

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша

На правах рукописи

Кучугов Павел Александрович

**Динамика процессов турбулентного
перемешивания в лазерных мишенях**

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., проф.

Змитренко Николай Васильевич

Научный консультант

д. ф.-м. н., проф.

Розанов Владислав Борисович

Москва – 2014

Содержание

Введение	5
Глава 1. Обзор литературы	11
Глава 2. Численное моделирование процессов турбулентного перемешивания	31
2.1. Описание численной методики	31
2.2. Реализация численной методики для GPU	35
2.2.1. Основные понятия, необходимые при использовании технологии CUDA	37
2.2.2. Методика распараллеливания с использованием CUDA	38
2.2.3. Тестовые расчёты	39
2.2.4. Оценка ускорения и эффективности алгоритма	43
2.3. Моделирование развития неустойчивости Рэля–Тейлора для одномодового возмущения	49
2.3.1. Постановка расчётов	49
2.3.2. Результаты моделирования	50
2.4. Выводы к Главе 2	54
Глава 3. Исследование влияния сжимаемости на развитие неустойчивости Рэля–Тейлора	56
3.1. Оценка значимости эффекта применительно к задачам ЛТС	56
3.2. Линейный анализ. Обзор различных конфигураций	59
3.3. Численное моделирование развития неустойчивости Рэля–Тейлора в сжимаемом случае	69
3.3.1. Особенности вычисления параметров для смешанных ячеек	69

3.3.2.	Постановка задач для моделирования и полученные результаты	70
3.4.	Выводы к Главе 3	75
Глава 4. Эволюционный подход. Нелинейный анализ неустойчивости Рэля–Тейлора		
4.1.	Совместное действие неустойчивостей Рэля–Тейлора и Кельвина–Гельмгольца	77
4.2.	Эволюционная теория	79
4.2.1.	Критический возраст	79
4.2.2.	Влияние азимутальных мод неустойчивости Кельвина–Гельмгольца на величину критического возраста	84
4.2.3.	Скорость роста ширины зоны перемешивания	84
4.2.4.	Влияние переходного слоя на скорость роста ширины зоны перемешивания	87
4.2.5.	Логарифмическое представление	87
4.3.	Выводы к Главе 4	88
Глава 5. Результаты применения эволюционного подхода и регулировка его параметров		
5.1.	Применение эволюционного подхода	90
5.2.	Выводы к Главе 5	102
Глава 6. Особенности развития неустойчивости Рэля–Тейлора в 2D и 3D геометрии		
6.1.	Постановка расчётов	105
6.2.	Результаты моделирования	107
6.3.	Выводы к Главе 6	112

Заключение	113
Литература	115
Приложение А. Линейный анализ неустойчивости Рэля–Тейлора. Вычисление циркуляции скорости	139
Приложение Б. Вычисление инкрементов неустойчивости Кельвина–Гельмгольца	143

Введение

Актуальность работы. Основным объектом исследований в данной работе являются гидродинамические неустойчивости. Для лазерных мишеней существенными оказываются неустойчивость Рэлея–Тейлора (далее НРТ), абляционная неустойчивость, неустойчивость Рихтмайера–Мешкова. Интерес в этих случаях представляет рост возмущений начиная с линейной стадии и вплоть до стадии развитого перемешивания.

Хорошо известно, что НРТ наблюдается в широком диапазоне астрофизических, атмосферных, океанических и геофизических явлений, играет решающую роль во многих инженерных приложениях. Одним из таких приложений является лазерный термоядерный синтез (далее ЛТС), идея которого заключается в быстром и близком к сферически-симметричному сжатию термоядерного топлива. Пожалуй, ключевой здесь является “симметрия сжатия”, т.к. основным препятствием на пути к достижению горения являются разного рода неустойчивости, порождаемые неоднородностью освещения, шероховатостью оболочек самой мишени, ошибками в профилировании лазерных импульсов и т.д., которые, развиваясь, снижают эффективность сжатия [1–6]. Перемешивание имеет далеко идущие последствия, меняя свойства веществ и физику протекающих явлений.

В последние годы исследования задач ЛТС получили новый мощный толчок, стимул к дальнейшему более тщательному изучению всех аспектов сжатия мишеней, после того как на самой мощной на сегодняшний день действующей лазерной установке NIF зажигание, намеченное на октябрь 2012 года, достигнуто не было [7, 8]. Важно, что чуть ранее было принято решение о строительстве российской лазерной установки мегаджоульного уровня и реализации отечественной программы по лазерному термоядерному синтезу [9].

При всех существующих на сегодняшний день пробелах в понимании и описании физических процессов, протекающих при сжатии термоядерных мишеней, нельзя отрицать, что в последние десятилетия были достигнуты значительные успехи в исследованиях задач ЛТС. Оставаясь в рамках основной цели данной работы, заключающейся в изучении влияния различных факторов на развитие гидродинамических неустойчивостей и перемешивания, отметим, что в этом направлении также наблюдается прогрессивное движение. Помимо описания развития малых возмущений, появились асимптотические модели для описания динамики струй и пузырей, был произведён учёт сжимаемости веществ в рамках этих подходов, исследованы различные стабилизирующие факторы, такие как поверхностное натяжение, вязкость, конвективный снос вещества через абляционную поверхность и т.д. В рамках классической теории возмущений произведён учёт следующих членов в разложениях, что позволяет включить в рассмотрение слабонелинейную стадию развития возмущений, а также затронуть вопрос о взаимодействии мод. Для стадии развитого турбулентного перемешивания появились различные многопараметрические модели. Значительные успехи были достигнуты в численном моделировании перемешивания, индуцированного неустойчивостями. Несмотря на это, ещё много вопросов по-прежнему остаются без ответов. Так, например, нет полной теории, описывающей переход от линейной стадии к нелинейной. Также необходимо дальнейшее изучение эффектов сжимаемости, диффузии, сходящейся геометрии и влияния начальных условий, особо заметно проявляющих себя в лазерных мишенях. Исследование зависимости скорости роста неустойчивости от любого из этих факторов на поздних временах является важной задачей, т.к. возникающие впоследствии длинноволновые возмущения не могут быть устранены в экспериментах и могут оказывать негативное воздействие на процесс сжатия мишени.

Некоторые из вышеобозначенных проблем более подробно изложены ни-

же.

Цель диссертационной работы состоит в исследовании влияния начальных условий на явление гравитационного перемешивания разноплотных веществ, а также выяснение особенностей протекания процессов, связанных с учётом сжимаемости (конечной скорости распространения возмущений и стратифицированности) применительно к задачам ЛТС. Для достижения поставленных целей, во-первых, была проведена верификация разработанного ранее эволюционного подхода [10] на новых прецизионных данных, а также были предложены варианты его модификации для учёта различного вида начальных возмущений и сопутствующих перемешиванию физических эффектов, таких как наличие градиента плотности, асимметрии развития струй и пузырей и т.д. Во-вторых, в связи с необходимостью проведения численных расчётов в совокупности с теоретическими исследованиями, была проведена переработка численного кода NUT с использованием технологии CUDA для реализации возможности параллельного исполнения на GPU-устройствах для достижения максимальной скорости получения результатов моделирования при значительных требованиях к их точности.

Научная новизна. В рамках выполнения данной работы был проведён комплексный анализ влияния различных факторов на перемешивание, наблюдаемое при лазерном сжатии термоядерных мишеней. Был скорректирован и улучшен развитый ранее [10] теоретический подход для описания эволюции возмущений: впервые было проанализировано влияние конечного градиента плотности в рамках данного подхода и учтена асимметрия развития струй и пузырей. На основании проведённых исследований была предложена новая формулировка закона роста ширины зоны перемешивания, которая намного лучше передаёт закономерности, наблюдаемые в численных и натурных экспериментах. При этом были выявлены новые особенности развития многомодовых возмущений при сравнении их динамики в 2D и 3D геометрии.

Проделанный анализ сопровождался проведением большого количества численных расчётов. Для более эффективного выполнения моделирования задач перемешивания была реализована параллельная версия программы, использующая графические ускорители, в двух различных вариантах. На гибридном кластере К-100 ИПМ им. М.В. Келдыша было проведено сравнение этих вариантов и определено ускорение вычислений, получаемое относительно последовательной версии программы. Также была определена оптимальная программная конфигурация для расчётов на прямоугольных сетках при моделировании задач гравитационного перемешивания.

Практическая значимость. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для описания и анализа экспериментальных данных, для выполнения физически адекватных оценок скорости роста возмущений, опираясь на данные об их параметрах на начальный момент времени. Представленная реализация параллельного алгоритма позволяет в разы быстрее проводить численное моделирование различных задач по исследованию развития контактных, сдвиговых и других неустойчивостей, чем последовательная версия. Также проведение расчётов на кластере позволяет оперировать значительно большими объёмами данных, чем это доступно на современных персональных компьютерах.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Исследование влияния начальных возмущений на поздние стадии процесса развития НРТ, позволившее установить существование ограничения на вид начальных возмущений, при которых возможна реализация автономного режима.
2. Развитие теоретического подхода для описания эволюции перемешивания в результате действия НРТ, а именно, включение в рассмотрение и исследование влияния на параметры модели: а) наличия конечного градиента

плотности между веществами, б) асимметрии развития струй и пузырей, в) возможности развития азимутальных мод.

3. Уточнение параметров эволюционной теории, определяющих законы роста зоны перемешивания, для учёта более сложных трёхмерных ситуаций (нарушение осевой симметрии цилиндрических струй, случайный характер начальных возмущений и т.д.).
4. Проведение вычислительных экспериментов и теоретических оценок для выяснения степени влияния сжимаемости веществ на динамику развития НРТ на линейной и нелинейной стадиях для диапазонов параметров, присутствующих лазерным мишеням.
5. Создание и реализация параллельной программы для проведения расчётов по перемешиванию на графических ускорителях (GPU).

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих российских и международных конференциях и семинарах:

- XLI Международная (Звенигородская) конференция по физике плазмы и УТС, Звенигород, 10–14 февраля, 2014.
- International conference Turbulent and Wave Processes, Moscow, Russia, 26–28 November, 2013.
- Mathematical Modelling and Computational Physics, Dubna, Russia, 6–12 July, 2013.
- XV Харитоновские тематические научные чтения, Саров, Россия, март, 2013.
- The 13th International Workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing, Woburn, UK, July, 2012.
- XXXIX Международная (Звенигородская) конференция по физике плазмы и УТС, Звенигород, 6–10 февраля, 2012.
- V Всероссийская школа для студентов, аспирантов, молодых учёных и спе-

циалистов по лазерной физике и лазерным технологиям, Саров, Россия, апрель, 2011.

- The 12th International Workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing, Moscow, Russia, July, 2010.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 14 печатных работах [11–24], из них 2 статьи в рецензируемых журналах [11, 12], 1 статья в сборниках трудов конференций [13] и 11 тезисов докладов [14–24].

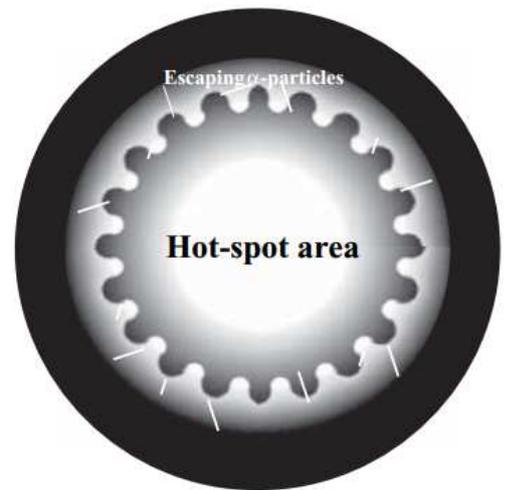
Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 6-ти глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации составляет 149 страниц. Библиография включает 184 наименования на 23 страницах.

Глава 1

Обзор литературы

Идеальное сжатие мишени при лазерном термоядерном синтезе должно быть точно сферически симметричным. Если данный процесс отклоняется от сферической симметрии, то эффективность сжатия капсулы с термоядерным горючим может снижаться несколькими путями. Например, уменьшается доля кинетической энергии движущейся к центру оболочки преобразованной во внутреннюю энергию топлива, тем самым снижая его максимально достижимую плотность. В высокоэффективных мишенях, поджигаемых высокоэнтропийной центральной областью (“hot-spot” или “горячий центр”), это может привести к увеличению поверхности, через которую горячий центр теряет энергию за счёт теплопроводности. Увеличенная поверхность также позволяет α -частицам, образовавшимся в результате реакции слияния, покидать центральную область мишени, в дальнейшем препятствуя её самонагреву [25, 26].



Схематически данный процесс изображен на Рис. 1.1. В некоторых случаях асимметрия может приводить к разрушению оболочки мишени или к зарождению гидродинамической турбулентности на малых пространственных масштабах. Турбулентность в свою очередь может вызвать отрицательные эффекты, такие как турбулентный поток массы, импульса и энергии в направлениях, которые могут нарушить хорошо организованную структуру сжимающейся капсулы [27–29].

Рис. 1.1. Схематичное изображение уменьшения самонагрева горячего центра из-за преждевременно покидающих эту область α -частиц.

ЛТС сжатие, как реальное, так и идеальное, сопровождается воздействием различных гидродинамических неустойчивостей. Неустойчивости могут стать причиной роста возмущений от амплитуд, казавшихся незначительными на первый взгляд, до уровня, способного существенно нарушать структуру течения. Неустойчивости сами по себе не являются источниками начальных возмущений. Напротив, данные неточности возникают из ограничений на возможности по конструированию идеально сферически симметричных оболочек, по производству идеально равномерно распределенных лазерных лучей или по созданию идеально симметричных полей теплового излучения в хольрауме. Например, причиной развития неустойчивостей являются небольшие возмущения поверхности капсулы, вызванные шероховатостями кристаллической структуры вещества, из которого она сделана, или обработкой в ходе технологического процесса. В качестве другого примера можно привести интерференционную картину в точке фокусировки лазерного луча, которая может оставить след на изначально гладкой поверхности мишени, облучаемой лазером.

Понятно, что в прямых и непрямых схемах сжатия мишени подвержены влиянию неустойчивостей в разной степени вследствие того, что при прямом сжатии мишень облучается конечным числом пучков, в то время как рентгеновское освещение в непрямых схемах приводит к более равномерному полю излучения. Однако преждевременно называть непрямые схемы менее предрасположенными к неустойчивостям – для них также необходимо избегать возмущения от неравномерности облучения.

Таким образом, причины несоблюдения симметрии и, как следствие, развития различных типов неустойчивостей просто отражают неизбежные отклонения в реальных экспериментах от идеализированных теоретических формулировок. Неустойчивости в свою очередь могут стать причиной роста этих неточностей до размеров, которые могут иметь серьёзные последствия

для ЛТС сжатия. Так, например, если предположить, что оболочка с начальным радиусом R и скоростью v ($v \equiv v_{impl}$) имеет на своей поверхности области с возмущением скорости δv , тогда отклонение от сферичности за время сжатия можно оценить выражением $\delta R = \delta v \cdot t \approx \delta v \frac{R}{v}$. Если потребовать, чтобы данное отклонение было меньше, чем $\frac{1}{2}r$, где r - конечный радиус сжатой мишени, то

$$\frac{\delta v}{v} < \frac{1}{2} \frac{r}{R}, \quad (1.1)$$

где значения для $\frac{R}{r}$ могут находиться в диапазоне от 30 до 40. В этом случае величина допустимой неоднородности скорости сжатия составляет около 1 % [25, 30]. Аналогичные ограничения могут быть сформулированы и для других параметров сжатия [31–34]. Столь высокие требования к однородности требуют глубокого понимания и подробного изучения эволюционных характеристик имеющих место неустойчивостей.

Чаще всего в ЛТС мы будем сталкиваться с обобщенной формой неустойчивости Рэля–Тейлора (НРТ), которая в классической постановке возникает в случае, если два полубесконечных слоя несжимаемых жидкостей различной плотности (изначально неподвижных), где более плотная жидкость расположена над менее плотной, находятся в гравитационном поле [35, 36]. Если контактная граница слоёв возмущена, т.е. не является точно горизонтальной, то НРТ начинает развиваться, вовлекая в движение всё новые и новые области течения, пока пузырьки менее плотной жидкости не начинают подниматься сквозь плотную жидкость, в то время, как струи более плотной жидкости всё больше погружаются в менее плотную. Как известно, рост амплитуды малых возмущений поверхности даётся выражением вида $e^{\gamma t}$, где

$$\gamma^2 = kgA, \quad (1.2)$$

– инкремент НРТ, $A = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ – число Атвуда, g – ускорение свободного

падения, k – волновое число. Подробные выкладки приведены в Приложении А. НРТ в классической “гравитационной” форме не встречается в задачах ЛТС, поскольку сила тяжести не играет никакой роли в ЛТС сжатия (временные и пространственные масштабы слишком малы). Однако, ускоряющие и замедляющие силы, порождаемые градиентами давления, воздействуют на оболочку мишени аналогично силам тяжести, и возникающие гидродинамические явления для всех задач ЛТС эквивалентны НРТ. В [37] показано, что развитие неустойчивости происходит, когда градиенты давления и плотности противоположно направлены, т.е. $\nabla p \cdot \nabla \rho < 0$. В основном это имеет место на двух стадиях сжатия [31]:

1. На внешней поверхности оболочки мишени во время её ускорения мало-плотным абляционным слоем – так называемая абляционная неустойчивость,
2. На внутренней поверхности оболочки мишени во время её торможения горячим центром, находящимся под высоким давлением – НРТ.

Абляционная неустойчивость отличается от классической НРТ наличием потока вещества из более плотного слоя через поверхность абляции в область испарённого вещества с меньшей плотностью. Предположим, что возмущения в плотном слое развиваются классически как e^{-kz} (ось z направлена наружу в сторону разряжения плазмы) и $e^{\gamma t}$. Рассмотрим ситуацию через время Δt . В этом случае за счёт движения контактной границы со скоростью v_a прирост амплитуды возмущения будет меньшим – вместо $e^{\gamma \Delta t}$ имеем $e^{(\gamma - kv_a)\Delta t}$ (см. рис. 1.2). Для проведения более точной оценки можно аппроксимировать область энерговыделения разрывной начальной скоростью течения [39]:

$$\mathbf{v}_0 = \begin{cases} -v_{abl} \mathbf{e}_z, & z < 0, \\ 0, & z > 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

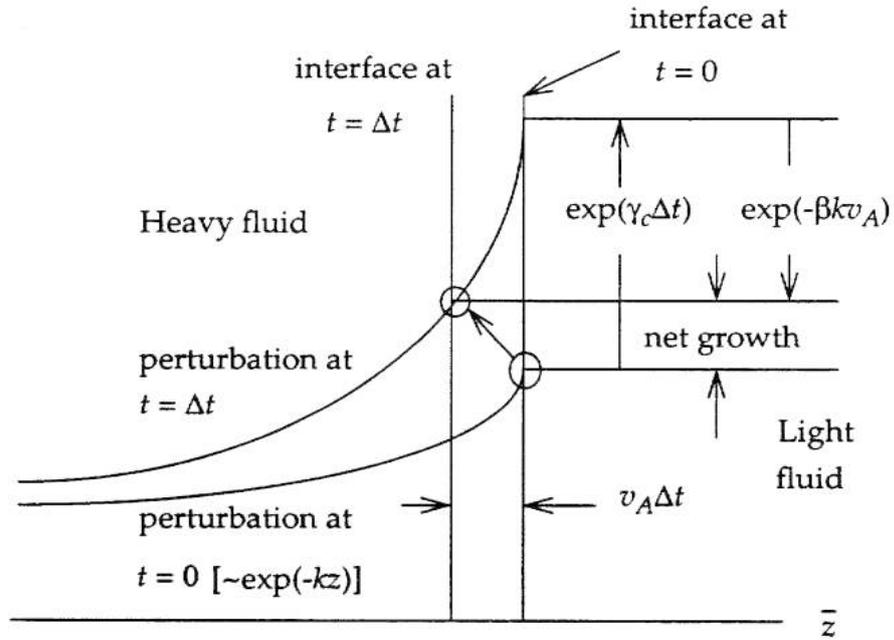


Рис. 1.2. Стабилизирующий абляционный эффект. Эвристическая схема из работы [38].

где v_{abl} – скорость движения аблятора. Тогда, повторяя линейный анализ, подобный представленному в Приложении А (сохраняя члены с v_0 и опуская члены с g), получаем

$$\gamma = \sqrt{kg_0A} - \frac{kv_{abl}}{4} + \frac{1}{\sqrt{kg_0A}} \left(\frac{kv_{abl}}{4} \right)^2 + \dots, \quad (1.4)$$

где $g_0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial z}$, $\sqrt{kg_0A} \gg kv_{abl}/4$, $p_0(z)$ и $\rho_0(z)$ – невозмущенное давление и плотность. Несмотря на то что данное выражение является приближенным, поскольку не учитывает нагрева и обмена энергией, изменение уравнения состояния и т.д., оно напоминает более точное соотношение, полученное в работе [40]:

$$\gamma = \alpha \sqrt{kg_0} - \beta kv_a. \quad (1.5)$$

Здесь v_a обозначает скорость изменения испаренной с единицы поверхности массы отнесенной к плотности на поверхности абляции, т.е. $\frac{1}{\rho} \frac{\partial m}{\partial t}$, а v_{abl} – предельная достигнутая скорость аблятора далеко от поверхности абляции. Из (1.5) видно, что наличие абляции снижает скорость роста неустойчивости,

причём в большей степени для коротковолновых возмущений. В действительности существует предельное значение, начиная с которого все моды являются устойчивыми.

Переход от одной жидкости к другой не всегда имеет резкую границу. Намного чаще имеет место конечная ширина перехода. Наличие градиента плотности является ещё одним стабилизирующим фактором. Приведем простую оценку. При наличии скачка плотности на контактной границе возмущения затухают как $e^{-k|z|}$, образуя эффективный слой шириной порядка $1/k$. Предположим, что плотность изменяется как $e^{z/L}$, где L - некий пространственный масштаб, тогда эффективные плотности можно записать в виде

$$\rho_{1,2} = e^{\pm 1/kL}. \quad (1.6)$$

При этом эффективное число Атвуда примет вид $A = \tanh(1/kL)$, а инкремент $\gamma = \sqrt{gk \tanh(1/kL)}$. Для длин волн, много меньших масштаба градиента плотности, т.е. $kL \gg 1$, эффективное число Атвуда стремится к нулю, а инкремент к $\sqrt{g/L}$ (максимальный стабилизирующий эффект). В противоположном случае, когда масштаб возмущений значительно больше масштаба градиента плотности ($kL \ll 1$), эффективное число Атвуда стремится к единице, а инкремент к \sqrt{gk} , т.е. эти моды не “чувствуют” наличия градиента. Другое выражение было получено в работе [41] в форме:

$$\gamma = \sqrt{\frac{kgA}{1 + kL}}, \quad (1.7)$$

однако, оно также является приближенным, поскольку выбранная в [41] зависимость $\rho(z)$ не даёт непрерывного перехода от одной жидкости к другой. Более точный вид для инкремента получен в [42]:

$$\frac{\gamma^2}{g} = \frac{2edk}{x^2 + e^2 + d^2}, \quad (1.8)$$

где $e = kT$, $d = T/(2L)$, T - толщина слоя, такая, что $\rho_1 = \rho_2 e^{T/L}$, x является

решением трансцендентного уравнения $\tan(x) = \frac{2xe}{x^2 + d^2 - e^2}$. В [43] получено удовлетворительное согласие (1.8) и (1.7) при замене в формуле (1.7) kL на kLA . Экспериментальное исследование факта влияния переходного слоя на развитие НРТ представлено в работах [44, 45].

Легко объединить два стабилизирующих эффекта, описанных выше (см формулы (1.5) и (1.7)), в одном выражении [38, 46]:

$$\gamma = \sqrt{\frac{kgA}{1 + kL}} - \beta kv_a, \quad (1.9)$$

β изменяется в диапазоне от 1 до 5. Формула (1.9) применима только для малых возмущений с амплитудой много меньшей длины волны.

Ещё одним фактором, представляющим некоторый интерес при исследовании развития НРТ в задачах сжатия термоядерных мишеней, является конечная толщина оболочек. Предполагая, что оболочка с плотностью ρ_1 и толщиной h ускоряется в пустоту жидкостью с плотностью ρ_2 , и следуя линейному анализу (по аналогии с Приложением А), получаем инкремент в виде [47, 48]:

$$\gamma^2 = kg \frac{\rho_1 - \rho_2}{\coth(kh) \rho_1 + \rho_2}. \quad (1.10)$$

При $h \rightarrow \infty$ имеем классический инкремент НРТ, при $kh \lesssim 1$ значение $\coth(kh)$ близко к 1 и конечная ширина оболочки не имеет значительного влияния на скорость роста возмущений.

Также значимыми эффектами при сжатии лазерных мишеней являются сходящаяся геометрия и сжимаемость веществ. Дадим краткий обзор работ, посвящённых данной проблеме, а к подробному рассмотрению влияния сжимаемости ещё раз вернёмся в Главе 3 данной работы. Влияние сходящейся геометрии на развитие малых возмущений принято называть эффектом Белла–Плессета (Bell–Plesset, далее ВР-эффект) по первым работам, посвящённым данной проблематике [49, 50]. В них было определено условие развития неустойчивости, имеющее более широкий диапазон значений, чем для

плоского случая классической НРТ. Белл в своей работе [49] также предпринял попытку включить в рассмотрение помимо сходящейся геометрии ещё и сжимаемость веществ, переписав уравнение непрерывности через потенциал скоростей в виде $\Delta\varphi = -\frac{\dot{\rho}}{\rho}$ (где $\mathbf{v} = \nabla\varphi$). Много позже его подход был расширен и доработан в [51]. Основное отличие состоит в выборе потенциала скоростей, который не имеет особенностей при $r \rightarrow 0$ и тем самым не порождает источника или стока массы в центре. На основе представленного анализа было показано, что конечная сжимаемость веществ приводит к снижению влияния ВР-эффекта. Также одной из важных для понимания аспектов сжимаемости и сходящейся геометрии, на наш взгляд, является работа [52], в которой приводится детальное описание ВР-эффектов в терминах простого подхода, основанного на понятии массовой амплитуды возмущения. Введя понятия скорости сжимаемости как $\gamma_\rho = \frac{\dot{\rho}_1}{\rho_1} = \frac{\dot{\rho}_2}{\rho_2}$, а скорости сходимости как $\gamma_R = \frac{\dot{R}}{R}$ и проводя дальнейший анализ, возможно записать дифференциальные уравнения для нахождения массовой амплитуды возмущений:

$$\left(-\gamma_\rho + \frac{d}{dt}\right) \frac{dz_l}{dt} = \gamma_0^2 z_l \quad (1.11)$$

– для плоской ($z_l = a_l \rho$ и $\gamma_0^2 = Ak g_p$) и цилиндрической ($z_l = a_l \rho R$ и $\gamma_0^2 = \frac{l}{R} A g_p$) геометрии, $g_p = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(R, t)}{\partial x}$ – ускорение, a_l – амплитуда возмущения,

$$\left(-\gamma_\rho - \gamma_R + \frac{d}{dt}\right) \frac{dz_l}{dt} = \gamma_0^2 z_l \quad (1.12)$$

– для сферической ($z_l = a_l \rho R^2$ и $\gamma_0^2 = \frac{l(l+1)}{R} \frac{\rho_1 - \rho_2}{l\rho_1 + (l+1)\rho_2} g_p$ [53]) геометрии. Если предположить, что γ_ρ , γ_R и γ_0 являются константами, то легко получить обобщенные инкременты:

$$\gamma_\pm = \frac{1}{2}\gamma_\rho \pm \sqrt{\gamma_0^2 + \frac{1}{4}\gamma_\rho^2} \quad (1.13)$$

– для плоской и цилиндрической геометрии,

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{2}(\gamma_{\rho} + \gamma_R) \pm \sqrt{\gamma_0^2 + \frac{1}{4}(\gamma_{\rho} + \gamma_R)^2} \quad (1.14)$$

– для сферической геометрии. Однако, упомянутые параметры не обязаны быть постоянными, что приводит к более сложным условиям устойчивости и инкрементам, зависящим от времени. Для выяснения характера и происхождения, а также для демонстрации широкого разнообразия ВР-эффектов полезно рассмотреть два предельных случая: 1 – малые значения НРТ-инкремента (безускорительный случай), т.е. $\gamma_0 \ll \gamma_{\rho}, \gamma_R$ (или $\gamma_0 = 0$); 2 – быстро развивающаяся НРТ, т.е. $\gamma_0 \gg \gamma_{\rho}, \gamma_R, \dot{\gamma}_0 \gg \gamma_0^2$. В первом случае каждое решение в паре решений для уравнений (1.11) и (1.12) имеет различные масштабные факторы за счёт ВР-эффектов, и только одно решение демонстрирует постоянную массовую амплитуду. Решение с постоянной массовой амплитудой легко изобразить графически. Пример приведён на рис. 1.3 для сферической геометрии в отсутствие сжимаемости и при равномерном сжатии. Во втором предельном случае в силу быстрого роста возмущений за счёт НРТ ВР-эффекты становятся идентичными для решений в паре, однако менее интуитивно предсказуемыми, чем в первом случае. Основным выводом из приведённых примеров является то, что значимость ВР-эффектов варьируется в зависимости от предположений о сжимаемости веществ и является чувствительной к начальным условиям.

В дальнейшем были предприняты попытки расширить выработанный подход для учёта наличия конечного градиента плотностей между веществами [55], для описания слабонелинейной стадии [56] и

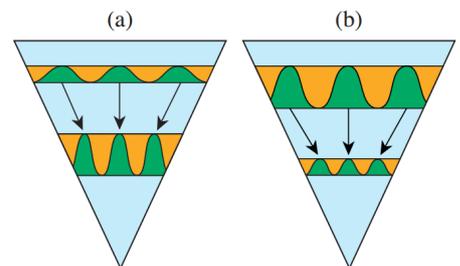


Рис. 1.3. Схематическое изображение возмущенной поверхности из [54]: (а) – несжимаемый случай, $\frac{d\rho}{dt} = 0$, (б) – случай равномерного сжатия, $\frac{d}{dt}(\rho R^3) = 0$.

поведения пузырей [57].

Другими важными неустойчивостями в задачах ЛТС являются неустойчивость Рихтмайера–Мешкова (НРМ) и неустойчивость Кельвина–Гельмгольца (НКГ). НРМ возникает при прохождении ударной волны через контактную поверхность (границу), разделяющую вещества с различными плотностями, в направлении перпендикулярном ей [58, 59]. Если контактная граница возмущена и, например, имеет форму $a_0 \cos(kx)$, а ударная волна движется из лёгкой жидкости в тяжелую, то во впадине возникает избыток давления в лёгкой жидкости и недостаток в тяжелой, а на холме – наоборот.

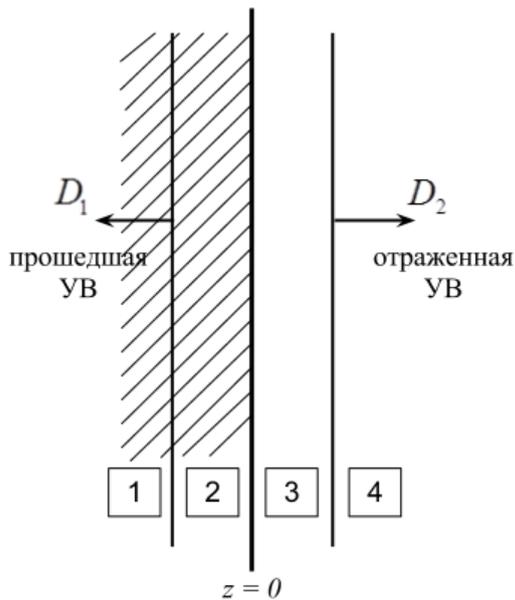


Рис. 1.4. Схематическое изображение постановки задачи о развитии НРМ. Заштрихованная область – тяжелая жидкость, область без штриховки – легкая жидкость.

Если в выражении (1.15) заменить $g(t)$ на $\Delta u \delta(t)$, $t > 0$, где Δu – скачок скорости на контактной поверхности, порождаемый ударной волной, то после интегрирования получаем:

$$\frac{da}{dt} = k \bar{A} \Delta u \bar{a}_0, \quad (1.16)$$

здесь \bar{A} вычисляется с использованием значений плотностей после прохожде-

Таким образом возникают силы, приводящие к росту возмущения границы. Несмотря на то что процесс взаимодействия ударной волны с контактной границей по своей сути является сжимаемым, НРМ также может быть получена с помощью импульсного ускорения двух несжимаемых жидкостей/газов. В связи с этим НРМ часто называют импульсной неустойчивостью Рэля–Тейлора. В [36] для амплитуды возмущения была получена простая формула

$$\frac{d^2}{dt^2} a(t) = kg(t)a(t) \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (1.15)$$

ния отражённой и прошедшей ударных волн, а \bar{a}_0 – амплитуда возмущения сразу после прохождения ударной волной контактной границы. Также существуют работы [60], где проводится изучение совместного действия постоянного и импульсного ускорения, т.е. $\Delta u \delta(t) + g$.

НКГ возникает в случае наличия относительного движения слоёв одной жидкости, либо в случае относительного движения двух жидкостей различной плотности вдоль их контактной границы [61, 62]. Такое движение является неустойчивым и приводит к возникновению вихрей, которые вовлекают жидкости в характерное вихревое течение. Случай совместного действия гравитационной и сдвиговой неустойчивости более подробно рассмотрен в разделе 4.1. Здесь лишь отметим, что в этом случае согласно линейной теории малые возмущения развиваются быстрее, чем если бы они развивались вследствие только НРТ или только НКГ. Также рост возмущений под действием НКГ может происходить вдоль поверхности струй более тяжёлой жидкости, проникающих в более легкую жидкость, при развитии НРТ. Подробное исследование этого случая приведено в разделе 4.2, а соответствующие инкременты вычислены в Приложении Б.

Другим обстоятельством, которое приводит к развитию НКГ, является прохождение ударной волны через контактную границу в направлении под некоторым углом к нормали. Учёт поверхностного натяжения приводит к стабилизации: также как и в случае с абляционной неустойчивостью, появляется диапазон волновых чисел, для которых сдвиговое движение будет являться устойчивым [63].

Обозначенные выше неустойчивости проявляются в большом количестве природных и техногенных явлений. ЛТС является одной из множества областей, в которых неустойчивости играют важнейшую, если не определяющую, роль. В последние годы мишени притягивают к себе внимание не только с точки зрения создания управляемой термоядерной реакции, но и как воз-

возможность для исследования недостижимых астрофизических объектов [64–72]. Несмотря на огромные различия в масштабах времени и пространства и других параметрах между астрономическими явлениями и лабораторными средами, идея лабораторного моделирования основана на том, что обе эти системы описаны чистой или магнитной гидродинамикой. Таким образом, опираясь на законы подобия [73], можно сказать, что существует сходство [74].

Всё сказанное до сих пор относится только к линейной стадии процесса развития НРТ и смежных неустойчивостей. Однако, при сжатии мишеней рост возмущений может выходить за рамки линейной теории. Опишем характерную картину перехода от экспоненциального роста к стадии развитой турбулентности. В основном выделяют три последовательных этапа [38, 75, 76]:

1. Линейная стадия, ограничена интервалом амплитуд возмущения $0 \leq \eta \leq 0.1\lambda$, где η – амплитуда возмущения. На этой стадии возмущение растёт симметрично вверх и вниз согласно закону $\eta \approx \eta_0 \exp(\gamma t)$, где γ даётся формулой (1.2)
2. Следующая стадия ограничена интервалом амплитуд $0.1\lambda \leq \eta \leq 0.4\lambda$. Характеризуется образованием пузырей в сторону тяжёлого вещества и струй в сторону лёгкого. При этом пузыри начинают расти по закону $\eta_b \sim \sqrt{g\lambda t}$, а струи $\eta_s \sim gt^2$.
3. Последняя стадия характеризуется разрушением регулярной структуры в силу общей неустойчивости течения: струи будут разрушаться под действием НКГ [10], а пузыри в процессе всплывания будут объединяться [77].

Также в некоторых работах [78, 79] используется несколько иное, более детализированное, представление процесса развития НРТ, содержащее большее количество стадий.

Линейный анализ основывается на предположении о малости амплитуды возмущения, т.е. степени, в которой величины первого порядка малы по сравнению с величинами нулевого порядка. Однако, если экспоненциальный рост, который характеризует линейную стадию, сохраняется достаточно долго, то предположение о малости амплитуды будет нарушаться при любых начальных возмущениях. Выход развития неустойчивости за пределы линейной стадии принято называть насыщением. Ещё одним следствием развития неустойчивости является тот факт, что отдельные моды возмущения контактной границы, развивавшиеся независимо на линейной стадии, начинают “ощущать” присутствие друг друга. Это взаимодействие принято называть слиянием мод.

Описанный выше переход от линейной стадии к стационарному течению второй стадии рассматривается значительным числом различных моделей. Остановимся на них здесь более подробно, так как развиваемая и улучшаемая авторами данной работы теория [10, 11, 80] также затрагивает данный временной интервал, распространяя своё описание далее, вплоть до стадии развитого перемешивания. Подход для определения момента насыщения в полном спектре был предложен в работе [81] (*Haan saturation model*). Основная идея заключается в том, что насыщение линейного роста в полном спектре происходит, когда среднеквадратичная амплитуда достигает значения $\zeta\lambda$. Параметрами модели являются ζ – пороговое значение амплитуды одиночной моды исходя из оценки, что линейная стадия определяется соотношением $\eta \ll \zeta\lambda$, и ϵ – диапазон волновых векторов, в котором гармоники в течение продолжительного времени находятся в фазе. Модель предполагает, что если мы рассматриваем диапазон мод с волновыми векторами, расположенными вокруг вектора \mathbf{k} , то взаимодействующие моды \mathbf{k}' будут определяться соотношением $|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| < \epsilon k$. Это означает, что такие моды образуют круг с центром в \mathbf{k} и радиусом ϵ в пространстве волновых векторов. Эти моды

объединяются, чтобы создать физическую структуру со среднеквадратичной амплитудой (будем обозначать её через σ) и длиной волны, приблизительно равной $\lambda = 2\pi/k$. Ожидается, что структура насытится при $\sqrt{2}\sigma \approx \zeta\lambda$, где $\sqrt{2}$ трансформирует среднеквадратичную амплитуду в максимальную. В терминах амплитуд индивидуальных мод $S(k)$ для σ можно записать:

$$\sigma^2 = \sum_{|\mathbf{k}' - \mathbf{k}| < \epsilon k} S^2(k') \approx N(k, \epsilon) S^2(k) \approx A(k, \epsilon) D(k) S^2(k), \quad (1.17)$$

где $N(k, \epsilon)$ – число мод в круге в k -пространстве, $A(k, \epsilon)$ – область, занимаемая кругом, $D(k)$ – плотность мод. Если предположить, что и имеет место плоская геометрия, $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$, то $D(k) = \frac{L^2}{(2\pi)^2}$, $A(k, \epsilon) = 2\pi (\epsilon k)^2$.

Таким образом

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2\pi} (\epsilon k L)^2 S^2(k)}. \quad (1.18)$$

Для амплитуды в момент насыщения получаем

$$S(k) = \frac{\nu}{Lk^2}, \quad (1.19)$$

где $\nu = 2\pi^{3/2} (\zeta/\epsilon)$. Исходя из основ представленной модели, можно ожидать значение ν в диапазоне от 1 до 10, сравнение с результатами численного моделирования даёт более узкий диапазон – от 2 до 4.

Полученный результат можно обобщить на случай сферической геометрии. Для сферы радиуса R и сферической гармоники l волновой вектор определяется выражением:

$$k^2 = l(l+1)/R^2 \approx l^2/R^2 \quad (1.20)$$

и

$$S(l) \approx \frac{\nu R}{l^2}. \quad (1.21)$$

Ещё одним элементом данной модели является определение поведения моды после того, как её амплитуда достигла порогового значения $S(k)$. Сле-

дую работе [82], амплитуду можно представить в виде:

$$\eta_s(k, t) = S(k) \left[1 + \ln \frac{\eta_{lin}(k, t)}{S(k)} \right]. \quad (1.22)$$

Скорость роста насыщенной моды в этом случае постоянна и равна:

$$\frac{d\eta_s}{dt} = S(k)\gamma, \quad (1.23)$$

где $\gamma = \frac{1}{\eta_{lin}} \frac{d\eta_{lin}}{dt}$. В другой своей работе [83] Наан проверил предположения, сделанные ранее, основываясь на решении 2-го порядка для многомодового классического развития НРТ. В результате были получены выражения, отражающие взаимодействие гармоник друг с другом, а также то, что для достаточно больших начальных амплитуд длинноволновых мод слияние мод не доминирует при рассмотрении их эволюции на временах до насыщения.

В других работах, например в [84], представлено решение вплоть до 3-го порядка по малым возмущениям, что позволило описать начальную стадию формирования пузырей, а также показать нетривиальную зависимость развития структур от числа Атвуда, являющуюся результатом двух физических процессов – НКГ и действия выталкивающей силы. В работе [85] на основе анализа локальной структуры возмущения определяется насыщение линейного роста, а также скорость роста на слабонелинейной стадии. Для амплитуды насыщения были получены выражения, схожие с (1.19), однако зависящие от формы возмущения и разноплотности веществ. Также, в отличие от модели Наан'а, коэффициент пропорциональности не является постоянным, а зависит от начальных условий.

Далее рассмотрим вторую стадию. В [86] впервые было предложено использовать теорию потенциального течения для описания поведения одиночного пузыря на нелинейной стадии. В [87] была использована похожая модель (модель Лайзера) для описания течения около вершины пузыря. Получившиеся уравнения для определения положения, скорости и радиуса кривизны

вершины пузыря были аналитически решены в [88]. Асимптотическое значение скорости вершины пузыря для таких моделей может быть записано в виде:

$$V_b = C\sqrt{g\lambda}. \quad (1.24)$$

Здесь следует напомнить, что данный результат был получен для чисел Атвуда близких к 1, т.е. для больших значений разности плотностей. Также интересным представляется тот факт, что на данной стадии начинает сказываться геометрия задачи, т.е. константа C различна для 2D и 3D случаев. Проблема влияния геометрии задачи на развитие НРТ будет подробно освещена в Главе 6. Из (1.24) видно, что большие пузыри растут быстрее маленьких. Данное поведение противоположно поведению на линейной стадии, когда коротковолновые возмущения растут быстрее длинноволновых. В дальнейшем модель Лайзера [87] была расширена на случай струй [89] и модифицирована для описания эволюции пузыря через слой конечной толщины [90]. Другие модели [91, 92] были развиты для произвольных чисел Атвуда и дают

$$V_b \propto \sqrt{\frac{2A}{1+A}g\lambda}. \quad (1.25)$$

Обособленно стоит модель, представленная в [93] и использующая лагранжеву формализм для изучения эволюции одиночной моды на нелинейной стадии. Как оказалось, даже при грубой аппроксимации формы возмущения данный подход дает верные временные пропорциональности для асимптотического поведения струй и пузырей, однако соответствующие численные коэффициенты должны быть уточнены дополнительно.

Другого рода модели, основывающиеся на анализе симметрии течения и соответствующих групповых свойствах, были предложены в работах [94–96]. Групповой подход строго подчиняется законам сохранения и позволяет изучать наряду с глобальными локальные свойства НРТ, такие как динамика фронта пузырей, формирование структур в течении и т.д. Групповой анализ

включает в себя концепцию когерентных структур и показывает, что требования устойчивости и изотропии значительно ограничивают число возможных конфигураций течения, которые могут реализоваться. Более того, существуют специальные симметрии, в которых рост горизонтального масштаба может быть не осуществим и течение остаётся регулярным [97, 98]. Различные численные исследования [99, 100] демонстрируют сходные результаты.

При дальнейшем рассмотрении развития НРТ принято считать, что происходит слияние пузырей с образованием более крупных структур. Однако здесь возможен и иной вариант, когда смена масштабов течения происходит вследствие иных физических механизмов и связана с наличием длинноволновых составляющих в начальном возмущении. Что касается струй, то на этом этапе происходит их разрушение за счёт развития сдвиговых неустойчивостей. Так или иначе система переходит в стадию развитого перемешивания, на которой, опять же при выполнении некоторых условий, возможна реализация автомодельного режима течения, при котором фронты струй и пузырей движутся ускоренно по закону

$$\eta_i = \alpha_i A g t^2, \quad (1.26)$$

где $i = 0$ соответствует движению струй тяжёлой жидкости в лёгкой, $i = 1$ – движению пузырей лёгкой жидкости в тяжёлой. Впервые о существовании автомодельного режима было сказано в работе [101]. В данной модели по аналогии с обычными гидродинамическими уравнениями диффузии составляются уравнения турбулентной диффузии. В этом случае, однако, необходимо дополнительное предположение для определения коэффициента турбулентной диффузии D_t , например, равенство диссипации энергии, вызванной диффузией, и турбулентной диссипации энергии $\epsilon = \frac{\rho v^3}{l_t}$, где ρ – плотность, v – турбулентная скорость, l_t – длина пути турбулентного перемешивания. Полученную систему уравнений можно решить для двух сред с разной плотностью,

в результате чего получается выражение для ширины зоны турбулентного перемешивания:

$$L = 270\alpha^4 \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\int_0^t \sqrt{g(t')} dt' \right)^2, \quad (1.27)$$

где α является параметром модели, который должен быть определён из эксперимента.

Более чем через десятилетие указанная зависимость (1.27) нашла подтверждение в численных и экспериментальных работах [102–105]. Начиная с этого момента возник неугасающий интерес, связанный с определением коэффициента пропорциональности между шириной зоны перемешивания L и величиной $Ag t^2$. В это же время начинается бурное развитие различных моделей перемешивания. Естественным расширением модели Беленького-Фрадкина [101] стала $(l - v)$ – модель, предложенная в работе [106]. Модели диффузионного типа получили дальнейшее развитие, однако, существенным их ограничением является присутствие масштаба длины в параметрах модели. Более широкое применение получила $(k - \epsilon)$ – модель [75, 107] и её производные, в которых уравнение баланса турбулентной кинетической энергии дополняется уравнением для скорости диссипации турбулентной кинетической энергии, тем самым исключая явное присутствие в коэффициентах модели масштаба длины. Впоследствии Д. Янгсом в работах [104, 108] была предложена комбинированная модель – $(k - \epsilon)$ с диффузионными членами, – позволившая проводить моделирование перемешивания под действием знакопеременного ускорения и описать возникающее при этом явление сепарации. Описанные здесь способы изучения турбулентных течений относятся к так называемым RANS-моделям – применение уравнений Рейнольдса, замкнутых при помощи моделей турбулентности (Reynolds-averaged Navier–Stokes).

На сегодняшний день есть и иные подходы, такие как LES (Large eddy simulation), DES (Detached eddy simulation), MILES, вихревая подсеточная

модель [109] и другие, но их уравнения уже достаточно сложны и допускают только численное решение и применение исключительно в задачах моделирования турбулентных течений.

Интересный подход, названный конверсионной моделью, был предложен в [110]. В его основу положены уравнения для фронтов струй и пузырей, полученные в более ранней работе [111]. Далее вводится понятие фронта конверсии как узкой области, в которой происходит конверсия потенциальной энергии в кинетическую энергию возмущения, и определяется его динамика. На основе динамического и геометрического подобия движения фронта, генерируемого набором гармоник и одиночной модой, оказывается возможным определить асимптотику поведения на больших временах и выписать выражения для опеределения коэффициента пропорциональности в зависимости $\alpha A g t^2$. Полученные значения зависят от динамики одиночной моды на момент максимальной скорости конверсии, а также различаются для 2D и 3D геометрии.

Модели, рассмотренные выше и относящиеся к стадии развитого турбулентного перемешивания, в большинстве своем основываются на предположении, что течение уже “забыло” своё начальное состояние. Однако, касательно данного факта существуют и другие мнения, состоящие в том, что зависимость от начальных условий сохраняется и на стадии развитого перемешивания, а автомодельный режим может реализоваться только в случае специально заданных начальных условий или вовсе не реализоваться. Например, в работах [75, 77, 80, 112–116] указывается на зависимость от начальных условий. В связи с этим возникают суждения в пользу того, что коэффициент пропорциональности не является константой, а принимает некоторый диапазон значений [104, 117] в зависимости от конкретной постановки.

В работе [10] в результате совместного анализа НРТ и НКГ были получены, во-первых, условие разрушения основной структуры НРТ, а во-вто-

рых, выражение для вычисления коэффициента пропорциональности α , зависящее от возмущений контактной границы в начальный момент времени. В представляемой работе продолжено развитие этого (эволюционного) подхода: на основе анализа численных и экспериментальных данных были проведены уточнение и оптимизация параметров модели, учёт дополнительных факторов, таких как наличие переходного слоя, азимутальных мод и различных начальных условий.

Глава 2

Численное моделирование процессов турбулентного перемешивания

Численное моделирование на сегодняшний день является чуть ли не самым распространённым методом исследования достаточно сложных задач в различных областях физики. Что касается задач гидрогазодинамики и турбулентного перемешивания, то на сегодняшний день разработано огромное количество численных методик и существует богатый набор программных комплексов, предназначенных для применения к той или иной задаче. В данной работе часть результатов также была получена с помощью прямого численного моделирования.

В качестве базовой численной методики для проведения расчётов была использована хорошо себя зарекомендовавшая методика NUT [118]. Одним из основных результатов в данной главе является реализация параллельной программы для запуска на GPU, которая позволила автору обеспечить выполнение работы и достижение поставленных ранее целей исследования. Моделирование необходимых постановок проводилось на гибридном кластере К-100 Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН.

2.1. Описание численной методики

Как уже упоминалось выше, за основу взята численная методика NUT [118, 119] (NUmerical Tube). В данном разделе мы приведём её краткое описание, так как это существенно для разработки дальнейшего параллельного алгоритма. В предположении слабого влияния теплопроводности и отсутствия тепловых источников систему уравнений газовой динамики можно записать

в дивергентном виде следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{U})}{\partial z} = 0, \quad (2.1)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho \left(\varepsilon + \frac{V^2}{2} \right) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho u \left(\varepsilon + \frac{V^2}{2} \right) + pu \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho v \left(\varepsilon + \frac{V^2}{2} \right) + pv \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \begin{Bmatrix} \rho w \\ \rho w^2 + p \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho w \left(\varepsilon + \frac{V^2}{2} \right) + pw \end{Bmatrix}, \quad (2.2)$$

$V^2 = u^2 + v^2 + w^2$, u , v и w – компоненты скорости, ρ – плотность, ε – удельная внутренняя энергия, p – давление. В случае наличия внешних сил в правой части (2.1) вместо нуля будет стоять вектор \mathbf{F} , который, например, при действии силы тяжести, имеет вид $\mathbf{F} = \{0, \rho g_x, \rho g_y, \rho g_z, \rho (ug_x + vg_y + wg_z)\}^T$.

Система замыкается уравнением состояния

$$p = (\gamma - 1) \varepsilon \rho \quad (2.3)$$

γ – показатель адиабаты. Совместно с (2.1) – (2.3) решаются уравнения

$$\frac{\partial \rho C_i}{\partial t} + \nabla (\rho C_i \mathbf{v}) = 0 \quad (2.4)$$

для нахождения массовых концентраций газов $C_i = \rho_i / \rho$, составляющих газовую смесь, где $i = 1..N - 1$ и $\sum_{i=1}^N C_i = 1$, а также в предположении отсутствия диффузии. В случае двух веществ, типичном для данной работы, в (2.4) остаётся только одно уравнение.

Для построения дискретной модели область непрерывного изменения аргумента необходимо заменить дискретной сеткой:

$$\Omega = \left\{ (x_i, y_j, z_k); x_i = x_{\min} + i \cdot h_x, h_x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N_x}, i = 0..N_x; \right. \\ \left. y_j = y_{\min} + j \cdot h_y, h_y = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{N_y}, j = 0..N_y; \right. \\ \left. z_k = z_{\min} + k \cdot h_z, h_z = \frac{z_{\max} - z_{\min}}{N_z}, k = 0..N_z \right\}. \quad (2.5)$$

Все газодинамические величины будут относиться к центрам ячеек. Для аппроксимации системы уравнений (2.1) используется следующая разностная схема:

$$\frac{\hat{U}_{ijk}^{n+1} - \hat{U}_{ijk}^n}{\tau} + \frac{\hat{F}_{i+1/2jk}^n - \hat{F}_{i-1/2jk}^n}{h_x} + \\ + \frac{\hat{G}_{ij+1/2k}^n - \hat{G}_{ij-1/2k}^n}{h_y} + \frac{\hat{H}_{ijk+1/2}^n - \hat{H}_{ijk-1/2}^n}{h_z} = 0. \quad (2.6)$$

Здесь $\hat{F}_{i+1/2jk}^n, \dots, \hat{H}_{ijk-1/2}^n$ – дискретные потоки, являющиеся функциями двух переменных

$$\hat{F}_{i+1/2jk} = \hat{F} \left(\hat{U}_{i+1/2jk}^l, \hat{U}_{i+1/2jk}^r \right), \\ \dots, \\ \hat{H}_{ijk+1/2} = \hat{H} \left(\hat{U}_{ijk+1/2}^l, \hat{U}_{ijk+1/2}^r \right), \quad (2.7)$$

для которых выполнено условие согласования

$$\hat{F}_{ijk} (U_{ijk}, U_{ijk}) = F (U_{ijk}), \\ \hat{G}_{ijk} (U_{ijk}, U_{ijk}) = G (U_{ijk}), \\ \hat{H}_{ijk} (U_{ijk}, U_{ijk}) = H (U_{ijk}), \quad (2.8)$$

\hat{U}^l и \hat{U}^r – левые и правые значения вектора переменных на гранях между ячейками. Для вычисления этих значений можно использовать следующую интерполяцию, которая, как показано в [120], дает порядок локальной аппроксимации выше первого:

$$\hat{U}_{i+1/2jk}^l = \hat{U}_{ijk} + \frac{h_x}{2} a \left(R_{i+1/2}^- \right) \frac{\hat{U}_{i+1jk} - \hat{U}_{ijk}}{h_x} \quad (2.9)$$

и

$$\hat{U}_{i+1/2jk}^r = \hat{U}_{i+1jk} - \frac{h_x}{2} a \left(R_{i+1/2}^+ \right) \frac{\hat{U}_{i+1jk} - \hat{U}_{ijk}}{h_x} \quad (2.10)$$

На функцию $a \left(R_{i+1/2}^\pm \right)$ – ограничителя антидиффузионных потоков из условия монотонности схемы накладываются условия [120]:

$$\begin{cases} a \left(R_{i+1/2}^\pm \right) = 0, R_{i+1/2}^\pm \leq 0, \\ 0 \leq a \left(R_{i+1/2}^\pm \right) \leq 2, \\ a(1) = 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

Компоненты аргумента рассматриваемой функции имеют вид:

$$\left(R_{i+1/2}^- \right)^m = \frac{\left(\hat{U}_{ijk} \right)^m - \left(\hat{U}_{i-1jk} \right)^m}{\left(\hat{U}_{i+1jk} \right)^m - \left(\hat{U}_{ijk} \right)^m}, \quad (2.12)$$

и

$$\left(R_{i+1/2}^+ \right)^m = \frac{\left(\hat{U}_{i+2jk} \right)^m - \left(\hat{U}_{i+1jk} \right)^m}{\left(\hat{U}_{i+1jk} \right)^m - \left(\hat{U}_{ijk} \right)^m}, \quad (2.13)$$

здесь $m = 1, \dots, 5$.

Потоки через грань ячейки в нашем случае вычисляются как функции, зависящие от решения задачи о распаде разрыва на данной грани [121]:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{i+1/2jk} &= F \left(\tilde{U}_{i+1/2jk} \right), \\ \hat{G}_{ij+1/2k} &= G \left(\tilde{U}_{ij+1/2k} \right), \\ \hat{H}_{ijk+1/2} &= H \left(\tilde{U}_{ijk+1/2} \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $\tilde{U}_{i+1/2jk}$, $\tilde{U}_{ij+1/2k}$ и $\tilde{U}_{ijk+1/2}$ – значения газодинамических величин, выработавшихся в результате распада произвольного разрыва на грани между ячейками.

2.2. Реализация численной методики для GPU

При использовании численной методики, описанной в разделе 2.1, для разрешения мелкомасштабных деталей течения или достаточно малых амплитуд возмущений требуется задавать сопоставимый шаг по пространству. В результате для описания физически осмысленных размеров счётной области необходимо большое число ячеек, а также значительное число шагов по времени, если интересоваться достаточно поздними временами процесса развития НРТ. В связи с этим актуальной становится задача реализации эффективного параллельного алгоритма для проведения моделирования. Такие алгоритмы для кластерных систем с использованием MPI (Message Passing Interface) и OpenMP были разработаны, например, в работах [122, 123]. Однако более перспективной представляется возможность запуска подобных вычислений на GPU устройствах и реализация гибридных программных комплексов.

Как известно, процесс распараллеливания задачи сводится к её декомпозиции на независимые составляющие, которые не требуют последовательного исполнения. Существует два основных варианта декомпозиции: функциональная декомпозиция, когда разными процессами исполняются различные подзадачи основной задачи, и декомпозиция данных, когда разными процессами исполняется одна и та же задача, но над различными наборами данных.

Результатом описанной в предыдущем разделе численной методики является явная разностная схема, что, во-первых, позволяет нам реализовать саму возможность написания параллельной программы, а во-вторых, определяет основной метод декомпозиции, который будет использоваться, – это декомпозиция данных. В случае использования массивно-параллельной архитектуры, такой как GPU устройства, где количество вычислительных процессов достигает десятков и сотен тысяч, можно предполагать, что одна нить, отвечающая одному процессу, будет обрабатывать одну счётную ячейку об-

ласти моделирования. Если количество ячеек велико и объём необходимой для проведения расчёта глобальной памяти не может быть выделен на одном GPU устройстве, тогда вычисления должны проводиться на нескольких GPU устройствах. Этот вариант является более сложным и сопровождается необходимостью обмена данными между устройствами [124, 125].

В свою очередь, обмен данными между GPU может происходить различными путями, однако наиболее часто применимым и пригодным для различных аппаратных конфигураций гибридных кластеров можно назвать способ обмена и синхронизации через хост с помощью коммуникационных библиотек, таких как MPI, Shmem и др. В этом случае вычисления проводятся на GPU устройстве, затем нужные при обмене величины копируются в память CPU, после чего происходит обмен и синхронизация между процессами и копирование обновлённых данных обратно в память видеокарты. Остановимся более подробно на библиотеке Shmem [126], т.к. она является базовой для вычислительного кластера К-100 Института прикладной математики, на котором проводились расчёты для данной работы, и была использована при написании численного кода для запуска расчётов на нескольких GPU. Данная библиотека позволяет работать с локальными адресными пространствами каждого процесса так, как если бы они образовывали единую, доступную всем процессам разделяемую память. При этом для получения информации от другого процесса не требуется его участие, а требуется знать адрес переменной в его памяти. Во-первых, это приводит к необходимости ручного контроля точек синхронизации процессов, а во-вторых, к использованию коллективных операций для выделения областей памяти во всех процессах с гарантированно одинаковыми адресами.

2.2.1. Основные понятия, необходимые при использовании технологии CUDA

На сегодняшний день наиболее удобной в работе с точки зрения проведения неграфических вычислений на графических процессорах (видеокартах) является технология CUDA от компании NVIDIA, представляющая собой расширение базового языка Си. CUDA-программы содержат как блоки, выполняемые последовательно на CPU, называемом хостом или Host, так и блоки, выполняемые параллельно на GPU, называемом устройством или Device и являющимся со-процессором к хосту, запустившему основную программу. Инициирование запуска исполнения каких-либо операций на устройстве происходит с помощью вызова специальных функций, называемых ядрами (kernels). Ядра исполняются всеми созданными при инициировании их запуска нитями (threads). Нить представляет собой основной элемент для проведения вычислений на GPU, т.е. обладает контекстом, в котором возможно выполнение последовательности элементарных операций. В CUDA существует строгая иерархия нитей. Так нити объединяются в блоки нитей (thread block), а блоки – в сетку блоков (grid). Сетка блоков и блоки могут быть как одномерными, так и двумерными, и трёхмерными. Число нитей в сетке блоков обычно соответствует размерности обрабатываемых ядром данных, в то же время, число нитей в блоке ограничено и для последних моделей видеокарт не может превышать 1024 штуки.

Сходным с нитями иерархичным образом организован и доступ к различным типам памяти GPU устройства. Проще всего это изобразить с помощью таблицы 2.1, приведённой ниже (похожая таблица была использована в работе [127]). Следует отметить, что число регистров, приходящихся на одну нить, ограничено. При этом, если этого количества не хватает для хранения локальных переменных, они перемещаются в глобальную память (register

Таблица 2.1. Иерархическая структура памяти в CUDA. R/W = read/write, R = read-only.

Тип памяти	Тип доступа	Уровень доступа	Скорость работы
Глобальная/Global	R/W	сетка блоков	Низкая
Константная/Constant	R	сетка блоков	Высокая
Текстурная/Texture	R	сетка блоков	Высокая
Разделяемая/Shared	R/W	блок нитей	Высокая
Локальная/Local	R/W	нить	Низкая
Регистры/Register	R/W	нить	Высокая

spilling), и скорость доступа к ним резко снижается. Объём разделяемой памяти, выделяемой на блок, также ограничен. В большинстве случаев работа с разделяемой памятью сводится к следующему простому алгоритму: копирование данных из глобальной в разделяемую память, синхронизация нитей в рамках своего блока с помощью функции `__syncthreads()`, выполнение вычислений в быстрой разделяемой памяти, снова синхронизация нитей и копирование результата обратно в глобальную память.

Это небольшая часть особенностей, которые необходимо знать и учитывать при программировании с использованием CUDA, но без которых невозможно продолжить повествование данного раздела. Более подробное описание технологии CUDA представлено в [128].

2.2.2. Методика распараллеливания с использованием CUDA

В данной работе уравнения гидродинамики записаны в декартовой системе координат, а область моделирования представляет собой параллелепипед. При декомпозиции данных удобно пользоваться такой же размерностью пространства, т.е. при формировании блоков нитей и сетки блоков следует задавать их трёхмерными.

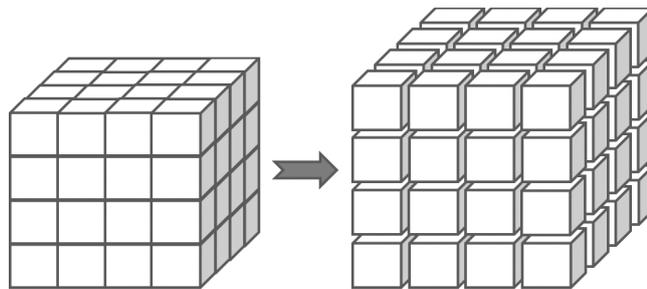


Рис. 2.1. Схематичное изображение декомпозиции трёхмерных данных. Параллелепипеды меньших размеров соответствуют блокам в сетке блоков.

Практически в любой программе есть части, которые необходимо выполнять последовательно, а вычисления внутри них могут быть проведены параллельно. Поскольку в CUDA нет возможности провести барьерную синхронизацию всех блоков внутри одного ядра, то в таких случаях одно вычислительное ядро разбивается на несколько, между которыми выполняется команда `cudaDeviceSynchronize()`, являющаяся по своей сути глобальным барьером. В нашем случае было реализовано два варианта программы. В первом варианте вычисление потоков и новых значений гидродинамических величин в ячейках происходит в одном ядре. Это позволяет сэкономить количество используемой глобально памяти устройства, т.к. не требует хранения массивов потоков, однако приводит к необходимости использования атомарных операций, что, как известно, снижает эффективность параллельных вычислений. Во втором варианте вычисление потоков и новых гидродинамических величин в ячейках разбито на два ядра, запускаемых последовательно. Результаты измерений ускорения для того и другого случая приведены в разделе [2.2.4](#).

2.2.3. Тестовые расчёты

Для проверки правильности вычислений, получаемых с помощью разработанного параллельного алгоритма, была проведена серия расчётов ударной

газодинамики [129], а также расчёт задачи о гравитационном перемешивании, проведённый по экспериментальным данным из работы [104].

Ниже в Таблице 2.2 приведено описание тестовых постановок. Счётная область имела размеры $1.0 \times 0.25 \times 0.25$, число точек – $200 \times 50 \times 50$, граница раздела между веществами соответствовала координате $x = 0.5$. Величины, Таблица 2.2. Параметры тестовых расчётов. №1 соответствует тесту Сода [130], №2 – две волны разряжения и контактный разрыв, №3 и №4 – ударная волна, волна разряжения и контактный разрыв

№	ρ_L	u_L	p_L	ρ_R	u_R	p_R
1	1.0	0.0	1.0	0.125	0.0	0.1
2	1.0	-2.0	0.4	1.0	2.0	0.4
3	1.0	0.0	1000.0	1.0	0.0	0.01
4	1.0	0.0	0.01	1.0	0.0	100.0

соответствующие области справа от границы промаркированы индексом R , слева – индексом L . Сравнение точного решения с результатами моделирова-

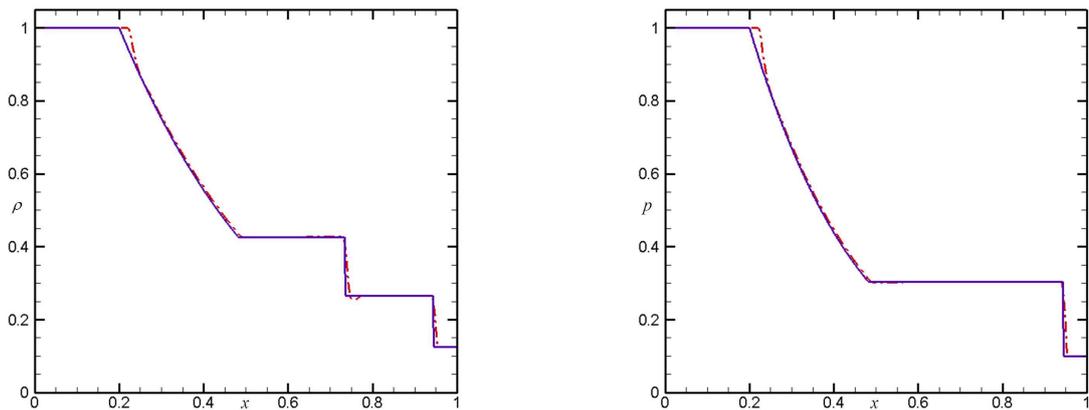


Рис. 2.2. Тест №1. Профили плотности и давления на момент времени $t = 0.253$

ния для всех четырёх тестовых задач представлены на рис. 2.2 – 2.5. Видно, что получено достаточно хорошее соответствие между численным расчётом и точным решением.

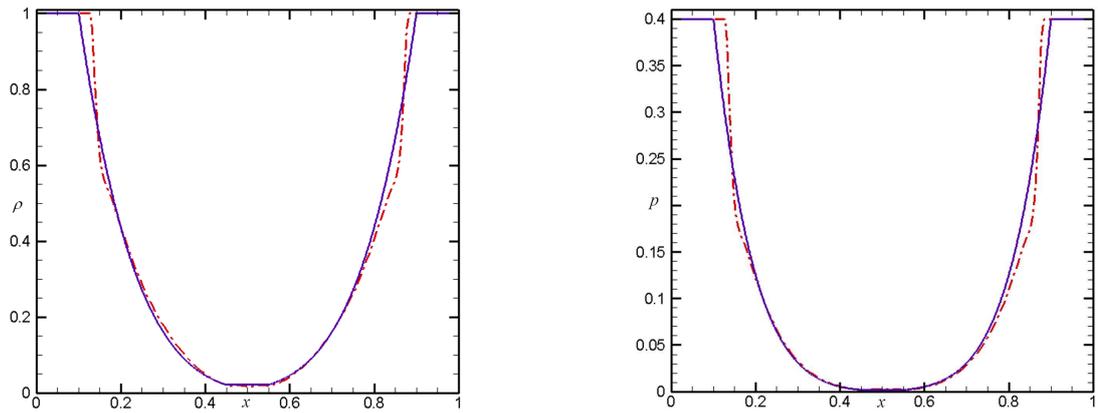


Рис. 2.3. Тест №2. Профили плотности и давления на момент времени $t = 0.145$

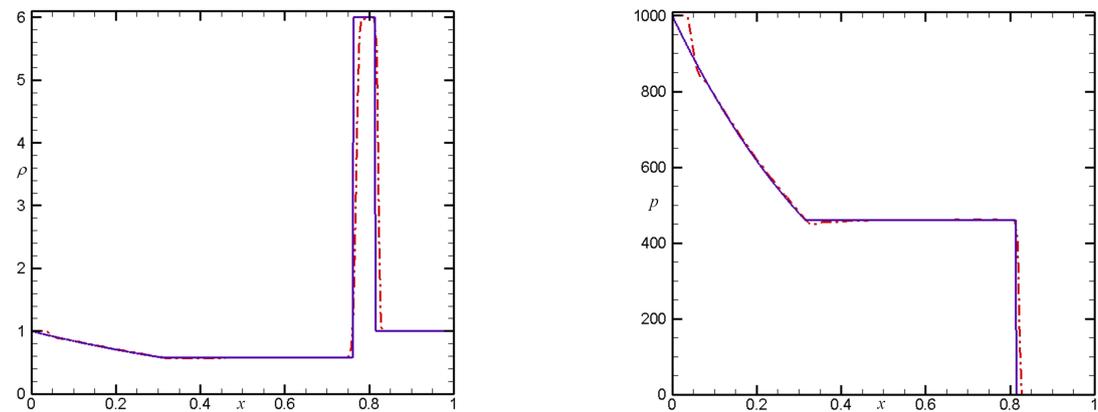


Рис. 2.4. Тест №3. Профили плотности и давления на момент времени $t = 0.0134$

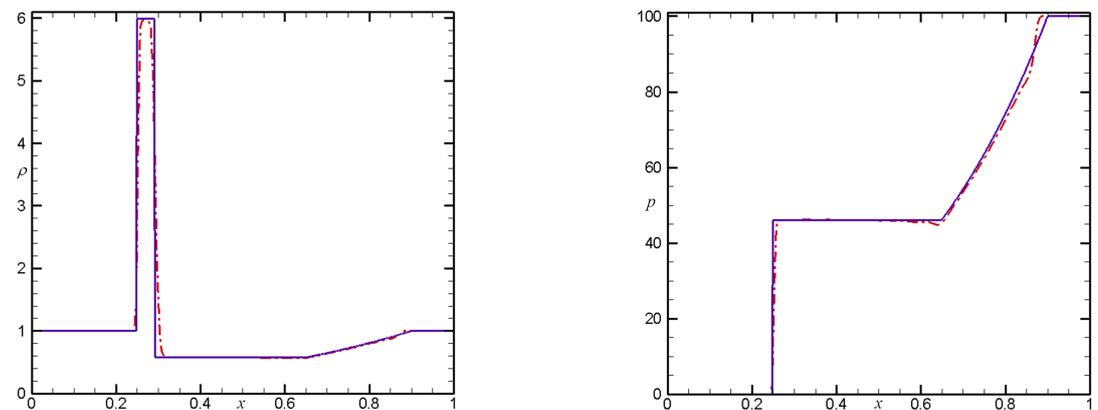


Рис. 2.5. Тест №4. Профили плотности и давления на момент времени $t = 0.0338$

Рассмотрим задачу о гравитационном перемешивании двух веществ. В соответствии с данными из уже упомянутой работы [104] будем считать, что ускорение составляет $g = 0.15 \text{ мм/мс}^2$ или $15g_0$, где g_0 – ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли, отношение плотностей – $\rho_1/\rho_2 = 8.5$

(пентан/ SF_6), $\rho_1 \equiv \rho_{C_5H_{12}} = 0.63 \text{ г/см}^3$, размер области моделирования – $150 \times 200 \text{ мм}$, показатели адиабаты – $\gamma_1 \approx \gamma_2 \approx 1.09$. Исходная задача безразмерна, однако для определённости можно полагать, что в качестве основных единиц измерения мы пользуемся мм , мг и мс , тогда давление измеряется в кПа, плотность – г/см^3 . Давление на контактной границе $p_0 = 25 \text{ кПа}$. На боковых границах задано периодическое граничное условие, на “дне” и на “потолке” – условие отражения (твёрдые стенки). Начальное возмущение контактной границы задавалось следующим образом:

$$\zeta(x) = S \sum_n \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{L_x} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{L_x} \right), \quad (2.15)$$

где a_n и b_n – случайные числа, выбирающиеся согласно нормальному (гауссову) распределению, S – масштабный фактор, определяемый желаемым значением $\sigma = \sqrt{\langle \zeta^2 \rangle}$. В данном расчёте значение σ составляло 0.25 и равнялось наименьшему шагу сетки по пространству. Значение n принимало целые значения от 8 до 25.

Результаты моделирования представлены на рис. 2.6, 2.8, 2.9. Для сравнения здесь же приведены фотографии, полученные в результате проведения эксперимента – рис. 2.7. Во-первых, сравнивая изолинии концентрации, видно качественное соответствие расчёта экспериментальным данным: с течением времени происходит укрупнение характерных структур течения, наблюдается небольшая асимметрия проникновения тяжёлого вещества в лёгкое и легкого вещества в тяжёлое. Во-вторых, из рис. 2.9 можно оценить количественное соответствие. Кривая, полученная в результате численного моделирования, и экспериментальные точки расположены близко друг к другу. Коэффициенты пропорциональности в зависимости $L_b = \alpha_b Agt^2$, найденные по рис. 2.9, имеют значения $\alpha_b^{\text{sim}} = 0.057$ и $\alpha_b^{\text{exp}} = 0.072$. Наблюдаемое отличие в значениях α_b свойственно для 2D расчётов и было отмечено в анализируемой работе [104]: характерный диапазон значений для 2D моделирования составляет от 0.04

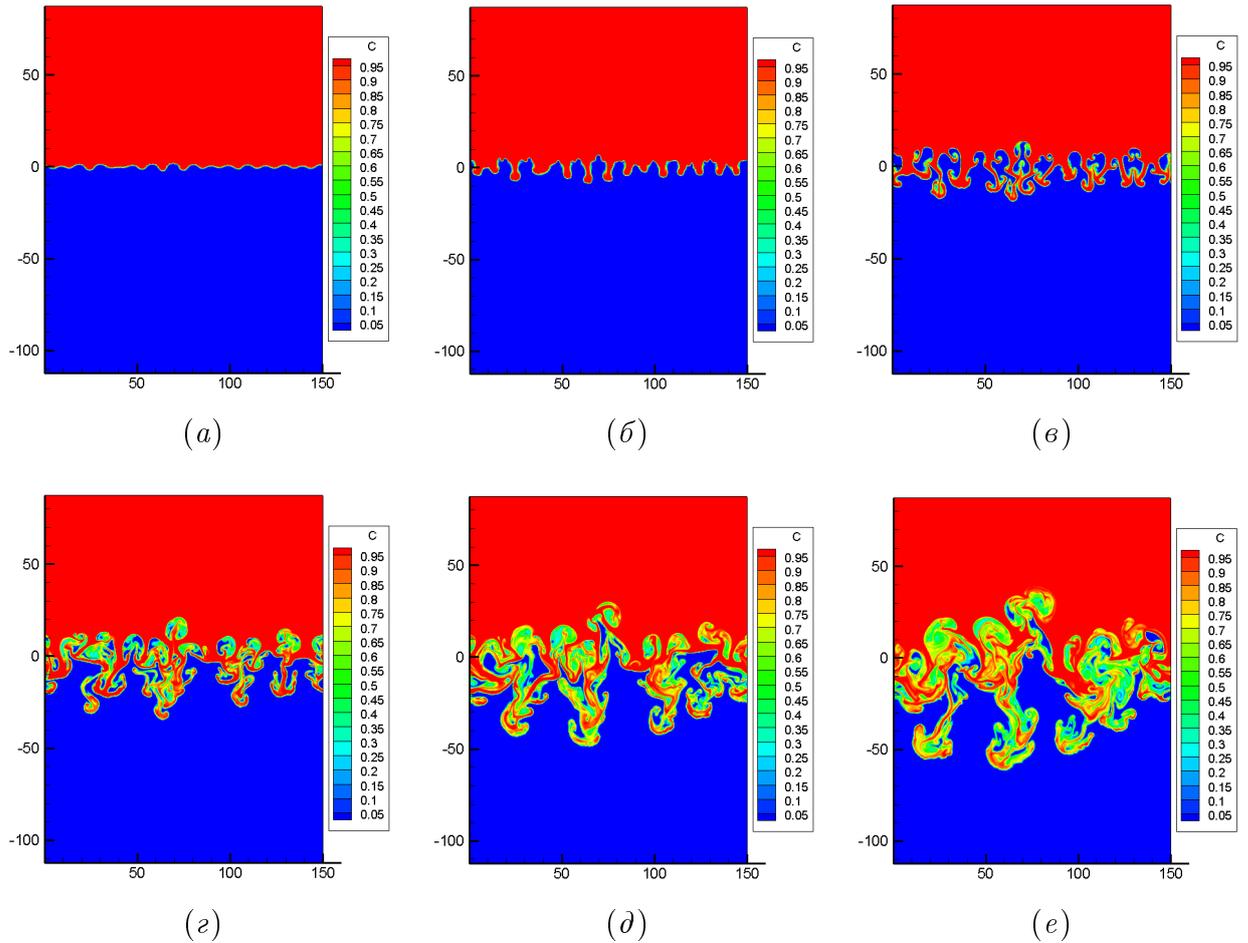


Рис. 2.6. Изолинии концентрации на различные моменты времени: (а) – $t = 12.8$ мс, (б) – $t = 23.4$ мс, (в) – $t = 35.1$ мс, (г) – $t = 46.3$ мс, (д) – $t = 57.4$ мс, (е) – $t = 67.9$ мс.

до 0.05, в то время как для эксперимента – от 0.06 до 0.07.

Проведённые тестовые расчёты свидетельствуют о корректности численного кода, реализованного путём трансляции последовательного варианта на массивно-параллельную архитектуру.

2.2.4. Оценка ускорения и эффективности алгоритма

Для оценки эффективности параллельных вычислений принято использовать ряд общепризнанных показателей. Основным среди них является ускорение параллельного алгоритма или SpeedUp [131]:

$$S = \frac{T_s}{T_p}, \quad (2.16)$$

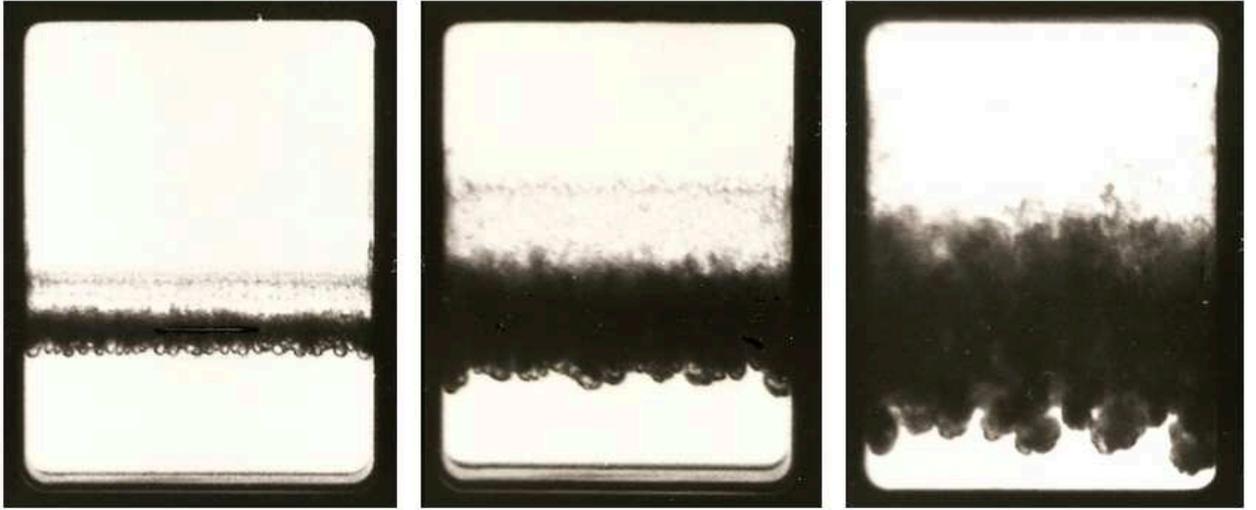


Рис. 2.7. Фотографии из работы [104]: пентан/ SF_6 , соотношение плотностей $\rho_1/\rho_2 = 8.5$, ускорение $g = 15g_0$, 32.8 мс, 53.3 мс и 73.7 мс слева направо.

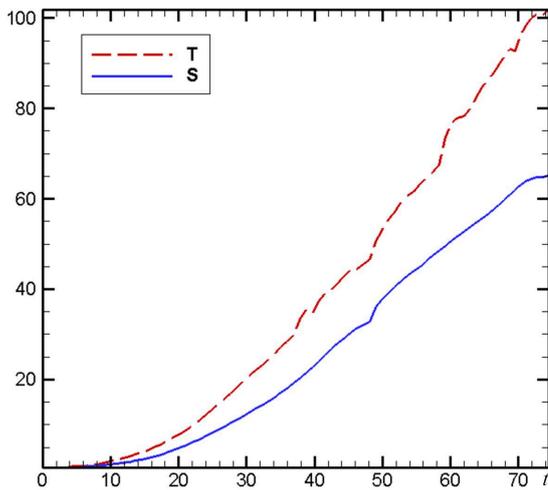


Рис. 2.8. Зависимость ширины зоны перемешивания (**T**) и глубины проникновения тяжёлой жидкости в лёгкую (**S**) от времени.

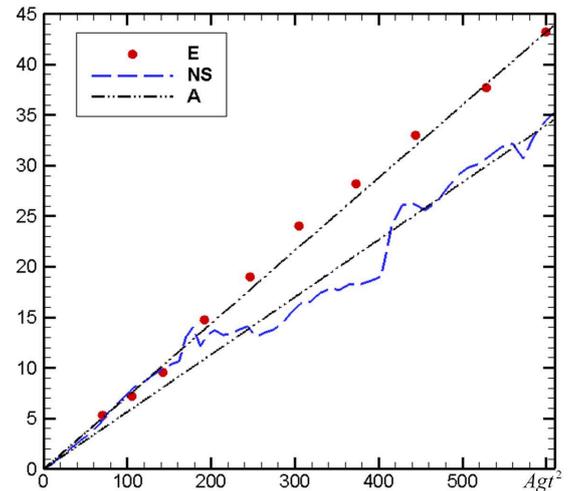


Рис. 2.9. Кривые в координатах L_b от Agt^2 для эксперимента (**E**) и расчёта (**NS**). **A** - аппроксимирующие прямые.

где T_s – время выполнения последовательного алгоритма, T_p – время выполнения параллельного алгоритма. В таблице 2.3 приведены результаты измерений, проведённых на гибридном вычислительном комплексе К-100 [132], развёрнутом в институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Данный комплекс включает в себя 64 узла, на каждом из которых доступно

по 3 графических ускорителя NVIDIA Fermi C2050 [133] и по 2 процессора Intel Xeon X5670 [134] (11 доступных для пользователя ядер). Для получения более выверенных значений времён для каждой из конфигураций проводилось $N_{runs} = 10$ запусков программы, после чего вычислялось среднее время $T_{CPU, GPU} = \frac{1}{N_{runs}} \sum_n T_{CPU, GPU}^n$.

Таблица 2.3. Ускорение параллельного алгоритма. Для параллельной версии программы измерения проводились на $N_{steps}^{GPU} = 300$ временных шагах, для последовательной версии – на $N_{steps}^{CPU} = 3$. Времена в таблице представлены в секундах.

BS_x	BS_y	BS_z	N_{total}	$128 \times 128 \times 256$			$50 \times 50 \times 100$		
				T_{GPU}	T_{CPU}	S	T_{GPU}	T_{CPU}	S
8	8	8	512	83.7		64.0	5.22		61.2
8	8	16	1024	167.0		32.1	11.37		28.1
4	4	4	64	92.7		57.79	5.67		56.3
4	4	8	128	89.8		59.65	5.39		59.28
4	8	8	256	101.0	53.57	53.0	5.91	3.195	54.06
2	2	2	8	325.0		16.48	21.49		14.87
3	3	3	27	129.0		41.53	8.46		37.76
512	1	1	512	197.0		27.19	23.88		13.38

На основе данных, приведённых в таблице 2.3, можно сделать вывод, что наибольшее ускорение наблюдается при использовании размерности блока $8 \times 8 \times 8$. В этом случае за счёт выбранной геометрии блока и количества нитей в блоке достигается максимальная утилизация ресурсов GPU-устройства (до 86%). Для конфигурации $8 \times 8 \times 16$ необходимо отметить следующую особенность: для хранения локальных переменных для основного вычислительного ядра требуется 63 регистра на одну исполняющую его нить, что при количестве нитей в блоке, равном 1024, превышает максимально допу-

стимое число регистров, приходящихся на один блок – 32768. С помощью параметра `--maxregcount` можно установить предел на использование регистров, при этом “излишки” будут перемещены в локальную память, являющуюся частью глобальной памяти, что увеличит время чтения/записи данных, но также должно увеличить эффективность использования ресурсов видеокарты (оссурапсу). Однако, как мы видим из таблицы 2.3, в нашем случае это приводит к общей деградации производительности программы. Здесь можно искать компромисс между количеством регистров, переносимых (spilled) в другую память и эффективностью использования ресурсов устройства, но в данной работе мы не будем рассматривать этот вопрос.

Дополнительно для конфигурации $8 \times 8 \times 8$ проведём развертку ускорения по размерностям сеток. Для этого будем увеличивать количество ячеек в горизонтальных направлениях с шагом 5 и пропорциональным увеличением области моделирования, чтобы размер пространственных шагов оставался неизменным. В направлении z будем соблюдать пропорцию $N_z = 2N_x = 2N_y$. Результаты представлены в таблице 2.4. Видно, что наблюдаются небольшие вариации значений получаемого ускорения на различных сетках. Эти колебания достаточно хорошо коррелируют с количеством простаивающих процессов в последнем блоке, который формируется для обработки ячеек, число которых не может составить полный блок: чем меньше “холостых” процессов, тем больше ускорение параллельного алгоритма.

Помимо ускорения также используют понятие эффективности параллельного алгоритма E_p , определяемое как отношение ускорения S на число использующихся процессов N_p , однако для измерения эффективности программы, запускаемой на GPU, больше подходят иные метрики, такие как пропускная способность памяти и вычислительная пропускная способность [135]. В случае наличия нескольких вычислительных ядер, а также при использовании большого числа арифметических операций и логических ветвлений (при

Таблица 2.4. Ускорение параллельного алгоритма для конфигурации $8 \times 8 \times 8$ для различных численных сеток. Время приведено в секундах.

N_x	N_y	N_z	T_{CPU}	T_{GPU}	S
50	50	100	3.19	5.23	60.99
55	55	110	4.33	5.99	72.29
60	60	120	5.22	8.63	60.49
65	65	130	6.98	11.1	62.88
70	70	140	8.88	13.0	68.31
75	75	150	10.92	16.3	66.99
80	80	160	13.38	20.6	64.95
85	85	170	16.28	22.1	73.66
90	90	180	18.14	28.3	64.1
95	95	190	22.51	31.4	71.69
100	100	200	26.03	37.7	69.04
105	105	210	31.06	43.7	71.07
110	110	220	33.27	48.9	68.04
115	115	230	40.27	54.6	73.75
120	120	240	45.18	68.6	65.86
125	125	250	54.21	69.3	78.23
130	130	260	55.52	83.5	66.49
135	135	270	62.60	86.0	72.79
140	140	280	74.33	108.5	68.51

решении задачи о распаде разрыва) эффективные значения данных характеристик довольно сложно вычислить теоретически. Однако их можно получить, используя различные средства профилирования, такие как NVIDIA Visual Profiler, nvprof (консольная версия) и некоторые другие. Для пред-

ставленной реализации алгоритма эти значения малы по сравнению с пиковыми, что оставляет возможность для проведения дальнейшей оптимизации, например, можно добиваться использования объединённых операций чтения/записи (coalesced access) или пытаться скрыть задержки (latency), связанные с копированием данных с хоста в память видеокарты, путём разделения по потокам (streams).

Напомним, что в разделе 2.2 оговаривалось два варианта реализации. Все измерения, представленные выше, были выполнены для первого варианта, в котором используются атомарные операции. Для второго варианта, когда потоки через грани ячеек и значения полей на новом временном шаге вычисляются в разных ядрах, отметим лишь общую тенденцию, поскольку данное направление исследований не является приоритетным в данной работе: полученные значения ускорения в среднем (по всем конфигурациям) на 17% выше, чем в первом случае, как и ожидалось. Что касается использования глобальной памяти, то, очевидно, что для второго случая это значение выше на величину $3 \cdot 6 \cdot 8 \cdot N$ байт, где 3 соответствует размерности задачи, 6 – числу физических полей, 8 - числу байт, требующихся для хранения значения типа double, и N - общее число ячеек сетки. Так для сетки $128 \times 128 \times 256$ было использовано 511 Мб (или 19% от доступной памяти для видеокарты C2050), во втором – 1135 Мб (или 42%). Эти значения получены с помощью встроенной утилиты nvidia-smi.

Эти и некоторые другие результаты представлены в соответствующей работе автора [12].

2.3. Моделирование развития неустойчивости

Рэля–Тейлора для одномодового возмущения

В данном разделе проведём расчёты эволюции одномодового уединённого возмущения, получим и проанализируем зависимости некоторых интегральных характеристик процесса перемешивания от времени. Сделанные выводы и предположения позволят развить аналитическую модель для описания роста возмущений на нелинейной стадии, которая будет представлена в Главе 4.

2.3.1. Постановка расчётов

Обратимся к описанию необходимых постановок. Будем проводить серию 2D и 3D расчётов с различными отношениями плотностей, но при этом с одним и тем же значением параметра сжимаемости тяжёлой жидкости $\beta_1 = \frac{gL_z}{c_1^2}$. Также будем предполагать, что жидкости слабо сжимаемы, т.е. $\beta_1 \lesssim 1$. Начальный профиль давления положим изотермическим, т.е. $p_{0i}(z) = p_0(0) \exp\left[-\frac{\rho_{0i}(0)gz}{p_{0i}(0)}\right]$. Ориентируясь на моделирование перемешивания в лазерных мишенях, здесь и в дальнейшем, если не будет оговорено отдельно, будем пользоваться системой единиц *мкм*, 10^{-12} *г* и *нс*. В этом случае имеем давление в *ГПа*, плотность в *г/см³*, а ускорение в *мкм/нс²* или, что то же самое, $10^{11}g_0$. Размеры области моделирования для 3D расчётов положим равными $2\pi \times 2\pi \times 8\pi$, для 2D расчётов – $\pi\sqrt{2} \times 0.47 \times 8\pi$, действующее ускорение $g = 1.0$. В начальный момент времени вещества находятся в покое. На всех границах области заданы условия непротекания. Остальные параметры приведены в таблице 2.5. Начальное возмущение на контактной границе задаётся в виде $\zeta(x, y) = -a_0 \cos k_x x \cos(k_y y)$, $a_0 = 0.05$, $k_x = \frac{2\pi}{L_x}$, $k_y = \frac{2\pi}{L_y}$. Такая амплитуда возмущения соответствует $ka = k \cdot 2a_0 \approx 0.141$. Для того чтобы разрешить возмущение такого масштаба, потребуется $N_z = 1200$ то-

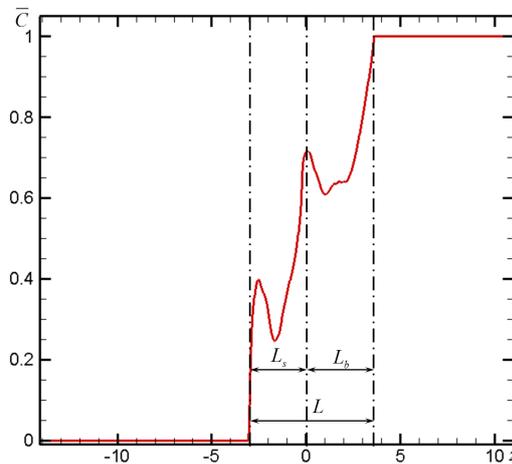
Таблица 2.5. Параметры расчётов одномодового уединённого возмущения

№	$\rho_{01}(0)$	$\rho_{02}(0)$	$p_0(0)$	$\beta_1 \equiv \beta_H$
1	3.0	1.0	60.0	0.75
2	10.0	1.0	200.0	
3	1.5	1.0	30.0	

чек в вертикальном направлении. Пространственные шаги вдоль x и y могут быть выбраны большими, однако не следует чересчур вытягивать счётную ячейку. Для этой задачи положим $N_x = N_y = 40$.

2.3.2. Результаты моделирования

В данном разделе приведены графики зависимости от времени для ширины зоны перемешивания L , с точностью до постоянного коэффициента совпадающей с величиной ka ($k = \sqrt{2}$), далее называемой нами “возрастом” возмущения, и величины β – “возраста” пузырей. Здесь следует отметить,

Рис. 2.10. Профиль усреднённой концентрации от координаты z .

что ширина зоны перемешивания определялась по уровню усреднённой в горизонтальном направлении объёмной концентрации $\bar{C}(z)$ от значения 0.05 до значения 0.95; высота струи вычислялась, как расстояние от положения

контактной границы в начальный момент времени до значения концентрации 0.05 (см. рис. 2.10).

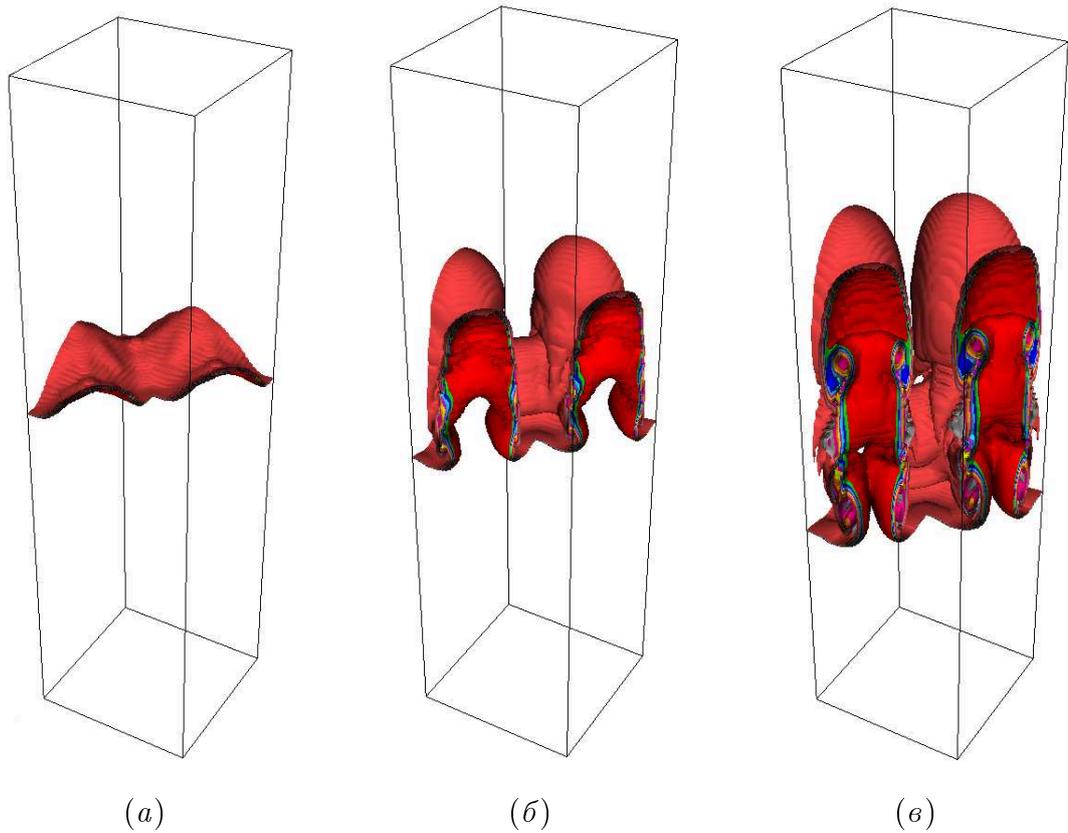


Рис. 2.11. Изоповерхности концентрации на момент времени $t = 7.53$ для 3D расчётов с различным отношением плотностей δ : (а) – $\delta = 1.5$, (б) – $\delta = 3$, (в) – $\delta = 10$.

На рис. 2.11 и 2.13, на которых приведены изоповерхности/изолинии объёмной концентрации для 3D и 2D расчётов развития уединённого одномодового возмущения с различными числами Атвуда, можно видеть характерную для НРТ форму возмущения, когда на фоне погружающейся струи тяжёлого вещества в лёгкое на контактной границе начинает развиваться вторичная неустойчивость Кельвина–Гельмгольца. Приведённый момент времени $t = 7.53$ соответствует параметру $\gamma t \approx 4.0, 6.3$ и 8.1 (для $\delta \equiv \frac{\rho_H}{\rho_L} = 10.0, 3.0$ и 1.5 соответственно), что относится к слабонелинейной стадии процесса. Ранее в работе [136] сообщалось, что значение $\gamma t \approx 20$ (для $A = 0.5$ и $g = 1$) соответствует моменту установления классических спектров кинети-

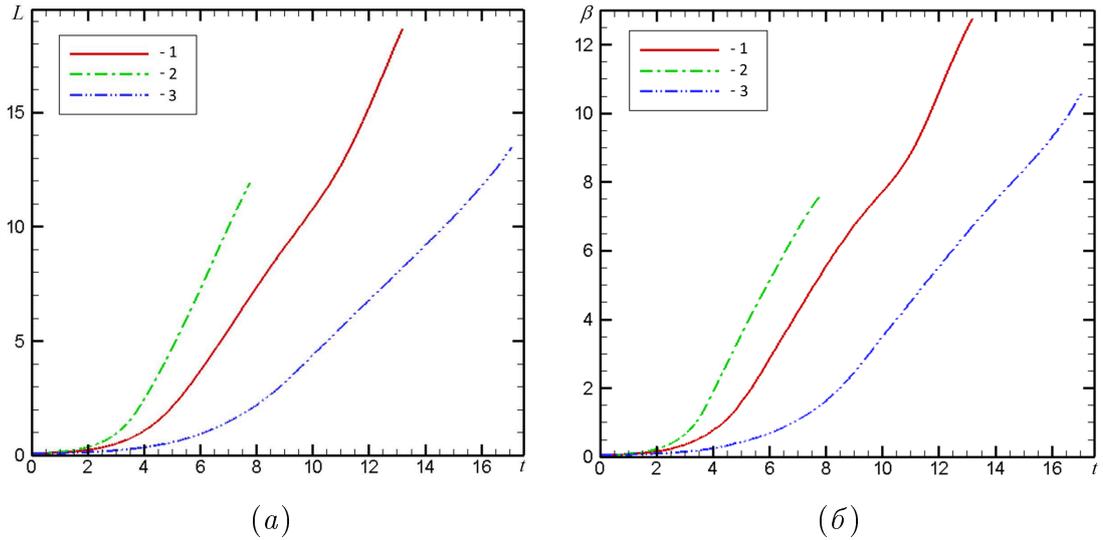


Рис. 2.12. Зависимости ширины зоны перемешивания – (а) и величины $\beta = kb$ – (б) от времени для 3D расчётов с различными отношениями плотностей веществ. Цифры на графике соответствуют нумерации в таблице 2.5.

ческой энергии, т.е. переходу к стадии развитой турбулентности.

Если изучить изолинии концентрации, но в развёртке по времени, то очевидно прослеживается следующая тенденция: струя вытягивается и утоньшается. Это высказывание можно записать в следующей математической форме:

$$s \cdot d = \text{const для 2D}, \quad (2.17)$$

$$s \cdot r^2 = \text{const для 3D}, \quad (2.18)$$

где d или r – характерные поперечные размеры струи, s – высота струи. Это фактически свидетельствует о сохранении массы струи (при домножении на плотность), хотя, вообще говоря, это не совсем так – масса струи растёт со временем. Например по модели Ферми [93] можно получить следующую оценку: $s \propto t^2$, $d \propto t^{-3/2}$, т.е. $m_s \propto t^{1/2}$. В работе [137] также высказывался тезис о не слишком быстром росте эффективной массы струи. Однако в дальнейшем мы будем пользоваться выражениями (2.17) и (2.18).

Далее проанализируем представленные на рисунках 2.12 и 2.14 зависи-

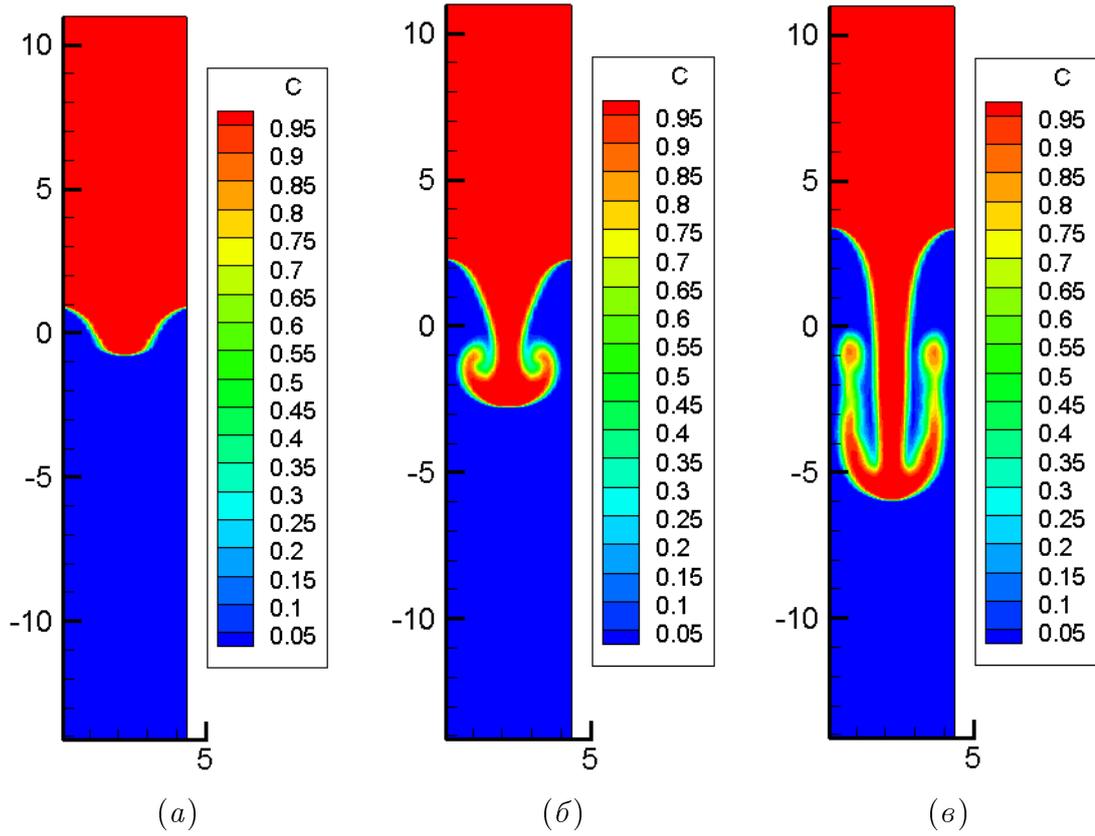


Рис. 2.13. Изолинии концентрации на момент времени $t = 7.53$ для 2D расчётов с различным отношением плотностей δ : (а) – $\delta = 1.5$, (б) – $\delta = 3$, (в) – $\delta = 10$.

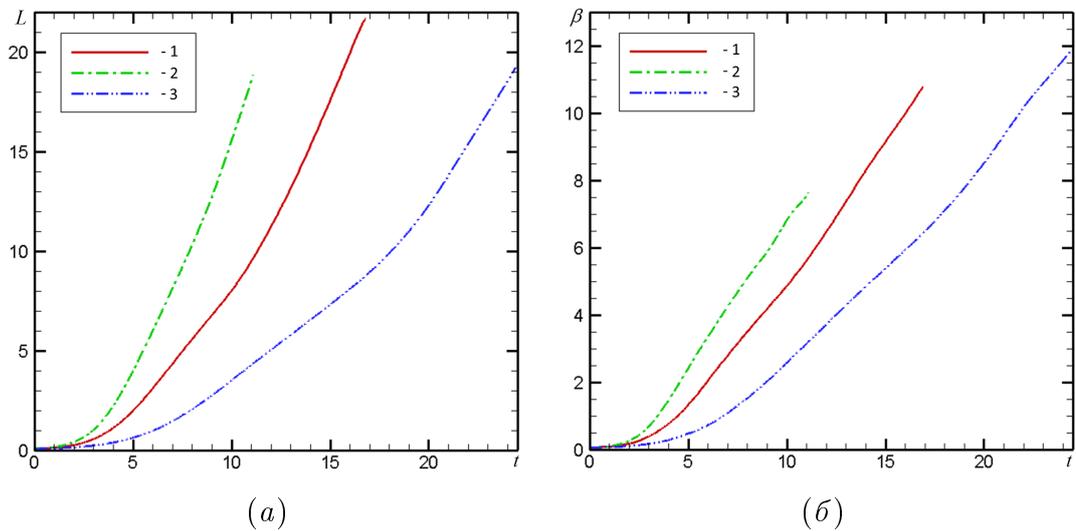


Рис. 2.14. Зависимости ширины зоны перемешивания – (а) и величины $\beta = kb$ – (б) от времени для 2D расчётов с различными отношениями плотностей веществ. Цифры на графике соответствуют нумерации в таблице 2.5.

мости. Во всех расчётах проведённой серии можно наблюдать следующую качественную картину: на начальном этапе происходит интенсивный рост, затем наступает насыщение и дальнейшее развитие происходит с постоянной скоростью. Времена, соответствующие смене режима, как и ожидалось, зависят от отношения плотностей веществ – чем меньше отношение плотностей, тем позже происходит переход. Интересным является тот факт, что этим моментам времени соответствуют значения “возраста” пузыря $\beta \approx 1$.

2.4. Выводы к Главе 2

В данной главе была показана возможность реализации параллельного алгоритма для моделирования задач турбулентного перемешивания разноплотных веществ. Были проведены тестовые численные расчёты, на основе которых можно сделать вывод, что полученный программный комплекс даёт реалистичные результаты. Также были сняты метрики по ускорению параллельного варианта кода по сравнению с последовательным. Получено ускорение в 65 раз, что позволило значительно снизить временные затраты на проведение численных расчётов, требовавшихся для написания данной диссертации.

Помимо тестовых, здесь также были проведены основополагающие для построения дальнейшей теории расчёты развития одномодового возмущения в двумерной и трёхмерной геометрии. Для различных чисел Атвуда было зафиксировано схожее поведение таких интегральных характеристик, как ширина зоны перемешивания, масса струи тяжёлого вещества, “возраст” возмущения. Во всех расчётах данной серии наблюдалась смена режима развития возмущения, которая соответствовала одному и тому же “возрасту” пузыря $\beta \approx 1$. Также было замечено, что до этого момента масса струи растёт достаточно медленно с течением времени. Эти положения впоследствии и были

выбраны базовыми для описания эволюционного подхода, представленного в Главе 4.

Глава 3

Исследование влияния сжимаемости на развитие неустойчивости Рэля–Тейлора

Помимо эффектов, рассмотренных ранее в Главе 1, на устойчивость и дальнейшую эволюцию малых возмущений может повлиять такой фактор, как сжимаемость веществ, участвующих в перемешивании. Отметим, что термин “сжимаемость” в научной литературе часто используется в различных смыслах, которые характеризуют те или иные аспекты рассматриваемых физических явлений. Так, сжимаемостью называют и изменение плотности течения со временем при сжатии сферических мишеней, и неоднородность профилей плотности в начальный момент времени, и конечность скорости звука. Как мы уже видели в предыдущих главах данной работы, выражения типа $\dot{\rho}/\rho$ возникают при изучении ВР-эффекта и входят в инкремент неустойчивости. Появление же градиента плотности в классической постановке для НРТ связано с учётом уравнения состояния для гидростатического равновесия. А конечность скорости звука сказывается при рассмотрении сжимаемых возмущений. Данная глава будет посвящена изучению последних двух явлений и анализу их влияния на процесс перемешивания.

3.1. Оценка значимости эффекта применительно к задачам ЛТС

Проведём оценку масштаба эффекта. Для этого воспользуемся одномерным численным расчётом лазерной мишени, выполненным по программе DIANA [138, 139]. Основные характеристики мишени и $R-t$ диаграмма приведены на рис. 3.1 и 3.2 соответственно. Рассмотрим отдельно обе стадии,

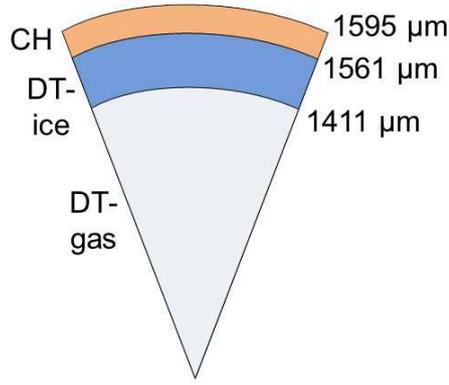


Рис. 3.1. Схематическое изображение лазерной мишени. $m_{\text{CH}} = 1117$ мкг (1 г/см^3), $m_{\text{ice}} = 1066$ мкг (0.25 г/см^3), $m_{\text{gas}} = 12$ мкг (10^{-3} г/см^3), полная масса мишени составляет $m \approx 2200$ мкг. Испарённая масса – 1035 мкг (93% от CH). $\rho_{\text{max}} = 116.4 \text{ г/см}^3$, $G = 17.95$. Уравнение состояния Томаса–Ферми.

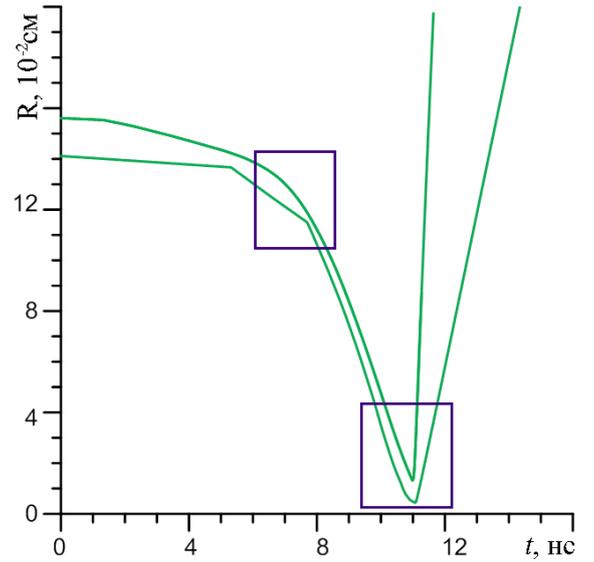


Рис. 3.2. $R-t$ диаграмма границ DT-льда. Области, выделенные прямоугольниками, соответствуют временам развития неустойчивостей.

на которых может происходить развитие возмущений. Обратимся сначала к стадии ускорения оболочки мишени за счёт испаряющегося абляционного слоя. В этом случае можно с хорошей точностью полагать, что число Атвуда близко к единице. Тогда $\gamma_{RT}^2 \approx gk \approx 2\pi g/\lambda \approx 2\pi g/\Delta R$, где $\Delta R \approx 80$ мкм – толщина DT-оболочки, характерная для рассматриваемой стадии процесса сжатия мишени. Ускорение оценим с помощью выражения $g \approx v_{\text{impl}}/t$. К характерному моменту времени $t = 8$ нс оболочка приобретает скорость $v_{\text{impl}} \approx 23 \cdot 10^6$ см/с, тогда получаем $g \approx 2.8 \cdot 10^3$ см/мкс² и $\gamma_{RT} \approx 1.5$ нс⁻¹. Из расчёта определяем и характерную скорость звука – $c \approx 570$ км/с. Теперь можно оценить скорость течения, приобретаемую за счёт развития НРТ: $v = \dot{a} = \gamma_{RT} a_0 \exp(\gamma_{RT} t_{\text{inst}})$, где $a_0 \approx 1 - 10$ мкм, $t_{\text{inst}} \approx \Delta/v_a$ (использовано, например, в [31]), $\Delta \approx 10$ мкм – ширина области неустойчивости (можно определить по графикам $p(R)$ и $\rho(R)$ – диапазон радиусов, где градиенты p и ρ противоположно направлены), $v_a \approx 3 \cdot 10^5$ см/с. Таким образом, $t_{\text{inst}} \approx 3.3$ нс

и $v \approx 211.8$ км/с. Получаем, что $v \lesssim c$, т.е. скорость звука выше скорости гидродинамического движения.

Определим масштаб изменения градиента плотности и сравним его с масштабом возмущений, которые могут развиваться в условиях рассматриваемой мишени. Предполагая экспоненциальный закон изменения плотности, получающийся для изотермического случая, можно записать характерный масштаб как $l_\rho \approx c^2/g \approx 1.1 \cdot 10^4$ мкм. При этом для a приблизительно получаем значение 1.67 мкм. Видно, что $l_\rho \gg a$, т.е. за имеющееся время возмущения не успеют развиваться настолько, чтобы начать “ощущать” градиент плотности и давления.

Проведём оценку, подобную представленной выше, для стадии торможения DT-оболочки мишени горячим цетром. Воспользуемся профилями давления и плотности, приведёнными на рис. 3.3 на момент максимального сжатия $t = 11.03$ нс, и определим характерные градиенты величин. Таким образом

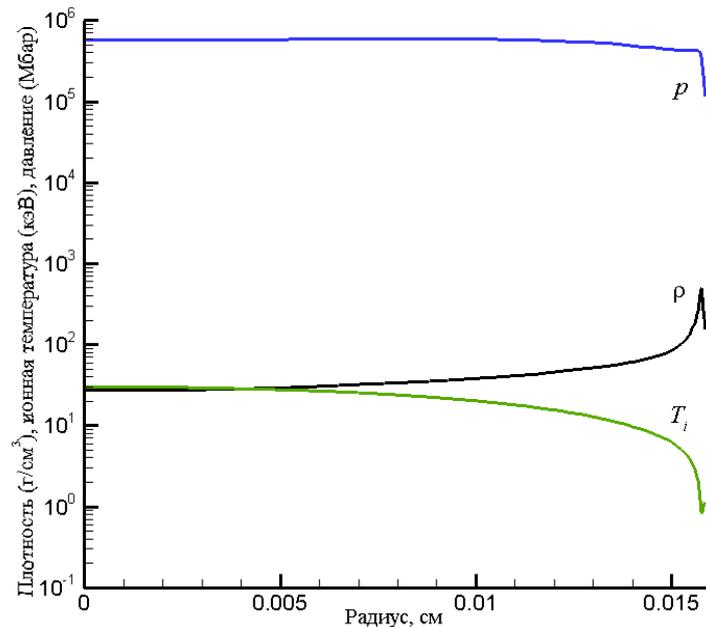


Рис. 3.3. Профили давления p , плотности ρ и ионной температуры T_i на момент максимального сжатия мишени $t \approx 11.03$ нс.

получаем $|\nabla p| \approx 4.75 \cdot 10^6$ Мбар/см, $|\nabla \rho| \approx 1.3 \cdot 10^4$ г/см⁴. Максималь-

ная плотность мишени составляет $\rho_{\max} = 116.4 \text{ г/см}^3$. Как показано в работе [37], для инкремента неустойчивости можно записать $\gamma_{RT}^2 = \rho_{\max}^{-1} \nabla p \nabla \rho$ или $\gamma_{RT} \approx 2.1 \text{ нс}^{-1}$. Ускорение можно оценить с помощью выражения $g_p = -\rho_{\max}^{-1} \nabla p \approx 4.1 \cdot 10^4 \text{ см/мкс}^2$. Время, в течение которого происходит торможение оболочки, даётся выражением $t_d \approx t_c/C_R$, где t_c – время коллапса мишени (для рассматриваемой мишени $t_c \approx 11 \text{ нс}$), $C_R = R_0/R_c \approx 28$. Характерная скорость звука для этой стадии $c \approx 1500 \text{ км/с}$. Как и ранее, вычислим скорость течения вследствие развития неустойчивости и масштаб градиента плотности: $v \approx \gamma_{RT} a_0 \exp(\gamma_{RT} t_d) \approx 0.5 \text{ см/мкс}$, $v \ll c$, $l_\rho \approx 5.5 \cdot 10^3 \text{ мкм}$, т.е. $l_\rho \gg a$. Таким образом, на стадии торможения эффект сжимаемости веществ также незначителен. Причём, если сравнивать с абляционной неустойчивостью, то его величина, выраженная в характерных масштабах, ещё меньше.

В целом следует ожидать, что влиянием сжимаемости веществ на развитие НРТ в лазерных мишенях в большинстве случаев можно пренебречь. Это же утверждение можно видеть и в некоторых работах других авторов, например, в [140]. Однако попробуем разобраться более подробно и получить количественную оценку как на линейной, так и на нелинейной стадиях развития возмущений.

3.2. Линейный анализ. Обзор различных конфигураций

Использование различных состояний равновесия невозмущённого течения, так же как и учёт различных уравнений состояния для возмущений, могут приводить к иным свойствам устойчивости движения жидкостей/газов нежели при рассмотрении классической НРТ. Таблица возможных сочетаний этих конфигураций приведена в обзоре [141]. Оттуда же можно видеть, что достаточно подробно на сегодняшний день исследованы изотермический и изоэнтропический случаи. Приведём здесь некоторые выкладки, поскольку это

будет необходимо для установления вида дисперсионного уравнения, исследования различных предельных случаев, а также для определения диапазона изменения параметров постановок для проведения дальнейших численных расчётов. Начнём с наиболее простого случая, а именно: пусть имеет место изотермическое уравнение состояния для обоих веществ. Система уравнений газовой динамики в отличие от (A.1) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}, \\ p = K \rho, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $K \equiv c_T^2$ – квадрат изотермической скорости звука, постоянной в каждой из жидкостей. Система уравнений в линейном приближении по малым отклонениям от стационарного состояния будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \nabla(\rho_0 \delta \mathbf{v}) = 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \delta p + \mathbf{g} \delta \rho, \\ \delta p = K \delta \rho, \end{cases} \quad (3.2)$$

Продифференцируем первое уравнение системы по t и подставим в него выражения из уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} - K \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \delta \rho - g \frac{\partial \delta \rho}{\partial z} = 0. \quad (3.3)$$

Будем искать решение получившегося уравнения в виде $\delta \rho = R(z) e^{ikx + \omega t}$, тогда получаем:

$$\omega^2 R(z) - K \left(k^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) R(z) - g \frac{dR(z)}{dz} = 0. \quad (3.4)$$

Пусть $R(z) \propto e^{mz}$, тогда имеем:

$$-Km^2 - gm + (\omega^2 + k^2K) = 0, \quad (3.5)$$

$$m_{1,2} = \frac{1}{2K} \left(-g \pm \sqrt{g^2 + 4(\omega^2 + k^2 K) K} \right). \quad (3.6)$$

Таким образом для функции $R(z)$ получаем следующее выражение (с учетом исчезновения возмущения при $z \rightarrow \pm\infty$):

$$R(z) = \begin{cases} C_1 e^{m_{(1)}z}, z \geq 0, m_{(1)} = \frac{1}{2K_1} \left(-g - \sqrt{g^2 + 4(\omega^2 + k^2 K_1) K_1} \right), \\ C_2 e^{m_{(2)}z}, z < 0, m_{(2)} = \frac{1}{2K_2} \left(-g + \sqrt{g^2 + 4(\omega^2 + k^2 K_2) K_2} \right). \end{cases} \quad (3.7)$$

Здесь индексы (1) и (2) введены для маркировки областей $z \geq 0$ и $z < 0$ соответственно.

Теперь получим выражение для z -компоненты скорости. Будем искать решение в виде $\delta v_z = W(z)e^{ikx+\omega t}$.

$$\rho_0 \frac{\partial \delta v_z}{\partial t} = -K \frac{\partial \delta \rho}{\partial z} - g \delta \rho, \quad (3.8)$$

$$\rho_0 \omega W(z) = -(Km + g) R(z), \quad (3.9)$$

$$W(z) = -\frac{1}{\omega \rho_0} (Km + g) R(z). \quad (3.10)$$

Границу раздела веществ описывает функция $\zeta = ae^{ikx+\omega t}$, которая удовлетворяет кинематическому соотношению:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \delta v_z(0), \quad (3.11)$$

$$a\omega = -\frac{1}{\omega \rho_0(0)} (mK + g) C, \quad (3.12)$$

$$C_i = -\frac{\omega^2 a \rho_0^{(i)}(0)}{m_{(i)} K_i + g}. \quad (3.13)$$

Далее получим дисперсионное уравнение из условия непрерывности давления при переходе через границу раздела сред:

$$p^{(1)}(\zeta) = p^{(2)}(\zeta), \quad p_0^{(1)}(\zeta) + \delta p^{(1)} = p_0^{(2)}(\zeta) + \delta p^{(2)} \quad (3.14)$$

$$p_0^{(i)} = p_0(0) \exp\left(-\frac{g}{K_i} \zeta\right). \quad (3.15)$$

Раскладывая выражение для $p_0^{(i)}$ по малому значению ζ , получаем следующее условие для $\delta p^{(i)}$:

$$\delta p^{(1)} - \delta p^{(2)} = \left(\rho_0^{(1)}(0) - \rho_0^{(2)}(0) \right) g\zeta, \quad (3.16)$$

$$K_1 C_1 - K_2 C_2 = ag \left(\rho_0^{(1)}(0) - \rho_0^{(2)}(0) \right), \quad (3.17)$$

$$\omega^2 = g \frac{\rho_0^{(1)}(0) - \rho_0^{(2)}(0)}{-\frac{\rho_0^{(1)}(0)}{m_{(1)} + \frac{g}{K_1}} + \frac{\rho_0^{(2)}(0)}{m_{(2)} + \frac{g}{K_2}}}. \quad (3.18)$$

Такое же дисперсионное соотношение было получено в работе [47] применительно к процессам, происходящим в нейтронных звездах. Экспериментально вопрос о влиянии сжимаемости на величину инкремента исследовался в [142]. При включении в рассмотрение третьего измерения и наличии возмущений вдоль него, т.е. $\delta \propto e^{i(k_x x + k_y y) + \omega t}$, в полученных выражениях k^2 следует заменить на $k_x^2 + k_y^2$.

Дополним вывод инкремента анализом различных предельных случаев. Во-первых, рассмотрим случай практически несжимаемых жидкостей, тогда значение скорости звука (т.е. K) велико. При формальном переходе к пределу $K_i \rightarrow \infty$ в выражении для ω^2 получаем классическое выражение для инкремента неустойчивости Рэлея–Тейлора $\omega^2 = gk \frac{\rho_0^{(1)}(0) - \rho_0^{(2)}(0)}{\rho_0^{(1)}(0) + \rho_0^{(2)}(0)} = gkA$, где A - число Атвуда.

Получим поправку к инкременту неустойчивости Рэлея–Тейлора в первом приближении за счет учета сжимаемости. В качестве малого безразмерного параметра для разложения может быть использован параметр $\beta = \frac{g}{kK}$, $\beta \ll 1$.

$$m_{(i)} + \frac{g}{K_i} = \frac{g}{2K_i} + (-1)^i k \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{k^2 K_i} + \left(\frac{g}{2kK_i} \right)^2} \quad (3.19)$$

$$\frac{g}{2K_1} - k\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{k^2K_1} + \left(\frac{g}{2kK_1}\right)^2} \approx \frac{g}{2K_1} - k\left(1 + \frac{\omega_0^2}{2k^2K_1} + \dots\right) = -k\left(1 + \frac{\omega_0^2}{2k^2K_1} - \frac{g}{2kK_1}\right), \quad (3.20)$$

где $\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{a_1}{K_1} + \frac{b_1}{K_2} + \dots$

$$\frac{g}{2K_2} + k\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{k^2K_2} + \left(\frac{g}{2kK_2}\right)^2} \approx k\left(1 + \frac{\omega_0^2}{2k^2K_2} + \frac{g}{2kK_2}\right) \quad (3.21)$$

$$-\frac{\rho_0^{(1)}(0)}{m_{(1)} + \frac{g}{K_1}} \approx \frac{-\rho_0^{(1)}(0)}{-k\left(1 + \frac{\omega_0^2}{2k^2K_1} - \frac{g}{2kK_1}\right)} \approx \frac{\rho_0^{(1)}(0)}{k}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{2k^2K_1} + \frac{g}{2kK_1}\right) \quad (3.22)$$

$$\frac{\rho_0^{(2)}(0)}{m_{(2)} + \frac{g}{K_2}} \approx \frac{\rho_0^{(2)}(0)}{k}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{2k^2K_2} - \frac{g}{2kK_2}\right) \quad (3.23)$$

Таким образом, для знаменателя выражения для ω^2 получаем:

$$\frac{\rho_0^{(1)}(0) + \rho_0^{(2)}(0)}{k} - \frac{\omega_0^2}{2k^3}\left(\frac{\rho_0^{(1)}(0)}{K_1} + \frac{\rho_0^{(2)}(0)}{K_2}\right) + \frac{g}{2k^2}\left(\frac{\rho_0^{(1)}(0)}{K_1} - \frac{\rho_0^{(2)}(0)}{K_2}\right) \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \omega_0^2 + \frac{a_1}{K_1} + \frac{b_1}{K_2} &= \\ &= gk\frac{\rho_0^{(1)}(0) - \rho_0^{(2)}(0)}{\rho_0^{(1)}(0) + \rho_0^{(2)}(0)}\left(1 + \frac{\omega_0^2}{2k^2}\left(\frac{\rho_0^{(1)}(0)}{K_1} + \frac{\rho_0^{(2)}(0)}{K_2}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{g}{2k}\frac{1}{\rho_0^{(1)}(0) + \rho_0^{(2)}(0)}\left(\frac{\rho_0^{(1)}(0)}{K_1} - \frac{\rho_0^{(2)}(0)}{K_2}\right)\right), \quad (3.25) \end{aligned}$$

отсюда находим выражения для коэффициентов разложения:

$$\omega_0^2 = gk\frac{\rho_0^{(1)}(0) - \rho_0^{(2)}(0)}{\rho_0^{(1)}(0) + \rho_0^{(2)}(0)}, \quad (3.26)$$

$$a_1 = -g^2\frac{\rho_0^{(1)}(0)\rho_0^{(2)}(0)\left(\rho_0^{(1)}(0) - \rho_0^{(2)}(0)\right)}{\left(\rho_0^{(1)}(0) + \rho_0^{(1)}(0)\right)^3}, \quad (3.27)$$

$$b_1 = g^2 \frac{\rho_0^{(1)}(0)\rho_0^{(2)}(0) \left(\rho_0^{(1)}(0) - \rho_0^{(2)}(0) \right)}{\left(\rho_0^{(1)}(0) + \rho_0^{(2)}(0) \right)^3}. \quad (3.28)$$

Таким образом,

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 + (\beta_2 - \beta_1) kg \frac{\rho_0^{(1)}(0)\rho_0^{(2)}(0) \left(\rho_0^{(1)}(0) - \rho_0^{(2)}(0) \right)}{\left(\rho_0^{(1)}(0) + \rho_0^{(2)}(0) \right)^3}, \quad \beta_i = \frac{g}{kK_i} \quad (3.29)$$

Интересно, что при равенстве скоростей звука в верхнем и нижнем веществах в первом приближении сжимаемость не оказывает никакого влияния на инкремент неустойчивости Рэлея–Тейлора, эффект проявляется в членах начиная со второго порядка малости.

Обратимся к случаю, когда вещества сильно различаются по плотностям, т.е. $\frac{\rho_0^{(2)}(0)}{\rho_0^{(1)}(0)} \ll 1$ ($A \approx 1$, например, аблятор и оболочка). Получаем:

$$\omega^2 \approx -g\rho_0^{(1)}(0) \frac{1}{m_{(1)} + \frac{g}{K_1}} \left(1 + \frac{\rho_0^{(2)}(0)}{\rho_0^{(1)}(0)} \left(\frac{m_{(1)} + \frac{g}{K_1}}{m_{(2)} + \frac{g}{K_2}} - 1 \right) \right). \quad (3.30)$$

При численном решении дисперсионного уравнения (3.18) можно видеть, что сжимаемость в этом случае имеет меньшее влияние на инкремент: см. рис. 3.4. Также из представленных графиков видно, что инкремент может превышать соответствующее значение для несжимаемого случая, если $\beta_1 < \beta_2$, т.е. $K_2 < K_1$ – лёгкая жидкость более сжимаема, чем тяжёлая. Однако этот тезис скорее чисто математический, чем физический, т.к. в изотермическом случае и при $\rho_1 > \rho_2$ всегда будем иметь $K_1 < K_2$. Наиболее явный эффект сжимаемости наблюдается для длинноволновых возмущений: существенное отклонение значений инкремента от 1 при увеличении β_1 (уменьшении волнового числа). Таким образом, сжимаемость может как увеличивать инкремент, так и уменьшать его по сравнению с несжимаемым случаем в зависимости от того, более или менее сжимаема лёгкая жидкость.

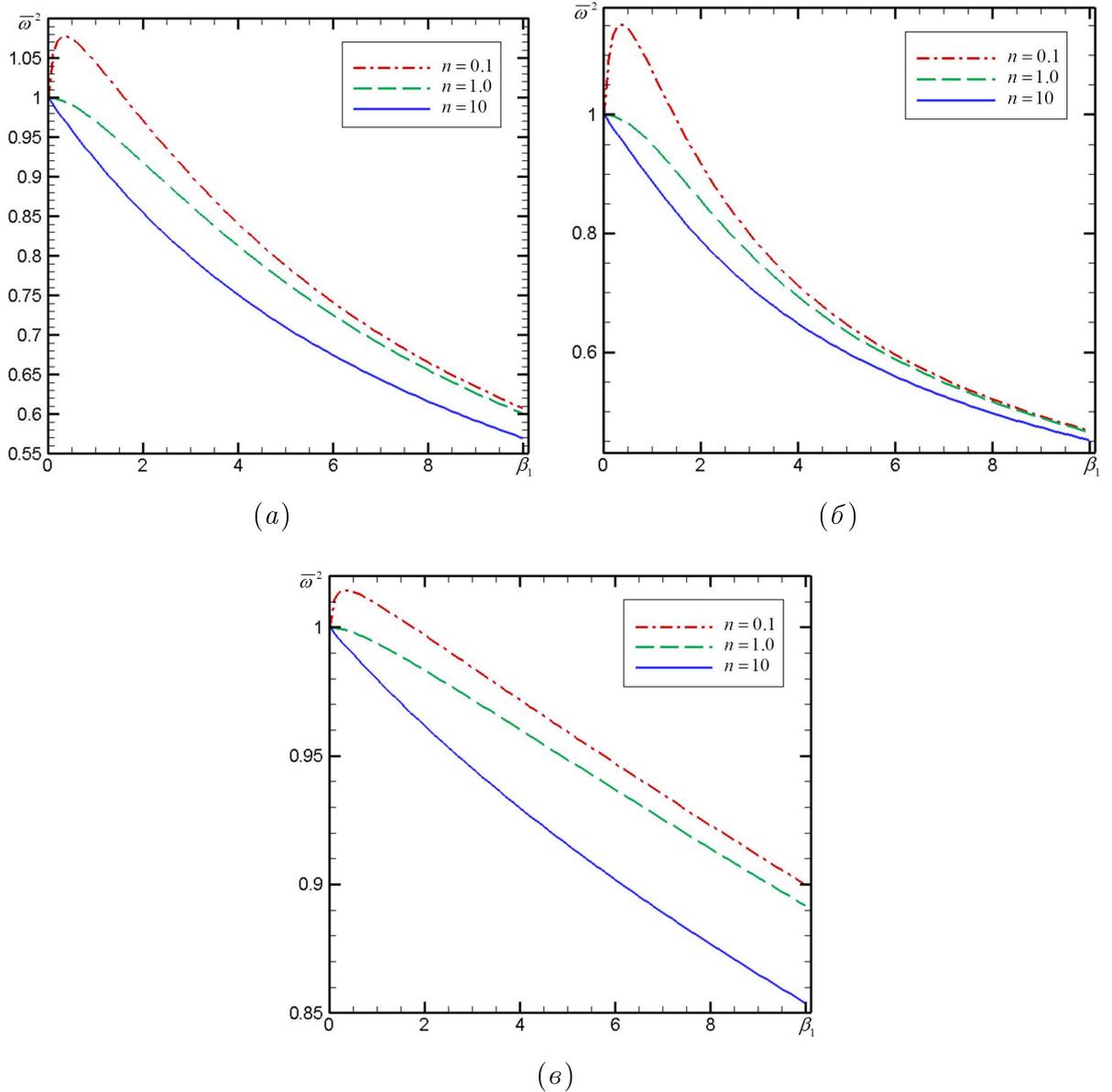


Рис. 3.4. Зависимость безразмерного инкремента $\bar{\omega}^2 = \frac{\omega^2}{kgA}$ от β_1 : (а) – $A = 0.1$, (б) – $A = 0.5$, (в) – $A = 0.9$. Напомним, что $\beta_i = \frac{g}{kK_i}$, $n = \frac{\beta_1}{\beta_2}$, а безразмерный инкремент определяется выражением $\bar{\omega}^2 = \frac{1}{2A} \frac{\delta - 1}{\frac{\delta}{\beta_1 - \sqrt{\beta_1^2 + 4A\bar{\omega}^2\beta_1 + 4}} + \frac{1}{\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 + 4A\bar{\omega}^2\beta_2 + 4}}}$, где $\delta = \frac{\rho_0^{(1)}(0)}{\rho_0^{(2)}(0)}$, $A = \frac{\delta - 1}{\delta + 1}$ – число Атвуда.

Помимо всего прочего следует отметить, что для изотермического случая можно выделить только стратификационные параметры β_i (статическая сжимаемость), влияющие на величину инкремента и рост возмущений. В слу-

чае, если массы жидкостей конечны, то инкремент также будет зависеть от соответствующих высот h_i , для которых ставятся граничные условия сверху и снизу.

В работах [143, 144] изотермический случай был дополнен изучением изоэнтропических возмущений. Мы же перейдём к рассмотрению ещё более общей формулировки – изоэнтропические начальные профили и такие же возмущения – тогда будем иметь $p = p(\rho)$. Для малых возмущений в первом приближении получаем:

$$\delta p = c^2 \delta \rho, \quad (3.31)$$

где $c^2 = \frac{dp}{d\rho}$. Далее, обобщая условие сшивки давления на границе раздела, получим:

$$\delta p^{(1)}(0) + \left. \frac{dp_0^{(1)}}{dz} \right|_{z=0} \zeta = \delta p^{(2)}(0) + \left. \frac{dp_0^{(2)}}{dz} \right|_{z=0} \zeta. \quad (3.32)$$

Здесь, как и ранее, (1) и (2) нумерует жидкости – верхнюю и нижнюю соответственно. С учётом уравнения равновесия на начальный момент:

$$\delta p^{(1)}(0) - \rho_0^{(1)}(0)g\zeta = \delta p^{(2)}(0) - \rho_0^{(2)}(0)g\zeta. \quad (3.33)$$

Принимая во внимание кинематическое условие на границе ($W_1(0) = W_2(0)$, $\zeta = \delta v_z / \omega$) и переходя к Фурье-компонентам, (3.33) можно переписать следующим образом:

$$\rho_0^{(1)}(0) \left(\frac{P_1(0)}{\omega \rho_0^{(1)}(0) W_1(0)} - \frac{g}{\omega^2} \right) = \rho_0^{(2)}(0) \left(\frac{P_2(0)}{\omega \rho_0^{(2)}(0) W_2(0)} - \frac{g}{\omega^2} \right). \quad (3.34)$$

Воспользуемся уравнением для импульсов на границе:

$$\begin{aligned} \omega \rho_0(0) W(0) &= - \left(\left. \frac{dP}{dz} \right|_{z=0} + gR(0) \right) = \\ &= -P(0) \left(\frac{g}{c^2(0)} + \frac{\left. \frac{dP}{dz} \right|_{z=0}}{P(0)} \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Подставляя полученное выражение в (3.34), получаем

$$\rho_0^{(1)} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{gk}{\omega^2} \right) = \rho_0^{(2)} \left(\frac{1}{l_2} + \frac{gk}{\omega^2} \right), \quad (3.36)$$

где

$$l_i = \frac{1}{k} \left(\frac{g}{c_i^2(0)} + \frac{\left. \frac{dP_i}{dz} \right|_{z=0}}{P_i(0)} \right). \quad (3.37)$$

По своей сути выражение (3.36) является дисперсионным соотношением в общем виде, однако дополнительно требуется определить функции c_i и P_i .

Переписав (3.36) в виде

$$\omega^2 = \omega_c^2 \frac{\rho_0^{(1)}(0) + \rho_0^{(2)}(0)}{-\frac{\rho_0^{(1)}(0)}{l_1} + \frac{\rho_0^{(2)}(0)}{l_2}}, \quad (3.38)$$

видно его сходство с выражением (3.18), полученным ранее для изотермического случая.

Получим теперь уравнения для определения неизвестных функций. Для этого, как и прежде, продифференцируем уравнение непрерывности и подставим значение вектора скорости, тогда будем иметь:

$$\frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} - \nabla^2 \delta p + \nabla (\mathbf{g} \delta \rho) = 0 \quad (3.39)$$

Переходя к одной функции δp и пользуясь выражением (3.31), уравнение выше преобразуется к виду:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} - \nabla^2 \delta p + \frac{1}{c^2} \mathbf{g} \nabla \delta p + g^2 \rho_0 \frac{d^2 \rho}{dp^2} \delta p = 0, \quad (3.40)$$

где последний член получен при дифференцировании c^2 , а именно $\frac{d}{dz} c^{-2} = \frac{d}{dz} \frac{dp}{\rho} = -g \rho \frac{d}{dp} \frac{dp}{\rho}$.

Обратимся к определённому виду уравнения состояния для конкретизации последнего члена в уравнении (3.40), например, $\left(\frac{p+B}{p_0(0)+B}\right)^{1/\gamma} = \frac{\rho}{\rho_0(0)}$.

В этом случае

$$\rho \frac{d^2 \rho}{dp^2} = \frac{1-\gamma}{\gamma^2} \frac{\rho^2}{(p+B)^2} = \frac{1-\gamma}{c^4}. \quad (3.41)$$

Тогда (3.40) перепишется в виде

$$\frac{d^2 P(z)}{dz^2} + \frac{g}{c^2(z)} \frac{dP(z)}{dz} + \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - k^2 + g^2 \frac{\gamma-1}{c^4(z)} \right) P(z) = 0, \quad (3.42)$$

где $c^2(z) = c^2(0) - (\gamma-1)gz$, $c^2(0) = \gamma p_0(0)/\rho_0(0)$. Системы символьных вычислений, такие как Maple [145], для (3.42) дают решение через гипергеометрические функции, однако их вид представляется довольно громоздким и сложным для дальнейшего анализа. По этой причине эффективнее исследовать полученное уравнение численно.

Отметим, что дисперсионное уравнение, подобное (3.36), также было получено в работе [146], в которой дополнительно было показано, что найденный таким образом инкремент будет действительным, т.е. малые возмущения будут развиваться, увеличиваясь в амплитуде. В случае изоэнтропической конфигурации, как мы видим из (3.42), в набор параметров необходимо добавить ещё два, отвечающих за динамическую сжимаемость (конечность скорости звука) – показатели адиабаты обоих веществ γ_i . Выводы, полученные ранее в данном разделе для изотермического уравнения состояния, остаются верными и здесь, однако за счёт появления новых факторов некоторые из них следует переформулировать. Так, например, возрастающая сжимаемость тяжёлой жидкости (γ_1 уменьшается) стабилизирует неустойчивость, а возрастающая сжимаемость лёгкой жидкости – наоборот.

Приведённой в данном разделе информации достаточно, чтобы продолжить наше последующее рассмотрение вопроса о влиянии сжимаемости на перемешивание веществ на основе серии численных расчётов.

3.3. Численное моделирование развития неустойчивости Рэля–Тейлора в сжимаемом случае

Как мы могли видеть в предыдущем разделе, даже линейный анализ влияния сжимаемости представляется достаточно сложным и сводится к численному решению дисперсионного уравнения. Некоторые попытки описания динамики фронтов струй и пузырей на поздних стадиях предпринимались в [147]. Однако полноценный выход за рамки линейного анализа может быть выполнен только за счёт проведения соответствующих численных расчётов. Подобное моделирование проводилось в работах [148–152], однако в них рассматривались другие диапазоны параметров, соответствующие иным прикладным задачам, нежели ЛТС.

3.3.1. Особенности вычисления параметров для смешанных ячеек

Прежде чем обратиться к постановкам расчётов, необходимо остановиться на возникающих особенностях вычислений величин в смешанных ячейках, т.е. в тех, где находится более одной компоненты смеси. Как мы видели, в набор параметров сжимаемости входят показатели адиабаты веществ. Их варьирование приводит к тому, что во-первых, следует обобщить решение задачи о распаде разрыва на случай, когда справа и слева находятся вещества с различными γ , а во-вторых, принять модель, позволяющую вычислять γ в смешанных ячейках. Воспользуемся соображениями из [122, 153]. Будем полагать, что температуры компонент равны температуре смеси – $T_i = T$, здесь i нумерует компоненты, а внутренняя энергии смеси равна сумме внутренних энергий компонент – $E = m\varepsilon = \sum_i E_i$, $E_i = m_i\varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \frac{p_i}{\rho_i(\gamma_i - 1)}$, где m_i – масса i -ой компоненты смеси в ячейке. Таким образом

$$E = \frac{pV}{\gamma - 1} = \sum_i \frac{p_i V_i}{\gamma_i - 1}, \quad (3.43)$$

или

$$\frac{1}{\gamma - 1} = \sum_i \frac{Y_i}{\gamma_i - 1}, \quad (3.44)$$

где $Y_i = \frac{V_i}{V}$ - объёмная концентрация i -ой компоненты смеси, V_i - объём части ячейки, занимаемый i -ой компонентой, $p_i = p$ для всех i .

Поскольку в уравнении (2.4) присутствует массовая концентрация $C_i = \rho_i / \rho = m_i / m$, то дополнительно необходимо получить соотношение между массовой и объёмной концентрацией. Напрямую из введённых определений вытекает следующее соотношение:

$$Y_i = \frac{C_i}{\rho_i} \sum_k \rho_k Y_k. \quad (3.45)$$

Проводя суммирование по i и учитывая $\sum_k Y_k = 1$, получаем, что $\sum_k \rho_k Y_k = \left(\sum_i C_i / \rho_i \right)^{-1}$. Подставляя в (3.45), получаем выражение объёмной концентрации через массовую:

$$Y_i = \frac{C_i}{\rho_i} / \sum_k \frac{C_k}{\rho_k}. \quad (3.46)$$

Таким образом произведён учёт возможных различий в показателях адиабаты для компонент рассматриваемой смеси. Примеры расчётов развития НРМ с использованием данной методики можно найти, например, в [154, 155].

3.3.2. Постановка задач для моделирования и полученные результаты

При постановке задач для моделирования в этом разделе мы будем ориентироваться на формулировки, которые уже были использованы в разделе 2.3.1, с тем отличием, что начальные профили давления и плотности соответствуют изоэнтропической конфигурации, а расчёты в серии будут отличаться параметрами сжимаемости, выделенными в предыдущем разделе.

Тем самым мы будем оставаться в рамках задач ЛТС как основных, представляющих интерес в данной работе.

Таблица 3.1. Параметры расчётов одномодового уединённого возмущения в сжимаемом случае, где $\beta_i = g/kc_{Ti}^2$, γ_i – показатели адиабаты.

№	$\rho_{01}(0)$	$\rho_{02}(0)$	A	$p_0(0)$	γ_1	γ_2	$\beta_1 \equiv \beta_H$	β_2	$n = \beta_1/\beta_2$
1	3.0	1.0	0.5	60.0	5/3	5/3	0.05	0.017	3.0
2	10.0	1.0	0.82	60.0	5/3	5/3	0.17	0.017	10.0
3	1.5	1.0	0.2	60.0	5/3	5/3	0.025	0.017	1.5
4	3.0	1.0	0.5	60.0	5/3	7/5	0.05	0.017	3.0
5	3.0	1.0	0.5	60.0	5/3	1.1	0.05	0.017	3.0
6	3.0	1.0	0.5	60.0	7/5	7/5	0.05	0.017	3.0
7	10.0	1.0	0.82	60.0	7/5	7/5	0.17	0.017	10.0
8	1.5	1.0	0.2	60.0	7/5	7/5	0.025	0.017	1.5
9	3.0	1.0	0.5	60.0	7/5	5/3	0.05	0.017	3.0
10	3.0	1.0	0.5	60.0	7/5	1.1	0.05	0.017	3.0
11	3.0	1.0	0.5	18.0	5/3	5/3	0.17	0.056	3.0
12	3.0	1.0	0.5	116.0	5/3	5/3	0.026	0.0086	3.0

Проведём анализ результатов выполненных расчётов из таблицы 3.1, сравнивая поочерёдно те из них, которые отличаются не более чем одним параметром. Это позволит добиться большей наглядности делаемых впоследствии выводов. Обратимся сначала к расчётам № 6, 9 и 10, которые отличаются друг от друга показателем адиабаты лёгкой жидкости. На рис. 3.5 и 3.6 представлены соответствующие профили плотности в начальный момент времени и зависимости ширины зоны перемешивания от времени. Из графиков $L(t)$ видно, что чем выше значение γ_2 , т.е. чем меньше сжимаемость лёгкой жидкости, тем медленнее растёт область перемешивания, что соответствует

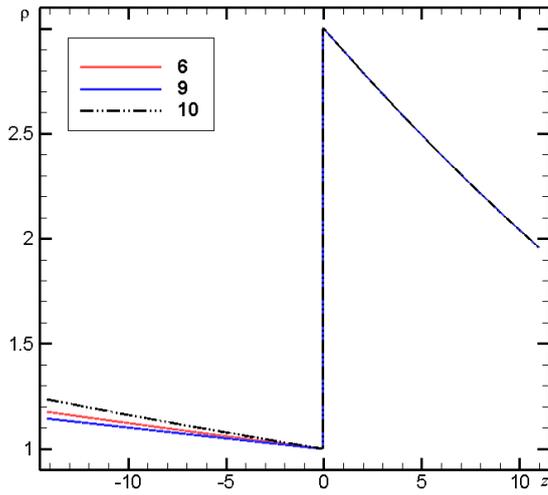


Рис. 3.5. Профили плотности на начальный момент времени для расчётов № 6, 9 и 10 из таблицы 3.1.

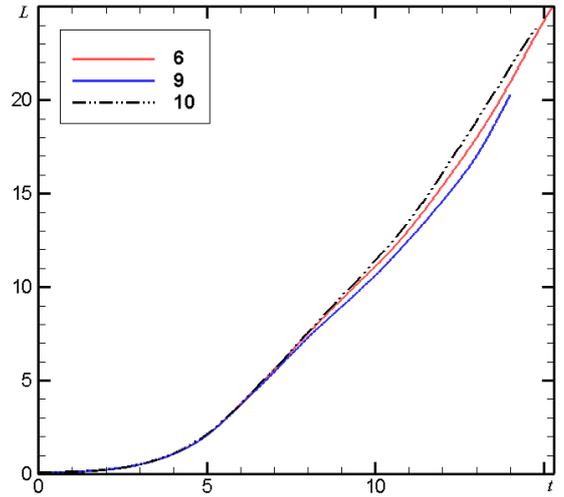


Рис. 3.6. Зависимости ширины зоны перемешивания от времени для расчётов № 6, 9 и 10 из таблицы 3.1.

результатам линейного анализа.

Далее рассмотрим расчёты № 1 и 9, для которых варьируемым параметром является показатель адиабаты тяжёлого вещества. На рис. 3.8 представлены соответствующие зависимости ширины зоны перемешивания от времени. Видно, что различия в эволюции слоя перемешивания малы, однако

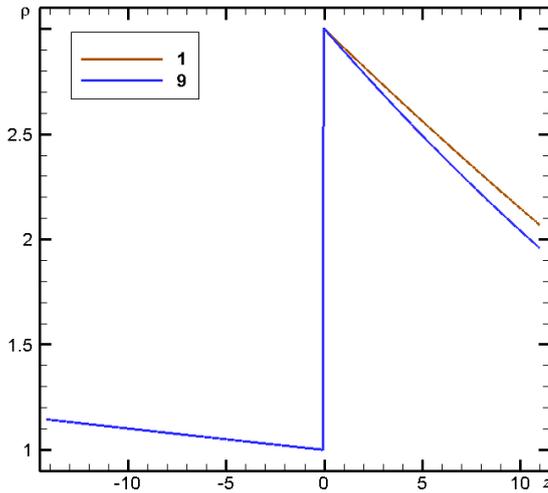


Рис. 3.7. Профили плотности на начальный момент времени для расчётов № 1 и 9 из таблицы 3.1.

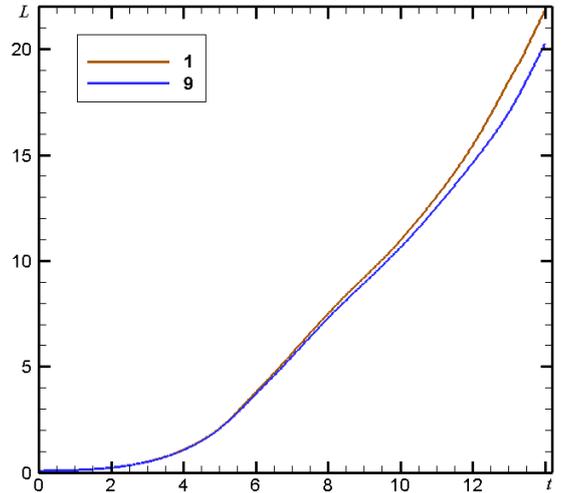


Рис. 3.8. Зависимости ширины зоны перемешивания от времени для расчётов № 4 и 6 из таблицы 3.1.

различимы на графиках. Также видно, что развитие начального возмущения

происходит чуть быстрее при большем значении γ_1 , т.е. при меньшей сжимаемости тяжёлого вещества. Это наблюдение согласуется с выводами, сделанными в предыдущем разделе при рассмотрении линейной стадии.

Теперь обратимся к расчётам, в которых показатели адиабаты сохраняли свои значения, а изменению подвергались параметры β_i – № 1, 11 и 12. Сопоставление кривых на рис. 3.10 позволяет сделать следующее утвержде-

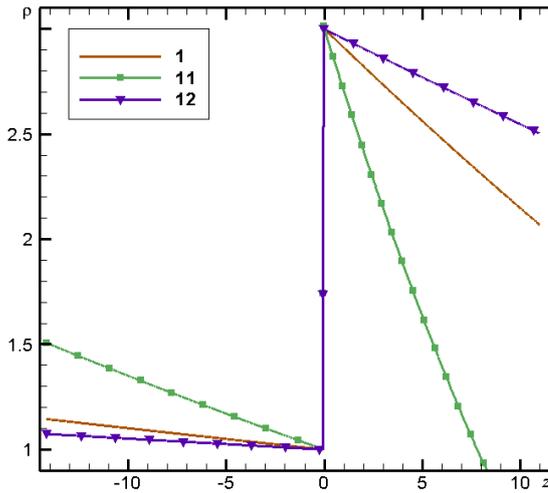


Рис. 3.9. Профили плотности на начальный момент времени для расчётов № 1, 11 и 12 из таблицы 3.1.

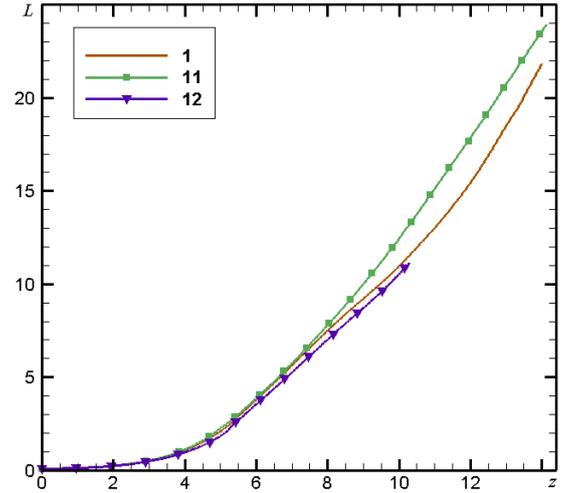


Рис. 3.10. Зависимости ширины зоны перемешивания от времени для расчётов № 1, 11 и 12 из таблицы 3.1.

ние: чем выше значение параметра β_1 , тем быстрее происходит рост ширины зоны перемешивания. Таким образом наибольшая ширина зоны перемешивания получается в расчёте № 11 при $\beta_1 = 0.17$. Из рассмотренной тройки расчётов также видно, что стратифицированность начальных профилей оказывает более весомое влияние на развитие возмущений нежели динамическая сжимаемость (т.е. варьирование показателей адиабаты веществ).

Приведём здесь также для сравнения изолинии массовой концентрации в плоскости xOz для различных расчётов в достаточно близкие моменты времени – Рис 3.11. Преимущественно данные картины носят один и тот же характер. Однако, несмотря на схожесть, нельзя не отметить различий в динамике развития вторичной неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, которые

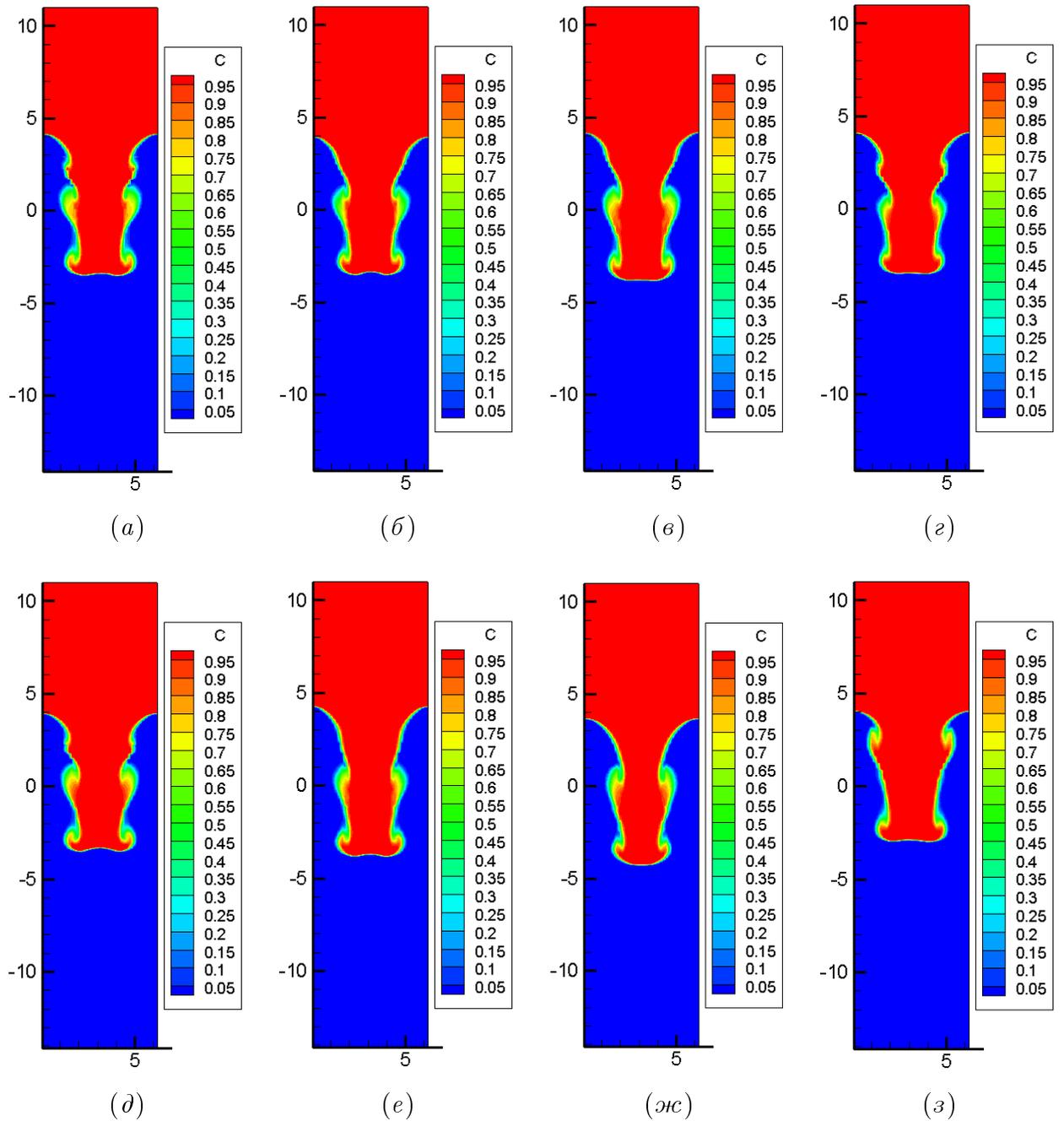


Рис. 3.11. Изолинии концентрации для расчётов (а) – №1, (б) – №4, (в) – №5, (г) – №6, (д) – №9, (е) – №10, (ж) – №11, (з) – №12 из таблицы 3.1 на момент времени $t \approx 8.0$.

проявляются, как видно из рисунков, в величине характерной длины волны Λ на рассматриваемый момент времени. Как мы увидим в следующей главе, Λ присутствует в критерии разрушения струи, формирующейся при развитии НРТ, а также участвует в оценке скорости относительного движения тяжёлой жидкости в лёгкой. Таким образом, при более строгом написании

выражений в Главе 4 могут возникать поправочные коэффициенты для значений “критического” возраста возмущений. Однако не следует забывать, что из проведённых расчётов видно, что различия в ширине зоны перемешивания на момент окончания счёта не превышают 15%, т.е. как динамическая, так и статическая сжимаемости не являются определяющими явлениями при рассмотрении задач ЛТС, но могут оказывать более существенное влияние, например, при проведении экспериментов в ударных трубах.

3.4. Выводы к Главе 3

В данной главе проведена оценка масштаба влияния сжимаемости веществ, участвующих в перемешивании, для задач ЛТС. Было показано, что для характерных для лазерных мишеней времён, в течение которых происходит развитие гидродинамических неустойчивостей, величина этого фактора мала на фоне классического инкремента роста начальных возмущений.

Далее в главе представлен краткий обзор работ, посвящённых учёту сжимаемости веществ при исследовании развития НРТ в линейном приближении уравнений невязкой гидродинамики. Для изотермического и изоэнтропического случаев получены дисперсионные уравнения для определения инкремента роста возмущений, которые затем решаются численно. С использованием этих же уравнений были выделены безразмерные параметры, отвечающие за динамическую и статическую сжимаемости веществ. Для изотермического уравнения состояния исследован предельный случай малого параметра $\beta = g/kc_T^2$, т.е. практически несжимаемых жидкостей, из которого получено, что в линейном приближении при равенстве изотермических скоростей звука веществ, сжимаемость вообще не оказывает никакого воздействия на инкремент.

На основе анализа дисперсионных кривых, полученных в результате чис-

ленного решения дисперсионных уравнений, были сделаны следующие выводы, в том или ином виде встречающиеся в работах других авторов. Во-первых, в большей степени влияние сжимаемости проявляется для длинноволновых возмущений, а также в случае близких плотностей веществ, т.е. при $A \ll 1$. Во-вторых, возрастающая при уменьшении значения показателя адиабаты сжимаемость тяжёлой жидкости стабилизирует неустойчивость, а возрастающая сжимаемость лёгкой жидкости – дестабилизирует.

Для дальнейшего исследования влияния сжимаемости на нелинейной стадии процесса перемешивания были сформулированы и проведены численные расчёты для различных значений выделенных параметров. Анализ полученных результатов показал, что выводы, сделанные для линейной стадии, остаются верны и в более поздние моменты времени. Также было показано, что неоднородность (стратифицированность) начальных профилей плотности и давления в большей степени влияет на развитие неустойчивости, нежели варьирование показателей адиабаты веществ.

При сопоставлении изолиний массовой концентрации тяжёлого вещества было получено, что для различных параметров сжимаемости наблюдаются небольшие отличия в динамике развития вторичной неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, заключающиеся в величине характерной длины волны на рассматриваемый момент времени. Этот факт может сказаться на времени разрушения струи, причём в большей степени для случаев многомодовых возмущений.

Глава 4

Эволюционный подход. Нелинейный анализ неустойчивости Рэля–Тейлора

В Главе 3 подробно обсуждалось влияние свойств веществ и геометрии задачи, характерных для лазерных мишеней, на развитие малых возмущений поверхности раздела между веществами. Но помимо этих эффектов может проявляться влияние других видов неустойчивостей, например, сдвиговой неустойчивости Кельвина–Гельмгольца [156]. Здесь возможны два основных случая – действие НКГ вдоль поверхности раздела веществ и вдоль поверхности образующихся в процессе развития НРТ струй тяжелого вещества – которые будут рассмотрены в разделах 4.1 и 4.2 соответственно.

4.1. Совместное действие неустойчивостей

Рэля–Тейлора и Кельвина–Гельмгольца

Одним из возможных источников возникновения неустойчивостей при прямом способе сжатия термоядерной мишени является неточность попадания лазерного луча по мишени, вследствие чего возникает движение в направлении поперечном направлению действия ускорения, что приводит к развитию НКГ вдоль поверхности раздела (см. рис. 4.1). Обратимся к исследованию влияния данного факта. Заменяя первое уравнение системы (Б.2) на $C_1 - C_2 = (\rho_1 - \rho_2)gA$, можно получить следующее дисперсионное уравнение:

$$\rho_2 \omega^2 + \rho_1 (k_x v_\tau - \omega)^2 + kg (\rho_1 - \rho_2) = 0 \quad (4.1)$$

или инкремент

$$\gamma_{RTI+KHI} = \sqrt{kg \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} k_x^2 v_\tau^2}. \quad (4.2)$$

Из (4.2) видно, что наличие сдвигового движения дополнительно способствует развитию малых возмущений на контактной границе ($\rho_1 > \rho_2$). Этот

результат был также подтвержден в численных расчётах, например, в работе [158].

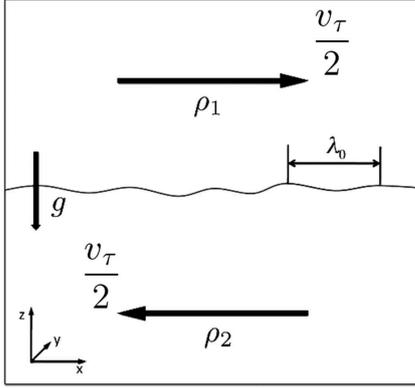


Рис. 4.1. Схематическое изображение объединённой РТ/КГ неустойчивости [157].

Однако, согласно [157] ситуация обстоит несколько иначе: на слабо нелинейной стадии скорость роста возмущений не увеличивается монотонно с увеличением относительной сдвиговой скорости. Представленные результаты моделирования показывают, что при небольшой добавке к сдвиговой скорости скорость роста возмущений замедляется. Также было показано, что в основании немонотонности скорости роста

возмущений лежит немонотонность изменения вертикальной компоненты турбулентной кинетической энергии при варьировании значения сдвиговой скорости. Небольшая сдвиговая скорость меняет структуру неустойчивости таким образом, что меньше энергии переходит в вертикальное перемешивания (более походит на чистую НКГ). Дальнейшее увеличение сдвиговой скорости просто увеличивает количество доступной энергии и, таким образом, снова увеличивает перемешивание. Оптимальное значение v_τ при фиксированных параметрах НРТ составляет $v_\tau^{opt} \approx 1.8 \sqrt{\frac{Ag\lambda_0}{1-A^2}}$, что соответствует отношению масштабов скоростей $v_{RT}/v_{RTKH} \approx 0.4$, где $v_{RT} = \sqrt{Ag\lambda_0}$,

$$v_{KH} = v_\tau, \quad v_{RTKH} = \sqrt{\frac{1-A^2}{2} \pi v_{KH}^2 + v_{RT}^2}.$$

В заключении к данному разделу оценим диапазон тангенциальных ско-

ростей, характерных для задач ЛТС. Из геометрических соображений нетрудно получить величину скорости, при которой выделенный малый объём на поверхности мишени не попадёт в горячий центр, т.е. процесс сжатия будет заведомо неэффективным:

$$v_\tau \gtrsim v \frac{1}{2} \frac{r}{R}, \quad (4.3)$$

Таким образом логично рассматривать $v_\tau < 50$ км/с.

4.2. Эволюционная теория

Не менее важным случаем взаимодействия сдвиговой и гравитационной неустойчивостей является действие НКГ вдоль поверхности сформированной и двигающейся относительно лёгкой жидкости струи тяжёлого вещества.

До сих пор при исследовании влияния различных факторов на развитие НРТ проводился лишь линейный анализ, который безусловно важен для понимания сути явления и значимости того или иного эффекта, но составляет лишь часть от всего процесса в целом. В данном разделе мы подробно обсудим и предложим способ описания стадии, переходной к стадии развитой турбулентности, основываясь на данных, соответствующих концу линейного этапа в развитии возмущения.

4.2.1. Критический возраст

Итак, в рассматриваемом случае рост амплитуды НКГ приводит к разрушению первоначальной структуры течения. Момент разрушения (все величины, относящиеся к этому моменту времени будем маркировать *) соответствует следующему равенству:

$$\zeta(t_*) = d(t_*) \text{ для } 2D \quad (4.4)$$

$$\zeta(t_*) = r(t_*) \text{ для 3D} \quad (4.5)$$

В предположении, что после линейной стадии масса струи (m_s) практически не меняется (детально было показано в разделе 2.3), можно получить величины d и r на основе данных, верных на конец линейной стадии. Для этого аппроксимируем реальную форму возмущения прямоугольным (2D) или цилиндрическим (3D) аналогом (см. рис. 4.2).

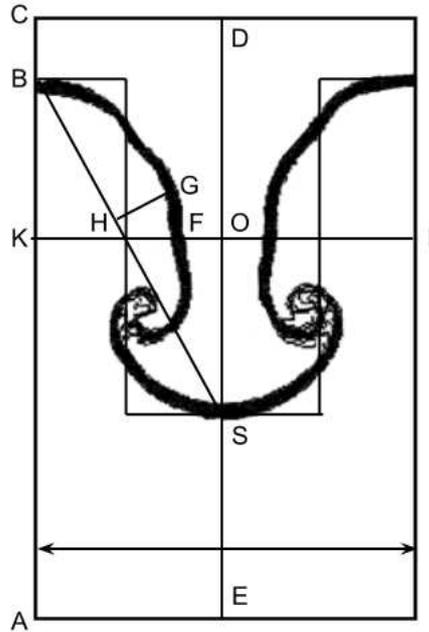


Рис. 4.2. Схематическое изображение развития одиночного возмущения. $KI = \lambda$ – длина волны НРТ, $BS = \Lambda$ – длина волны НКГ, $HG = \zeta$ – амплитуда НКГ, $OS = s$ – высота струи, $BK = b$ – высота пузыря, $a = b + s$, $OF = d$ или r .

$$2ds\rho_h = m_s = \rho_h \left| \int_{\lambda/4}^{3\lambda/4} \frac{a}{2} \cos(kx) dx \right| = \rho_h \frac{a}{k} \approx \rho_h \frac{\lambda^2}{2\pi^2} \quad (4.6)$$

– для 2D,

$$\pi r^2 s \rho_h = m_s = \rho_h \iint_{\lambda\sqrt{2}/4}^{3\lambda\sqrt{2}/4} \frac{a}{2} \cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x\right) \cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}y\right) dx dy = \rho_h \frac{4a}{k^2} \approx \rho_h \frac{\lambda^3}{\pi^3} \quad (4.7)$$

– для 3D. Также в приведённых выше оценках использовалось выражение, верное в сделанных предположениях на конец линейной стадии: $\alpha = ka \approx 2$,

где k – волновое число, a – ширина зоны перемешивания, т.е. $a \sim \frac{\lambda}{\pi}$.

Достаточно понятно, что наиболее “опасная” мода НКГ характеризуется соотношениями $qd \approx 1$ или $qr \approx 1$, где $q = \frac{2\pi}{\Lambda}$ – волновое число возмущения НКГ, Λ – длина волны НКГ (BS на рис. 4.2). Таким образом, с учетом выражений (4.4) и (4.5), можно утверждать, что для описания НКГ в рамках данной задачи достаточно ограничится линейной стадией.

Амплитуда НКГ для линейной стадии дается выражением

$$\zeta(t) = \zeta_0 \int_{t_0}^t \gamma_{KHI} dt, \quad (4.8)$$

где ζ_0 может быть вычислена с помощью следующего выражения:

$$\zeta_0 = \zeta(t_0) \approx \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \frac{\lambda}{2\pi}. \quad (4.9)$$

Инкремент НКГ был получен ранее в нескольких работах [159, 160] (соответствующие вычисления представлены в Приложении Б) и может быть записан в форме:

$$\gamma_{KHI} = qv_0 f, \quad (4.10)$$

где $f = \frac{\sqrt{G\delta}}{1 + G\delta}$, v_0 – относительная скорость движения жидкостей, $\delta = \frac{\rho_l}{\rho_h} = \frac{1 - A}{1 + A}$, A – число Атвуда, G – геометрический фактор, различный для различных размерностей задачи о перемешивании. Так для 2D случая плоской струи

$$G_p^{(0)} = th(qd), \quad (4.11)$$

а для 3D случая цилиндрической струи

$$G_c^{(0)} = \frac{K_0(qr)I_1(qr)}{I_0(qr)K_1(qr)} \quad (4.12)$$

Для вычисления возраста возмущения, соответствующего моменту разрушения (обозначим через α_* – критический возраст), осталось определить значение относительной скорости движения тяжёлой струи в лёгкой жидкости.

Воспользуемся приближенным выражением для циркуляции скорости по контуру ACDE [161] на рис. 4.2 (подробные вычисления проведены в Приложении А).

$$\Gamma \simeq \Lambda v_0 \simeq \frac{2v_a}{k}, v_a = \frac{da}{dt} \quad (4.13)$$

Таким образом, можно вычислить величину $\int_{t_0}^{t_*} \gamma_{KHID} dt$, заменяя приведённый инкремент НКГ f его средним значением $\bar{f} \approx f(1)$. Это приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \zeta_0 \exp \left(\int_{t_0}^{t_*} \gamma_{KHID} dt \right) &= \zeta_0 \exp \left(\bar{f} \int_{a(t_0)}^{a(t_*)} \frac{4\pi}{k} \frac{da}{a^2 + \frac{\lambda^2}{4}} \right) = \\ &= \zeta_0 \exp \left(4\bar{f} \arctan \left(\frac{2a}{\lambda} \right) \Big|_{t_0}^{t_*} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{2} \frac{\lambda}{2\pi} \exp \left(4\bar{f} \left(\arctan \frac{\alpha_*}{\pi} - \arctan \frac{2}{\pi} \right) \right) = \frac{1}{\alpha_* - 1} \frac{\lambda}{2\pi} \quad (4.14) \end{aligned}$$

для 2D случая и

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2} \frac{\lambda}{2\pi} \exp \left(\sqrt{2^3} \bar{f} \left(\arctan \frac{\alpha_*}{\pi\sqrt{2}} - \arctan \frac{\sqrt{2}}{\pi} \right) \right) = \frac{\lambda\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^3} \sqrt{\alpha_* - 1}} \quad (4.15)$$

– для 3D. Здесь предполагалось, что $\lambda_{3D} = \sqrt{2}\lambda_{2D}$. Видим, что значения для критического возраста являются решениями трансцендентных уравнений (4.14) и (4.15) и зависят от единственного параметра δ . Приведём графики данных зависимостей на рис. 4.3. Значение критического возраста тем больше, чем больше разница между плотностями, т.е. тем быстрее разрушаются характерные структуры течения и наступает стадия перемешивания.

Здесь при написании формул (4.14) и (4.15) для выражения $\frac{1}{ks} = \frac{1}{\alpha - \beta}$ в критический момент времени использовалась оценка (в сделанных ранее предположениях) $\frac{1}{\alpha_* - 1}$, т.е. после линейной стадии глубина пузыря практически не растёт. Однако можно поступить и иным образом: воспользуемся

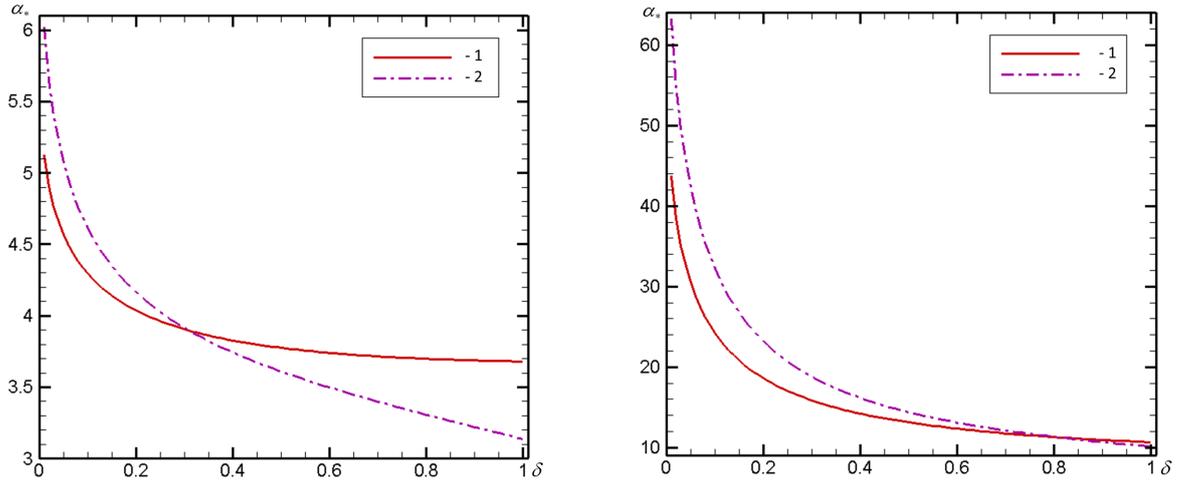


Рис. 4.3. Зависимость критического возраста от отношения плотностей жидкостей для 2D (слева) и 3D (справа) случая; номер 1 соответствует значениям без учёта асимметрии развития струй и пузырей, 2 – с учётом асимметрии.

оценочным выражением для асимметрии перемешивания, а именно

$$s \approx (1 + A)b. \quad (4.16)$$

Тогда $\frac{1}{ks} \approx \frac{2 + A}{1 + A} \cdot \frac{1}{ka}$. Правые части в (4.14) и (4.15) преобразуются к следующему виду:

$$d(t_*) = \frac{2 + A}{1 + A} \frac{1}{\alpha_*} \frac{\lambda}{2\pi} \quad (4.17)$$

– для 2D,

$$r(t_*) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_*}} \sqrt{\frac{2 + A}{1 + A}} \frac{\lambda \sqrt{2}}{\sqrt{\pi^3}} \quad (4.18)$$

– для 3D. Результаты решения новых уравнения для нахождения “критического” возраста также представлены на рис. 4.3. Видно, что использованные способы оценки практически эквивалентны и не дают существенных различий при расчёте значений критического возраста в широком диапазоне отношений плотностей δ . Однако к краям интервала наблюдается более заметное расхождение, что следует учитывать при анализе экспериментальных данных.

4.2.2. Влияние азимутальных мод неустойчивости

Кельвина–Гельмгольца на величину критического возраста

В предыдущем разделе 4.2.1 для вычисления значений “критического” возраста были использованы инкременты НКГ для основной моды. Однако, интерес также представляет влияние испещрённости струи на скорость её разрушения. Этому вопросу и будет посвящен данный раздел. В приложении Б

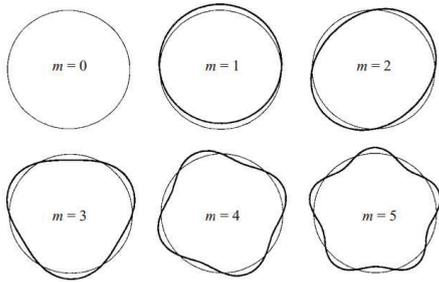


Рис. 4.4. Изменение формы цилиндрической струи при возрастании волнового числа азимутальных возмущений.

на рисунках Б.3 и Б.4 приведены графики зависимостей приведённого инкремента от произведения волнового числа на толщину/радиус струи при наличии различных азимутальных мод (см. рис. 4.4). Здесь нас будет интересовать случай $\delta < 1$, соответствующий также развитию НРТ, для которого во всём диапазоне kd (kr) верно неравенство $\bar{\gamma}_p^{(n)} > \bar{\gamma}_p^{(0)}$ ($\bar{\gamma}_c^{(m)} > \bar{\gamma}_c^{(0)}$).

Решение уравнений (4.14) и (4.15) для $n, m > 0$ приводит к следующим зависимостям “критических” возрастов от отношения плотностей – см. рис. 4.5. Видим, что наличие азимутальных мод снижает значение “критического” возраста и в 2D, и в 3D случае, т.е. разрушение возмущения наступает раньше. Следует также отметить, что более существенное снижение “критического” возраста наблюдается для случая цилиндрической струи, т.е. 3D.

4.2.3. Скорость роста ширины зоны перемешивания

Теперь мы можем развить теорию роста слоя перемешивания. Мы должны предположить, что все возмущения в начальном спектре имеют один и тот же возраст $\alpha \leq 2$. Также будем считать, что все возмущения развива-

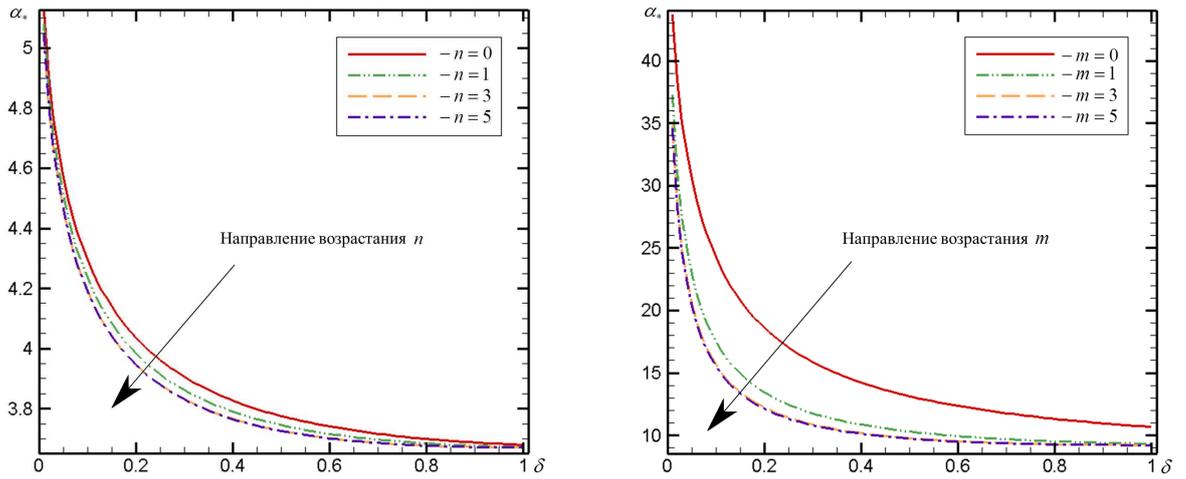


Рис. 4.5. Зависимости значений критического возраста от отношения плотностей веществ при наличии различных азимутальных мод: 2D – слева, 3D – справа.

ются независимо друг от друга: в силу потенциальности течения для всех величин имеет место фактор $e^{-\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$, т.е. ослабление влияния при удалении точек друг от друга. В описанной ситуации возмущения с более короткими длинами волн перейдут в турбулентное состояние раньше. Соответствующее время t и толщина слоя перемешивания L могут быть записаны следующим образом:

$$t \approx \gamma^{-1} \ln \frac{2\alpha_*}{\alpha_0}, \quad (4.19)$$

$$L \approx a_* = \frac{\alpha_*}{k} = \frac{\alpha_*}{2\pi} \lambda. \quad (4.20)$$

Эти выражения приводят к следующей связи L и t :

$$L = \alpha_{ET} A g t^2, \quad (4.21)$$

где

$$\alpha_{ET} = \frac{\alpha_*}{\ln^2 \frac{2\alpha_*}{\alpha_0}}. \quad (4.22)$$

Выражение для коэффициента пропорциональности (4.22) в случае вычисления глубины проникновения лёта гкой жидкости в тяжёлую можно записать

в виде:

$$\alpha_b = \frac{\alpha_{ET}}{1 + \left(\frac{s}{b}\right)_*} \approx \frac{\alpha_{ET}}{\alpha_*} \quad (4.23)$$

Из физических соображений понятно, что значение α_0 должно меняться в диапазоне $(0, \alpha_*)$, тогда коэффициенты α_{ET} (4.22) и α_b (4.23) будут увеличиваться при росте α_0 . При фиксированном значении начального возраста α_0 коэффициент α_b растёт с убыванием “критического” возраста. Более сложно выглядит картина для α_{ET} поскольку зависит от конкретного значения α_0 . Как видно из рис. 4.6, существует переходное значение α_0^C , которое может быть найдено путём решения уравнения $\alpha_{ET}^{(1)} \equiv \alpha_{ET}(\alpha_*^{(1)}, \alpha_0) = \alpha_{ET}(\alpha_*^{(2)}, \alpha_0) \equiv \alpha_{ET}^{(2)}$. Полагая $\alpha_*^{(1)} < \alpha_*^{(2)}$, при $\alpha_0 < \alpha_0^C$ имеем $\alpha_{ET}^{(1)} < \alpha_{ET}^{(2)}$, а при $\alpha_0 > \alpha_0^C$ –

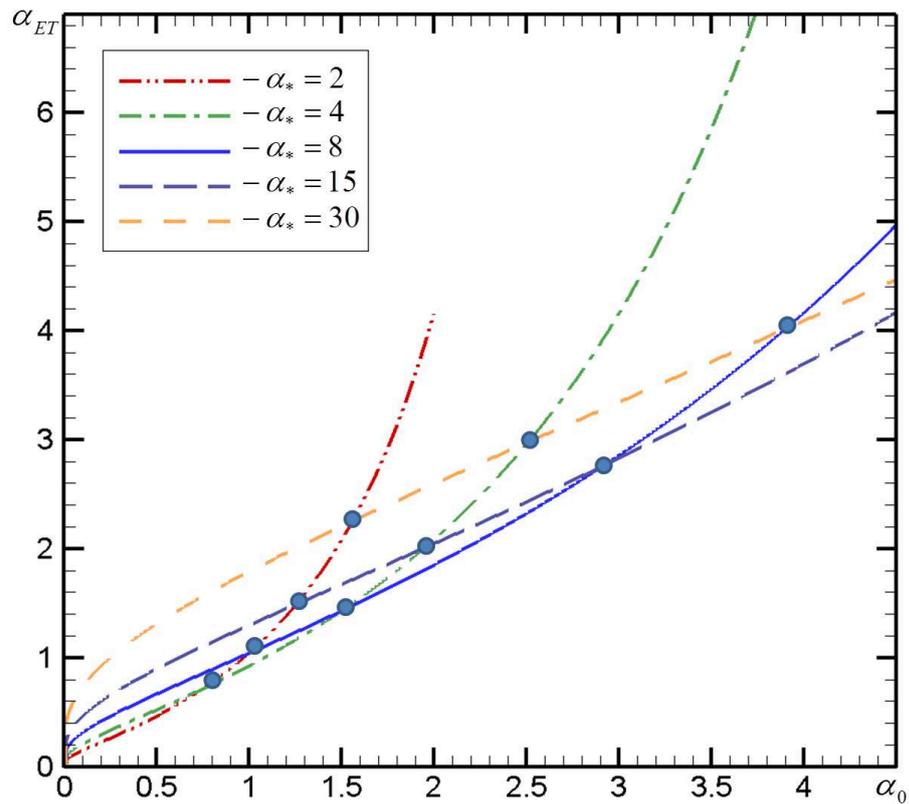


Рис. 4.6. Зависимости коэффициента α_{ET} от α_0 для различных “критических” возрастов. Точки на графике обозначают переходные значения α_0^C .

наоборот, $\alpha_{ET}^{(1)} > \alpha_{ET}^{(2)}$.

4.2.4. Влияние переходного слоя на скорость роста ширины зоны перемешивания

Полученная формула для коэффициента пропорциональности (4.22) может быть уточнена достаточно простым и понятным способом, например, для случая наличия переходного слоя между веществами. Как известно, в этом случае инкремент неустойчивости определяется формулой (1.7). Используя его в (4.19), получаем

$$\alpha_{ET}^{TL} = \frac{1}{1 + \alpha_*} \alpha_{ET}, \quad (4.24)$$

где TL означает наличие переходного слоя (*transition layer*). Из (4.24) видно, что при наличии переходного слоя между веществами, ширина зоны перемешивания должна расти значительно медленнее, достигая меньших результирующих значений.

4.2.5. Логарифмическое представление

Оказывается возможным распространить описанный выше подход и на случай присутствия в начальном возмущении мод с различными возрастами. Предположим, что амплитуды пропорциональны длинам волн в некоторой степени, т.е.

$$a_0 = a_1 \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^m, \quad (4.25)$$

где a_1 и λ_1 – масштабные факторы, m – константа. Или для возраста

$$\alpha_0 = \alpha_1 \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^{m-1}. \quad (4.26)$$

Подставляя выражение (4.26) в (4.22), можно получить следующее соотношение:

$$\alpha_{ET}^{-1/2} = \alpha_*^{-1/2} \left[\ln \frac{2\alpha_*}{\alpha_1} - (m-1) \ln \frac{2\pi}{\alpha_*} - (m-1) \ln \frac{L}{\lambda_1} \right], \quad (4.27)$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_{ET}}} = c_1 + c_2 \ln \frac{L}{\lambda_1}. \quad (4.28)$$

Данное выражение определяет неявную зависимость коэффициента пропорциональности от времени и даёт эволюцию влияющей части спектра с течением времени. В Главе 5 мы проведём сравнение результатов, полученных с помощью формул (4.22) и (4.27), и результатов различных численных расчётов и экспериментальных данных.

Важно отметить, что здесь также остаётся возможность для реализации автомодельного режима – это возможно при $m = 1$, в этом случае значение α_{ET} остаётся постоянным с течением времени. Проведём сравнение с моделью Беленького-Фрадкина (1.27) и определим остальные параметры спектра.

$$\alpha_{BF} \ln \frac{1+A}{1-A} gt^2 = \alpha_{ET} A gt^2, \quad (4.29)$$

или

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_*}} \ln \frac{2\alpha_*}{\alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{BF} \frac{1}{A} \ln \frac{1+A}{1-A}}}. \quad (4.30)$$

Тогда получаем следующее выражение для α_1 :

$$\alpha_1 = 2\alpha_* \exp \left(- \sqrt{\frac{\alpha_*}{\alpha_{BF} \frac{1}{A} \ln \frac{1+A}{1-A}}} \right). \quad (4.31)$$

Таким образом можно утверждать, что автомодельное решение достигается только в случае специально заданного начального спектра. Данная идея находит своё отражение также и в работе [75].

4.3. Выводы к Главе 4

В данной главе представлен теоретический подход для описания эволюции перемешивания, индуцированного НРТ. Данный подход базируется на идее, что возмущение с доминантной длиной волны разрушается спустя некоторое время под действием вторичной НКГ. Основным параметром модели,

отвечающим за момент разрушения возмущения, является “критический” возраст, который, как было показано, зависит от таких факторов, как размерность задачи (плоская двумерная струя разрушается быстрее цилиндрической), наличие азимутальных мод (чем более испещрена струя, тем быстрее она разрушается) и асимметрия развития струй и пузырей.

Далее, предполагая в начальном возмущении наличие различных мод с одинаковым возрастом, было получено аналитическое выражение для коэффициента пропорциональности в зависимости $L(t) = \alpha_{ET} A g t^2$. Данное выражение включает в себя помимо значения “критического” возраста также значение начального возраста.

Существенно отметить, что первоначально представленный в разделе 4.2.3 подход допускает ряд важных модификаций. Так, учёт наличия переходного слоя приводит к снижению коэффициента α_{ET} , причём, чем больше “критический” возраст, тем в большей степени уменьшается коэффициент.

Ещё одним важным дополнением является распространение эволюционного подхода на различные начальные возраста, но подчиняющиеся определенной спектральной закономерности, в этой работе – степенной $a \propto \lambda^m$. В этом случае оказывается возможным проследить за эволюцией влияющей (доминантной) части спектра со временем.

Глава 5

Результаты применения эволюционного подхода и регулировка его параметров

Важным этапом в разработке нового подхода является его последующее применение к численным и экспериментальным данным других авторов и сравнение полученных результатов с теоретическими ожиданиями. Данная глава будет посвящена апробации и регулировке параметров эволюционной модели на основании результатов сравнительного анализа.

5.1. Применение эволюционного подхода

Сначала обратимся к работе [79], в которой на основе LES-методики было проведено численное моделирование развития НРТ на подробной сетке с разрешением 1152^3 ячеек. Характерная длина волны произвольной переменной $\phi(x, y, z, t)$ в горизонтальной плоскости определяется выражением

$$\lambda_\phi(t) = \frac{\int_0^{k_{max}} E_\phi(k, 0, t)/k dk}{\int_0^{k_{max}} E_\phi(k, 0, t) dk}, \quad (5.1)$$

где $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, E_ϕ – двумерный энергетический спектр величины $\phi' = \phi - \langle \phi \rangle$, $\langle \phi \rangle(z, t) = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \phi(x, y, z, t) dx dy$. Длина волны доминантной моды λ_0 соответствует $\lambda_\rho(0)$. В качестве масштаба времени выбрана величина $\tau = \left(\frac{\lambda_0}{Ag}\right)^{1/2}$, $g = 1$, $\rho_h = 3$, $\rho_l = 1$. Формальный подсчёт характерных структур течения на основе срезов плотности на различные моменты времени, приведённых на Figure 8 из [79], даёт следующие результаты: из сравнения по-

Таблица 5.1. Результаты сравнения теоретических данных с данными численного моделирования. Коэффициент α_{ET} вычислялся по формуле (4.22) при $\alpha_* \approx 15$ (см. рис. 4.3).

t/τ	$L = a$	n	$\lambda = \frac{2\pi}{n\sqrt{2}}$	ka	ka_0	α_{ET}	α_S
3	0.1109	126	0.0353	19.76	$9.20 \cdot 10^{-3}$	0.229	0.16
11	0.5914	51	0.0871	42.65	$2.86 \cdot 10^{-7}$	0.0440	0.050
21	1.6634	21	0.2116	49.40	$4.10 \cdot 10^{-9}$	0.0291	0.034
33	3.0681	9	0.4936	39.05	$1.63 \cdot 10^{-9}$	0.0269	0.028

следних двух столбцов в таблице 5.1 видно, что расхождение теоретического α_{ET} и расчётного α_S коэффициентов пропорциональности, $\delta_\alpha = \frac{|\alpha_{ET} - \alpha_S|}{\alpha_S}$, в среднем не превышает 17%. Полученные данные также можно сопоставить с результатами прямого численного моделирования (DNS) на сетке с разрешением 3072^3 ячеек, представленными в [162], см. рис. 5.1. Видно, что временная

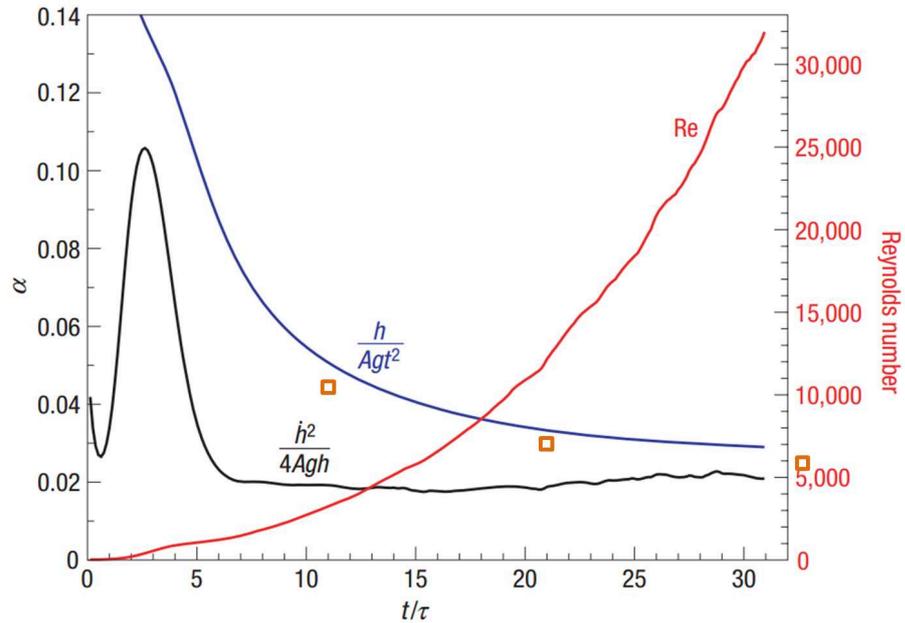


Рис. 5.1. Сопоставление значений α_{ET} из таблицы 5.1 (оранжевые квадраты) со значениями, представленными в [162] (Figure 4).

зависимость α_{ET} ближе к классической, которая вычисляется по формуле h/Agt^2 .

Следует отметить, что начальные возмущения в [79], как и в [162], задавались случайным образом:

$$\rho(x, y, z, 0) = \frac{1}{2} [\rho_1 + \rho_2 + (\rho_2 - \rho_1) \operatorname{erf}(z/\epsilon + \xi(x, y))], \quad (5.2)$$

где $\epsilon = 5\Delta z/2$, Δz – шаг сетки в направлении z , $\xi(x, y)$ – поле изотропных возмущений, удовлетворяющее условию

$$\left[2 \int_0^{k_{max}} E_\xi(k) dk \right]^{1/2} = 0.1 \quad (5.3)$$

где $k_{max} = \pi/\Delta z$. Спектр заданных таким образом возмущений имеет форму пика, см. рис. 5.2. В этом случае более правильно для анализа расчётов

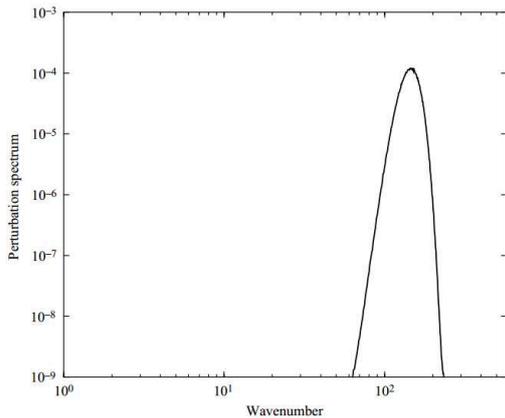


Рис. 5.2. Спектр начальных возмущений из [79]. Пик соответствует $k = 144$, стандартное отклонение $\sigma_k = 24$.

пользоваться теоретическими зависимостями, представленными в разделе 4.2.5, поскольку возмущения различных длин волн имеют различный начальный “возраст”. Представим данные из [79] (Figure 11) – рис. 5.3 и из [162] – рис. 5.1 в координатах $\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_{ET}}}, \ln h\right)$. Результат представлен на рис. 5.4. Согласно эволюционному подходу, полученные зависимости можно разбить на участки, допускающие линейную аппроксимацию. В точности данный результат наблюдается и здесь. По наклону прямолинейных участков могут быть определены параметры влияющей части спектра. Полагая $\alpha_0 = 1.2 \cdot 10^{-4}$ ($k_0 = 144$, см. рис. 5.2) и $\alpha_* = 15$, формальные вычисления дают значение $m \approx -3.45$.

Ещё одним интересным примером для сравнения может служить экспериментальная работа [116]. Эксперименты проводились для веществ с числом

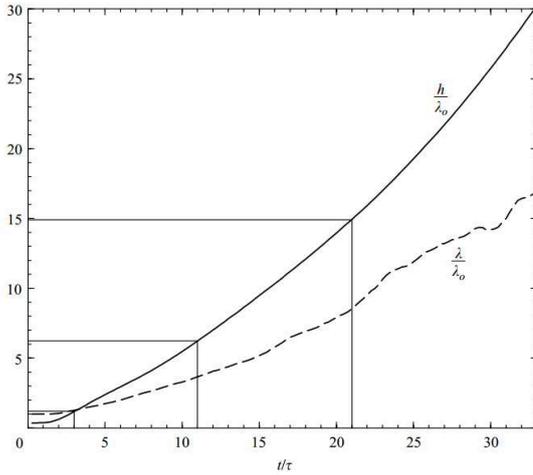


Рис. 5.3. Результаты численных расчётов из [79] (Figure 11). Зависимость приведённой ширины зоны перемешивания от приведённого времени.

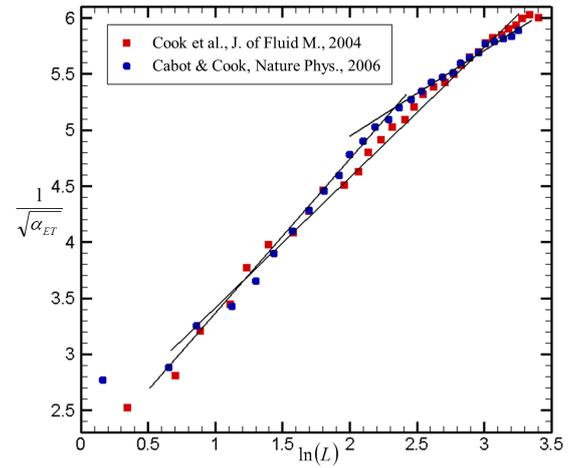


Рис. 5.4. Логарифмическое представление данных из [79] (красные квадраты) и из [162] (синие круги).

Атвуда $A \approx 0.215$ и при действии постоянного ускорения $g \approx 0.84g_0$. Проанализируем представленные в этой статье результаты (рис. 5.5, FIG. 12 в [116]), построив кривые аналогично предыдущему примеру в новых координатах. Соответствующие зависимости приведены на рис. 5.6. Как и прежде оказы-

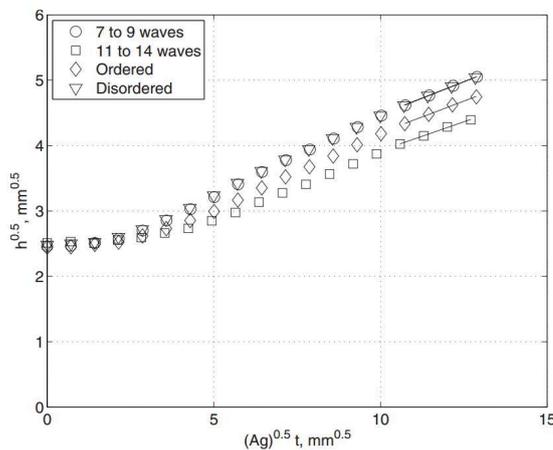


Рис. 5.5. Экспериментальные данные из [116] (FIG. 12) для нескольких серий расчётов.

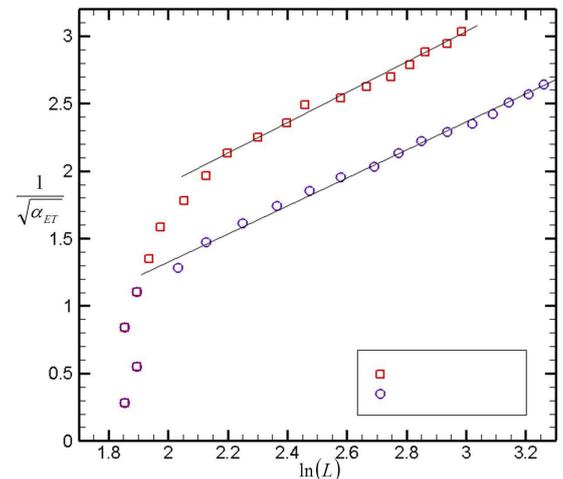


Рис. 5.6. Логарифмическое представление данных из [116]. Маркеры соответствуют маркерам на рис. 5.5

вается возможным выделить участки, которые достаточно хорошо аппрокси-

мируются прямолинейными зависимостями, что свидетельствует о том, что возмущения подчиняются закономерности $a \propto \lambda^m$. В данном примере информация о начальных возмущениях в терминах амплитуды контактной границы между веществами достоверно не известна, поэтому расчёт значения m представляется затруднительным.

Приведённые выше примеры сравнения экспериментальных и численных данных с результатами, полученными по эволюционной теории, демонстрируют хорошее соответствие. Однако, в большинстве случаев бывает достаточно сложно или невозможно определить конкретный вид начальных возмущений и их спектральный состав. Для более детального сравнения необходимо проведение расчётов с хорошо детерминированными начальными возмущениями.

Такие расчёты были проведены совместно с РФЯЦ-ВНИИЭФ (группой профессора Ю. В. Янилкина) по численому коду ТРЭК [163, 164] в рамках выполнения работ по проекту РФФИ. Приведём здесь подробную информацию об использовавшихся для проведения моделирования постановках: см. таблицу 5.2 для 2D расчётов и таблицу 5.3 – для 3D. Основная величина, которую мы будем анализировать, – это ширина зоны перемешивания L . Приведём соответствующие графики отдельно для 2D и 3D расчётов (см. рис. 5.7 и 5.8). На их основе уже можно сделать некоторые предварительные выводы. Например, хорошо прослеживается влияние начальных условий на протяжении всего времени счёта. Так кривые для расчётов с 9-ю гармониками (№5 на рис. 5.7 и №1 на рис. 5.8) расположены выше остальных. Особенностью этих расчётов было то, что в начальном возмущении присутствовали 3 группы по 3 близких гармоники без сдвига фаз относительно друг друга. В этом случае образуются области утроенной амплитуды, что уже на начальном этапе выделяет их среди остальных расчётов большей начальной амплитудой и асимметрией в форме начального возмущения. За счёт этого факта рост воз-

Таблица 5.2. Постановки для 2D расчётов. p_0 - давление на контактной границе, L_x, L_z - размеры области моделирования в относительных единицах, N_x, N_y и N_z - количество ячеек вдоль направлений x, y и z соответственно.

№	Параметры сетки	L_x	L_z	p_0	Описание начального возмущения
1	200×400	1	2	23.76	Случайные возмущения плотности: $\rho(0) = \rho_H \cdot (1 \pm 0.1)$.
2	200×400	1	2	23.76	Случайные возмущения скорости величиной $v_z(0) = \pm \Delta v_z$, $\Delta v_z = 0.1$.
3	$1000 \times 2000 \times 3$	2π	4π	141.485	Спектр начальных возмущений задаётся суперпозицией 3-х гармоник $\zeta(x) = \sum_{i=1}^3 a_{n_i} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_{n_i}}\right)$, где $n_i = 13, 31, 89$, $a_{13} = 8 \cdot 10^{-4}$, $a_{31} = 1.9 \cdot 10^{-3}$, $a_{89} = 5.6 \cdot 10^{-3}$ и соответствует параметру $m = -1$ в зависимости (4.25).
4	$1000 \times 2000 \times 3$	2π	4π	141.485	Аналогично №1.
5	$507 \times 1001 \times 3$	2π	4π	50	$\zeta(x, y) = \sum_{n=1}^9 a_n \cos(k_n y)$, где $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$, $\lambda_n = 0.007i_n + 0.063$, $a_n = a_0(\lambda_{\min}/[1.43\lambda_n])$, $a_0 = 0.1/3$, $\lambda_{\min} = 0.1$. i_n выбираются так, чтобы k_n были целыми или полуцелыми.
6	$1000 \times 2000 \times 3$	2π	4π	141.485	Аналогично №3, но $a_{31} = 3.8 \cdot 10^{-3}$.

мущений начинается с большего начального возраста и способствует сохранению преимущественного роста в дальнейшем. В то же время можно выделить

Таблица 5.3. Постановки для 3D расчётов. Обозначения аналогичным тем, которые были использованы в таблице 5.2.

№	Параметры сетки	L_x	L_y	L_z	p_0	Описание начального возмущения
1	$1000 \times 1000 \times 1000$	2π	2π	2π	50	$\zeta(x, y) = \sum_{n=1}^9 a_n \cos(k_n x) \cos(k_n y),$ где $k_n = 2\pi/\lambda_n$, $\lambda_n = 0.007i_n + 0.063$, $a_n = a_0 \left(\frac{\lambda_{\min}}{1.43\lambda_n}\right)$, $a_0 = 0.1/3$, $\lambda_{\min} = 0.1$. i_n выбираются так, чтобы k_n были целыми или полуцелыми.
2	$1000 \times 1000 \times 1000$	2π	2π	2π	50	Аналогично №1, но без первых 3-х гармоник.
3	$1000 \times 1000 \times 1000$	2π	2π	2π	50	Аналогично №1, но только с 3-мя первыми гармониками.
4	$1000 \times 1000 \times 1000$	2π	2π	2π	50	Аналогично №4 из таблицы 5.2.

расчёты, отличия в возмущениях которых не приводят к значительным отличиям в эволюции ширины зоны перемешивания. Это, например, №1 и №2 на рис. 5.7 – случайные возмущения плотности и скорости, и №3 и №6 там же – три гармоники в начальном возмущении, где амплитуды средней моды отличаются в 2 раза.

Далее, интересными являются расчёты с одним и тем же типом начальных возмущений (а именно, возмущений плотности), но проведённые в различных по размеру счётных областях (№1 и №4 на рис. 5.7). Данные зависимости почти совпадают, что свидетельствует о том, что различные участки контактной границы развиваются практически независимо друг от друга. Такое поведение подтверждает предположение о независимости развития воз-

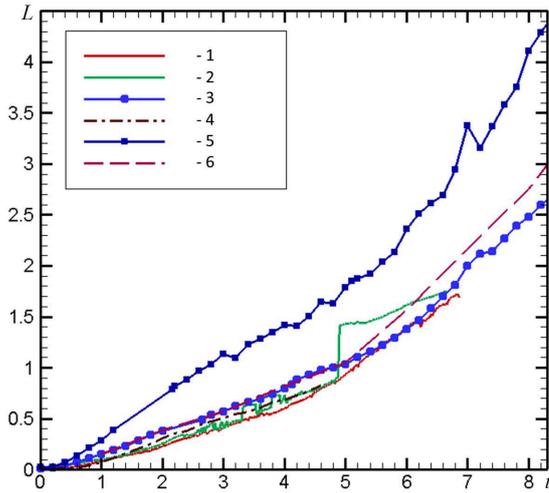


Рис. 5.7. Зависимость ширины зоны перемешивания от времени для 2D расчётов. Цифры соответствуют номерам постановок в таблице 5.2.

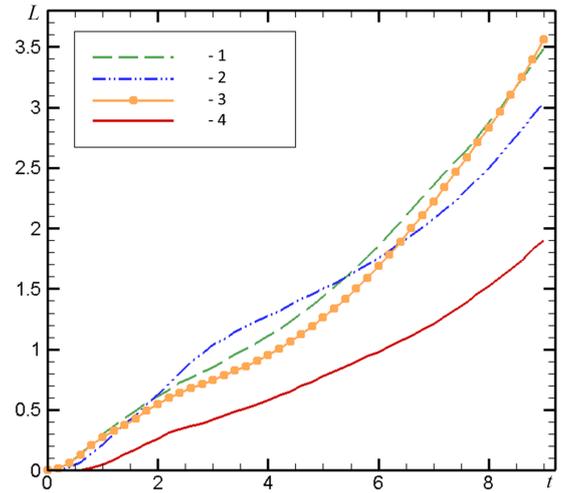


Рис. 5.8. Зависимость ширины зоны перемешивания от времени для 3D расчётов. Цифры соответствуют номерам постановок в таблице 5.3.

мущений, положенное в основание эволюционной теории.

Рассматривая картины распределения концентрации (приведены в соответствующих статьях [11, 165]), мы также видим укрупнение масштабов течения, что качественно согласуется с эволюционным подходом, в котором коротковолновые возмущения развиваются быстрее длинноволновых. Эта идея прослеживается также, например, в работе Ферми [93], и является следствием баланса лёгкой и тяжёлой жидкостей, и определяется переходом потенциальной энергии в кинетическую энергию перемешивания.

Ещё одним важным наблюдением является тот факт, что при сопоставлении рисунков 5.7 и 5.8 просматриваются незначительные различия в эволюции ширины зоны перемешивания, обусловленные различной геометрией расчётов (2D и 3D). Сопоставляя, например, кривые №4 (рис. 5.7, 5.8) или №1 (рис. 5.8) и №5 (рис. 5.7), видно, что трёхмерные возмущения растут более медленно, однако сопоставимо с двумерными. Формально по формулам (4.14), (4.15) возмущения более устойчивы в 3D геометрии, но из-за формы возмущенной поверхности, задаваемой в начальный момент, в тече-

нии долгое время присутствует достаточно большое количество 2D структур, что, безусловно, сближает поведение интегральных характеристик в 2D и 3D геометриях. Подробному исследованию вопроса о возможных различиях и сходствах в развитии 2D и 3D возмущений посвящена следующая Глава 6 данной работы. Здесь же отметим лишь то, что необходимо для дальнейшего сравнения расчётных и теоретических данных: “критический” возраст для 3D возмущений очевидно сопоставим с 2D случаем, т.е. ниже предполагаемого значения, найденного в Главе 4 (см. рис. 4.3).

На основе последующих вычислений было получено значение “критического” возраста, приблизительно равное 2π (для $A = 0.5$). Это обстоятельство позволяет сделать следующую простую оценку: $L \approx a_* = \frac{\alpha_*}{k} \approx \lambda$, т.е. ширина зоны перемешивания в этом случае определяется доминантной длиной волны. Приведём в таблице 5.4 результаты сравнения значений численного и теоретического коэффициентов пропорциональности, учитывая только что найденную величину “критического” возраста. Здесь следует отдельно пояс-

Таблица 5.4. Сопоставление 2D и 3D расчётных данных для случайного возмущения плотности с теоретическими значениями.

t	L_{2D}	L_{3D}	Agt^2	Численное моделирование		Эволюционная теория
				α_{2D}	α_{3D}	$\alpha_{ET}^{2D, 3D}$
1	0.08	0.06	0.5	0.16	0.12	0.165
2	0.32	0.27	2.0	0.16	0.135	0.11
3	0.52	0.45	4.5	0.115	0.1	0.094
4	0.7	0.6	8.0	0.087	0.075	0.087
5	0.97	0.8	12.5	0.078	0.064	0.081
7	1.75	1.22	24.5	0.081	0.056	0.072

нить, что начальную амплитуду для такого типа возмущений можно вычис-

лить с помощью выражения $a_0 = h_z \frac{\Delta\rho}{\rho_H}$, где h_z – шаг сетки в направлении z , $\Delta\rho = 0.1$. При выводе данной формулы мы полагали, что дефицит плотности приводит к изменению давления, которое, в свою очередь, при выравнивании приводит к изменению амплитуды. Представленные данные позволяют утверждать, что теория и численный эксперимент дают близкие значения для коэффициента пропорциональности α .

В следующей таблице 5.5 представлены результаты сопоставления теоретических и численных значений ширины зоны перемешивания на различные моменты времени для 2D расчёта с 9-ю гармониками в начальном возмущении. Близкие по длинам волн моды объединены в группы и представлены Таблица 5.5. Сопоставление расчётных и теоретических данных для расчёта №5 из таблицы 5.2. Необходимо сравнивать второй и последний столбцы.

n	$\lambda \approx L$	a_0	$3a_0$	$\gamma = \sqrt{\frac{n}{2}}$	$e^{\gamma t} = \frac{2\alpha_*}{a_0 n}$	t	L_{NS}^{2D}
39/41/43	0.16/0.153/0.146	0.0152	–	4.5	20	0.7	0.17
41	0.153	–	0.046	4.5	6.5	0.42	0.1
22/22.5/23	0.29/0.28/0.27	0.0083	–	3.35	67	1.26	0.37
22.5	0.28	–	0.025	3.35	22	0.9	0.26
8.5/9/9.5	0.74/0.7/0.66	0.0033	–	2.1	424	2.88	1.1
9	0.7	–	0.01	2.1	140	2.3	0.86

в таблице в виде одной ячейки, например, 8.5/9/9.5, при этом дальнейшие вычисления проводились для средней моды с истинной амплитудой. На основе информации о начальном спектре по формулам эволюционной теории была проведена оценка времени насыщения (предпоследний столбец в таблице), а затем из рис. 5.7 для этого времени найдена расчётная ширина зоны перемешивания. То же самое было сделано для модельного спектра, который состоял из средних мод, но с утроенной амплитудой. Видно, что ширина зо-

ны перемешивания, реализующаяся в расчёте, ближе к модельному спектру с утроенной амплитудой, как и ожидалось.

Как и в предыдущих примерах, рассмотрим для нескольких расчётов зависимости $L(t)$ в логарифмическом представлении. Выберем расчёты из тех соображений, чтобы одинаковый тип начальных возмущений был представлен и в 2D, и в 3D геометрии. Такими являются, например, №4 из таблиц 5.2 и 5.3 или №5 из 5.2 и №1 из 5.3. Графики в новых координатах представлены на рис. 5.9 и 5.10. Проведённые по формуле (4.27) вычисления представлены

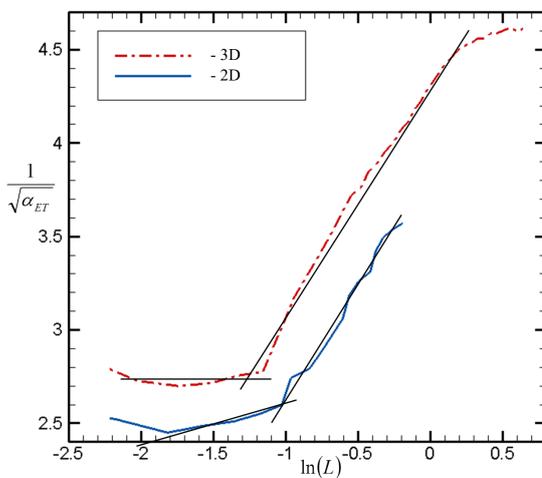


Рис. 5.9. Логарифмическое представление кривых №4 с рис. 5.7 и рис. 5.8.

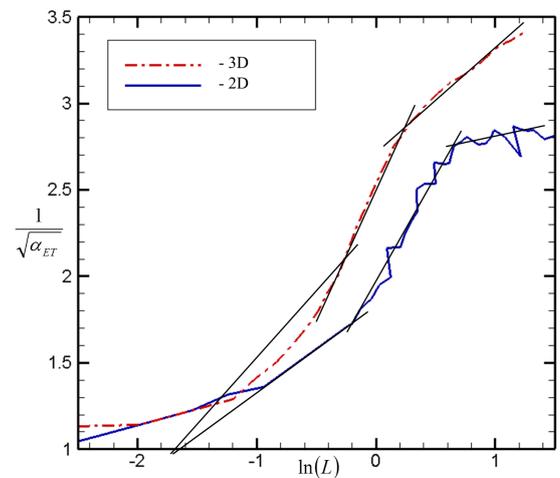


Рис. 5.10. Логарифмическое представление кривых №5 с рис. 5.7 и №1 с рис. 5.8.

в таблице 5.6. Сюда не включены диапазоны, которые соответствуют ширине зоны перемешивания близкой к размерам счётной области, т.е. к 2π . Для этих ширин также могут быть определены параметры спектра, но на их значениях существенно могут сказаться пристеночные эффекты, которые не учитываются в данной работе. Обсудим детально получившиеся значения параметров и виды спектров, определяемые ими. Схематично они изображены на рис. 5.11. Для случайных возмущений плотности видно, что и в 2D, и в 3D случае спектры имеют сходный вид. Максимальное значение амплитуды соответствует $\lambda_{2D} = 0.2$ и $\lambda_{3D} = 0.55$ ($k = 18$ и $k = 23$ соответственно), далее падает как для малых k , так и для больших, что естественно, так как при случай-

Таблица 5.6. Значения параметра m : $a_0 = a_1 \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^m$.

Диапазон волновых чисел k			m
рис. 5.9	2D	$k > 18$	0.57
		$k < 18$	-2
	3D	$k > 23$	1
		$k < 23$	-2
рис. 5.10	2D	$8.5 < k < 46$	-0.2
		$3.2 < k < 8.5$	-1.8
	3D	$9 < k < 41$	-1
		$2.6 < k < 9$	-1.5

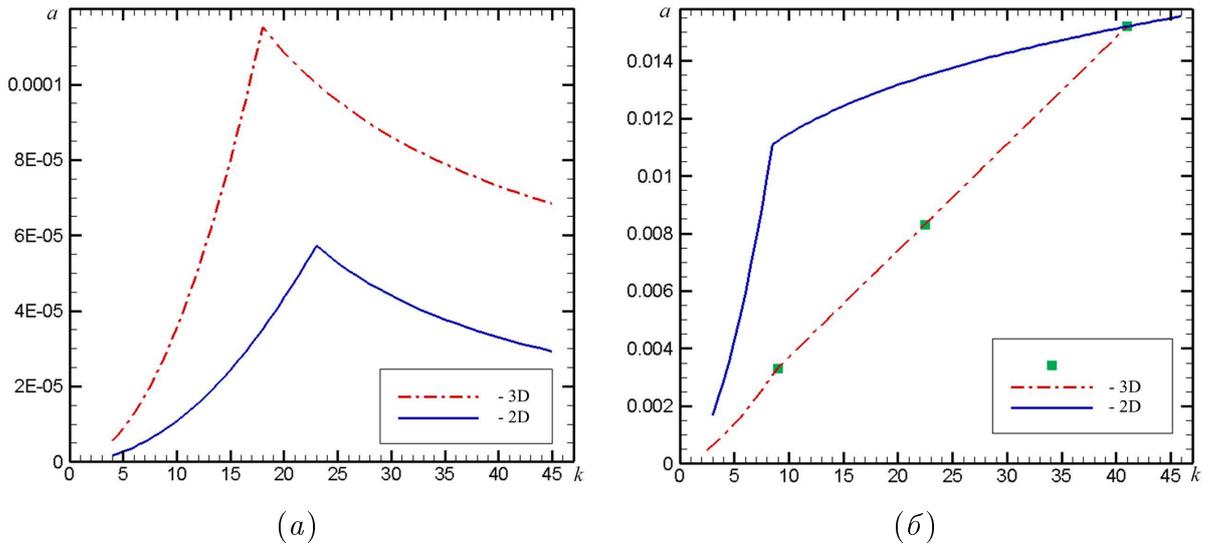


Рис. 5.11. Схематический вид теоретического спектра $a(k)$ в начальный момент времени для расчётов (а) – со случайным возмущением плотности, (б) – с 9-ю гармониками в начальном возмущении.

ном выборе маловероятны и длительные совпадения результатов бросаний, т.е. выбор знака для приращения плотности (большие λ), и регулярные чередования результатов бросаний, которые соответствуют $k = 500$. Открытым остаётся вопрос о том, чем выделены среди остальных длины волн, соответ-

ствующие моменту перестройки спектра. Для 9-ти гармоник различия больше, хотя общая тенденция объяснима: сначала развиваются короткие длины волн ($k = 41$), а длинные волны наблюдаются с меньшими амплитудами. Заметные различия 2D и 3D для 9-ти гармоник при $k > 9$ можно связать с большей скоростью роста L (на 20-30%) и, тем самым, с большими значениями α_* для 2D.

5.2. Выводы к Главе 5

На основе сравнения расчётных и теоретических данных было показано, что простая формула $L(t) = \alpha_{ET} A g t^2$, где α_{ET} даётся выражением (4.22), описывает поведение $L(t)$ для широкого диапазона различных постановок задачи о перемешивании под действием НРТ.

Проведённое исследование позволило уточнить величину “критического” возраста и показало, что его величина приблизительно равняется 6.3. При этом естественным образом получается, что ширина зоны перемешивания в конкретный момент времени определяется величиной доминантной длины волны, что позволяет проводить оценки не прибегая к сложным вычислениям. Подобные утверждения, касающиеся эволюции горизонтального масштаба, были сделаны, в частности, в работах Н. А. Иногамова [77, 166] и некоторых других, что подтверждает непротиворечивость полученного тезиса.

Интересно отметить, что здесь после обработки численных расчётов были получены близкие результаты для 2D и 3D зависимостей. В первую очередь это может быть связано с определённой формой начальных возмущений, которая способствует формированию большого количества двумерных структур в течении, что приводит к сближению результатов.

Также на основе результатов данной работы можно отметить, что авто-

модельная стадия перемешивания не реализуется из-за влияния начальных условий. Распространенное представление о выходе процессов перемешивания на автомодельную стадию имеет ограниченную (и, вероятно, малую) область реализации. Подобные утверждения относительно автомодельности или неавтомодельности спектра начальных возмущений делались и в работах других авторов, например, в [167].

Глава 6

Особенности развития неустойчивости Рэля–Тейлора в 2D и 3D геометрии

В данной главе мы затронем вопросы исследования особенностей развития 2D и 3D возмущений. В Главе 5 на примере проведённых численных расчётов мы видели, что ширина зоны перемешивания для 2D и 3D расчётов в различные моменты времени принимает близкие значения. Также было показано, что наблюдается сближение значений “критического” возраста. В то же время экспериментальные исследования на ударных трубах [168] и на крупных лазерных установках [169, 170] (NIF и OMEGA соответственно) показывают, что эволюция возмущений в 2D и 3D геометриях отличается более существенно. То же самое наблюдается и при численном моделировании сходных постановок [171, 172]. Однако в уже упомянутых работах рассматривались одномодовые возмущения, и было показано, что 3D возмущения демонстрируют более быстрый рост по сравнению с 2D при эквивалентных начальных условиях. Для постановок же со случайными начальными условиями, т.е. для значительно более широкого диапазона волновых чисел в начальном возмущении, результаты получаются иными: преимущественный рост 3D возмущений наблюдается только на начальной стадии, далее же скорости роста сравниваются, а иногда 2D начинают превышать 3D [117, 173, 174]. Таким образом видно, что тип начальных условий непосредственно влияет на дальнейшее развитие неустойчивости.

Помимо возможностей влияния на процесс перемешивания посредством вида начальных условий также, следует отметить, что двумерные численные расчёты могут предоставить относительно экономичное средство для исследования поведения различных течений. Особенно актуально это для мультифи-

зичных программных комплексов, таких как HYDRA [175] и LASNEX [176, 177], поскольку с добавлением новых физических процессов вычислительная сложность увеличивается. Но формально 2D расчёты применимы только к потокам, которые по своей сути двумерны, или же тогда, когда вариациями физических величин в третьем измерении можно пренебречь (они остаются малыми на временах, которые представляют интерес в той или иной постановке), поэтому необходим механизм сравнения 2D и 3D результатов. С этой точки зрения поставленная задача также представляет определенный интерес.

В данной главе будет проведено более подробное сравнение 2D и 3D постановок со случайными начальными условиями на основе анализа энергетических и статистических характеристик течения, а также исследовано влияние формы возмущения (т.е. различные соотношения между волновыми векторами k_x и k_y) на скорость роста ширины зоны перемешивания в 3D случае.

6.1. Постановка расчётов

Для рассмотрения вопроса, обозначенного выше, проведём небольшую серию численных расчётов. Как и прежде, будем предполагать, что плотности имеют значения $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 1$, ускорение $g = 1$, жидкости несжимаемы (пусть $p_0 = 60$) с $\gamma = 5/3$. На всех стенках заданы условия непротекания. Остальные параметры расчётов и способы задания начального возмущения приведены в таблицах 6.1 и 6.2. Если форма одномодовых возмущений контактной границы очевидна, то для случайных возмущений плотности здесь необходимы дополнительные пояснения. Для расчётов №1 и №3 из таблицы 6.2 на рис. 6.1 приведён вид начальных возмущений в плоскости xOy , расположенной на границе раздела веществ $z = 0$. Отметим, что получивше-

Таблица 6.1. Детальное описание постановок расчётов с одномодовым начальным возмущением контактной границы между веществами.

№	L_x	L_y	L_z	N_x	N_y	N_z	Начальное возмущение
1	2π	2π	8π	40	40	1200	$\lambda_x = L_x, \lambda_y = L_y, a_0 = 0.05,$ $k_\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_\alpha},$ $\zeta(x, y) = a_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y)$
2	$2\pi\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\pi\sqrt{\frac{5}{2}}$	8π	63	30	1200	Аналогично №1
3	$\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$	0.5	8π	28	3	1200	$\zeta(x, y) = a_0 \cos(k_x x)$

Таблица 6.2. Детальное описание расчётов со случайными возмущениями плотности в одном численном слое на контактной границе. В качестве генератора случайных чисел использовался [178].

№	L_x	L_y	L_z	N_x	N_y	N_z	Начальное возмущение
1	2π	2π	8π	40	40	256	$\rho(z=0) = \rho_h + \Delta\rho, \Delta\rho = \pm 0.1\rho_h$
2	2π	2π	8π	40	40	256	$\text{sign}(\Delta\rho) = (-1)^{i+j}, i, j$ - сеточные индексы, принимающие значения от 1 до N_x (N_y)
3	2π	0.5	8π	40	3	256	Аналогично №1
4	2π	0.5	8π	57	3	256	$\text{sign}(\Delta\rho) = (-1)^i$

еся возмущение выглядит весьма близким к возмущению, представленному в работе [175] (см. рис. 6.2), которое использовалось при моделировании сжатия мишеней на установке NIF с помощью программного комплекса HYDRA и было сформулировано на основе предшествующих лабораторных измерений [179]. Для оставшихся двух расчётов из таблицы 6.2 возмущение задавалось регулярным образом путём чередования избытка и недостатка плотности в соседних счётных ячейках по типу шахматной доски.

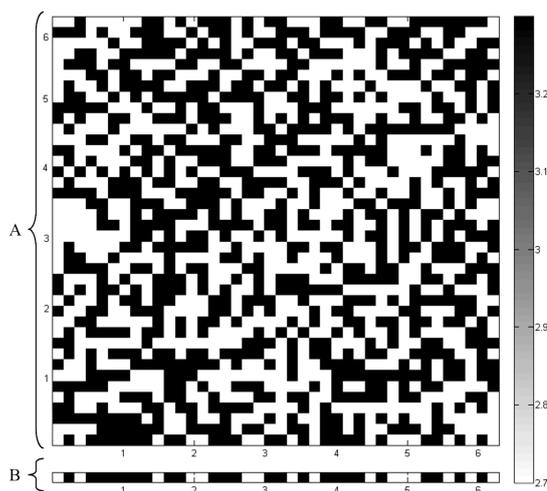


Рис. 6.1. Вид начального возмущения плотности для расчётов №1 и №3. 2D возмущение представляет собой один слой, взятый в направлении y от 3D возмущения (B и A соответственно).

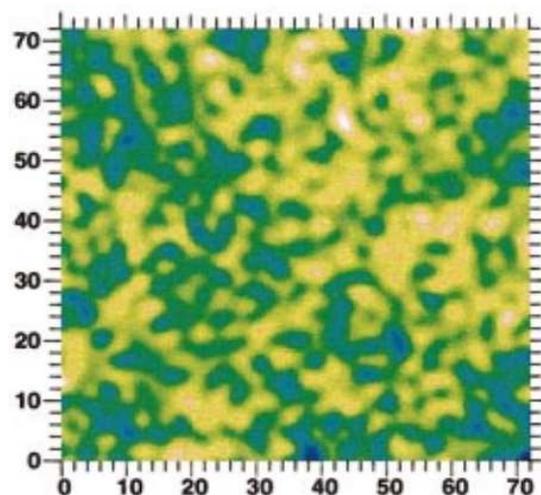


Рис. 6.2. Изображение возмущений на внутренней поверхности DT-льда [175] (FIG. 5, a). По осям указаны значения для полярного и азимутального углов.

6.2. Результаты моделирования

В данном разделе приведём результаты численного моделирования для двух описанных выше серий расчётов. На рис. 6.3 и 6.4 представлены зависи-

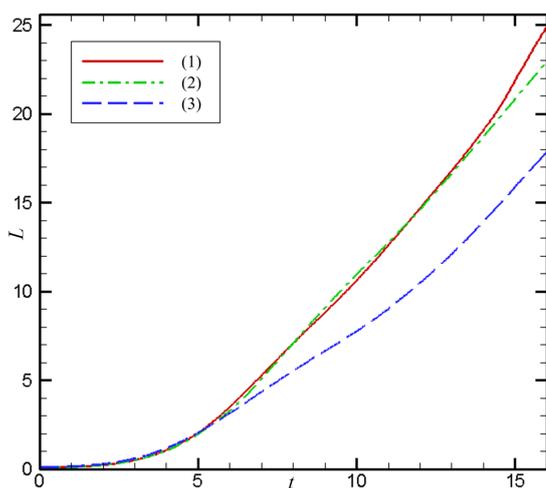


Рис. 6.3. Зависимость ширины зоны перемешивания от времени для расчётов из таблицы 6.1.

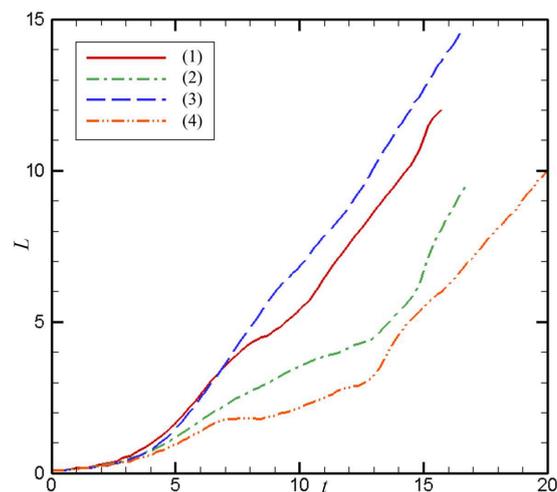


Рис. 6.4. Зависимость ширины зоны перемешивания от времени для расчётов из таблицы 6.2.

мости ширины области перемешивания от времени для одномодовых одиночных возмущений и для возмущений плотности, анализируя которые можно сделать следующие утверждения. Во-первых, для одномодовых возмущений до конца линейной стадии ($t_{\text{lin}} \approx 4.5$, $a \sim \lambda/\pi \sim 2$) не наблюдается различий в развитии 2D и 3D возмущений. Данный результат соответствует линейному анализу, который не выявляет каких-либо предпосылок для существования различий. После момента $t \approx 5$ начинают проявляться особенности геометрии задачи: 3D возмущения демонстрируют более интенсивный рост по сравнению с 2D. Это наблюдение вписывается в развиваемую авторами концепцию эволюционного подхода, представленного в Главе 4. Значения “критического” возраста получаются различными для 2D и 3D возмущений, см. рис. 4.3, причём для 3D возмущений значения больше, чем для 2D, что соответствует более позднему разрушению возмущения.

Во-вторых, для этой же серии расчетов следует отметить, что форма возмущения слабо влияет на эволюцию процесса – кривые №1 и №2 на рис. 6.3. Возможно, что при значительной асимметрии формы дела обстоят иначе, однако в данной работе этот вопрос подробно не рассматривался.

Что касается зависимостей для второй серии расчётов, то здесь мы видим, что одни и те же типы 2D и 3D возмущений – №1 и №3, №2 и №4 на рис. 6.4 – развиваются практически одинаково. В то же время регулярные возмущения развиваются заметно медленнее случайных – №1 и №2, №3 и №4 на рис. 6.4. Это связано с тем, что короткие длины волн, в основном присутствующие в начальный момент времени, быстро выходят на насыщение, после чего их дальнейшее развитие не поддерживается.

Близость кривых для ширины зоны перемешивания в 2D и 3D случае может быть связана с двумя фактами. Во-первых, с общим сближением значений для коэффициента пропорциональности. В пользу этого свидетельствует тот факт, что коротковолновые возмущения разрушаются значительно раньше

ше длинноволновых, формируя при этом переходный слой. Наличие этого слоя приводит к снижению коэффициента α в $\frac{1}{1 + \alpha_*}$ раз [80]. Во-вторых, со сближением “критических” возрастов доминантных мод (о чём говорилось в предыдущей главе), например, в случае формирования в 3D течении двумерных (вытянутых в одном из направлений) структур.

Для расчётов со случайным заданием плотности дополнительно проведём анализ статистических характеристик процесса перемешивания. На рис. 6.5 представлены энергетические спектры турбулентной кинетической энергии на различные моменты времени, которые вычислялись по формулам [180–182]:

$$E_k \equiv \overline{E}(k) = \frac{1}{\Delta k} \sum_k^{k+\Delta k} \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \hat{v}_{\alpha} \hat{v}_{\alpha}^*, \quad (6.1)$$

где $\alpha = x, y, z$, $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$, $k_x = \frac{2\pi l}{L_x}$, $k_y = \frac{2\pi m}{L_y}$, $k_z = \frac{2\pi n}{L_z}$, \hat{v}_{α} – Фурье-компоненты составляющих скорости v_{α} , \hat{v}_{α}^* – сопряжённые Фурье-компоненты.

$$\hat{v}_{\alpha} \equiv \hat{v}_{\alpha}(l, m, n) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} v_{\alpha}(i, j, k) e^{-\frac{2\pi I i l}{N_x}} e^{-\frac{2\pi I j m}{N_y}} e^{-\frac{2\pi I k n}{N_z}}, \quad (6.2)$$

где I – комплексная единица. Как видно из (6.1), для сглаживания шума энергетический спектр усредняется по значениям k в интервале $[k; k + \Delta k]$. Здесь можно отметить, что для 3D спектра наблюдается характерная картина: можно выделить инерционный интервал $E \propto k^{-5/3}$ и интервал в области диссипации $E \propto k^{-11/3}$. Это же было отмечено в работах [136, 155]. Для 2D спектра мы наблюдаем сперва один инерционный интервал, соответствующий зависимости $E \propto k^{-3}$, а затем формирование второго инерционного интервала – $E \propto k^{-5/3}$, – что в свою очередь говорит о ином распределении энергии по масштабам течения, нежели для трёхмерных возмущений.

Для этих же расчётов на рис. 6.6 представлены пульсации плотности

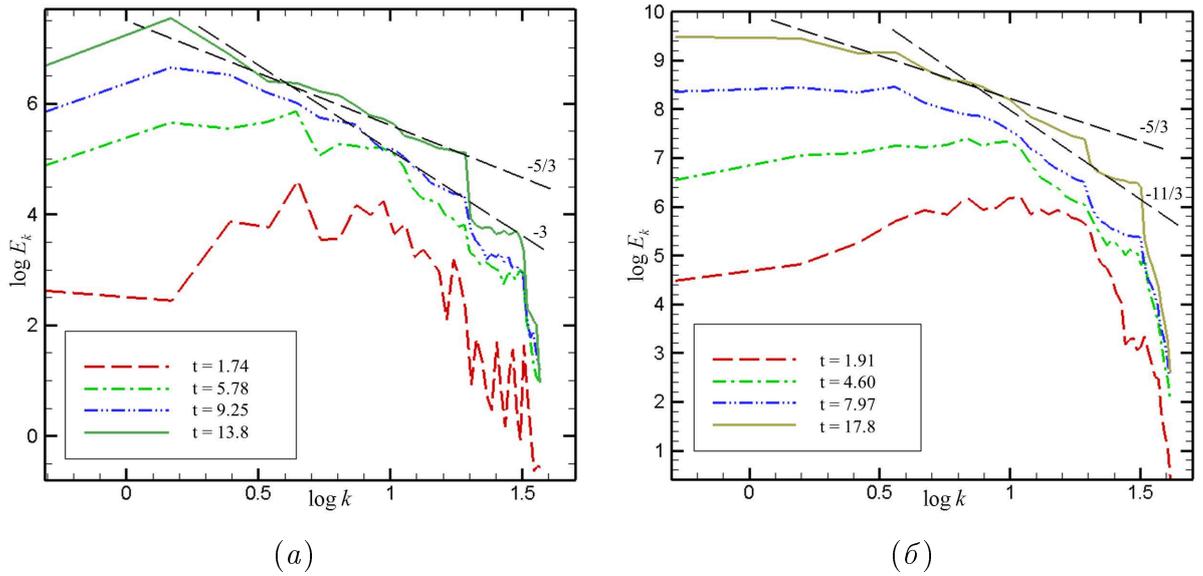


Рис. 6.5. Спектральная плотность турбулентной кинетической энергии на различные моменты времени: (а) – №3 из таблицы 6.2, (б) – №1 из таблицы 6.2.

$\sigma = \frac{\langle \rho^2 \rangle - \langle \rho \rangle^2}{\langle \rho \rangle^2}$ в различные моменты времени. Здесь следует отметить, что

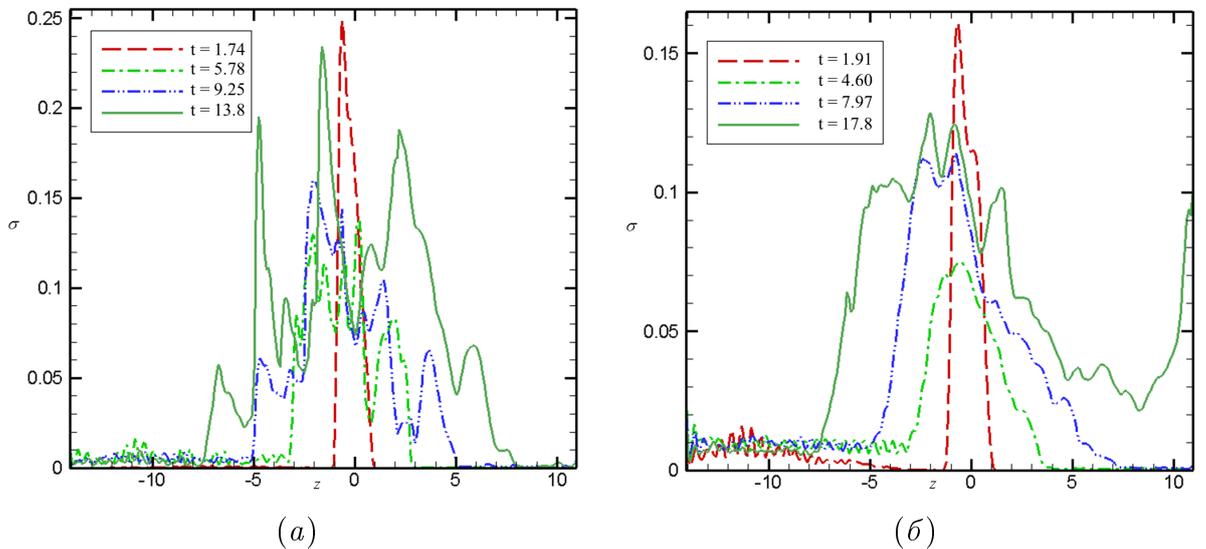


Рис. 6.6. Пульсации плотности σ на различные моменты времени: (а) – №3 из таблицы 6.2, (б) – №1 из таблицы 6.2.

ширина пиков совпадает с соответствующим (на тот же момент времени) значением ширины зоны перемешивания. Таким образом, распространение пульсаций плотности вверх и вниз происходит одинаковым образом в 2D и

в 3D случае. Однако, максимальные значения пульсаций в 2D и 3D случае отличаются почти в 1.5 раза (больше в 2D).

Также интерес представляют зависимости приведенной максимальной кинетической энергии пульсаций E_t^{\max}/gL от времени, представленные на рис. 6.7 и показывающие эффективность конверсии потенциальной энергии в кинетическую энергию пульсаций, а также возможный момент выхода процесса перемешивания на автомодельную стадию – при выходе E_t^{\max}/gL на константу [76]. Значение E_t^{\max} вычисляется согласно следующему выражению:

$$E_t^{\max} = \max_z \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left(\langle v_{\alpha}^2 \rangle - \langle v_{\alpha} \rangle^2 \right) \right\}, \quad (6.3)$$

где, как и прежде, $\alpha = x, y, z$, а усреднение проводится в каждой из горизонтальных плоскостей $z = \text{const}$. Так получаем, что значения приведенной

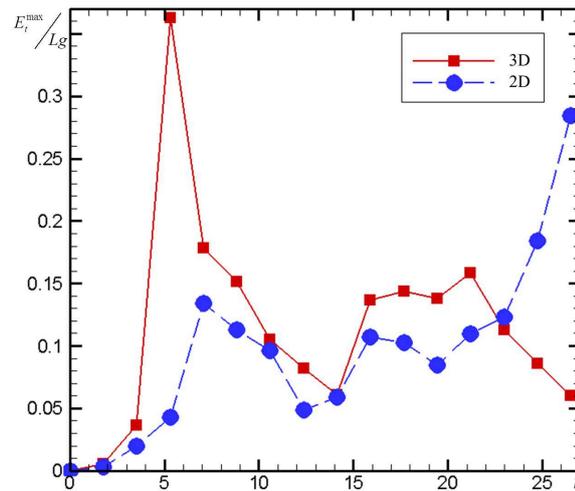


Рис. 6.7. Зависимость приведённой максимальной кинетической энергии пульсаций от времени.

максимальной энергии пульсаций выше для 3D возмущений, что говорит о более интенсивном перемешивании в этом случае.

6.3. Выводы к Главе 6

На основе проделанной работы и полученных результатов можно утверждать, что существуют различия в развитии случайных и регулярных возмущений между собой, а также при рассмотрении тех и других в различных геометриях. Одномодовые трёхмерные возмущения демонстрируют преимущественный рост начиная с конца линейной стадии, в то время как случайные возмущения плотности развиваются практически в одинаковом режиме на протяжении всего времени счёта, что связано с наличием более широкого спектрального диапазона. При этом возникают условия для формирования переходных слоев между веществами из быстрее разрушающихся коротковолновых возмущений, что замедляет рост возмущений, в большей степени трёхмерных. Также не следует исключать из анализа начинающие проявляться взаимодействия между гармониками, в результате чего формируются 2D-подобные структуры в трёхмерном течении, что приводит к сближению значений “критических” возрастов в 2D и 3D геометрии. В целом, при небольшом отличии в развитии случайных плотностных возмущений в 2D и 3D геометрии на основе сравнения статистических характеристик можно выявить определённые различия, такие как более интенсивное перемешивание в 3D случае, сопровождающееся при этом меньшими пульсациями плотности.

Результаты данной главы будут опубликованы в работе [183], принятой к печати в 2013 году.

Заключение

В заключении к данной работе перечислим основные полученные результаты и выводы, которые можно сделать, опираясь на них:

- Была проведена верификация подхода, теоретически определяющего величину коэффициента α в законе роста ширины зоны перемешивания и представленного в [10]. Уточнены значения параметров модели на основе прямого численного моделирования. Было получено, что для многомодового возмущения значение “критического” возраста в 3D случае близко к 2D. Дано объяснение этого факта, заключающееся в том, что в 3D случае со случайными начальными возмущениями, как правило, образуются “вытянутые” структуры, развивающиеся в соответствии с 2D закономерностями.
- В теоретическое рассмотрение включены дополнительные физические эффекты, такие как наличие градиента плотности, присутствие азимутальных мод и имеющая место асимметрия развития струй и пузырей, и исследовано их влияние на параметры модели. Было выяснено, что наличие градиента плотности снижает полученное ранее значение коэффициента пропорциональности α_{ET} , что приводит к более медленному росту ширины зоны перемешивания. Наличие асимметрии в развитии струй и пузырей приводит к небольшим корректировкам “критического” возраста для близких и сильно различающихся плотностей веществ, участвующих в перемешивании. Наличие же азимутальных мод во всём диапазоне изменения $\delta = \frac{\rho_L}{\rho_H}$ приводит к снижению “критического” возраста, что в свою очередь, также может заметно изменить величину α_{ET} .
- Исследовано влияние начальных возмущений на динамику развития НРТ. Предложено аналитическое представление данных, позволяющее анализировать эволюцию влияющей на рост ширины зоны перемешивания части

спектра в процессе развития неустойчивости. Проанализированные численные расчёты позволяют сделать следующие два утверждения: влияние начальных возмущений прослеживается вплоть до поздних стадий, что говорит о нереализуемости автомодельной стадии в данных случаях; обнаруженное и теоретически описанное непостоянство коэффициента α в законе роста зоны перемешивания свидетельствует о перестройке спектра и соответствует физически наблюдаемому укрупнению масштабов течения.

- Проведены численные расчёты для исследования влияния статической и динамической сжимаемости на нелинейную стадию процесса развития НРТ в лазерных мишенях. На основе полученных результатов определено эволюционное поведение ширины зоны перемешивания при варьировании значений параметров сжимаемости.
- Создан и реализован параллельный алгоритм с использованием технологии CUDA для проведения ресурсоёмких численных расчётов и поддержания получаемых результатов на высоком уровне.

Литература

1. Marinak M. M., Tipton R. E., Landen O. L. et al. Three-dimensional simulations of Nova high growth factor capsule implosion experiments // [Physics of Plasmas](#). 1996. Vol. 3, no. 5. P. 2070–2076.
2. Бельков С. А., Бессараб А. В., Винокуров О. А. и др. Исследование влияния крупномасштабной асимметрии оболочки на работу мишени на установке “Искра-5” // Письма в ЖЭТФ. 1998. Т. 67, № 3. С. 161–165.
3. Christensen C. R., Wilson D. C., Barnes C. W. et al. The influence of asymmetry on mix in direct-drive inertial confinement fusion experiments // [Physics of Plasmas](#). 2004. Vol. 11, no. 5. P. 2771–2777.
4. Atzeni S., Schiavi A., Temporal M. Converging geometry Rayleigh–Taylor instability and central ignition of inertial confinement fusion targets // [Plasma Physics and Controlled Fusion](#). 2004. Vol. 46, no. 12B. P. B111.
5. Neutron Yield Study of Direct-Drive, Low-Adiabatic Cryogenic D₂ Implosions on OMEGA // LLE Review. Quarterly Report. University of Rochester Laboratory for Laser Energetics, 2008. Vol. 116.
6. Dodd E. S., Benage J. F., Shah R. C. et al. Yield degradation in ICF capsule implosions due to imposed initial asymmetries: Tech. rep.: Los Alamos National Laboratory, 2012. LA-UR-13-20274.
7. Editorial. Ignition switch // [Nature](#). 2012. — November. Vol. 491, no. 7423. P. 159.
8. Clery D. Ignition Facility Misses Goal, Ponders New Course // [Science](#). 2012. Vol. 337, no. 6101. P. 1444–1445.

9. Гаранин С., Бельков С., Бондаренко С. Концепция построения лазерной установки УФЛ-2М // Сборник тезисов докладов XXXIX Международной (Звенигородской) конференции по физике плазмы и УТС, Звенигород, 6-10 февраля 2012. 2012. С. 17.
10. Змитренко Н. В., Прончева Н. Г., Розанов В. Б. Эволюционная модель турбулентного слоя перемешивания: Препринт 65: Физический институт им. П.Н. Лебедева, 1997.
11. Kuchugov P., Zmitrenko N., Rozanov V. et al. The evolution model of the Rayleigh–Taylor instability development // [Journal of Russian Laser Research](#). 2012. Vol. 33, no. 6. P. 517–530.
12. Кучугов П. А., Шувалов Н. Д., Казённов А. М. Моделирование задач гравитационного перемешивания на GPU // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. 2014. Т. 2, № 2. С. 225–230.
13. Кучугов П. А., Змитренко Н. В., Розанов В. Б. Роль начальных условий в проблеме перемешивания в задачах ЛТС // Сборник докладов. Пятая всероссийская школа для студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов по лазерной физике и лазерным технологиям / Под ред. С. Г. Гаранина. ФГУП “РФЯЦ-ВНИИЭФ”, Саров, 2011.
14. Кучугов П. А., Змитренко Н. В., Розанов В. Б. Влияние сжимаемости веществ на развитие неустойчивости Рэля–Тейлора в лазерных мишенях // Сборник тезисов XLI Международной (Звенигородской) конференции по физике плазмы и УТС. 2014. С. 122.
15. Kuchugov P. Simulation of the Gravitational Mixing on GPU // Book of Abstracts of The International Conference Mathematical Modelling and Computational Physics, Dubna. 2013.

16. Kuchugov P., Zmitrenko N., Rozanov V. The development of two- and three-dimensional multimode perturbation under the influence of the gravitational Instability // Book of Abstracts of the International conference Turbulent and Wave Processes, Moscow, November 26-28. Moscow State University, 2013. P. 53–54. Dedicated to the centenary of M.D. Millionshchikov.
17. Кучугов П. А., Змитренко Н. В., Розанов В. Б. Различия в развитии неустойчивости Рэлея–Тейлора в 2D и 3D геометрии // Сборник тезисов докладов международной конференции “XV Харитоновские тематические научные чтения”. ФГУП “РФЯЦ-ВНИИЭФ”, Саров, 2013.
18. Kuchugov P., Zmitrenko N., Rozanov V., Yanilkin Y. RT instability development and mixing: the analysis of 2D simulations and comparison with 3D ones on the evolution model base // The 13th International workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing (IWPCTM13), Program and Bound Abstracts. Cranfield University, Cranfield, 2012.
19. Rozanov V., Yakhin R., Zmitrenko N. et al. RT instability development and mixing: the analysis of 3D simulation on the evolution model base // The 13th International workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing (IWPCTM13), Program and Bound Abstracts. Cranfield University, Cranfield, 2012.
20. Zmitrenko N., Kuchugov P., Rozanov V., Yakhin R. A theory of a gravitational mixing zone growth including a dependence of the α -coefficient on time // The 13th International workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing (IWPCTM13), Program and Bound Abstracts. Cranfield University, Cranfield, 2012.
21. Кучугов П. А., Змитренко Н. В., Розанов В. Б. и др. Эволюционная теория турбулентного перемешивания // Сборник тезисов XXXIX Меж-

- дународной (Звенигородской) конференции по физике плазмы и УТС. ЗАО НТЦ “ПЛАЗМАИОФАН”, Москва, 2012.
22. Zmitrenko N., Kuchugov P., Rozanov V. et al. Nonuniform compression and burn of laser ICF targets // Book of Abstract of XXVI International conference Interaction of Intense Energy Fluxes with Matter – Elbrus 2011. Типография ИПХФ РАН, Черноголовка, 2011.
 23. Змитренко Н. В., Кучугов П. А., Розанов В. Б. и др. Неодномерное сжатие и горение термоядерных мишеней // Сборник тезисов XXXVIII Международной (Звенигородской) конференции по физике плазмы и УТС. 2011.
 24. Rozanov V., Stepanov R., Yakhin R. et al. Turbulent Mixing under Laser Target Compression: Evolution Model and Numerical Simulation // Book of Abstracts of The 7th International Conference on Inertial Fusion Sciences and Applications, Bordeaux-Lac, France. 2011.
 25. Lindl J. D. Introduction to the physics of ICF capsules: Tech. Rep. UCR-L-JC-106493: Lawrence Livermore National Laboratory, 1989. — March.
 26. Lindl J. Development of the indirect-drive approach to inertial confinement fusion and the target physics basis for ignition and gain // [Physics of Plasmas](#). 1995. Vol. 2, no. 11. P. 3933–4024.
 27. Андронов В. А., Бахрах С. М., Мохов В. Н. и др. Влияние турбулентного перемешивания на сжатие лазерных мишеней // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29, № 1. С. 62–65. URL: http://www.jetpletters.ac.ru/ps/412/article_6487.pdf.
 28. Лыков В. А., Мурашкина В. А., Неуважаев В. Е. и др. Влияние турбулентного перемешивания на сжатие оболочечных мишеней // Письма в

- ЖЭТФ. 1979. Т. 30, № 6. С. 339–342. URL: http://www.jetpletters.ac.ru/ps/437/article_6899.pdf.
29. Розанов В. Б., Лебо И. Г., Зайцев С. Г. и др. Экспериментальное исследование гравитационной неустойчивости и турбулентного перемешивания стратифицированных потоков в поле ускорения в связи с задачами инерциального термоядерного синтеза: Препринт 56: Физический институт им. П.Н. Лебедева, 1990.
 30. Pfalzner S. An Introduction to Inertial Confinement Fusion / Ed. by S. Cowley. Series in Plasma Physics. CRC Press, 2006.
 31. Афанасьев Ю. В., Басов Н. Г., Гамалий Е. Г. и др. Симметрия и устойчивость сжатия лазерных термоядерных мишеней // Письма в ЖЭТФ. 1976. — июнь. Т. 23, № 11. С. 617–620.
 32. McCrory R. L., Soures J. M., Verdon C. P. et al. Laser compression and stability in inertial confinement fusion // [Plasma Physics and Controlled Fusion](#). 1989. Vol. 31. P. 1517–1533.
 33. Lindl J. D. ICF: Recent Achievements and Perspectives // [Il Nuovo Cimento A](#). 1993. — Novembre. Vol. 106, no. 11. P. 1467–1487.
 34. Haan S. W., Lindl J. D., Callahan D. A. et al. Point design targets, specifications, and requirements for the 2010 ignition campaign on the National Ignition Facility // [Physics of Plasmas](#). 2011. Vol. 18, no. 5. P. 051001.
 35. Rayleigh S. J. W. L. [Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density](#) // [Proceedings of the London mathematical society / London mathematical society](#). Vol. 14. London mathematical society, 1883. P. 170–177.

36. Taylor G. The Instability of Liquid Surfaces when Accelerated in a Direction Perpendicular to their Planes. I // [Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences](#). 1950. — March. Vol. 201, no. 1065. P. 192–196.
37. Фрадкин Е. С. Исследование устойчивости произвольного одномерного гидродинамического течения // Труды Физического института им. П. Н. Лебедева. 1965. Т. 29. С. 250–256.
38. Haan S. W. Hydrodynamic Instabilities on ICF Capsules: Tech. rep.: Lawrence Livermore National Laboratory, 1991. UCRL–JC–107592.
39. Gamaly E. G. Hydrodynamics Instability of Target Implosion in ICF // [Nuclear Fusion by Inertial Confinement: A Comprehensive Treatise](#), Ed. by G. Velarde, Y. Ronen, J. M. Martinez-Val. CRC Press, 1993.
40. Takabe H., Mima K., Montierth L., Morse R. L. Self-consistent growth rate of the Rayleigh-Taylor instability in an ablatively accelerating plasma // [Physics of Fluids](#). 1985. — December. Vol. 28. P. 3676–3682.
41. LeLevier R., Lasher G., Bjorklund F. Effect of a density gradient on Taylor Instability: Tech. rep.: University of California Radiation Laboratory Livermore Site, 1955. — February. UCRL–4459.
42. Mikaelian K. O., Lindl J. D. Density gradients to reduce fluid instabilities in multishell inertial-confinement-fusion targets // [Phys. Rev. A](#). 1984. — Jan. Vol. 29. P. 290–296.
43. Mikaelian K. O. Explicit growth rates for the Rayleigh–Taylor instability in exponential density profiles // [Phys. Rev. A](#). 1989. — Oct. Vol. 40. P. 4801–4803.

44. Зайцев С. Г., Чеботарева Е. И., Титов С. Н. и др. Влияние переходного слоя на развитие неустойчивости Рэлея–Тейлора // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, № 13. С. 33–37.
45. Кучеренко Ю. А., Пылаев А. П., Мурзаков В. Д. и др. Экспериментальное исследование развития неустойчивости Рэлея–Тейлора в слое с непрерывным распределением плотности // Труды VII забабакхинских научных чтений, Снежинск, 8–12 сентября. 2003.
46. Hoffman N. M. Hydrodynamic Instabilities in Inertial Confinement Fusion: Tech. rep.: Los Alamos National Laboratory, 1994. LA-UR-94-3945.
47. Ribeyre X., Tikhonchuk V. T., Bouquet S. Compressible Rayleigh–Taylor instabilities in supernova remnants // [Physics of Fluids](#). 2004. — December. Vol. 16, no. 12. P. 4661–4670.
48. Mikaelian K. O. Rayleigh–Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities in finite-thickness fluid layers // [Physics of Fluids](#). 1995. — April. Vol. 7, no. 4. P. 888–890.
49. Bell G. I. Taylor instability on cylinders and spheres in the small amplitude approximation: Tech. rep.: Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, 1951. LA-1321.
50. Plesset M. S. On the Stability of Fluid Flows with Spherical Symmetry // [J. of Applied Physics](#). 1954. Vol. 25, no. 1. P. 96–98.
51. Amendt P., Colvin J. D., Ramshaw J. D. et al. Modified Bell–Plesset effect with compressibility: Application to double-shell ignition target designs // [Physics of Plasmas](#). 2003. Vol. 10, no. 3. P. 820–829.

52. Epstein R. On the Bell–Plesset effects: The effects of uniform compression and geometrical convergence on the classical Rayleigh–Taylor instability // [Physics of Plasmas](#). 2004. Vol. 11, no. 11. P. 5114–5124.
53. Gupta N. K., Lawande S. V. Rayleigh–Taylor instability in multi-structured spherical targets // [Plasma Physics and Controlled Fusion](#). 1986. Vol. 28, no. 6. P. 925.
54. Epstein R. On the Bell–Plesset Effects: The Effects of Uniform Compression and Geometrical Convergence on the Classical Rayleigh–Taylor Instability: LLE Review Quarterly Report 94: University of Rochester Laboratory of Laser Energetics, USA, 2003.
55. Amendt P. Bell–Plesset effects for an accelerating interface with contiguous density gradients // [Physics of Plasmas](#). 2006. Vol. 13, no. 4. P. 042702.
56. Clark D. S., Tabak M. Linear and nonlinear Rayleigh–Taylor growth at strongly convergent spherical interfaces // [Physics of Fluids](#). 2006. Vol. 18, no. 6. P. 064106.
57. Goncharov V. N., Li D. Effects of temporal density variation and convergent geometry on nonlinear bubble evolution in classical Rayleigh–Taylor instability // [Phys. Rev. E](#). 2005. — Apr. Vol. 71. P. 046306.
58. Richtmyer R. D. Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids // [Communications on Pure and Applied Mathematics](#). 1960. Vol. 13, no. 2. P. 297–319.
59. Мешков Е. Е. Неустойчивость границы раздела двух газов, ускоряемой ударной волной // [Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа](#). 1969. Т. 5. С. 151–158.

60. Неуважаев В. Е., Паршуков И. Э. Изучение устойчивости границ раздела жидкостей при совместном действии импульсного и постоянного ускорений // Математическое моделирование. 1993. Т. 5, № 2. С. 16–24.
61. von Helmholtz H. On discontinuous movements of fluids // London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine, Fourth Series. 1868. — November. Vol. 36, no. 244. P. 337–346.
62. Thomson W. (Lord Kelvin). Hydrokinetic solutions and observations // London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine, Fourth Series. 1871. Vol. 42. P. 362–377.
63. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Clarendon Press, 1961.
64. Gull S. F. The X-ray, optical and radio properties of young supernova remnants // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1975. — May. Vol. 171. P. 263–278.
65. Azechi H., Shigemori K., Nakai M. et al. Formation of initial perturbation of Rayleigh–Taylor instability in supernovae and laser-irradiated targets – Is there any similarity? // [The Astrophysical Journal Supplement Series](#). 2000. — April. Vol. 127. P. 219–225.
66. Kang Y.-G., Nishimura H., Takabe H. et al. Laboratory simulation of the collision of supernova 1987A with its circumstellar ring nebula // [Plasma Physics Reports](#). 2001. Vol. 27. P. 843–851.
67. Drake R. P., Robey H. F., Hurricane O. A. et al. Experiments to produce a hydrodynamically unstable, spherically diverging system of relevance to Instabilities in supernovae // [The Astrophysical Journal](#). 2002. — January. Vol. 564, no. 10. P. 896–908.

68. Drake R. P. Hydrodynamic instabilities in astrophysics and in laboratory high-energy-density systems // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2005. Vol. 47. P. B419–B440.
69. Moses E. I., Boyd R. N., Remington B. A. et al. The National Ignition Facility: Ushering in a new age for high energy density science // *Physics of Plasmas*. 2009. Vol. 16. P. 041006.
70. Drake R. P., Kuranz C. C., Miles A. R. et al. Stellar explosions, instabilities, and turbulence // *Physics of Plasmas*. 2009. Vol. 16. P. 041004.
71. Boyd R., Bernstein L., Brune C. Studying Nuclear Astrophysics at NIF // *Physics Today*. 2009. Vol. 62, no. 8. P. 60–61. LLNL-JRNL-414484.
72. Laboratory Astrophysics. https://lasers.llnl.gov/programs/science_at_the_extremes/laboratory_astrophysics/.
73. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Наука, 1977. С. 440.
74. Kane J., Arnett D., Remington B. A. et al. Scaling supernova hydrodynamics to the laboratory // *Physics of Plasmas*. 1999. Vol. 6, no. 5. P. 2065–2071.
75. Неуважаев В. Е. Математическое моделирование турбулентного перемешивания. г. Снежинск: РФЯЦ–ВНИИТФ, 2007.
76. Янилкин Ю. В., Стаценко В. П., Козлов В. И. Математическое моделирование турбулентного перемешивания в сжимаемых средах / Под ред. Н. П. Мишкина. ФГУП “РФЯЦ–ВНИИЭФ”, 2009. С. 508.
77. Иногамов Н. А. Турбулентная стадия тейлоровской неустойчивости // *Письма в ЖТФ*. 1978. Т. 4, № 12. С. 743–747.

78. Birkhoff G. Taylor instability and laminar mixing: Tech. rep.: Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, 1955. LA-1862.
79. Cook A. W., Cabot W., Miller P. L. The mixing transition in Rayleigh–Taylor instability // [Journal of Fluid Mechanics](#). 2004. — July. Vol. 511. P. 333–362.
80. Rozanov V., Kuchugov P., Zmitrenko N. et al. Evolution Model of Turbulent Mixing // Proceedings of the 12th International Workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing. 2010.
81. Haan S. W. Onset of nonlinear saturation for Rayleigh–Taylor growth in the presence of a full spectrum of modes // [Phys. Rev. A](#). 1989. — Jun. Vol. 39. P. 5812–5825.
82. Crowley W. P. An empirical theory for large amplitude Rayleigh–Taylor instability: Tech. rep.: California Univ., Livermore. Lawrence Radiation Lab, 1970. UCRL-72650.
83. Haan S. W. Weakly nonlinear hydrodynamic instabilities in inertial fusion // [Physics of Fluids B: Plasma Physics](#). 1991. Vol. 3, no. 8. P. 2349–2355.
84. Berning M., Rubenchik A. M. A weakly nonlinear theory for the dynamical Rayleigh–Taylor instability // [Physics of Fluids](#). 1998. Vol. 10, no. 7. P. 1564–1587.
85. Ikegawa T., Nishihara K. Saturation and postsaturation phenomena of Rayleigh–Taylor instability with adjacent modes // [Phys. Rev. E](#). 2003. — Feb. Vol. 67. P. 026404.
86. Davies R. M., Taylor. G. The Mechanics of Large Bubbles Rising through Extended Liquids and through Liquids in Tubes // [Proceedings of the Roy-](#)

- al Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1950. — February. Vol. 200, no. 1062. P. 375–390.
87. Layzer D. On the Instability of Superposed Fluids in a Gravitational Field // [Astrophysical Journal](#). 1955. — July. Vol. 122, no. 1. P. 1–12.
88. Mikaelian K. O. Explicit expressions for the evolution of single-mode Rayleigh–Taylor and Richtmyer–Meshkov Instabilities at arbitrary Atwood numbers // [Phys. Rev. E](#). 2003. Vol. 67, no. 2. P. 026329.
89. Zhang Q. Analytical Solutions of Layzer-Type Approach to Unstable Interfacial Fluid Mixing // [Phys. Rev. Lett.](#) 1998. Vol. 81, no. 16. P. 3391–3394.
90. Hecht J., Alon U., Shvarts D. Potential flow models of Rayleigh–Taylor and Richtmyer–Meshkov bubble fronts // [Physics of Fluids](#). 1994. Vol. 6, no. 12. P. 4019–4030.
91. Shvarts D., Alon U., Ofer D. et al. Nonlinear evolution of multimode Rayleigh–Taylor instability in two and three dimensions // [Physics of Plasmas](#). 1995. Vol. 2, no. 6. P. 2465–2472.
92. Goncharov V. N. Analytical Model of Nonlinear, Single-Mode, Classical Rayleigh–Taylor Instability at Arbitrary Atwood Numbers // [Phys. Rev. Lett.](#) 2002. — Mar. Vol. 88. P. 134502.
93. Fermi E., von Neumann J. Taylor Instability of Incompressible Liquids: Tech. rep.: Los Alamos Scientific Laboratory, 1953. AECU–2979.
94. Abarzhi S. I., Nishihara K., Glimm J. Rayleigh–Taylor and Richtmyer–Meshkov instabilities for fluids with a finite density ratio // [Physics Letters A](#). 2003. Vol. 317. P. 470–476.

95. Abarzhi S. I. Nonlinear three-dimensional Rayleigh–Taylor instability // [Phys. Rev. E](#). 1999. Vol. 59, no. 2. P. 1729–1735.
96. Inogamov N., Abarzhi S. Dynamics of fluid surface in multidimension // [Physica D: Nonlinear Phenomena](#). 1995. Vol. 87, no. 1–4. P. 339–341.
97. Abarzhi S. I. Review of nonlinear dynamics of the unstable fluid interface: conservation laws and group theory // [Physica Scripta](#). 2008. Vol. T132. P. 014012.
98. Abarzhi S. I. Review of theoretical modelling approach of Rayleigh–Taylor Instabilities and turbulent mixing // [Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences](#). 2010. — April. Vol. 368, no. 1916. P. 1809–1828.
99. Ofer D., Shvarts D., Zinamon Z., Orszag S. A. Mode coupling in nonlinear Rayleigh–Taylor instability // [Physics of Fluids B: Plasma Physics](#). 1992. Vol. 4, no. 11. P. 3549–3561.
100. Ramaprabhu P., Dimonte G. Single-mode dynamics of the Rayleigh–Taylor instability at any density ratio // [Phys. Rev. E](#). 2005. — Mar. Vol. 71. P. 036314.
101. Беленький С. З., Фрадкин Е. С. Теория турбулентного перемешивания // Труды Физического института им. П. Н. Лебедева. 1965. Т. 29. С. 207–238.
102. Anuchina N. N., Kucherenko Y. A., Neuvazhaev V. E. et al. Turbulent mixing at an accelerating interface between liquids of different density // [Fluid Dynamics](#). 1978. Vol. 13, no 6. P. 916–920.

103. Youngs D. L. Numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh–Taylor instability // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1984. Vol. 12, no. 1–3. P. 32–44.
104. Youngs D. L. Modelling turbulent mixing by Rayleigh–Taylor instability // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1989. — July. Vol. 37, no. 1–3. P. 270–287.
105. Read K. Experimental investigation of turbulent mixing by Rayleigh–Taylor instability // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1984. Vol. 12, no. 1–3. P. 45–58.
106. Неуважаев В. Е., Яковлев В. Г. Модель и метод численного расчета турбулентного перемешивания границы раздела, движущейся ускорено // Вопросы Атомной Науки и Техники, сер.: Методики и программы численного решения задач математической физики. 1984. Т. 2. С. 17–25.
107. Турбулентность. Принципы и применения / Под ред. У. Фрост, Т. Моулден. Издательство МИР, 1980.
108. Youngs D. L. Rayleigh–Taylor instability: numerical simulation and experiment // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 1992. Vol. 34, no. 13. P. 2071–2076.
109. Морозов В. Г., Жогов Б. М., Савельев С. А., Титова В. Б. Вихревая подсеточная модель для расчетов турбулентного перемешивания // Вопросы Атомной Науки и Техники, сер.: Теоретическая и прикладная физика. 2008. Т. 3. С. 21.
110. Камчибеков М. Д. Конверсионная модель рэлей–тейлоровской неустойчивости // Вопросы атомной науки и техники. Теоретическая и прикладная физика. 2009. Т. 1. С. 58–76.

111. Камчибеков М. Д. Модель тейлоровской неустойчивости // Прикладная механика и техническая физика. 1985. — Ноябрь-декабрь. Т. 26, № 6. С. 36–41.
112. Hecht J., Ofer D., Alon U. et al. Three-dimensional simulation and analysis of the nonlinear stage of the Rayleigh–Taylor instability // [Laser and Particle Beams](#). 1995. Vol. 13, no. 3. P. 423–440.
113. Гарина С. М., Змитренко Н. В., Прончева Н. Г., Тишкин В. Ф. Динамика роста зоны перемешивания в прямом численном моделировании гравитационной неустойчивости // Вопросы Атомной Науки и Техники, сер.: Математическое моделирование физических процессов. 2002. Т. 2. С. 10–17.
114. Ristorcelli J. R., Clark T. T. Rayleigh–Taylor turbulence: self-similar analysis and direct numerical simulations // [Journal of Fluid Mechanics](#). 2004. — 5. Vol. 507. P. 213–253.
115. Ramaprabhu P., Dimonte G., Andrews M. J. A numerical study of the influence of initial perturbations on the turbulent Rayleigh–Taylor instability // [Journal of Fluid Mechanics](#). 2005. — 7. Vol. 536. P. 285–319.
116. Olson D. H., Jacobs J. W. Experimental study of Rayleigh–Taylor instability with a complex initial perturbation // [Physics of Fluids](#). 2009. Vol. 21, no. 3. P. 034103.
117. Youngs D. L. Three-dimensional numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh–Taylor instability // [Physics of Fluids](#). 1991. — May. Vol. 3. P. 1312–1320.
118. Тишкин В. Ф., Никишин В. В., Попов И. В., Фаворский А. П. Разностные схемы трехмерной газовой динамики для задачи о развитии неустойчи-

- ности Рихтмайера-Мешкова // Математическое моделирование. 1995. Т. 7, № 5. С. 15–25.
119. Лебо И. Г., Никишин В. В., Розанов В. Б., Тишкин В. Ф. Численное моделирование эволюции многомодовых начальных возмущений при развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова: Препринт 63: Физический институт им. П.Н. Лебедева, 1997.
120. Вязников К. В., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П. Построение монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для систем уравнений гиперболического типа // Математическое моделирование. 1989. Т. 1, № 5. С. 95–120.
121. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных течений гидродинамики // Математический сборник. 1959. Т. 47(89), № 3. С. 271–306.
122. Ладонкина М. Е. Численное моделирование турбулентного перемешивания с использованием высокопроизводительных систем: Кандидатская диссертация / Институт математического моделирования РАН. 2005.
123. Чеванин В. С. Численное моделирование развития гидродинамических неустойчивостей на многопроцессорных системах // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 2. С. 17–32.
124. Давыдов А. А. Численное моделирование задач аэро-газодинамики на гибридном суперкомпьютере «МВС-Экспресс» // Математическое моделирование. 2010. Т. 22, № 4. С. 90–98.
125. Давыдов А. А. Численное моделирование задач газовой динамики на гибридных вычислительных системах: Кандидатская диссертация / Ин-

- ститут прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской Академии Наук. 2012.
126. Дбар С. А., Лацис А. О., Храмцов М. Ю. Вычислительная система MVS – экспресс. Базовая коммуникационная библиотека shmem-экспресс. Руководство программиста. <http://www.kiam.ru/MVS/documents/k100/shmemprogman.html>.
 127. Казённов А. М. Основы технологии CUDA // Компьютерные исследования и моделирование. 2010. Т. 2, № 3. С. 295–308.
 128. NVIDIA. CUDA C Programming Guide, 2013. — July.
 129. Toro E. F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999.
 130. Sod G. A. A survey of several finite difference methods for systems of non-linear hyperbolic conservation laws // [Journal of Computational Physics](#). 1978. Vol. 27, no. 1. P. 1 –31.
 131. Wilson G. V. Practical parallel programming. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1996. ISBN: [0-262-23186-7](#).
 132. Гибридный вычислительный кластер К–100. <http://www.kiam.ru/MVS/resources/k100.html>.
 133. Вычислительный процессор Tesla C2050 / C2070 GPU. http://www.nvidia.ru/object/product_tesla_C2050_C2070_ru.html.
 134. Intel®Xeon®Processor X5670. <http://ark.intel.com/products/47920/>.
 135. Harris M. How to Implement Performance Metrics in CUDA C/C++. <https://developer.nvidia.com/content/how-implement-performance-metrics-cuda-cc>.

136. Гарина С. М., Змитренко Н. В., Ладонкина М. Е. и др. Численное моделирование и анализ характеристик турбулентного перемешивания с помощью трехмерного кода NUT // Математическое моделирование. 2003. Т. 15, № 5. С. 3–11.
137. Baker L., Freeman J. R. Heuristic model of the nonlinear Rayleigh–Taylor instability // [Journal of Applied Physics](#). 1981. Vol. 52, no. 2. P. 655–663.
138. Самарский А. А., Гайфулин С. А., Захаров А. В. и др. Программа DIANA расчета одномерных задач лазерного термоядерного синтеза // Вопросы атомной науки и техники Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1983. Т. 2, № 13. С. 38–42.
139. Змитренко Н. В., Карпов В. Я., Фадеев А. П. и др. Описание физических процессов в программе DIANA расчета задач лазерного термоядерного синтеза // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1983. Т. 2, № 13. С. 34–37.
140. Suydam B. R. Breakup of an Accelerated Shell Owing to Rayleigh–Taylor Instability: Tech. rep.: Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, 1978. LA–7291–MS.
141. Gauthier S., Creurer B. L. Compressibility effects in Rayleigh–Taylor instability-induces flows // [Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences](#). 2010. Vol. 368. P. 1681–1704.
142. Baker L. Compressible Rayleigh–Taylor instability // [Physics of Fluids](#). 1983. — April. Vol. 26, no. 4. P. 950–952.

143. Bernstein I. B., Book D. L. Effect of compressibility on the Rayleigh–Taylor instability // [Physics of Fluids](#). 1983. — February. Vol. 26, no. 2. P. 453–458.
144. Livescu D. Compressibility effects on the Rayleigh–Taylor instability growth between immiscible fluids // [Physics of Fluids](#). 2004. — January. Vol. 16, no. 1. P. 118–127.
145. Maple (software). [http://en.wikipedia.org/wiki/Maple_\(software\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Maple_(software)).
146. Lezzi A. M., Prosperetti A. Rayleigh–Taylor instability for adiabatically stratified fluids // [Physics of Fluids A: Fluid Dynamics](#). 1989. Vol. 1, no. 11. P. 1784–1795.
147. Gupta M. R., Roy S., Khan M. et al. Effect of compressibility on the Rayleigh–Taylor and Richtmyer–Meshkov instability induced nonlinear structure at two fluid Interface // [Physics of Plasmas](#). 2009. Vol. 16, no. 3. P. 032303.
148. Belotserkovskii O. M., Oparin A. M. Computational analysis of the specific features of a spatial progress of Rayleigh–Taylor instability // *Proceedings of the 7th International Workshop on The Physics of Compressible Turbulent Mixing* / Ed. by E. Meshkov, Y. Yanilkin, V. Zhmailo. 1999.
149. Jin H., Liu X. F., Lu T. et al. Rayleigh–Taylor mixing rates for compressible flow // [Physics of Fluids](#). 2005. Vol. 17. P. 024104.
150. George E., Glimm J. Self-similarity of Rayleigh–Taylor mixing rates // [Physics of Fluids](#). 2005. Vol. 17, no. 5. P. 054101.
151. Creurer B., Gauthier S. A return toward equilibrium in a 2D Rayleigh–Taylor instability for compressible fluids with a multidomain adaptive Chebyshev

- method // [Theoretical and Computational Fluid Dynamics](#). 2008. Vol. 22, no 2. P. 125–144.
152. Gauthier S. Compressibility effects in Rayleigh–Taylor flows: influence of the stratification // [Physica Scripta](#). 2013. Vol. 2013, no. T155. P. 014012.
153. Лебо И. Г., Тишкин В. Ф. Исследование гидродинамической неустойчивости в задачах лазерного термоядерного синтеза методами математического моделирования / Под ред. Е. С. Артоболевская. ФИЗМАТЛИТ, 2006. С. 304.
154. Lebo I. G., Rozanov V. B., Tishkin V. F., Nikishin V. V. Computational modelling of the hydrodynamic instability development in shock tube and laser driven experiments: Preprint 31: Lebedev Physical Institute RAS, 1997.
155. Змитренко Н. В., Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф. Численное исследование турбулентного перемешивания для одной задачи о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова // Вопросы атомной науки и техники. Математическое моделирование физических процессов. 2004. Т. 1. С. 12–27.
156. Smalyuk V. A., Hansen J. F., Hurricane O. A. et al. Experimental observations of turbulent mixing due to Kelvin–Helmholtz instability on the OMEGA Laser Facility // [Physics of Plasmas](#). 2012. Vol. 19, no. 9. P. 092702.
157. Olson B. J., Larsson J., Lele S. K., Cook A. W. Nonlinear effects in the combined Rayleigh–Taylor/Kelvin–Helmholtz instability // [Physics of Fluids](#). 2011. Vol. 23, no. 11. P. 114107.
158. Yanilkin Y. V., Nikiforov V. V., Bondarenko Y. A. et al. Two–Parameter Model and Method for Computations of Turbulent Mixing in 2D Compressible Flows // Proceedings of the Fifth International Workshop on Compress-

- ible Turbulent Mixing, Stony Brook, USA / Ed. by R. Young, J. Glimm, B. Boston. 1995.
159. Yabe T., Hoshino H., Tsuchiya T. Two- and three-dimensional behavior of Rayleigh–Taylor and Kelvin–Helmholtz instabilities // *Phys. Rev. A*. 1991. — Aug. Vol. 44. P. 2756–2758.
160. Розанов В. Б., Змитренко Н. В. Инкременты неустойчивости Кельвина–Гельмгольца в задачах лазерного термоядерного синтеза: Препринт 16: Физический институт им. П.Н. Лебедева, 1992.
161. Nikishin V. V., Tishkin V. F., Zmitrenko N. V. et al. Numerical simulations of nonlinear and transitional stage of Richtmyer–Meshkov and Rayleigh–Taylor Instabilities: Preprint 30: Lebedev Physical Institute RAS, 1997.
162. Cabot W. H., Cook A. W. Reynolds number effects on Rayleigh–Taylor instability with possible implications for type-Ia supernovae // *Nature Physics*. 2006. Vol. 2. P. 562–568.
163. Стадник А. Л., Шанин А. А., Янилкин Ю. В. Эйлерова методика ТРЭК для расчета трехмерных газодинамических течений многокомпонентной среды // Вопросы Атомной Науки и Техники, сер.: Математическое моделирование физических процессов. 1994. Т. 4. С. 71–78.
164. Янилкин Ю. В., Беляев С. П., Бондаренко Ю. А. и др. Эйлеровы численные методики ЭГАК и ТРЭК для моделирования многомерных течений многокомпонентной среды // Труды РФЯЦ–ВНИИЭФ. Издательство РФЯЦ–ВНИИЭФ, 2008. Вып. Математическое моделирование физических процессов, № 12.
165. Янилкин Ю. В., Стаценко В. П., Синькова О. Г. и др. Численное моделирование влияния начального спектра возмущений на развитие гравитационной турбулентности // Труды РФЯЦ–ВНИИЭФ. Издательство РФЯЦ–ВНИИЭФ, 2008. Вып. Математическое моделирование физических процессов, № 12.

- тационного турбулентного перемешивания // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Теоретическая и прикладная физика. 2013. Т. -, № 1. С. 29–40.
166. Иногамов Н. А., Демьянов А. Ю., Сон Э. Е. Гидродинамика перемешивания: периодические структуры, усиление субгармоник, инверсный каскад. Издательство МФТИ, 1999. С. 464. ISBN: 5-89155-017-2.
167. Опарин А. М., Иногамов Н. А., Демьянов А. Ю. О спектральных и статистических свойствах рэлей–тейлоровского перемешивания // Письма в ЖЭТФ. 2000. Т. 72, № 10. С. 704–710.
168. Zaytsev S. G., Chebotareva E. I., Titov S. N., Krivets V. V. Investigation of Rayleigh–Taylor Instability on an Interface Between Two Gases // Proceedings of the 6th International Workshop on The Physics of Compressible Turbulent Mixing, Marseille, France. 1997.
169. Remington B. A., Marinak M. M., Weber S. V. et al. Single-Mode Rayleigh–Taylor Experiments in 2D and 3D // Proceedings of the 5th International Workshop on Compressible Turbulent Mixing. 1996.
170. Drake R. P., Keiter P., Korreck K. E. et al. Supernova hydrodynamics on the Omega laser // 43rd Annual meeting of the APS Division of Plasma Physics. 2001. URL: <http://flux.aps.org/meetings/YR01/DPP01/abs/S2300087.html>.
171. Anuchina N., Volkov V., Gordeychuk V. et al. Numerical simulations of Rayleigh–Taylor and Richtmyer–Meshkov instability using MAH-3 code // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2004. Vol. 168, no. 1–2. P. 11–20.

172. Kane J., Arnett D., Remington B. A. et al. Two-dimensional versus Three-dimensional Supernova Hydrodynamic Instability Growth // *The Astrophysical Journal*. 2000. Vol. 528, no. 2. P. 989–994.
173. Youngs D. L. Numerical simulation of mixing by Rayleigh–Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities // *Laser and Particle Beams*. 1994. Vol. 12, no. 4. P. 725–750.
174. Dimonte G., Youngs D. L., Dimits A. et al. A comparative study of the turbulent Rayleigh–Taylor instability using high-resolution three-dimensional numerical simulations: The Alpha–Group collaboration // *Physics of Fluids*. 2004. Vol. 16, no. 5. P. 1668–1693.
175. Marinak M. M., Kerbel G. D., Gentile N. A. et al. Three-dimensional HYDRA simulations of National Ignition Facility targets // *Physics of Plasmas*. 2001. Vol. 8, no. 5. P. 2275–2280.
176. Zimmerman G. D., Kreur W. L. Numerical simulation of laser-initiated fusion // *Comments in Plasma Physics and Controlled Fusion*. 1975. Vol. 2, no. 2. P. 51–61.
177. Harte J. A., Alley W. E., Baily D. S. et al. LASNEX – A 2-D Physics Code for Modeling ICF: Tech. rep.: Lawrence Livermore National Laboratory, 1996. UCRL-LR-105821-96-4.
178. Левитан Ю. Л., Соболев И. М. О датчике псевдослучайных чисел для персональных компьютеров // *Математическое моделирование*. 1990. Т. 2, № 8. С. 119–126.
179. Hoffer J. K., Foreman L. R., Sanchez J. J. et al. Surface Roughness Measurements of Beta-Layered Solid Deuterium-Tritium in Toroidal Geometries //

12th Topical Meeting on the Technology of Fusion Energy, American Nuclear Society, Reno, Nevada. 1996. LA-UR-96-2027.

180. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности / Под ред. Г. С. Голицын. Издательство Наука, 1967. Т. 2. С. 720.
181. Anuchina N. N., Volkov V. I., Gordeychuk V. A. et al. 3D Numerical simulation of Rayleigh–Taylor instability using МАН-3 code // Laser and Particle Beams. 2000. Vol. 18, no. 2. P. 175–181.
182. Lee H., Jin H., Yu Y., Glimm J. On validation of turbulent mixing simulations for Rayleigh–Taylor instability // [Physics of Fluids](#). 2008. Vol. 20, no. 1. P. 012102.
183. Кучугов П. А., Розанов В. Б., Змитренко Н. В. Различия в развитии неустойчивости Рэлея–Тейлора в 2D и 3D геометрии // Физика плазмы. 2014. Т. 40, № 6. С. 531–538. Принято в печать.
184. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика / Под ред. Л. П. Питаевский. ФИЗМАТЛИТ, 2006. Т. 6 из Теоретическая физика. С. 736.

Приложение А

Линейный анализ неустойчивости Рэля–Тейлора. Вычисление циркуляции скорости

Получим в данном разделе инкремент классической неустойчивости Рэля–Тейлора, а также вычислим некоторые характеристики течения. Запишем систему гидродинамических уравнений для несжимаемой жидкости:

$$\begin{cases} \nabla \mathbf{v} = 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Рассмотрим малое отклонение от стационарного состояния: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \delta \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, 0, 0)$, $v_{0x} \equiv v_0 = \text{const}$, $p = p_0 + \delta p$ ($|\delta \mathbf{v}| \ll |\mathbf{v}_0|$, $\delta p \ll \rho v_0^2$). В этом случае в первом приближении получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \nabla \delta \mathbf{v} = 0, \\ \rho \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}_0 \nabla) \delta \mathbf{v} = -\nabla \delta p, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

или в проекциях на координатные оси:

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta v_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta v_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_z}{\partial z} = 0, \\ \rho \frac{\partial \delta v_i}{\partial t} + \rho v_0 \frac{\partial \delta v_i}{\partial x} = -\frac{\partial \delta p}{\partial x_i}, i = x, y, z. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Применяя операцию дивергенции ко второму уравнению системы (A.2), получаем

$$\Delta \delta p = 0. \quad (\text{A.4})$$

К системе (A.2) также необходимо добавить следующее кинематическое соотношение, которое должно выполняться на границе раздела веществ:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \delta v_z, \quad (\text{A.5})$$

где ζ – функция, описывающая форму границы раздела, $\frac{d}{dt}$ обозначает субстанционную производную по времени. В случае НРТ в (A.2) можно опустить члены с v_0 , т.к. $v_0 = 0$. Решение уравнения (A.4) будем искать в виде $\delta p = P(z)e^{i\xi}$, где $\xi = k_x x + k_y y - \omega t$, тогда получаем:

$$\frac{d^2 P}{dz^2} - k^2 P = 0, \quad (\text{A.6})$$

общее решение которого имеет вид $P(z) = C_1 e^{-kz} + C_2 e^{kz}$, где $k^2 = k_x^2 + k_y^2$.

В этом случае для первой и второй жидкостей можно записать:

$$\begin{cases} \delta p_1 = C_1 e^{-kz} e^{i\xi}, z > 0 \\ \delta p_2 = C_2 e^{kz} e^{i\xi}, z < 0 \\ \zeta = A e^{i\xi}. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Условие равенства давлений при $z = \zeta$ принимает вид:

$$\delta p_1 - \delta p_2 = (\rho_1 - \rho_2) g \zeta. \quad (\text{A.8})$$

Тогда имеем следующую систему для нахождения неизвестных констант:

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = (\rho_1 - \rho_2) g A, \\ -i\omega A = B_1, \\ -i\omega \rho_1 B_1 = C_1 k, \\ -i\omega A = B_2, \\ -i\omega \rho_2 B_2 = -C_2 k, \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

приводящую к дисперсионному уравнению

$$\omega^2 + kg \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Теперь оказывается возможным записать полное решение задачи о развитии НРТ для обеих жидкостей. При этом следует перейти от комплексной формы

записи, использованной для упрощения выкладок, к действительным величинам. Предполагая равенство нулю скоростей обеих жидкостей в начальный момент времени, можно записать

$$\begin{cases} \delta v_{1z} = B_1 e^{-kz} \cos(k_x x + k_y y) \sinh(\gamma t), \\ \delta v_{2z} = B_2 e^{kz} \cos(k_x x + k_y y) \sinh(\gamma t), \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

$\gamma = |\omega|$. Тогда форма границы имеет вид

$$\zeta = a_0 \cos(k_x x + k_y y) \cosh(\gamma t) = a(t) \cos(k_x x + k_y y). \quad (\text{A.12})$$

Выражая B_1 и B_2 через a_0 получаем $B_1 = B_2 = a_0 \gamma$. Для возмущения давления имеем:

$$\delta p_{1,2} = \pm \frac{1}{k} \rho_{1,2} a_0 \gamma^2 e^{\mp kz} \cos(k_x x + k_y y) \cosh(\gamma t). \quad (\text{A.13})$$

Таким образом, зная давление, можно определить оставшиеся компоненты скорости:

$$\begin{cases} \delta v_{1,2x} = \pm a_0 \gamma \frac{k_x}{k} e^{\mp kz} \sin(k_x x + k_y y) \sinh(\gamma t), \\ \delta v_{1,2y} = \pm a_0 \gamma \frac{k_y}{k} e^{\mp kz} \sin(k_x x + k_y y) \sinh(\gamma t). \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Используя полученные формулы для нахождения компонент скорости для первой и второй жидкостей, можно найти соответствующие потенциалы:

$$\varphi_{1,2} = \mp a_0 \gamma \frac{1}{k} e^{\mp kz} \cos(k_x x + k_y y) \sinh(\gamma t) \quad (\text{A.15})$$

Принимая во внимание (A.15), можно вычислить циркуляцию скорости в 2D случае ($k_y = 0$) по контуру, охватывающему половину длины волны (обозначим через $\Gamma_{\lambda/2}$):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda/2} &= \varphi_1^B - \varphi_1^A + \varphi_2^A - \varphi_2^B = \\ &= -(-1) \frac{a_0 \gamma}{k} e^{ka} \sinh(\gamma t) + \frac{a_0 \gamma}{k} e^{-ka} \sinh(\gamma t) + \\ &+ \frac{a_0 \gamma}{k} e^{ka} \sinh(\gamma t) - (-1) \frac{a_0 \gamma}{k} e^{-ka} \sinh(\gamma t) = \\ &= \frac{4a_0 \gamma}{k} \sinh(\gamma t) \cosh(ka), \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Или при $ka \ll 1$

$$\Gamma_{\lambda/2} \approx \frac{4 da}{k dt} \quad (\text{A.17})$$

В 3D случае мы должны рассматривать возмущение в цилиндрических координатах $\sim \cos kr$, где $r \in [0; \lambda/2]$, тогда выражение (A.17) останется верным.

Таким образом, мы получили приближённое выражение для вычисления циркуляции по выбранному контуру, которое будет использовано при оценке скорости падения струи при развитии НРТ.

Приложение Б

Вычисление инкрементов неустойчивости Кельвина–Гельмгольца

Обратимся в данном приложении к вычислению инкремента неустойчивости Кельвина–Гельмгольца в различных геометриях. Простейшим является случай двух полубесконечных слоев жидкости разной плотности,двигающихся относительно друг друга с постоянной скоростью (см. рис. Б.1). Решение

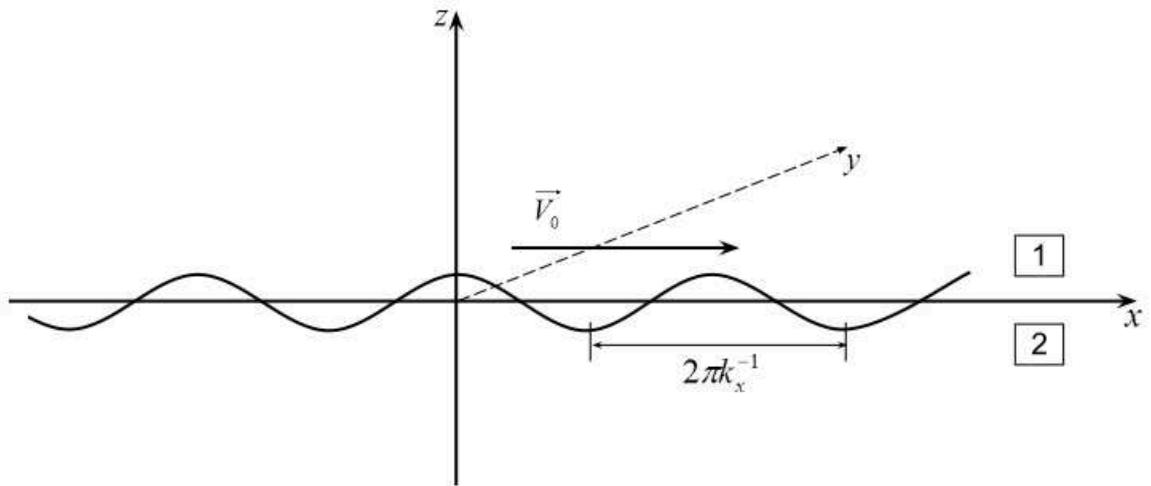


Рис. Б.1. Схематическое изображение постановки задачи для двух полубесконечных областей, заполненных веществами разной плотности.

задачи можно найти в [184], однако для полноты изложения и возможности проведения дальнейшего анализа получим его и здесь.

Система линеаризованных уравнений выглядит аналогично (A.2). Это означает, что также в силе остаётся уравнение для давления (A.4), решение которого по-прежнему будем искать в виде $p = P(z)e^{i\xi}$, $\xi = k_x x + k_y y - \omega t$.

Тогда для первой и второй жидкости получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta p_1 = C_1 e^{-kz} e^{i\xi}, \\ \delta p_2 = C_2 e^{kz} e^{i\xi}, \\ \delta v_{1z} = B_1 e^{-kz} e^{i\xi}, \\ \delta v_{2z} = B_2 e^{kz} e^{i\xi}, \\ \zeta = A e^{i\xi}. \end{array} \right. \quad (\text{Б.1})$$

Учитывая условие равенства давлений на границе и условие (A.5) получаем следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = C_2, \\ i(k_x v_0 - \omega) A = B_1, \\ -i\omega A = B_2, \\ i(k_x v_0 - \omega) B_1 = \frac{k}{\rho_1} C_1, \\ -i\omega B_2 = -\frac{k}{\rho_2} C_2. \end{array} \right. \quad (\text{Б.2})$$

решение которой приводит нас к дисперсионному уравнению для вычисления инкремента НКГ в рассматриваемом случае:

$$(k_x v_0 - \omega)^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \omega^2 = 0. \quad (\text{Б.3})$$

Таким образом

$$\gamma_\infty \equiv \gamma_{KHI} = \frac{k_x v_0 \sqrt{\delta}}{1 + \delta}, \quad \delta = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad (\text{Б.4})$$

$\omega = \omega_0 + i\gamma$. Здесь “ ∞ ” отмечает тот факт, что рассматривалась плоская граница, разделяющая два полупространства. Следует отметить, что даже при наличии возмущений вдоль оси $0y$, полученный инкремент определяется только длиной волны возмущения вдоль оси $0x$, т.е. вдоль направления относительного движения жидкостей.

Перейдем к рассмотрению задачи о росте возмущений на границе плоского слоя конечной толщины. Схематически постановка изображена на рис. Б.2. Как и ранее, будем искать решение уравнения (А.4) в виде $p = P(x)e^{i\xi}$, где $\xi = k_z z + k_y y - \omega t$. Тогда для первой и второй жидкостей получаем:

$$\begin{cases} P_I(x) = C_2 e^{-kx}, \\ P_{II}(x) = C'_1 e^{kx} + C'_3 e^{-kx}, \\ P_{III}(x) = C_4 e^{kx}, \end{cases} \quad (\text{Б.5})$$

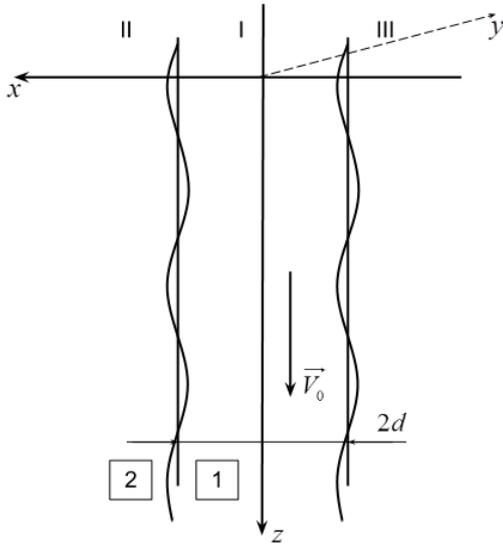


Рис. Б.2. Схематическое изображение постановки задачи для движущегося слоя жидкости.

где $k^2 = k_z^2 + k_y^2$. В этом случае в области II поперечная общему движению слоя составляющая возмущенной скорости будет даваться выражением $\delta v_x \sim e^{kx} - \frac{C'_3}{C'_1} e^{-kx}$. Требование $\delta v_x(0) = 0$ (при условии симметрии течения в слое) приводит к соотношению $C'_1 = C'_3$. Обозначив $C'_1 = C'_3 = \frac{1}{2}C_1$, для первых двух областей получаем следующие решения линеаризованных уравнений (А.3):

$$\begin{cases} \delta p_1 = C_1 \cosh(kx) e^{i\xi}, \\ \delta v_{1x} = B_1 \sinh(kx) e^{i\xi}, \\ \delta p_2 = C_2 e^{-kx} e^{i\xi}, \\ \delta v_{2x} = B_2 e^{-kx} e^{i\xi}, \end{cases} \quad (\text{Б.6})$$

Как и прежде, учитывая условия на границе $x = d$, получаем следующую

систему для нахождения констант интегрирования:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 \cosh(kd) = C_2 e^{-kd}, \\ -i\omega A + v_0 i k_z A = B_1 \sinh(kd), \\ -i\omega A = B_2 e^{-kd}, \\ -i\omega B_1 + v_0 i k_z B_1 = -\frac{C_1 k}{\rho_1}, \\ -i\omega B_2 = \frac{C_2 k}{\rho_2}, \end{array} \right. \quad (\text{Б.7})$$

которая приводит нас к дисперсионному уравнению:

$$(k_z v_0 - \omega)^2 + th(kd) \frac{\rho_2}{\rho_1} \omega^2 = 0. \quad (\text{Б.8})$$

Тогда инкремент запишется в виде:

$$\gamma_p^{(n)} \equiv \gamma_{KHI} = k_z v_0 \frac{\sqrt{G_p^{(n)} \delta}}{1 + G_p^{(n)} \delta}, \quad (\text{Б.9})$$

Здесь p обозначает плоскую геометрию (“planar”), n – наличие моды вдоль оси Oy , $G_p^{(n)} = \tanh(kd) = \tanh\left(\sqrt{k_z^2 + k_y^2} d\right) = \tanh(k_z \sqrt{1 + n^2} d)$. Очевидно, что $G_p^{(0)} < G_p^{(n)}$, следовательно, наличие возмущений вдоль Oy увеличивает инкремент при $\delta < 1$ всегда, при $\delta > 1$ – в некотором диапазоне kd (см. рис. Б.3).

Перейдём к рассмотрению случая цилиндрической струи, движущейся в среде с плотностью, отличной от плотности самой струи. Запишем уравнение (А.4), второе уравнение из (А.2) и кинематическое условие (А.5) в цилиндрической системе координат:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \delta p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \delta p}{\partial z^2} = 0, \\ \frac{\partial \delta v_r}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \delta v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial r}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \delta v_r. \end{array} \right. \quad (\text{Б.10})$$

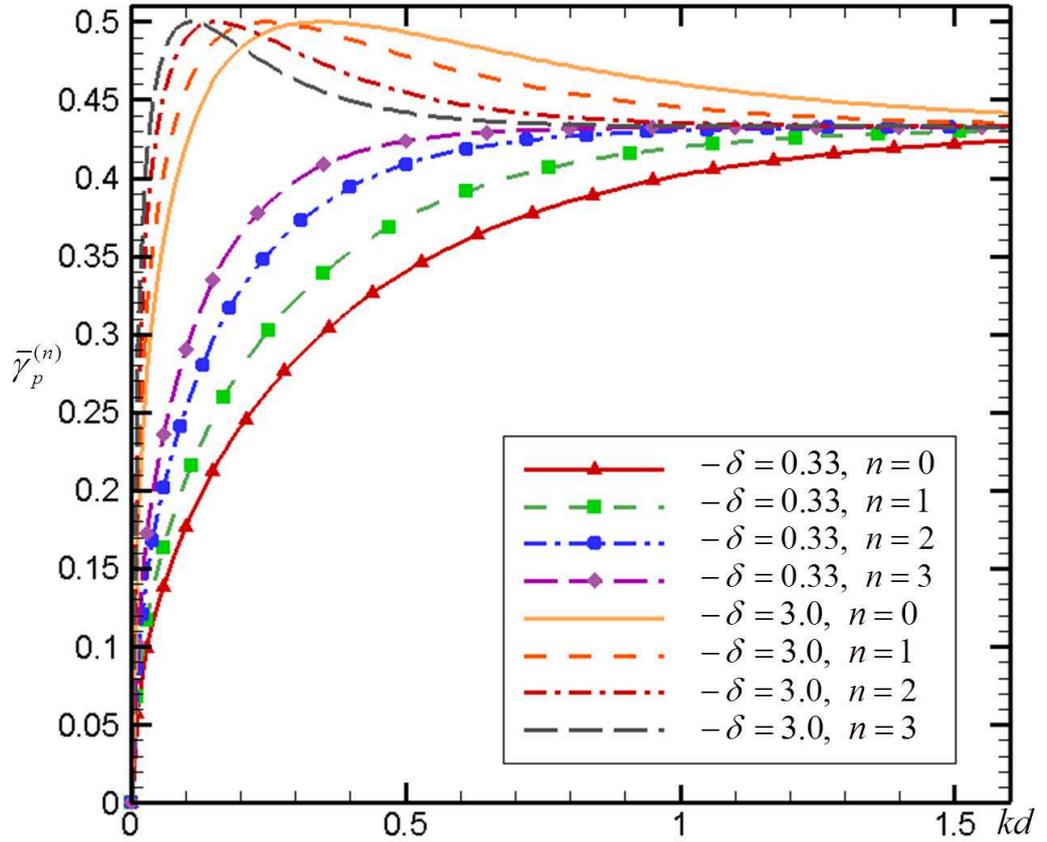


Рис. Б.3. Зависимости приведённого инкремента НКГ $\bar{\gamma}_p^{(n)} = \gamma_p^{(n)}/k_z v_0$ от произведения волнового числа на толщину струи.

Здесь уравнения для δv_φ и δv_z опущены, т.к. не требуются для дальнейшего анализа. Будем искать решение первого уравнения системы (Б.10) в виде $\delta p = P(r)e^{im\varphi}e^{i\xi}$, $\xi = kz - \omega t$. В этом случае получим следующее уравнение для нахождения функции P :

$$\frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP}{dr} - \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) = 0, \quad (\text{Б.11})$$

которое является модифицированным уравнением Бесселя и, как известно, имеет общее решение вида

$$P(r) = C_1 I_m(kr) + C_2 K_m(kr), \quad (\text{Б.12})$$

где $I_m(kr)$ - модифицированная функция Бесселя 1-го рода, $K_m(kr)$ - модифицированная функция Бесселя 2-го рода. Применительно к первой и ко

второй жидкостям, учитывая требования к ограниченности функций, получаем следующие решения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta p_1 = C_1 I_m(kr) e^{im\varphi} e^{i\xi}, \\ \delta v_{1r} = B_1 I'_m(kr) e^{im\varphi} e^{i\xi}, \\ \delta p_2 = C_2 K_m(kr) e^{im\varphi} e^{i\xi}, \\ \delta v_{2r} = B_2 K'_m(kr) e^{im\varphi} e^{i\xi}, \end{array} \right. \quad (\text{B.13})$$

Принимая во внимание условия на контактной границе двух жидкостей, получаем систему для нахождения неизвестных констант интегрирования:

$$\left\{ \begin{array}{l} i(kv_0 - \omega) B_1 = -\frac{k}{\rho_1} C_1, \\ -i\omega B_2 = -\frac{k}{\rho_2} C_2, \\ i(kv_0 - \omega) A = B_1 I'_m(kr_0), \\ -i\omega A = B_2 K'_m(kr_0), \\ C_1 I_m(kr_0) = C_2 K_m(kr_0), \end{array} \right. \quad (\text{B.14})$$

где r_0 - радиус струи ($r_* = r_0 + \zeta(\varphi, z, t)$), и далее дисперсионное уравнение:

$$(kv_0 - \omega)^2 - \frac{\rho_2 K_m(kr_0) I'_m(kr_0)}{\rho_2 I_m(kr_0) K'_m(kr_0)} \omega^2 = 0. \quad (\text{B.15})$$

Для инкремента получаем выражение:

$$\gamma_c^{(m)} \equiv \gamma_{KHI} = kv_0 \frac{\sqrt{G_c^{(m)} \delta}}{1 + G_c^{(m)} \delta}, \quad (\text{B.16})$$

где

$$G_c^{(m)} = -\frac{K_m(kr_0) I'_m(kr_0)}{I_m(kr_0) K'_m(kr_0)}. \quad (\text{B.17})$$

Так же как и для плоской геометрии, проанализируем зависимость полученного инкремента от произведения kr волнового числа на радиус струи для различных отношений плотностей δ и при наличии различных азимутальных

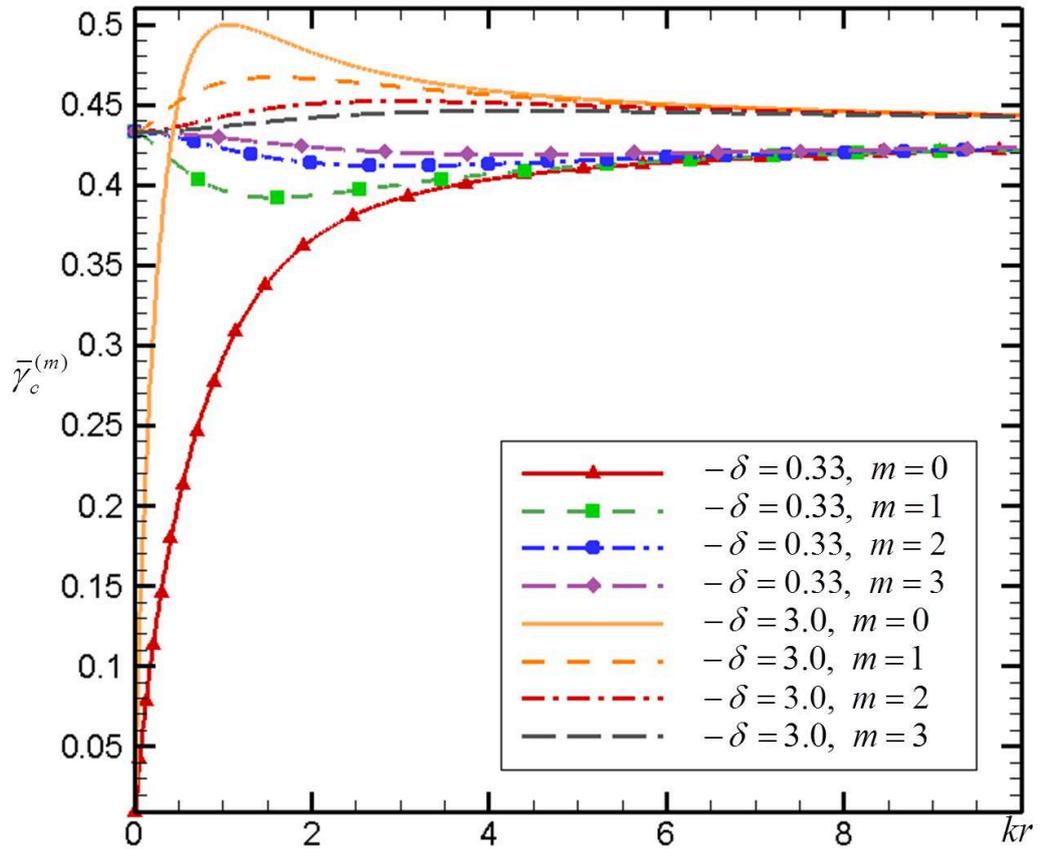


Рис. Б.4. Зависимости приведённого инкремента НКГ $\bar{\gamma}_c^{(m)} = \gamma_c^{(m)} / kv_0$ от произведения волнового числа на радиус струи.

мод. На рис. Б.4 приведены соответствующие кривые. Во-первых, следует отметить, что все значения инкремента $\bar{\gamma}_c^{(m)}$ при $kr \rightarrow \infty$ стремятся к значению $\bar{\gamma}_\infty$, а также при $kr \rightarrow 0$ в случае $m > 0$. Во-вторых, как и для плоского случая, здесь остаётся верным соотношение $\bar{\gamma}_c^{(m)} > \bar{\gamma}_c^{(0)}$ при $\delta < 1$, т.е. возмущения развиваются тем быстрее, чем выше азимутальная мода (т.е. чем больше m).