(\rho) = \frac{Q(\rho)}{\rho}$. В модели (3.32) мы избавились от этого упрощения и ввели реальную скорость транспортного потока, обозначив ее $v(t, x)$. Это позволяет учитывать отклонение реальной скорости транспортного потока $v(t, x)$ от его оптимального значения $V(\rho)$ в (3.38) при численном расчете.

В системе уравнений (3.32) всегда можно перейти от рассмотрения одного типа АТС или от одной дороги к нескольким ее полосам, по аналогии с многокомпонентной односкоростной моделью баротропного газа [Холодов, 2010]. Для этого будем полагать для всех компонент транспортного потока с номерами $k = \overline{1, K}$, выполняются следующие равенства:

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k, \quad Q(\rho) = \sum_{k=1}^K Q_k(\rho_k, v_k), \quad C_k = \frac{\rho_k}{\rho}, \quad v = \sum_{k=1}^K C_k v_k, \quad f_k = C_k f_0.$$

Здесь k - номер полосы дороги (типа АТС), K - общее количество полос (типов АТС – легковые, грузовые, фуры с прицепом и т.д.) и их относительные концентрации в общем потоке трафика: $C_k = \frac{\rho_k}{\rho}$, $\sum_{k=1}^K C_k = 1$.

Данный переход удобен тем, что его можно осуществлять как в прямую, так и в обратную сторону на любом участке дороги при возникновении такой необходимости, при этом фундаментальные диаграммы $Q_k(\rho_k)$ для каждой из полос (типов АТС) – компонент транспортного потока будут разными в силу их геометрических отличий. Очевидно, что при средних длинах легкового автомобиля в 4.5 метра и грузового в 7 метров их предельные значения плотностей ρ_* при движении в потоке будут разными, также, как и максимальная пропускная способность полосы дороги для каждого из типов АТС.

Индекс k можно связывать не только с типом АТС, но и с маршрутом водителя, стилем вождения и т.д. В этом случае, для различных участников движения, имеющих существенно отличающиеся друг от друга константы в фундаментальной диаграмме в дополнение к системе уравнений (3.32), как это принято, можно ввести в рассмотрение соответствующие уравнения переноса их концентраций (в том числе между разными полосами дороги).

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} + v_k \frac{\partial C_k}{\partial x} = f_k(C_1, \dots, C_K),$$

где $f_k(C_1, \dots, C_K)$ определяет процессы перестроений для АТС k -го типа и т.п.

В результате процесс расчета на каждом временном шаге t^n сводиться к численному интегрированию системы из $K+1$ уравнений для многокомпонентной смеси разных типов АТС:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = f_0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (v + c(\rho)) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho} f_0, \\ \frac{\partial C_k}{\partial t} + v_k \frac{\partial C_k}{\partial x} = f_k, \quad k = 1, \dots, K-1. \end{cases} \quad (3.41)$$

После чего для текущего шага по времени в каждой точке дороги (t^{n+1}, x_m) производится перерасчет концентраций и их относительных плотностей для каждого из типов АТС:

$$\rho_k(t^{n+1}, x_m) = C_k(t^{n+1}, x_m) \rho(t^{n+1}, x_m)$$

и далее все повторяется по циклу.

Для проверки работоспособности разработанной модели (3.32) был проведен вычислительный эксперимент для одного из участков МКАД [Алексеев и др., 2015]. Для этого использовались данные выбранных нами двух детекторов транспорта № 1 и № 2, расстояние между которыми составляет 2.2 км и отсутствуют въезды и выезды с автодороги (см. Рис. 3.5). Данные с детектора № 1 (скорость и интенсивность транспортного потока) задавались в качестве граничных условий при моделировании поведения транспортного потока, а данные следующего по направлению движения детектора № 2 использовались как тестовые для сравнения с ними полученных численных результатов. При этом на втором детекторе для моделируемых систем уравнений задавались неотражающие граничные условия в виде нулевых производных $(\partial Q / \partial x) = 0$, $(\partial v / \partial x) = 0$.

Расчет проводился за суточный интервал одного рабочего дня. Результаты расчетов интенсивности (вверху) и скорости (внизу) транспортных потоков представлены на Рис. 3.15-3.19 для каждой из пяти полос МКАД по отдельности и

суммарно на Рис. 3.20 для всех полос. Слева показаны результаты, полученные с использованием модели первого порядка LWR (3.7), посередине – с использованием разработанной модели второго порядка (3.32) в версии (3.34) с добавлением релаксационного члена $\frac{1}{\tau}(V(\rho) - v)$ в правую часть уравнения изменения импульса и справа – без него.

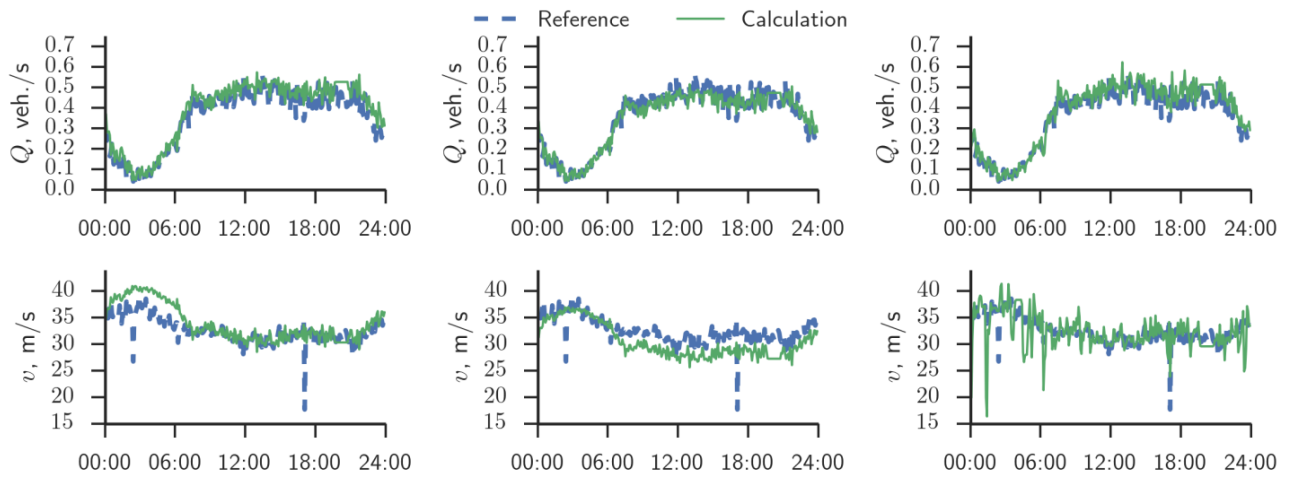


Рис. 3.15. Сравнение расчетных значений транспортных потоков (зеленый цвет) по первой полосе МКАД за суточный период времени с данными экспериментальных наблюдений (синий цвет), полученными с датчика транспорта с пятиминутным временным интервалом. Слева показаны результаты, полученные с использованием модели первого порядка LWR (3.27), посередине – с использованием разработанной макроскопической модели второго порядка (3.32) в версии (3.34) с добавлением члена $(V(\rho) - v)/\tau$ в правую часть второго уравнения, справа – без него.

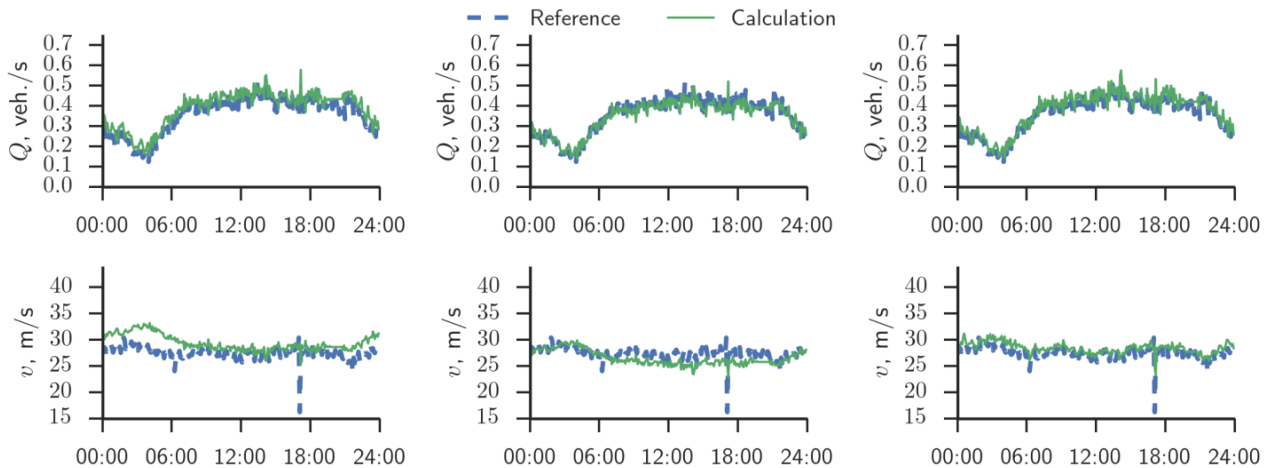


Рис. 3.16. Сравнение расчетных значений транспортных потоков (зеленый цвет) по второй полосе МКАД за суточный период времени с данными экспериментальных наблюдений (синий цвет), полученными с датчика транспорта с пятиминутным временным интервалом. Слева показаны результаты, полученные с использованием модели первого порядка LWR (3.27), посередине – с использованием разработанной макроскопической модели второго порядка (3.32) в версии (3.34) с добавлением члена $(V(\rho) - v)/\tau$ в правую часть второго уравнения, справа – без него.

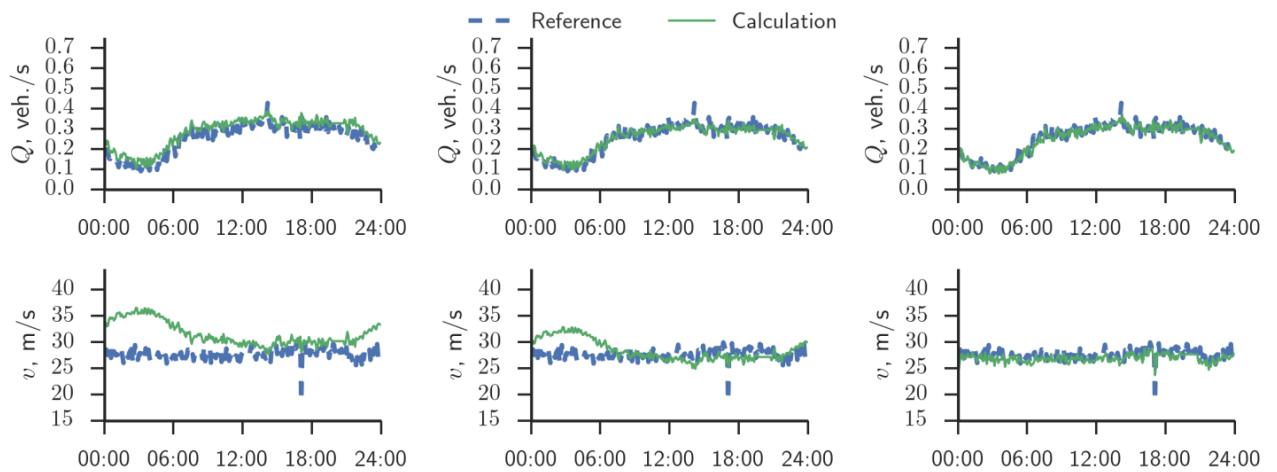


Рис. 3.17. Сравнение расчетных значений транспортных потоков (зеленый цвет) по третьей полосе МКАД за суточный период времени с данными экспериментальных наблюдений (синий цвет), полученными с датчика транспорта с пятиминутным временным интервалом. Слева показаны результаты, полученные с использованием модели первого порядка LWR (3.27), посередине – с использованием разработанной макроскопической модели второго порядка (3.32) в версии (3.34) с добавлением члена $(V(\rho) - v)/\tau$ в правую часть второго уравнения, справа – без него.

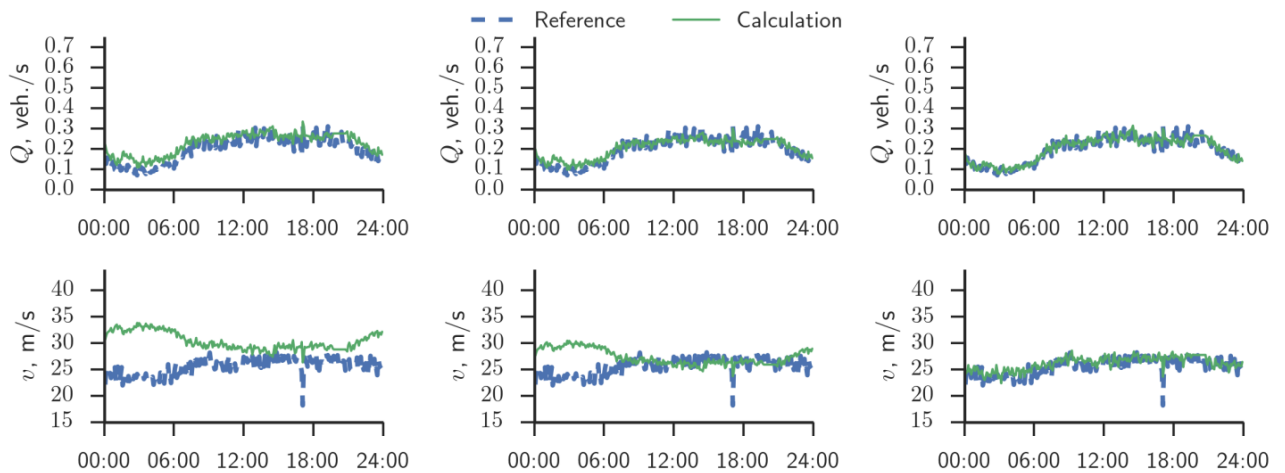


Рис. 3.18. Сравнение расчетных значений транспортных потоков (зеленый цвет) по четвертой полосе МКАД за суточный период времени с данными экспериментальных наблюдений (синий цвет), полученными с датчика транспорта с пятиминутным временным интервалом. Слева показаны результаты, полученные с использованием модели первого порядка LWR (3.27), посередине – с использованием разработанной макроскопической модели второго порядка (3.32) в версии (3.34) с добавлением члена $(V(\rho) - v)/\tau$ в правую часть второго уравнения, справа – без него.

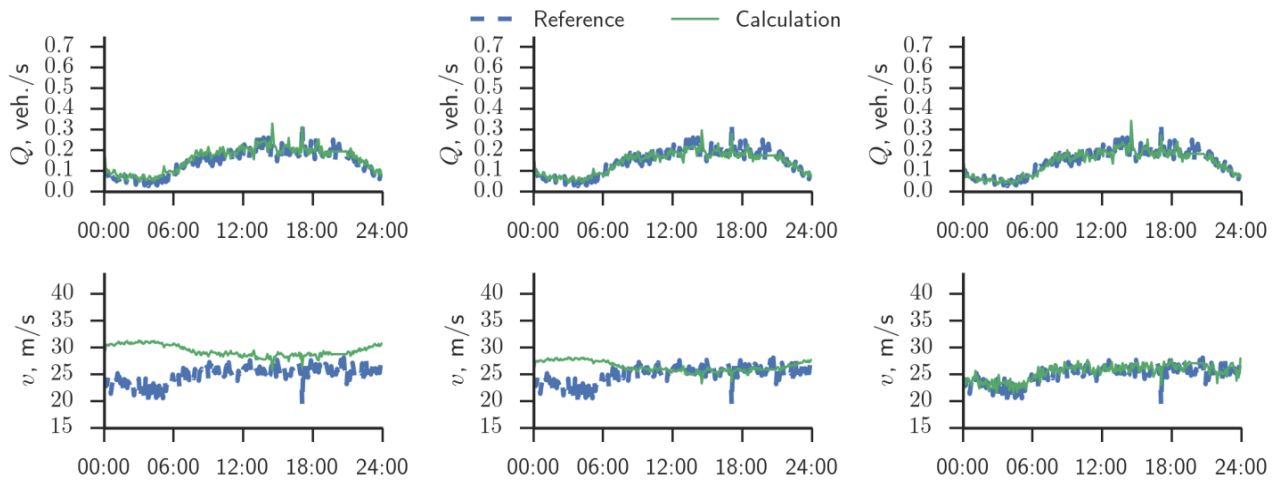


Рис. 3.19. Сравнение расчетных значений транспортных потоков (зеленый цвет) по пятой полосе МКАД за суточный период времени с данными экспериментальных наблюдений (синий цвет), полученными с датчика транспорта с пятиминутным временным интервалом. Слева показаны результаты, полученные с использованием модели первого порядка LWR (3.27), посередине – с использованием разработанной макроскопической модели второго порядка (3.32) в версии (3.34) с добавлением члена $(V(\rho) - v)/\tau$ в правую часть второго уравнения, справа – без него.

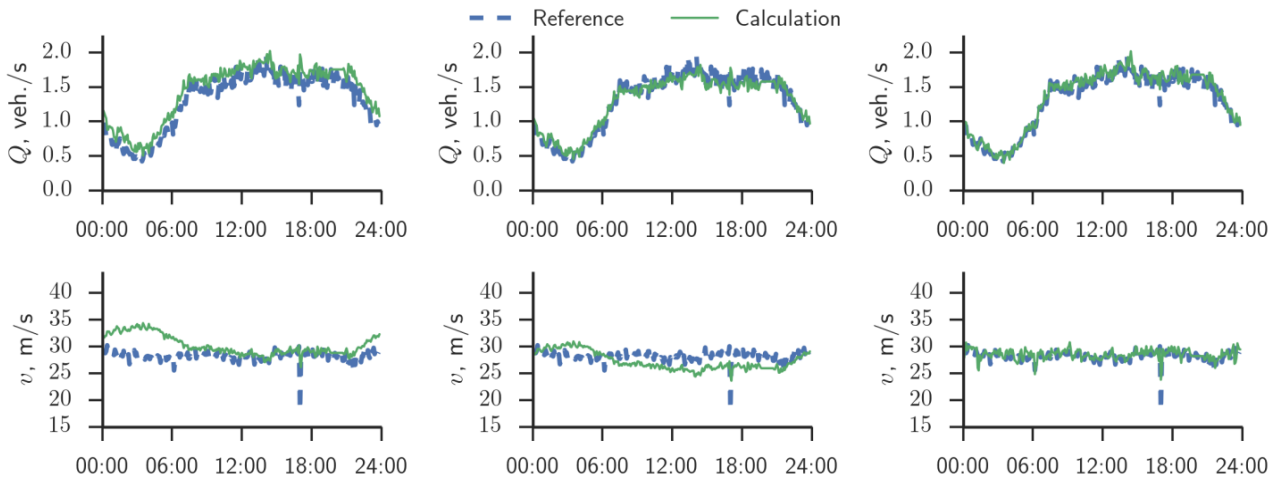


Рис. 3.20. Сравнение расчетных значений транспортных потоков (зеленый цвет) суммарно по всем пяти полосам МКАД за суточный период времени с данными экспериментальных наблюдений (синий цвет), полученными с датчика транспорта с пятиминутным временным интервалом. Слева показаны результаты, полученные с использованием модели первого порядка LWR (3.27), посередине – с использованием разработанной макроскопической модели второго порядка (3.32) в версии (3.34) с добавлением члена $(V(\rho) - v)/\tau$ в правую часть второго уравнения, справа – без него.

Результаты сделанных расчетов показывают корректное поведение разработанной гиперболической макроскопической модели второго порядка (3.32). Также

хорошо на графиках видны преимущества разработанной нами модели второго порядка (3.32) над моделью первого порядка LWR (3.27). Мы видим, что расчетные значения интенсивности транспортного потока в верхних частях рисунков, полученные с использованием этих двух моделей, практически не отличаются, тогда как на результатах расчетов скорости в нижних частях рисунков заметно преимущество в точности расчетов нашей модели над моделью LWR.

Отдельно хочется отметить, что добавление члена $\frac{1}{\tau}(V(\rho) - v)$ в правую часть уравнения изменения импульса (3.32) приводит к потере точности при расчете значений скорости транспортного потока. Это хорошо заметно на графике скорости транспортного потока (внизу, посередине). Это подтверждает наши предположения о том, что все необходимые характеристики поведения транспортного потока автоматически учитываются при добавлении функциональной зависимости $c(\rho) = \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}$, полученной по данным измерений с автострадных датчиков, во второе уравнение (3.34).

Проведем сравнение полученной нами гиперболической макроскопической модели второго порядка для плотности и скорости транспортного потока (3.32) с другими известными макроскопическими моделями второго порядка. В современных макроскопических моделях второго порядка транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений в различных постановках [Payne, 1971; Daganzo, 1995; Papageorgiou, 1998; Aw, Rascle, 2000; Zhang, 2002; Zhang, 2003; Siebel, Mauser, 2006; Siebel, Mauser, 2006], в которых по-разному учитывается модельная зависимость интенсивности $Q(\rho)$ или оптимальной скорости потока $V(\rho) = \frac{Q(\rho)}{\rho}$ от его плотности. Мы рассмотрим наиболее известные макроскопические модели второго порядка и на их примере покажем, как можно любую гидродинамическую модель второго порядка привести к общему виду посредством использования обобщенного уравнения состояния $P(\rho)$, замыкающего модельную систему уравнений.

Начнем наш обзор в историческом порядке с модели Payne-Whitham [Payne, 1971; Whitham, 1974] с нулевой правой частью:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c_0^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

и добавим в нее обобщенный вид зависимости давления от плотности транспортного потока $P(\rho) = \int_0^\rho c(\tilde{\rho})^2 d\tilde{\rho} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial \rho} = c(\rho)^2$, по аналогии с работой [Zhang, 2002]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c^2(\rho)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (3.42)$$

Систему уравнений (3.42) можно представить в дивергентной форме если умножить первое уравнение на скорость и сложить со вторым, умноженным на плотность:

$$\begin{aligned} v \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} + (\rho v) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2 + P(\rho))}{\partial x} = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Теперь нужно ответить на главный вопрос, как нам явно выразить через рассчитываемые переменные – плотность и скорость транспортного потока – давление $P(\rho) = \int_0^\rho c(\tilde{\rho})^2 d\tilde{\rho}$ или ее производную от плотности $\frac{\partial P}{\partial \rho} = c(\rho)^2$.

Для начала выразим производную давления транспортного потока от его плотности:

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{P_x}{\rho_x} = \left(\rho_x = -\frac{\rho_t}{Q_\rho} \right) = -\frac{Q_\rho}{\rho_t} P_x. \quad (3.44)$$

Далее из дивергентной формы уравнений (3.43) выразим производную давления по пространственной координате:

$$-P_x = -\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Qv)}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Qv)}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial x} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial(Qv)}{\partial Q} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

и подставим её в (3.44):

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = -\frac{Q_\rho}{\rho_t} P_x = \frac{Q_\rho}{\rho_t} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial(Qv)}{\partial Q} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = \frac{\partial Q}{\partial \rho} \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho} - \frac{\partial(Qv)}{\partial Q} \right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho} \right)^2 - \frac{\partial(Qv)}{\partial \rho}.$$

Воспользуемся известными дифференциальными равенствами:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho} \right)^2 = \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial \rho} \right)^2 = \left(v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right)^2 = v^2 + 2\rho v \frac{\partial v}{\partial \rho} + \rho^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \rho} \right)^2, \\ \frac{\partial(Qv)}{\partial \rho} = \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial \rho} = v^2 + \rho \frac{\partial(v^2)}{\partial \rho} = v^2 + 2\rho v \frac{\partial v}{\partial \rho}. \end{cases}$$

Используем эти равенства в выражение для $\frac{\partial P}{\partial \rho}$ и найдем окончательную формулу

$\frac{\partial P}{\partial \rho} = c(\rho)^2$, которая была впервые получена в работе [Холодов и др., 2015]:

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = c(\rho)^2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho} \right)^2 - \frac{\partial(Qv)}{\partial \rho} = v^2 + 2\rho v \frac{\partial v}{\partial \rho} + \rho^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \rho} \right)^2 - v^2 - 2\rho v \frac{\partial v}{\partial \rho} = \rho^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \rho} \right)^2. \quad (3.45)$$

Несколько «недостатков» модели (3.43), предложенной [Rayne, 1971], были указаны в работе [Daganzo, 1995]. В частности, было показано, что при сильных пространственных неоднородностях начальных условий могут возникать отрицательные значения скоростей или возникать плотности, превышающие максимально допустимые. Также, согласно этой модели, на движение АТС заметное влияние оказывают АТС, едущие сзади, что в случае дороги с одной полосой вряд ли возможно в реальном транспортном потоке. Эти «недостатки» порождаются тем, что изначально система уравнений (3.43) или (3.44) использовалась для моделирования

баротропного газа, который является изотропным и, следовательно, все направления движения такого газа равновероятны.

Математически это обусловлено тем, что *относительная скорость распространения возмущений* в транспортном потоке $c(\rho) = \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$ стоит в квадрате во втором уравнении (3.42) и (3.43). Следовательно эти уравнения не чувствительны к ее знаку и поэтому им все равно в какую сторону распространяются возмущения в потоке.

Системы уравнений в частных производных (3.42), (3.43) имеют гиперболический тип. Вводя в дополнение к $W = [\rho, v]^T$, векторы $U = [\rho, \rho v]^T$ и $F = [\rho v, \rho v^2 + P(\rho)]^T$, систему уравнений (3.42) можно записать в векторном виде:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A_0 \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad (3.46)$$

с матрицей Якоби A_0 , имеющей собственные числа $\lambda_{1,2} = v \pm c(\rho)$:

$$A_0 = \begin{bmatrix} v & \rho \\ \frac{c(\rho)^2}{\rho} & v \end{bmatrix}, \quad \det(A_0 - \lambda I) = 0, \Rightarrow (v - \lambda)^2 = c(\rho)^2, \Rightarrow \lambda_{1,2} = v \pm c(\rho),$$

или с матрицей Якоби $\frac{\partial F}{\partial U}$ для дивергентной формы (3.43):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{\partial F}{\partial U} \right) \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (3.47)$$

имеющей те-же собственные числа, поскольку $\frac{\partial F}{\partial U} = \left(\frac{\partial U}{\partial W} \right) A_0 \left(\frac{\partial U}{\partial W} \right)^{-1}$. Тот факт, что одно из двух собственных значений $\lambda_{1,2} = v \pm c(\rho)$ матрицы Якоби по величине превосходит скорость транспортного потока v и означает, что АТС, движущиеся сзади могут воздействовать на движущихся впереди.

В 2000 г. в статье [Aw, Rascle, 2000] было показано, как можно устранить недостатки, отмеченные в работе [Daganzo, 1995]. Основная идея заключалась в изменении второго уравнения в системе (3.43) следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho(v + p(\rho)))}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v(v + p(\rho)))}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (3.48)$$

Для замыкания системы уравнений (3.48) авторами в качестве оптимальной скорости в работе использовалась гладкая функция: $p(\rho) = \rho^\gamma$, $\gamma > 0$.

Эту же систему уравнений предложил использовать в 2002 г. в своей работе [Zhang, 2002], но уже в недивергентной форме:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + c(\rho) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (3.49)$$

В своей модели [Zhang, 2002] предложил *относительную скорость распространения возмущений* выразить через производную оптимальной скорости: $c(\rho) = \rho \frac{\partial v(\rho)}{\partial \rho}$. С учетом этой зависимости в виде $c(\rho) = -\rho \frac{\partial p(\rho)}{\partial \rho}$ легко получить (3.49) из (3.48), раскрыв скобки и взяв соответствующие производные.

С физической точки зрения использование в (3.49) оптимальной скорости $V(\rho)$ вместо гладкой возрастающей функции $V(\rho) = \rho^\gamma$, $\gamma > 0$ понятно и логично (см. [Zhang, 2002]). Это очевидно потому, что зависимость оптимальной скорости от плотности $V(\rho)$ не может быть гладкой при переходе транспортного потока между его различными фазовыми состояниями. При этом автором в статье [Zhang, 2002] выражение для *относительной скорости распространения возмущений* $c(\rho) = \rho \frac{\partial v(\rho)}{\partial \rho}$ было получено из микроскопической модели *следования за лидером* [Helbing, 2001], тогда как мы смогли вывести выражение (3.45) для $c(\rho)^2 = \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho}\right)^2$ в обобщенном виде из дивергентной формы системы уравнений (3.43), не накладывая никаких дополнительных ограничений на вид зависимости скорости транспортного потока от его плотности: $v(\rho)$.

Подход, предложенный в статье [Zhang, 2002] для оценки *относительной скорости распространения возмущений* вполне оправдан, поскольку мы должны вычислять $c(\rho) = \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$ для каждого отдельного участка автомобильной дороги и сделать это можно только двумя способами:

- В первом случае мы вычисляем $c(\rho)$ с использованием известной зависимости оптимальной скорости от плотности, как это было предложено в оригинальной работе [Zhang, 2002]: $c(\rho) = \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}$. Причем зависимость оптимальной скорости от плотности $V(\rho)$ (фундаментальная диаграмма) может быть построена эмпирически с использованием данных детекторов транспорта, собранных за продолжительный период времени для каждого из участков транспортной сети.
- Во втором случае мы можем сделать это без построения фундаментальной диаграммы или эмпирической функции оптимальной скорости $V(\rho)$. Мы будем аппроксимировать значение *относительной скорости распространения возмущений* $c(\rho)$ с использованием текущих значений скорости и плотности транспортного потока, полученных от детекторов, установленных на заданном участке транспортной сети:

$$c(\rho) = \frac{\rho_{in} + \rho_{out}}{2} \left(\frac{v_{out} - v_{in}}{\rho_{out} - \rho_{in}} \right). \quad (3.50)$$

В (3.50), ρ_{in}, v_{in} и ρ_{out}, v_{out} обозначают значения плотности и скорости трафика на входе и выходе с заданного участка дороги, измеренные в данный момент времени. Если в какой-то момент времени окажется, что $\rho_{out} = \rho_{in}$ мы можем использовать их значения с предыдущего момента времени для предотвращения деления на ноль.

Теперь мы можем сказать, что с переходом от одномерных макроскопических моделей, использующих предположение, что все АТС движутся с оптимальной скоростью, получаемой из фундаментальной диаграммы для заданного участка

транспортной сети, мы не только отказываемся от этого предположения и вводим в модель реальную скорость транспортного потока, но также можем совсем отказаться от построения и использования фундаментальной диаграммы в нашей модели (3.32) через аппроксимацию текущего значения *относительной скорости распространения возмущений* $c(\rho)$, как это сделано в (3.50). Такой подход позволяет нашей модели эффективно адаптироваться к постоянно меняющейся дорожно-транспортной ситуации.

Собственные числа матриц Якоби A_0 в (3.49) или $\frac{\partial F}{\partial U} = \left(\frac{\partial U}{\partial W}\right) A_0 \left(\frac{\partial U}{\partial W}\right)^{-1}$ в (3.48) будут иметь теперь следующий вид:

$$A_0 = \begin{bmatrix} v & \rho \\ 0 & v + c(\rho) \end{bmatrix}, \det(A_0 - \lambda I) = 0, \Rightarrow (v - \lambda)(v + c(\rho) - \lambda) = 0, \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = v + c(\rho), \\ \lambda_2 = v. \end{cases}$$

В такой постановке, когда $\lambda_1 = v + c(\rho) = v + \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} \leq \lambda_2 = v$ становится очевидным, что АТС, движущиеся сзади, уже никак не могут воздействовать на движущихся впереди.

Такой же вид системы модельных уравнений, как и в (3.49), но с добавлением релаксационного члена $\beta(\rho, v)(V(\rho) - v)$ в правую часть, применялся в работах [Siebel, Mauser 2006a], [Siebel, Mauser 2006b]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \beta(\rho, v)(V(\rho) - v), \end{cases} \quad (3.51)$$

где в качестве оптимальной скорости бралась функция $V(\rho) = V_{\max} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^{n_1} \right)^{n_2}$ в работе [Siebel, Mauser 2006a] и функция $V(\rho) = V_{\max} \left(1 - \exp \left(- \frac{\lambda}{V_{\max} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{\max}} \right)} \right) \right)$ в работе [Siebel, Mauser 2006b].

Давайте теперь покажем, как можно перейти от системы уравнений (3.43) напрямую к (3.48) или от (3.42) к (3.49), используя полученное выражение для $\frac{\partial P}{\partial \rho} = c(\rho)^2 = \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho}\right)^2$. Для этого подставим $c(\rho)^2 = \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho}\right)^2$ во второе уравнении системы (3.42):

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c^2(\rho)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}\right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (v + c(\rho)) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.52)$$

В итоге мы получили макроскопическую модель второго порядка для плотности и скорости транспортного потока (3.32) с нулевой правой частью. И главное, нам не пришлось в (3.52) выбирать, какой знак должен быть у $c(\rho)$ при извлечении квадратного корня в выражении $c(\rho)^2 = \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho}\right)^2$, уравнение это сделало за нас:

$$c(\rho) = \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}.$$

Сформулируем полученные выше результаты в виде следующей теоремы.

Теорема. Любая макроскопическую система гиперболических уравнений второго порядка, описывающая автомобильное движение, может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = f_0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (v + c(\rho)) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho} f_0 + f_1 \end{cases} \quad (3.53)$$

путем использования выражения для *относительной скорости распространения возмущений* в транспортном потоке $c(\rho) = \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$. При этом f_0 в правой части системы (3.53) учитывает количество транспортных средств, которые прибывают или покидают автомобильную дорогу в единицу времени, а f_1 в правой части уравнения импульса соответственно играет роль релаксационного слагаемого в случае его необходимости.

Функции $Q(\rho)$ или $V(\rho)$ – зависимости интенсивности или оптимальной скорости от плотности, каждый исследователь может строить так, как ему больше нравится. Мы предлагаем делать это эмпирически для каждого отдельного участка транспортной сети с использованием алгоритма калибровки данных транспортных детекторов. Это подробно обсуждалось в первом разделе, где мы строили зависимость интенсивности транспортного потока от его плотности $Q(\rho) = \rho V(\rho)$ в соответствии с теорией трех фаз транспортного потока [Kerner, 2009].

Что касается использования в правой части уравнения изменения импульса релаксационного члена $f_1 = \frac{1}{\tau} (V(\rho) - v)$, то мы его в (3.32) отбрасываем, исходя из соображений, что все необходимые характеристики поведения транспортного потока автоматически учитываются при добавлении функциональной зависимости $c(\rho) = \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}$, полученной по данным измерений с автострадных датчиков, во второе уравнение (3.32).

Для верификации вышеизложенного подхода, в котором исследуемые макроэкономические модели второго порядка обобщаются путем использования выражения для *относительной скорости распространения возмущений* в транспортном потоке $c(\rho) = \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$, были выполнены вычисленные эксперименты на данных транспортных детекторов, предоставляемых системой PeMS [<http://pems.dot.ca.gov/>].

Проводилось моделирование движения трафика на заданном участке транспортной сети автострады I-580 в районе залива Сан-Франциско. Для этого использовались выбранные нами два детектора транспорта №1 и №2 (см. Рис. 3.21), расстояние между которыми составляет около километра и отсутствуют въезды и выезды с автодороги. Данные с детектора №1 (скорость и интенсивность транспортного потока) задавались в качестве граничных условий при моделировании поведения транспортного потока, а данные следующего по направлению движения детектора №2 использовались как тестовые для сравнения с ними полученных численных результатов. При этом на втором детекторе для моделируемых систем уравнений задавались неотражающие граничные условия в виде нулевых производных $(\partial Q/\partial x) = 0$, $(\partial v/\partial x) = 0$.

Расчет проводился для одних суток суммарно для всех четырёх полос автострады I-580. Результаты представлены на Рис. 3.23 для интенсивности (слева сверху) и скорости (слева внизу) транспортных потоков. Справа на Рис. 3.23 показаны относительные погрешности расчетов, представленные в логарифмическом масштабе, сверху – для интенсивности и внизу – для скорости. Исследуемые макроэкономические модели второго порядка (3.48) или (3.49) при проведении расчетов использовали функциональные зависимости $V(\rho)$, показанные на Рис. 3.22, для двух детекторов транспорта, установленных на автостраде I-580, и имели нулевые правые части, поскольку между детекторами отсутствуют въезды и выезды с автострады (см. Рис. 3.1). Система уравнений (3.32) также моделировалась с нулевой правой частью, но вместо эмпирической функциональной зависимости $c(\rho) = \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}$, использовалась разностная аппроксимация *относительной скорости*

распространения возмущений $c(\rho) = \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$ (3.50) с использованием текущих значений скорости и плотности транспортного потока.

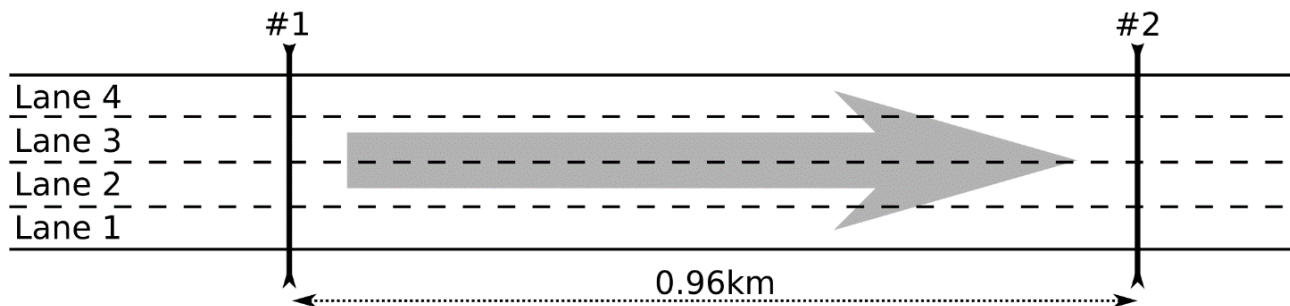


Рис. 3.21 Тестовые детекторы транспорта № 1 и № 2 выбранные на участке транспортной сети автострады I-580 в Калифорнии. Данные с детектора № 1 (скорость и интенсивность транспортного потока) задавались в качестве граничных условий при моделировании поведения транспортного потока, а данные следующего по направлению движения детектора № 2 использовались для сравнения с ними полученных численных результатов.

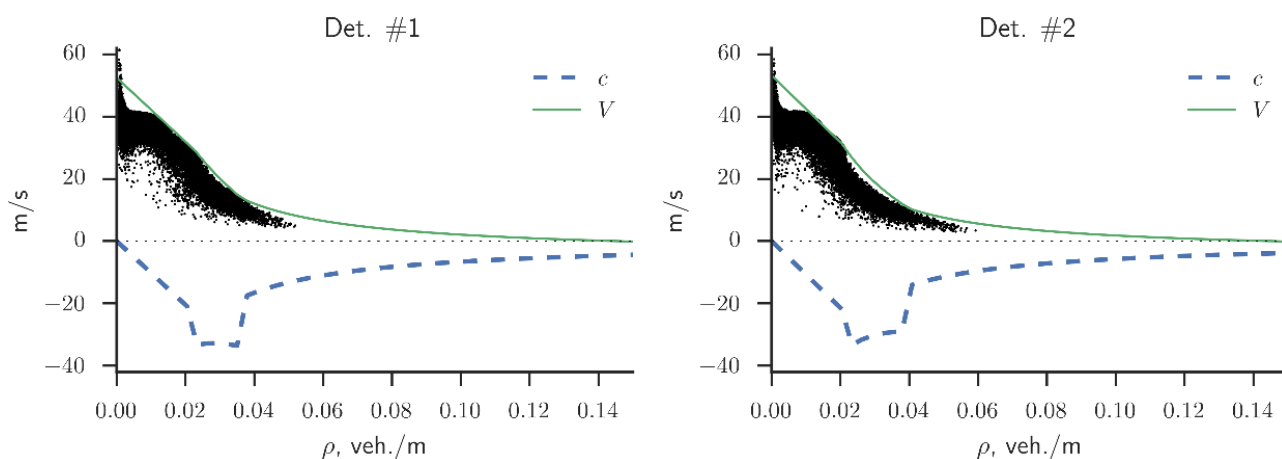


Рис. 3.22 Зависимости от плотности желаемой (оптимальной) скорости $V(\rho)$ (сплошная зеленая линия) и относительной скорости распространения возмущений $c(\rho) = \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}$ (пунктирная синяя линия) агрегированные по четырем полосам автострады I-580 в Калифорнии для двух детекторов транспорта: №1 – слева и №2 – справа, вместе с историческими данными (черные точки) за однолетний период, полученными с 5-минутным временным разрешением с использованием системы PeMS [<http://pems.dot.ca.gov/>].

Для детекторов транспорта, показанных на Рис. 3.22, использовались следующие коэффициенты и параметры фундаментальной диаграммы (3.2), построенной для четырех полос автострады I-580:

- детектор №1: $\rho_1 = 0.084$ [АТС/М], $\alpha_1 = 49.6$, $\alpha_2 = -293.2$, $\rho_2 = 0.141$ [АТС/М], $\beta_0 = 2.49$, $\beta_1 = -4.9$, $\beta_2 = 1.6$, $c_* = 4.20$ [М/с], $\rho_{max} = 0.58$ [АТС/М];

- детектор №2: $\rho_1 = 0.076$ [АТС/М], $\alpha_1 = 50.2$, $\alpha_2 = -295.7$, $\rho_2 = 0.165$ [АТС/М], $\beta_0 = 2.30$, $\beta_1 = -0.4$, $\beta_2 = -27.6$, $c_* = 3.58$ [М/с], $\rho_{max} = 0.58$ [АТС/М];

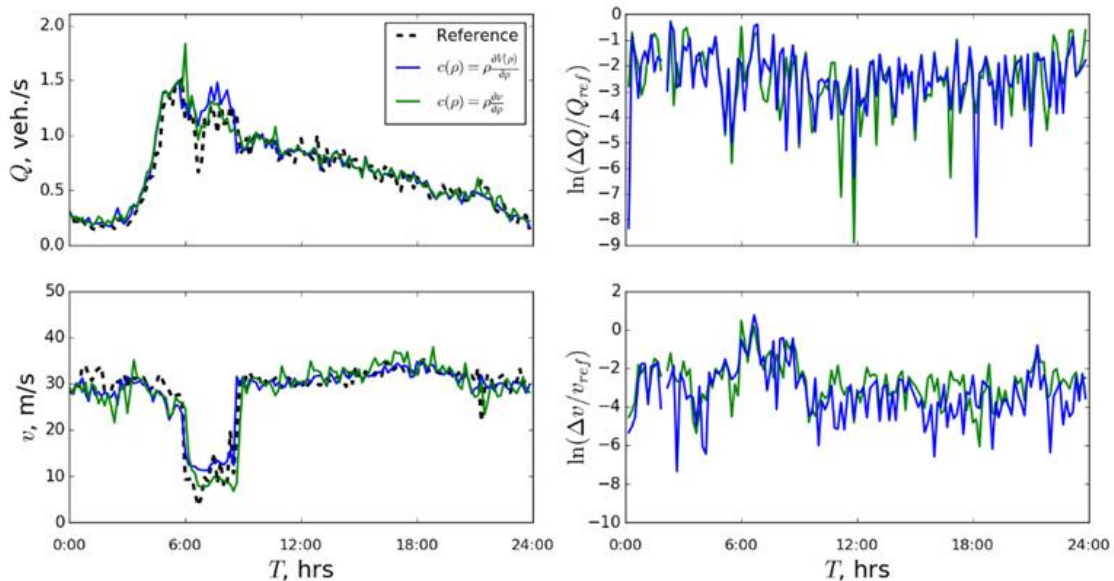


Рис. 3.23 Сравнение расчетных значений интенсивностей (слева сверху) и скоростей (слева внизу) транспортных потоков по всем четырем полосам автомагистрали I-580 за суточный период времени с данными экспериментальных наблюдений (пунктирные серые линии). Справа показаны относительные погрешности расчетов, представленные в логарифмическом масштабе, сверху для интенсивности и внизу для скорости. Результаты моделирования, полученные с использованием различных макроскопических моделей второго порядка, показаны разными цветами: зеленый – модель (3.32) с аппроксимацией зависимости $c(\rho) = \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$ в форме (3.50); синий – модель (3.48) или (3.49) с функциональной зависимостью $c(\rho) = \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}$, полученной из фундаментальной диаграммы, представленной на Рис. 3.22.

Численное моделирование показывает хорошее сопоставление результатов двух разных версий макроскопических моделей второго порядка. Также мы видим, что обе модели имеют хорошее совпадение с экспериментальными измерениями. Средние значения относительных погрешностей расчетов сравниваемых моделей

относительно измерений транспортного детектора составляет для скорости $\frac{\Delta v}{v_{ref}} = 0,19646$ [м/с] у модели (3.49) и $\frac{\Delta v}{v_{ref}} = 0,2331$ [м/с] у модели (3.32), соответственно для интенсивности $\frac{\Delta Q}{Q_{ref}} = 0,01237$ [АТС/с] у модели (3.49) и $\frac{\Delta Q}{Q_{ref}} = 0,01301$ [АТС/с] у модели (3.32).

Разница в результатах между этими двумя моделями обусловлена представлением в них *относительной скорости распространения возмущений* $c(\rho)$ при расчете. В случае модели (3.49) или (3.48) мы имеем непрерывную эмпирическую функцию $c(\rho) = \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}$ со значениями, зависящими только от плотности трафика в каждый момент времени. Во втором случае мы имеем дискретную функцию $c(\rho) = \frac{\rho_{in} + \rho_{out}}{2} \left(\frac{v_{out} - v_{in}}{\rho_{out} - \rho_{in}} \right)$ со значениями, зависящими как от плотности трафика, так и от его скорости. Кроме того, обычно существует текущая ошибка в измерениях детектора, которая сглаживается в случае модели (3.49), когда мы используем непрерывную функциональную зависимость $c(\rho) = \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}$.

Следующий вопрос, который стоит здесь обсудить – это анизотропия транспортного потока. Под анизотропией транспортного потока подразумевается, что у него, в отличие от газа, который является изотропным, всегда есть заданное направление движения, а именно – вперед вдоль дороги. В своей работе [Zhang, 2003] доказал теорему, определяющую свойства изотропии или анизотропии транспортного потока исходя из вида используемой фундаментальной диаграммы $Q(\rho)$. Анизотропия потока АТС определяются в этой работе достаточно просто – собственные значения матрицы Якоби, полученные при решении задачи Римана для модельной системы уравнений с произвольными начальными данными не должны превосходить по величине значение скорости транспортного потока в любой его точке. На практике это значит, что АТС, движущиеся сзади, не могут воздействовать на движущихся впереди, то есть возмущения могут распространяться только назад, а не вперед по потоку.

У системы уравнений (3.32) формально существует два собственных значения, с которым возмущения распространяется вдоль транспортного потока: $\lambda_1 = v + c(\rho) \leq \lambda_2 = v$, в такой постановке, становится очевидным, что анизотропия сохраняется и АТС, движущиеся сзади, никак не могут воздействовать на движущихся впереди.

В то же время, если мы посмотрим на фундаментальную диаграмму многополосной автодороги, представленную на Рис. 3.24, то видно, что она не сохраняет анизотропию транспортного потока при тех значениях плотности $0 \leq \rho \leq \rho_*$, для которых угол $\alpha_0 = \arctan\left(\frac{Q}{\rho} = v = \lambda_1\right) < \alpha_1 = \arctan\left(\frac{\partial Q}{\partial \rho} = v + c(\rho) = \lambda_2\right)$, как это показано на рисунке при $\rho = \rho_1$. И это вполне согласуется с результатами работы [Zhang, 2003], поскольку там также было показано, что для многополосной автодороги анизотропное свойство транспортного потока может нарушаться.

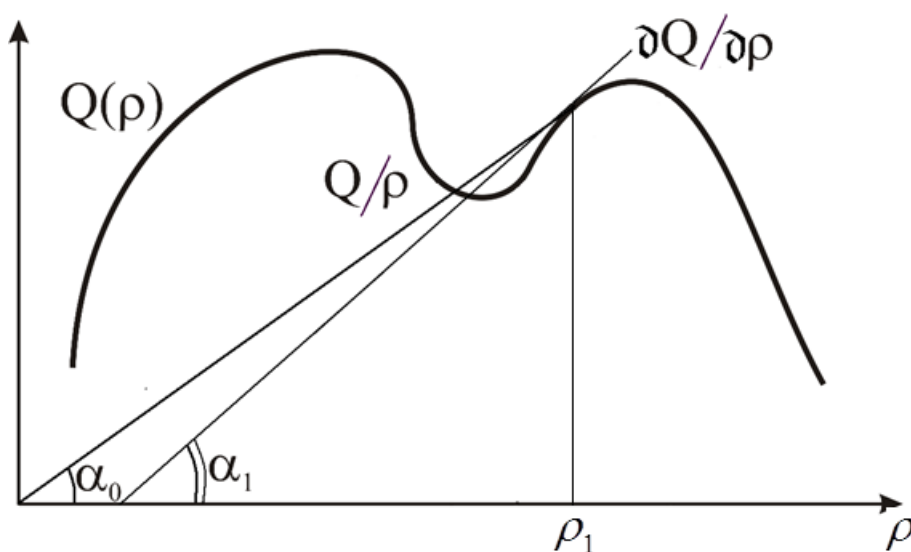


Рис. 3.24. Пример фундаментальной диаграммы, полученной по экспериментальным данным с четырех полос 3-го транспортного кольца г. Москвы на участке от Автозаводской улицы до Варшавского шоссе в 2005 г.

Если мы теперь посмотрим на Рис. 3.25, вряд ли мы сможем определить сколько существует реальных значений $\lambda_2 = \frac{\partial Q}{\partial \rho} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial \rho} = v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$ при плотности $\rho = 40$ [АТС/км]. Данные детектора, полученные в соседние моменты времени,

соединены на рисунке прямыми линиями, так что угол наклона каждой прямой представляет собой $\arctan\left(\frac{\Delta Q}{\Delta \rho}\right)$ и мы видим, что весьма часто при этом: $\lambda_1 = v = \frac{Q}{\rho} < \frac{\Delta Q}{\Delta \rho} = \lambda_2$.

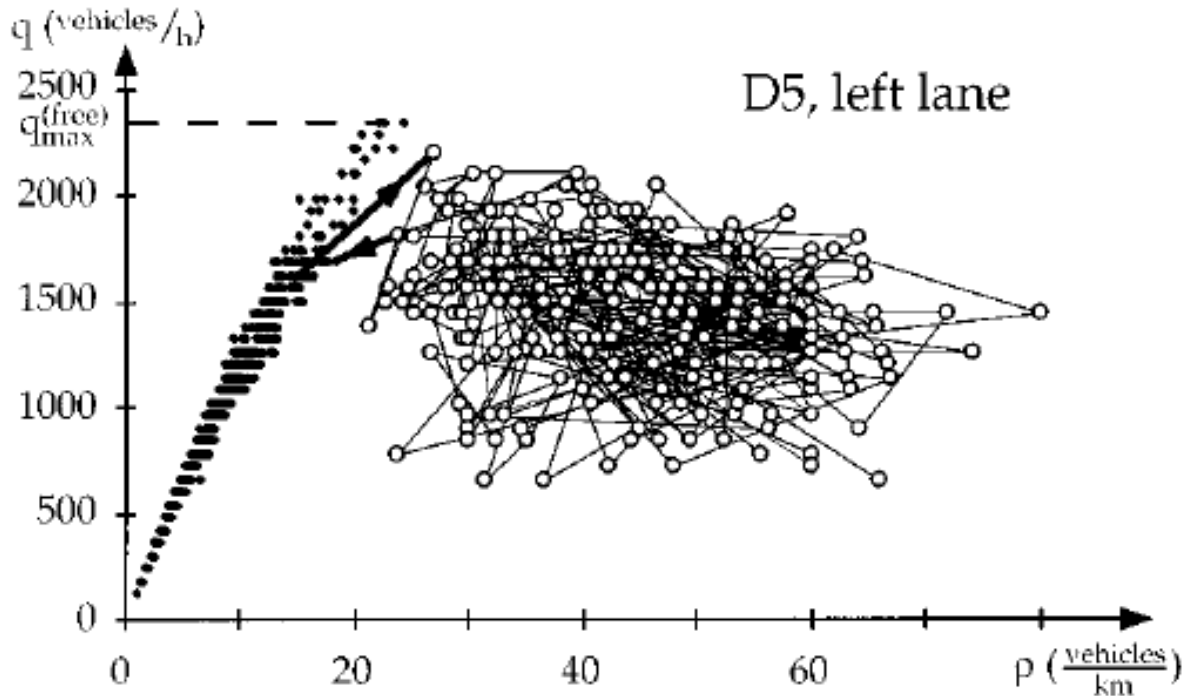


Рис. 3.25. Экспериментальные данные с детектора, установленного на левой полосе магистрального шоссе.

В конце этого раздела мы покажем в качестве упражнения, как система уравнений (3.43) может быть легко получена из системы уравнений [Aw, Rascle, 2000] (3.48) с использованием выражения для *относительной скорости распространения возмущений* в виде: $c(\rho) = -\rho \frac{\partial v(\rho)}{\partial \rho}$:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = \rho_t + (\rho v)_\rho \rho_x = 0, \\ \left((\rho(v + p(\rho)))_t + (\rho v(v + p(\rho)))_x = 0, \right. \end{cases} \Rightarrow \\
& \begin{cases} \rho_t + (\rho v)_\rho \rho_x = \rho_t + (v + \rho v_\rho) \rho_x = \rho_t + (v + c(\rho)) \rho_x = 0, \\ \left((\rho v)_t + \rho p_t + p \rho_t + (\rho v^2)_x + \rho v p_x + p(\rho v)_x = 0, \right. \end{cases} \Rightarrow \\
& \begin{cases} \rho p_\rho (\rho_t + (v + c) \rho_x) = \rho (p_t + v p_x) + c \rho p_\rho \rho_x = 0, \\ \left((\rho v)_t + (\rho v^2)_x + \rho (p_t + v p_x) + p(\rho_t + (\rho v)_x) = 0, \right. \end{cases} \Rightarrow \\
& \begin{cases} \rho (p_t + v p_x) - c^2 \rho_x = 0, \\ \left((\rho v)_t + (\rho v^2)_x + \rho (p_t + v p_x) = 0, \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho (p_t + v p_x) = c^2 \rho_x = P_x, \\ \left((\rho v)_t + (\rho v^2)_x + P_x = 0, \right. \end{cases} \Rightarrow \\
& \begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0, \\ \left((\rho v)_t + (\rho v^2 + P)_x = 0. \right. \end{cases}
\end{aligned}$$

И наоборот, получим теперь систему уравнений (3.48) из уравнений (3.43) с использованием вида $c(\rho) = -\rho \frac{\partial p(\rho)}{\partial \rho}$:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0, \\ \left((\rho v)_t + (\rho v^2 + P)_x = 0, \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0, \\ \left((\rho v)_t + (\rho v^2)_x + c^2 \rho_x = 0, \right. \end{cases} \\
& \begin{cases} c^2 \rho_x = \rho (p_t + v p_x), \\ \left((\rho v)_t + (\rho v^2)_x + \rho (p_t + v p_x) = 0, \right. \end{cases} \Rightarrow \\
& \begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0, \\ \left((\rho v)_t + (\rho v^2)_x + \rho (p_t + v p_x) + p(\rho_t + (\rho v)_x) = 0, \right. \end{cases} \Rightarrow \\
& \begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0, \\ \left((\rho v)_t + (\rho p)_t + (\rho v^2)_x + ((\rho v) p)_x = 0, \right. \end{cases} \Rightarrow \\
& \begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0, \\ \left((\rho(v + p(\rho)))_t + (\rho v(v + p(\rho)))_x = 0. \right. \end{cases}
\end{aligned}$$

В итоге получаем систему уравнений (3.48), что и требовалось доказать.

3.4 Построение вычислительных моделей на дорожном перекрестке

В данном разделе исследуется проблема построения математической модели автомобильного движения на регулируемом перекрестке произвольной конфигурации [Холодов и др., 2014]. При этом мы будем продолжать использовать макроскопический подход, когда транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений второго порядка (для плотности и скорости потока). Эта система замыкается уравнением состояния (зависимость давления от плотности), получаемым эмпирическим образом для данного участка транспортной сети. На данный момент нет общепринятого подхода, описывающего поведение движения автотранспорта на регулируемом перекрестке произвольной конфигурации. В литературе встречаются различные попытки решения проблемы при помощи макроскопических одномерных гиперболических систем уравнений гидродинамического типа, но все они реализуют упрощенное представление данной задачи — без учета реальной топологии перекрестка и времени работы фаз светофорной сигнализации [Coclite, Piccoli, 2005; Garavello, Piccoli, 2006; Haut, Bastin, 2007; Costeseque, Lebacque, 2012; Garavello, Piccoli, 2013].

В этих работах перекресток обычно представляется в виде произвольной узловой точки графа транспортной сети, в которую входит и из которой выходит некоторое количество однонаправленных ребер (дорог), Рис. 3.26. При этом особенности организации движения по полосам на перекрестке, также как и учет светофорной сигнализации, не рассматривается. Как правило, авторами ищется решение обобщенной задачи Римана для заданной топологии узла на основе одномерных гиперболических систем уравнений, описывающих автомобильное движение в форме дифференциальных законов сохранения (изменения) «массы» и «импульса» на автодорогах, примыкающих к нему. Проблема заключается в том, что решение задачи Римана в такой постановке не является единственным, и поэтому исследователям приходится налагать дополнительные ограничения на область возможных решений для получения «оптимального».

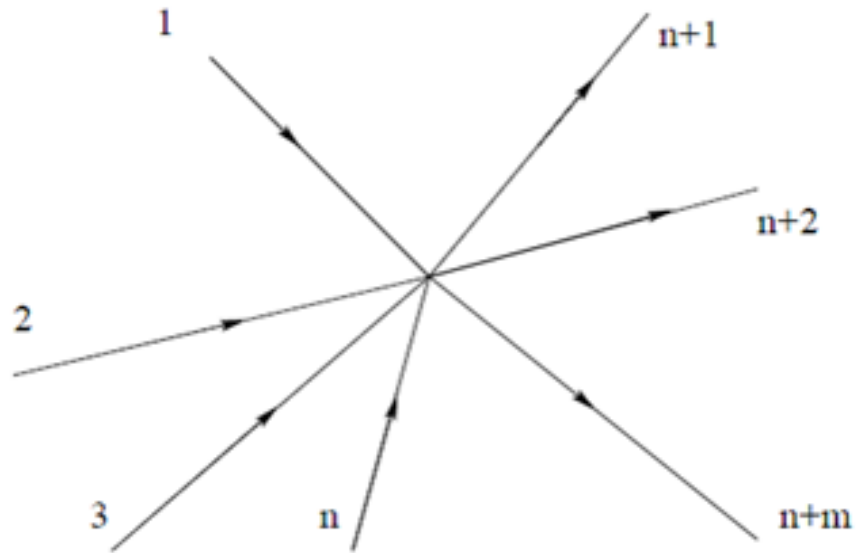


Рис. 3.26. Пример перекрёстка, представляемого в виде произвольной узловой точки графа транспортной сети с n входящими и m выходящими из него ребрами (автодорогами).

Автомобильное движение на регулируемом перекрестке произвольной конфигурации в отличие от системы уравнений (3.32), в силу использования двух направлений движения, следует рассматривать в двумерной постановке с двумя компонентами скорости: v_x и v_y . Закон сохранения количества АТС для двумерного движения трафика имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Все что нам требуется, это добавить к уравнению (3.54) уравнения для двух компонент импульса транспортного потока. Мы это сделаем как обычно умножим (3.54) на $\frac{\partial v_x}{\partial \rho}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_x}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial \rho} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = \\
& = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial \rho} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial \rho} \frac{\partial v_y}{\partial y} = \\
& \frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(v_x + \rho \frac{\partial v_x}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \left(v_y + \rho \frac{\partial v_y}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v_x}{\partial y} = \\
& = \frac{\partial v_x}{\partial t} + (v_x + c_x) \frac{\partial v_x}{\partial x} + (v_y + c_y) \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0,
\end{aligned} \tag{3.55}$$

и на $\frac{\partial v_y}{\partial \rho}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_y}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial \rho} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = \\
& = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial \rho} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial \rho} \frac{\partial v_y}{\partial y} = \\
& \frac{\partial v_y}{\partial t} + \left(v_x + \rho \frac{\partial v_x}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v_y}{\partial x} + \left(v_y + \rho \frac{\partial v_y}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v_y}{\partial y} = \\
& = \frac{\partial v_y}{\partial t} + (v_x + c_x) \frac{\partial v_y}{\partial x} + (v_y + c_y) \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

В (3.55-3.56) $c_x(\rho) = \rho \frac{\partial v_x}{\partial \rho}$ и $c_y(\rho) = \rho \frac{\partial v_y}{\partial \rho}$, введение обозначений $c_x(\rho)$ и $c_y(\rho)$ весьма условно и просто отражает тот факт, что возмущения в транспортном потоке, как и он сам, могут распространяться по двум ортогональным направлениям. Осталось теперь (3.55-3.56) объединить в общую систему и получить систему уравнений для автомобильного движения на перекрестке с двумя компонентами скорости:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + (v_x + c_x) \frac{\partial v_x}{\partial x} + (v_y + c_y) \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + (v_x + c_x) \frac{\partial v_y}{\partial x} + (v_y + c_y) \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (3.57)$$

В (3.57) v_x и v_y теперь уже компоненты скорости транспортного потока в рассчитываемой точке на перекрестке в направлении осей x и y . Правые части в системе (3.57) берем нулевыми поскольку считаем, что все АТС, въезжающие на перекресток, должны с него выехать в силу выполнения закона сохранения потока. Систему уравнений (3.57) можно переписать в упрощённом виде с учетом того, что $Q_x = \rho v_x$ и $Q_y = \rho v_y$ есть компоненты интенсивности транспортного потока по двум направлениям движения и $\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$, поскольку водители, как правило, не меняют полосу движения при пересечении перекрестка:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + (v_x + c_x) \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + (v_y + c_y) \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (3.58)$$

Прежде чем перейти к построению модели расчета движения транспорта для перекрестка произвольной конфигурации, рассмотрим в качестве примера перекресток, представленный на Рис. 3.27.

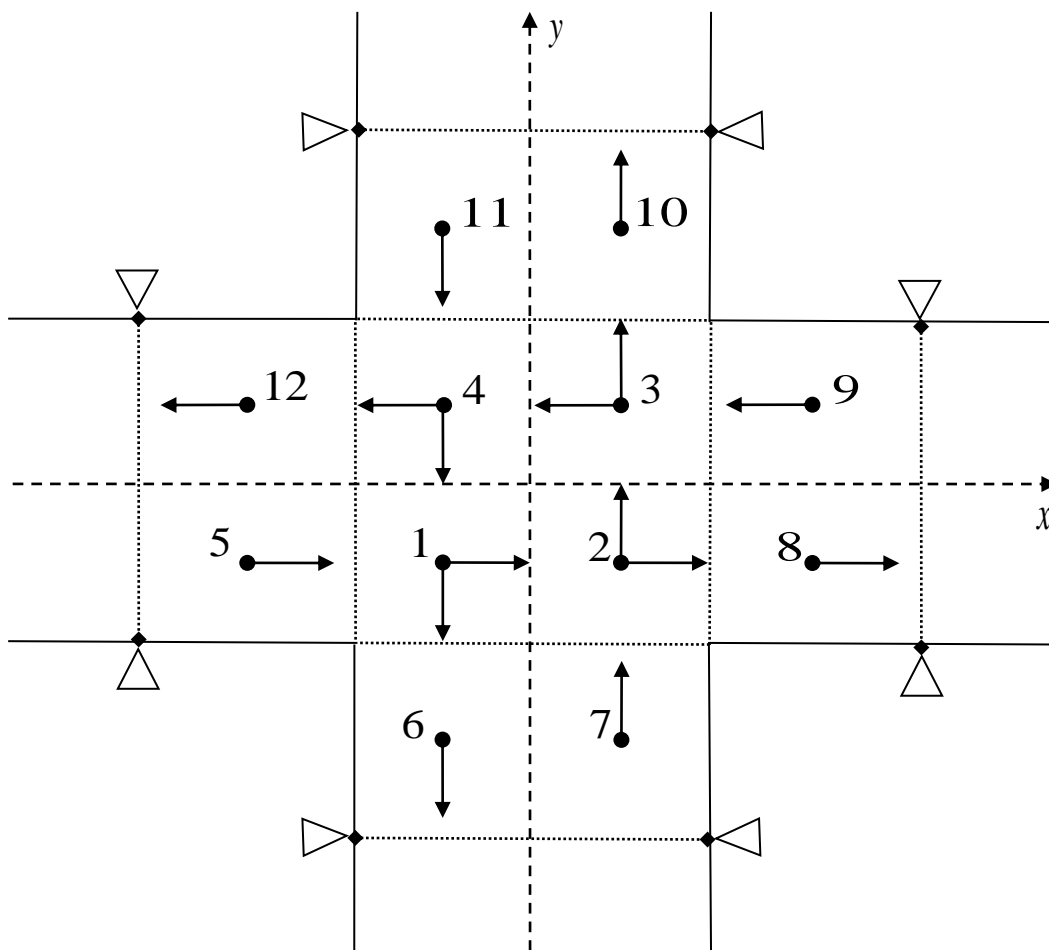


Рис. 3.27. Пример регулируемого перекрестка с двухсторонним движением по каждой из дорог, разрешенные направления движения на перекрестке показаны стрелками в его четырех секторах с центрами в точках 1-4.

Для заданного перекрестка ограничимся для наглядности двумя светофорными фазами, а именно, когда для одной дороги (идушей вдоль оси x) на Рис. 3.27, горит зеленый свет, а для другой (идушей вдоль оси y) горит красный и наоборот. В силу симметрии перекрестка выбор светофорной фазы для каждой из дорог не принципиален. Считаем, что значения скоростей и интенсивностей транспортных потоков на въездах и выездах с перекрестка в точках 5-12 в данный момент времени нам известны из показаний датчиков, обозначенных на Рис. 3.27 треугольниками.

Перекресток, представленный на Рис. 3.27 можно представить в виде комбинации четырех более простых элементов (секторов), показанных на Рис. 3.28.

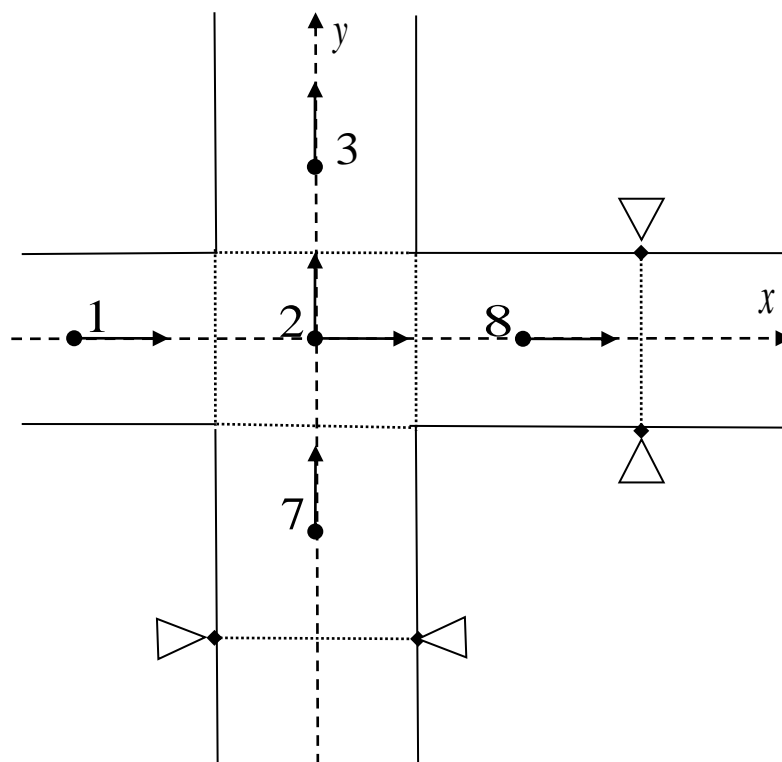


Рис. 3.28. Пример одного из четырех составных элементов регулируемого перекрестка, представленного на Рис. 6.1 (сектор № 2), разрешенные направления движения показаны стрелками.

Коэффициенты перераспределений потоков по направлениям движения (x,y) на границе сектора перекрестка легко определяются из показаний датчиков:

$$\begin{cases} \alpha_{1,2} = \frac{Q_3}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_8}{Q_1}, & \text{зеленый свет по } x, \\ \alpha_{7,2} = \frac{Q_8}{Q_7} = \frac{Q_7 - Q_3}{Q_7}, & \text{зеленый свет по } y, \end{cases} \quad (3.59)$$

$\alpha_{1,2}$ и $\alpha_{7,2}$ в (3.59) представляют собой те АТС, которые осуществляет поворот при проезде данного сегмента перекрестка.

Запишем разностную аппроксимацию системы уравнений (3.58), решаемой в секторе перекрестка, с учетом направлений координатных осей и компонентов скоростей в секторе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_2^{n+1} - \rho_2^n}{\Delta t} + \frac{Q_{2,8}^n - Q_{1,2}^n}{\Delta x} + \frac{Q_{2,3}^n - Q_{7,2}^n}{\Delta y} = 0, \\ \frac{v_{x,2}^{n+1} - v_{x,2}^n}{\Delta t} + \left(v_{x,2}^n + c_x(\rho_2^n) \right) \frac{v_{2,8}^n - v_{1,2}^n}{\Delta x} = 0, \\ \frac{v_{y,2}^{n+1} - v_{y,2}^n}{\Delta t} + \left(v_{y,2}^n + c_y(\rho_2^n) \right) \frac{v_{2,3}^n - v_{7,2}^n}{\Delta y} = 0. \end{array} \right. \quad (3.60)$$

В (3.60) Δt — шаг по времени, Δx и Δy — пространственные размеры сектора. Осталось теперь только определить, как будут вычисляться промежуточные значения переменных $\rho_{i,j}^n$, $v_{i,j}^n$, $Q_{i,j}^n$, которые находятся на границе сектора перекрестка между точками (1,2), (7,2), (2,8) и (2,3).

Начнем их вычисление с очевидных оценок, а именно, если у нас горит красный сигнал светофора для дороги, идущей вдоль оси y , то значения $v_{7,2}^n$, $Q_{7,2}^n$ будут равны нулю. Если светофор красный для дороги, идущей вдоль оси x , то равны нулю будут значения $v_{1,2}^n$, $Q_{1,2}^n$. Значения плотностей транспортного потока на границе секторов перекрестка $\rho_{i,j}^n$ в этом случае могут быть вычислены по простейшей формуле линейной интерполяции:

$$\rho_{i,j}^n = \frac{\Delta_j}{\Delta_{i,j}} \rho_i^n + \frac{\Delta_i}{\Delta_{i,j}} \rho_j^n,$$

здесь $\Delta_{i,j}$ — расстояние между точками с номерами i и j , а Δ_i и Δ_j — расстояния от этих точек до границы сектора, находящейся между ними.

Для того чтобы вычислить значения $\rho_{i,j}^n$, $v_{i,j}^n$, $Q_{i,j}^n$ на границах сектора не перекрытых красным сигналом светофора мы воспользуемся теми же интерполяционными выражениями для $Q_{m+1/2}^n$ и $v_{m+1/2}^n$, что использовались нами в предыдущем разделе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Q}_{m+1/2}^n = \frac{1}{2}(\mathcal{Q}_m^n + \mathcal{Q}_{m+1}^n) + \frac{1}{2}|\mathcal{Q}_\rho|_{m+1/2}^n (\rho_m^n - \rho_{m+1}^n), \\ v_{m+1/2}^n = \frac{1}{2}(v_m^n + v_{m+1}^n) + \frac{1}{2} \frac{|\mathcal{Q}_\rho|_{m+1/2}^n}{(\mathcal{Q}_\rho)_{m+1/2}^n} (v_m^n - v_{m+1}^n) = \\ = \frac{1}{2}(v_m^n + v_{m+1}^n) + \frac{1}{2} \text{sign}(\mathcal{Q}_\rho)_{m+1/2}^n (v_m^n - v_{m+1}^n), \\ |\mathcal{Q}_\rho|_{m+1/2}^n = \frac{1}{2} \left| (\mathcal{Q}_\rho)_m^n + (\mathcal{Q}_\rho)_{m+1}^n \right|, \quad \rho_{m+1/2}^n = \frac{\mathcal{Q}_{m+1/2}^n}{v_{m+1/2}^n}. \end{array} \right. \quad (3.61)$$

Покажем, как это работает на примере ребер, находящихся между точками (1,2) и (2,3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Q}_{1,2}^n = \frac{1}{2}(\mathcal{Q}_{x,1}^n + \mathcal{Q}_{x,2}^n) + \frac{1}{2}|\mathcal{Q}_\rho|_{1,2}^n (\rho_1^n - \rho_2^n), \\ v_{1,2}^n = \frac{1}{2}(v_{x,1}^n + v_{x,2}^n) + \frac{1}{2} \text{sign}(\mathcal{Q}_\rho)_{1,2}^n (v_{x,1}^n - v_{x,2}^n), \\ (\mathcal{Q}_\rho)_{1,2}^n = v_{x,2}^n + \rho_2^n \frac{\partial V}{\partial \rho}(\rho_2^n), \quad \rho_{1,2}^n = \frac{\mathcal{Q}_{1,2}^n}{v_{1,2}^n}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Q}_{2,3}^n = \frac{1}{2}(\mathcal{Q}_{y,2}^n + \mathcal{Q}_{y,3}^n) + \frac{1}{2}|\mathcal{Q}_\rho|_{2,3}^n (\rho_2^n - \rho_3^n), \\ v_{2,3}^n = \frac{1}{2}(v_{y,2}^n + v_{y,3}^n) + \frac{1}{2} \text{sign}(\mathcal{Q}_\rho)_{2,3}^n (v_{y,2}^n - v_{y,3}^n), \\ (\mathcal{Q}_\rho)_{2,3}^n = v_{y,2}^n + \rho_2^n \frac{\partial V}{\partial \rho}(\rho_2^n), \quad \rho_{2,3}^n = \frac{\mathcal{Q}_{2,3}^n}{v_{2,3}^n}. \end{array} \right.$$

В разностной аппроксимации (3.60) необходимо также учесть перераспределение потоков на границах сектора, вызванное поворотами водителей направо и налево при движении на перекрестке. Сделаем это при помощи известных нам коэффициентов $\alpha_{1,2}$ и $\alpha_{7,2}$ из (3.59), при этом надо не забывать, что потоки сохраняют свой знак и закон сохранения потока должен по-прежнему выполняться внутри каждого сектора.

В соответствии с этими правилами, на ребро 2,8 переносим часть потока $\alpha_{7,2}Q_{7,2}$, повернувшего с ребра 7,2 направо, и забираем часть потока $\alpha_{1,2}Q_{1,2}$, повернувшего с ребра 1,2 налево, в результате получаем новое значение потока $\tilde{Q}_{2,8} = Q_{2,8} + \alpha_{7,2}Q_{7,2} - \alpha_{1,2}Q_{1,2}$. То же самое делаем на ребре 2,3: переносим часть потока $\alpha_{1,2}Q_{1,2}$, повернувшего с ребра 1,2 налево, и забираем часть потока $\alpha_{7,2}Q_{7,2}$, повернувшего с ребра 7,2 направо, в результате получаем новое значение потока $\tilde{Q}_{2,3} = Q_{2,3} + \alpha_{1,2}Q_{1,2} - \alpha_{7,2}Q_{7,2}$. Новые значения потоков $\tilde{Q}_{2,8}$ и $\tilde{Q}_{2,3}$ можно использовать, чтобы получить новые значения плотностей $\tilde{\rho}_{2,8} = \frac{\tilde{Q}_{2,8}}{v_{2,8}}$ и $\tilde{\rho}_{2,3} = \frac{\tilde{Q}_{2,3}}{v_{2,3}}$ на границах сектора, значения скоростей $v_{2,8}$ и $v_{2,3}$ при этом мы оставляем прежними. Полученные значения потоков и плотностей подставляем в (3.60):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_2^{n+1} - \rho_2^n}{\Delta t} + \frac{(Q_{2,8}^n + \alpha_{7,2}Q_{7,2}^n - \alpha_{1,2}Q_{1,2}^n) - Q_{1,2}^n}{\Delta x} + \\ + \frac{(Q_{2,3}^n + \alpha_{1,2}Q_{1,2}^n - \alpha_{7,2}Q_{7,2}^n) - Q_{7,2}^n}{\Delta y} = 0, \\ \frac{v_{x,2}^{n+1} - v_{x,2}^n}{\Delta t} + (v_{x,2}^n + c_x(\rho_2^n)) \frac{v_{2,8}^n - v_{1,2}^n}{\Delta x} = 0, \\ \frac{v_{y,2}^{n+1} - v_{y,2}^n}{\Delta t} + (v_{y,2}^n + c_y(\rho_2^n)) \frac{v_{2,3}^n - v_{7,2}^n}{\Delta y} = 0. \end{array} \right. \quad (3.62)$$

Этот же алгоритм можно одновременно применить ко всем четырем секторам перекрестка, изображенного на Рис. 3.27, с учетом того, что локальные системы координат совпадают с направлениями движения в каждом из секторов:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\rho_1^{n+1} - \rho_1^n}{\Delta t} + \frac{(\mathcal{Q}_{1,2}^n + \alpha_{4,1}\mathcal{Q}_{4,1}^n - \alpha_{5,1}\mathcal{Q}_{5,1}^n) - \mathcal{Q}_{5,1}^n}{\Delta x} + \frac{(\mathcal{Q}_{1,6}^n + \alpha_{5,1}\mathcal{Q}_{5,1}^n - \alpha_{4,1}\mathcal{Q}_{4,1}^n) - \mathcal{Q}_{4,1}^n}{\Delta y} = 0, \\
\frac{v_{x,1}^{n+1} - v_{x,1}^n}{\Delta t} + (v_{x,1}^n + c_x(\rho_1^n)) \frac{v_{1,2}^n - v_{5,1}^n}{\Delta x} = 0, \\
\frac{v_{y,1}^{n+1} - v_{y,1}^n}{\Delta t} + (v_{y,1}^n + c_y(\rho_1^n)) \frac{v_{1,6}^n - v_{4,1}^n}{\Delta y} = 0, \\
\frac{\rho_2^{n+1} - \rho_2^n}{\Delta t} + \frac{(\mathcal{Q}_{2,8}^n + \alpha_{7,2}\mathcal{Q}_{7,2}^n - \alpha_{1,2}\mathcal{Q}_{1,2}^n) - \mathcal{Q}_{1,2}^n}{\Delta x} + \frac{(\mathcal{Q}_{2,3}^n + \alpha_{1,2}\mathcal{Q}_{1,2}^n - \alpha_{7,2}\mathcal{Q}_{7,2}^n) - \mathcal{Q}_{7,2}^n}{\Delta y} = 0, \\
\frac{v_{x,2}^{n+1} - v_{x,2}^n}{\Delta t} + (v_{x,2}^n + c_x(\rho_2^n)) \frac{v_{2,8}^n - v_{1,2}^n}{\Delta x} = 0, \\
\frac{v_{y,2}^{n+1} - v_{y,2}^n}{\Delta t} + (v_{y,2}^n + c_y(\rho_2^n)) \frac{v_{2,3}^n - v_{7,2}^n}{\Delta y} = 0, \\
\frac{\rho_3^{n+1} - \rho_3^n}{\Delta t} + \frac{(\mathcal{Q}_{3,4}^n + \alpha_{2,3}\mathcal{Q}_{2,3}^n - \alpha_{9,3}\mathcal{Q}_{9,3}^n) - \mathcal{Q}_{9,3}^n}{\Delta x} + \frac{(\mathcal{Q}_{3,10}^n + \alpha_{9,3}\mathcal{Q}_{9,3}^n - \alpha_{2,3}\mathcal{Q}_{2,3}^n) - \mathcal{Q}_{2,3}^n}{\Delta y} = 0, \\
\frac{v_{x,3}^{n+1} - v_{x,3}^n}{\Delta t} + (v_{x,3}^n + c_x(\rho_3^n)) \frac{v_{3,4}^n - v_{9,3}^n}{\Delta x} = 0, \\
\frac{v_{y,3}^{n+1} - v_{y,3}^n}{\Delta t} + (v_{y,3}^n + c_y(\rho_3^n)) \frac{v_{3,10}^n - v_{2,3}^n}{\Delta y} = 0, \\
\frac{\rho_4^{n+1} - \rho_4^n}{\Delta t} + \frac{(\mathcal{Q}_{4,12}^n + \alpha_{11,4}\mathcal{Q}_{11,4}^n - \alpha_{3,4}\mathcal{Q}_{3,4}^n) - \mathcal{Q}_{3,4}^n}{\Delta x} + \frac{(\mathcal{Q}_{4,1}^n + \alpha_{3,4}\mathcal{Q}_{3,4}^n - \alpha_{11,4}\mathcal{Q}_{11,4}^n) - \mathcal{Q}_{11,4}^n}{\Delta y} = 0, \\
\frac{v_{x,4}^{n+1} - v_{x,4}^n}{\Delta t} + (v_{x,4}^n + c_x(\rho_4^n)) \frac{v_{4,12}^n - v_{3,4}^n}{\Delta x} = 0, \\
\frac{v_{y,4}^{n+1} - v_{y,4}^n}{\Delta t} + (v_{y,4}^n + c_y(\rho_4^n)) \frac{v_{4,1}^n - v_{11,4}^n}{\Delta y} = 0.
\end{array} \right. \quad (3.63)$$

Стоит отдельно отметить, что значения переменных на границах между секторами перекрестка и примыкающими к нему дорогами: $(\rho_{5,1}, v_{5,1})$, $(\rho_{7,2}, v_{7,2})$, $(\rho_{9,3}, v_{9,3})$, $(\rho_{11,4}, v_{11,4})$ и $(\tilde{\rho}_{1,6}, v_{1,6})$, $(\tilde{\rho}_{2,8}, v_{2,8})$, $(\tilde{\rho}_{3,10}, v_{3,10})$, $(\tilde{\rho}_{4,12}, v_{4,12})$, также необходимо использовать в качестве значений векторов $[\rho, v]_{m\pm 1/2}^T$ в разностной аппроксимации (3.38) в граничных узлах (5-12), примыкающих к

перекрестку дорог. Значения переменных в них, найденные нами, представляют собой граничные условия для системы уравнений (3.32), которые обеспечивают нам связь рассчитываемых величин на всем графе транспортной сети.

Следующая конфигурация, которую следует рассмотреть отдельно, это перекресток с круговым движением. В рамках предлагаемого подхода его можно представить, как набор Т-образных нерегулируемых перекрёстков (см. Рис. 3.29), последовательно соединённых между собой.

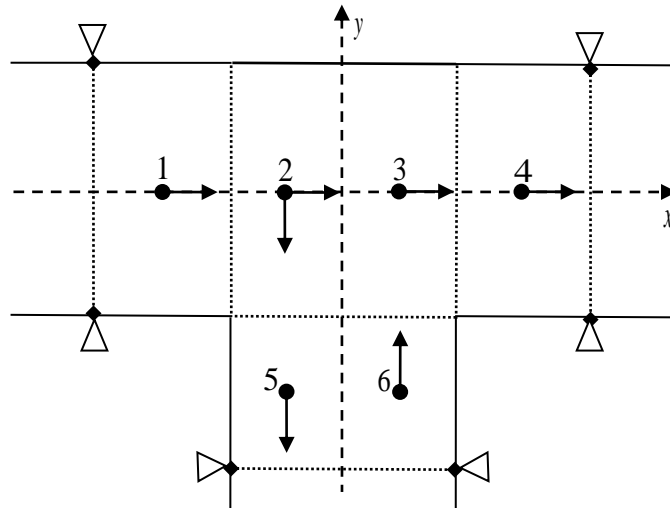


Рис. 3.29. Пример Т-образного нерегулируемого перекрестка, разрешенные направления движения на перекрестке показаны стрелками в его двух секторах с центрами в точках 2 и 3.

В свою очередь данный Т-образный перекресток может быть представлен в виде комбинации двух более простых элементов (секторов), показанных на Рис. 3.30.

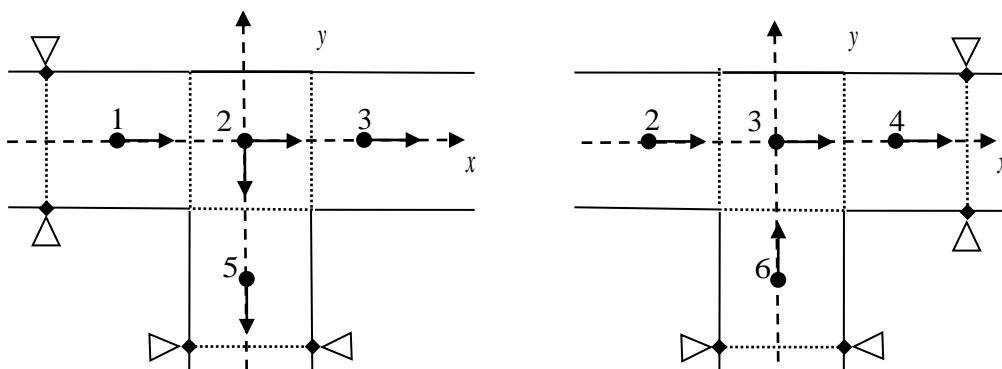


Рис. 3.30. Пример двух простых элементов (секторов) образующих Т-образный нерегулируемый перекресток, представленный на Рис. 6.3, разрешенные направления движения показаны стрелками.

Запишем разностную аппроксимацию системы уравнений (3.58), решаемой в каждом из двух секторов перекрестка, с учетом перераспределения потоков на границах секторов, вызванных поворотами водителей при движении на перекрестке:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_2^{n+1} - \rho_2^n}{\Delta t} + \frac{\left(Q_{2,3}^n - \left(Q_5^n / Q_1^n\right) Q_{1,2}^n\right) - Q_{1,2}^n}{\Delta x} + \frac{Q_{2,5}^n + \left(Q_5^n / Q_1^n\right) Q_{1,2}^n}{\Delta y} = 0, \\ \frac{v_{x,2}^{n+1} - v_{x,2}^n}{\Delta t} + \left(v_{x,2}^n + c_x\left(\rho_2^n\right)\right) \frac{v_{2,3}^n - v_{1,2}^n}{\Delta x} = 0, \\ \frac{v_{y,2}^{n+1} - v_{y,2}^n}{\Delta t} + \left(v_{y,2}^n + c_y\left(\rho_2^n\right)\right) \frac{v_{2,5}^n}{\Delta y} = 0, \\ \frac{\rho_3^{n+1} - \rho_3^n}{\Delta t} + \frac{\left(Q_{3,4}^n + Q_{6,3}^n\right) - Q_{2,3}^n}{\Delta x} = 0, \\ \frac{v_{x,3}^{n+1} - v_{x,3}^n}{\Delta t} + \left(v_{x,3}^n + c_x\left(\rho_3^n\right)\right) \frac{v_{3,4}^n - v_{2,3}^n}{\Delta x} = 0, \end{array} \right. \quad (3.64)$$

при этом в системе (3.64) коэффициенты перераспределений потоков по направлениям движения $\alpha_{1,2} = \frac{Q_5^n}{Q_1^n}$ и $\alpha_{6,3} = 1$ применяются в явном виде.

Подход, применяемый при выводе систем уравнений (3.63), (3.64), может быть легко адаптирован для перекрестка любой конфигурации. Этот подход позволяет представить любой перекресток в виде ограниченного набора стандартных элементов (секторов), системы уравнений для которых нами уже построены. Все что нужно, это аккуратно их связать в одну систему уравнений, используя общие граничные условия.

Тем не менее, у предложенного подхода (3.63), (3.64) есть один существенный недостаток. При его применении приходится сильно уменьшать временной шаг численного интегрирования при моделировании транспортной сети. Связано это с тем, что разностная аппроксимация системы уравнений перекрестка (3.58) построена с использованием явной по времени схемы, что накладывает ограничение

Куранта на шаг интегрирования по времени: $\Delta t = \min_{x,y} \left\{ \frac{\Delta x}{|\lambda_{x,max}|}, \frac{\Delta y}{|\lambda_{y,max}|} \right\}$. В силу

небольших геометрических размеров секторов перекрестка расстояния $\{\Delta x, \Delta y\}$ на них обычно на порядок меньше, чем пространственный шаг разностной сетки на примыкающих к нему дорогах. Это в свою очередь приводит к пропорциональному уменьшению временного шага интегрирования на всей моделируемой транспортной сети. Это крайне нежелательно, так как приводит к избыточным вычислениям и заметно увеличивает общее время расчёта.

Это ограничение можно снять если вернуться к одномерной по пространству математической модели на перекрестке (3.32), а поворачивающие АТС учесть с помощью расщепления транспортного потока на компоненты в зависимости от направления движения АТС. Поясним эту идею на примере Т-образного нерегулируемого перекрёстка (Рис. 3.31).

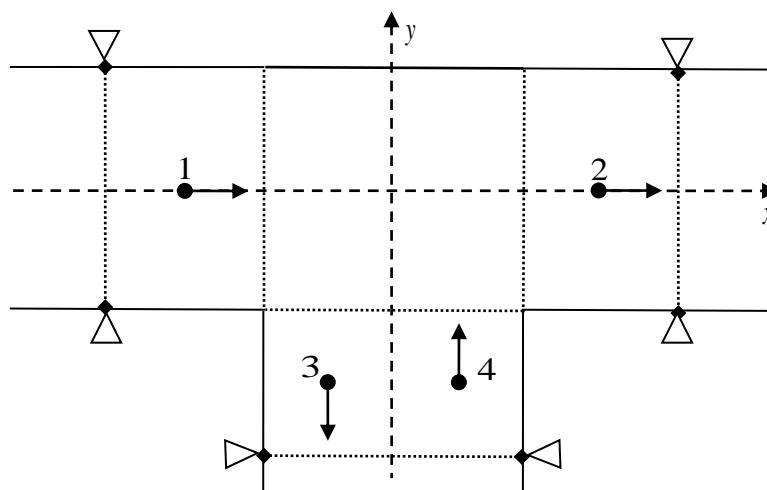


Рис. 3.31 Пример Т-образного нерегулируемого перекрестка с одним общим сектором в центре.

В точке с номером 1, находящейся в конце дороги, входящей в перекресток, проведем расщепление транспортного потока на две компоненты: первую, двигающуюся прямо к точке с номером 2 и вторую, поворачивающую направо к точке с номером 3. Будем полагать для каждой из двух компонент транспортного потока выполняются следующие равенства:

$$C_{1,3} = \frac{Q_3}{Q_1}, \quad C_{1,2} = 1 - C_{1,3}, \quad v_{1,3} = v_{1,2} = v_1, \quad \rho_{1,3} = C_{1,3}\rho_1, \quad \rho_{1,2} = C_{1,2}\rho_1. \quad (3.65)$$

И наоборот, в точке с номером 2, находящейся в начале дороги, выходящей из перекрестка, сделаем слияние двух компонент транспортного потока: первой, движущейся прямо в точку 2 из точки с номером 1 и второй, поворачивающей направо к точке 2 из точки с номером 4. Для поворачивающей из точки 4 компоненты транспортного потока будем полагать выполнение следующих равенств:

$$C_{4,2} = \frac{Q_4}{Q_2}, \quad v_{4,2} = v_2, \quad \rho_{4,2} = \rho_4. \quad (3.66)$$

Точки 1 и 4 являются последними, а точки 2 и 3 – первыми в одномерных системах координат соответствующих дорог, примыкающих к Т-образному перекрестку. Мы должны это корректно учесть при построении разностной схемы (3.38) в этих точках через разностную интерполяцию промежуточных значений $G_{m\pm 1/2}^{n+1/2} = (AW)_{m\pm 1/2}^{n+1/2}$, с учетом (3.65)-(3.66):

$$\begin{cases} G_{1/2}^{n+1/2} = (AW)_{1,2/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} A_{1,2/2}^n (W_{1,2}^n + W_2^n) + \frac{1}{2} (\Omega^{-1} |\Lambda| \Omega)_{1,2/2}^n (W_{1,2}^n - W_2^n), \\ G_{1/3}^{n+1/2} = (AW)_{1,3/3}^{n+1/2} = \frac{1}{2} A_{1,3/3}^n (W_{1,3}^n + W_3^n) + \frac{1}{2} (\Omega^{-1} |\Lambda| \Omega)_{1,3/3}^n (W_{1,3}^n - W_3^n), \\ G_{4/2}^{n+1/2} = (AW)_{4/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} A_{4/2}^n (W_4^n + W_2^n) + \frac{1}{2} (\Omega^{-1} |\Lambda| \Omega)_{4/2}^n (W_4^n - W_2^n). \end{cases} \quad (3.67)$$

Следует также понимать, что $G_{1/2}^{n+1/2} = G_{m+1/2}^{n+1/2}$ в разностной схеме (3.38) для транспортного потока, движущегося прямо в точку 1 и $G_{1/2}^{n+1/2} = G_{m-1/2}^{n+1/2}$ в разностной схеме (3.38) для транспортного потока, прибывающего из точки 1 в точку 2. То же самое для остальных выражений в (3.67): $G_{1/3}^{n+1/2} = G_{m+1/2}^{n+1/2}$ в разностной схеме (3.38) для транспортного потока, поворачивающего направо в точку 1 и $G_{1/3}^{n+1/2} = G_{m-1/2}^{n+1/2}$ в разностной схеме (3.38) для точки 3; $G_{4/2}^{n+1/2} = G_{m+1/2}^{n+1/2}$ в разностной схеме (3.38) для транспортного потока, поворачивающего направо в точку 4 и $G_{4/2}^{n+1/2} = G_{m-1/2}^{n+1/2}$ в разностной схеме (3.38) для транспортного потока, прибывающего из точки 4 в точку 2.

Теперь мы легко можем увеличивать временной шаг численного интегрирования Δt за счет сдвига точек 1,2,3,4 от центра перекрёстка и увеличения таким образом Δx . Это невозможно было сделать в разностной аппроксимации (3.64), поскольку расстояние между центрами секторов 2 и 3 строго фиксировано геометрическими размерами самого перекрестка.

Стоит также упомянуть, что одномерный подход, примененный в (3.65)-(3.67), не настолько универсальный или робастный, как предыдущий двумерный, используемый в аппроксимациях (3.63), (3.64). Одномерный подход не может быть так легко адаптирован для перекрестка произвольной конфигурации, как двумерный, поскольку не позволяет представить его в виде ограниченного набора стандартных элементов (секторов), как это было сделано в (3.63), (3.64). Для каждой новой конфигурации перекрестка нам придется заново связывать одномерные уравнения дорог, примыкающих к нему, в новую систему, используя общие граничные условия и расщепляя транспортные потоки на компоненты по направлениям движения АТС.

Определяющими функционирование описанной выше динамической модели прежде всего являются схема организация движения на перекрестке и выбор временных интервалов работы фаз светофорной сигнализации. Для оценки их влияния (по имеющимся экспериментальным данным) были проведены тестовые расчеты автомобильного движения с использованием описанных выше макроскопических моделей гидродинамического типа.

Для начала была выбрана замкнутая модельная транспортная система (см. Рис. 3.32). Особенность движения в этой модельной системе заключается в том, что один раз задав распределение транспортных потоков на ее перекрестках так, чтобы оно было сбалансированным по скорости и плотности, мы должны наблюдать сохранение этого баланса во времени.

Перекрестки, в которых проверяется баланс транспортных потоков, показаны на рисунке узлами зеленого, голубого, синего и красного цвета. Динамика величин транспортных потоков, движущихся на перекрестках прямо (верхние графики) и

направо (нижние графики), в зависимости от времени показана на рисунке справа. Цвет графика совпадает с цветом перекрестка на транспортной схеме. Потоки на перекрестках распределялись таким образом, чтобы они имели разные значения на каждом из них, но при этом количество автомобилей (АТС), движущихся прямо, было в два раза больше поворачивающих направо.

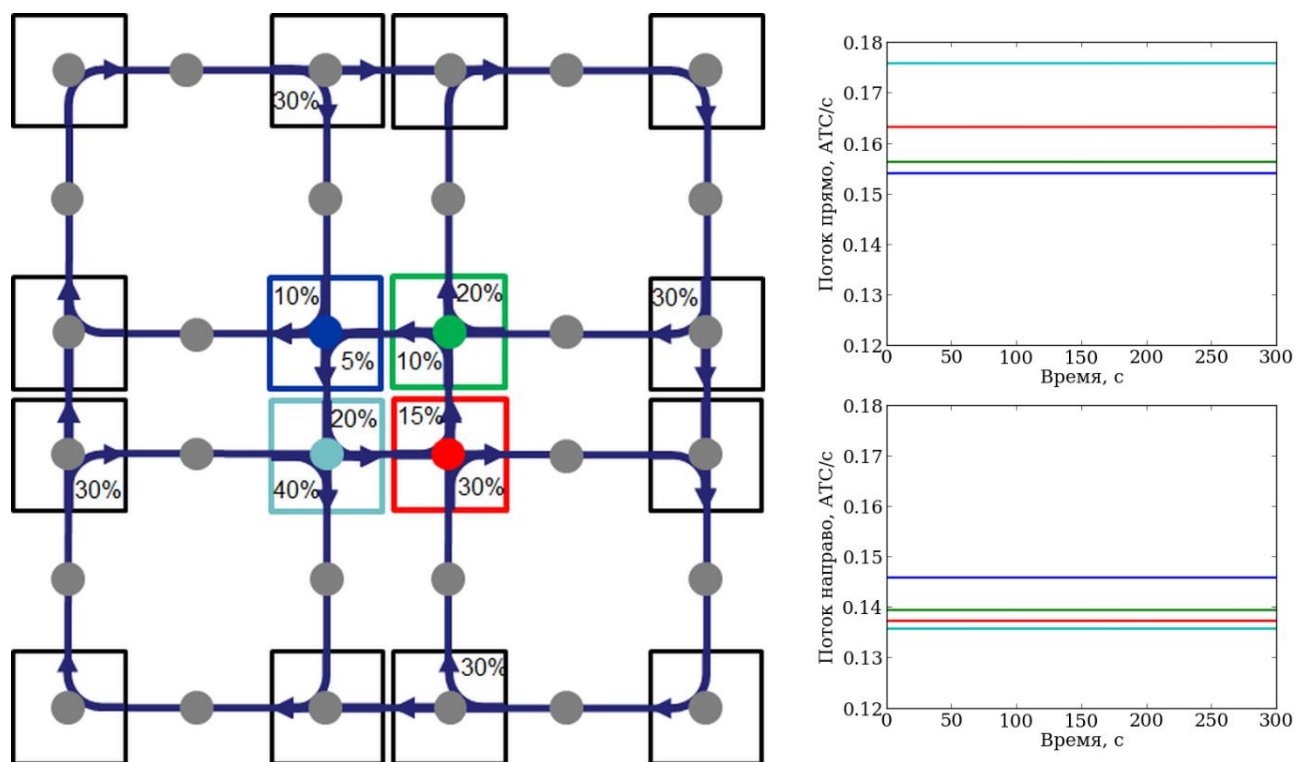


Рис. 3.32. Пример тестовой транспортной схемы, использованной для проверки выполнения закона сохранения баланса потоков на перекрёстках. Направления движения показаны стрелками. Расчетные узлы показаны серым цветом. Перекрестки, для которых проверяется баланс транспортных потоков, показаны узлами зеленого, голубого, синего и красного цвета. Динамика величин транспортных потоков, движущихся на перекрестках прямо (верхние графики) и направо (нижние графики), в зависимости от времени показана на рисунке справа. Цвет графика совпадает с цветом перекрестка на транспортной схеме.

В качестве экспериментальных объектов в г. Москве были выбраны следующие перекрестки: круговое движение на пересечении Пролетарского проспекта и Кавказского бульвара (Рис. 3.33), пересечение Ленинского проспекта и ул. 26 Бакинских комиссаров (Рис. 3.35), и пересечение Ленинского проспекта и ул. Лобачевского (Рис. 3.38). Эти перекрестки были выбраны в связи с тем, что все их въезды и выезды оборудованы датчиками (показаны маркерами на рисунках),

измеряющими интенсивности и скорости транспортных потоков по дорожным полосам. При построении фундаментальных диаграмм по всем полосам движения на перекрестках использовалась система сбора данных «Navigator» центра организации дорожного движения Правительства Москвы за период в 264 дня.

Усредненные по всем полосам движения расчетные значения транспортных потоков на Кавказском бульваре и Ленинском проспекте в зависимости от времени суток за период с 16:00 одного рабочего дня по 16:00 следующего рабочего в сравнении с данными экспериментальных наблюдений, полученными с датчиков, представлены соответственно на Рис. 3.33, 3.35 и 3.38.



Рис. 3.33. Круговое движение на пересечении Пролетарского проспекта и Кавказского бульвара г. Москвы. Расположение датчиков, измеряющих интенсивности и скорости транспортных потоков по дорожным полосам, показано цифровыми маркерами 1-4.

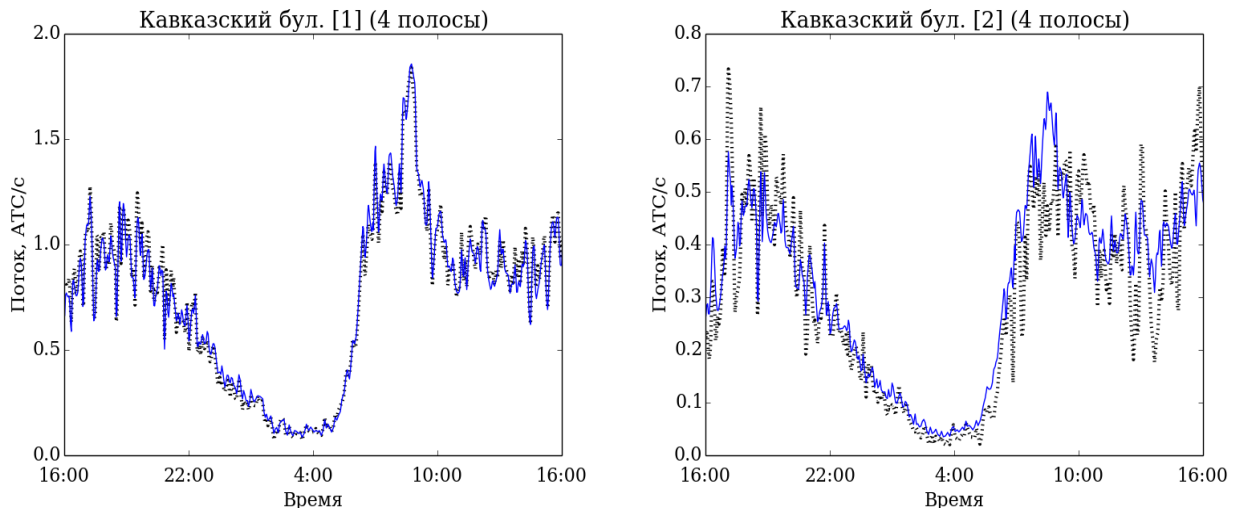


Рис. 3.34 Сравнение усредненных по всем полосам движения расчетных значений транспортных потоков на Кавказском бульваре (синий цвет) в зависимости от времени суток за период с 16:00 одного рабочего дня по 16:00 следующего рабочего дня в сравнении с данными экспериментальных наблюдений (серые маркеры), полученными с датчиков (1 и 2 на Рис. 3.33) с 5 минутным временным интервалом.

Следующий объект для моделирования – был выбран на пересечение Ленинского проспекта и ул. 26 Бакинских комиссаров (Рис. 3.35). Режим работы светофоров на перекрёстке приведен в Таблице 3.1, схема организации движения по его полосам показана на Рис. 3.36.



Рис. 3.35. Перекресток на пересечение Ленинского проспекта и ул. 26 Бакинских комиссаров г. Москвы. Расположение датчиков, измеряющих интенсивности и скорости транспортных потоков по дорожным полосам, показано маркерами 1-4.

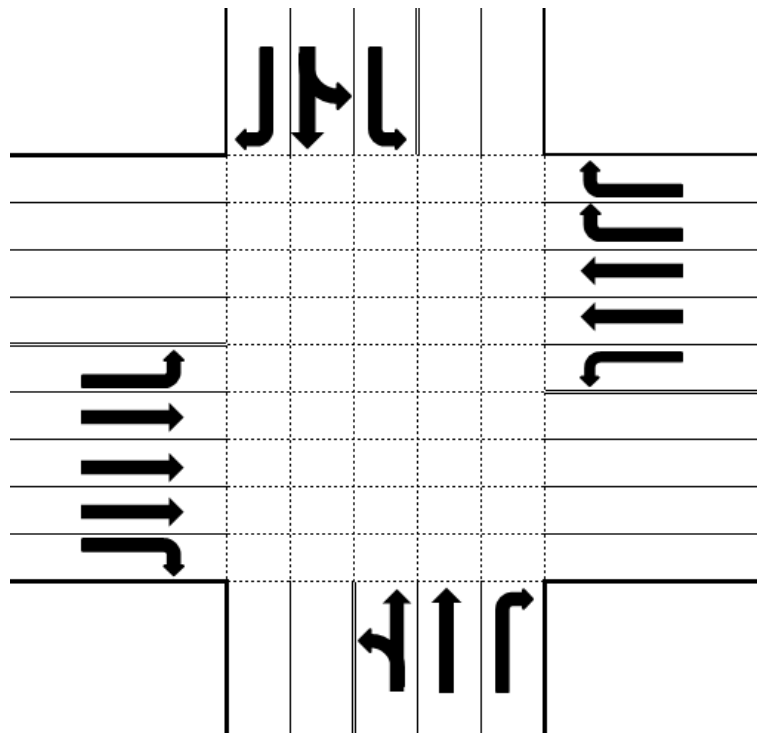


Рис. 3.36. Схема организации движения по полосам на пересечение Ленинского проспекта и ул. 26 Бакинских комиссаров г. Москвы. Разрешенные направления движения на перекрестке показаны стрелками.

Таблица. 3.1. Режимы работы светофорных объектов на пересечение Ленинского проспекта и ул. 26 Бакинских комиссаров.

Фаза №1	Фаза №2	Фаза №3	Фаза №4
98 с	36 с	30 с	36 с

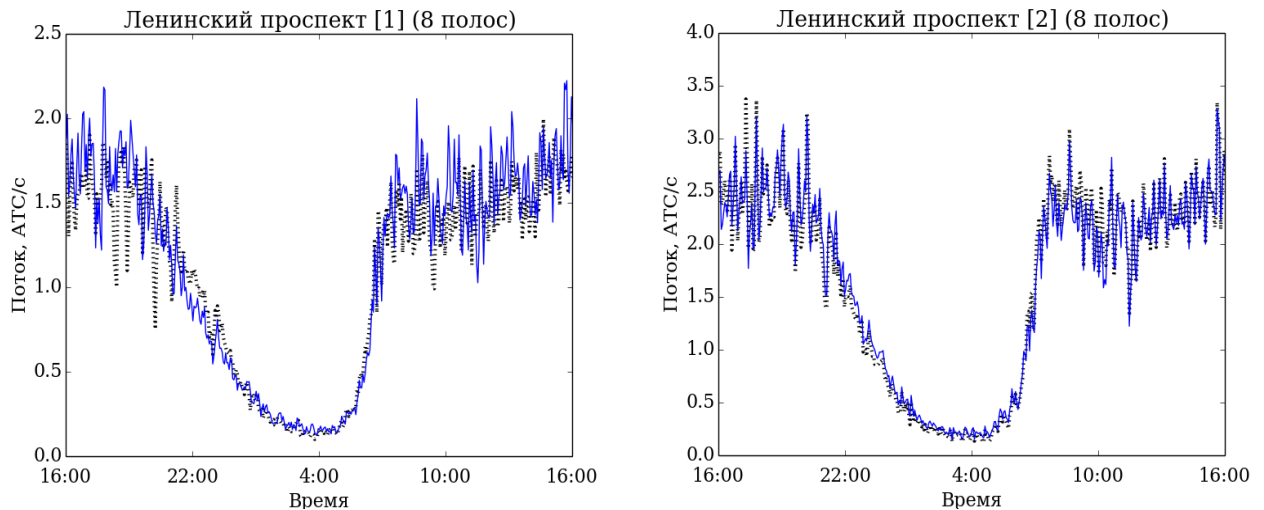


Рис. 3.37. Сравнение усредненных по всем полосам движения расчетных значений транспортных потоков на Ленинском проспекте (синий цвет) в зависимости от времени суток за период с 16:00 одного рабочего дня по 16:00 следующего рабочего дня в сравнении с данными экспериментальных наблюдений (серые маркеры), полученными с датчиков (1 и 2 на Рис. 3.35) с 5 минутным временным интервалом.

И последним объектом сравнительного моделирования в Москве стало пересечение Ленинского проспекта с ул. Лобачевского (Рис. 3.38). Его выбрали исходя из того, что он расположен по Ленинскому проспекту сразу за пересечением с ул. 26 Бакинских комиссаров и между этими перекрестками практически нет прилегающих съездов и выездов на Ленинский проспект.

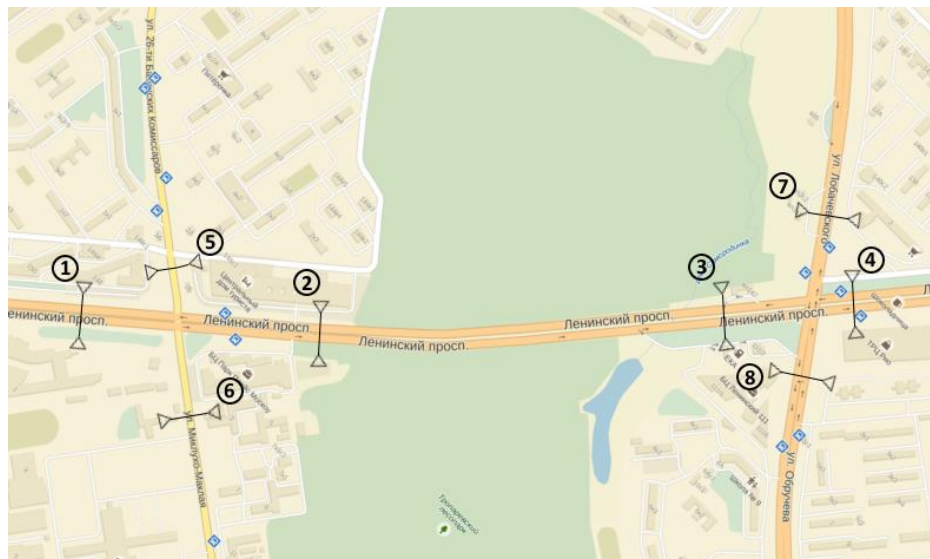


Рис. 3.38. Перекрестки на пересечении Ленинского проспекта с улицами Лобачевского и 26 Бакинских комиссаров. Расположение датчиков, измеряющих интенсивности и скорости транспортных потоков по дорожным полосам, показано цифровыми маркерами 1-8.

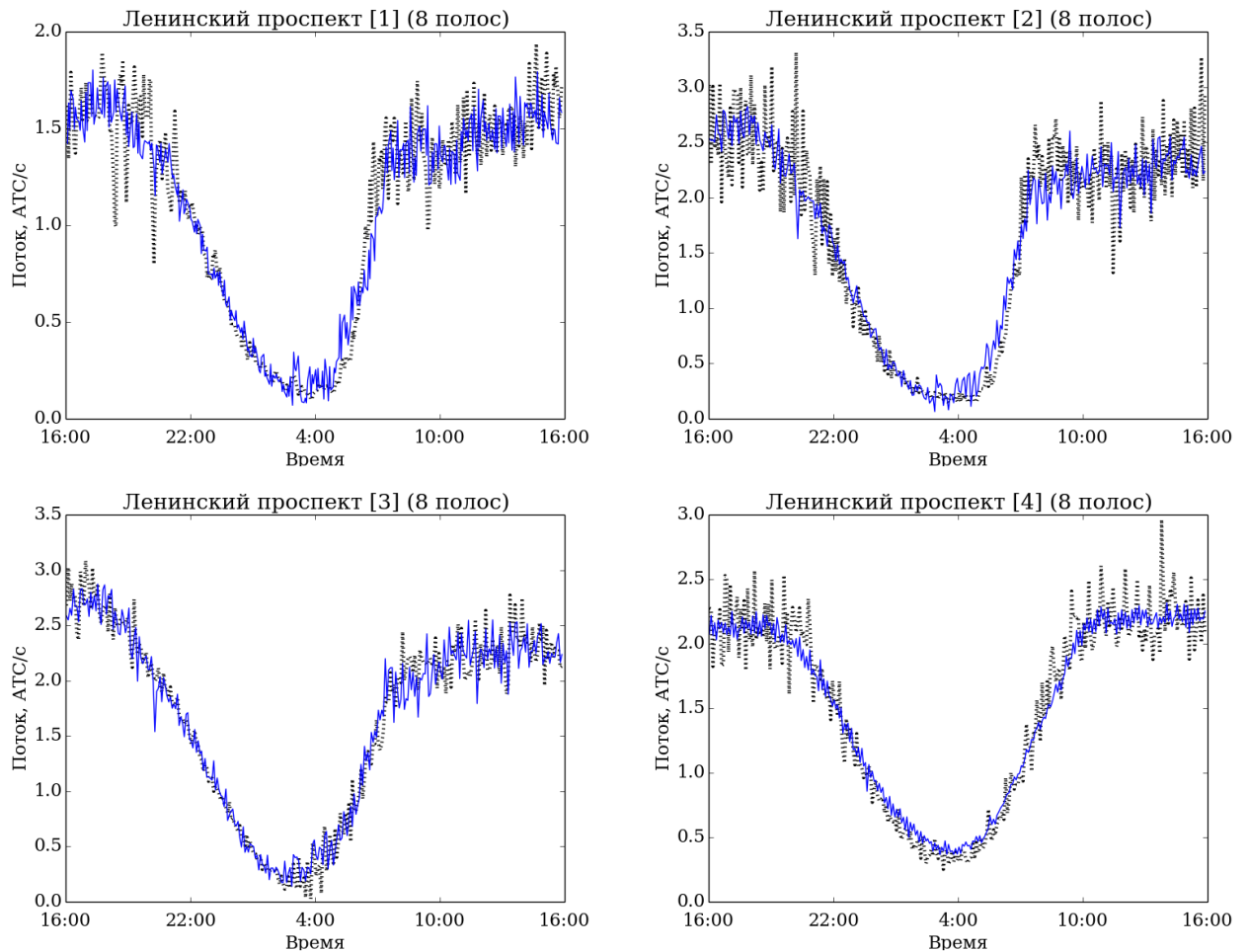


Рис. 3.39. Сравнение усредненных по всем полосам движения расчетных значений транспортных потоков на Ленинском проспекте (синий цвет) в зависимости от времени суток за период с 16:00 одного рабочего дня по 16:00 следующего рабочего дня в сравнении с данными экспериментальных наблюдений (серые маркеры), полученными с датчиков (1–4 на Рис. 3.38) с 5 минутным временным интервалом.

Для того, чтобы оценить качество работы разработанной модели не на отдельных дорогах и перекрестках, а на едином участке транспортной сети, было выполнено моделирование трафика в округе Монтгомери, США (см. Рис. 3.40). Моделируемый участок транспортной сети включает в себя шесть перекрестков, показанных на рисунке, для которых известны данные с транспортных детекторов.



Рис. 3.40. Исследуемый участок транспортной сети в округе Монтгомери, США, включающий в себя шесть перекрестков для которых известны данные с транспортных детекторов.

Данная дорожная сеть была создана в открытом программном пакете SUMO NetEdit [<http://sumo.sourceforge.net>] (Рис. 3.41). Стоит заметить, что боковые дороги были исключены их рассмотрения, поскольку коэффициенты поворота на них близки к нулю и нет детекторов транспорта. Оставлена была лишь одна из боковых дорог, где наблюдался заметный коэффициент поворачивающих АТС.

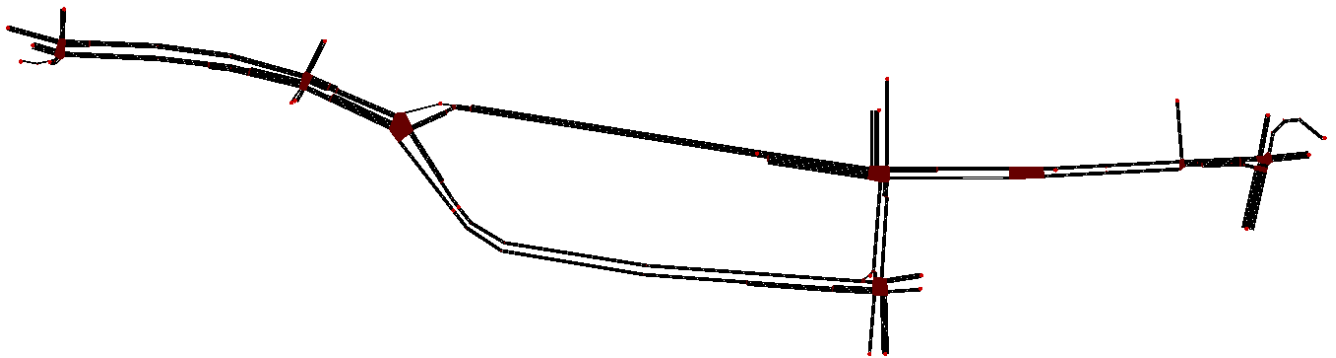


Рис. 3.41. Исследуемый участок транспортной сети в округе Монтгомери, США, созданный в программном пакете SUMO NetEdit [<http://sumo.sourceforge.net>].

Данные с транспортных детекторов включали в себя только информацию о количестве машин, но не о их скорости. В связи с этим оценить параметры фундаментальных диаграмм не представлялось возможным. Поэтому для каждой из полос использовались типичные значения для однополосной дороги $Q_f = 0.839998$, $\rho_f = 0.036852$, $c_f = 14.83746$, $\rho_* = 0.145$, $c_* = 7.76712$. Для оценки коэффициентов поворота были усреднены данные по потоку машин в период с 27.01.2016 по 20.02.2018 (755 дней). Данные с детекторов разбиты по дням начиная с 20:00 местного времени длительностью в сутки.

Для проведения сравнительного моделирования был выбрано 20.11.2017, поскольку в этот день все детекторы были исправны. В качестве входных значений мы задавали данные об интенсивности транспортных потоков на въездах в транспортную сеть в зависимости от времени, а затем запускался расчет. Для сравнения полученных результатов также проводилось аналогичное моделирование с использованием микромоделей, реализованной в программном пакете SUMO.

Прежде всего, необходимо было убедиться в том, что никакие АТС не были потеряны при расчетах внутри транспортной сети. Для этого сравнивалось количество всех автомобилей на выездах из данной сети в зависимости от времени. На Рис. 3.42 показаны результаты данного расчета, как для микромоделей, так и для тестируемой макромоделей, которые немного отличаются от реальных данных. С учетом того факта, что реальные данные суммарно на въезде и на выезде тоже немного отличаются друг от друга (шум и неточность датчиков), небольшие отклонения вполне допустимы. В случае значительных отклонений (до 30-40 АТС в 5 минутный временной интервал) недостаток автомобилей при моделировании – может быть обусловлен не учётом АТС, выезжающих или въезжающих с боковых дорог, где отсутствуют данные с детекторов. В целом же, очевидно, что результаты численного моделирования вполне соответствуют реальным данным.

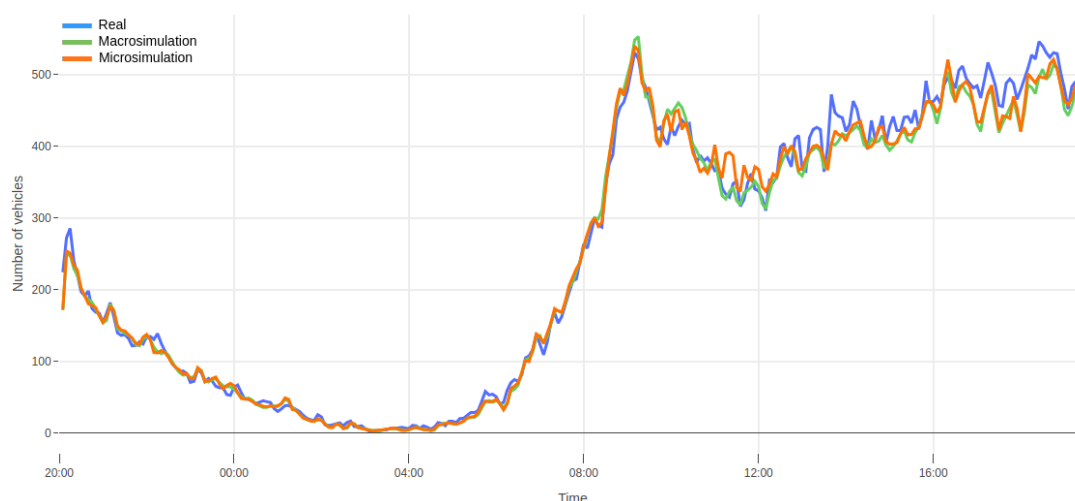


Рис. 3.42. Сравнение количества АТС, измеренного на всех выездах из транспортной сети в зависимости от времени (синий цвет). Показаны результаты моделирования, как для микромоделей, реализованной в программном пакете SUMO NetEdit (красный цвет), так для тестируемой макромоделей (зеленый цвет).

Для более подробной демонстрации результатов расчетов выбран небольшой участок сети с перекрестками № 4 и № 6 на Рис. 3.40. Их схема представлена на Рис. 3.43 с пронумерованными дорогами. Этот участок содержит боковую дорогу без датчиков. Это приводит к некоторым проблемам при расчете, поскольку коэффициенты поворота для боковой дороги оцениваются приблизительно и нет возможности проверить, верны ли они на самом деле. Но гораздо важнее то, что отсутствует информация о том, сколько АТС въезжают с этой дороги. В итоге количество АТС может быть недооценено.

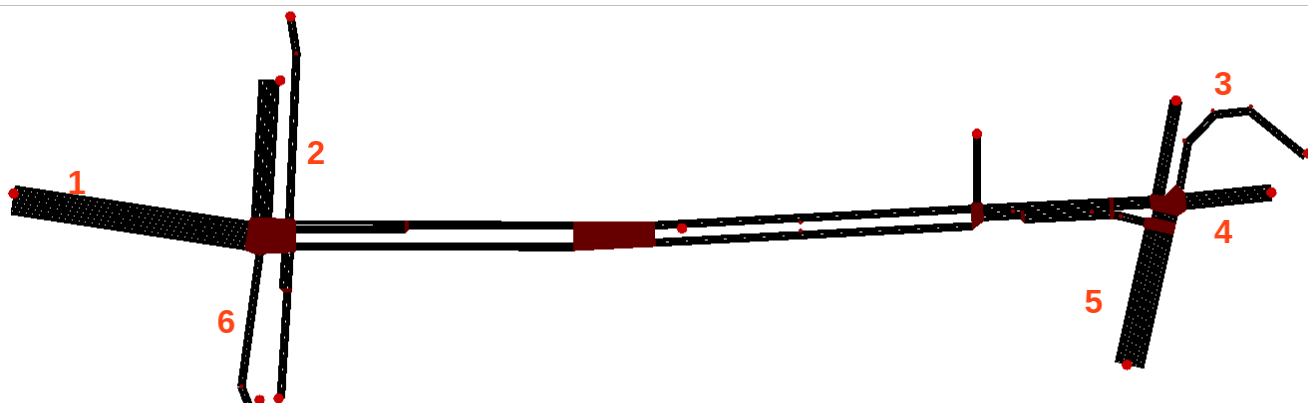


Рис. 3.43. Участок транспортной сети с перекрестками №4 и №6 с Рис. 3.40. Боковое ответвление без подписи является неучтенной дорогой.

Наиболее плотное движение наблюдается из перекрестка № 6 в направлениях налево и вверх. Рис. 3.44 и Рис. 3.45 приводят результаты на выездах дорог № 1 и № 2 соответственно. Согласно Рис. 3.44 недостаток АТС наблюдается с 12:00 до 21:00. Разница примерно в 20 АТС дает возможность предположить, что автомобили, въезжающие с боковой дороги без датчиков, как раз поворачивают на дорогу № 1. Помимо данного расхождения, моделирование показывает сопоставимые с наблюдаемыми результаты.

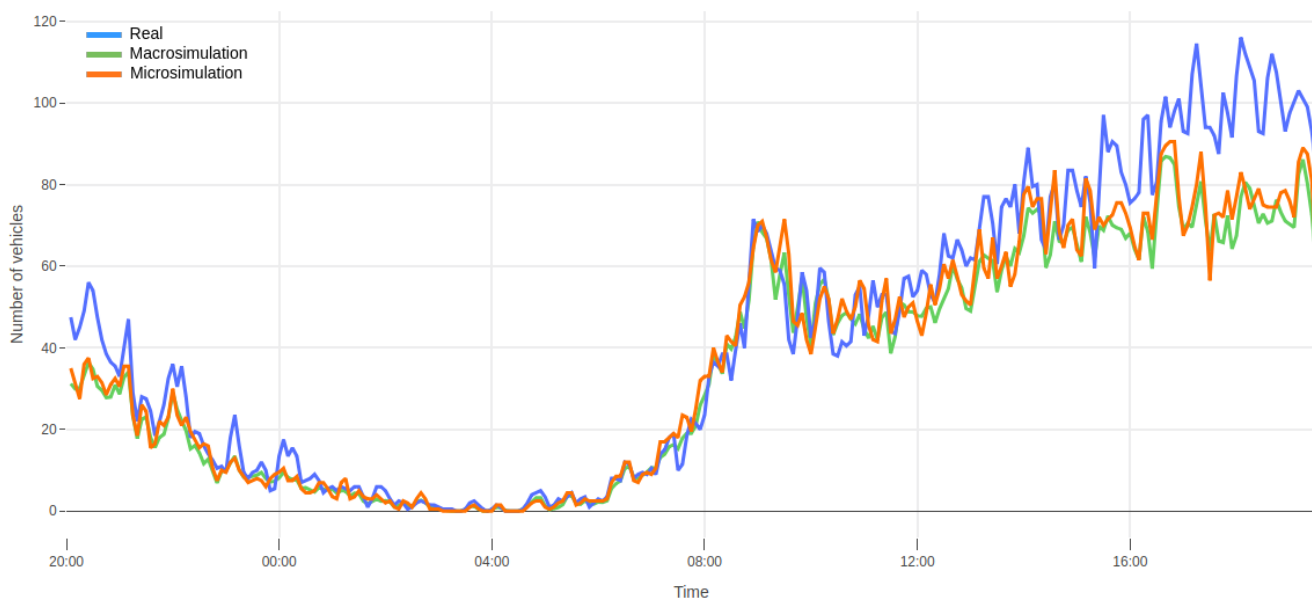


Рис. 3.44. Сравнение количества АТС, измеренного на выезде с дороги № 1 (Рис. 3.43) в зависимости от времени (синий цвет). Показаны результаты моделирования, как для микромоделей, реализованной в программном пакете SUMO NetEdit (красный цвет), так для тестируемой макромоделей (зеленый цвет).

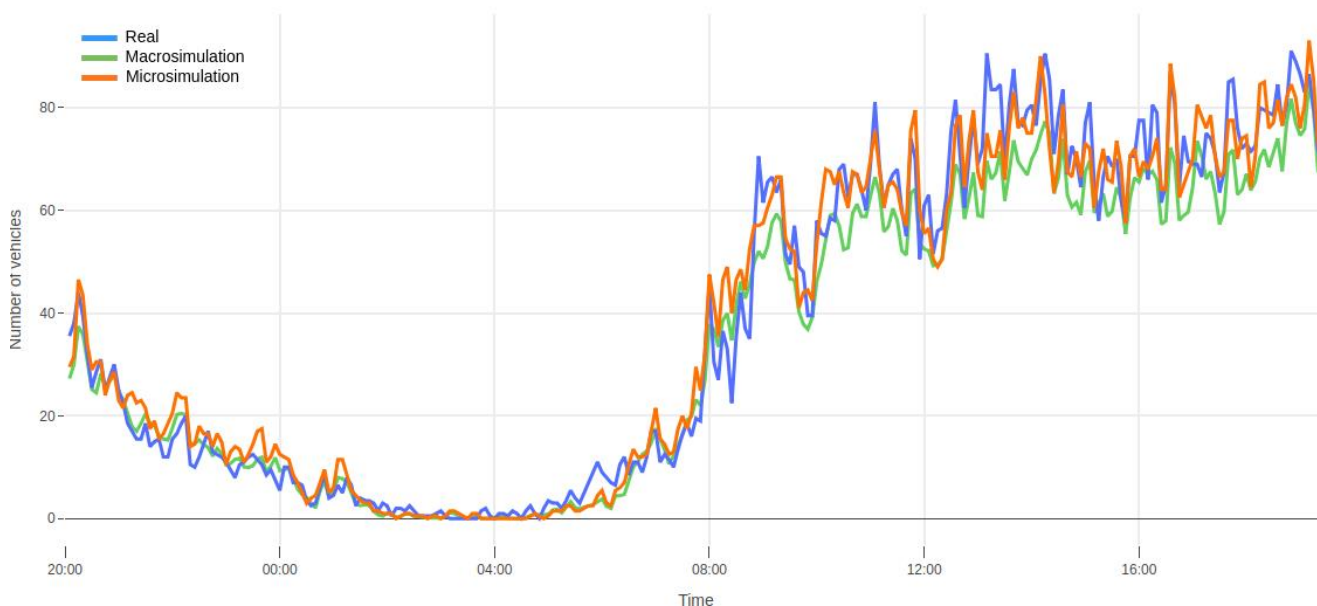


Рис. 3.45. Сравнение количества АТС, измеренного на выезде с дороги № 2 (Рис. 3.43) в зависимости от времени (синий цвет). Показаны результаты моделирования, как для микромоделей, реализованной в программном пакете SUMO NetEdit (красный цвет), так для тестируемой макромоделей (зеленый цвет).

Дорога № 5 (на Рис. 3.43) показывает другой интересный эффект при имплементации тестируемой макромоделей. Коэффициенты поворота в расчете задаются постоянными для всех моделируемых перекрестков. Однако в действительности

они меняются в течение дня. Мы усреднили данные за два года для определения этих коэффициентов. На Рис. 3.46 показано, что на некоторых временных интервалах в течение дня реальное количество АТС больше модельного, а на каких-то, наоборот, меньше. Очевидно, что реальные коэффициенты отклоняются от своих средних значений в часы пик. Изменение коэффициентов поворота со временем должно быть добавлено в тестируемую макромодель для получения более точных результатов.

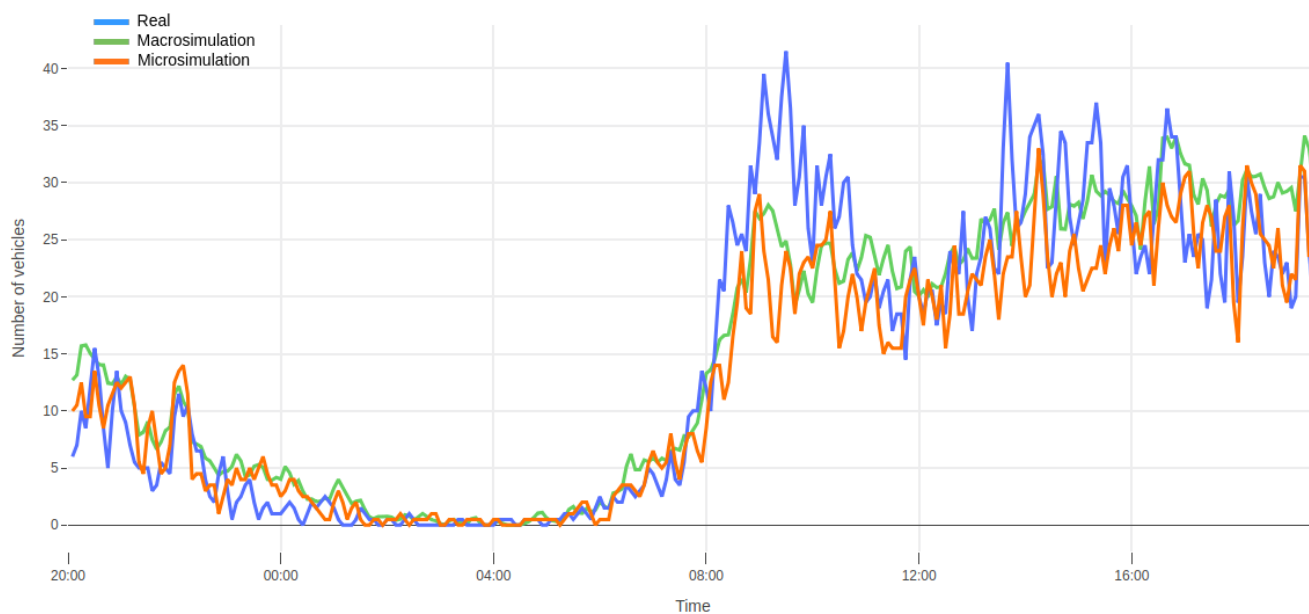


Рис. 3.46. Сравнение количества АТС, измеренного на выезде с дороги № 5 (Рис. 3.43) в зависимости от времени (синий цвет). Показаны результаты моделирования, как для микромоделей, реализованной в программном пакете SUMO NetEdit (красный цвет), так для тестируемой макромодели (зеленый цвет).

На Рис. 3.47 показаны результаты расчетов количества АТС для дороги, идущей от перекрестка № 6 к перекрестку № 4 (Рис. 3.43). Заметно, что тестируемая макромодель показывает качественное приближение реальных данных (кроме одного пика в 9:00 связанного с изменением коэффициента поворота). Это показывает, что моделирование дает достоверные результаты и транспортный поток корректно учитывается при переходе между различными участками транспортной сети.

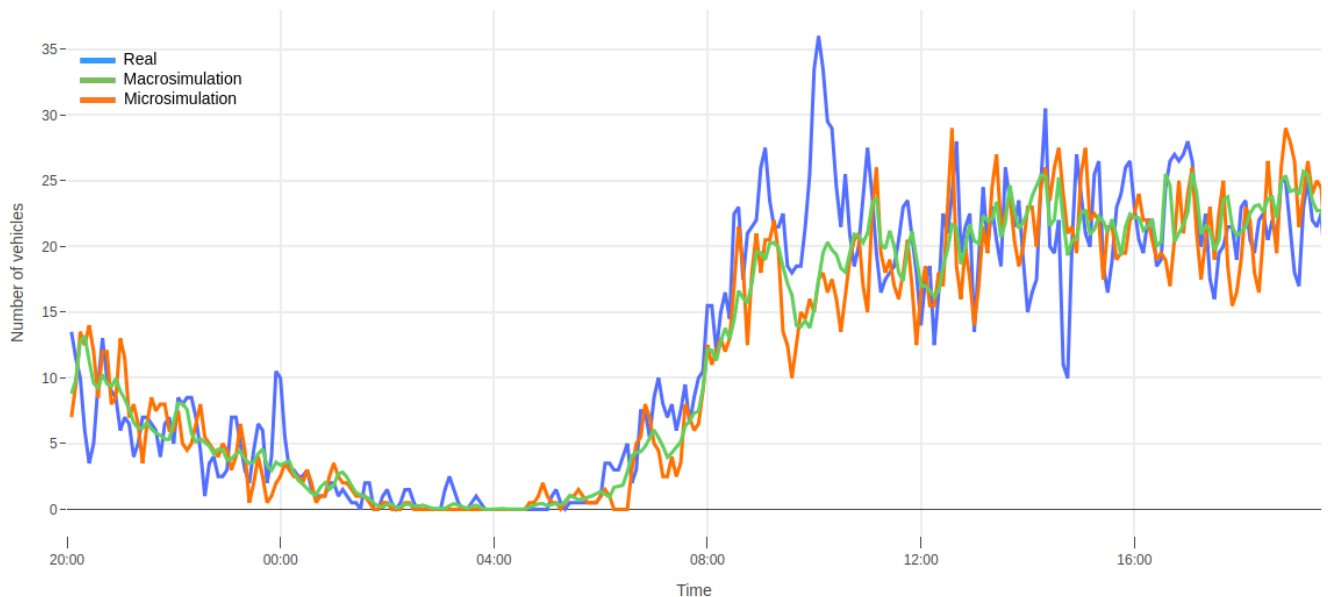


Рис. 3.47. Сравнение количества АТС, измеренного на дороге, идущей от перекрёстка № 6 к перекрестку № 4 (Рис. 3.43), в зависимости от времени (синий цвет). Показаны результаты расчетов, как для микромодел, реализованной в программном пакете SUMO NetEdit (красный цвет), так для тестируемой макромодел (зеленый цвет).

Для глобальной оценки точности расчётов мы сравнили количество АТС по всем учитываемым дорогам для всех средних по временным интервалам абсолютных отклонений микро и макромодел. Для микромодел, реализованной в программном пакете SUMO NetEdit, мы получили абсолютное отклонение в 34.88 АТС, а для тестируемой макромодел в 33.47. Это показывает, что тестируемая макромодел показывает весьма правдоподобные результаты на всех дорогах моделируемой транспортной сети (их 8) со средним абсолютным отклонением порядка 15% за сутки. Это неплохой результат с учетом того, что мгновенная ошибка измерений транспортного детектора может достигать до 20%.

3.5 Адаптивное регулирование транспортной сети

Рассмотрим теперь, как работает в самом простом случае алгоритм управления дорожным движением на отдельной дороге. Для этого достаточно посмотреть на модельную фундаментальную диаграмму представленную на Рис. 3.48. На ней хорошо видно, что одному значению интенсивности $Q(\rho)$ соответствуют два различных состояния трафика № 1 и № 2 с разными скоростями и плотностями

транспортного потока $Q(\rho) = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$. При этом первое значение является предпочтительным в силу того, что его скорость выше $v_1 > v_2$, а плотность $\rho_1 < \rho_2$ ниже второго. В простейшем случае задача адаптивного управления сводится к тому, чтобы удерживать транспортный поток в докритическом состоянии с плотностью меньше критической $\rho < \rho_{crt}$ (точка перегиба на фундаментальной диаграмме) и не позволять ему уйти в заторное состояние. Для отдельной дороги эта задача решается аналитически, для всей городской транспортной сети она может вовсе не иметь решения или оно будет не единственным.

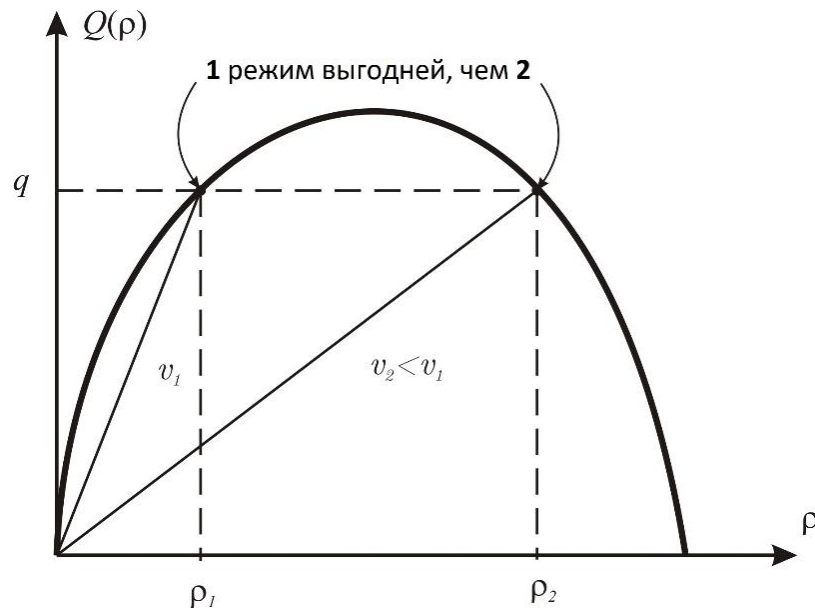


Рис. 3.48. Модельная фундаментальная диаграмма, в которой одному значению интенсивности транспортного потока $Q(\rho)$ соответствуют два различных состояния трафика 1 и 2 с разными скоростями и плотностями: $Q(\rho) = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$. При этом первое значение является предпочтительным в силу того, что его скорость выше $v_1 > v_2$, а плотность $\rho_1 < \rho_2$ ниже второго.

Начнем с алгоритма решения для отдельной дороги. Посмотрим еще раз на используемую нами макроскопическую модель транспортного потока:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = f_0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho} f_0. \end{cases} \quad (3.68)$$

Нам нужно контролировать значение плотности транспортного потока так, чтобы оно не превышало критическое $\rho < \rho_{crt}$. Соответственно нам нужно использовать первое уравнение в системе (3.68) для решения этой задачи.

Сформулируем задачу Коши для этого уравнения, считая дорогу бесконечной (что справедливо в случае использования прозрачных граничных условий или кольцевой формы дороги) и задавая в правой части изменение плотности в местах въезда и выезда с дороги с координатами $x = x_k$ в виде локальных источников или стоков транспортного потока $f_0(x_k, t)$:

$$\begin{cases} \rho_t + Q_\rho \rho_x = f_0(x, t) = \sum_k f_0(x_k, t), \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x). \end{cases} \quad (3.69)$$

Аналитическое решение задачи (3.69) известно и имеет следующий вид:

$$\rho(x, t) = \rho_0(x - Q_\rho t) + \sum_k \int_0^t f_0(x_k, \tau) d\tau$$

Его вид означает, что плотность транспортного потока сохраняется вдоль характеристики $\xi = x - Q_\rho t$ и меняется только в точках въезда или выезда с дороги на величину $\int_0^t f_0(x_k, \tau) d\tau$, которая берется с положительным знаком в случае въезда и с отрицательным в случае выезда. Таким образом, зная решение (3.69) мы можем контролировать плотность транспортного потока на дороге, перекрывая его в точках въезда x_k на заданные интервалы времени τ_k так, чтобы в любой момент времени в каждой точке дороги плотность потока не превышала критическое значение: $\rho(x, t) = \rho_0(x - Q_\rho t) + \sum_k \tau_k f_k(x_k) < \rho_{crt}$ (см. Рис. 3.49).

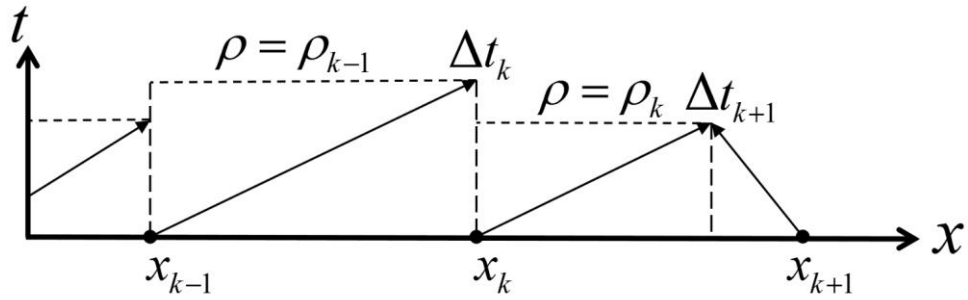


Рис. 3.49. Схематическое представление характеристик, используемых для адаптивного управления на участке дороги с номерами въездов: $k - 1, k, k + 1$. Считается, что значения плотностей транспортных потоков $\rho_{k-1}, \rho_k, \rho_{k+1}$ сохраняются вдоль характеристик либо до момента пересечения характеристикой соседнего узла, либо со встречной характеристикой.

В итоге алгоритм адаптивного управления въездами работает следующим образом:

- делается текущий краткосрочный прогноз на время $\Delta t = \min_k \frac{x_{k+1} - x_k}{2|Q_\rho(\rho_{k+1/2})|}$, поскольку, в течение этого времени мы можем исключить взаимное влияние транспортных потоков, поступающих с соседних въездов;
- если прогноз показывает, что в какой-либо из точек дороги плотность транспортного потока начинает превышать или приближаться к критической $\rho_k(\Delta t) \geq \rho_{crt}$, то мы, опуская характеристику из этой точки дороги на текущий временной слой, определяем ближайший въезд с номером k , вызвавший затор и с помощью светофорного регулирования уменьшаем плотность въезжающих АТС на нем на значение $f_{0,k} \Delta t = \rho_k(\Delta t) - \rho_{crt}$.

На практике невозможно непрерывным образом регулировать количество въезжающих АТС, поэтому для ограничения въезда используется изменение соотношения t_{on} разрешающей (зелёной) и t_{off} запрещающей (красной) фаз светофора, с постоянным периодом $T = t_{on} + t_{off} = const$, установленного на данном въезде, с учётом заданной минимальной длительности зеленой фазы t_{min} :

$$\frac{t_{min}}{t_{on} + t_{off}} \leq \frac{t_{on}}{t_{on} + t_{off}} = \frac{t_{on}}{T} \leq 1. \quad (3.70)$$

Нам нужно определить, насколько уменьшить зеленую фазу горения светофора t_{on} на k -ом въезде чтобы понизить плотность транспортного потока ниже критического уровня. Мы полагаем, что значение $f_{0,k}(x_k, t)$ не меняется за время Δt . Следовательно, за это время плотность транспортного потока через въезд с номером k увеличилась на величину равную $\frac{t_{on}}{T} f_{0,k} \Delta t$ и нам необходимо ее уменьшить на $\rho_k(\Delta t) - \rho_{crt}$. В итоге получаем соотношение для длительностей горения старой t_{on} и новой \tilde{t}_{on} зеленых фаз светофора:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{t}_{on}}{T} f_{0,k} \Delta t &= \frac{t_{on}}{T} f_{0,k} \Delta t - (\rho_k(\Delta t) - \rho_{crt}), \Rightarrow \\ t_{\min} \leq \tilde{t}_{on} &= \left(t_{on} - \frac{(\rho_k(\Delta t) - \rho_{crt})T}{f_{0,k} \Delta t} \right) \leq T. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Для проверки работы алгоритма адаптивного светофорного регулирования АТС на автомобильной многополосной дороге был поставлен вычислительный эксперимент на суточных данных внешнего кольца МКАД за сутки, 3 февраля 2012 года. Всего при расчетах учитывалось 36 крупных развязок на МКАД. Данные об интенсивности въездных и выездных потоков АТС на развязках была получена от детекторов транспорта системы «Navigator» ЦОДД г. Москвы. К сожалению, для большинства развязок отсутствовала отдельная информация о потоках АТС по каждому из ее въездов и выездов, поэтому было решено пренебречь точным строением каждой из развязок и использовать усреднённую информацию о входящих и исходящих потоках АТС на них, представляя каждую из 36 развязок одним обобщённым въездом и выездом.

Для оценки возможного эффекта влияния на дорожное движение адаптивного светофорного регулирования на въездах МКАД были проведены расчеты развития дорожной ситуации в стандартном режиме – без регулирования, а также с тремя различными режимами адаптивного регулирования с максимальной длительностью запрещающей фазы t_{off} : 10, 20 и 30 секунд для 60-секундного полного цикла $T = t_{on} + t_{off}$. При красном сигнале светофора АТС, прибывая на въезды

МКАД, образовывали очереди, которые затем разгружались на зелёной фазе светофорного регулирования.

На Рис. 3.51-3.54 в верхней части представлены полученные в результате численного моделирования пространственно-временные диаграммы для плотности и скорости транспортного потока. Внизу Рис. 3.52-3.54 показаны длительности работы красной (красная линия) и зеленой (зелёная линия) светофорных фаз при адаптивном управлении для двух из 36 въездов, возле которых образовывались заторы в стандартном режиме: слева на 10 км МКАД (развязка с Новорязанским ш.) и справа на 94 км МКАД (развязка с Ярославским ш.). По горизонтальной оси отмечены километры в соответствии с их нумерацией на внешнем кольце МКАД.

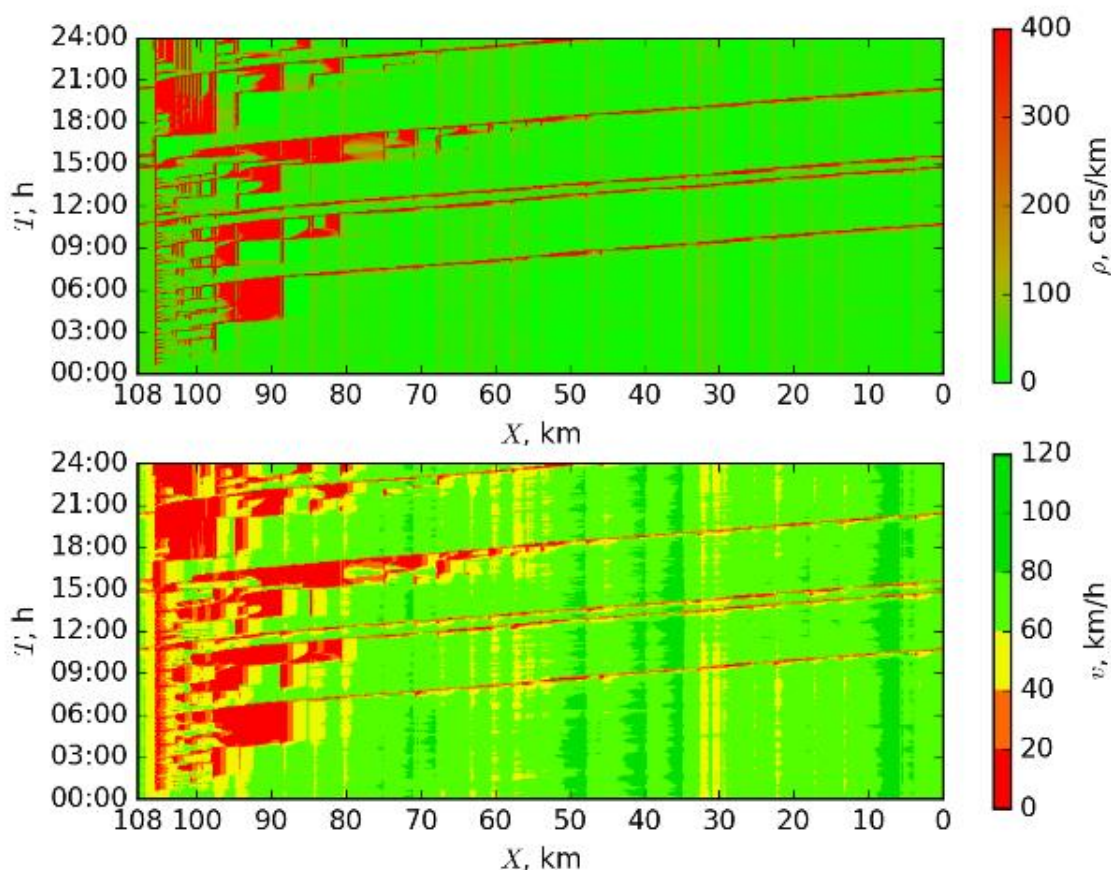


Рис. 3.51. Полученные в результате расчета безсветофорного режима дорожного движения по внешней стороне МКАД пространственно-временные диаграммы плотности (вверху) [АТС/км] и средней скорости (внизу) [км/ч] за сутки.

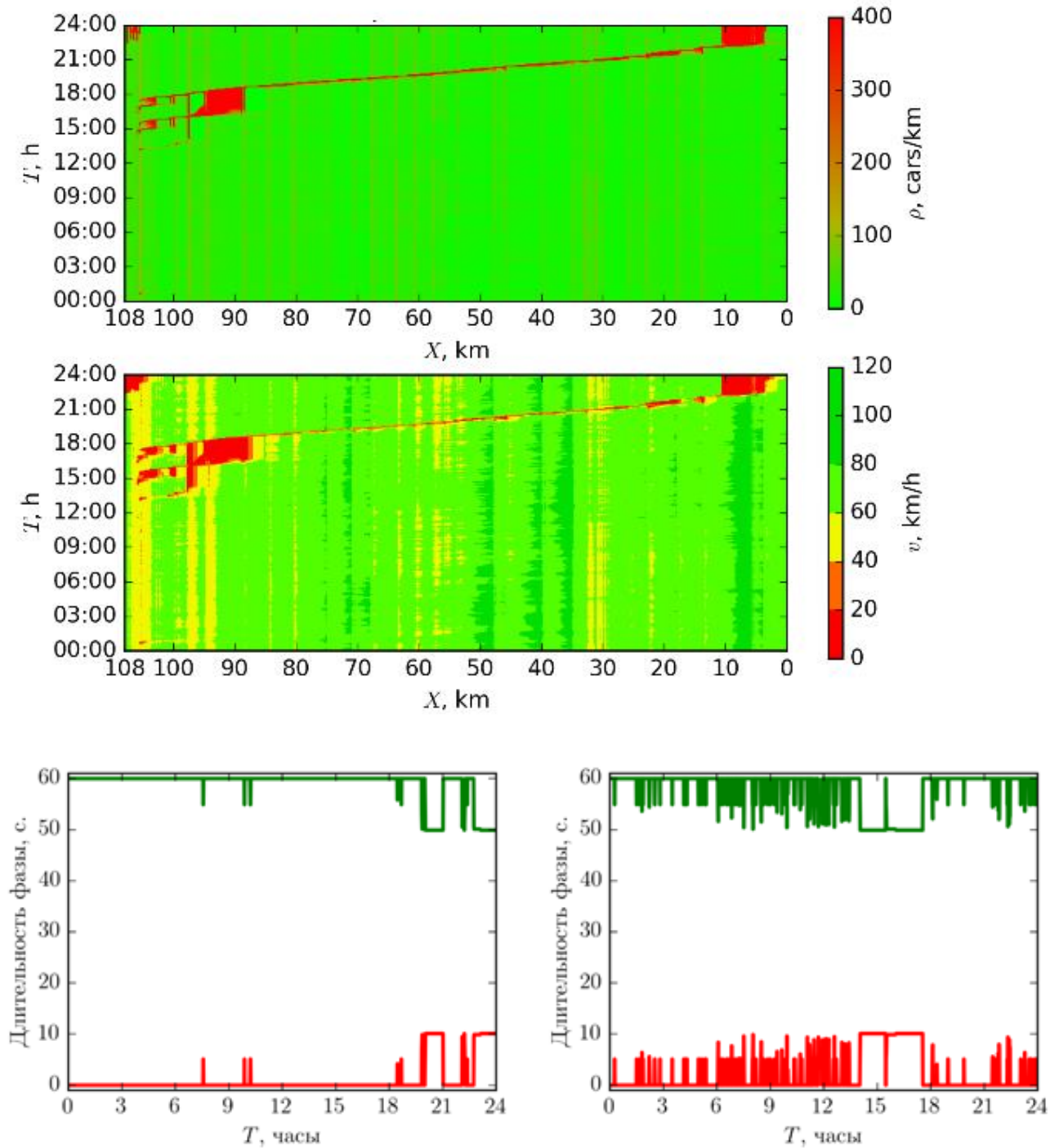


Рис. 3.52. Полученные в результате расчета дорожного движения с адаптивным регулированием светофоров на въездах МКАД пространственно-временные диаграммы плотности (вверху) [АТС/км] и средней скорости (в середине) [км/ч] за сутки. Внизу показаны временные интервалы работы красной (красная линия) и зеленой (зелёная линия) светофорных фаз при длительности красной фазы не более 10 секунд на цикл для двух въездов: слева на 10 км МКАД (развязка с Новорязанским ш.) и справа на 94 км МКАД (развязка с Ярославским ш.).

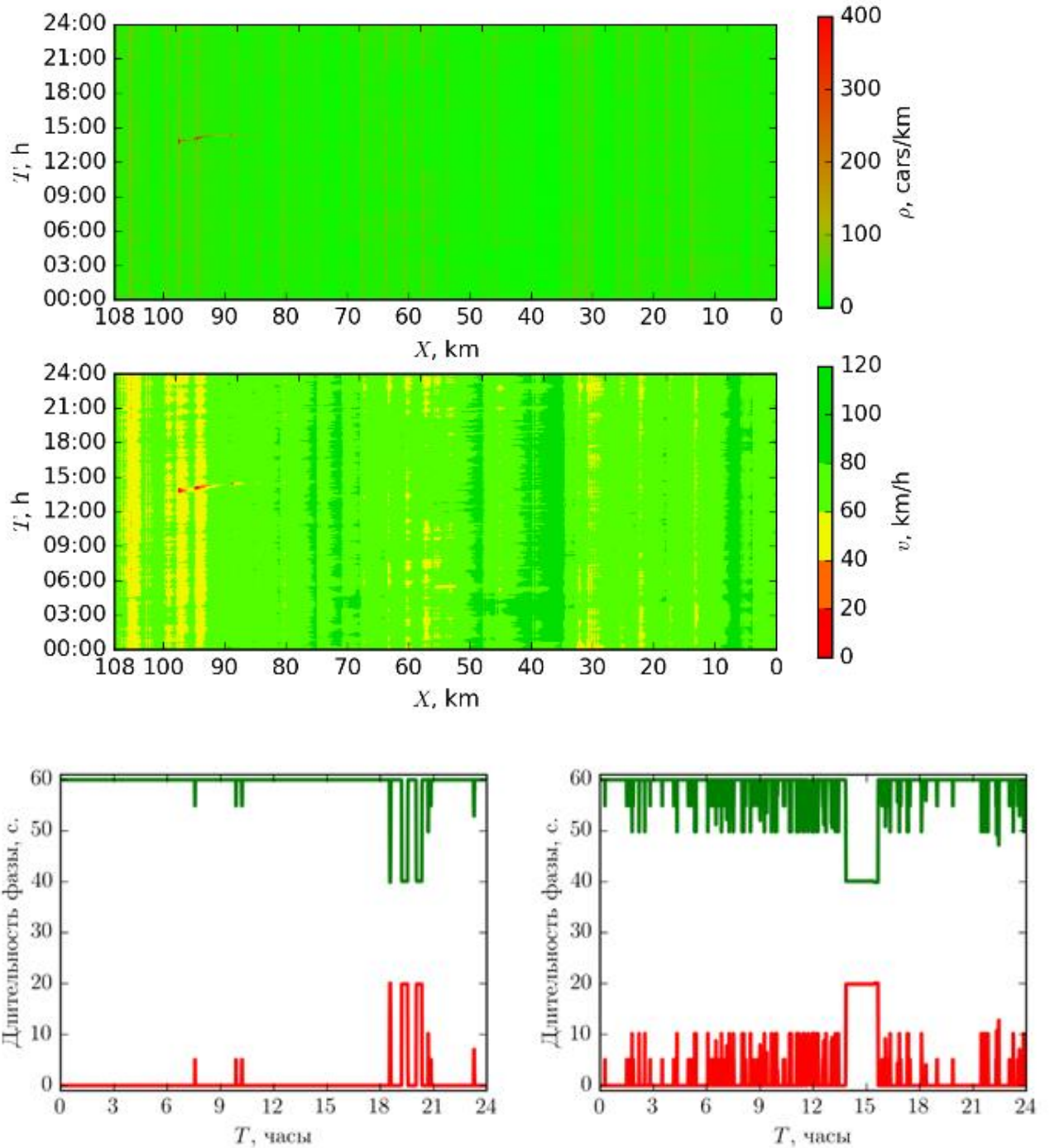


Рис. 3.53. Полученные в результате расчета дорожного движения с адаптивным регулированием светофоров на въездах МКАД пространственно-временные диаграммы плотности (вверху) [АТС/км] и средней скорости (в середине) [км/ч] за сутки. Внизу показаны временные интервалы работы красной (красная линия) и зеленой (зелёная линия) светофорных фаз при длительности красной фазы не более 20 секунд на цикл для двух въездов: слева на 10 км МКАД (развязка с Новорязанским ш.) и справа на 94 км МКАД (развязка с Ярославским ш.).

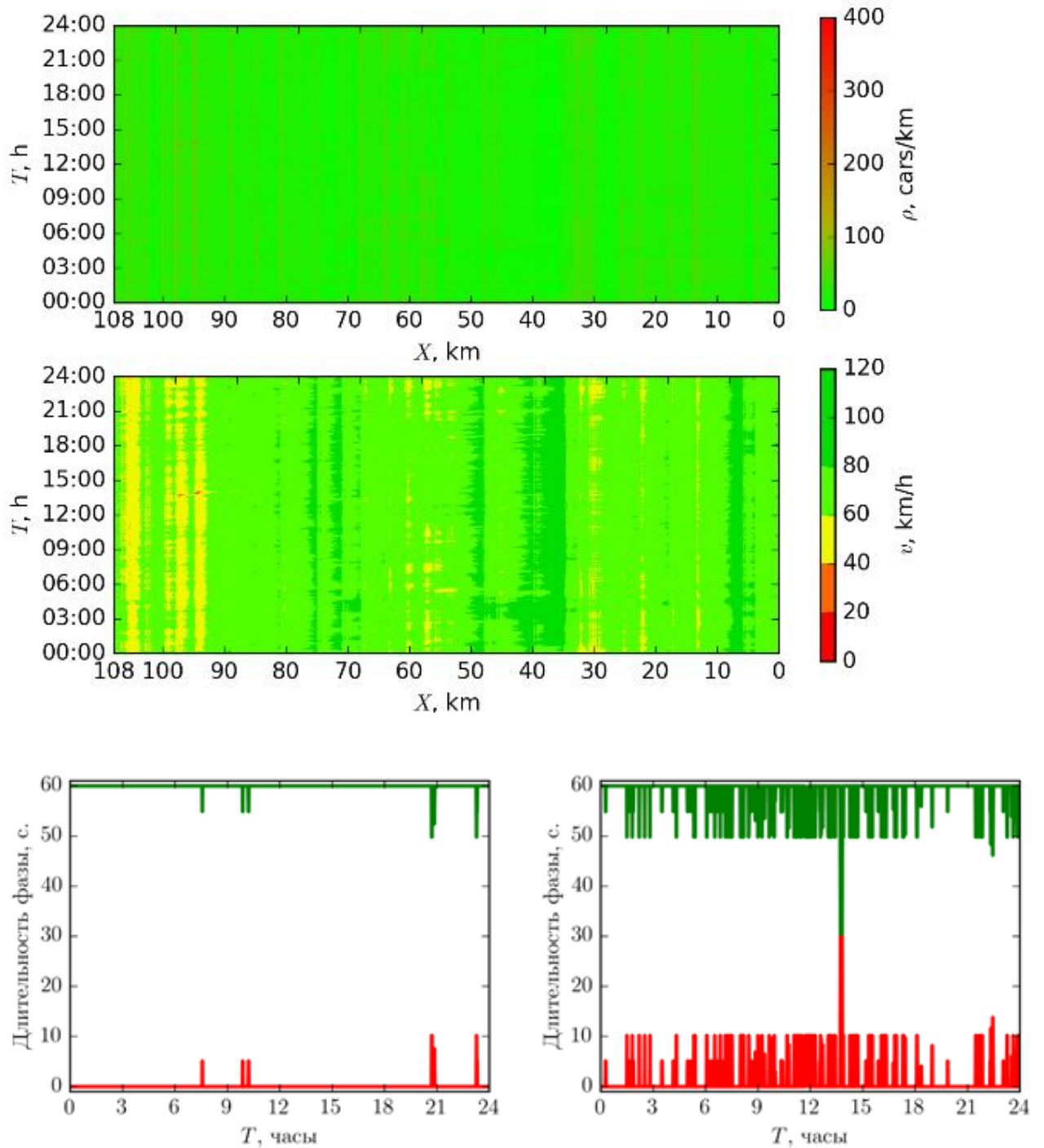


Рис. 3.54. Полученные в результате расчета дорожного движения с адаптивным регулированием светофоров на въездах МКАД пространственно-временные диаграммы плотности (вверху) [АТС/км] и средней скорости (в середине) [км/ч] за сутки. Внизу показаны временные интервалы работы красной (красная линия) и зеленой (зелёная линия) светофорных фаз при длительности красной фазы не более 30 секунд на цикл для двух въездов: слева на 10 км МКАД (развязка с Новорязанским ш.) и справа на 94 км МКАД (развязка с Ярославским ш.).

В отсутствие адаптивного светофорного регулирования въездов на МКАД образуются достаточно заметные заторы в районе 85-105 км. Использование слабого регулирования (красная фаза до 10 секунд) не позволяет избежать возникновения пробок, но ускоряет их рассасывание. При этом незначительно увеличивая очереди на въездах до примерно 19 АТС. Увеличение длительности запрещающего сигнала до 20 секунд практически убирает заторы на МКАД, при увеличении очередей на въездах до 37 АТС максимум. Дальнейшее увеличение длительности запрещающей фазы приводит к полному исчезновению пробок на МКАД, однако ценой этого является заметное увеличение очередей на въездах вплоть до 50 АТС.

3.6 Выводы по главе 3

В данной главе исследовалась проблема описания автомобильного движения на транспортной сети произвольной конфигурации. При этом использовался макроскопический подход, когда транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений для плотности и скорости потока. Система уравнений замыкается путем использования выражения для *относительной скорости распространения возмущений* в транспортном потоке $c(\rho) = \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$, полученном эмпирически отдельно для каждого из участков транспортной сети через автоматизированную обработку данных измерений с автострадных детекторов и автомобильных GPS треков.

В рамках предлагаемого подхода была разработана новая макроскопическая гидродинамическая модель, описывающая автомобильное движение в городской транспортной сети и учитывающая, как существующую дорожную разметку, так и текущее распределение светофорных фаз на перекрестках с возможностью их адаптивного регулирования. Модель реализована в виде двух программных комплексов [Морозов, Холодов, 2012; Алексеенко, Холодов 2017], позволяющих проводить расчеты с использованием реальных дорожных данных. Проведенные расчеты показали, что управление дорожным движением в городской транспортной сети с использованием разработанной макроскопической модели демонстрирует

эффективность предложенного алгоритма адаптивного управления трафиком и позволяет оценить эффект его применения для выбора наиболее оптимальной стратегии организации дорожного движения на значительных временных интервалах для заданного участка транспортной сети.

3.7 Краткое описание разработанных программных комплексов

I. Программный комплекс — «Система автоматического управления дорожным движением для автономно работающих перекрестков».

Разработанный программный комплекс имеет свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2012615099 от 07.06.2012, был разработан на языке C/C++ под платформу x32 и состоит из:

- блока адаптивного регулирования в виде исходного кода на языке программирования C/C++ для интеграции его в систему дорожного контроллера;
- приложения сбора статистики под операционную систему Windows;
- приложения графической визуализации собранной статистики под операционную систему Windows;
- приложения GIS визуализации структуры перекрестка под операционную систему Windows.

II. Программный комплекс — «Система автоматического управления светофорной сигнализацией для въездов на автомагистрали».

Разработанный программный комплекс имеет свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2017662058 от 26.10.2017, был разработан на языках C/C++ и Python под платформу x32, предназначен для построения прогноза и расчета оптимального режима работы светофорных объектов, установленных на въездах на автомагистрали, на основе актуальных данных о текущей загруженности транспортной сети. Программа предназначена для адаптивного регулирования режима работы светофорных объектов и оценки потенциальной эффективности от внедрения подобной системы и состоит из:

- блока построения прогноза и формирования режима адаптивного регулирования на языке программирования C++;
- приложения сбора статистики на языке программирования Python под операционную систему Windows;
- приложения визуализации работы алгоритма на языке программирования Python под операционную систему Windows;

Глава 4. Моделирование потоков данных в пакетных сетях

В данной главе используются материалы, опубликованные ранее в следующих работах и статьях: [Северов, Холодов, 2008; Северов, Холодов, 2011; Северов, 2013; Холодов, 2019].

Моделирование IP-сетей в настоящее время применяется как для исследования существующих сетевых протоколов, так и для разработки новых. Особый интерес представляет моделирование сетей, масштабируемое в широком диапазоне количества элементов. В настоящее время для моделирования сетей передачи данных применяются средства, использующие различные подходы.

Наиболее детальный анализ для относительно небольшого количества элементов сети обеспечивают дискретно-событийные модели пакетного уровня [Fujimoto et al. 2003; Riley, 2003; Riley et al., 2004; Szymanski et al., 2002; Zeng et. al., 1998]. В таких моделях отслеживается поведение каждого пакета данных в моделируемой сети. Пакетный подход обеспечивает хорошее соответствие моделей поведению реальных сетей. Дополнительным преимуществом является простота создания моделей элементов сети и интеграции реальных фрагментов сети с моделью [<http://www.wand.net.nz/~stj2/nsc>]. К наиболее популярным средствам пакетного моделирования с открытыми исходными кодами можно отнести NS-2 [<http://www.isi.edu/nsnam/ns>]. Доступны также промышленные средства дискретно-событийного моделирования. Примером может быть OPNET Modeler® [<http://opnetprojects.com/opnet-modeler>].

Непрерывный рост количества элементов и объёма передаваемого трафика в реальных сетях приводит к росту сложности моделей и потребностей в вычислительных ресурсах, необходимых для моделирования. Этим обусловлен устойчивый интерес к моделям, интерпретирующим движение пакетов в компьютерной сети как потоки условной несжимаемой сплошной среды (ПСС-моделям) [Kesidis et. al., 1996; Liu et. al., 1999; Liu et. al., 2001; Misra et. al., 2000]. Исключение из

рассмотрения отдельных пакетов приводит к ожидаемой экономии вычислительных ресурсов. Однако, при этом модель перестаёт различать трафик различных взаимодействий внутри сети и адекватно воспроизводить динамику отдельной сессии.

Известен гибридный подход, в котором общая загрузка сети описывается потоковой моделью, а интересующие сессии моделируются на уровне пакетов [Riley et. al., 2002].

4.1 Постановка задачи

В настоящей работе предложена потоковая модель, исключая рассмотрение отдельных пакетов, но различающая данные различных сессий как потоки несмешивающихся компонентов сплошной среды. Сеть передачи данных (см. Рис. 4.1) рассматривается как набор узлов, соединённых каналами связи. Функциональная специализация позволяет выделить два типа узлов. Узлы типа *A* перенаправляют потоки данных, создаваемые и/или терминируемые узлами другого типа *B*. Топология сети позволяет предложить представление сети в виде направленного графа. Каждая вершина типа *Pa*, соотнесённая с узлом типа *A*, реализует правила маршрутизации. Каждая вершина типа *Pb*, соотнесённая с узлом типа *B*, реализует оконечные сетевые протоколы. Каждое ребро графа соотносится с очередью и следующим за ней однонаправленным сетевым каналом.

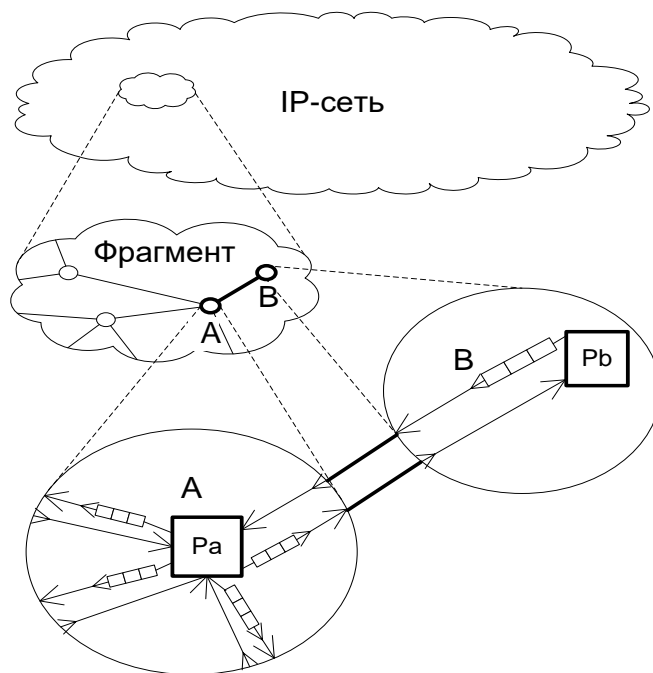


Рис. 4.1. Концептуальная модель IP-сети: A, B – узлы IP-сети, соединённые двунаправленным каналом; A – узел - маршрутизатор с вершиной типа Pa и выходными очередями $\square\square$; B – конечный узел с вершиной типа Pb .

Необходимость передать через сеть данные от одной вершины типа Pb к другой вершине такого же типа создаёт один или более потоков данных. Каждый такой поток данных назовём сессией и будем рассматривать как перенос некоторого модельного «вещества» или «жидкости», специфичной для данной сессии.

В своём движении модельная жидкость последовательно минует все очереди на пути своей сессии. Часть её может быть утрачена при сбросе части данных в результате активного управления очередями в IP-сетях. Размер пакетов моделируемой IP-сети соотносится с плотностью вещества ρ (количеством бит в пакете), а темп продвижения этих пакетов в очереди со скоростью вещества u (количеством пакетов, проходящих в единицу времени – см. Рис.4.2).

Факты потери данных некоторой сессии и особенно моменты этих потерь в значительной мере могут определять последующее поведение протоколов данной сессии. Поскольку потоковая модель не отслеживает движение каждого пакета в отдельности, чтобы обеспечить модель, например, протокола TCP необходимой информацией, предлагается сопровождать движение по сети модельной жидкости

сопутствующим сохранением информации о потерях этой жидкости. Последняя характеризуется своей плотностью распределения вдоль очереди - d . Утрата модельного вещества в результате управления определённой очередью отражается плотностью распределения этой утраты вдоль очереди - ψ (см. Рис.4.2).

Введённые переменные могут быть соотнесены с дискретным наполнением очереди q пакетами различных сессий следующим образом. Предположим, что единственный интервал $[x^q, x^q + 1]$ очереди взаимно однозначно соответствует пакету сессии s . Тогда $\int_{x^q}^{x^q+1} \rho_s^q dx = \rho_s$ есть количество бит в этом пакете, $\int_{x^q}^{x^q+1} d_s^q dx$ - количество

пакетов сессии s , потеря которых должна быть учтена после приёма данного пакета, а $\int_{x^q}^{x^q+1} \psi_s^q dx$ - вероятность сброса данного пакета.



Рис. 4.2. Поточковая модель очереди: ρ – плотность «вещества» данных; d – плотность информации об утраченных данных; ψ - плотность сброса данных; u – скорость продвижения данных в очереди; X – длина очереди; x – координата вдоль очереди.

В данной работе потоковая модель для ребер графа сети предусматривает набор уравнений, описывающих перенос и утрату модельных веществ. В вершинах типа Pa моделируются порождение и преобразование модельного вещества в

соответствии с протоколом ТСП. В вершинах типа *Pb* несмешивающиеся потоки модельных веществ подвергаются единственной операции - перенаправлению. Не рассматриваются такие действия с потоками данных, как тиражирование, расщепление и слияние.

Таким образом, задача состоит в том, чтобы собрать и построить полную вычислительную модель, состоящую из модельных элементов. Модель протокола ТСП также предполагает определенные соотношения для размера ТСП окна и скоростей входящего и исходящего потоков для различных режимов работы протокола.

4.2 Модель среды

Основу потоковой модели составляют уравнения переноса условных веществ и информации о потере этого вещества:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho_s^q + \frac{\partial}{\partial x^q} (\rho_s^q u^q) = -\rho_s^q u^q \psi_s^q, \\ \frac{\partial}{\partial t} d_s^q + \frac{\partial}{\partial x^q} (d_s^q u^q) = u^q \psi_s^q. \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь $q \in \{q = 1, \dots, Q\}$ – индекс очереди в совокупности всех очередей модели, а $s \in \{s = 1, \dots, S\}$ – индекс сессии в совокупности всех сессий модели. Пространственная координата x^q , имеет смысл положения пакета в очереди, измеренного в единицах пакетов от головы очереди, примыкающей к исходящему. Скорость движения вещества u^q считается одинаковой для всех сессий, проходящих через очередь q .

$$u^q = \frac{C^q}{\rho^q} + \sum_s \int_{x^q}^{X^q} \psi_s^q dx^q, \quad u^q \geq 0, \quad (4.2)$$

где C^q – номинальная пропускная способность интерфейса на выходе очереди q , $\rho^q = \sum_s \rho_s^q|_{x^q=X^q}$, X^q – длина очереди q , измеренная в единицах пакетов. В

предлагаемой модели скорость изменения длины очереди представляется в виде производной:

$$\frac{dX^q}{dt} = \sum_s u_s^q - u_0^q, \quad X^q \geq 0, \quad (4.3)$$

где $u_0^q = u^q|_{x^q=0}$, а u_s^q – скорость продвижения данных сессии s , поступающей на вход очереди q .

Сходным образом определяются граничные условия для уравнений (4.1) на входной границе $x^q = 0$:

$$\rho_s^q|_{x^q=0} = \rho_{s,0}^q, \quad d_s^q|_{x^q=0} = d_{s,0}^q. \quad (4.4)$$

Здесь $\rho_{s,0}^q$ и $d_{s,0}^q$ относятся к сессии s , поступающей на вход очереди q . На выходной границе $x^q = X^q$ граничные условия не требуются, а значения $\rho_s^q(t, X^q)$, $d_s^q(t, X^q)$ однозначно определяются из уравнений (4.1) благодаря условию (4.2).

В данной работе в качестве политики активного управления очередью (AQM – active queue management) был выбран алгоритм случайного раннего обнаружения (RED – Random Early Detection) [Floyd, Jacobson, 1993], при этом сброс происходит из хвоста очереди

$$\sum_s \int_{X^{q-1}}^{X^q} \psi_s^q dx^q = \begin{cases} 0, & \xi \geq P^q(t), \\ 1, & \xi < P^q(t). \end{cases} \quad (4.5)$$

Здесь ξ – случайная величина с равномерным распределением на отрезке $[0;1]$, а $P^q(t)$ – вероятность сброса пакета, которая в терминах RED AQM определяется следующим образом

$$P^q(t) = \begin{cases} 0, & D^q(t)\tilde{P}^q(t) < 1, \\ \min \left[1, \frac{\tilde{P}^q(t)}{2 - D^q(t)\tilde{P}^q(t)} \right], & 1 \leq D^q(t)\tilde{P}^q(t) \leq 2, \\ 1, & 2 \leq D^q(t)\tilde{P}^q(t), \end{cases} \quad (4.6)$$

$$D^q(t) = \int_{t_{drop}^q}^t u^q(\tau) d\tau.$$

Здесь t_{drop}^q – момент последнего сброса данных в очереди q , а $\tilde{P}^q(t)$ зависит от $\tilde{X}^q(t)$ – ожидаемой (прогнозируемой) длины очереди:

$$\tilde{P}^q(t) = \begin{cases} 0, & \tilde{X}^q < X_{min}^q, \\ \frac{\tilde{X}^q - X_{min}^q}{X_{max}^q - X_{min}^q} P_{max}^q, & X_{min}^q \leq \tilde{X}^q \leq X_{max}^q, \\ 1, & \tilde{X}^q > X_{max}^q, \end{cases} \quad (4.7)$$

в (4.7) $X_{min}^q, X_{max}^q, P_{max}^q$ – постоянные параметры RED AQM.

$$\frac{d\tilde{X}^q}{dt} = \frac{\ln \alpha^q}{\delta^q} (\tilde{X}^q(t) - X^q(t)). \quad (4.8)$$

Последнее уравнение заменяет собой дискретное выражение для скользящего среднего: $\tilde{X}^q(t + \delta^q) = (1 - \alpha^q)\tilde{X}^q(t) + \alpha^q X^q(t)$. Безразмерный постоянный параметр $\alpha^q \in [1, 10]$ определяет степень зависимости ожидаемой длины очереди от кратковременных колебаний длины реальной очереди. Параметр δ^q равен интервалу времени между замерами реальной длины очереди.

Здесь мы пренебрегаем задержками и потерями в каналах связи в сравнении с задержками и потерями в очередях, предшествующих этим каналам. Также считаем несущественным время перенаправления данных при маршрутизации. В таком приближении модель маршрутизации сводится к присвоению необходимых значений с выходов очередей и окончных протоколов на входы каналов и наоборот, с выходов каналов на входы очередей и окончных протоколов. Напомним, что

рассматриваемые модели каналов и сессий являются однонаправленными. Поэтому для представления двунаправленного канала моделируемой сети с парой очередей на его входах потребуются два ребра сетевого графа.

Аналогично, для представления одной сессии в терминах протокола TCP потребуются две моделирующие сессии: одна – прямая, передающая данные от источника к получателю, и другая – возвратная, возвращающая подтверждающие квитанции от получателя к источнику (см. Рис 4.3). Отметим также зависимости потока данных на выходе TCP-источника от потока квитанций на его входе, а также потока квитанций на выходе TCP-получателя от потока данных на его входе.

Для исследования протокола TCP ограничимся случаем, когда друг другу парно взаимно-однозначно соответствуют источник, получатель, прямая и возвратная сессии. Постулируется, что каждой сессии соответствует один и только один вход графа, а также один и только один выход графа.

Поведение компьютерной сети моделировалось с использованием версии NewReno протокола TCP [<http://www.ietf.org/rfc/rfc2582.txt>], с переменным размером окна – последовательности пакетов, которые могут быть отправлены без получения подтверждающей квитанции. В данной версии TCP размер окна увеличивается до тех пор, пока не произойдет потеря пакетов в сессии. Соответственно протокол TCP-Reno имеет несколько режимов изменения размера окна: избегания перегрузки, быстрого восстановления и медленного старта

$$u_s = \begin{cases} u_s (1 + 1/W_s), & \text{"Congestion avoidance"}, \\ \tilde{W}_s / \tau_s, & \text{"Fast Recovery"}, \\ W_s / \tau_s, & \text{"Slow Start"}. \end{cases} \quad (4.9)$$

В (4.9) W_s – текущий размер окна данной сессии, \tilde{W}_s – пороговый размер окна данной сессии, τ_s – задержка распространения данных и квитанций в данной сессии. Увеличение размера окна данной сессии W_s определяется решением следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{dW_s}{dt} = \begin{cases} u_s/W_s, & \text{"Congestion avoidance"}, \\ u_s/\tilde{W}_s, & \text{"Fast Recovery"}, \\ u_s, & \text{"Slow Start"}. \end{cases} \quad (4.10)$$

После инициализации данных выполняется численное моделирование сети во времени с определённым шагом. На каждом временном шаге в моделях очередей выполняются следующие действия:

- учёт притока данных в хвост очереди;
- вычисление действительной и ожидаемой длин очередей;
- определение вероятности сброса очереди;
- учёт сброса очереди;
- сохранение значений переменных состояния очереди;
- определение значений выходного потока очереди.

В данной работе в моделях каналов выполняется только перенос информации с входа на выход. В моделях TCP приёмников информация передаётся с входа на выход с учётом преобразования плотности.

В моделях TCP передатчиков выполняются следующие действия:

- изменение переменных состояния протокола TCP в зависимости от режима и количества поступивших квитанций;
- накопление оцениваемого времени задержки сессии (туда и обратно);
- изменение режима в зависимости от поступившей информации о потерях, текущего режима и оценки времени задержки;
- определение значений выходного потока.

4.3 Результаты расчетов

Для сравнительной оценки разработанной потоковой модели проводилось моделирование работы, как простейших сетей передачи данных (см. Рис 4.3), так и более сложных конфигураций (см. Рис 4.4-4.5) в сравнении с пакетной моделью, реализованной в NS-2 – средством пакетного моделирования с открытыми

исходным кодом [<http://www.isi.edu/nsnam/ns/>].

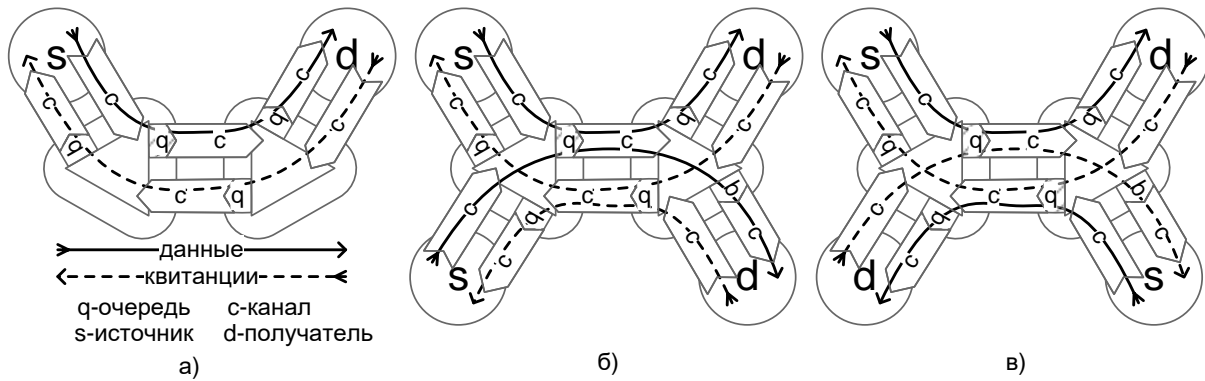


Рис. 4.3. Различные конфигурации простейших сетей: (а) одиночная с плотностью 4 Кбит/пакет; (б) сонаправленные с плотностью 8 Кбит/пакет; (в) противонаправленные с плотностью 8 Кбит/пакет.

Простейшие сети представлялись одиночной ТСР – сессией (Рис 4.3-а), а также парой сонаправленных (Рис 4.3-б) и парой противонаправленных сессий (Рис 4.3-в). Эволюция интересующих нас характеристик – размеров очередей и ТСР-окон, в течение первых секунд представлены на графиках позволяющих оценить степень подобия полученных результатов (см. Рис. 4.6-4.8). Видно, что модели сходным образом демонстрируют основные явления, характерные для динамики протокола ТСР. Однако распределение моментов времени, в которые происходит переключение режимов протокола, существенно различается. Динамика пары противонаправленных сессий в пакетной модели обнаруживает относительно высокочастотные колебания длины очереди, при этом в потоковой модели таких колебаний нет (Рис 4.8). Последнее наблюдение позволяет судить об ожидаемой разнице в разрешающей способности пакетной и потоковой модели. Важно, что указанные различия в деталях поведения оставляют наиболее значимые средние уровни наблюдаемых характеристик близкими друг к другу.

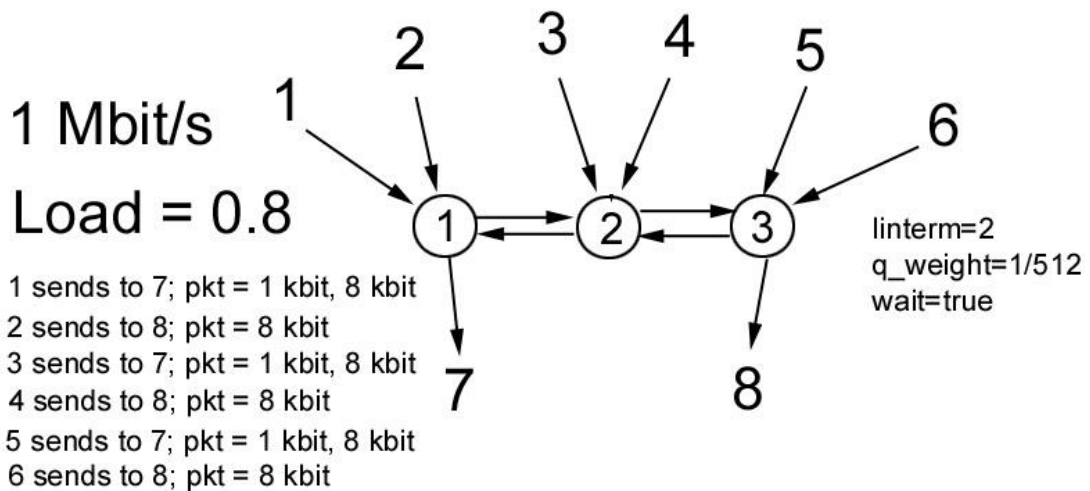


Рис 4.4. В приведённой топологии: 1-6 источники UDP трафика, 7,8 – получатели; (1)-(3) RED AQM маршрутизаторы. Каждый из источников шлёт данные своему получателю.

Пропускные способности всех каналов сети на Рис. 4.4 приняты равными 1 [Мбит/с]. Задержка распространения на каждом участке канала полагается 2 [мс]. В каналах потери считаются нулевым. Размеры UDP пакетов 1 и 8 [кбайт]. Каждый источник шлёт поток данных с постоянной производительностью 0.8 [Мбит/с]. Все источники одновременно в начальный момент времени начинают и в момент времени 14 [с] все прекращают передачу данных. Трафик по активным соединениям распределяется симметрично. X_{max}^q [пакетов], X_{min}^q [пакетов], P_{max}^q , $\alpha^q = 9$.

В качестве результатов расчетов на Рис. 4.9-4.11 приведены зависимости от времени длин текущих $X^q(t)$ и ожидаемых $\tilde{X}^q(t)$ очередей (в пакетах) от маршрутизатора (2) к маршрутизаторам (1) и (3) и длины текущей и ожидаемой очередей от маршрутизатора (1) к получателю №7 (сплошные линии), полученные с помощью потоковой модели. Для сравнения приведены результаты моделирования средствами комплекса NS-2 [<http://www.isi.edu/nsnam/ns>] для тех же длин очередей (пунктирные линии).

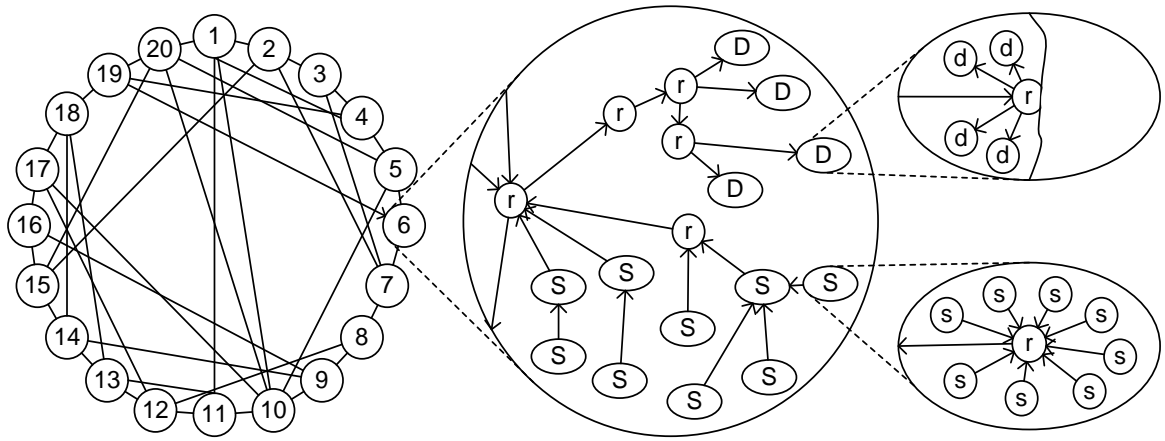


Рис. 4.5. Сложная кольцевая конфигурация сети, моделировалось 1280 сессий, при этом имело место одна загруженная очередь на пути каждой сессии. Использовались следующие характеристики сети: пропускная способность магистралей – 20 Мбит/с; хорды подсети – 5 Мбит/с; размер пакетов – 8 Кбит/пакет. Трафик организован так, чтобы половина пакетов отправлялась по магистральной в соседнюю подсеть, а вторая половина по хорде подсети. Обозначения: r – узел маршрутизатор; s – узел отправитель; d – узел получатель.

Для сравнения интегрального поведения модельной компьютерной сети в целом, по гистограммам усреднённой производительности и усреднённого времени оборота соединений, рассмотрен случай относительно сложной кольцевой конфигурации сети (Рис 4.5). Данная конфигурация аналогична топологии, использованной в работе [Yong Liu et al., 2003]. Всего в рассматриваемом случае моделировалось 1280 сессий, при этом имело место одна загруженная очередь на пути каждой сессии. Использовались следующие характеристики сети: пропускная способность магистралей – 20 Мбит/с; хорды подсети – 5 Мбит/с; размер пакетов – 8 Кбит/пакет. Трафик намеренно был организован так, чтобы половина пакетов отправлялась по магистральной в соседнюю подсеть, а вторая половина по хорде подсети. Соответствующие усредненные результаты производительности сети и задержки в зависимости от сессии показаны на (Рис. 4.12) и (Рис 4.13). Усреднение результатов выполнялось за период времени в 200 сек.

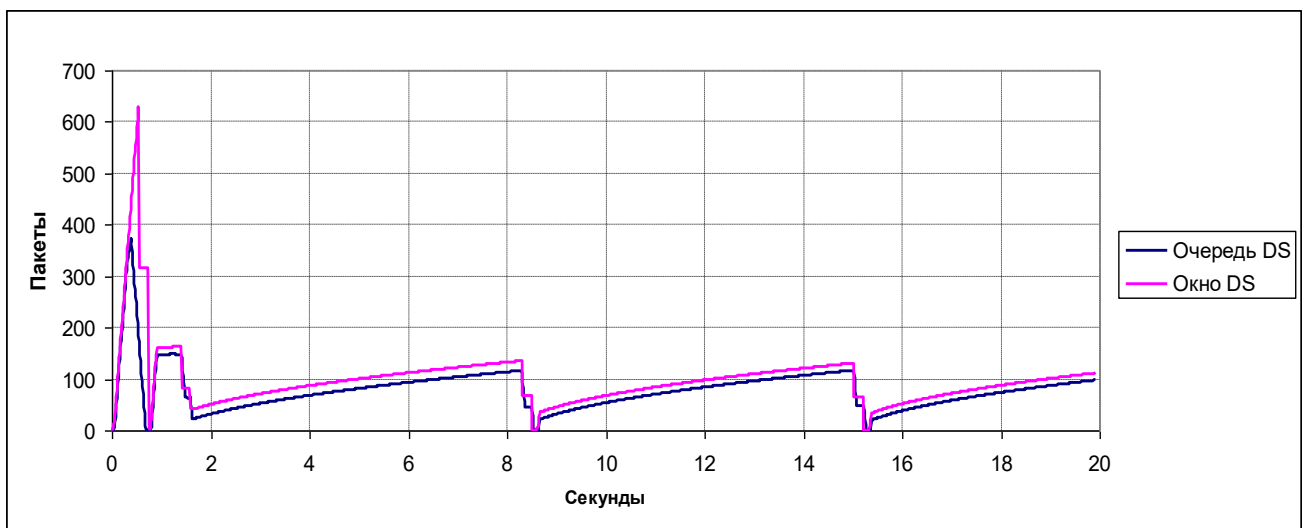
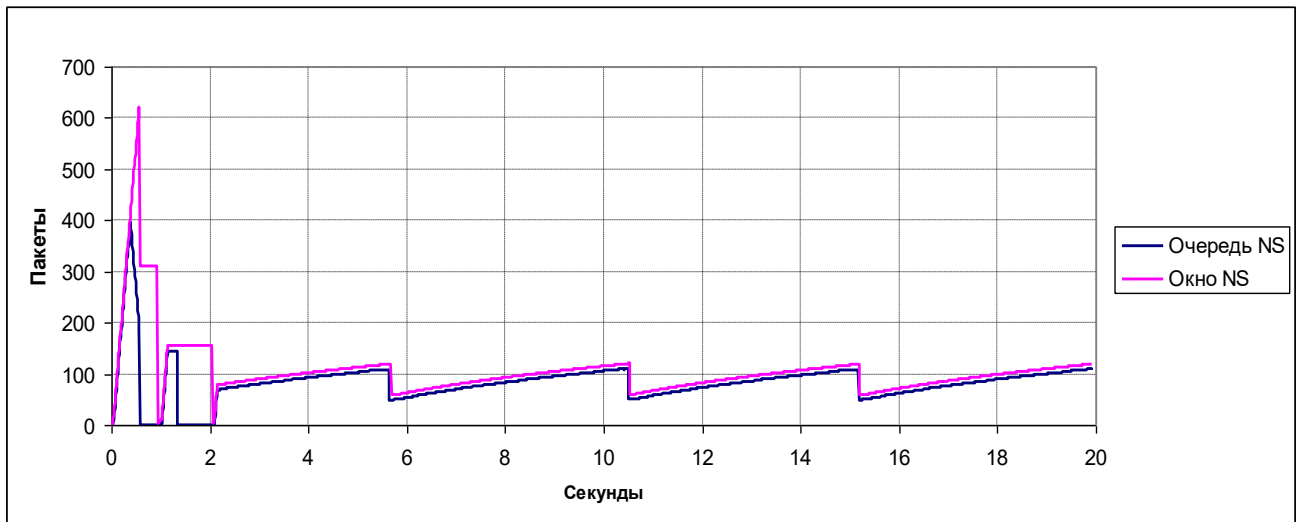


Рис. 4.6. Временная динамика одиночной сессии (Рис 4.3-а): вверху – пакетная модель NS-2; внизу – потоковая модель; синяя линия – размер общей очереди; красная – размеры TCP-окна.

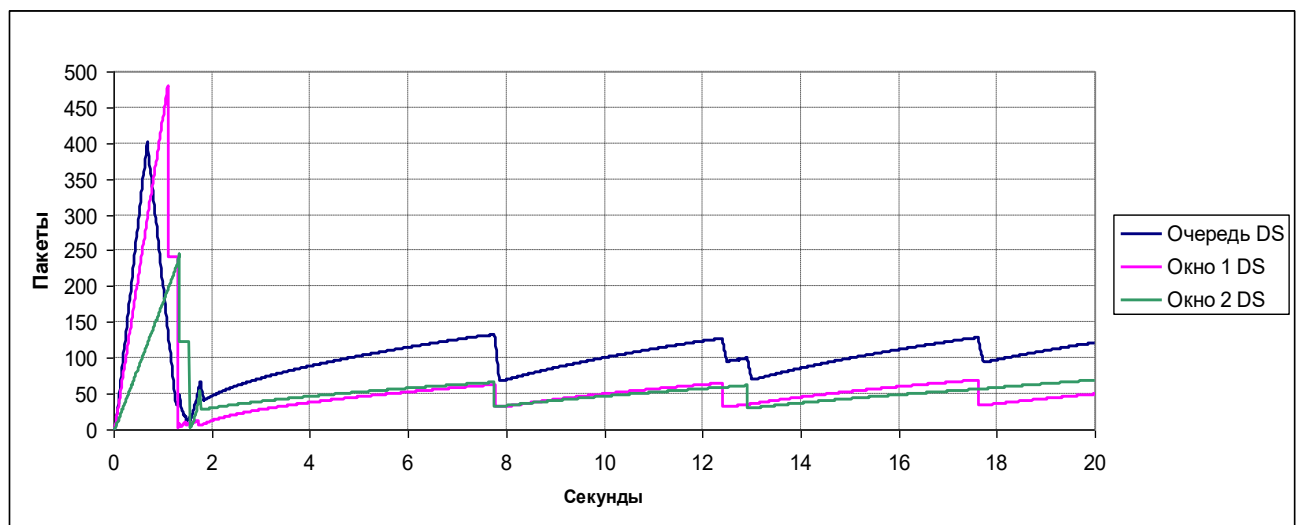
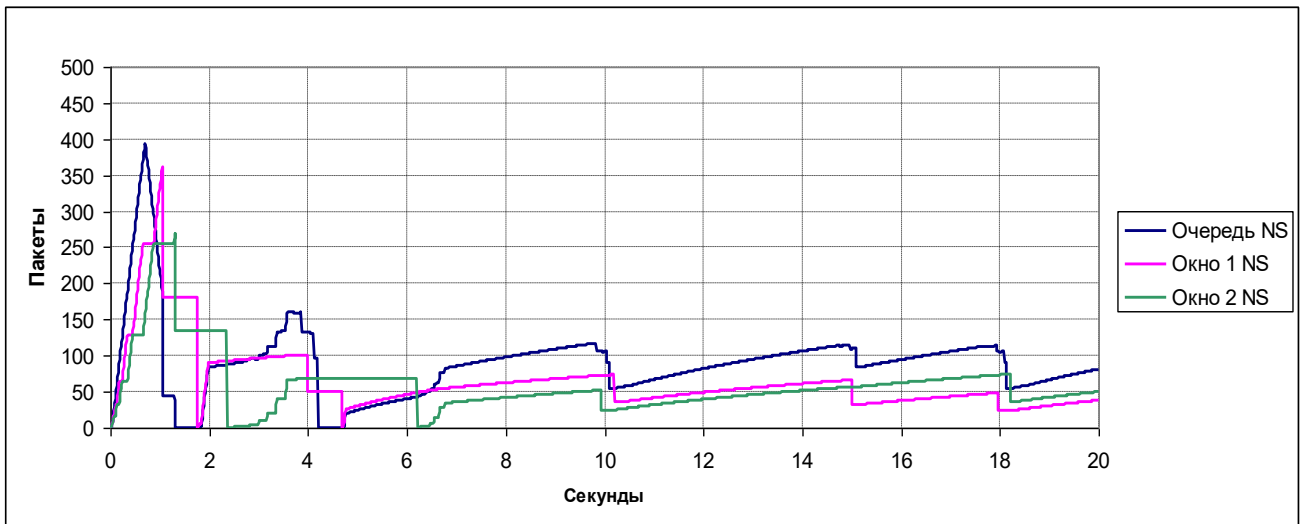


Рис. 4.7. Временная динамика двух сонаправленных сессий (Рис 4.3-б): вверху – пакетная модель NS-2; внизу – потоковая модель; синяя линия – размер общей очереди; красная и зеленая линии – размеры TCP - окон.

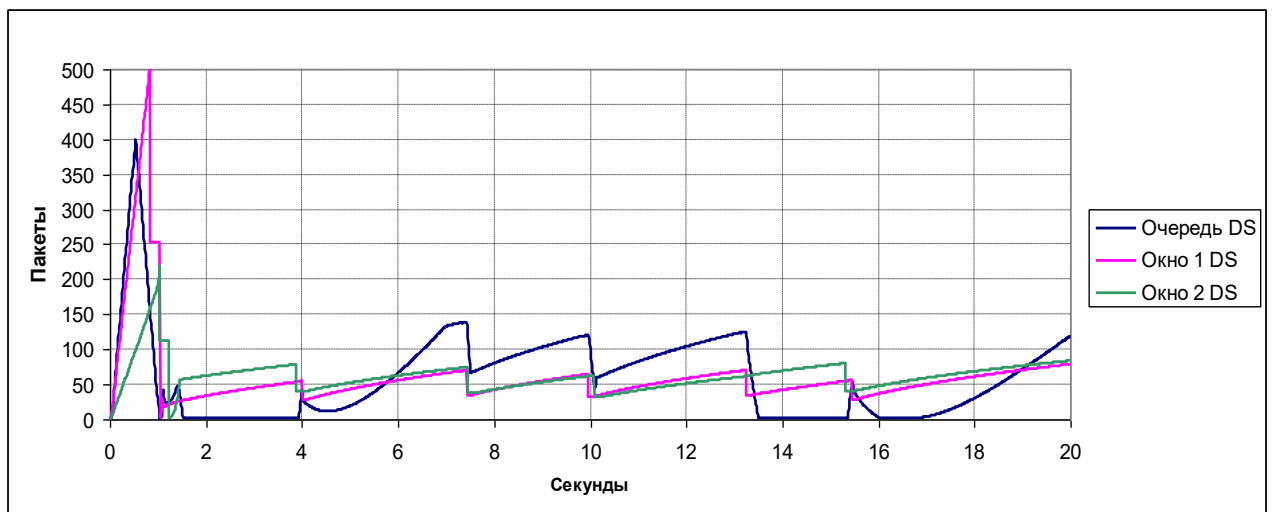
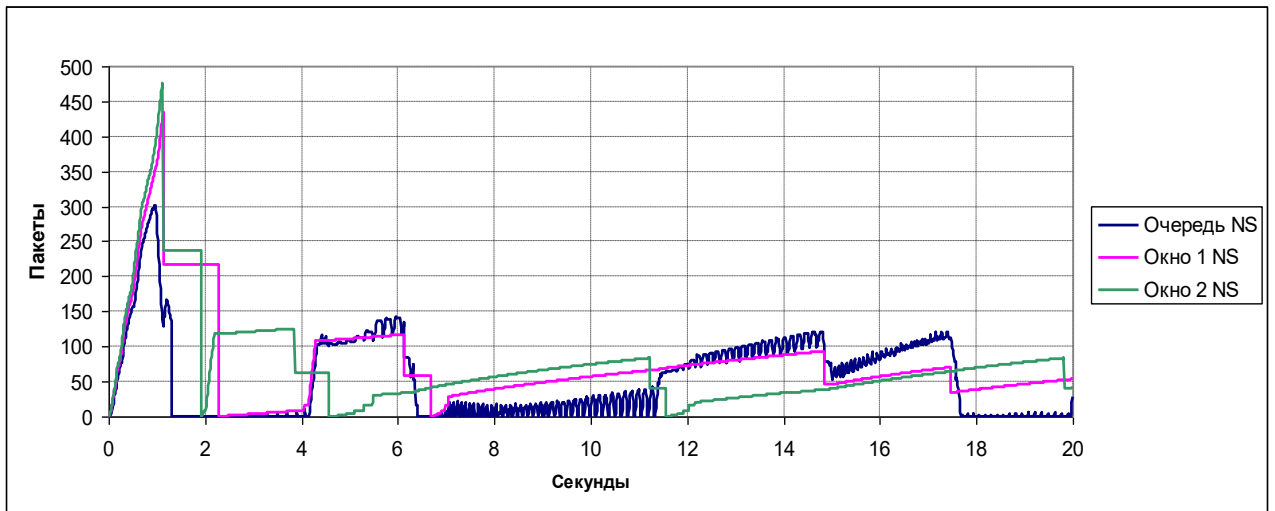


Рис. 4.8. Временная динамика двух противоположенных сессий (Рис 4.3-в):
 вверху – пакетная модель NS-2; внизу – потоковая модель; синяя линия – размер
 очереди; красная и зеленая линии – размеры TCP-окон.

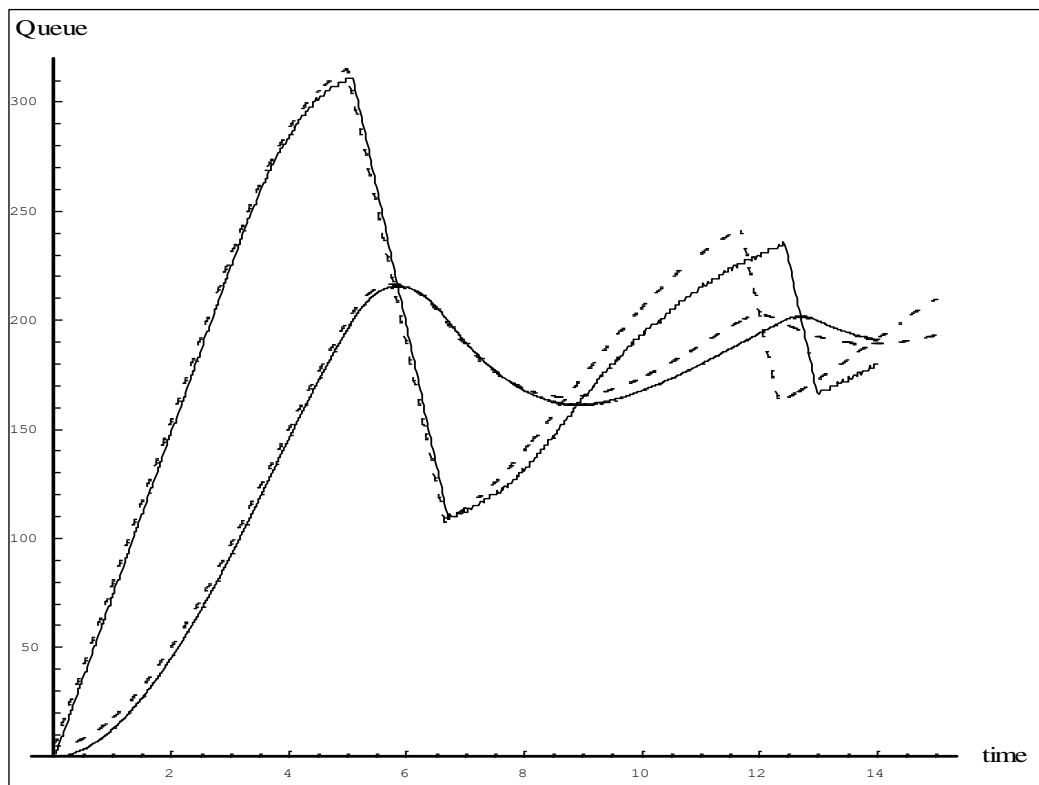


Рис. 4.9. Зависимости от времени длин текущих $X^q(t)$ и ожидаемых $\tilde{X}^q(t)$ очередей (в пакетах) от маршрутизатора (1) к получателю №7 (сплошные линии), полученные с помощью потоковой модели. Для сравнения приведены результаты моделирования средствами комплекса NS-2 для тех же длин очередей (пунктирные линии).

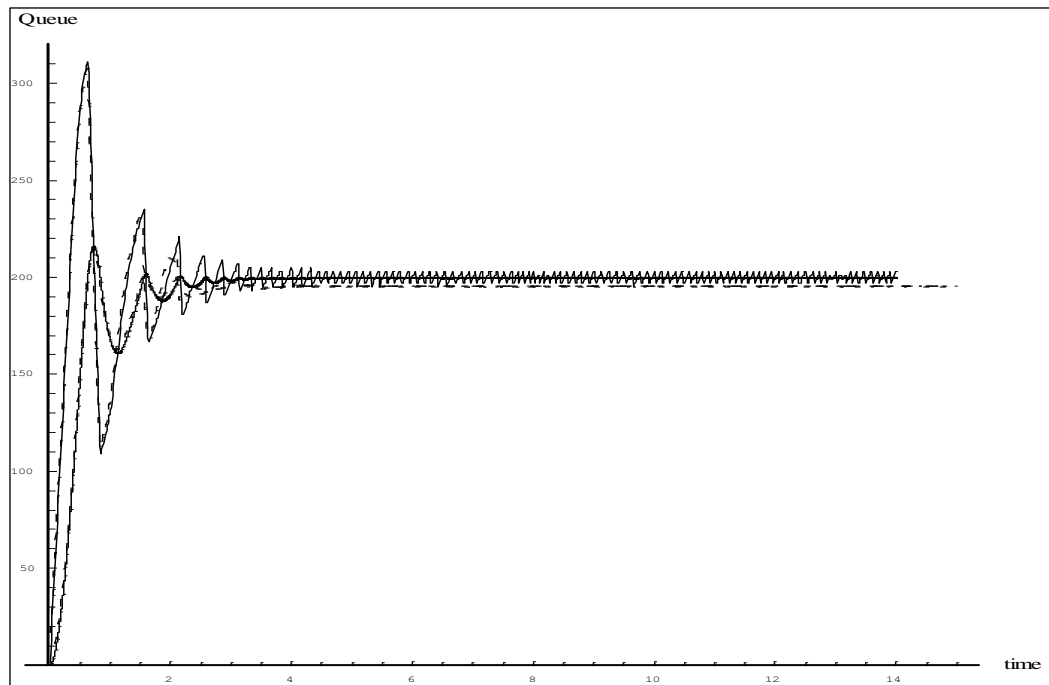


Рис. 4.10. Зависимости от времени длин текущих $X^q(t)$ и ожидаемых $\tilde{X}^q(t)$ очередей (в пакетах) от маршрутизатора (2) к маршрутизатору (1) (сплошные линии), полученные с помощью потоковой модели. Для сравнения приведены результаты моделирования средствами комплекса NS-2 для тех же длин очередей (пунктирные линии).

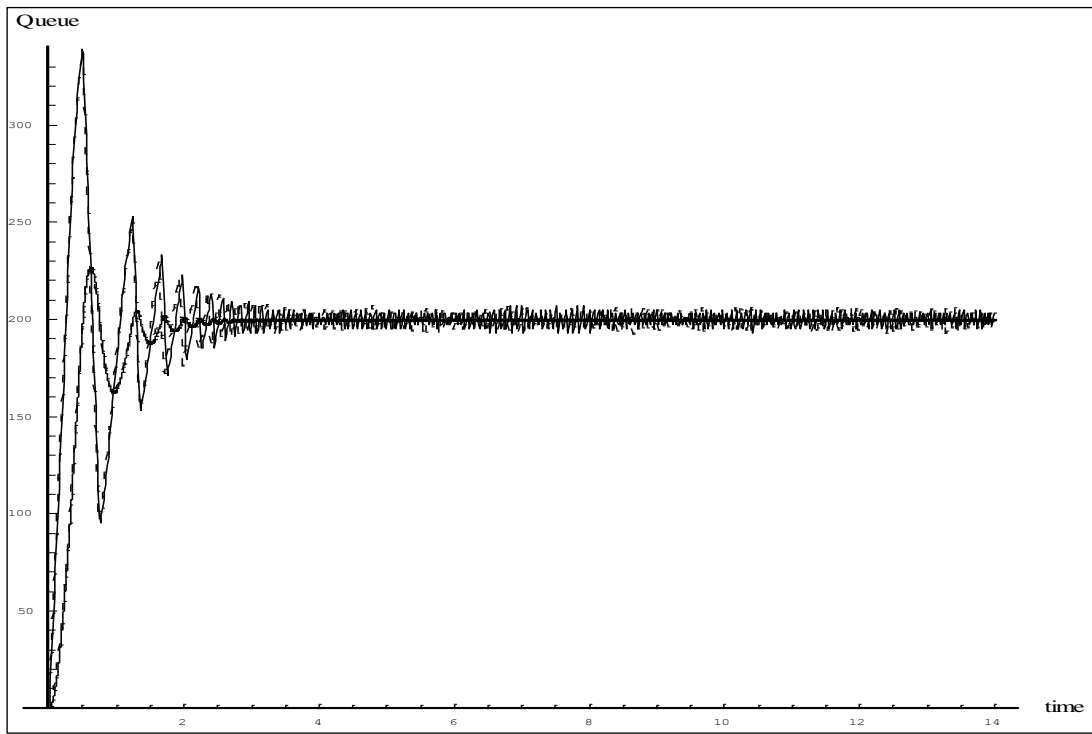


Рис. 4.11. Зависимости от времени длин текущих $X^q(t)$ и ожидаемых $\tilde{X}^q(t)$ очередей (в пакетах) от маршрутизатора (2) к маршрутизатору (3) (сплошные линии), полученные с помощью потоковой модели. Для сравнения приведены результаты моделирования средствами комплекса NS-2 для тех же длин очередей (пунктирные линии).

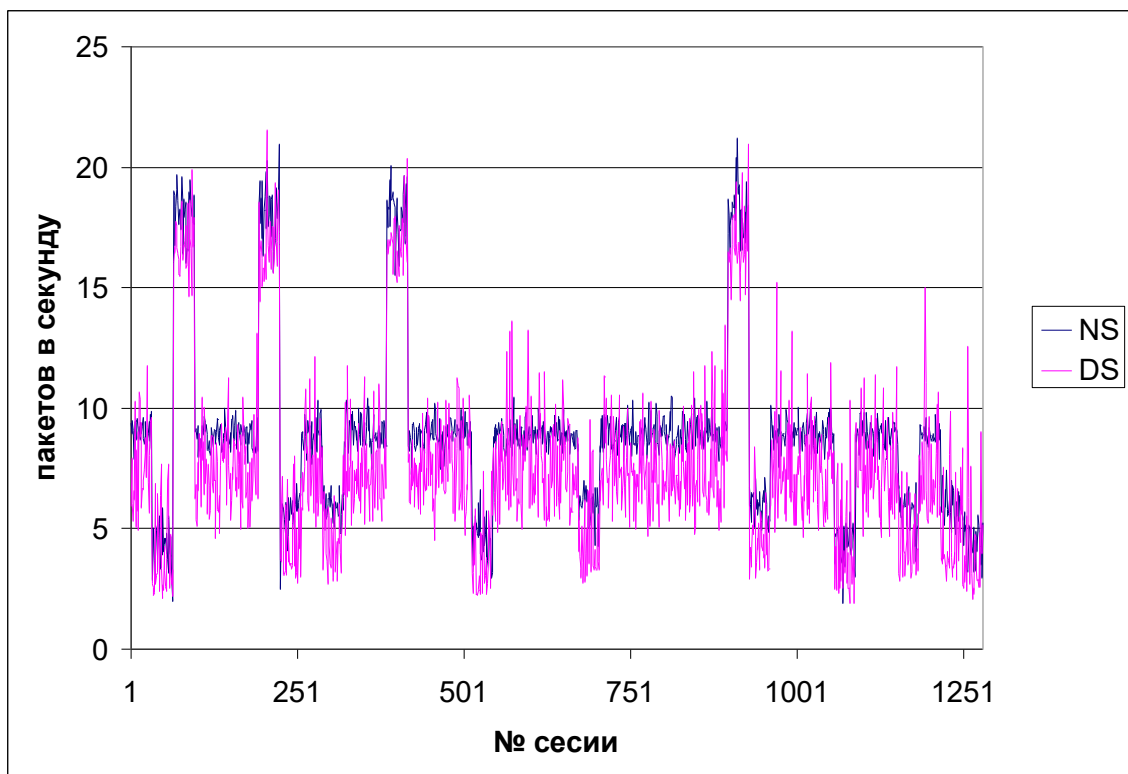


Рис. 4.12. Усредненные результаты производительности сети в зависимости от номера сессии для сложной кольцевой конфигурация сети (Рис. 4.5): синяя линия – пакетная модель NS-2; красная линия – потоковая модель.

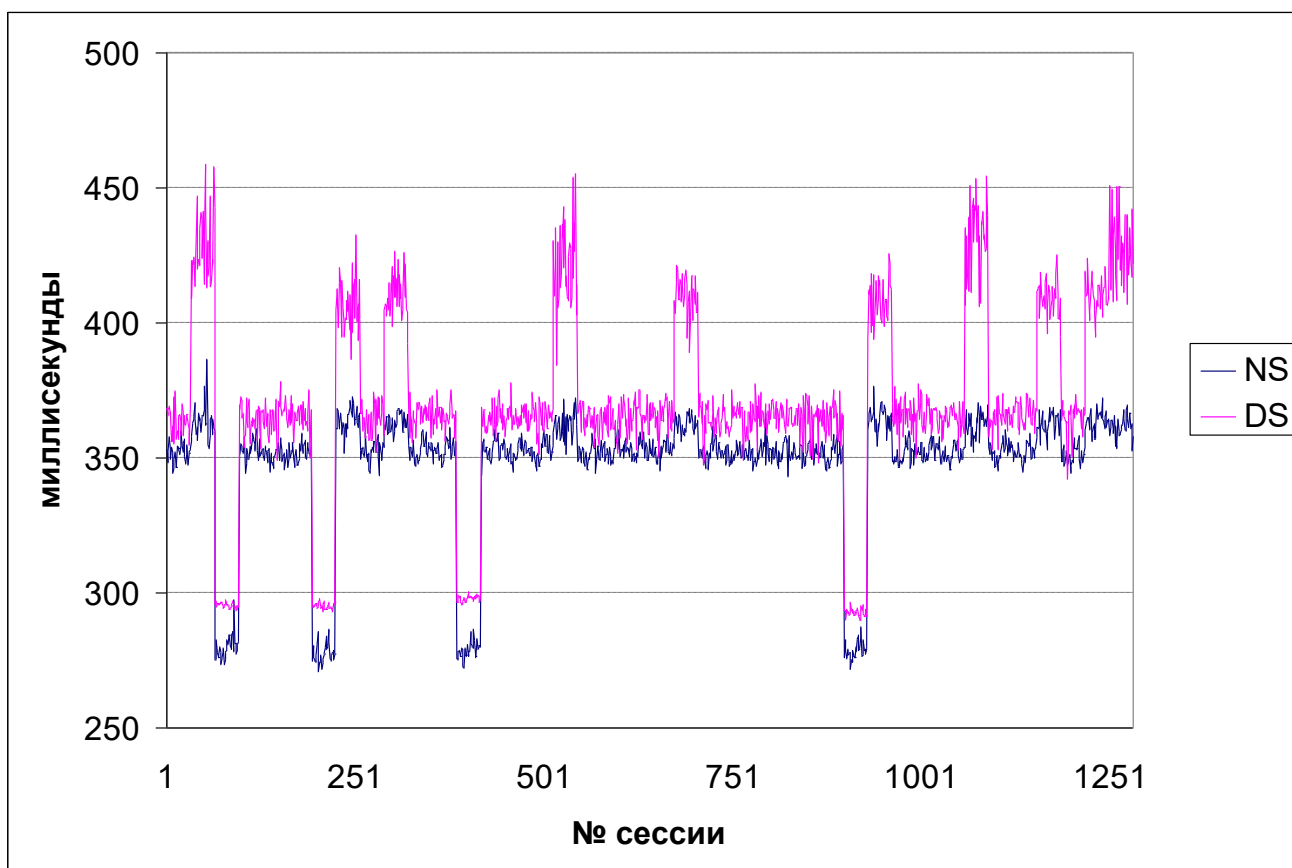


Рис. 4.13. Усредненные результаты временных задержек сети в зависимости от номера сессии для сложной кольцевой конфигурация сети (Рис. 4.5): синяя линия – пакетная модель NS-2; красная линия – потоковая модель.

Заметно, что большинство соединений демонстрируют сходные величины. Вместе с этим присутствует большой разброс значений производительности отдельных соединений от значений характерных для соответствующей группы соединений. Необходимо также отметить группы соединений, у которых заметно отличаются значения задержки (см. Рис 4.13). В части использования вычислительных ресурсов потоковая модель обнаруживает значительную их экономию. В наибольшей степени экономится занимаемая вычислительная память и в меньшей степени время численного расчета (см. Рис 4.14).

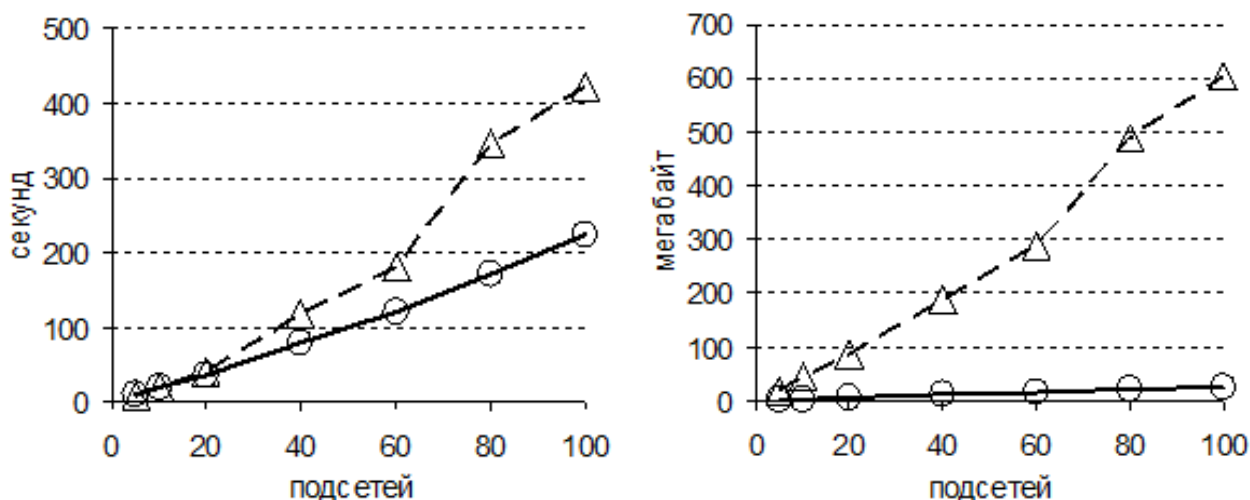


Рис. 4.14. Потребление вычислительных ресурсов в зависимости от количества моделируемых подсетей (5-100, 64 сессии на подсеть, размер пакета 1 КБ): слева – время расчета; справа – количество используемой памяти; треугольники – пакетная модель NS-2; окружности – потоковая модель.

Важнейшей особенностью предлагаемой модели сети является попытка отражения наиболее вероятного, статистически достоверного поведения потоков данных в целом, без учёта поведения каждого отдельного потока данных в какой-либо паре отправитель-получатель, как это обычно делается в других сетевых моделях. Полученные результаты показывают, что в сравнении с пакетной моделью разработанная потоковая модель за счет использования в качестве базовых элементов потоков данных вместо пакетов демонстрирует значительную экономию вычислительных ресурсов, обеспечивая при этом хорошую степень подобия как пиковых, так и усредненных характеристик сети. Модель реализована в виде комплекса программ [Холодов и др., 2011] и позволяет моделировать поведение сложных глобально распределенных IP – сетей передачи данных.

4.4 Краткое описание разработанного программного комплекса

«Программный комплекс для численного моделирования компьютерных сетей с использованием высокопроизводительных вычислительных алгоритмов».

Разработанный программный комплекс имеет свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2011617671 от 03.10.2011, был разработан

на языке C/C++ под платформу x32, предназначается для имитационного моделирования пакетных сетей и используется для следующих целей:

- применения метода потокового моделирования процессов обработки и передачи данных в компьютерных пакетных сетях с использованием уравнений в частных производных;
- исследование математических моделей объектов, используемых в системах потокового моделирования компьютерных пакетных сетей.

Программный комплекс применяется для моделирования - системы TCP-соединений в IP-сетях передачи данных и исполняется одновременно на нескольких ядрах процессоров через использование OpenMP SDK библиотек под операционной системой Windows.

Глава 5. Моделирование распространения примесей в вентиляционных сетях

В данной главе используются материалы, опубликованные ранее в следующих работах и статьях: [Геллер, Холодов, 2010; Холодов и др., 2016; Холодов, 2019].

В данной работе исследуется проблема построения математической модели распространения мелкодисперсных или газовых примесей в вентиляционных сетях на основе газодинамического подхода. Расчет распространения примесей в данной работе проводился на основе уравнений течения многокомпонентного газа, при этом используется модель односкоростной однотемпературной газовой динамики [Уоллис, 1972; Нигматулин, 1987]. Нахождение скорости и давления несущей фазы считается эквивалентно нахождению скорости и давления при трехмерном течении идеального газа. Также предполагается, что движение частиц примесей происходит под действием давления несущей газовой фазы (т.е. парциальные давления фракций примеси совпадают с парциальным давлением несущей фазы) и вещество примеси не претерпевает фазовых переходов и химических превращений либо эффектами этих процессов можно пренебречь, как и взаимодействием частиц примеси друг с другом. Такое приближение справедливо лишь при малых объемных концентрациях примесей.

В вентиляционной трубе использовалась одномерная система уравнений газовой динамики с примесями в односкоростной, однотемпературной постановке с правой частью, описывающей пристеночное трение. В областях сочленения труб и примыкающих объемах использовалась эта же система уравнений, но уже в трехмерной постановке с турбулентной вязкостью в правой части. Сопряжение граничных условий на границе областей разной размерности обеспечивается через решение соответствующей задачи Римана вдоль нормальной компоненты скорости по отношению к этой границе [Годунов и др., 1976]. При этом в одномерных уравнениях поперечные компоненты скорости и соответственно импульса полагаются равными нулю для корректного замыкания системы уравнений на разрыве.

Использование алгоритма сопряжения областей разной размерности уменьшает математическую сложность модели и одновременно повышает её вычислительную эффективность.

Для проверки корректности работы алгоритма численного сопряжения одномерных и трехмерных областей был поставлен модельный вычислительный эксперимент по расчету распространения примеси в Г-образной вентиляционной трубе, имеющей на одном конце вентилятор и выход в атмосферу на другом. Рассматривалось сопряжение одномерных участков вентиляционной трубы и её трехмерной поворотной части и сравнивалось с численными результатами, полученными в трехмерной постановке. Также приводятся результаты расчетов нестационарных процессов вентиляции в модельной сети выработок угольной шахты. Угольные шахты относятся к предприятиям с повышенной опасностью труда. Это связано с выделением метана при добыче угля. Удаление примесей метана из зон забоя и прилегающих выработок проводится путем организации системы вентиляции выработок, которая также необходима для обеспечения нормальных условий труда. Эти результаты сравниваются с аналогичными результатами, полученными ранее в работе [Васенин и др., 2011].

5.1 Система уравнений в вентиляционной трубе

В вентиляционной трубе использовалась одномерная система уравнений газовой динамики с примесями в односкоростной, однотемпературной постановке с правой частью, учитывающей пристеночное трение и силу тяжести:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = f^0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho v^2)}{\partial x} = f^1 - \rho g \sin \beta, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e + p \right) \right) = f^0 H - v \rho g \sin \beta. \end{cases} \quad (5.1)$$

Использовалось следующее замыкание для гиперболической части уравнений

(5.1):

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{s=1}^S \rho_s, \quad p = (\gamma - 1) \rho e, \quad f^0 = \sum_{s=1}^S f_s^0, \\ e_1 &= c_{V1} T, \quad e = T \sum_{s=1}^S \frac{\rho_s}{\rho} c_{Vs}, \quad f^0 H = \sum_{s=1}^S f_s^0 H_s. \end{aligned} \quad (5.2)$$

В этих уравнениях: x – координата; t – время; ρ – плотность газа; ρ_s – плотность s -ой компоненты примеси газа (парциальная плотность), $s = 1$ для несущей газовой компоненты; v – скорость газа; p – давление идеального газа; γ – показатель адиабаты газа; T – температура газа; e – внутренняя энергия газа; f_s^0 – возможное изменение массы воздуха или его примесей, $H_s = \gamma_s e_s$ – энтальпия этой массы воздуха или его примесей; $f^1 \approx 4 \times 10^{-4} \rho v^2$ – сила трения об стенки вентиляционной трубы; g – ускорение силы тяжести; β – горизонтальный угол наклона вентиляционной трубы.

$$\begin{aligned} \text{Вводя в рассмотрение векторы: } V &= \{\rho, v, e\}^T, \quad U(V) = \left\{ \rho, \rho v, \frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right\}^T, \\ F(V) &= \left\{ \rho v, p + \rho v^2, \rho v \left(v^2/2 + e + p/\rho \right) \right\}^T, \quad f = \left\{ f^0, f^1 - \rho g \sin \beta, f^0 H - \rho g \sin \beta v \right\}^T, \end{aligned}$$

систему уравнений (5.1) можно записать в векторно-дивергентной форме:

$$\frac{\partial U(V)}{\partial t} + \frac{\partial F(V)}{\partial x} = \frac{\partial U(V)}{\partial t} + \left(\frac{\partial F(V)}{\partial U(V)} \right) \frac{\partial U(V)}{\partial x} = f(V, x, t), \quad (5.3)$$

$$\text{с матрицей Якоби: } A = \frac{\partial F(V)}{\partial U(V)} = \frac{\partial F}{\partial V} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)^{-1} = (\Omega^{-1} \Lambda \Omega).$$

Собственные числа матрицы Якоби: $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\}$, $\lambda_1 = v$, $\lambda_2 = v + c$, $\lambda_3 = v - c$ ($c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ – скорость звука) – всегда действительны и различны, поэтому система (5.3) строго гиперболического типа и её левые собственные векторы:

$$\omega_1 = \left\{ \frac{v^2}{2} - \frac{c^2}{\gamma - 1}, -v, 1 \right\}, \quad \omega_2 = \left\{ \frac{1}{2} \left(v^2 - \frac{2cv}{\gamma - 1} \right), \frac{c}{\gamma - 1} - v, 1 \right\}, \quad \omega_3 = \left\{ \frac{1}{2} \left(v^2 + \frac{2cv}{\gamma - 1} \right), \frac{c}{1 - \gamma} - v, 1 \right\} -$$

линейно независимы.

Число граничных условий, задаваемых на входах-выходах в вентиляционные трубы, зависит от знаков собственных чисел матрицы Якоби $A = \Omega^{-1} \Lambda \Omega$. Их число определяется в зависимости от количества характеристик, идущих из области интегрирования (трубы) на её границы. В соответствии с этим, на входах-выходах в качестве граничных условий могут быть заданы как функции времени значение давления, температуры или скорости газа. Для замыкания системы уравнений на границе в качестве дополнительных уравнений могут использоваться условия совместности: $\left\{ \omega_i \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right\}$, $i = 1 - 3$ вдоль идущих внутрь области интегрирования (трубы) характеристик.

Помимо граничных условий, для системы (5.1), (5.2) необходимо задавать также начальные условия:

$$p(x, 0) = p_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad \rho_S(x, 0) = \rho_{S0}(x). \quad (5.4)$$

5.2 Система уравнений в узлах вентиляционной сети

В областях сочленения труб и примыкающих комнатах используется трехмерная система уравнений газовой динамики с примесями в односкоростной и однотемпературной постановке с турбулентной вязкостью в правой части. Учет турбулентной вязкости производится согласно $k-\varepsilon$ модели [Chien, 1982]. При этом не турбулентной вязкостью мы пренебрегаем. В трехмерных областях уравнения принимают вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = f^0, \\ \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\delta_{ij} p + \rho v_i v_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i + f_i^1, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\rho v_i^2}{2} + \rho e \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_i \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\rho v_i^2}{2} + \rho e + p \right) \right) = \frac{\partial(\tau_{ij} v_i)}{\partial x_j} + f^0 H, \\ \tau_{ij} = \mu_t \left(\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2\rho k}{3} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Система уравнений (5.5) аналогична (5.1) за исключением того, что здесь дополнительно учитывается турбулентная вязкость вместе с пристеночным трением, действующим на газ, что более корректно в трехмерной постановке. Скорость с силой тяжести имеют три компоненты вдоль трех координатных осей: x_1, x_2, x_3 . В системе уравнений (5.5) появляются две новые переменные: k – удельная турбулентная энергия и ε – скорость диссипации турбулентной энергии и используются следующие обозначения: $\mu_t = 0.09 \frac{\rho k^2}{\varepsilon}$ – коэффициент турбулентной вязкости; τ_{ij} – тензор вязких напряжений. Для величин k и ε записываются два дополнительных уравнения, которые дополняют систему (5.5):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k v_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tau_{ij} \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \frac{\tau_{ij}}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \rho \varepsilon, \\ \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \varepsilon v_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tau_{ij} \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + \frac{\varepsilon}{k} \left(c_{\varepsilon 1} \frac{\tau_{ij}}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - c_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon \right), \end{array} \right. \quad (5.6)$$

$$\sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad c_{\varepsilon 1} = 1.45, \quad c_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Граничные условия для этих величин на отражающих границах заданы, как $k = 0$ и $\varepsilon = 0$. Начальные условия, для величин k , ε задаются в виде:

$$k = \frac{0.038}{\text{Re}^{0.25}} u^2, \quad \varepsilon = \frac{c_\mu^{0.75} k^{1.5}}{\ell}, \quad \ell = 0.07L, \quad \text{где } L \text{ – длина прямого участка моделируемой вентиляционной трубы.}$$

Вводя в рассмотрение векторы: $V = \{\rho, v_1, v_2, v_3, e, k, \varepsilon\}^T$,

$$\begin{aligned}
U(V) &= \left\{ \rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, \frac{1}{2}(\rho v_1^2 + \rho v_2^2 + \rho v_3^2) + \rho e, \rho k, \rho \varepsilon \right\}^T, \\
F_1(V) &= \left\{ \rho v_1, p + \rho v_1^2 + 2\rho k/3, \rho v_1 v_2, \rho v_1 v_3, \rho v_1 \left((v_1^2 + v_3^2 + v_2^2)/2 + e + p/\rho + 2k/3 \right), \rho k v_1, \rho \varepsilon v_1 \right\}^T, \\
F_2(V) &= \left\{ \rho v_2, \rho v_1 v_2, p + \rho v_2^2 + 2\rho k/3, \rho v_2 v_3, \rho v_2 \left((v_1^2 + v_3^2 + v_2^2)/2 + e + p/\rho + 2k/3 \right), \rho k v_2, \rho \varepsilon v_2 \right\}^T, \\
F_3(V) &= \left\{ \rho v_3, \rho v_1 v_3, \rho v_2 v_3, p + \rho v_3^2 + 2\rho k/3, \rho v_3 \left((v_1^2 + v_3^2 + v_2^2)/2 + e + p/\rho + 2k/3 \right), \rho k v_3, \rho \varepsilon v_3 \right\}^T, \\
\hat{f} &= \left\{ 0, \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\tau_{1j} + \frac{2\rho k}{3} \right), \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\tau_{2j} + \frac{2\rho k}{3} \right), \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\tau_{3j} + \frac{2\rho k}{3} \right), \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\tau_{ij} + \frac{2\rho k}{3} \delta_{ij} \right) v_i \right), \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tau_{ij} \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \frac{\tau_{ij}}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tau_{ij} \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon \tau_{ij}}{2k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right\}^T, \\
\tilde{f} &= \left\{ f^0, \rho g_1 + f_1^1, \rho g_2 + f_2^1, \rho g_3 + f_3^1, f^0 H, -\rho \varepsilon, -c_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon^2 / k \right\}^T,
\end{aligned}$$

систему уравнений (5.5)-(5.6) также можно записать в векторно-дивергентной форме:

$$\frac{\partial U(V)}{\partial t} + \frac{\partial F_1(V)}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2(V)}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3(V)}{\partial x_3} = \tilde{f}(V, x_1, x_2, x_3, t) + \hat{f}(V, x_1, x_2, x_3, t). \quad (5.7)$$

Решение задачи Римана для многокомпонентного газа в одномерной постановке строится с помощью решения задачи Римана о распаде разрыва между однокомпонентными газами с различными показателями адиабаты. Примеси в нашей постановке переносятся со скоростью течения газа, поэтому разрыв между ними фактически эволюционирует как контактный разрыв. Таким образом, на границе ячеек задача сводится к решению задачи Римана вдоль нормального направления скорости в трубе.

Рассмотрим вентиляционную трубу в трехмерной постановке. Пусть на стенках трубы стоят отражающие граничные условия. Потoki на границе получаются из решения задачи Римана для одного и того же газа вдоль нормали к стенке трубы, но нормальная скорость газа снаружи стенки берется противоположной нормальной скорости газа внутри: $\{\tilde{\rho}, \tilde{u}_n, \tilde{p}\} = \mathcal{R}_{1D}(\{\rho, u_n, p\}_{in}, \{\rho, -u_n, p\}_{in})$. При этом, очевидно, что $\tilde{u}_n = 0$, а $\tilde{\rho}$ и \tilde{p} зависят от параметров газа внутри трубы. Оценим

значение \tilde{p} из размерных соображений: $\tilde{p} \approx p \pm \rho u_n^2$, где «+» соответствует $u_n > 0$, а «-» случаю $u_n < 0$. Если пренебречь изменением импульса вдоль трубы, то изменение нормальной компоненты импульса будет пропорционально давлению: $\frac{\Delta(\rho u_n)}{\Delta t} \approx \frac{\Delta p}{\Delta x} \approx \frac{\Delta(\rho u_n^2)}{\Delta x}$. Отсюда мы можем оценить время релаксации нормальной компоненты импульса: $t_{\text{relax}} \approx \frac{d}{|u_n|}$, где d – характерный диаметр трубы. Таким образом, идея перехода к одномерной области состоит в устремлении $t_{\text{relax}} \rightarrow 0$. То есть газ, попадая в одномерную трубу, теряет свой поперечный импульс практически мгновенно. Этого же эффекта можно добиться, не добавляя поперечный импульс в одномерные ячейки, то есть обнуляя соответствующие компоненты импульса поперек трубы. Поскольку поперечная скорость газа в трубе теперь всегда будет равна нулю, граничные условия на стенках трубы более не потребуются.

Практически, это означает, что между одномерными и трехмерными областями считается тот же самый нормальный поток, что и между трехмерными областями, но поток поперечного импульса из трехмерной ячейки просто не добавляется к поперечному импульсу одномерной ячейки. Таким образом, газ, попадая в одномерную трубу, теряет свой поперечный импульс. Также на границе между трехмерными и одномерными вычислительными областями со стороны одномерной области, поперечные компоненты скорости вместе с удельной турбулентной энергией полагаются равными нулю:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_n^{1D} = \left\{ \rho v_n, p + \rho v_n^2, 0, 0, \rho v_n \left(v_n^2/2 + e + p/\rho \right), 0, 0 \right\}^T, \\ F_n^{3D} = \left\{ \rho v_n, p + \rho v_n^2 + \frac{2\rho k}{3}, \rho v_n v_{\tau_1}, \rho v_n v_{\tau_2}, \rho v_n \left(\frac{v_n^2 + v_{\tau_1}^2 + v_{\tau_2}^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} + \frac{2k}{3} \right), \rho k v_n, \rho \epsilon v_n \right\}^T. \end{array} \right.$$

5.3 Математическая модель вентилятора

Рассмотрим снова одномерные уравнения газовой динамики с нулевой правой частью:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho v^2)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e + p \right) \right) = 0, \\ p = (\gamma - 1) \rho e. \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Вентилятор можно описать с помощью локализованного на расстоянии Δx источника импульса и энергии, который создает перепад давления Δp_{fan} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho v^2)}{\partial x} = \frac{\Delta p_{\text{fan}}}{\Delta x}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e + p \right) \right) = \frac{\Delta p_{\text{fan}} v}{\Delta x}. \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Однако в такой постановке сложно описать вентилятор, обеспечивающий заданный расход газа в условиях нестационарного течения.

Альтернативным подходом может служить введение некоторой поверхности (внутренней границы), на которой допускается скачкообразное изменение давления, а расход газа через нее контролируется. Этот подход достаточно просто реализовать в случае использования численного метода Годунова [Годунов и др., 1976] для решения уравнений газовой динамики. Для этого необходимо рассмотреть специальную конфигурацию распада разрыва, учитывающую данные требования.

Предположим, что вентилятор располагается на границе между двумя ячейками разностной сетки. Также предположим, что скорость течения через вентилятор существенно меньше скорости звука. Стандартная конфигурация распада произвольного разрыва в газовой динамике предполагает существование трех волн: левой волны разрежения (ВР) или ударной волны (УВ), контактного разрыва (КР) и

правой волны разрежения или ударной волны. Добавим в этот набор элементарных волн стационарный скачок давления (СД). Добавление данного разрыва позволяет наложить еще одно дополнительное ограничение на решение задачи Римана, например, позволяет положить заданной скорость газа на стационарном скачке (см. Рис. 5.1).

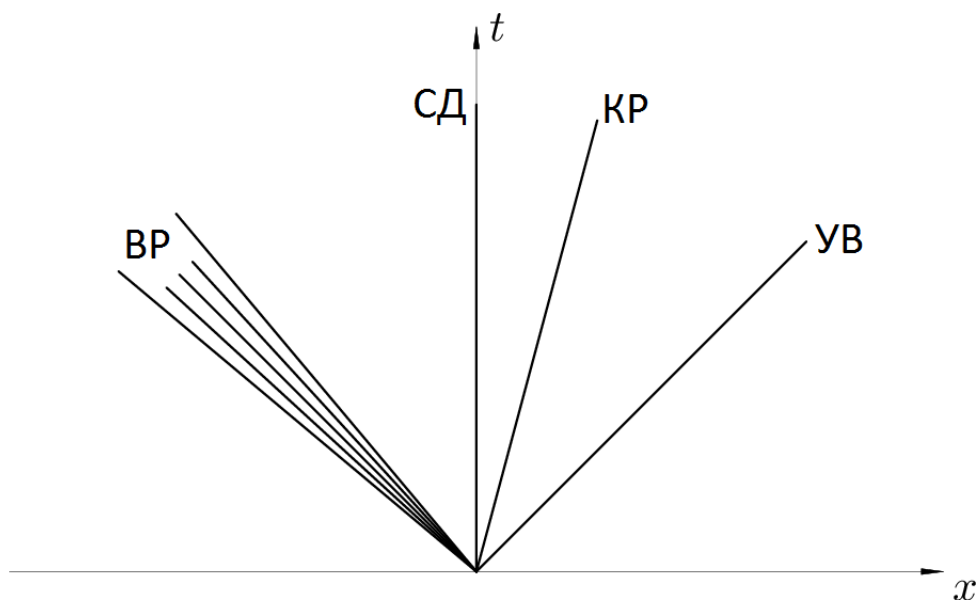


Рис. 5.1. Типичная конфигурация распада разрыва на вентиляторе. УВ — ударная волна, КР — контактный разрыв, СД — скачок давления, ВР — волна разрежения.

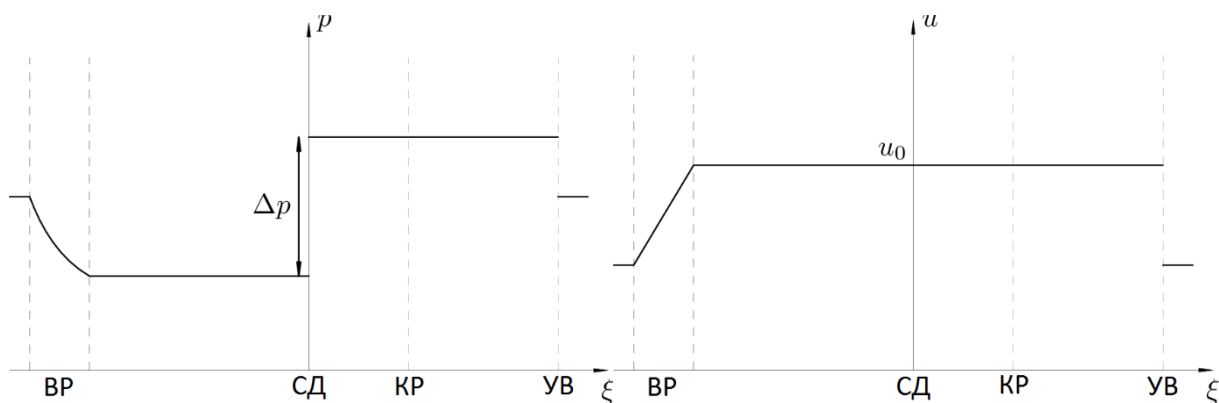


Рис. 5.2. Изменения параметров давления — p и скорости — u вдоль автомодельной переменной $\xi = \frac{x}{t}$.

Из конфигурации распада разрыва на Рис. 5.2 видно, что скорость газа за крайними волнами всегда известна и равна u_0 — заданной скорости течения газа через вентилятор. Поскольку параметры газа перед волной разрежения и ударной

волной также известны (начальные данные задачи Римана), несложно вычислить все параметры газа за фронтами этих волн.

Например (см. [Куликовский и др., 2001]), для правой ударной волны имеем следующую систему равенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_R \equiv u_0 - v_R = \frac{p_2 - p_R}{\sqrt{\frac{\rho_R}{2} (p_2(\gamma_R + 1) + p_R(\gamma_R - 1))}} > 0, \\ p_2 = p_R + \frac{\gamma_R + 1}{4} \rho_R \Delta u_R^2 + \frac{\Delta u_R}{4} \sqrt{16\gamma_R \rho_R p_R + (\gamma_R + 1)^2 \rho_R^2 \Delta u_R^2}, \\ \rho_2 = \frac{\rho_R \sqrt{\frac{\rho_R}{2} (p_2(\gamma_R + 1) + p_R(\gamma_R - 1))}}{\sqrt{\frac{\rho_R}{2} (p_2(\gamma_R + 1) + p_R(\gamma_R - 1))} - \rho_R \Delta u_R}. \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Здесь $\{\rho_R, v_R, p_R, \gamma_R\}$ — параметры газа справа от первоначального разрыва, ρ_2, p_2, u_0 — плотность, давление и скорость за ударной волной. Для левой волны разрежения с параметрами газа перед волной $\{\rho_L, v_L, p_L, \gamma_L\}$ мы получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_L \equiv u_0 - v_L = \frac{2c_L}{\gamma_L - 1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_L} \right)^{\frac{\gamma_L - 1}{2\gamma_L}} \right] > 0, \\ p_1 = p_L \left(1 - \frac{(\gamma_L - 1)\Delta u_L}{2c_L} \right)^{\frac{2\gamma_L}{\gamma_L - 1}}, \\ \rho_1 = \rho_L \left(\frac{p_1}{p_L} \right)^{\frac{1}{\gamma_L}}. \end{array} \right. \quad (5.11)$$

В звуковом приближении ($|\Delta u| \ll c$) вычисления упрощаются:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = p_L - c_L \Delta u_L, \quad \rho_1 = \rho_L \frac{p_2}{p_L}, \\ p_2 = p_R + c_R \Delta u_R, \quad \rho_2 = \rho_R \frac{p_2}{p_R}. \end{array} \right. \quad (5.12)$$

Мы считаем, что при переходе газа через вентилятор, температура не меняется. Это означает, что после прохождения вентилятора, внутренняя энергия газа сохраняется. Следовательно контактный разрыв (КР) соединяет области со значением внутренней энергии e_1 слева и e_2 справа. В соответствии со знаком $u_0 > 0$ он будет находиться справа от стационарного скачка давления (см. Рис. 5.2). Поскольку давление p_2 на КР не меняется, мы можем вычислить значение плотности ρ_2^* в зоне между КР и вентилятором и завершить решение данной задачи:

$$p_2 = (\gamma_R - 1)\rho_2 e_2 = (\gamma_L - 1)\rho_2^* e_1, \Rightarrow \rho_2^* = p_2 / (\gamma_L - 1) e_1. \quad (5.13)$$

Решение данной задачи можно проиллюстрировать с помощью PU -диаграммы – Рис. 5.3. На диаграмме хорошо видно, что использование вентилятора избавляет нас от нахождения точки пересечения кривых на PU -диаграмме. Вместо этого мы просто находим перепад давления Δp между точками со значением скорости u_0 на этих кривых.

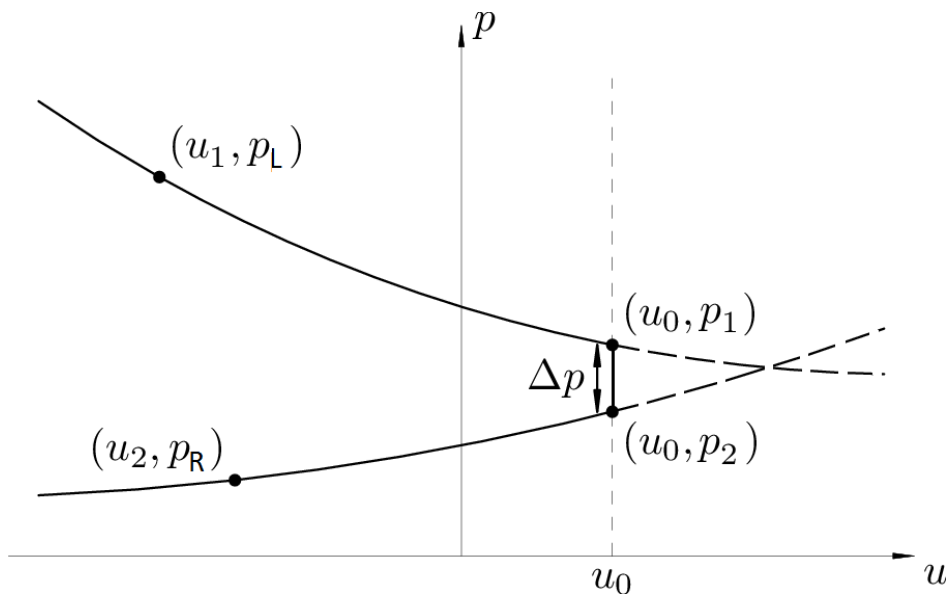


Рис. 5.3. PU -диаграмма для анализа задачи о распаде разрыва на вентиляторе.

В численном методе Годунова [Годунов и др., 1976] для ячейки находящейся слева от вентилятора на правой границе используется поток $F_{m+\frac{1}{2}} = F(U_{m+\frac{1}{2}}^{(-)})$, вычисленный по значениям плотности, скорости и давления при $\xi = -0$, а для правой $-F_{m+\frac{1}{2}} = F(U_{m+\frac{1}{2}}^{(+)})$, вычисленный по значениям при $\xi = +0$. Таким образом, потоки

импульса и энергии слева и справа от вентилятора не совпадают, то есть имеется источник импульса и энергии, которым и является вентилятор. Корректность данного способа вычисления потока следует из того факта, что на всех элементарных волнах распада слева и справа от СД на вентиляторе выполняются законы сохранения.

5.4 Результаты расчетов

Для проверки корректности работы алгоритма численного сопряжения одномерных и трехмерных областей был поставлен модельный вычислительный эксперимент по расчету распространения примеси в Г-образной вентиляционной трубе, имеющей на одном конце вентилятор и выход в атмосферу на другом. Длина каждой из двух частей трубы бралась равной 10 м, труба имеет при этом квадратное сечение шириной 1 м. Рассматривалось численное сопряжение двух участков вентиляционной трубы и её поворотной части и сравнивалось с результатами расчетов, полученными в трехмерной постановке. Моделировалось распространение примеси метана CH_4 в трубе с начальной концентрацией в 0.3 кг/м^3 , который находился в середине первой части трубы и занимал 5 м в длину. В начальный момент времени внутри трубы задавалась температура 293 К и давление в одну атмосферу, скорость на входе в трубу через вентилятор была равной 5 м/с, на выходе из вертикального участка трубы задавалось атмосферное давление.

Результаты расчетов истечения газа из трубы вместе с примесью метана представлены на Рис. 5.4 на момент времени 2 с. Показаны значения распределения плотности метана для 4-х различных сеточных конфигураций расчетной области. Каждый из участков трубы поделен на 100 сеточных узлов вдоль по длине. Горизонтальная часть трубы считалась в одномерной постановке первые 80 сеточных узлов и за 20-ть узлов до поворотной части задавалась трехмерная сетка с шагом 10×10 узлов по сечению. Это делалось для того, чтобы обеспечить ламинарность течения газа на входе в поворот. На рисунке представлены результаты четырех вариантов расчета. В первом варианте (левый сверху) после поворота сразу

задавалась одномерная сетка, во втором (правый сверху) одномерная постановка задавалась через десять узлов, в третьем (левый снизу) через пятьдесят и в последнем (правый снизу) вся область после поворота считалась в трехмерной постановке. Распределения скорости газа в трубе для этих же сеточных конфигураций показаны на Рис. 5.5.

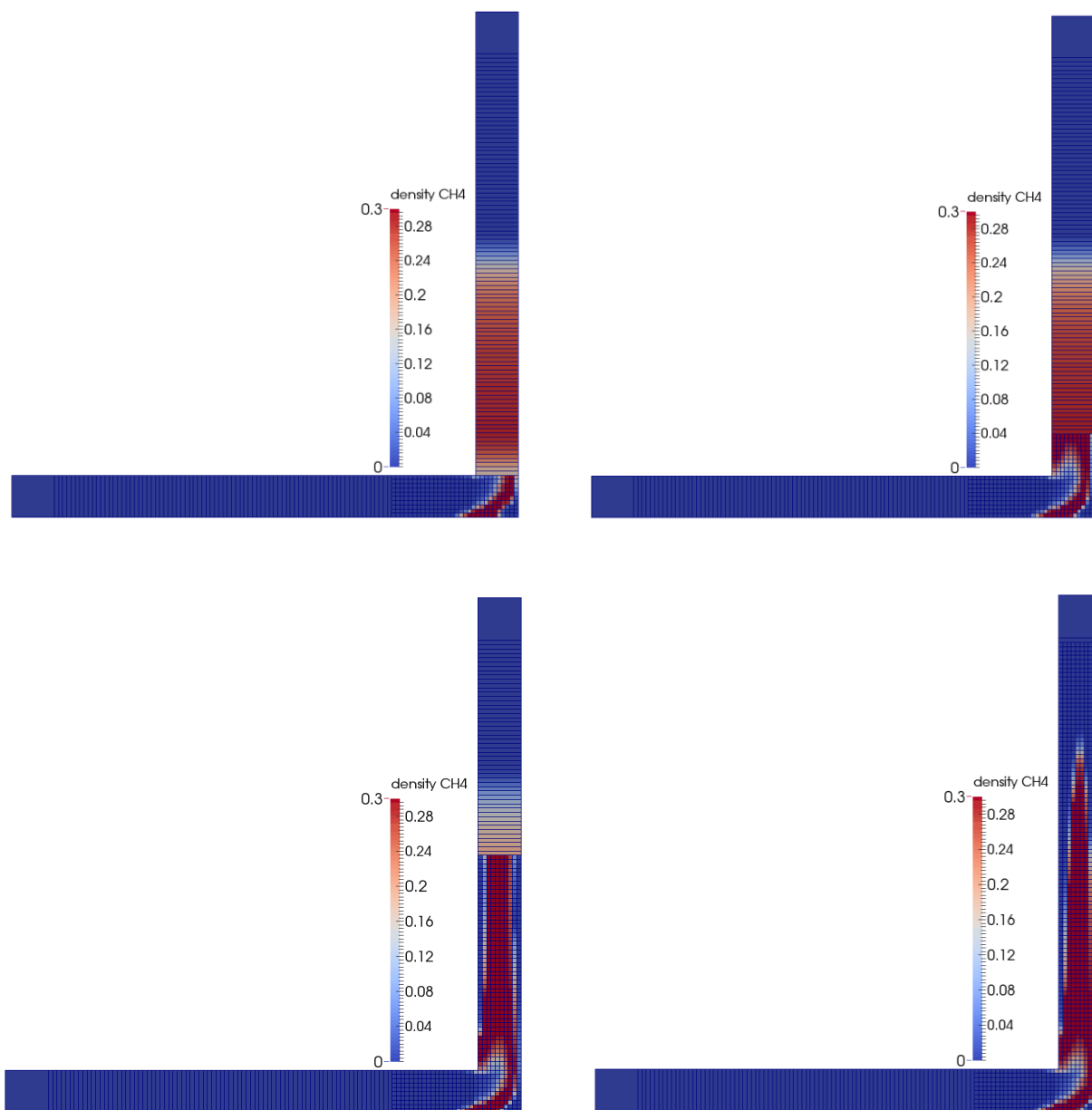


Рис. 5.4 Результаты расчетов распределения плотности примеси метана-CH₄ кг/м³ с начальной концентрацией в 0.3 кг/м³, который находился в середине первой части трубы и занимал 5 м в длину в Г-образной вентиляционной трубе на момент времени 2 с. В начальный момент времени внутри трубы задавалась температура 293 К, и давление в одну атмосферу, скорость на входе в трубу через вентилятор была равной 5 м/с, на выходе из вертикального участка трубы задавалось атмосферное давление. Каждый из участков трубы поделен на 100 сеточных узлов по длине. Горизонтальная труба считалась в одномерной постановке первые 80 сеточных узлов и за 20-ть узлов до поворотной части задавалась трехмерная сетка с шагом 10x10 узлов по сечению. Представлены результаты четырех вариантов расчета. В первом варианте (левый сверху) после поворота сразу задавалась одномерная сетка, во втором (правый сверху) одномерная постановка задавалась через десять узлов, в третьем (левый снизу) через пятьдесят и в последнем (правый снизу) вся область после поворота считалась в трехмерной постановке.

Из результатов, представленных на рисунках, хорошо видно, что увеличение трехмерной области в расчете позволяет более детально передать картину течения газа и примесей в трубе. В полностью трехмерном расчете второй части трубы газ убегает вперед примерно на 2.2 м, этот эффект неизбежен, так как в одномерном расчете у нас невозможно формирование профиля Пуазейля, который образуется в трехмерном расчете. Тем не менее, мы можем убедиться, что даже при использовании полностью одномерной сетки в трубе после поворота, все качественные характеристики течения газов сохраняются. Метан почти полностью перетекает во вторую часть трубы, за исключением небольшого его количества ~ 0.1 кг, которое остается в углу поворотной части, где скорость газа практически нулевая. Также если мы оценим массу газа, поступившего во вторую часть трубы для всех 4-х вариантов расчета, то увидим, что она практически не меняется в зависимости от варианта сеточной конфигурации расчета, как это показано в Таб. 5.1. При этом, как видно из таблицы, вычислительные затраты в одномерном расчете почти в пять раз меньше, чем в трехмерном, и это только для половины трубы. Если бы мы считали всю трубу в трехмерной постановке и сравнивались с этим вариантом, то получили бы как минимум десятикратное ускорение и это в простейшем модельном расчете.

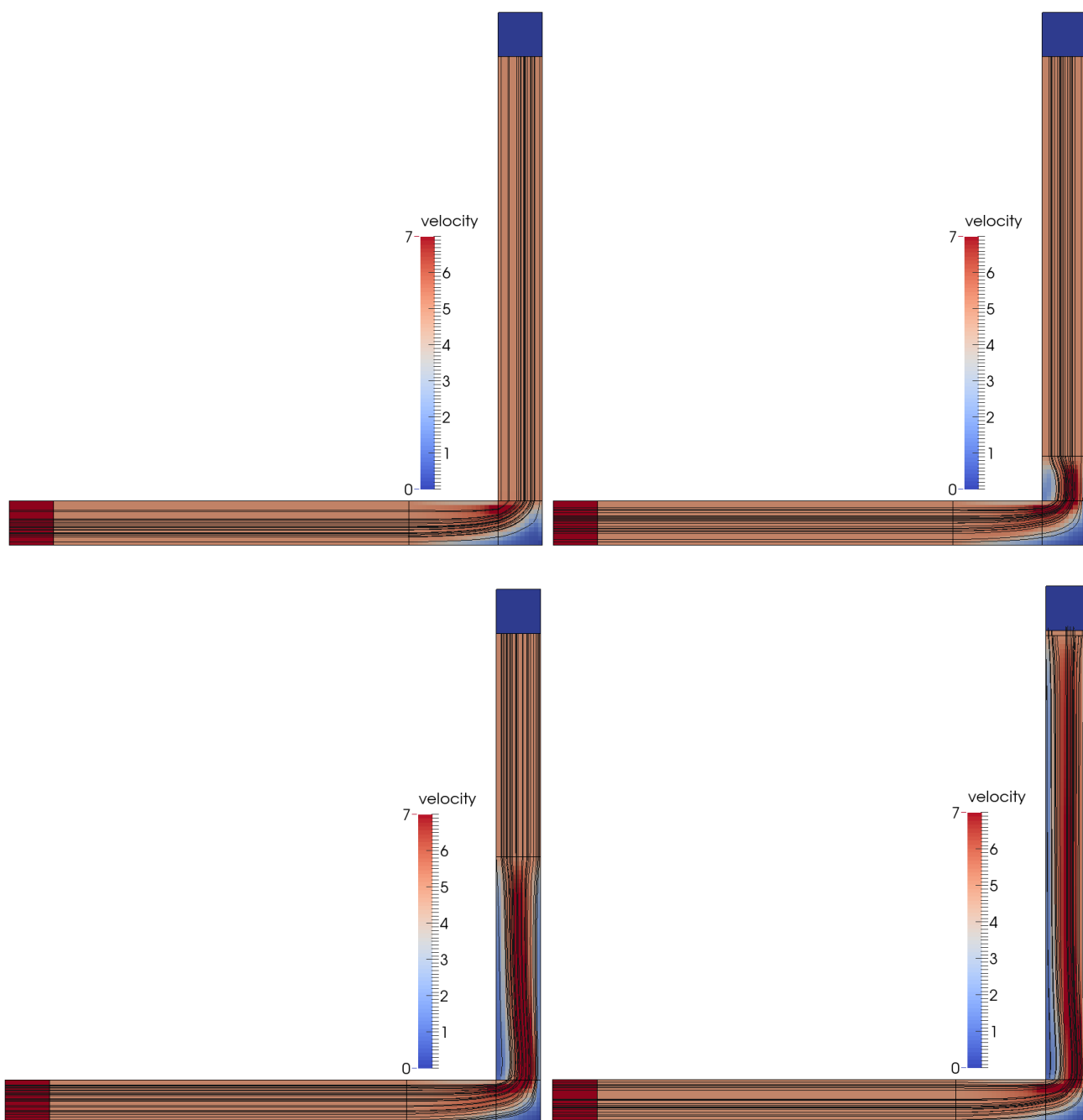


Рис.5.5 Результаты расчетов распределения скорости м/с примеси метана-СН₄ с начальной концентрацией в 0.3 кг/м³, который находился в середине первой части трубы и занимал 5 м в длину в Г-образной вентиляционной трубе на момент времени 2 с. В начальный момент времени внутри трубы задавалась температура 293 К, и давление в одну атмосферу, скорость на входе в трубу через вентилятор была равной 5 м/с, на выходе из вертикального участка трубы задавалось атмосферное давление. Каждый из участков трубы поделен на 100 сеточных узлов по длине. Горизонтальная труба считалась в одномерной постановке первые 80 сеточных узлов и за 20-ть узлов до поворотной части задавалась трехмерная сетка с шагом 10x10 узлов по сечению. Представлены результаты четырех вариантов расчета. В первом варианте (левый сверху) после поворота сразу задавалась одномерная сетка, во втором (правый сверху) одномерная постановка задавалась через десять узлов, в третьем (левый снизу) через пятьдесят и в последнем (правый снизу) вся область после поворота считалась в трехмерной постановке.

Таблица 5.1. Вычислительные затраты в зависимости от варианта сеточной конфигурации расчета

Количество одномерных узлов во второй части трубы (0-100)	100	90	50	0
Масса метана в выходной трубе, кг	1.40446	1.40944	1.40694	1.40365
Затраченное вычислительное время, сек	120	220	400	560

Также были выполнены расчеты нестационарных процессов вентиляции в модельной сети выработок угольной шахты, рассмотренные ранее в работе [Васенин и др., 2011]. В частности, был проведен расчет проветривания тупиковой выработки вентилятором местного проветривания. Расчеты проветривания тупика проводились для модельного участка сети, представленного на Рис. 5.6, и имеющего следующие размеры: длины вертикальных выработок 1–2, 6–7 – 100 м; длины горизонтальных выработок 2–3, 5–6 – 400 м; длина тупиковой выработки 4–5 – 200 м; площадь сечений выработок была принята 10 м². В тупиковой выработке по всей длине задавалась повышенная концентрация метана $\rho_{CH_4} = 0.3$ кг/м³. Квадратными сечениями на модельной сети выработок показаны границы расчетных зоны с трехмерной сеткой с размером ячейки – 0.33 × 0.33 × 0.33 м, на остальных участках сети использовалась одномерная сетка с шагом – 0.66 м.

В начальный момент времени на фоне стационарного режима проветривания сети задаваемого основным вентилятором (№ 1 на Рис. 5.6, скорость на выходе 2.1 м/с) в работу включается вентилятор местного проветривания, установленный в выработке на расстоянии – 10 м от сопряжения с тупиковой выработкой 4–5 и подающий по специальному вентиляционному трубопроводу 3–4 сечением 1 м² поток воздуха к тупику выработки со скоростью 12 м/с (см. Рис. 5.6). После включения вентилятора местного проветривания из тупиковой выработки 4–5 постепенно происходит вытеснение газа с повышенным содержанием метана в выработку 5–6. В зоне сопряжения выработок происходит перемешивание струи газа из тупика с газом,двигающимся к выходу из выработки 5–6, в результате чего метан

выдувается из выработки в атмосферу. Результаты расчетов распределения примеси метана в зоне сопряжения выработок в моменты времени 5 с (вверху слева), 40 с (вверху справа), 130 с (внизу слева) и 150 с (внизу справа) представлены на Рис. 5.7.

Использование трехмерных сеток в областях сочленения выработок позволяет детально контролировать динамику течения газа и примесей. В своей работе [Васенин и др., 2011] авторы указывали на возможный эффект обратного перетока метана из тупиковой выработки 4-5 в вентиляционную трубу 3-4 в случае задания высокой скорости потока на вентиляторе местного проветривания. На Рис. 5.7 мы можем частично наблюдать этот эффект, который хорошо заметен в момент времени 130 с. Тем не менее, мы видим, что метан в итоге не доходит до вентиляционной трубы и со временем выдувается в атмосферу. Таким образом, разработанная математическая модель позволяет определять распределение газодинамических параметров течения в трубопроводной сети и позволяет решать задачи динамического управления вентиляцией сети.

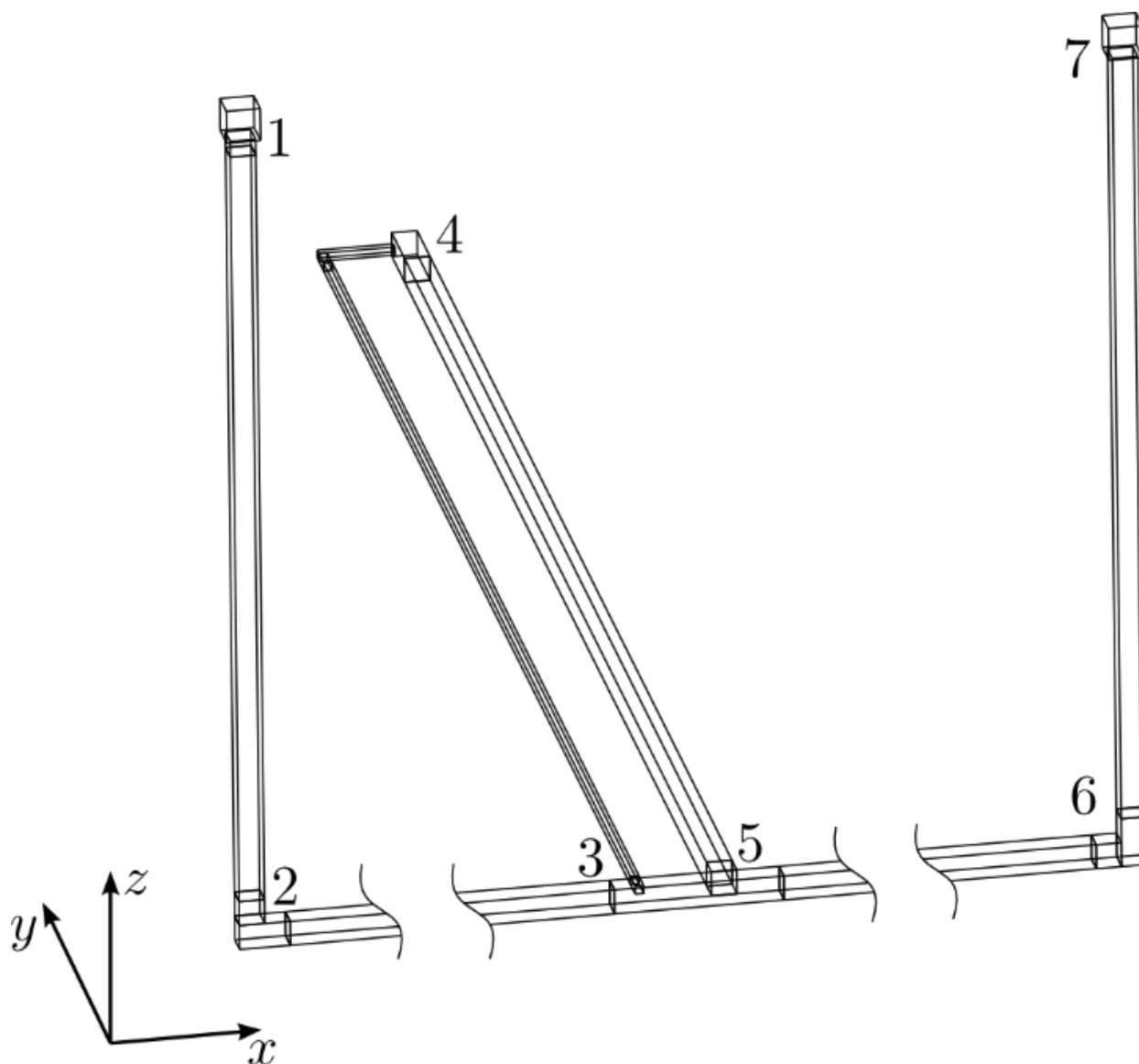


Рис. 5.6 Модельный участок сети, имеющий следующие размеры: длины вертикальных выработок 1–2, 6–7 – 100 м; длины горизонтальных выработок 2–3, 5–6 – 400 м; длина тупиковой выработки 4–5 – 200 м; площадь сечений выработок была принята 10 м², вентиляционной трубы 3–4 – 1 м². В тупиковой выработке по всей длине задавалась повышенная концентрация метана 0.3 кг/м³. Квадратными сечениями показаны границы расчетных зон с трехмерной сеткой с размером ячейки – 0.33 × 0.33 × 0.33 м, на остальных участках сети использовалась одномерная сетка с шагом – 0.66 м.

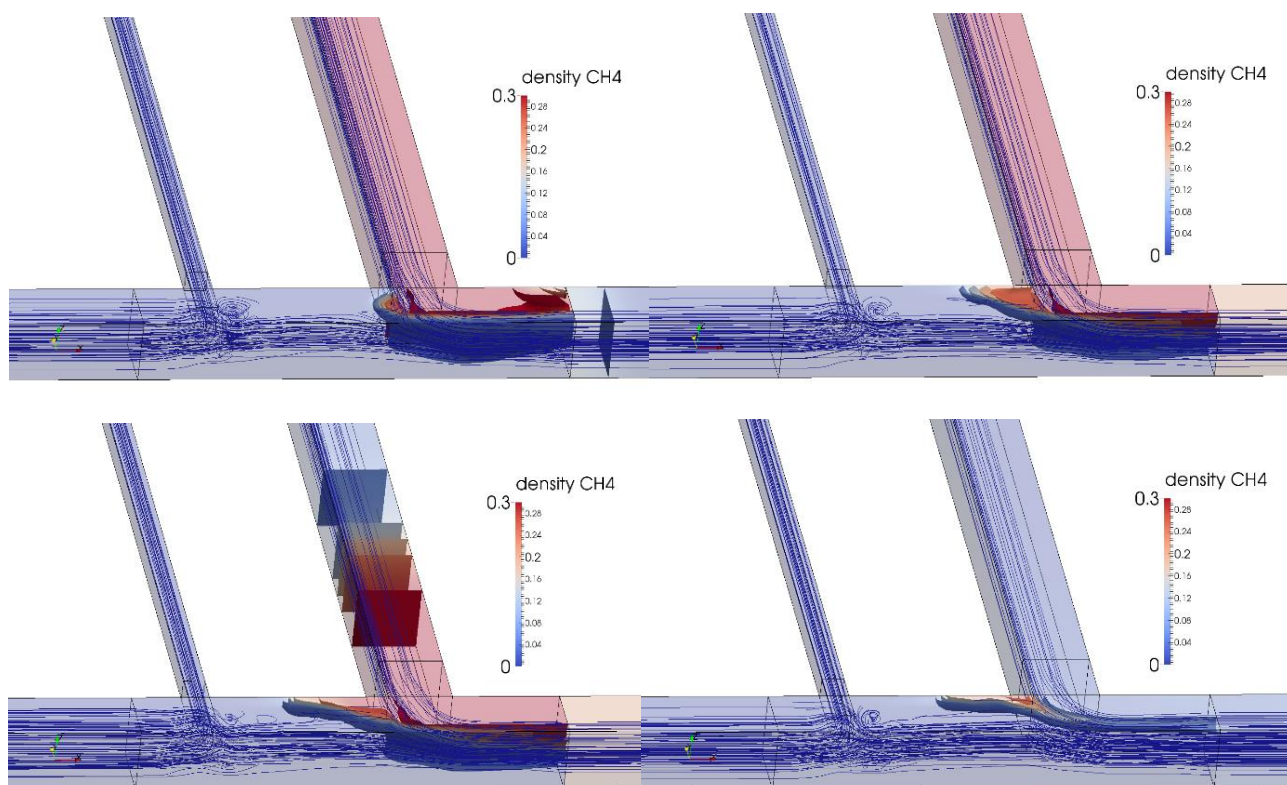


Рис. 5.7 В начальный момент времени на фоне стационарного режима проветривания основным вентилятором (№ 1 на Рис. 5.6) со скоростью 2.1 м/с, в работу включается вентилятор местного проветривания, установленный на расстоянии 10 м от сопряжения с выработкой 4-5 и подающий по трубопроводу 3-4 поток воздуха к тупику выработки со скоростью 12 м/с. После включения вентилятора проветривания из тупиковой выработки 4–5 постепенно происходит вытеснение газа с повышенным содержанием метана в выработку 5–6 и затем в атмосферу. Результаты расчетов распределения плотности примеси метана в зоне сопряжения выработок в моменты времени 5 с (вверху слева), 40 с (вверху справа), 130 с (внизу слева) и 150 с (внизу справа). Сплошные линии на рисунках показывают изолинии течения газа.

Использование алгоритма сопряжения областей разной размерности является ключевым элементом разработанной модели, поскольку его использование уменьшает математическую сложность и одновременно повышает её вычислительную эффективность. Ранее в работе [Геллер и др., 2010] исследовалась задача повышения вычислительной эффективности при решении задач газовой динамики с помощью различных технологий вычислений на многопоточных параллельных системах, использующих для организации расчета, как многоядерную архитектуру, так и массивно-параллельную.

В данной работе основной упор сделан на повышение вычислительной эффективности за счет решения задачи корректного сопряжения граничных условий для систем уравнений различной размерности, которая является весьма интересной и перспективной с точки зрения развития вычислительной науки. В первую очередь потому, что понижение размерности моделируемой задачи приводит к уменьшению вычислительных операций и упрощению численных алгоритмов, используемых при её решении, что в свою очередь повышает их надежность. Не стоит надеяться, что повышение производительности ЭВМ автоматически решит эти проблемы, поскольку вместе с ростом количества операций, производимых в единицу времени, возрастает и сложность решаемых задач. Хорошей аналогией для сравнения здесь может быть использование адаптивных иерархических сеток в численном моделировании. Это научное направление давно и плодотворно развивается и рост производительности ЭВМ не уменьшает его актуальности. С этой точки зрения, использование разной пространственной размерности задачи в различных частях одной области интегрирования, по своей сути близко к идее использования адаптивных сеток и является в некотором смысле дальнейшим её развитием.

Предложенная модель реализована в виде комплекса программ [Геллер и др., 2011], позволяющего проводить расчеты нестационарных режимов проветривания вентиляционных сетей. Проведенные расчеты и полученные результаты показали, что разработанная модель хорошо учитывает реальную топологию сети и позволяет решать задачи динамического управления вентиляцией сети, в том числе те, которые исследовались ранее в работе [Васенин и др., 2011]. Принципиальным отличием данной модели от модели наших коллег является то, что в их модели расчет аэродинамических параметров в узле сети основан на законах сохранения массы и энергии, при этом изменение импульса в расчете не учитывается, давление предполагается одинаковым по всему объему узла сети и считается, что смешение потоков из примыкающих к нему выработок происходит мгновенно. Использование в нашей модели трехмерных уравнений газовой динамики в узлах сети выработок

позволяет устранить данные ограничения и повысить точность вычислительных расчетов.

5.5 Краткое описание разработанного программного комплекса

«Программный комплекс для численного моделирования системы вентиляции зданий и распространения в них мелкодисперсных аэрозолей с использованием высокопроизводительных вычислительных алгоритмов».

Разработанный программный комплекс имеет свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2011617670 от 03.10.2011, был разработан на языках C/C++ под платформу x32, предназначается для моделирования и расчетов возможных ситуаций, возникающих при попадании аэрозолей в систему вентиляции различных зданий и соответствует следующим техническим требованиям:

- комплекс обрабатывает в качестве исходных данных различные конфигурации вентиляционных сетей и параметры аэрозолей;
- результаты расчетов включают временное изменение концентрации и параметров аэрозолей во всех узлах вентиляционной сети;
- в основе разработанного комплекса лежат алгоритмы и методы численного решения задач газодинамики многофазных сред;
- программный комплекс выполняется на высокопроизводительных графических сопроцессорах через использование OpenCL SDK библиотек под операционной системой Windows.

Заключение

В тексте диссертации представлены следующие результаты выполненной работы:

- В работе исследовались задачи, описываемые уравнениями в частных производных на графах (сетях, деревьях). Для решения возникающих задач была построена вычислительная модель решения соответствующих краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Практически исследовались три различные задачи, решаемые в рамках разработанного подхода сетевых вычислительных моделей.
- Первой задачей было моделирование движения транспортных потоков. При решении данной задачи использовался макроскопический подход, в котором транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений второго порядка для плотности и скорости потока. Система уравнений замыкалась уравнением состояния в виде зависимости относительной скорости распространения возмущений в потоке от плотности, полученным эмпирически для исследуемого участка транспортной сети. В рамках предлагаемого подхода была разработана новая макроскопическая гидродинамическая модель, описывающая автомобильное движение в городской транспортной сети и учитывающая, как распределение светофорных фаз, так и существующую дорожную разметку на перекрестках. Модель реализована в виде комплекса программ, позволяющего проводить расчеты с использованием реальных дорожных данных. Работоспособность комплекса программ проверена с использованием системы сбора реальных дорожных данных. Проведенные расчеты показали, что разработанная модель хорошо воспроизводит реальную ситуацию в городской транспортной сети на значительных временных интервалах.
- Второй задачей было моделирование потоков данных в компьютерных сетях. В этой задаче потоки данных различных соединений в пакетной сети передачи данных моделировались в виде несмешивающихся потоков сплошной

среды. Предложены оригинальные концептуальная и математическая модели сети. Важнейшей особенностью разработанной модели сети является представление наиболее вероятного, статистически достоверного поведения потоков данных в целом, без учёта поведения каждого отдельного потока данных в какой-либо паре отправитель-получатель, как это обычно делается в других сетевых моделях. Полученные результаты показали, что в сравнении с пакетной моделью NS-2 [<http://www.isi.edu/nsnam/ns>] разработанная нами потоковая модель за счет использования в качестве базовых элементов потоков данных вместо пакетов демонстрирует значительную экономию вычислительных ресурсов, обеспечивая при этом хорошую степень подобия как пиковых, так и усредненных характеристик и позволяет моделировать поведение сложных глобально распределенных IP – сетей передачи данных.

- Третьей задачей было моделирование распространения газовых примесей в вентиляционных сетях. Целью этой задачи являлось построение вычислительной математической модели распространения мелкодисперсных или газовых примесей в вентиляционных сетях на основе газодинамического подхода. В вентиляционной трубе использовалась одномерная система уравнений газовой динамики. В областях сочленения труб и примыкающих комнатах использовалась эта же система уравнений, но уже в трехмерной постановке. Сопряжение граничных условий на границе областей разной размерности обеспечивалось через решение соответствующей задачи Римана вдоль нормальной компоненты скорости по отношению к этой границе. Использование алгоритма сопряжения областей разной размерности является оригинальным ключевым элементом разработанной модели, поскольку его использование уменьшает математическую сложность и одновременно повышает её вычислительную эффективность. Предложенная модель была реализована в виде комплекса программ, позволяющего проводить расчеты нестационарных режимов проветривания вентиляционных сетей. Проведенные расчеты и полученные результаты показали, что разработанная модель

хорошо учитывает реальную топологию сети и позволяет решать задачи динамического управления вентиляцией, в том числе в сети выработок угольной шахты.

- Для численного решения нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа, используемых в разработанной вычислительной модели был реализован оригинальный алгоритм построения монотонных при произвольном виде численного решения схем высокого порядка аппроксимации на основе их анализа в пространстве неопределённых коэффициентов.
- Полученный в ходе выполнения работы опыт использования сетевых вычислительных моделей показал, что разработанный подход при современном уровне развития вычислительной техники и вычислительной математики позволяет эффективно численно решать достаточно сложные «глобальные» задачи данного класса.

Список литературы

- Алексеевко А.Е.* Моделирование и адаптивное управление динамикой транспортных потоков в условиях крупного мегаполиса: дис. кан. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Алексеевко Андрей Евгеньевич. — М., 2017 — 103 с.
- Алексеевко А.Е., Холодов Я.А.* Система автоматического управления светофорной сигнализацией для въездов на автомагистрали. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2017662058 от 26.10.2017. — 2017.
- Алексеевко А.Е., Холодов Я.А., Холодов А.С., Горева А.И., Мишин В.Д., Чехович Ю.В., Старожилец В.М.* Разработка, калибровка и верификация модели движения трафика в городских условиях. Часть I // Компьютерные исследования и моделирование. — 2015. — Т. 7(6). — С. 1185-1203.
- Васенин И.М., Шрагер Э.Р., Крайнов А.Ю., Палеев Д.Ю., Лукашов О.Ю., Костеренко В.Н.* Математическое моделирование нестационарных процессов вентиляции сети выработок угольной шахты // Компьютерные исследования и моделирование. — 2011. — Т. 3(2). — С. 155–163.
- Воробьев О.В., Холодов Я.А.* Об одном методе численного интегрирования одномерных задач газовой динамики // Математическое моделирование. — 1996. — Т. 8. № 1. С. 77–92.
- Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков // М.: МФТИ. — 2010. — 360 с.
- Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков // М.: МЦНМО. — 2013. — 428 с.
- Геллер О.В., Васильев М.О., Холодов Я.А.* Построение высокопроизводительного вычислительного комплекса для моделирования задач газовой динамики // Компьютерные исследования и моделирование. — 2010. — Т. 2(3). — С. 311–319.

- Геллер О.В., Симаков С.С., Холодов А.С., Холодов Я.А.* Программный комплекс для численного моделирования системы вентиляции зданий и распространения в них мелкодисперсных аэрозолей с использованием высокопроизводительных вычислительных алгоритмов. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2011617670 от 03.10.2011. — 2011.
- Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник. — 1959. — Т. 47. № 3. — С. 271–306.
- Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. // М.: Наука. — 1976. — 400 с.
- Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит. — 2012. — 656 с.
- Магомедов К.М., Холодов А.С.* О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1969. — Т. 9. № 2. — С. 373–386.
- Магомедов К.М., Холодов А.С.* Сеточно-характеристические численные методы // М.: Наука. — 1988. — 287 с.
- Морозов И.И., Холодов Я.А.* Моделирование режимов глобальных электрических сетей // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. — 2008. — № 47. — С. 170-178.
- Морозов И.И., Холодов Я.А.* Система автоматического управления дорожным движением для автономно работающих перекрестков. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2012615099 от 07.06.2012. — 2012.
- Морозов И.И., Холодов Я.А., Крылов Д.А., Геллер О.В.* Моделирование режимов глобальных электроэнергетических систем // Труды МФТИ. — 2010. — Т. 2. № 3(7). — С. 46-52.
- Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред, часть I // М.: Наука. — 1987. — 464 с.

- Петров И.Б., Холодов А.С.* О регуляризации разрывных численных решений уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. – 1984. – Т. 24. № 8. – С. 1172–1188.
- Русанов В.В.* Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // Докл. АН СССР. – 1968. – Т. 9. № 4. – С. 85–97.
- Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука. 1992. – 424 с.
- Северов Д.С.* Компьютерное моделирование потоков данных в пакетных сетях на основе уравнений в частных производных: дис. кан. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Северов Дмитрий Станиславович. — М., 2013 — 105 с.
- Северов Д.С., Трифонов С.В., Миненко М.И., Холодов Я.А.* Численное моделирование IP-сетей передачи данных в рамках уравнений сплошной среды // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. — 2008. — № 46. — С. 218-227.
- Северов Д.С., Холодов А.С., Холодов Я.А.* Сравнение пакетной и потоковой моделей IP-сетей // Математическое моделирование. — 2011. — Т.23 № 12. — С. 105-116.
- Трифонов С.В., Холодов Я.А., Миненко М.И., Истомин Т.Е., Чечендаев А.В.* Алгоритмы оптимизации работы беспроводной сенсорной сети на базе протокола ZigBee // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. — 2008. — № 56 — С. 86-95.
- Федоренко Р.П.* Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1962. – Т. 2. № 6. – С. 1122–1128.
- Холодов А.С.* О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1978. – Т. 18. № 6. – С. 1476–1492.
- Холодов А.С.* О построении разностных схем повышенного порядка точности для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1980. – Т. 20. № 6. – С. 1601–1620.

- Холодов А.С.* Сеточно-характеристические численные методы для многомерных задач механики сплошных сред // Вопросы кибернетики. – М.: НСК АН СССР, 1987. – Т. 15. – С. 140–163.
- Холодов А.С.* Разностные схемы с положительной аппроксимацией для многомерных систем уравнений гиперболического типа на нерегулярных сетках // В книге Рациональное численное моделирование в нелинейной механике. М.: Наука. 1990. — С. 49–62.
- Холодов А.С., Холодов Я.А.* О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 2006. — Т. 46. № 9. — С. 1560–1588.
- Холодов А.С., Холодов Я.А., Ковшов Н.В.* Сетевые вычислительные модели для нелинейных систем уравнений гиперболического типа. // — 2006. <http://swsoft.mipt.ru/nkovshov/SVM.doc>
- Холодов Я.А.* Разработка сетевых вычислительных моделей для исследования нелинейных волновых процессов на графах // Компьютерные исследования и моделирование. — 2019. — Т. 11(5). — С. 777–814.
- Холодов Я.А., Алексеенко А.Е., Васильев М.О., Холодов А.С.* Построение математической модели дорожного перекрестка на основе гидродинамического подхода // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — Т. 6(4). — С. 503–522.
- Холодов Я.А., Алексеенко А.Е., Холодов А.С., Васильев М.О., Мишин В.Д.* Разработка, калибровка и верификация модели движения трафика в городских условиях. Часть II // Компьютерные исследования и моделирование. 2015. — Т. 7(6). — С. 1205-1219.
- Холодов Я.А., Холодов А.С., Гасников А.В., Морозов И.И., Тарасов В.Н.* Моделирование транспортных потоков – актуальные проблемы и перспективы их решения // Труды МФТИ. — 2010. — Т. 2. № 4(8). — С. 152-162.

- Холодов Я.А., Холодов А.С., Васильев М.О., Цыбулин И.В.* Построение математической модели распространения примесей в вентиляционных сетях // Математическое моделирование. — 2016. — Т. 28(8). — С. 65–81.
- Холодов Я.А., Холодов А.С., Цыбулин И.В.* Построение монотонных разностных схем для систем уравнений гиперболического типа // Ж. вычислительной математики и математической физики — 2018. — Т. 58(8). — С. 30–49.
- Холодов Я.А., Уткин П.С., Холодов А.С.* Монотонные разностные схемы высокого порядка аппроксимации для одномерных уравнений гиперболического типа // М.: МФТИ. — 2015. — 68 с.
- Холодов Я.А., Северов Д.А., Холодов А.С.* Программный комплекс для численного моделирования компьютерных сетей с использованием высокопроизводительных вычислительных алгоритмов. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2011617671 от 03.10.2011. – 2011.
- Шокин Ю.И., Яненко Н.Н.* Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. – Новосибирск: Наука. – 1985. – 365 с.
- Уоллис Г.* Одномерные двухфазные течения // М.: Мир. — 1972. — 440 с.
- Alekseenko A.E., Kholodov Y.A., Kholodov A.S., Goreva A.I., Vasilev M.O., Chekhovich Y.V., Mishin V.D., Starozhilets V.M.* Development, calibration and verification of mathematical model for multilane urban road traffic flow. Part I // Computer Research and Modeling. — 2015. — Vol. 7(6). — P. 1185-1203.
- Alekseenko A.E., Kholodov A.S., Kholodov Y.A.* Boundary control problems for quasilinear systems of hyperbolic equations // Comput. Math. and Math. Phys. — 2016. — Vol. 56(6). — P. 916-931. Doi: <https://doi.org/10.1134/S0965542516060166>
- Alekseenko A.E., Kholodov Y.A., Kholodov A.S., Chekhovich Y.V., Starozhilets V.M.,* Adaptive traffic light control on highway entrances // 2017 IEEE 20th International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC). — 2017. — P. 1-6. Doi: 10.1109/ITSC.2017.8317729
- Aw A., Rasclé M.* Resurrection of “second order” models of traffic flow // SIAM Journal of Applied Mathematics. — 2000. — V. 60. — P. 916-938.

- Benyuan Liu, Daniel R. Figueiredo, Yang Guo, Jim Kurose, Don Towsley.* A study of networks simulation efficiency: Fluid simulation vs. packet-level simulation // Proceedings of the 20th Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies. — 2001.
- Bordonos A.K, Kholodov Y.A., Kholodov A.S., Morozov I.I.* Modeling of the global high-voltage grids // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2009. — Vol. 21(6). — P. 3–16.
- Bradski G.* The OpenCV Library. // Dr. Dobb's Journal of Software Tools. — 2000.
- Canny J.* A Computational Approach to Edge Detection // IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence. — 1986. — V. 8(6). — P. 679-698.
- Carson J.M., Pant S., Roobottom C., Alcock R., Blanco P.J, Carlos Bulant C.A., Vassilevski Y., Simakov S., Gamilov T., Pryamonosov R., Liang F., Ge X., Liu Y., PNithiarasu P.* Non-invasive coronary CT angiography-derived fractional flow reserve: A benchmark study comparing the diagnostic performance of four different computational methodologies // International journal for numerical methods in biomedical engineering — 2018. — e3235.
- Chien K.Y.* Predictions of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model // AIAA Journal. — 1982. — V. 20(1). — P. 33-38.
- Cockburn B., Shu C.-W., Johnson C., Tadmor E.* Advanced Numerical Approximation of Non-linear Hyperbolic Equations // Springer-Verlag Berlin Heidelberg. — 1998. — 454 c.
- Coclite G.M., Piccoli B.* Traffic Flow on a Road Network // SIAM J. Math. Anal. — 2005. — Vol. 36(6). — P. 1862–1886.
- Costeseque G., Lebacque J.P.* Intersection modeling using a convergent scheme based on Hamilt-ton-Jacobi equation // Procedia — Social and Behavioral Sciences. — 2012. — V. 54(4). — P. 736–748.
- Courant R., Isacson E., Rees M.* On the solutions of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences // Comm. Pure Appl. Math. — 1952. — V. 5(3). — P. 243–255.

- Daganzo C.F.* Requiem for second-order approximations of traffic flow // *Transportation Research B.* — 1995 — V. 29(4). — P. 277–286.
- Eddy W.F.* Convex Hull Peeling. COMPSTAT 5th Symposium Held at Toulouse // *Physica-Verlag HD, Heidelberg.* — 1982. — P. 42–47. doi:10.1007/978-3-642-51461-6_4.
- Edelsbrunner H., Kirkpatrick D., Seidel R.* On the shape of a set of points in the plane // *IEEE Trans. Inf. Theory.* — 1983. — V. 29(4). P. 551–559.
- Floyd S., Jacobson V.* Random Early Detection gateways for congestion avoidance. // *IEEE/ACM Transactions on Networking.* — 1993. — V. 1(4). — P. 397–413.
- Friedrichs K.O., Hyers D.H.* Symmetric hyperbolic linear differential equations // *Comm. Pure Appl. Math.* — 1954. — V. 7(2). — P. 345–392.
- Fujimoto R. et al.* Large-scale network simulation: how big? how fast? // *Proc. of 11th Int. Symp. on Modeling, Analysis and Simulation of Computer and Telecommunication Systems* — 2003.
- Garavello M., Piccoli B.* A Multibuffer Model for LWR Road Networks // *Complex Networks and Dynamic Systems.* — 2013. — V. 2. — P. 143–161.
- Garavello M., Piccoli B.* Traffic Flow on a Road Network Using the Aw–Rascle Model // *Communications in Partial Differential Equations.* — 2006. — V. 31(2). — P. 243–275.
- Gazis D.C.* *Traffic science.* N.Y.: Wiley. — 1974.
- Gazis D.C., Herman R., Potts R.B.* Car Following Theory of Steady State Traffic Flow // *Operations Research.* — 1959. — V. 7(4). — P.499-505.
- Geller O.V., Vasilev M.O., Kholodov Y.A.* Building a high-performance computing system for simulation of gas dynamics // *Computer Research and Modeling.* — 2010. — Vol. 2(3). — P. 309-317.
- Gognieva D.G., Gamilov T.M., Pryamonosov R.A., Vasilevsky Y.V., Simakov S.S., Liang F., Ternovoy S.K., Serova N.S., Tebenkova E.S., Sinitsyn E.A., Pershina E.S., Abugov S.A., Mardanyan G.V., Zakryan N.V., Kirakosyan V.R., Betelin V.B., Mitina Y.O., Gubina A.Y., Shchekochikhin D.Y., Syrkin A.L., Kopylov F.Y.* Noninvasive

- assessment of the fractional reserve of coronary blood flow with a one-dimensional mathematical model. Preliminary results of the pilot study // *Russian Journal of Cardiology*. — 2019. V 3. — P. 60-68.
- Gognieva D.G., Syrkin A.L., Vassilevski Y.V., Simakov S.S., Melerzanov A.V., Fuyou L., Lomonosova A.A., Bykova A.A., El Manaa H.E., Kopylov P.Y.* Noninvasive Assessment of Fractional Flow Reserve Using Mathematical Modeling of Coronary Flow // *Kardiologiya*. — 2018. V 58(12). — P. 85-92.
- Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // *J. Comp. Phys.* — 1983. — V. 49(3). — P. 357–393.
- Haut B., Georges Bastin G.* A second order model of road junctions in fluid models of traffic networks // *Networks and heterogeneous media*. — 2007. — V. 2(2). — P. 227–253.
- Helbing D.* Traffic and related self-driven many particle systems // *Reviews of modern physics*. — 2001. — V. 73(4). — P. 1067-1141.
- Kerner B.S.* Introduction to modern traffic flow theory and control. The long road to three - phase traffic theory. — 2009. — Springer.
- Kesidis G., Singh A., Cheung D., Kwok W.W.* Feasibility of fluid-driven simulation for atm networks. // *Proceedings of IEEE GLOBECOM*. — 1996.
- Kholodov A.S., Kholodov Y.A.* Computational Models on Graphs for the Nonlinear Hyperbolic System of Equations // *ASME Pressure Vessels and Piping Conference*. — 2004. — V. 476. — P. 161-167. Doi: 10.1115/PVP2004-2580.
- Kholodov A.S., Simakov S.S., Kholodov Y.A.* Global matter transport simulation using dynamical models of cardiovascular and respiratory systems // *Proceedings of the 2005 Summer Bioengineering Conference*. — 2005. — Vol. 2005. — P. 51–52.
- Kholodov A.S., Kholodov Y.A.* Monotonicity criteria for difference schemes designed for hyperbolic equations // *Comput. Math. and Math. Phys.* — 2006. — Vol. 46(9). — P. 1560-1588. Doi: 10.1134/S0965542506090089
- Kholodov Y.A. et al.* Computational Models on Graphs for Nonlinear Hyperbolic and Parabolic System of Equations // In: *Motasoares C.A. et al. (eds) III European*

- Conference on Computational Mechanics. — 2006. — Springer, Dordrecht.
Doi: https://doi.org/10.1007/1-4020-5370-3_43
- Kholodov Y., Evseev E., Morozov E., Bapayev A.* Simulation Model for the Rod System Graphs Dynamics // ASME Pressure Vessels and Piping Conference. — 2006. — Vol. 2. — P. 485-496. Doi: 10.1115/PVP2006-ICPVT-11-93708.
- Kholodov Y.A., Alekseenko A.E., Vasilev M.O., Kholodov A.S.* Developing the mathematical model of road junction by the hydrodynamic approach // Computer Research and Modeling. — 2014. — Vol. 6(4). — P. 503-522.
- Kholodov Y.A., Alekseenko A.E., Kholodov A.S., Vasilev M.O., Mishin V.D.* Development, calibration and verification of mathematical model for multilane urban road traffic flow. Part II // Computer Research and Modeling. — 2015. — Vol. 7(6). — P. 1205-1219.
- Kholodov Y.A., Vasiliev M.O., Kholodov A.S., Tsybulin I.V.* Developing the mathematical model for fine impurities spreading in ventilation networks // Math. Models Comput. Simul. — 2017. — Vol. 9(2). — P. 142–154. Doi: 10.1134/S2070048217020077
- Kholodov Y.A., Kholodov A.S., Tsybulin I.V.* Construction of Monotone Difference Schemes for Systems of Hyperbolic Equations // Comput. Math. and Math. Phys. — 2018. — Vol. 58(8). — P. 1226-1246. Doi: 10.1134/S0965542518080110
- Kholodov Y.A.* Development of network computational models for the study of nonlinear wave processes on graphs // Computer Research and Modeling, 2019, vol. 11, no. 5, P. 777-814. DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-5-777-814.
- Kulikovskii, A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu.* Mathematical aspects of numerical solution of hyperbolic systems, 1st Edition. Chapman and Hall/CRC, 2000, 560 p.
- Lax P.D.* Weak solution nonlinear hyperbolic equations and their numerical computations // Comm. Pure Appl. Math. — 1954. — V. 7 (1). — P. 159–193.
- Lax P.D., Wendroff B.* System of Conservation Laws // Comm. Pure Appl. Math. — 1960. — V. 13. — P. 217–237.

- Liu B., Guo Y., Kurose J., Towsley D., Gong W.* Fluid simulation of large scale networks: issues and tradeoffs // Proceedings of PDPTA'99. — 1999.
- Lighthill M.J., Whitham G.B.* On kinematic waves: II. Theory of traffic flow on long crowded roads // Proc. R. Soc. London, Ser. A. — 1955. — V. 229. — P. 281–345.
- Magomedov K.M., Kholodov A.S.* The construction of difference schemes for hyperbolic equations based on characteristic relations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1969. — V. 9(2). — P. 158-176.
- Matas J., Galambos C., Kittler J.V.* Robust Detection of Lines Using the Progressive Probabilistic Hough Transform // CVIU. — 2000. — V. 78(1). — P. 119-137.
- Misra V., Gong W.B, Towsley D.* Fluid-based Analysis of a Network of AQM Routers Supporting TCP Flows with an Application to RED // Proceedings of ACM/SIGCOMM. — 2000.
- Morozov I.I., Gasnikov A.V., Tarasov V.N., Kholodov Y.A., Kholodov A.S.* Numerical study of traffic flows by the hydrodynamic models // Computer Research and Modeling. — 2011. — V. 3(4). — P. 389-412.
- Network Simulator* — NS-2. <http://www.isi.edu/nsnam/ns>.
- Network Simulation Cradle.* <http://www.wand.net.nz/~stj2/nsc>.
- OPNET Modeler.* <http://opnetprojects.com/opnet-modeler>.
- Newell G.F.* Nonlinear effects in the dynamics of car - following // Oper. Res. — 1961. — V. 9. — P. 209-229.
- Papageorgiou M.* Some remarks on macroscopic flow modeling // Transportation Research A. — 1998. — V. 32(5). — P. 323–329.
- Payne H.J.* Models of freeway traffic and control, in: Simulation Council Proc // Mathematical Models of Public Systems. Edited by G.A. Bekey. — 1971. — V. 1. — P. 51-61.
- Prokoptsev N.G., Alekseenko A.E., Kholodov Y.A.* Traffic flow speed prediction on transportation graph with convolutional neural networks // Computer Research and Modeling. — 2018. — Vol. 10(3). — P. 359-367. Doi: 10.20537/2076-7633-2018-10-3-359-367.

- Richards P.I.* Shock Waves on the Highway // *Oper. Res.* — 1956. — V. 4. — P. 42–51.
- Riley G.F.* The Georgia Tech Network Simulator // *Proc. of ACM SIGCOMM Workshop on Models, Methods and Tools for Reproducible Network Research.* — 2003. Karlsruhe, Germany: ACM Press.
- Riley G.F., Ammar M., Fujimoto R.M., Park A., Perumalla K., Xu D.* A Federated Approach to Distributed Network Simulation // *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation.* — 2004. — Vol. 14(1). — P. 116–148. Doi: 10.1145/985793.985795.
- Riley G.F., Jaafar T., Fujimoto R.M.* Integrated fluid and packet network simulations // *Proc. of 10th Int. Symp. on Modeling, Analysis and Simulation of Computer and Telecommunication Systems.* — 2002.
- Severov D.S., Kholodov A.S., Kholodov Y.A.* Comparison of packet-level and fluid models of IP networks // *Mathematical Models and Computer Simulations.* — 2012. — Vol. 4(4). — P. 385-393. Doi: <https://doi.org/10.1134/S2070048212040072>
- Siebel F., Mauser W.* On the fundamental diagram of traffic flow // *SIAM Journal of Applied Mathematics.* — 2006. — V. 66(4). — P. 1150–1162.
- Siebel F., Mauser W.* Synchronized flow and wide moving jams from balanced vehicular traffic // *Phys. Rev. E.* — 2006. — V. 73. — P. 066108.
- Simakov S.S., Kholodov A.S., Yevdokimov A.V., Kholodov Y.A.* Numerical Simulations of Cardiovascular Diseases and Global Matter Transport // *In Advanced Information and Telemedicine Technologies for Health.* — 2005. — Vol. 2. — P. 188–192.
- Simakov S.S., Kholodov A.S., Kholodov Y.A., Nadolskiy A.A., Shushlebin A.N.* Global Dynamical Model of the Cardiovascular System // *In: Motosoares C.A. et al. (eds) III European Conference on Computational Mechanics.* — 2006. — Springer, Dordrecht. Doi: https://doi.org/10.1007/1-4020-5370-3_204
- Simakov S.S., Kholodov A.S., Kholodov Y.A., Nadolskiy A.A., Shushlebin A.N.* Computational Study of the Vibrating Disturbances to the Lung Function // *In: Motosoares C.A. et al. (eds) III European Conference on Computational*

Mechanics. — 2006. — Springer, Dordrecht. Doi: https://doi.org/10.1007/1-4020-5370-3_205

Simakov S.S. Modern methods of mathematical modeling of blood flow using reduced order methods // *Computer Research and Modeling*. — 2018. — V. 10(5). — P. 581-604.

Sod. G.A. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws // *J. Comput. Phys.* — 1978. — V. 27(1) P. 1–31.

Szymanski B.K. et al. Genesis: a system for large-scale parallel network simulation // *Workshop on Parallel and Distributed Simulation*. — 2003. Washington D.C., USA.

Treiber M., Hennecke A., Helbing D. Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulation // *Phys. Rev. E*. — 2000. — V. 62. — P. 1805-1824.

Trifonov S.V., Kholodov Y.A. Study and optimization of wireless sensor network based on ZigBee protocol // *Computer Research and Modeling*. — 2012. — V. 4(4). — P. 855-869.

Verentsov S.I., Magerramov E.A., Vinogradov V.A., Gizatullin R.I., Alekseenko A.E., Kholodov Y.A. Bayesian localization for autonomous vehicle using sensor fusion and traffic signs // *Computer Research and Modeling*. — 2018. — V. 10(3). — P. 295-303. DOI: [10.20537/2076-7633-2018-10-3-295-303](https://doi.org/10.20537/2076-7633-2018-10-3-295-303)

Verentsov S.I., Magerramov E.A., Vinogradov V.A., Gizatullin R.I., Alekseenko A.E., Kholodov Y.A. and Nikolskiy E. Bayesian Framework for Vehicle Localization Using Crowdsourced Data // *2018 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)*, Changshu. — 2018. — P. 215-219. DOI: [10.1109/IVS.2018.8500404](https://doi.org/10.1109/IVS.2018.8500404)

Wang H., Li J., Chen Q.Y., Ni D., Logistic modeling of the equilibrium speed–density relationship // *Transp. Res. Part A Policy Pract.* — 2011. — V. 45(6). — P. 554–566. DOI: [10.1016/j.tra.2011.03.010](https://doi.org/10.1016/j.tra.2011.03.010)

Warming R.F., Beam R.M. Upwind Second-Order Difference Schemes and Applications in Un-steady Aerodynamic Flow // *Proc. AIAA 2nd CFD conference*. — 1975. Hartford. Connecticut.

Whitham. G.B. *Linear and Nonlinear Waves* // Wiley. — 1974. — New York.

- Yong Liu, Francesco Lo Presti, Vishal Misra, Don Towsley and Yu Gu.* Fluid Models and Solutions for Large-Scale IP Networks // Proceedings of ACM International Conference on Measurement and Modeling of Computer Systems. – San Diego, CA, USA, 2003.
- Zhang H.M.* A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior // Transportation Research B. — 2002. — V. 36. — P. 275-290.
- Zhang H.M.* Anisotropic property revisited—does it hold in multi-lane traffic? // Transportation Research B. — 2003. — V. 37(6). — P. 561-577.
- Xiuzheng Z., Liguoz Z., Kholodov Y.A.* Model predictive control of eco-driving for transit using V2I communication // Control Conference (CCC). — 2015. — P. 2511-2516. Doi: 10.1109/ChiCC.2015.7260026
- Zeng X., Bagrodia R., Gerla M.* GloMoSim: a library for parallel simulation of large-scale wireless networks // Proc. of Workshop on Parallel and Distributed Simulation. — 1998. — P. 154–161.