

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу Коптевой Натальи Викторовны “Апостериорные и априорные оценки конечноэлементных решений некоторых сингулярно возмущенных уравнений на анизотропных сетках”, представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.07 — Вычислительная математика

Актуальность. Диссертационная работа Н.В. Коптевой посвящена теоретическому исследованию численных методов для сингулярно возмущенных уравнений в частных производных. Последние возникают при моделировании ряда важных задач физики и техники. Хорошо известно, что для решений таких задач характерны пограничные и внутренние слои. Также хорошо известно, что точность классических методов, не учитывающих наличие в задаче малого параметра, может весьма существенно зависеть от значения этого параметра. Поэтому для достижения хорошей точности приходится либо использовать сетки с весьма большим числом узлов, либо же специально разработанные для таких задач методы, например, основанные на использовании сеток, сгущающихся специальным образом в областях пограничных и внутренних слоев (из последних отметим сетки типа Бахвалова и Шишкина).

Несмотря на наличие большого количества работ по данной тематике, некоторые важные вопросы ранее в литературе не рассматривались, либо же оставались слабо изученными, возможно, в силу их технической сложности. К таким вопросам относятся получение робастных апостериорных оценок, в особенности на анизотропных сетках и в норме максимума модуля, а также исследование точности численных решений немонотонных сингулярно возмущенных уравнений. Этим вопросам и посвящена представленная диссертация.

Содержание и методология. Диссертация (объемом 298 стр.) состоит из введения, трех глав, разделенных на 7 параграфов, заключения и списка цитируемой литературы, содержащего 183 названия.

Во Введении обосновывается актуальность темы и дается весьма подробный обзор литературы по теме диссертации.

Глава 1 (§§1–3) посвящена получению апостериорных оценок ошибки конечноэлементных решений для сингулярно возмущенных эллиптических уравнений. В §1 рассматриваются локально квазиравномерные триангуляции области, при этом ошибка численного решения оценивается в норме максимума модуля. Ранее аналогичные апостериорные оценки были получены лишь в более слабой (и поэтому менее подходящей для решений с пограничными и внутренними слоями) энергетической норме. Важно отметить, что постоянные в полученных оценках не зависят от диаметров ячеек сетки и малого параметра. Зависимость же от малого параметра и локального диаметра сетки в этих оценках показана явно, при этом в работе также теоретически обоснована эффективность данных оценок. Хочется также отметить установленные и используемые в данной главе неулучшаемые оценки функции Грина линеаризованного сингулярно возмущенного оператора реакции-диффузии в многоугольных и многогранных областях.

В §§2–3 исследуется существенно более сложный случай неструктурированных анизотропных сеток (т. е. ячейки рассматриваемых здесь сеток могут быть сколь угодно сильно сплющены). Апостериорные оценки ошибки численного решения получены соответственно в норме максимума модуля и в энергетической норме. Известные более ранние оценки на анизотропных сетках, главным образом, следуют подходу Г. Кунерта и Р. Ферфюрта. Такие оценки, как правило, получены в энергетической норме, и для них характерен существенный недостаток: в них присутствуют так называемые функции согласования (matching functions). Автору же диссертации удалось преодолеть ряд серьезных

технических препятствий, возникающих при анализе анизотропных сеток, и получить оценки, “свободные” от функций согласования.

Глава 2 (§§4–5) посвящена апостериорным оценкам для полулинейных параболических уравнений второго порядка. Предложенный здесь подход применим к широкому классу временных и пространственных дискретизаций. Рассмотрены временные полудискретизации и полностью дискретные методы на основе неявного метода Эйлера, метода Кранка-Николсона и разрывного метода Галеркина $dG(r)$ с квадратурой Радо. При анализе полностью дискретных методов используется аппарат эллиптических реконструкций (elliptic reconstructions). Также важную роль в представленном анализе играют полученные автором оценки функции Грина параболического оператора. Основными результатами главы являются апостериорные оценки в норме максимума модуля для ошибки соответствующих численных решений. Отметим, что представленные здесь результаты являются новыми и для классических, и для сингулярно возмущенных уравнений.

В главе 3 (§§6–7) автор обращается к априорным оценкам ошибки численных решений на анизотропных сетках. При этом рассматриваются немонотонные сингулярно возмущенные уравнения реакции-диффузии (в которых нелинейность по неизвестной функции не является монотонной, поэтому такие уравнения могут иметь несколько решений). Отметим, что обширная литература по данной тематике посвящена либо линейным, либо монотонным уравнениям, а стандартная методология плохо обобщается на немонотонный случай. В представленной диссертации при доказательстве существования и точности численных решений используется подход, основанный на построении дискретных верхних и нижних решений (при этом последние являются нелинейными модификациями асимптотического разложения для исходной задачи). Ранее данный подход использовался лишь для обыкновенных дифференциальных уравнений. В §6 для случая гладких обла-

стей исследованы численные решения на сгущающихся в пограничных слоях сетках типа Бахвалова и Шишкина. В §7 аналогичная задача рассматривается в выпуклой многоугольной области, при этом наличие угловых точек границы приводит к существенным дополнительным сложностям в анализе. Установлено существование решения исходной задачи в окрестности построенного в работе асимптотического разложения. Данный результат является значимым как с точки зрения асимптотического анализа, так и с точки зрения вычислительной математики (последнее обсуждается в §7.5).

Степень обоснованности и достоверность научных положений. Все основные результаты диссертации сформулированы в виде теорем и доказаны с использованием строгих математических обоснований. Основные результаты диссертации изложены в 17 публикациях в журналах, включенных в системы цитирования Web of Science и Scopus, включая наиболее авторитетные международные журналы по вычислительной математике, такие как Mathematics of Computation, Numerische Mathematik и SIAM Journal on Numerical Analysis. Результаты диссертации были представлены автором и получили одобрение специалистов на ряде представительных международных конференций, проводившихся как в России, так и за рубежом. Не могу не отметить, что Н.В. Коптева пользуется заслуженным авторитетом среди коллег и достаточно часто выступает в роли пленарного или приглашенного докладчика.

Научная новизна. Теоретическая и практическая значимость. В диссертации представлен ряд новых апостериорных и априорных оценок точности численных решений сингулярно возмущенных задач. Ряд полученных автором результатов усиливает известные оценки и в регулярном случае. К наиболее существенным достижениям относятся предложенный автором новый теоретический аппарат для получения апостериорных оценок на анизотропных сетках, а также

развитие автором аппарата теоретического исследования сходимости численных методов для немонотонных сингулярно возмущенных уравнений в частных производных. Установленные апостериорные оценки могут быть использованы в адаптивных алгоритмах построения как локально квазиравномерных, так и анизотропных сеток при решении важных прикладных задач. Теоретический аппарат, используемый автором при получении априорных оценок численного решения нелинейных многомерных уравнений реакции-диффузии, может получить дальнейшее развитие при рассмотрении более сложных многомерных задач данного типа. Автореферат правильно и полностью отражает содержание диссертации.

Замечания.

1. Было бы весьма интересно включить в работу сравнение адаптивных алгоритмов построения анизотропных сеток на основе оценителей в норме максимума модуля (полученных в §2) и в энергетической норме (полученных в §3).

2. Представляется, что в диссертацию уместно было бы также включить некоторые численные результаты из ее работ [174, 176, 177] с тем, чтобы проиллюстрировать теоретические оценки ошибки численных решений параболических уравнений, полученные в §5.

3. В §6 оценки ошибки численного решения получены в предположении, что $\varepsilon \leq Ch$, где h — максимальный диаметр ячеек сетки. Последнее обусловлено применяемым автором теоретическим аппаратом (основанном на асимптотических разложениях). Тем не менее, представляется целесообразным обобщение результатов данного параграфа для всех значений $\varepsilon \in (0, 1]$ хотя бы в линейной случае.

Приведенные замечания не снижают ценности представленных в диссертации результатов.

Заключение. Диссертация Н. В. Коптевой является научно-квалификационной работой, вносящей значительный вклад в теорию числен-

ных методов для сингулярно возмущенных уравнений. На основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение. Диссертация полностью соответствует паспорту специальности 01.01.07 — Вычислительная математика и требованиям п. 9 Положения о присуждении ученых степеней, а ее автор, Коптева Наталья Викторовна, несомненно заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.07 — Вычислительная математика.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник
Отдела уравнений математической физики
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

24.09.2019



Шишкин Григорий Иванович

620108, Россия, г. Екатеринбург,
ул. Софьи Ковалевской, д. 16
Телефон: +79122857184
E-mail: shishkin@imm.uran.ru

Подпись Г.И. Шишкина удостоверяю:
Ученый секретарь ученого совета ИММ УрО РАН
к.ф.-м.н.



О.Н. Ульянов