В диссертационный совет Д.002.024.03
при Институте прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН

Отзыв официального оппонента на диссертационную работу
Коптевой Натальи Викторовны
"Апостериорные и априорные оценки конечноэлементных решений некоторых сингулярно возмущенных уравнений на анизотропных сетках",
представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.07 – "Вычислительная математика"

Диссертационная работа Н.В. Коптевой посвящена теоретическому исследованию широкого круга вопросов, связанных с численным решением полулинейных сингулярно возмущенных уравнений реакции-диффузии. Оно охватывает установление наиболее важных и подлежащих учету при выборе численной схемы свойств решений, зависящих от типов нелинейности, области и степени вырождения таких краевых задач, построение эффективных при любом значении малого параметра схем МКЭ (метода конечных элементов), и получение априорных и робастных апостериорных оценок погрешности приближенных решений. Для рассматриваемого в диссертации класса задач при малых значениях коэффицента при старшем члене характерны решения с резкими пограничными и внутренними слоями. Поэтому основное внимание уделено оценкам ошибки МКЭ на анизотропных сетках, причем автор концентрирует анализ на наиболее трудно выводимых оценках в норме максимума модуля.

Диссертация объемом 298 стр. содержит введение, три главы, разделенные на 7 параграфов, заключение и список цитируемой литературы с 183 названиями.

Во Введении дается обстоятельный обзор предшествующих работ по рассматриваемой тематике, на основе которого обосновывается ее актульность и новизна полученных в диссертации результатов. Также даны общая характеристика и краткое содержание глав работы, сформулированы основные результаты, выносимые на защиту.

Глава 1, включающая §§1–3, посвящена получению явных апостериорных оценок ошибки конечноэлементных решений для полулинейных эллиптических уравнений реакции-диффузии, в том числе сингулярно возмущенных, в многоугольных 2D и многогранных 3D областях. Коэффициентом при старшем члене может принимать любые значения $\varepsilon \in (0, 1]$. В §1 рассматриваются МКЭ произвольного порядка точности на локально квазиравномерных триангуляциях области, доказывается оценка ошибки численного решения в норме максимума модуля с явным представлением заисимости правой части от ε. Доказывается также оценка, которую можно назвать оценкой *почти эффективности* или *почти обратной*, в которой главные слагаемые апостериорного оценщика оцениваются сверху нормой ошибки с некоторыми дополнительными слагаемыми. Подобные оценки принято считать подтверждением правильности основных коэффициентов апостериорного оценщика.

Заметим, что ранее аналогичные полученным в §1 апостериорные оценки были получены лишь при в более слабых условиях, например, в энергетической норме. При этом автору удалось уточнить степень $\ln h$ в коэффициентах оценки (даже для уравнеия Пуассона), что потребовало развития нового аппарата на основе неулучшаемых оценок функции Грина линеаризованного сингулярно возмущенного оператора реакции-диффузии в нелипшицевых, многоугольных и многогранных областях.

В §§2,3 исследуются МКЭ с линейными конечными элементами для задач в двумерных областях, генерируемые на более сложных, чем в §1, неструктурированных анизотропных сетках, допускающих сильную сплющенность ячеек. Апостериорные оценки ошибки численного решения получены в §2 в норме максимума модуля а в §3 в энергетической норме.

Наиболее ранние оценки для случая анизотропных следуют подходу Г. Кунерта и Р. Ферфюрта и как правило получены в энергетической норме. Их недостаток – присутствие в них так называемых функций согласования (matching functions), зависящих от погрешности численного решения и растущих при отсутствии согласования анизотропии сетки с решением. Оценкам в равномерной метрике посвящены работы Ночетто, Эрикссона и Джонсона, Ночетто и Джонсона, но они зависят от аспектных отношений диаметров конечных элементов. Н.В. Коптевой впервые получены робастные в отношении ε и указанных аспектных отношений апостериорные оценки погрешности на анизотропных сетках, в которых функции согласования не используются. Для их вывода ей пришлось применить целый арсенал технических средств. Например, для анизотропных конечных элементов доказаны две теоремы о следах, используемые при оценке невязок на границах элементов; предложен оригинальный квазиинтерполяционный оператор, позволивший адекватно аппроксимировать фунцию Грина на неструктурированных анизотропных сетках; получено представление ошибки с использованием функции Грина линейного оператора, являющегося линеаризацией оператора краевой задачи. Подчеркнем, что оценки Гл. 1 являются новыми даже для линейного уравнения Пуассона а развитый в ней теоретический аппарат имеет самостоятельное зрачение и может быть использован при анализе более сложных сингулярно возмущенных задач. Значительное место отведено обсуждению результатов численных экспериментов.

В Главе 2, включающей §§4–5, получены апостериорные оценки погрешности для приближенных решений полулинейных параболических уравнений второго порядка с эллиптическими операторами того же типа, что и в Гл. 1. Анализируются временные полудискретизации методами Эйлера и Кранка-Николсон и разрывного метода Галеркина ($\mathrm{dG}(r)$) с квадратурой Радо и полные дискретизации с дискретизацией МКЭ по пространственным перменным. При анализе полностью дискретных методов применяется аппарат эллиптических реконструкций (elliptic reconstructions). На самом деле развитый подход применим к широкому классу временных и пространственных дискретизаций.

Основными результатами главы являются апостериорные оценки погрешности в норме максимума модуля, которые являются новыми как для классических, так и для сингулярно возмущенных уравнений. Автору удалось упростить традиционную технику вывода таких оценок за счет использования интерполянт численного решения по времени, степень которых соответствует порядку метода и более низка в сравнении с типично используемыми в литературе интерполянтами. Например, в случае неявного метода Эйлера оказывается достаточным применить кусочно-постоянную интерполяцию. Тем не менее, анализ остается сложным, важную роль в нем играют полученные Н. В. Коптевой оценки функции Грина параболического оператора.

Основное содержание Главы 3, включающей §§6–7, – априорные оценки ошибки численных решений на анизотропных сетках для сингулярно возмущенных уравнений реакции –диффузии с более сложной нелинейностью младшего члена. Нелинейность по неизвестной функци не является теперь монотонной, поэтому такие уравнения могут иметь несколько решений. В этом случае стандартный технический аппарат получения априорных оценок ошибки как для конечно-разностных, так и для конечноэлементных численных решений становится недостаточным. В диссертации для исследования существования и точности численных решений используется принципиально иной подход, основанный на построении дискретных верхних и нижних решений, которые является нелинейными модификациями асимтотического разложения для исходной задачи. В предшествующих работах такой подход применялся лишь для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В §6 в предположении, что область гладкая, исследованы численные решения на сгущающихся в пограничных слоях сетках типа Н. С. Бахвалова и Г. И. Шишкина. Доказано существование решений соответствующих нелинейных дискретных задач и при условии $\varepsilon \leq Ch$ установлен второй порядок сходимости (с логарифмическим множителем в случае сетки Г. И. Шишкина) в сеточной норме максимума модуля равномерно по малому параметру ε. При этом число степеней свободы не превосходит Ch^{-2}. Здесь h является макимальным диаметром элементов сетки.

В §7 аналогичная задача рассматривается в выпуклой многоугольной области, при этом наличие угловых точек границы приводит к существенным дополнительным сложностям анализа, так как в дополнение к достаточно стандартным погранслойным функциям, в асимптотическом разложении появляются угловые пограничные функции. Последние определяются как решения некоторых нелинейных краевых задач в бесконечном выпуклом секторе, существование которых далеко не очевидно. Построено асимптотическое разложение а также установлено существование решения исходной задачи в окрестности асимптотического разложения. Данный результат, значительный сам по себе, важен также для построения эффективных численных методов для решения рассматриваемой задачи. В частности, как и в §6, полученные асимпотическое разложение и соответствующие верхние и нижние решения могут облегчить построение и исследование ε-равномерных по точности численных методов. Кратко пути получения таких численных методов обсуждается в §7.5.

Степень обоснованности и достоверность научных положений. При использовании богатого арсенала инструментов анализа и значительной общности результатов, учитывающих ряд важных для успешных вычислений факторов, диссертация Н. В. Коптевой отличается весьма строгим и полным изложением доказательств. Результаты диссертации изложены в 17 публикациях в журналах, включенных в системы цитирования Web of Science и Scopus, включая ведущие международные журналы по вычислительной математике, такие как Mathematics of Computation, Numerische Mathematik, SIAM Journal on Numerical Analysis. Они были представлены автором на многих наиболее представительных международных конференциях, проводившихся в России и за рубежом, и получили одобрение специалистов.

Научная и практическая значимость. Тематика диссертации относится к одному из интенсивно развиваемых со второй половины прошлого века направлений наряду с многосеточными методами, методами декомпозиции области, hp-версией МКЭ и др. При значительном числе предшествующих работ несомненна оригинальность и существенная научная значимость результатов диссертации. Впервые получены робастные по малому параметру апостериорные и априорные оценки погрешности численных решений для сложного класса полулинейных сингулярно возмущенных эллиптичесих уравнений реакции-диффузии. При этом основное внимание уделено оценкам в равномерной метрике существенно более трудным для анализа по сравнению с оценками в энергетической норме. Значительный вклад в практику вычислений заключается в обосновании ряда эффективных вычислительных схем и установлении характера влияния на погрешность таких факторов как малый параметр при старшем члене уравнения, анизотропия сетки, тип нелинейности младшего члена.

Замечания

1. Не всегда адекватно характеризуется робастность. На стр. 22 диссертации читаем "оценка (3) является робастной по ε в том смысле, что зависимость от ε в этой оценке показана явно". То же самое повторено в автореферате. Строгое определение, например, в работе Р. Верфурта (R. Verfurth, Numer. Math. (1998) 78: 479-493) подразумевает, что апостериорная мажоранта (оценщик) оценивается глобально сверху и локально снизу энергетической нормой ошибки причем так, что отношение оценок сверху и снизу являются постоянными независимо от шага сетки и параметра пертурбации. Нужно отметить, что определения робастности повторяются в диссертации несколько раз, и как правило к приведенной характеристике добавляется корректирующая фраза типа "при этом эффективность этих оценок не должна зависеть от малости данного параметра". На самом деле только это дополнение и важно, явное представление не обязательно.

2. Норма максимума модуля для рассматриваемых оценок погрешности автору "представляется более подходящей, поскольку она является достаточно сильной (в отличие, например, от энергетической нормы) для того, чтобы обнаружить большую ошибку в зонах узких пограничных и внутренних слоев" (стр. 7 автореферата, стр. 33 диссертации). Это положение было бы хорошо подтвердить численным примером. Существенная полезность оценок в норме пространства L_∞ не вызывает сомнений. Однако даже при одинаковых относительной точности и простоте обоих типов оценок представляется целесообразным совместное их использование. Особенно, если учесть, что по точности и простоте определения постоянных оценки в норме максимума модуля нередко уступают оценкам в энергетической норме и норме пространства L_2.

3. На стр. 134 говорится о связи функции Θ в (3.16) с интерполяционной ошибкой для функции Грина. О необходимости нового квазиинтерполяционного оператора для интерполяции функции Грина на анизотропных сетках говорится кроме того во введении к §2 (стр. 126) а также на стр. 27 при описании

результатов §2. Однако функция Грина, как и ее интерполяции, в §2 не используются.

4. Оценки, содержащие в правых частях $C\ell_h \|f_h - f_h^I\|_{\infty;\Omega}$, как в (2.3), см. также (2.4), (2.26), (2,43), или $C\|f_h - f_h^I\|_{2;\Omega}$, как в (3.3), не робастны, так как указанные слагаемые в некоторых ситуациях существенно огрубляют оценки. Обратимся, например, к (3.3), предположив для наибольшей простоты, что $\varepsilon \in [c, 1],\ c = \mathrm{const},\ f = f(x) \in L_2(\Omega)$. В частности, при выпуклой области Ω будем иметь $u \in H^2(\Omega)$. Следовательно, имеется подмножество $f \in L_2(\Omega)$, для которых энергетическая норма погрешности $u_h - u$ имеет порядок H, а будет оцениваться посредством (3.3) только постоянной (например, $C' = C\|f_h\|_{2;\Omega}$), благодаря слагаемому $C\|f_h - f_h^I\|_{2;\Omega}$. К сходным выводам придем и при определенных более общих предположениях, подчиненных предположениям диссертации.

5. В основе полученных апостериорных оценок погрешности лежат результаты, связанные с оценками аппроксимации на различных триангуляциях для ряда классов функций. Эти результаты заслуживают выделения в отдельную главу, что, на мой взгляд, упростило бы чтение диссертации.

Приведенные замечания не снижают ценности представленных в диссертации результатов.

Заключение. Диссертация посвящена актуальной тематике. Все результаты, выносимые на защиту, имеют важное значение для развития одного из основополагающих направлений вычислительной математики, они строго и обстоятельно обоснованы с помощью обширного, сложного, современного математического аппарата, которым автор свободно владеет. Диссертация хорошо структурирована, написана хорошим понятным языком, число описок минимально.

Диссертация является законченным самостоятельным исследованием и полностью соответствует паспорту специальности 01.01.07 "Вычислительная математика", автореферат соответствует ее содержанию.

Диссертация Натальи Викторовны Коптевой удовлетворяет требованиям "Положения о порядке присуждения ученых степеней" ВАК, а ее автор заслуживает присвоения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.07 - "Вычислительная математика".

Корнеев Вадим Глебович,
Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук,
профессор Кафедры параллельных алгоритмов
ФГБОУ ВО "Санкт-Петербургский
государственный университет" **В.Г. Корнеев**
12.09.2019

199034, Санкт-Петербург,
Университетская набережная 7-9.
Телефон: +7(812) 4284210
E-mail: vad.korneev2011@yandex.ru

ЛИЧНУЮ ПОДПИСЬ ЗАВЕРЯЮ
НАЧАЛЬНИК ОТДЕЛА КАДРОВ № 3
Н. И. МАШТЕПА
12.09.2019

Документ подготовлен в порядке исполнения трудовых обязанностей