

На правах рукописи



Кудряшов И.Ю.

**Численное моделирование трансзвуковых
отрывных течений**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена в *ИПМ им. М.В. Келдыша РАН*.

Научный руководитель: *д. ф.-м. н.,
Луцкий Александр Евгеньевич*

Официальные оппоненты: *д. ф.-м. н.,
проф.,
Елизарова Татьяна Геннадьевна,
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, главный
научный сотрудник*

*к. ф.-м. н.,
Георгиевский Павел Юрьевич
НИИ Механики МГУ им. М.В. Ломоно-
сова, ведущий научный сотрудник*

Ведущая организация: *ФГУП ЦНИИмаш*

Защита состоится 21 марта 2013г. в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.024.03 при *Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН*, расположенном по адресу: 125047, Москва, Миусская пл., д.4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *ИПМ им. М.В. Келдыша РАН*.

Автореферат разослан «_____» _____ 2013 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,

д. ф.-м. н.

Змитренко Н. В.

Общая характеристика работы

Актуальность работы Данная работа посвящена математическому моделированию и разработке высокоэффективного параллельного комплекса программ для проведения вычислительных экспериментов и прикладных расчетов задач транс- и сверхзвукового обтекания летательных аппаратов с учетом турбулентности.

Высокая востребованность для инженерных приложений упомянутых расчетов, а также большое количество нерешенных проблем в данной области, обуславливает научную и практическую значимость поставленной задачи.

Таким образом, разработка программного обеспечения для расчета трёхмерных нестационарных сжимаемых вязких течений с учетом турбулентности является актуальной. Не менее важно и эффективное распараллеливание программного обеспечения, позволяющее проводить сложные расчеты на современных высокопроизводительных вычислительных системах, в том числе гибридной архитектуры.

Цель диссертационной работы состоит в создании параллельного программного комплекса для вычислительных систем с гибридной архитектурой, предназначенного для решения инженерных задач. В качестве математической модели выбраны уравнения Рейнольдса, с моделью турбулентности Спаларта-Алмараса. Второй целью является применение комплекса для решения ряда задач, имеющих большое практическое значение.

Для достижения поставленных целей решены следующие задачи:

- Разработка параллельной (MPI) программы на языке Fortran 90 для решения двумерных задач в рамках уравнений Навье-Стокса и Рейнольдса (RANS).
- Разработка вспомогательных модулей и приложений (в том числе эллиптического сеточного генератора, модуля для моделирования условий реального старта и разгона обтекаемого тела, модуля реализующего

неявное сглаживание невязки (residual smoothing)).

- Проведение двумерных расчетов обтекания головной части ракеты-носителя. Сравнение результатов расчетов с экспериментом.
- Создание на имеющейся базе программы для расчета трёхмерных течений в рамках уравнений Навье-Стокса, RANS и метода отсоединенных вихрей (DES) [8].
- Реализация трёхмерной версии программы для гибридных вычислительных систем на базе CUDA-MPI на языке CUDA Fortran.
- Проведение двумерных расчетов методом RANS и трёхмерных расчетов методом DES обтекания крыла. Сравнение с данными эксперимента.
- Разработка генератора синтетической турбулентности для задания параметров турбулентности набегающего потока при расчетах методом DES.
- Проведение трёхмерных расчетов обтекания крыла с генератором синтетической турбулентности. Сравнение с экспериментом.
- Исследование ускорения и эффективности параллельных алгоритмов в режимах MPI и CUDA-MPI.

Научная новизна диссертации отражена следующими элементами:

1. Разработан и реализован параллельный комплекс программ для расчета вязких сжимаемых течений в рамках уравнений Навье-Стокса, RANS и DES на гибридных вычислительных системах с графическими процессорами NVIDIA. В процессе расчетов подтверждена высокая работоспособность и эффективность комплекса.
2. Показано, что для аккуратного численного моделирования задач трансзвукового обтекания рассматриваемых тел принципиальное значение имеет учет факторов вязкости и турбулентности.

3. Проведено моделирование процесса разгона ракеты из состояния покоя до скорости $M=1.3$ с использованием данных телеметрии по ускорению.
4. Показано, что наличие разрешаемых турбулентных пульсаций в набегающем на крыло потоке может значительно улучшить качество 3D DES расчета на больших углах атаки.

Практическая значимость. Результаты, изложенные в диссертации, использованы для проведения численных экспериментов и решения инженерных задач. В ходе работы над диссертацией получен опыт по переносу Fortan приложений на гибридную архитектуру и освоен новый компилятор PGI CUDA Fortran; выявлены его возможности, недостатки и ограничения.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Разработан и реализован комплекс программ для расчета вязких сжимаемых течений в рамках систем уравнений Навье-Стокса, RANS и DES. Комплекс позволяет решать задачи, как на универсальных кластерах, так и на гибридных вычислительных системах.
2. В рамках разработанного комплекса реализованы и распараллелены вспомогательные алгоритмы — неявное сглаживание невязки (residual smoothing) и генератор синтетической турбулентности.
3. При помощи созданного программного комплекса:
 - Проведены расчеты обтекания головной части ракеты-носителя, в том числе в условиях реального старта и разгона (расчет в неинерциальной системе отсчета). Установлено, что для аккуратного численного моделирования задач трансзвукового обтекания рассматриваемых тел принципиальное значение имеет учет факторов вязкости и турбулентности.
 - Проведено численное моделирование течения вокруг крыла с симметричным профилем для различных углов атаки, в двумерной

и трёхмерной постановках, на дозвуковых и трансзвуковых режимах и с использованием генератора синтетической турбулентности. Установлено, что наличие разрешаемых пульсаций в набегающем на крыло потоке может значительно улучшить качество расчета.

Апробация работы Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- Молодежная конференция «Устойчивость и турбулентность течений гомогенных и гетерогенных жидкостей» (г. Новосибирск, 2010).
- XXII Юбилейный семинар с международным участием «Струйные, отрывные и нестационарные течения» (г. Санкт-Петербург, 2010).
- Международная конференция «The 8th Pacific Symposium on Flow Visualization and Image Processing» (г. Москва, 2011).
- Международная конференция «16th International Conference on Aerophysics Research Methods» (г. Казань, 2012).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 2 статьях в рецензируемых журналах [1, 2] из перечня ВАК и 4 статьях в сборниках трудов конференций [3–6] [7].

Структура и объем диссертации Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 103 страниц, из них 95 страницы текста, включая 46 рисунков. Библиография включает 68 наименований.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Также во введении представлен краткий исторический и литературный обзор посвященный развитию моделей турбулентности и параллельным вычислениям.

В первой главе описаны используемые математические модели и способы их численного решения. В основе лежит алгоритм решения трёхмерных уравнений Рейнольдса, дополненных уравнением модели турбулентности Спаларта-Алмараса [9] на структурированных сетках методом конечных объемов. Приводится подробное описание модели Спаларта-Алмараса, которая относится к классу линейных дифференциальных моделей с одним уравнением.

Интегрирование по времени, в зависимости от настроек расчета осуществляется либо при помощи явной схемы Эйлера, либо пятистадийным методом Рунге-Кутты.

Вычисление потоков на границах ячеек осуществляется с помощью решения задачи о распаде разрыва. Для этого используется один из двух реализованных алгоритмов: нахождение точного решения нелинейной задачи, методом Ньютона [10] и нахождение решения линеаризованной задачи методом HLLC [11].

Независимо от метода, максимальный шаг по времени ограничен условием на число Куранта, которое не может превышать единицы. Для того, чтобы смягчить это условие и увеличить максимально допустимый шаг по времени в программе предусмотрена процедура сглаживания невязки. Суть её заключается в том, что значения невязки $R(W_i)$ пересчитываются, так что новые значения представляют собой некую линейную комбинацию старых со значениями в ближайших соседних ячейках:

$$R_i^{new} = R_i^{old} + \varepsilon \sum_{j=1}^4 (R_j - R_i)$$

Однако, явная процедура осреднения не позволяет заметно увеличить максимально допустимый шаг по времени [12]. В работе [13] показано, что при неявном осреднении со значением параметра ε , лежащем в определенном

интервале, ограничение на число Куранта практически снимается. В результате мы приходим к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$(1 + n\varepsilon)R_i^{new} - \varepsilon \sum_j R_j^{new} = R_i^{old}$$

Большое количество научных и инженерных задач требует в процессе численного моделирования создания искусственной турбулентности. В число указанных задач входит моделирование взаимодействия летательных аппаратов со свободной турбулентностью, анализ влияния атмосферной турбулентности на распространение электромагнитных волн радио- и оптического диапазона и многие другие. Широкое применение получил также данный подход при моделировании течений вихреразрешающими методами DNS и LES, которые для корректной работы требуют задания на входной границе не только параметров осредненного течения, но и параметров турбулентности (а они, как правило, априори не известны).

В основе всех методов лежит представление скорости на входной границе как суммы средней и пульсационной составляющей.

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{u}'$$

Последняя представляет собой случайное трёхмерное векторное поле. Для того, чтобы это поле обладало свойствами реальной турбулентности на генерируемые случайные сигналы накладываются дополнительные ограничения, определяемые известными статистическими параметрами турбулентного течения.

Суть метода, применённого нами, описана в работе [14]. Предполагается, что корреляция компонент скорости не зависит от координаты и времени, а зависит только от дистанции, и единственного линейного масштаба L .

С помощью гипотезы Тейлора о замороженной турбулентности трёхмерное стационарное поле скоростей преобразуется в серию двумерных полей на различные моменты времени. Шаг по времени в этой серии определяется размером ячеек сетки генератора и средним значением скорости потока.

Для наложения пульсаций на основное течение нами применен подход «актуатора», предложенный в статьях [15, 16], однако существенным отличием является то, что в указанных статьях рассматривался несжимаемый случай, а численное решение осуществлялось методом конечных разностей с помощью алгоритмов **PISO** или **SIMPLE**. Для реализации актуатора при этом использовались добавки к давлению, величина которых вычислялась из уравнения Бернулли в приближении стационарного одномерного течения. В нашем случае такой подход не приемлем, так как при учете сжимаемости давление становится величиной термодинамической, а не кинематической, и вычисляется из уравнения состояния. Для наложения поля пульсаций, поток на грани, по которой проходит актуатор, считается по разному, для ячейки слева(вверх по потоку) и справа. Для ячейки справа он вычисляется так, как если бы слева был невозмущенное осредненное течение, а для ячейки справа, необходимые для вычисления потока значения компонент скорости на грани берутся из текущей ячейки сгенерированного поля пульсаций.

Вторая глава посвящена особенностям параллельной реализации. В начале главы даются основные понятия и описываются особенности разработки параллельного программного обеспечения.

Параллельный алгоритм, реализованный в нашей программе основан на разбиении расчетной области на прямоугольные подобласти приблизительно равных размеров с перекрытием в 2 ячейки (толщина слоя перекрытия обусловлена шаблоном численной схемы). Синхронизация осуществляется через обмен сообщениями между различными процессами с распределенной памятью, построенном на библиотеке MPI.

Разбиение области на подобласти осуществляется автоматически. Алгоритм разбиения, разработанный при участии автора, изначально был предназначен для симулятора МКТ, моделирующего процессы фильтрации в пласте [17]. Он многократно опробован и подтвердил свою эффективность в ходе промышленных расчетов.

Для алгоритма сглаживания невязки (residual smoothing) в программе

реализована параллельная версия метода Якоби. Расчеты показывают, что на реальных задачах на операцию сглаживания тратится в 5-6 раз меньше времени, чем на вычисление потоков или вычисление производных на гранях.

Ниже представлены результаты замеров ускорения полученные при расчете задачи двойного маховского отражения (double mach reflection) в трёхмерной постановке. Расчетная область состояла из 15827000 ячеек. Расчеты проводились на кластере МВС-100к МСЦ. Из представленных на рис. 1 и 2 графиков видно, что разработанный алгоритм обладает хорошими показателями эффективности и масштабируемости.

Таблица 1. Замеры времени счета

Число ядер	Время счета (мин.)
16	189
32	96
64	50
128	27

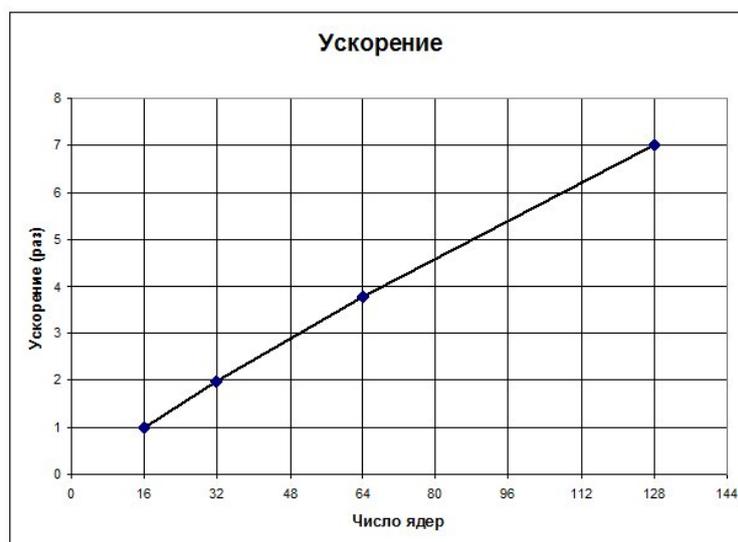


Рис. 1. Зависимость ускорение от числа ядер (из-за размера задачи, ускорение замерялось относительно расчета на 16 ядрах)

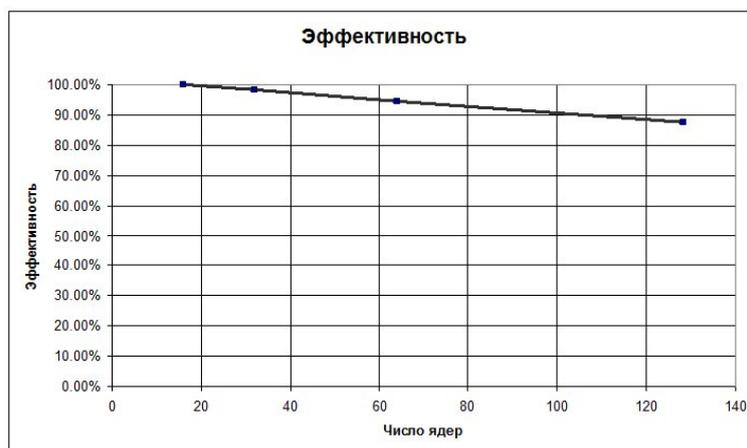


Рис. 2. Зависимость эффективности от числа ядер

В ИПМ им. М.В. Келдыша действует вычислительная система гибридной архитектуры К-100. В числе прочего математического обеспечения на ней установлены компиляторы Portland Group, что дало возможность доработать программу под использование технологии CUDA без переноса её на C/C++ и определить характеристики полученного параллельного кода.

Условно процесс переработки программы можно разделить на три основных этапа:

1. Создание необходимых дублирующих структур данных на видеокарте (массивы основных переменных, данные о сетке, константы и т.д.). Все расчеты будут проводиться в памяти граф. плат, однако есть три процесса, которые принципиально осуществляются только через обычную память:

- загрузка данных с жесткого диска
- выгрузка данных на жесткий диск
- обмен данными по MPI на границах областей различных процессов

Массивы, участвующие в данных операциях нуждаются в дублировании.

2. Замена основных циклов по сеточным массивам на вызов специальных процедур предназначенных для выполнения на GPU (kernel-процедур).
3. Решение специфических для гибридной архитектуры проблем (организация обменов, с предварительным копированием данных из памяти графической платы в память компьютера, редукция массивов в памяти устройства).

Серьезные затруднения вызвала отладка программы, что связано с новой используемого компилятора, который пока не доведен до стабильного рабочего состояния. Оказалось, в частности, что компилятор накладывает много ограничений на код (в том числе нигде не документированных). Получен опыт работы с данным ПО и установлены его слабые стороны и ограничения. В конечном результате достигнута стабильная работа программы.

Ускорение работы, по сравнению со счетом на CPU, составило для финальной версии от 10 до 16 раз, в зависимости от конкретной задачи и числа используемых устройств. Так, в задаче по обтеканию крыла, на сетке из 9 млн. ячеек при использовании 128 CPU скорость счета составляла 4 шага в секунду. При счете на 32 GPU скорость счета составила 13.5 шагов в секунду, на 64 — 24.5, а на 128 — 40 шагов в секунду.

Таблица 2. Результаты замеров скорости счета.

Вычислители	128xCPU	32xGPU	64xGPU	128xGPU
Скорость (шаг/сек.)	4	13.5	24.5	40
Ускорение (отн. 128x CPU)	1	3.375	6.125	10

В третьей главе описано применение разработанного программного обеспечения для решения задачи об обтекании головной части ракеты носителя. Представлено сравнение численных результатов, полученных в рамках моделей уравнений Эйлера, Навье-Стокса и осредненных уравнений Рейнольдса

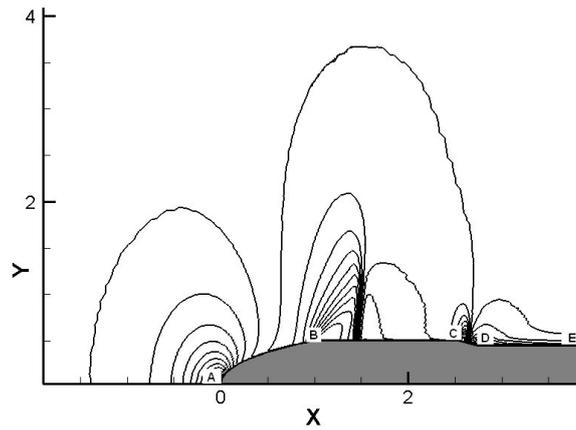


Рис. 3. Основные элементы поверхности модели.

с моделью турбулентности Спаларта-Аллмараса с экспериментальными данными [18–21]. Также приведены предварительные результаты моделирования разгона ракеты и сравнение их с результатами расчетов на установление.

Расчеты обтекания модели (рис. 3) выполнены для чисел Маха набегающего потока $M = 0.82, 0.90, 0.95, 1.1, 1.3$ при числах Рейнольдса $Re = \frac{U_\infty D}{\nu_\infty} \approx 3 * 10^6$ (D — диаметр модели).

Одной из важных характеристик является наличие или отсутствие отрыва пограничного слоя по действием замыкающего скачка. Анализ полученных в расчетах данных позволяет утверждать, что при $M \geq 0.95$ отрыв не возникает. Отрыв наблюдается при $M < 0.90$. Область отрыва достигает наибольших размеров при $M = 0.85$.

Решение уравнений Навье-Стокса имеет нестационарный характер. Над цилиндрической поверхностью образуются вихри (области отрыва), которые сносятся вниз по потоку рис. 4а. На рис. 4б представлена зависимость от времени давления в точке $x = 1.78$. Осредненная по всему промежутку времени величина существенно отличается, как от экспериментального значения, так и от решения уравнений Рейнольдса.

Течения около обратных уступов также является классической областью исследований (см. напр. [22] и приведенный там список литературы). Известно, что положительный градиент давления, как правило, приводит к отрыву и образованию обширной области обратного течения. Модель уравнений Эй-

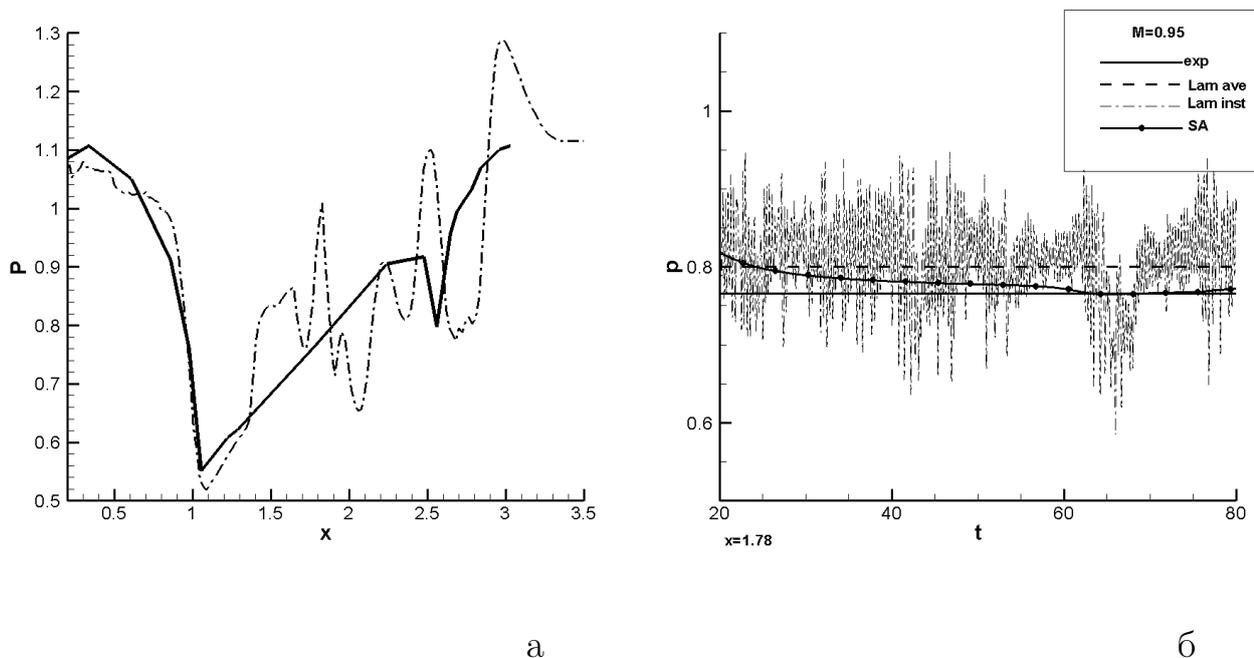


Рис. 4. Мгновенное распределение давления на поверхности (а). Зависимость от времени давления в точке и усредненное значение (б).

лера, естественно, не описывает такие явления. Сопоставление численных и экспериментальных данных по распределению давления на поверхности модели (рис. 5) свидетельствует о неадекватности модели Эйлера в этой области. Указанный факт существенно влияет на получаемую в расчете величину сопротивления. Наличие для решений уравнений Эйлера области низкого давления на обратном конусе приводит к росту суммарного сопротивления на 30% по сравнению с решением уравнений Рейнольдса.

Приведенные данные свидетельствуют, в первую очередь, о необходимости при численном моделировании рассматриваемых течений учитывать влияние вязкости и турбулентности. Турбулентный характер течения в рассматриваемом случае удовлетворительно описывается моделью Спаларта-Аллараса.

Во второй части третьей главы приведены результаты расчетов, моделирующих процесс разгона ракеты. Получена серия мгновенных картин течения для различных чисел Маха в интересующем диапазоне. Поскольку нами также проводились расчеты на установление по данной задаче, было выполнено

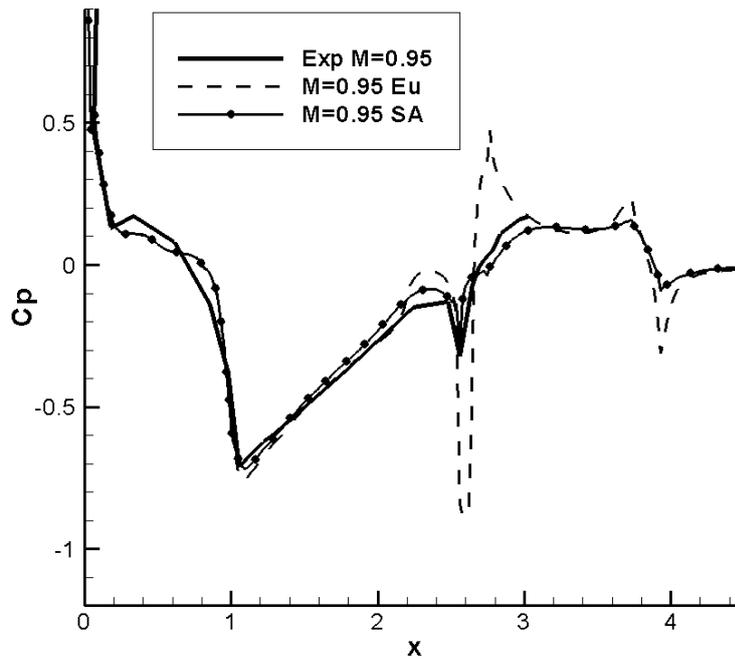


Рис. 5. Распределение давления на поверхности модели ($M=0.95$). Решения уравнений Эйлера и Рейнольдса, экспериментальные данные.

сравнение результатов обоих методов. Установлено, что мгновенная картина течения совпадает с полученной в расчете на установление для соответствующего числа Маха.

Вместе с тем, помимо совпадения со стационарными результатами, использование неинерциальной системы отсчета обладает рядом преимуществ. Полученные в одном расчете данные можно использовать для построения зависимостей интегральных характеристик от числа Маха (рис. 6). Кроме того, данный подход позволяет наблюдать за процессами происходящими при трансзвуковой перестройке течения, которые не воспроизводятся в расчетах стационарных режимов.

Четвёртая глава посвящена численному моделированию течения вокруг крыла с симметричным профилем с использованием подхода RANS дополненного моделью турбулентности Спаларта-Алмараса, приводится сравнение с экспериментальными данными, устанавливается область применимости используемых методик.

В начале главы идет общее описание задачи, а также особенностей и ха-

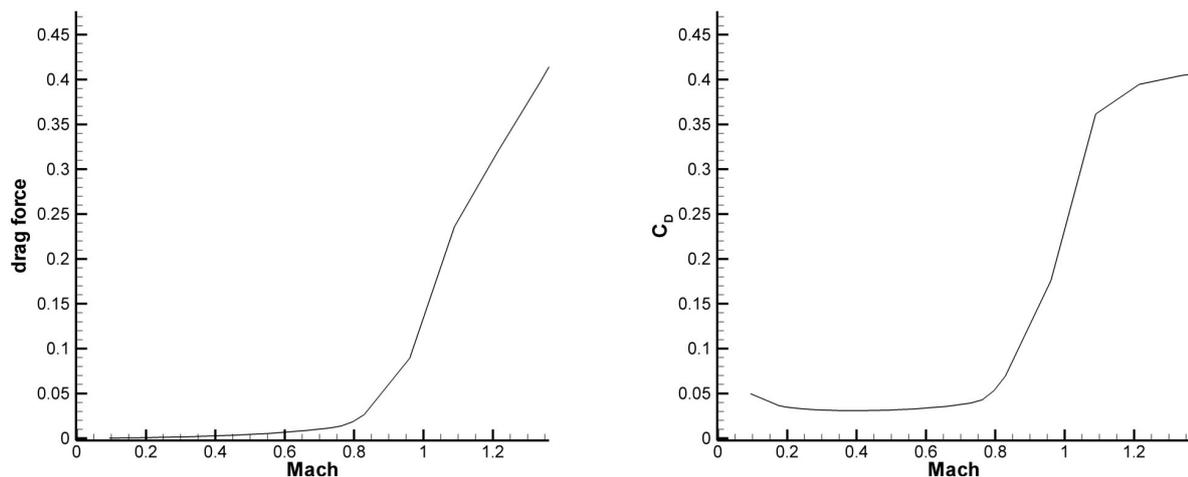


Рис. 6. Зависимость сопротивления от числа Маха.

рактических режимов обтекания полученных из обобщения накопленных экспериментальных данных.

Формулируется постановка задачи об обтекании профиля NASA0012, описываются начальные и граничные условия и сетка. Приводятся результаты расчетов в двумерной постановке по методу RANS (рис. 7). В целом полученные результаты вполне адекватны и соответствуют тому, что может дать метод RANS. Для коэффициента подъемной силы расчеты дают хорошее совпадение с экспериментом на линейном участке. При этом момент начала сваливания (резкого падения подъемной силы) оказывается затянут. Получающиеся течения на всех режимах являются стационарными.

Третья часть главы посвящена трёхмерным расчетам обтекания крыла с профилем NASA0012 методом DES на дозвуковых режимах. Рассказывается об особенностях построения сетки и постановке задачи. Обосновывается необходимость применения генератора синтетической турбулентности.

На первом этапе исследований возмущения вносились в установившееся двумерное RANS решение для угла атаки $\alpha = 14^\circ$. Из эксперимента известно [23], что при данном угле атаки коэффициент C_y примерно равен 0.65 и крыло находится в режиме сваливания. В результате однократно внесенных возмущений образовалось новое устойчивое периодическое решение с отры-

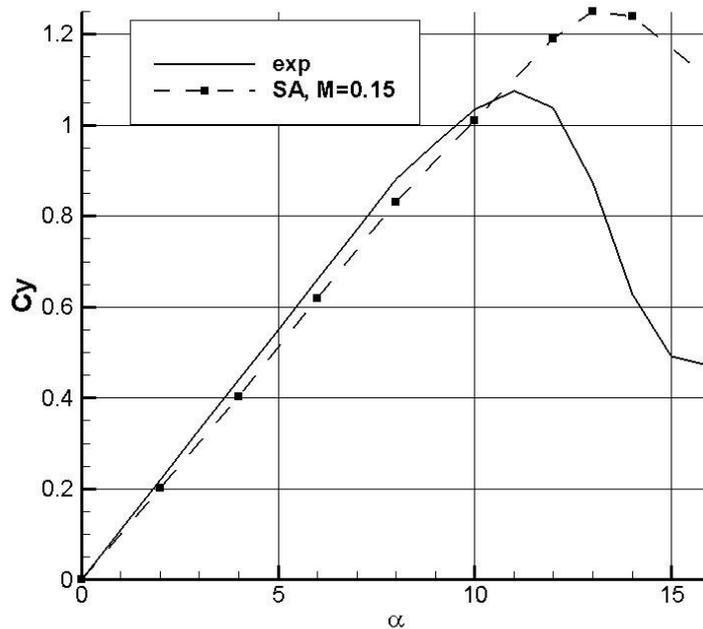


Рис. 7. Зависимость коэффициента подъемной силы от угла атаки [23].

вом. Усредненный коэффициент C_y при этом равен 0.75, что значительно ближе к эксперименту, чем результат первоначального расчета на установление (рис. 7).

Для трёхмерной задачи возмущения генерировались специальным образом, подробно описанном в первой главе. Получившееся в результате решение, как и в двумерном случае является отрывным с наличием периодических структур. Однако, в отличие от двумерного случая оно менее регулярно и после осреднения дает значение C_y приблизительно 0.65, что совпадает с экспериментом (рис. 8).

В последней части приводятся результаты расчетов трансзвукового обтекания в двумерной постановке.

Выполнены расчеты обтекания профиля NACA0012 при числе Маха набегающего потока $M = 0.7$ и различных углах атаки. В режиме RANS для всех рассмотренных углов атаки может быть получено численное решение, близкое к стационарному.

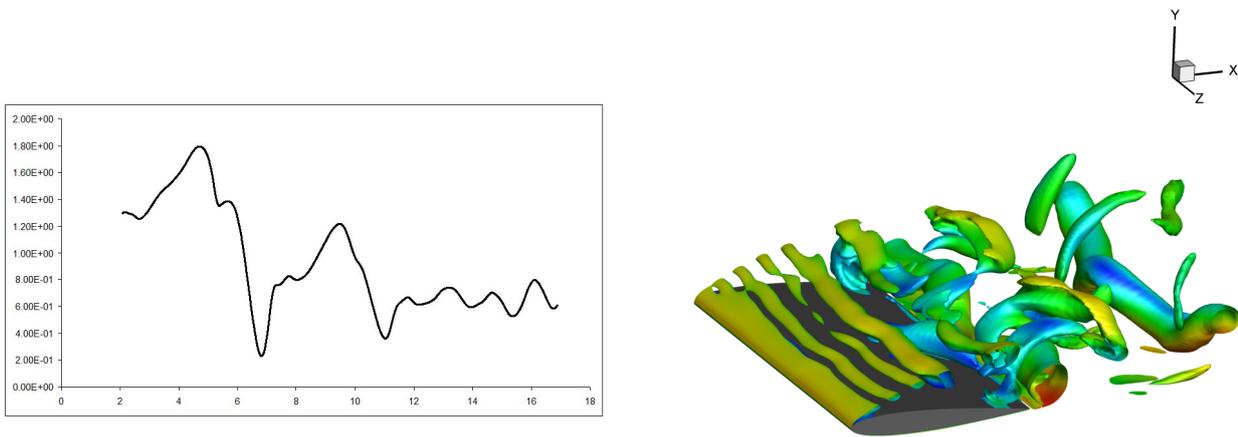


Рис. 8. Слева: Зависимость коэффициента подъемной силы от времени для возмущенного 3D DES решения. Угол атаки $\alpha = 14^\circ$

Справа: Обтекание крыла с симметричным профилем, визуализация вихревых структур, с раскраской по модулю скорости (изоповерхность $Q = (\|\Omega\|^2 - \|S\|^2)/2$).

Основная особенность обтекания рассматриваемого профиля при $M = 0.7$ состоит в формировании по мере увеличения угла атаки местной сверхзвуковой области над подветренной стороной. Сверхзвуковая область замыкается внутренней ударной волной.

Расчеты показали, что при достаточно малых углах атаки ($\alpha < 1.5^\circ$) размеры сверхзвуковой области весьма невелики. При увеличении угла атаки размеры сверхзвуковой области быстро увеличиваются, замыкающий скачок вызывает отрыв пограничного слоя.

Расчетные и экспериментальные данные по положению и интенсивности замыкающего скачка согласуются вполне удовлетворительно.

К настоящему времени в ряде экспериментальных и численных работ (см., напр. [24, 25]) показано, что на трансзвуковых режимах стационарное решение может терять устойчивость, что проявляется как в неединственности, так и нестационарности. Согласно [24] такой эффект может наблюдаться при обтекании профиля NASA 0012 для $M = 0.7$ $\alpha = 4.8^\circ$.

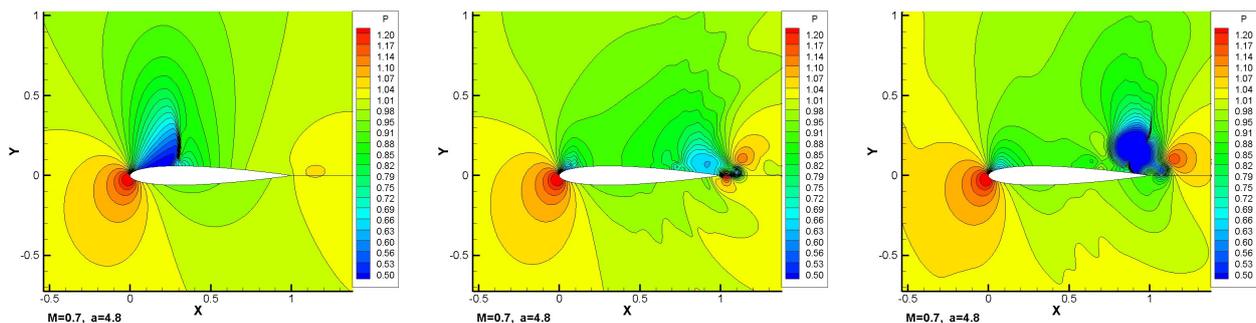


Рис. 9. Распределение давления в различные моменты времени для нестационарного решения.

В расчетах в режиме DES нестационарный режим был получен. Среднее за рассмотренный промежуток времени значение составляет $C_{ya} = 0.523$. Основные элементы нестационарного решения продемонстрированы на рис. 9. Как видно, течение характеризуется периодическим формированием и отрывом вихрей над подветренной стороной профиля. Замыкающий скачок в некоторые моменты практически полностью отсутствует.

В Заключение приводятся выводы и результаты по работе в целом:

1. Разработан и реализован комплекс программ под высокопроизводительные вычислительные системы гибридной архитектуры, позволяющий проводить в том числе и трёхмерные расчеты вязких сжимаемых течений методом DES. Показана эффективность созданных параллельных алгоритмов
2. В рамках разработанного комплекса реализованы и распараллелены вспомогательные алгоритмы — неявное сглаживание невязки (residual smoothing) и генератор синтетической турбулентности.
3. Реализованный программный комплекс использован при моделировании задач обтекания головной части ракеты-носителя и обтекания крыла с симметричным профилем. Достигнуты следующие результаты:

- для головной части в расчетах получено хорошее совпадение с экс-

- периментом и воспроизведены основные элементы трансзвуковой перестройки течения при увеличении числа Маха набегающего потока; установлено, что для аккуратного численного моделирования задач трансзвукового обтекания рассматриваемых тел принципиальное значение имеет учет факторов вязкости и турбулентности
- в двумерных расчетах обтекания крыла удалось удовлетворительно воспроизвести линейный участок экспериментальной кривой зависимости подъемной силы от угла атаки. В трёхмерном расчете, с помощью синтетической турбулентности в набегающем потоке удалось получить совпадение с экспериментом на больших углах атаки.

Список публикаций

1. Кудряшов И. Ю., Луцкий А. Е. Моделирование турбулентного отрывного трансзвукового обтекания тел вращения // Математическое моделирование. 2011. Т. 23, № 5. С. 71–80.
2. Кудряшов И. Ю., Луцкий А. Е. Адаптация кода для расчета течений вязких жидкостей под гибридные вычислительные системы на базе CUDA-MPI // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 7. С. 31–44.
3. Кудряшов И. Ю., Луцкий А. Е. Численное исследование осесимметричного трансзвукового обтекания модели с развитыми отрывными зонами // Сборник трудов конференции "Устойчивость и турбулентность течений гомогенных и гетерогенных жидкостей : Доклады Всероссийской молодежной конференции. Вып. XII". 2010. С. 189–192.
4. Кудряшов И. Ю., Луцкий А. Е. Численное моделирование задач трансзвукового отрывного обтекания тел вращения // Струйные, отрывные и нестационарные течения. 2010. С. 283–285.

5. Кудряшов И. Ю., Луцкий А. Е. Vortex shedding from an airfoil visualization // The 8th Pacific Symposium on Flow Visualization and Image Processing. No. 038/1. 2011.
6. Kudryashov I. Y., Lutsky A. E. Numerical simulation of axisymmetrical transonic flow with developed separation zones // XVI International conference on the methods of aerophysical research. Abstracts Pt. II. Kazan: 2012. P. 169–170.
7. Кудряшов И. Ю., Луцкий А. Е., Северин А. В. Численное исследование отрывного трансзвукового обтекания моделей с сужением хвостовой части. Препринт ИПМ №7 2010.

Цитированная литература

8. Волков К. Н., Емельянов В. Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. ФИЗМАТЛИТ, 2008. ISBN: [978-5-9221-0920-8](#).
9. Edwards J. R., Chandra S. Comparison of Eddy Viscosity-Transport Turbulence Models for Three-Dimensional, Shock-Separated Flowfields // AIAA Journal. 1996. Vol. 34, no. 4. P. 756–763.
10. Годунов С. К., Забродин А. В. Численное решение многомерных задач газовой динамики. Москва: Издательство «Наука», 1976.
11. Toro E. F., Spruce M., Speares W. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver // Shock Waves. 1994. Vol. 4. P. 25–34.
12. Jameson A., Mavriplis D. Finite Volume Solution of the Two-Dimensional Euler Equations on a Regular Triangular Mesh // AIAA 23rd aerospace sciences meeting. No. AIAA-85-0435. 1985.
13. Jameson A. Transonic Flow Calculations: Tech. Rep. 1651: Princeton University, 2003.

14. Bin Mohamad Badry A. B. Synthetic Turbulence Generation for LES on Unstructured Cartesian Grids: Ph. D. thesis / Cranfield University, School of Mechanical Engineering. 2008.
15. Troldborg N. Actuator Line Modelling of Wind Turbine Wakes: Ph. D. thesis / Technical University of Denmark. 2008.
16. Gilling L., Sorensen N. N., Rethore P.-E. M. Imposing Resolved Turbulence by an Actuator in a Detached Eddy Simulation of an Airfoil // EWEC 2009 Proceedings online. EWEC, 2009.
17. Кудряшов И. Ю., Максимов Д. Ю. Моделирование задач многофазной многокомпонентной фильтрации на многопроцессорных вычислительных комплексах // Препринт ИПМ. 2009. № 68.
18. Даньков Б. Н. и др. Особенности трансзвукового обтекания конусоцилиндрического тела при большом угле излома образующей на передней угловой кромке // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 2. С. 46–60.
19. Даньков Б. Н. и др. Особенности трансзвукового обтекания конусоцилиндрического тела при малом угле излома образующей на передней угловой кромке // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 3. С. 140–154.
20. Даньков Б. Н. и др. Волновые возмущения в трансзвуковых отрывных течениях // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 6. С. 153–165.
21. Даньков Б. Н. и др. Особенности трансзвукового течения за задней угловой кромкой надкалиберного конусоцилиндрического тела // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 3.
22. Петров К. П. Аэродинамика тел простейших форм. Москва: Факториал, 1998. С. 432.
23. Sheldahl R. E., Klimas P. C. Aerodynamic Characteristics of Seven Airfoil Sections Through 180 Degrees Angle of Attack for Use in Aerodynamic Anal-

ysis of Vertical Axis Wind Turbines: Tech. rep.: Sandia National Laboratories, 1981.

24. Crouch J. D., Garbaruk A., Magidov D. Predicting the onset of flow unsteadiness based on global instability // Journal of Computational Physics. 2007. Vol. 224. P. 924–940.
25. Barakos G., Drikakis D. Numerical simulation of transonic buffet flows using various turbulence closures // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2000. Vol. 21. P. 620 – 626.