

Козубская Татьяна Константиновна

**РАЗРАБОТКА МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ
ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ
ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОЙ АЭРОАКУСТИКИ**

05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат

Диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Работа выполнена в Институте математического моделирования РАН

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Чижонков Евгений Владимирович

доктор физико-математических наук,
профессор Гасилов Владимир Анатольевич

доктор технических наук,
профессор Крашенинников Сергей Юрьевич

Ведущая организация:

Центральный аэрогидродинамический институт
имени проф. Н.Е.Жуковского

Защита состоится «21» октября 2010 года в ____ часов на заседании
Диссертационного совета Д 002.024.03 при Институте прикладной математики
им. М.В.Келдыша РАН по адресу: Москва, 125047, Миусская пл, 4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМ им. М.В.Келдыша
РАН.

Автореферат разослан « ____ » _____ 2010 года.

Ученый секретарь Диссертационного совета Д 002.024.03
доктор физико-математических наук

Змитренко Н.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Аэроакустика представляет собой раздел газовой динамики, изучающий звуковые поля, генерируемые воздушным потоком или привносимые в течение внешними источниками возмущений. При этом акустические волны в реальных задачах невозможно рассматривать отдельно от течения, так как они находятся в постоянном взаимодействии с потоком.

Особую актуальность прикладная аэроакустика приобрела в связи с ведущимися в мире широкомасштабными исследованиями, направленными на снижение шума, в авиационной и автомобилестроительной промышленности, а также ряде высокотехнологических отраслей производства. Наиболее остро проблема снижения шума стоит в авиации. Для защиты экологической обстановки мировым сообществом регулярно ужесточаются допустимые нормы по шуму, создаваемому летательными аппаратами. Выполнение этих норм требует постоянного совершенствования авиационной техники и, соответственно, решения широкого спектра задач прикладной аэроакустики.

Сложность аэроакустических исследований усугубляется сильным перепадом в масштабах между акустическими пульсациями и характерными параметрами несущего течения, а также не до конца изученными механизмами генерации звука. Эти особенности находят свое отражение в вычислительной аэроакустике, в которой неременным требованием является качество численных методик и, в первую очередь, их высокая точность. При использовании метода вычислительного эксперимента в аэроакустике применяемые в расчетах алгоритмы при условии корректности математической модели должны гарантировать воспроизведение акустических полей течения с точностью, требуемой спецификой прикладной задачи. Как правило, в аэроакустике приемлемой является точность от одного до нескольких децибел. Следует также заметить, что повышенная

точность должна обеспечиваться в характерных для реальных приложений областях сложных геометрических конфигурациях, для дискретизации которых построение структурированных сеток затруднено и, как правило, используются сетки нерегулярной структуры.

Перечисленные трудности препятствуют широкому внедрению математического моделирования в практику решения инженерных задач аэроакустики. Поэтому в настоящее время вычислительный эксперимент в аэроакустике не имеет того серьезного прикладного значения, которого достигло численное моделирование в газовой динамике в целом, активно используемое при разработке летательных аппаратов в крупнейших авиационных компаниях в мире.

Приведенные аргументы явились побудительным мотивом настоящей диссертационной работы, целью которой стала разработка математических моделей и численных методик, ориентированных на решение задач прикладной аэроакустики.

Цель и задачи исследования

Главной целью работы является исследование и разработка математических моделей и вычислительных методов, ориентированных на численное решение задач прикладной аэроакустики. Для выполнения поставленной цели сформулированы основные задачи исследования.

1. Провести анализ наиболее полных математических моделей аэроакустики с точки зрения точности результатов, получаемых при их численной реализации. Рассмотреть возможные источники ошибок численных решений и предложить пути достижения наиболее точных результатов.
2. Разработать методы задания начальных и граничных условий стохастической природы для обеспечения постановок задач аэроакустики, максимально приближенных к реальным эксплуатационным условиям.

3. Предложить численные методы повышенной точности, работающие на неструктурированных сетках, наиболее удобных при расчете задач аэроакустики в геометрических областях сложной конфигурации.
4. Продемонстрировать эффективность разработанных методик на примере численного решения одного класса задач прикладной аэроакустики, а именно задач резонаторного типа, лежащих в основе моделирования звукопоглощающих конструкций.

Методы исследования

Основным методом исследования, используемым и развиваемым в работе, является метод вычислительного эксперимента. Он включает в себя технику построения математических моделей и численные методы для решения начально-краевых задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных.

Научная новизна

Научная новизна полученных результатов состоит в следующем.

1. Проведено исследование семейства моделей нелинейной аэроакустики на основе полных уравнений Эйлера с точки зрения эффективности их использования для расчета задач аэроакустики. Для этой цели был предложен метод оценки глобальной ошибки системы моделирования «модель+метод», включающей в себя ошибки из-за неполноты модели, неточности численного алгоритма и ошибки округления. Предложены две формулировки нелинейных уравнений для возмущений, устойчивые к ошибкам округления при малых амплитудах решения.
2. Предложено использовать развиваемый специалистами в области общего стохастического моделирования и теории вероятности рандомизированный спектральный метод для численного исследования задач аэроакустики, а именно, для построения стохастических моделей акустических и турбулентных возмущений среды с целью имитации

реальных физических условий. На основе рандомизированного спектрального метода построены гладкие реализации для случайного поля турбулентной скорости со спектром фон Кармана, а также акустического шума, распределенного в заданной полосе частот.

3. На основе квазиодномерной реконструкции потоковых переменных разработано новое семейство схем повышенной точности для расчета задач аэроакустики на неструктурированных сетках при определении переменных в узлах.
4. Предложена методика определения акустического импеданса резонаторов на основе численного моделирования. Разработанная методика может быть использована при исследовании и оптимизации ячеек звукопоглощающих конструкций резонансного типа.

Теоретическая и практическая ценность

Теоретическая ценность работы заключается в исследовании моделей нелинейной аэроакустики с точки зрения эффективности их численной реализации, а также предложение двух новых формулировок нелинейных уравнений для возмущений, корректно работающих во всем диапазоне амплитуд решения. В работе предлагается новый подход к оценке точности моделирования, одновременно учитывающий ошибки из-за неполноты математической модели, неточности вычислительного алгоритма, а также ошибки округления. Также теоретическую ценность представляет предлагаемый способ построения схем повышенной точности на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках на основе квазиодномерной реконструкции потоковых переменных в рамках метода конечных объемов.

С практической точки зрения, основную ценность представляет предложенная постановка вычислительного эксперимента по определению инженерных характеристик резонаторов, а также проведенные в ее рамках расчеты, подтверждающие возможность использования средств

математического моделирования для оптимизации параметров ЗПК. В частности, в работе при помощи вычислительного эксперимента показано существенное влияние нелинейных и диссипативных эффектов, а также наличия касательного течения на характеристики звукового сопротивления, создаваемого ячейками ЗПК.

Основные публикации

По теме диссертации опубликовано 56 работы, включая 11 статей в журналах, рекомендованных ВАК для опубликования научных результатов докторских диссертаций. Основное содержание диссертации отражено в публикациях [1-20].

Достоверность результатов

Достоверность результатов подтверждается верификацией путем сравнения с известными аналитическими решениями, демонстрацией сходимости численного решения по сетке, а также валидацией по отношению к известным теоретическим и экспериментальным данным.

Апробация результатов диссертации

Результаты исследований, приведенных в диссертационной работе, были представлены и обсуждались на всероссийских и международных конференциях:

- Открытые всероссийские конференции по Авиационной акустике: 1-5 октября 2007, 5-9 октября 2009г., Звенигород Московской обл.
- Joint Russia-Japan Symposium “Numerical Experiment in Hydrodynamical Instability and Turbulence with High-Performance Computing”, November 11-13, 2009, Moscow
- Russian-Indian Workshop on Scientific and Engineering Applications on high performance computing systems, November 24-26, 2009, Moscow

- ECCOMAS 2004 Conference, July 24-28, 2004, Jyvaskyla, Finland; ECCOMAS/WCCM8, June 30 – July 4, 2008, Venice, Italy (приглашенный доклад);
- NUMGRID 2008 Conference, June 10-23, 2008, Moscow.
- Parallel CFD Conferences: May 13-15, 2003, Moscow, Russia; May 24-27, 2004, Las Palmas, Canary Islands, Gran Canaria, Spain; May 24-27, 2005, May 21-24, 2007, Antalya, Turkey; College Park, MD, USA; May 19-22, 2008, Lyon, France
- Всероссийские научно-практические конференции "Вычислительный эксперимент в аэроакустике": 27-30 сентября 2006 года; 24-26 сентября 2008 года, г. Светлогорск Калининградской области.
- WEHSFF and EWHSFF Conferences: April 22-26, 2002, Marseille, France; October 19-22, 2005, Beijing, China (приглашенный доклад); November 19-22, 2007, Moscow
- Europe-Russia Workshop. Mathematical Modeling, Computation and Experimentation in Multiphysics Aerospace and Environmental Engineering Problems, November 8-10, 2006, Barcelona, Spain
- Seminar at Los-Alamos National Laboratory, USA, May 15, 2006 (приглашенный доклад);
- AIAA/CEAS Aeroacoustics Conferences: May 28-30, 2001, Maastricht, The Netherlands; June 17-19, 2002, Breckenridge, USA; May 8-10, 2006, Cambridge, USA; June 7-9, 2010, Stockholm, Sweden
- International Conference "Tikhonov and Contemporary Mathematics", Moscow, June 19-25, 2006
- International Workshop on Contemporary Research in Hypersonics and Shock Waves, January 27-28, 2005, Bangalore, India
- International conference on Selected Problems of Modern Mathematics, dedicated to the 200th anniversary of K.G. Jacobi, and the 750th anniversary of the Koenigsberg foundation, April 4-8, 2005, Kaliningrad

- PROMUVAL Workshop “Prospective in Multidisciplinary Modeling, Simulation and Validation in Aeronauticas”, November 22-23, 2004, Athens, Greece (приглашенный доклад);
- MASCOT04-IMACS /ISGG Workshop, November 25-27, 2004, Florence, Italy (приглашенный доклад);
- EWM 2003, November 3-7, 2003, Luminy, France (приглашенный доклад);
- SCI 2003 Conference, July 27-30, 2003, Orlando, Florida, USA
- ISNA-16 Conference, August 19-23, 2002, Moscow, Russia

Результаты работы докладывались на ряде научных семинаров в России, в частности, на семинаре К.И.Бабенко в ИПМ им. М.В.Келдыша РАН (2006), на научных семинарах в ЦАГИ имени проф. Н.Е.Жуковского, ЦИАМ им. П.И.Баранова (2006), ИММ РАН (2010), и за рубежом, в частности, на научном семинаре в Национальной Лаборатории Лос-Аламоса, США (2006), в институте INRIA, Франция (2002, 2008). Практические результаты работы были представлены также на Российском технологическом саммите, проводимом EADS и Российской академией наук в 2005 году.

Реализация и внедрение результатов работы

Работа выполнялась в рамках научных планов Института математического моделирования РАН и поддерживалась грантами Российского фонда фундаментальных исследований. Методики, представляемые в работе к защите, используются в договорных работах с ОАО «Авиадвигатель», Пермь, ОАО «ОКБ Сухого», Москва, а также в текущем проекте VALIANT по исследованию шума при обтекании самолета Седьмой рамочной программы Европейского Союза.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во *Введении* проводится обзор современных методов математического моделирования в аэроакустике, анализируются трудности, связанные с внедрением метода вычислительного эксперимента в практику инженерного конструирования. Далее формулируются цели и задачи проведенного в диссертационной работе исследования, обосновывается его актуальность, а также приводятся научные положения, выносимые на защиту. Завершается *Введение* кратким описанием содержания работы и ее структуры.

Глава 1 диссертации посвящена рассмотрению семейства математических моделей аэроакустики в наиболее полной постановке. К таким моделям в работе относятся системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику трех основных газодинамических переменных (плотность, скорость и давление) в случае идеального газа и выведенные на основе полных уравнений Эйлера. При решении задач аэроакустики модели «семейства Эйлера», как правило, используются для моделирования ближних акустических полей течения.

Основным объектом исследования в вычислительной аэроакустике являются пульсационные составляющие физических параметров течения. Поэтому рассмотрение математических моделей предваряется описанием декомпозиции газодинамических переменных на средние и пульсационные компоненты. На основе декомпозиции физических переменных строится декомпозиция консервативных переменных, которая в дальнейшем берется в качестве базовой при рассмотрении математических моделей. Для наглядности все формулы в этой главе приводятся для двумерного случая.

Предположим, что в задаче задано некоторое фоновое течение с физическими параметрами $\bar{\mathbf{U}} = (\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{p})^T$. Тогда в решении $\mathbf{U} = (\rho, u, v, p)^T$, где ρ – плотность, u, v – компоненты скорости, p – давление, всегда можно выделить это фоновое течение и пульсации относительно него

$\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{U}' \quad \mathbf{U}' = (\rho', u', v', p')^T$. С учетом разложения физических переменных вектор консервативных переменных $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{U}) = \left(\rho, \rho u, \rho v, \rho \frac{u^2 + v^2}{2} + \rho \varepsilon \right)^T$, где ε – внутренняя энергия газа, может быть так же разложен на некоторое среднее значение и пульсации вокруг него $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}'$. При этом, средняя и пульсационная компоненты вектора консервативных переменных могут быть формально определены как $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{U}})$ и $\mathbf{Q}' = \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{U}') - \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{U}})$. В дальнейшем при рассмотрении моделей аэроакустики используется именно такая интерпретация. В то же время, следует отметить, что в тех случаях, когда принципиально использование в качестве фонового именно среднего течения, для декомпозиции консервативных переменных следует использовать формулировку $\bar{\mathbf{Q}} = \overline{\mathbf{Q}(\bar{\mathbf{U}})}$ и $\mathbf{Q}' = \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{U}') - \overline{\mathbf{Q}(\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{U}')}$.

Естественно, что сами уравнения Эйлера и Навье-Стокса (EE и NSE в обозначениях), на основе которых строится семейство моделей аэроакустики, также принадлежат этому семейству. С сохранением декомпозиции переменных на средние и пульсационные составляющие, они могут быть выписаны в векторном виде как

$$\frac{\partial(\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}')}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}')}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}')}{\partial y} = \begin{cases} 0 & EE \\ \frac{\partial \mathbf{F}_v(\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}')}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_v(\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}')}{\partial y} & NSE \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{F}_v, \mathbf{G}_v$ обозначают векторы конвективных и вязких потоков соответственно.

Одной из наиболее распространенных моделей аэроакустики являются линеаризованные уравнения Эйлера (LEE)

$$\frac{\partial \mathbf{Q}'_{Lin}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}_x \mathbf{Q}'_{Lin}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}_y \mathbf{Q}'_{Lin}}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

где под \mathbf{Q}'_{Lin} понимается линейная по пульсациям физических переменных часть \mathbf{Q}' , а матрицы $\bar{\mathbf{A}}_x = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}}(\bar{\mathbf{Q}})$, $\bar{\mathbf{A}}_y = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Q}}(\bar{\mathbf{Q}})$ являются Якобианами потоков средних полей течения $\bar{\mathbf{Q}}$.

Еще одной моделью «семейства Эйлера» являются нелинейные уравнения для возмущений, известные в англоязычной научной литературе как NLDE – NonLinear Disturbance Equations¹. Эти уравнения не столь широко используются в аэроакустике в настоящее время, и одной из целей работы является привлечение внимания к их полезным свойствам. В наиболее общем виде нелинейные уравнения для возмущений могут быть выписаны как

$$\frac{\partial \mathbf{Q}'}{\partial t} + \frac{\partial (\mathbf{F}(\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}') - \mathbf{F}(\bar{\mathbf{Q}}))}{\partial x} + \frac{\partial (\mathbf{G}(\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}') - \mathbf{G}(\bar{\mathbf{Q}}))}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{F}_v(\mathbf{Q}')}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_v(\mathbf{Q}')}{\partial y} \quad (3)$$

при условии, что среднее поле удовлетворяет уравнениям Навье-Стокса (в противном случае, в уравнениях NLDE появляется источник). Как показано в работе на тестовых примерах, уравнения (3) более устойчивы к ошибкам округления по сравнению с исходной моделью Навье-Стокса (1). Это связано с тем, что основной расчетной переменной в них является пульсационная компонента течения, в которой не учитывается масштаб среднего поля. Однако при уменьшении амплитуд устойчивость решения уравнений (3) к ошибкам округления также портится. Рост неустойчивости происходит за счет членов типа $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}') - \mathbf{F}(\bar{\mathbf{Q}})$, ошибка округления R при вычислении которого определяется формулой

$$R_{f(a)-f(b)} = \frac{R_{f(a)}f(a) + R_{f(b)}f(b)}{f(a) - f(b)}. \quad (4)$$

Видно, что при близких значениях a и b , что соответствует малости \mathbf{Q}' , числитель в формуле (4) стремится к нулю, что приводит к неконтролируемому росту ошибок округления.

¹ Morris, P., Long, L., Bangalore, A., and Wang, Q., A Parallel Three-Dimensional Computational Aeroacoustics Method Using Nonlinear Disturbance Equations, – *J. Comp. Phys.*, Vol. 133, (1997), pp. 56-74

В работе предлагаются две новые формы нелинейных уравнений для возмущений, которые обладают устойчивостью к ошибкам округления. Первая формулировка выводится через матрицу средних

$$\frac{\partial \mathbf{Q}'}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}_x^{mean} \mathbf{Q}'}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}_y^{mean} \mathbf{Q}'}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{F}_v(\mathbf{Q}')}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_v(\mathbf{Q}')}{\partial y}, \quad (5)$$

где матрицу средних предлагается построить на основе осреднения по Роу^2 между состояниями $\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}'$ и $\bar{\mathbf{Q}}$

$$\mathbf{A}_x^{mean} = \mathbf{A}_x^{Roe*}(\bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}') = \mathbf{A}_x(\rho^{Roe*}, u^{Roe*}, v^{Roe*}, H^{Roe*}) \quad \mathbf{A}_x = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}}.$$

Модель с использованием матрицы Роу (5) обозначим NLDE/Roe. Заметим, что матрицу средних можно определять не единственным образом.

Другая формулировка, обеспечивающая устойчивое решение при каких угодно малых амплитудах, получается путем выделения из разности $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}') - \mathbf{F}(\bar{\mathbf{Q}})$ линейной части

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}') - \mathbf{F}(\bar{\mathbf{Q}}) = \mathbf{A}_x(\bar{\mathbf{Q}}) \mathbf{Q}' + \Delta \mathbf{A}_x(\bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}') \mathbf{Q}'. \quad (6)$$

Чтобы сравнить качество численного решения, получаемого при помощи различных моделей, в работе предложен метод оценки «глобальной» ошибки моделирования, включающей в себя ошибки из-за неполноты математического описания, неточности вычислительного алгоритма, а также ошибки округления, возникающие при работе с числами с плавающей арифметикой. При этом в качестве идеального решения, относительно которого проводится сравнительный анализ, берется точное решение наиболее полной математической модели.

В работе такой анализ моделей проводится на примере расчета тестовой задачи с искусственно заданным бесконечно гладким решением, представляющего собой экспоненциальное затухание начального возмущения в форме Гауссовского импульса. В качестве наиболее полной

² P.L. Roe, Approximate riemann solvers, parameter vectors and difference schemes, – *J. Comp. Phys.*, Vol. 43, pp. 357-372, (1981)

модели брались уравнения Эйлера. В расчетах использовались конечно-объемные схемы с порядком точности с третьего по шестой.

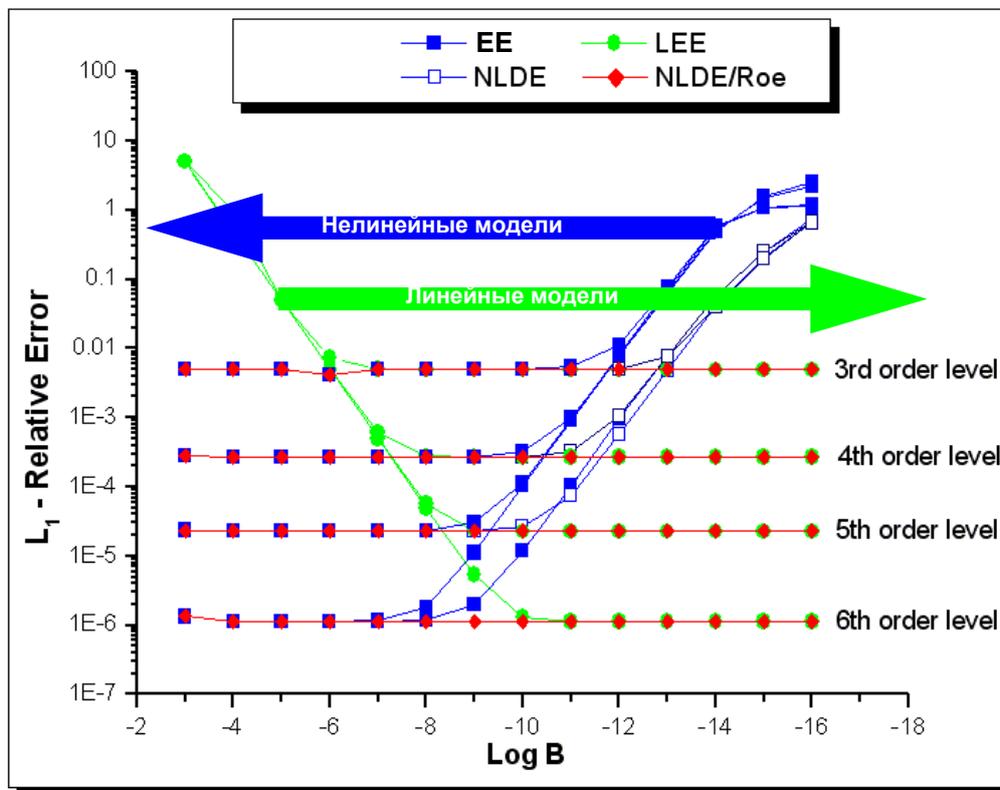


Рис. 1. Относительная ошибка численного моделирования задачи с искусственным решением при использовании различных моделей и схем различной точности в зависимости от амплитуды начального возмущения.

Диаграмма, представленная на Рис. 1, показывает относительную ошибку вычислений в норме L_1 , полученных при использовании моделей EE (1), LEE (2) и NLDE/Roe (5) и схем разного порядка точности, в зависимости от амплитуды B начального возмущения. На диаграмме видно, что в зоне относительно больших амплитуд (в левой части графиков) минимальную ошибку для всех схем дают наиболее полные, нелинейные модели (EE, NLDE и NLDE/Roe). Причем, чем выше порядок точности схемы, тем более узким становится диапазон амплитуд, где вычисления дают корректный результат. Начиная некоторой величины амплитуды, ошибка вычислений по моделям EE и NLDE резко нарастает с уменьшением решения. Это происходит из-за роста ошибок округления. В то же время, начиная с некоторых амплитуд в

сторону их уменьшения, минимальные ошибки относительно точного решения начинает давать линейная модель LEE, которая при большой величине решения работала некорректно в силу своей неполноты. Единственной моделью, обеспечивающей минимальные ошибки численного решения во всем диапазоне амплитуд, является модель NLDE/Roe.

Такой же метод оценки «глобальной» ошибки моделирования в работе применяется и для анализа влияния точности аппроксимации вязких членов в зависимости от числа Рейнольдса и амплитуды решения.

В работе впервые выводятся нелинейные уравнения для возмущений двух типов $\mathbf{U}' = \mathbf{U}'_1 + \mathbf{U}'_2$, один из которых задан или моделируется извне. Задача при этом решается относительно пульсационной компоненты, соответствующей возмущениям второго типа. В наиболее общем виде уравнения могут быть выписаны относительно вектора переменных $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{U}'_1 + \mathbf{U}'_2) - \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{U}'_1)$ как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Q}^*}{\partial t} + \frac{\partial [\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}^*) - \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{Q}})]}{\partial x} + \frac{\partial [\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}^*) - \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{Q}})]}{\partial y} \\ = \frac{\partial \mathbf{F}_v(\mathbf{Q}^*)}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_v(\mathbf{Q}^*)}{\partial y} + \mathbf{S}^* \end{aligned} \quad (7)$$

где в качестве фонового течения выступает вектор $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{U}'_1)$, а источниковый член \mathbf{S}^* записывается в виде

$$\mathbf{S}^* = - \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{Q}})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{Q}})}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{F}_v(\tilde{\mathbf{Q}})}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{G}_v(\tilde{\mathbf{Q}})}{\partial y} \right].$$

По аналогии с нелинейными уравнениями для возмущений NLDE выписанная модель (7) получила название NLDDE (NonLinear Decomposed-Disturbances Equations). Нелинейные уравнения для двух типов возмущений NLDDE (7) могут быть использованы, например, в том случае, когда в аэроакустических расчетах учитывается случайное поле турбулентной скорости, которое моделируется отдельно при помощи стохастических методов.

В *Главе 2* диссертации рассматривается возможность включения в обеспечение вычислительного эксперимента в аэроакустике методов стохастического моделирования с целью воспроизведения в расчетах реальных эксплуатационных условий.

Задачи прикладной аэроакустики достаточно часто характеризуются наличием внешних или внутренних источников звука стохастической природы. Наиболее распространенными из них является поступающий извне шум с некоторыми спектральными характеристиками, а также турбулентное возмущение окружающей воздушной среды. Для учета этих явлений при моделировании задач аэроакустики в диссертации предлагается использование гладких реализаций случайных процессов с заданными свойствами, генерируемых на основе рандомизированного спектрального метода (PCM)^{3 4}. Полученные таким образом реализации могут использоваться для математического описания внутренних или граничных источников, а также начального или фоновое поля течения.

В начале *Главы 2* предлагаемая технология на основе PCM применяется для генерации акустического шума, равномерно распределенного в заданной полосе частот. Использование стохастически заданного шума при решении задач аэроакустики иллюстрируется задачами об акустическом возбуждении сдвиговых слоев.

Сначала решается задача о нахождении характерных частот слоев смещения на основе линеаризованных уравнений Эйлера (LEE) (2) и нелинейных уравнений для возмущений (NLDE/Roe) (5) при известном из предварительных расчетов среднем поле течения. Моделируемый равномерный шум используется в качестве граничного источника

³ С.М. Ермаков, Г.А. Михайлов. Курс статистического моделирования, – Гл. ред. физ-мат. лит-ры изд-ва "Наука", М., (1976)

⁴ О. Kurbanmuradov, К. Sabelfeld., Stochastic Spectral and Fourier-Wavelet Methods for Vector Gaussian Random Fields, – *Monte Carlo Methods and Applications*, Vol. 12, No. 5-6, (2006)

возмущений и распространяется вместе с потоком. При этом анализируется отклик возбуждающего сигнала в разных поперечных сечениях сдвигового слоя. При продвижении вдоль центральной линии слоя в изначально равномерном спектре входящего сигнала появляются видимые частотные пики, а сам спектр из широкополосного становится почти дискретным.

На Рис. 2 показана трансформация спектра возмущений давления для дозвукового слоя смешения. Численно полученные характерные пики с высокой точностью соответствуют закону обратной пропорциональности в зависимости от удаления от кромки, или от ширины сдвигового слоя. Аналогичная задача решалась для трансзвукового и сверхзвукового слоя смешения.

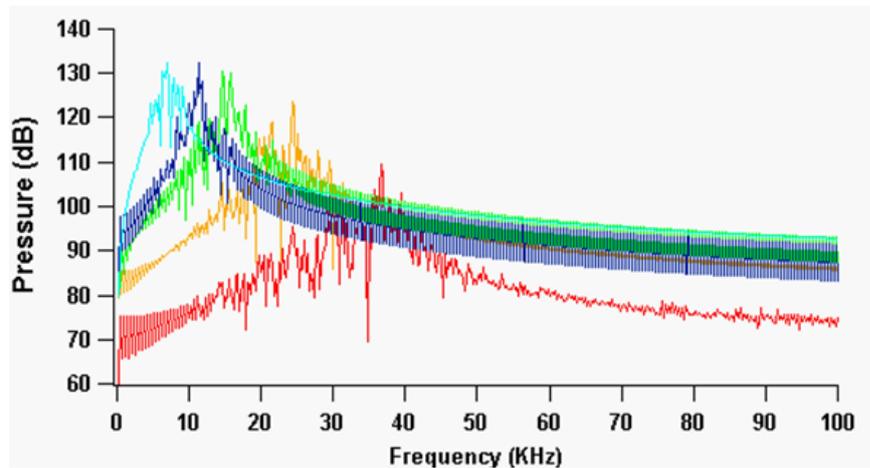


Рис. 2. Спектр возмущений в разных сечениях дозвукового слоя смешения.

Звуковое возбуждение дозвукового сдвигового слоя моделируется также на основе уравнений Навье-Стокса. Показывается возможность влияния на расположение точки отрыва вихрей акустическим шумом. На Рис. 3 показаны поля плотности в слое смешения с наличием акустического возбуждения и без.

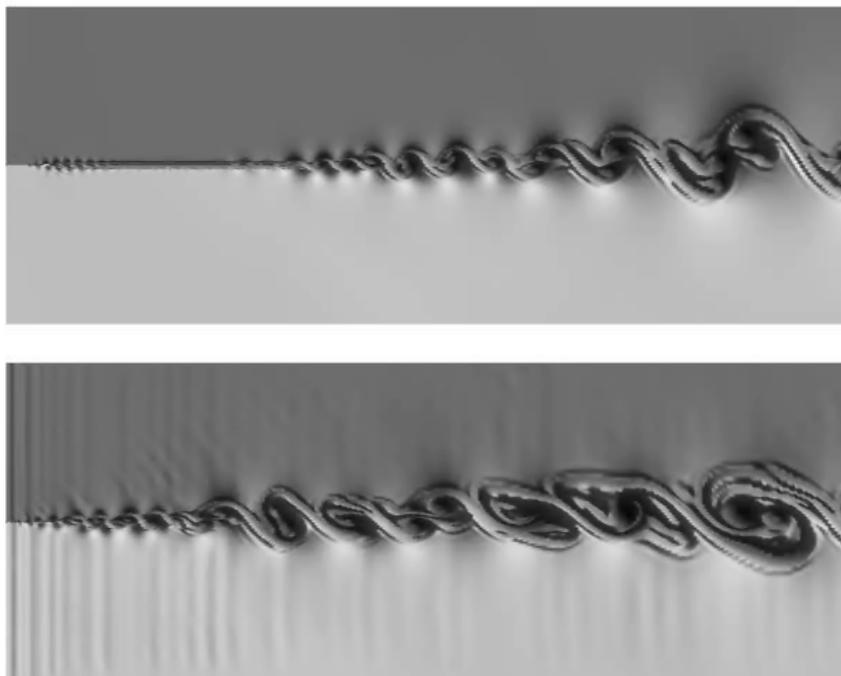


Рис. 3. Поле плотности дозвукового слоя смешения при наличии акустического возмущения (справа) и без него (слева)

Наиболее актуальным является использование РМС для искусственного синтеза турбулентности с заданными свойствами. Требованием к разработанной в работе модели турбулентной скорости является соленоидальность поля $\text{div } \vec{u} = 0$ в предположении, что произвольное дифференцируемое векторное поле может быть разложено на соленоидальное (вихревое) и потенциальное*. Для генерации поля турбулентной скорости также необходимо задание его средних значений и спектральной плотности $E(k)$. В диссертации реализована модель такого поля со спектром фон Кармана

$$E(k) = A \frac{\frac{2}{3} K}{k_e} \frac{\left(\frac{k}{k_e}\right)^4}{\left[1 + \left(\frac{k}{k_e}\right)^2\right]^{\frac{17}{6}}} \exp\left[-2\left(\frac{k}{k_{Kol}}\right)^2\right], \quad (8)$$

* Теорема о разложении Гельмгольца

где K – кинетическая энергия турбулентности, $k_{Kol} = \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3}\right)^{\frac{1}{4}}$ – Колмогоровское волновое число, ε – скорость диссипации энергии турбулентности, ν – кинематическая вязкость. Параметры спектра A и k_e определяются из условий нормировки

$$\int_0^{\infty} E(k) dk = K, \quad 2\nu \int_0^{\infty} k^2 E(k) dk = \varepsilon,$$

для чего необходимо решить соответствующее нелинейное уравнение, например, при помощи метода Ньютона.

Согласно РСМ поле турбулентной скорости моделируется на основе суммы N_{harm} синусов и косинусов

$$\vec{U}(\vec{x}) = \frac{\sigma}{N_{harm}} \sum_{p=1}^{N_{harm}} Q(\vec{\omega}_p) \left[\vec{\xi}_p \cos(\tilde{k}_p(\vec{\omega}_p \cdot \vec{x})) + \vec{\eta}_p \sin(\tilde{k}_p(\vec{\omega}_p \cdot \vec{x})) \right], \quad (9)$$

где N_{harm} случайных волновых чисел $\tilde{k}_n \in (0, k_{num}]$ $n = \overline{1, N_{harm}}$ $k_{num} < k_{Kol} < +\infty$ распределены с плотностью вероятности $p(k) = E(k)/\sigma^2$, $\sigma^2 = \int_0^{\infty} E(k) dk$; $\vec{\omega}_p$ – изотропный вектор с компонентами $\omega_p^1 = \cos(2\pi\alpha_p)$, $\omega_p^2 = \sin(2\pi\alpha_p)$ в двумерном случае, где $\alpha_p \in [0, 1]$ – равномерно распределенная случайная величина; $\vec{\xi}_p$ и $\vec{\eta}_p$ – независимые случайные вектора с распределением Гаусса. Все необходимые наборы случайных чисел моделируются при помощи стандартных генераторов случайных чисел один раз перед началом расчета.

Формула (9) реализует модель стационарного, однородного и изотропного поля и может быть использована в дальнейшем для построения более сложных моделей. В частности, в работе рассматривается более точная модель случайного поля модель с декомпозицией интервала волновых чисел, позволяющая учесть особенности спектра процесса, не увеличивая при этом

общее количество гармоник, а также возможность обобщения модели на случай нестационарного поля.

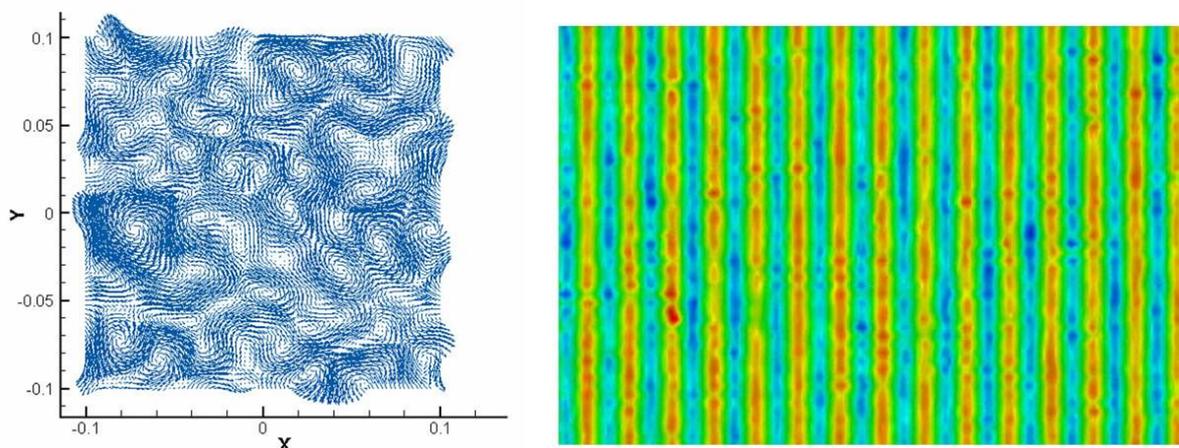


Рис. 4. Линии тока в синтезированном поле турбулентной скорости (слева) и возмущения давления при прохождении через него монохромной акустической волны (справа).

На Рис. 4 слева приведена одна из реализаций стационарного поля турбулентной скорости, которая использовалась при решении задачи о рассеянии плоской монохромной волны на однородном турбулентном поле. В качестве параметров при моделировании поля скорости в данной задаче использовались величины кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации, соответствующие уровню развитой турбулентности в следе за цилиндром с числом Маха $M=0.1$ и числом Рейнольдса $Re=10^5$. На Рис. 4 справа приведена картина возмущений давления при прохождении по турбулентному полю монохромной волны частоты 1500 Гц и мощностью 137 дБ.

Следует отметить, что предлагаемый в диссертации подход к использованию реализаций поля турбулентной скорости для моделирования задач аэроакустики и, в том числе, для моделирования генерации звука турбулентностью, имеет ряд преимуществ перед наиболее известной

моделью стохастической генерации и излучения шума SNGR⁵ – Stochastic Noise Generation and Radiation. Главным образом, эти преимущества состоят в широких возможностях для дальнейшего развития данного подхода. Так, в разработанной модели поля автоматически выполняется условие соленидальности, она может использоваться для полей с произвольно заданным спектром, иметь обобщение на нестационарный случай, а также служить основой для разработки моделей неоднородных полей. С другой стороны, синтезированные поля турбулентной скорости в работе предлагается использовать в качестве известной компоненты возмущения в нелинейных уравнениях для возмущений двух типов (NLDDE) (7), представляющих собой наиболее полную модель такого типа в отличие от SNGR-подхода, в описывающие уравнения которого включаются, в частности, только линейные относительно акустических пульсаций члены.

Глава 3 работы посвящена построению многопараметрического семейства схем повышенной точности для расчета задач аэроакустики на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках. Схемы строятся в рамках метода конечных объемов на основе квазиодномерной реконструкции потоковых переменных.

В первых разделах главы дается интерпретация одномерного аналога многопараметрических схем как схем, получающихся путем двукратного применения известного метода модифицированного уравнения. Рассмотрения начинаются с одномерного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

с положительной скоростью $a > 0$. В соответствии с методом прямых за основу при построении разностной схемы берется полудискретная

⁵ W. Bechara, C. Bailly, P. Lafon, and S. Candel, Stochastic Approach to Noise Modeling for Free Turbulent Flows, – *AIAA Journal*, Vol. 32, No 3, pp. 455-463, (1994)

аппроксимация уравнения $\left(\frac{du}{dt}\right)_j = -\Psi_j(u)$, где функция $\Psi_j(u)$ есть разностная аппроксимация пространственной производной.

Кратко вывод многопараметрических схем для уравнения переноса можно описать следующим образом. Для простейшей схемы с разностью против потока с первым порядком аппроксимации определяется первое дифференциальное приближение, исходя из вида которого, строится модифицированное уравнение, для которого исходная схема имеет уже второй порядок аппроксимации. Далее для модифицированного уравнения строится схема, которая использует кусочно-линейную реконструкцию переменных с весовым параметром β , контролирующим вклад разностей вверх и вниз по потоку.

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_j + a \frac{u_{j+1/2}^{-(1)} - u_{j-1/2}^{-(1)}}{\Delta x} = 0 \quad (11)$$

$$u_{j+1/2}^{-(1)} = u_j + \frac{\Delta x}{2} \left[(1-\beta) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j-1} \right] = u_j + \frac{1}{2} \left[(1-\beta)(u_{j+1} - u_j) + \beta(u_j - u_{j-1}) \right]$$

Для полученной схемы (11) также определяется дифференциальное приближение, которое показывает, что схема имеет третий порядок аппроксимации по пространству при $\beta = 1/3$ и второй – при других значениях $0 \leq \beta \leq 1$. На основе дифференциального приближения опять строится модифицированное уравнение путем добавления нового диффузионного члена, взятого из дифференциального уравнения. Для модифицированного уравнения также конструируется разностная аппроксимация. Т.к. добавочный диффузионный член включает третью производную, то она аппроксимируется третьими разностями: центральной разностью и разностью вниз по потоку с весовым коэффициентом ξ .

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_j + a \frac{u_{j+1/2}^{-(2)} - u_{j-1/2}^{-(2)}}{\Delta x} = 0$$

$$u_{j+1/2}^{-(2)} = u_{j+1/2}^{-(1)} - \frac{\Delta x^3}{12} \left((1-\xi) \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_j + \xi \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_j \right) =$$

$$u_{j+1/2}^{-(1)} - \frac{1}{12} \left[(1-\xi) (-u_{j-1} + 3u_j - 3u_{j+1} + u_{j+2}) + \xi (-u_{j-2} + 3u_{j-1} - 3u_j + u_{j+1}) \right]$$
(12)

Из анализа правой части дифференциального приближения

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_j + a \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{a\Delta x^4}{12} \left(\xi - \frac{2}{5} \right) \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \frac{a\Delta x^5}{24} \xi \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + O(\Delta x^5)$$
(13)

схемы (12) можно видеть, что при $\xi = 2/5$ пространственная аппроксимация исходного уравнения имеет пятый порядок точности.

В случае уравнения переноса со скоростью произвольного знака аппроксимацию пространственной производной можно представить в потоковом виде как

$$\Psi_j(u) = \frac{h(u_{j+1/2}^+, u_{j+1/2}^-) - h(u_{j-1/2}^+, u_{j-1/2}^-)}{\Delta x}$$
(14)

где базовый поток h определяется по формуле $h(u, v) = \frac{a}{2}(u+v) - \frac{\delta}{2}|a|(u-v)$.

Параметр δ в выражении означает количество схемной диссипации и изменяется от 0 до 1. При значении параметра $\delta = 1$ исходная схема представляет собой схему с направленными разностями первого порядка, а при параметре $\delta = 0$ – центрально-разностную схему второго порядка.

Для построения схемы высокого порядка, интерполированные значения переменных вниз и вверх по потоку, обозначаемые в формуле (14) через $u_{j+1/2}^-$ и $u_{j+1/2}^+$, соответственно, с учетом обозначения $\Delta u_{j+1/2} = u_{j+1} - u_j$ определяются по формулам

$$\begin{aligned}
u_{j+1/2}^- &= u_j + \frac{1}{2} \left(\underbrace{(1-\beta)\Delta u_{j+1/2}}_{\text{центральная}} + \underbrace{\beta\Delta u_{j-1/2}}_{\text{вниз по потоку}} \right) \\
&\quad + \underbrace{\xi^c (\Delta u_{j+3/2} - 2\Delta u_{j+1/2} + \Delta u_{j-1/2})}_{\text{центральная}} + \underbrace{\xi^d (\Delta u_{j+1/2} - 2\Delta u_{j-1/2} + \Delta u_{j-3/2})}_{\text{вниз по потоку}} \quad (15) \\
u_{j+1/2}^+ &= u_{j+1} - \frac{1}{2} \left(\underbrace{(1-\beta)\Delta u_{j+1/2}}_{\text{центральная}} + \underbrace{\beta\Delta u_{j+3/2}}_{\text{вверх по потоку}} \right) \\
&\quad + \underbrace{\xi^c (\Delta u_{j+3/2} - 2\Delta u_{j+1/2} + \Delta u_{j-1/2})}_{\text{центральная}} + \underbrace{\xi^d (\Delta u_{j+5/2} - 2\Delta u_{j+3/2} + \Delta u_{j+1/2})}_{\text{вверх по потоку}}
\end{aligned}$$

Упомянутые при выводе схемы (14)-(15) весовые коэффициенты $\delta, \beta, \xi^c, \xi^d$ являются основными параметрами схемы, определяющими точность ее пространственной аппроксимации. Приведем в Таблице 1 параметры для нескольких наиболее интересных схем.

Номер схемы	δ	β	ξ^c	ξ^d	Порядок
1	1	1/3	0	0	3
2	1	1/3	-1/6	0	4
3	1	1/3	0	-1/6	4
4	0	1/3	0	0	4
5	1	1/3	-1/10	-1/15	5
6	0	1/3	-1/10	-1/15	6

Таблица 1: Порядок точности схемы в зависимости от параметров.

В работе проведен анализ диссипативной и дисперсионной ошибок полученных многопараметрических схем. На Рис. 5 изображены амплитудные ошибки для схем с пятым и шестым порядком аппроксимации в зависимости от нормированного волнового числа ϕ/π и числа Куранта. Процедура интегрирования по времени выбирается с порядком точности,

соответствующей порядку пространственной аппроксимации. Для всех схем, за исключением схемы шестого порядка, модуль множителя перехода $|G|$ всегда меньше или равен единицы для всех значений волнового числа и чисел Куранта в диапазоне от 0 до 1. Из этого следует, что амплитуда начального распределения может только уменьшаться со временем и выполняется необходимое условие устойчивости $|G| \leq 1$. Для схемы 6 это условие нарушается в области высоких частот и окрестности числа Куранта, равного 0.5. Также можно заметить отсутствие амплитудных ошибок ($|G| = 1$) для всех схем при малых числах Куранта.

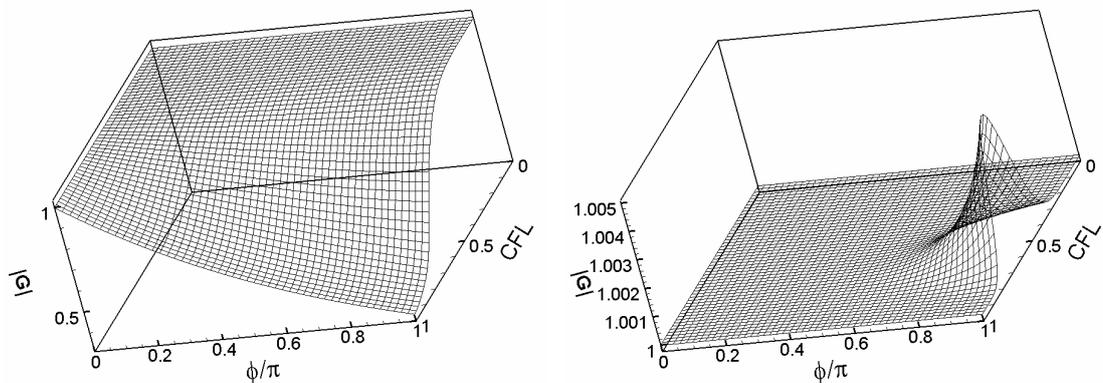


Рис. 5 Амплитудные ошибки для схем 5го (слева) и 6го (справа) порядков.

Для демонстрации точности схем, в работе приведена тестовая задача о переносе начального возмущения, заданного в виде осциллирующего профиля $u(x, 0) = [2 + \cos(1.7x)] \exp[-\ln 2(x/10)^2]$, представленная на Четвертом семинаре по тестовым задачам вычислительной аэроакустики⁶.

Таблица 2 показывает оценку порядка точности схемы в различных нормах в зависимости от величины шага сетки при использовании варианта схемы 6го порядка точности.

⁶ Fourth Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems, Cleveland, Ohio, October 20-22, 2003, URL: <http://www.math.fsu.edu/CAA4/pdfs/Category1/problem.pdf>

	L_1 norm	L_2 norm	L_∞ norm
$\Delta x = 1$ / $\Delta x = 1/2$	9.42×10^{-1}	-4.95×10^{-1}	-8.48×10^{-1}
$\Delta x = 1/2$ / $\Delta x = 1/4$	5.06	4.86	4.64
$\Delta x = 1/4$ / $\Delta x = 1/8$	5.96	5.96	5.94
$\Delta x = 1/8$ / $\Delta x = 1/16$	5.99	5.99	5.99

Таблица 2: Оценка порядка точности в разных нормах L_1 , L_2 и L_∞ в зависимости от шага сетки.

По аналогии с уравнением переноса (10), схема строится и для уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{f(u)}{\partial x} = 0, \quad \frac{d^2 f(u)}{du^2} \geq 0. \quad (16)$$

В этом случае, при использовании формулы (14) для аппроксимации пространственной производной нелинейный поток может быть выписан как

$$h(u_{j+1/2}^+, u_{j+1/2}^-) = \frac{f(u_{j+1/2}^+) + f(u_{j+1/2}^-)}{2} - \frac{\delta}{2} |u_{j+1/2}^+ + u_{j+1/2}^-| (u_{j+1/2}^+ - u_{j+1/2}^-). \quad (17)$$

Основываясь на представлении численного потока (17), невозможно построить схему с порядком точности выше второго для нелинейного уравнения. Поэтому в работе для построения схемы повышенной точности предлагается перейти к реконструкции потоков и, соответственно, аппроксимировать производную по пространству согласно формулам

$$\Psi_j(u) = \frac{h(f_{j+1/2}^+, f_{j+1/2}^-) - h(f_{j-1/2}^+, f_{j-1/2}^-)}{\Delta x}, \quad (18)$$

где $h(f_{j+1/2}^+, f_{j+1/2}^-) = \frac{f_{j+1/2}^+ + f_{j+1/2}^-}{2} - \frac{\delta}{2} \text{sign}(u_{j+1/2}^+ + u_{j+1/2}^-) (f_{j+1/2}^+ - f_{j+1/2}^-)$, а $f_{j+1/2}^+$

и $f_{j+1/2}^-$ – интерполированные значения потоковых функций, сконструированные с использованием параметров β , ξ^c , ξ^d для определения наклона интерполяционных прямых, аналогично (15).

Дальнейшее содержание *Главы 3* посвящено обобщению многопараметрических схем на неструктурированные треугольные и тетраэдральные сетки с определением переменных в узлах, а также их адаптации ко всем моделям «семейства Эйлера», используемых в расчетах задач аэроакустики.

Численные алгоритмы метода конечных объемов с определением переменных в узлах сетки помимо сетки как таковой требуют дополнительных геометрических построений, связанных с необходимостью определения ячеек, для которых выписываются разностные аналоги законов сохранения. В работе используются ячейки двух типов, а именно «медианные» и «срединно-перпендикулярные», названные так в зависимости от опорных точек для построения ячеек, которыми являются центры тяжести треугольника/тетраэдра и центры описанных окружностей соответственно.

В многомерном случае схема строится для наиболее общего вида для всех рассматриваемых в работе моделей аэроакустики

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{Q})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{Q})}{\partial z} = \mathbf{S}, \quad (19)$$

считая при этом, что под расчетной переменной \mathbf{Q} и потоками $\mathbf{F}(\mathbf{Q}), \mathbf{G}(\mathbf{Q}), \mathbf{H}(\mathbf{Q})$ понимаются разные функции в зависимости от выбора модели. Полудискретная аппроксимация для такой системы уравнений выписывается в виде

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} + \frac{1}{|C_i|} \sum_{j \in \Omega_i} \Phi_{ij} = \mathbf{S}, \quad (20)$$

где $|C_i|$ – площадь ячейки C_i , построенной вокруг узла i , а Ω_i – набор узлов, соседних по отношению к узлу i . Выражение (20) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, интегрируемых в рассматриваемой схеме при помощи метода Рунге-Кутты (до 4-го порядка точности) или его линейной версией произвольного порядка точности.

Техника построения схемы заключается в аппроксимации потоков Φ_{ij} .

Вводя обозначения

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}} &= (\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}) \quad \tilde{\mathbf{F}}_n = \mathbf{F}n_{ij}^x + \mathbf{G}n_{ij}^y + \mathbf{H}n_{ij}^z \\ \mathbf{A}_n &= \mathbf{A}_x n_{ij}^x + \mathbf{A}_y n_{ij}^y + \mathbf{A}_z n_{ij}^z, \\ \forall \mathbf{B}: \quad \mathbf{B}_n &= \mathbf{B}_x n_{ij}^x + \mathbf{B}_y n_{ij}^y + \mathbf{B}_z n_{ij}^z\end{aligned}\quad (21)$$

где $\mathbf{n}_{ij} = (n_{ij}^x, n_{ij}^y, n_{ij}^z)$ – вектор нормали к грани между узлами i и j , можно записать противопотоковую аппроксимацию Φ_{ij} первого порядка точности согласно методу Roe

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}^{\text{upwind}} = \Phi_{ij}^{\text{CD}} \left((\tilde{\mathbf{F}}_n)_i, (\tilde{\mathbf{F}}_n)_j \right) - \mathbf{D}_{ij} \left((\tilde{\mathbf{F}}_n)_i, (\tilde{\mathbf{F}}_n)_j \right). \quad (22)$$

При этом, центрально-разностная часть потока Φ_{ij}^{CD} в (22) вычисляется согласно формулам $\Phi_{ij}^{\text{CD}} = \frac{1}{2} \left[(\tilde{\mathbf{F}}_n)_j + (\tilde{\mathbf{F}}_n)_i \right]$ для всех рассматриваемых уравнений аэроакустики, в то время как диссипативный поток \mathbf{D}_{ij} для разных моделей «семейства Эйлера» вычисляется по-разному:

1) для уравнений Эйлера

$$\mathbf{D}_{ij} = \delta \frac{1}{2} \text{sign } \mathbf{A}_n^{\text{Roe}}(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j) \left[(\tilde{\mathbf{F}}_n)_j - (\tilde{\mathbf{F}}_n)_i \right], \quad (23)$$

2) для линеаризованных уравнений Эйлера

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{ij} &= \delta \frac{1}{2} \mathbf{A}_n^{\text{Roe}}(\bar{\mathbf{Q}}_i, \bar{\mathbf{Q}}_j) \left[(\mathbf{Q}'_n)_j - (\mathbf{Q}'_n)_i \right] \text{ или} \\ \mathbf{D}_{ij} &= \delta \frac{1}{2} \text{sign } \mathbf{A}_n^{\text{Roe}}(\bar{\mathbf{Q}}_i, \bar{\mathbf{Q}}_j) \left[(\tilde{\mathbf{F}}_n)_j - (\tilde{\mathbf{F}}_n)_i \right] \\ \tilde{\mathbf{F}} &= (\mathbf{A}_x \mathbf{Q}', \mathbf{A}_y \mathbf{Q}', \mathbf{A}_z \mathbf{Q}')\end{aligned}\quad (24)$$

3) для нелинейных уравнений для возмущений в общем виде (NLDE)

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{ij} &= \delta \frac{1}{2} \text{sign } \mathbf{A}_n^{\text{Roe}}(\bar{\mathbf{Q}}_i + \mathbf{Q}'_i, \bar{\mathbf{Q}}_j + \mathbf{Q}'_j) \left[(\tilde{\mathbf{F}}_n(\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}'))_j - (\tilde{\mathbf{F}}_n(\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}'))_i \right] \\ &\quad - \delta \frac{1}{2} \text{sign } \mathbf{A}_n^{\text{Roe}}(\bar{\mathbf{Q}}_i, \bar{\mathbf{Q}}_j) \left[(\tilde{\mathbf{F}}_n(\bar{\mathbf{Q}}))_j - (\tilde{\mathbf{F}}_n(\bar{\mathbf{Q}}))_i \right],\end{aligned}\quad (25)$$

или, в случае постоянного среднего поля

$$\mathbf{D}_{ij} = \delta \frac{1}{2} \text{sign} \mathbf{A}_n^{\text{Roe}} (\bar{\mathbf{Q}}_i + \mathbf{Q}'_i, \bar{\mathbf{Q}}_j + \mathbf{Q}'_j) \left[(\tilde{\mathbf{F}}_n (\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}'))_j - (\tilde{\mathbf{F}}_n (\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}'))_i \right], \quad (26)$$

что по сути совпадает с диссипативным потоком в случае уравнений Эйлера,

- 4) для формулировки нелинейных уравнений для возмущений через матрицу средних (NLDE/Roe)

$$\mathbf{D}_{ij} = \delta \frac{1}{2} \text{sign} (\mathbf{A}_n^{\text{Roe}*})^{\text{Roe}} (\bar{\mathbf{Q}}_i + \mathbf{Q}'_i, \bar{\mathbf{Q}}_j + \mathbf{Q}'_j, \bar{\mathbf{Q}}_j + \mathbf{Q}'_j, \bar{\mathbf{Q}}_i + \mathbf{Q}'_i) \left[(\tilde{\mathbf{F}}_n)_j - (\tilde{\mathbf{F}}_n)_i \right] \quad (27)$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = (\mathbf{A}_x^{\text{Roe}*} \mathbf{Q}', \mathbf{A}_y^{\text{Roe}*} \mathbf{Q}', \mathbf{A}_z^{\text{Roe}*} \mathbf{Q}')$$

Поток более высоких порядков вычисляется на основе этих же определений потоков, но с заменой потоковых функций $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ на их интерполированное (реконструированное) значение $\tilde{\mathbf{F}}^E = (\mathbf{F}^E, \mathbf{G}^E, \mathbf{H}^E)$

$$\Phi_{ij}^{\text{HOutwind}} = \Phi_{ij}^{\text{CD}} \left((\tilde{\mathbf{F}}_n^E)_i, (\tilde{\mathbf{F}}_n^E)_j \right) - \mathbf{D}_{ij} \left((\tilde{\mathbf{F}}_n^E)_i, (\tilde{\mathbf{F}}_n^E)_j \right). \quad (28)$$

Опишем процедуру реконструкции на примере потоковой функции \mathbf{F} . Чтобы получить интерполированные значения функции со стороны узлов i и j , согласно формулам $\mathbf{F}_i^E = \mathbf{F}_i - \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{F})_{ij} \cdot \mathbf{ij}$, $\mathbf{F}_j^E = \mathbf{F}_j + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{F})_{ji} \cdot \mathbf{ij}$, необходимо определить скорость роста функции вдоль вектора направления \mathbf{ij} между узлами, характеризуемую градиентами $(\nabla \mathbf{F})_{ij}$ и $(\nabla \mathbf{F})_{ji}$. Поэтому задача о реконструкции потоковых переменных сводится к построению аппроксимации этих градиентов. Это делается в полном соответствии с одномерным случаем при замене соответствующих разностей их многомерными аналогами.

Таким образом, аппроксимация градиента $(\nabla \mathbf{F})_{ij}$ выражением

$$(\nabla \mathbf{F})_{ij} \cdot \mathbf{ij} = (1 - \beta) (\nabla \mathbf{F})_{ij}^C \cdot \mathbf{ij} + \beta (\nabla \mathbf{F})_{ij}^D \cdot \mathbf{ij} \quad (29)$$

при $0 \leq \beta \leq 1$ обеспечивает порядок схемы до 4го включительно. Четвертый порядок аппроксимации достигается на «декартовом»^{*} подмножестве неструктурированной сетки при выборе параметров $\delta = 0 \quad \beta = 1/3$.

Приведенный способ аппроксимации потока через грань ячейки, разделяющую узлы i и j , использует шаблон, представленный на Рис. 6.

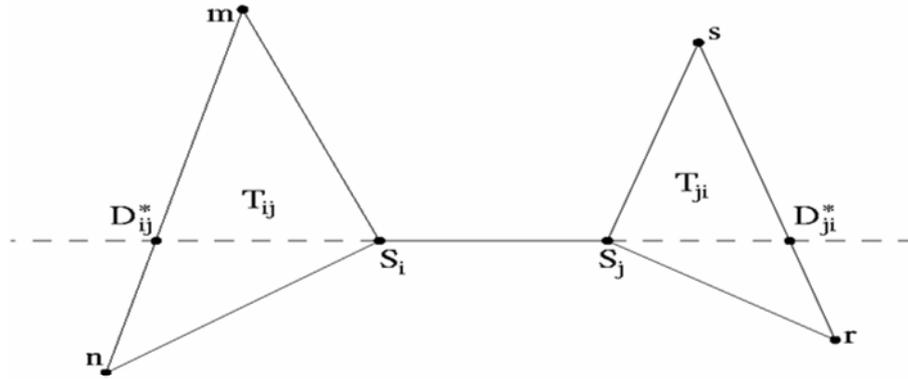


Рис. 6. Базовый шаблон схемы на основе «противопотоковых» треугольников.

Более точную пространственную аппроксимацию можно получить, если использовать выражение

$$\begin{aligned}
 (\nabla \mathbf{F})_{ij} \cdot \mathbf{ij} = & (1 - \beta)(\nabla \mathbf{F})_{ij}^C \cdot \mathbf{ij} + \beta(\nabla \mathbf{F})_{ij}^D \cdot \mathbf{ij} \\
 & + \xi^c \left((\nabla \mathbf{F})_{ij}^D \cdot \mathbf{ij} - 2(\nabla \mathbf{F})_{ij}^C \cdot \mathbf{ij} + (\nabla \mathbf{F})_{ij}^U \cdot \mathbf{ij} \right) \\
 & + \xi^d \left((\nabla \mathbf{F})_{ij}^{D^*} \cdot \mathbf{ij} - 2(\nabla \mathbf{F})_i \cdot \mathbf{ij} + (\nabla \mathbf{F})_j \cdot \mathbf{ij} \right)
 \end{aligned} \quad (30)$$

Эта аппроксимация строится на расширенном шаблоне, включающем в себя помимо узлов базового шаблона все соседние к ним точки. В зависимости от выбора параметров аппроксимации β, ξ^c, ξ^d , полученная схема может достигать точности до бго порядка включительно на «декартовых» сетках.

Приведенные аппроксимации используют многомерные градиенты различных типов: центральный градиент $(\nabla \mathbf{F})_{ij}^C$, градиенты на треугольниках

^{*} Здесь и далее под «декартовыми» сетками понимаются треугольные сетки, полученные путем разбиения прямоугольных ячеек декартовой сетки на два прямоугольных треугольника или тетраэдральные сетки, полученные путем разбиения параллелепипедов (кубов) на тетраэдры, каждая из граней которого является прямоугольным треугольником

$(\nabla\mathbf{F})_{ij}^U$ и $(\nabla\mathbf{F})_{ij}^D$ вверх и вниз по потоку соответственно, комбинированный градиент $(\nabla\mathbf{F})_{ij}^{D^*}$, узловые градиенты $(\nabla\mathbf{F})_i$ и $(\nabla\mathbf{F})_j$. Способы вычисления названных градиентов подробно приведены в диссертации.

Построение схемы в трехмерном случае для тетраэдральных сеток происходит аналогичным способом с точностью до замены в шаблоне «противопотоковых» треугольников «противопотоковыми» тетраэдрами.

Полученные в рамках метода конечных объемов многопараметрические схемы имеют второй теоретически обоснованный порядок точности на произвольных тетраэдральных или треугольных сетках. В то же время при переходе на «декартовые» сетки пространственная аппроксимация схемы распадается на квазиодномерные конечные разности высокого порядка точности в зависимости от выбора параметров схемы. Соответственно, сама схема становится высокоточной. Это свойство схемы приводит к тому, что на практике, при использовании сеток произвольной структуры точность результатов оказывается заметно выше, чем при использовании традиционных конечно-объемных схем второго порядка. Этот факт подтвердили проведенные в работе исследования на реальных сгущающихся сетках нерегулярной структуры, которые показали, что сходимость результатов по сетке происходит со скоростью, превышающей второй порядок.

Возможности построенного многопараметрического семейства схем демонстрируется на ряде многомерных модельных задач.

Глава 3 завершается описанием параллельной реализации многопараметрических схем для расчетов на многопроцессорных вычислительных системах с распределенной памятью. Трудность параллельной реализации определяется широким шаблоном нерегулярной структуры, который используется для аппроксимации потоков между узлами сетки. Для преодоления этой трудности в работе предлагается ряд приемов,

основным из которых является замена пересылок повторяемыми вычислениями.

В *Главе 4* описывается проведенный вычислительный эксперимент по исследованию резонаторов и ячеек ЗПК резонансного типа.

ЗПК представляют собой двух- или многослойные панели сотовой структуры, каждая ячейка которых представляет собой резонатор. Панели ЗПК широко используются в авиастроении для снижения шума турбореактивных двигателей.

При разработке и оптимизации ЗПК широко используются физические эксперименты двух типов. Первый тип – это лабораторные эксперименты по изучению свойств отдельно взятого резонатора в импедансной трубе. Такие эксперименты проводятся, например, в ОАО «Авиадвигатель», Пермь, в Лаборатории аэроакустики Кафедры акустики Физического факультета МГУ. Второй тип экспериментов носит инженерный характер и больше ориентирован на промышленное использование. В его рамках исследуются не отдельные резонаторы, а целые панели ЗПК, которыми облицованы стенки канала. С одной стороны в канал подается поток с акустическим возмущением. На входе и выходе из канала находятся реверберационные камеры, в которых проводятся измерения. Такие эксперименты проводятся, в частности, в ЦАГИ им. Проф. Н.Е Жуковского и ЦИАМ им. П.И.Баранова.

На первом этапе численного исследования разработанные в работе численные методики и программное обеспечение использовались для воспроизведения двух указанных типов физических экспериментов вычислительными средствами. В первой части *Главы 4* подробно описываются результаты соответствующих расчетов и дается их физическая интерпретация.

Для моделирования эксперимента по исследованию свойств резонатора в импедансной трубе использовались двумерные и трехмерные постановки на треугольных и тетраэдральных сетках соответственно. Изоповерхности

плотности, полученные в результате трехмерного расчета при падающей монохромной акустической волне мощностью 147 дБ, показаны на Рис.7. На рисунке видно, что в окрестности входного отверстия в резонатор задача перестает быть линейной и симметричной относительно оси. На правом рисунке (Рис. 7) видны, в частности, вихревые кольцеобразные структуры, формирующиеся у входного отверстия.

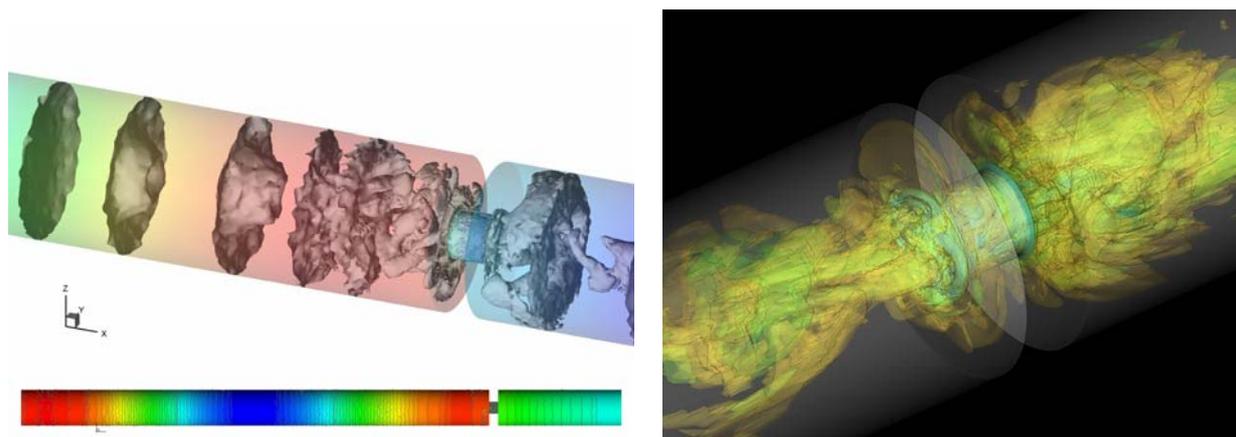


Рис. 7. Исоповерхности плотности при прохождении монохромной акустической волны сквозь отверстие резонатора в импедансной трубе

Расчеты по моделированию резонаторов в канале при наличии дозвукового касательного течения с числом Маха $M=0.2$ проводились в двумерной постановке на треугольных стеках. На Рис. 8 представлено поле плотности в окрестности входного отверстия в резонатор. Видно формирование (с передней кромки отверстия) сдвигового слоя с вихревыми структурами, которые налетают на заднюю стенку отверстия, проникают внутрь резонатора и частично распространяются вдоль поверхности канала. Помимо вихревых структур на Рис. 8 заметно акустическое излучение, которое распространяется как снаружи, так и внутри резонаторной камеры. Проведенные численные эксперименты показали, что наличие акустического излучения («свиста») принципиальным образом зависит от толщины пограничного слоя, образующегося на передней кромке отверстия. При достаточно толстом погранслое явление «свиста» не наблюдается.

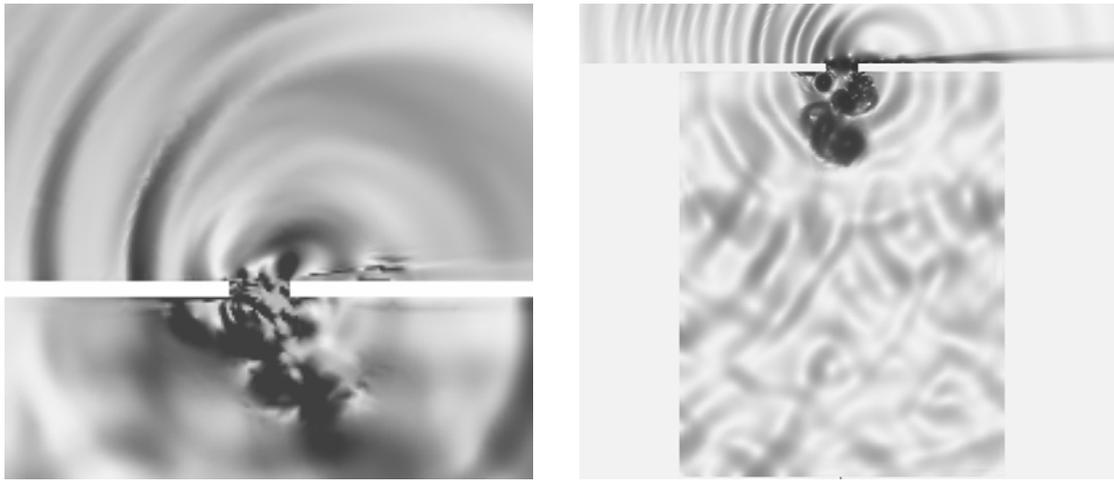


Рис. 8. Изоповерхности плотности при прохождении монохромной акустической волны в импедансной трубе.

На правом рисунке (Рис. 8) внутри резонатора отчетливо видны структуры, полученные в результате отражения проникающих акустических волн от стенок. Следует отметить, что одновременное воспроизведение разномасштабных акустических и турбулентных возмущений в рамках одного расчета возможно благодаря использованию в расчетах схемы высокого порядка точности.

Проведенные численные исследования дают возможность предварительного качественного анализа физических процессов, происходящих внутри ячеек ЗПК при различных режимах течения. Для получения же более точной информации, в том числе необходимых количественных характеристик, требуется валидация полученных результатов относительно достоверных физических данных.

Во второй части **Главы 4** предлагается методика определения технических параметров ЗПК (акустического импеданса и коэффициента прохождения) по результатам расчетов и проводится ее апробация на задаче о резонаторе Гельмгольца с известными свойствами.

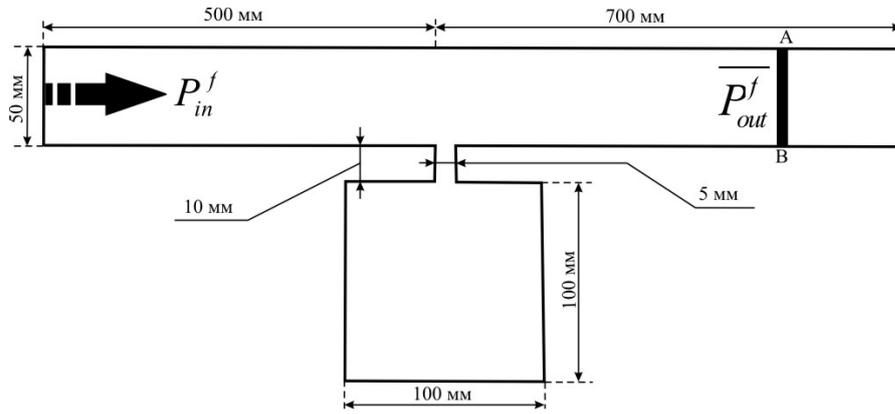


Рис. 9. Постановка задачи о изучении свойств резонатора.

Конкретная конфигурация задачи по поиску характерных частот резонатора представлена на Рис. 9. Резонансная частота в двумерном случае теоретически оценивается как

$$\omega_0^2 \cong \frac{c^2}{\left(\frac{\delta}{d} + \alpha \ln \frac{H}{d}\right) S}, \quad (31)$$

где H – диаметр волновода, d и δ – ширина и длина входного отверстия.

Акустический импеданс резонатора в установке, представленной на Рис. 9, для гармоники k можно вычислить через коэффициент прохождения $W^k = A_2^k / A_1^k$, представляющий отношения амплитуд прошедшей и падающей волн, при помощи формулы

$$\frac{z^k}{\rho c} = \frac{d}{H} \frac{W^k}{2(1 - W^k)}. \quad (32)$$

На Рис. 11 представлены теоретические (верхний ряд) и расчетные (второй сверху ряд) значения модуля и фазы коэффициента прохождения для резонаторов разной конфигурации, схематически показанных на Рис. 10.

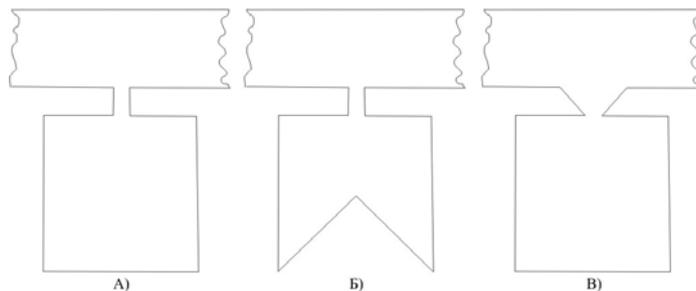


Рис. 10. Конфигурации резонаторов, рассматриваемых в работе

Следует отметить, что упомянутые в начале *Главы 4* физические эксперименты не дают возможности исследовать отдельно взятую ячейку ЗПК в условиях, приближенных к эксплуатационным. Так, эксперименты в канале нацелены на воспроизведение реальных условий, но исследуют при этом результирующий коллективный эффект звукопоглощения всеми панелями ЗПК, установленными в канале. Отдельная же ячейка является объектом изучения только при проведении экспериментов в импедансной трубе. Однако в импедансной трубе технически невозможно организовать течение, непременно присутствующее в условиях эксплуатации ЗПК. Для детального изучения свойств отдельной ячейки в реальных условиях, в том числе при наличии потока с разными параметрами пограничного слоя, в работе предлагается использовать третий тип экспериментальной постановки, а именно «вычислительный стенд» в конфигурации «резонатор/система резонаторов в волноводе». Схематически он полностью соответствует постановке, представленной на Рис. 9. Принципиальным отличием от эксперимента в канале является диаметр волновода, выбираемый существенно меньшим по сравнению с длинами падающих волн.

На графиках в третьем и четвертом сверху рядах на Рис. 11 представлены полученные численно значения модуля и фазы коэффициента прохождения для резонатора А (Рис. 10) при учете нелинейных эффектов (третий ряд графиков), а также при наличии касательного дозвукового течения со скоростью $M=0.1$. Анализ представленных расчетов показывает существенное изменение свойств резонатора при учете нелинейных эффектов, диссипации и, главным образом, при учете набегающего течения.

В *Заключении* диссертации в сжатом виде формулируются основные результаты работы.

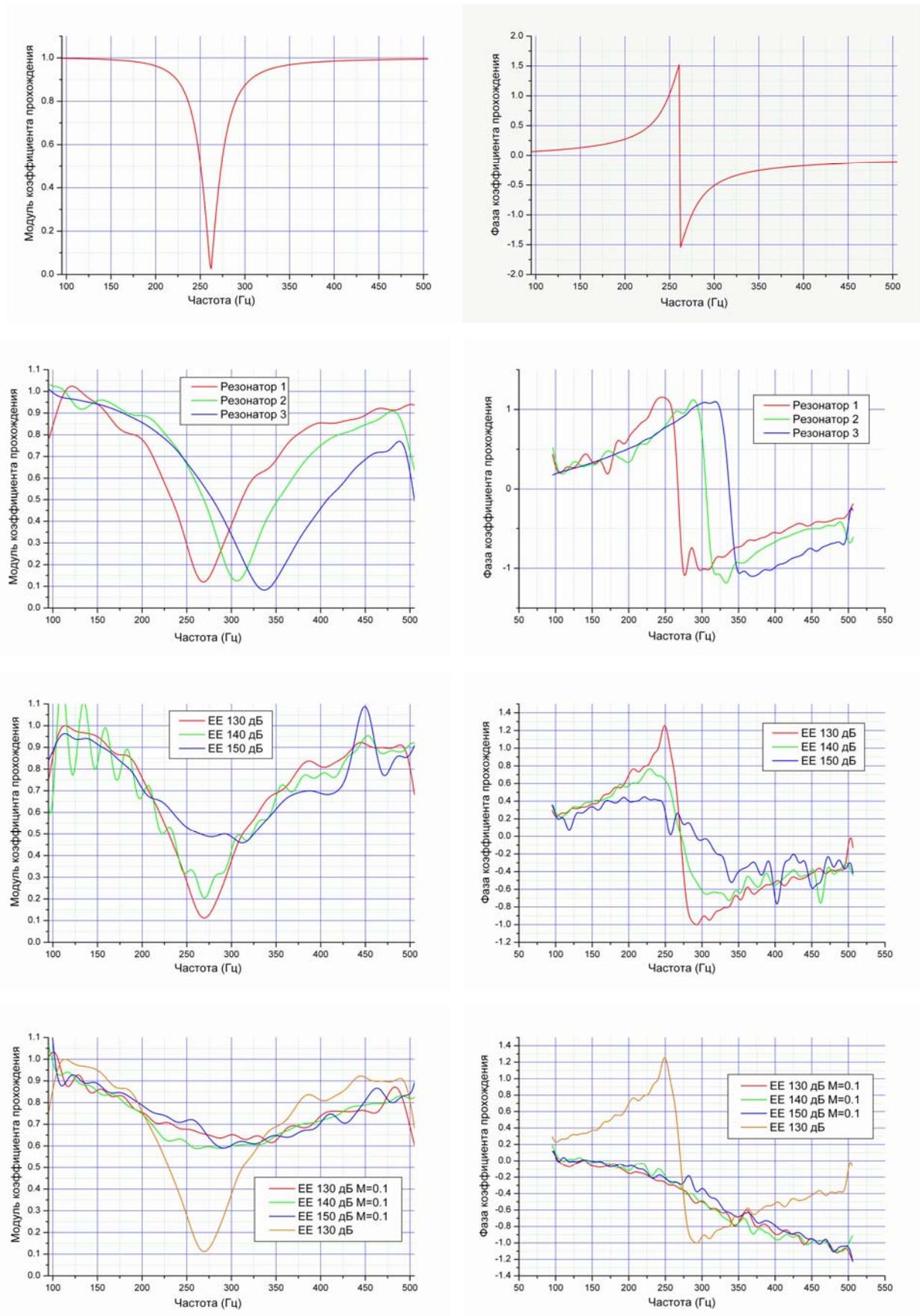


Рис. 11. Теоретические (сверху) и расчетные значения модуля и фазы коэффициента прохождения для разных режимов течения

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Показано, что при численной реализации моделей нелинейной акустики нелинейные уравнения для возмущений позволяют корректный переход к линейным формулировкам при уменьшении решения. Предложены две новые формы записи нелинейных уравнений для возмущений: с использованием матрицы средних и с выделением линейной части, обеспечивающие устойчивость к ошибкам округления и корректную работу во всем диапазоне амплитуд решения. Получены нелинейные уравнения для возмущений двух типов, один из которых задан или моделируется извне.
2. Разработаны и реализованы стохастические модели поля турбулентной скорости со спектром фон Кармана и акустического возмущения, равномерно распределенного в заданной полосе частот, на основе рандомизированного спектрального метода. Модели построены с целью имитации реальных физических условий при моделировании задач аэроакустики.
3. Построено многопараметрическое семейство схем метода конечных объемов повышенной точности на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках для расчета задач аэроакустики, описываемых моделями на основе полных уравнений Эйлера. Схемы основаны на квазиодномерной реконструкции потоковых переменных. Дана одномерная интерпретация многопараметрических схем как схем, получаемых путем двукратного применения известного метода модифицированного уравнения. Проведен теоретический и экспериментальный анализ одномерного аналога многопараметрических схем, возможности схем для многомерных

задач на неструктурированных сетках продемонстрированы на модельных задачах.

4. Проведено численное исследование ячеек звукопоглощающих конструкций в конфигурации «резонатор/система резонаторов в волноводе», трудно реализуемой в рамках физического эксперимента. Исследование проведено на основе серийных расчетов на высокопроизводительных системах параллельной архитектуры с использованием разработанных математических моделей и программного обеспечения. При помощи предложенной постановки вычислительного эксперимента изучены свойства резонаторов при различных параметрах падающего акустического возмущения, в том числе при наличии касательного дозвукового течения.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Tatiana K. Kozubskaya. Validation and Verification in Computational Aeroacoustics: from Linear to Nonlinear – In *A series of Handbooks on Theory and Engineering Applications of Computational Methods. Verification and Validation Methods for Challenging Multiphysics Problems*, CIMNE, Barcelona (2006), pp. 187-208
2. Ilya V. Abalakin, Alain Dervieux, Tatiana K. Kozubskaya. On the accuracy of direct noise calculations based on the Euler model, – In Book *Computational Aeroacoustics*, edited by G. Raman, Multi-Science Publishing, (2008), pp. 141-166.
3. I. Abalakin, A. Dervieux, T. Kozubskaya. On Accuracy of Noise Direct Calculation Based on Euler Model – *International Journal of Aeroacoustics*, Vol. 3, (2004), pp. 157-180
4. Ilya Abalakin, Alain Dervieux, and Tatiana Kozubskaya, Computational Study of Mathematical Models for Noise DNS, – *AIAA paper 2002-2585* (2002)
5. T. Kozubskaya. “Euler Based Models and High Accuracy Numerical Techniques in Computational Aeroacoustics” – In Proceedings of IMACS/ISGG Workshop MASCOT 04 (Edited by C. Conti, F. Pistella, R.-M. Spitaleri), (2004), pp. 121-130
6. И.В.Абалакин, К.А.Даниэль, Т.К.Козубская. Исследование влияния точности аппроксимации вязких членов на точность численного решения уравнений газовой динамики, – *Математическое моделирование*, т.19, № 7, (2007), стр. 85-92
7. И.А. Боровская, Т.К. Козубская, О. Курбанмурадов, К.К. Сабельфельд. – О моделировании однородных случайных полей и сигналов и их использовании в задачах аэроакустики, - *Математическое моделирование*, т.19, № 10, (2007), стр. 76-88
8. I.A. Borovskaya, T.K. Kozubskaya, Numerical Signal Processing in Computational Aeroacoustics, – in Proceedings of *SCI 2003 Conference*, Orlando, Florida, USA, July 27-30, (2003)

9. Anatoli V.Alexandrov and Tatyana K.Kozubskaya. Parallel Computation of White Noise Propagation through Viscous Compressible Gas Flows. – Journal of Computational Methods in Science and Engineering (JCMSE), 2002, Vol. 2 (1s-2s), pp. 175-180.
10. Tatiana K.Kozubskaya, Ilya V. Abalakin, and Vladimir G.Bobkov. A Half-Stochastic Model for Noise Simulation in Free Turbulent Flows, – *AIAA paper 2001-2258* (2001)
11. И.В.Абалакин, Т.К.Козубская. Многопараметрическое семейство схем повышенной точности для линейного уравнения переноса. – *Математическое моделирование*, т.19, № 7, (2007), стр. 56-66
12. I.V.Abalakin, T.K.Kozubskaya, A. Dervieux. High Accuracy Finite Volume Method for Solving Nonlinear Aeroacoustics Problems on Unstructured Meshes, – *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. 19, No. 2, (2006)
13. И.В.Абалакин, А. Дервье, Т.К.Козубская, Х.Уврар. Методика повышения точности при моделировании переноса акустических возмущений на неструктурированных сетках, – *Ученые записки ЦАГИ*, т.XLI, №1, (2010)
14. T.Kozubskaya, I.Abalakin, A.Dervieux, H.Ouvrard, Accuracy Improvement for Finite-Volume Vertex-Centered Schemes Solving Aeroacoustics Problems on Unstructured Meshes, – *AIAA paper 2010-3933* (2010).
15. А.В.Горобец, Т.К.Козубская, Технология распараллеливания явных высокоточных алгоритмов вычислительной газовой динамики и аэроакустики на неструктурированных сетках, – *Математическое моделирование*, т.19, № 2, (2007), стр. 68-86
16. Г.И.Савин, Б.Н.Четверушкин, С.А.Суков, А.В.Горобец, Т.К.Козубская, О.И.Вдовикин, Б.М.Шабанов. Моделирование задач газовой динамики и аэроакустики с использованием ресурсов суперкомпьютера МВС-100К, – *Доклады академии наук*, том 423, №3, (2008), стр. 312-315
17. Andrey V. Gorobets, Ilya V. Abalakin and Tatiana K. Kozubskaya. Technology of parallelization for 2D and 3D CFD/CAA codes based on high-accuracy explicit methods on unstructured meshes, – In Book *Parallel*

Computational Fluid Dynamics 2007, Series Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer Berlin Heidelberg, Vol. 67, (2009), pp. 253-260

18. И.В.Абалакин, А.В.Горобец, Т.К.Козубская. Вычислительные эксперименты по звукопоглощающим конструкциям, – *Математическое моделирование*, т.19, № 8, (2007), стр. 15-21

19. I.V.Abalakin, A.V.Gorobets, T.K.Kozubskaya, A.K.Mironov. Simulation of Acoustic Fields in Resonator-Type Problems Using Unstructured Meshes, – *AIAA 2006-2519 Paper* (2006)

20. А.В.Александров, Т.К.Козубская, Моделирование распространения акустического шума в потоках вязкого сжимаемого газа, – *Математическое моделирование*, т. 11, № 12, (1999),стр. 3-15.