

Результаты публичной защиты

Дата защиты: 17 октября 2019 г.

Соискатель: **Коптева Наталья Викторовна.**

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук на тему: «Апостериорные и априорные оценки конечноэлементных решений некоторых сингулярно возмущенных уравнений на анизотропных сетках».

Специальность 01.01.07 – «Вычислительная математика».

На заседании председательствует – Председатель диссертационного совета, член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н., профессор В.Ф.ТИШКИН.

Ученый секретарь – к.ф.-м.н. М.А. КОРНИЛИНА.

На заседании из 24 членов диссертационного совета присутствовали 21 чел., из них 8 докторов по профилю рассматриваемой диссертации:

1. ТИШКИН В.Ф.	д.ф.-м.н.	01.01.07
2. КОРНИЛИНА М.А.	к.ф.-м.н.	05.13.18
3. АНДРЕЕВ В.Б.	д.ф.-м.н.	01.01.07
4. ВАСИЛЕВСКИЙ Ю.В.	д.ф.-м.н.	01.01.07
5. ГОЛОВИЗНИН В.М.	д.ф.-м.н.	01.02.05
6. ДОЛГОЛЕВА Г.В.	д.ф.-м.н.	01.01.07
7. ЕЛИЗАРОВА Т.Г.	д.ф.-м.н.	01.01.07
8. ЗМИТРЕНКО Н.В.	д.ф.-м.н.	01.02.05
9. КАРАМЗИН Ю.Н.	д.ф.-м.н.	01.01.07
10. КОВАЛЕВ В.Ф.	д.ф.-м.н.	05.13.18
11. КОЗЛОВ А.Н.	д.ф.-м.н.	01.02.05
12. КОЛЕСНИЧЕНКО А.В.	д.ф.-м.н.	01.02.05
13. КУЛЕШОВ А.А.	д.ф.-м.н.	05.13.18
14. ЛУЦКИЙ А.Е.	д.ф.-м.н.	01.02.05
15. МАЖУКИН В.И.	д.ф.-м.н.	05.13.18
16. МИЛЮКОВА О.Ю.	д.ф.-м.н.	01.01.07
17. МИХАЙЛОВ А.П.	д.ф.-м.н.	05.13.18
18. ПЕТРОВ И.Б.	д.ф.-м.н.	01.02.05
19. ПОЛЯКОВ С.В.	д.ф.-м.н.	01.01.07
20. ШПАТАКОВСКАЯ Г.В.	д.ф.-м.н.	05.13.18
21. ЯКОБОВСКИЙ М.В.	д.ф.-м.н.	05.13.18

По результатам публичной защиты диссертационный совет принял следующее заключение:

ЗАКЛЮЧЕНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОГО СОВЕТА Д 002.024.03,
СОЗДАННОГО НА БАЗЕ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР ИНСТИТУТ
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М.В. КЕЛДЫША РАН»
МИНИСТЕРСТВА НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ДИССЕРТАЦИИ НА СОИСКАНИЕ
УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА НАУК

аттестационное дело № _____
решение диссертационного совета от 17 октября 2019 г. № 7

О присуждении **Коптевой Наталье Викторовне**, гражданке Российской Федерации, ученой степени доктора физико-математических наук.

Диссертация «Апостериорные и априорные оценки конечноэлементных решений некоторых сингулярно возмущенных уравнений на анизотропных сетках» по специальности 01.01.07 — Вычислительная математика принята к защите 23.05.2019 г. (протокол №6/пз) диссертационным советом Д 002.024.03 на базе на базе Федерального Государственного Учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН» Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4, приказ №105/нк от 11 апреля 2012 года.

Соискатель Коптева Наталья Викторовна, 1971 года рождения, окончила Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова по специальности Прикладная математика в 1993 году. Диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук «Равномерные сеточные методы для некоторых сингулярно возмущенных уравнений на сгущающихся сетках» по специальности 01.01.07 — «Вычислительная математика»

защитила в 1996 году в диссертационном совете, созданном на базе факультета ВМК Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. С 2003 года Н.В. Коптева работает в Университете Лимерика, Ирландия (с перерывом в 2013–2014 учебном году, в течение которого она работала лектором в Университете Стратклайда, Глазго, Великобритания), в настоящее время занимает должность ассоциированного профессора на кафедре математики и статистики.

Диссертация выполнена на кафедре математики и статистики Университета Лимерика, Ирландия.

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор **Андреев Владимир Борисович**, профессор кафедры вычислительных методов факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова.

Официальные оппоненты:

1. доктор физико-математических наук, профессор **Вабищевич Петр Николаевич**, заведующий лабораторией Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института проблем безопасного развития атомной энергетики РАН;

2. доктор физико-математических наук, профессор **Корнеев Вадим Глебович**, профессор кафедры параллельных алгоритмов Математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета;

3. доктор физико-математических наук **Шишкин Григорий Иванович**, ведущий научный сотрудник отдела уравнений математической физики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, дали **положительные отзывы** на диссертацию.

Ведущая организация ФГБНУ Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук» в своем **положительном отзыве**, составленном руководителем научного направления «Математическое моделирование» ФИЦ

КНЦ СО РАН, членом-корреспондентом РАН, доктором физико-математических наук **Шайдуровым Владимиром Викторовичем**, и утвержденном заместителем директора ФИЦ КНЦ СО РАН Попковым Сергеем Ивановичем, указала, что результаты диссертации вносят значительный вклад в создание эффективных численных методов для решения задач с пограничными и внутренними слоями. Полученные теоретические результаты могут успешно применяться для развития численных методов и применения к задачам с анизотропными пространственными сетками в Институте вычислительных технологий СО РАН, Институте вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Сибирском федеральном университете. Диссертация Коптевой Н.В. является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований получены новые научные результаты, имеющие существенное значение для науки. Совокупность полученных результатов можно квалифицировать как важное научное достижение в области создания численных методов для решения задач с пограничными и внутренними слоями. Работа отвечает требованиям Постановления Правительства РФ от 24.09.2013 № 842 "О порядке присуждения ученых степеней", предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени доктора наук, а её автор, Коптева Наталья Викторовна, заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.07 – «Вычислительная математика».

Соискатель имеет 55 опубликованных работ, в том числе 49 работ по теме диссертации. Основные результаты диссертации изложены в **17 публикациях** (включая 7 работ без соавторов) в рецензируемых научных изданиях, включенных в системы цитирования **Web of Science** и **Scopus**, включая ведущие международные журналы по вычислительной математике (Mathematics of Computation, Numerische Mathematik, SIAM Journal on Numerical Analysis). Из упомянутых 17 публикаций, **16** вышли в журналах категории **Q1** и 1 — в журнале категории Q2 (по рейтингу SJR за 2018 год).

К числу наиболее значительных работ соискателя можно отнести следующие:

1. N. Kopteva, Logarithm cannot be removed in maximum norm error estimates for linear finite elements in 3D, **Mathematics of Computation**, 88 (2019), 1527-1532; published electronically 28 September 2018.
2. N. Kopteva, Energy-norm a posteriori error estimates for singularly perturbed reaction-diffusion problems on anisotropic meshes, **Numerische Mathematik**, 137 (2017), 607–642.
3. A. Demlow, N. Kopteva, Maximum-norm a posteriori error estimates for singularly perturbed elliptic reaction-diffusion problems, **Numerische Mathematik**, 133 (2016), 707–742.
4. N. Kopteva, Maximum-norm a posteriori error estimates for singularly perturbed reaction-diffusion problems on anisotropic meshes, **SIAM Journal on Numerical Analysis**, 53 (2015), 2519–2544.
5. N. Kopteva, T. Linß, Maximum norm a posteriori error estimation for parabolic problems using elliptic reconstructions, **SIAM Journal on Numerical Analysis**, 51 (2013), 1494–1524.
6. N. Kopteva, M. Pickett, A second-order overlapping Schwarz method for a 2d singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem, **Mathematics of Computation**, 81 (2012), 81–105.
7. R. B. Kellogg, N. Kopteva, A singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem in a polygonal domain, **Journal of Differential Equations**, 248 (2010), 184–208. (Q1)
8. N. Kopteva, Maximum norm a posteriori error estimate for a 2d singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem, **SIAM Journal on Numerical Analysis**, 46 (2008), 1602–1618.
9. N. Kopteva, Maximum norm error analysis of a 2d singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem, **Mathematics of Computation**, 76 (2007), 631–646.

Вклад соискателя являлся определяющим при получении всех научных результатов указанных 17 работ. Недостоверных сведений в тексте диссертации об опубликованных соискателем работах не выявлено.

На диссертацию и автореферат поступили следующие отзывы:

Отзыв официального оппонента Вабищевича П. Н.

В отзыве указаны следующие замечания:

1. Не очень удачным является использование термина «норма максимума модуля».

2. Вычислительные эксперименты для иллюстрации теоретических результатов могли быть более полными и более содержательными. Оценки точности содержат несколько слагаемых с теоретически значимыми коэффициентами, что подразумевает достаточно обширное методическое исследование результатов расчетов.

3. Диссертация и автореферат содержат совсем не обязательные описки и неточности.

Отзыв официального оппонента Корнеева В.Г.

В отзыве указаны следующие замечания:

1. Не всегда адекватно характеризуется робастность. На стр. 22 диссертации читаем «оценка (3) является робастной по ε в том смысле, что зависимость от ε в этой оценке показана явно». То же самое повторено в автореферате. Строгое определение, например, в работе Р. Верфурта (R. Verfurth, Numer. Math., (1998) 78: 479-493) подразумевает, что апостериорная мажоранта (оценщик) оценивается глобально сверху и локально снизу энергетической нормой ошибки причем так, что отношение оценок сверху и снизу являются постоянными независимо от шага сетки и параметра пертурбации. Нужно отметить, что определения робастности повторяются в диссертации несколько раз, и как правило к приведенной характеристике добавляется корректирующая фраза типа «при этом эффективность этих оценок не должна зависеть от малости данного параметра». На самом деле только это дополнение и важно, явное представление не обязательно.

2. Норма максимума модуля для рассматриваемых оценок погрешности автору «представляется более подходящей, поскольку она является достаточно сильной (в отличие, например, от энергетической нормы) для того, чтобы обнаружить большую ошибку в зонах узких пограничных и внутренних слоев» (стр. 7 автореферата, стр. 33 диссертации). Это положение было бы хорошо подтвердить численным примером. Существенная полезность оценок в норме пространства L_∞ не вызывает сомнений. Однако даже при одинаковых относительной точности и простоте обоих типов оценок представляется целесообразным совместное их использование. Особенно, если учесть, что по точности и простоте определения постоянных оценки в норме максимума модуля нередко уступают оценкам в энергетической норме и норме пространства L_2 .

3. На стр. 134 говорится о связи функции Θ в (3.16) с интерполяционной ошибкой для функции Грина. О необходимости нового квазиинтерполяционного оператора для интерполяции функции Грина на анизотропных сетках говорится кроме того во введении к §2 (стр. 126) а также на стр. 27 при описании результатов §2. Однако функция Грина, как и ее интерполяция, в §2 не используется.

4. Оценки, содержащиеся в правых частях $C\|f_h - f_h^I\|_{\infty;\Omega}$, как в (2.3), см. также (2.4), (2.26), (2.43), или $C\|f_h - f_h^I\|_{2;\Omega}$, как в (3.3), не робастны, так как указанные слагаемые в некоторых ситуациях существенно огрубляют оценки. Обратимся, например, к (3.3), предположив для наибольшей простоты, что $\varepsilon \in [c, 1]$, $c = \text{const}$, $f = f(x) \in L_2(\Omega)$. В частности, при выпуклой области Ω будем иметь $u \in H^2(\Omega)$. Следовательно, имеется подмножество $f \in L_2(\Omega)$, для которых энергетическая норма погрешности $u_h - u$ имеет порядок H , а будет оцениваться посредством (3.3) только постоянной (например, $C' = C\|f_h\|_{2;\Omega}$), благодаря слагаемому $C\|f_h - f_h^I\|_{2;\Omega}$. К сходным выводам придем и при определенных более общих предположениях, подчиненных предположениям диссертации.

5. В основе полученных апостериорных оценок погрешности лежат результаты, связанные с оценками аппроксимации на различных триангуляциях для ряда классов функций. Эти результаты заслуживают выделения в отдельную главу, что, на мой взгляд, упростило бы чтение диссертации.

Отзыв официального оппонента Шишкина Г.И.

В отзыве указаны следующие замечания:

1. Было бы весьма интересно включить в работу сравнение адаптивных алгоритмов построения анизотропных сеток на основе оценщиков в норме максимума (полученных в §2) и в энергетической норме (полученных в §3).

2. Представляется, что в диссертацию уместно было бы также включить некоторые численные результаты из ее работ [174, 176, 177] с тем, чтобы проиллюстрировать теоретические оценки ошибки численных решений параболических уравнений, полученные в §5.

3. В §6 оценки ошибки численного решения получены в предположении, что $\varepsilon \leq h$, где h — максимальный диаметр ячеек сетки. Последнее обусловлено применяемым автором теоретическим аппаратом (основанном на асимптотических разложениях). Тем не менее, представляется целесообразным обобщение результатов данного параграфа для всех значений $\varepsilon \in (0,1]$ хотя бы в линейном случае.

В отзыве ведущей организации, ФИЦ КНЦ СО РАН содержится следующее замечание: «в диссертации не хватает численных примеров для иллюстрации несомненно эффективных и полезных апостериорных оценок».

На автореферат диссертации поступило 4 положительных отзыва.

1. В отзыве **Блатова Игоря Анатольевича**, доктора физико-математических наук, профессора, заведующего кафедрой высшей математики Федерального государственного образовательного бюджетного учреждения высшего образования «Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики» (г. Самара), содержится следующее замечание: «В качестве замечания отмечу отсутствие в

автореферате обсуждения результатов численных экспериментов по разработанным методам, которые представлены в диссертации.»

2. В отзыве **Карчевского Михаила Мироновича**, доктора физико-математических наук, профессора, профессора кафедры вычислительной математики Института вычислительной математики и информационных технологий Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет», не содержится замечаний.

3. В отзыве **Нефедова Николая Николаевича**, доктора физико-математических наук, профессора, заведующего кафедрой математики физического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова, не содержится замечаний.

4. В отзыве **Задорина Александра Ивановича**, доктора физико-математических наук, профессора, заведующего лабораторией математического моделирования в механике Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН (Омский филиал), не содержится замечаний.

Выбор официальных оппонентов и ведущей организации обосновывается их широко известной компетенцией в вопросах разработки теории численных методов, анализа и обоснования численных алгоритмов и повышения их эффективности. Это подтверждается многочисленными научными публикациями официальных оппонентов и сотрудников ведущей организации.

Диссертационный совет отмечает, что на основании выполненных соискателем исследований получены следующие основные результаты:

1. Для полулинейных сингулярно возмущенных эллиптических уравнений реакции-диффузии в полигональных областях установлены явные апостериорные оценки ошибки численного решения на основе невязок в норме максимума модуля (равномерной норме) на локально

квазиравномерных сетках. Постоянные в данных оценках не зависят от диаметров элементов сетки и малого параметра.

2. Для полулинейных сингулярно возмущенных эллиптических уравнений реакции-диффузии в многоугольных областях установлены явные апостериорные оценки ошибки численного решения на основе невязок в норме максимума модуля на неструктурированных анизотропных сетках. Постоянные в данных оценках не зависят от диаметров элементов сетки, их аспектного соотношения (т.е. степени их сплюснутости) и малого параметра. Полученные апостериорные оценки являются новыми даже для уравнения Лапласа. Представленный подход обобщен для получения апостериорных оценок ошибки в энергетической норме.

3. Для полулинейных параболических уравнений второго порядка получены апостериорные оценки в норме максимума модуля для ошибки соответствующих численных решений. Рассмотрены временные полудискретизации, а также полностью дискретные методы на основе неявного метода Эйлера, метода Кранка-Николсон и разрывного метода $dG(r)$ с квадратурой Радо.

4. Для немонотонных полулинейных сингулярно возмущенных эллиптических уравнений реакции-диффузии в гладких областях исследованы численные решения на сгущающихся в пограничных слоях сетках типа Бахвалова и Шишкина. Доказано существование решений соответствующих нелинейных дискретных задач и установлен второй порядок (с логарифмическим множителем в случае сетки Шишкина) в дискретной норме максимума модуля равномерно по малому параметру ϵ при условии $\epsilon \leq Ch$, при этом число степеней свободы не превосходит Ch^{-2} .

5. Для немонотонного полулинейного сингулярно возмущенного эллиптического уравнения реакции-диффузии в выпуклой многоугольной области построено асимптотическое разложение и установлено существование решения исходной задачи в окрестности построенного асимптотического разложения.

Все основные результаты обладают научной новизной.

Теоретическая значимость исследования обоснована тем, что в диссертации представлены новые более сильные и точные оценки точности численных решений сингулярно возмущенных задач, ряд из которых усиливает известные оценки и в регулярном случае. Получение этих результатов оказалось возможным исключительно благодаря разработанному автором новому теоретическому аппарату получения апостериорных оценок на анизотропных сетках, а также развитию автором теоретического исследования сходимости численных методов для немонотонных сингулярно возмущенных уравнений в частных производных.

Значение полученных соискателем результатов исследования для науки и практики определяется тем, что создан и теоретически обоснован набор средств для эффективного решения задач с пограничными и внутренними слоями, в том числе, робастные апостериорные оценки численных решений, имеющие практическую ценность. Таким образом, полученные в диссертации теоретические результаты являются основой для построения и обоснования вычислительных алгоритмов практически важных прикладных проблем, математические модели которых строятся на основе сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений.

Оценка достоверности результатов исследования выявила:

1. Все теоретические результаты диссертации получены с использованием строгих математических обоснований.

2. Основные положения и их доказательства опубликованы в международных рецензируемых журналах.

3. Результаты диссертации были представлены автором в **докладах** (включая 10 пленарных и 7 приглашенных) и получили одобрение специалистов на ряде российских и международных конференций, в том числе следующих:

- 28th Biennial Conference on Numerical Analysis, Strathclyde University, UK, 2019 (пленарный доклад)

- II Международная конференция «Многомасштабные Методы и Высокопроизводительные Научные Вычисления», Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, Москва, Россия, 2018
- Adaptive Numerical Methods for Partial Differential Equations with Applications, Banff International Research Station, Canada, 2018
- Международная Конференция Современные Проблемы Математической Физики и Вычислительной Математики, приуроченная к 110-летию со дня рождения академика А.Н. Тихонова, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия, 2016 (плeнарный доклад)
- 2016 AARMS-CRM Workshop on Numerical Analysis of Singularly Perturbed Differential Equations, Halifax, Canada, 2016 (плeнарный доклад)
- 6th Conference on Numerical Analysis and Applications NAA'16, Lozenetz, Bulgaria, 2016 (плeнарный доклад)
- Adaptive Algorithms for Computational PDEs, University of Birmingham, UK, 2016
- International Conference BAIL 2014 Boundary and Interior Layers, Charles University in Prague, Czech Republic, 2014 (плeнарный доклад)
- Sixth Conference Finite Difference Methods: Theory and Applications, Lozenetz, Bulgaria, 2014 (плeнарный доклад)
- British Computational PDEs Colloquium: New Trends, International Centre for Mathematical Sciences (ICMS), Edinburgh, UK, 2014
- Fifth Conference on Numerical Analysis and Applications NAA'12, Lozenetz, Bulgaria, 2012 (плeнарный доклад)
- International Conference FoCM'11 Foundations of Computational Mathematics, Budapest, Hungary, 2011 (приглашенный доклад)
- Fifth Conference Finite Difference Methods: Theory and Applications, Lozenetz, Bulgaria, 2010 (плeнарный доклад)
- Fourth Conference on Numerical Analysis and Applications NAA'08, Lozenetz, Bulgaria, 2008 (плeнарный доклад)

- Second International Workshop on Analysis and Numerical Approximation of Singular Problems IWANASP'06, Karlovassi, Greece, 2006
- Fourth Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications, Lozenetz, Bulgaria, 2006 (плeнарный доклад)
- Workshop on Adaptive Method, Theory and Application, Peking University, Beijing, China, 2005

Личный вклад соискателя являлся определяющим при получении всех научных результатов, выносимых на защиту. Основные результаты, представленные в §§2,3,6, были получены и опубликованы соискателем без соавторов. Основные результаты §§4,5 получены и опубликованы совместно с Т.Линсом в рамках работы, под руководством соискателя, по гранту Science Foundation Ireland. Во всех совместных публикациях (речь идет также о результатах §§1,7 и менее значительных результатах диссертации) личный вклад соискателя заключался как в постановке поставленных задач, так и в получении ключевых результатов указанных работ.

На заседании 17 октября 2019 года диссертационный совет принял решение присудить Коптевой Н.В. ученую степень доктора физико-математических наук.

При проведении тайного голосования диссертационный совет в количестве 21 человек (из 24 человек, входящих в состав совета), из них 8 докторов наук по специальности 01.01.07 — «Вычислительная математика», участвовавших в заседании, проголосовали: за - 20, против - нет, недействительных бюллетеней - 1.

Зам. председателя дис. совета Д002.024.03
д.ф.-м.н., член-корр. РАН

В.Ф.Тишкин

Ученый секретарь дис. совета Д002.024.03
к.ф.-м.н.

М.А.Корнилина

17 октября 2019 года.

