

Федеральное государственное учреждение  
«Федеральный исследовательский центр  
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша  
Российской академии наук»

На правах рукописи

Коновалов Вениамин Сергеевич

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ИОНИЗАЦИИ И ПЕРЕНОСА  
ИЗЛУЧЕНИЯ В КАНАЛЕ ПЛАЗМЕННОГО УСКОРИТЕЛЯ**

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

1.1.9 - Механика жидкости, газа и плазмы

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., Козлов Андрей Николаевич

Москва, 2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение .....</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Перенос излучения в канале плазменного ускорителя.....</b>	<b>23</b>
1.1. МГД модель течения ионизирующегося газа в приближении ЛТР.....	24
1.2. О численном решении двумерной МГД задачи.....	30
1.3. 3D модель переноса излучения.....	35
1.4. Излучательная способность и коэффициент поглощения .....	37
1.5. О численном решении уравнения переноса излучения .....	41
1.6. Расчет двумерного течения ионизирующегося газа.....	47
1.7. Поле излучения в потоке ионизирующегося газа.....	52
<b>Глава 2. Модель течения ионизирующегося газа в канале КСПУ с учетом кинетики ионизации и рекомбинации.....</b>	<b>60</b>
2.1. Квазиодномерная модель течения.....	61
2.2. Кинетика заселения возбужденных состояний.....	66
2.3. Модифицированное диффузионное приближение (МДП).....	74
2.4. Лучистая теплопроводность .....	79
2.5. Диффузионное приближение в уравнении переноса излучения.....	80
2.6. Расчеты квазиодномерных течений ионизирующегося газа .....	82
2.7. Условие стационарности течений и критерии подобия.....	86
<b>Глава 3. Процесс ионизации в канале КСПУ с учетом поуровневой кинетики и переноса излучения.....</b>	<b>91</b>
3.1. Система уравнений поуровневой кинетики .....	92
3.2. МГД уравнения с учетом поуровневой кинетики .....	94

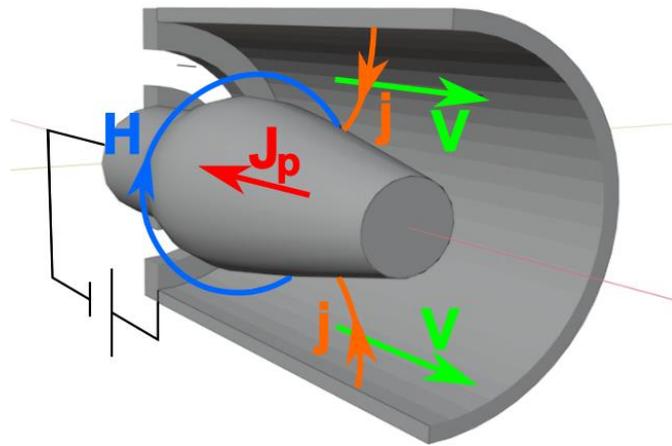
	3
3.3. Теплопроводность и электропроводность среды .....	100
3.4. Перенос излучения в квазиодномерном приближении.....	101
3.5. Расчеты с учетом поуровневой кинетики и сопоставление с МДП....	109
<b>Глава 4. Исследование течений ионизирующегося газа с образованием многозарядных ионов.....</b>	<b>116</b>
4.1. МГД уравнения для плазмы сложного состава.....	117
4.2. Электропроводность плазмы при наличии многозарядных ионов.....	120
4.3. Потери энергии на излучение .....	121
4.4. Система уравнений ионизационного равновесия.....	125
4.5. О численном решении задачи для плазмы сложного состава.....	130
4.6. Исследование течений ионизирующегося гелия .....	131
4.7. Условие стационарности течений ионизирующегося гелия .....	136
4.8. Изучение процесса ионизации азота в канале КСПУ .....	138
<b>Заключение.....</b>	<b>144</b>
<b>Библиографический список.....</b>	<b>147</b>

## ВВЕДЕНИЕ

**Объект исследования и актуальность темы.** Процесс ионизации, отвечающий фазовому переходу от газообразного состояния среды к плазме, определяет одно из актуальных направлений исследований в области современной фундаментальной и прикладной механики. Данный процесс, сопровождаемый излучением, наблюдается в природе и различных установках для генерации плазмы. Одной из таких перспективных установок является квазистационарный плазменный ускоритель (КСПУ) (см., например, [1-14]). В данной диссертации представлены различные модели и результаты численных исследований течений ионизирующегося газа и переноса излучения в канале КСПУ. Процесс ионизации рассмотрен с помощью трех моделей: в приближении локального термодинамического равновесия (ЛТР), с учетом кинетики ионизации и рекомбинации в рамках модифицированного диффузионного приближения (МДП), а также на основе системы уравнений поуровневой кинетики. Тем самым в диссертации представлены основные подходы в иерархии моделей процесса ионизации. Исследование переноса излучения также проведено с помощью различных моделей, включая наиболее полноценную 3D модель для расчета спектральных и интегральных характеристик излучения, к которым относится плотность энергии излучения и плотность потока энергии излучения.

На рис. 1 схематично представлен простейший плазменный ускоритель, состоящий из двух коаксиальных электродов, подсоединенных к электрической цепи. При наличии разности потенциалов между электродами происходит пробой нейтрального газа и образуется фронт ионизации, отвечающий фазовому переходу от газообразного состояния материи к плазме. За фронтом образовавшаяся плазма ускоряется вдоль оси канала за счет силы Ампера  $\mathbf{F}_A = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}$ , где  $\mathbf{j}$  – ток в плазме, протекающий от одного электрода к другому и имеющий преимущественно радиальное направление. В простейших системах процессы происходят при наличии единственной

азимутальной компоненты магнитного поля  $H = H_\varphi$ , которое генерируется электрическим током  $J_d$ , проходящим вдоль внутреннего электрода. Процесс ионизации и предварительного ускорения плазмы происходит, в частности, в первой ступени двухступенчатой установки КСПУ [1, 2, 4, 9-14]. Первая ступень состоит из нескольких малых коаксиальных плазменных ускорителей. Вторая ступень представляет собой большой плазменный ускоритель, подключенный к независимой цепи питания.



*Рис. 1.* Схема коаксиального плазменного ускорителя

Установки КСПУ являются многофункциональными системами, предназначенными для генерации высокоскоростных потоков плазмы. В настоящее время они используются в различных технологических приложениях и термоядерных исследованиях [5,6,10,11,15,16]. Кроме того, плазменные ускорители представляют интерес для разработки новых перспективных электрореактивных плазменных двигателей в космических приложениях, а также могут быть использованы в качестве источников излучения и функциональных элементов в ряде прикладных областей.

Теоретическим и численным исследованиям динамики потоков ионизирующегося газа и плазмы в плазменных ускорителях посвящен ряд публикаций (см., например, [1-3, 17-40]). В данных установках изучаются трансзвуковые потоки плазмы, в том числе при наличии дополнительного

продольного магнитного поля [24-27], приэлектродные процессы, обусловленные эффектом Холла и предшествующие явлению кризиса тока [28, 29], компрессионные течения [1, 15, 17-21, 30], динамика примесей [31], а также процесс ионизации и перенос излучения [1, 18-21, 32-40].

Изучение течений ионизирующегося газа проводится с помощью моделей различного уровня сложности. Первоначально численные исследования течений ионизирующегося газа были выполнены на основе скачкообразной зависимости проводимости газа от температуры [18, 36]. При этом проводимость менялась скачком от некоторой малой величины до значения, отвечающего спитцеровской проводимости при достижении газом определенной критической температуры. В дальнейшем для трехкомпонентной среды, состоящей из атомов, электронов и ионов, была разработана и до сих пор используется физически более содержательная модель, основанная на предположении о локальном термодинамическом равновесии и соотношении Саха (см., например, [20, 33]). Достаточно узкий фронт ионизации в соответствии с экспериментальными данными удалось получить с помощью численной модели [37-39], в которой модифицированная система МГД уравнений для описания динамики трехкомпонентной среды дополнена уравнением кинетики ионизации и рекомбинации. Соответствующие коэффициенты ионизации и рекомбинации определяются в рамках модифицированного диффузионного приближении с учетом энергетических уровней водородоподобного атома.

Наиболее полноценная модель течений ионизирующегося газа, также представленная в диссертации, включает систему уравнений поуровневой кинетики и перенос излучения [40], что отвечает наиболее сложному звену в иерархии моделей процесса ионизации. Сложность модели обусловлена многообразием составляющих ее частей и связей между ними. Система МГД уравнений содержит диссипативные факторы, обусловленные электропроводностью и теплопроводностью, а также потери энергии на

ионизацию и плотность потока энергии излучения, являющейся интегралом от интенсивности излучения. Данная величина для различных диапазонов частот фотонов определяется на основе решения уравнения переноса излучения, которое содержит коэффициент поглощения и излучательную способность, зависящие как от параметров среды, ее плотности и температуры, так и от населенности атомных уровней. В свою очередь система уравнений поуровневой кинетики, определяющая населенности уровней и процесс ионизации, включает вероятности различных столкновительных и радиационных процессов, которые также зависят от параметров среды и характеристик излучения. Все указанные системы необходимо решать совместно в рамках единой эволюционной задачи. Исследование на основе данной модели проведено для водородной плазмы, наиболее часто используемой в экспериментах.

Переход от простых к более сложным моделям позволяет увидеть детали процессов, недоступные для изучения в более упрощенных постановках задачи. В то же время независимо от используемой модели процесса ионизации наблюдается ряд общих закономерностей, характерных для течений ионизирующегося газа. Температура и скорость на фронте ионизации в канале плазменного ускорителя стремительно увеличиваются. В то же время плотность вещества и магнитное поле резко уменьшаются. Этим фронт ионизации в канале ускорителя принципиально отличается от традиционных ионизирующих ударных волн сжатия в магнитной газодинамике, а также фронтов рекомбинации и волн детонации [41]. Теоретические, численные и экспериментальные исследования процессов ионизации, переноса излучения и динамики плазмы связаны с актуальными научными направлениями, представленными рядом публикаций (см., например, [42-122]).

**Предметом исследований** в диссертационной работе являются перенос излучения, процесс ионизации и особенности течений ионизирующегося газа в каналах плазменных ускорителей. Одна из таких особенностей связана с неравновесной природой процесса ионизации, что может быть обусловлено

несколькими факторами, например, наличием больших градиентов термодинамических параметров на фронте ионизации, взаимодействием вещества с полем излучения. Эти и другие особенности являются предметом изучения в диссертационной работе. Для исследования процессов в потоках ионизирующегося газа были разработаны численные модели и проведены многочисленные численные эксперименты, представленные в диссертации.

Система МГД уравнений формирует базовую модель течений ионизирующегося газа и плазмы. В этой модели степень ионизации плазмы может быть вычислена в предположении ЛТР по известной плотности и температуре среды. Однако, как показывает практика, это предположение не позволяет получить достаточно узкий фронт ионизации, наблюдаемый в экспериментах. Этого удастся добиться с помощью моделей, учитывающих кинетику ионизации и рекомбинации в неравновесных процессах на фронте ионизации. В этих моделях рассматривается многоступенчатый процесс трансформации атомов под воздействием окружающих частиц и поля излучения, учитывается структура электронных оболочек атома и переходы атома из основного состояния в более высокие возбужденные состояния с последующим образованием ионов. Скорость трансформации частиц в плазме определяется столкновениями с соседними частицами и излучением. Спектральное поле излучения, в свою очередь, также формируется частицами плазмы в различных состояниях. Таким образом, возникает необходимость согласованного расчета поля излучения и поуровневого состава плазмы или населенности уровней частиц среды.

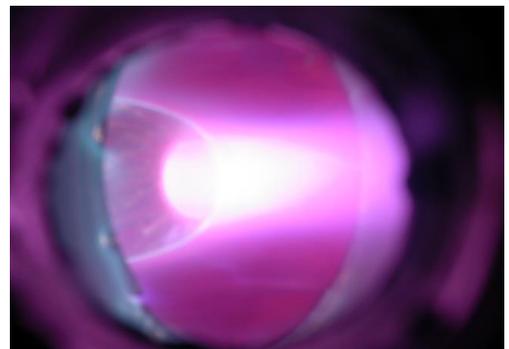
В ходе исследований построены численные модели различного уровня сложности для расчета процесса ионизации совместно с переносом излучения. Соответствующие программные модули включены в МГД коды для моделирования течений ионизирующегося газа и плазмы в канале КСПУ.

Решение задачи о течении ионизирующегося газа предполагает использование данных о структуре атомов. В области атомной физики созданы современные базы данных о внутренней структуре атомов (см.,

например, [115, 116]). Эта информация необходима при моделировании спектрального поля излучения и поуровневого состава плазмы. Помимо известных атомных данных, в открытом доступе имеются также компьютерные коды для расчета характеристик среды [117, 118].

В диссертационной работе представлено описание процесса ионизации в КСПУ на новом более высоком уровне с учетом переноса излучения [32-35, 123-146], включая явление предионизации поступающего нейтрального газа благодаря излучению, идущему от фронта. Разработанные модели предназначены, в том числе для анализа планируемых экспериментальных исследований. Современный уровень диагностики плазмы должен позволить провести спектральный анализ излучения внутри канала ускорителя одновременно с определением локальных значений плотности и температуры среды. Совместное использование и сопоставление результатов численного моделирования и экспериментальных данных открывает новые возможности для проведения комплексных исследований. Совершенствование физической модели процессов направлено на сближение результатов расчетов с возможностями предстоящих экспериментальных исследований на новых установках КСПУ, разрабатываемых в настоящее время [7, 8, 123].

Исследования КСПУ (см. рис. 2) ведутся в ФГУП ГНЦ РФ Троицком институте инновационных и термоядерных исследований (ТРИНИТИ), в Институте тепло и массообмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси, в Институте Физики Плазмы ННЦ ХФТИ, а также в других научных центрах.



*Рис. 2.* Фотографии одной из экспериментальных установок и потока плазмы из КСПУ

В современных экспериментах наиболее часто в качестве рабочей среды выступают такие газы как водород, гелий и аргон. Возможная в будущем модификация КСПУ в качестве мощных электрореактивных плазменных двигателей для использования в атмосферных условиях означает, что рабочей средой может быть воздух, который примерно на 78% состоит из азота. В диссертации моделирование процесса ионизации и расчет поля излучения в канале КСПУ представлены в основном для водорода, а также отражены результаты исследований для азота и гелия [127, 129-131].

Задача исследования неравновесного процесса ионизации газа в канале КСПУ связана с проведением большого количества вычислений и обработкой множества данных. При этом в каждой точке расчетной области может обрабатываться и храниться информация, например, обо всех населенностях уровней и всем спектре излучения. С учетом этого разработанные программные модули реализованы также на вычислительных комплексах с параллельной архитектурой по технологии OpenMP и DVM (см, например, [143-145]). Для параллельной DVM-версии одного из вычислительных кодов оформлено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [146].

### **Цель диссертационной работы**

Цель работы заключается в исследовании на основе новых численных моделей процесса ионизации и переноса излучения в потоках ионизирующегося газа и плазмы в коаксиальных каналах плазменных ускорителей.

### **Задачи диссертационной работы.**

Перед соискателем были поставлены следующие задачи:

1. Определение поля излучения на основе 3D модели переноса излучения в двумерных осесимметричных потоках ионизирующегося водорода, рассчитанных в канале плазменного ускорителя в приближении ЛТР.
2. Определение эмпирического условия стационарности течений ионизирующегося водорода на основе квазиодномерной МГД модели,

дополненной уравнением кинетики ионизации и рекомбинации в рамках модифицированного диффузионного приближения с учетом реальной энергетической структуры атома.

3. Исследовать процесс ионизации и течения ионизирующегося газа в канале КСПУ на основе модифицированных МГД уравнений, дополненных системой уравнений поуровневой кинетики и уравнением переноса излучения.
4. Изучить течения ионизирующегося гелия и азота в канале плазменного ускорителя на основе МГД модели с учетом системы уравнений ионизационного равновесия при условии возможного образования многозарядных ионов с различной кратностью ионизации. Определение условия стационарности течений ионизирующегося гелия.

### **Научная новизна**

Впервые разработана полноценная модель радиационной магнитной газодинамики (РМГД) для исследования физических процессов и двумерных осесимметричных течений ионизирующегося газа и плазмы в КСПУ. На основе разработанной 3D модели переноса излучения получены спектральные и интегральные характеристики излучения в канале плазменного ускорителя. Эмпирическое условие стационарности течения ионизирующегося газа в КСПУ впервые сформулировано на основе квазиодномерной модели течения с учетом кинетики ионизации и рекомбинации в рамках модифицированного диффузионного приближения. Разработан новый вариант модели переноса излучения в квазиодномерном приближении. Создана также новая модель неравновесного процесса ионизации и впервые проведены исследования в канале КСПУ на основе совместного решения системы МГД уравнений, системы уравнений поуровневой кинетики и уравнения переноса излучения.

Разработанные модели позволили выявить эффект предиионизации в потоке нейтрального газа, поступающего в канал КСПУ, за счет излучения, идущего от фронта, а также позволили изучить влияние излучения на поуровневый и ионизационный состав плазмы в окрестности фронта

ионизации на основе совместного решения системы уравнений поуровневой кинетики и задачи переноса излучения. Впервые рассчитаны спектры излучения в направлении лучей, выходящих из объема плазмы в канале КСПУ. Данные спектры и их сопоставление с экспериментальными данными, которые планируют получить на основе спектроскопии потока, отвечают новому этапу в развитии комплексного подхода для изучения процессов и определения термодинамических параметров плазмы.

Впервые разработаны двумерные модели осесимметричных течений ионизирующегося гелия и азота в канале плазменного ускорителя на основе модифицированных МГД уравнений, дополненных системой уравнений ионизационного равновесия при наличии многозарядных ионов с различной кратностью ионизации. На основе численных экспериментов впервые рассмотрены особенности процесса ионизации гелия и азота в канале КСПУ и продемонстрирована возможность образования многозарядных ионов в потоках ионизирующегося азота и гелия.

### **Теоретическая и практическая значимость**

В диссертации представлены разработанные РМГД модели различного уровня сложности для описания течений ионизирующегося газа в канале КСПУ. Иерархическая структура моделей включает различные способы описания процесса ионизации и переноса излучения, а также определяется решением задач разной размерности. МГД модели рассмотрены в 1D и 2D постановках задачи. Модели переноса излучения основаны на 1D и 3D постановках, используя метод коротких и длинных характеристик, а также приближение лучистой теплопроводности и диффузионное приближение. В результате исследований получены новые результаты, которые привели к более глубокому пониманию физики процессов в КСПУ.

Ряд установленных фактов имеют практическое значение. К ним относится выявленная предионизация поступающего нейтрального газа за счет излучения, идущего от фронта ионизации, а также эмпирическое условие стационарности течений ионизирующегося газа и стабилизация таких

течений с помощью СВЧ нагрева. Кроме того, вычислительный код, разработанный на основе 3D модели переноса излучения, позволяет получить спектр излучения в направлении любого луча, выходящего из объема плазмы. Это может быть использовано в изучении плазодинамических процессов и разработке комплексного подхода, основанного на теоретико-вычислительных данных и экспериментах с использованием спектрометров.

Исследования, представленные в диссертации, являются составной частью проектов, реализованных в рамках Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 12-02-90427, 15-01-03085) и Российского научного фонда (грант № 16-11-10278). Один из разработанных программных комплексов зарегистрирован в федеральной службе по интеллектуальной собственности Российской Федерации [146].

### **Основные положения, выносимые на защиту**

Разработаны модели различного уровня сложности для исследования течений ионизирующегося газа и переноса излучения в канале КСПУ. Представлена иерархия моделей процесса ионизации.

1. Впервые разработана 3D модель переноса излучения в потоках ионизирующегося газа в канале КСПУ. На основе вычислительных экспериментов определены характеристики поля излучения в окрестности фронта ионизации для двумерных осесимметричных течений, рассчитанных на основе МГД модели в приближении локального термодинамического равновесия (ЛТР). Создан программный комплекс, предназначенный для численного решения задач радиационной магнитной газодинамики, включая параллельные вычисления на суперкомпьютерах.
2. В серии вычислительных экспериментов определена граница между пульсирующими и стационарными течениями, а также сформулировано эмпирическое условие стационарности течений ионизирующегося газа в рамках квазиодномерной МГД модели с учетом переноса излучения и

кинетики ионизации и рекомбинации на основе модифицированного диффузионного приближения (МДП).

3. Впервые разработана МГД модель течений ионизирующегося газа в КСПУ, дополненная системой уравнений поуровневой кинетики при наличии излучения. Вычислительные эксперименты показали, что особенности неравновесного процесса ионизации в канале КСПУ связаны с распределением населенностей атомных уровней. Установлено, что радиационные процессы оказывают существенное влияние на возбуждение атомных уровней и ионизацию среды перед фронтом.
4. Впервые реализована двумерная МГД модель осесимметричных течений ионизирующегося газа в КСПУ с учетом системы уравнений ионизационного равновесия при наличии многозарядных ионов с различной кратностью ионизации. В вычислительных экспериментах установлено, что процесс ионизации азота и гелия сопровождается образованием многозарядных ионов в канале плазменного ускорителя. Определено условие стационарности течений ионизирующегося гелия.

**Обоснованность и достоверность результатов** обеспечивается использованием современных подходов к моделированию физических процессов и применением апробированных вычислительных методов. Успешная верификация моделей и решений проведена на основе сопоставления результатов расчетных исследований, полученных на разных сетках и с помощью разных моделей. Проверки, включая средства внутреннего контроля, подтвердили применимость разработанных программных комплексов при изучении течений ионизирующегося газа и переноса излучения в каналах КСПУ на основе достоверных вычислительных экспериментов.

#### **Апробация работы**

Результаты работы докладывались на семинарах ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, а также на следующих конференциях, школах и съезде:

- XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики ( Казань, 2015);
- Международная конференция "Воздействие интенсивных потоков энергии на вещество" (Эльбрус, 2009, 2017);
- Международная конференция "Plasma Physics and Controlled Fusion" (Алушта, 2012)
- Научная школа-конференция "Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики" (Алушта, 2007, 2008);
- International Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics (Москва, ОИВТ РАН, 2015, 2016, 2018, 2019, 2020, 2021);
- Всероссийская конференция "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики" (Дюрсо, 2014);
- Международная конференция "Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность" (Звенигород, 2016);
- Международная конференция "Забабахинские научные чтения" (Снежинск, 2017);
- Workshop on Numerical Modeling in MHD and Plasma Physics: methods, tools, and outcomes (Новосибирск, 2018, 2019, 2021, 2022)

### **Публикации**

По материалам диссертации опубликовано 41 печатная работа: 9 статей в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК и входящих в системы цитирования Web of Science и Scopus, включая статью в издании первого квартиля Q1; 10 препринтов, 12 статей в сборниках трудов конференций и 10 тезисов докладов, а также свидетельство о государственной регистрации результатов интеллектуальной деятельности.

### **Личный вклад**

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в представленные исследования.

Соискатель принимал непосредственное участие в разработке моделей и соответствующих программных комплексов, проводил расчеты и обрабатывал полученные результаты. Совместно с научным руководителем соискатель анализировал численные эксперименты, активно участвовал в подготовке и оформлении публикаций, самостоятельно подготовил несколько печатных работ, представлял доклады на конференциях.

### **Структура и объем диссертации**

Полный объем диссертации составляет 157 страниц с 48 рисунками и 3 таблицами. Список литературы содержит 153 наименования.

### **Краткое содержание диссертации**

Во **введении** представлено современное состояние исследований плазменных ускорителей, обосновывается актуальность, формулируются цели работы, научная новизна и положения, выносимые на защиту, обсуждается практическая значимость проведенных исследований, приводятся сведения об апробации работы.

**Глава 1** посвящена исследованию поля излучения в потоках ионизирующегося газа в канале плазменного ускорителя. Модель двумерных осесимметричных течений ионизирующегося газа основана на модифицированных МГД уравнениях с учетом электропроводности, теплопроводности и переноса излучения. В МГД модели использовано приближение локального термодинамического равновесия (ЛТР) для трехкомпонентной среды, состоящей из атомов, ионов и электронов. 3D модель переноса излучения включает основные механизмы излучения и поглощения для различных участков спектра. Решение уравнения переноса излучения в многогрупповом приближении производится методом длинных характеристик в трехмерной постановке задачи. В результате определено поле излучения, включая интегральные характеристики излучения. Представлены также спектральные характеристики излучения, включая диаграммы направленности излучения.

В главе 2 рассматривается квазиодномерная численная модель, основанная на системе модифицированных МГД уравнений, дополненных уравнением кинетики ионизации и рекомбинации в рамках модифицированного диффузионного приближения (МДП) с учетом реальной структуры энергетических уровней атома. Данная модель позволила выявить неравновесную природу процессов на фронте ионизации, где наблюдается четко выраженное отклонение от ионизационно-рекомбинационного равновесия, что существенно изменило прежние представления. Представлены также три модели переноса излучения, включая метод характеристик, приближение лучистой теплопроводности и диффузионное приближение. Проведено исследование пульсирующих и квазистационарных течений ионизирующегося газа, рассчитанных методом установления. В результате сформулировано эмпирическое условие стационарности течений ионизирующегося газа в рамках РМГД модели и МДП приближения, учитывающих кинетику ионизации и рекомбинации.

В главе 3 представлена наиболее полная модель радиационной магнитной газодинамики для исследования процесса ионизации и течений ионизирующегося газа в канале плазменного ускорителя. Данная модель включает в себя модифицированные МГД уравнения в квазиодномерном приближении, систему уравнений поуровневой кинетики и уравнение переноса излучения. Разработанная РМГД модель позволила получить самосогласованное решение перечисленных выше систем уравнений. Предложен и разработан квазиодномерный вариант метода длинных характеристик, а также адаптированный метод коротких характеристик для расчета переноса излучения в квазиодномерной модели течения. В результате расчетов выявлены особенности неравновесного процесса ионизации, связанные с распределением населенностей атомных уровней. Проведено сопоставление течений, рассчитанных на основе РМГД модели с учетом поуровневой кинетики, с результатами исследований процесса

ионизации и течений ионизирующегося газа, представленными во второй главе и полученными в рамках МДП приближения.

**Глава 4** посвящена изучению течений ионизирующегося гелия и азота при условии возможного образования многозарядных ионов с различной кратностью ионизации. Исследования двумерных осесимметричных течений ионизирующихся газов в канале плазменного ускорителя проведены на основе системы модифицированных МГД уравнений с учетом электропроводности, теплопроводности и переноса излучения. Модель течений дополнена системой уравнений ионизационного равновесия в приближении локального термодинамического равновесия и позволяет изучить образование ионов с различной кратностью ионизации. Выявлены особенности процесса ионизации гелия и азота в канале ускорителя. Представлены интегральные характеристики излучения и сформулировано эмпирическое условие стационарности течений ионизирующегося гелия.

В **заключении** представлены основные результаты диссертации.

#### **Основные публикации по теме диссертации**

- Kozlov A.N., Garkusha I.E., Konovalov V.S., Novikov V.G. The radiation intensity of the Lyman alpha line at the ionization front in the quasi-steady plasma accelerator. // Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics. 2013. No. 1. P. 128-130.
- Брушлинский К.В., Козлов А.Н., Коновалов В.С. Численные модели стационарных и пульсирующих течений ионизирующегося газа в каналах плазменных ускорителей. // ЖВМ и МФ. 2015. Т. 55, № 8. С. 1405-1416. (Brushlinskii K.V., Kozlov A.N., Konovalov V.S. Numerical models of steady-state and pulsating flows of self-ionizing gas in plasma accelerator channels. // Computational Mathematics and Math. Physics. 2015. V.55, No.8. p.1370–1380)
- Kozlov A.N., Konovalov V.S. Numerical study of the ionization process and radiation transport in the channel of plasma accelerator. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2017. V. 51. P. 169-179. Q1

- Kozlov A.N., Konovalov V.S. Radiation transport in the ionizing gas flow in the quasi-steady plasma accelerator. // Journal of Physics: Conference Series. 2018. V. 946. Ar. 012165
- Kozlov A.N., Konovalov V.S. Optimization of the radiation transport calculation for quasi-one-dimensional model of the ionizing gas flows. // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1336. Ar. 012003.
- Kozlov A.N., Klimov N.S., Konovalov V.S., Podkovyrov V.L., Urlova R.V. Study of the ionizing gas flow in the channel of plasma accelerator with different ways of gas inflow at the inlet. // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1394. Ar. 012021.
- Климов Н.С., Коваленко Д.В., Подковыров В.Л., Кочнев Д.М., Ярошевская А.Д., Урлова Р.В., Козлов А.Н., Коновалов В.С. Экспериментальное исследование интегральных характеристик потока плазмы и разряда квазистационарного сильноточного плазменного ускорителя с собственным магнитным полем. // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Термоядерный синтез. 2019. Т. 42, № 3. С. 52-63.
- Бахтин В.А., Захаров Д.А., Козлов А.Н., Коновалов В.С. Использование DVM-системы при разработке программы для расчетов задачи радиационной магнитной газодинамики и исследования динамики плазмы в канале КСПУ. // Электронные библиотеки. 2020. Т. 23, № 4. С. 594-614.
- Козлов А.Н., Коновалов В.С. Эмпирическое условие стационарности двумерных течений ионизирующегося водорода в канале плазменного ускорителя. // Математическое моделирование. 2023, Т. 35, №1, С. 13-33.
- Козлов А.Н., Коновалов В.С., Новиков В.Г. Сравнительный анализ трех методов расчета переноса излучения на фронте ионизации в квазистационарных плазменных ускорителях. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2012, № 50. 24 с.
- Козлов А.Н., Коновалов В.С. Пульсирующие режимы течений ионизирующегося газа в коаксиальных плазменных ускорителях. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2014, № 1. 28 с.

- Козлов А.Н., Коновалов В.С. 3D модель переноса излучения в потоках ионизирующегося газа и плазмы. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 86. 32 с.
- Козлов А.Н., Коновалов В.С. Исследование процесса ионизации азота и образования многозарядных ионов в канале плазменного ускорителя. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 100. 32 с.
- Козлов А.Н., Коновалов В.С. Модель неравновесного процесса ионизации с учетом поуровневой кинетики и переноса излучения в канале плазменного ускорителя. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 103. 28 с.
- Коновалов В.С. Перенос излучения в квазиодномерной модели течений ионизирующегося газа в канале плазменного ускорителя. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 54, 24 с.
- Козлов А.Н., Коновалов В.С., Климов Н.С., Коваленко Д.В., Подковыров В.Л., Урлова Р.В., Гуторов К.М. Исследование переноса излучения в потоке ионизирующегося гелия в плазменном ускорителе. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 61. 27 с.
- Козлов А.Н., Коновалов В.С., Новикова С.О. Исследование пульсирующих течений ионизирующегося водорода в плазменном ускорителе на основе двумерной модели. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 96. 24с.
- Коновалов В.С. Исследование устойчивости процесса ионизации гелия в канале плазменного ускорителя. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 108. 24 с.
- Климов Н.С., Гуторов К.М., Коваленко Д.В., Козлов А.Н., Коновалов В.С., Подковыров В.Л., Ярошевская А.Д. Спектры излучения в потоках ионизирующихся газов для установки КСПУ-Т с продольным полем. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2022. № 12. 32 с.
- Konovalov V.S., Kozlov A.N., Novikov V.G. The condition of transition from the pulsing modes to the stationary ionizing gas flows in the channel of the

coaxial plasma accelerator. // Compendium “Physics of Extreme States of Matter – 2009”. Ed. V.E. Fortov and others. Chernogolovka, ICP RAS. 2009, P. 211-214.

- Козлов А.Н., Коновалов В.С. Исследование устойчивости течений ионизирующегося газа в канале квазистационарного плазменного ускорителя. // Сборник трудов. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 20 – 24 августа 2015 г. Казань: Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. С. 1864-1866.
- Kozlov A.N., Konovalov V.S.. Investigation of stationary and pulsating flows of ionizing gas in the channel of the plasma accelerator. // Proceedings the 15th International Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics. Moscow, ИИТ RAS, Изд-во: ООО печатный салон «Шанс». 2016. P. 57-61.
- Козлов А.Н., Коновалов В.С. Исследование переноса излучения в потоках ионизирующегося газа в КСПУ с помощью методов коротких и длинных характеристик. // Труды Международной конференции «XIII Забабахинские научные чтения», посвященной 100-летию со дня рождения академика Е.И. Забабахина. Снежинск, Челябинская область, 20–24 марта 2017 г., Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е.И. Забабахина (РФЯЦ – ВНИИТФ). 2017. С. 1 – 12.
- Kozlov A.N., Konovalov V.S. The Study of Radiation Transport and Plasma Dynamics Based on the MHD Model in the Multi-Mirror Trap Connected with Plasma Accelerator. // Proceedings of the 17th International Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics. Moscow, 17-19 April 2018, Moscow: Joint Institute of High Temperatures of RAS. 2018. P. 171-176.
- Klimov N.S., Kozlov A.N., Konovalov V.S., Podkovyrov V.L., Urlova R.V. Research of the ionization process in the plasma accelerator channel with different ways of the inlet gas supply. // Proceedings of the 18th International

Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics. Moscow, 9-11 April 2019, Moscow: Joint Institute of High Temperatures of RAS. 2019. P. 168-173.

- Бахтин В.А., Захаров Д.А., Козлов А.Н., Коновалов В.С. Разработка параллельного программного кода для расчетов задачи радиационной магнитной газодинамики и исследования динамики плазмы в канале КСПУ. // Научный сервис в сети Интернет: труды XXI Всероссийской научной конференции (23-28 сентября 2019 г., г. Новороссийск). М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2019. С. 105-118.
- V. Bakhtin, D. Zakharov, A. Kozlov, V. Konovalov. Development of parallel software code for calculating the problem of radiation magnetic gas dynamics and the study of plasma dynamics in the channel of plasma accelerator. // CEUR Workshop Proceedings. ISSN:1613-0073. 2020. V. 2543, P. 59-70.
- Козлов А.Н., Коновалов В.С., Бахтин В.А., Захаров Д.А. Параллельная программа для численного исследования динамики потоков плазмы в каналах квазистационарных плазменных ускорителей. // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ от 3 декабря 2018 года. № 2018665229.
- Klimov N.S., Kovalenko D.V., Kozlov A.N., Konovalov V.S., Podkovyrov V.L., Urlova R.V. Numerical model of the helium ionization process in the plasma accelerator channel. // Proceedings of the 19th International Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics. Moscow, Joint Institute of High Temperatures of RAS, 15-17 September, 2020, Moscow: ООО «Печатный Салон «Шанс»». 2020. P. 17-20.
- Gutorov K.M., Klimov N.S., Kovalenko D.V., Kozlov A.N., Konovalov V.S., Novikova S.O., Podkovyrov V.L., Urlova R.V., Khamkhoev M.-B.Kh. Numerical study of the stability of two-dimensional axisymmetric flows of an ionizing gas in the channel of the quasi-stationary plasma accelerator QSPA-T. // Proceedings of the 20th International Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics. Moscow, ИИТ RAS, 25-27 May, 2021. Session 1, P. 13-19.

## ГЛАВА 1

### ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В КАНАЛЕ ПЛАЗМЕННОГО УСКОРИТЕЛЯ

В данной главе представлено исследование переноса излучения в потоках ионизирующегося газа в канале плазменного ускорителя [1-14]. Модель основана на модифицированных МГД уравнениях (см., например, [18, 21, 33]) и уравнении переноса излучения [44, 45, 47, 50-52]. В МГД модели использовано приближение локального термодинамического равновесия (ЛТР) для трехкомпонентной среды, состоящей из атомов, ионов и электронов [46, 47]. Модель переноса излучения включает основные механизмы излучения и поглощения для различных участков спектра [52-55].

Процесс ионизации газа в КСПУ относится к малоизученным явлениям, отвечающим фазовому переходу с образованием фронта ионизации. Изучение свойств потоков ионизирующегося газа проводится главным образом с помощью стационарных или квазистационарных течений, рассчитанных методом установления. Для стационарных течений разработаны также основы теории процессов на фронте ионизации [38].

В данной главе представлены численная модель и результаты расчетов двумерных осесимметричных квазистационарных течений ионизирующегося газа в приближении ЛТР. Фазовый переход от газообразного состояния к плазме изучается на основе нелинейного описания процесса ионизации при условии, что на фронте ионизации происходит резкое изменение магнитной вязкости или электропроводности среды. Электропроводимость определяет джоулев нагрев в уравнении энергии и диффузию магнитного поля, которая учитывается с помощью параболической части системы МГД уравнений.

Основное внимание уделено построению трехмерной численной модели и решению задачи переноса излучения в потоках ионизирующегося газа в канале ускорителя. В процессе решения задачи о переносе излучения следует учитывать ряд факторов. К ним относится применимость того или иного приближения, необходимая точность при описании геометрии излучающего

объема, учет теневых областей, детали описания спектра излучения, основных механизмов излучения и поглощения, а также выбор методов решения уравнения переноса излучения (см., например, [45, 51, 83-91]).

### **1.1. МГД модель течения ионизирующегося газа в приближении ЛТР**

В зависимости от параметров среды описание плазмы осуществляется с помощью кинетических уравнений для разреженной среды и уравнений магнитной газодинамики для более плотной плазмы. В свою очередь МГД описание для плотной среды включает различные приближения. Как правило, используют классическую систему МГД уравнений (см., например, [1, 17-21, 42, 43, 60-62, 73-75]). В ряде случаев необходима двухжидкостная МГД модель с учетом эффекта Холла (см., например, [1, 17-21, 24, 28, 29]), а также двухжидкостная МГД модель с учетом инерции электронов [42,92].

В задачах нелинейной плазмодинамики процесс ионизации также описывается различными способами (см., например, [1, 18-21, 33, 36-41, 46-48]). В данной работе используется модифицированная МГД модель в рамках приближения ЛТР с учетом электропроводности, теплопроводности и радиационного переноса тепла, поскольку для низкотемпературной достаточно плотной плазмы излучение может оказывать определенное влияние на перераспределение энергии в среде. При этом энергией излучения, плотностью импульса излучения и тензором плотности потока импульса излучения можно пренебречь в уравнениях радиационной магнитной газодинамики в рассматриваемом нерелятивистском случае.

МГД модель течения ионизирующегося газа основана на уравнениях переноса трехкомпонентной среды, состоящей из атомов, ионов и электронов, а также на уравнении диффузии магнитного поля, которое следует из уравнений Максвелла и закона Ома  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{V}, \mathbf{H}]$  при условии пренебрежения инерцией электронов и током смещения. Процесс ионизации исследуется для водорода, часто используемого в экспериментах. Массы

атомов и ионов равны  $m_a = m_i = m$ . Согласно экспериментальным данным, на фронте ионизации температура возрастает до уровня  $1 \div 3 \text{ эВ}$ . Концентрация газа, поступающего в канал, предполагается достаточно высокой  $n = 10^{16} \div 10^{18} \text{ см}^{-3}$ . Для таких параметров можно считать, что среда является квазинейтральной  $n_i = n_e$ , а скорости компонент среды равны между собой  $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_e = \mathbf{V}_a = \mathbf{V}$ . Эксперименты и оценки показывают также, что можно ограничиться случаем однотемпературной смеси. В результате преобразований исходных уравнений с учетом указанных предположений получим следующую модифицированную систему МГД-уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad \rho \frac{d \mathbf{V}}{d t} + \nabla P = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}, \quad \frac{d}{d t} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \text{div}(\rho \varepsilon \mathbf{V}) + P \text{div} \mathbf{V} = \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} - \text{div} \mathbf{q} - \text{div} \mathbf{W}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}) - c \text{rot} \frac{\mathbf{j}}{\sigma}, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \mathbf{H},$$

$$P = P_a + P_i + P_e = (1 + \alpha)(c_p - c_v) \rho T, \quad \varepsilon = (1 + \alpha) c_v T + \varepsilon_I,$$

$$k_B / m = R = c_p - c_v = c_v (\gamma - 1), \quad \alpha = n_e / (n_a + n_i), \quad \mathbf{q} = -\kappa_{e \rightarrow a} \nabla T.$$

Здесь  $\rho = m(n_a + n_i)$  – плотность тяжелых частиц,  $P$  – суммарное давление,  $\alpha$  – степень ионизации,  $\mathbf{q}$  – тепловой поток,  $\kappa_{e \rightarrow a}$  – электрон-атомарная теплопроводность,  $\mathbf{W}$  – поток энергии излучения. В понятие внутренней энергии на единицу массы  $\varepsilon$  включается дополнительное слагаемое  $\varepsilon_I = \zeta \alpha I / m_i$ , ответственное за потери энергии на ионизацию, где  $I$  – энергия ионизации атома. В уравнении для внутренней энергии в системе (1.1) джоулев нагрев  $Q_{ei} = \mathbf{j}^2 / \sigma$  существенно превосходит тепло, выделяемое при трении с остальными компонентами.

Электропроводность среды в уравнениях равна  $\sigma = e^2 n_e / m_e \nu_e$ , где средняя частота столкновений электрона с другими частицами  $\nu_e$  складывается из частот столкновений с атомами и ионами:  $\nu_e = \nu_{ea} + \nu_{ei}$ ,  $\nu_{ea} = n_a \langle V_e \rangle S_{ea}$ ,  $\nu_{ei} = n_i \langle V_e \rangle S_{ei}$ , где  $S_{ea}$ ,  $S_{ei}$  – эффективные сечения столкновений. Основные механизмы теплопередачи зависят от состояния среды. При больших степенях ионизации заметную роль в суммарном теплопереносе играет классическая электронная теплопроводность поперек магнитного поля. В исследованиях процесса ионизации в канале КСПУ было использовано следующее соотношение в соответствии с работой [42]:

$$\kappa_{\perp e} = \frac{1}{m_e} k_B n_e (k_B T_e) \tau_e \gamma_0(\chi) \left[ \frac{\text{эрг}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}} \right],$$

где  $\gamma_0(\chi) = (11.92 + 4.664 \chi^2) / (3.77 + 14.79 \chi^2 + \chi^4)$  – функция, учитывающая влияние замагниченности электронной компоненты плазмы, определяемой параметром  $\chi = \omega_e \tau_e$ . При малых степенях ионизации определенный вклад вносит атомарная теплопроводность (см., например, [47, 74]):

$$\kappa_a = 24 \cdot T^{3/4} \left[ \frac{\text{эрг}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}} \right].$$

В предположении ЛТР концентрации всех трех компонент среды и электронная температура связаны уравнением Саха:

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = K_1(T) = \frac{2 \Sigma_i}{\Sigma_a} \left( \frac{m_e k_B T}{2 \pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left( - \frac{I}{k_B T} \right), \quad (1.2)$$

где  $\Sigma_a$  и  $\Sigma_i$  – статистические суммы атома и иона. Величина  $K_1$  называется константой ионизационного состояния. Уравнение ионизационного равновесия (1.2) по существу означает, что в любом локальном объеме достаточно плотной плазмы с известными значениями температуры и плотности происходят два взаимно обратных процесса. Прямой процесс

ионизации атома из основного состояния в результате электронного удара уравновешен обратным процессом рекомбинации при столкновении иона с электронами  $A + e \leftrightarrow A^+ + e + e$ . Уравнение Саха определяет состав плазмы в трехкомпонентной плазме при условии квазинейтральности. Учитывая, что  $n_e = n_i = \alpha n$  и  $n_a = n - n_i = (1 - \alpha)n$ , где  $n = n_a + n_i$ , для степени ионизации из уравнения (1.2) получим соотношение:

$$\alpha = -K_1(T) / 2n + \sqrt{(K_1(T) / 2n)^2 + K_1(T) / n}. \quad (1.3)$$

Численное решение задачи с уравнениями (1.1) и (1.3) осуществляется в безразмерных переменных. В качестве единиц измерения выберем длину канала  $L$ , характерную концентрацию или плотность газа на входе в канал ускорителя  $n_o$  ( $\rho_o = m n_o$ ) и температуру  $T_o$ . Характерная величина азимутального магнитного поля на входе в канал  $H_o$  определяется разрядным током в системе  $J_p$  так, что  $H_o = 2J_p / cR_o$ , где  $R_o$  – характерный радиус канала. С помощью этих величин формируются единицы: давления  $P_o = H_o^2 / 4\pi$ , скорости  $V_o = H_o / \sqrt{4\pi\rho_o}$ , времени  $t_o = L / V_o$ , электрического поля  $E_o = H_o V_o / c$ , тока в плазме  $j_o = c H_o / 4\pi L$ .

В безразмерных переменных система МГД уравнений содержит такие безразмерные параметры, как отношение характерного газового давления к магнитному  $\beta = 8\pi P_o / H_o^2$  ( $P_o = k_B n_o T_o$ ), параметр  $T^* = I / k_B T_o$  и магнитную вязкость  $\nu_m = 1 / \text{Re}_m = c^2 / 4\pi L V_o \sigma$ , которая обратно пропорциональна магнитному числу Рейнольдса  $\text{Re}_m$ . При этом магнитная вязкость содержит величины  $\sigma_{10}$  и  $\sigma_{20}$ , которые выражаются через исходные размерные параметры и физические константы:

$$\nu_m = \frac{1}{\text{Re}_m} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}, \quad \sigma_1 = \frac{\alpha \sigma_{10}}{(1 - \alpha)\sqrt{T}}, \quad \sigma_2 = \sigma_{20} T^{3/2}.$$

Существуют различные формы записи уравнений магнитной газодинамики, в том числе консервативная или дивергентная форма, которая в наибольшей степени соответствует законам сохранения. Система (1.1) с точностью до слагаемого, содержащего плотность потока энергии излучения  $\mathbf{W}$ , отвечает наиболее часто встречающейся форме представления МГД уравнений. При этом вместо уравнения переноса полной энергии, включая кинетическую и магнитную составляющие, используется уравнение для внутренней энергии и соответственно температуры. Это уравнение легко получить с учетом закона сохранения электромагнитной энергии, являющегося следствием уравнений Максвелла. Для данного класса задач полная энергия, ее кинетическая и магнитная составляющие существенно больше тепловой составляющей. Вычисление тепловой энергии на основе разности больших величин может привести в численных моделях к отрицательным значениям температуры. Этим объясняется использование уравнения для внутренней энергии. Однако это уравнение содержит неконсервативное слагаемое  $P \operatorname{div} \mathbf{V}$ . Поэтому вместо уравнения для внутренней энергии в численной модели используется эквивалентное уравнение для энтропии или пропорциональной ей функции  $S = \ln \frac{P}{\rho^\gamma}$ . Это уравнение имеет дивергентный вид, а давление и температура вычисляются с помощью соотношений  $P = \rho^\gamma e^S$ ,  $T = 2 \rho^{\gamma-1} e^S / \beta (1 + \alpha)$ .

Следует заметить, что на уравнение энергии или энтропии не ложится существенная нагрузка в определении динамики потоков плазмы, поскольку роль градиента давления  $\nabla P$  в уравнении переноса импульса весьма незначительна в исследуемых сильноточных разрядах, для которых  $\beta \ll 1$ . В то же время температура, точнее температура электронной компоненты, участвует в определении степени ионизации. Уравнение для внутренней энергии в (1.1) является следствием трех уравнений переноса энергии для компонент среды, в которых основная часть энергии, выделяемой в

результате трения между электронами и ионами, представлена в качестве отдельного слагаемого  $\mathbf{j}^2 / \sigma$  в уравнении для электронной температуры. Поэтому итоговое уравнение для внутренней энергии, по сути, определяет электронную температуру, необходимую для вычисления степени ионизации.

Постановка задачи включает граничные условия на электродах, входе и выходе из канала ускорителя. Предполагаем, что на входе в канал при  $z = 0$  газ подается с известными значениями плотности и температуры  $\rho(r) = f_1(r)$ ,  $T(r) = f_2(r)$ . Если не рассматривать дополнительное уравнение электрической цепи и считать, что ток поддерживается постоянным и поступает в систему только через электроды, то при  $z = 0$  имеем  $j_z = 0$  или  $r H_\varphi = r_o = const$  ( $r_o = R_o / L$ ). Дозвуковая подача газа осуществляется вдоль определенного направления, например, вдоль координатных линий. Тип уравнений определяет число граничных условий. Оно равно числу характеристик, входящих внутрь области, для гиперболической системы. При наличии конечной проводимости и параболической части системы МГД уравнений необходимы условия для магнитного поля на всех границах.

Граничные условия на электродах  $r = r_a(z)$  и  $r = r_k(z)$ , образующих стенки канала, отвечают эквипотенциальности электродов ( $E_\tau = 0$ ) и непроницаемости их поверхности ( $V_n = 0$ ).

На выходе для исследуемых трансзвуковых потоков предполагается свободное вытекание плазмы. В средней части канала происходит переход скорости потока через скорость быстрой магнитозвуковой волны или скорость сигнала  $C_s$  [1] в отсутствие продольного магнитного поля

$$C_s = \sqrt{C_g^2 + C_A^2}, \quad C_g^2 = \gamma P / \rho, \quad C_A^2 = H^2 / \rho. \quad (1.4)$$

На оси системы при изучении компрессионных течений ставятся условия осевой симметрии:  $H_\varphi = 0$ ,  $V_r = 0$ . Приведенные граничные условия являются традиционными для численных моделей динамики потоков.

## 1.2. О численном решении двумерной МГД задачи

Численное интегрирование уравнений (1.1) ведется в области переменных  $(z, r)$ , соответствующей форме канала, изображенной на рис. 3.

Алгоритм численного решения включает отображение расчетной области на единичный квадрат в плоскости  $(y, z)$  с помощью соотношения:

$$r = (1 - y) r_k(z) + y r_a(z) \quad (1.5)$$

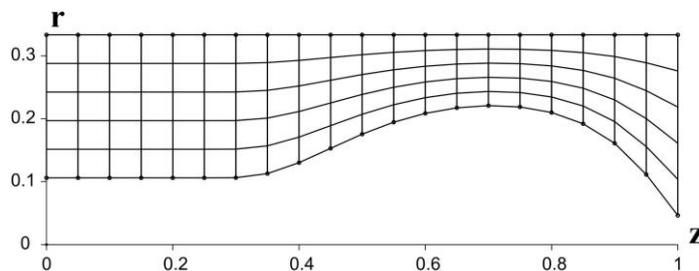


Рис. 3. Расчетная область и элементы расчетной сетки в плоскости  $(r, z)$

Переход к новым координатам сводится к соответствующей замене производных в системе уравнений (1.1), которые переписываются в дивергентном виде для координат  $(y, z)$ .

Методам численного решения задач, постановка которых основана на дифференциальных уравнениях в частных производных, в том числе МГД уравнениях, посвящен ряд монографий, учебных пособий и оригинальных работ (см., например, [20,45,56-71,79-93]).

Рассматриваемая численная модель двумерных осесимметричных течений предполагает расщепление по координатным направлениям и физическим факторам, учитывая смешанный тип МГД уравнений. Для расчета гиперболической части уравнений используется разностная схема с коррекцией потоков [71]. Для учета магнитной вязкости и теплопроводности используется метод потоковой прогонки [93]. Квазистационарные течения рассчитываются методом установления. Контроль качества численной модели осуществлялся, в частности, с помощью расчетов на сетках с разными пространственными шагами по указанным направлениям.

*Метод расчета гиперболической части системы МГД уравнений.*

Для решения уравнений переноса используется метод SHASTA-FCT с коррекцией потоков, обеспечивающий свойства монотонности и положительности. Соответствующий алгоритм с учетом расщепления исходных уравнений по координатным направлениям применяется к одномерному обобщенному уравнению переноса для величины  $D$ :

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial (V D)}{\partial x} = \frac{\partial D_1}{\partial x} + \theta_2 \frac{\partial D_2}{\partial x} + \theta_3$$

Поиск решения уравнения осуществляется поэтапно. Выпишем для определенности разностную схему. Сначала находится транспортное решение, включающее конвективный перенос,

$$D_i^K = D_i - F_{i+1/2} + F_{i-1/2} + Q_{2,i} + Q_{3,i},$$

где  $F_{i+1/2} = F_{i+1/2}^K + F_{i+1/2}^{D1}$  - разностная аппроксимация дивергентной части исходного уравнения переноса,  $Q_{2,i}$  - аппроксимация слагаемого  $\theta_2 \frac{\partial D_2}{\partial x}$ ,  $Q_{3,i}$  - соответственно источника  $\theta_3$ . Слагаемое

$$F_{i+1/2}^K = \varepsilon_{i+1/2} \frac{D_i + D_{i+1}}{2}$$

отвечает конвективному переносу, где

$$\varepsilon_{i+1/2} = \frac{\tau}{h} V_{i+1/2} - \frac{\tau^2}{2h^2} V_{i+1/2} (V_{i+1} - V_i).$$

Кроме того, имеем

$$F_{i+1/2}^{D1} = -\frac{\tau}{h} (\alpha_{i+1/2} D_{1,i} + \beta_{i+1/2} D_{1,i+1});$$

$$\alpha_{i+1/2} = 0.5 + \frac{\tau}{2h} V_{i+1/2}; \quad \beta_{i+1/2} = 0.5 - \frac{\tau}{2h} V_{i+1/2};$$

$$Q_{2,i} = \frac{\tau}{2h} \left[ \theta_{2,i} (D_{2,i+1} - D_{2,i-1}) - \frac{\tau}{h} V_{i+1/2} \theta_{2,i+1/2} (D_{2,i+1} - D_{2,i}) + \frac{\tau}{h} V_{i-1/2} \theta_{2,i-1/2} (D_{2,i} - D_{2,i-1}) \right];$$

$$Q_{3,i} = \tau \left[ \theta_{3,i} - \frac{\tau}{4h} \theta_{3,i} (V_{i+1} - V_{i-1}) - \frac{\tau}{4h} V_i (\theta_{3,i+1} - \theta_{3,i-1}) \right].$$

Здесь  $\tau$  - шаг по времени,  $h$  - шаг по координате. Устойчивость схемы требует выполнения соответствующего ограничения на временной шаг. Учтем диффузионные потоки

$$D_i^{K+D} = D_i^K - F_{i+1/2}^D + F_{i-1/2}^D; \quad F_{i+1/2}^D = -v_{i+1/2}^{ph} (D_{i+1} - D_i);$$

$$v_{i+1/2}^{ph} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \varepsilon_{i+1/2}^2.$$

Для компенсации внесенной численной вязкости и сохранения положительности решения добавляются антидиффузионные потоки, которые не должны приводить к образованию новых экстремумов и увеличивать уже существующие. В расчетах используется так называемая фениксовая коррекция и не скорректированный антидиффузионный поток равен

$$F_{i+1/2}^{ad} = \mu_{i+1/2}^{ph} (D_{i+1}^{ph} - D_i^{ph}),$$

$$\text{где } D_i^{ph} = D_i^K - F_{i+1/2}^{ph} + F_{i-1/2}^{ph}; \quad F_{i+1/2}^{ph} = -v_{i+1/2}^{ad} (D_{i+1} - D_i);$$

$$\mu_{i+1/2}^{ph} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \varepsilon_{i+1/2}^2; \quad v_{i+1/2}^{ad} = \frac{1}{2} \varepsilon_{i+1/2}^2.$$

Далее осуществляется коррекция потоков с помощью величин:

$$F_{i+1/2}^{kop} = \Omega \max \left\{ 0, \min \left[ \left| F_{i+1/2}^{ad} \right|, \Omega (D_{i+2}^{K+D} - D_{i+1}^{K+D}), \Omega (D_i^{K+D} - D_{i-1}^{K+D}) \right] \right\},$$

$$\text{где } \Omega = \text{sign} (D_{i+1}^{K+D} - D_i^{K+D}).$$

Окончательно получим решение на следующем шаге по времени

$$D_i^1 = D_i^{K+D} - F_{i+1/2}^{kop} + F_{i-1/2}^{kop}.$$

С помощью представленных формул проводится предварительный расчет всех величин для  $t^{n+1/2} = t^n + \tau/2$ . Используя их, пересчитываются коэффициенты в формулах, и осуществляется расчет для шага  $t^{n+1} = t^n + \tau$ . Изложенный алгоритм позволяет аппроксимировать гладкие решения со вторым порядком точности. Поиск решения двумерной МГД задачи также осуществляется поэтапно с учетом покоординатного расщепления. На первом этапе рассчитываются все переменные задачи для одного координатного направления, например по координате  $y$ . Далее проводится расчет по другому направлению, в данном случае по координате  $z$ . Этим процедурам отвечают некие операторы  $L_y$  и  $L_z$  соответственно. Процедура симметризации  $(L_y L_z L_z L_y)$  завершает переход на очередной временной слой. Учет диссипативных факторов производится отдельно.

*Метод расчета параболической части системы МГД уравнений.*

Параболическая часть МГД уравнений содержит коэффициенты электропроводности и теплопроводности, которые сильно меняются на фронте ионизации для рассматриваемых течений. Например, уравнение диффузии для азимутальной компоненты магнитного поля  $H = H_\varphi$  при наличии электропроводности после расщепления по физическим факторам и координатным направлениям приводит к необходимости решения краевой задачи для уравнения типа  $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial H}{\partial z} \right)$ . Аналогичное уравнение возникает в радиальном направлении. Эффективный способ решения уравнения с сильно меняющимися коэффициентами основан на потоковом варианте метода прогонки. Этот метод применяется для решения краевой задачи с уравнением вида

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial y}{\partial x} + f, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq \mu(x) \leq \infty,$$

и граничными условиями:

$$x=0: \chi^{(1)} y + \lambda^{(1)} w = \nu^{(1)},$$

$$x=1: \chi^{(2)} y - \lambda^{(2)} w = \nu^{(2)},$$

где  $\chi^{(l)} \geq 0$ ,  $\lambda^{(l)} \geq 0$ ,  $\chi^{(l)} + \lambda^{(l)} \neq 0$ ,  $l=1,2$ ;  $y(0,x) = y_0(x)$ .

Поток  $w = -\mu \frac{\partial y}{\partial x}$  используется как зависимая переменная в алгоритме

решения задачи. В общем случае граничные условия в рассматриваемой форме включают граничные условия первого типа ( $\lambda^{(l)} = 0$ ), второго типа ( $\chi^{(l)} = 0$ ) и третьего типа ( $\chi^{(l)} \neq 0$ ,  $\lambda^{(l)} \neq 0$ ), а также их комбинации. Аппроксимация исходного уравнения с использованием неявной схемы приводит к трехточечному конечно-разностному уравнению, которое может быть представлено в следующей форме:

$$A_i w_i - B_i w_{i+1} - C_i y_i = -F_i,$$

$$w_{i+1} / \alpha_{i+1} = y_i - y_{i+1},$$

В соответствии с исходными граничными условиями можно выписать конечно-разностные граничные условия:

$$\chi^{(1)} y_0 + \lambda^{(1)} w_0 = \nu^{(1)}, \quad \chi^{(2)} y_N - \lambda^{(2)} w_N = \nu^{(2)};$$

$$\chi^{(l)} \geq 0, \quad \lambda^{(l)} \geq 0, \quad \chi^{(l)} + \lambda^{(l)} \neq 0, \quad l=1,2.$$

Для полноты изложения приводится алгоритм решения трехточечного конечно-разностного уравнения в общем виде. Искомая величина  $y_i$  может быть связана с ее потоком  $w_i$  в разностной форме с помощью линейного соотношения  $\alpha_i y_i + \beta_i w_i = \gamma_i$ , что приводит к следующим рекуррентным формулам. Для прямой декомпозиции при  $\alpha_{i+1} \geq 1$  имеем:

$$\beta_{i+1} = A_{i+1} (B_i \beta_i + A_i \sigma_{i+1}) / \delta_i, \quad \gamma_{i+1} = A_{i+1} (A_i \gamma_i + \beta_i F_i) / \delta_i,$$

$$\delta_i = A_i (A_{i+1} + C_{i+1} \sigma_{i+1}) + B_i C_{i+1} \beta_i, \quad \sigma_{i+1} = 1 / \alpha_{i+1}.$$

В другом случае, когда  $\alpha_{i+1} < 1$ , используются следующие соотношения:

$$\beta_{i+1} = A_{i+1} (\alpha_{i+1} B_i \beta_i + A_i) / \tilde{\delta}_i, \quad \gamma_{i+1} = A_{i+1} \alpha_{i+1} (A_i \gamma_i + \beta_i F_i) / \tilde{\delta}_i,$$

$$\tilde{\delta}_i = A_i (A_{i+1} \alpha_{i+1} + C_{i+1}) + \alpha_{i+1} B_i C_{i+1} \beta_i, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

$$\beta_0 = \frac{A_0 \lambda^{(1)}}{A_0 \chi^{(1)} + C_0 \lambda^{(1)}}, \quad \gamma_0 = \frac{A_0 \nu^{(1)}}{A_0 \chi^{(1)} + C_0 \lambda^{(1)}},$$

Обратная прогонка выполняется по формулам:

$$w_i = \frac{1}{A_i} \left[ \left( 1 - \frac{C_i}{A_i} \beta_i \right) (B_i w_{i+1} - F_i) + C_i \gamma_i \right], \quad w_N = \frac{\gamma_N \chi^{(2)} - \alpha_N \nu^{(2)}}{\alpha_N \lambda^{(2)} - \beta_N \chi^{(2)}},$$

$$y_i = \frac{1}{A_i} [A_i \gamma_i + \beta_i (F_i - B_i w_{i+1})], \quad y_N = \frac{\beta_N \nu^{(2)} - \gamma_N \lambda^{(2)}}{\alpha_N \lambda^{(2)} - \beta_N \chi^{(2)}}.$$

Известно, что в задачах с сильно меняющимися коэффициентами может наблюдаться полная потеря точности, если решение вычисляется с помощью обычной прогонки. Метод потоковой прогонки позволяет получать высококачественные и надежные результаты.

### 1.3. 3D модель переноса излучения

Уравнения (1.1) содержат плотность потока энергии излучения  $\mathbf{W}$ , которая также как и плотность энергии излучения  $U$  определяются через интенсивность излучения  $I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  вдоль выбранного направления и для определенного участка спектра с помощью следующих соотношений

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} \int_0^{4\pi} I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} d\nu, \quad \mathbf{W}(\mathbf{r}) = \int_0^{\infty} \int_0^{4\pi} I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{\Omega} d\boldsymbol{\Omega} d\nu. \quad (1.6)$$

В МГД уравнениях плотность энергии излучения  $U$  можно не учитывать, так как она мала по сравнению с тепловой или внутренней энергией среды ( $U \ll \rho \varepsilon$ ). Однако поток энергии излучения  $W \sim cU$  может играть определенную роль в перераспределении энергии. Переход к безразмерным значениям потока энергии излучения  $\mathbf{W}$  в уравнениях (1.1) осуществляется с помощью следующей единицы измерения:  $W_0 = V_0 H_0^2 / 4\pi$ .

Интенсивность излучения вычисляется с помощью уравнения переноса излучения, которое имеет следующий вид:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \eta_\nu(\mathbf{r}) - \kappa_\nu(\mathbf{r}) \cdot I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}), \quad (1.7)$$

где  $I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  – интенсивность излучения с частотой  $\nu$ , распространяющегося в направлении телесного угла  $\boldsymbol{\Omega}$ , отвечает точке с координатой  $\mathbf{r}$ . Излучательная способность  $\eta_\nu(\mathbf{r})$  и коэффициент поглощения вещества  $\kappa_\nu(\mathbf{r})$  являются известными функциями температуры и плотности вещества [33, 44-47, 52-55]. Уравнение (1.7) записано в предположении изотропии рассеяния. Как правило, скорость распространения излучения существенно выше характерных скоростей плазодинамических процессов. В этом случае поле излучения мгновенно подстраивается под распределение параметров потока, и можно ограничиться решением стационарного уравнения переноса излучения:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \eta_\nu(\mathbf{r}) - \kappa_\nu(\mathbf{r}) \cdot I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}). \quad (1.8)$$

В работе использованы различные типы граничных условий для уравнения переноса излучения. Наиболее простое граничное условие соответствует отсутствию падающего извне излучения. В некоторых случаях стенки ускорителя могут быть дополнительным источником излучения. Излучение стенок ускорителя можно учесть на основе данных о степени черноты металлов в зависимости от температуры [49].

#### 1.4. Излучательная способность и коэффициент поглощения

Коэффициент поглощения  $\kappa_\nu$  и излучательная способность  $\eta_\nu$  зависят от состояния среды, ее плотности и температуры, а также спектрального параметра  $\nu$ , связанного с энергией фотона  $h\nu$ . Для определения их значений необходимы, в частности, расчет спектра атома и вычисление населенностей состояний атомов. Процессы испускания и поглощения света, связанные с переходами электрона из одного энергетического состояния в другое, подразделяются на три составляющих:

а) связанно-связанные процессы (bound-bound):

$A_k + h\nu_{kj} \leftrightarrow A_j$  – абсорбция и эмиссия излучения,

$A_k + e \leftrightarrow A_j + \tilde{e}$  – возбуждение и гашение электронным ударом;

б) связанно-свободные процессы (bound-free):

$A_k + h\nu_k \leftrightarrow A^+ + e$  – фотоионизация и фоторекомбинация,

$A_k + e \leftrightarrow A^+ + \tilde{e} + \hat{e}$  – столкновительная ионизация и рекомбинация;

в) свободно-свободные процессы (free-free):

$A_k + e + h\nu_k \leftrightarrow A_k + \tilde{e}$  – тормозное излучение и обратное тормозное поглощение.

Здесь  $A_k$  – атом в  $k$ -ом возбужденном состоянии.

Соответственно, коэффициент поглощения и излучательная способность складываются из трех частей, отвечающих а) поглощению и излучению в линиях, б) фотоионизации и фоторекомбинации и в) рассеянию. Излучательная способность и коэффициент поглощения, исправленный на вынужденное излучение, определяются с помощью следующих соотношений [44,52-55]:

$$\begin{aligned}
\kappa_\nu &= \sum_{\substack{k < j \\ k, j=1}}^{K-1} n_k \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{kj} \phi_{kj}(\nu) \left( 1 - \frac{n_j g_k}{n_k g_j} \right) + n_e \sigma_K^{ff}(\nu) (1 - e^{-h\nu/k_B T}) + \\
&+ \sum_{k=1}^{K-1} n_k \sigma_k^{PI}(\nu) \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi \hbar^2}{m_e k_B T} \right)^{3/2} \frac{n_e n_i g_k}{n_k \Sigma_i} \exp\left( \frac{h\nu_k - h\nu}{k_B T} \right) \right), \\
\eta_\nu &= \sum_{\substack{k > j \\ j, k=1}}^{K-1} n_k \frac{g_j \pi e^2}{g_k m_e c} f_{jk} \phi_{jk}(\nu) \frac{h\nu^3}{\pi c^2} + n_e \frac{h\nu^3}{\pi c^2} \sigma_K^{ff}(\nu) e^{-h\nu/k_B T} + \\
&+ \sum_{k=1}^{K-1} n_i n_e \frac{(h\nu)^3}{4 \hbar^2 \pi^2 c^2} \left( \frac{2\pi \hbar^2}{m_e k_B T} \right)^{3/2} \sigma_k^{PI}(\nu) \frac{g_k}{\Sigma_i} \exp\left( \frac{h\nu_k - h\nu}{k_B T} \right), \quad (1.9)
\end{aligned}$$

где  $\nu$  – частота фотона,  $n_k$  – концентрация атомов в  $k$ -ом состоянии,  $g_k$  – статистический вес  $k$ -го состояния атома,  $f_{kj}$  – сила осцилляторов при переходе атома из  $k$ -го в  $j$ -е состояние,  $\phi_{kj}(\nu)$  – профиль линии соответствующего связанно-связанного перехода,  $\sigma_k^{PI}(\nu)$  – сечение фотоионизации из  $k$ -го состояния,  $\sigma_K^{ff}(\nu)$  – сечение обратного тормозного поглощения [55]. Суммирование в формулах проводится по всем состояниям, за исключением состояния  $k = K$ , отвечающего ионам с концентрацией  $n_i$ . Излучательная способность (1.9) отвечает количеству энергии частоты  $\nu$ , самопроизвольно или спонтанно излучаемой в  $1 \text{ см}^3$  вещества в 1 сек в единичном интервале частот.

Профиль линии, учитывающий разные по природе механизмы уширения, определяется по формуле Фойгта:

$$\phi_{kj}(\nu) = \frac{\gamma_e}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2} ds}{\left( \nu - \nu_{kj} - s D \right)^2 + (\gamma_e)^2}, \quad (1.10)$$

где  $D = v_{kj} V_a / c$  – ширина Доплера,  $V_a$  – характерная скорость атома,  $\gamma_e$  – суммарная ширина, обусловленная взаимодействием атома с окружающими его ионами, электронами и излучением. Профиль линии Фойгта имеет вид колоколообразной кривой, характерная ширина которой соответствует времени жизни состояния. Взаимодействие с электронами является существенным фактором для характерных концентраций  $n \sim 10^{14} \div 10^{17} \text{ см}^{-3}$  и температуры  $T \sim 1 \text{ эВ}$ . В этом случае для вычисления величины  $\gamma_e$  можно ограничиться уширением электронным ударом, используя следующую формулу [54,55]:

$$\gamma_e = \frac{32}{3} \frac{\hbar^2 n_e}{m_e^2 \langle V_e \rangle} \ln \left( \frac{R_D}{R_W} + 0.215 \right) I(k, j),$$

где  $R_D = \sqrt{k_B T / (4 \pi e^2 n_e)}$  – радиус Дебая,  $R_W = a_0 \sqrt{2/3} \sqrt{I(k, j)} e^2 / (\hbar \langle V_e \rangle)$  – радиус Вайскопфа,  $I(k, j) = 0.5(k^4 + j^4)$ ,  $\langle V_e \rangle$  – средняя скорость электронов,  $a_0$  – радиус Бора. Эффективная методика вычисления профиля Фойгта изложена в [53].

Расчет сечений связанно-свободных и свободно-свободных процессов осуществляется в приближении Крамерса:

$$\sigma_k^{PI}(\nu) = \frac{64 \pi k e^2 a_0^2}{3\sqrt{3} \hbar c} \left( \frac{E_k}{h\nu} \right)^3, \quad \sigma_K^{ff}(\nu) = \frac{16 \pi^3}{3\sqrt{3}} \frac{n_e e^6}{4\pi^2 h c m_e^2 \nu^3 \langle V_e \rangle},$$

где  $E_k$  – энергия ионизации,  $k$  – номер уровня, с которого происходит ионизация. Энергетический спектр атома водорода определяется по формуле:

$$E_k = -Z^2 e^2 / (2 a_0 k^2).$$

Силы осцилляторов  $f_{kj}$  для связанно-связанных переходов вычисляются с помощью известных квантово механических соотношений [55].

В условиях локального термодинамического равновесия населенности состояний связаны уравнением Саха (1.2) и формулой Больцмана:

$$n_k = n_a \frac{g_k}{\Sigma_a} \exp(-(E_k - E_1) / k_B T). \quad (1.11)$$

На рис. 4 и 5 представлены зависимости соответственно коэффициента поглощения и излучательной способности водородной плазмы для разных параметров среды. Излучательная способность, отвечающая единичному интервалу частот (1.9), на рис. 5 отнесена к единичному интервалу энергии фотонов в 1 эВ. На рисунках разным цветом отмечены  $\alpha$ - и  $\beta$ -линии серии Лаймана. Ранее было показано, что эти линии переносят значительную долю энергии линейчатого спектра, поэтому профили этих линий описываются более детально, чем профили остальных линий. Для детального описания этих спектральных линий использовался профиль Фойгта (1.10). При этом на ширину линии приходилось несколько спектральных групп, подробно описывающих форму ядра и крыльев линий. В то же время линии в остальной части спектра описывались в рамках одной группы. Весь спектр в расчетах разбивается более чем на 300 спектральных групп.

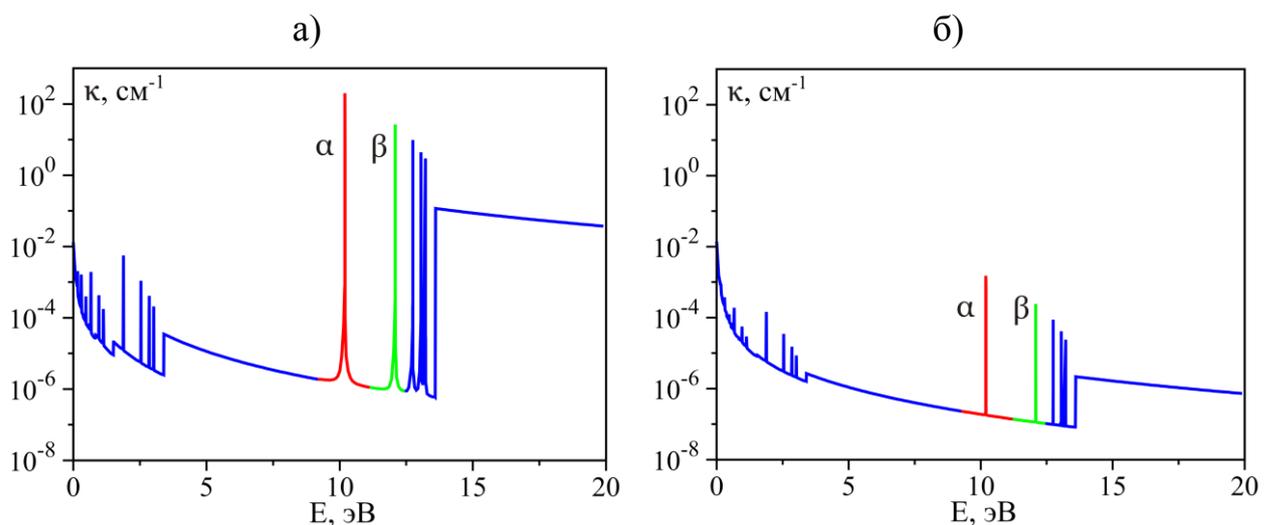


Рис. 4. Зависимость коэффициента поглощения от энергии излучения

для концентрации  $n = 3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$  и температуры: а)  $T = 1 \text{ эВ}$ , б)  $T = 5 \text{ эВ}$ .

$\alpha$  - и  $\beta$  -линии Лаймана выделены красным и зеленым цветом

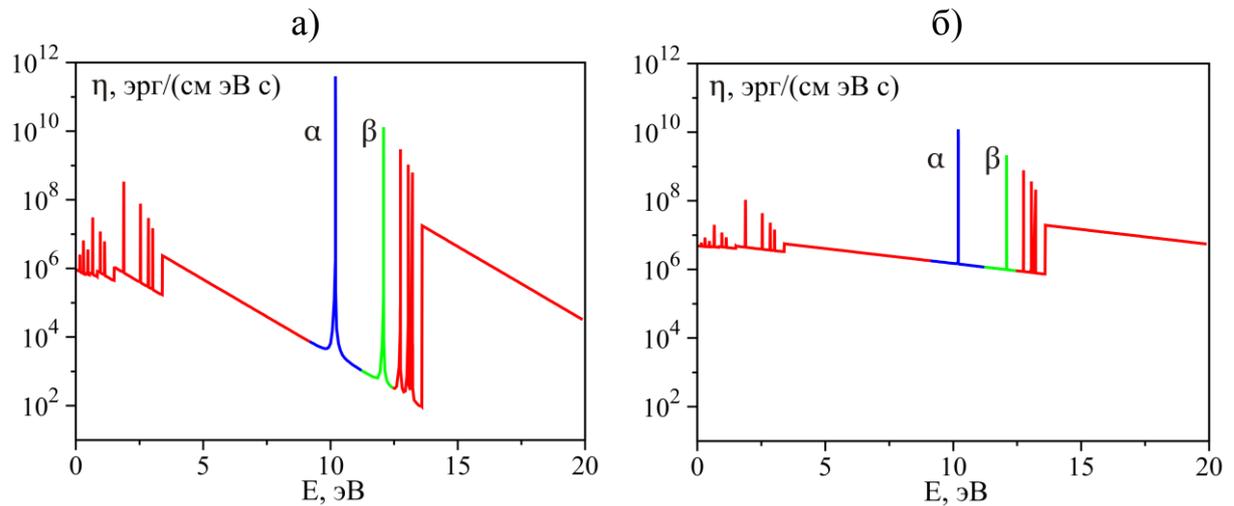


Рис. 5. Зависимость излучательной способности от энергии излучения

для концентрации  $n = 3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$  и температуры: а)  $T = 1 \text{ эВ}$ , б)  $T = 5 \text{ эВ}$ .

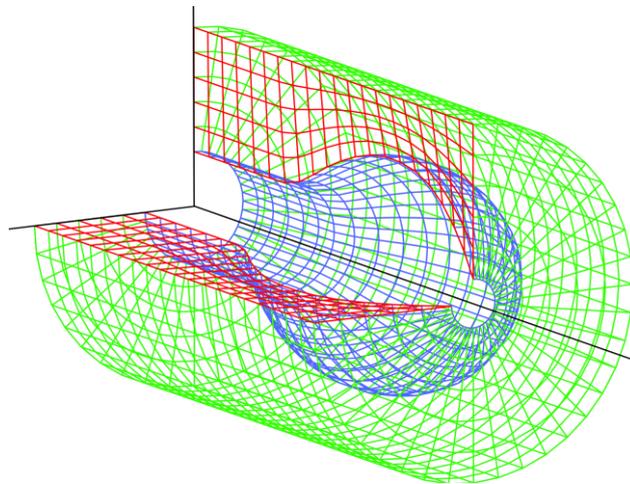
$\alpha$  - и  $\beta$ -линии Лаймана выделены синим и зеленым цветом

Коэффициенты поглощения и излучательной способности, представленные на рис. 4 и 5, рассчитаны в предположении равновесной заселенности уровней атома водорода с учетом (1.2) и (1.11) для концентрации среды  $n = 3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$  и двух значений температуры  $T = 1 \text{ эВ}$  и  $T = 5 \text{ эВ}$ . Значения коэффициентов соответствуют трем группам процессов перехода электрона из одного энергетического состояния в другое, включая связанно-связанные процессы, отвечающие поглощению и излучению в линиях. В данных примерах коэффициент поглощения построен с учетом 6 уровней энергии. Видно, что каждый из рассмотренных процессов перехода электрона из одного энергетического состояния в другое вносит свой отдельный вклад в излучение и поглощение. Приведенные зависимости демонстрируют также, что с увеличением температуры коэффициент поглощения уменьшается, так как становится меньше количество поглотителей и увеличивается число возбужденных атомов.

### 1.5. О численном решении уравнения переноса излучения

В соответствии с уравнениями (1.6) и (1.8) задачу о переносе излучения в потоках ионизирующегося газа и плазмы следует решать в трехмерной

постановке для нахождения поля излучения в канале плазменного ускорителя с осесимметричным течением. Сетка для 3D задачи о переносе излучения представлена на рис. 6 и получена поворотом исходной сетки (рис. 3) на 360 градусов вокруг оси канала с заданным шагом. В проведенных расчетах использованы разные шаги по азимутальному углу в цилиндрической системе координат. Расчеты, в том числе с шагом 3 и 6 градусов по азимуту, продемонстрировали сходимость решения. Для генерации сеток можно также использовать имеющиеся вычислительные коды, например, код Gmsh [93].



*Рис. 6.* Элементы пространственной расчетной сетки в 3D модели переноса излучения

Разработанная 3D модель переноса излучения позволяет использовать пространственные ячейки сеток с любыми гранями, включая четырехугольные и треугольные.

Интенсивность излучения должна быть определена по разным направлениям для дальнейшего вычисления интегральных значений плотности и потока энергии излучения (1.6) в любом узле или ячейки координатной сетки. С этой целью для каждого узла координатной сетки строится дополнительная угловая сетка по азимутальному углу  $\varphi$  и полярному углу  $\theta$  в соответствии с рис. 7. Разбиение телесного угла  $\Omega = 4\pi$  на элементы угловой сетки производится методом Карлсона [96],

обеспечивающим равномерное распределение лучей по направлениям. Данный метод использован в ряде работ (см., например, [97-99]). В представленной 3D модели угловые сетки связаны со всеми узлами координатной сетки. Для каждого узла координатной сетки в расчетах, как правило, используется 440 лучей угловой сетки для полного телесного угла  $\Omega = 4\pi$ . Исходной точкой для лучей может служить центр ячеек или центр граней. В упрощенных моделях, не требующих высокой точности решения задачи о переносе излучения, угловые сетки могут быть привязаны лишь к отдельным узлам координатной сеткой.

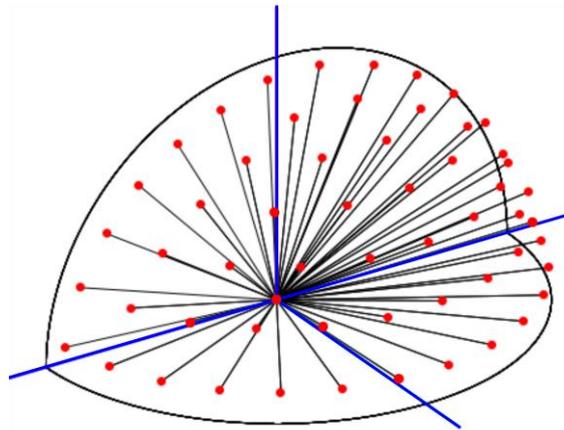


Рис. 7. Угловая сетка и направление лучей в телесном угле

В соответствии с методом длинных характеристик осуществляется трассировка лучей для того, чтобы определить точки их пересечения с гранями ячеек трехмерной сетки и место падения лучей на одну из границ трехмерной расчетной области. На рис. 8 схематично изображена трассировка луча (красная линия) на элементах координатной сетки. Точки, выделенные синим цветом, отвечают пересечениям луча с гранями ячеек координатной сетки. Для трассировки использовался следующий алгоритм. Выбрав начальную точку трассировки  $\vec{r}_0$  и направление луча  $\vec{\Omega}$ , осуществляем последовательные сдвиги в направлении луча  $\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \varepsilon \cdot n \cdot \vec{\Omega}$ , где  $\varepsilon$  – малая величина по сравнению с характерным размером ячеек и  $\vec{r}_{n=1} = \vec{r}_0$ . После каждого сдвига определяется индекс

ячейки, которой принадлежит точка  $\vec{r}_{n+1}$ . Для данной ячейки проверяем условие пересечения луча с ее гранями. При наличии пересечения определяем индекс грани, пересекаемой лучом, и координату точки пересечения данного луча с гранью. Соответственно, находим индекс следующей ячейки, соседствующей на определенной грани с предшествующей ячейкой. Процесс последовательного сдвига вдоль выбранного луча повторяется вплоть до границы расчетной области, где процесс трассировки луча завершается. Если луч проходит через ребро ячейки и отдельная точка  $\vec{r}_{n+1}^*$  принадлежит ребру или совпадает с местом пересечения ребер, то во избежание неопределенности и сбоя программы производится незначительное смещение луча от данной точки  $\vec{r}_{n+1}^*$ . Малое смещение проводится в направлении центра любой из прилежащих граней по аналогии с работой [97]. В процессе расчетов нестационарной МГД задачи с учетом переноса излучения и переходе на следующий временной шаг сохраняются первоначально определенные индексы ячеек, через которые проходят лучи заданной угловой сетки, длина пути внутри ячеек для каждого из лучей, а также индексы граней и координаты точек пересечения лучей с гранями.

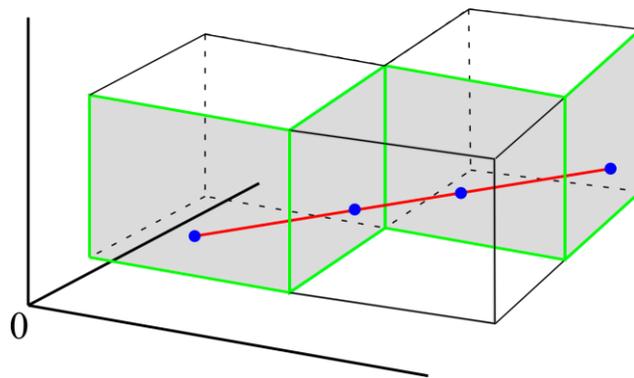


Рис. 8. Трассировка луча сквозь неравномерную 3D сетку

Уравнение переноса излучения (1.7) или (1.8), которое необходимо решать вдоль любого заданного луча и для соответствующей частоты или

энергии фотона, содержит коэффициент поглощения  $\kappa_\nu$  и излучательную способность среды  $\eta_\nu$ , которые зависят, в том числе, от температуры и плотности среды, меняющиеся вдоль луча. В рамках упрощенного алгоритма можно считать, что в пределах отдельно взятой ячейки коэффициент поглощения и излучательная способность постоянны. Такой подход схематично иллюстрирует рис. 9а, на котором представлен плоский аналог кубической ячейки. В этом случае коэффициенты  $\kappa_\nu$  и  $\eta_\nu$  вычисляются по среднему значению плотности и температуры в центре ячейки. При этом информация о пересечении луча с гранями не используется. Если же коэффициенты  $\kappa_\nu$  и  $\eta_\nu$  определены в узлах сетки для соответствующих значений плотности и температуры, то информация о пересечении луча с гранями используется для интерполяции узловых значений  $\kappa_\nu$  и  $\eta_\nu$  в точки пересечения в соответствии с рис. 9б. Данный подход является более аккуратным, но требует больше расчетного времени.

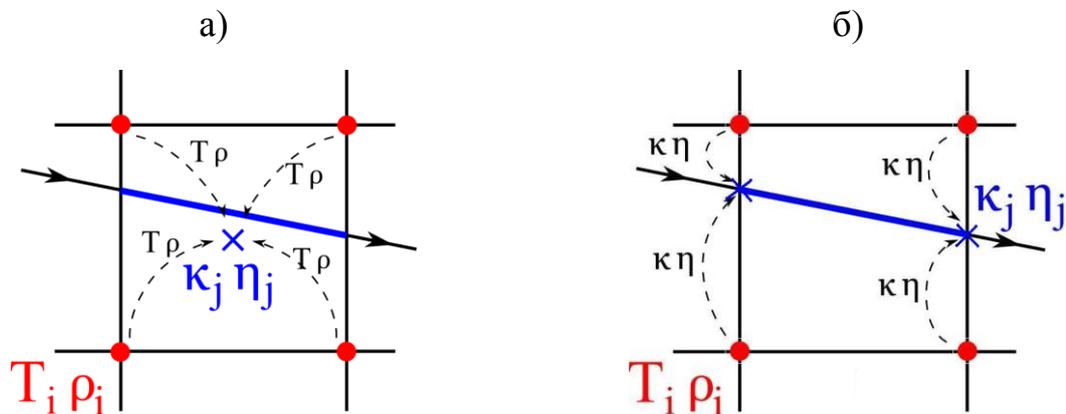


Рис. 9. Варианты интерполяции значений термодинамических переменных и вычисления коэффициентов переноса излучения.

Пунктирные линии показывают процедуру интерполяции:

а) в центр ячеек, б) в точки пересечения лучей с гранями ячеек

Один из немаловажных факторов в расчетах переноса излучения связан с необходимостью учета теневых областей. На рис. 10 схематично в проекции на плоскость  $z = const$  представлено образование теневой области, заштрихованной на рисунке и возникающей в процессе трассировки

расчетной области лучами или прямыми с черными стрелками для произвольно выбранной точки. Синяя стрелка демонстрирует ход отдельного луча через область канала для последующего анализа спектра в данном направлении и возможного в перспективе сопоставления с экспериментальными данными, которые могут быть получены с помощью спектрометра на установках КСПУ и МПК.

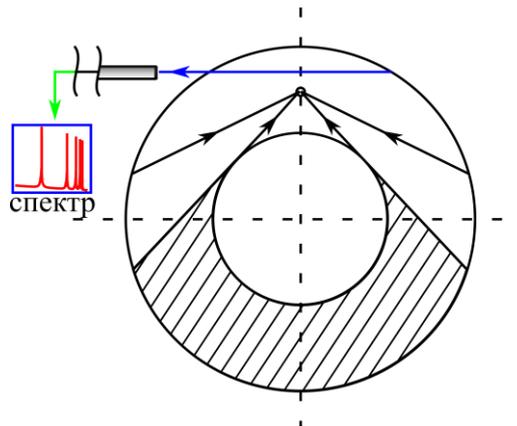


Рис. 10. Образование теневых областей в модели переноса излучения

Для решения уравнения переноса излучения можно воспользоваться методом характеристик [45], который позволяет в деталях учесть геометрию канала ускорителя. Рассмотрим перенос излучения внутри однородной среды. В этом случае коэффициент поглощения  $\kappa$  и излучательная способность  $\eta$  являются константами вдоль направления  $\Omega$  на характеристической прямой  $s$ . Здесь и далее символ  $\nu$  принадлежности соответствующему участку спектра не используется. Уравнение переноса излучения вдоль выбранного направления имеет вид:

$$\frac{\partial I(s)}{\partial s} = \eta - \kappa I(s).$$

Зная интенсивность излучения  $I_0$  на границе, найдем решение:

$$I(s) = I_0 \cdot e^{-\kappa(s-s_0)} + \frac{\eta}{\kappa} \left( 1 - e^{-\kappa(s-s_0)} \right),$$

где  $s$  – координата вдоль характеристики.

Если характеристика последовательно проходит области с разными оптическими свойствами, то необходима сшивка решений на границе областей. В итоге получим решение на характеристике, проходящей через произвольное количество однородных областей с заданными коэффициентами поглощения  $\kappa_j$  и излучательными способностями  $\eta_j$ :

$$I_{0i}(s) = I_0 \cdot e^{-\tau_{0i}(s)} + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\eta_k}{\kappa_k} \left(1 - e^{-\tau_{kk}}\right) \cdot e^{-\tau_{k+1i}(s)} + \frac{\eta_i}{\kappa_i} \left(1 - e^{-\tau_{ii}(s)}\right) \quad (1.12)$$

Здесь  $\tau_{ji}(s) = \sum_{k=j}^{i-1} \kappa_k \cdot \Delta s_k + \kappa_i \cdot (s - s_{i-1})$  – оптическая длина пути фотона

вдоль характеристики от границы до области с индексом  $i$ , а  $\tau_{jj} = \kappa_j \Delta s_j$ .

По-прежнему переменная  $s$  играет роль координаты вдоль луча. В данном соотношении каждое из слагаемых определяет вклад в интенсивность излучения, приходящего от границы и тех областей, через которые проходит характеристика. Формула (1.12) используется в расчетах как решение на характеристиках. В результате интенсивность вычисляется для каждого узла координатной сетки, для каждого луча угловой сетки и для всех участков спектра. Расчеты проведены при условии  $I_0 = 0$  для лучей, идущих от стенок канала, несмотря на то, что нагретые стенки могут служить дополнительным источником излучения. Для оценки влияния излучения, приходящего от стенок канала, были использованы данные работы [49] о степени черноты разных материалов, включая медь. Расчеты с учетом данного фактора показали, что даже в случае завышения температуры стенок излучение электродов не оказывает существенного влияния на интенсивность излучения внутри канала.

## 1.6. Расчет двумерного течения ионизирующегося газа

Следует обратить внимание на условия проведения физического эксперимента и физические параметры задачи, используемые в численной модели. В экспериментах обеспечивается непрерывная подача газа на входе в

ускоритель с определенным значением давления  $P_o$ , которое по порядку величины равно  $P_o \approx 10 \text{ торр}$  в небольших установках и ускорителях первой ступени КСПУ, обеспечивающих ионизацию и предварительное ускорение плазмы [1-14]. Представленные далее результаты численного исследования переноса излучения показали, что излучение, идущее от формирующегося фронта ионизации, в определенном диапазоне частот может глубоко проникать в объем поступающего газа. Поэтому его температура  $T_o$  на входе может отличаться от комнатной температуры, и существует определенный произвол в задании параметра  $T_o$ . В то же время задание концентрации газа  $n_o$  на входе в канал должно соответствовать характерному значению давления газа  $P_o = k_B n_o T_o$ .

Изменение разрядного тока в плазменном ускорителе  $J_p$  в результате разряда конденсаторной батареи определяется соответствующей осциллограммой тока. Ранее проведенные исследования показали, что плазмодинамические процессы не оказывают существенного влияния на протекание тока в электрической цепи. В то же время параметры потока меняются в процессе разряда в зависимости от значений разрядного тока в электрической цепи. Характерное время  $t_o = L/V_o$  соответствует времени пролета частиц в канале ускорителя. Это пролетное время много меньше длительности разряда конденсаторной батареи в плазменных ускорителях, которое составляет в данном случае более сотни микросекунд и может достигать до миллисекунд. Поэтому исследование фундаментальных свойств потоков и выявление основных закономерностей течений ионизирующегося газа и плазмы основано, как правило, на постановке задачи с заданным фиксированным значением разрядного тока без учета процессов в электрической цепи. При этом характерное время расчета МГД задачи методом установления с выходом на стационарное или квазистационарное решение соответствует величине  $t_o$  или в безразмерных переменных  $t = 1$ .

Это время установления также много меньше длительности разряда. Соответственно в представленных далее расчетах будем полагать, что  $J_p = const$ . К тому же существуют установки с аналогичным принципом действия, в которых ток в электрической цепи может быть постоянным на протяжении длительного промежутка времени.

В численной модели ряд параметров определяет пространственную сетку для расчета двумерных осесимметричных течений, а также задает 3D сетку для решения задачи переноса излучения. При численном интегрировании системы (1.1) осуществляется отображение исходной криволинейной области на единичный квадрат с помощью соотношения (1.5). Основная часть расчетов течений ионизирующегося газа, в том числе представленный далее вариант, была проведена на сетке (51x101), равномерной соответственно по направлениям  $y$  и  $z$ . Для расчета гиперболической части системы МГД уравнений используется рассмотренный выше явный метод, и шаг по времени ограничен условием Куранта. Большая часть расчетов 3D задачи о переносе излучения выполнена для трехмерной сетки (см. рис. 6), генерация которой осуществлялась поворотом исходной сетки, схематично изображенной на рис. 3 с шагом 6 градусов по азимутальному углу.

На рис. 11 и 12 представлен вариант расчета квазистационарного течения ионизирующегося газа для следующих исходных параметров задачи  $n_o = 4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_o = 750 \text{ }^\circ\text{K}$ ,  $J_p = 50 \text{ kA}$ ,  $L = 10 \text{ см}$ , которым соответствуют безразмерные параметры:  $\beta = 0.12$ ,  $r_o = 0.33$  ( $r_o = R_o / L$ ),  $\sigma_{10} = 553.89$  и  $\sigma_{20} = 0.03$ . На входе в канале плазма подается с заданным распределением плотности и температуры, в данном случае  $\rho(r) = 1$  и  $T(r) = 1$  при  $z = 0$ . Распределению температуры на рис. 11 соответствует цветная картинка, на фоне которой изображены линии уровня функции  $r H_\phi = const$ , отвечающие току в плазме. На входе имеем  $r H_\phi = r_o$ .

Направление стрелок для плазменного тока на рисунке соответствует выбранной полярности электродов, для которой внешний электрод является анодом. На рис. 12 изображено распределение плотности в канале и векторное поле скоростей. Масштаб векторов определяется модулем вектора  $V_* = 10 \cdot V_o$ , указанного на рисунке. Здесь единица скорости равна  $V_o = 1.03 \cdot 10^6 \text{ см/с}$  для указанных выше исходных параметров.

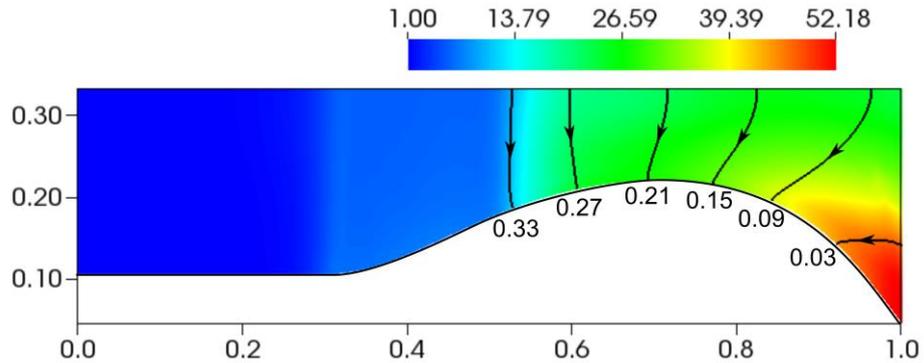


Рис. 11. Распределение температуры и электрический ток (линии уровня функции  $r H_\varphi = const$ ) в потоке ионизирующегося газа

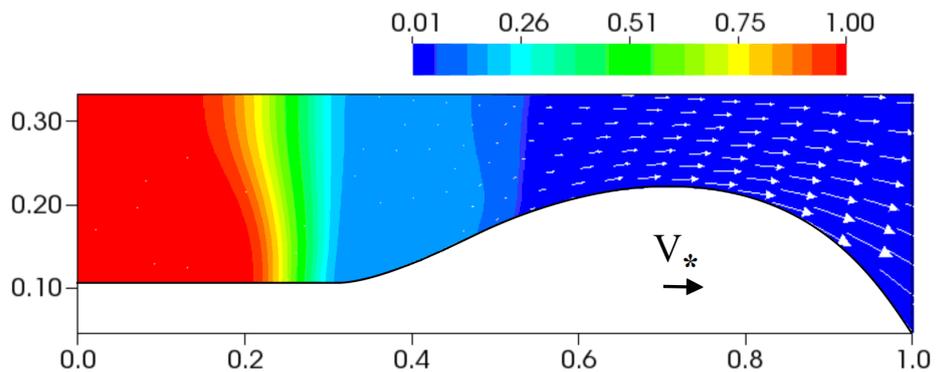


Рис. 12. Распределение плотности и векторное поле скоростей  $\mathbf{V}$  в потоке ионизирующегося газа

На рис. 13 представлены соответствующие одномерные графики зависимости плотности, степени ионизации и скорости потока, газодинамической скорости звука и скорости сигнала (1.4) вдоль средней координатной линии  $y = 0.5$ , определяемой соотношением (1.5).

Видно, что в сужающейся части канала формируется фронт ионизации, в окрестности которого происходит резкое увеличение степени ионизации и температуры, а также наблюдается переход скорости потока через газодинамическую скорость звука. За фронтом благодаря силе Ампера происходит резкое ускорение плазмы, сопровождающееся ее разрежением. Ток в основном протекает в объеме ионизованной среды.

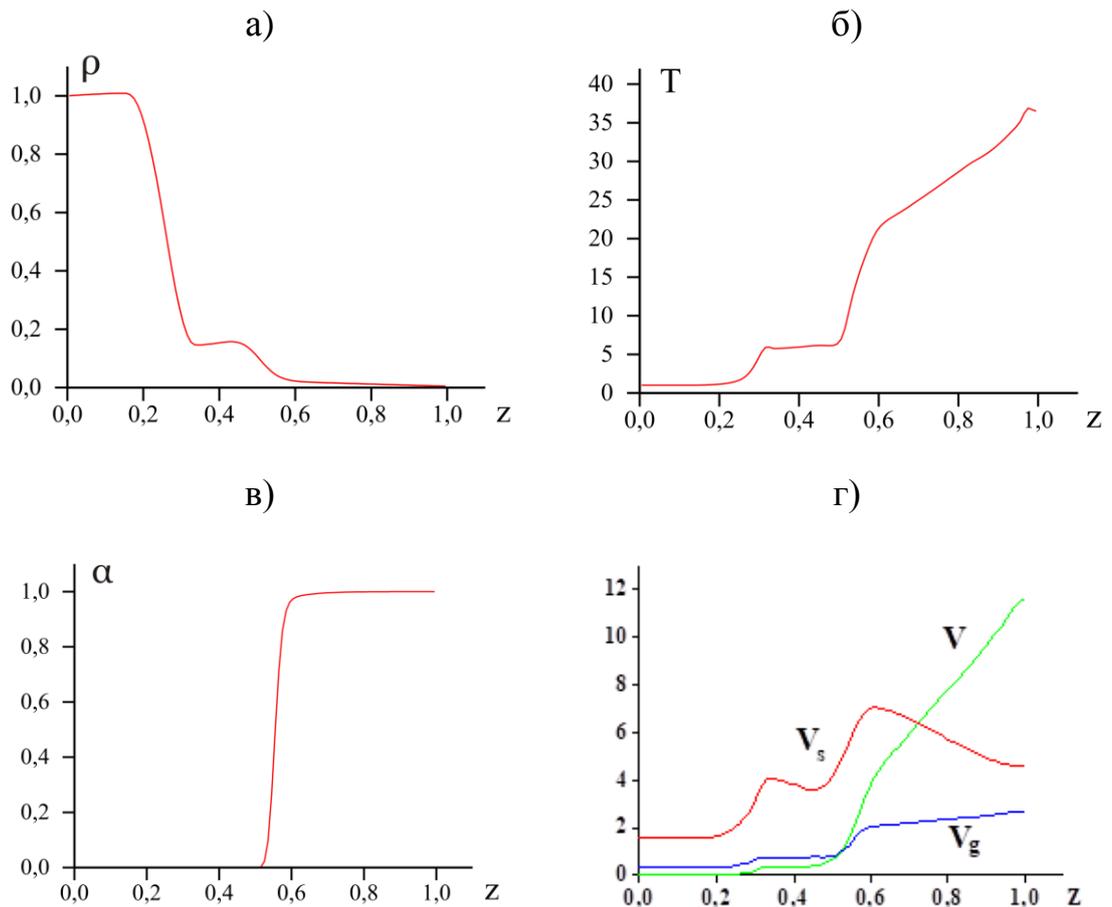


Рис. 13. Распределения переменных вдоль средней координатной линии:

а) плотность  $\rho$ ; б) температура  $T$ ; в) степень ионизации  $\alpha$ ; г) скорость потока  $V$ , газодинамическая скорость звука  $V_g$  и скорость сигнала  $V_s$

В процессе ускорения происходит переход скорости потока через скорость сигнала [1]. В соответствии с теорией этот переход наблюдается в наиболее узкой части канала (см. рис. 13б). Рис. 11 и 12 показывают также, что процессы в основном происходят в продольном направлении. Это подтверждает применимость ранее использованной МГД модели в рамках

квазиодномерного приближения. Рисунки 12 и 13 соответствуют расчету на сетке  $51 \times 101$ . Расчеты на более крупных сетках, например,  $101 \times 201$ , дают практически совпадающие результаты.

Параметры плазмы на выходе из ускорителя естественно зависят от параметров газа, подаваемого на входе в канал, и разрядного тока в системе. С увеличением разрядного тока, а также при уменьшении концентрации газа на входе и соответствующем уменьшении расхода рабочего вещества, возрастает доля энергии, идущая на нагрев и ускорение плазмы, что приводит к увеличению температуры и скорости плазмы на выходе.

### 1.7. Поле излучения в потоке ионизирующегося газа

Решение задачи о переносе излучения позволяет получить более полное представление о динамике потоков излучающей среды, характере распространения излучения, отвечающего той или иной части спектра. Кроме того, решение этой задачи открывает новые перспективы для проведения комплексных исследований и сопоставления с экспериментальными данными одновременно по локальным макроскопическим параметрам потоков и спектральным характеристикам излучения (см., например, [75]).

Плотности энергии излучения  $U$  и плотности потока энергии излучения  $W$  отвечают интегральные значения интенсивности излучения  $I_\nu(\mathbf{r}, \Omega)$ . Интегралы в соотношениях (1.6) берутся по телесному углу и по спектру. Поэтому естественно сначала рассмотреть особенности в распределении интенсивности излучения по разным направлениям для отдельных участков спектра. С этой целью в таблице 1 представлены характерные диаграммы направленности излучения в плоскости сечения канала  $(r, z)$  для трех точек, отмеченных на рис. 14. Точка  $A_1$  расположена вдали от фронта ионизации в поступающем потоке слабо ионизованного газа. В данную область может проникнуть излучение, идущее от фронта, в определенном диапазоне частот с длиной свободного пробега фотона, соизмеримой с размерами канала. Точки  $A_2$  и  $A_3$  расположены соответственно слева и справа от фронта.

На рис. 14 представлена цветная картина, отвечающая распределению плотности энергии излучения  $U$ , на фоне которой черными стрелками изображено векторное поле плотности потока энергии излучения  $\mathbf{W}$  в потоке ионизирующегося газа. Данное поле излучения соответствует распределениям плотности и температуры, изображенным на рис. 11 и 12. Расчет переноса излучения проведен в условиях локального термодинамического равновесия, когда населенности состояний связаны уравнением Саха (1.2) и формулой Больцмана (1.11). На рисунке дано распределение безразмерной величины  $\tilde{U}$ , которая связана с плотностью энергии излучения с помощью следующего соотношения  $\tilde{U} = 10^4 \cdot c \cdot U / W_0$ , где  $c$  – скорость света, а единица плотности потока энергии излучения равна  $W_0 = V_0 H_0^2 / 4\pi = 5.43 \cdot 10^{11}$  эрг / см<sup>2</sup> сек для указанных исходных параметров  $n_0$ ,  $T_0$ ,  $J_p$  и  $L$ . Масштаб векторов  $\mathbf{W}$  определяется модулем вектора  $W_* = 2 \cdot 10^{-4} \cdot W_0$ , который указан на рисунке.

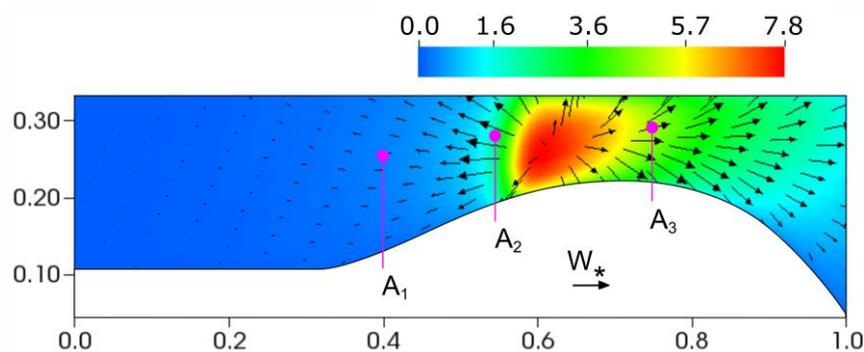


Рис. 14. Распределение плотности энергии излучения и векторное поле плотности потока энергии излучения в канале плазменного ускорителя

Хорошо видно, что в окрестности фронта ионизации расположена область с относительно высокими значениями плотности энергии излучения  $U$ . Этой области соответствует красный цвет на рис. 14. Поток энергии излучения  $\mathbf{W}$  направлен во все стороны от данной области, в том числе в направлении набегающего потока слабоионизованного газа, что, естественно, приводит к его предварительной ионизации непосредственно перед фронтом, а также в глубине объема поступающего газа.

Диаграммы показывают интенсивность излучения в разных направлениях в трех точках  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  и для трех участков спектра:  $h\nu_1 = 8 \text{ эВ}$ ,  $h\nu_2 = 10.2 \text{ эВ}$  и  $h\nu_3 = 13.6 \text{ эВ}$ . Масштаб векторов для каждой диаграммы в таблице 1 определен длиной характерного вектора, приведенного сверху диаграмм. Над всеми характерными векторами, изображенными черным цветом, указаны соответствующие значения интенсивности излучения  $I_\nu$ , отнесенной к единичному интервалу энергии фотонов, выраженной в эВ. Размерность интенсивности для всех значений, приведенных в таблице, равна  $[I_\nu] = \text{эрг} / (\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{эВ})$ .

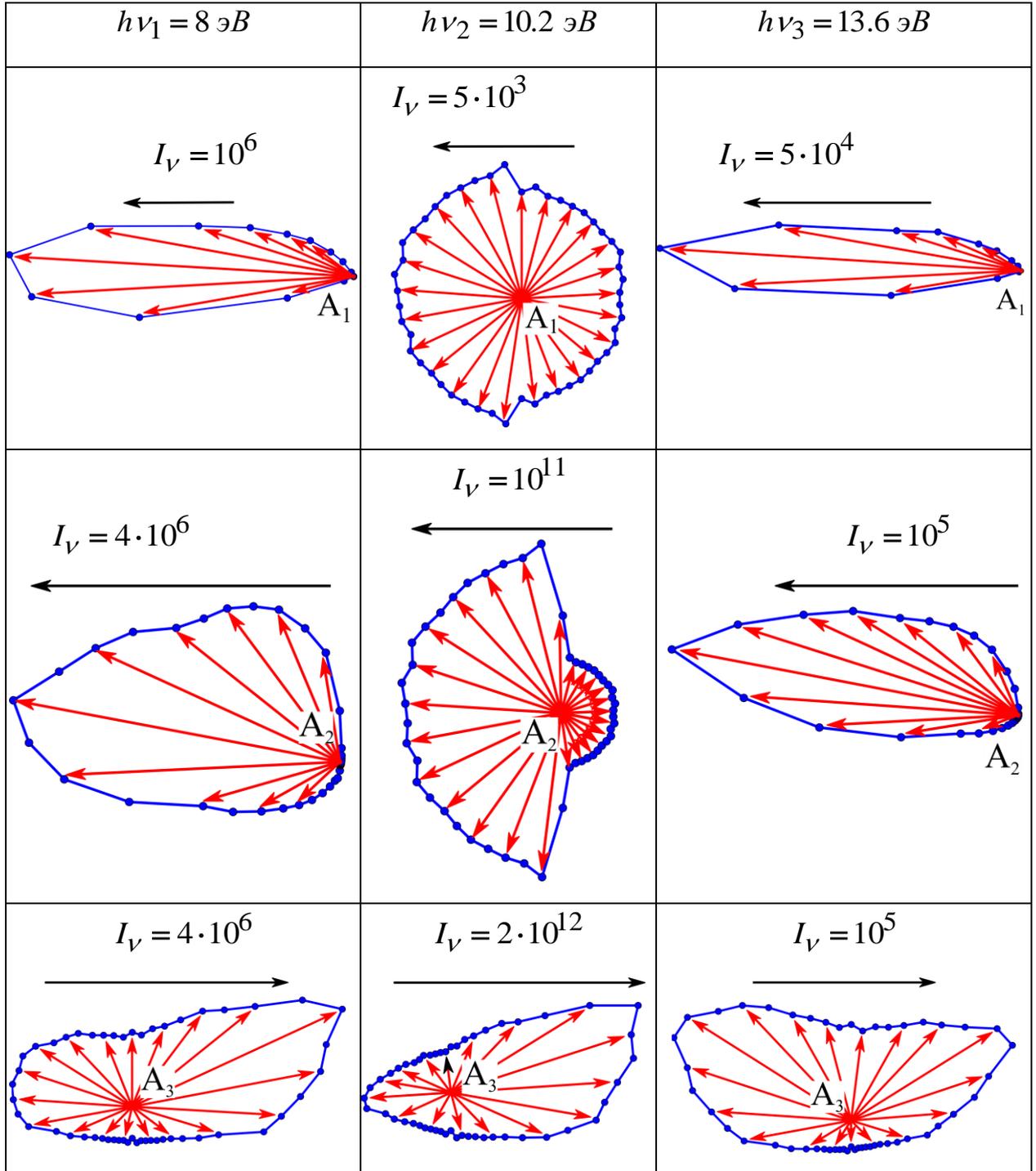
Спектральная группа с энергией 10.2 эВ отвечает центру  $\alpha$ -линии Лаймана. Группа с энергией 13.6 эВ соответствует участку спектра рекомбинационного излучения. Результаты демонстрируют, в частности, зависимость проникающей способности излучения от величины коэффициента поглощения для разных спектральных групп. Спектральный коэффициент поглощения  $\kappa_\nu$  обратно пропорционален длине свободного пробега фотона  $l_\nu \sim 1/\kappa_\nu$ . Фотоны, соответствующие рекомбинационной части спектра, имеют длину свободного пробега, намного превышающую размеры канала. Поэтому влияние излучения от фронта ионизации и других областей для энергии фотонов  $h\nu_3 = 13.6 \text{ эВ}$  наблюдается во всех точка канала, кроме теневых областей. В то же время фотоны, отвечающие центрам линий, имеют ограниченную проникающую способность, и излучение, отвечающее линейчатой части спектра, в большей степени определяется локальными параметрами плазмы и более изотропно.

В соответствии с экспериментами наиболее яркое свечение наблюдается в окрестности фронта ионизации. Излучение, идущее от фронта, в основном определяет направленность излучения в различных точках канала в широком диапазоне энергии фотонов. Это хорошо видно на диаграммах, отвечающих трем рассмотренным точкам, для энергий  $h\nu_1 = 8 \text{ эВ}$  и  $h\nu_3 = 13.6 \text{ эВ}$ . Правда,

для точки  $A_3$  в среде с высокой степенью ионизации к излучению с энергией  $h\nu_3 = 13.6 \text{ эВ}$ , идущему от фронта, добавляется значительный поток фотонов из приосевой области на выходе из канала (см. рис. 11), где среда является значительно нагретой и разреженной.

Таблица 1

**Диаграммы направленности излучения**



Для энергии  $h\nu_2 = 10.2 \text{ эВ}$ , отвечающей  $\alpha$ -линии Лаймана, длина свободного пробега фотонов является относительно малой величиной. Это вносит определенные коррективы в направленность линейчатого излучения (см. 2-й столбец в таблице 1). В точке  $A_1$ , расположенной вдали от фронта ионизации в потоке слабо ионизованного газа, излучение практически изотропно. Однако в точках  $A_2$  и  $A_3$ , расположенных соответственно слева и справа от фронта в областях с относительно высокой степенью ионизации, значительный вклад вносит излучение в линиях, идущее от фронта. Значение интенсивности в точках  $A_2$  и  $A_3$  для энергии фотонов, отвечающей  $\alpha$ -линии Лаймана, составляет  $I_\nu = 10^{11} \div 10^{12} \text{ эрг} / (\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{эВ})$  и существенно превышает значения интенсивности для других участков спектра.

Рис. 15 иллюстрирует одномерные распределения плотности энергии излучения и плотности потока энергии излучения вдоль средней координатной линии  $y = 0.5$  в соответствии с соотношением (1.5). Связь между безразмерной величиной  $\tilde{U}$  на рис. 15а и плотностью энергии излучения  $U$  указана выше. Безразмерная величина на рис. 15б, отвечающая продольной компоненте плотности потока энергии излучения  $W_z$ , определяется следующим образом:  $\tilde{W}_z = 10^4 \cdot W_z / W_0$ . Представленные графики отвечают интегралам (1.6) для разных участков спектра. Черные кривые соответствуют интегралам по всему спектру, красные кривые – интегралам по узкому участку спектра для  $\alpha$ -линии Лаймана, зеленые кривые – для  $\beta$ -линии Лаймана, синие кривые – интегралы по рекомбинационному спектру без учета линейчатого спектра.

Приведенные зависимости показывают, что излучение в линиях вносит существенный вклад в общее поле излучения в потоке ионизирующегося газа. Плотность энергии излучения  $U$  имеет максимальные значения в

окрестности фронта ионизации, а продольная компонента потока энергии излучения  $W_z$  меняет свое направление при переходе через фронт.

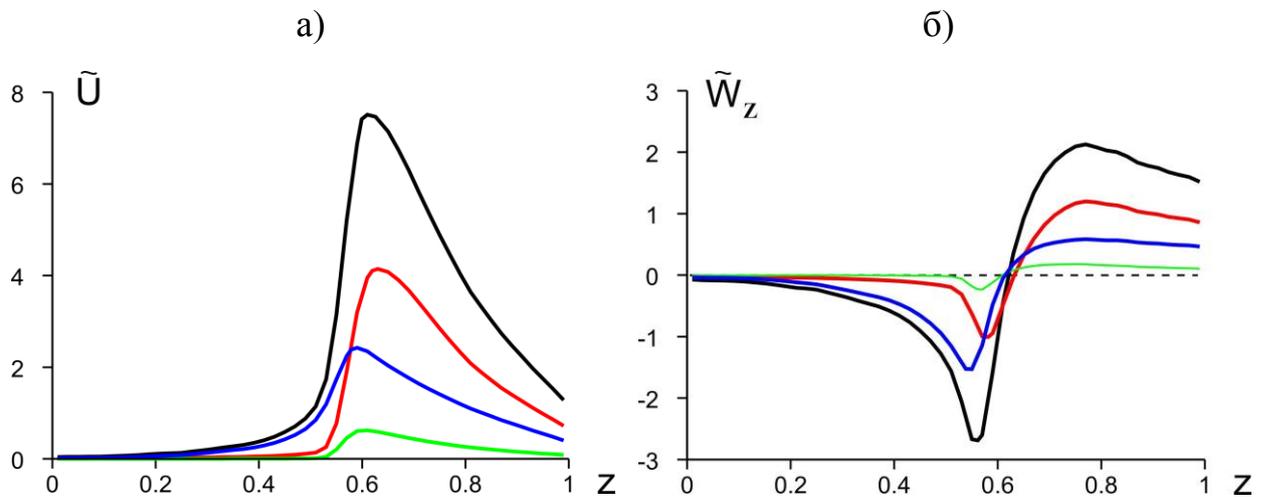


Рис. 15. Распределения а) плотности энергии излучения и б) продольной составляющей плотности потока энергии излучения вдоль средней координатной линии для всего спектра (черные кривые),  $\alpha$ -линии Лаймана (красные кривые),  $\beta$ -линии Лаймана (зеленые кривые) и рекомбинационного спектра (синие кривые)

Важным элементом комплексных исследований является сопоставление экспериментальных и расчетных данных, включая спектроскопию потоков в канале плазменных ускорителей. На рис. 16 в направлении радиальных лучей на выходе из канала КСПУ, выходящих из объема плазмы в направлении детектора, представлены спектры излучения в узком диапазоне частот и энергий фотона, отвечающих серии Бальмера для водородной плазмы. Данные спектры излучения получены в экспериментах и в результате расчетов [131]. Интенсивность излучения в эксперименте на рис. 16а выражена в относительных единицах. В расчетах интенсивность излучения на рис. 16б имеет размерность  $I_V$  [эрг / (см<sup>2</sup> · с · эВ)]. Полученные результаты демонстрирует хорошее совпадение экспериментальных и расчетных результатов для спектров излучения водородной плазмы. Соответственно результаты расчетов спектров излучения можно использовать в дальнейшем для сопоставления с экспериментальными

данными, полученными на основе спектроскопии потоков в каналах КСПУ. Известно, что по уширению спектральных линий можно определить концентрацию, а высота линий связана с температурой среды. Поэтому дальнейшие исследования будут способствовать проведению комплексного анализа локальных термодинамических параметров и данных спектроскопии, что открывает новые возможности в исследовании динамики потоков ионизирующегося газа и плазмы внутри канала КСПУ, в том числе с использованием спектрометра.

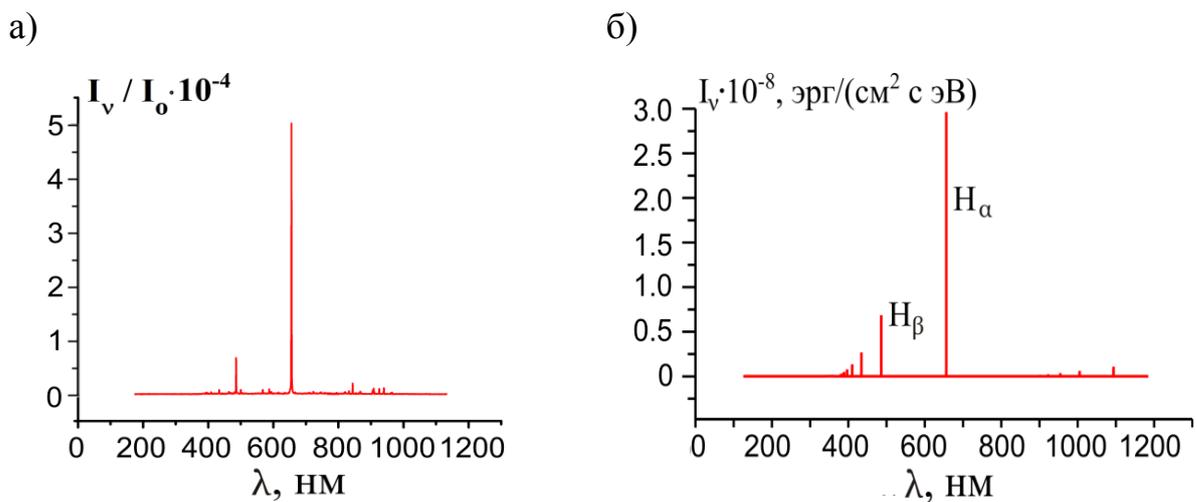


Рис. 16. Спектры излучения серии Бальмера для водородной плазмы в направлении радиального луча на выходе из канала КСПУ, отвечающие а) экспериментам и б) расчетам

Проведена верификация и проверка качества разработанной численной модели переноса излучения в потоках ионизирующегося газа в канале плазменного ускорителя. В частности, на рис. 17 для различных параметров численной модели вдоль средней координатной линии представлены интегральные характеристики излучения: плотность энергии излучения и продольная составляющая плотности потока энергии излучения, отвечающие всему спектру излучения. Базовый расчет, проведенный при 220 направлениях или лучах угловой сетки и 310 спектральных группах, представлен сплошными красными кривыми. Зеленые маркеры (звездочки) отвечают расчету при 220 лучах и 1149 спектральных группах. Синие

маркеры (квадраты) на рис. 17 соответствуют расчету при 420 лучах и 310 спектральных группах. В результате расчетов для различных параметров численной модели было показано, что увеличение числа лучей угловой сетки и количества спектральных групп приводит к сходимости численного решения задачи о переносе излучения в потоках ионизирующегося газа.

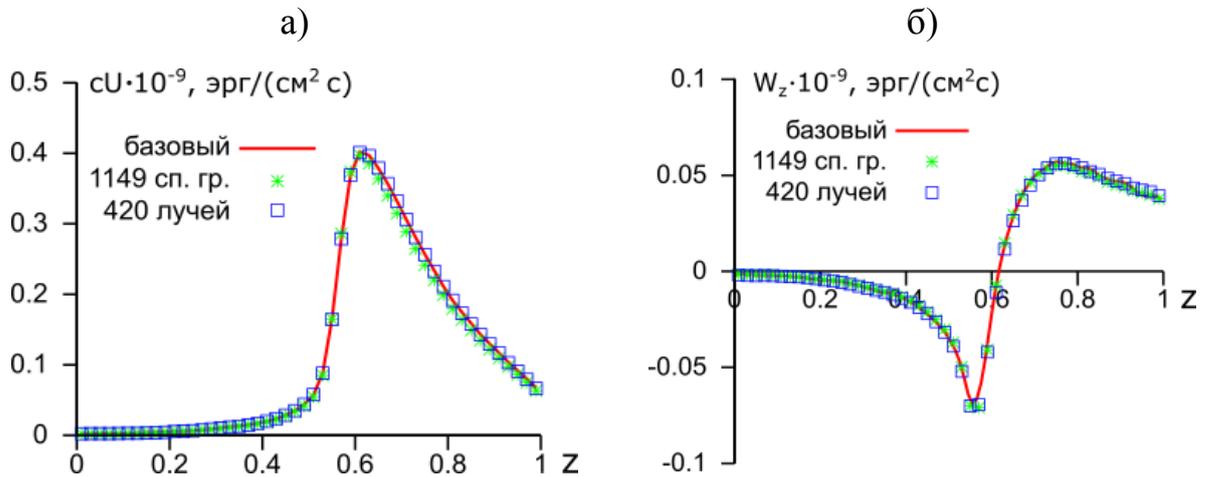


Рис. 17. Распределения а) плотности энергии излучения и б) продольной составляющей плотности потока энергии излучения вдоль средней координатной линии для всего спектра излучения и различных параметров численной модели. Красные кривые – базовый расчет (310 спектральных групп и 220 лучей угловой сетки); зеленые маркеры-звездочки – 1149 спектральных групп и 220 лучей; синие маркеры-квадраты – 310 спектральных групп и 420 лучей.

Таким образом, в первой главе представлена модифицированная модель радиационной магнитной газодинамики и результаты численных исследований процесса ионизации и переноса излучения в канале квазистационарного плазменного ускорителя в приближении локального термодинамического равновесия. МГД модель двумерных осесимметричных течений ионизирующегося газа и плазмы учитывает электропроводность и теплопроводность, а трехмерная модель переноса излучения включает основные механизмы излучения и поглощения. Впервые в деталях определено поле излучения, включая спектральные и интегральные характеристики излучения в потоках ионизирующегося газа в канале КСПУ.

## ГЛАВА 2

### МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ ИОНИЗУЮЩЕГОСЯ ГАЗА В КАНАЛЕ КСПУ С УЧЕТОМ КИНЕТИКИ ИОНИЗАЦИИ И РЕКОМБИНАЦИИ

В предыдущей главе использовалось предположение о локальном термодинамическом равновесии (ЛТР). Недостатком МГД модели течений ионизирующего газа в канале ускорителя в предположении ЛТР является то обстоятельство, что фронт ионизации в расчетах оказался слишком размытым. Узкий фронт ионизации в соответствии с экспериментальными данными удалось получить в рамках численной модели [37], основанной на системе МГД-уравнений для трехкомпонентной среды, дополненной уравнением кинетики ионизации и рекомбинации в рамках модифицированного диффузионного приближения [46]. Это приближение учитывает структуру энергетических уровней атома и позволило выявить неравновесную природу процессов на фронте, где наблюдается четко выраженное отклонение от ионизационно-рекомбинационного равновесия, что существенно изменило прежние представления. Исследование фундаментальных свойств потоков ионизирующего газа проводилось главным образом на основе стационарных, точнее квазистационарных течений, рассчитанных методом установления. Для стационарных течений разработаны также основы теории процессов на фронте ионизации [38].

Исследование потоков ионизирующего газа предполагает учет лучистого теплообмена (см., например, [44,45,47,76]). Влияние переноса излучения на процесс ионизации рассматривается с помощью моделей различного уровня сложности [32,124]. В простейшем случае используют лучистую теплопроводность, ответственную за лучистый теплоперенос в достаточно плотном слабоионизованном газе. Суммарный тепловой поток обусловлен также электронной и атомарной теплопроводностью. Приближение лучистой теплопроводности позволяет существенно упростить численное решение задачи, и оправдано тем, что среда является оптически

непрозрачной для излучения в линиях, которое вносит существенный вклад в энергию суммарного поля излучения. Оценки показывают, что в случае доплеровского уширения спектральных линий длина свободного пробега фотонов меньше характерных масштабов неоднородностей.

В настоящей работе представлены исследования нестационарного неравновесного процесса ионизации с учетом переноса излучения. Данная работа является необходимым этапом, который предшествует изучению процесса ионизации на основе согласованного решения МГД-уравнений, уравнения переноса излучения с различными механизмами уширения спектральных линий [53,55] и решения задачи о населенности состояний в рамках системы уравнений поуровневой кинетики [46].

Моделирование потока ионизирующегося газа осуществляется при наличии единственной азимутальной компоненты магнитного поля. В простейших плазменных ускорителях азимутальное поле генерируется электрическим током, проходящим вдоль внутреннего электрода. В свою очередь радиальный ток в плазме и азимутальное магнитное поле обеспечивают резкое ускорение плазмы на фронте ионизации за счет силы Ампера  $\frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}$ , где  $\mathbf{j}$  - ток в плазме, протекающий от одного электрода к другому, а  $H_\varphi$  - азимутальное магнитное поле. Процесс ионизации и предварительного ускорения плазмы происходит, в частности, в первой ступени двухступенчатого квазистационарного сильноточного плазменного ускорителя (КСПУ) [4, 5, 9-14], первая ступень которого состоит из нескольких небольших коаксиальных ускорителей.

## 2.1. Квазиодномерная модель течения

МГД модель течения ионизирующегося газа основана на уравнениях переноса трехкомпонентной среды [42], состоящей из атомов, ионов и электронов, а также уравнении индукции магнитного поля, которое следует

из уравнений Максвелла и обобщенного закона Ома в случае, если пренебречь инерцией электронов и током смещения.

Процесс ионизации исследуется для атомарного водорода. Массы атомов и ионов равны  $m_a = m_i = m$ . Согласно экспериментальным данным, на фронте ионизации температура возрастает до уровня 1–3 эВ. Концентрация газа, поступающего в канал, предполагается достаточно высокой  $n = 10^{16} - 10^{18} \text{ см}^{-3}$ . Учитывая параметры, среда является квазинейтральной  $n_i = n_e$  и можно считать, что скорости компонент плазмы равны между собой  $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_e = \mathbf{V}_a = \mathbf{V}$ . Кроме того, ограничимся случаем однотемпературной смеси  $T_a = T_i = T_e = T$ .

В результате несложных преобразований исходных уравнений переноса трехкомпонентной среды, уравнения индукции магнитного поля и с учетом сделанных выше предположений имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div}(n_e \mathbf{V}) = n_a n_e \beta_{ioniz} - n_e^2 n_i \alpha_{recom}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad \rho \frac{d \mathbf{V}}{d t} + \nabla P = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}, \quad (2.2)$$

$$\rho \frac{d \varepsilon}{d t} + P \text{div} \mathbf{V} = \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} - \text{div} \mathbf{q} - \text{div} \mathbf{W}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}) - c \text{rot} \frac{\mathbf{j}}{\sigma}, \quad (2.4)$$

$$P = P_a + P_i + P_e = (1 + \alpha)(c_P - c_V) \rho T, \quad \varepsilon = (1 + \alpha)c_V T + \varepsilon_I,$$

$$\mathbf{q} = -\kappa_{e \rightarrow a} \nabla T, \quad \alpha = \frac{n_e}{n_a + n_i}, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \mathbf{H}, \quad \frac{d}{d t} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla).$$

Здесь  $\rho = m n_{tot}$  - плотность тяжелых частиц,  $n_{tot} = n_a + n_i$  - суммарная концентрация тяжелых частиц,  $\alpha$  - степень ионизации,  $\mathbf{q}$  - тепловой поток,  $\kappa_{e \rightarrow a}$  - электрон-атомарная теплопроводность,  $P$  - суммарное давление,  $\mathbf{j}$  - ток в плазме,  $\mathbf{W}$  - плотность потока энергии излучения. В простейшем

случае величина  $\mathbf{W} = -\kappa_{\text{луч}} \nabla T$  определяется с помощью лучистой теплопроводности  $\kappa_{\text{луч}}$ . В уравнении для внутренней энергии (2.3) джоулев нагрев  $Q_{ei} = \mathbf{j}^2 / \sigma$  существенно превосходит тепло, выделяемое при трении с остальными компонентами. В понятие внутренней энергии на единицу массы  $\varepsilon$  включается дополнительное слагаемое  $\varepsilon_I = \zeta \frac{\alpha I}{m_i}$ , ответственное за потери энергии на ионизацию, где  $I = 13.6 \text{ эВ}$  - энергия ионизации атома водорода. Коэффициенты рекомбинации  $\alpha_{\text{recom}}$  и ионизации  $\beta_{\text{ioniz}}$  в (2.1) ответственны за образование и потери свободных электронов. Формулы для электропроводности и теплопроводности представлены в разделе 1.1.

В потоках ионизирующегося газа основной интерес представляет зависимость параметров течения от продольной координаты. Изменение переменных в поперечном или радиальном направлениях, как правило, несущественно. В этом случае можно ограничиться квазиодномерным приближением [3,18,20,37] и рассмотреть течение в узком канале заданного сечения. При этом искомые функции в уравнениях (2.1)-(2.4) усредняются по поперечному сечению канала. В результате приходим к уравнениям, которые содержат две независимые переменные: время  $t$  и координата  $z$  вдоль канала. В уравнениях участвует площадь поперечного сечения канала, равная  $f(z) = 2\pi r_o \Delta r(z)$ , где  $\Delta r(z)$  - зазор между электродами. Считаем, что средний характерный радиус канала  $r = r_o$  является постоянной величиной.

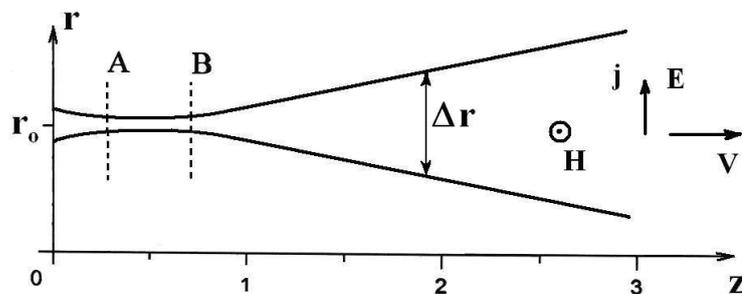


Рис. 18. Форма канала плазменного ускорителя в квазиодномерном приближении

Площадь поперечного сечения канала зададим следующим образом:  $f(z)=0.3-0.8z(1-z)$ , если  $z \leq 1$ , и  $f(z)=0.8z-0.5$ , если  $1 \leq z \leq z_{out} = 3$ . Канал представляет собой сопло единичной длины, надстроенное справа линейно расширяющимся раструбом в соответствии с рис. 18.

Рассмотрим течение ионизирующегося газа в коаксиальном канале. На рис. 18 изображена проекция коаксиальных электродов на плоскость  $(r, z)$ . Допустим, внешний электрод является катодом, а внутренний - анодом. Соответствующие направления тока, электрического поля и азимутального магнитного поля указаны на рисунке. Магнитное поле ортогонально направлению электрического тока и потоку. На входе в канал осуществляется подача газа. В наиболее узкой части канала (см. промежуток АВ на рис. 18) происходит ионизация газа с образованием узкого фронта. За фронтом ионизации плазма ускоряется вдоль оси канала за счет силы Ампера.

В квазиодномерном приближении процесс ионизации описывается с помощью модифицированных МГД-уравнений [18, 37], которые можно представить в безразмерной форме. Введем обозначения:  $V = V_z$  и  $H = H_\varphi$ . С учетом уравнения кинетики ионизации и рекомбинации (2.1) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e f}{\partial t} + \frac{\partial n_e V f}{\partial z} &= f \tilde{\Gamma}_e ; \\ \tilde{\Gamma}_e &= n_a n_e \tilde{\beta}_{ion} - n_e^2 n_i \tilde{\alpha}_{rec} + \tilde{\beta}_\omega n_a - n_e n_i \tilde{\alpha}_\omega ; \\ \frac{\partial \rho f}{\partial t} + \frac{\partial \rho V f}{\partial z} &= 0 ; \quad \rho = n_a + n_i ; \\ \frac{\partial \rho V f}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V f) V}{\partial z} &= -f \frac{\partial}{\partial z} \left( P + \frac{H^2}{2} \right) ; \quad P = \frac{\beta}{2} (1 + \alpha) \rho T ; \\ \frac{\partial \rho \varepsilon f}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \varepsilon f) V}{\partial z} &= -P \frac{\partial V f}{\partial z} + f v \left( \frac{\partial H}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial f q}{\partial z} - \frac{\partial f W}{\partial z} ; \quad (2.5) \\ \frac{\partial H f}{\partial t} + \frac{\partial H V f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( v f \frac{\partial H}{\partial z} \right) ; \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \frac{\beta(1+\alpha)T}{2(\gamma-1)} + \frac{\beta}{2} \zeta \alpha T^*; \quad n_e = n_i; \quad \alpha = \frac{n_e}{\rho}; \quad n_a = (1-\alpha)\rho; \quad q = -\tilde{\kappa} \frac{\partial T}{\partial z};$$

$$\nu = 1/\sigma_o = 1/\sigma_1 + 1/\sigma_2; \quad \sigma_1 = \alpha\sigma_{10} / (1-\alpha)\sqrt{T}; \quad \sigma_2 = \sigma_{20} T^{3/2};$$

$$z=0 : \quad \rho=1; \quad T=1; \quad H=1; \quad \alpha = \alpha_{in}.$$

На выходе из ускорителя  $z = z_{out}$  граничные условия отвечают свободному вытеканию. В качестве единиц измерения возьмем размерные константы:  $n_o$  ( $\rho_o = m n_o$ ),  $T_o$ ,  $H_o$ , а также  $L$  - длину канала либо его части. Характерное магнитное поле  $H_o = 2 J_p / c r_o$  определяется разрядным током в системе  $J_p$ , неизменным в процессе расчетов. С помощью перечисленных величин формируются единицы: давления -  $H_o^2 / 4\pi$ , скорости -  $V_o = H_o / \sqrt{4\pi \rho_o}$ , времени -  $L/V_o$  и электрического поля -  $E_o = H_o V_o / c$ . Безразмерные параметры в (2.5) имеют прежний вид:  $\beta = 8\pi P_o / H_o^2$  ( $P_o = k_B n_o T_o$ ),  $\nu = c^2 / 4\pi L V_o \sigma$ ,  $T^* = I / k_B T$ ,  $\tilde{\beta}_{ion} = (L n_o / V_o) \beta_{ion}$ ,  $\tilde{\alpha}_{rec} = (L n_o^2 / V_o) \alpha_{rec}$ .

Магнитная вязкость  $\nu$  и безразмерная проводимость  $\sigma_o = Re_m$  (магнитное число Рейнольдса) содержат величины  $\sigma_{10}$  и  $\sigma_{20}$ , которые выражаются через исходные размерные параметры и физические константы. Первое из приведенных уравнений является уравнением кинетики ионизации и рекомбинации, которое определяет скорость рождения электронов с учетом различных процессов, описываемых правой частью данного уравнения.

Вместо уравнения для внутренней энергии используется также уравнение для энтропии, которое в данном случае имеет вид:

$$\frac{\partial(f \rho S)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} [(f \rho S) V] = \frac{2(\gamma-1)}{\beta(1+\alpha)T} \left( f \nu \left( \frac{\partial H}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial z} (f q) - \frac{\beta}{2} f \zeta T^* \tilde{\Gamma}_e \right),$$

$$\text{где } S = \ln \frac{P}{\rho^\gamma}; \quad P = \rho^\gamma e^S = \frac{\beta}{2} (1+\alpha) \rho T; \quad T = \frac{2 \rho^{\gamma-1} e^S}{\beta(1+\alpha)}.$$

Теплопроводность в уравнении для внутренней энергии в (2.5) или для энтропии  $S$  равна сумме электрон-атомарной и лучистой теплопроводности, которые определяются соотношениями, приведенными выше.

### *Использованные численные методы*

В численной модели для расчета гиперболической части уравнений, как и ранее, используется схема SHASTA-FCT с коррекцией потоков [71]. Данная разностная схема, представленная в разделе 1.2, хорошо зарекомендовала себя и неоднократно тестировалась на разных задачах.

Магнитная вязкость в уравнении диффузии магнитного поля и теплопроводность учитываются с помощью метода потоковой прогонки [93], предложенного Дегтяревым Л.М. и Фаворским А.П. Поиск стационарных течений осуществлялся методом установления.

Включение в МГД модель уравнения кинетики ионизации и рекомбинации (2.1), а в дальнейшем уравнений поуровневой кинетики, предполагает использование отлаженных алгоритмов, предназначенных для решения жестких систем дифференциальных уравнений [72-74, 103-105].

## **2.2. Кинетика заселения возбужденных состояний**

Плазма является многокомпонентной средой, состоящей из атомов, ионов и электронов. Взаимодействуя друг с другом, с излучением плазмы и полями, компоненты могут менять энергетическое состояние, влияя на энергетический баланс среды, а также участвовать в образовании других компонент посредством процессов ионизации и рекомбинации. Поэтому при описании динамики плазмы возникает задача об определении состава среды.

В состоянии термодинамического равновесия состав плазмы определяется значениями термодинамических параметров, например температуры и давления. Низкотемпературная плазма описывается больцмановской статистикой. Атомы и ионы могут находиться в основном и возбужденных состояниях. Концентрации частиц в  $k$ -ом и  $m$ -ом состояниях

связаны соотношением Больцмана  $n_k / n_m = g_k / g_m \cdot \exp(-\Delta E_{k,m} / T)$ , где  $g_k$  и  $g_m$  - статистические веса,  $\Delta E_{k,m} = E_m - E_k$  - разность энергий равновесных состояний. Населенность  $k$ -ого состояния может быть выражена через полную концентрацию атомов  $n_a$ . В приближении локального термодинамического равновесия (ЛТР) концентрации электронов, ионов и атомов связаны соотношением Саха (1.2). При условии квазинейтральности плазмы  $n_i = n_e$  соотношение (1.2) определяет состав плазмы. При этом в основе приближения ЛТР лежит предположение о прямой ионизации из основного состояния и обратном процессе тройной рекомбинации. На самом деле, связанный электрон в атоме, прежде чем достигнуть континуума или, наоборот, основного состояния, может переходить с уровня на уровень по сложному пути (см. рис. 19).

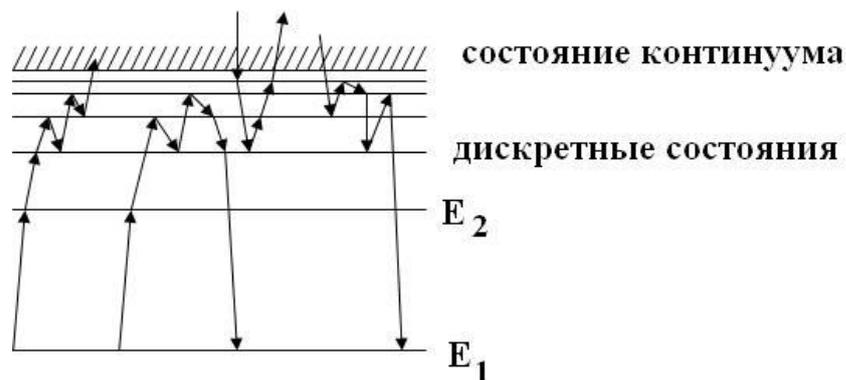


Рис. 19. Возможные переходы электрона в энергетическом пространстве атома

Система уравнений поуровневой кинетики, определяющих концентрацию возбужденных частиц в  $k$ -ом состоянии, имеет вид:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \text{div}(n_k \mathbf{V}_k) = \sum_{\substack{m,q \\ m \neq k}} (n_m W_{mk}^q - n_k W_{km}^q) + F_k - n_k G_k \quad (2.6)$$

где  $n_k$  - населенность  $k$ -ого состояния атома,  $W_{mk}^q$  - вероятности перехода атома из состояния  $m$  в состояние  $k$  под воздействием элементарных процессов  $q$ . Суммирование в (2.6) проводится по всем дискретным

состояниям и состоянию ионизационного континуума, отвечающего достаточно большому значению  $k = N$ . Величины  $F_k$  и  $G_k$  описывают источник образования атомов в состоянии  $k$  и гибель возбужденных состояний в результате процессов, в которых рассматриваемый атом или ион не участвуют. Примером таких процессов может быть ассоциативная ионизация и диссоциативная рекомбинация. Учет дивергенции от потока  $n_k \mathbf{V}_k$  в (2.6) является обязательным элементом исследований.

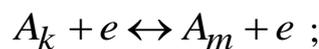
В состоянии ионизационного континуума, которому приписывается индекс  $e$ , имеем аналогичное уравнение

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div}(n_e \mathbf{V}_e) = \sum_{\substack{m,q \\ m=1}}^{N-1} (n_m W_{me}^q - n_e n_i W_{em}^q) + F_e - n_e G_e \quad (2.7)$$

Как правило, скорость изменения концентрации электронов вычисляется с помощью уравнения (2.1), в котором коэффициенты ионизации и рекомбинации имеют лишь формальное сходство с элементарными вероятностными процессами ионизации и рекомбинации. В действительности данные коэффициенты определяются совокупностью элементарных процессов и различных факторов.

**Основные процессы.** Наиболее существенны и вероятны в рассматриваемой задаче следующие процессы:

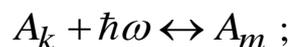
1) возбуждение электронным ударом и гашение:



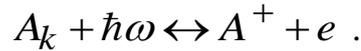
2) ионизация электронным ударом и трех частичная рекомбинация:



3) поглощение (абсорбция) и спонтанное излучение (эмиссия):



4) радиационная рекомбинация и фотоионизация:



Другие реакции с участием возбужденных атомов не оказывают существенного влияния. К ним относятся, например, возбуждение и тушение при столкновении с атомом в основном состоянии  $A_k + A_1 \leftrightarrow A_m + A_1$ , ионизация в атом-атомных столкновениях  $A_k + A_1 \leftrightarrow A^+ + e + A_1$  и обратный процесс трехчастичной рекомбинации, а также ассоциативная ионизация и диссоциативная рекомбинация  $A_k + B \leftrightarrow AB^+ + e$ . Тормозное поглощение и излучение  $A^+ + e + \hbar\omega \leftrightarrow A^+ + e$  также можно не учитывать. Эти процессы не меняют состав плазмы, оказывая незначительное влияние на баланс энергии излучения в узкой спектральной области.

Для удобства изложения методов решения системы уравнений (2.6)-(2.7) не будем рассматривать слагаемое  $div(n_k \mathbf{V}_k)$  с учетом последующего расщепления по физическим факторам в процессе численного решения итоговых уравнений. Исключая внешние процессы заселения и ухода электронов с уровней, величинами  $F_k$  и  $G_k$  можно пренебречь.

Рассмотрим поток электронов в энергетическом пространстве атома

$$j_k = \sum_{m < k} \sum_{n \geq k} (n_m W_{nm}^q - n_n W_{nm}^q) .$$

Величина  $j_k$  показывает количество электронов, проходящих энергетический интервал между уровнями  $k-1$  и  $k$  в единицу времени. Тогда уравнение заселенности (2.6) можно переписать в виде:

$$\frac{d n_k}{d t} = \Delta j_k , \quad (2.8)$$

где  $\Delta j_k = j_k - j_{k+1}$  - дивергенция потока. Для ионизационного континуума  $e$ , являющегося последним в ряду энергетических состояний, имеем:

$$\frac{d n_e}{d t} = j_e , \quad (2.9)$$

где  $j_e$  соответствует сумме ряда по состояниям в правой части (2.7). Основное состояние является первым, и для него  $\Delta j_1 = -j_2$ . Кинетическое уравнение для атома в основном состоянии имеет вид:

$$\frac{d n_1}{d t} = -j_2 . \quad (2.10)$$

Поиск решения системы (2.8)-(2.10) является нетривиальной задачей. Поэтому используют квазистационарное приближение, согласно которому в процессе ионизации и рекомбинации величины  $n_k$  успевают подстраиваться под такие сравнительно медленно меняющиеся параметры плазмы, как температура и концентрации  $n_1, n_e$ . Квазистационарность распределения атомов по возбужденным состояниям следует из того, что характерное время перехода электрона между энергетическими уровнями атома, как правило, существенно меньше характерного времени изменения макроскопических параметров. Пренебрегая явной зависимостью  $n_k$  от времени в уравнениях (2.8)-(2.10), получим систему попарно зацепляющихся уравнений  $\Delta j_k = 0$  для различных значений  $k$ . Откуда следует, что  $j_k = j = const$ , и поток в энергетическом пространстве постоянен для всех состояний. Соответственно, в квазистационарном приближении не происходит накопления частиц, отвечающих каким-либо уровням, что вполне естественно.

Отклонение от равновесия рассматривается с помощью относительных населенностей для компонент среды:

$$y_k = n_k / n_k^o , \quad y_e = n_e / n_e^o , \quad y_i = n_i / n_i^o , \quad (2.11)$$

где  $n_k^o, n_e^o, n_i^o$  - равновесные значения соответствующих величин.

В квазистационарном приближении с учетом сделанных выше замечаний из уравнения (2.1), в частности, следует уравнение баланса частиц

$$n_a n_e \beta_{ioniz} - n_e^2 n_i \alpha_{recom} = 0 . \text{ Используя соотношения (2.11), получим:}$$

$$\frac{y_1}{y_e y_i} = \frac{\alpha_{recom} n_e^o n_i^o}{\beta_{ioniz} n_1^o}. \quad (2.12)$$

Если коэффициенты ионизации и рекомбинации определяются только столкновениями с электронами, то они связаны соотношением, вытекающим из принципа детального равновесия:  $n_1^o \beta_{ioniz} - n_e^o n_i^o \alpha_{recom} = 0$ . С учетом этого из (2.12) следует, что  $y_1 = y_e y_i$ . Известно также, что высоко возбужденные уровни также находятся в относительном равновесии между собой и электронами даже при наличии излучения. Поэтому, начиная с некоторого уровня  $l$ , имеем  $y_l \cong y_{l+1} \cong y_{l+2} \cong \dots \cong y_e y_i$ .

**Диффузионное приближение.** Существует несколько подходов для приближенного аналитического расчета населенностей уровней. Согласно одному из таких подходов осуществляется размазывание дискретного энергетического спектра. В рамках соответствующего диффузионного приближения система уравнений баланса сводится к кинетическому уравнению для населенностей  $n(E)$ , как непрерывной функции энергии. Данный подход оправдан для высоковозбужденных состояний, разделенных малыми энергетическими промежутками. Квазинепрерывное перемещение в пространстве энергии характеризуется потоком  $j(E)$ , который определяется плотностью частиц и наличием градиента плотности. В этом случае поток можно представить в виде разложения в ряд:

$$j(E) = B(E)n(E) + D(E) \frac{d n(E)}{d E}, \quad (2.13)$$

где  $B(E)$  - коэффициент динамического трения,  $D(E)$  - коэффициент диффузии. Последнее слагаемое в (2.13) определяет диффузионный поток.

Исходя из представления о непрерывности течения, изменение концентрации частиц с энергией  $E$  определяется дивергенцией потока частиц этой энергии или уравнением Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial n(E)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial E} \left( B(E)n(E) + D(E) \frac{d n(E)}{d E} \right). \quad (2.14)$$

Уравнение (2.14) используется для нахождения коэффициента рекомбинации и неравновесных распределений населенностей.

В случае равновесного распределения с концентрацией  $n_o(E)$  имеем  $j(E) = 0$ , и из (2.13) следует связь между коэффициентами  $B(E)$  и  $D(E)$ :

$$B(E)n_o(E) = -D(E) \frac{d n_o(E)}{d E}. \quad (2.15)$$

Введем относительные заселенности по аналогии с дискретными уровнями  $y(E) = n(E) / n_o(E)$ . Тогда выражение для потока (2.13) с учетом (2.15) можно переписать в виде  $j(E) = D(E)n_o(E) \frac{d y}{d E}$ .

Рассмотрим уравнение (2.14) при условии квазистационарности, когда  $\partial n / \partial t = 0$  и  $j = const$ . Пусть граничные значения  $y(E_1) = y_1$  и  $y(0) = y_e$  известны. Решение с данными граничными условиями имеет вид:

$$y(E) = \frac{y_1 R(0, E) + y_e y_i R(E, E_1)}{R(0, E_1)}, \quad j = \frac{y_1 - y_e y_i}{R(0, E_1)}, \quad (2.16)$$

где величину  $R(E', E'') = \int_{E'}^{E''} \frac{d \tilde{E}}{n_o(\tilde{E}) D(\tilde{E})}$  можно рассматривать в качестве

сопротивления по аналогии с законом Ома для тока  $j$  в (2.16), протекающего по участку цепи с разностью потенциалов  $y_1 - y_e y_i$ . При столкновении

слабосвязанного электрона со свободными согласно [46, 98] имеем

$D(E) = \frac{4 \sqrt{2 \pi} \Lambda e^4 n_e E}{3 \sqrt{m_e k_B T_e}}$ . Здесь  $\Lambda$  - кулоновский логарифм состояния с

энергией связи  $E$ . По формуле Саха для высоковозбужденных водородоподобных состояний определяем величину

$$n_o(E) = \frac{n_e^o n_i^o g(E) h^3}{2 (2 \pi m_e k_B T_e)^{3/2}} \exp(E / k_B T_e), \quad \text{где статвес} \quad g(E) = \frac{Z^3 Ry^{3/2}}{E^{5/2}}.$$

Подставляя эту формулу в интеграл для сопротивления, получим

$$R(0, E_1) = \frac{(2 \pi m_e k_B T_e)^{3/2} E_1}{n_e^o n_i^o h^3} \int_0^{E_1} \frac{\exp(-\tilde{E} / k_B T_e) d \tilde{E}}{g(\tilde{E}) D(\tilde{E})}. \quad (2.17)$$

Формулу для тока в (2.16) можно переписать, используя  $n_1$  и  $n_e n_i$ :

$$j = \frac{n_1 n_e}{n_1^o n_e R(0, E_1)} - \frac{n_e^2 n_i}{n_i^o n_e^o n_e R(0, E_1)}. \quad (2.18)$$

Сопоставляя (2.7), (2.9) с (2.1), видим, что:

$$j_e = n_1 n_e \beta_{ioniz} - n_e^2 n_i \alpha_{recom}. \quad (2.19)$$

Сравнивая (2.19) и (2.18), найдем коэффициенты ионизации и рекомбинации:

$$\beta_{ioniz} = \left( n_1^o n_e R(0, E_1) \right)^{-1}, \quad \alpha_{recom} = \left( n_i^o n_e^o n_e R(0, E_1) \right)^{-1}. \quad (2.20)$$

Из этих формул следует, в частности, что  $\beta_{ioniz} = K_1 \alpha_{recom}$ , где

$K_1 = n_e^o n_i^o / n_1^o$  - константа ионизационного равновесия относительно

основного состояния. Вычисление интеграла (2.17) приводит к следующему выражению для коэффициента рекомбинации [46, 47, 102] в случае  $T_e \ll E_1$ :

$$\alpha_{recom} = \frac{4 \pi \sqrt{2 \pi} e^{10} \bar{\Lambda}}{9 \sqrt{m_e} (k_B T_e)^{9/2}}, \quad (2.21)$$

где среднее значение кулоновского логарифма  $\bar{\Lambda} \cong 0.2$ . Если в (2.21) температуру  $T_e$  выразить в эВ, то приходим к простому соотношению для

коэффициента тройной рекомбинации  $\alpha_{recom} = 5.4 \cdot 10^{-27} T_e^{-9/2} (\text{см}^6 / \text{с})$ .

Последняя формула справедлива при условии  $T_e < E_2$ , где  $E_2$  - энергия связи в первом возбужденном состоянии.

**Одноквантовое приближение.** Рассмотрим движение электрона в энергетическом пространстве атома при наличии дискретности энергетических уровней. Вероятность ударных переходов зависит от разности энергии уровней следующим образом:  $W_{km} \sim (E_k - E_m)^{-4}$ . Поэтому наиболее вероятны переходы между соседними уровнями. В одноквантовом приближении в результате столкновительных процессов для потока электронов между уровнями  $k+1$  и  $k$  имеем:

$$j = n_k W_{k,k+1} - n_{k+1} W_{k+1,k} = n_k W_{k,k+1} (y_k - y_{k+1}). \quad (2.22)$$

Аналогичное соотношение можно записать для потока между уровнями  $k$  и  $k-1$ . Соответственно,  $y_k$  можно выразить через  $y_{k-1}$ . Далее  $y_{k-1}$  выразим через  $y_{k-2}$  и т.д., пока не дойдем до  $y_1$ . Двигаясь в обратном направлении,  $y_{k+1}$  можно выразить через  $y_k$ ,  $y_{k+2}$  - через  $y_{k+1}$  и т.д. Населенность последнего состояния свяжем с величиной  $y_e$   $y_i$ . После преобразований поток  $j$  и относительная населенность уровней  $y_k$  могут быть представлены в виде:

$$y_k = \frac{y_1 R_{ke} + y_e y_i R_{1k}}{R_{1e}}, \quad j = \frac{y_1 - y_e y_i}{R_{1e}}, \quad (2.23)$$

где  $R_{nm} = \sum_{k=n}^{m-1} R_{k,k+1}$  и  $R_{k,k+1} = \left( n_k^0 W_{k,k+1} \right)^{-1}$ .

Соотношение (2.23) аналогично выражению (2.16), отвечающему диффузионному приближению, но в отличие от него одноквантовое приближение учитывает дискретность атомного спектра. Недостаток одноквантового приближения связан с учетом переходов только между соседними уровнями и устраняется в рамках следующего приближения.

### 2.3. Модифицированное диффузионное приближение (МДП)

Данное приближение также учитывает дискретность энергетических уровней атома, а перемещение связанного электрона в результате столкновительных

процессов рассматривается как диффузия в дискретном пространстве. При этом выводится уравнение Фоккера-Планка в конечных разностях [46], которое в предельном случае сливающихся уровней переходит в уравнение (2.14). Конечно-разностному уравнению Фоккера-Планка соответствует столкновительный поток, который по форме совпадает с выражением для потока в одноквантовом приближении (2.22) и имеет вид:

$$j = n_k Z_{k,k+1} - n_{k+1} Z_{k+1,k}, \quad (2.24)$$

$$Z_{k,k+1} = B_k / [(E_k - E_{k+1})(E_{k-1} - E_{k+1})],$$

$$B_k = \sum_n W_{kn} (E_n - E_{k-1})(E_n - E_k).$$

Здесь  $Z_{k,k+1}$  - эффективные вероятности одноквантовых переходов [46], в которых суммируются вклады различных ударных переходов. Если при вычислении  $B_k$  ограничиться учетом переходов  $k \rightarrow k+1$ , то  $Z_{k,k+1} \equiv W_{k,k+1}$  и потоки в (2.22) и (2.24) совпадают.

Используя квантовомеханическое правило сумм для вероятностей переходов, можно вычислить эффективные вероятности переходов и усреднить их по максвелловскому распределению свободных электронов. В результате приходим к следующему соотношению при  $k > 1$ :

$$Z_{k,k+1} = \frac{4 \sqrt{2\pi} \Lambda_k e^4 n_e E_{k-1}}{\sqrt{m_e} k_B T_e (E_{k-1} - E_{k+1})(E_k - E_{k+1})} \cdot \exp\left(-\frac{E_k - E_{k+1}}{k_B T_e}\right), \quad (2.25)$$

где  $\Lambda_k$  - кулоновский логарифм связанного электрона, учитывающий особенности структуры атомов. Для эффективных вероятностей переходов  $Z_{k,k+1}$  и  $Z_{k+1,k}$  справедлив принцип детального равновесия  $n_k^0 Z_{k,k+1} = n_{k+1}^0 Z_{k+1,k}$ . Для перехода в МДП следует во всех выражениях, отвечающих одноквантовому приближению, заменить вероятности переходов  $W_{k,k+1}$  их эффективными значениями  $Z_{k,k+1}$ .

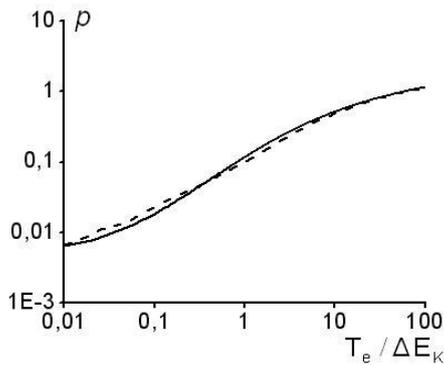


Рис. 20. Зависимость  $p(T_e / \Delta E_k)$ : штрихованная линия – экспериментальные данные [55], сплошная линия – аппроксимационная формула

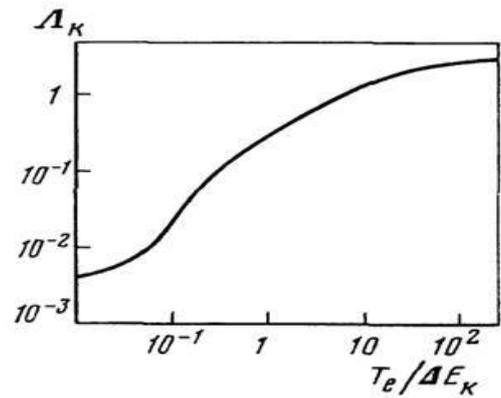


Рис. 21. Кулоновский логарифм связанного электрона [46]

Вместо использованных выше скоростей одноквантовых переходов и величин  $Z_{k,k+1}$  можно использовать формулу Ван Режемортера для скоростей столкновительного возбуждения [55]:

$$C_{k,k+1}^{ex} = n_e \cdot 4.63 \cdot 10^{-6} f_{k,k+1} \frac{\exp(-\Delta E_k / T)}{\Delta E_k \sqrt{T}} p(T / \Delta E_k), \quad (2.26)$$

где  $f_{k,k+1}$  – сила осцилляторов перехода  $k \rightarrow k+1$ ,  $\Delta E_k = E_k - E_{k+1}$ , а  $p(T / \Delta E_k)$  – полуэмпирическая табулированная функция, которую можно приближенно аппроксимировать формулой  $p(x) = 0.3 \cdot \ln(1.017 + 0.462 \cdot x)$ .

График функции  $p(T / \Delta E_k)$  представлен на рис. 20. Энергия и температура в формуле (2.26) измеряются в эВ, концентрация – в  $см^{-3}$ . Рассмотрим соотношения (2.25) и (2.26) при больших  $k$ . Для сил осцилляторов в (2.26)

используем приближение Крамерса:  $f_{n,k} \approx \frac{32}{3\pi\sqrt{3}} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right)^{-3} \frac{1}{k^3 n^5}$ , из

которого при  $k \rightarrow \infty$  следует, что  $f_{k,k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1.96}{8} k \approx \frac{1}{4} k$ . В то же время

для водородных уровней в (2.25) при больших  $k$  имеем

$\frac{E_{k-1}}{(E_{k-1} - E_{k+1})} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4} k$ . Сравнивая итоговые соотношения, можно

убедиться в том, что кулоновский логарифм связанного электрона  $\Lambda_k$  в формуле (2.25), изображенный на рис. 21, и фактор  $p(x)$  в (2.26) дают близкие значения. Поэтому для вычисления  $\Lambda_k$  в формуле (2.25) и в расчетах течений можно использовать соотношение

$$\Lambda_k \approx 0.3 \cdot \ln (1.017 + 0.462 \cdot k_B T_e / (E_k - E_{k+1})).$$

Для нахождения в явном виде коэффициентов ионизации  $\beta_{ioniz}$  и рекомбинации  $\alpha_{recom}$  в уравнении (2.1) воспользуемся выражением (2.23) для потока  $j$ , в котором сопротивление  $R_{1e}$  определяется через эффективные вероятности переходов  $Z_{k,k+1}$  вместо вероятности переходов  $W_{k,k+1}$ . Сопоставляя (2.23) с формулой (2.19), находим

$$\beta_{ioniz} = (n_1^o n_e R_{1e})^{-1}, \quad \alpha_{recom} = (n_i^o n_e n_e R_{1e})^{-1}. \quad (2.27)$$

Для сопротивления  $R_{1e}$  в (2.23) используем выражение  $R_{1e} = \sum_{k \geq 1} R_{k,k+1}$ .

Отношение  $n_e^o n_i^o / n_k^o$  выразим с помощью формулы Саха для  $k$ -ого уровня

$$\frac{n_e^o n_i^o}{n_k^o} = \frac{g_e g_i}{g_k} \exp(-E_k / k_B T), \quad \text{где } g_e = 2 \left( \frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} - \text{статвес свободных}$$

электронов,  $g_i \equiv \sum_i = 1$  и  $g_k \equiv \sum_a = 2k^2$  - статистические веса иона и атома в  $k$ -ом возбужденном состоянии соответственно. Используя эти соотношения, из (2.27) получим коэффициент ступенчатой рекомбинации в виде:

$$\alpha_{cm}^{-1} = 2 \sum_i n_e \frac{(2\pi m_e k_B T_e)^{3/2}}{h^3} \sum_{k \geq 1} \frac{\exp(-E_k / k_B T_e)}{g_k Z_{k,k+1}}. \quad (2.28)$$

В данном выражении эффективные вероятности переходов  $Z_{k,k+1}$  определяются формулой (2.25). В свою очередь соотношения (2.27) позволяют установить связь между коэффициентами ступенчатой ионизации  $\beta_{cm}$  и рекомбинации  $\alpha_{cm}$ :

$$\beta_{cm} = K_1 \alpha_{cm}, \quad (2.29)$$

где  $K_1 = n_e^0 n_i^0 / n_1^0$  - константа ионизационного равновесия относительно основного состояния, вычисляемая с помощью (2.5). Учет радиационных процессов приводит к появлению в (2.27)-(2.29) фактора, который зависит от отношения эффективностей радиационных и ударных процессов [46].

Величины  $\beta_{cm}$  и  $\alpha_{cm}$ , определяемые формулами (2.28) и (2.29), позволяют вычислить скорости ступенчатых процессов ионизации и рекомбинации. К ним следует добавить коэффициенты прямой ионизации и рекомбинации, которые стандартным образом учитываются в окончательных выражениях.

**Коэффициенты ионизации и рекомбинации.** Оценки вероятностей различных процессов показывают, что основным фактором, приводящим к ионизации и рекомбинации в рассматриваемом случае достаточно плотной низкотемпературной плазмы, является взаимодействие электронов с атомами и ионами, отвечающее следующим прямым и обратным процессам:  $A_k + e \leftrightarrow A_m + e$  - возбуждение и тушение (гашение),  $A_k + e \leftrightarrow A^+ + e + e$  - ионизация электронным ударом и тройная рекомбинация. К этим процессам можно добавить фотоионизацию и фоторекомбинацию  $A_k + \hbar\omega \leftrightarrow A^+ + e$ .

В рамках МДП [46] диффузия связанного электрона рассматривается в энергетическом пространстве атома с учетом дискретности его уровней. В соответствии с (2.25) и (2.28) коэффициент ступенчатой рекомбинации  $\alpha_{cm}$  для атомов водорода определяется соотношением

$$\alpha_{cm} = \frac{h^3 e^4}{2\pi (m_e k_B T_e)^2 \sum_i E_1} \left[ \sum_{k \geq 1} \frac{(2k+1) \exp(-E_{k+1}/k_B T_e)}{k^3 (k+1)^4 \Lambda_k} \right]^{-1}, \quad (2.30)$$

где  $E_k = E_1 / k^2$ ,  $E_1 = I = 13.6 \text{ эВ} = 2.16 \cdot 10^{-11} \text{ эрг}$ . Коэффициенты ступенчатой рекомбинации  $\alpha_{cm}$  и ионизации  $\beta_{cm}$  связаны между собой через константу ионизационного равновесия согласно (2.29).

Суммарные коэффициенты ионизации и рекомбинации в (2.1) включают прямой процесс ионизации из основного состояния при столкновении электронов с атомами и обратный процесс рекомбинации:

$$\beta_{ioniz} = \beta_{cm} + \beta_{np} \quad , \quad \alpha_{recom} = \alpha_{cm} + \alpha_{np} \quad ,$$

где  $\alpha_{np} = (W_{e,1} + A_{e1})/n_e$  и  $\beta_{np} = W_{1,e}/n_e$ , а коэффициент Эйнштейна  $A_{e1}$  определяет вероятность спонтанного излучения. Основной вклад в процессы ионизации и рекомбинации вносят ступенчатые процессы.

Кроме того, можно учесть процессы, связанные с фотоионизацией и фоторекомбинацией (см., например, [47]). При использовании спектральной плотности равновесного излучения или функции Планка соответствующие коэффициенты вычисляются с помощью следующих соотношений:

$$\beta_{\omega} = \frac{8 \pi I^2 k_B T}{c^2 h^3} \sigma_{\omega}^o \exp\left(-\frac{I}{k_B T}\right) \quad , \quad \alpha_{\omega} = \frac{\beta_{\omega} n_a}{n_e n_i} \quad ,$$

где  $\sigma_{\omega}^o = 7.9 \cdot 10^{-18} \text{ см}^2$  - эффективное сечение фотоионизации водорода.

#### 2.4. Лучистая теплопроводность

Поток тепла, обусловленный излучением, может быть учтен посредством приближения лучистой теплопроводности. Простой способ вычисления плотности энергии и потока энергии излучения следует из предположения о том, что длина свободного пробега фотонов, существенно влияющих на теплообмен в среде, много меньше характерных размеров задачи. В этом случае плотность энергии излучения  $U$  и поток энергии излучения  $W$  в любой точке выражаются через температуру и плотность вещества [45,76]:

$$U = \frac{4 \sigma_c T^4}{c} \quad , \quad W = -\frac{16 \sigma_c l_R T^3}{3} \nabla T \quad ,$$

где  $T$  – температура вещества,  $l_R$  – росселандова длина свободного пробега фотона, зависящая от энергии излучения, температуры и плотности вещества,  $\sigma_c = 5.67 \cdot 10^{-5} \text{ эрг} / (\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{град}^4)$  – постоянная Стефана-Больцмана.

Следует отметить, что в приближении лучистой теплопроводности излучение считается равновесным. Участки спектра, в которых чаще всего наблюдается равновесие, отвечают центрам отдельных линий. При этом среда является непрозрачной для излучения, соответствующего этим линиям. Однако, для фотонов, образовавшихся в результате процесса рекомбинации, наоборот, плазма часто оказывается прозрачной, и такие фотоны, покидая вещество, нарушают равновесие.

Коэффициент лучистой теплопроводности равен  $\kappa_{луч} = \frac{16}{3} \sigma_C L_{cp} T^3$   
 $\left[ \frac{\text{эрг}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}} \right]$ . Средний пробег фотонов  $L_{cp} \approx \frac{m_e c}{\pi e^2} \frac{\Delta\omega}{n_k f_{kl}}$  ( $n_k = n_1 \approx n_a$ )

определяется на основе доплеровского уширения спектральных линий  $\Delta\omega = \omega_{kl} V / c$ , где  $\omega_{kl} = 2\pi c / \lambda_{kl}$  и  $f_{kl}$  - спектральная частота и сила осциллятора, например, для  $\alpha$ -линии Лаймана водородной плазмы [55,147].

## 2.5. Диффузионное приближение в уравнении переноса излучения

Диффузионное приближение основано на предположении об изотропии излучения [47]. В рамках рассматриваемой квазиодномерной модели течения с известной площадью поперечного сечения канала  $f$  имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial (cUf)}{\partial z} + 3\kappa_\omega (fW) = 0, \quad \frac{\partial (Wf)}{\partial z} + \kappa_\omega (cUf) = 4\pi\eta_\omega f.$$

Ограничимся решением системы для одной спектральной группы с энергией фотонов, соответствующей центру альфа линии Лаймана (10.2 эВ). Коэффициенты поглощения  $\kappa$  и излучательная способность  $\eta$  для данной энергии рассчитывались по заданным профилям температуры и плотности. При численном решении использовались разные методы [45, 51], которые привели практически к одинаковым результатам. В качестве граничных условий ставились условия Маршака:

$$W(0) = -\frac{1}{2} cU(0), \quad W(z_{out}) = \frac{1}{2} cU(z_{out}).$$

Диффузионное приближение в квазиодномерной модели не требует продолжительных расчетов. Однако результаты расчета переноса излучения в данном приближении могут не соответствовать физической картине процессов при наличии больших градиентов на фронте. В этом случае использование диффузионного приближения не является обоснованным.

На рис. 22 представлен типичный вариант квазистационарного течения ионизирующегося газа (см., например, [37]). В данном случае, также как и в предшествующих моделях (см., например, [148]), влияние излучения на теплообмен учитывается с помощью лучистой теплопроводности. Расчет проведен для следующих значений размерных и безразмерных параметров:  $T_o = 4000^\circ K$ ,  $n_o = 2.5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $L = 6 \text{ см}$ ,  $r_o = L/3$ ,  $J_p = 50 \text{ кА}$ ,  $T^* = 39.1$ ,  $\beta = 0.14$ ,  $\sigma_{10} = 700$ ,  $\sigma_{20} = 0.46$ ,  $\alpha_{in} = 1.5 \cdot 10^{-7}$ ,  $V_o = 2.18 \cdot 10^6 \text{ см/с}$ .

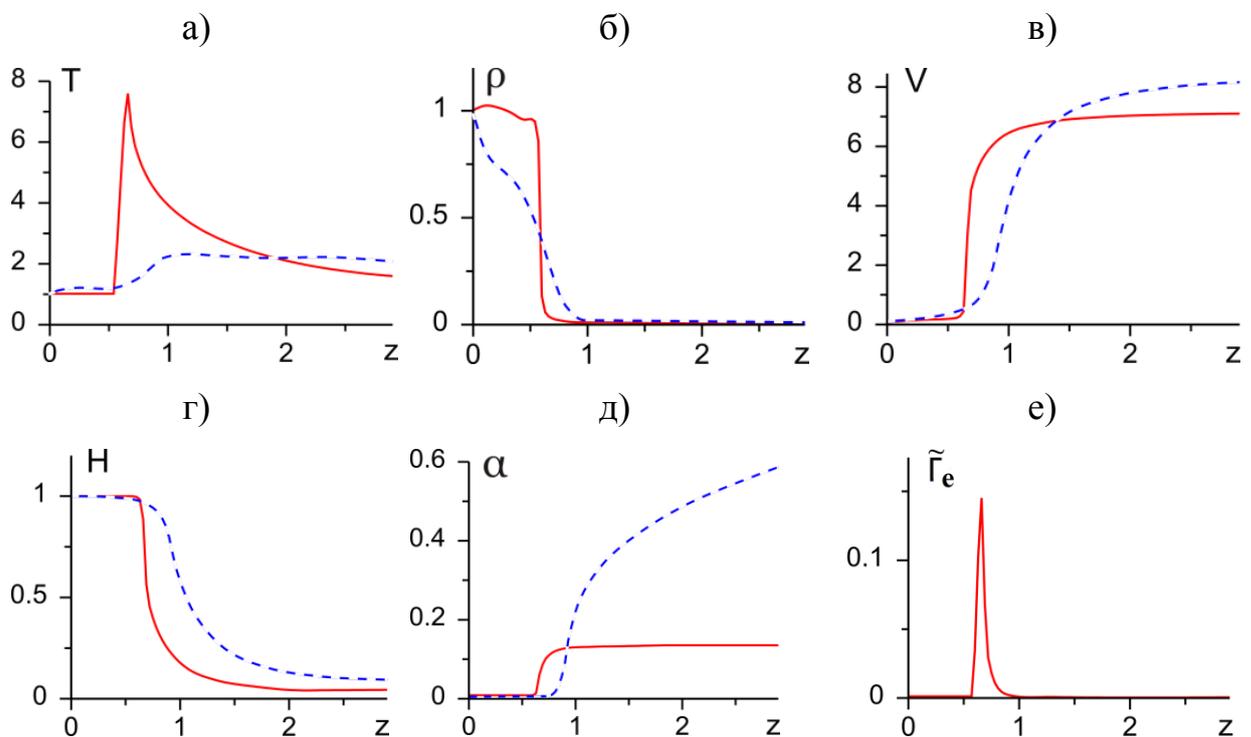


Рис. 22. Распределение термодинамических параметров в канале: а) температура, б) концентрация, в) скорость, г) магнитное поле, д) степень ионизации и е) отклонение от равновесия. Сплошные линии отвечают расчету в приближении МДП, штриховые линии – в приближении ЛТР

Результаты расчетов плотности энергии излучения  $cU$  и плотности потока энергии излучения  $W_z$ , полученные методом характеристик, в диффузионном приближении и в приближении лучистой теплопроводности, представлены на рис. 23. На рис. 23а отсутствует распределение плотности энергии излучения  $cU$ , полученное в приближении лучистой теплопроводности, поскольку соответствующие значения существенно превышают указанные на графике пределы изменения величины  $cU$ .

Метод характеристик и приближение лучистой теплопроводности дают качественно близкие результаты. В отличие от диффузионного приближения плотность энергии и поток энергии излучения на фронте резко меняются. Результаты расчетов показывают, что использование диффузионного приближения нецелесообразно при наличии больших градиентов на фронте.

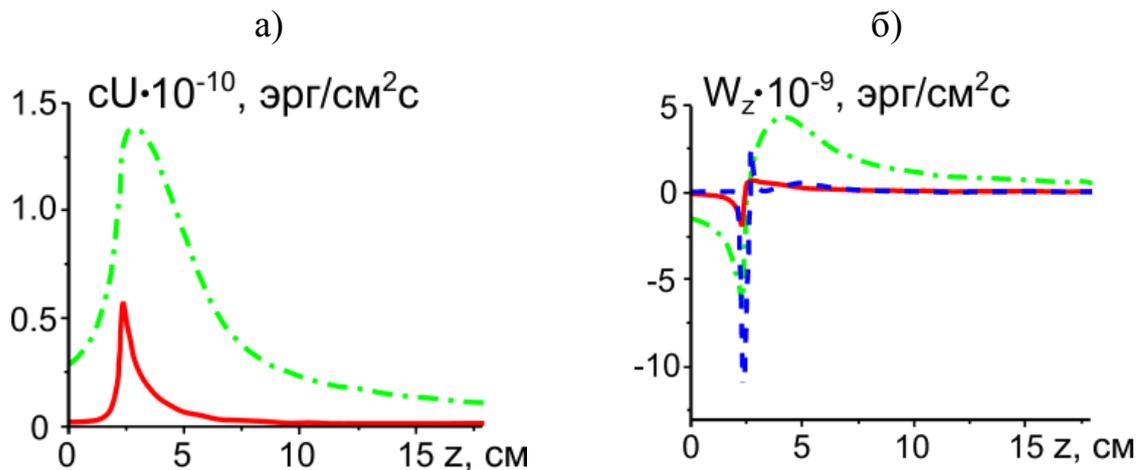


Рис. 23. Распределения плотности а) энергии и б) потока энергии излучения вдоль канала, полученные методом характеристик (сплошные кривые), в диффузионном приближении (штрихпунктирные кривые) и с помощью лучистой теплопроводности (штриховая кривая)

## 2.6. Расчеты квазиодномерных течений ионизирующегося газа

На рис. 24 представлен характерный пример установившегося (квазистационарного) течения ионизирующегося газа, отвечающий следующему набору исходных размерных и безразмерных параметров задачи:  $T_0 = 500^\circ K$ ,  $n_0 = 2.5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $L = 20 \text{ см}$ ,  $J_p = 85 \text{ кА}$ ,  $\alpha_{in} = 10^{-10}$ ,

$$r_o = L/3, \quad \beta = 0.07, \quad T^* = 313, \quad \sigma_{01} = 1191, \quad \sigma_{02} = 0.03, \quad V_o = 1.1 \cdot 10^6 \text{ см/с}.$$

Данные значения концентрации, температуры и соответственно давления на входе в канал соответствуют рабочему диапазону параметров, используемых в малых плазменных ускорителях первой ступени полноблочной установки КСПУ. Предполагаем, что на входе в ускоритель подается равновесный слабоионизованный газ. При этом степень ионизации  $\alpha_{in}$  при  $z=0$  определяется с помощью соотношения Саха, отвечающего приближению локального термодинамического равновесия. Однако сам расчет проведен с учетом кинетики ионизации и рекомбинации в рамках МДП.

Течение ионизирующегося газа, как и ранее, характеризуется, с одной стороны, резким возрастанием температуры, скорости и степени ионизации, с другой стороны, резким падением плотности и магнитного поля на фронте ионизации, расположенном в окрестности наиболее узкой соплообразной части канала.

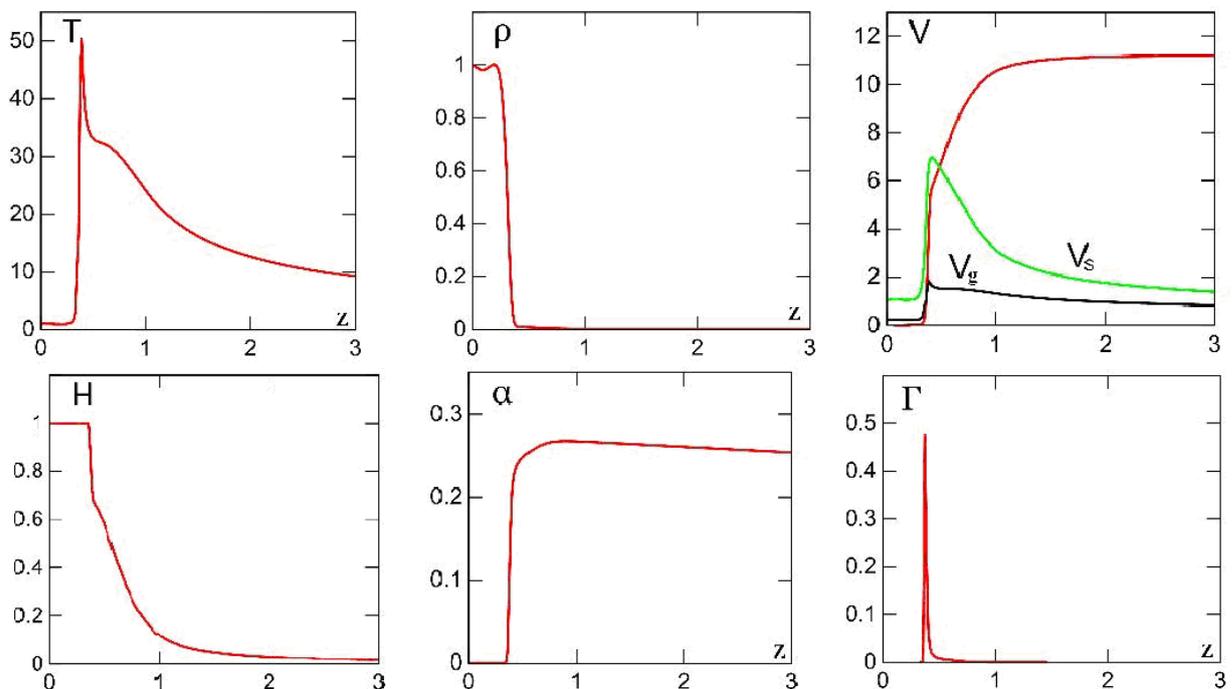


Рис. 24. Распределения переменных в стационарном потоке ионизирующегося газа в канале плазменного ускорителя для следующих параметров:

$$n_o = 2.5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}, \quad T_o = 500^\circ \text{K} \text{ и } J_p = 85 \text{ kA}$$

В отличие от предшествующих моделей в рамках кинетики ионизации и рекомбинации неравновесной плазмы имеем существенно более резкие зависимости всех переменных на фронте ионизации. Это обстоятельство указывает на более адекватное описание процесса ионизации с точки зрения имеющихся экспериментальных данных. В экспериментах на плазменных ускорителях (см., например, [4, 5, 9-14]) толщина фронта ионизации составляет несколько миллиметров. Кроме того, в узкой области фронта наблюдается четко выраженное отклонение процесса ионизации от равновесия, о чем свидетельствует наличие пика функции  $\Gamma = \tilde{\Gamma}_e(z)$ , отвечающей правой части первого уравнения в системе (2.5). В случае локального термодинамического равновесия  $\tilde{\Gamma}_e \equiv 0$ . Графики стационарных течений ионизирующегося газа в расчетах, проведенных на более подробных сетках, практически совпадают.

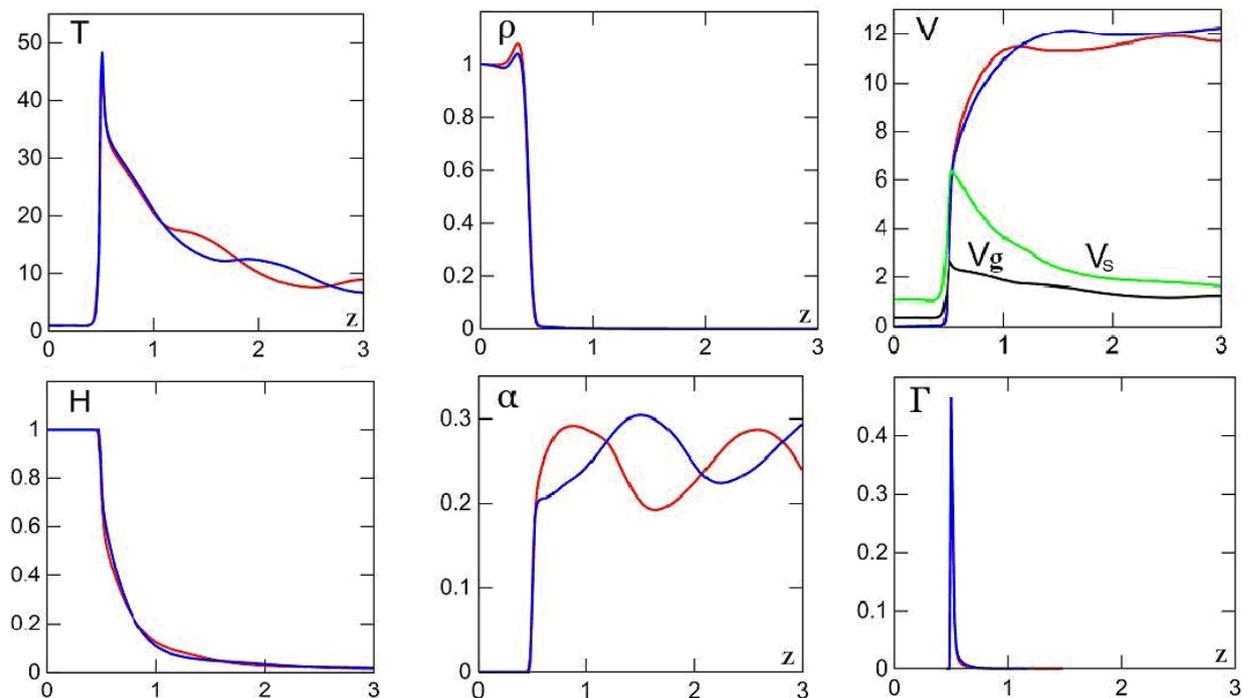


Рис. 25. Распределение параметров в пульсирующем потоке ионизирующегося газа в различные моменты времени. Значения параметров на входе:

$$n_o = 2.5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}, T_o = 500^\circ \text{ K и } J_p = 55 \text{ kA}$$

В экспериментах на коаксиальных плазменных ускорителях, а также в рамках простейших моделей процесса ионизации [3, 18, 20, 147] наблюдались стационарные и пульсирующие режимы течения в зависимости от параметров, включая разрядный ток и расход газа. В представленной модели с учетом кинетики ионизации и рекомбинации также реализуются два режима течения. В частности, при уменьшении разрядного тока происходит переход от стационарного процесса ионизации к периодическому пульсирующему режиму течения. На рис. 25 представлены распределения МГД-переменных в пульсирующем потоке в разные моменты времени  $t_1 = 8.8$  (синие кривые) и  $t_2 = 8.85$  (красные кривые), отвечающие  $n_0 = 2.5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_0 = 500^\circ \text{ K}$ ,  $J_p = 55 \text{ kA}$ ,  $\beta = 0.16$ ,  $V_0 = 0.7 \cdot 10^6 \text{ см/с}$ .

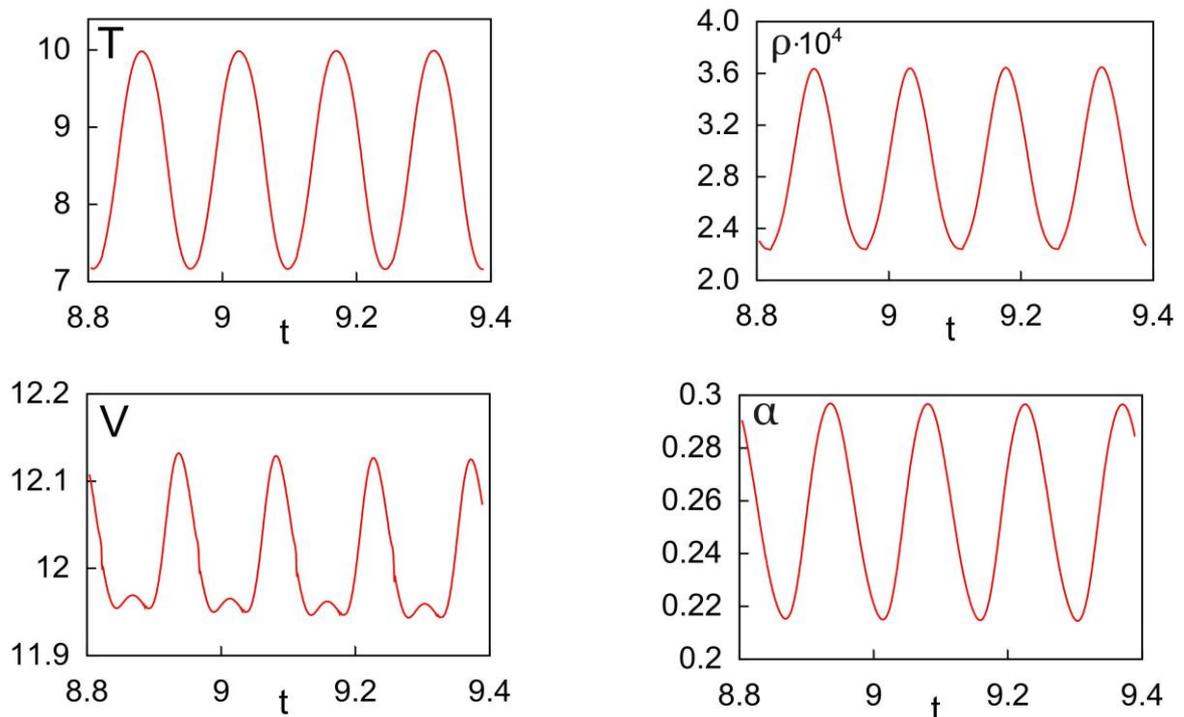


Рис. 26. Изменение МГД-переменных с течением времени в пульсирующем потоке ионизирующегося газа

Пульсирующие течения сопровождаются колебаниями всех величин. На рис. 26 изображены графики зависимости температуры, плотности, скорости и степени ионизации от времени для варианта течения, представленного на рис. 25. Значения переменных взяты на выходе из канала при  $z = z_{out}$ .

В процессе ионизации в окрестности узкого фронта ионизации происходит последовательный переход скорости потока сначала через газодинамическую скорость звука  $C_g = \sqrt{\gamma P / \rho}$  (черные кривые на рис. 24 и 25), а потом через скорость быстрой магнитозвуковой волны  $C_s = \sqrt{C_g^2 + H^2 / \rho}$  или скорость сигнала [1] при наличии единственной компоненты  $H_\varphi$  (см. зеленые кривые на рис. 24 и 25). В стационарных течениях ионизирующегося газа (см, например, рис. 24) переход через  $C_g$  происходит в сужающейся части канала ( $z < 0.5$ ), а через  $C_s$  в наиболее узкой части канала, отвечающей значению  $z = 0.5$ . В то же время в нестационарных потоках переход через  $C_g$  и  $C_s$  происходит в расширяющейся части канала при  $z > 0.5$  (см. рис. 25). Это, в частности, объясняет возникновение пульсирующих режимов, но не дает исчерпывающего ответа на вопрос о природе нестационарных течений, возникновение которых может быть связано также с процессами в электрической цепи, неустойчивым положением фронта в канале постоянного сечения и другими факторами.

## 2.7. Условие стационарности течений и критерии подобия

В результате серии численных экспериментов определена граница перехода от пульсирующих режимов к стационарным течениям ионизирующегося газа. Эта граница отмечена штриховой линией на рис. 27 в плоскости переменных  $(\ln J_{\dot{m}}, \ln J_p)$ , где  $J_{\dot{m}} = \frac{e}{m_i} \dot{m}$  (kA) - расход, выраженный в токовых единицах. Разные маркеры на рис. 27 вдоль границы перехода отвечают квазистационарным течениям для двух значений  $T_o$ . Номера маркеров соответствуют вариантам квазистационарных течений, которые рассчитаны для параметров  $J_p$ ,  $n_o$  и  $T_o$ , указанных в таблице 2. Здесь же приведены значения расхода  $\dot{m}$  (г/с) и параметра  $\beta$ .

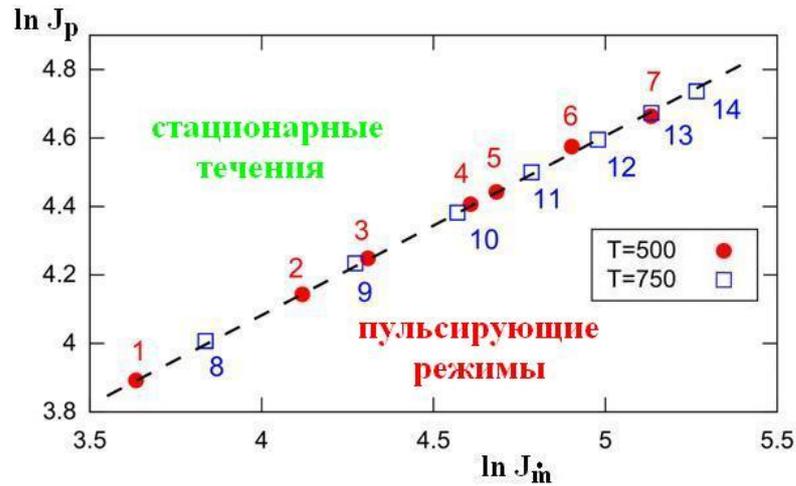


Рис. 27. Граница между стационарными и пульсирующими течениями ионизирующего газа

Штриховая линия на рис. 27 описывается формулой  $\ln J_p = \lambda \cdot \ln J_m + b$ , где  $\lambda \approx 0.5$ . Условие стационарности течений ионизирующего газа может быть формализовано с помощью следующего неравенства:

$$J_p^2 / J_m > K, \quad (2.31)$$

где константа  $K$  в общем случае зависит от геометрии канала ускорителя.

Таблица 2.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$n_o \cdot 10^{17}, \text{cm}^{-3}$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
$T_o, ^\circ K$	500	-/-	-/-	-/-	-/-	-/-	-/-	750	-/-	-/-	-/-	-/-	-/-	-/-
$J_p, \text{kA}$	49	63	70	82	85	97	110	56	69	80	90	99	107	111
$\dot{m} \cdot 10, \text{g} / \text{s}$	3.9	6.4	7.8	10	11	14	18	4.8	7.5	10	12	15	18	20
$\beta \cdot 10^2$	8.0	7.3	7.9	7.2	8.0	7.2	6.9	9.2	9.1	9.0	8.9	8.8	8.8	8.9

Соответственно выше штриховой линии на рис. 27, при больших значениях разрядного тока, имеем стационарные течения ионизирующегося газа. Ниже данной линии, при меньших значениях разрядного тока, наблюдаются нестационарные пульсирующие течения.

Аналогичное условие стационарности течений ионизирующегося газа было получено ранее эмпирическим путем в рамках квазиодномерной модели, основанной на приближении локального термодинамического равновесия [148]. Можно предположить, что выявленная зависимость (2.31) является универсальной и следует, например, из законов подобия.

Физическая картина процессов определяется не абсолютными значениями параметров, например,  $J_p$ ,  $n_o$ ,  $T_o$  и  $L$ , а безразмерными параметрами, т.е. отвечает критериям подобия. При этом одним и тем же безразмерным параметрам могут соответствовать различные наборы исходных размерных параметров. Для рассматриваемого класса течений имеем два основных безразмерных параметра:  $\nu = 1 / \text{Re}_m = c^2 / 4\pi L V_o \sigma$  и  $\beta = 8\pi k_B n_o T_o / H_o^2$ , где  $H_o = 2J_p / c r_o$  и  $V_o = H_o / \sqrt{4\pi m_i n_o}$ . Согласно данным таблицы 2, для набора течений с одинаковым значением  $T_o$ , отвечающим границе стационарности, оказывается, что безразмерный параметр  $\beta$  мало меняется. Будем считать, что  $\beta \approx \text{const}$ . Аналогичные выводы можно сделать относительно магнитной вязкости  $\nu$  или магнитного числа Рейнольдса  $\text{Re}_m$ . Изменение величины  $\text{Re}_m$  вдоль канала представлено на рис. 28 для вариантов таблицы с первого по шестой. Видно, что распределения и локальные значения  $\text{Re}_m$  практически одни и те же для течений, отвечающих границе стационарности.

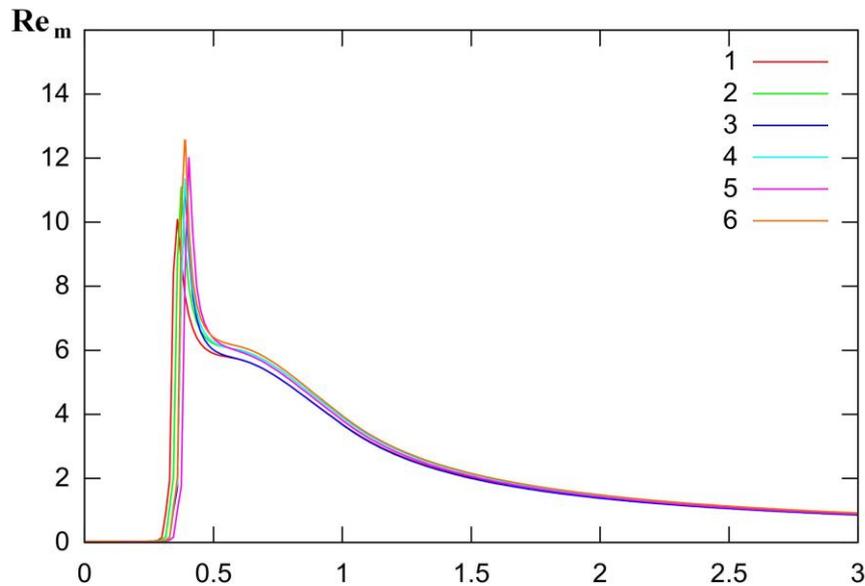


Рис. 28. Изменение магнитного числа Рейнольдса вдоль канала для вариантов 1 – 6 таблицы 2, отвечающих границе стационарности течений ионизирующегося газа

Следовательно, течения на границе раздела между пульсирующими и стационарными режимами являются подобными относительно двух безразмерных параметров. Для таких течений безразмерные параметры  $\beta$  и  $\nu$  имеют практически одни и те же значения. С учетом определения величин  $\beta$  и  $\nu$  получим, что единица скорости  $V_o \approx const$  на границе раздела, по крайней мере, для течений с одинаковым значением температуры  $T_o$  на входе в канал. Используя систему уравнений для стационарных течений плазмы в приближении узкого канала в отсутствии диссипаций, можно показать (см., например, [1, 3, 17]), что максимальная скорость истечения из канала ускорителя  $V_{max} = \sqrt{2} V_o$ . Учитывая постоянство значений МГД-переменных перед фронтом ионизации согласно рис. 24 и 25, данную оценку можно использовать для рассматриваемых течений ионизирующегося газа. Одновременно воспользуемся еще одной оценкой для максимальной скорости истечения плазмы  $V_{max} \sim J_p^2 / \dot{m}$  через разрядный ток  $J_p$  и расход

$\dot{m}$  (см. [1], стр. 187). В результате на границе стационарных течений имеем  $J_p^2 / \dot{m} \sim V_o \approx const$ , что соответствует эмпирическому описанию границы между пульсирующими и стационарными режимами.

Таким образом, численная МГД модель течений ионизирующегося газа с учетом кинетики ионизации и рекомбинации получила дальнейшее развитие на основе модифицированного диффузионного приближения, в рамках которого используется реальная энергетическая структура атома для расчетов коэффициентов ионизации и рекомбинации. Представлена удобная аппроксимация кулоновского логарифма связанного электрона  $\Lambda_k$  как функции от температуры и разности энергий соседних уровней атома. Соответственно расчеты коэффициентов ступенчатой рекомбинации и ионизации проведены с учетом зависимости кулоновского логарифма связанного электрона от температуры.

Рассмотрены и сопоставлены три модели переноса излучения. Показано, что метод характеристик и приближение лучистой теплопроводности для альфа линии Лаймана водородной плазмы дают качественно близкие результаты, которые соответствуют физической картине процессов на фронте ионизации. В то же время расчеты показали, что использование диффузионного приближения в исследованиях переноса излучения не является целесообразным при наличии больших градиентов на фронте.

В результате серии расчетов на основе представленной квазиодномерной МГД модели с учетом кинетики ионизации и рекомбинации сформулировано эмпирическое условие стационарности течений ионизирующегося газа, которое является также следствием законов подобия.

### ГЛАВА 3

#### ПРОЦЕСС ИОНИЗАЦИИ В КАНАЛЕ КСПУ С УЧЕТОМ ПОУРОВНЕВОЙ КИНЕТИКИ И ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

На фронте ионизации, образующемся в каналах плазменных ускорителей, происходят процессы, в соответствии с которыми температура и скорость резко возрастают, а плотность и магнитное поле резко уменьшаются. Поэтому фронт ионизации принципиально отличается от традиционных ионизирующих ударных волн сжатия в магнитной газодинамике, а также фронтов рекомбинации и волн детонации [41, 149, 150]. Теоретические и численные исследования процесса ионизации и переноса излучения в каналах КСПУ представлены рядом публикаций [1-3, 18-21, 32-39, 123-145] и, как правило, основаны на приближениях ЛТР и МДП.

В данной главе рассмотрена модель течений ионизирующегося газа [40], которая включает систему уравнений поуровневой кинетики и уравнение переноса излучения. Данная модель является наиболее полноценным и сложным звеном в иерархии моделей процесса ионизации. Сложность модели обусловлена многообразием составляющих ее частей и связей между ними. МГД уравнения содержат диссипативные факторы, обусловленные электропроводностью и теплопроводностью, а также интегральный параметр излучения или плотность потока энергии излучения. Уравнение переноса излучения рассматривается для различных диапазонов частот фотонов и содержит коэффициент поглощения и излучательную способность, которые зависят как от параметров среды, так и от населенности уровней энергии. В свою очередь система уравнений поуровневой кинетики, определяющая населенности уровней, включает вероятности различных столкновительных и радиационных процессов, которые также зависят от параметров среды и характеристик излучения. Указанные уравнения необходимо решать совместно в рамках единой эволюционной задачи. Исследование проведено для водородной плазмы, наиболее часто используемой в экспериментах.

### 3.1. Система уравнений поуровневой кинетики

Процессы, сопровождающие течение ионизирующегося газа в канале ускорителя, связаны с трансформацией частиц, взаимодействующих с окружающими атомами, ионами, электронами и излучением. Переход частицы из одного энергетического состояния в другое происходит в результате прямых процессов ионизации и возбуждения электронных оболочек, а также соответствующих им обратных процессов рекомбинации и гашения. Трансформация частиц приводит к изменению их возбужденных состояний, определяемых энергетическими уровнями и соответствующей конфигурацией электронных оболочек. Изменение населенности уровня в любой точке пространства или концентрации частиц, находящихся в определенном энергетическом состоянии, описывается системой уравнений поуровневой кинетики (см., например, [46,55])

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \operatorname{div}(n_k \mathbf{V}) = \sum_{j \neq k} n_j w_{jk} - n_k \sum_{j \neq k} w_{kj}, \quad k = 1, \dots, K, \quad (3.1)$$

где  $n_k$  – населенность  $k$ -го энергетического состояния,  $\mathbf{V}$  – скорость атомов,  $w_{jk}$  – вероятность перехода из  $j$ -го в  $k$ -е состояние,  $K$  – число конфигураций атома. Суммарная концентрация атомов равна

$$n_a = \sum_{k=1}^K n_k. \quad (3.2)$$

Далее правые части уравнений (3.1) будут обозначены через  $\Gamma_k$  для атомов в  $k$ -м энергетическом состоянии. В уравнениях (3.1) вероятности переходов

$$w_{kj} = C_{kj} + R_{kj} \quad (3.3)$$

определяются скоростями процессов, которые обусловлены столкновениями в первую очередь с электронами  $C_{kj}$  и взаимодействием с излучением  $R_{kj}$  [44,55]. Рассмотрим отдельные соотношения для вероятностей или скоростей процессов с размерностью  $[w] = [C] = [R] = c^{-1}$ .

В описании столкновительных процессов участвуют:

1) скорость возбуждения частицы электронным ударом ( $A_k + e \rightarrow A_j + \tilde{e}$ )

$$C_{kj}^{ex} = 1.31 \cdot 10^{-6} \cdot n_e \cdot f_{kj} \cdot \frac{e^{-E_{kj}/T}}{E_{kj} \sqrt{T}} \cdot \ln \left( 1.017 + 0.462 \frac{T}{E_{kj}} \right),$$

2) скорость гашения возбуждения электронным ударом ( $A_j + e \rightarrow A_k + \tilde{e}$ )

$$C_{kj}^{dex} = 1.31 \cdot 10^{-6} \cdot n_e \cdot \frac{g_k}{g_j} \cdot \frac{f_{kj}}{E_{kj} \sqrt{T}} \cdot \ln \left( 1.017 + 0.462 \frac{T}{E_{kj}} \right),$$

3) скорость ионизации атома электронным ударом ( $A_k + e \rightarrow A^+ + \tilde{e} + \hat{e}$ )

$$C_k^{ion} = 3.02 \cdot 10^{-6} \cdot n_e \cdot \frac{P_1(E_k/T)}{E_k \sqrt{T}},$$

4) скорость тройной рекомбинации ( $A^+ + \tilde{e} + \hat{e} \rightarrow A_k + e$ )

$$C_k^{rec} = 5.0 \cdot 10^{-28} \cdot n_e^2 \cdot \frac{g_k}{g_{ion}} \cdot \frac{P_1(E_k/T) \cdot e^{E_k/T}}{E_k \cdot T^2}.$$

В этих соотношениях температура и энергия выражены в эВ,  $g_k$  –

статистический вес  $k$ -го состояния атома,  $P_1(x) = \int_x^\infty t^{-1} e^{-t} dt$  – первая

интегральная показательная функция, а  $f_{kj}$  – силы осцилляторов для

перехода  $k \rightarrow j$ , которые представлены, например, в [55].

Скорости радиационных процессов включают:

1) скорость поглощения излучения ( $A_k + h\nu_{kj} \rightarrow A_j$ )

$$R_{kj}^{abs} = \frac{4 \pi^2 e^2}{m_e c} f_{kj} \cdot \int_0^\infty c U_\nu \phi_{kj}(\nu) \frac{d\nu}{h\nu},$$

2) скорость эмиссии излучения ( $A_j \rightarrow A_k + h\nu_{kj}$ )

$$R_{jk}^{em} = \frac{4 \pi^2 e^2}{m_e c} \cdot \frac{n_k^*}{n_j^*} \cdot f_{kj} \cdot \int_0^\infty \left( c U_\nu + \frac{2 h \nu^3}{c^2} \right) \phi_{kj}(\nu) e^{-h\nu/k_B T} \frac{d\nu}{h\nu},$$

3) скорость ионизации частицы в  $k$ -м состоянии ( $A_k + h\nu_k \rightarrow A^+ + e$ )

$$R_k^{ion} = 4 \pi \int_0^\infty \sigma_k^{PI}(\nu) \cdot c U_\nu \cdot \frac{d\nu}{h\nu},$$

4) скорость рекомбинации иона с испусканием фотона:  $A^+ + e \rightarrow A_k + h\nu_k$

$$R_k^{rec} = 4\pi \cdot \frac{n_e n_k^*}{n_e^* \cdot n_i^*} \cdot \int_0^\infty \left( c U_\nu + \frac{2 h \nu^3}{c^2} \right) \sigma_k^{PI}(\nu) e^{-h\nu/k_B T} \frac{d\nu}{h\nu}.$$

Здесь  $\nu$  – спектральная частота излучения,  $\phi_{kj}(\nu)$  – профиль спектральной линии, нормированный на единицу и имеющий размерность  $[\phi_{kj}(\nu)] = \text{с}$ ,  $\sigma_k^{PI}(\nu)$  – сечение фотоионизации из  $k$ -го состояния, размерность которого равна  $[\sigma_k^{PI}(\nu)] = \text{см}^2$ ,  $c U_\nu$  – спектральная плотность энергии излучения, выраженная в потоковых единицах и имеющая размерность  $[c U_\nu] = \text{эрг}/\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{Гц} \cdot \text{стерад}$ ,  $n_k^*$  – равновесная населенность  $k$ -го уровня.

Профиль линии, учитывающий разные по природе механизмы уширения, определяется по формуле Фойгта (см. п. 1.4), а расчет сечения фотоионизации осуществляется в приближении Крамерса (см. п. 1.4).

### 3.2. МГД уравнения с учетом поуровневой кинетики

Для изучения процесса ионизации в плотной среде и динамики потоков ионизирующегося газа используется модифицированная МГД модель с учетом поуровневой кинетики, переноса излучения, а также электропроводности и теплопроводности. Зарядовое число для водородной плазмы равно  $Z_i = 1$ .

Рассмотрим уравнения переноса многокомпонентной среды [42], состоящей из ионов, электронов и атомов, находящихся в различных энергетических состояниях, а также уравнения Максвелла для электромагнитного поля. Учитывая характерные скорости потоков  $V \ll c$ ,

пренебрегаем током смещения  $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  в уравнении  $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ .

Поскольку  $m_e \ll m_i = m_a = m$ , инерцией электронов  $m_e \frac{d \mathbf{V}_e}{d t}$  также

пренебрегаем. Пусть  $n_k$  отвечает концентрации атомов или их населенности для  $k$ -го энергетического состояния, где  $k = 1, \dots, K$ . Тогда имеем систему:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \operatorname{div} n_k \mathbf{V}_k = \Gamma_k, \quad (3.4a)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} n_i \mathbf{V}_i = \Gamma_i, \quad (3.4б)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} n_e \mathbf{V}_e = \Gamma_e, \quad (3.4в)$$

$$m n_k \frac{d \mathbf{V}_k}{d t} + \nabla P_k = \mathbf{R}_{ke} + \mathbf{R}_{ki}, \quad (3.5a)$$

$$m n_i \frac{d \mathbf{V}_i}{d t} + \nabla P_i = e n_i \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_i, \mathbf{H}] \right) + \sum_{k=1}^K \mathbf{R}_{ik} + \mathbf{R}_{ie}, \quad (3.5б)$$

$$\nabla P_e = -e n_e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_e, \mathbf{H}] \right) + \sum_{k=1}^K \mathbf{R}_{ek} + \mathbf{R}_{ei}, \quad (3.5в)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} k_B n_k T_k \right) + \operatorname{div} \left( \frac{3}{2} k_B n_k T_k \mathbf{V}_k \right) + \frac{m \mathbf{V}_k^2}{2} \Gamma_k + P_k \operatorname{div} \mathbf{V}_k = -\operatorname{div} \mathbf{q}_k + Q_k, \quad (3.6a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} k_B n_i T_i \right) + \operatorname{div} \left( \frac{3}{2} k_B n_i T_i \mathbf{V}_i \right) + \frac{m \mathbf{V}_i^2}{2} \Gamma_i + P_i \operatorname{div} \mathbf{V}_i = -\operatorname{div} \mathbf{q}_i + Q_i, \quad (3.6б)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} k_B n_e T_e \right) + \operatorname{div} \left( \frac{3}{2} k_B n_e T_e \mathbf{V}_e \right) + \frac{m \mathbf{V}_e^2}{2} \Gamma_e + P_e \operatorname{div} \mathbf{V}_e = -\operatorname{div} \mathbf{q}_e + Q_e, \quad (3.6в)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad (3.7)$$

$$P_k = k_B n_k T_k, \quad P_i = k_B n_i T_i, \quad P_e = k_B n_e T_e. \quad (3.8)$$

Индексы  $i, e, k$  в системе соответствуют компонентам среды: ионам, электронам и атомам, находящимся в  $k$ -м энергетическом состоянии. Величины  $\Gamma_k, \Gamma_i$  и  $\Gamma_e$  определяют скорость рождения частиц данного сорта в единице объема в результате различных процессов, рассмотренных в предыдущем разделе.

Концентрация среды в экспериментах является достаточно высокой  $n = 10^{16} \div 10^{18} \text{ см}^{-3}$ . При этом речь идет о генерации низкотемпературной

плазмы с температурой порядка  $T \sim 1 \text{ эВ}$ . Поэтому радиус Дебая  $R_D = \sqrt{k_B T / 4 \pi e^2 n_e}$  является крайне малой величиной по сравнению с характерными размерами системы и пространственными масштабами процессов, включая толщину фронта ионизации. В этом случае среду можно считать квазинейтральной  $n_i = n_e$  и  $\Gamma_i = \Gamma_e$ .

Плотность и суммарная концентрация тяжелых частиц определяются соотношениями  $\rho = m n$ ,  $n = n_i + n_a$  с учетом (3.2). Для достаточно плотной среды допускается, что скорости всех компонент равны между собой  $\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_i = \mathbf{V}_e = \mathbf{V}$ . Незначительные отличия в скоростях электронной и ионной компонент среды, а также между скоростями ионов и атомов, можно оценить с помощью формул, представленных в [42]. Суммируя уравнения (3.4а), (3.4б) и (3.4в), приходим к закону сохранения массы  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{V} = 0$ ,

согласно которому имеем  $m_i \Gamma_i + \sum_{k=1}^K m_a \Gamma_k = 0$ . Условие

квазинейтральности  $n_e = n_i = n - n_a$  определяет концентрацию электронов.

В правой части уравнений переноса импульса (3.5а), (3.5б) и (3.5в) силы взаимного трения  $\mathbf{R}$  соответствуют взаимодействию между частицами различного сорта. С учетом закона сохранения импульса при взаимодействии частиц различного сорта справедливы соотношения:  $\mathbf{R}_{kj} = -\mathbf{R}_{jk}$ . Складывая уравнения переноса импульса для всех компонент среды с учетом сохранения импульса при столкновениях, приходим к уравнению движения многокомпонентной плазмы, которое представляет собой суммарный баланс импульса  $\rho \frac{d \mathbf{V}}{d t} + \nabla P = \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}]$ . В данном уравнении давление отвечает

сумме всех парциальных давлений  $P = P_i + P_e + \sum_{k=1}^K P_k$ , а ток в плазме

формально определяется с помощью соотношения  $\mathbf{j} = e n_i \mathbf{V}_i - e n_e \mathbf{V}_e$ . При

этом в рамках одножидкостного приближения при условии  $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_i = \mathbf{V}_e = \mathbf{V}$  плазменный ток вычисляется с помощью соотношения (3.7). В итоговом уравнении движения отсутствует электрическое поле при условии  $n_e = n_i$ .

Перенос энергии для компонент среды определяется уравнениями, которые являются следствием кинетических уравнений Больцмана с интегральным столкновительным членом в форме Больцмана-Ландау. Они могут быть представлены в различных формах. В частности, изменение кинетической энергии можно исключить с помощью уравнения движения для каждой из компонент. В результате получим уравнения баланса тепла, например, в виде уравнений (3.6а), (3.6б) и (3.6в), в которых слагаемые  $Q_e$ ,  $Q_i$  и  $Q_k$  отвечают выделению тепла в среде частиц данного сорта вследствие столкновений с частицами других сортов. Учитывая законы сохранения при столкновениях, имеем  $Q_{ei} + Q_{ie} = -\mathbf{R}_{ei} \mathbf{V}_e - \mathbf{R}_{ie} \mathbf{V}_i = -\mathbf{R}_{ei} (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i)$ .

Следуя работе [42], запишем  $\mathbf{R}_{ei} = -f_{ei} (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i)$ , где  $f_{ei} = n_e n_i m_{ei} B_{ei}$ ,  $B_{ei} = \frac{4 \sqrt{2 \pi} \Lambda e^4}{3 \sqrt{m_{ei}} (k_B T)^{3/2}}$ ,  $\Lambda$  – кулоновский логарифм. Соответственно получим, что  $Q_{ei} + Q_{ie} = \frac{n_e m_{ei}}{\tau_{ei}} (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i)^2$ , где  $\tau_{ei} = \frac{3 \sqrt{m_{ei}} (k_B T)^{3/2}}{4 \sqrt{2 \pi} \Lambda e^4 n_i}$  и

приведенная масса равна  $m_{ei} \cong m_e$ . Основной вклад в выделение тепла вносит взаимодействие электронов с тяжелыми частицами. Взаимодействие электронов с атомами, находящимися в  $k$ -ом энергетическом состоянии, дает

$Q_{ek} + Q_{ke} = \frac{n_e m_e}{\tau_{ek}} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_e)^2$ , где вектор  $\mathbf{V}$  отвечает скорости тяжелых частиц.

Ток в плазме формально можно представить с помощью соотношения  $\mathbf{j} = e n_e (\mathbf{V} - \mathbf{V}_e)$ . Тогда для суммарного тепла, выделяемого в результате трения электронов о тяжелые частицы, имеем

$$Q_{mp} = n_e m_e (\mathbf{V} - \mathbf{V}_e)^2 \left( \frac{1}{\tau_{ei}} + \sum_{k=1}^K \frac{1}{\tau_{ek}} \right) = \frac{m_e \mathbf{j}^2}{n_e e^2} \left( \frac{1}{\tau_{ei}} + \frac{1}{\tau_{ea}} \right).$$

Данное тепло можно представить в обычном виде  $Q_{mp} = \mathbf{j}^2 / \sigma$ , где проводимость определяется через сумму частот столкновений электрона с тяжелыми частицами с помощью следующего соотношения:

$$\sigma = \frac{n_e e^2}{m_e (v_{ea} + v_{ei})}, \quad v_{ea} = \sum_{k=1}^K v_{ek} \quad (3.9)$$

где величина  $v_{ei} = 1/\tau_{ei}$  отвечает частоте столкновений электронов с ионами.

Газодинамической вязкостью компонент среды пренебрегаем в силу пренебрежимо малого влияния соответствующих диссипативных факторов. В тоже время микроскопические тепловые потоки  $\mathbf{q}_e$ ,  $\mathbf{q}_i$  и  $\mathbf{q}_a$ , обусловленные в первую очередь теплопроводностью, учтем. В рассматриваемом диапазоне параметров стандартные оценки передачи тепла и характерного времени обмена энергией между компонентами показывают, что  $T_i \approx T_e = T$ . Это подтверждают экспериментальные данные. Возможное незначительное превышение электронной температуры  $T_e$  над  $T_i$  и  $T_a$  не является существенной деталью проводимых исследований. Соответственно полагаем, что  $T_a = T_i = T_e = T$ . Итоговое уравнение баланса энергии для многокомпонентной среды получается суммированием балансов энергии (3.6а), (3.6б) и (3.6в) для компонент.

Пренебрегая инерцией электронов, из уравнения переноса импульса (3.5в) для электронной компоненты следует закон Ома в обобщенном виде. Учитывая выше приведенные соотношения, слагаемые в правой части уравнения (3.5в) можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{R}_{ei} + \sum_{k=1}^K \mathbf{R}_{ek} = \frac{n_e m_e}{\tau_{ei}} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_e) + \sum_{k=1}^K \frac{n_e m_e}{\tau_{ek}} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_e) = \frac{m_e}{e \tau_{ei}} \mathbf{j} + \sum_{k=1}^K \frac{m_e}{e \tau_{ek}} \mathbf{j} = \frac{e n_e}{\sigma} \mathbf{j},$$

где проводимость  $\sigma$  определяется соотношениями (3.9). В одножидкостном приближении  $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_i = \mathbf{V}_e = \mathbf{V}$ , пренебрегая слагаемым  $\nabla P_e$  в уравнении (3.5в) при наличии сильных магнитных полей, приходим к закону Ома в

классической форме  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{V}, \mathbf{H}]$ , где ток в плазме вычисляется с помощью соотношения (3.7), а проводимость определяется через сумму частот столкновений электрона с тяжелыми частицами: ионами и атомами.

Модифицированные МГД уравнения с учетом поуровневой кинетики и переноса излучения можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_k}{\partial t} + \operatorname{div}(n_k \mathbf{V}) &= \sum_{j \neq k} n_j w_{jk} - n_k \sum_{j \neq k} w_{kj}, \quad k = 1, \dots, K, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) &= 0, \quad \rho \frac{d \mathbf{V}}{d t} + \nabla P = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}, \quad \frac{d}{d t} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla), \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \operatorname{div}(\rho \varepsilon \mathbf{V}) + P \operatorname{div} \mathbf{V} &= \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} - \operatorname{div} \mathbf{q} - \operatorname{div} \mathbf{W}, \quad (3.10) \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}) - c \operatorname{rot} \frac{\mathbf{j}}{\sigma}, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \\ P &= P_e + P_i + \sum_{k=1}^K P_k = (1 + \alpha)(c_p - c_v) \rho T, \quad \varepsilon = (1 + \alpha) c_v T + \varepsilon_I, \\ k_B / m = R = c_p - c_v = c_v (\gamma - 1), \quad n_e = n_i = n - \sum_{k=1}^K n_k, \quad \mathbf{q} &= -\kappa_{e \rightarrow a} \nabla T. \end{aligned}$$

Здесь  $\rho = mn$  и  $n = n_i + \sum_{k=1}^K n_k = n_i + n_a$  – плотность и концентрация тяжелых частиц,  $P$  – суммарное давление,  $\mathbf{q}$  – тепловой поток,  $\kappa_{e \rightarrow a}$  – коэффициент электрон-атомарной теплопроводности,  $\mathbf{W}$  – плотность потока энергии излучения. Степень ионизации вычисляется с помощью соотношения  $\alpha = n_e / n$ . В понятие внутренней энергии на единицу массы  $\varepsilon$  включается дополнительное слагаемое  $\varepsilon_I$ , ответственное за потери энергии на ионизацию. Кроме того, в уравнении состояния среды можно учесть потери энергии на диссоциацию молекул. В уравнении для внутренней энергии джоулев нагрев  $Q_{mp} = \mathbf{j}^2 / \sigma$  за счет взаимодействия электронов с ионами существенно превосходит тепло, выделяемое при трении между

собой остальных компонент. Систему (3.10) вместе с представленными способами определения  $\sigma$  и  $\kappa_{e \rightarrow a}$  следует рассматривать как обобщение классической магнитной газодинамики на случай частично ионизованной многокомпонентной плазмы.

### 3.3. Теплопроводность и электропроводность среды

Расчет теплопроводности проводился с использованием формул для электронной теплопроводности поперек азимутального магнитного поля в канале плазменного ускорителя  $\kappa_{\perp e}$  и теплопроводности атомов  $\kappa_a$ , которые представлены в разделе 1.1. Учитывая переход от малой степени ионизации к состоянию с  $\alpha = 1$ , электрон-атомарная теплопроводность вычисляется по формуле [77]

$$\kappa_{a \rightarrow e} = \kappa_{\perp e} \left( 1 + \sqrt{2} \frac{m_e}{m_i} \frac{\kappa_{\perp e}}{\kappa_a} \frac{S_{ea}}{S_{aa}} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{-1} + \kappa_a \left( 1 + \frac{S_{ai}}{S_{aa}} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{-1},$$

которая содержит отношения эффективных сечений рассеяния частиц  $S_{ea} / S_{aa} = 1.5 \cdot 10^{-2}$  и  $S / S_{aa} = 1.44 \cdot T^{0.16}$ .

Видно, что при больших степенях ионизации заметную роль в суммарном теплопереносе играет классическая электронная теплопроводность поперек магнитного поля, а при малых степенях ионизации основной вклад вносит атомарная теплопроводность. Численные эксперименты показывают, что роль теплопроводности незначительна.

В соответствии с (3.9) электропроводность среды в уравнениях равна  $\sigma = e^2 n_e / m_e \nu_e$ , где средняя частота столкновений электронов с другими частицами  $\nu_e$  складывается из частот столкновений с атомами и ионами:

$$\nu_e = \nu_{ei} + \sum_{k=1}^K \nu_{ek} = \nu_{ei} + \nu_{ea}. \text{ Частоты столкновений можно представить в}$$

общем виде  $\nu_{ea} = n_a \langle V_e \rangle S_{ea}$ ,  $\nu_{ei} = n_i \langle V_e \rangle S_{ei}$ , где  $S_{ea}$ ,  $S_{ei}$  – эффективные сечения столкновений. В данной главе также, как в ряде предшествующих

исследований (см., например, [32-39, 123-126, 132-140]), рассматривается процесс ионизации водорода, для которого эффективное сечение столкновения электронов с атомами определяется с помощью соотношения  $S_{ea}^H = 1.2 \cdot 10^{-13} / \sqrt{T}$  [см<sup>2</sup>] в соответствии с работой [77]. С учетом формулы (3.9) имеем следующие итоговые соотношения для электропроводности

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}, \quad \sigma_1 = \frac{e^2 n_e}{m_e n_a \langle V_e \rangle S_{ea}}, \quad \sigma_2 = \frac{e^2 n_e \tau_{ei}}{m_e}, \quad (3.11)$$

где величина  $\tau_{ei}$  отвечает указанному характерному времени столкновений электронов с ионами, указанному выше. Электропроводность среды является одним из наиболее существенных факторов в процессе ионизации.

### 3.4. Перенос излучения в квазиодномерном приближении

Модель течений ионизирующегося газа с учетом поуровневой кинетики и переноса излучения в канале КСПУ реализована в квазиодномерном приближении (см. п. 2.2). Переход от двумерной системы МГД уравнений к их квазиодномерному представлению эффективно сокращает время расчета. При этом мы пренебрегаем некоторыми эффектами, которые имеют двумерную природу, например, взаимодействием со стенками канала и образованием области компрессии. В то же время ионизация, происходящая в пределах узкого фронта, и процесс ускорения плазмы за фронтом могут быть рассмотрены в квазиодномерном приближении. В связи с этим возникает необходимость использовать упрощенную модель переноса излучения, учитывающую при этом трехмерную геометрию канала.

Ниже кратко изложен эффективный способ решения уравнения переноса излучения на основе метода характеристик для квазиодномерной модели течения ионизирующегося газа и плазмы. Этот метод учитывает геометрию канала, спектр излучения, позволяет реализовать программу в параллельной версии. Разработанная методика использована в расчетах на основе квазиодномерной РМГД модели [128].

Стационарное уравнение переноса излучения (1.8) содержит коэффициент поглощения  $\kappa_\nu(\mathbf{r})$  и излучательную способность  $\eta_\nu(\mathbf{r})$ . Решением уравнения (1.8) является интенсивность  $I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$  как функция координаты  $\mathbf{r}$ , угла  $\mathbf{\Omega}$  и частоты фотонов  $\nu$ . По известной интенсивности определяются ее угловые моменты – спектральная плотность энергии излучения  $U_\nu(\mathbf{r})$  и спектральный поток энергии излучения  $\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r})$ :

$$U_\nu(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_0^{4\pi} I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) d\mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}) = \int_0^{4\pi} I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) \mathbf{\Omega} d\mathbf{\Omega}. \quad (3.12)$$

РМГД уравнения включают интегральный по спектру поток  $\mathbf{W}(\mathbf{r})$  энергии излучения (см. (1.6)). Для удобства изложения рассмотрим одногрупповое приближение и опустим индекс  $\nu$  в (3.12).

На рис. 29 представлена геометрия канала и дискретизация пространства, а также линия, отмеченная красным цветом, на которой вычисляется решение в квазиодномерной модели.

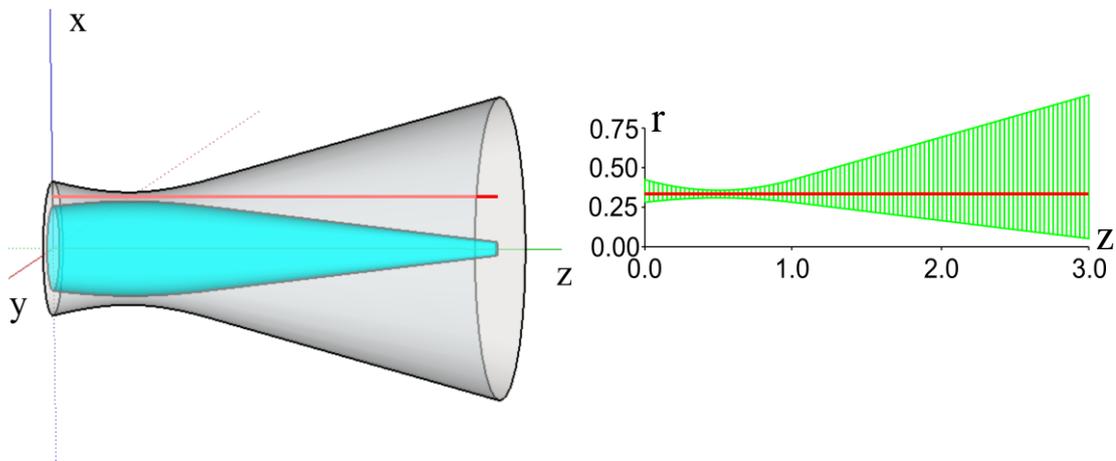


Рис. 29. Расчетная область и структура сетки в квазиодномерной модели

Характеристиками уравнения переноса излучения (1.6) являются лучи, вдоль которых распространяется излучение. Явление рефракции или преломления лучей в данной работе не учитывается.

Метод решение задачи о переносе излучения с помощью характеристик представлен в ряде работ (см., например, [33,34,44,45,49-52,96-99,126]). На

рис. 30 изображена пространственная сетка, где синими точками отмечены узлы, в которых определяются интенсивность, коэффициент поглощения и излучательная способность. В пределах каждой ячейки данные величины считаются постоянными. Решение на характеристике с направлением  $\Omega_i$  в точке  $n$  строится от границы расчетной области с известным значением интенсивности  $I(\mathbf{r}_b, \Omega_i)$ :

$$I(\mathbf{r}_n, \Omega_i) = I(\mathbf{r}_b, \Omega_i) \cdot e^{-\tau_{nk}^i} + \sum_{j=n+1}^k \frac{\eta_j}{\kappa_j} \left( 1 - e^{-\tau_{jj}^i} \right) \cdot e^{-\tau_{nj}^i} + \frac{\eta_n}{\kappa_n} \left( 1 - e^{-\tau_{nn}^i} \right), \quad (3.13)$$

где  $\tau_{nk}^i = \sum_{j=n, \dots, k} \kappa_j \cdot \Delta l_j^i$  – оптическая длина пути фотона вдоль заданной

характеристики с направлением  $\Omega_i$  от ячейки  $n$  до ячейки  $k$ ,  $\Delta l_j^i$  – пространственная длина пути внутри ячейки  $j$ , в данном случае  $\Delta l_j^i = \Delta z_j / \cos \theta_i$ ,  $b$  – индекс граничного элемента,  $i$  – индекс направления характеристики на рис. 30. Далее используем обозначение  $I_{ni} \equiv I(\mathbf{r}_n, \Omega_i)$ .

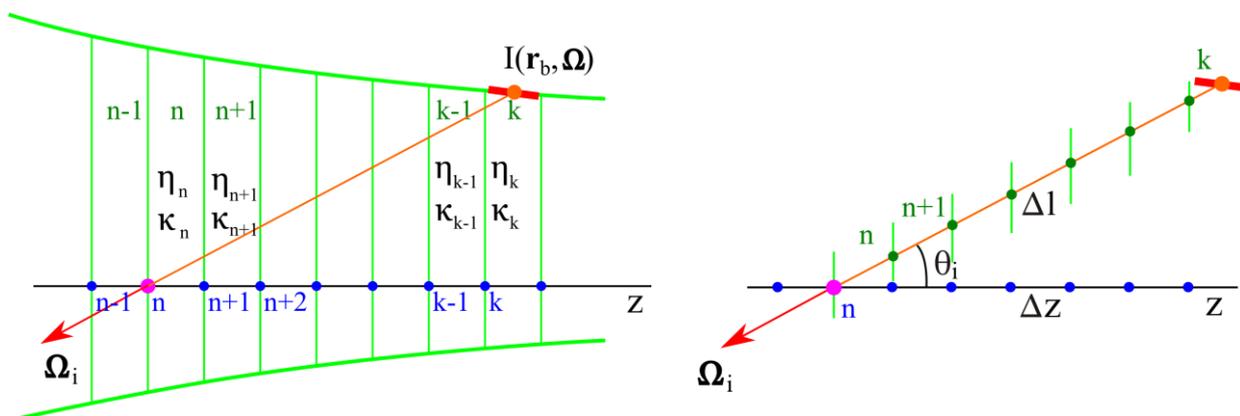


Рис. 30. Пересечение луча с границами ячеек

Число слагаемых в сумме (3.13) равно количеству сегментов или ячеек, пересекаемых характеристикой. В результате на заданных пространственной и угловой сетках рассчитываются интенсивности излучения для всех лучей и узлов  $\{I(\mathbf{r}_n, \Omega_i)\}_{n=1, \dots, N_z}^{i=1, \dots, N_\Omega}$ , где  $N_\Omega$  – число лучей угловой сетки. Для

найденных интенсивностей  $\{I_{ni}\}_{n=1, \dots, N_z}^{i=1, \dots, N_\Omega}$  с помощью соотношений (3.12) вычисляются плотность энергии  $U_n = U(\mathbf{r}_n)$  и плотность потока энергии излучения  $\mathbf{W}_n = \mathbf{W}(\mathbf{r}_n)$  в узлах пространственной сетки. При этом интегралам по углу отвечают суммы, в которых индекс частоты для удобства опущен:

$$U_n = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{N_\Omega} I_{ni} \Delta \Omega_i, \quad \mathbf{W}_n = \sum_{i=1}^{N_\Omega} I_{ni} \mathbf{\Omega}_i \Delta \Omega_i. \quad (3.14)$$

### *Способ оптимизации расчета переноса излучения*

Количество операций в методе длинных характеристик и соответственно время расчета зависит от количества лучей  $N_\Omega$  угловой сетки. Для квазиодномерных распределений температуры и плотности можно существенно сократить время решения задачи о переносе излучения, учитывая слоистую структуру распределения термодинамических параметров в канале. Суммирование по направлениям угловой сетки можно заменить суммированием по элементам пространственной сетки или ячейкам. При этом сумму экспонент в формулах (3.13) и (3.14) по направлениям лучей, попадающих на определенный элемент пространственной сетки, можно заменить одной экспонентой от некоторой табулированной функции. Это позволяет существенно уменьшить

количество вычисляемых экспонент  $\sum_{j=1}^N \alpha_j e^{-\tau \beta_j} \approx a e^{-b(\tau)}$  (см. рис. 31).

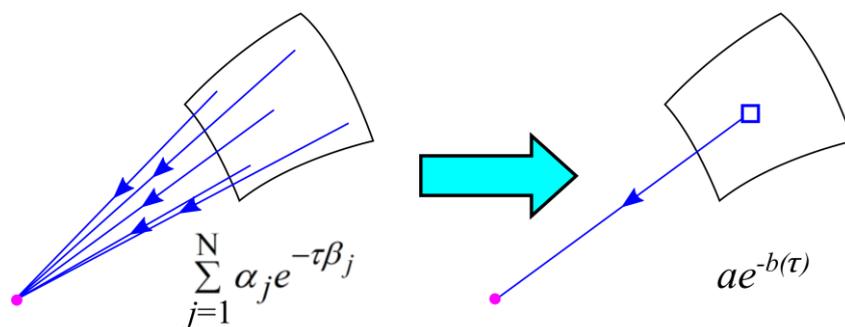


Рис. 31. Иллюстрация замены вычисления суммы экспонент

Подробная трассировка исключает теневые области. В соответствии с рис. 32 обозначим через  $O_{nc}$  группу лучей, идущих от слоя  $c$  и приходящих в узел  $n$  расчетной сетки. На рис. 32 внешняя граница слоя  $c$  выделена оранжевым цветом. Тогда выражения (3.14) перепишем следующим образом:

$$U_n = \frac{1}{c} \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{i \in O_{nc}} I_{ni} \Delta \Omega_i, \quad W_n = \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{i \in O_{nc}} I_{ni} \Omega_i \Delta \Omega_i.$$

В данных соотношениях рассмотрим более подробно суммы по группе лучей  $O_{nc}$  и введем обозначение:

$$U_{nc} = \frac{1}{c} \sum_{i \in O_{nc}} I_{ni} \Delta \Omega_i, \quad W_{nc} = \sum_{i \in O_{nc}} I_{ni} \Omega_i \Delta \Omega_i. \quad (3.15)$$

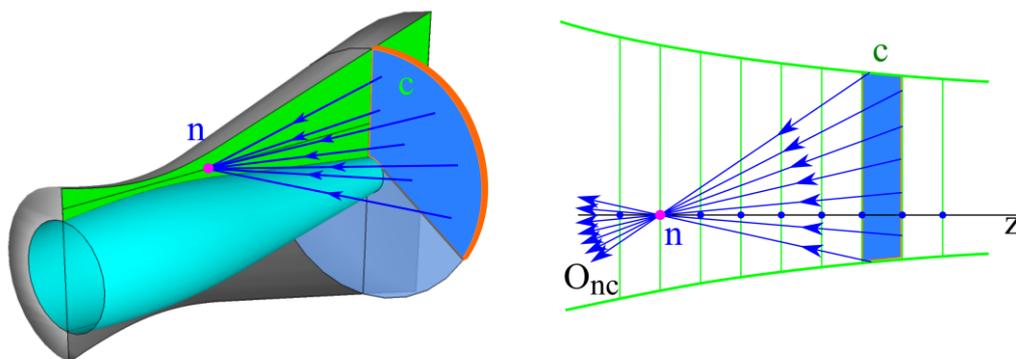


Рис. 32. Трассировка лучей, идущих через некоторый слой

Учтем, что задача одномерная и нас интересует поток в направлении оси  $z$ . Суммы (3.15) распишем более подробно:

$$U_{nc} = \frac{1}{c} \frac{\eta_c}{\kappa_c} \sum_{i \in O_{nc}} \left( 1 - e^{-\tau_{cc}^i} \right) \cdot e^{-\tau_{nc-1}^i} \Delta \Omega_i, \quad (3.16)$$

$$W_{znc} = \frac{\eta_c}{\kappa_c} \sum_{i \in O_{nc}} \left( 1 - e^{-\tau_{cc}^i} \right) \cdot e^{-\tau_{nc-1}^i} \cos \theta_i \Delta \Omega_i, \quad (3.17)$$

где  $c$  – индекс ячейки. Длина оптического пути луча от ячейки  $c$  в узел  $n$  вычисляется как сумма:

$$\tau_{nc}^i = \sum_{j=n}^c \kappa_j \cdot \Delta l_j^i = \sum_{j=n}^c \kappa_j \cdot \Delta z_j / \cos \theta_1.$$

Выделим зависимость от направления луча. Для этого введем величину

$$\tau_{nc} = \sum_{j=n}^c \kappa_j \cdot \Delta z_j \text{ и запишем}$$

$$\tau_{nc}^i = \tau_{nc} / \cos \theta_1. \quad (3.18)$$

Подставив (3.18) в (3.16) и (3.17), приходим к следующим соотношениям

$$U_{nc} = \frac{1}{c} \frac{\eta_c}{\kappa_c} \sum_{i \in O_{nc}} \left( e^{-\tau_{nc-1}/\cos \theta_1} - e^{-\tau_{nc}/\cos \theta_1} \right) \cdot \Delta \Omega_i,$$

$$W_{znc} = \frac{\eta_c}{\kappa_c} \sum_{i \in O_{nc}} \left( e^{-\tau_{nc-1}/\cos \theta_1} - e^{-\tau_{nc}/\cos \theta_1} \right) \cos \theta_1 \Delta \Omega_i,$$

в которых присутствуют типичные суммы:

$$P_{nc}(\tau) = \sum_{i \in O_{nc}} e^{-\tau/\cos \theta_1} \Delta \Omega_i,$$

$$R_{nc}(\tau) = \sum_{i \in O_{nc}} e^{-\tau/\cos \theta_1} \cos \theta_1 \Delta \Omega_i.$$

С учетом новых обозначений  $P_{nc}(\tau)$  и  $R_{nc}(\tau)$  перепишем формулы для вычисления величин  $U_n$  и  $W_{zn}$ :

$$U_n = \frac{1}{c} \sum_{c=1}^{N_{nc}} \frac{\eta_c}{\kappa_c} \cdot (P_{nc-1}(\tau_{nc-1}) - P_{nc}(\tau_{nc})), \quad (3.19)$$

$$W_{zn} = \sum_{c=1}^{N_{nc}} \frac{\eta_c}{\kappa_c} \cdot (R_{nc-1}(\tau_{nc-1}) - R_{nc}(\tau_{nc})), \quad (3.20)$$

где  $N_{nc}$  – количество лучей, приходящих в точку  $\mathbf{n}$  от слоя  $\mathbf{c}$ .

Функции  $P_{nc}(\tau)$  и  $R_{nc}(\tau)$  в соотношениях (3.19) и (3.20) можно представить следующим образом:

$$P_{nc}(\tau) \approx \Omega_{nc} \cdot e^{-P_{nc}(\tau)}, \quad R_{nc}(\tau) \approx \Omega_{znc} \cdot e^{-r_{nc}(\tau)},$$

где  $p_{nc}(\tau)$  и  $r_{nc}(\tau)$  – некоторые параметризованные функции, величина  $\Omega_{nc} = P_{nc}(0) = \sum_{i \in O_{nc}} \Delta \Omega_i$  отвечает телесному углу видимости слоя  $\mathbf{c}$  из точки  $\mathbf{n}$ , величину  $\Omega_{znc} = R_{nc}(0) = \sum_{i \in O_{nc}} \cos \theta_1 \Delta \Omega_i$  можно интерпретировать как проекцию на ось  $z$  вектора телесного угла видимости слоя  $\mathbf{c}$  из точки  $\mathbf{n}$ . Соответственно перепишем выражения для  $U_{\mathbf{n}}$  и  $W_{z\mathbf{n}}$ :

$$U_{\mathbf{n}} = \frac{1}{c} \sum_{c=1}^{N_{nc}} \frac{\eta_c}{\kappa_c} \cdot \Omega_{nc} \left( e^{-P_{nc}(\tau_{nc-1})} - e^{-P_{nc}(\tau_{nc})} \right), \quad (3.21)$$

$$W_{z\mathbf{n}} = \sum_{c=1}^{N_{nc}} \frac{\eta_c}{\kappa_c} \cdot \Omega_{znc} \left( e^{-r_{nc}(\tau_{nc-1})} - e^{-r_{nc}(\tau_{nc})} \right). \quad (3.22)$$

В данном случае суммирование происходит не по направлениям лучей в количестве  $N_{\Omega}$ , а по слоям  $\mathbf{c}$  количеством слагаемых, равным  $N_{nc}$ . Каждое из этих слагаемых содержит только две экспоненты. При этом время расчета не зависит от качества трассировки и количества лучей угловой сетки, так как трассировка выполняется один раз на подготовительном этапе для определения функций-параметров  $p_{nc}(\tau)$  и  $r_{nc}(\tau)$  в (3.21) и (3.22). Подготовительная процедура может быть выполнена сколь угодно подробно.

### *Адаптированный метод коротких характеристик*

Метод коротких характеристик является одним из методов численного решения уравнения переноса излучения. Идея метода заключается в том, что интенсивность излучения в данной точке пространственной сетки определяется только ее значениями в соседних точках. В случае оптически плотной среды, когда излучение становится локализованным, метод коротких характеристик позволяет получить хорошие результаты. Для прозрачной среды этот метод также часто используется. В данном разделе рассматривается адаптация метода коротких характеристик к

рассматриваемой задаче, что позволяет значительно уменьшить время расчета. В методе, основанном на «суммировании по элементам объема», количество вычислений экспонент было равно  $2 \cdot N_z \cdot (N_z + 1) \approx 8 \cdot 10^4$  при количестве узлов, равном, например,  $N_z = 201$ . В методе коротких характеристик это количество будет равно  $2 \cdot N_z \cdot 2 \approx 8 \cdot 10^2$ , т.к. решение в данной точке определяется только по двум соседним ячейкам. Для решения используем формулы, аналогичные (3.21) и (3.22), проводя суммирование только по двум соседним ячейкам (см. рис. 33). Обозначим излучение, идущее слева направо, верхним индексом «+», а излучение, идущее справа налево, – верхним индексом «-». Тогда для плотности энергии излучения можно написать:

$$U_n = U_n^+ + U_n^-,$$

$$U_n^+ = \frac{1}{c} \frac{\eta_{n-1}}{\kappa_{n-1}} \cdot \Omega_{n n-1} \left( 1 - e^{-P_{n n-1}(\tau_{n n-1})} \right) + U_{n-1}^+ \cdot \frac{\Omega_{n n-1}}{\Omega_{n n-2}} \cdot e^{-P_{n n-1}(\tau_{n n-1})},$$

$$U_n^- = \frac{1}{c} \frac{\eta_n}{\kappa_n} \cdot \Omega_{n n} \left( 1 - e^{-P_{n n}(\tau_{n n})} \right) + U_{n+1}^- \cdot \frac{\Omega_{n n}}{\Omega_{n n+1}} \cdot e^{-P_{n n}(\tau_{n n})}.$$

Аналогично для плотности потока энергии излучения получим соотношения, в которых  $W_n$  отвечает проекции вектора потока на ось z:

$$W_n = W_n^+ - W_n^-,$$

$$W_n^+ = \frac{\eta_{n-1}}{\kappa_{n-1}} \cdot \Omega_{n n-1} \left( 1 - e^{-r_{n n-1}(\tau_{n n-1})} \right) + W_{n-1}^+ \cdot \frac{\Omega_{n n-1}}{\Omega_{n n-2}} \cdot e^{-r_{n n-1}(\tau_{n n-1})},$$

$$W_n^- = \frac{\eta_n}{\kappa_n} \cdot \Omega_{n n} \left( 1 - e^{-r_{n n}(\tau_{n n})} \right) + W_{n+1}^- \cdot \frac{\Omega_{n n}}{\Omega_{n n+1}} \cdot e^{-r_{n n}(\tau_{n n})}.$$

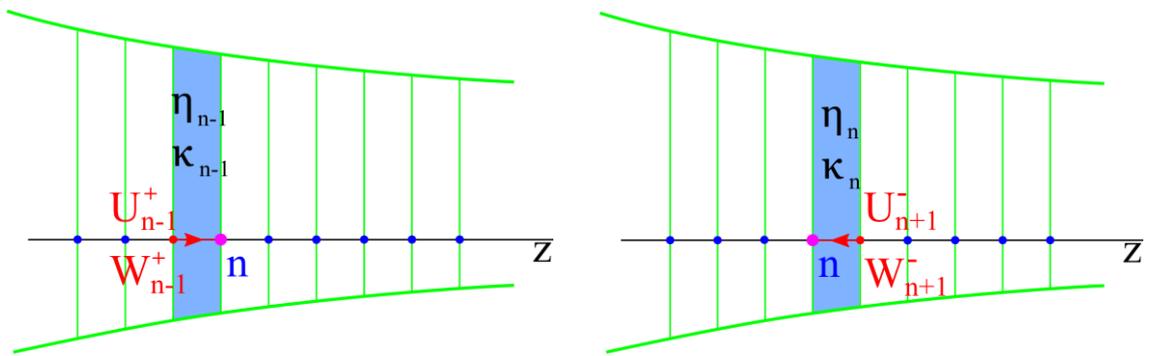


Рис. 33. Учет излучения, приходящего слева и справа, в адаптированном методе коротких характеристик

Первые слагаемые в  $U_n^+$ , и  $U_n^-$ ,  $W_n^+$  и  $W_n^-$  отвечают излучению, приходящему от ближайших слоев, расположенных слева и справа от текущего узла сетки, и вычисляются точно. Вторые слагаемые аппроксимируют излучение, приходящее от ячеек, более отдаленных от данного узла. Эти слагаемые вычисляются приближенно, и их можно корректировать, вводя дополнительные множители.

Как показывает практика, адаптированный метод коротких характеристик дает хорошую оценку поля излучения в рассматриваемой задаче, которая решается методом установления. Поэтому на начальном этапе установления можно использовать адаптированный метод коротких характеристик, а после скорректировать расчет, применив квазиодномерный вариант метода длинных характеристик на конечном этапе установления.

### 3.5. Расчеты с учетом поуровневой кинетики и сопоставление с МДП

На рис. 34 представлен один из расчетов течения ионизирующегося газа в коаксиальном канале в квазиодномерном приближении в рамках МГД модели с учетом поуровневой кинетики и переноса излучения, рассчитанного на основе выше изложенных моделей для широкого спектрального диапазона энергий фотонов. В качестве рабочего газа рассмотрен водород, наиболее часто используемый в экспериментальных исследованиях. При этом использовано до 40 возбужденных уровней атома водорода.

Данный пример квазистационарного течения ионизирующегося газа отвечает следующему набору параметров:  $T_o = 3000 \text{ } ^\circ K$ ,  $n_o = 2.5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ ,  $L = 6 \text{ см}$ ,  $J_p = 25 \text{ кА}$ ,  $\beta = 0.04$ ,  $\sigma_{o1} = 1107$ ,  $\sigma_{o2} = 0.47$ ,  $V_o = 3.45 \cdot 10^6 \text{ см/с}$ . Площадь поперечного сечения канала задана соотношениями:  $f(z) = 0.3 - 0.8z(1-z)$ , для  $z \leq 1$ ; и  $f(z) = 0.8z - 0.5$ , для  $1 < z \leq z_{out}$ . Канал изображен на рис. 18. Предполагаем, что на входе в канал подается равновесный слабоионизованный газ. Соответственно степень ионизации  $\alpha_{in}$  при  $z = 0$  определяется с помощью соотношения Саха (1.2), отвечающего ЛТР приближению, а населенности состояний вычисляются по формуле Больцмана  $n_k / n_m = g_k / g_m \cdot \exp(-\Delta E_{k,m} / T)$ , где  $g_k$  и  $g_m$  - статистические веса,  $\Delta E_{k,m} = E_m - E_k$  - разность энергий равновесных состояний  $k$  и  $m$ .

Установки КСПУ являются системами проточного типа, в которых обеспечивается непрерывная подача газа на входе с определенным значением давления  $P_o$ . В небольших установках и ускорителях первой ступени КСПУ [1-14] давление на входе по порядку величины равно  $P_o \approx 10 \text{ Тор}$ .

Время расчета методом установления с выходом на квазистационарное решение соответствует характерному времени  $t_o = L/V_o$  или в безразмерных переменных  $t = 1$ . Время установления, отвечающее времени пролета частиц в канале, много меньше длительности разряда. Поэтому в численных экспериментах для установок КСПУ не учитываются процессы в электрической цепи, и в расчетах полагаем, что  $J_p = const$ .

На рис. 34 изображены следующие распределения: а) суммарная концентрация тяжелых частиц, б) температура, в) скорость, г) степень ионизации, д) магнитное поля и е) величина  $\Gamma = -\sum_{k=1}^K \Gamma_k$ , характеризующая отклонение от равновесия, где  $\Gamma_k$  отвечают правой части уравнений (3.4а).

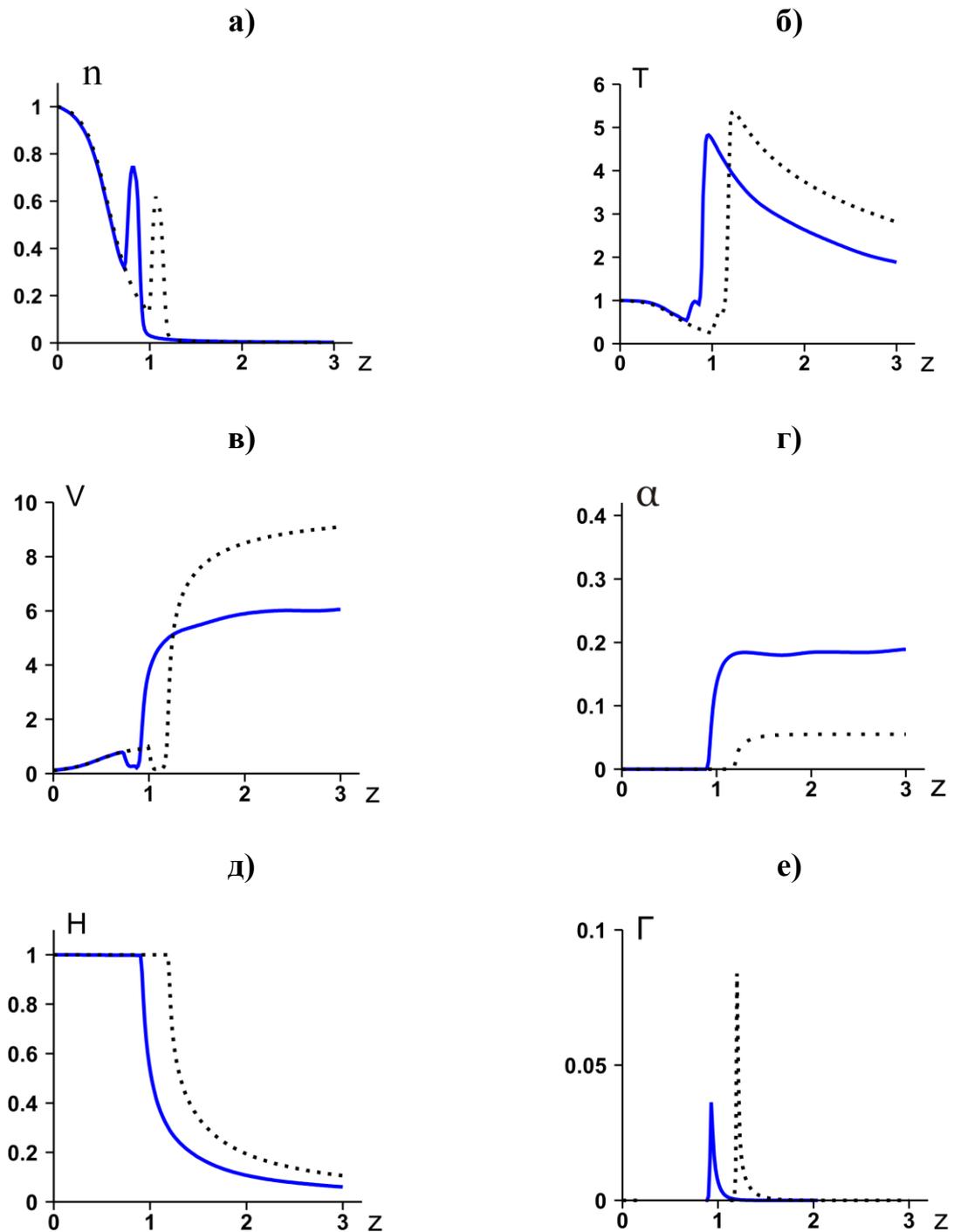


Рис. 34. Распределения МГД переменных вдоль канала ускорителя при учете поуровневой кинетики и переноса излучения в потоке ионизирующего газа

для  $J_p = 25 \text{ кА}$ ,  $n_0 = 2.5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_0 = 3000 \text{ }^\circ\text{K}$ ,  $L = 6 \text{ см}$ .

Штриховые кривые отвечают МДП приближению

Видно, что в окрестности формирующегося фронта ионизации наблюдается резкий рост температуры, скорости и степени ионизации. Одновременно происходит резкое ускорение плазмы благодаря силе Ампера,

что сопровождается разрежением. Ток в плазме протекает главным образом в окрестности фронта, что приводит к резкому уменьшению магнитного поля.

На рис. 35 представлены соответствующие распределения населенностей атомных уровней, в частности, в основном состоянии  $n_1$  (кривая 1) и в первом возбужденном состоянии  $n_2$  (кривая 2). Распределению концентрации ионов  $n_i$  или электронов  $n_e$  в силу квазинейтральности соответствует кривая, отмеченная индексом  $i$ . Кривые 3, 4, 5,... отвечают населенностям остальных возбужденных уровней  $n_3, n_4, n_5$  и т.д.

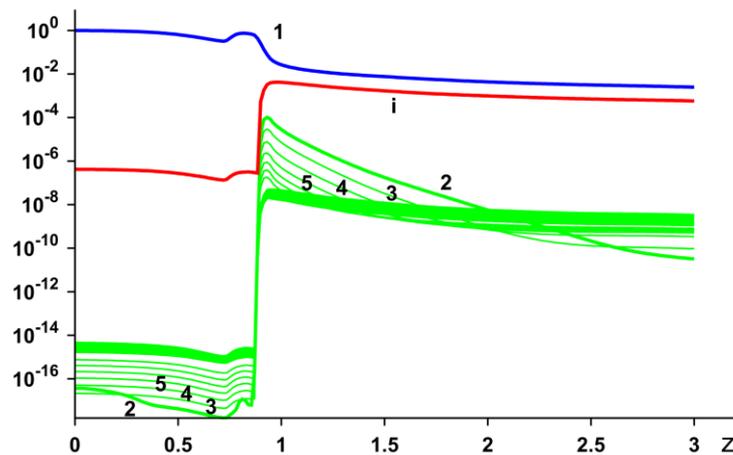


Рис. 35. Распределение населенностей атомных уровней в потоке ионизирующегося газа в канале плазменного ускорителя для  $J_p = 25 \text{ кА}$ ,  $n_0 = 2.5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_0 = 3000 \text{ }^\circ\text{К}$ ,  $L = 6 \text{ см}$

Штриховые кривые на рис. 34 соответствуют расчету в МДП приближении для тех же параметров задачи. При этом величина  $\Gamma$  отвечает правой части в (2.1). По сравнению с МДП учет поуровневой кинетики для указанных параметров приводит к смещению фронта ионизации. Очевидно, что это связано с влиянием переноса излучения на поуровневую кинетику и ионизационные процессы перед фронтом ионизации.

Рис. 36 отвечает варианту расчета квазистационарного течения ионизирующегося газа, выполненному для следующих параметров:  $T_0 = 750 \text{ }^\circ\text{К}$ ,  $n_0 = 1.6 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $L = 60 \text{ см}$ ,  $J_p = 40 \text{ кА}$ ,  $\beta = 0.04$ ,  $\sigma_{01} = 1107$ ,

$\sigma_{02}=0.47$ . В данном случае достаточно малые значения температуры на входе в большей степени отвечают экспериментам. Здесь представлены: а) суммарная концентрации тяжелых частиц, б) температура, в) скорость, г) степень ионизации, д) магнитное поле и е) отклонение от равновесия.

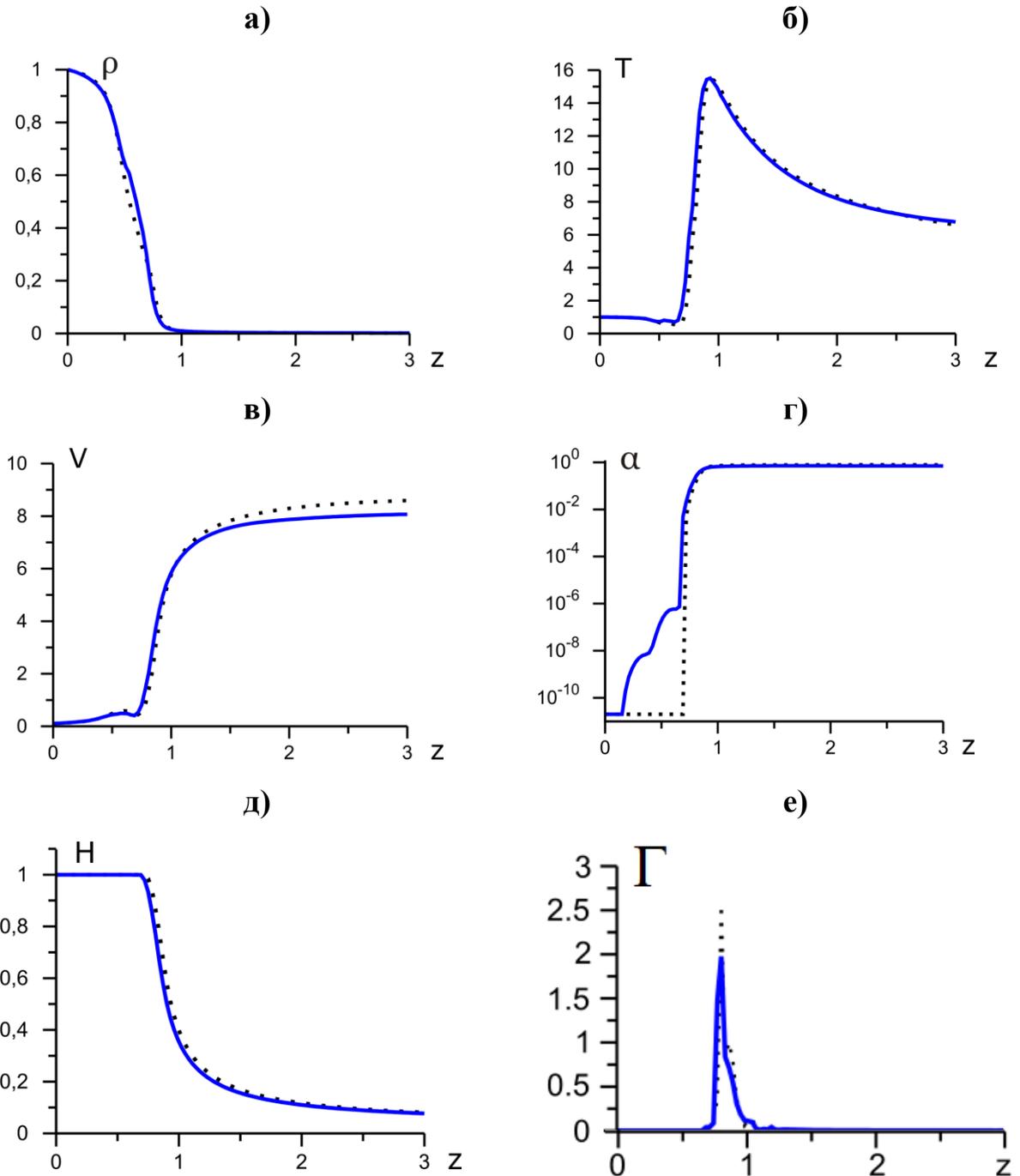


Рис. 36. Распределения МГД переменных вдоль канала ускорителя при учете поуровневой кинетики и переноса излучения в потоке ионизирующегося газа

для  $J_p = 40 \text{ кА}$ ,  $n_0 = 1.6 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_0 = 750 \text{ }^\circ\text{К}$ ,  $L = 60 \text{ см}$ .

Пунктирные кривые отвечают МДП приближению

На рис. 37а и 37б представлены распределения населенностей атомных уровней соответственно с учетом и без учета излучения. Здесь указаны величины  $n_a$ ,  $n_k$  и  $n_e$  - относительные концентрации атомов в основном состоянии, атомов в возбужденных состояниях и электронов. Видно, что учет переноса излучения и радиационных процессов приводит к существенному изменению концентрации электронов  $n_e$  и соответственно к росту степени ионизации перед фронтом ионизации. При указанных параметрах эффект предионизации незначителен для водородной среды. Однако, для других газов с более насыщенным спектром, роль излучения и радиационных процессов трансформации частиц может быть более существенной.

Численные эксперименты на основе РМГД модели с учетом поуровневой кинетики позволили получить детальную картину процессов в окрестности фронта ионизации, включая распределение населенностей атомных уровней в потоке ионизирующегося газа. Расчеты течений на основе данной модели согласуются с исследованиями, проведенными ранее в рамках МДП.

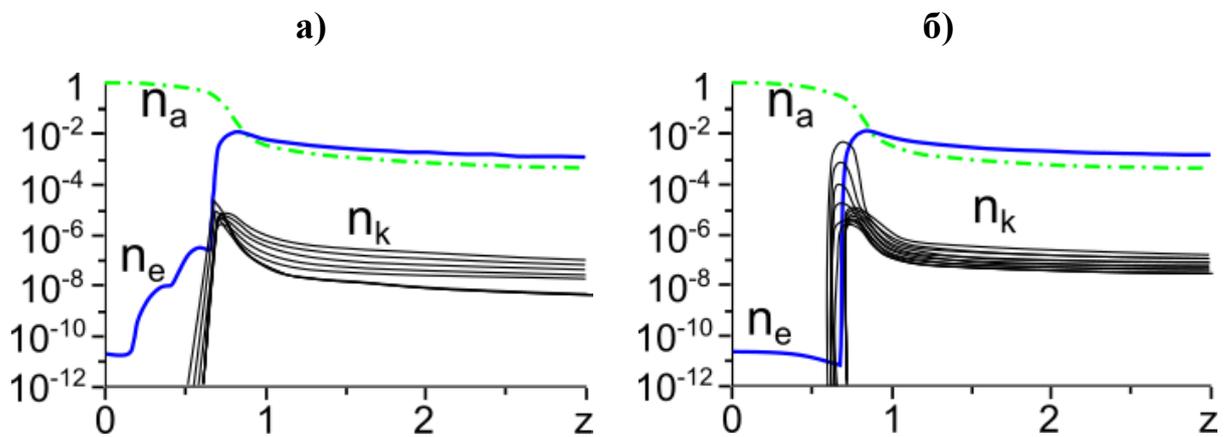


Рис. 37. Распределения населенностей атомных уровней а) с учетом и б) без учета излучения для  $J_p = 40 \text{ кА}$ ,  $n_0 = 1.6 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_0 = 750 \text{ }^\circ\text{K}$ ,  $L = 60 \text{ см}$

Разработанная полноценная РМГД модель с учетом поуровневой кинетики позволяет исследовать процессы, которые не были доступны ранее для детального изучения с помощью прежних моделей. Новая модель позволяет изучить влияние поуровневой кинетики на перенос излучения и в

то же время получить поле излучения (см. рис. 38), согласованное с заселенностью атомных уровней.

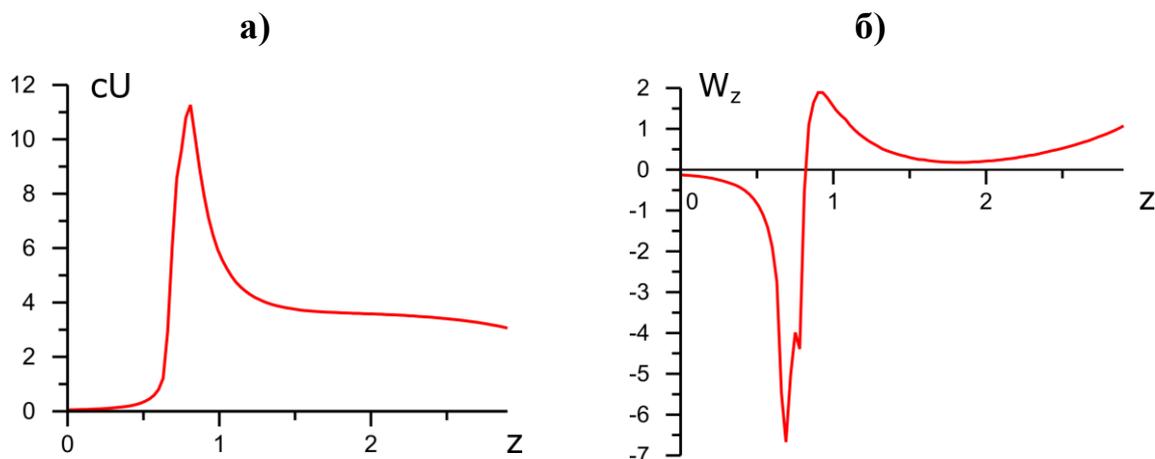


Рис. 38. Распределения а) плотности энергии излучения и б) плотности потока энергии излучения в потоке ионизирующегося газа

Таким образом, проведено исследование течений ионизирующегося газа в канале КСПУ на основе РМГД модели с учетом электропроводности, теплопроводности, переноса излучения и системы уравнений поуровневой кинетики. Для эффективного расчета переноса излучения разработан квазиодномерный вариант метода длинных характеристик, а также адаптированный метод коротких характеристик, использованные в квазиодномерной модели течения. Показано, что радиационные процессы оказывают существенное влияние на возбуждение атомных уровней и приводят к значительному росту концентрации электронов и степени ионизации перед фронтом. Расчеты течений сопоставлены с результатами исследований процесса ионизации в рамках МДП приближения, представленного во второй главе.

## ГЛАВА 4

### ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ИОНИЗУЮЩЕГОСЯ ГАЗА С ОБРАЗОВАНИЕМ МНОГОЗАРЯДНЫХ ИОНОВ

Выше было отмечено, что установки КСПУ, являясь многофункциональными системами, предназначены для технологических приложений, термоядерных исследований, а также представляют интерес для разработки перспективных электрореактивных плазменных двигателей нового поколения. Плазменные ускорители - это системы проточного типа, на входе которых непрерывно подается газ. В качестве рабочей среды в экспериментах выступает, как правило, водород, дейтерий, а также гелий. В перспективе плазменные ускорители могут быть использованы в атмосферных условиях. Это означает, что рабочей средой может быть воздух, который примерно на 78% состоит из азота.

В данной главе рассмотрен процесс ионизации гелия и азота с возможным образованием многозарядных ионов. Соответствующие исследования представлены в работах [127, 129-131, 141] и проведены на основе численных моделей двумерных осесимметричных течений ионизирующегося газа в приближение локального термодинамического равновесия (ЛТР) для плазмы сложного состава, состоящей из электронов, атомов и ионов с разной кратностью ионизации. Для среды, включающей многозарядные ионы, необходимо решать систему уравнений ионизационного равновесия. При этом основная особенность процесса ионизации по-прежнему связана с резким изменением магнитной вязкости на формирующемся фронте ионизации. Кроме того, электропроводимость определяет джоулев нагрев в уравнении энергии и диффузию магнитного поля, которая учитывается в параболической части модифицированной системы МГД уравнений. Определению электропроводности среды при наличии ионов с различной кратностью ионизации посвящен отдельный раздел.

#### 4.1. МГД уравнения для плазмы сложного состава

Течения плазмы, состоящей из атомов, электронов и многозарядных ионов, следует рассматривать в рамках общего случая многокомпонентной плазмы. В основе модели течений ионизирующегося газа лежат уравнения переноса многокомпонентной среды [42], состоящей из атомов, электронов и ионов с различной кратностью ионизации и зарядовым состоянием  $Z_i$ , а также уравнений Максвелла для электромагнитного поля. Поскольку характерные скорости потоков  $V \ll c$ , можно пренебречь током смещения  $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  в уравнении  $rot \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ . Учитывая, что  $m_e \ll m_i = m_a = m$ , инерцией электронов  $m_e \frac{d \mathbf{V}_e}{d t}$  также пренебрегаем. Исходные уравнения переноса среды, содержащей многозарядные ионы, аналогичны уравнениям (3.4)-(3.6), которые представлены в предыдущей главе с той разницей, что теперь могут присутствовать ионы с различной кратностью ионизации с зарядом больше единицы  $Z_i \geq 1$ . По-прежнему считаем, что скорости всех компонент равны между собой  $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_i = \mathbf{V}_e = \mathbf{V}$  для достаточно плотной среды. Предполагаем также, что  $T_a = T_i = T_e = T$ . Возможное незначительное превышение электронной температуры  $T_e$  над  $T_i$  и  $T_a$  не является существенной деталью исследований. Производя процедуры суммирования и преобразования уравнений переноса, рассмотренные в предыдущей главе, получим модифицированную систему МГД уравнений в рамках одножидкостного приближения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad \rho \frac{d \mathbf{V}}{d t} + \nabla P = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}, \quad \frac{d}{d t} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + div(\rho \varepsilon \mathbf{V}) + P div \mathbf{V} = \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} - div \mathbf{q} - div \mathbf{W}, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = rot(\mathbf{V} \times \mathbf{H}) - c rot \frac{\mathbf{j}}{\sigma}, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} rot \mathbf{H},$$

$$P = P_a + \sum_{i=1}^Z P_i + P_e = \left(1 + \frac{n_e}{n}\right) (c_P - c_V) \rho T, \quad \varepsilon = \left(1 + \frac{n_e}{n}\right) c_V T + \varepsilon_I,$$

$$k_B / m = R = c_P - c_V = c_V (\gamma - 1), \quad n_e = \sum_{i=1}^Z Z_i n_i, \quad \mathbf{q} = -\kappa_{e \rightarrow a} \nabla T,$$

где  $Z$  – зарядовое число химического элемента,  $\rho = m \left( n_a + \sum_{i=1}^Z n_i \right)$  –

плотность тяжелых частиц,  $P$  – суммарное давление,  $\mathbf{q}$  – тепловой поток,

$\kappa_{e \rightarrow a}$  – коэффициент электрон-атомарной теплопроводности. Степень

ионизации определяется с помощью соотношения  $\alpha = \frac{\sum_{i=1}^Z n_i}{n_a + \sum_{i=1}^Z n_i}$ .

Модель радиационной магнитной газодинамики (РМГД) включает, в частности, плотность потока энергии излучения  $\mathbf{W}$  в правой части уравнения для внутренней энергии. Более простая модель содержит потери энергии на излучение  $Q_{изл}$ . В понятие внутренней энергии на единицу массы  $\varepsilon$  входят потери энергии на ионизацию, которым отвечает дополнительное слагаемое  $\varepsilon_I$ . Кроме того, в уравнении состояния среды можно учесть потери энергии на диссоциацию молекул. Уравнения (4.1) вместе с указанными далее способами определения  $n_i$ ,  $\sigma$  и  $\kappa_{e \rightarrow a}$  следует рассматривать как обобщение классической магнитной газодинамики на случай частично ионизованной многозарядной плазмы.

Ток в плазме определяется с помощью соотношений

$$\mathbf{j} = \sum_{i=1}^Z e Z_i n_i \mathbf{V}_i - e n_e \mathbf{V}_e \text{ или } \mathbf{j} = e n_e (\mathbf{V} - \mathbf{V}_e) \text{ с учетом квазинейтральности}$$

$$\sum_{i=1}^Z e Z_i n_i = e n_e. \text{ Рассматривая выделение тепла в среде частиц } k\text{-ого сорта}$$

вследствие столкновений с частицами  $j$ -ого сорта имеем

$$Q_{kj} + Q_{jk} = -\mathbf{R}_{kj} \mathbf{V}_k - \mathbf{R}_{jk} \mathbf{V}_j = -\mathbf{R}_{kj} (\mathbf{V}_k - \mathbf{V}_j). \text{ Следуя работе [42], запишем}$$

$\mathbf{R}_{kj} = -f_{kj}(\mathbf{V}_k - \mathbf{V}_j)$ , где  $f_{kj} = n_k n_j m_{kj} B_{kj}$ ,  $B_{kj} = \frac{4 \sqrt{2 \pi} \Lambda e_k^2 e_j^2}{3 \sqrt{m_{kj}} (k_B T)^{3/2}}$ ,  $m_{kj}$  –

приведенная масса частиц,  $\Lambda$  – кулоновский логарифм. Тогда получим, что

$Q_{kj} + Q_{jk} = \frac{n_k m_{kj} (\mathbf{V}_k - \mathbf{V}_j)^2}{\tau_{kj}}$ , где  $\tau_{kj} = \frac{3 \sqrt{m_{kj}} (k_B T)^{3/2}}{4 \sqrt{2 \pi} \Lambda e_k^2 e_j^2 n_j}$ . Основной вклад в

выделение тепла вносят взаимодействия электронов с тяжелыми частицами.

При этом приведенная масса равна  $m_{ei} = \frac{m_e m}{m_e + m} \cong m_e$ , а взаимодействие

электронов с атомами и ионами  $i$ -ой кратности ионизации дает

$Q_{ei} + Q_{ie} = \frac{n_e m_e (\mathbf{V} - \mathbf{V}_e)^2}{\tau_{ei}}$  и  $Q_{ea} + Q_{ae} = \frac{n_e m_e (\mathbf{V} - \mathbf{V}_e)^2}{\tau_{ea}}$ , где вектор  $\mathbf{V}$

отвечает скорости тяжелых частиц. Тогда для суммарного тепла, выделяемого в результате трения электронов о тяжелые частицы, имеем

$Q_{mp} = n_e m_e (\mathbf{V} - \mathbf{V}_e)^2 \left( \frac{1}{\tau_{ea}} + \sum_{i=1}^Z \frac{1}{\tau_{ei}} \right) = \frac{m_e \mathbf{j}^2}{n_e e^2} \left( \frac{1}{\tau_{ea}} + \sum_{i=1}^Z \frac{1}{\tau_{ei}} \right)$ . Это тепло можно

представить в обычном виде  $Q_{mp} = \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}$ , где проводимость определяется через

сумму частот столкновений электрона с тяжелыми частицами с помощью следующих соотношений

$$\sigma = \frac{n_e e^2}{m_e \left( \nu_{ea} + \sum_{i=1}^Z \nu_{ei} \right)}, \quad \nu_{ei} = \frac{1}{\tau_{ei}} = \frac{Z_i^2 n_i}{\tau_o n}, \quad \tau_o = \frac{3 \sqrt{m_e} (k_B T)^{3/2}}{4 \sqrt{2 \pi} \Lambda e^4 n} \quad (4.2)$$

Здесь величина  $\nu_{ei}$  отвечает частоте столкновений электронов с ионами  $i$ -ой кратности ионизации, а значение  $\tau_o$  соответствует характерному времени

столкновений. Джоулев нагрев  $Q_{mp} = \mathbf{j}^2 / \sigma$  за счет взаимодействия

электронов с тяжелыми частицами существенно превосходит тепло, выделяемое при трении между собой остальных компонент.

Обобщенный закон Ома является следствием уравнения переноса импульса для электронной компоненты, в котором пренебрегаем инерцией электронов. Слагаемые в правой части указанного уравнения можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{R}_{ea} + \sum_{i=1}^Z \mathbf{R}_{ei} = \frac{n_e m_e}{\tau_{ea}} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_e) + \sum_{i=1}^Z \frac{n_e m_e}{\tau_{ej}} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_e) = \frac{m_e}{e \tau_{ea}} \mathbf{j} + \sum_{i=1}^Z \frac{m_e}{e \tau_{ej}} \mathbf{j} = \frac{e n_e}{\sigma} \mathbf{j},$$

где проводимость  $\sigma$  определяется соотношениями (4.2). В одножидкостном приближении  $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_i = \mathbf{V}_e = \mathbf{V}$ , пренебрегая слагаемым  $\nabla P_e$  в уравнении переноса импульса для электронов в рассматриваемом случае сильных магнитных полей, приходим к классическому закону Ома  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{V}, \mathbf{H}]$ .

#### 4.2. Электропроводность плазмы при наличии многозарядных ионов

Электропроводность среды в уравнениях равна  $\sigma = e^2 n_e / m_e \nu_e$ , где средняя частота столкновений электронов с другими частицами  $\nu_e$  в соответствии с (4.2) определяется через сумму частот столкновений с атомами и ионами

различной кратности ионизации:  $\nu_e = \nu_{ea} + \sum_{i=1}^Z \nu_{ei}$ . Частоту столкновений

можно представить в общем виде  $\nu_{ea} = n_a \langle V_e \rangle S_{ea}$ ,  $\nu_{ei} = n_i \langle V_e \rangle S_{ei}$ , где  $S_{ea}$ ,  $S_{ei}$  – эффективные сечения столкновений.

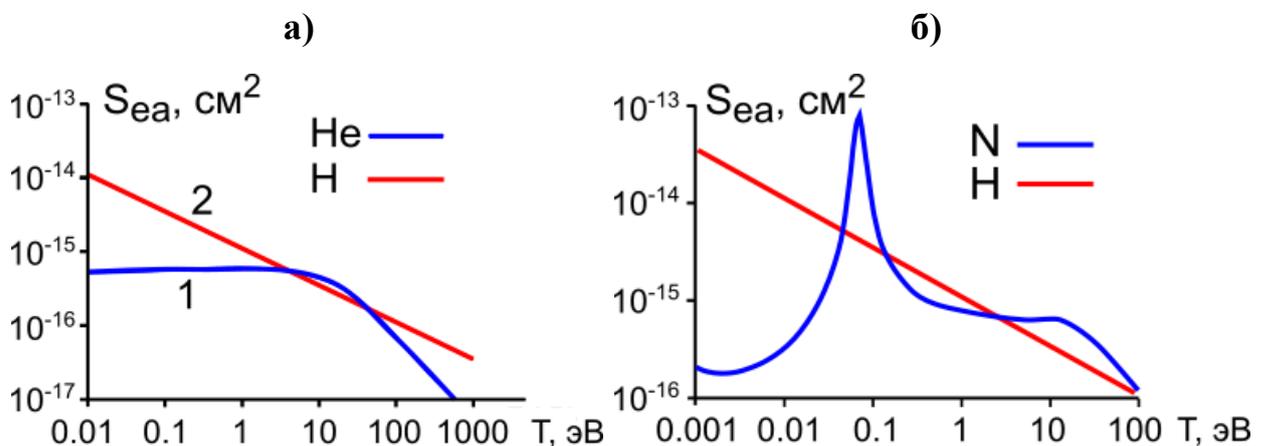


Рис. 39. Сечения столкновения электронов с атомами а) гелия и б) азота. Кривая 2 на рисунках отвечает водороду

В главах 1-3 рассматривался процесс ионизации водорода, для которого эффективное сечение столкновения электронов с атомами определялось в соответствии с работой [77] с помощью соотношения

$$S_{ea}^H = \frac{1.2 \cdot 10^{-13}}{\sqrt{T}} [\text{см}^2],$$

в котором температуру следует измерять в градусах  $^{\circ}\text{K}$ . Соответствующая зависимость представлена кривой 2 на рис. 39а и 39б. Кривые 1 на данных рисунках отвечают сечению столкновений электронов соответственно с атомами гелия  $S_{ea}^{He}$  и азота  $S_{ea}^N$ . Эти сечения взяты из работ [109, 151] и использованы в МГД модели и проведенных расчетах.

В соответствии с формулами (4.2) итоговые соотношения для вычисления электропроводности плазмы сложного состава, включая многозарядные ионы, можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_1} \sum_{i=1}^Z Z_i^2 \frac{n_i}{n}, \quad \sigma_0 = \frac{e^2 n_e}{m_e n_a \langle V_e \rangle S_{ea}}, \quad \sigma_1 = \frac{e^2 n_e \tau_0}{m_e},$$

где величина  $\tau_0$  отвечает характерному времени столкновений. Электропроводность, рассчитанная по этим формулам, хорошо согласуется с данными ряда работ [109-113].

Теплопроводность определяется с помощью формул, представленных в пунктах 1.1, 2.4 и 3.3. При больших степенях ионизации основной вклад в суммарный теплоперенос вносит электронная теплопроводность поперек магнитного поля, а малой степени ионизации соответствует атомарная теплопроводность. В целом влияние теплопроводности незначительное.

### 4.3. Потери энергии на излучение

Перенос излучения гелиевой плазмы в канале КСПУ рассчитан в рамках 3D модели, представленной в главе 1. При этом коэффициент поглощения и излучательная способность гелиевой плазмы имеют свои особенности и представлены на рис. 40 в диапазоне энергии фотонов до 6 эВ.

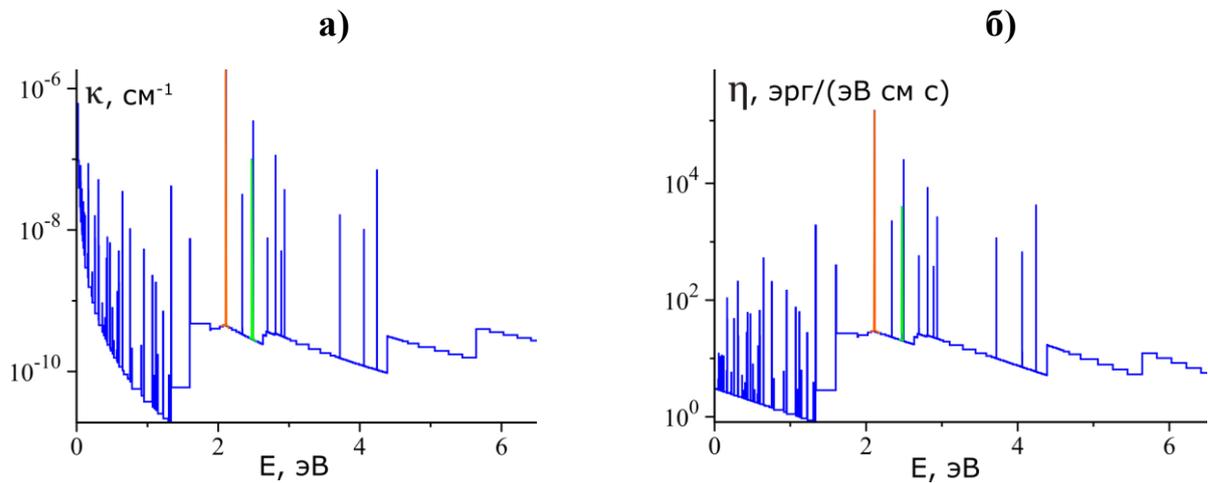


Рис. 40. Зависимости а) спектрального коэффициента поглощения и б) излучательной способности гелия от энергии фотонов. Желтая линия - триплет с энергией 2.11 эВ, зеленая линия - синглет с энергией 2.47 эВ

Коэффициенты рассчитаны в предположении равновесной заселенности уровней атома гелия для концентрации среды  $n = 10^{15} \text{ см}^{-3}$  и температуры  $T = 1 \text{ эВ}$ . Расчеты отвечают трем группам процессов перехода электрона из одного энергетического состояния в другое, включая связанно-связанные процессы поглощения и излучения в линиях. В данном случае построения проведены с учетом 20 уровней энергии. Каждый процесс перехода электрона из одного энергетического состояния в другое вносит свой определенный вклад в излучение и поглощение. На рис. 40а и 40б желтым и зеленым цветом отмечены спектральные линии, отвечающие соответственно триплету с энергией 2.11 эВ и синглету с энергией 2.47 эВ. Данные спектральные линии построены с использованием профиля Фойгта в соответствии с формулой (1.10) так, что на ширину линии приходится несколько спектральных групп, подробно описывающих форму ядра и крыльев линий. В то же время линии в остальной части спектра представлены в рамках одной группы. В расчетах используется до 300 спектральных групп.

Известно, что атом гелия содержит два электрона, моменты которых складываются по квантово-механическим правилам. Если спины электронов

направлены в противоположные стороны, спиновое квантовое число равно  $S=0$ . Поэтому внутреннее квантовое число, связанное с модулем полного момента импульса электронов,  $J=L+S$  принимает значение  $J=L$ , равное орбитальному квантовому числу. Это приводит к образованию синглетных конфигураций:  $^1S_0$ ,  $^1P_1$ ,  $^1D_2$ ,  $^1F_3$ . Гелий в таких состояниях называется парагелием. Если спины электронов сонаправлены, спиновое квантовое число  $S=1$ . В этом случае  $J$  принимает три значения  $J=L-1, L, L+1$ , что приводит к триплетным термам:  $^3S_1$ ,  $^3P_{0,1,2}$ ,  $^3D_{1,2,3}$ ,  $^3F_{2,3,4}$ . В данных состояниях гелий называют ортогелием.

С точки зрения астрофизических наблюдений наиболее важные линии в видимой части спектра гелия находятся в диапазоне длин волн 447.14 нм и 706.52 нм или в диапазоне энергий 1.76 – 2.78 эВ. Синглетной линии  $^1S_0$  соответствует переход  $1s2s - 1s3p$ . Эта линия с длиной волны 501.6 нм и энергией 2.47 эВ выделена зеленым цветом на рис. 40. Триплетной серии линий  $^3P_{0,1,2}$  соответствует переход  $1s2p - 1s3d$  с длиной волны 587.6 нм и энергией 2.11 эВ. Эти три близко расположенные линии отмечены желтым цветом на рис. 40. Благодаря этим линиям гелий был открыт в составе вещества в солнечных протуберанцах. Следует заметить, что для перехода атома гелия из состояния парагелия в состояние ортогелия следует изменить спин одного из электронов, что предполагает достаточно глубокую перестройку атома, которая возможна при его взаимодействии с магнитным полем. Однако небольшая вероятность подобных процессов приводит к тому, что существует два сорта атомов гелия, практически не преобразующихся друг в друга, и природный гелий представляет собой смесь этих двух сортов. Причем количество ортогелия в природном гелии оказывается в три раза больше, чем парагелия. Существенный вклад в общий спектр излучения вносит группа линий атомарного гелия в диапазоне энергий 20-24 эВ. Для более высоких значений энергии фотонов спектр излучения определяется главным образом спектром иона однократной ионизации.

Расчет переноса излучения в многогрупповом приближении, детально охватывающем все участки спектра, является весьма трудоемкой задачей, решение которой было рассмотрено в предыдущих главах. В исследованиях течений ионизирующегося азота использован более грубый, но весьма эффективный способ учета потерь энергии на излучение, основанный на использовании известных соотношений для мощности излучения единицы объема для различных участков спектра. Рекомбинационное излучение связано с переходами электронов из непрерывного в дискретный спектр, и оценки коэффициента связанно-свободного поглощения  $\kappa_{\omega}$  приводят к средней длине пробега  $L_{cp} = 1/\kappa_{\omega} \geq 1$  см для характерных параметров КСПУ. Мощность рекомбинационного излучения равна:

$$Q_{рек} = 4.4 \cdot 10^{-24} Z_i^4 \frac{n_e n_i}{\sqrt{T_e(\text{эВ})}} \left[ \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{сек}} \right] \quad (4.3)$$

Оценки коэффициента тормозного поглощения для свободно-свободных переходов дают  $L_{cp} \geq 10$  см. Данное излучение отвечает приближению оптически тонкой плазмы. Мощность тормозного излучения равна:

$$Q_{торм} = 1.54 \cdot 10^{-25} Z_i^2 n_e n_i \sqrt{T_e(\text{эВ})} \left[ \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{сек}} \right] \quad (4.4)$$

Мощность излучения, связанного с переходом электронов с одного уровня на другой, определяется с помощью следующего соотношения [114]:

$$Q_{лин} = 80 \cdot 10^{-24} Z_i^6 \frac{n_e n_i}{T_e^{3/2}(\text{эВ})} \left[ \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{сек}} \right] \quad (4.5)$$

Данный тип излучения вносит наиболее существенный вклад в общие потери энергии на излучение, особенно для многозарядных ионов с зарядовым состоянием  $Z_i$  и концентрацией  $n_i$ . При наличии нескольких ионов с различной кратностью ионизации вместо формулы (4.5) используется следующее соотношение, включающее сумму по зарядовым состояниям,

$$Q_{лин} = 80 \cdot 10^{-24} \frac{n_e \sum_{i=1}^Z Z_i^6 n_i}{T_e^{3/2} (\text{эВ})} \left[ \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{сек}} \right] \quad (4.6)$$

Исследования показали, что суммарные потери энергии от всех типов излучения  $Q_{изл} = Q_{рек} + Q_{торм} + Q_{лин}$ , определяемых соотношениями (4.4) - (4.6), не оказывают принципиального влияния на динамику плазмы в канале плазменного ускорителя. В то же время приведенные соотношения позволяют понять, почему в экспериментах излучение плазмы азота существенно превосходит соответствующие показатели водородной плазмы.

#### 4.4. Система уравнений ионизационного равновесия

Ограничимся изучением ионизации одноатомного газа, поскольку к моменту наступления тепловой ионизации химические соединения обычно уже полностью диссоциированы. Уравнения ионизационного равновесия или формулы Саха представим в следующем виде:

$$\frac{n_e \cdot n_{j+1}}{n_j} = \frac{\Sigma_e \cdot \Sigma_{j+1}}{\Sigma_j} \cdot \exp\left(-\frac{E_{j+1} - E_j}{k_B T}\right), \quad j = 0, \dots, Z-1 \quad (4.7)$$

Здесь  $n_j$  – концентрация или населенность иона  $j$ -ой кратности ионизации с зарядом  $e Z_j$ ; значение  $j=0$  соответствует нейтральному атому;  $Z$  –

зарядовое число химического элемента;  $\Sigma_j = \sum_{k=0}^{N_j} g_{jk} \exp\left(-\frac{E_{jk} - E_{j0}}{k_B T}\right)$  –

статистическая сумма  $j$ -го иона с зарядом  $e Z_j$ ;  $g_{jk}$  – статистический вес  $j$ -го иона в состоянии  $k$ ;  $E_{jk}$  – энергия этого состояния;  $E_{j0}$  – энергия иона

с зарядом  $e Z_j$  в основном состоянии, равная энергии ионизации  $E_j$ ;  $N_j$  – количество возбуждённых состояний иона  $j$ -ой кратности ионизации;

$\Sigma_e = 2 \left( \frac{m_e k_B T}{2 \pi \hbar^2} \right)^{3/2}$  – статистическая сумма свободных электронов.

Соответствующие статистические веса возбужденных состояний для атома ( $Z_0 = 0$ ) и ионов можно рассчитать по вычислительному коду Flexible Atomic Code [117].

Система уравнений ионизационного равновесия включает  $Z$  уравнений (4.7) и содержит  $Z + 2$  неизвестные величины, к которым также относятся концентрации атомов и электронов. Для замыкания системы используют два дополнительных соотношения, отвечающих значению заданной суммарной концентрации тяжелых частиц

$$n = n_a + \sum_{j=1}^Z n_j = \sum_{j=0}^Z n_j$$

и условию квазинейтральности

$$\sum_{j=1}^Z e Z_j n_j = e n_e \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^Z j n_j = n_e.$$

В случае низкотемпературной плазмы, когда не происходит образования сколько-нибудь заметного количества ионов с высокой кратностью ионизации, суммирование в указанных соотношениях может проводиться до определенного верхнего предела, значение которого меньше величины  $Z$ .

Уравнения Саха (4.7) запишем следующим образом:

$$n_e \cdot n_{j+1} = n_j \cdot U_j,$$

вводя обозначение  $U_j(T) = \frac{\Sigma_e \cdot \Sigma_{j+1}}{\Sigma_j} \cdot \exp\left(-\frac{E_{j+1} - E_j}{k_B T}\right)$ , где  $j = 0, \dots, Z - 1$ .

Используя относительные концентрации частиц  $y_j = n_j/n$ ,  $y_0 = n_a/n$ ,  $x_e = n_e/n$  и величину  $u_j = U_j/n$ , перепишем последние уравнения в виде:

$$y_{j+1} = y_j \cdot x_e^{-1} \cdot u_j.$$

Это рекуррентное соотношение позволяет выразить все относительные концентрации ионов различной зарядности  $y_j$  через величины  $y_0$  и  $x_e$ :

$$y_j = y_0 \cdot x_e^{-j} \cdot P_j, \quad j = 1, \dots, Z, \quad P_j = \prod_{i=0}^{j-1} u_i. \quad (4.8)$$

С учетом дополнительных соотношений, отвечающих значению суммарной концентрации тяжелых частиц и условию квазинейтральности, приходим к системе уравнений ионизационного равновесия в следующем виде:

$$y_j = y_0 \cdot x_e^{-j} \cdot P_j, \quad j = 0, \dots, Z; \quad \sum_{j=0}^Z y_j = 1; \quad \sum_{j=0}^Z j \cdot y_j = x_e.$$

Обобщая уравнения (4.8) на случай  $j = 0$  для нейтральных атомов, будем полагать, что  $P_0 = 1$ . Подставляя первое соотношение в системе для  $y_j$  в два других соотношения, получим уравнение для неизвестной величины  $x_e$ :

$$\sum_{j=0}^Z x_e^{-j} \cdot P_j = \sum_{j=0}^Z j \cdot x_e^{-j-1} \cdot P_j,$$

Данное уравнение умножим на  $x_e^{Z+1}$  и окончательно запишем:

$$x_e^{Z+1} + \sum_{j=1}^Z (x_e - j) P_j \cdot x_e^{Z-j} = 0. \quad (4.9)$$

Корни уравнения (4.9) в интервале  $x_e \in [0, Z]$  вычисляются на основе стандартных итерационных методов. Определив величину  $x_e$ , для заданной суммарной концентрации тяжелых частиц с учетом (4.8) и уравнения  $\sum_{j=0}^Z y_j = 1$  находим значение  $y_0$  и далее последовательно все значения  $y_j$ .

Для гелия соотношения (4.7) приводят к более простой системе

$$\begin{aligned} n_e n_1 &= n_0 U_0(T), & n_e n_2 &= n_1 U_1(T), \\ n_e &= n_1 + 2n_2, & n &= n_0 + n_1 + n_2, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где

$$U_0(T) = \frac{2 \Sigma_1}{\Sigma_0} \left( \frac{m_e k_B T}{2 \pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{E_1}{k_B T} \right),$$

$$U_1(T) = \frac{2 \Sigma_2}{\Sigma_1} \left( \frac{m_e k_B T}{2 \pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{E_2 - E_1}{k_B T} \right),$$

$E_1 = 24.587$  в случае однократной ионизации гелия и  $E_2 = 54.416$ . В рассматриваемом диапазоне параметров имеем  $\Sigma_0 \approx 1$ ,  $\Sigma_1 \approx 2$  и  $\Sigma_2 \approx 1$ .

Введем относительные концентрации компонент  $y_j = n_j/n$ , а также используем обозначение  $u_0 = U_0(T)/n$  и  $u_1 = U_1(T)/n$ . Систему уравнений (4.10) можно переписать следующим образом:

$$\alpha y_1 = y_0 u_0, \quad \alpha y_2 = y_1 u_1, \quad \alpha = y_1 + 2y_2, \quad y_0 + y_1 + y_2 = 1 \quad (4.11)$$

В итоге для степени ионизации  $\alpha$  получим кубическое уравнение

$$\alpha^3 + u_0 \alpha^2 + u_0(u_1 - 1)\alpha - 2u_0 u_1 = 0 \quad (4.12)$$

Кубическое уравнение можно получить также для переменной  $y_2$ . Суммарная концентрация тяжелых частиц  $n$  и температура  $T$  определяются в процессе численного решения эволюционной МГД задачи на основе системы уравнений (4.1). Уравнения (4.11) и (4.12) позволяют определить степень ионизации и относительные концентрации компонент среды  $y_j$ .

Для азота статистические веса возбужденных состояний для атома и ионов были рассчитаны с учетом 65 конфигураций электронных оболочек и распределения электронов по оболочкам с главными квантовыми числами  $n = 1, \dots, 6$ . Результаты расчетов представлены в таблице 3, где при вычислении статистической суммы  $j$ -го иона использовалась характерная температура  $T = 1$  эВ. Полученные результаты с высокой точностью соответствуют имеющимся базам данных (см., например, [115]).

Таблица 3. Энергия ионизации и статистические веса ионов азота

$Z_j$	0	1	2	3	4	5	6
$E_j$ (эВ)	14.53	29.60	47.45	77.47	97.89	552.06	667.03
$\Sigma_j$	1633	2715	2921	1998	123	15	72

Рассмотрим образование многозарядных ионов азота по мере увеличения температуры для двух заданных значений суммарной концентрации тяжелых частиц. Результаты представлены на рис. 41а и 41б соответственно для  $n = 10^{16} \text{ см}^{-3}$  и  $n = 10^{17} \text{ см}^{-3}$ . Кривая 1 на рисунках отвечает концентрации атомов азота. Кривые 2,...,6 иллюстрируют изменение концентрации ионов с различной кратностью ионизации, которая указана и соотнесена с порядковым номером кривых справа от рисунков.

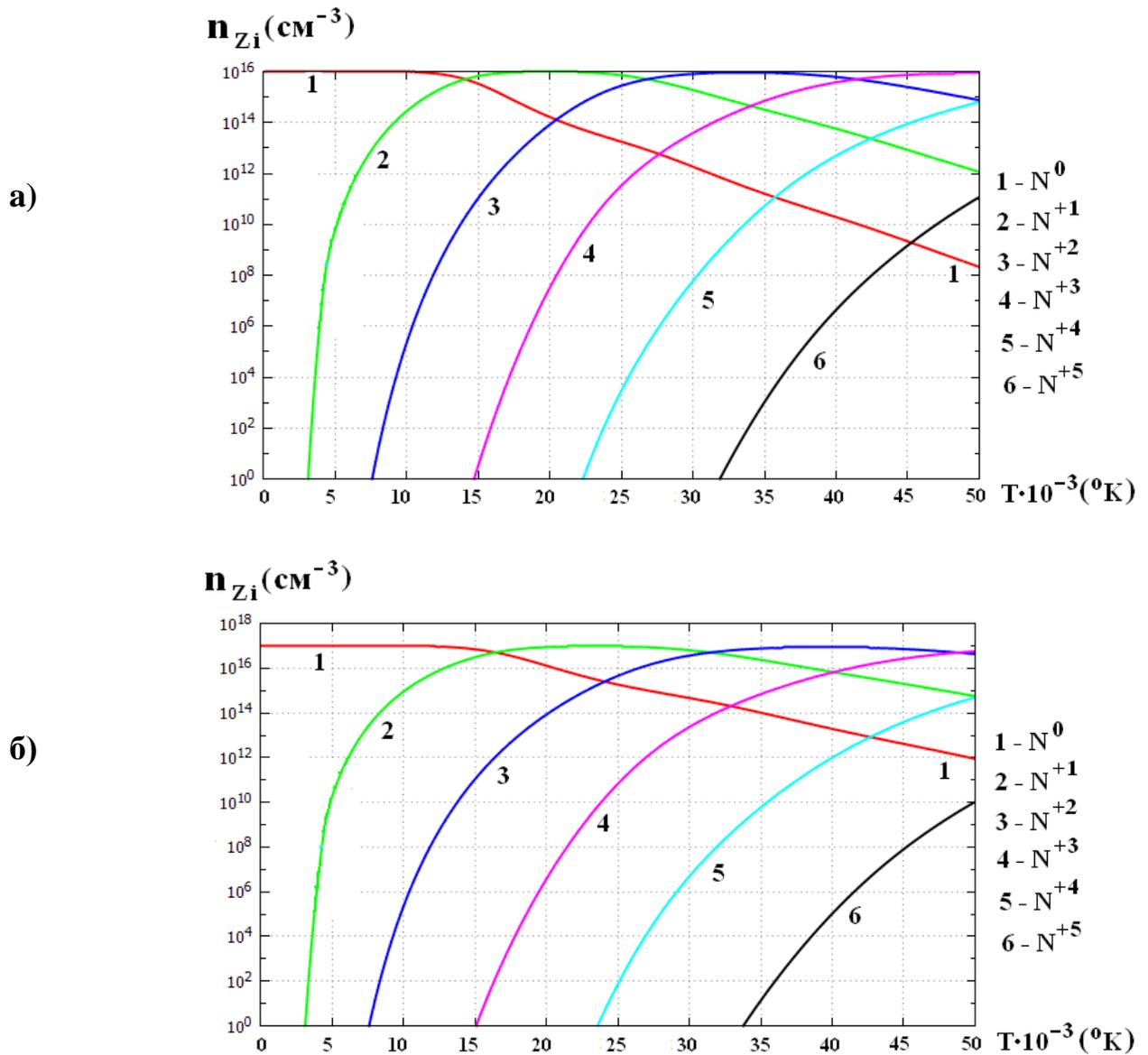


Рис. 41. Равновесное распределение многозарядных ионов азота в зависимости от температуры для двух значений суммарной концентрации тяжелых частиц: а)  $n = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , б)  $n = 10^{17} \text{ см}^{-3}$ . Кривые 1, 2,...,6 отвечают различным зарядовым состояниям ионов азота

Очевидно, что по мере увеличения температуры возникают ионы азота с более высокой кратностью ионизации, и соответственно уменьшается концентрация ионов с менее высоким зарядом. Сравнение рисунков для различных значений суммарной концентрации показывает, что переход к более плотной среде сопровождается сдвигом всех кривых вправо в область более высоких температур, т.е. в более плотной среде образование ионов с высокой кратностью ионизации происходит при более высокой температуре.

#### 4.5. О численном решении задачи для плазмы сложного состава

При численном решении МГД задачи используются безразмерные переменные. Единицами измерения по-прежнему являются длина канала  $L$ , характерная концентрация или плотность газа на входе в канал ускорителя  $n_o$  ( $\rho_o = m n_o$ ), температура  $T_o$ , а также характерная величина азимутального магнитного поля на входе, равная  $H_o = 2J_p / c R_o$ , где  $R_o$  – характерный радиус канала и  $J_p$  – разрядный ток в системе. Эти величины определяют единицы скорости  $V_o = H_o / \sqrt{4\pi\rho_o}$ , времени  $t_o = L / V_o$ , электрического поля  $E_o = H_o V_o / c$ , тока в плазме  $j_o = c H_o / 4\pi L$  и потока энергии излучения  $W_o = V_o H_o^2 / 4\pi$ . Уравнения в безразмерных переменных содержат следующие безразмерные параметры: отношение характерного газового давления к магнитному  $\beta = 8\pi P_o / H_o^2$  ( $P_o = k_B n_o T_o$ ) и магнитную вязкость  $\nu_m = 1 / \text{Re}_m = c^2 / 4\pi L V_o \sigma$ , которая обратно пропорциональна магнитному числу Рейнольдса  $\text{Re}_m$ .

Постановку задачи завершают граничные условия на электродах и входе в канал ускорителя. Полагаем, что на входе в канал при  $z=0$  плазма подается с известными значениями плотности и температуры  $\rho(r) = f_1(r)$ ,  $T(r) = f_2(r)$ . Считаем, что ток поддерживается постоянным и поступает в систему только через электроды. Поэтому при  $z=0$  имеем  $j_z = 0$  или

$r H_\varphi = r_o = const$  ( $r_o = R_o / L$ ). Электроды  $r = r_a(z)$  и  $r = r_k(z)$  являются эквипотенциальными ( $E_\tau = 0$ ) и непроницаемыми ( $V_n = 0$ ) поверхностями.

Для исследуемых трансзвуковых потоков предполагается свободное сверхзвуковое вытекание плазмы на выходе. В процессе ионизации происходит последовательный переход скорости потока через газодинамическую скорость звука  $C_g$ , а затем через скорость быстрой магнитозвуковой волны или скорость сигнала  $C_s$  [1] в отсутствие продольного магнитного поля, которые определяются соотношениями (1.4).

Численное решение предполагает отображение исходной расчетной области в переменных  $(z, r)$  на единичный квадрат в плоскости  $(y, z)$  с помощью соотношения (1.5). Расчеты течений проведены в основном на сетке (51x151), равномерной соответственно по направлениям  $y$  и  $z$ .

Расчетам двумерных осесимметричных течений ионизирующегося газа и плазмы, как и ранее, предшествует расщепление по координатным направлениям и физическим факторам с учетом смешанного типа уравнений (4.1). Гиперболическая часть МГД уравнений рассчитывается с помощью разностной схемы с коррекцией потоков (см., например, [71]). Электропроводность и теплопроводность учитываются с помощью метода потоковой прогонки [93]. Расчет квазистационарных течений проводится методом установления. Решение уравнений ионизационного равновесия (4.8) и (4.9), а также уравнений (4.11) и (4.12) для гелиевой плазмы, находим в узлах расчетной сетки на каждом временном шаге эволюционной МГД задачи.

#### 4.6. Исследование течений ионизирующегося гелия

Далее рассмотрены течения ионизирующегося гелия, включая интегральные характеристики излучения, для разных параметров, отвечающих стационарным потокам, а также пульсирующим течениям, обусловленным неустойчивостью процесса ионизации.

Результаты расчета квазистационарного течения в канале установки КСПУ-Т [8] представлены на рис. 42 и 43 для следующих размерных параметров:  $m = 4 \cdot m_p$ , характерная концентрация газа  $n_o = 8 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ , температура на входе  $T_o = 1000 \text{ }^\circ\text{K}$ , разрядный ток  $J_p = 100 \text{ kA}$  и  $L = 10 \text{ см}$ . На входе осуществляется равномерная подача газа:  $\rho(r) = 1$  и  $T(r) = 1$ .

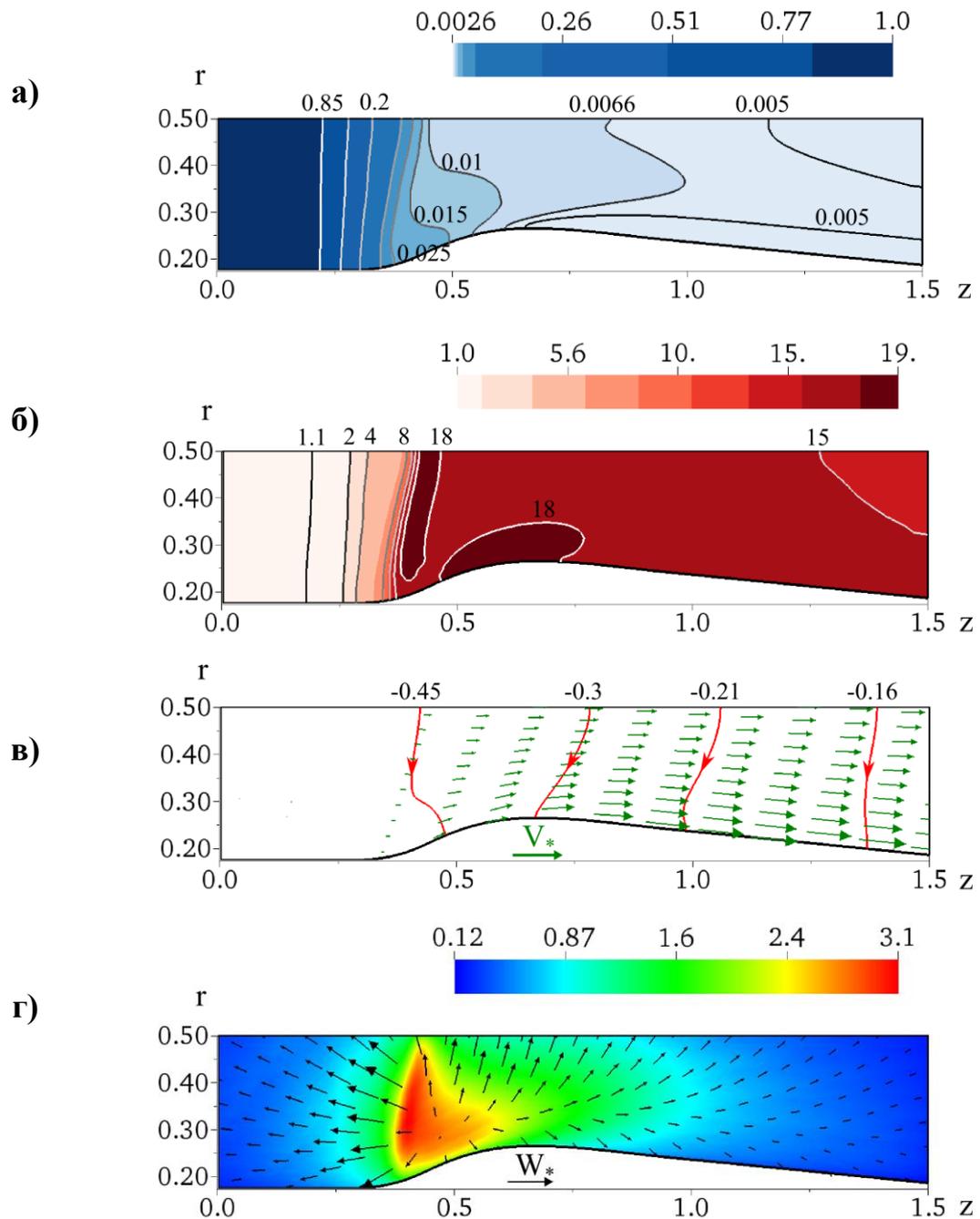


Рис. 42. Распределения а) плотности, б) температуры, в) скорости и тока в плазме, г) плотности энергии излучения и векторного поля плотности потока энергии излучения при  $n_o = 8 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_o = 1000 \text{ }^\circ\text{K}$ ,  $J_p = 100 \text{ kA}$

Распределения плотности и температуры, а также векторного поля скорости совместно с линиями уровня функции  $rH_\varphi$  или током в плазме изображены соответственно на рис. 42а, 42б и 42в.

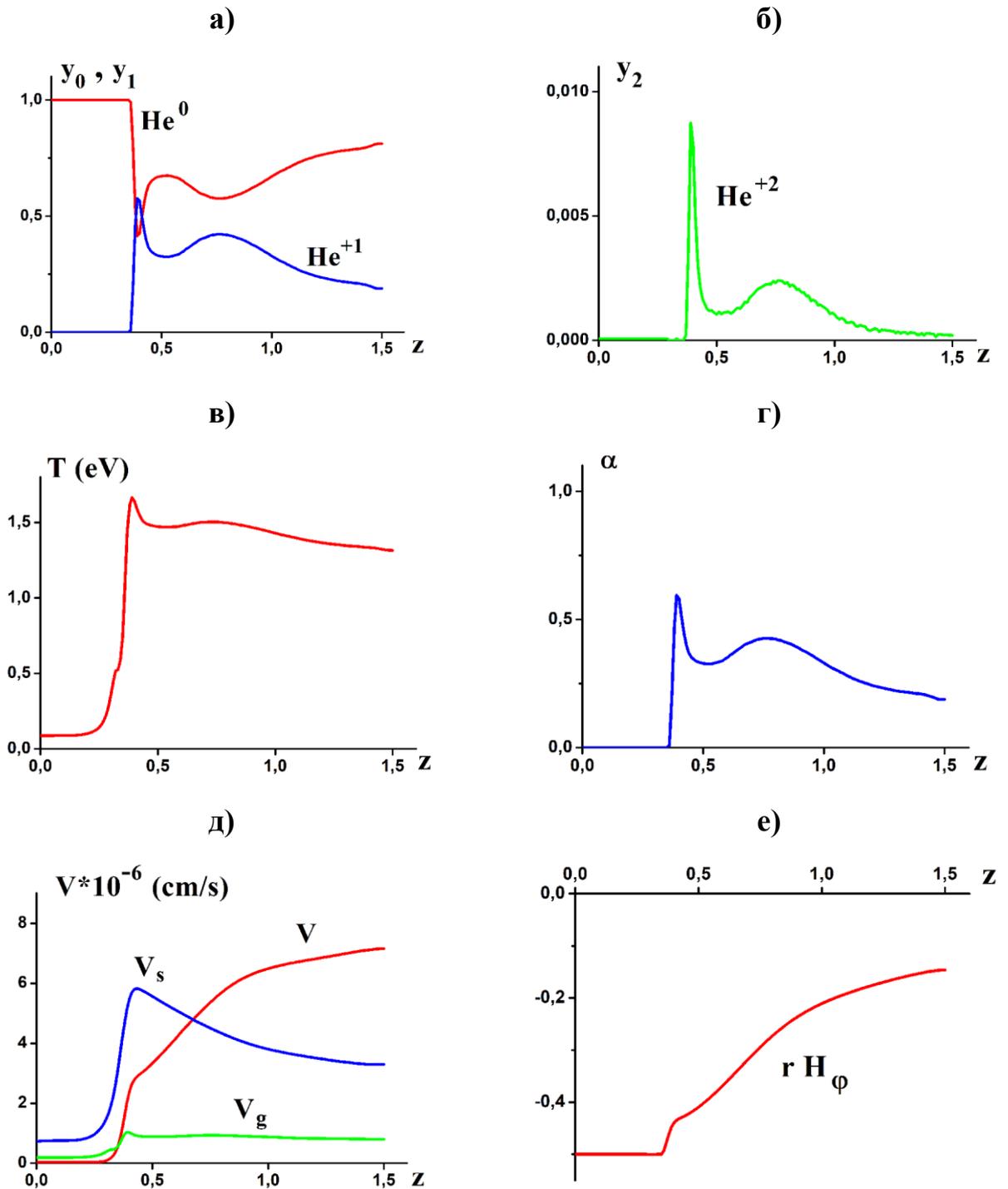


Рис. 43. Распределения вдоль средней координатной линии: относительные концентрации а) атомов и ионов гелия однократной ионизации, б) ионов гелия двукратной ионизации, в) температура, г) степень ионизации, д) скорости потока  $V$ , звука  $V_g$ , сигнала  $V_s$ , е) функция  $rH_\varphi$  для рис. 42

Отчетливо наблюдается фронт ионизации при значениях  $z \approx 0.4$ . В окрестности фронта происходит резкое уменьшение плотности и, наоборот, резкое увеличение степени ионизации, температуры и скорости. Масштаб векторов на рис. 42в определяется значением  $V_* = 23 \cdot V_o$ , где  $V_o = 4.88 \cdot 10^5 \text{ см/с}$ . Распределения плотности энергии излучения  $U$  и векторного поля плотности потока энергии излучения  $\mathbf{W}$  изображены на рис. 42г, где масштаб векторов определяется значением  $W_* = 1.2 \cdot 10^7 \text{ эрг/(см}^2\text{с)}$ .

На рис. 43 представлены одномерные распределения МГД переменных вдоль средней координатной линии, отвечающие рис. 42. Значительное изменение всех термодинамических функций наблюдается при значениях  $z \approx 0.45$ , где расположен фронт ионизации. Наблюдается крайне незначительная концентрация ионов гелия двукратной ионизации (см. рис. 43б), поскольку соответствующая энергия ионизации существенно превышает энергию ионизации, необходимую для образования ионов гелия однократной ионизации. В процессе ускорения (см. рис. 43д) скорость потока переходит через скорость звука  $V_g$  в окрестности фронта и далее в наиболее узкой части канала при  $z \approx 0.7$  через скорость сигнала  $V_s$ .

Рис. 44 демонстрирует пульсирующее течение в определенный момент времени для следующих размерных параметров: разрядный ток  $J_p = 60 \text{ кА}$ ,  $n_o = 8 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_o = 1000 \text{ }^\circ\text{К}$  и  $L = 10 \text{ см}$ . Масштаб векторов на рис. 44в определяется значением вектора  $V_* = 23 \cdot V_o$ , где  $V_o = 2.92 \cdot 10^5 \text{ см/с}$ .

Видно, что пульсирующее течение кардинально отличается от стационарных течений. На рис. 44а и 44б наблюдаются обособленные минимумы плотности и температуры. Между областями с относительно низкими значениями температуры расположена область нагретой плазмы. При этом фронт ионизации расположен в наиболее узкой части канала. Это говорит о неустановившемся характере процесса ионизации. В то время как в

установившихся течениях фронт ионизации расположен в сужающейся части канала. Перемещение области нагретой плазмы к выходу из канала и формирование новой горячей области в узкой части канала является отличительной чертой пульсирующих течений ионизирующегося газа.

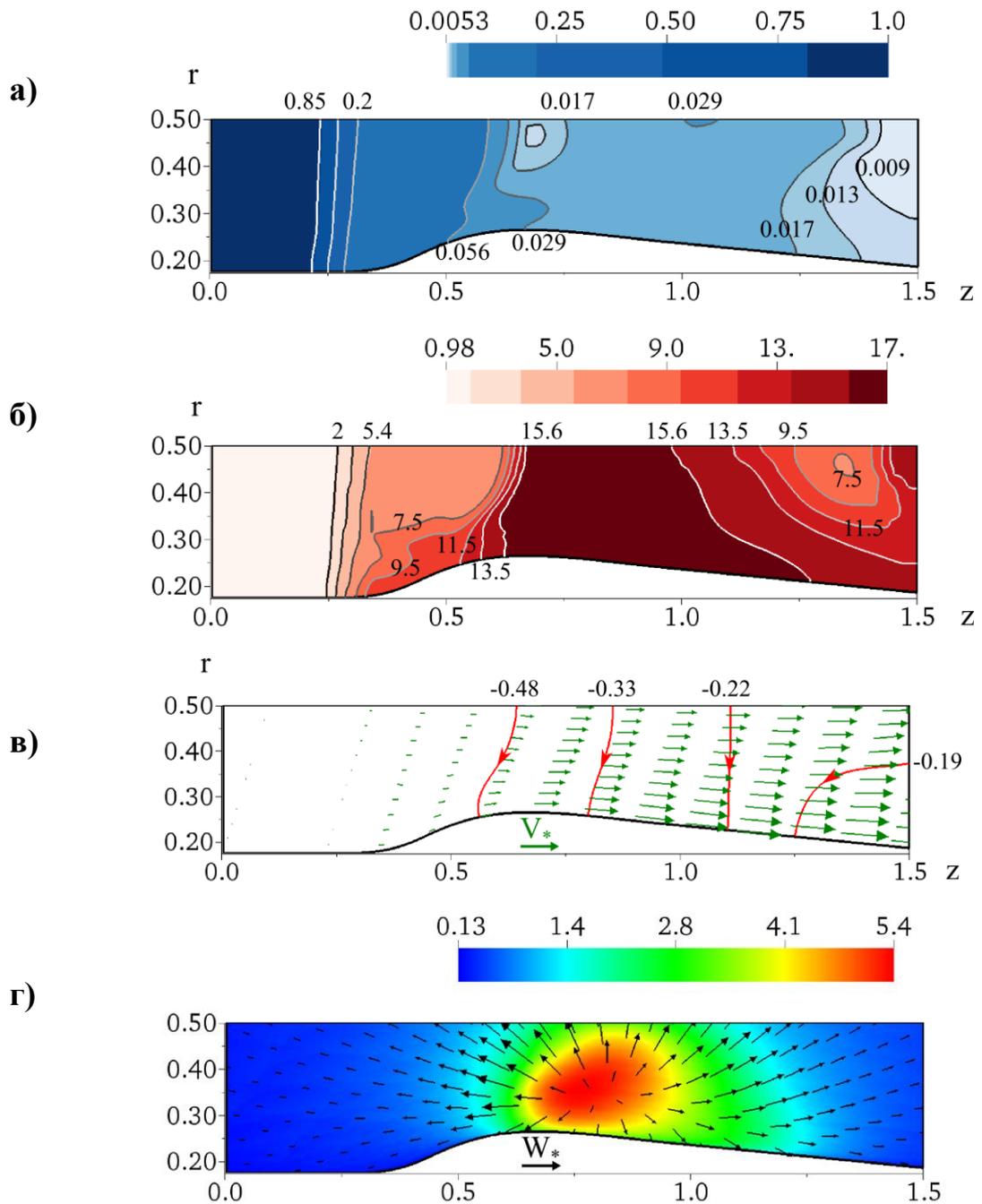


Рис. 44. Распределения а) плотности, б) температуры, в) скорости и тока в плазме, г) плотности энергии излучения и векторного поля плотности потока энергии излучения в канале плазменного ускорителя при  $n_0 = 8 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_0 = 1000 \text{ }^\circ\text{K}$ ,  $J_p = 60 \text{ kA}$  и  $L = 10 \text{ см}$

На рис. 44г представлены соответствующие распределения плотности энергии излучения  $U$  и векторного поля плотности потока энергии излучения  $\mathbf{W}$ . По сравнению с рис. 42г область наиболее сильного свечения плазмы, отвечающая максимальным значениям температуры, сместилась ближе к выходу и расположена в расширяющейся части канала.

#### 4.7. Условие стационарности течений ионизирующегося гелия

В серии расчетов наблюдаются либо установившиеся стационарные течения, либо неустановившиеся пульсирующие течения. На рис. 45 представлено изменение со временем температуры в точке, расположенной на средней координатной линии и  $z = 1.2$ , для двух расчетов.

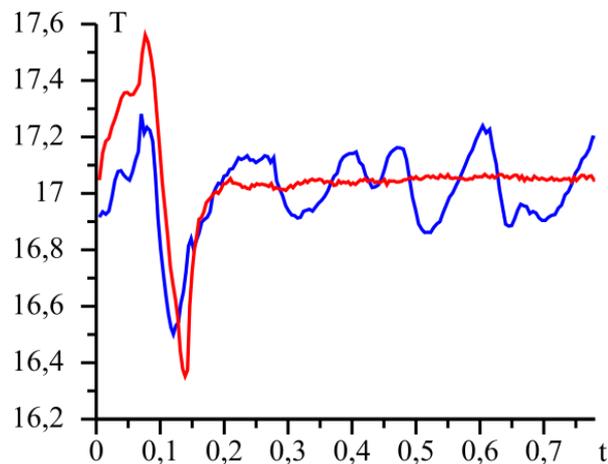


Рис. 45. Изменение температуры со временем в точке, расположенной на средней координатной линии на выходе из канала, для двух расчетов при  $J_p = 80 \text{ kA}$ ,  $n_o = 8 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_o = 1000 \text{ }^\circ\text{K}$ ,  $L = 10 \text{ см}$  (синяя кривая) и при  $J_p = 100 \text{ kA}$ ,  $n_o = 8 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_o = 1000 \text{ }^\circ\text{K}$ ,  $L = 10 \text{ см}$  (красная кривая)

Расчеты на рис 45 отвечают следующим наборам параметров:  $J_p = 80 \text{ kA}$ ,  $n_o = 8 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_o = 1000 \text{ }^\circ\text{K}$ ,  $L = 10 \text{ см}$  (синяя кривая) и  $J_p = 100 \text{ kA}$ ,  $n_o = 8 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_o = 1000 \text{ }^\circ\text{K}$ ,  $L = 10 \text{ см}$  (красная кривая). Красная линия соответствует стационарному течению, синяя – пульсирующему режиму.

В результате серии расчетов на плоскости переменных  $(\ln(J_{\dot{m}}), \ln(J_p))$  была определена граница, разделяющая стационарные и пульсирующие режимы. Данной границе соответствует линейная зависимость, изображенная сплошной прямой на рис. 46. Красные круглые маркеры, расположенные над границей, отвечают стационарным режимам. Стационарное течение, изображенное на рис. 42, отмечено цифрой 1 на рис. 46. Синие квадратные маркеры, расположенные ниже границы, напротив, отвечают пульсирующим течениям, которые наблюдаются при меньших значениях разрядного тока. Пульсирующему течению, изображенному на рис. 44, отвечает цифра 2.

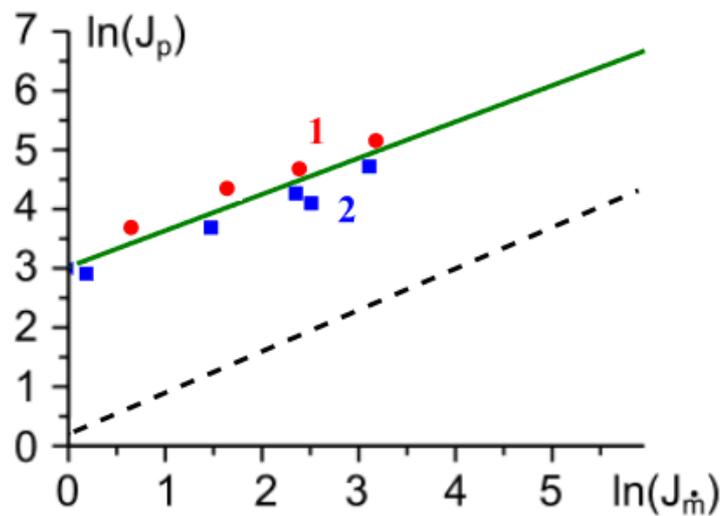


Рис. 46. Граница между стационарными и пульсирующими режимами

Граница между стационарными и пульсирующими режимами может быть представлена следующей линейной зависимостью:

$$\ln(J_p) = \lambda \ln(J_{\dot{m}}) + b,$$

где  $\lambda = 0.615$  и  $b = 3.01$ .

Соответственно эмпирическому условию стационарности течений ионизирующегося гелия отвечает следующее неравенство:

$$\frac{J_p^a}{J_{\dot{m}}} > K,$$

где константы равны  $K = e^{b/\lambda}$  и  $a = 1/\lambda = 1.63$ . Константы  $K$  и  $a$  в основном зависят от геометрии канала, используемого газа и характерной температуры поступающего газа. Для сравнения штриховая линия на рис. 46 соответствует границе между стационарными и пульсирующими течениями ионизирующегося водорода [152]. Очевидно, что устойчивому процессу ионизации водорода отвечает более широкий диапазон параметров.

Таким образом, рассмотрены стационарные и пульсирующие течения ионизирующегося гелия с возможным образованием двукратно ионизованных ионов. Расчеты двумерных осесимметричных течений ионизирующегося гелия в канале КСПУ-Т проведены на основе системы модифицированных МГД уравнений с учетом электропроводности, теплопроводности и переноса излучения. Модель дополнена системой уравнений ионизационного равновесия, которая позволяет определить образование ионов гелия с различной кратностью ионизации. 3D модель переноса излучения включает основные механизмы излучения и поглощения. Исследования процесса ионизации и переноса излучения в гелиевой плазме проведены в приближении локального термодинамического равновесия. В результате серии расчетов определено эмпирическое условие стационарности течений ионизирующегося гелия. Показано, что по сравнению с водородом процесс ионизации гелия менее устойчив и стационарным течениям ионизирующегося гелия отвечает менее широкий диапазон параметров. Определены спектральные и интегральные характеристики излучения в потоке ионизирующегося гелия в канале КСПУ-Т. Данные результаты будут способствовать проведению перспективных комплексных теоретико-вычислительных и экспериментальных исследований.

#### **4.8. Изучение процесса ионизации азота в канале КСПУ**

Как правило, в экспериментах используют водород, поскольку вся программа по разработке мощных плазменных ускорителей первоначально была ориентирована на термоядерные исследования. Ряд экспериментов

проводится с использованием других газов, включая гелий и азот. В настоящее время разработаны компактные атомные реакторы, в том числе для космических приложений. В связи с этим планируется создание мощных электрореактивных плазменных двигателей на основе соответствующей модификации плазменных ускорителей. Численное исследование процесса ионизации азота в канале КСПУ впервые было представлено в работе [127].

Установки КСПУ, являясь системами проточного типа, принципиально отличаются от других систем, включая импульсные плазменные ускорители и пушки. В небольших установках первой ступени КСПУ [1-14] обеспечивается непрерывная подача газа на входе с определенным значением давления  $P_o$ , равным по порядку величины  $P_o \approx 10 \text{ Тор}$ . В данном случае рассмотрены течения для близких и более высоких значений  $P_o$ .

Поскольку пролетное время в канале КСПУ много меньше длительности разряда, постановка задачи для азота по-прежнему предполагает задание фиксированного значения разрядного тока без учета процессов в цепи. Характерное время расчета МГД задачи методом установления с выходом на квазистационарное решение соответствует времени пролета частиц в канале и также много меньше длительности разряда. Поэтому в численных экспериментах, как и ранее, полагаем, что  $J_p = const$ .

На рис. 47 представлен вариант расчета квазистационарного течения ионизирующегося азота для следующих параметров задачи  $m = 14 \cdot m_p$ ,  $n_o = 4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_o = 750 \text{ }^\circ\text{K}$ ,  $J_p = 50 \text{ кА}$ ,  $L = 10 \text{ см}$ , которым отвечает характерное значение скорости  $V_o = 0.27 \cdot 10^6 \text{ см/с}$  и безразмерные параметры:  $\beta = 0.12$ ,  $r_o = 0.33$  ( $r_o = R_o / L$ ). На входе в канал осуществляется равномерная подача газа с заданными значениями  $\rho(r) = 1$  и  $T(T) = 1$ . Двумерным распределениям плотности и температуры отвечают рис. 47а и 47б. Рис. 47в для степени ионизации демонстрирует, что фронт

ионизации сосредоточен в сужающейся части канала. Линии уровня функции  $r H_\varphi$  на рис. 47г определяют ток в плазме. При этом на входе имеем  $r H_\varphi = r_0$ . Направление стрелок для тока в плазме на рис. 47г соответствует выбранной полярности, когда внешний электрод является анодом. Векторное поле скоростей в потоке ионизирующегося азота представлено на рис. 47г, где масштаб векторов определяется указанным значением  $V_* = 28 \cdot V_0$ .

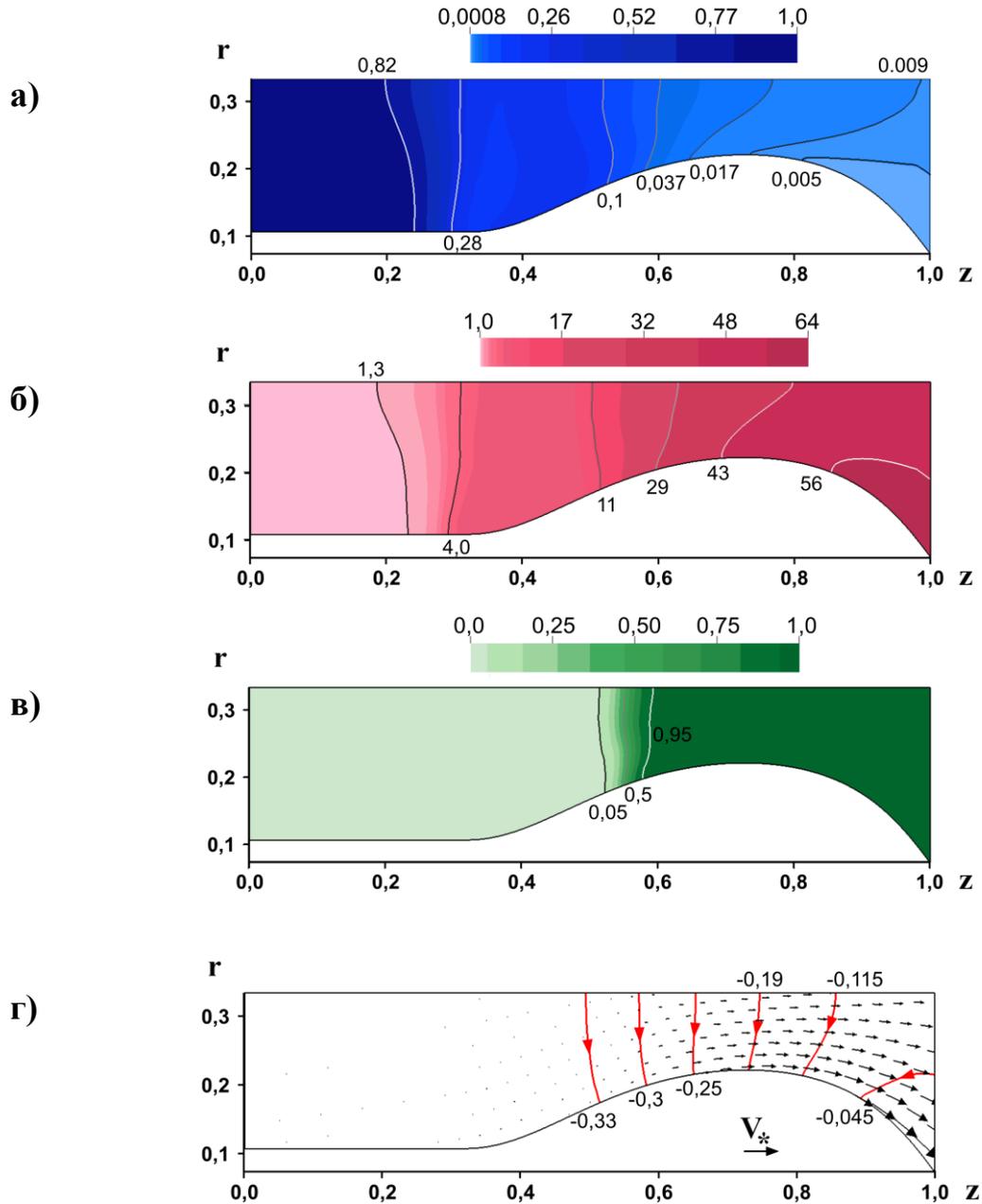


Рис. 47. Распределения а) плотности, б) температуры, в) степени ионизации, г) плазменного тока ( $r H_\varphi = const$ ) и векторного поля скоростей в потоке ионизирующегося азота при  $n_0 = 4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_0 = 750^\circ \text{ K}$ ,  $J_p = 50 \text{ кА}$

В соответствии с рис. 47 процессы в основном происходят в продольном направлении, что подтверждает применимость МГД модели в рамках квазиодномерного приближения, использованного в главах 2 и 3. Рис. 48 демонстрирует соответствующие одномерные зависимости: а) суммарной концентрации тяжелых частиц, б) температуры, в) скорости потока, г) степени ионизации, д) функции  $r H_\phi$  и е) относительной концентрации ионов различной кратности ионизации вдоль средней координатной линии.

По-прежнему наблюдаем резкое увеличение степени ионизации и температуры на сформировавшемся фронте ионизации. За фронтом благодаря силе Ампера происходит резкое ускорение плазмы, сопровождающееся ее разрежением. В процессе ускорения происходит переход скорости потока через скорость сигнала (1.4).

На рис. 48 штриховые кривые отвечают расчетам течения для водорода. Заметные отличия наблюдаются в распределениях температуры и скорости, поскольку более легкая водородная плазма естественно быстрее ускоряется и скорость потока существенно больше, а нагрев водородной плазмы и температура значительно меньше. Кривая 1 на рис. 48е отвечает распределению концентрации атомов азота вдоль канала. Кривая 2 на рис. 48е соответствует распределению однократно ионизованных ионов азота, которые сосредоточены в окрестности фронта ионизации. В процессе ускорения и существенного разрежения плазмы возникают и начинают преобладать ионы с кратностью ионизации равной 2 (кривая 3), а даже появляются ионы с зарядовым состоянием  $Z_i = 3$  (кривая 4). Данный результат согласуется с экспериментальными данными о том, что излучение плазмы азота в канале КСПУ является существенно более интенсивным по сравнению с водородной плазмой. При этом эффективность процесса ускорения в канале уменьшается при условии возникновения многозарядных ионов, поскольку определенная доля энергии тратится на дополнительную ионизацию и образование ионов с высокой кратностью ионизации.

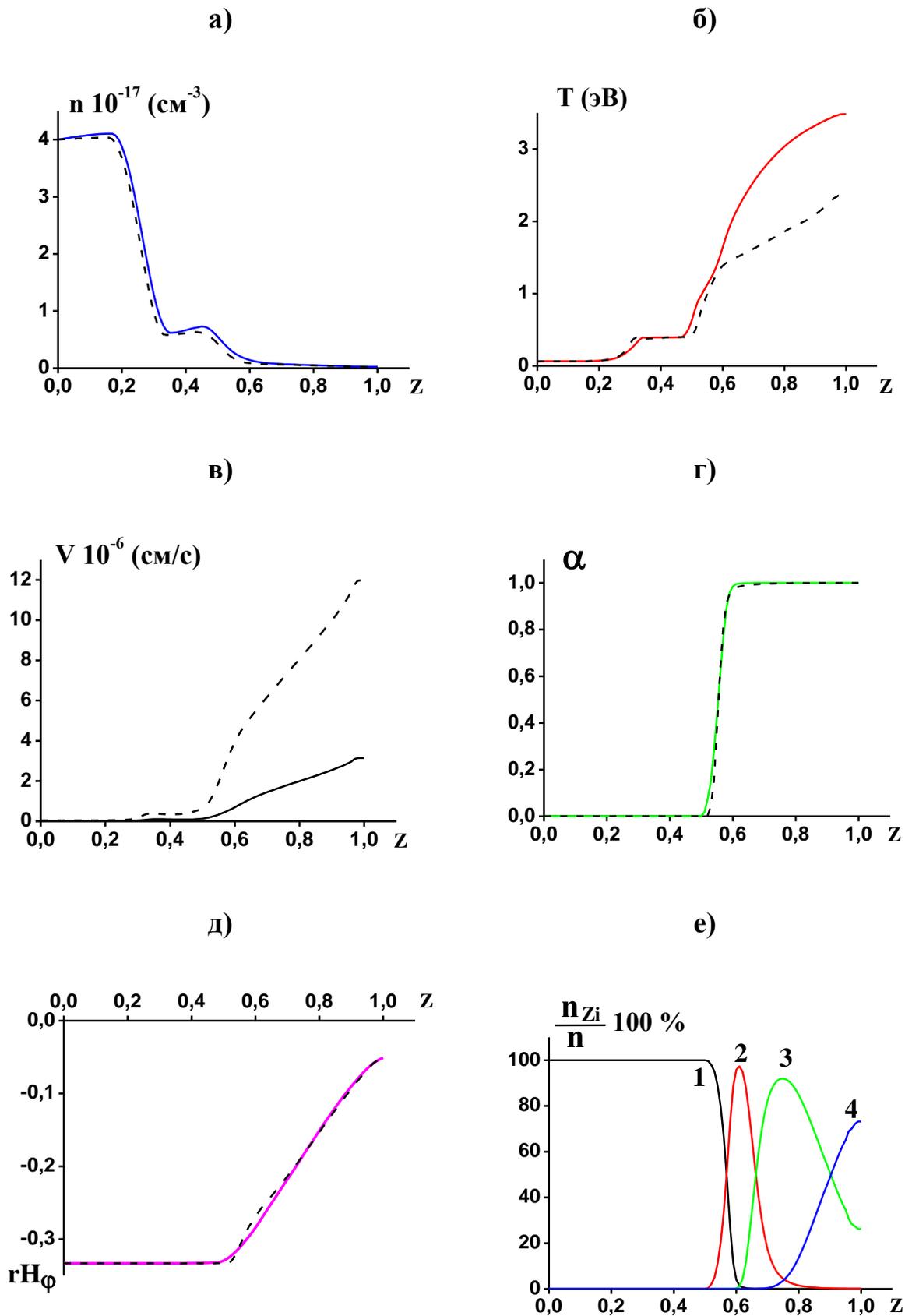


Рис. 48. Изменение МГД переменных в потоке ионизирующегося азота вдоль средней координатной линии канала (см. рис. 47). Штриховые кривые отвечают расчетам течения для водорода

Очевидно, что параметры плазмы на выходе из ускорителя зависят от параметров газа, подаваемого на входе в канал, и разрядного тока в системе. Расчеты течений показали [127], что при увеличении плотности вещества на входе фронт ионизации смещается вправо, а концентрация многозарядных ионов существенно меньше в более плотной среде.

Увеличение разрядного тока приводит к тому, что фронт ионизации смещается влево в направлении входа в канал, увеличиваются скорость и температура плазмы, а также увеличивается количество ионов с более высокой кратностью ионизации. При этом границы фронта ионизации оказываются менее выраженными.

Таким образом, проведено исследование течений ионизирующегося азота в канале плазменного ускорителя для многокомпонентной среды на основе модифицированных МГД уравнений, дополненных системой уравнений ионизационного равновесия при наличии многозарядных ионов с различной кратностью ионизации. Модель двумерных осесимметричных течений ионизирующегося азота учитывает основные механизмы электропроводности и теплопередачи, а также потери энергии на излучение. Расчеты показали, что в окрестности фронта ионизации в основном сосредоточены однократно ионизованные ионы азота. В то же время процесс ускорения и соответствующего разрежения в потоке плазмы сопровождается образованием многократно ионизованных ионов азота с высокой кратностью ионизации.

Увеличение разрядного тока, а также уменьшение концентрации газов на входе и соответствующее уменьшению расхода рабочего вещества, приводят к смещению фронта влево в направлении входа в канал. При этом увеличивается количество энергии, идущей на нагрев и ускорение плазмы, что сопровождается ростом температуры и скорости плазмы на выходе.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа помимо введения и заключения содержит 4 главы, в которых процесс ионизации и перенос излучения в канале квазистационарного плазменного ускорителя (КСПУ) исследованы с помощью численных моделей различного уровня сложности. Представлена иерархия моделей процесса ионизации.

1. В первой главе исследование течений ионизирующегося газа и переноса излучения в канале КСПУ проведено на основе разработанной модели радиационной магнитной газодинамики (РМГД). МГД модель двумерных осесимметричных течений ионизирующегося газа и плазмы учитывает электропроводность и теплопроводность среды. Впервые для плазменного ускорителя разработана 3D модель переноса излучения, которая включает основные механизмы излучения и поглощения фотонов. Численные исследования процесса ионизации и переноса излучения проведены в приближении локального термодинамического равновесия (ЛТР). В результате численных экспериментов определены спектральные и интегральные характеристики излучения в потоках ионизирующегося газа.

2. Во второй главе исследование стационарных и пульсирующих течений ионизирующегося газа в канале коаксиального плазменного ускорителя с азимутальным магнитным полем проведены на основе системы МГД-уравнений в квазиодномерном приближении с учетом уравнения кинетики ионизации и рекомбинации для вычисления скорости рождения электронов. Расчеты коэффициентов ступенчатой рекомбинации и ионизации выполнены в рамках модифицированного диффузионного приближения (МДП) для реальной энергетической структуры атома. В результате серии численных экспериментов сформулировано эмпирическое условие стационарности течений ионизирующегося газа, которое является также следствием законов подобия.

3. В третьей главе исследование течений ионизирующегося газа в канале КСПУ для многокомпонентной среды, состоящей из ионов, электронов и атомов, находящихся в разных энергетических состояниях, впервые проведено на основе РМГД модели, дополненной системой уравнений поуровневой кинетики для населенностей атомных уровней. В результате исследования неравновесного процесса ионизации получены распределения населенностей атомных уровней в окрестности фронта ионизации. Численные эксперименты показали, что радиационные процессы оказывают существенное влияние на возбуждение атомных уровней и приводят к значительному росту концентрации электронов и степени ионизации перед фронтом. Расчеты течений с учетом поуровневой кинетики сопоставлены с результатами исследований процесса ионизации на основе МДП.

4. В четвертой главе представлены численные исследования течений ионизирующегося гелия и азота, впервые проведенные в канале КСПУ для многокомпонентной среды, содержащей многозарядные ионы с различной кратностью ионизации. В этом случае модифицированные МГД уравнения двумерных осесимметричных течений ионизирующихся газов и плазмы с учетом электропроводности, теплопроводности и потерь энергии на излучение дополнены системой уравнений ионизационного равновесия при наличии многозарядных ионов. Показано, что ионы гелия двукратной ионизации практически не образуются. В результате серии расчетов стационарных и пульсирующих течений сформулировано эмпирическое условие стационарности течений ионизирующегося гелия. Установлено, что по сравнению с водородом стационарным течениям ионизирующегося гелия отвечает более узкий диапазон параметров. В численных экспериментах определены спектральные и интегральные характеристики излучения в потоке ионизирующегося гелия в канале КСПУ-Т (ТРИНИТИ). Численное исследование течений ионизирующегося азота в канале плазменного ускорителя показало, что в окрестности фронта ионизации в основном образуются однократно ионизованные ионы азота. Однако в процессе

ускорения и соответствующего разрежения в потоке плазмы возникают и начинают преобладать ионы азота с более высокой кратностью ионизации.

Установлено, что увеличение разрядного тока, а также уменьшение концентрации газов на входе и соответствующее уменьшение расхода рабочего вещества, приводят к смещению фронта влево в направлении входа в канал и сопровождается ростом температуры и скорости плазмы на выходе.

5. На основе разработанных РМГД моделей с помощью языка Fortran-95 реализованы программные комплексы, подготовленные в объектно-ориентированном стиле. Для одного из вычислительных кодов оформлено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018665229 с названием «Параллельная программа для численного исследования динамики потоков плазмы в каналах квазистационарных плазменных ускорителей». Данный комплекс, состоящий из нескольких модулей, отвечающих за разные аспекты и этапы решения РМГД задачи, был распараллелен по технологии OpenMP и DVM-Fortran. Расчеты проведены с использованием суперкомпьютера К-100.

## Библиографический список

1. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2008. 613 с.
2. Морозов А.И. Принципы коаксиальных (квази)стационарных плазменных ускорителей (КСПУ). // Физика плазмы. 1990. Т. 16, № 2. С. 131-146.
3. Морозов А.И. Физические основы космических электрореактивных двигателей. М.: Атомиздат, 1978. 326 с.
4. Белан В.Г., Золотарев С.П., Левашов В.Ф., Майнашев В.С., Морозов А.И., Подковыров В.Л., Скворцов Ю.В. Экспериментальное исследование квазистационарного плазменного ускорителя, питаемого от индуктивного и емкостного накопителей. // Физика плазмы. 1990. Т.16, № 2. С. 176-185.
5. Klimov N., Podkovyrov V., Zhitlukhin A., Kovalenko D., Bazylev B., Landman I., Pestchanyi S., Janeschitz G., Federici G., Merola M., Loarte A., Linke J., Hirai T., Compan J. Experimental study of PFCs erosion under ITER-like transient loads at plasma gun facility QSPA. // Journal of Nuclear Materials. 2009. V. 390-391. P. 721-726.
6. Д.В. Коваленко, Н.С. Климов, А.М. Житлухин, А.Д. Музыченко, В.Л. Подковыров, В.М. Сафронов, А.Д. Ярошевская. Получение потоков аргоновой плазмы и преобразование их энергии в излучение на установке КСПУ-Т для моделирования радиационных нагрузок, характерных для ослабленного срыва ИТЭР. // ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез. 2014, Т. 37, № 4, С. 39-48.
7. Kozlov A.N., Drukarenko S.P., Klimov N.S., Moskacheva A.A., Podkovyrov V.L. The experimental research of the electric characteristics of discharge in the quasi-steady plasma accelerator with the longitudinal magnetic field. // Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics. 2009. No. 1. P. 92-94.
8. Климов Н.С., Коваленко Д.В., Подковыров В.Л., Кочнев Д.М., Ярошевская А.Д., Урлова Р.В., Козлов А.Н., Коновалов В.С. Экспериментальное исследование интегральных характеристик потока плазмы и разряда квазистационарного сильноточного плазменного ускорителя с собственным магнитным полем. // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Термоядерный синтез. 2019. Т. 42. № 3. С. 52-63.
9. Волошко А.Ю., Гаркуша И.Е., Морозов А.И., Соляков Д.Г., Терешин В.И., Царенко А.В., Чеботарев В.В. Исследование локальной картины течения плазмы в двухступенчатом КСПУ. // Физика плазмы. 1990. Т. 16, № 2. С.168-175.
10. Tereshin V.I., Bandura A.N., Byrka O.V., Chebotarev V.V., Garkusha I.E., Landman I., Makhraj V.A., Neklyudov I.M., Solyakov D.G., Tsarenko A.V. Application of powerful quasi-steady-state plasma accelerators for simulation of ITER transient heat loads on divertor surfaces. // Plasma Phys. Contr. Fusion. 2007. V. 49. P. A231-A239.
11. Garkusha I.E., Chebotarev V.V., Herashchenko S.S., Makhraj V.A., et al. Novel test-bed facility for PSI issues in fusion reactor conditions on the base of next

- generation QSPA plasma accelerator. // Nuclear Fusion. 2017. V. 57. No. 11. Ar. 116011.
12. Ананин С.И., Асташинский В.М., Баканович Г.И., Костюкевич Е.А., Кузмицкий А.М., Маньковский А.А., Минько Л.Я., Морозов А.И. Исследование процессов формирования плазменных потоков в квазистационарном сильноточном плазменном ускорителе (КСПУ). // Физика плазмы. 1990. Т.16, № 2. С. 186-196.
  13. Astashynski V.M., Ananin S.I., Askerko V. V., Kostyukevich E.A., Kuzmitski A.M., Uglov V.V., Anishchik V.M., Astashynski V.V., Kvasov N.T., Danilyuk L.A. Materials surface modification using quasi-stationary plasma accelerators. // J. Surface and Coating Technology. 2004. V. 180-181. P. 392-395.
  14. Дьяконов Г.А., Тихонов В.Б. Экспериментальное исследование влияния геометрии ускорительного канала и внешнего магнитного поля на режимы течения плазмы в коаксиальном квазистационарном плазменном ускорителе (КСПУ) типа П-50А. // Физика плазмы. 1994. Т. 20, № 6. С. 533-540.
  15. Kozlov A.N. The study of plasma flows in accelerators with thermonuclear parameters. // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2017. V. 59, No. 11. Ar. 115004.
  16. Kozlov A.N. The study of high-velocity flow injection into the set of magnetic field coils coupled to plasma accelerator. // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2019. V. 61, No. 3, Ar. 035008.
  17. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле. // Вопросы теории плазмы. / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат. 1974, вып. 8. С. 3-87.
  18. Брушлинский К.В., Морозов А.И. Расчет двумерных течений плазмы в каналах. // Вопросы теории плазмы. / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат. 1974, вып. 8. С. 88-163.
  19. Брушлинский К.В., Заборов А.М., Козлов А.Н., Морозов А.И., Савельев В.В. Численное моделирование течений плазмы в КСПУ. // Физика плазмы. 1990. Т. 16, № 2. С. 147-157.
  20. Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2009. 200 с.
  21. Брушлинский К.В. Математические основы вычислительной механики жидкости, газа и плазмы. г. Долгопрудный: Издат. Дом "Интеллект", 2017.
  22. Зимин А.М., Морозов А.И. Течение плазмы между эквипотенциальными электродами в режиме ионного токопереноса. // Физика плазмы. 1995. Т.21, № 2. С. 126-131.
  23. Зимин А. М. Математическое моделирование процессов в плазменных установках: учебное пособие. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.
  24. Козлов А.Н. Влияние продольного магнитного поля на эффект Холла в канале плазменного ускорителя. // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 4. С. 165-175.
  25. Козлов А.Н. Динамика вращающихся потоков в канале плазменного ускорителя с продольным магнитным полем. // Физика плазмы. 2006, Т. 32, № 5. С. 413-422.

26. Kozlov A.N. Basis of the quasi-steady plasma accelerator theory in the presence of a longitudinal magnetic field. // *J. Plasma Physics*. 2008. V. 74, No.2. P. 261-286.
27. Брушлинский К.В., Жданова Н.С., Степин Е.В. Ускорение плазмы в коаксиальных каналах с профилированными электродами и продольным магнитным полем. // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2018. Т. 58, № 4. С. 607-617.
28. Козлов А.Н. Двухжидкостная магнитогидродинамическая модель течений плазмы в квазистационарном ускорителе с продольным магнитным полем. // *Прикладная механика и техническая физика*. 2009. Т. 50, № 3. С. 44-55.
29. Козлов А.Н. Исследование приэлектродных процессов в квазистационарных плазменных ускорителях с непроницаемыми электродами. // *Физика плазмы*. 2012. Т. 38, № 1. С. 15-25.
30. Kozlov A.N., Drukarenko S.P., Seytkhalilova E.I., Solyakov D.G., Velichkin M.A. The comparative analysis of the compressible plasma streams generated in QSPA from the various gases. // *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics*. 2012. No. 6. P. 120-122.
31. Морозов А.И., Козлов А.Н. Эффект самоочистения потока водородной плазмы в ускорителе КСПУ. // *Физика экстремальных состояний вещества*. Под ред. Фортова В.Е. и др. Изд. ИПХФ РАН, Черногловка, 2007, С. 316-319.
32. Kozlov A.N., Garkusha I.E., Konovalov V.S., Novikov V.G. The radiation intensity of the Lyman alpha line at the ionization front in the quasi-steady plasma accelerator. // *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics*. 2013. N 1. P. 128-130.
33. Kozlov A.N., Konovalov V.S. Numerical study of the ionization process and radiation transport in the channel of plasma accelerator. // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation (CNSNS)*. 2017. V. 51. P. 169-179.
34. Kozlov A.N., Konovalov V.S. Radiation transport in the ionizing gas flow in the quasi-steady plasma accelerator. // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. V. 946. Ar. 012165
35. Kozlov A.N., Konovalov V.S. Optimization of the radiation transport calculation for quasi-one-dimensional model of the ionizing gas flows. // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. V. 1336. Ar. 012003.
36. Козлов А.Н. Двумерный характер неустойчивости течений ионизирующегося газа в канале плазменного ускорителя. // *Известия АН СССР. МЖГ*. 1983. № 2. С. 187-189.
37. Козлов А.Н. Кинетика ионизации и рекомбинации в канале плазменного ускорителя. // *Изв. РАН. МЖГ*. 2000. № 5. С. 181-188.
38. Бармин А.А., Козлов А.Н. Структура стационарного фронта ионизации в канале плазменного ускорителя. // *Изв. РАН. МЖГ*. 2013. № 4. С. 155-167.
39. Брушлинский К.В., Козлов А.Н., Коновалов В.С. Численные модели стационарных и пульсирующих течений ионизирующегося газа в каналах плазменных ускорителей. // *ЖВМ и МФ*. 2015. Т. 55, № 8. С. 1405-1416.

40. Коновалов В.С., Козлов А.Н. Модель неравновесного процесса ионизации с учетом поуровневой кинетики и переноса излучения в канале плазменного ускорителя. // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2017. № 103. 28 с.
41. Бармин А.А., Куликовский А.Г. Фронты ионизации и рекомбинации в электромагнитном поле. // Итоги науки. Гидродинамика. Т. 5. М.: ВИНТИ. 1971. С. 5-31.
42. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме. // Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963, вып. 1. С. 183-272.
43. Кролл Н., Трайвелпис А. Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975. 525 с.
44. Михалас Д. Звездные атмосферы (1 часть). М.: Мир, 1982. 352 с.
45. Четверушкин Б.Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985. 304 с.
46. Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. М.: Наука, 1982. 375 с.
47. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.
48. Norman M.J., Chandre S., Uzer T., and Wang P. Nonlinear dynamics of ionization stabilization of atoms in intense laser fields. // Physical Review A. 2015. V. 91, No. 2. A 91, 023406.
49. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. М.: Мир, 1975. 934 с.
50. Имшенник В.С., Морозов Ю.П. Радиационная релятивистская газодинамика высокотемпературных явлений. М.: Атомиздат, 1981. 88 с.
51. Марчук Г.И., Лебедев В.И. Численные методы в теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1981. 454 с.
52. Castor John I. Lectures on radiation hydrodynamics. – Lawrence Livermore National Laboratory, 2000.
53. Никифоров А.Ф., Новиков В.Г., Уваров В.Б. Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы. М.: Физматлит, 2000. 399 с.
54. Фортвов В.Е. Уравнения состояния вещества: от идеального газа до кварк-глюонной плазмы. М.: Физматлит. 2012. 492 с.
55. Вайнштейн Л.А., Собельман И.И., Юков Е.А. Возбуждение атомов и уширение спектральных линий. М.: Наука. 1979. 319 с.
56. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: Макс Пресс. 2004. 328 с.
57. Chetverushkin V.N., D'Ascenzo N., Saveliev V.I. Three-level scheme for solving parabolic and elliptic equations. // Doklady Mathematics. 2015. V. 91, No. 3. P. 341-343.
58. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980. 352 с.
59. Галанин М.П., Попов Ю.П. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах. М.: Наука. Физматлит. 1995. 320 с.
60. Имшенник В.С., Боброва Н.А. Динамика столкновительной плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1997. 319 с.

61. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 608 с.
62. Суржигов С.Т. Физическая механика газовых разрядов. М.: изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 640 с.
63. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
64. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 440 с.
65. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
66. Бабенко К.И. Основы численного анализа. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2002. 848 с.
67. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007. 351 с.
68. Рябенький В.С. Введение в вычислительную математику. М.: Физматлит. 3-е изд., 2008. 285 с.
69. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2010. 591 с.
70. Сушкевич Т.А. Математические модели переноса излучения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. 661 с.
71. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. М.: Мир, 1990. 661 с.
72. Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations. II. Stiff and differential-algebraic problems. Springer. 1996. (Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебр. задачи. М.: Мир, 1999. 685 с. Перевод под ред. С.С. Филиппова)
73. Захаров А.Ю., Турчанинов В.И. STIFF – программа для решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: изд. ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1977. 43 с.
74. Лебедев А.В., Окунь М.В., Баранов А.Е., Деминский М.А., Потапкин Б.В. Упрощение кинетических механизмов физико-химических процессов на основе комбинированных математических методов. // Химическая физика и мезоскопия. Т. 13, № 1. С. 43-52.
75. Очкин В.Н. Спектроскопия низкотемпературной плазмы. М.: Физматлит. 2010. 592 с.
76. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1992. 536 с.
77. Грановский В.Л. Электрический ток в газе. М.: Наука, 1971. 543 с.
78. Ватажин А.Б., Любимов Г.А., Регирер С.А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Физматлит, 1970. 672 с.
79. Битюрин В.А., Бочаров А.Н., Татаринев А.В., Дегтярь В.Г., Калашников В.Г., Хлыбов В.И. Численное моделирование прохождения электромагнитных волн через ударный слой вокруг затупленного тела. // ТВТ. 2015. Т. 53, № 5. С. 741–746.
80. Битюрин В.А., Бочаров А.Н. Экспериментальные и численные исследования МГД-взаимодействия в гиперзвуковых потоках. // ТВТ. 2010. Т. 48, доп. вып. С. 44–55.

81. Битюрин В.А., Бочаров А.Н. Магнитогидродинамическое взаимодействие при обтекании затупленного тела гиперзвуковым воздушным потоком. // Известия РАН. МЖГ. 2006. № 5. С. 188-203.
82. Gasilov V.A., D'yachenko S.V. Quasimonotonous 2D MHD scheme for unstructured meshes. // Mathematical Modeling: modern methods and applications. Moscow, Janus-K, 2004. P. 108-125.
83. Гасилов В.А. и др. Пакет прикладных программ MARPLE3D для моделирования на высокопроизводительных ЭВМ импульсной магнитоускоренной плазмы. // Математическое моделирование. 2012. Т.24, № 1. С. 55–87.
84. Ольховская О.Г., Гасилов В. А., Котельников А.М., Якобовский М.В. Параллельный алгоритм трассировки лучей для анализа поля излучения и построения обскурোগрам излучающего газа. // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 143. 16 с.
85. Basko M.M., Maruhn J.A., Tauschwitz An. Development of a 2D Radiation-Hydrodynamics Code RALEF for Laser Plasma Simulations. // GSI Report 2010-1, GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung GmbH. 2010. P. 410.
86. Цыгвинцев И.П., Круковский А.Ю., Новиков В.Г. Сравнение различных методов расчёта переноса излучения для трёхмерных задач. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 48. 14 с.
87. Аристова Е.Н., Герцев М.Н., Шильков А.В. Метод лебеговского осреднения в серийных расчетах атмосферной радиации. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 6. С. 1033–1047.
88. Аристова Е.Н., Астафуров Г.О. Метод коротких характеристик второго порядка для решения уравнения переноса на сетке из тетраэдров. // Матем. Моделирование. 2016. Т. 28, № 7. С. 20–30. (Math. Models Comput. Simul. 2017. V. 9, No. 1, P. 40–47).
89. Аристова Е.Н., Асоцкий Д.И., Тишкин В.Ф. О параллельном алгоритме расчета течений излучающего газа LATRANT-P. // Матем. Моделирование. 2004. Т. 16, № 4. С. 105–113.
90. Chetverushkin B.N., Olkhovskaya O.G., Gasilov V.A. Solution of the radiative transfer equation on parallel computer systems. // Doklady Mathematics. 2015. V. 92, No. 2. P. 528-531.
91. Voronkov A., Sychugova E. CDSN - Method for solving the transport equation. // Journal of Transport Theory and Stat. Phys. 1993. V. 22. P. 221-245.
92. Жуков В.Т. Явно-итерационные схемы для параболических уравнений. // ВАНТ. Сер.: Мат. моделир. физических процессов. 1993. № 4. С. 40-46.
93. Дегтярев Л.М., Фаворский А.П. Поточковый вариант метода прогонки для разностных задач с сильно меняющимися коэффициентами. // ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9, № 1. С. 211-218.
94. Gavrikov M.B., Kudryashov N.A., Petrov B.A., Savelyev V.V., Sinelshchikov D.I. Solitary and periodic waves in two-fluid magnetohydrodynamics. //

- Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation. 2016. No. 38. P.1-7.
95. Geuzaine C., Remacle J.F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2009. V. 79, No. 11. P. 1309-1331.
96. Carlson B.G. A Method of Characteristics and Other Improvements in Solutions Methods for the Transport Equations. // NSE. 1976. V. 61. P. 408-425.
97. Воронков А.В., Сычугова Е.П. Решение уравнения переноса нейтронов в двумерной R-Z и трехмерной X-Y-Z геометриях методом дискретных ординат. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 1995. № 6.
98. Сычугова Е.П. Численные методы решения уравнения переноса в многогрупповом приближении в трехмерной геометрии в пакете «РЕАКТОР». // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2007, № 78, 22 с.
99. Цыбулин И.В., Скалько Ю.И., Павлова Е.С. Распределенный метод длинных характеристик для решения уравнения переноса излучения. // Труды Московского физико-технического института. 2015. Т. 7, № 2. С. 51–59.
100. Попов Г.А. Электрические ракетные двигатели (ЭРД). Разработки ЭРД в России. Роль Московского авиационного института. // Вестник Московского авиационного института. 2005 Т. 12, № 2. С. 112-122.
101. Антропов Н.Н., Богатый А.В., Даньшов Ю.Т., Дьяконов Г.А., Любинская Н.В., Нечаев И.Л., Попов Г.А., Семенихин С.А., Тютин В.К., Харламов В.С., Яковлев В.Н. Корректирующая двигательная установка с абляционным импульсным плазменным двигателем для малых космических аппаратов. // Вестник «НПО имени С.А. Лавочкина». 2013. № 5. С. 33-37.
102. Гуревич А.В., Питаевский Л.П. Коэффициент рекомбинации в плотной низкотемпературной плазме. // ЖЭТФ. 1964. Т. 46, № 4. С. 1281-1284.
103. Калиткин Н.Н., Пошивайло И.П. Решение задачи Коши для жестких систем с гарантированной точностью методом длины дуги. // Матем. Моделирование. 2014. Т. 26, № 7. С. 3–18.
104. Белов А.А. Пакет GACK для расчета химической кинетики с гарантированной точностью. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 71. 12 с.
105. Белов А.А., Калиткин Н.Н., Кузьмина Л.В. Моделирование химической кинетики в газах. // Матем. Моделирование. 2016. Т. 28, № 8. С. 46–64.
106. Hindmarsh A.C. ODEPACK, a Systematized Collection of ODE Solvers. // Scientific Computing, R. S. Stepleman et al., eds., North-Holland, Amsterdam. 1983, P. 55-64.
107. Brown P.N., Byrne G.D., and Hindmarsh A.C. VODE: A Variable Coefficient ODE Solver. // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1989. No. 10, P. 1038-1051. Also, LLNL Report UCRL-98412, June 1988.
108. Недоспасов А.В. Физика МГД-генераторов. // Успехи физических наук. 1977. Т. 123, № 5.

109. Bartschat K. and Zatsarinny O. Close-coupling calculations for electron–atom collisions: benchmark studies and uncertainty estimates. // *Physica Scripta*. 2015. V. 90, No. 5. 054006.
110. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М. Наука, 1972. 721 с.
111. Wei Zong Wang, Ming Zhe Rong, J. D. Yan, A. B. Murphy, and Joseph W. Spencer. Thermophysical properties of nitrogen plasmas under thermal equilibrium and non-equilibrium conditions. // *Phys. Plasmas*. 2011. V. 18, 113502
112. Wells A. Numerical Calculations of the Properties of Axially Symmetric Arc Columns. // Ministry of Technology, Aeronautical Research Council. Reports and Memoranda. 1967, No. 3580.
113. Yos J.M. Transport properties of nitrogen, hydrogen, oxygen, and air to 30.000 K. // Technical Memorandum RAD-TM-63-7 Contract AF33(616)-757B, Task 73603. Research and Advanced Development Division AVCO Corporation, Wilmington Massachusetts, 1963. 63 p.
114. Васильев А.П., Долгов-Савельев Г.Г., Коган В.И. Излучение примесей в разреженной горячей водородной плазме. // *Nuclear Fusion Supplement*. 1962. V. 2. P. 655-661.
115. Kramida A., Ralchenko Yu., Reader J. and NIST ASD Team. NIST Atomic Spectra Database (version 5.4). // National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD. 2016.
116. National Institute of Standards and Technology: Atomic Spectroscopy Databases. URL: <https://www.nist.gov/pml/atomic-spectroscopy-databases>.
117. Gu M.F. The flexible atomic code. // *Canadian Journal of Physics*. 2008. V. 86, No 5. P. 675-689.
118. Thermos: комплекс программ и банк данных. URL: <https://keldysh.ru/cgi/thermos/navigation.pl?ru.home>.
119. Кузенов В.В., Лебо А.И., Лебо И.Г., Рыжков С.В. Физико-математические модели и методы расчета воздействия мощных лазерных и плазменных импульсов на конденсированные и газовые среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 327 с.
120. G. Mozgovoy, I.V. Romadanov, S.V. Ryzhkov. Formation of a compact toroid for enhanced efficiency. // *Physics of Plasmas*. 2014. V. 21. 022501.
121. Костюков И.Ю., Рыжков С.В. Магнитно-инерциальный термоядерный синтез с лазерным обжатием замагниченной сферической мишени. // *Прикладная физика*. 2011. № 1. С. 65–72.
122. Кузенов В.В., Рыжков С.В., Шумаев В.В. Определение термодинамических свойств замагниченной плазмы на основе модели Томаса–Ферми. // *Прикладная физика*. 2014. № 3. С. 22-25.
123. Kozlov A.N., Klimov N.S., Konovalov V.S., Podkovyrov V.L., Urlova R.V. Study of the ionizing gas flow in the channel of plasma accelerator with different ways of gas inflow at the inlet. // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. V. 1394. Ar. 012021. P.1-8.

124. Козлов А.Н., Коновалов В.С., Новиков В.Г. Сравнительный анализ трех методов расчета переноса излучения на фронте ионизации в квазистационарных плазменных ускорителях. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2012. № 50. 24 с.
125. Козлов А.Н., Коновалов В.С. Пульсирующие режимы течений ионизирующегося газа в коаксиальных плазменных ускорителях. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2014. № 1. 28 с.
126. Козлов А.Н., Коновалов В.С. 3D модель переноса излучения в потоках ионизирующегося газа и плазмы. // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2016. № 86. 32 с.
127. Козлов А.Н., Коновалов В.С. Исследование процесса ионизации азота и образования многозарядных ионов в канале плазменного ускорителя. // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2017. № 100. 32 с.
128. Коновалов В.С. Перенос излучения в квазиодномерной модели течений ионизирующегося газа в канале плазменного ускорителя. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 54, 24 с.
129. Козлов А.Н., Коновалов В.С., Климов Н.С., Коваленко Д.В., Подковыров В.Л., Урлова Р.В., Гуторов К.М. Исследование переноса излучения в потоке ионизирующегося гелия в плазменном ускорителе. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 61. 27 с.
130. Коновалов В.С. Исследование устойчивости процесса ионизации гелия в канале плазменного ускорителя. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 108. 24 с.
131. Климов Н.С., Гуторов К.М., Коваленко Д.В., Козлов А.Н., Коновалов В.С., Подковыров В.Л., Ярошевская А.Д. Спектры излучения в потоках ионизирующихся газов для установки КСПУ-Т с продольным полем. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2022. № 12. 32 с.
132. Козлов А.Н., Коновалов В.С., Новиков В.Г. Перенос излучения в потоке ионизирующегося газа. // В сб. “Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики.” Материалы конференции. Алушта-2007. ISBN 966-02-3752-9, Киев, Элект. изд.: НПВК «ТРИАКОН». 2007. С. 1-15.
133. Козлов А.Н., Коновалов В.С. О роли лучистого теплообмена в потоке ионизирующегося газа. // В сб. “Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики.” Материалы конференции. Алушта-2008. ISSN 1999-5954, Киев, Элект. изд.: НПВК «ТРИАКОН». 2008. С. 1-15.
134. Konovalov V.S., Kozlov A.N., Novikov V.G. The condition of transition from the pulsing modes to the stationary ionizing gas flows in the channel of the coaxial plasma accelerator. // Compendium “Physics of Extreme States of Matter – 2009”. Ed. V.E. Fortov and others. Chernogolovka, IPCP RAS. 2009. P. 211-214.
135. Козлов А.Н., Коновалов В.С. Исследование устойчивости течений ионизирующегося газа в канале квазистационарного плазменного ускорителя. // Сборник трудов. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики.

- Казань, 20 – 24 августа 2015 г. Казань: Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. С. 1864-1866.
136. Kozlov A.N., Konovalov V.S.. Investigation of stationary and pulsating flows of ionizing gas in the channel of the plasma accelerator. // Proceedings the 15th International Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics. Ed. V.A. Bityurin, Moscow, ИИТ RAS, Изд-во: ООО печатный салон «Шанс». 2016. P. 57-61.
137. Коновалов В.С., Козлов А.Н., Колдоба Е.В., Коробицин Д.А., Приходько Л.А. Неустойчивость течений ионизирующего газа в канале коаксиального плазменного ускорителя. // Материалы XXII международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность», 14 - 21 февраля 2016 г. Московская область, г. Звенигород. Издательство Московского университета, Элект. издание, ISBN 978-5-19-011132-3. 2016. С. 92-94.
138. Козлов А.Н., Коновалов В.С. Исследование переноса излучения в потоках ионизирующего газа в КСПУ с помощью методов коротких и длинных характеристик. // Труды Международной конференции «XIII Забабахинские научные чтения», посвященной 100-летию со дня рождения академика Е.И. Забабахина. Снежинск, Челябинская область, 20–24 марта 2017 г., Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е.И. Забабахина (РФЯЦ – ВНИИТФ). 2017. С. 1 – 12.
139. Kozlov A.N., Konovalov V.S. The Study of Radiation Transport and Plasma Dynamics Based on the MHD Model in the Multi-Mirror Trap Connected with Plasma Accelerator. // Proceedings of the 17th International Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics. Moscow, 17-19 April 2018, Moscow: Joint Institute of High Temperatures of RAS. 2018. P. 171-176.
140. Klimov N.S., Kozlov A.N., Konovalov V.S., Podkovyrov V.L., Urlova R.V. Research of the ionization process in the plasma accelerator channel with different ways of the inlet gas supply. // Proceedings of the 18th International Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics. Moscow, 9-11 April 2019, Moscow: Joint Institute of High Temperatures of RAS. 2019. P. 168-173.
141. Klimov N.S., Kovalenko D.V., Kozlov A.N., Konovalov V.S., Podkovyrov V.L., Urlova R.V. Numerical model of the helium ionization process in the plasma accelerator channel. // Proceedings of the 19th International Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics. Moscow, Joint Institute of High Temperatures of RAS, 15-17 September, 2020, Moscow: ООО «Печатный Салон «Шанс»». 2020. P. 17-20.
142. Gutorov K.M., Klimov N.S., Kovalenko D.V., Kozlov A.N., Konovalov V.S., Novikova S.O., Podkovyrov V.L., Urlova R.V., Khamkoev M.-B.Kh. Numerical study of the stability of two-dimensional axisymmetric flows of an ionizing gas in the channel of the quasi-stationary plasma accelerator QSPA-T. // Proceedings of the 20th International Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics. Moscow, ИИТ RAS, 25-27 May, 2021. Session 1, P. 13-19.

143. Бахтин В.А., Захаров Д.А., Козлов А.Н., Коновалов В.С. Разработка параллельного программного кода для расчетов задачи радиационной магнитной газодинамики и исследования динамики плазмы в канале КСПУ. // Научный сервис в сети Интернет: труды XXI Всероссийской научной конференции (23-28 сентября 2019 г., г. Новороссийск). М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2019. С. 105-118.
144. V. Bakhtin, D. Zakharov, A. Kozlov, V. Konovalov. Development of parallel software code for calculating the problem of radiation magnetic gas dynamics and the study of plasma dynamics in the channel of plasma accelerator. // CEUR Workshop Proceedings. ISSN:1613-0073. 2020. V. 2543, P. 59-70.
145. Бахтин В.А., Захаров Д.А., Козлов А.Н., Коновалов В.С. Использование DVM-системы при разработке программы для расчетов задачи радиационной магнитной газодинамики и исследования динамики плазмы в канале КСПУ. // Электронные библиотеки. 2020 . Т. 23, № 4. С. 594-614.
146. Козлов А.Н., Коновалов В.С., Бахтин В.А., Захаров Д.А. Параллельная программа для численного исследования динамики потоков плазмы в каналах квазистационарных плазменных ускорителей. // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ от 3 декабря 2018 года. № 2018665229.
147. Козлов А.Н. Моделирование двумерных течений ионизирующегося газа и плазмы в коаксиальном ускорителе с учетом теплопроводности, излучения и процессов в электрической цепи. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. № 186. 1985. 23 с.
148. Брушлинский К.В., Калугин Г.А., Козлов А.Н. Численное моделирование течения ионизирующегося газа в канале. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1982. № 50. 28 с.
149. Великович А.Л., Либерман М.А. Физика ударных волн в газах и плазме. М.: Наука.1987. 295 с.
150. Левин В.А., Скопина Г.А. Распространение волн детонации в закрученных потоках газа. // Прикладная механика и теоретическая физика. 2004. Т. 45, № 4. С. 3-6.
151. Adibzadeh M., Theodosiou C.E. Elastic electron scattering from inert-gas atoms. // Atomic Data and Nuclear Data Tables. 2006. V. 91. P. 8–76.
152. Козлов А.Н., Коновалов В.С., Новикова С.О. Исследование пульсирующих течений ионизирующегося водорода в плазменном ускорителе на основе двумерной модели. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 96. 24 с.
153. Козлов А.Н., Коновалов В.С. Эмпирическое условие стационарности двумерных течений ионизирующегося водорода в канале плазменного ускорителя.// Математическое моделирование. 2023, том 35, № 1, С. 13-33.