Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
Полярный геофизический институт

На правах рукописи

Мингалев Игорь Викторович

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЩЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ АТМОСФЕР ЗЕМЛИ, ВЕНЕРЫ И ТИТАНА, А ТАКЖЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАЗОВАНИЯ ЦИКЛОНОВ В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Апатиты — 2015

Оглавление

Оглавление **4**

Введение **5**

Глава I. Построение моделей общей циркуляции планетных атмосфер, основанных на численном интегрировании уравнений газовой динамики **16**

I.1 Схема построения моделей общей циркуляции 16

I.2 Различные формы записи уравнений газовой динамики для планетных атмосфер 20

I.3 Явная гибридная схема на регулярной сетке в декартовых координатах 24

I.3.1 Явная схема расщепления в декартовых координатах 24

I.3.2 Явная гибридная схема для 1-мерной системы уравнений газовой динамики без источниковых членов 27

I.3.3 Гибридная схема для 1-мерной системы уравнений газовой динамики с источниковыми членами 33

I.4 Явная гибридная схема на регулярной сетке в сферических координатах 36

I.4.1 Регулярная пространственная сетка в сферических координатах 36

I.4.2 Явная схема расщепления в сферических координатах 39

I.4.3 Схема на шаге расщепления по вертикальному направлению 42

I.4.4 Схемы на шагах расщепления по горизонтальным направлениям 45

I.4.5 Учет рельефа поверхности 48

I.5 Система уравнений динамики смеси воздуха, водяного пара и аэрозолей из воды и льда при наличии фазовых переходов, а также схема её численного интегрирования 49

I.6 Упрощенное описание радиационного нагрева атмосферы в релаксационном приближении 53

I.7 Программная реализация моделей на графических процессорах . 54

I.8 Заключение главы I 58

Глава II. Численное моделирование общей циркуляции атмосферы Венеры с учетом рельефа поверхности **60**

II.1 Введение главы II 60

II.2 Описание модели 63

II.2.1 Система уравнений, расчетная сетка и метод численного интегрирования . . . 63
II.2.2 Задание радиационного нагрева атмосферы Венеры . . . 64
II.2.3 Начальные и граничные условия . . . 66
II.3 Результаты моделирования . . . 67
II.4 Анализ результатов моделирования . . . 83
II.5 Выводы главы II . . . 84

Глава III. Численное моделирование сезонных изменений общей циркуляции атмосферы Титана . . . 86

III.1 Введение главы III . . . 86
III.2 Описание модели . . . 88
III.2.1 Система уравнений, расчетная сетка и метод численного интегрирования . . . 88
III.2.2 Задание радиационного нагрева атмосферы Титана . . . 89
III.2.3 Начальные и граничные условия . . . 90
III.3 Результаты моделирования . . . 91
III.3.1 Результаты моделирования для условий равноденствия . . . 92
III.3.2 Результаты моделирования при нахождении подсолнечной точки на широте $\mathbf{5^0}$ . . . 104
III.3.3 Результаты моделирования при нахождении подсолнечной точки на широте $\mathbf{10^0}$ . . . 106
III.3.4 Результаты моделирования при нахождении подсолнечной точки на широте $\mathbf{15^0}$ . . . 114
III.3.5 Результаты моделирования при нахождении подсолнечной точки на широте $\mathbf{20^0}$ . . . 117
III.4 Анализ результатов моделирования . . . 122
III.5 Выводы главы III . . . 125

Глава IV. Численное моделирование общей циркуляции атмосферы Земли . . . 127

IV.1 Введение главы IV . . . 127
IV.2 Описание первой модели . . . 128
IV.2.1 Система уравнений, расчетная сетка и метод численного интегрирования . . . 128
IV.2.2 Задание радиационного нагрева атмосферы Земли . . . 129
IV.2.3 Начальные и граничные условия . . . 131
IV.3 Результаты моделирования . . . 131

IV.4 Краткое описание второй модели 133
IV.5 Влияние солнечной активности на глобальную ветровую систему атмосферы Земли в январских условиях 134
IV.6 Влияние солнечной активности на глобальную ветровую систему атмосферы Земли в июльских условиях 141
IV.7 Выводы главы IV 147

Глава V. Численное моделирование формирования циклонических вихревых течений в области внутритропической зоны конвергенции 149
V.1 Введение главы V 149
V.2 Описание модели 152
V.2.1 Система уравнений, расчетная сетка и метод численного интегрирования 152
V.2.2 Задание радиационного нагрева атмосферы Земли 153
V.2.3 Начальные и граничные условия 153
V.3 Результаты моделирования 155
V.4 Выводы главы V 170

Заключение 172

Список литературы 178

Введение

Данная диссертационная работа посвящена численному моделированию общей циркуляции атмосфер Венеры, Титана и Земли и моделированию процессов формирования циклонических вихрей в тропосфере Земли в приэкваториальной области, а также созданию моделей общей циркуляции атмосфер Земли, Венеры и Титана, основанных на численном интегрировании полных уравнений газовой динамики на пространственной сетке с высоким разрешением.

Актуальность проблемы

За последние два десятилетия произошел качественный скачок в развитии вычислительной техники. В частности, исследователям стали доступны компьютеры с архитектурой, позволяющей проводить массивно-параллельные вычисления. Методы численного решения системы уравнений газовой динамики также получили большое развитие за последние два десятилетия. В настоящий момент при использовании мощного персонального компьютера доступно интегрирование уравнений газовой динамики с приемлемым быстродействием на пространственной сетке, содержащей 10^8 узлов, а при использовании средних суперкомпьютеров со смешанной архитектурой число узлов сетки можно увеличить до 10^9. В то же время методика построения моделей общей циркуляции планетных атмосфер, основанных на численном интегрировании уравнений газовой динамики, мало освещена в монографиях и научных публикациях.

В атмосфере Земли и атмосферах Венеры и Титана протекают различные взаимосвязанные динамические процессы, причем пространственные и временные масштабы протекания одного процесса могут отличаться от соответствующих масштабов другого процесса на 2–3 порядка. Например, в нижней атмосфере Земли регулярно возникают горизонтальные сдвиговые течения протяженностью более 1500 км, в которых характерные пространственные масштабы изменения гидродинамической скорости не превышают 100 км, что на порядок меньше, чем требуется при выводе системы уравнений геофизической гидродинамики. Упомянутые выше горизонтальные сдвиговые течения регулярно возникают, в частности, между ячейками циркуляции Хедли, Ферреля и приполюсными ячейками, а также на границах циклонов и антициклонов. Эти сдвиговые течения могут существовать на протяжении временного интервала от нескольких часов до нескольких суток. В атмосфере Венеры в полярных областях в интервале высот 60–80 км существуют вихри, в которых характерный масштаб изменения скорости ветра составляет примерно 100–150 км. Кроме того, наблюдаются сильная зональная суперротация атмосферы Венеры в интервале высот 40–75 км и боль-

шие скорости ветра на высотах выше 80 км. Для изучения указанных динамических процессов необходимы модели общей циркуляции атмосфер Земли, Венеры и Титана, основанные на численном интегрировании полных уравнений газовой динамики на пространственной сетке с горизонтальным разрешением лучше 1^o, а для моделирования процессов образования циклонов в земной тропосфере необходимо разрешением менее 0.2^o.

Численное моделирование динамики атмосфер Земли, Титана, Венеры и других планет применяется для исследований в течение последних 45 лет. До недавнего времени большинство моделей общей циркуляции атмосферы Земли и все модели общей циркуляции атмосфер Венеры и Титана были основаны на решении системы уравнений геофизической гидродинамики. В этой системе уравнений уравнение для вертикальной компоненты скорости заменено уравнением гидростатики. Вывод этой системы уравнений (см., например, [*Монин, 1988*]) проводится в предположении, что характерные масштабы для Земли и Венеры, на которых меняется гидродинамическая скорость, в вертикальном и горизонтальном направлениях составляют 10 км и 1000 км соответственно. Эта система уравнений описывает эволюцию параметров атмосферного газа, осредненных по указанным пространственным масштабам, и не описывает правильно динамические процессы, у которых характерные масштабы изменения скорости ветра по горизонту не превышают 300 км, и которые представляют большой интерес, например, волны, возникающие в атмосферах Земли и Венеры при обтекании горных систем горизонтальным течением атмосферного газа, а также процессы развития неустойчивости в узких сдвиговых течениях, которые регулярно происходят в атмосфере Земли. Модели, основанные на численном интегрировании уравнений геофизической гидродинамики, использовались и используются для моделирования эволюции климатических параметров и для прогноза погоды [*Алексеев и др., 1988; Курбаткин и др., 1994; Hansen et al., 1983*]. За последнее десятилетие появились негидростатические модели общей и региональной циркуляции атмосферы Земли, которые, как и их гидростатические предшественницы, предназначены для моделирования эволюции климатических параметров и для прогноз погоды [*Davies et al., 2005*], [GFDL model, http://gfdl.noaa.gov].

Данная диссертация является шагом в направлении создания моделей общей циркуляции атмосфер Земли, Венеры и Титана, основанных на численном интегрировании полных уравнений газовой динамики на пространственной сетке с высоким разрешением и максимально использующих возможности современных и перспективных компьютеров по организации массивно-параллельных

вычислений, и которые позволяют проводить моделирование многих важных и неизученных динамических процессов в атмосферах Земли, Венеры и Титана на приемлемом уровне. Под руководством автора были созданы модели общей циркуляции атмосфер Земли, Венеры и Титана и региональная модель циркуляции земной тропосферы, основанные на численном решении полной системы уравнений движения вязкого сжимаемого газа без каких–либо упрощений на регулярной пространственной сетке с высоким разрешением. В модели общей циркуляции атмосфер Земли и в региональной модели учитываются фазовые переходы водяного пара в микрокапли воды и частицы льда и оседание этих аэрозольных капель и частиц льда в поле силы тяжести.

Цели и задачи данной работы

Целью данной работы является построение моделей общей циркуляции атмосфер Венеры, Титана и Земли и их применение для исследования общей циркуляции атмосфер и процессов формирования циклонических вихрей в приэкваториальной области тропосферы Земли. Для достижения поставленной цели решались следующие задачи.

1. Изложить общую методику построения моделей общей циркуляции планетных атмосфер, основанных на численном интегрировании уравнений газовой динамики.

2. Изложить новые варианты явной гибридной разностной схемы для численного решения системы уравнений газовой динамики на регулярных 3-мерных пространственных сетках в декартовых и в сферических координатах с учетом и без учета источниковых членов, содержащих ускорение внешних массовых сил.

3. Изложить систему уравнений, предназначенную для описания динамики смеси воздуха, водяного пара и аэрозолей из микрокапель воды и микрочастиц льда с учетом фазовых переходов между различными состояниями воды, а также изложить методику численного интегрирования этой системы, использующую указанную выше явную гибридную схему.

4. Изложить основные моменты программной реализации рассматриваемых моделей общей циркуляции планетных атмосфер на графических процессорах последних моделей с использованием технологии CUDA.

5. Создать основанную на численном интегрировании полной системы уравнений газовой динамики модель общей циркуляции атмосферы Венеры, в

которой учитывается рельеф поверхности Венеры и используется равномерная сетка в связанной с центром Венеры сферической системе координат с шагом сетки по вертикали 250 м и шагами сетки по горизонтальным направлениям менее 1^o, а также используются параллельные вычисления на многопроцессорных компьютерах с общей памятью и на графических ускорителях компании NVIDIA.

6. При помощи упомянутой выше модели провести численное моделирование процесса установления общей циркуляции атмосферы Венеры при различных начальных условиях и при различных вариантах упрощенного способа расчета нагрева–охлаждения атмосферы за счет поглощения–испускания электромагнитного излучения, а также исследовать такие особенности общей циркуляции атмосферы Венеры, как зональную суперротацию на высотах менее 80 км, изменение типа горизонтальной циркуляции на высотах 80–95 км от зональной суперротации к циркуляции с преобладанием переноса атмосферного газа из центра дневной стороны на центр ночной стороны через области средних широт и через полярные шапки, а также наличие вблизи полюсов нисходящих воронкообразных течений на высотах 70–80 км, которые известны из наблюдений, и исследовать влияние рельефа на общую циркуляцию атмосферы Венеры.

7. Создать основанную на численном интегрировании полной системы уравнений газовой динамики модель общей циркуляции атмосферы Титана, в которой учитывается рельеф поверхности Титана и используется равномерная сетка в связанной с центром Титана сферической системе координат с шагом сетки по вертикали 1 км и шагами сетки по горизонтальным направлениям менее 1^o, а также используются параллельные вычисления на многопроцессорных компьютерах с общей памятью и на графических ускорителях компании NVIDIA.

8. При помощи упомянутой выше модели провести численное моделирование процесса изменения общей циркуляции атмосферы Титана при смене сезонов от весеннего равноденствия до середины лета в северном полушарии.

9. Создать модель общей циркуляции нижней и средней атмосферы Земли, основанную на численном интегрировании полной системы уравнений газовой динамики на пространственной сетке с горизонтальным разрешением лучше 0.5^o и разрешением по высоте 200 м, причем такую, что в модели предусмотрена вставка области, в которой шаг сетки по горизонтальным

направлениям в 4 или в 8 раз меньше, чем в остальной области моделирования, а также учитываются рельеф земной поверхности и наличие аэрозолей из воды и льда, фазовых переходов водяного пара в аэрозольные частицы и обратно и используются массивно-параллельные вычисления на нескольких графических ускорителях.

10. При помощи упомянутой выше модели провести численное моделирование общей циркуляции атмосферы Земли с целью выяснить возможности модели воспроизводить возникновение и эволюцию сдвиговых течений в земной тропосфере, а также развитие неустойчивостей в этих течениях.

11. Создать модель, предназначенную для получения установившихся численных решений уравнений движения атмосферы при стационарном заданном по эмпирической модели NRLMSISE–00 распределении температуры воздуха.

12. Получить с помощью упомянутой выше модели модельные установившиеся циркуляции при стационарном распределении температуры воздуха, заданном по эмпирической модели NRLMSISE–00 при двух уровнях солнечной активности для условий, когда в Северном полушарии зима, и для условий, когда в Северном полушарии лето.

13. Создать региональную модель циркуляции нижней атмосферы Земли, основанную на численном интегрировании полной системы уравнений газовой динамики на пространственной сетке с горизонтальным разрешением лучше 0.1° и разрешением по высоте 200 м, причем такую, что в модели учитывается наличие аэрозолей из воды и льда и фазовых переходов водяного пара в аэрозольные частицы и обратно и используются массивно-параллельные вычисления на нескольких графических ускорителях.

14. Провести с помощью упомянутой выше модели численное моделирование динамики тропосферы в приэкваториальной области, где расположена внутритропическая зона конвергенции, при наличии в начальный момент возмущений в виде искривленных участков центрального сдвигового течения внутритропической зоны конвергенции, имеющих длину 800–2000 км и отклоняющихся от остальной части этого течения на север или на юг на 100–200 км. Исследовать процесс развития указанных выше возмущений и выявить закономерности в движении циклонических вихрей, возникающих в результате этого процесса.

Методы исследования

Основными методом исследования является метод математического моделирования, который включает в себя следующие этапы: теоретический анализ численных методов, численное моделирование общей циркуляции атмосфер Земли, Венеры и Титана, а также анализ результатов численного моделирования и сравнение этих результатов с данными наблюдений. Используемые в диссертации модели реализованы в виде комплексов программ на языке Fortran.

Научная новизна

1. Впервые детально изложена общая методика построения моделей общей циркуляции планетных атмосфер, основанных на численном интегрировании уравнений газовой динамики.

2. Представлены новые варианты явной гибридной разностной схемы для численного решения системы уравнений газовой динамики на регулярных 3-мерных пространственных сетках в декартовых и в сферических координатах с учетом и без учета источниковых членов, содержащих ускорение внешних массовых сил.

3. Представлена новая методика численного интегрирования системы уравнений динамики смеси воздуха, водяного пара и аэрозолей из микрокапель воды и микрочастиц льда с учетом фазовых переходов между различными агрегатными состояниями воды, использующая упомянутую выше явную гибридную схему.

4. Впервые создана основанная на численном интегрировании полной системы уравнений газовой динамики модель общей циркуляции атмосферы Венеры, в которой учитывается рельеф поверхности Венеры и используется равномерная сетка в связанной с центром Венеры сферической системе координат с шагом сетки по вертикали 200 м и шагами сетки по горизонтальным направлениям менее 1°, а также используются параллельные вычисления на многопроцессорных компьютерах с общей памятью и на графических ускорителях компании NVIDIA.

5. Впервые в мировой практике при моделировании удалось получить одновременно такие особенности общей циркуляции атмосферы Венеры, как зональную суперротацию на высотах менее 80 км, изменение типа горизонтальной циркуляции на высотах 80–95 км от зональной суперротации к

циркуляции с преобладанием переноса атмосферного газа из центра дневной стороны на центр ночной стороны через области средних широт и через полярные шапки, а также наличие вблизи полюсов нисходящих воронкообразных течений на высотах 60–80 км, которые известны из наблюдений.

6. Впервые в мировой практике исследовано влияние рельефа на общую циркуляцию атмосферы Венеры с использованием полной системы уравнений газовой динамики и показано, что из–за обтекания рельефа зональным потоком атмосферного газа генерируются подветренные волны, которые, распространяясь вверх, становятся источником возмущений для формирования выше слоя зональной суперротации системы волн, усиливающих вертикальный перенос и обнаруженных при помощи наблюдений.

7. Впервые создана основанная на численном интегрировании полной системы уравнений газовой динамики модель общей циркуляции атмосферы Титана, в которой учитывается рельеф поверхности Титана и используется равномерная сетка в связанной с центром Титана сферической системе координат с шагом сетки по вертикали 1 км и шагами сетки по горизонтальным направлениям менее 1°, а также используются параллельные вычисления на многопроцессорных компьютерах с общей памятью и на графических ускорителях компании NVIDIA.

8. Впервые при помощи упомянутой выше модели проведено численное моделирование процесса изменения общей циркуляции атмосферы Титана при смене сезонов от весеннего равноденствия до середины лета в северном полушарии.

9. Впервые проведено численное моделирование процесса развития неустойчивости сдвигового течения внутритропической зоны конвергенции при наличии возмущений в виде искривленных участков этого течения, приводящего к распаду этого сдвигового течения и образованию циклонических вихрей в районе внутритропической зоны конвергенции.

Достоверность результатов

Достоверность результатов определяется корректностью применения уравнений газовой динамики, высокой точностью применяемых численных методов, которая подтверждена результатами тестовых расчетов, а также согласием между результатами численного моделирования и данными наблюдений.

Научная и практическая ценность

Научную ценность представляют общая методика построения моделей общей циркуляции планетных атмосфер, основанных на численном интегрировании уравнений газовой динамики, новые варианты явной гибридной разностной схемы для численного интегрирования системы уравнений газовой динамики, новая методика численного интегрирования системы уравнений динамики смеси воздуха, водяного пара и аэрозолей из микрокапель воды и микрочастиц льда с учетом фазовых переходов между различными агрегатными состояниями воды, использующая упомянутую выше явную гибридную схему. Также научную ценность представляют выявленные с помощью моделирования закономерности общей циркуляции атмосфер Земли, Венеры и Титана и механизм образования циклонических вихрей в районе внутритропической зоны конвергенции.

Практическую ценность представляют созданные программные реализации моделей, в которых используются параллельные вычисления на графических ускорителях, и результаты численного моделирования общей циркуляции атмосфер Венеры и Титана, которые позволяют лучше интерпретировать данные наблюдений и могут быть использованы при планировании научных исследований для новых полетов к Венере и Титану автоматических космических аппаратов. Также практическую ценность представляет изложенный в данной диссертации метод прогноза образования циклонических вихрей в районе внутритропической зоны конвергенции.

Личный вклад автора

Все выносимые на защиту результаты получены под руководством и при непосредственном участии автора. Публикации, отражающие содержание диссертации, в большей части написаны в соавторстве с сотрудниками Полярного геофизического института, Института космических исследований и Института прикладной математики им. М.В.Келдыша. При подготовке этих публикаций автор участвовал в определении цели работ, выполнял постановки задач и разрабатывал численные методы, участвовал в написании и отладке программ, проведении расчетов, визуализации и анализе результатов моделирования и их сравнении с данными наблюдений, формулировке выводов.

Апробация работы

Представленные в работе результаты докладывались на международных конференциях: European Planetary Science Congress (2009, 2010, 2011, 2012, 2013 и 2014 гг.), COSPAR Scientific Assembly (2010, 2012 и 2014 гг.), Fifth Moscow Solar

System Symposium (Москва, 2014), а также на всероссийских конференциях: "Компьютерное моделирование актуальных задач крупного масштаба" (Таруса, Россия, 2010), "Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса" (Москва, Россия, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014 и 2015 гг.), "Высокоширотные гелиогеофизические явления" памяти Е. А. Пономарева (Иркутск, Россия, 2009), "Солнечно-земная физика" (Иркутск, Россия, 2010), "Экологические проблемы северных регионов и пути их решения" (Апатиты, Россия, 2010, 2011, 2012, 2013 и 2014 гг.), "Природа шельфа и архипелагов европейской Арктики" (Мурманск, Россия, 2008), Всероссийский ежегодный Апатитский семинар "Физика авроральных явлений"(2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014 и 2015 гг., Апатиты).

Публикации

Основные результаты по теме диссертации опубликованы более чем в 60 публикациях, в том числе в 21 научных работах в ведущих рецензируемых российских и зарубежных научных изданиях из перечня ВАК [*Белоцерковский, Мингалев и др., 2006, 2009; Мингалев и др., 2005, 2009, 2010, 2011а, 2011б, 2012 а, 2012 б, 2012 в, 2012 г, 2014; Игнатьев, Мингалев и др., 2015; Mingalev et al., 2006, 2007, 2008, 2013 a, 2013 b, 2014 a, 2014 b, 2014 c*], а также более чем в 20 статьях в сборниках трудов научных конференций.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы из 119 наименований. Она содержит 187 страниц машинописного текста, включая 86 рисунков.

Краткое содержание работы

Во ***введении*** обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цель работы, отмечена научная новизна и практическая ценность полученных результатов, кратко изложено содержание работы.

Глава I посвящена построению моделей общей циркуляции планетных атмосфер, основанных на численном интегрировании уравнений газовой динамики. В *разделе I.1* описана общая схема построения таких моделей. В *разделе I.2* приведены и анализируются различные формы записи уравнений газовой динамики для планетных атмосфер. В *разделе I.3* изложен новый вариант явной гибридной разностной схемы для численного интегрирования системы уравнений газовой динамики на регулярной 3-мерной пространственной сетки в декартовых координатах. В *разделе I.4* изложен новый вариант явной гибридной разностной схемы для численного интегрирования системы уравнений газовой динамики на

регулярной 3-мерной пространственной сетки в сферических координатах. В *разделе I.5* изложена система уравнений, предназначенная для описания динамики смеси воздуха, водяного пара и аэрозолей из микрокапель воды и микрочастиц льда с учетом фазовых переходов между различными состояниями воды, а также изложена методика численного интегрирования этой системы, использующая изложенную в этой главе явную гибридную схему. В *разделе I.6* изложено упрощенное описание радиационного нагрева атмосферы в релаксационном приближении. В *разделе I.7* изложены основные детали программной реализации рассматриваемых моделей общей циркуляции планетных атмосфер на графических процессорах последних моделей с использованием технологии CUDA. В *разделе I.8* приведено заключение к главе I.

Глава II посвящена изучению с помощью численного моделирования физических механизмов, которые формируют такие особенности общей циркуляции атмосферы Венеры, как зональная суперротация, наличие в каждой полярной области от одного до трех вихревых течений с нисходящим воронкообразным течением в центре вихря, понижение высоты верхней границы облачного слоя в районе полюсов, а также посвящена изучению влияния на общую циркуляцию атмосферы Венеры рельефа поверхности. В *разделе II.1* изложено введение этой главы. В *разделе II.2* изложено описание новой модели циркуляции атмосферы Венеры, в которой учитывается рельеф поверхности, и которая основана на численном интегрировании уравнений газовой динамики. В *подразделе II.2.1* приведена система уравнений, размеры области моделирования, расчетная сетка и ее шаги и метод численного интегрирования. В *подразделе II.2.2* излагается упрощенное описание нагрева атмосферы Венеры солнечным и собственным ИК–излучением с использованием так называемого релаксационного приближения. В *подразделе II.2.3* приведены начальные и граничные условия. Описывается распределение компонент скорости ветра в начальный момент. В *разделе II.3* детально изложены результаты моделирования. В *разделе II.4* изложен анализ результатов моделирования и проведено сравнение этих результатов с данными наблюдений. В *разделе II.5* приведено заключение ко второй главе.

Глава III посвящена исследованию общей циркуляции атмосферы Титана при помощи численного моделирования. В *разделе III.1* изложено введение этой главы. В *разделе III.2* изложено описание новой модели циркуляции атмосферы Титана, в которой учитывается рельеф поверхности, и которая основана на численном интегрировании уравнений газовой динамики. В *подразделе III.2.1* приведена система уравнений, размеры области моделирования, расчетная сет-

ка и ее шаги и метод численного интегрирования. В *подразделе III.2.2* излагается упрощенное описание нагрева атмосферы Титана солнечным и собственным ИК–излучением с использованием так называемого релаксационного приближения. В *подразделе III.2.3* приведены начальные и граничные условия. В *разделе III.3* детально изложены результаты моделирования для условий равноденствия и при нахождении подсолнечной точки в северном полушарии на широтах 5, 10, 15 и 15 градусов. В *разделе III.4* изложен анализ результатов моделирования и проведено сравнение этих результатов с данными наблюдений. В *разделе III.5* приведено заключение к третьей главе.

Глава IV посвящена описанию двух моделей общей циркуляции нижней и средней атмосферы Земли и представлению результатов моделирования, полученных с помощью этих моделей. В *разделе IV.1* изложено введение этой главы. В *разделе IV.2* изложено описание первой модели. В *подразделе IV.2.1* приведена система уравнений, указаны размеры области моделирования и шаги сетки по всем направлениям. В *подразделе IV.2.2* изложено упрощенное описание нагрева атмосферы Земли солнечным и собственным ИК–излучением с использованием релаксационного приближения. В *подразделе IV.2.3* приведены начальные и граничные условия модели. В *разделе IV.3* изложены результаты моделирования. В *разделе IV.4* изложено краткое описание второй модели. В *разделе IV.5* изложены результаты моделирования глобальной ветровой системы атмосферы Земли при двух уровнях солнечной активности в январских условиях. В *разделе IV.6* изложены результаты моделирования глобальной ветровой системы атмосферы Земли при двух уровнях солнечной активности в июльских условиях. В *разделе IV.7* приведено заключение к четвертой главе.

Глава V посвящена численному моделирования процессов формирования циклонических вихрей в тропической атмосфере Земли в области внутритропической зоны конвергенции с помощью региональной модели. В *разделе V.1* изложено введение этой главы. В *разделе V.2* изложено описание региональной модели. В *подразделе V.2.1* приведена система уравнений, указаны размеры области моделирования и шаги сетки по всем направлениям. В *подразделе V.2.2* изложено упрощенное описание нагрева атмосферы Земли солнечным и собственным ИК–излучением с использованием релаксационного приближения. В *подразделе V.2.3* приведены начальные и граничные условия региональной модели. В *разделе V.3* изложены результаты моделирования и проводится их сравнение с данными наблюдений. В *разделе V.4* приведено заключение к пятой главе.

В **заключении** сформулированы результаты диссертационной работы.

Глава I.
Построение моделей общей циркуляции планетных атмосфер, основанных на численном интегрировании уравнений газовой динамики

I.1 Схема построения моделей общей циркуляции

Процесс создания модели общей циркуляции планетной атмосферы состоит из нескольких шагов. Сначала выбирается перечень протекающих в этой атмосфере физических процессов, которые требуется изучить с помощью численного моделирования. Затем выбирается точность описания этих процессов. После этого выбирается система уравнений модели для описания выбранных физических процессов, область моделирования и граничные условия для переменных модели на границе области моделирования. Затем в области моделирования выбирается расчетная сетка. Шаг сетки должен быть в 10–20 раз меньше, чем минимальные пространственные масштабы, на которых меняются переменные модели. Это необходимо для получения соответствия между результатами моделирования и физической реальностью. Далее выбираются методы численного решения уравнений модели. Выбор этих методов зависит от нескольких факторов: от их точности, быстродействия, сложности программной реализации, объема использования оперативной памяти, а также от архитектуры компьютера, на котором предполагается проводить вычисления. После этого создается программная реализация модели.

Рассмотрим каждый из перечисленных шагов более подробно. Всякая модель общей циркуляции планетной атмосферы должна описывать процессы переноса вещества, импульса и энергии в атмосфере планеты и, следовательно, включать в себя уравнения динамики атмосферы. Полностью динамика атмосферы описывается системой уравнений движения вязкого сжимаемого газа.

До недавнего времени все модели общей циркуляции атмосферы Земли, атмосферы Марса, атмосферы Венеры и атмосферы спутника Сатурна Титана были основаны на численном решении системы уравнений геофизической гидродинамики. Вывод этой системы уравнений (см., например, [*Монин, 1988*]) проводится в предположении, что характерные пространственные масштабы, на которых меняется гидродинамическая скорость, достаточно велики. В частности, для земной атмосферы предполагается, что указанный масштаб по вертикали составляет не менее 10 км, а в горизонтальных направлениях этот масштаб составляет не менее 1000 км. При этом уравнение для вертикальной компоненты скорости заменяется уравнением гидростатики.

В атмосферах Земли и Венеры имеются области, в которых характерные пространственные масштабы изменения гидродинамической скорости на порядок и более меньше, чем требуется при выводе системы уравнений геофизической гидродинамики. В нижней атмосфере Земли такими областями являются границы между ячейками циркуляции Хедли, Феррeля и приполюсными ячейками, которые называют внутритропической зоной конвергенции, полярными фронтами и арктическими фронтами, а также границы циклонов и антициклонов. В этих областях характерный горизонтальный масштаб изменения гидродинамической скорости не превышает 50 км. Кроме того, численное моделирование показало, что уравнения геофизической гидродинамики не описывают правильно обтекание горных систем набегающим горизонтальным течением атмосферного газа. Из вышеизложенного следует, что для физически корректного описания таких динамических процессов в нижней атмосфере Земли, как образование и эволюция циклонов и антициклонов, обтекание горных массивов, а также для правильного описания границ между конвективными ячейками циркуляции требуется использовать полные уравнения движения вязкого сжимаемого газа.

Главная причина использования в моделях общей циркуляции планетных атмосфер уравнений геофизической гидродинамики вместо полных уравнений газовой динамики заключается в том, что для численного решения уравнений геофизической гидродинамики в сферическом слое над поверхностью планеты требуются примерно в 1000 раз меньший объем оперативной памяти и в 10000–100000 раз меньший объем вычислений, чем для численного решения уравнений газовой динамики в этом же сферическом слое. Обычно при численном решении уравнений геофизической гидродинамики для атмосфер Земли и Венеры шаги сетки по высоте составляют от 1 до 5 км, шаги сетки по горизонту от 3 до 5 градусов, а шаг по времени составляет от 1 до 10 минут. При численном решении системы уравнений движения вязкого сжимаемого газа для атмосфер Земли и Венеры максимально допустимый шаг сетки по высоте составляет не более 250 м, а шаги сетки по горизонту не более 1 градуса, при этом шаг по времени не может превышать 0.5 сек. Кроме того, объем вычислений на один узел сетки при осуществлении шага по времени при численном решении уравнений газовой динамики как минимум на порядок больше, чем при численном решении уравнений геофизической гидродинамики. На момент создания первых моделей общей циркуляции планетных атмосфер в конце 70-х и начале 80-х годов 20-го века объем оперативной памяти и быстродействие наиболее мощных суперкомпьютеров позволяли численно решать уравнения геофизической гидродинамики

на достаточно грубой пространственной сетке, но не позволяли создавать модели общей циркуляции атмосферы, обладающие приемлемым быстродействием и основанные на численном интегрировании уравнений газовой динамики на пространственной сетке с приемлемым разрешением. Только с середины 2000-х годов возможности суперкомпьютеров стали обеспечивать создание такой модели при условии использования параллельных вычислений. Начиная с 2012 года появилась возможность создания такой модели, реализованной на персональном компьютере и использующей параллельные вычисления на графических процессорах фирмы Nvidia.

В атмосферах Земли, Венеры, Марса и Титана имеются аэрозоли, которые существенно влияют на перенос излучения, поэтому уравнения, описывающие перенос и процессы изменения состава аэрозолей, также должны быть включены в систему уравнений модели. Если в область моделирования модели общей циркуляции атмосферы Земли входит E-слой земной ионосферы (если верхняя граница области моделирования выше 100 км от поверхности), то в модели необходимо учитывать движение ионизированных атомов и молекул, на которое влияет электромагнитное поле, и концентрация которых достаточно высока, чтобы оказывать влияние на движение нейтральных частиц атмосферы. Это приводит к необходимости включить в модель уравнения, описывающие движение заряженных частиц и изменения их концентраций.

Важным фактором, определяющим циркуляцию планетной атмосферы, является существенная пространственная неоднородность скорости нагрева/охлаждения атмосферного газа за счет поглощения и испускания им электромагнитного излучения. Вследствие этого в модель должны быть включены уравнения, описывающие эту скорость нагрева. В рамках полного физического рассмотрения расчет этой скорости является очень трудоемкой задачей. Главной причиной этого является тот факт, что при давлении атмосферного газа меньше 0.1 атм его коэффициент молекулярного поглощения очень быстро меняется при изменении частоты излучения. Этот коэффициент при фиксированной частоте излучения является суммой вкладов большого числа (от нескольких сотен до нескольких тысяч) линий поглощения, полуширина которых быстро убывает при уменьшении давления. Это приводит к тому, что при расчете поля излучения в ИК области спектра необходимо иметь разрешение по частоте не менее 0.002 $см^{-1}$. Вследствие этого для расчета поля излучения в интервале частот ИК диапазона от 100 до 20000 $см^{-1}$ необходимо проводить расчеты поля излучения почти в $2 \cdot 10^7$ спектральных каналах. Эти расчеты требуют очень большого объема

вычислений и проводятся только при проведении эталонных расчетов поля излучения. Использовать такие расчеты в моделях общей циркуляции планетных атмосфер на данный момент не представляется возможным. По этой причине в этих моделях используются различные упрощенные методы расчета потоков излучения.

Рассмотрим выбор методов численного решения уравнений модели. Наиболее важным является выбор метода численного решения уравнений газовой динамики, описывающих движение нейтрального атмосферного газа. Этот метод должен обеспечивать достаточные точность и быстродействие модели при ее реализации на имеющейся вычислительной технике. На данный момент разработано достаточно много разностных схем численного решения уравнений газовой динамики, обладающих первым либо вторым порядком точности по времени и вторым или более порядком точности по пространству. Эти схемы можно разделить на явные и неявные. Явные схемы наиболее просты при создании программной реализации и хорошо приспособлены для максимально эффективного использования параллельных вычислений на графических процессорах. Их недостатком является жесткое ограничение на шаг интегрирования по времени τ, которое задается условием Куранта–Фридрикса–Леви (КФЛ):

$$\tau \leq h(c+v)^{-1}\,,$$

в котором h — минимальный шаг пространственной сетки, c — скорость звука, v — величина гидродинамической скорости. Неявные схемы позволяют использовать шаг интегрирования по времени, который в 3-10 раз больше, чем у явных схем, но требуют в несколько раз больше вычислений на послойный переход и на порядок больше пересылок данных в оперативной памяти по сравнению с явными схемами. По этой причине из-за ограниченного объема регистровой памяти современных графических процессоров использование неявных схем не позволяет получить выигрыш в быстродействии, но очень сильно усложняет программную реализацию вычислений. На данный момент при использовании параллельных вычислений на графических процессорах применение явных схем в моделях общей циркуляции дает существенный выигрыш в общем быстродействии модели и в затратах труда на создание программной реализации модели по сравнению с использованием неявных схем.

При разработке программной реализации модели следует разделять весь объем вычислений на максимально возможное число независимо работающих блоков, которые используют результаты вычислений друг друга и оформляются в виде отдельных программных единиц. Такой подход позволяет проводить отлад-

ку блоков по отдельности и сокращает общее время, необходимое для создания модели. Кроме того, такой подход позволяет максимально гибко проводить модернизацию модели, заменяя отдельные блоки на более совершенные.

I.2 Различные формы записи уравнений газовой динамики для планетных атмосфер

При численном моделировании динамики атмосферы Земли в интервале высот от поверхности до 90 км состав атмосферного газа можно считать постоянным в пространстве и во времени (изменения газовой постоянной атмосферного газа не превышают 0.5%). В атмосфере Венеры газовую постоянную атмосферного газа также можно считать постоянной ниже высоты 120 км, а в атмосфере Титана это условие выполняется для высот менее 700 км. В этих трех атмосферах присутствуют различные по составу аэрозоли. В атмосферах Венеры и Титана массовая доля аэрозолей достаточно мала для того, чтобы при расчете движения смеси атмосферного газа и аэрозолей пренебрегать наличием аэрозолей и считать их пассивной примесью, которая не влияет на движение газа. В земной атмосфере на высотах более 20 км массовая доля аэрозолей также достаточно мала и их можно не учитывать при расчете движения атмосферного газа. Но в нижней тропосфере Земли при образовании мощной облачности и выпадении осадков возникает ситуация, когда нужно учитывать влияние движения аэрозолей на движение атмосферного газа.

В этом разделе рассматривается случай, когда массовая доля аэрозолей достаточно мала, и можно не учитывать их влияние на движение атмосферного газа, которое в этом случае описывается системой уравнений газовой динамики для однокомпонентного сжимаемого вязкого газа. Эта система состоит из уравнения неразрывности, которое вытекает из закона сохранения вещества, уравнений для компонент трехмерного вектора гидродинамической скорости, которые вытекают из закона сохранения импульса, уравнения энергии, которое выражает закон сохранения энергии, и уравнения состояния, которое задает зависимость давления газа от его плотности и внутренней энергии. Уравнение энергии может быть записано в 2-х разных формах: либо для суммы внутренней и кинетической энергии единицы объема среды, либо для суммы внутренней, кинетической и потенциальной энергии поля внешних массовых сил единицы объема среды.

Для записи этой системы уравнений введем обозначения: ρ — плотность атмосферного газа, $\mathbf{v}$ — трехмерный вектор гидродинамической скорости, p — дав-

ление. Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \,. \tag{I.1}$$

Уравнение для вектора гидродинамической скорости в консервативной форме имеет вид

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \left(-\nabla p + \operatorname{div} \widehat{\boldsymbol{\mathcal{T}}} \right) + \rho \mathbf{g} \,. \tag{I.2}$$

В этом уравнении обозначено: $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ — тензорное произведение вектора $\mathbf{v}$ на себя, $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$ — тензор вязких напряжений, а $\mathbf{g}$ — ускорение внешних массовых сил.

Внутренняя энергия единицы объема атмосферного газа равна $p/(\gamma - 1)$, где γ — показатель адиабаты (в случае одноатомного газа $\gamma = 5/3$). Уравнение для суммы внутренней и кинетической энергии единицы объема атмосферного газа $E = \rho \mathbf{v}^2/2 + p/(\gamma - 1)$ в консервативной форме имеет вид:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}\left((E + p) \mathbf{v} \right) = (\rho \mathbf{v}, \mathbf{g}) + \operatorname{div}(\widehat{\boldsymbol{\mathcal{T}}} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{j}) + Q \,. \tag{I.3}$$

В этом уравнении $\mathbf{j}$ — вектор потока тепла, $Q = -\operatorname{div} \mathbf{J}$ — мощность нагрева-охлаждения в единице объема за счет поглощения-испускания электромагнитного излучения, а $\mathbf{J}$ — вектор потока энергии этого излучения.

В качестве уравнения состояния для атмосферного газа планетных атмосфер используется уравнение Менделеева–Клапейрона

$$p = \rho R_{\text{атм}} T \,, \tag{I.4}$$

в котором через $R_{\text{атм}}$ обозначена газовая постоянная атмосферного газа, а через T обозначена его температура.

В системе координат, в которой поверхность планеты неподвижна, ускорение внешних массовых сил $\mathbf{g}$ складывается из ускорения силы тяготения планеты $\mathbf{g}_{\text{т}}$, ускорения силы Кориолиса $\mathbf{g}_{\text{к}}$ и ускорения центробежной силы $\mathbf{g}_{\text{ц}}$. Если в модели требуется учесть приливные силы, возникающие за счет воздействия Солнца, а также за счет воздействия Луны на атмосферу Земли и за счет воздействия Сатурна на атмосферу Титана, то в формулу, определяющую ускорение $\mathbf{g}$, следует вставить дополнительные слагаемые, задающие ускорение приливных сил. Ускорение приливных сил составляет несколько сотых долей процента от ускорения силы тяготения планеты.

Ускорение $\mathbf{g}_{\text{к}}$ и ускорение $\mathbf{g}_{\text{ц}}$ определяются формулами

$$\mathbf{g}_{\text{к}} = 2 [\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}] \,, \quad \mathbf{g}_{\text{ц}} = -[\, \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]\,] = \mathbf{r}\, \boldsymbol{\omega}^2 - \boldsymbol{\omega}\, (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) \,,$$

в которых $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения планеты вокруг своей оси, а $\mathbf{r}$ — радиус–вектор от центра планеты до точки рассмотрения. Отметим, что ускорение $\mathbf{g}_{\text{ц}}$ потенциально, то есть его можно представить в виде $\mathbf{g}_{\text{ц}} = -\nabla U_{\text{ц}}$. Потенциал этого ускорения $U_{\text{ц}}$ определяется формулой

$$U_{\text{ц}}(r,\beta) = -\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}^2 \left(\mathbf{r} - \frac{\boldsymbol{\omega}\,(\boldsymbol{\omega},\mathbf{r})}{\boldsymbol{\omega}^2}\right)^2 = -\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}^2\, r^2 \cos^2\beta\,,$$

в которой r — длина радиус–вектора $\mathbf{r}$, β — географическая широта.

Для ускорения силы тяготения планеты также можно ввести потенциал $U_{\text{т}}$. Для Венеры и спутника Сатурна Титана поле тяготения можно считать сферически симметричным. В этом случае ускорение этого поля и его потенциал над поверхностью планеты задаются формулами

$$\mathbf{g}_{\text{т}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}\, g_{\text{п}}\, r_{\text{п}}^2 = -\nabla U_{\text{т}}\,, \quad U_{\text{т}}(r) = g_{\text{п}}\, r_{\text{п}}^2 \left(\frac{1}{r_{\text{п}}} - \frac{1}{r}\right), \tag{I.5}$$

в которых $r_{\text{п}}$ — радиус планеты, $g_{\text{п}}$ – величина ускорения силы тяжести на полюсах на поверхности планеты. Потенциал $U_{\text{т}}$ определяется с точностью до постоянной. В (I.5) он задан так, что обращается в ноль на поверхности планеты.

Поле тяготения Земли не является сферически симметричным из–за отклонения формы Земли от сферы (радиус Земли на полюсах меньше, чем ее средний радиус на экваторе). Это поле можно представить в виде суммы сферически симметричной части и сферически несимметричной поправки. В дипольном приближении потенциал ускорения силы тяжести Земли можно представить в виде

$$U_{\text{т}}(r,\beta) = g_{\text{п}}\, r_{\text{п}} \left(1 - \frac{r_{\text{п}}}{r} - \frac{r_{\text{э}}^2}{r^2}\left(1 - \frac{r_{\text{п}}}{r_{\text{э}}} - \frac{\boldsymbol{\omega}^2\, r_{\text{э}}^2}{2\, g_{\text{п}}\, r_{\text{п}}}\right)\cos\beta\right), \tag{I.6}$$

где $r_{\text{п}} = 6356.78\,\text{км}$ — радиус Земли на полюсах на уровне поверхности океана, $r_{\text{э}} = 6378.18\,\text{км}$ — средний радиус Земли на экваторе, $g_{\text{п}} = 9.8322\,\text{м/с}^2$ — величина ускорения силы тяжести на полюсах на уровне поверхности океана. Поверхностью океана считается поверхность, на которой выполняется равенство $U_{\text{ц}}(r,\beta) + U_{\text{т}}(r,\beta) = 0$. От этой поверхности отсчитывается высота.

Отметим, что приливные силы также потенциальны, и можно ввести потенциал $U_{\text{пр}}$ для ускорения этих сил $\mathbf{g}_{\text{пр}} = -\nabla U_{\text{пр}}$. Вводя суммарный потенциал U, ускорение внешних массовых сил можно представить в виде

$$\mathbf{g} = -\nabla U + 2\,[\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}]\,, \quad U = U_{\text{ц}} + U_{\text{т}} + U_{\text{пр}}\,. \tag{I.7}$$

Умножая (I.7) скалярно на векторное поле $\rho\,\mathbf{v}$, получим следующие равенства

$$(\rho\,\mathbf{v},\,\mathbf{g}) = -\,(\rho\,\mathbf{v},\,\nabla U) = -\text{div}(\rho\, U\,\mathbf{v}) + U\,\text{div}(\rho\,\mathbf{v})\,. \tag{I.8}$$

Эти равенства будут использоваться в дальнейшем при построении разностных схем численного интегрирования системы (I.1)–(I.4).

Сумму внутренней, кинетической и потенциальной энергии единицы объема атмосферного газа обозначим через $W = E + \rho U$. Уравнение для E в консервативной форме имеет вид:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div}\Big((W + p)\,\mathbf{v}\Big) = \operatorname{div}(\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{T}}} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{j}\,) + Q\,. \tag{I.9}$$

В этом уравнении все слагаемые, кроме производной по времени, имеют дивергентный вид. Использование этого уравнения вместо (I.3) дает ряд преимуществ при построении разностных схем.

Для учета подсеточной турбулентности все газодинамические переменные считаются осредненными по Фавру, а тензор вязких напряжений $\mathcal{T}$ задается с учетом турбулентного обмена по формулам

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{T}}} = 2\,\widehat{\boldsymbol{\eta}}\,\widehat{\boldsymbol{D}}\,, \quad \widehat{\boldsymbol{D}} = \frac{1}{2}\left(\nabla\otimes\mathbf{v} + (\nabla\otimes\mathbf{v})^T\right) - \frac{1}{3}\,\widehat{\boldsymbol{I}}\,\operatorname{div}\mathbf{v}\,,$$

где $\widehat{\boldsymbol{D}}$ – девиатор тензора скоростей деформации, $\nabla\otimes\mathbf{v}$ – тензор градиента гидродинамической скорости, $\widehat{\boldsymbol{I}}$ – единичный тензор, а $\widehat{\boldsymbol{\eta}}$ – симметричный тензор коэффициентов вязкости, который в сферической географической системе координат (r, φ, β, где φ — долгота, β — широта) является диагональным, причем его диагональные компоненты равны сумме обычного динамического коэффициента молекулярной вязкости атмосферного газа μ и коэффициента турбулентного обмена в направлении одного из местных ортов сферической географической системы координат, которые задаются по формуле Ричардсона [*Обухов, 1988*]:

$$\eta_r = \mu + C\cdot(\,0.1\cdot L_r\,)^{4/3}, \quad \eta_\varphi = \mu + C\cdot(\,0.1\cdot L_\varphi\,)^{4/3}, \quad \eta_\beta = \mu + C\cdot(\,0.1\cdot L_\beta\,)^{4/3},$$

где $C = 0.37\,\text{м}^{2/3}/\text{с}$, L_r, L_φ, L_β — масштабы турбулентности в метрах (масштабы перемешивания) в вертикальном, зональном и меридиональном направлениях, в качестве которых можно взять половину расстояния между соседними узлами сетки вдоль соответствующих координатных линий, либо взять половину вертикального шага сетки (в этом случае коэффициенты турбулентного обмена изотропны).

Результаты моделирования для этих двух способов задания коэффициентов турбулентного обмена получились очень близкими [*Мингалев и др., 2005; 2006; 2007; 2009*). В данной работе мы не учитывали механизма генерации турбулентности за счет разрушения внутренних гравитационных волн, указанного в работах [*Изаков, 2010а; 2010б*], поскольку численные эксперименты показали крайне

незначительную чувствительность результатов моделирования к коэффициентам турбулентного обмена.

Вектор потока тепла задается по формуле $\mathbf{j} = -\widehat{\boldsymbol{\lambda}}\,\nabla T$, где $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}$ – симметричный тензор коэффициентов теплопроводности, заданный формулой $\widehat{\boldsymbol{\lambda}} = \dfrac{\lambda}{\mu}\,\widehat{\boldsymbol{\eta}}$, в которой λ — коэффициент молекулярной теплопроводности атмосферного газа.

I.3 Явная гибридная схема на регулярной сетке в декартовых координатах

I.3.1 Явная схема расщепления в декартовых координатах

Для изложения явной гибридной схемы численного интегрирования системы уравнений динамики вязкого теплопроводного однокомпонентного газа на регулярной пространственной сетке в декартовых координатах рассмотрим запись этой системы в виде векторного уравнения в консервативной форме. Введем обозначения: x, y, z — декартовы координаты, $\mathbf{w} = \rho\,\mathbf{v}$ — объемная плотность импульса, w_x, w_y, w_z — ее компоненты в декартовых координатах. Систему уравнений (I.1), (I.2) и (I.3) можно записать в виде

$$\frac{\partial\,\mathbf{u}}{\partial\,t} + \frac{\partial\,\mathbf{X}}{\partial\,x} + \frac{\partial\,\mathbf{Y}}{\partial\,y} + \frac{\partial\,\mathbf{Z}}{\partial\,z} = \mathbf{R} + \mathbf{R}_\nu + \frac{\partial\,\mathbf{X}_\nu}{\partial\,x} + \frac{\partial\,\mathbf{Y}_\nu}{\partial\,y} + \frac{\partial\,\mathbf{Z}_\nu}{\partial\,z}\,, \qquad \text{(I.10)}$$

где $\mathbf{u} = \big(\,\rho,\, w_x\,, w_y\,, w_z\,, E\,\big)^T$ — вектор-столбец консервативных переменных, $\mathbf{X}(\mathbf{u})$, $\mathbf{Y}(\mathbf{u})$, $\mathbf{Z}(\mathbf{u})$ — вектор-столбцы потоков консервативных переменных $\mathbf{u}$ в направлении координатных осей за счет конвекции и давления, заданные формулами:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_x^2/\rho + p \\ w_y\,w_x/\rho \\ w_z\,w_x/\rho \\ (E+p)\,w_x/\rho \end{pmatrix},\ \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} w_y \\ w_x\,w_y/\rho \\ w_y^2/\rho + p \\ w_z\ w_y/\rho \\ (E+p)\,w_y/\rho \end{pmatrix},\ \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} w_z \\ w_x\,w_z/\rho \\ w_y\,w_z/\rho \\ w_z^2/\rho + p \\ (E+p)\,w_z/\rho \end{pmatrix},$$

$\mathbf{R} = \big(\,0,\, \rho\,g_x\,,\, \rho\,g_y\,,\, \rho\,g_z\,,\, (\mathbf{w},\,\mathbf{g})\big)^T$ — вектор-столбец источниковых членов, содержащих ускорение внешних сил, $\mathbf{R}_\nu = \big(\,0,\,0,\,0,\,0,\,Q\,\big)^T$, а $\mathbf{X}_\nu$, $\mathbf{Y}_\nu$, $\mathbf{Z}_\nu$ — вектор-столбцы потоков консервативных переменных $\mathbf{u}$ в направлении координатных осей за счет вязкости и теплопроводности, заданные формулами:

$$\mathbf{X}_\nu = \Big(0,\, \mathcal{T}_{xx}\,,\, \mathcal{T}_{xy}\,,\, \mathcal{T}_{xz}\,,\, \mathcal{T}_{xx}\,v_x + \mathcal{T}_{xy}\,v_y + \mathcal{T}_{xz}\,v_z - j_x\Big)^T\,,$$

$$\mathbf{Y}_\nu = \Big(0,\, \mathcal{T}_{xy}\,,\, \mathcal{T}_{yy}\,,\, \mathcal{T}_{yz}\,,\, \mathcal{T}_{xy}\,v_x + \mathcal{T}_{yy}\,v_y + \mathcal{T}_{yz}\,v_z - j_y\Big)^T\,,$$

$$\mathbf{Z}_\nu = \Big(0,\, \mathcal{T}_{xz}\,,\, \mathcal{T}_{yz}\,,\, \mathcal{T}_{zz}\,,\, \mathcal{T}_{xz}\,v_x + \mathcal{T}_{yz}\,v_y + \mathcal{T}_{zz}\,v_z - j_z\Big)^T .$$

В этих формулах v_x, v_y, v_z — компоненты гидродинамической скорости $\mathbf{v}$ в декартовых координатах, g_x, g_y, g_z — компоненты ускорения внешних сил $\mathbf{g}$ в этих координатах, j_x, j_y, j_z — компоненты вектора потока тепла $\mathbf{j}$ в этих координатах, $\mathcal{T}_{xx}$, $\mathcal{T}_{yy}$, $\mathcal{T}_{zz}$, $\mathcal{T}_{xy}$, $\mathcal{T}_{xz}$, $\mathcal{T}_{yz}$ — компоненты тензора вязких напряжений в декартовых координатах.

Систему уравнений (I.1), (I.2) и (I.9) можно записать в виде

$$\frac{\partial\,\widetilde{\mathbf{u}}}{\partial\,t} + \frac{\partial\,\widetilde{\mathbf{X}}}{\partial\,x} + \frac{\partial\,\widetilde{\mathbf{Y}}}{\partial\,y} + \frac{\partial\,\widetilde{\mathbf{Z}}}{\partial\,z} = \widetilde{\mathbf{R}} + \mathbf{R}_\nu + \frac{\partial\,\mathbf{X}_\nu}{\partial\,x} + \frac{\partial\,\mathbf{Y}_\nu}{\partial\,y} + \frac{\partial\,\mathbf{Z}_\nu}{\partial\,z}\,, \qquad \text{(I.11)}$$

где $\widetilde{\mathbf{u}} = \big(\rho,\, w_x\,, w_y\,, w_z\,, W\big)^T$ — новый вектор-столбец консервативных переменных, $\widetilde{\mathbf{R}} = \big(0\,,\, \rho\,g_x\,,\, \rho\,g_y\,,\, \rho\,g_z\,,\, 0\big)^T$ — новый вектор-столбец источниковых членов, содержащих ускорение внешних сил, $\widetilde{\mathbf{X}}$, $\widetilde{\mathbf{Y}}$, $\widetilde{\mathbf{Z}}$ — вектор-столбцы потоков консервативных переменных $\widetilde{\mathbf{u}}$ в направлении координатных осей за счет конвекции и давления, заданные формулами:

$$\widetilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_x^2/\rho + p \\ w_y\,w_x/\rho \\ w_z\,w_x/\rho \\ (W+p)\,w_x/\rho \end{pmatrix},\ \widetilde{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} w_y \\ w_x\,w_y/\rho \\ w_y^2/\rho + p \\ w_z\ w_y/\rho \\ (W+p)\,w_y/\rho \end{pmatrix},\ \widetilde{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} w_z \\ w_x\,w_z/\rho \\ w_y\,w_z/\rho \\ w_z^2/\rho + p \\ (W+p)\,w_z/\rho \end{pmatrix},$$

в которых давление p выражается через переменные $\mathbf{u}$ и $\widetilde{\mathbf{u}}$, показатель адиабаты γ и потенциал ускорения внешних массовых сил U формулами

$$p = (\gamma-1)\left(E - \frac{\mathbf{w}^2}{2\,\rho}\right) = (\gamma-1)\left(W - \frac{\mathbf{w}^2}{2\,\rho} - \rho\,U\right).$$

Для одномерной по пространству системы уравнений газовой динамики можно построить явные монотонные схемы, имеющие 2-й порядок точности как по пространству, так и по времени. Используя эти схемы и метод расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям [*Ковеня, Яненко, 1981; Бисикало и др., 2013*], можно построить явные монотонные схемы численного решения системы (I.10) или системы (I.11). В этих схемах численное решение системы (I.10) или системы (I.11) сводится к последовательному решению одномерных по пространству систем уравнений. На каждом временном шаге нам нужно последовательно решить 3 гиперболические системы уравнений и учесть потоки за счет вязкости и теплопроводности. Вот один из вариантов

схемы расщепления для системы (I.10), состоящий из 4-х шагов:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{u}')}{\partial x} = 0 \,, \quad \frac{\partial \mathbf{u}''}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{Y}(\mathbf{u}'')}{\partial y} = 0 \,, \\
\frac{\partial \mathbf{u}'''}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{Z}(\mathbf{u}''')}{\partial z} = \mathbf{R}(\mathbf{u}''') \,, \\
\frac{\partial \mathbf{u}''''}{\partial t} = \mathbf{R}_\nu + \frac{\partial \mathbf{X}_\nu(\mathbf{u}'''')}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Y}_\nu(\mathbf{u}'''')}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{Z}_\nu(\mathbf{u}'''')}{\partial z} \,.
\end{gathered} \tag{I.12}$$

В качестве начальных условий для каждой системы уравнений из (I.12) берутся значения, рассчитанные в результате предыдущего шага расщепления. Важным вопросом является выбор шага расщепления, на котором учитывается вектор-столбец источниковых членов $\mathbf{R}$. В схеме (I.12) этот вектор-столбец учитывается на шаге по направлению z. Если в течении газа элементы вектор-столбца источниковых членов малы по сравнению с соответствующими элементами вектор-столбцов $\dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \mathbf{Y}}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial \mathbf{Z}}{\partial z}$, то удобнее всего учитывать вектор-столбец источниковых членов $\mathbf{R}$ на шаге расщепления, на котором учитываются потоки за счет вязкости и теплопроводности. В (I.12) этот шаг является последним. Если существует пространственное направление, вдоль которого градиент давления почти уравновешивается ускорением внешних сил, то вектор-столбец источниковых членов $\mathbf{R}$ необходимо учитывать именно на шаге расщепления по этому направлению. В противном случае существенно понизится точность схемы расщепления. Таким направлением в атмосферах планет является вертикальное направление. Например, шаги расщепления в схеме (I.12) обеспечивают наилучшую точность в случае, когда направления x и y являются горизонтальными, а направление z является вертикальным.

Сохранить второй порядок аппроксимации по времени в схеме расщепления (I.12) можно с помощью циклического изменения порядка выполнения шагов расщепления. Например, выполняя сначала в следующем порядке шаги по пространственным направлениям: $x\,y\,z$, $y\,x\,z$, $z\,x\,y$, $x\,z\,y$, $y\,z\,x$, $z\,y\,x$, а затем выполняя два шага, на которых учитываются потоки за счет вязкости и теплопроводности, а затем снова выполнить выше указанную последовательность шагов расщепления по пространственным направлениям. Обоснование этого утверждения содержится в монографиях [*Ковеня, Яненко, 1981; Бисикало и др., 2013*].

I.3.2 Явная гибридная схема для 1-мерной системы уравнений газовой динамики без источниковых членов

Пусть задана равномерная регулярная пространственная сетка в декартовых координатах и равномерная сетка по времени, целые узлы которых заданы соотношениями

$$x_i = x_0 + i\,h_x\,, \quad y_j = y_0 + j\,h_y\,, \quad z_k = z_0 + k\,h_z\,, \quad t_n = t_0 + n\,\tau$$

где h_x, h_y, h_z, — шаги сетки по осям x, y, z, а τ — шаг по времени. Полуцелые узлы этой сетки заданы соотношениями

$$x_{i+1/2} = x_0 + (i+1/2)\,h_x\,, \quad y_{j+1/2} = y_0 + (j+1/2)\,h_y\,,$$

$$z_{k+1/2} = z_0 + (k+1/2)\,h_z\,, \quad t_{n+1/2} = t_0 + (n+1/2)\,\tau\,.$$

Будем использовать стандартные обозначения для значений произвольной функции $f(t,x,y,z)$ на временном слое и в узлах пространственно-временной сетки

$$f(t_n\,,x,y,z) = f^n\,, \quad f(t_n\,,x_i\,,y_j\,,z_k) = f^n_{i,j,k}\,.$$

Рассмотрим построение явной разностной схемы 2-го порядка точности по времени и по пространству для численного решения одномерной системы уравнений без источниковых членов на шаге расщепления по направлению x в схеме (I.12):

$$\frac{\partial\,\mathbf{u}}{\partial\,t} + \frac{\partial\,\mathbf{X}(\mathbf{u})}{\partial\,x} = 0\,. \tag{I.13}$$

Обозначим матрицу Якоби вектор-функции $\mathbf{X}(\mathbf{u})$ через $\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u}) = \dfrac{\partial\,\mathbf{X}(\mathbf{u})}{\partial\,\mathbf{u}}$, а также обозначим $\sigma = \gamma - 1$, $c = \sqrt{\gamma\,p/\rho}$ — скорость звука. Матрицу $\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u})$ можно представить в виде

$$\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\sigma}{2}\mathbf{v}^2 - v_x^2 & (2-\sigma)\,v_x & -\sigma\,v_y & -\sigma\,v_z & \sigma \\ -v_x\,v_y & v_y & v_x & 0 & 0 \\ -v_x\,v_z & v_z & 0 & v_x & 0 \\ v_x\left(\dfrac{\gamma-2}{2}\mathbf{v}^2 - \dfrac{c^2}{\sigma}\right) & \dfrac{c^2}{\sigma} + \dfrac{\mathbf{v}^2}{2} - \sigma\,v_x^2 & -\sigma\,v_x\,v_y & -\sigma\,v_{_x}\,v_z & \gamma\,v_x \end{pmatrix},$$

Отметим, что выполняется равенство

$$\mathbf{X}(\mathbf{u}) = \widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u})\,\mathbf{u}\,. \tag{I.14}$$

Собственные числа матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u})$ обозначим через $\lambda_1 = v_x - c$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = v_x$, $\lambda_5 = v_x + c$, а через $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}(\mathbf{u})$ обозначим диагональную матрицу, на диагонали которой стоят указанные собственные числа матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u})$.

Обозначим через $\widehat{\boldsymbol{Q}}(\mathbf{u})$ матрицу, столбцы которой есть правые собственные векторы матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u})$, которые определены с точностью до множителя: $\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u})\,\widehat{\boldsymbol{Q}}(\mathbf{u}) = \widehat{\boldsymbol{Q}}(\mathbf{u})\,\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}(\mathbf{u})$. Матрицу $\widehat{\boldsymbol{Q}}(\mathbf{u})$ можно представить в виде

$$\widehat{\boldsymbol{Q}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_x - c & v_x & 0 & 0 & v_x + c \\ v_y & v_y & 1 & 0 & v_y \\ v_z & v_z & 0 & 1 & v_z \\ \dfrac{c^2}{\sigma} + \dfrac{\mathbf{v}^2}{2} - c\,v_x & \dfrac{\mathbf{v}^2}{2} & v_y & v_z & \dfrac{c^2}{\sigma} + \dfrac{\mathbf{v}^2}{2} + c\,v_x \end{pmatrix}.$$

Обратную к $\widehat{\boldsymbol{Q}}(\mathbf{u})$ матрицу обозначим через $\widehat{\boldsymbol{L}}(\mathbf{u})$. Ее строки есть левые собственные векторы матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u})$: $\widehat{\boldsymbol{L}}(\mathbf{u})\,\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u}) = \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}(\mathbf{u})\,\widehat{\boldsymbol{L}}(\mathbf{u})$. Матрицу $\widehat{\boldsymbol{L}}(\mathbf{u})$ можно представить в виде

$$\widehat{\boldsymbol{L}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma\,\mathbf{v}^2 + 2\,c\,v_x}{4\,c^2} & -\dfrac{\sigma\,v_x + c}{2\,c^2} & -\dfrac{\sigma\,v_y}{2\,c^2} & -\dfrac{\sigma\,v_z}{2\,c^2} & \dfrac{\sigma}{2\,c^2} \\ 1 - \dfrac{\sigma\,\mathbf{v}^2}{2\,c^2} & \dfrac{\sigma\,v_x}{c^2} & \dfrac{\sigma\,v_y}{c^2} & \dfrac{\sigma\,v_z}{c^2} & -\dfrac{\sigma}{c^2} \\ -v_y & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -v_z & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\sigma\,\mathbf{v}^2 - 2\,c\,v_x}{4\,c^2} & -\dfrac{\sigma\,v_x - c}{2\,c^2} & -\dfrac{\sigma\,v_y}{2\,c^2} & -\dfrac{\sigma\,v_z}{2\,c^2} & \dfrac{\sigma}{2\,c^2} \end{pmatrix}.$$

Матрицу $\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u})$ можно представить в виде

$$\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u}) = \widehat{\boldsymbol{Q}}(\mathbf{u})\,\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}(\mathbf{u})\,\widehat{\boldsymbol{L}}(\mathbf{u}). \tag{I.15}$$

Разлагая функцию $\mathbf{u}(t, x, y, z)$ в ряд Тейлора по времени относительно момента t^n, получим равенство

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \tau \left(\frac{\partial\,\mathbf{u}}{\partial\,t}\right)^n + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial\,t^2}\right)^n + \mathcal{O}(\tau^3). \tag{I.16}$$

Из (I.13) вытекают равенства для производных по времени

$$\frac{\partial\,\mathbf{u}}{\partial\,t} = -\frac{\partial\,\mathbf{X}(\mathbf{u})}{\partial\,x} = -\frac{\partial\,(\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u})\,\mathbf{u})}{\partial\,x} = -\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u})\frac{\partial\,\mathbf{u}}{\partial\,x},$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{u})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u})\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u})\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u})\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right).$$

Подставляя последние выражения для производных по времени в (I.16), получим равенство

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^n}{\tau} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u}^n)\left(\mathbf{u}^n - \frac{\tau}{2}\,\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u}^n)\frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial x}\right)\right) + \mathcal{O}(\tau^2), \tag{I.17}$$

на основе которого для системы (I.13) можно строить явные консервативные разностные схемы 2-го порядка точности по времени и по пространству, имеющие вид

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1}_{i,j,k}-\mathbf{u}^n_{i,j,k}}{\tau} = -\frac{\mathbf{X}^{n+1/2}_{i+1/2,j,k}-\mathbf{X}^{n+1/2}_{i-1/2,j,k}}{h_x}. \tag{I.18}$$

В этих схемах потоки $\mathbf{X}^{n+1/2}_{i\pm1/2,j,k}$ в полуцелых по x узлах сетки вычисляются по формулам, обеспечивающим аппроксимацию правой части в (I.17) с порядком точности $\mathcal{O}\big(h_x^2\big)$, а также обеспечивающим монотонность разностной схемы.

Для достижения указанной точности поток $\mathbf{X}^{n+1/2}_{i+1/2,j,k}$ должен аппроксимировать в полуцелом по x узле сетки выражение $\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u}^n)\left(\mathbf{u}^n - \frac{\tau}{2}\,\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u}^n)\frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial x}\right)$ с точностью $\mathcal{O}\big(h_x^3\big)$. Последнее выражение с помощью (I.15) можно представить в виде

$$\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u}^n)\left(\mathbf{u}^n - \frac{\tau}{2}\,\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u}^n)\frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial x}\right) = \widehat{\boldsymbol{Q}}(\mathbf{u}^n)\,\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}(\mathbf{u}^n)\left(\widehat{\boldsymbol{L}}(\mathbf{u}^n)\,\mathbf{u}^n - \frac{\tau}{2}\,\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}(\mathbf{u}^n)\,\widehat{\boldsymbol{L}}(\mathbf{u}^n)\frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial x}\right).$$

Последнее равенство означает, что формулы для вычисления потока $\mathbf{X}^{n+1/2}_{i+1/2,j,k}$ должны обеспечивать выполнение равенства

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^{n+1/2}_{i+1/2,j,k} &= \\ &= \widehat{\boldsymbol{Q}}_{i+1/2}\,\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}_{i+1/2}\left(\widehat{\boldsymbol{L}}_{i+1/2}\mathbf{u}^n_{i+1/2} - \frac{\tau}{2}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}_{i+1/2}\,\widehat{\boldsymbol{L}}_{i+1/2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial x}\right)_{i+1/2}\right) + \mathcal{O}\big(h_x^3\big),\end{aligned} \tag{I.19}$$

в котором использованы обозначения $\mathbf{u}^n_{i+1/2} = \mathbf{u}^n_{i+1/2,\,j,\,k}$, $\widehat{\boldsymbol{Q}}_{i+1/2} = \widehat{\boldsymbol{Q}}\big(\mathbf{u}^n_{i+1/2}\big)$, $\widehat{\boldsymbol{L}}_{i+1/2} = \widehat{\boldsymbol{L}}\big(\mathbf{u}^n_{i+1/2}\big)$, $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}_{i+1/2} = \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\big(\mathbf{u}^n_{i+1/2}\big)$, $\left(\frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial x}\right)_{i+1/2} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial x}\right)_{i+1/2,\,j,\,k}$ для значений вектора $\mathbf{u}^n$ и его производной по x, а также для значений матриц $\widehat{\boldsymbol{L}}$, $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ и $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}$ в полуцелых по x узлах сетки при фиксированных индексах j и k.

Будем вычислять вектор консервативных переменных в полуцелых по x узлах сетки как полусумму его значений в ближайших целых узлах по формуле

$$\mathbf{u}^n_{i+1/2} = \mathbf{u}^n_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}^n_{i,j,k} + \mathbf{u}^n_{i+1,j,k}\right), \tag{I.20}$$

которая обеспечивает порядок точности $\mathcal{O}\big(h_x^3\big)$ при вычислении векторов $\mathbf{u}^n_{i+1/2}$ и матриц $\widehat{\boldsymbol{L}}_{i+1/2}$, $\widehat{\boldsymbol{Q}}_{i+1/2}$ и $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}_{i+1/2}$. Обозначим векторы характеристических переменных (линеаризованные инварианты Римана) по направлению x в целых и полуцелых узлах сетки через

$$\begin{gathered}\mathbf{H}_i = \widehat{\boldsymbol{L}}_{i+1/2}\,\mathbf{u}^n_{i,j,k}\,, \quad \mathbf{H}_{i\pm1} = \widehat{\boldsymbol{L}}_{i+1/2}\,\mathbf{u}^n_{i\pm1,j,k}\,, \quad \mathbf{H}_{i+2} = \widehat{\boldsymbol{L}}_{i+1/2}\,\mathbf{u}^n_{i+2,j,k}\,,\\ \mathbf{H}_{i+1/2} = \widehat{\boldsymbol{L}}_{i+1/2}\,\mathbf{u}^n_{i+1/2} = \frac{1}{2}\,\big(\,\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_{i+1}\big)\,,\end{gathered} \tag{I.21}$$

а также обозначим через $\widetilde{\mathbf{H}} = \Big(\widetilde{H}_1\,,\,\widetilde{H}_2\,,\,\widetilde{H}_3\,,\,\widetilde{H}_4\,,\,\widetilde{H}_5\Big)^T$ вектор, заданный формулой

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_{i+1}}{2} - \frac{\tau}{2}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}_{i+1/2}\left(\frac{\partial\,\mathbf{H}}{\partial\,x}\right)_{i+1/2}\,. \tag{I.22}$$

Подставляя обозначения (I.20), (I.21) и (I.22) в правую часть (I.19), получим равенство

$$\mathbf{X}^{n+1/2}_{i+1/2,j,k} = \widehat{\boldsymbol{Q}}_{i+1/2}\,\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}_{i+1/2}\,\widetilde{\mathbf{H}} + \mathcal{O}\big(h_x^3\big)\,. \tag{I.23}$$

Следовательно, для того, чтобы схема имела второй порядок точности по пространству, формулы для вычисления компонент $\widetilde{H}_p$ вектор-столбца $\widetilde{\mathbf{H}}$ должны обеспечивать выполнение равенства (I.23).

Рассмотрим эти формулы. Обозначим через $\widetilde{\lambda}_p$ диагональный элемент матрицы $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}_{i+1/2}$ с номером p, а через $H_{p,i}$ обозначим элемент с номером p вектора $\mathbf{H}_i = \Big(H_{1,i}\,,\,H_{2,i}\,,\,H_{3,i}\,,\,H_{4,i}\,,\,H_{5,i}\Big)^T$. Формулы для вычисления компонент $\widetilde{H}_p$ зависят от знака $\widetilde{\lambda}_p$. Рассмотрим сначала случай $\widetilde{\lambda}_p > 0$. Если использовать для приближенного вычисления производной в (I.21) формулу

$$\left(\frac{\partial\,\mathbf{H}}{\partial\,x}\right)_{i+1/2} = \frac{1}{h_x}\big(\,\mathbf{H}_{i+1} - \mathbf{H}_i\big) + \mathcal{O}\big(h_x^3\big)$$

и подставить ее в (I.22), то получим схему Лакса–Вендроффа

$$\widetilde{H}_p = H_{p,i} + \Big(1 - \widetilde{\lambda}_p\,\tau/h_x\Big)\,\big(\,H_{p,i+1} - H_{p,i}\big)/2\,. \tag{I.24}$$

Эта схема является линейной, а также обеспечивает выполнение равенства (I.23), и, следовательно, имеет 2-й порядок точности по времени и по пространству.

Имеются еще две линейные схемы того же порядка точности. Это схема Бима–Уорминга [*Beam, Warming, 1976; Warming, Beam, 1976; Бисикало и др., 2013*]

$$\widetilde{H}_p = H_{p,i} + \Big(1 - \widetilde{\lambda}_p\,\tau/h_x\Big)\,\big(\,H_{p,i} - H_{p,i-1}\big)/2\,, \tag{I.25}$$

и схема Фромма [*Fromm, 1968; Бисикало и др., 2013*]

$$\widetilde{H}_p = H_{p,i} + \Big(1 - \widetilde{\lambda}_p\,\tau/h_x\Big)\,\big(\,H_{p,i+1} - H_{p,i-1}\big)/4\,, \qquad \text{(I.26)}$$

которая является полусуммой схем Лакса–Вендроффа и Бима–Уорминга.

Вводя параметр $\mathcal{R} = \dfrac{H_{p,i} - H_{p,i-1}}{H_{p,i+1} - H_{p,i}}$, называемый анализатором гладкости, и функцию $\alpha(\mathcal{R})$, называемую ограничителем потока, указанные три схемы, а также многие другие схемы можно записать в виде

$$\widetilde{H}_p = H_{p,i} + \Big(1 - \widetilde{\lambda}_p\,\tau/h_x\Big)\,\alpha(\mathcal{R})\,\big(\,H_{p,i+1} - H_{p,i}\big)/2\,. \qquad \text{(I.27)}$$

Для схемы Лакса–Вендроффа $\alpha(\mathcal{R}) = 1$, для схемы Бима–Уорминга $\alpha(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$, а для схемы Фромма $\alpha(\mathcal{R}) = (1+\mathcal{R})/2$. При $\alpha(\mathcal{R}) = 0$ получается монотонная схема 1-го порядка точности. Как показано в работах [*Harten, 1983; Sweby, 1984*], для монотонности схемы (I.27) необходимо выполнение следующего условия на ограничитель потока

$$0 \le \alpha(\mathcal{R}) \le \min\big(2, \mathcal{R} + |\mathcal{R}|\big)\,. \qquad \text{(I.28)}$$

Из (I.28) следует, что схема Лакса–Вендроффа монотонна при выполнении условия $\mathcal{R} \ge 0.5$, схема Бима–Уорминга монотонна при выполнении условия $0 \le \mathcal{R} \le 2$, а схема Фромма монотонна при выполнении условия $1/3 \le \mathcal{R} \le 3$. Эти схемы являются немонотонными, однако области монотонности этих схем перекрываются.

В предложенной автором гибридной схеме [*Мингалев и др., 2010*] осуществляется переключение между линейными схемами Лакса–Вендроффа, Бима–Уорминга и Фромма по правилам, которые в терминах ограничителя потока записываются в виде

$$\alpha(\mathcal{R}) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 1 \le \min\big(|\mathcal{R}|, |1+\mathcal{R}|/2\,\big)\,, \\ \mathcal{R} & \text{при} \quad |\mathcal{R}| < \min\big(1, |1+\mathcal{R}|/2\,\big)\,, \\ (1+\mathcal{R})/2 & \text{при} \quad |1+\mathcal{R}|/2 < \min\big(1, |\mathcal{R}|\,\big)\,. \end{cases}$$

Эту схему также можно записать в виде:

$$\widetilde{H}_p = \frac{1 + \operatorname{sign}\big(\widetilde{\lambda}_p\big)}{2}\,\Big(H_{p,i} + \alpha\,\Delta\widetilde{H}_p^{+}\Big) + \frac{1 - \operatorname{sign}\big(\widetilde{\lambda}_p\big)}{2}\,\Big(H_{p,i+1} - \alpha\,\Delta\widetilde{H}_p^{-}\Big)\,, \qquad \text{(I.29)}$$

где использованы обозначения $\alpha = 0.5\,\big(1 - \big|\widetilde{\lambda}_p\big|\,\tau/h_x\big)$,

$$\Delta\widetilde{H}_p^{+} = \begin{cases} \left(H_{p,i+1} - H_{p,i-1}\right)/2 & \text{при} \quad \left|H_{p,i+1} - H_{p,i-1}\right|/2 = M^{+}\,, \\ H_{p,i} - H_{p,i-1} & \text{при} \quad |H_{p,i} - H_{p,i-1}| = M^{+}\,, \\ H_{p,i+1} - H_{p,i} & \text{при} \quad |H_{p,i+1} - H_{p,i}| = M^{+}\,, \end{cases}$$

$$M^+ = \min\bigl(|H_{p,i} - H_{p,i-1}|\,,\ |H_{p,i+1} - H_{p,i}|\,,\ |H_{p,i+1} - H_{p,i-1}|\,/2\bigr)\,,$$

$$\Delta\widetilde{H}_p^- = \begin{cases} (H_{p,i+2} - H_{p,i})\,/2 & \text{при} \quad |H_{p,i+2} - H_{p,i}|\,/2 = M^-\,, \\ H_{p,i+2} - H_{p,i+1} & \text{при} \quad |H_{p,i+2} - H_{p,i+1}| = M^-\,, \\ H_{p,i+1} - H_{p,i} & \text{при} \quad |H_{p,i+1} - H_{p,i}| = M^-\,, \end{cases}$$

$$M^- = \min\bigl(|H_{p,i+1} - H_{p,i}|\,,\ |H_{p,i+2} - H_{p,i+1}|\,,\ |H_{p,i+2} - H_{p,i}|\,/2\bigr)\,.$$

Таким образом, для вычисления вектора потока $\mathbf{X}^{n+1/2}_{i+1/2,j,k}$ необходимо сначала вычислить векторы консервативных переменных $\mathbf{u}^n_{i,j,k}$, $\mathbf{u}^n_{i\pm1,j,k}$, $\mathbf{u}^n_{i+2,j,k}$, $\mathbf{u}^n_{i+1/2}$, а затем вычислить элементы матриц $\widehat{\boldsymbol{L}}_{i+1/2}$, $\widehat{\boldsymbol{Q}}_{i+1/2}$, $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}_{i+1/2}$ и векторы характеристических переменных по формулам (I.21). После этого необходимо вычислить компоненты вектора $\widetilde{H}_p$ по формулам (I.29), а затем вычислить вектор потока по формуле

$$\mathbf{X}^{n+1/2}_{i+1/2,j,k} = \widehat{\boldsymbol{Q}}_{i+1/2}\,\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}_{i+1/2}\,\widetilde{\mathbf{H}}\,. \tag{I.30}$$

Предложенная схема устойчива при выполнении условия Куранта $|\widetilde{\lambda}_p|\,\tau/h_x < 1$, консервативна, монотонна, имеет 2-й порядок аппроксимации по пространству и по времени на гладких решениях нелинейной системы (I.13) и не содержит линейную схемную вязкость. В этой схеме осуществляется переключение между шестью линейными схемами, каждая из которых монотонна при выполнении условий переключения. Тестовые расчеты показали, что эта схема обеспечивает хорошую точность расчетов даже на относительно грубых сетках. В то же время эта схема относительно проста в реализации по сравнению со схемами 3-го порядка точности по пространству, например, со схемой Роу–Эйнфельдта–Ошера [*Бисикало и др., 2013*], которая требует как минимум в 3 раза больше вычислений на шаг интегрирования по времени, чем предложенная схема, а также требует в 3 раза меньшего шага по времени.

Отметим, что предложенная гибридная схема (I.29) является модификацией гибридной схемы, в которой осуществляется переключение между схемами Лакса–Вендроффа и Бима–Уорминга по правилам, которые в терминах ограничителя потока записываются в виде

$$\alpha(\mathcal{R}) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 1 \le \min\bigl(1, |\mathcal{R}|\bigr)\,, \\ \mathcal{R} & \text{при} \quad |\mathcal{R}| < \min\bigl(1, |\mathcal{R}|\bigr)\,. \end{cases}$$

Эта схема впервые была предложена в работе [*Белоцерковский и др., 1987*] и успешно использовалась в работах [*Гущин, Матюшин, 1997, 2003, 2006а, 2006б; Gushchin et al., 2001; Опарин, 2000; Белоцерковский и др., 2003*]. В этой схеме осуществляется переключение между четырьмя линейными схемами второго порядка точности по времени и по пространству, каждая из которых монотонна при выполнении условий переключения.

I.3.3 Гибридная схема для 1-мерной системы уравнений газовой динамики с источниковыми членами

Рассмотрим построение явной разностной схемы 2-го порядка точности по времени и по пространству для численного решения одномерной системы уравнений газовой динамики на том шаге расщепления в схеме (I.12), на котором учитываются источниковые члены. Чтобы использовать ранее введенные обозначения, будем считать, что это делается на шаге расщепления по направлению x. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{R}(\mathbf{u}). \tag{I.31}$$

Отметим, что если ускорение внешних сил задано формулой (I.7), то вектор-функции $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ линейно зависят от компонент вектора консервативных переменных $\mathbf{u}$. Обозначим матрицу Якоби вектор-функции $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ через $\widehat{\boldsymbol{B}} = \dfrac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}$. Эта матрица зависит только от координат, и выполняется равенство $\mathbf{R}(\mathbf{u}) = \widehat{\boldsymbol{B}}\,\mathbf{u}$. Из (I.31) и (I.14) вытекают равенства для 1-й и 2-й производных по времени от вектора $\mathbf{u}$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{R}(\mathbf{u}) - \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{u})}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u})}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{u})}{\partial t} = \widehat{\boldsymbol{B}}\,\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u})\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) =$$

$$= \widehat{\boldsymbol{B}}\left(\mathbf{R}(\mathbf{u}) - \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{u})}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u})\left(\mathbf{R}(\mathbf{u}) - \widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u})\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right)\right).$$

Подставляя последние два равенства в (I.16), получим равенство

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} &= \mathbf{R}(\mathbf{u}^n) + \frac{\tau}{2}\widehat{\boldsymbol{B}}\left(\mathbf{R}(\mathbf{u}^n) - \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{u}^n)}{\partial x}\right) - \\ &- \frac{\partial}{\partial x}\left(\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u}^n)\left(\mathbf{u}^n - \frac{\tau}{2}\,\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u}^n)\frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial x} + \frac{\tau}{2}\mathbf{R}(\mathbf{u}^n)\right)\right) + \mathcal{O}(\tau^2),\end{aligned} \tag{I.32}$$

на основе которого для системы (I.31) можно строить явные консервативные разностные схемы 2-го порядка точности по времени и по пространству вида

$$\frac{\mathbf{u}_{i,j,k}^{n+1} - \mathbf{u}_{i,j,k}^{n}}{\tau} = \mathbf{R}_{i,j,k}^{n+1/2} - \frac{\mathbf{X}_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} - \mathbf{X}_{i-1/2,j,k}^{n+1/2}}{h_x} . \tag{I.33}$$

Из равенства (I.32) следует, что второй порядок точности схемы (I.33) по пространству и по времени обеспечивается, если выполнены два условия. Первое условие состоит в том, что формулы, по которым вычисляются вектор-столбцы $\mathbf{R}_{i,j,k}^{n+1/2}$ в целых узлах сетки, обеспечивают аппроксимацию с точностью $\mathcal{O}\big(h_x^2\big)$ суммы первых двух слагаемых в правой части (I.32), то есть выполняется равенство

$$\mathbf{R}_{i,j,k}^{n+1/2} = \mathbf{R}\left(\mathbf{u}_{i,j,k}^{n}\right) + \frac{\tau}{2}\widehat{\boldsymbol{B}}_{i,j,k}\left(\mathbf{R}\left(\mathbf{u}_{i,j,k}^{n}\right) - \left(\frac{\partial\,\mathbf{X}(\mathbf{u}^n)}{\partial\,x}\right)_{i,j,k}\right) + \mathcal{O}\big(h_x^2\big) , \tag{I.34}$$

а второе условие состоит в том, что формулы, по которым вычисляются потоки $\mathbf{X}_{i\pm1/2,\,j,\,k}^{n+1/2}$ в полуцелых по x узлах сетки, обеспечивают аппроксимацию третьего слагаемого в правой части (I.32) вторым слагаемым в правой части (I.33) с той же точностью, то есть выполняется равенство

$$\begin{aligned}&\mathbf{X}_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} = \\ &= \widehat{\boldsymbol{A}}\big(\mathbf{u}_{i+1/2}^{n}\big)\left(\mathbf{u}_{i+1/2}^{n} - \frac{\tau}{2}\,\widehat{\boldsymbol{A}}\big(\mathbf{u}_{i+1/2}^{n}\big)\left(\frac{\partial\,\mathbf{u}^n}{\partial\,x}\right)_{i+1/2} + \frac{\tau}{2}\mathbf{R}\big(\mathbf{u}_{i+1/2}^{n}\big)\right) + \mathcal{O}\big(h_x^3\big) .\end{aligned} \tag{I.35}$$

в котором используется обозначение (I.20). Можно убедиться, что выполнение равенства (I.34) обеспечивает формула

$$\mathbf{R}_{i,j,k}^{n+1/2} = \mathbf{R}\big(\mathbf{u}_{i,j,k}^{n}\big) + \frac{\tau}{2}\widehat{\boldsymbol{B}}_{i,j,k}\left(\mathbf{R}\big(\mathbf{u}_{i,j,k}^{n}\big) - \frac{\mathbf{X}\big(\mathbf{u}_{i+1/2}^{n}\big) - \mathbf{X}\big(\mathbf{u}_{i-1/2}^{n}\big)}{h_x}\right). \tag{I.36}$$

Рассмотрим правую часть формулы (I.35). С помощью (I.15) можно получить равенство

$$\begin{aligned}&\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u}^n)\left(\mathbf{u}^n - \frac{\tau}{2}\,\widehat{\boldsymbol{A}}(\mathbf{u}^n)\frac{\partial\,\mathbf{u}^n}{\partial\,x} + \frac{\tau}{2}\mathbf{R}(\mathbf{u}^n)\right) = \\ &= \widehat{\boldsymbol{Q}}(\mathbf{u}^n)\,\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}(\mathbf{u}^n)\left(\widehat{\boldsymbol{L}}(\mathbf{u}^n)\,\mathbf{u}^n - \frac{\tau}{2}\,\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}(\mathbf{u}^n)\,\widehat{\boldsymbol{L}}(\mathbf{u}^n)\frac{\partial\,\mathbf{u}^n}{\partial\,x} + \frac{\tau}{2}\,\widehat{\boldsymbol{L}}(\mathbf{u}^n)\,\mathbf{R}(\mathbf{u}^n)\right).\end{aligned}$$

Подставляя последнее равенство в правую часть (I.35), получим равенство

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} = \widehat{\boldsymbol{Q}}_{i+1/2}\,\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}_{i+1/2}\Bigg(&\widehat{\boldsymbol{L}}_{i+1/2}\,\mathbf{u}_{i+1/2}^{n} - \frac{\tau}{2}\,\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}_{i+1/2}\,\widehat{\boldsymbol{L}}_{i+1/2}\left(\frac{\partial\,\mathbf{u}^n}{\partial\,x}\right)_{i+1/2} + \\ &+ \frac{\tau}{2}\,\widehat{\boldsymbol{L}}_{i+1/2}\,\mathbf{R}\big(\mathbf{u}_{i+1/2}^{n}\big)\Bigg) + \mathcal{O}\big(h_x^3\big) .\end{aligned}$$

Подставляя в правую часть последнего равенства обозначения (I.20), (I.21) и (I.22), получим равенство

$$\mathbf{X}^{n+1/2}_{i+1/2,j,k} = \widehat{\boldsymbol{Q}}_{i+1/2}\,\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}_{i+1/2}\left(\widetilde{\mathbf{H}} + \frac{\tau}{2}\,\widehat{\boldsymbol{L}}_{i+1/2}\,\mathbf{R}\big(\mathbf{u}^{n}_{i+1/2}\big)\right) + \mathcal{O}\big(h_x^3\big)\,, \tag{I.37}$$

выполнение которого эквивалентно выполнению (I.35). Если для вычисления компонент вектора $\widetilde{\mathbf{H}}$ использовать гибридную схему (I.29) и вычислять потоки по формуле

$$\mathbf{X}^{n+1/2}_{i+1/2,j,k} = \widehat{\boldsymbol{Q}}_{i+1/2}\,\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}_{i+1/2}\left(\widetilde{\mathbf{H}} + \frac{\tau}{2}\,\widehat{\boldsymbol{L}}_{i+1/2}\,\mathbf{R}\big(\mathbf{u}^{n}_{i+1/2}\big)\right)\,, \tag{I.38}$$

то равенство (I.37) будет выполнено. Таким образом, применение формул (I.38), (I.29) и (I.36) обеспечивает второй порядок точности схемы (I.33). Эта схема устойчива при выполнении условия Куранта. Тестовые расчеты показали, что такая схема монотонна и обладает хорошей точностью.

Следует отметить, что разностная схема должна обеспечивать достаточную малость нефизических источников нагрева–охлаждения атмосферного газа, обусловленных ошибками округления и недостаточно точным расчетом работы внешних массовых сил при движении атмосферного газа, по сравнению с присутствующими в модели физическими источниками нагрева–охлаждения атмосферного газа. Предложенная схема (I.33), (I.38), (I.29) и (I.36) обеспечивает отсутствие указанных нефизических источников нагрева–охлаждения атмосферного газа. При этом при вычислении 5-й компоненты вектора $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ предпочтительно использовать формулу (I.8). Использование этой формулы и предложенной схемы позволяет проводить моделирование при использовании вычислений с одинарной точностью.

Отметим, что всю описанную в этом разделе методику численного интегрирования системы (I.10) с использованием явной схемы расщепления (I.12) и гибридных схем для решения одномерных систем (I.13) и (I.31) можно применить для численного интегрирования системы (I.11). При этом вместо одномерных систем (I.13) и (I.31) придется, соответственно, решать системы

$$\frac{\partial\,\widetilde{\mathbf{u}}}{\partial\,t} + \frac{\partial\,\widetilde{\mathbf{X}}(\widetilde{\mathbf{u}})}{\partial\,x} = 0\,, \qquad \frac{\partial\,\widetilde{\mathbf{u}}}{\partial\,t} + \frac{\partial\,\widetilde{\mathbf{X}}(\widetilde{\mathbf{u}})}{\partial\,x} = \widetilde{\mathbf{R}}(\widetilde{\mathbf{u}})\,.$$

Численное решение последней системы с использованием схемы (I.33), (I.38), (I.29) и (I.36) будет требовать существенно меньше арифметических операций, чем численное решение системы (I.31) из-за того, что 5-й элемент вектор-столбца $\widetilde{\mathbf{R}}(\widetilde{\mathbf{u}})$ равен нулю, и матрица Якоби $\dfrac{\partial\,\widetilde{\mathbf{R}}(\widetilde{\mathbf{u}})}{\partial\,\widetilde{\mathbf{u}}}$ имеет намного меньше отличных

от нуля элементов, чем матрица Якоби $\widehat{\boldsymbol{B}} = \dfrac{\partial\,\mathbf{R}(\mathbf{u})}{\partial\,\mathbf{u}}$. Однако в этом случае необходимо использовать вычисления с двойной точностью, поскольку перепад потенциальной энергии единицы массы между точками на верхней и на нижней границах области моделирования может более чем на 10 порядков превосходить внутреннюю энергию единицы массы. Поэтому оптимальный выбор между использованием системы (I.10) или (I.11) зависит от соотношения между скоростями вычислений с одинарной и двойной точностью для компьютера, на котором проводится моделирование. В данной работе использовалась система (I.10) и параллельные вычисления с одинарной точностью на графических ускорителях фирмы NVIDIA.

I.4 Явная гибридная схема на регулярной сетке в сферических координатах

Важным вопросом при построении моделей является выбор пространственной сетки, на которой проводится численное интегрирование системы уравнений динамики вязкого теплопроводного однокомпонентного газа. Проведенные автором совместно с К. Г. Орловым вычислительные эксперименты показали, что наиболее оптимальным является использование регулярной равномерной пространственной сетки в сферических географических координатах. При использовании этой сетки достигается наилучшая точность численного решения.

I.4.1 Регулярная пространственная сетка в сферических координатах

Декартовы координаты с началом отсчета в центре планеты обозначим через x, y, z. При этом будем считать, что ось z проходит через полюсы и совпадает с осью собственного вращения планеты, а оси x и y лежат в плоскости экватора. Связанные с декартовыми координатами x, y, z сферические географические координаты обозначим через r, φ, β, где φ — долгота, β — широта, r — расстояние от начала отсчета. Связь между этими координатами задается формулами

$$x = r\,\cos\varphi\,\cos\beta\,,\quad y = r\,\sin\varphi\,\cos\beta\,,\quad z = r\,\sin\beta\,.$$

Сопутствующий базис сферической системы координат выражается через базис декартовой системы координат по формулам

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r(\varphi,\beta) &= (\,\mathbf{e}_x\cos\varphi + \mathbf{e}_y\sin\varphi\,)\cos\beta + \mathbf{e}_z\,\sin\beta\,,\\
\mathbf{e}_\varphi(\varphi,\beta) &= -\mathbf{e}_x\sin\varphi + \mathbf{e}_y\cos\varphi\,,\\
\mathbf{e}_\beta(\varphi,\beta) &= -(\,\mathbf{e}_x\cos\varphi + \mathbf{e}_y\sin\varphi\,)\sin\beta + \mathbf{e}_z\cos\beta\,.
\end{aligned} \tag{I.39}$$

В моделях общей циркуляции планетных атмосфер, которые будут описаны далее, использовалась сетка, равномерная по широте, по долготе и по высоте. Число узлов сетки по широте обозначим через N_φ, а число узлов сетки по долготе обозначим через N_β. Шаги сетки по широте и по долготе в радианах обозначим через $\Delta\beta = \pi/N_\beta$ и $\Delta\varphi = \pi/N_\varphi$ соответственно. На полюсах целые узлы сетки отсутствуют. Ближайшие к полюсу целые узлы сетки удалены от него по широте на половину шага. Целые узлы сетки по широте и целые узлы сетки по долготе определяются по формулам

$$\beta_j = -\pi/2 + \Delta\beta\,(j - 1/2)\,, \quad j = 1, ..., N_\beta\,, \qquad \varphi_i = i\,\Delta\varphi\,, \quad i = 1, ..., N_\varphi\,.$$

Полуцелые узлы сетки по широте и полуцелые узлы сетки по долготе определяются по формулам

$$\beta_{j+\frac{1}{2}} = \beta_j + \Delta\beta/2\,, \quad j = 1, ..., N_\beta - 1\,, \qquad \varphi_{i-\frac{1}{2}} = \varphi_i + \Delta\varphi/2\,, \quad i = 1, ..., N_\varphi\,.$$

В данной диссертации использовались сетки с одинаковыми шагами по широте и долготе, в которых $N_\varphi = 2\,N_\beta$, а число узлов сетки по широте N_β равнялось либо 192 либо 384.

Область моделирования для моделей общей циркуляции атмосфер Земли, Титана и Венеры является областью, заключенной между поверхностью небесного тела и сферой с центром в начале координат и радиусом $r_0 + H_{max}$, где r_0 — радиус Земли на северном полюсе или средний радиус Титана или Венеры, H_{max} — высота верхней границы области моделирования над сферой с центром в начале координат и радиусом r_0.

Для моделей общей циркуляции атмосфер Титана и Венеры целые и полуцелые узлы сетки по высоте определяются по формулам

$$r_k = r_0 + k\,h\,, \quad k = -k^-, ..., N_r\,, \qquad r_{k+\frac{1}{2}} = r_k + h/2\,, \quad k = -k^-, ..., N_r - 1\,,$$

где h — шаг сетки по высоте, $N_r = H_{max}/h$ — число узлов сетки по высоте, расположенных выше среднего радиуса Титана или Венеры, k^- — число узлов сетки по высоте, расположенных ниже среднего радиуса Титана или Венеры (на поверхности этих небесных тел имеются впадины).

Для модели общей циркуляции атмосферы Земли целые и полуцелые узлы сетки по высоте определяются по формулам

$$r_k = r_0 + k\,h\,, \quad k = 0, ..., N_r\,, \qquad r_{k+\frac{1}{2}} = r_k + h/2\,, \quad k = 0, ..., N_r - 1\,.$$

Обозначим через $\mathbf{r}_{i,j,k}$ точку пространства, которая имеет сферические координаты r_k, φ_i и β_j. Эту точку будем называть целым узлом сетки. Обозначим

через $\mathbf{r}_{i,j,k\pm\frac{1}{2}}$ точку пространства, которая имеет сферические координаты $r_{k\pm\frac{1}{2}}$, φ_i и β_j. Эту точку будем называть полуцелым по высоте и целым по долготе и широте узлом сетки. Обозначим также через $\mathbf{r}_{i\pm\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2},k\pm\frac{1}{2}}$ точку пространства, которая имеет сферические координаты $r_{k\pm\frac{1}{2}}$, $\varphi_{i\pm\frac{1}{2}}$ и $\beta_{j\pm\frac{1}{2}}$. Эту точку будем называть полуцелым по всем координатам узлом сетки. Полностью аналогично определяются полуцелые по долготе и целые по высоте и широте узлы сетки $\mathbf{r}_{i\pm\frac{1}{2},j,k}$ и полуцелые по широте и целые по высоте и долготе узлы сетки $\mathbf{r}_{i,j\pm\frac{1}{2},k}$.

Введем контрольный объем целого узла сетки $\mathbf{r}_{i,j,k}$, который представляет собой схематично изображенную на рис. I.1 четырехгранную криволинейную пирамиду, заключенную между двумя концентрическими сферами радиусов $r_{k-\frac{1}{2}}$ и $r_{k+\frac{1}{2}}$ и четырьмя прямыми, проходящими из центра сферы через полуцелые узлы сетки $\mathbf{r}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$, $\mathbf{r}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$, $\mathbf{r}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$, $\mathbf{r}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$. Этот контрольный объем обозначим через $\mathcal{V}_{i,j,k}$, а его величину обозначим через $V_{j,k}$. Она вычисляется при помощи интеграла по контрольному объему и определяется по формуле

$$V_{j,k} = \frac{r_{k+\frac{1}{2}}^3 - r_{k-\frac{1}{2}}^3}{3}\Big(\sin\beta_{j+\frac{1}{2}} - \sin\beta_{j-\frac{1}{2}}\Big)\Delta\varphi = h\bigg(r_k^2 + \frac{h^2}{12}\bigg)\Big(\sin\beta_{j+\frac{1}{2}} - \sin\beta_{j-\frac{1}{2}}\Big)\Delta\varphi\,.$$

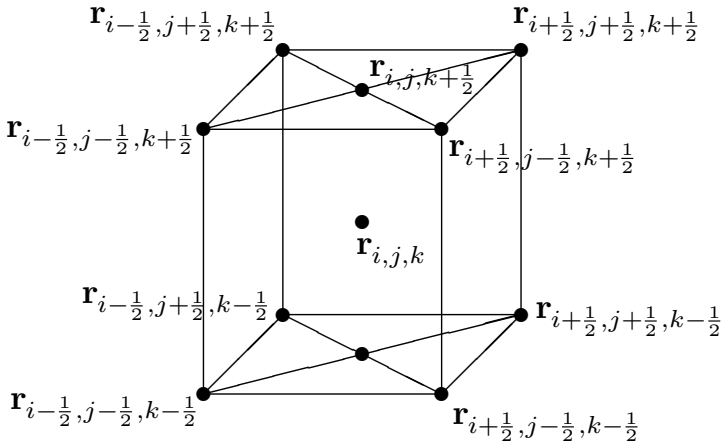

Рис. I.1. *Контрольный объем целого узла сетки.*

На нижней и верхней границах области моделирования величины контрольных объемов вычисляются по следующим формулам:

$$V_{j,0} = \frac{1}{3}\left(r_{1/2}^3 - r_0^3\right)\left(\sin\beta_{j+\frac{1}{2}} - \sin\beta_{j-\frac{1}{2}}\right)\Delta\varphi\,,$$

$$V_{j,N_r} = \frac{1}{3}\left(r_{N_r}^3 - r_{N_r-\frac{1}{2}}^3\right)\left(\sin\beta_{j+\frac{1}{2}} - \sin\beta_{j-\frac{1}{2}}\right)\Delta\varphi\,.$$

Верхнюю грань контрольного объёма целого узла сетки $\mathbf{r}_{i,j,k}$ обозначим через $G^{(r)}_{i,j,k+\frac{1}{2}}$. Она является частью сферы радиуса $r_{k+\frac{1}{2}}$, находящейся между

двумя меридианами и двумя параллелями, проходящими через полуцелые узлы сетки $\mathbf{r}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$, $\mathbf{r}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$, $\mathbf{r}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$, $\mathbf{r}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$. Площадь грани $G^{(r)}_{i,j,k+\frac{1}{2}}$ обозначим через $S^{(r)}_{j,k+\frac{1}{2}}$. Она вычисляется с помощью интеграла по этой грани и определяется по формуле

$$S^{(r)}_{j,k+\frac{1}{2}} \;=\; r^2_{k+\frac{1}{2}} \left(\sin\beta_{j+\frac{1}{2}} - \sin\beta_{j-\frac{1}{2}}\right) \Delta\varphi\,.$$

Внешней единичной нормалью к верхней грани $G^{(r)}_{i,j,k+\frac{1}{2}}$ контрольного объёма целого узла сетки $\mathbf{r}_{i,j,k}$ является направленный вверх вектор сопутствующего базиса сферической системы координат $\mathbf{e}_r\big(\varphi_i,\beta_j\big)$, заданный формулами (I.38), а внешней единичной нормалью к нижней грани $G^{(r)}_{j,k-\frac{1}{2}}$ этого же контрольного объёма является направленный вниз вектор $-\mathbf{e}_r\big(\varphi_i,\beta_j\big)$.

Восточную грань контрольного объёма целого узла сетки $\mathbf{r}_{i,j,k}$ обозначим через $G^{(\varphi)}_{i+\frac{1}{2},j,k}$, а западную грань этого же контрольного объёма обозначим через $G^{(\varphi)}_{i-\frac{1}{2},j,k}$. Эти грани имеют одинаковую площадь, которую обозначим через $S^{(\varphi)}_k$. Она вычисляется с помощью интеграла и определяется по формуле

$$S^{(\varphi)}_k \;=\; h\, r_k\, \Delta\beta\,.$$

Внешней единичной нормалью к восточной грани $G^{(\varphi)}_{i+\frac{1}{2},k}$ контрольного объёма целого узла сетки $\mathbf{r}_{i,j,k}$ является направленный на восток вектор сопутствующего базиса сферической системы координат $\mathbf{e}_\varphi\big(\varphi_{i+\frac{1}{2}},\beta_j\big)$, а единичной внешней нормалью к западной грани $G^{(\varphi)}_{i-\frac{1}{2},k}$ этого же контрольного объёма является направленный на запад вектор $-\mathbf{e}_\varphi\big(\varphi_{i-\frac{1}{2}},\beta_j\big)$.

Северную грань контрольного объёма целого узла сетки $\mathbf{r}_{i,j,k}$ обозначим через $G^{(\beta)}_{i,j+\frac{1}{2},k}$. Площадь этой грани обозначим через $S^{(\beta)}_{j+\frac{1}{2},k}$. Она вычисляется с помощью интеграла и определяется по формуле

$$S^{(\beta)}_{j+\frac{1}{2},k} \;=\; \Delta\varphi\, h\, r_k\, \cos\beta_{j+\frac{1}{2}}\,.$$

Внешней единичной нормалью к северной грани $G^{(\beta)}_{i,j+\frac{1}{2},k}$ контрольного объёма целого узла сетки $\mathbf{r}_{i,j,k}$ является направленный на север вектор сопутствующего базиса сферической системы координат $\mathbf{e}_\beta\big(\varphi_i,\beta_{j+\frac{1}{2}}\big)$, а единичной внешней нормалью к южной грани $G^{(\beta)}_{j-\frac{1}{2},k}$ этого же контрольного объёма является направленный на юг вектор $-\mathbf{e}_\beta\big(\varphi_i,\beta_{j-\frac{1}{2}}\big)$.

I.4.2 Явная схема расщепления в сферических координатах

Для построения конечно-разностной аппроксимации пространственных производных в системе (I.10) на описанной выше регулярной сетке в сферических

координатах применим метод конечного объёма, который заключается в том, что производные функции $f(\mathbf{r})$ в узле сетки $\mathbf{r}_{i,j,k}$ определяются по формулам

$$\begin{gathered}\frac{\partial f\left(\mathbf{r}_{i,j,k}\right)}{\partial x} \approx \frac{1}{V_{j,k}} \int\limits_{\mathcal{V}_{i,j,k}} \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{V_{j,k}} \int\limits_{\partial\mathcal{V}_{i,j,k}} f(\mathbf{r})\, N_x(\mathbf{r})\, dS\,, \\ \frac{\partial f\left(\mathbf{r}_{i,j,k}\right)}{\partial y} \approx \frac{1}{V_{j,k}} \int\limits_{\partial\mathcal{V}_{i,j,k}} f(\mathbf{r})\, N_y(\mathbf{r})\, dS\,, \quad \frac{\partial f\left(\mathbf{r}_{i,j,k}\right)}{\partial z} \approx \frac{1}{V_{j,k}} \int\limits_{\partial\mathcal{V}_{i,j,k}} f(\mathbf{r})\, N_z(\mathbf{r})\, dS\,,\end{gathered} \tag{I.40}$$

в которых через $\partial\mathcal{V}_{i,j,k}$ обозначена граница контрольного объема $\mathcal{V}_{i,j,k}$, а через N_x, N_z, N_z обозначены декартовы компоненты вектора единичной внешней нормали к границе контрольного объема. Поверхностные интегралы в этих формулах вычисляются при помощи какой-либо интерполяции функции по её значениям в ближайших узлах сетки. Конкретный способ вычисления этих интегралов порождает конечно-разностные формулы дифференцирования. В этих формулах присутствуют только координаты узлов сетки и значения функции в этих узлах.

Вектор-столбцы потоков консервативных переменных $\mathbf{u}$ в направлении векторов сопутствующего базиса сферической системы координат за счет конвекции и давления обозначим через

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{(r)}(\mathbf{u}) &= \mathbf{X}(\mathbf{u})\,(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_r) + \mathbf{Y}(\mathbf{u})\,(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_r) + \mathbf{Z}(\mathbf{u})\,(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_r)\,, \\ \mathbf{F}^{(\varphi)}(\mathbf{u}) &= \mathbf{X}(\mathbf{u})\,(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_\varphi) + \mathbf{Y}(\mathbf{u})\,(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_\varphi) + \mathbf{Z}(\mathbf{u})\,(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\varphi)\,, \\ \mathbf{F}^{(\beta)}(\mathbf{u}) &= \mathbf{X}(\mathbf{u})\,(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_\beta) + \mathbf{Y}(\mathbf{u})\,(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_\beta) + \mathbf{Z}(\mathbf{u})\,(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\beta)\,,\end{aligned} \tag{I.41}$$

а за счет вязкости и теплопроводности обозначим через

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^{(r)}(\mathbf{u}) &= \mathbf{X}_\nu(\mathbf{u})\,(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_r) + \mathbf{Y}_\nu(\mathbf{u})\,(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_r) + \mathbf{Z}_\nu(\mathbf{u})\,(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_r)\,, \\ \mathbf{U}^{(\varphi)}(\mathbf{u}) &= \mathbf{X}_\nu(\mathbf{u})\,(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_\varphi) + \mathbf{Y}_\nu(\mathbf{u})\,(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_\varphi) + \mathbf{Z}_\nu(\mathbf{u})\,(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\varphi)\,, \\ \mathbf{U}^{(\beta)}(\mathbf{u}) &= \mathbf{X}_\nu(\mathbf{u})\,(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_\beta) + \mathbf{Y}_\nu(\mathbf{u})\,(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_\beta) + \mathbf{Z}_\nu(\mathbf{u})\,(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\beta)\,,\end{aligned} \tag{I.42}$$

в которых скалярные произведения векторов базиса декартовой системы координат на векторы сопутствующего базиса сферической системы координат выражаются по формулам, вытекающим из (I.39):

$$\begin{aligned}&(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_r) = \cos\varphi\,\cos\beta\,, && (\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_r) = \sin\varphi\,\cos\beta\,, && (\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_r) = \sin\beta\,, \\ &(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_\varphi) = -\sin\varphi\,, && (\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_\varphi) = \cos\varphi\,, && (\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\varphi) = 0\,, \\ &(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_\beta) = -\cos\varphi\,\sin\beta\,, && (\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_\beta) = -\sin\varphi\,\sin\beta\,, && (\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\beta) = \cos\beta\,.\end{aligned} \tag{I.43}$$

Также будем обозначать значения функций в целых и полуцелых узлах сетки с помощью нижних индексов: $\mathbf{u}\big(\mathbf{r}_{i,j,k}\big) = \mathbf{u}_{i,j,k}$.

Применяя метод конечного объема для аппроксимации пространственных производных от потоков в системе (I.10) и используя формулы (I.40) вместе с обозначениями (I.41) и (I.42), а также представляя интеграл по границе контрольного объема в виде суммы интегралов по граням этого объема, получим равенство:

$$\frac{\partial\,\mathbf{u}_{i,j,k}}{\partial\,t} = \mathbf{R}_{i,j,k} + \mathbf{R}_{\nu\,i,j,k} - \frac{1}{V_{j,k}} \int\limits_{G^{(r)}_{i,j,k+\frac{1}{2}}} \big(\mathbf{F}^{(r)} - \mathbf{U}^{(r)}\big)dS + \frac{1}{V_{j,k}} \int\limits_{G^{(r)}_{i,j,k-\frac{1}{2}}} \big(\mathbf{F}^{(r)} - \mathbf{U}^{(r)}\big)dS -$$

$$- \frac{1}{V_{j,k}} \int\limits_{G^{(\varphi)}_{i+\frac{1}{2},j,k}} \big(\mathbf{F}^{(\varphi)} - \mathbf{U}^{(\varphi)}\big)dS + \frac{1}{V_{j,k}} \int\limits_{G^{(\varphi)}_{i-\frac{1}{2},j,k}} \big(\mathbf{F}^{(\varphi)} - \mathbf{U}^{(\varphi)}\big)dS -$$

$$- \frac{1}{V_{j,k}} \int\limits_{G^{(\beta)}_{i,j+\frac{1}{2},k}} \big(\mathbf{F}^{(\beta)} - \mathbf{U}^{(\beta)}\big)dS + \frac{1}{V_{j,k}} \int\limits_{G^{(\beta)}_{i,j-\frac{1}{2},k}} \big(\mathbf{F}^{(\beta)} - \mathbf{U}^{(\beta)}\big)dS\,.$$

Заменяя в последнем равенстве интеграл по грани контрольного объема на произведение площади этой грани и значения подынтегральной функции в центре грани, получим следующее равенство:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\,\mathbf{u}_{i,j,k}}{\partial\,t} = \mathbf{R}_{i,j,k} + \mathbf{R}_{\nu\,i,j,k} - \frac{S^{(r)}_{j,k+\frac{1}{2}}\,\mathbf{F}^{(r)}_{i,j,k+\frac{1}{2}} - S^{(r)}_{j,k-\frac{1}{2}}\,\mathbf{F}^{(r)}_{i,j,k-\frac{1}{2}}}{V_{j,k}} + \\
- \frac{S^{(\varphi)}_{k}\left(\mathbf{F}^{(\varphi)}_{i+\frac{1}{2},j,k} - \mathbf{F}^{(\varphi)}_{i-\frac{1}{2},j,k}\right)}{V_{j,k}} - \frac{S^{(\beta)}_{j+\frac{1}{2},k}\,\mathbf{F}^{(\beta)}_{i,j+\frac{1}{2},k} - S^{(\beta)}_{j-\frac{1}{2},k}\,\mathbf{F}^{(\beta)}_{i,j-\frac{1}{2},k}}{V_{j,k}} + \\
+ \frac{S^{(r)}_{j,k+\frac{1}{2}}\,\mathbf{U}^{(r)}_{i,j,k+\frac{1}{2}} - S^{(r)}_{j,k-\frac{1}{2}}\,\mathbf{U}^{(r)}_{i,j,k-\frac{1}{2}}}{V_{j,k}} + \\
+ \frac{S^{(\varphi)}_{k}\left(\mathbf{U}^{(\varphi)}_{i+\frac{1}{2},j,k} - \mathbf{U}^{(\varphi)}_{i-\frac{1}{2},j,k}\right)}{V_{j,k}} + \frac{S^{(\beta)}_{j+\frac{1}{2},k}\,\mathbf{U}^{(\beta)}_{i,j+\frac{1}{2},k} - S^{(\beta)}_{j-\frac{1}{2},k}\,\mathbf{U}^{(\beta)}_{i,j-\frac{1}{2},k}}{V_{j,k}}\,.
\end{aligned} \tag{I.44}$$

Для системы (I.44) можно построить схему расщепления, аналогичную схеме (I.12) для системы (I.10) и состоящую из 4-х шагов:

$$\frac{\partial\,\mathbf{u}'_{i,j,k}}{\partial\,t} = \mathbf{R}\big(\mathbf{u}'_{i,j,k}\big) - \frac{S^{(r)}_{j,k+\frac{1}{2}}\,\mathbf{F}^{(r)}_{i,j,k+\frac{1}{2}}(\mathbf{u}') - S^{(r)}_{j,k-\frac{1}{2}}\,\mathbf{F}^{(r)}_{i,j,k-\frac{1}{2}}(\mathbf{u}')}{V_{j,k}}\,, \tag{I.45}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}''_{i,j,k}}{\partial t} = -\frac{S_k^{(\varphi)}\left(\mathbf{F}^{(\varphi)}_{i+\frac{1}{2},j,k}(\mathbf{u}'') - \mathbf{F}^{(\varphi)}_{i-\frac{1}{2},j,k}(\mathbf{u}'')\right)}{V_{j,k}}\,, \tag{I.46}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'''_{i,j,k}}{\partial t} = -\frac{S^{(\beta)}_{j+\frac{1}{2},k}\,\mathbf{F}^{(\beta)}_{i,j+\frac{1}{2},k}(\mathbf{u}''') - S^{(\beta)}_{j-\frac{1}{2},k}\,\mathbf{F}^{(\beta)}_{i,j-\frac{1}{2},k}(\mathbf{u}''')}{V_{j,k}}\,, \tag{I.47}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}_{i,j,k}}{\partial t} &= \mathbf{R}_{\nu\, i,j,k} + \frac{S^{(r)}_{j,k+\frac{1}{2}}\,\mathbf{U}^{(r)}_{i,j,k+\frac{1}{2}}(\mathbf{u}) - S^{(r)}_{j,k-\frac{1}{2}}\,\mathbf{U}^{(r)}_{i,j,k-\frac{1}{2}}(\mathbf{u})}{V_{j,k}} + \\ &+\frac{S_k^{(\varphi)}\left(\mathbf{U}^{(\varphi)}_{i+\frac{1}{2},j,k}(\mathbf{u}) - \mathbf{U}^{(\varphi)}_{i-\frac{1}{2},j,k}(\mathbf{u})\right) + S^{(\beta)}_{j+\frac{1}{2},k}\,\mathbf{U}^{(\beta)}_{i,j+\frac{1}{2},k}(\mathbf{u}) - S^{(\beta)}_{j-\frac{1}{2},k}\,\mathbf{U}^{(\beta)}_{i,j-\frac{1}{2},k}(\mathbf{u})}{V_{j,k}}\,.\end{aligned} \tag{I.48}$$

В качестве начальных условий для каждой системы уравнений на очередном шаге расщепления берутся значения, рассчитанные в результате выполнения предыдущего шага расщепления. Осуществление послойного перехода по времени для системы уравнений (I.45) будем называть шагом расщепления по вертикальному направлению. На этом шаге учитывается ускорение внешних сил. Осуществление послойного перехода по времени для системы уравнений (I.46) будем называть шагом расщепления по зональному направлению, а осуществление этого перехода для системы уравнений (I.47) будем называть шагом расщепления по меридиональному направлению. Осуществление послойного перехода по времени для системы уравнений (I.48) будем называть шагом учета вязкости и теплопроводности. С помощью циклического изменения порядка выполнения шагов расщепления можно обеспечить второй порядок аппроксимации по времени в схеме расщепления.

I.4.3 Схема на шаге расщепления по вертикальному направлению

Основная идея построения схемы состоит в том, чтобы в фиксированном узле сетки рассмотреть новую повернутую декартову систему координат, оси которой направлены вдоль векторов сопутствующего базиса сферической системы координат в данном узле сетки. В новой системе координат запишем аналог изложенной в предыдущем разделе этой главы гибридной схемы, и зададим с его помощью вычисление вектора потоков характеристических переменных через грань контрольного объема, а затем перейдем к исходной декартовой системе координат.

Схема послойного перехода по времени для системы уравнений в (I.45) имеет вид

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1}_{i,j,k} - \mathbf{u}^{n}_{i,j,k}}{\tau} = \mathbf{R}^{n+1/2}_{i,j,k} - \frac{1}{V_{j,k}}\left(S^{(r)}_{j,k+\frac{1}{2}}\,\mathbf{F}^{(r)}_{i,j,k+\frac{1}{2}} - S^{(r)}_{j,k-\frac{1}{2}}\,\mathbf{F}^{(r)}_{i,j,k-\frac{1}{2}}\right)\,. \tag{I.49}$$

В этой схеме все вектор-столбцы в правой части вычисляются для момента времени $t^{n+1/2}$ со 2-м порядком точности по времени и пространству.

Рассмотрим вычисление вектора $\mathbf{F}^{(r)}_{i,j,k+1/2}$ потоков консервативных переменных через верхнюю грань контрольного объема целого узла сетки $\mathbf{r}_{i,j,k}$. Обозначим компоненты объемной плотности импульса и компоненты гидродинамической скорости в сферической системе координат через $w_r = (\mathbf{e}_r, \mathbf{w})$, $w_\varphi = (\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{w})$, $w_\beta = (\mathbf{e}_\beta, \mathbf{w})$, $v_r = (\mathbf{e}_r, \mathbf{v})$, $v_\varphi = (\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{v})$, $v_\beta = (\mathbf{e}_\beta, \mathbf{v})$ соответственно.

Введем вектор-столбец переменных $\mathbf{q} = \big(\rho, w_r, w_\varphi, w_\beta, W\big)^T$. Обозначим через $\widehat{\boldsymbol{M}}(\varphi, \beta)$ ортогональную матрицу перехода от вектора $\mathbf{u}$ к вектору $\mathbf{q}$: $\mathbf{q} = \widehat{\boldsymbol{M}}(\varphi, \beta)\,\mathbf{u}$. Эта матрица и обратная к ней матрица $\widehat{\boldsymbol{M}}^{-1}$ заданы формулами

$$\widehat{\boldsymbol{M}}(\varphi,\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_r) & (\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_r) & (\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_r) & 0 \\ 0 & (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_\varphi) & (\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_\varphi) & (\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\varphi) & 0 \\ 0 & (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_\beta) & (\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_\beta) & (\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{\boldsymbol{M}}^{-1} = \widehat{\boldsymbol{M}}^T, \qquad \text{(I.50)}$$

в которых скалярные произведения векторов базиса декартовой системы координат на векторы сопутствующего базиса сферической системы координат выражаются через φ и β по формулам (I.43). Матрицу $\widehat{\boldsymbol{M}}(\varphi, \beta)$ в целых и полуцелых узлах сетки будем обозначать через

$$\widehat{\boldsymbol{M}}_{i,j} = \widehat{\boldsymbol{M}}\big(\varphi_i, \beta_j\big), \quad \widehat{\boldsymbol{M}}_{i\pm1/2,j} = \widehat{\boldsymbol{M}}\big(\varphi_{i\pm1/2}, \beta_j\big), \quad \widehat{\boldsymbol{M}}_{i,j\pm1/2} = \widehat{\boldsymbol{M}}\big(\varphi_i, \beta_{j\pm1/2}\big).$$

Введем вектор-столбец потоков переменных $\mathbf{q}$ в радиальном направлении, заданный формулами

$$\mathbf{P}^{(r)}(\mathbf{q}) = \widehat{\boldsymbol{M}}(\varphi,\beta)\,\mathbf{F}^{(r)}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{F}^{(r)}(\mathbf{u}) = \widehat{\boldsymbol{M}}^T(\varphi,\beta)\,\mathbf{P}^{(r)}(\mathbf{q}). \qquad \text{(I.51)}$$

Подставляя формулы (I.41), (I.50) и (I.43) в (I.51), получим выражение вектора $\mathbf{P}^{(r)}(\mathbf{q})$ через компоненты вектора $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{P}^{(r)}(\mathbf{q}) = \left(w_r\,,\ \frac{w_r^2}{\rho} + p\,,\ \frac{w_\varphi\, w_r}{\rho}\,,\ \frac{w_\beta\, w_r}{\rho}\,,\ \frac{(W+p)\, w_r}{\rho} \right)^T.$$

Обозначим матрицу Якоби вектор-функции $\mathbf{P}^{(r)}(\mathbf{q})$ через $\widehat{\boldsymbol{A}}^{(r)}(\mathbf{q}) = \dfrac{\partial\, \mathbf{P}^{(r)}(\mathbf{q})}{\partial\, \mathbf{q}}$. Отметим, что выполняется равенство

$$\mathbf{P}^{(r)}(\mathbf{q}) = \widehat{\boldsymbol{A}}^{(r)}(\mathbf{q})\,\mathbf{q}. \qquad \text{(I.52)}$$

Собственные числа матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}^{(r)}(\mathbf{q})$ обозначим через $\lambda_1 = v_r - c$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = v_r$, $\lambda_5 = v_r + c$, где $c = \sqrt{\gamma\, p/\rho}$ — скорость звука в рассматриваемой точке. Через $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(r)}(\mathbf{q})$ обозначим диагональную матрицу, на диагонали которой стоят указанные собственные числа матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}^{(r)}(\mathbf{q})$.

Обозначим через $\widehat{\boldsymbol{Q}}^{(r)}(\mathbf{q})$ матрицу, столбцы которой есть правые собственные векторы матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}^{(r)}(\mathbf{q})$, которые определены с точностью до множителя. Обратную к $\widehat{\boldsymbol{Q}}^{(r)}(\mathbf{q})$ матрицу обозначим через $\widehat{\boldsymbol{L}}^{(r)}(\mathbf{q})$. Ее строки есть левые собственные векторы матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}^{(r)}(\mathbf{q})$, которую можно представить в виде

$$\widehat{\boldsymbol{A}}^{(r)}(\mathbf{q}) = \widehat{\boldsymbol{Q}}^{(r)}(\mathbf{q})\, \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(r)}(\mathbf{q})\, \widehat{\boldsymbol{L}}^{(r)}(\mathbf{q})\,. \tag{I.53}$$

Подставляя (I.53) в (I.52), а затем подставляя результат в правое равенство в (I.51), получим представление вектора $\mathbf{F}^{(r)}(\mathbf{u})$ в виде

$$\mathbf{F}^{(r)}(\mathbf{u}) = \widehat{\boldsymbol{M}}^{T}\, \widehat{\boldsymbol{Q}}^{(r)}(\mathbf{q})\, \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(r)}(\mathbf{q})\, \widehat{\boldsymbol{L}}^{(r)}(\mathbf{q})\, \widehat{\boldsymbol{M}}\, \mathbf{u}\,. \tag{I.54}$$

Введем обозначения для значений матриц в момент времени t^n в полуцелом по высоте узле сетки $\mathbf{r}_{i,j,k+\frac12}$: $\mathbf{q}^n_{i,j,k+\frac12} = \widehat{\boldsymbol{M}}_{i,j}\, \mathbf{u}^n_{i,j,k+\frac12}$,

$$\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(r)}_{i,j,k+\frac12} = \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(r)}\Big(\mathbf{q}^n_{i,j,k+\frac12}\Big), \quad \widehat{\boldsymbol{L}}^{(r)}_{i,j,k+\frac12} = \widehat{\boldsymbol{L}}^{(r)}\Big(\mathbf{q}^n_{i,j,k+\frac12}\Big), \quad \widehat{\boldsymbol{Q}}^{(r)}_{i,j,k+\frac12} = \widehat{\boldsymbol{Q}}^{(r)}\Big(\mathbf{q}^n_{i,j,k+\frac12}\Big),$$

а также введем в целых узлах сетки $\mathbf{r}_{i,j,k}$, $\mathbf{r}_{i,j,k\pm1}$, $\mathbf{r}_{i,j,k+2}$ четыре вектор-столбца характеристических переменных по радиальному направлению, заданных формулами

$$\mathbf{H}^{(r)}_{k\pm1} = \widehat{\boldsymbol{L}}^{(r)}_{i,j,k+\frac12}\, \widehat{\boldsymbol{M}}_{i,j}\, \mathbf{u}^n_{i,j,k\pm1}\,, \quad \mathbf{H}^{(r)}_{k} = \widehat{\boldsymbol{L}}^{(r)}_{i,j,k+\frac12}\, \widehat{\boldsymbol{M}}_{i,j}\, \mathbf{u}^n_{i,j,k}\,,$$

$$\mathbf{H}^{(r)}_{k+2} = \widehat{\boldsymbol{L}}^{(r)}_{i,j,k+\frac12}\, \widehat{\boldsymbol{M}}_{i,j}\, \mathbf{u}^n_{i,j,k+2}\,.$$

Также введем вектор-столбец $\widetilde{\mathbf{H}}^{(r)} = \Big(\widetilde{H}^{(r)}_1, \widetilde{H}^{(r)}_2, \widetilde{H}^{(r)}_3, \widetilde{H}^{(r)}_4, \widetilde{H}^{(r)}_5\Big)^T$, компоненты которого вычисляются через компоненты вектор-столбцов $\mathbf{H}^{(r)}_{k}$, $\mathbf{H}^{(r)}_{k\pm1}$, $\mathbf{H}^{(r)}_{k+2}$ и через компоненты матрицы $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(r)}_{i,j,k+\frac12}$ по гибридной схеме (I.29).

Используя формулу (I.54) и рассуждения, аналогичные рассуждениям в разделе 3.3 этой главы, с помощью которых были получены равенства (I.37) и (I.38), можно показать, что формула

$$\mathbf{F}^{(r)}_{i,j,k+\frac12} = \widehat{\boldsymbol{M}}^{T}_{i,j}\, \widehat{\boldsymbol{Q}}^{(r)}_{i,j,k+\frac12}\, \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(r)}_{i,j,k+\frac12} \left(\widetilde{\mathbf{H}}^{(r)} + \frac{\tau}{2}\, \widehat{\boldsymbol{L}}^{(r)}_{i,j,k+\frac12}\, \widehat{\boldsymbol{M}}_{i,j}\, \mathbf{R}\big(\mathbf{u}^n_{i,j,k+1/2}\big)\right) \tag{I.55}$$

обеспечивает второй порядок точности по пространству и по времени при вычислении второго слагаемого в правой части схемы (I.49) в момент времени $t^{n+1/2}$. Формула (I.55) является аналогом формулы (I.38).

Рассмотрим вычисление вектор-столбца источниковых членов $\mathbf{R}_{i,j,k}^{n+1/2}$ в правой части (I.49). Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям, с помощью которых была получена формула (I.36), можно показать, что формула

$$\mathbf{R}_{i,j,k}^{n+1/2} = \mathbf{R}\big(\mathbf{u}_{i,j,k}^{n}\big) + \\ + \frac{\tau}{2}\widehat{\boldsymbol{B}}_{i,j,k}\left(\mathbf{R}\big(\mathbf{u}_{i,j,k}^{n}\big) - \frac{S_{j,k+\frac{1}{2}}^{(r)}\,\mathbf{F}^{(r)}\big(\mathbf{u}_{i,j,k+1/2}^{n}\big) - S_{j,k-\frac{1}{2}}^{(r)}\,\mathbf{F}^{(r)}\big(\mathbf{u}_{i,j,k-1/2}^{n}\big)}{V_{j,k}}\right) \qquad \text{(I.56)}$$

обеспечивает второй порядок точности по пространству и по времени при вычислении вектор-столбца $\mathbf{R}_{i,j,k}^{n+1/2}$ в правой части схемы (I.46) в момент времени $t^{n+1/2}$. В формуле (I.56) матрица $\widehat{\boldsymbol{B}} = \dfrac{\partial\,\mathbf{R}(\mathbf{u})}{\partial\,\mathbf{u}}$ и вектор-столбец $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ вычисляются в момент времени t^{n} в целом по высоте узле сетки $\mathbf{r}_{i,j,k}$, а вектор-столбцы $\mathbf{F}^{(r)}(\mathbf{u})$ вычисляются в полуцелых по высоте узлах сетки $\mathbf{r}_{i,j,k\pm\frac{1}{2}}$. Формула (I.56) является аналогом формулы (I.36).

Использование формул (I.56) и (I.55) вместе с гибридной схемой (I.29) обеспечивает второй порядок точности по пространству и по времени для схемы (I.49). Тестовые расчеты показали монотонность и хорошую точность этой схемы.

I.4.4 Схемы на шагах расщепления по горизонтальным направлениям

Схема послойного перехода по времени на шаге расщепления по зональному направлению для системы уравнений (I.46) имеет вид

$$\frac{\mathbf{u}_{i,j,k}^{n+1} - \mathbf{u}_{i,j,k}^{n}}{\tau} = -\frac{S_{k}^{(\varphi)}}{V_{j,k}}\left(\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(\varphi)} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2},j,k}^{(\varphi)}\right)\,, \qquad \text{(I.57)}$$

а на шаге расщепления по меридиональному направлению для системы уравнений в (I.47) схема имеет вид

$$\frac{\mathbf{u}_{i,j,k}^{n+1} - \mathbf{u}_{i,j,k}^{n}}{\tau} = -\frac{1}{V_{j,k}}\left(S_{j+\frac{1}{2},k}^{(\beta)}\,\mathbf{F}_{i,j+\frac{1}{2},k}^{(\beta)} - S_{j-\frac{1}{2},k}^{(\beta)}\,\mathbf{F}_{i,j-\frac{1}{2},k}^{(\beta)}\right)\,. \qquad \text{(I.58)}$$

В этих схемах все вектор-столбцы в правой части вычисляются для момента времени $t^{n+1/2}$ со 2-м порядком точности по времени и пространству.

Рассмотрим вычисление вектора $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(\varphi)}$ потоков консервативных переменных через восточную грань контрольного объема целого узла сетки $\mathbf{r}_{i,j,k}$ и вычисление вектора $\mathbf{F}_{i,j+\frac{1}{2},k}^{(\beta)}$ потоков консервативных переменных через северную

грань этого объема. Введем вектор-столбец потоков переменных $\mathbf{q} = \widehat{\boldsymbol{M}}(\varphi,\beta)\,\mathbf{u}$ в зональном направлении, заданный формулами

$$\mathbf{P}^{(\varphi)}(\mathbf{q}) = \widehat{\boldsymbol{M}}(\varphi,\beta)\,\mathbf{F}^{(\varphi)}(\mathbf{u})\,,\quad \mathbf{F}^{(\varphi)}(\mathbf{u}) = \widehat{\boldsymbol{M}}^{T}(\varphi,\beta)\,\mathbf{P}^{(\varphi)}(\mathbf{q})\,, \tag{I.59}$$

и вектор-столбец потоков переменных $\mathbf{q}$ в меридиональном направлении, заданный формулами

$$\mathbf{P}^{(\beta)}(\mathbf{q}) = \widehat{\boldsymbol{M}}(\varphi,\beta)\,\mathbf{F}^{(\beta)}(\mathbf{u})\,,\quad \mathbf{F}^{(\beta)}(\mathbf{u}) = \widehat{\boldsymbol{M}}^{T}(\varphi,\beta)\,\mathbf{P}^{(\beta)}(\mathbf{q})\,. \tag{I.60}$$

Подставляя формулы (I.41), (I.50) и (I.43) в (I.59) и (I.60), получим выражения векторов $\mathbf{P}^{(\varphi)}(\mathbf{q})$ и $\mathbf{P}^{(\beta)}(\mathbf{q})$ через компоненты вектора $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{P}^{(\varphi)}(\mathbf{q}) = \left(w_\varphi\,,\ \frac{w_r\,w_\varphi}{\rho}\,,\ \frac{w_\varphi^2}{\rho}+p\,,\ \frac{w_\beta\,w_\varphi}{\rho}\,,\ \frac{(W+p)\,w_\varphi}{\rho}\right)^T.$$

$$\mathbf{P}^{(\beta)}(\mathbf{q}) = \left(w_\beta\,,\ \frac{w_r\,w_\beta}{\rho}\,,\ \frac{w_\varphi\,w_\beta}{\rho}\,,\ \frac{w_\beta^2}{\rho}+p\,,\ \frac{(W+p)\,w_\beta}{\rho}\right)^T.$$

Обозначим через $\widehat{\boldsymbol{A}}^{(\varphi)}(\mathbf{q}) = \dfrac{\partial\,\mathbf{P}^{(\varphi)}(\mathbf{q})}{\partial\,\mathbf{q}}$ и $\widehat{\boldsymbol{A}}^{(\beta)}(\mathbf{q}) = \dfrac{\partial\,\mathbf{P}^{(\beta)}(\mathbf{q})}{\partial\,\mathbf{q}}$ матрицы Якоби вектор-функций $\mathbf{P}^{(\varphi)}(\mathbf{q})$ и $\mathbf{P}^{(\beta)}(\mathbf{q})$. Отметим, что выполняются равенства

$$\mathbf{P}^{(\varphi)}(\mathbf{q}) = \widehat{\boldsymbol{A}}^{(\varphi)}(\mathbf{q})\,\mathbf{q}\,,\qquad \mathbf{P}^{(\beta)}(\mathbf{q}) = \widehat{\boldsymbol{A}}^{(\beta)}(\mathbf{q})\,\mathbf{q}\,. \tag{I.61}$$

Собственные числа матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}^{(\varphi)}(\mathbf{q})$ обозначим через $\lambda_1^{(\varphi)} = v_\varphi - c$, $\lambda_2^{(\varphi)} = \lambda_3^{(\varphi)} = \lambda_4^{(\varphi)} = v_\varphi$, $\lambda_5^{(\varphi)} = v_\varphi + c$, где c — скорость звука в рассматриваемой точке, а собственные числа матрицы матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}^{(\beta)}(\mathbf{q})$ обозначим через $\lambda_1^{(\beta)} = v_\beta - c$, $\lambda_2^{(\beta)} = \lambda_3^{(\beta)} = \lambda_4^{(\beta)} = v_\beta$, $\lambda_5^{(\beta)} = v_\beta + c$.

Через $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(\varphi)}(\mathbf{q})$ обозначим диагональную матрицу, на диагонали которой стоят указанные собственные числа матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}^{(\varphi)}(\mathbf{q})$, а через $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(\beta)}(\mathbf{q})$ обозначим диагональную матрицу, на диагонали которой стоят указанные собственные числа матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}^{(\beta)}(\mathbf{q})$.

Обозначим через $\widehat{\boldsymbol{Q}}^{(\varphi)}(\mathbf{q})$ матрицу, столбцы которой есть правые собственные векторы матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}^{(\varphi)}(\mathbf{q})$, а через $\widehat{\boldsymbol{Q}}^{(\beta)}(\mathbf{q})$ матрицу, столбцы которой есть правые собственные векторы матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}^{(\beta)}(\mathbf{q})$. Обратную к $\widehat{\boldsymbol{Q}}^{(\varphi)}(\mathbf{q})$ матрицу обозначим через $\widehat{\boldsymbol{L}}^{(\varphi)}(\mathbf{q})$, а обратную к $\widehat{\boldsymbol{Q}}^{(\beta)}(\mathbf{q})$ матрицу обозначим через $\widehat{\boldsymbol{L}}^{(\beta)}(\mathbf{q})$. Строки этих матриц есть, соответственно, левые собственные векторы матриц $\widehat{\boldsymbol{A}}^{(\varphi)}(\mathbf{q})$ и $\widehat{\boldsymbol{A}}^{(\beta)}(\mathbf{q})$, которые можно представить в виде

$$\widehat{\boldsymbol{A}}^{(\varphi)}(\mathbf{q}) = \widehat{\boldsymbol{Q}}^{(\varphi)}(\mathbf{q})\,\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(\varphi)}(\mathbf{q})\,\widehat{\boldsymbol{L}}^{(\varphi)}(\mathbf{q})\,, \tag{I.62}$$

$$\widehat{\boldsymbol{A}}^{(\beta)}(\mathbf{q}) = \widehat{\boldsymbol{Q}}^{(\beta)}(\mathbf{q})\,\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(\beta)}(\mathbf{q})\,\widehat{\boldsymbol{L}}^{(\beta)}(\mathbf{q})\,. \tag{I.63}$$

Подставляя (I.62) в первое равенство в (I.61), а затем подставляя результат в правое равенство в (I.59), получим представление вектора $\mathbf{F}^{(\varphi)}(\mathbf{u})$ в виде

$$\mathbf{F}^{(\varphi)}(\mathbf{u}) = \widehat{\boldsymbol{M}}^{T}\,\widehat{\boldsymbol{Q}}^{(\varphi)}(\mathbf{q})\,\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(\varphi)}(\mathbf{q})\,\widehat{\boldsymbol{L}}^{(\varphi)}(\mathbf{q})\,\widehat{\boldsymbol{M}}\,\mathbf{u}\,. \tag{I.64}$$

Подставляя (I.63) во второе равенство в (I.61), а затем подставляя результат в правое равенство в (I.60), получим представление вектора $\mathbf{F}^{(\beta)}(\mathbf{u})$ в виде

$$\mathbf{F}^{(\beta)}(\mathbf{u}) = \widehat{\boldsymbol{M}}^{T}\,\widehat{\boldsymbol{Q}}^{(\beta)}(\mathbf{q})\,\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(\beta)}(\mathbf{q})\,\widehat{\boldsymbol{L}}^{(\beta)}(\mathbf{q})\,\widehat{\boldsymbol{M}}\,\mathbf{u}\,. \tag{I.65}$$

Введем обозначения для значений матриц в момент времени t^n в полуцелом по долготе узле сетки $\mathbf{r}_{i+\frac{1}{2},j,k}$: $\mathbf{q}^n_{i+\frac{1}{2},j,k} = \widehat{\boldsymbol{M}}_{i+\frac{1}{2},j}\,\mathbf{u}^n_{i+\frac{1}{2},j,k}$,

$$\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(\varphi)}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(\varphi)}\Big(\mathbf{q}^n_{i+\frac{1}{2},j,k}\Big)\,,\quad \widehat{\boldsymbol{L}}^{(\varphi)}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \widehat{\boldsymbol{L}}^{(\varphi)}\Big(\mathbf{q}^n_{i+\frac{1}{2},j,k}\Big)\,,\quad \widehat{\boldsymbol{Q}}^{(\varphi)}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \widehat{\boldsymbol{Q}}^{(\varphi)}\Big(\mathbf{q}^n_{i+\frac{1}{2},j,k}\Big)\,,$$

а также введем в целых узлах сетки $\mathbf{r}_{i,j,k}\,,\mathbf{r}_{i\pm1,j,k}\,,\mathbf{r}_{i+2,j,k}$ четыре вектор-столбца характеристических переменных по зональному направлению, заданных формулами

$$\mathbf{H}^{(\varphi)}_{i} = \widehat{\boldsymbol{L}}^{(\varphi)}_{i+\frac{1}{2},j,k}\,\widehat{\boldsymbol{M}}_{i+\frac{1}{2},j}\,\mathbf{u}^n_{i,j,k}\,,\qquad \mathbf{H}^{(\varphi)}_{i\pm1} = \widehat{\boldsymbol{L}}^{(\varphi)}_{i+\frac{1}{2},j,k}\,\widehat{\boldsymbol{M}}_{i+\frac{1}{2},j}\,\mathbf{u}^n_{i\pm1,j,k}\,,$$

$$\mathbf{H}^{(\varphi)}_{i+2} = \widehat{\boldsymbol{L}}^{(\varphi)}_{i+\frac{1}{2},j,k}\,\widehat{\boldsymbol{M}}_{i+\frac{1}{2},j}\,\mathbf{u}^n_{i+2,j,k}\,.$$

Также введем вектор-столбец $\widetilde{\mathbf{H}}^{(\varphi)} = \left(\widetilde{H}^{(\varphi)}_1, \widetilde{H}^{(\varphi)}_2, \widetilde{H}^{(\varphi)}_3, \widetilde{H}^{(\varphi)}_4, \widetilde{H}^{(\varphi)}_5\right)^T$, компоненты которого вычисляются через компоненты вектор-столбцов $\mathbf{H}^{(\varphi)}_i$, $\mathbf{H}^{(\varphi)}_{i\pm1}$, $\mathbf{H}^{(\varphi)}_{i+2}$ и через компоненты матрицы $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(\varphi)}_{i+\frac{1}{2},j,k}$ по гибридной схеме (I.29).

Используя формулу (I.64) и рассуждения, аналогичные рассуждениям в разделе 3.2 этой главы, с помощью которых были получены равенства (I.30), можно показать, что формула

$$\mathbf{F}^{(\varphi)}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \widehat{\boldsymbol{M}}^{T}_{i+\frac{1}{2},j}\,\widehat{\boldsymbol{Q}}^{(\varphi)}_{i+\frac{1}{2},j,k}\,\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(\varphi)}_{i+\frac{1}{2},j,k}\,\widetilde{\mathbf{H}}^{(\varphi)} \tag{I.66}$$

обеспечивает второй порядок точности по пространству и по времени при вычислении правой части схемы (I.57) в момент времени $t^{n+1/2}$. Формула (I.66) является аналогом формулы (I.30). Тестовые расчеты показали монотонность и хорошую точность схемы (I.57), (I.66).

Введем обозначения для значений матриц в момент времени t^n в полуцелом по широте узле сетки $\mathbf{r}_{i,j+\frac{1}{2},k}$: $\mathbf{q}^n_{i,j+\frac{1}{2},k} = \widehat{\boldsymbol{M}}_{i,j+\frac{1}{2}}\,\mathbf{u}^n_{i,j+\frac{1}{2},k}$,

$$\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(\beta)}_{i,j+\frac{1}{2},k} = \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(\beta)}\big(\mathbf{q}^n_{i,j+\frac{1}{2},k}\big)\,, \quad \widehat{\boldsymbol{L}}^{(\beta)}_{i,j+\frac{1}{2},k} = \widehat{\boldsymbol{L}}^{(\beta)}\big(\mathbf{q}^n_{i,j+\frac{1}{2},k}\big)\,, \quad \widehat{\boldsymbol{Q}}^{(\beta)}_{i,j+\frac{1}{2},k} = \widehat{\boldsymbol{Q}}^{(\beta)}\big(\mathbf{q}^n_{i,j+\frac{1}{2},k}\big)\,,$$

а также введем в целых узлах сетки $\mathbf{r}_{i,j,k}\,, \mathbf{r}_{i,j\pm1,k}\,, \mathbf{r}_{i,j+2,k}$ четыре вектор-столбца характеристических переменных по меридиональному направлению, заданных формулами

$$\mathbf{H}^{(\beta)}_{j} = \widehat{\boldsymbol{L}}^{(\beta)}_{i,j+\frac{1}{2},k}\,\widehat{\boldsymbol{M}}_{i,j+\frac{1}{2}}\,\mathbf{u}^n_{i,j,k}\ , \qquad \mathbf{H}^{(\beta)}_{j\pm1} = \widehat{\boldsymbol{L}}^{(\beta)}_{i,j+\frac{1}{2},k}\,\widehat{\boldsymbol{M}}_{i,j+\frac{1}{2}}\,\mathbf{u}^n_{i,j\pm1,k}\ ,$$

$$\mathbf{H}^{(\beta)}_{j+2} = \widehat{\boldsymbol{L}}^{(\beta)}_{i,j+\frac{1}{2},k}\,\widehat{\boldsymbol{M}}_{i,j+\frac{1}{2}}\,\mathbf{u}^n_{i,j+2,k}\ .$$

Также введем вектор-столбец $\widetilde{\mathbf{H}}^{(\beta)} = \left(\widetilde{H}^{(\beta)}_1, \widetilde{H}^{(\beta)}_2, \widetilde{H}^{(\beta)}_3, \widetilde{H}^{(\beta)}_4, \widetilde{H}^{(\beta)}_5\right)^T$, компоненты которого вычисляются через компоненты вектор-столбцов $\mathbf{H}^{(\beta)}_{j}$, $\mathbf{H}^{(\beta)}_{j\pm1}$, $\mathbf{H}^{(\beta)}_{j+2}$ и через компоненты матрицы $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(\beta)}_{i,j+\frac{1}{2},k}$ по гибридной схеме (I.29).

Используя формулу (I.65) и рассуждения, аналогичные рассуждениям в разделе 3.2 этой главы, с помощью которых были получены равенства (I.30), можно показать, что формула

$$\mathbf{F}^{(\beta)}_{i,j+\frac{1}{2},k} = \widehat{\boldsymbol{M}}^T_{i,j+\frac{1}{2}}\,\widehat{\boldsymbol{Q}}^{(\beta)}_{i,j+\frac{1}{2},k}\,\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(\beta)}_{i+\frac{1}{2},j,k}\,\widetilde{\mathbf{H}}^{(\beta)} \tag{I.67}$$

обеспечивает второй порядок точности по пространству и по времени при вычислении правой части схемы (I.58) в момент времени $t^{n+1/2}$. Формула (I.67) также является аналогом формулы (I.30). Тестовые расчеты показали монотонность и хорошую точность схемы (I.58), (I.67).

I.4.5 Учет рельефа поверхности

Для учета рельефа поверхности планет в моделях применялся следующий метод. Нижняя граница области моделирования считалась ступенчатой поверхностью. Использовались два варианта ее задания. В первом варианте граница поверхности планеты проходит через границы контрольных объемов целых узлов сетки. При этом высота реального рельефа поверхности в целом узле сетки по широте и долготе заменялась высотой ближайшего к этой высоте полуцелого узла сетки по высоте. Во втором варианте вертикальные участки границы поверхности планеты проходят через вертикальные границы контрольных объемов

целых узлов сетки, а горизонтальные участки границы проходят через целые узлы сетки по высоте. При этом высота реального рельефа поверхности в целом узле сетки по широте и долготе заменялась высотой ближайшего к этой высоте целого узла сетки по высоте. При втором способе контрольные объемы лежащих на поверхности планеты целых узлов сетки являются верхними половинами обычных контрольных объемов. На поверхности планеты гидродинамическая скорость считалась равной нулю.

Оба способа задания рельефа дали практически одинаковые результаты при моделировании. Первый способ немного проще при программной реализации. Описанные способы позволяют учесть влияние рельефа на крупномасштабные движения атмосферного газа, а также учесть генерацию различных волн в атмосфере при обтекании потоками атмосферного газа горных систем без использования сгущения пространственной сетки по горизонту вблизи поверхности. Эти способы не позволяют детально воспроизводить течение у поверхности, поскольку для этого потребуется уменьшить шаг сетки по горизонту до значений, близких к шагу сетки по высоте, который в наших моделях примерно в 250 раз меньше, чем шаг сетки по горизонту. Такое уменьшение шага сетки по горизонту в данный момент не приемлемо с точки зрения вычислительных возможностей современных компьютеров.

I.5 Система уравнений динамики смеси воздуха, водяного пара и аэрозолей из воды и льда при наличии фазовых переходов, а также схема её численного интегрирования

В модели общей циркуляции атмосферы Земли, а также в региональной модели динамики атмосферы Земли атмосферный газ рассматривается как смесь воздуха и водяного пара, в которой могут присутствовать аэрозоли двух видов: первый состоит из микрокапель воды, а второй — из микрочастиц льда. Принято упрощающее предположение, что микрокапли воды и микрочастицы льда являются сферами радиусов $r_{\text{вод}} = 0.1\,\text{мм}$ и $r_{\text{л}} = 0.03\,\text{мм}$ соответственно, движущимися относительно смеси воздуха и водяного пара со скоростями осаждения во внешнем силовом поле $\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}$ и $\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}}$, определяемыми по формуле Стокса с поправкой Каннингема. Выбранные размеры частиц аэрозолей соответствуют реальным средним размерам частиц в облаках. Температуру смеси и частиц аэрозолей считаем одинаковой и обозначим ее через T. Считаем, что аэрозоль из капель воды может присутствовать только при условиях насыщенности водяного пара и $T \geq T_0 = 273.15\,\text{K}$, а аэрозоль из частиц льда может присутствовать

только при условиях насыщенности водяного пара и $T \le T_0$. При $T = T_0$ температура среды не может увеличиться, пока не расплавятся все частицы льда, и не может уменьшиться, пока не замерзнут все капли воды. Зависимость плотности насыщенного пара $\rho_{\text{п}}^{max}$ от температуры задается уравнением

$$\rho_{\text{п}}^{max}(T) = \Big(T/T_0\Big)^a \exp\Big(b\,(T-T_0)/(T\,T_0)\Big)\; p_0^{max}/(R_{\text{п}}\,T)\;, \qquad \text{(I.68)}$$

где p_0^{max} — давление насыщенного пара при $T = T_0$, а параметры a и b определяются по формулам:

$$\text{при } T \ge T_0 \quad a = \big(3/2 - C_{\text{вод}}/R_{\text{п}}\big)\,, \quad b = \Big(\,q^0_{\text{исп}} - T_0\big(3\,R_{\text{п}}/2 - C_{\text{вод}}\big)\Big)\,/R_{\text{п}}\;,$$

$$\text{при } T < T_0 \quad a = \big(3/2 - C_{\text{л}}/R_{\text{п}}\big)\,, \quad b = \Big(\,q^0_{\text{исп}} + q_{\text{пл}} - T_0\big(3\,R_{\text{п}}/2 - C_{\text{л}}\big)\Big)\,/R_{\text{п}}\;,$$

где $R_{\text{п}}$ — газовая постоянная водяного пара, $q^0_{\text{исп}}$ — удельная теплота испарения воды при $T = T_0$, $q_{\text{пл}}$ — удельная теплота плавления льда при $T = T_0$, а $C_{\text{вод}}$ и $C_{\text{л}}$ — удельные теплоемкости воды и льда, которые считаются постоянными. Зависимость, заданная уравнением (I.68), хорошо согласуется с экспериментальной зависимостью плотности насыщенного пара от температуры.

В модели в каждом узле расчетной сетки вычисляются следующие переменные: T — температура, $\rho_{\text{воз}}$ и $\rho_{\text{п}}$ — соответственно плотности воздуха и водяного пара, а также $\mathbf{v}$ — гидродинамическая скорость смеси, $\rho_{\text{вод}}$ и $\rho_{\text{л}}$ — общая масса в единице объема соответственно водяных капель и микрочастиц льда.

В систему уравнений модели входят следующие уравнения: уравнение неразрывности для воздуха и уравнение неразрывности для полного содержания воды во всех фазовых состояниях, уравнение для объемной плотности импульса смеси воздуха и водяного пара, уравнения для объемной плотности импульса водяных капель и микрочастиц льда, а также уравнение для суммы внутренней и кинетической энергии единицы объема среды. Уравнения неразрывности записываются в виде

$$\frac{\partial\,\rho_{\text{воз}}}{\partial\,t} + \operatorname{div}(\,\rho_{\text{воз}}\,\mathbf{v}) = 0\;, \qquad \text{(I.69)}$$

$$\frac{\partial\,(\,\rho_{\text{п}} + \rho_{\text{вод}} + \rho_{\text{л}})}{\partial\,t} + \operatorname{div}\Big(\,\rho_{\text{п}}\,\mathbf{v} + \rho_{\text{вод}}\,\big(\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}\big) + \rho_{\text{л}}\,\big(\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}}\big)\Big) = 0\;. \qquad \text{(I.70)}$$

Уравнение для объемной плотности импульса смеси воздуха и водяного пара в консервативной форме записывается в виде

$$\frac{\partial\,(\,\rho_{\text{см}}\,\mathbf{v})}{\partial\,t} + \operatorname{div}(\,\rho_{\text{см}}\,\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}) = -\nabla p + \operatorname{div}\widehat{\boldsymbol{\mathcal{T}}} + \rho_{\text{см}}\,\mathbf{g} + \rho_{\text{вод}}\,K_{\text{вод}}\,\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}} + \rho_{\text{л}}\,K_{\text{л}}\,\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}}\;, \qquad \text{(I.71)}$$

где обозначено: $\rho_{\text{см}} = \rho_{\text{воз}} + \rho_{\text{п}}$, $\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}$ — тензорное произведение вектора $\mathbf{v}$ на себя, $p = (\rho_{\text{воз}}\,R_{\text{воз}} + \rho_{\text{п}}\,R_{\text{п}})\;T$ — давление смеси, $R_{\text{воз}}$ — газовая постоянная воз-

духа, $\widehat{\boldsymbol{\tau}}$ — тензор вязких напряжений, который задан по описанным в разделе I.2 формулам, а $\mathbf{g}$ — ускорение внешних сил, которое складывается из ускорений силы тяжести, силы Кориолиса и центробежной силы. В нашей модели учитывается тот факт, что поверхность Земли не является сферической, и учитывается несферичность поля тяготения, потенциал которого задается по формуле (I.6).

Последние два слагаемых в правой части (I.71) учитывают силы сопротивления движению капель воды и микрочастиц льда со скоростями осаждения $\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}$ и $\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}}$ в атмосферном газе. Эти силы определяются по формуле Стокса с поправкой Каннингема [*Райст, 1987*], что приводит к следующим формулам для коэффициентов $K_{\text{вод}}$ и $K_{\text{л}}$:

$$K_{\text{вод}} = \frac{9\,\mu}{2\,\widetilde{\rho}_{\text{вод}}\,r^2_{\text{вод}}\,C_{\text{вод}}}\ , \quad C_{\text{вод}} = 1 + \frac{l}{r_{\text{вод}}}\left(1{,}257 + 0{,}4\,\exp\Big(-1{,}1\frac{r_{\text{вод}}}{l}\Big)\right)\ ,$$

$$K_{\text{л}} = \frac{9\,\mu}{2\,\widetilde{\rho}_{\text{л}}\,r^2_{\text{л}}\,C_{\text{л}}}\ , \quad C_{\text{л}} = 1 + \frac{l}{r_{\text{л}}}\left(1{,}257 + 0{,}4\,\exp\Big(-1{,}1\frac{r_{\text{л}}}{l}\Big)\right)\ ,$$

где μ — динамический коэффициент молекулярной вязкости атмосферного газа, l — длина свободного пробега в атмосферном газе, а $\widetilde{\rho}_{\text{вод}}$ и $\widetilde{\rho}_{\text{л}}$ — плотности воды и льда как веществ.

Уравнения для объемной плотности импульса водяных капель и микрочастиц льда в консервативной форме записываются в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\rho_{\text{вод}}\big(\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}\big)\right)}{\partial\,t} + \operatorname{div}\Big(\rho_{\text{вод}}\left(\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}\right)\otimes\left(\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}\right)\Big) = \\ = \rho_{\text{вод}}\left(\mathbf{g} - K_{\text{вод}}\,\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}\right)\ ,\end{aligned} \tag{I.72}$$

$$\frac{\partial\left(\rho_{\text{л}}(\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}})\right)}{\partial\,t} + \operatorname{div}\Big(\rho_{\text{л}}\left(\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}}\right)\otimes\left(\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}}\right)\Big) = \rho_{\text{л}}\left(\mathbf{g} - K_{\text{л}}\,\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}}\right)\ . \tag{I.73}$$

Сумма внутренней и кинетической энергии единицы объема смеси атмосферного газа с аэрозолями из микрокапель воды и из микрочастиц льда, которую обозначим через E, определяется с учетом скрытой теплоты фазовых переходов водяного пара по формулам

$$\left.\begin{aligned} E \;&=\; E_{\text{см}} + E_{\text{вод}} + E_{\text{л}}\ , \qquad E_{\text{л}} = \rho_{\text{л}}\left(\,(\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}})^2/2 + C_{\text{л}}\,T\,\right)\ , \\ E_{\text{вод}} \;&=\; \rho_{\text{вод}}\left(\,(\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}})^2/2 + C_{\text{вод}}\,(T-T_0) + q_{\text{пл}} + C_{\text{л}}\,T_0\,\right)\ , \\ E_{\text{см}} \;&=\; \rho_{\text{см}}\,\mathbf{v}^2/2 \,+\, 3\,p/2 + \rho_{\text{п}}\left(\,q^0_{\text{исп}} \,+\, q_{\text{пл}} \,+\, (C_{\text{л}}\,T_0 \,-\, 3\,R_{\text{п}}/2)\,T_0\right)\ , \end{aligned}\right\} \tag{I.74}$$

в которых через $E_{\text{см}}$, $E_{\text{вод}}$ и $E_{\text{л}}$ обозначены соответственно суммы внутренней и кинетической энергии единицы объема атмосферного газа, аэрозоля из капель

воды и аэрозоля из частиц льда. Уравнение для суммы внутренней и кинетической энергии единицы объема среды записывается в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t} \,+\, \mathrm{div}\Big(\big(E_{\text{см}}+p\big)\mathbf{v} + E_{\text{вод}}\,\big(\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}\big) + E_{\text{л}}\,\big(\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}}\big)\Big) = \\ = \,\big(\rho_{\text{см}}+\rho_{\text{вод}}+\rho_{\text{л}}\big)\big(\mathbf{v},\mathbf{g}\big) + \rho_{\text{вод}}\big(\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}\,,\mathbf{g}-K_{\text{вод}}\,\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}\big) + \\ +\,\rho_{\text{л}}\big(\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}}\,,\mathbf{g}-K_{\text{л}}\,\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}}\big) \,+\, \mathrm{div}(\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{T}}}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{j}\,)+Q\,.\end{aligned} \tag{I.75}$$

Кроме того, в уравнении (I.75) используются обозначения: $\mathbf{j}$ — вектор потока тепла, который задан по формулам, описанным разделе I.2 этой главы, Q — скорость выделения–поглощения энергии в единице объема за счет поглощения–испускания собственного излучения атмосферы и солнечного излучения.

Температура T и плотности $\rho_{\text{п}}$, $\rho_{\text{вод}}$ и $\rho_{\text{л}}$ определяются значениями $\rho_{\text{воз}}$, суммы $\rho_{\text{п}}+\rho_{\text{вод}}+\rho_{\text{л}}$ и объемной плотности внутренней энергии среды

$$W \,=\, E \,-\, \big(\,\rho_{\text{см}}\,\mathbf{v}^2 \,+\, \rho_{\text{вод}}\,(\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}})^2 \,+\, \rho_{\text{л}}\,(\mathbf{v}+\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}})^2\,\big)\,/2$$

при помощи четырех условий: $\rho_{\text{п}}\le\rho^{max}_{\text{п}}(T)$; $\rho_{\text{п}}=\rho^{max}_{\text{п}}(T)$ при $\rho_{\text{вод}}+\rho_{\text{л}}>0$; $\rho_{\text{вод}}=0$ при $T<T_0$; $\rho_{\text{л}}=0$ при $T>T_0$.

Система уравнений (I.69)–(I.75) численно решалась по следующей схеме. Послойный переход по времени осуществлялся в два этапа. На первом этапе рассчитывались потоки через грани контрольных объемов узлов сетки массы воздуха и массы водяного пара, потоки импульса смеси воздуха и водяного пара и потоки суммы внутренней и кинетической энергии этой смеси, а также потоки массы микрочастиц из воды и льда, потоки их импульса и потоки их сумм внутренней и кинетической энергии в предположении, что нет фазовых переходов воды между паром и аэрозольными частицами. Затем в контрольных объемах узлов сетки на новом временном слое вычислялись масса воздуха и масса воды во всех фазовых состояниях, а также импульс и сумма внутренней и кинетической энергии воздуха, пара и частиц аэрозолей. На втором этапе в контрольных объемах узлов сетки вычислялась сначала кинетическая энергия, а затем внутренняя энергия. После этого при помощи уравнения состояния (I.74) определялись температура и распределение воды между фазовыми состояниями, то есть на этом этапе учитывались фазовые переходы воды.

На первом этапе уравнение (I.70) заменялось на три уравнения: на уравнение неразрывности для водяного пара и на два уравнения переноса частиц аэрозолей:

$$\frac{\partial\,\rho_{\text{п}}}{\partial\,t}+\mathrm{div}(\,\rho_{\text{п}}\,\mathbf{v}\,)\,=\,0\,, \tag{I.76}$$

$$\frac{\partial\,\rho_{\text{вод}}}{\partial\,t} + \operatorname{div}\Big(\,\rho_{\text{вод}}\,\big(\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}\big)\,\Big) \;=\; 0\;, \tag{I.77}$$

$$\frac{\partial\,\rho_{\text{л}}}{\partial\,t} + \operatorname{div}\Big(\,\rho_{\text{л}}\,\big(\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}}\big)\,\Big) \;=\; 0\;. \tag{I.78}$$

Уравнение (I.75) на первом этапе также заменялось на три уравнения: на уравнение для суммы внутренней и кинетической энергии смеси воздуха и водяного пара и на уравнения для сумм внутренней и кинетической энергии микрокапель воды и микрочастиц льда:

$$\frac{\partial\,E_{\text{см}}}{\partial\,t} \;+\; \operatorname{div}\Big(\big(E_{\text{см}} + p\big)\mathbf{v}\Big) = \rho_{\text{см}}\big(\mathbf{v}\,,\,\mathbf{g}\big) \;+ \operatorname{div}(\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{T}}}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{j}\,) + Q\;, \tag{I.79}$$

$$\frac{\partial\,E_{\text{вод}}}{\partial\,t} \;+\; \operatorname{div}\Big(E_{\text{вод}}\,\big(\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}\big)\Big) = \rho_{\text{вод}}\big(\mathbf{v}\,,\mathbf{g}\,\big) + \rho_{\text{вод}}\big(\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}\,,\mathbf{g} - K_{\text{вод}}\,\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}\big)\;, \tag{I.80}$$

$$\frac{\partial\,E_{\text{л}}}{\partial\,t} \;+\; \operatorname{div}\Big(E_{\text{л}}\,\big(\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}}\big)\Big) = \rho_{\text{л}}\big(\mathbf{v}\,,\mathbf{g}\,\big) + \rho_{\text{л}}\big(\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}}\,,\mathbf{g} - K_{\text{л}}\,\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}}\big)\;. \tag{I.81}$$

На первом этапе для трех систем уравнений, а именно для системы (I.77), (I.72) и (I.80), для системы (I.78), (I.71) и (I.81) и для системы (I.69), (I.75), (I.71) и (I.79), послойный переход осуществлялся независимо друг от друга. Каждая система уравнений записывалась в виде векторного уравнения в консервативной форме аналогично уравнению (I.10). Затем для этих уравнений использовалась явная схема расщепления в сферических координатах и явная гибридная схема на каждом шаге расщепления, описанные в разделе I.4 данной главы.

Описанный здесь подход также применим к случаю, когда рассматривается наличие в воздухе аэрозольных частиц из воды и льда разных размеров и учитываются процессы испарения-конденсации и коагуляции аэрозольных частиц. Послойный переход в этом случае также можно осуществлять в два этапа. На первом этапе, который условно можно назвать конвективным, учитывается только движение смеси воздуха, водяного пара и аэрозольных частиц через границы контрольных объемов узлов сетки, а на втором этапе учитываются только процессы испарения-конденсации и коагуляции аэрозольных частиц. Эта схема послойного перехода использует идею расщепления по физическим процессам.

I.6 Упрощенное описание радиационного нагрева атмосферы в релаксационном приближении

Как отмечено в разделе I.1 данной главы, расчеты поля излучения в атмосфере в рамках полного физического рассмотрения этой задачи требует очень больших вычислительных затрат. По этой причине такие расчеты не могут применяться в моделях общей циркуляции атмосфер на данном этапе и в ближайшем

будущем. Главной причиной больших вычислительных затрат при вышеуказанных расчетах является очень быстрое изменение на 1–3 порядка коэффициента молекулярного поглощения атмосферного газа при изменении частоты излучения при давлении меньше 0.2 атм. Это приводит к тому, что при расчете поля излучения в ИК области спектра необходимо иметь разрешение по частоте не менее 0.002 $см^{-1}$. Вследствие этого для расчета поля излучения в интервале частот ИК диапазона от 100 до 20000 $см^{-1}$ необходимо проводить расчеты поля излучения почти в $2 \cdot 10^7$ спектральных каналах. Эти расчеты требуют очень большого объема вычислений и осуществляются только при проведении эталонных расчетов поля излучения. По этой причине в моделях общей циркуляции планетных атмосфер используются различные упрощенные методы расчета потоков излучения.

Одним из таких методов является расчет мощности нагрева-охлаждения атмосферного газа в единице объема за счет поглощения/испускания электромагнитного излучения в рамках релаксационного приближения. Это приближение заключается в том, что указанная мощность считается прямо пропорциональной отклонению температуры атмосферного газа от специально подобранной релаксационной температуры $T_{\text{рел}}$. Эта мощность вычисляется по формуле

$$Q(t,h,\varphi,\beta) \;=\; \frac{3}{2}\,\rho\,R_{\text{атм}}\,\frac{\Big(T_{\text{рел}}(t,h,\varphi,\beta) - T(t,h,\varphi,\beta)\Big)}{\tau_{\text{рел}}(h)}\,, \qquad \text{(I.82)}$$

где t, h, φ, β – время, высота, долгота и широта соответственно, $\tau_{\text{рел}}(h)$ – зависящее только от высоты время релаксации. Релаксационная температура $T_{\text{рел}}(t,h,\varphi,\beta)$ зависит от времени, высоты, долготы и широты. Она вместе с временем релаксации подбирается так, чтобы максимально приблизить значения мощности нагрева/охлаждения в единице объема Q к имеющимся экспериментальным данным и воспроизвести основные качественные закономерности в зависимости Q от времени, высоты, долготы и широты.

I.7 Программная реализация моделей на графических процессорах

Графические процессоры (GPU), также, как и центральные процессоры (CPU), являются архитектурами, на которых можно проводить параллельные вычисления. В 2007 году компания NVIDIA выпустила технологию CUDA — программно–аппаратную архитектуру для вычислений на графических процессорах. Для реализации алгоритмов, выполняемых на графических процессорах NVIDIA, используется специальный упрощенный язык программирования СИ. С конца 2009

года компиляторы языка Fortran фирмы Portland Group (начиная с версии 9.4) также поддерживают технологию CUDA.

Технология CUDA дает возможность организовывать сложные параллельные вычисления на графическом ускорителе. Быстродействие графических ускорителей последнего поколения, использующих чип Kepler GK 110, при численном моделировании газодинамических процессов и использовании явных схем можно сравнить с быстродействием сервера или кластера, содержащих от 64 до 128 многоядерных процессоров последнего поколения. В настоящее время по соотношению цена/производительность GPU являются оптимальной параллельной архитектурой с общей памятью для многих задач численного моделирования. Однако не для всех задач численного моделирования может быть получен большой прирост быстродействия при их реализации на GPU. Это обусловлено архитектурой GPU, которую рассмотрим на примере чипа Kepler GK 110.

Этот чип в разных изделиях имеет от 14 до 16 мультипроцессоров. Каждый мультипроцессор состоит из 192 скалярных 32-битных вычислительных ядер для вычислений с одинарной точностью, 64 скалярных 64-битных вычислительных ядер для вычислений с двойной точностью, 48 вычислителей встроенных функций и 48 планировщиков заданий. Каждое ядро мультипроцессора имеет небольшую по объему регистровую память: не более 256 регистров на одну вычислительную нить. Каждый мультипроцессор имеет разделяемую (shared) память размером 64 Кбайт, доступ к которой имеют все ядра мультипроцессора. Также чип имеет общую память (DRAM) объемом 6 Гбайт. Обращения к общей памяти мультипроцессоры осуществляют параллельно порциями по 48 нитей на каждый мультипроцессор. Общая память (DRAM) поделена на участки размером 1 Кбайт. Из одного участка 48 чисел одинарной точности могут быть считаны мультипроцессором за одно обращение, и в разные адреса одного участка 48 чисел одинарной точности могут быть записаны мультипроцессором за одно обращение. Если разные мультипроцессоры одновременно обращаются к разным участкам общей памяти, то эти обращения происходят параллельно (coalescing). Чип имеет также константную память объемом 64 Кбайт, доступную одновременно всем мультипроцессорам.

Разные виды памяти GPU отличаются быстродействием. Самой медленной является общая память. Доступ к ней осуществляется за 100–200 тактов. Самые быстрыми видами памяти являются регистровая, константная и разделяемая. Доступ к этим видам памяти осуществляется примерно за 2–4 такта. Есть еще один вид памяти — локальная память. Эта память выделяется из общей памяти

и используется в случае, если вычислительным нитям не хватает регистровой памяти. Также, как и общая память, локальная память является самой медленной. Исходя из этого, наибольшего быстродействия достигают алгоритмы, в которых на одно обращение к общей памяти приходится достаточно много вычислений. Кроме того, для наибольшего быстродействия необходимо, чтобы число регистровых переменных, используемых одной вычислительной нитью, не превышало число доступных регистров на одну нить. В этом случае не используется медленная локальная память.

Программа для параллельных вычислений на GPU имеет следующий вид. Вычисления разделяются на большое число параллельно выполняемых нитей, причем все нити выполняют одинаковый набор инструкций, но каждая нить обрабатывает свои данные. Нити объединяются в блоки. Каждый блок нитей выполняется на одном мультипроцессоре видеокарты. Код нити записывается в CUDA–функции (ее называют также CUDA–ядром). Число блоков нитей и число нитей в блоке указывается при вызове CUDA–функции. Нити в блоке объединяются в порции (порцию называют warp). Для чипов GK 104 и GK 110 один warp содержит 192 нити. Крайне важным для оптимизации работы с общей памятью видеокарты является использование возможностей GPU объединять несколько запросов к общей памяти в один (coalescing). В противном случае они выполняются последовательно, что очень сильно замедляет работу программы. Правильное использование упомянутой выше возможности позволяет получить максимальное быстродействие при работе с общей памятью.

Для реализации моделей на GPU с использованием технологии CUDA и описанной в этой главе явной схемы расщепления были созданы три CUDA–функции, каждая из которых соответствует одному из трех шагов расщепления по пространственным направлениям в схеме (I.45)–(I.48), а также были созданы три CUDA–функции, которые вычисляют приращения консервативных переменных за счет потоков этих переменных по разным пространственным направлениям, обусловленных вязкостью и теплопроводностью. Последовательный вызов этих последних трех CUDA–функций обеспечивает выполнение четвертого шага расщепления (I.48), во время которого учитываются эффекты вязкости и теплопроводности. Для хранения физических переменных и их приращений были введены трехмерные массивы, хранящиеся в глобальной памяти GPU. Первое измерение в этих массивах по долготе, второе по широте, а третье по высоте.

При выполнении CUDA–функции, соответствующей шагу расщепления по вертикальному направлению, каждая вычислительная нить совершает проход

по высоте и считывает необходимые данные из общей памяти GPU в регистровые переменные, а затем вычисляет потоки консервативных переменных в вертикальном направлении по формулам (I.55) и источниковые члены по формулам (I.56), а также новые значения консервативных переменных для вертикального столба узлов сетки над заданной точкой поверхности планеты. Все нити для узлов сетки с одинаковой широтой объединены в один блок, то есть нумерация нитей в блоке одномерная. Блоки занумерованы по широте, то есть их нумерация также одномерная (см. рис. I.2). Их число равно размеру сетки по широте. Число нитей в каждом блоке равно размеру сетки в зональном направлении, причем нити не обмениваются данными между собой. При этом используется только общая память GPU и регистровая память мультипроцессора, но не используется разделяемая память мультипроцессора.

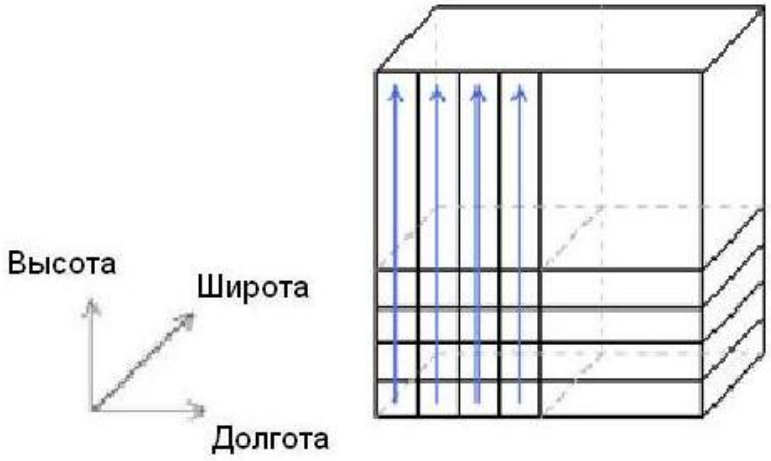

Рис. I.2. *Проход нитей при выполнении CUDA–функции, соответствующей шагу расщепления по вертикальному направлению.*

При выполнении CUDA–функции, соответствующей шагу расщепления по зональному направлению, вычислительные нити и их разделение на блоки организованы также, как и для CUDA–функции, соответствующей шагу расщепления по вертикальному направлению. При этом каждая вычислительная нить совершает проход по высоте и на каждом шаге прохода считывает необходимые данные из общей памяти GPU в элементы массивов в разделяемой памяти мультипроцессора, а затем нити одного блока вычисляют потоки консервативных переменных в зональном направлении по формулам (I.66) и новые значения консервативных переменных для узлов сетки на заданных высоте и широте и записывают эти значения в массивы в общей памяти GPU.

При выполнении CUDA–функции, соответствующей шагу расщепления по меридиональному направлению, каждая вычислительная нить совершает про-

ход по широте с юга на север через узлы сетки, расположенные на заданной высоте и долготе, и считывает необходимые данные из общей памяти GPU в регистровые переменные, а затем вычисляет потоки консервативных переменных в меридиональном направлении по формулам (I.67), а после этого вычисляет новые значения консервативных переменных в указанных узлах сетки. Все нити для узлов сетки с одинаковой высотой объединены в один блок, то есть нумерация нитей в блоке одномерная. Блоки занумерованы по высоте, то есть их нумерация также одномерная. Их число равно размеру сетки по высоте. Число нитей в каждом блоке равно размеру сетки в зональном направлении, причем нити не обмениваются данными между собой. При этом используется только общая память GPU и регистровая память мультипроцессора, но не используется разделяемая память мультипроцессора.

При описанной выше организации работы CUDA–функций с общей памятью GPU выполняются условия оптимизации, обеспечивающие параллельный доступ нитей к общей памяти GPU (coalescing).

CUDA–функции, которые вычисляют приращения консервативных переменных за счет обусловленных вязкостью и теплопроводностью потоков этих переменных по трем пространственным направлениям, организованы аналогично трем описанным выше CUDA–функциям. Каждая CUDA–функция вычисляет потоки физических переменных в своем направлении и приращения физических переменных за счет этих потоков, а затем прибавляет рассчитанные приращения к приращениям физических переменных за счет потоков, вычисленным предыдущей CUDA–функцией в другом направлении.

I.8 Заключение главы I

В данной главе изложена общая методика построения моделей общей циркуляции планетных атмосфер, основанных на численном интегрировании уравнений газовой динамики. Также изложены новые варианты явной гибридной разностной схемы для численного решения системы уравнений газовой динамики на регулярных 3-мерных пространственных сетках в декартовых и в сферических координатах с учетом и без учета источниковых членов, содержащих ускорение внешних массовых сил. В этой схеме в качестве рабочих переменных используются компоненты плотности импульса в декартовых координатах. Эта схема является консервативной, монотонной и устойчивой при выполнении условия Куранта. Она обладает хорошей точностью и позволяет вести безаварийные расчеты без использования сглаживающих фильтров сколь угодно долго по времени. Эта схема хорошо себя зарекомендовала при расчетах динамики сложных

трехмерных течений сжимаемого газа [*Мингалев и др., 2010*] и позволяет очень эффективно использовать параллельные вычисления на графических процессорах. Она является модификацией явной монотонной схемы для решения системы уравнений газовой динамики на регулярной пространственной сетке, изложенной в работах [*Опарин, 2000; Белоцерковский и др., 2003*]. Изложенный в данной главе вариант разностной схемы, в котором учитываются источниковые члены, содержащих ускорение внешних массовых сил, обеспечивает отсутствие нефизического разогрева или выхолаживания атмосферы при проведении расчетов на большом промежутке времени.

Кроме того, в данной главе изложена система уравнений, предназначенная для описания динамики смеси воздуха, водяного пара и аэрозолей из микрокапель воды и микрочастиц льда с учетом фазовых переходов между различными состояниями воды, а также изложена методика численного интегрирования этой системы, использующая изложенную в этой главе явную гибридную схему.

Также в данной главе изложены основные моменты программной реализации рассматриваемых моделей общей циркуляции планетных атмосфер на графических процессорах последних моделей с использованием технологии CUDA.

Глава II.
Численное моделирование общей циркуляции атмосферы Венеры с учетом рельефа поверхности

II.1 Введение главы II

Данная глава посвящена изучению физических механизмов, которые формируют такие особенности циркуляции атмосферы Венеры, как зональная суперротация, наличие в каждой полярной области на высотах облачного слоя и над ним от одного до трех вихрей с нисходящим воронкообразным течением в центре вихря, понижение высоты верхней границы облачного слоя в районе полюсов, а также посвящена изучению влияния на общую циркуляцию атмосферы Венеры рельефа поверхности и влияния пространственного распределения мощности нагрева–охлаждения атмосферного газа излучением. Для расчета нагрева–охлаждения атмосферы за счет поглощения–испускания электромагнитного излучения использовалось релаксационное приближение. В данной главе представлены результаты моделирования, полученные с учетом рельефа поверхности Венеры. Цифровая карта рельефа поверхности Венеры с высоким разрешением [*Lazarev, Rodionova, 2011*] была предоставлена Е. Н. Лазаревым (Астрономический институт МГУ им. П. К. Штернберга). Эта карта приведена на рис. II.1.

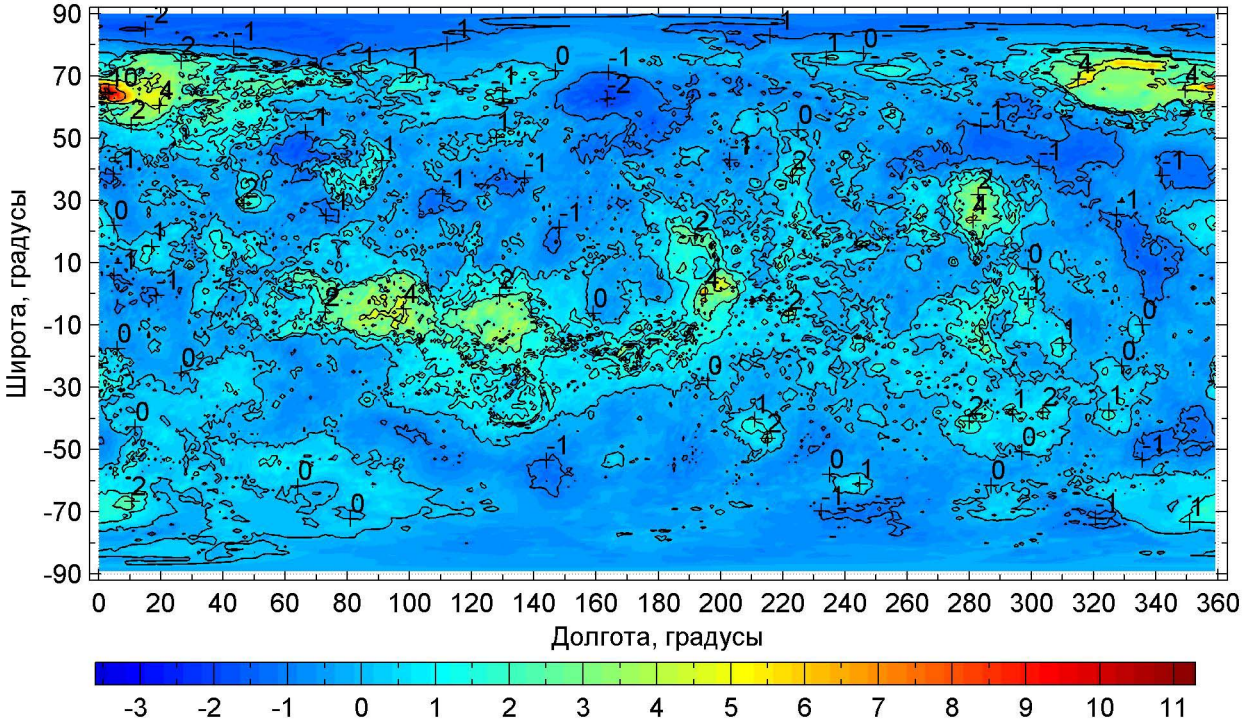

Рис. II.1. *Карта рельефа поверхности Венеры (км).*

Важной особенностью атмосферы Венеры является наличие плотного облачного слоя в интервале высот 45–72 км. Наблюдения показали, что верхняя грани-

ца облачного слоя на экваториальных и средних широтах находится на высотах 70–72 км, а в полярных областях эта граница находится на высотах 60–62 км [*Zasova и др., 2007*]. Основными источниками информации о циркуляции атмосферы Венеры являются наблюдения верхней границы облачного слоя в ультрафиолетовом, видимом и ближнем ИК диапазонах, а также наблюдения на ночной стороне в ИК диапазоне свечений молекулярного кислорода, которые происходят на высотах 95–100 км, и монооксида азота NO, которые происходят на высотах 110–120 км. Наблюдения верхней границы облачного слоя позволяют определить горизонтальную компоненту ветра. Результаты измерений этой компоненты ветра за последние годы по данным, полученным космическим аппаратом Venus Express, изложены в работе [*Khatuntsev и др., 2013*]. Один из выводов этой работы состоит в том, что на верхней границе облачного слоя имеет место суперротация атмосферы Венеры, причем максимальные значения зональной компоненты ветра достигаются в диапазоне широт от -50 до 50 градусов. Эти значения непостоянны и росли в течение последних 6-ти лет. Осредненные по долготе и по времени значения зональной компоненты ветра в указанном интервале широт выросли за последние 6 лет с 85 до 110 м/с. В некоторых измерениях были получены значения зональной компоненты ветра на экваторе более 150 м/с.

Анализ наблюдений свечений молекулярного кислорода в ИК диапазоне на ночной стороне позволяет сделать вывод, что распределение горизонтальной компоненты ветра на высоте 95 км и выше существенно отличается от распределения на высотах 65–75 км. В частности, имеют место перенос из подсолнечной точки в противосолнечную точку через полярные области и нисходящее движение на ночной стороне ближе к вечернему меридиану в районе экватора [*Goldstein и др., 1991*]. Другой важной особенностью циркуляции атмосферы Венеры является наличие в полярных областях на высотах облачного слоя воронкообразных вихревых структур с нисходящим движением [*Piccioni и др., 2007*]. Таких структур в одной полярной области наблюдается от 1 до 3, причем их положение и размеры нестационарны. Также на Венере имеются горные системы, высота которых в экваториальной области достигает 5–6 км, а в северном полушарии достигает 10–11 км. При обтекании этих горных систем зональным потоком должны генерироваться волны плавучести.

Разработанные другими научными группами модели общей циркуляции атмосферы Венеры [*Del Genio, Zhou, 1996; Dowling и др., 2006; Herrnstein, Dowling, 2007; Hollingsworth и др., 2007; Kido, Wakata, 2008; Lebonnois и др., 2010; Lee, 2006; Lee и др., 2005; 2007; Lee, Richardson, 2010; Newman, Leovy, 1992; Seiff и*

др., 1985; Takagi, Matsuda, 2007; Yamamoto, Takahashi, 2003a, 2003b, 2004, 2006, 2009; Young, Pollack, 1977] основаны на численном решении системы уравнений геофизической гидродинамики. Эта система уравнений выводится при помощи осреднения движения атмосферного газа по пространству на масштабах по горизонту порядка 1000 км, а по высоте порядка 10 км для условий Земли и Венеры (см., например, [*Монин, 1988*]). Уравнение для вертикальной компоненты гидродинамической скорости в этой системе заменено уравнением гидростатического баланса. Эта система уравнений не может правильно описывать упомянутые выше вихревые структуры в полярных областях, в которых характерный масштаб изменения скорости ветра менее 200 км, а также не может правильно описывать атмосферные волны, возникающие при обтекании горных систем потоками атмосферного газа.

До сих пор при численном моделировании с использованием гидростатических моделей не удалось получить одновременно сочетание трех характерных особенностей общей циркуляции атмосферы Венеры таких, как зональная суперротация на высотах менее 80 км, наличие в полярных областях на высотах облачного слоя воронкообразных вихревых структур с нисходящим движением и нисходящего движения в районе полюсов на уровне облачного слоя, а также наличие перехода характера горизонтальной циркуляции атмосферы Венеры в интервале высот от 80 до 95 км от зональной суперротации к типу циркуляции с переносом вещества через полярные области от подсолнечной точки в район противосолнечной точки [*Clancy и др., 2012*].

Для моделирования перечисленных выше особенностей циркуляции атмосферы Венеры автором диссертации вместе с К. Г. Орловым была создана модель, основанная на численном решении полной системы уравнений движения вязкого сжимаемого газа без каких-либо упрощений на пространственной сетке с горизонтальным разрешением менее 1 градуса, которое в 3–5 раз лучше, чем у моделей, разработанных другими научными группами.

В нашей модели пока используется упрощенный способ расчета радиационного нагрева–охлаждения атмосферы — так называемое релаксационное приближение. Упрощенный подход в данной версии модели используется по причине сложности создания точной модели переноса излучения в атмосфере Венеры. Эта сложность обусловлена тем, что спектроскопия газов при температурах и давлениях, которые имеют место ниже облачного слоя, не описывается простыми моделями, принятыми в теории разреженных газов, а экспериментального материала недостаточно, либо он не обладает должной точностью. Экспериментальных

данных о потоках теплового излучения в подоблачной венерианской атмосфере пока также недостаточно [*Bezard и др., 2011, Афанасенко, Родин, 2005; Засова и др., 2006; Маров и др., 1984, 1985; Эртель и др., 1985; Revercomb и др., 1985*]. В то же время использование упрощенного способа расчета нагрева–охлаждения атмосферы позволяет исследовать ряд важных закономерностей циркуляции атмосферы Венеры.

В данной главе изложены результаты моделирования общей циркуляции атмосферы Венеры с учетом рельефа поверхности, которые хорошо согласуются с данными наблюдений о ветре на верхней границе облачного слоя, и в которых в интервале высот от 80 до 95 км имеет место переход от поля горизонтального ветра с сильной зональной суперротацией к полю с преобладанием переноса от подсолнечной области к противосолнечной. Также обсуждается влияние на общую циркуляцию режимов нагрева и рельефа поверхности.

II.2 Описание модели

II.2.1 Система уравнений, расчетная сетка и метод численного интегрирования

В модели атмосферный газ рассматривается как смесь газов постоянного состава. Аэрозольная составляющая атмосферы не рассматривается. Область моделирования простирается от поверхности до высоты 120 км над средним уровнем поверхности. Нижняя граница области моделирования является ступенчатой поверхностью, проходящей через границы контрольных объемов узлов сетки, и аппроксимирует рельеф поверхности Венеры. При проведении расчетов использовалась равномерная сетка в сферических координатах, описанная в разделе I.4.1 главы I. Сетка имела 386 узлов по долготе и 192 узла по широте (шаг 15/16 градуса), а также 481 узел по высоте (шаг 250 м). Модель основана на численном решении системы осредненных по Фавру уравнений динамики вязкого сжимаемого газа (I.1)–(I.4), записанных в консервативной форме. Ускорение внешних сил складывается из ускорения силы тяжести, заданного формулой (I.5), и из ускорений силы Кориолиса и центробежной силы, которые заданы по формулам, приведенным в в разделе I.2 главы I.

Для численного решения системы (I.1)–(I.4) использовалась явная разностная схема, детально описанная в разделах I.4.2 и I.4.3 главы I. Программная реализация модели выполнена для использования параллельных вычислений на графических процессорах фирмы NVIDIA последнего поколения и допускает одновременное использование при вычислениях от 1 до 4 графических процессоров на компьютере с логически общей памятью.

II.2.2 Задание радиационного нагрева атмосферы Венеры

Для задания мощности нагрева–охлаждения атмосферного газа в единице объема за счет поглощения–испускания электромагнитного излучения в модели использовалось релаксационное приближение, описанное в разделе I.6 главы I. Указанная мощность вычислялась по формуле (I.82). Входящие в эту формулу время релаксации $\tau_{\text{рел}}(h)$ и релаксационная температура $T_{\text{рел}}(t, h, \varphi, \beta)$ задавались следующим образом.

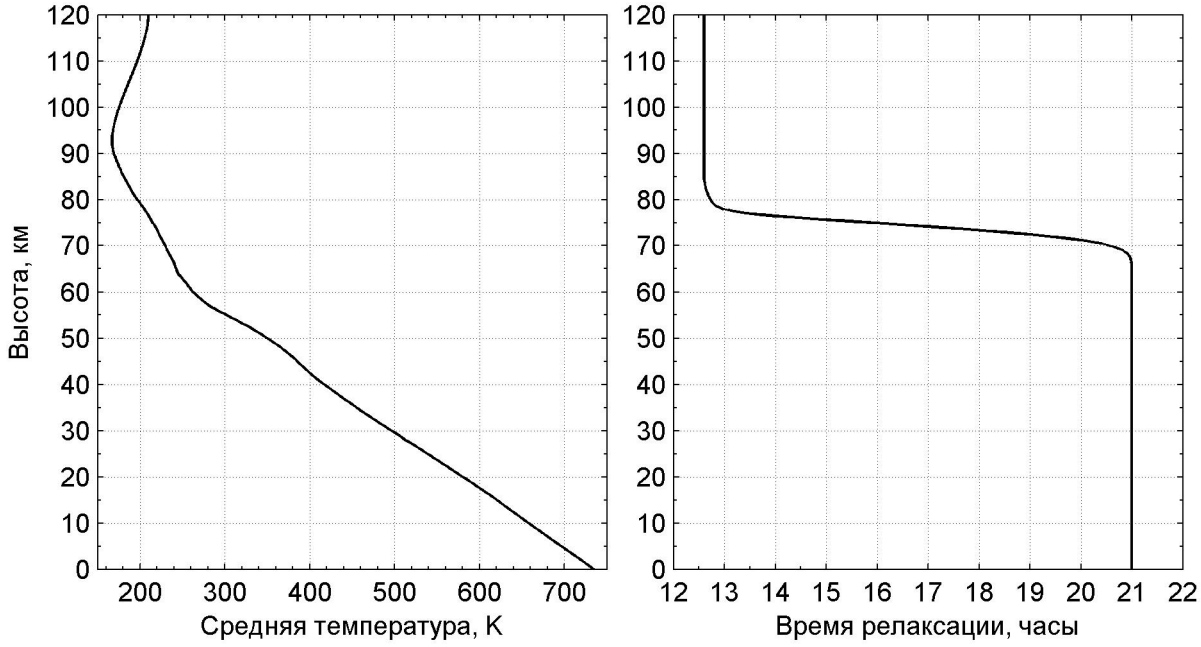

Рис. II.2. *Вертикальные профили средней температуры по модели VIRA (слева) и времени релаксации (справа).*

Время релаксации зависело только от высоты, причем использовалась его зависимость от высоты, изображенная на рис. II.2 справа. Релаксационная температура зависела от времени, высоты, долготы и широты и задавалась для условий равноденствия по формуле

$$T_{rel}(t, h, \varphi, \beta) \;=\; T_{\text{ср}}(h) + T_{dop}(h)\,\Big(\max\{\cos\theta,\, 0\} - 0.25\Big) + T^{pol}_{dop}(\beta, h)\,. \qquad \text{(II.1)}$$

В этой формуле через $T_{\text{ср}}(h)$ обозначена средняя температура на высоте h, заданная по международной модели атмосферы Венеры VIRA [*Засова и др., 2006*]. Вертикальный профиль $T_{\text{ср}}(h)$ изображен на рис. II.2 слева. Также в формуле (II.1) через θ обозначен зенитный угол Солнца в точке с долготой φ и широтой β в текущий момент времени. Второе слагаемое в правой части (II.1) задает нагрев на освещенной стороне и выхолаживание на ночной стороне, причем $T_{dop}(h)$ — поправочная температура, которая зависит только от высоты и

подбирается так, чтобы обеспечить наилучшее соответствие результатов моделирования данным наблюдений.

Третье слагаемое $T^{pol}_{dop}(\beta, h)$ в правой части (II.1) задает в полярных областях дополнительные ко 2-му слагаемому выхолаживание на высотах менее 76 км и нагрев на высотах более 76 км. Этот дополнительный нагрев вводится, чтобы учесть постоянную освещенность Солнцем полярных областей выше облачного слоя, а дополнительное выхолаживание вводится, чтобы учесть резкое понижение верхней границы облачного слоя в полярных областях на 8–10 км и постоянную затененность на высотах менее 70 км. Третье слагаемое также подбирается так, чтобы обеспечить наилучшее соответствие результатов моделирования данным наблюдений.

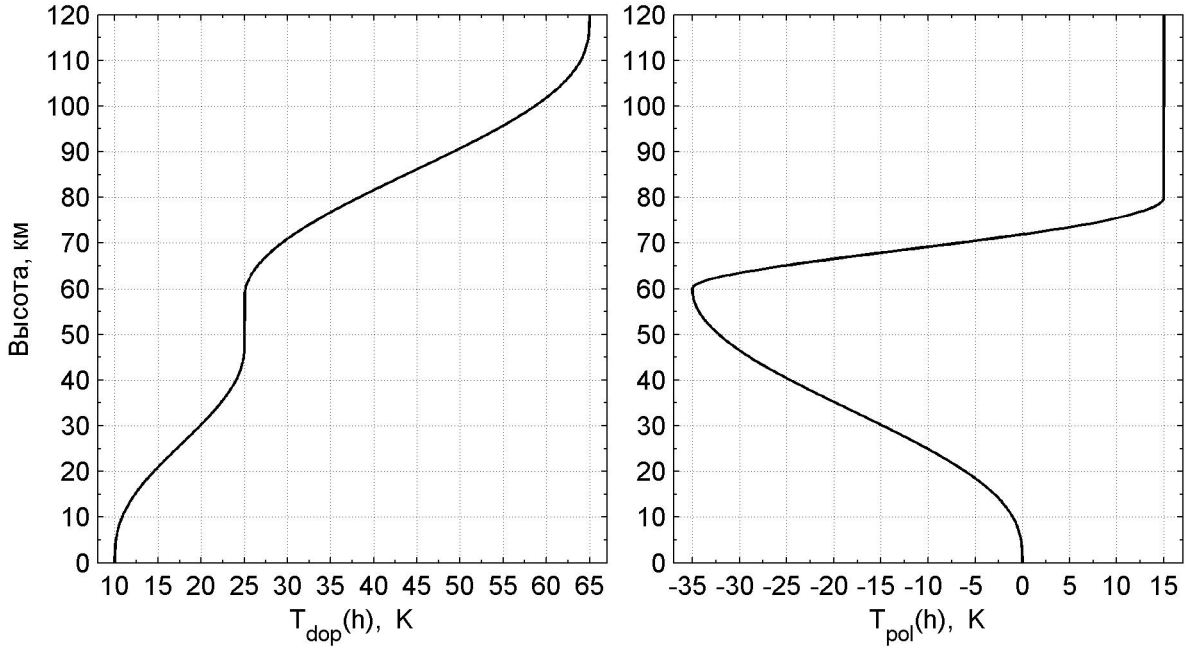

Рис. II.3. *Вертикальные профили* $T_{dop}(h)$ *слева и* $T_{pol}(h)$ *справа.*

Было проведено моделирование для большого числа физически оправданных вариантов $T_{dop}(h)$ и $T^{pol}_{dop}(\beta, h)$. Хорошее соответствие данным наблюдений удалось получить в случае, когда использовался вертикальный профиль $T_{dop}(h)$, изображенный на рис. II.3. Этот профиль в градусах Кельвина задан следующими формулами

$$T_{dop}(h) = \begin{cases} 10 + 25 \cdot x^3(2-x)^3\,, \quad x = h/h_1 & \text{при } 0 \le h \le h_1, \\ 35 & \text{при } h_1 \le h \le h_2, \\ 45 - 10 \cdot x^3(2-x)^3\,, \quad x = 1 + \dfrac{h-h_2}{h_m - h_2} & \text{при } h_2 \le h \le h_m, \end{cases} \tag{II.2}$$

в которых $h_1 = 47\,\text{км}$, $h_2 = 58\,\text{км}$, $h_m = 120\,\text{км}$, а слагаемое $T^{pol}_{dop}(\beta, h)$ определялось следующим образом. В диапазоне широт $-\pi/2 \le \beta \le -\pi/2 + \theta_{pol}$ это

слагаемое задается формулой

$$T^{pol}_{dop}(\beta,h) = T_{pol}(h)\left(\frac{1}{2}\left\{1+\cos\left(\frac{\pi(\beta+\pi/2)}{\theta_{pol}}\right)\right\} - C_{norm}\right), \qquad \text{(II.3)}$$

в диапазоне широт $\pi/2-\theta_{pol} \le \beta \le \pi/2$ оно задается формулой

$$T^{pol}_{dop}(\beta,h) = T_{pol}(h)\left(\frac{1}{2}\left\{1+\cos\left(\frac{\pi(\beta-\pi/2)}{\theta_{pol}}\right)\right\} - C_{norm}\right), \qquad \text{(II.4)}$$

а в диапазоне широт $-\pi/2+\theta_{pol} \le \beta \le \pi/2-\theta_{pol}$ оно считается нулевым. При этом параметр θ_{pol} считался равным $\theta_{pol} = 65\,\pi/256$, а нормировочная постоянная C_{norm} задавалась по формуле

$$C_{norm} = (1-\cos\theta_{pol})\left(\frac{\pi^2-2\,\theta^2_{pol}}{\pi^2-\theta^2_{pol}}\right).$$

Входящая в (II.3) и (II.4) функция $T_{pol}(h)$ задавалась в градусах Кельвина по формулам

$$T_{pol}(h) = \begin{cases} -25\cdot x^3(2-x)^3\,, & x = h/h_3 \quad \text{при } 0 \le h \le h_3\,, \\ -25+45\cdot x^2(2-x)^2\,, & x = \dfrac{h-h_3}{h_4-h_3} \quad \text{при } h_3 \le h \le h_4\,, \\ 20 & \text{при } h_4 \le h \le h_m\,, \end{cases}$$

в которых $h_3 = 60\,\text{км}$, $h_4 = 80\,\text{км}$, $h_m = 120\,\text{км}$. График этой функции изображен на рис. II.3.

II.2.3 Начальные и граничные условия

В модели использовались следующие граничные условия. На нижней границе области моделирования было задано условие прилипания, то есть полагалась равной нулю гидродинамическая скорость на поверхности Венеры. Также на нижней границе была задана нулем вертикальная компонента вектора потока тепла. На верхней границе области моделирования были заданы условие непротекания через границу (то есть была задана равной нулю вертикальная компонента гидродинамической скорости), а также условие проскальзывания (то есть были заданы равными нулю производные по высоте от горизонтальных компонент гидродинамической скорости). Кроме того, на верхней границе была задана равной нулю производная по высоте от вертикальной компоненты вектора потока тепла.

Распределение температуры атмосферного газа в начальный момент задавалось горизонтально однородным по формуле $T(t,h,\varphi,\beta) = T_{\text{ср}}(h)$, где $T_{\text{ср}}(h)$ — средний по планете профиль температуры, взятый из модели VIRA. Начальное

распределение плотности атмосферного газа на поверхности Венеры на экваторе задавалось однородным по долготе и равным значению плотности на поверхности для профиля из модели VIRA [*Засова и др., 2006*]. Зависимость плотности от высоты при фиксированной широте расчитывалась из условия гидростатического равновесия по вертикали. В начальный момент времени долгота подсолнечной точки равнялась 180°.

Вертикальная и меридиональная компоненты скорости ветра в начальный момент брались равными нулю, а зональная компонента зависела только от высоты и широты и вычислялась по формуле

$$v_{\text{зон}}(h,\,\beta) = -v_{\text{макс}} \cdot v_{\text{экв}}(h) \cdot \cos\beta\,, \tag{2.5}$$

в которой $v_{\text{макс}}$ – максимальное значение зональной компоненты ветра на экваторе, а $v_{\text{экв}}(h)$ – гладкий безразмерный вертикальный профиль зональной компоненты ветра, заданный формулами

$$v_{\text{экв}}(h) \;=\; \begin{cases} 0.25 \cdot x\,\left(5 - x^4\right)\,, & x = h/h_5 \qquad \text{при} \;\; 0 \le h \le h_5\,, \\ 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad & \text{при} \;\; h_5 \le h \le h_6\,, \\ 0.25 \cdot x^2\,\left(5 - x^8\right)\,, & x = \dfrac{h_m - h}{h_m - h_6} \quad \text{при} \;\; h_6 \le h \le h_m\,, \end{cases}$$

в которых высота h берется в километрах, $h_5 = 50\,\text{км}$, $h_6 = 68\,\text{км}$, $h_m = 120\,\text{км}$. Последние формулы означают, что в интервале высот 0–50 км $v_{\text{экв}}(h)$ почти линейно возрастает с высотой до значения 1, в интервале высот 50–68 км сохраняет это значение, а в интервале высот 68–120 км монотонно убывает с высотой до нуля. Значения $v_{\text{макс}}$ брались равными 100 м/с. Описанное начальное условие означает суперротацию атмосферы (зональный ветер направлен в сторону вращения Венеры).

II.3 Результаты моделирования

Было проведено моделирование процесса установления общей циркуляции атмосферы Венеры для вышеописанных начальных условий на промежутке физического времени длительностью более 11000 часов с использованием двух вариантов модели, в одном из которых учитывался рельеф поверхности Венеры, а во втором рельеф поверхности не учитывался и поверхность считалась сферической. Моделирование показало, что через 9000–10000 часов физического времени после начала моделирования (солнечные сутки на Венере примерно 2802 часа) качественная картина циркуляции практически перестала меняться и имеет следующие особенности.

При отсутствии гор на поверхности во всей области моделирования формируется практически квазистационарная картина циркуляции атмосферы, которая перемещается относительно поверхности вместе с подсолнечной точкой. При этом вертикальная компонента ветра достигает максимальных значений выше 90 км, и эти значения не превышают 0.3 м/с. При наличии гор на поверхности на высотах 0–60 км также формируется практически квазистационарная картина циркуляции атмосферы, которая перемещается относительно поверхности вместе с подсолнечной точкой. На высотах более 60 км циркуляцию атмосферы можно условно представить как квазистационарную, перемещающуюся вместе с подсолнечной точкой, на которую накладываются различные колебания, многие из которых имеют характерный период от 20 до 400 часов. Амплитуда этих колебаний растет с высотой. В вертикальной компоненте ветра эти колебания особенно заметны, начиная с высоты 70 км, а в горизонтальной компоненте ветра, начиная с высот 70–80 км. При этом вертикальная компонента ветра достигает максимальных значений выше 100 км, и эти значения превышают 2.5 м/с.

На рис. II.4–II.19 отражена циркуляция атмосферы Венеры, полученная через 16595 часов после начала моделирования для случая, когда учитывался рельеф поверхности, максимальная скорость суперротации в начальный момент ($v_{\text{макс}}$ в формуле (II.5)) равнялась 100 м/с, а релаксационная температура вычислялась по формулам (II.1)–(II.4), как описано в разделе II. 2.2 этой главы. В этот момент подсолнечная точка находилась на экваторе на долготе примерно 152^{o}, вечерний терминатор находился на долготе 62^{o}, утренний терминатор находился на долготе 242^{o}, а полуночный меридиан находился на долготе 332^{o}.

На рис. II.4, II.5 и II.6 приведены распределения горизонтальной компоненты ветра на высотах 5, 20, 40 км соответственно. На рис. II.7–II.18 приведены распределения горизонтальной и вертикальной компонент ветра на высотах 60, 70, 80, 90, 100, 110 км соответственно. На всех этих рисунках стрелки указывают направление горизонтальной составляющей ветра, а их длина и цвет фона указывают ее абсолютную величину. Распределения зональной и меридиональной компонент ветра на утреннем и вечернем меридианах приведены на рис. II.19 и II.20 соответственно.

Из рис. II.4 видно, что на высоте 5 км всюду, за исключением приполюсных областей, величина меридиональной компоненты ветра существенно меньше, чем величина его зональной компоненты, которая направлена в сторону вращения Венеры и достигает максимальных значений около 9.2 м/с в небольшой области на экваторе в районе утреннего меридиана, в полярных областях скорость ветра

не превышает 3 м/с, а на средних широтах она не превышает 7 м/с.

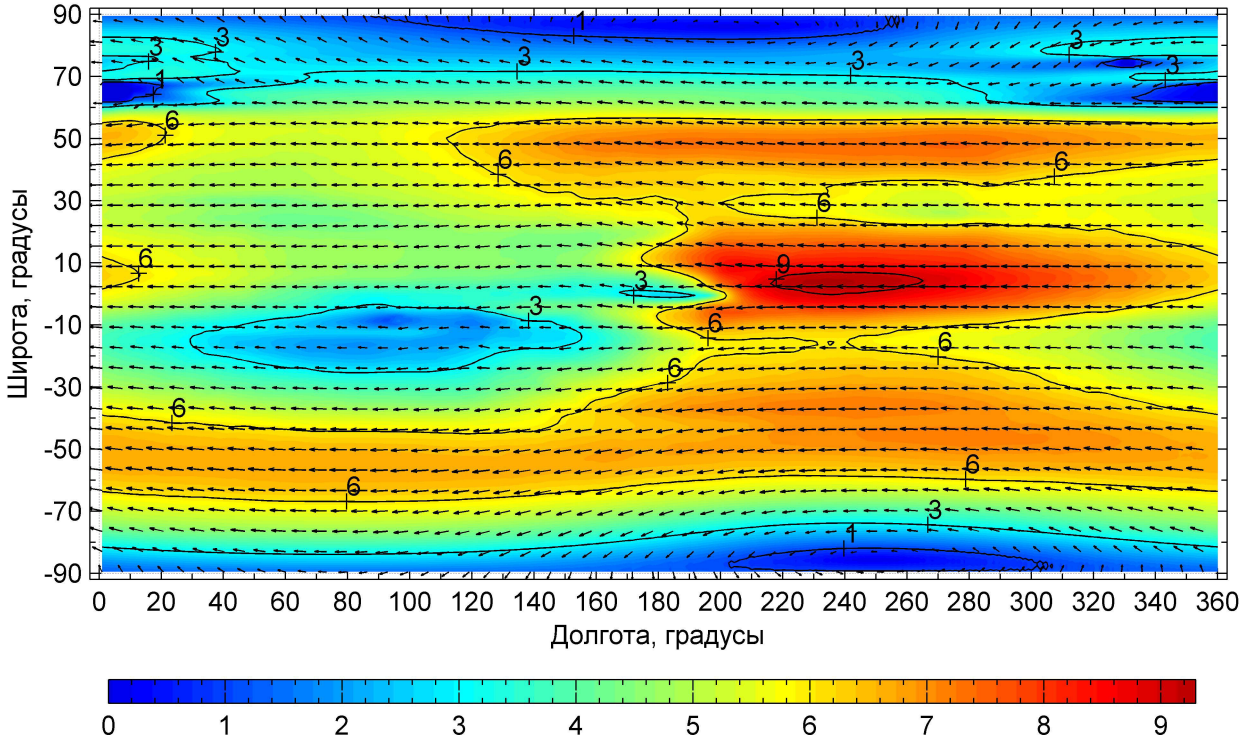

Рис. II.4. *Распределение горизонтальной составляющей ветра (м/с) через 16595 часов после начала моделирования на высоте 5 км.*

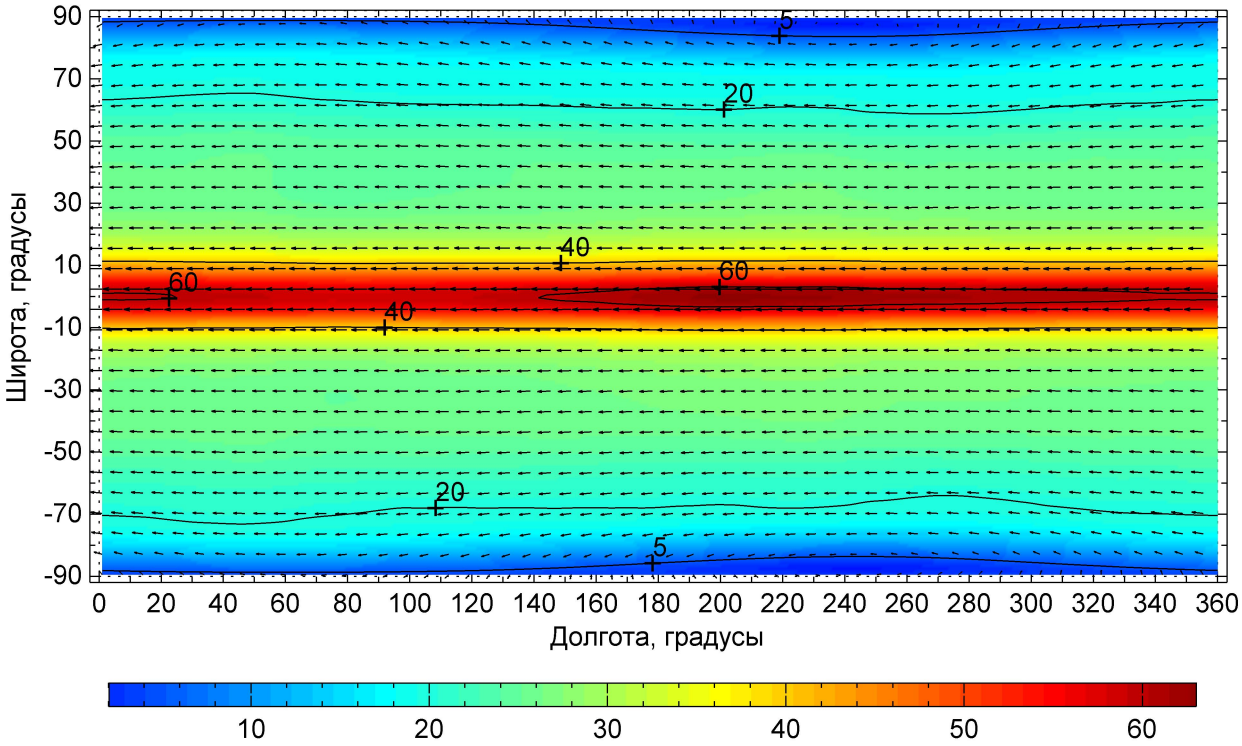

Рис. II.5. *Распределение горизонтальной составляющей ветра (м/с) через 16595 часов после начала моделирования на высоте 20 км.*

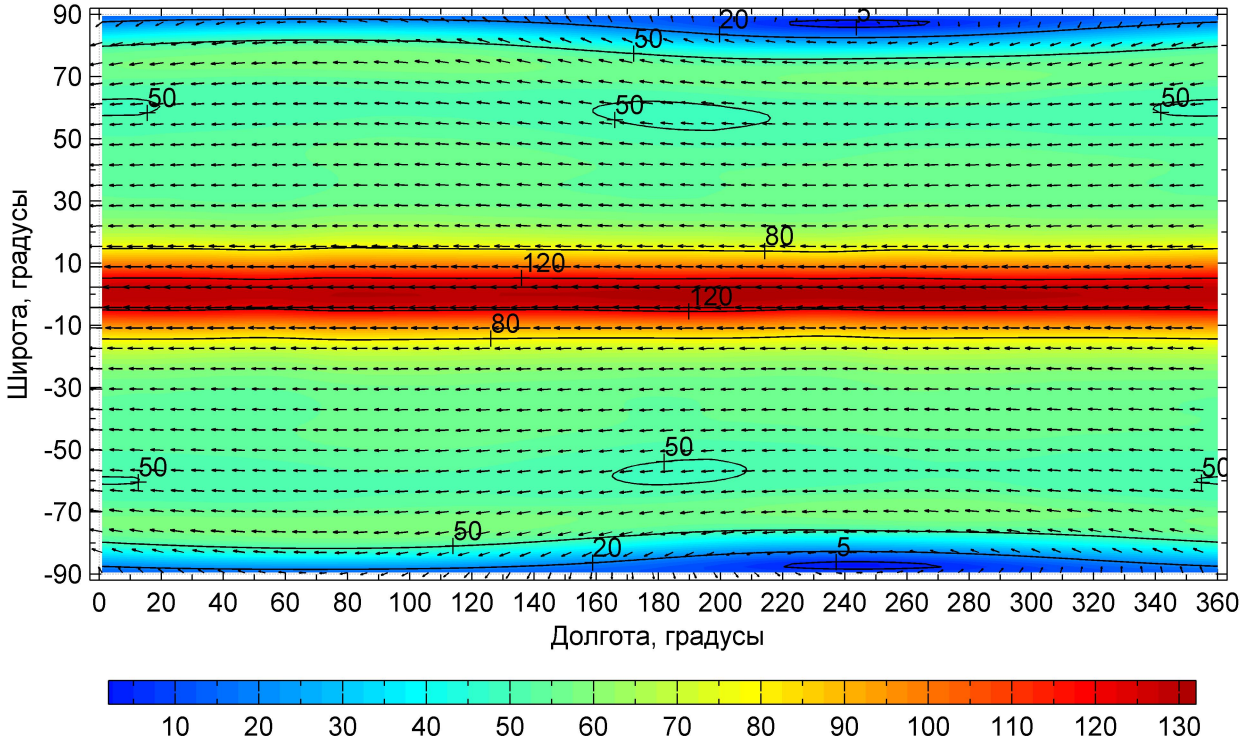

Рис. II.6. *Распределение горизонтальной составляющей ветра (м/с) через 16595 часов после начала моделирования на высоте 40 км.*

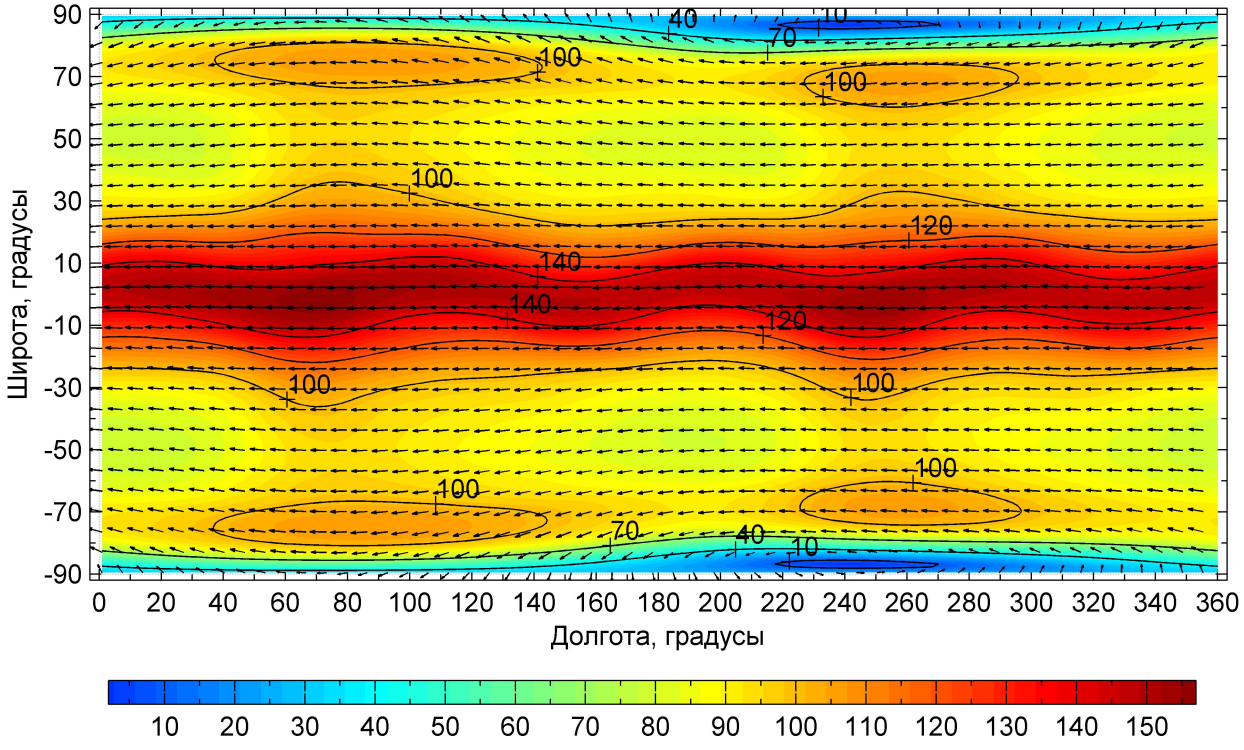

Рис. II.7. *Распределение горизонтальной составляющей ветра (м/с) на высоте 60 км через 16595 часов после начала моделирования.*

Из рис. II.5 видно, что на высоте 20 км величина зональной компоненты вет-

ра существенно больше меридиональной компоненты всюду, за исключением малых окрестностей полюсов. При этом зональная компонента направлена в сторону вращения Венеры (суперротация) и достигает максимальных значений около 63 м/с на экваторе в районе утреннего меридиана. Видно, что в районе экватора имеется область шириной примерно 14^o, в которой зональный поток имеет максимальную скорость от 40 до 63 м/с. Кроме того, видно, что на средних широтах скорость ветра лежит в пределах от 20 до 40 м/с, а в полярных областях эта скорость не превышает 20 м/с.

Из рис. II.6 видно, что на высоте 40 км качественная картина циркуляции такая же, как на высоте 20 км, но величина горизонтальной составляющей ветра существенно больше и достигает на экваторе максимальных значений около 132 м/с, на средних широтах эта величина лежит в пределах от 45 до 80 м/с, а в полярных областях эта скорость не превышает 50 м/с. Видно, что зональный поток слегка расширяется на дневной стороне (при долготе от 140^o до 320^o) и сужается на ночной стороне. Также в районах широт $\pm 60^o$ заметно проявление полусуточных колебаний горизонтальной составляющей ветра.

Из рис. II.7 видно, что на высоте 60 км распределение горизонтальной составляющей ветра имеет такие же качественные особенности, как и на высоте 40 км. На высоте 60 км имеют место зональная суперротация и расширение зонального потока на дневной стороне и его сужение на ночной стороне, причем эти эффекты проявляются сильные, чем на высоте 40 км. Горизонтальная составляющая ветра достигает на экваторе своих максимальных значений около 155 м/с. Но есть и отличия. В каждом полушарии при удалении от экватора до широты 40^o величина зональной составляющей ветра убывает, затем до широты $60 - 65^o$ растет, а затем снова быстро убывает при приближении к полюсам. Это также видно из рис. II.13 и II.14. Гораздо сильнее чем, на высоте 40 км, проявляется полусуточная волна. В экваториальной области вместе с этой волной заметно проявляется четвертьсуточная волна длинной в четверть длины меридиана.

Из рис. II.8 видно, что на высоте 60 км на дневной стороне вертикальная компонента ветра направлена вверх в области, которая находится примерно в интервале долгот от 90^o до 210^o и в интервале широт от -70^o до 70^o. В районах полюсов, а также утреннего и вечернего терминаторов вертикальная компонента ветра направлена вниз. На ночной стороне эта компонента ветра преимущественно направлена вниз, но там есть области, где она направлена вверх. Таким образом, имеет место термический прилив — подъем атмосферного газа на дневной стороне из-за нагрева атмосферы и опускание его на ночной стороне и в районе

полюсов из-за охлаждения атмосферы. Максимальная величина вертикальной компоненты ветра достигается на экваторе в районе подсолнечной точки (при долготе 152°), где эта компонента равна примерно 3 см/с, и в районах утреннего и вечернего терминаторов на средних широтах, где эта компонента равна примерно -4 см/с.

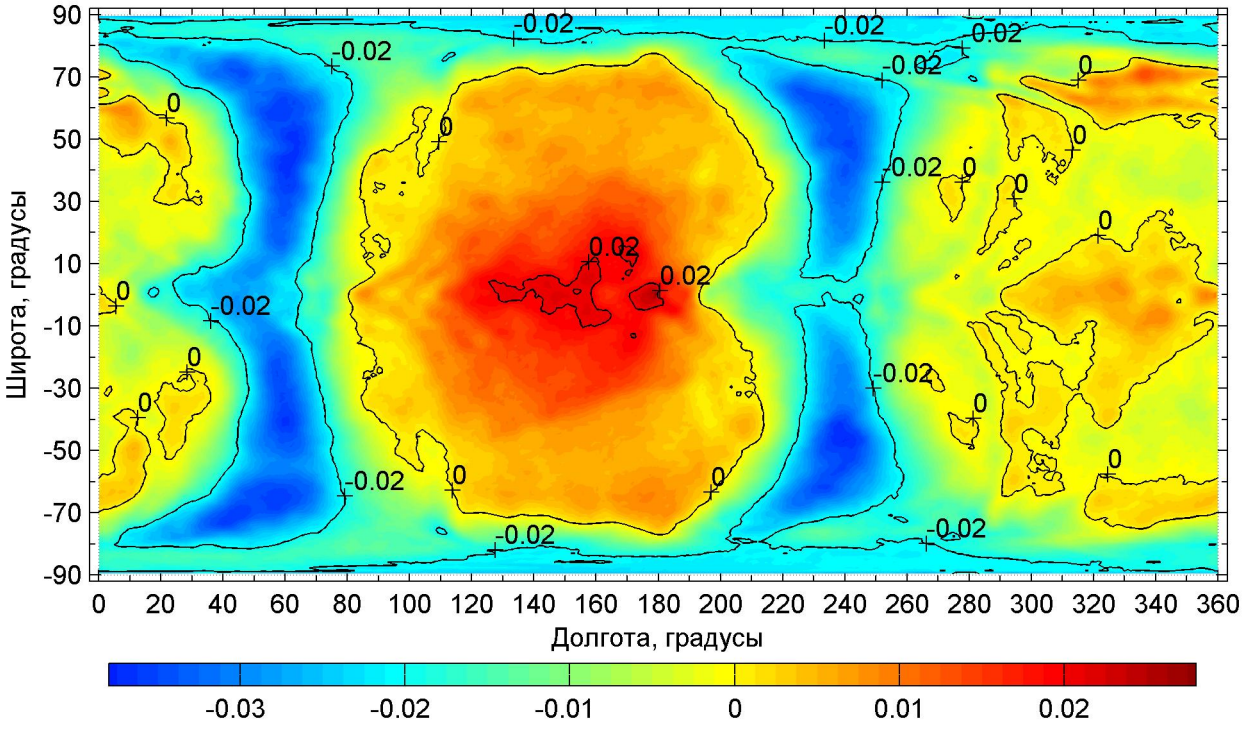

Рис. II.8. *Распределение вертикальной составляющей ветра (м/с) на высоте 60 км через 16595 часов после начала моделирования.*

Из рис. II.9 видно, что на высоте 70 км распределение горизонтальной составляющей ветра имеет такие же характерные черты, как и на высоте 60 км. Зональная суперротация и расширение зонального потока на дневной стороне и его сужение на ночной стороне почти такие же, как на высоте 60 км. На высоте 70 км горизонтальная составляющая ветра достигает на экваторе своих максимальных значений около 143 м/с, которые меньше, чем максимальные значения на высоте 60 км. На высоте 70 км в экваториальной области и на средних широтах полусуточная волна проявляется заметно сильнее, чем на высоте 60 км, и почти не проявляется четвертьсуточная волна. На экваторе хорошо видны два локальных максимума величины зональной составляющей ветра. В каждом полушарии при удалении от экватора до широты примерно $\pm 50^{\circ}$ величина зональной составляющей ветра убывает, затем растет до широты примерно $\pm 70^{\circ}$, а затем после широты примерно $\pm 80^{\circ}$ снова быстро убывает при приближении к полюсам. Это также видно из рис. II.12 и II.13.

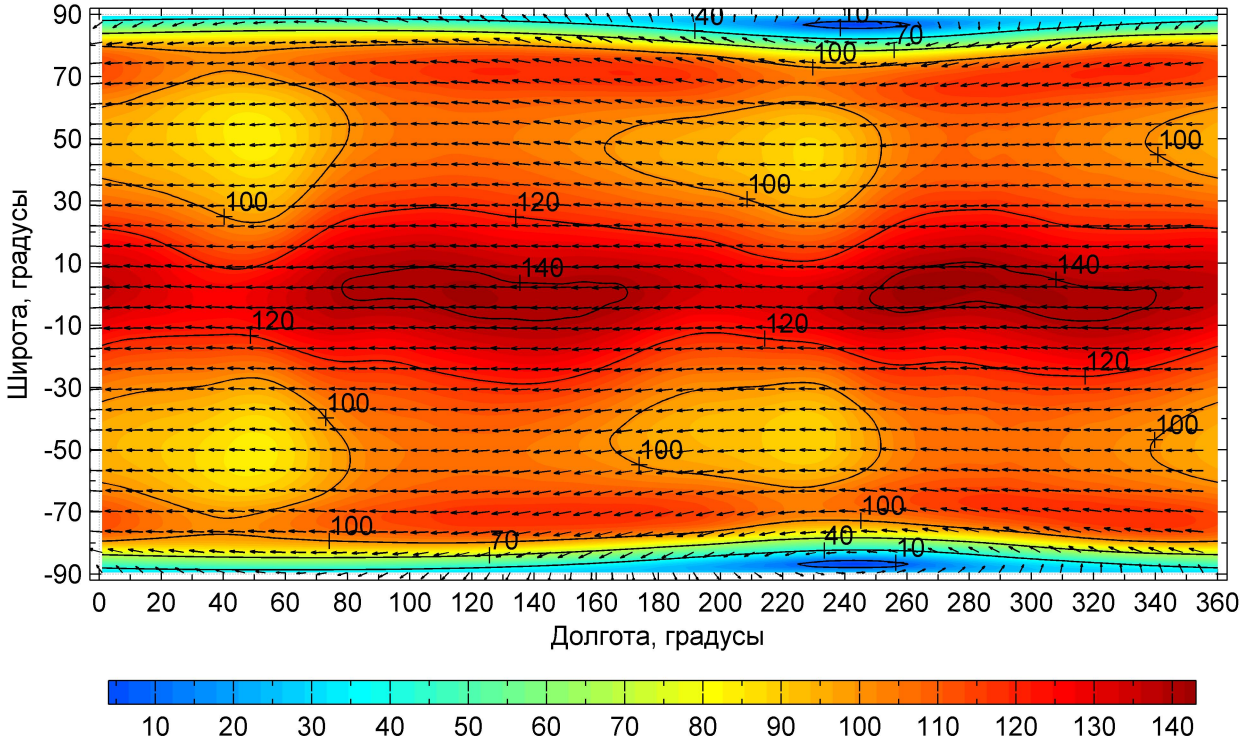

Рис. II.9. *Распределение горизонтальной составляющей ветра (м/с) на высоте 70 км через 16595 часов после начала моделирования.*

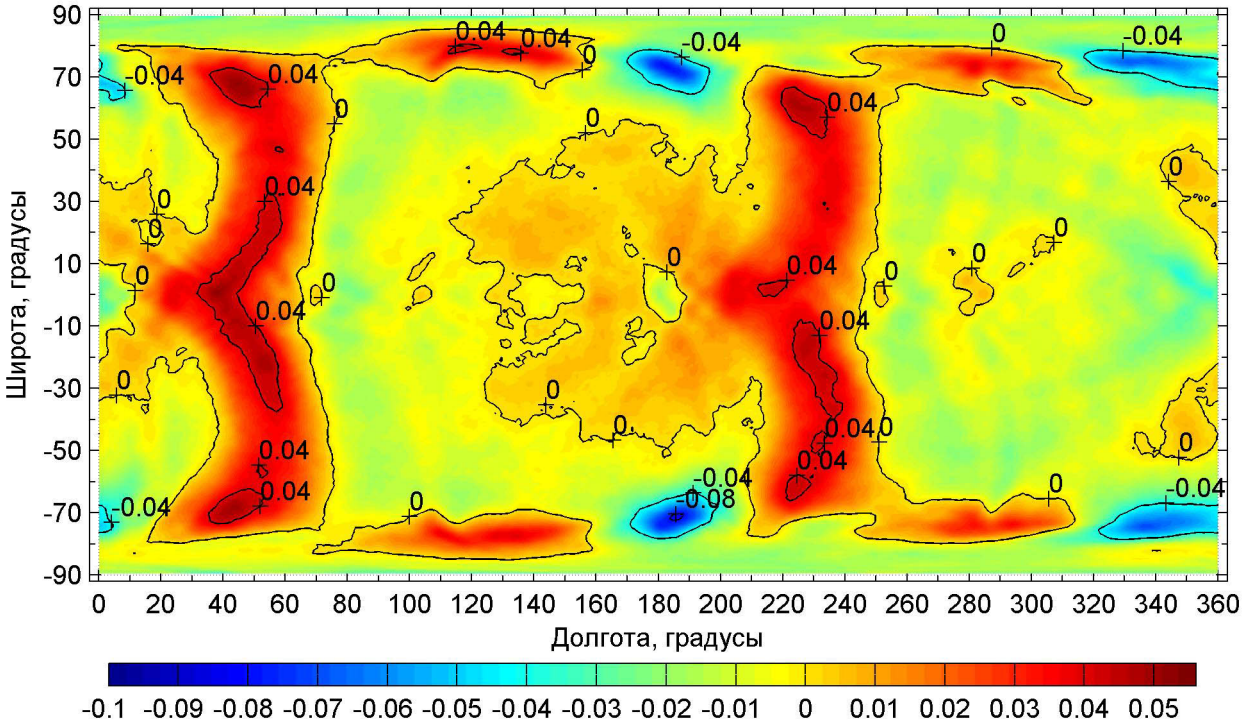

Рис. II.10. *Распределение вертикальной составляющей ветра (м/с) на высоте 70 км через 16595 часов после начала моделирования.*

Из рис. II.10 видно, что на высоте 70 км вертикальная компонента ветра направлена вверх в районах утреннего и вечернего терминаторов, а также в области, которая находится на дневной стороне примерно в интервале долгот от 120^o до 240^o и в интервале широт от -60^o до 60^o. В приполюсных областях направление вертикальной компоненты ветра чередуется. Таким образом, полусуточная волна заметно проявляется на этой высоте и в распределении вертикальной компоненты ветра, причем она накладывается на термический прилив. Максимальная величина вертикальной компоненты ветра достигается в обеих полярных областях на широтах примерно от 65^o до 80^o в интервале долгот от 170^o до 200^o и в интервале долгот от 320^o до 360^o, где расположены по две области, в которых вертикальная компонента ветра направлена вниз и достигает значений максимальной величины 8–10 см/с.

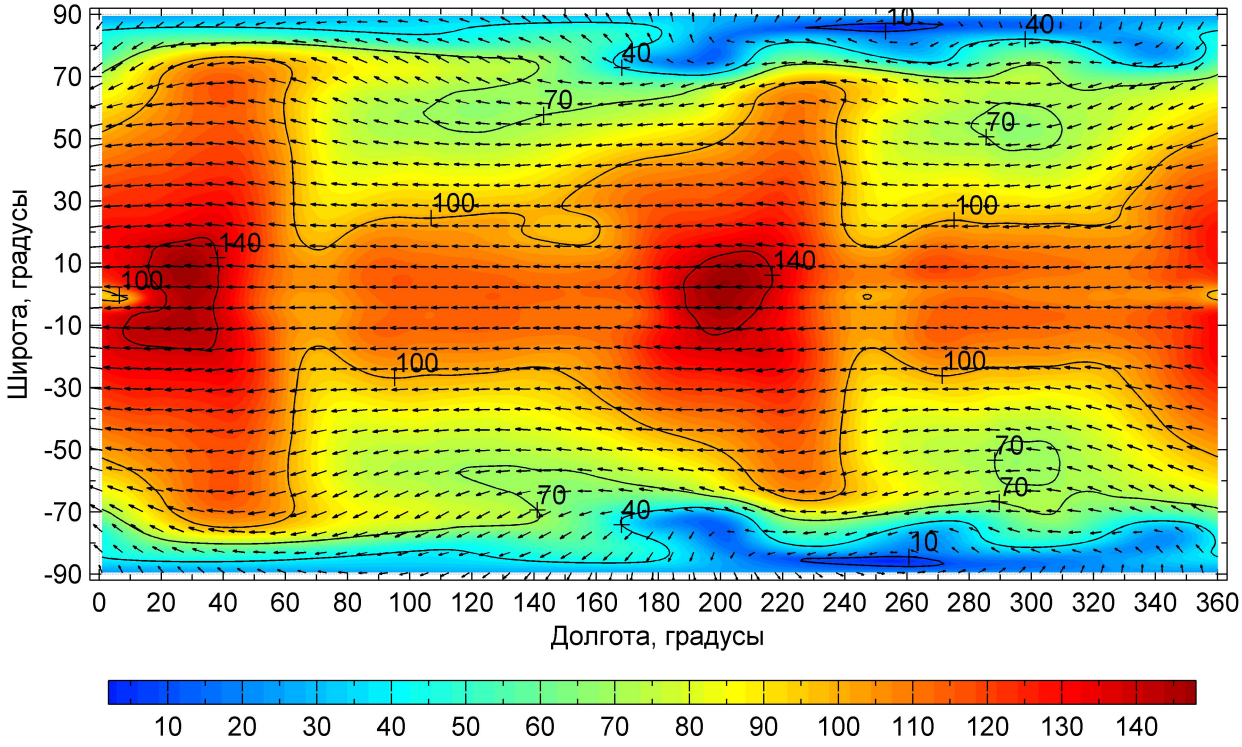

Рис. II.11. *Распределения горизонтальной составляющей ветра (м/с) на высоте 80 км через 16595 часов после начала моделирования.*

Из рис. II.11 видно, что на высоте 80 км распределение горизонтальной составляющей ветра существенно отличается от этого распределения на высоте 70 км. На высоте 80 км сохраняется зональная суперротация атмосферы, но при этом значительно увеличивается полусуточная вариация горизонтальной составляющей ветра по сравнению с высотой 70 км. Максимальная величина этой составляющей достигается между утренним терминатором и полуденным меридианом

и между вечерним терминатором и полуночным меридианом. В этих областях горизонтальная составляющая ветра на экваторе достигает своих максимальных значений около 147 м/с, а на средних широтах достигает значений 110–120 м/с. Вблизи полюсов величина горизонтальной составляющей ветра не превышает 40 м/с.

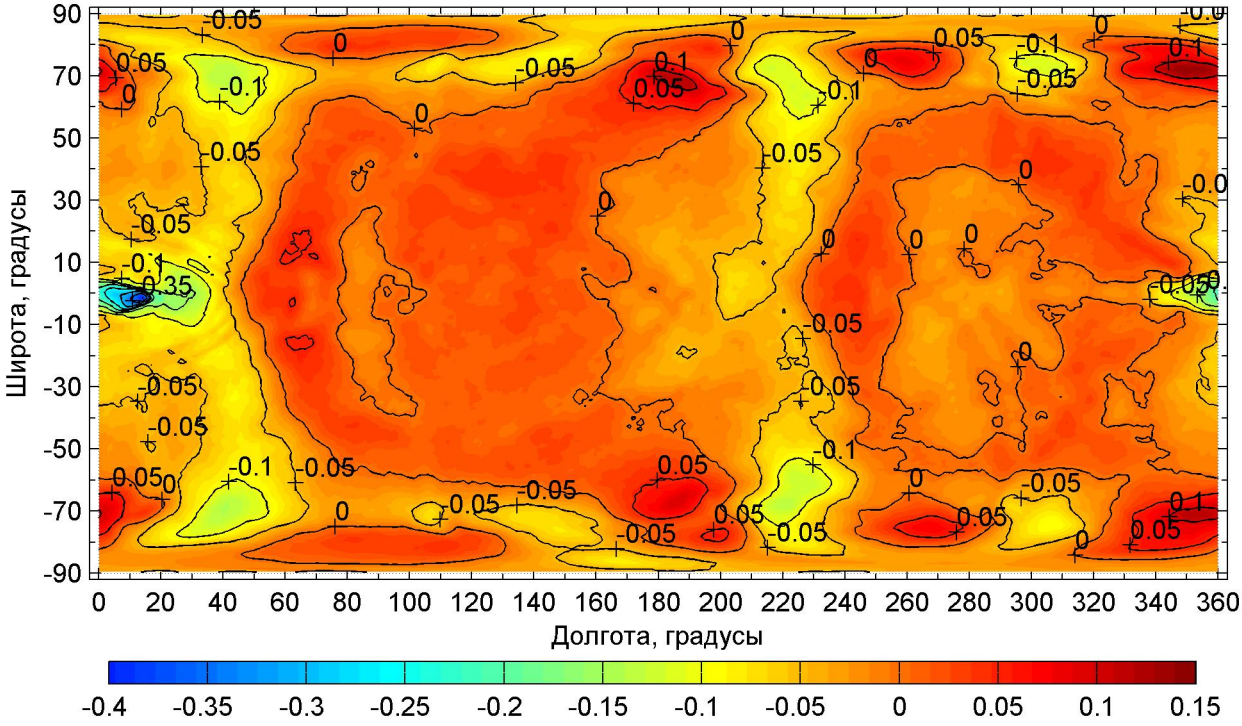

Рис. II.12. *Распределения вертикальной составляющей ветра (м/с) на высоте 80 км через 16595 часов после начала моделирования.*

Из рис. II.12 видно, что распределение вертикальной составляющей ветра на высоте 80 км также существенно отличается этого распределения на высоте 70 км. Значения вертикальной составляющей ветра на высоте 80 км лежат в пределах от -0.4 м/с до 0.15 м/с, что существенно больше, чем на высоте 70 км. На высоте 80 км хорошо заметен термический прилив. На дневной стороне в интервале долгот от 60° до 180° в приэкваториальной области и на средних широтах вертикальная составляющая ветра направлена вверх. В районах утреннего и вечернего терминаторов она направлена вниз. На ночной стороне имеются большие области, в которых вертикальная составляющая ветра направлена как вверх, так и вниз. В обоих полушариях вблизи полюсов в интервалах широт от 60° до 85° имеются по четыре области, где вертикальная составляющая ветра направлена вверх и достигает своих максимальных значений, а между этими областями расположены четыре области, где вертикальная составляющая ветра направлена вниз и также достигает своих максимальных значений. Таким

образом, в полярных областях преобладает четвертьсуточная вариация в распределении вертикальной составляющей ветра.

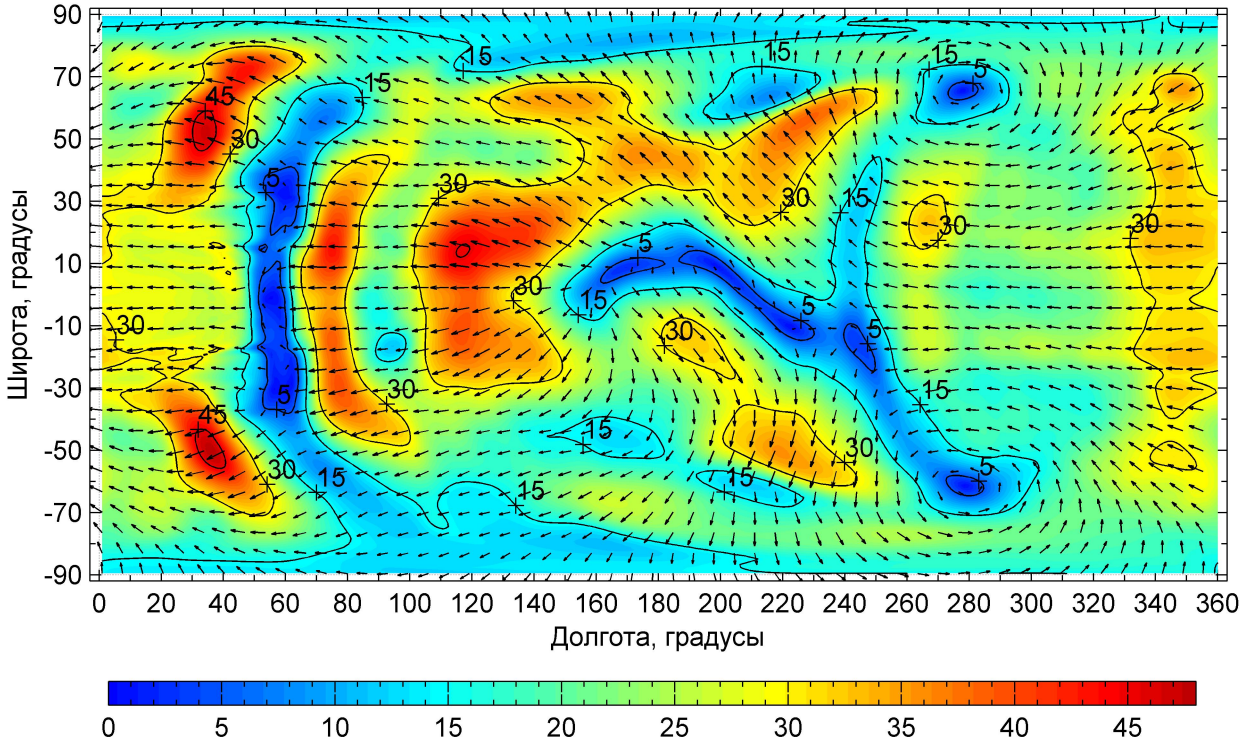

Рис. II.13. *Распределение горизонтальной составляющей ветра (м/с) на высоте 90 км через 16595 часов после начала моделирования.*

Из рис. II.13 видно, что на высоте 90 км распределение горизонтальной составляющей ветра качественно отличается от этого распределения на высоте 80 км. Сильно уменьшились зональная суперротация атмосферы и максимальная величина горизонтальной составляющей ветра, которая достигает 48 м/с при долготе от 30^o до 40^o. На дневной стороне между утренним терминатором (долгота 242^o) и полуденным меридианом (долгота 152^o) зональная суперротация практически отсутствует. Здесь величина меридиональной составляющей ветра равна или превосходит величину зональной составляющей, причем в районе экватора при этих долготах величина горизонтальной составляющей не превышает 15 м/с. В районе вечернего терминатора (долгота 62^o) на широтах от -40^o до 40^o имеется область, где величина горизонтальной составляющей не превышает 5 м/с. Имеет место заметный меридиональный перенос с дневной стороны на ночную через приполюсные области. На ночной стороне в каждом полушарии имеется по одному крупномасштабному вихрю. Центры этих вихрей расположены в точках с долготой примерно 280^o и широтой примерно $\pm 65^o$, а их радиус составляет примерно $35 - 45^o$. На дневной стороне в интервале долгот от 70^o до 150^o

вблизи экватора горизонтальный ветер направлен в сторону вращения Венеры.

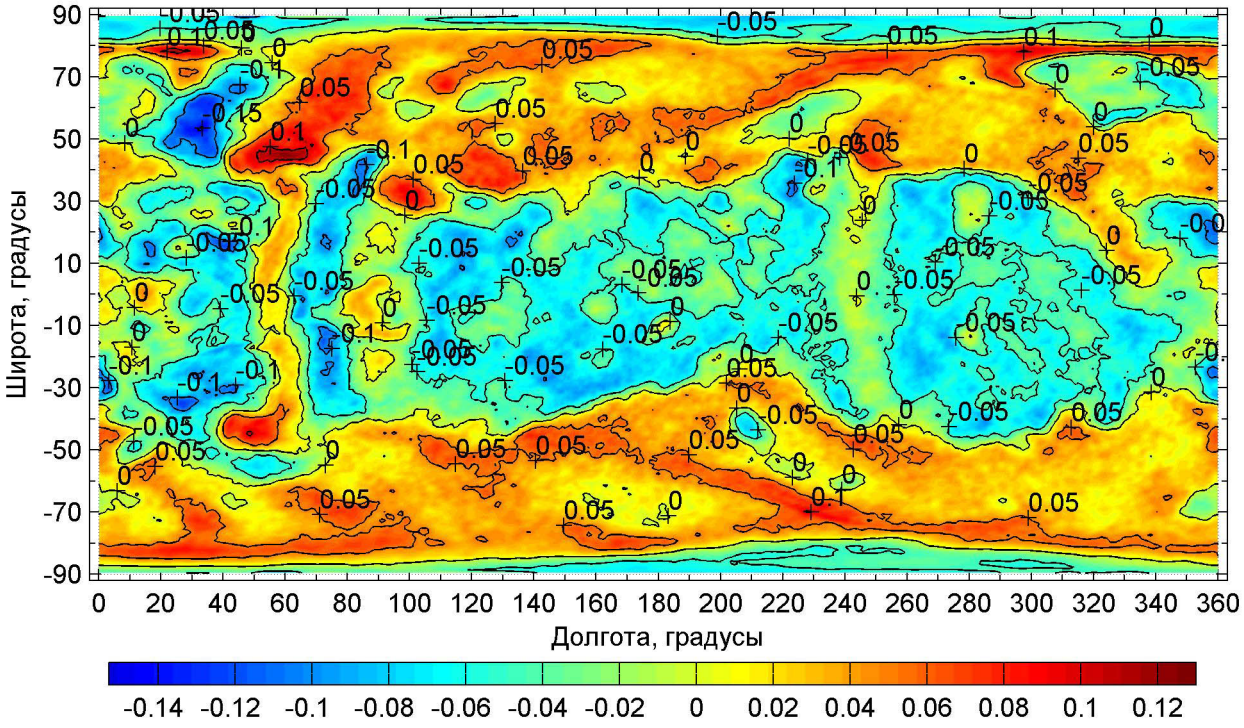

Рис. II.14. *Распределение вертикальной составляющей ветра (м/с) на высоте 90 км через 16595 часов после начала моделирования.*

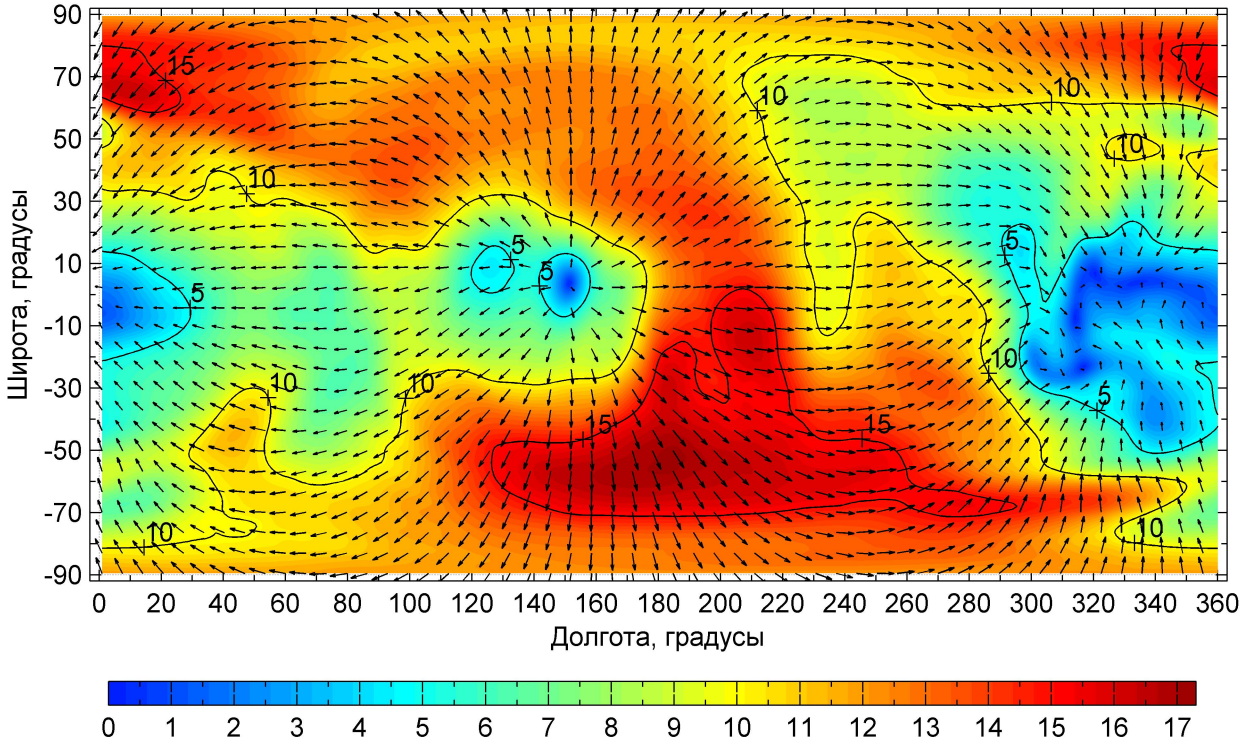

Рис. II.15. *Распределение горизонтальной составляющей ветра (м/с) на высоте 100 км через 16595 часов после начала моделирования.*

Из рис. II.14 видно, что распределение вертикальной составляющей ветра на высоте 90 км также качественно отличается от этого распределения на высоте 80 км. Отсутствует термический прилив. В приэкваториальной области и вблизи полюсов вертикальная составляющая ветра направлена преимущественно вниз, а на средних широтах эта составляющая направлена преимущественно вверх. При этом на всех широтах имеются области с горизонтальными размерами от 5^o до 10^o , в которых вертикальная ветра направлена вверх, а рядам этими областями имеются области примерно с такими же горизонтальными размерами, в которых эта компонента направлена вниз. Эти неоднородности в распределении вертикальной составляющей ветра расположены над горными системами. В северном полушарии такие неоднородности выражены сильнее, чем в южном полушарии и в приэкваториальной области, поскольку горные системы в этом полушарии в интервале широт от 55^o до 80^o выше и больше по протяженности, чем на других участках поверхности Венеры, как видно из рис. II.1.

Из рис. II.15 видно, что на высоте 100 км распределение горизонтальной составляющей ветра качественно отличается от распределения этой составляющей на высоте 90 км. Полностью отсутствует зональная суперротация, а вместо нее наблюдается перенос из центра дневной стороны в центр ночной стороны через полярные области и области средних широт. На дневной стороне на экваторе в районе подсолнечной точки в интервале долгот от 140^o до 170^o расположена область, из которой поток растекается на ночную сторону через полюса и средние широты. На ночной стороне на экваторе в интервале долгот от 300^o до 20^o вокруг противосолнечной точки расположена область, в которую стекается поток с дневной стороны, и в которой величина горизонтального ветра не превышает 5 м/с.

Из рис. II.16 видно, что на высоте 100 км распределение вертикальной компоненты ветра является сложным и неоднородным. На данной высоте величина этой компоненты ветра лежит в пределах от -0.44 м/с до 0.38 м/с. Видно, что отсутствует термический прилив, и что в приэкваториальной области в районе вечернего терминатора (долгота 62^o), в районе утреннего терминатора (долгота 242^o), в районе полуночного меридиана (долгота 332^o) и между утренним терминатором и полуночным меридианом вертикальная компонента ветра направлена преимущественно вниз. Видно также, что в приэкваториальной области в районе полуденного меридиана (долгота 332^o) и на ночной стороне между долготой 350^o и долготой 30^o вертикальная компонента ветра направлена преимущественно вверх. Вблизи полюсов она направлена вниз. В каждом полушарии на широтах

от $\pm 35^{\circ}$ до $\pm 80^{\circ}$ вертикальная компонента ветра направлена преимущественно вверх. На высоте 100 км также, как и на высоте 90 км, над горными системами хорошо заметны неоднородности в распределении вертикальной составляющей ветра, причем в северном полушарии эти неоднородности выражены сильнее, чем в южном полушарии и в приэкваториальной области.

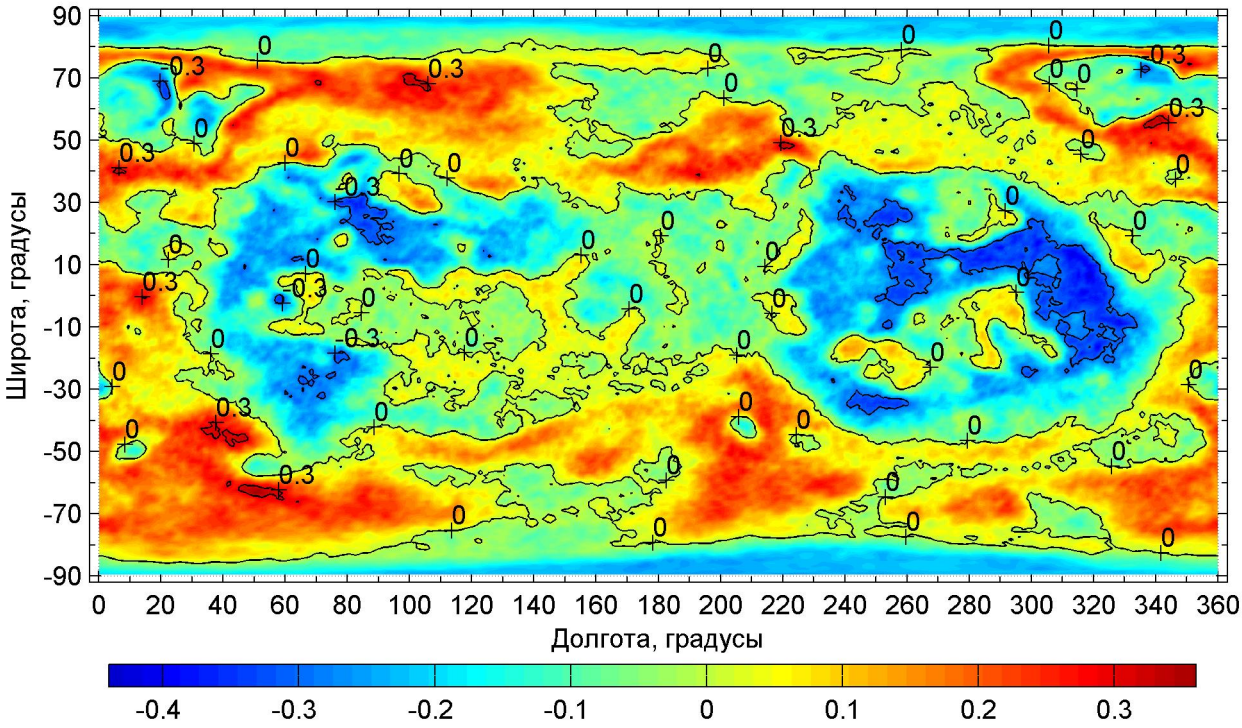

Рис. II.16. *Распределение вертикальной составляющей ветра (м/с) на высоте 100 км через 16595 часов после начала моделирования.*

Из рис. II.17 видно, что на высоте 110 км распределение горизонтальной составляющей ветра качественно подобно распределению этой составляющей на высоте 100 км. На обеих высотах полностью отсутствует зональная суперротация, и имеет место перенос из центра дневной стороны в центр ночной стороны через полярные области и области средних широт. При этом максимальная величина горизонтальной составляющей ветра на высоте 110 км достигает 22 м/с на дневной стороне в приэкваториальной области при долготе $190 - 200^{\circ}$ между полуденным меридианом и утренним терминатором.

Из рис. II.18 видно, что на высоте 110 км распределение вертикальной компоненты ветра является сильно неоднородным. На этой высоте величина вертикальной компоненты ветра достигает 1.2 м/с. Имеются большие по размерам области, где величина вертикальной компоненты ветра превышает 0.5 м/с и направлена как вверх, так и вниз. На высоте 110 км также, как на высотах 90 км и

100 км, над горными системами заметны неоднородности в распределении вертикальной составляющей ветра.

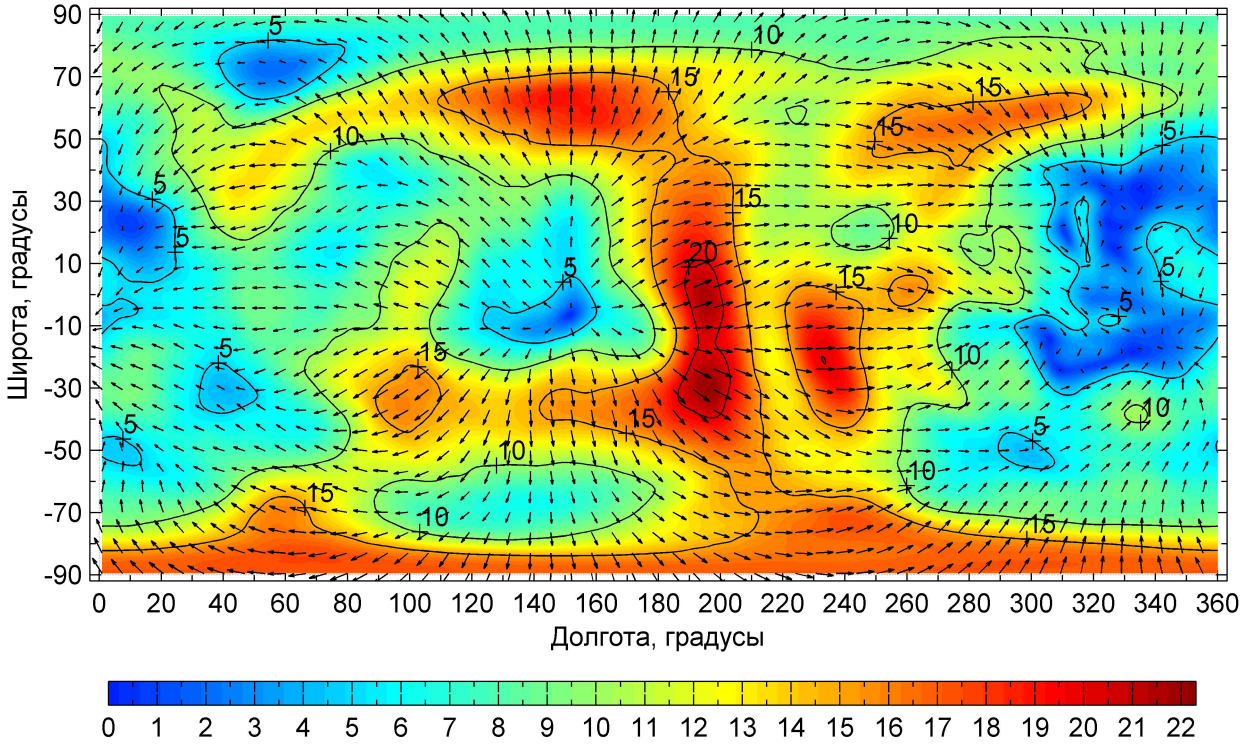

Рис. II.17. *Распределение горизонтальной составляющей ветра (м/с) на высоте 110 км через 16595 часов после начала моделирования.*

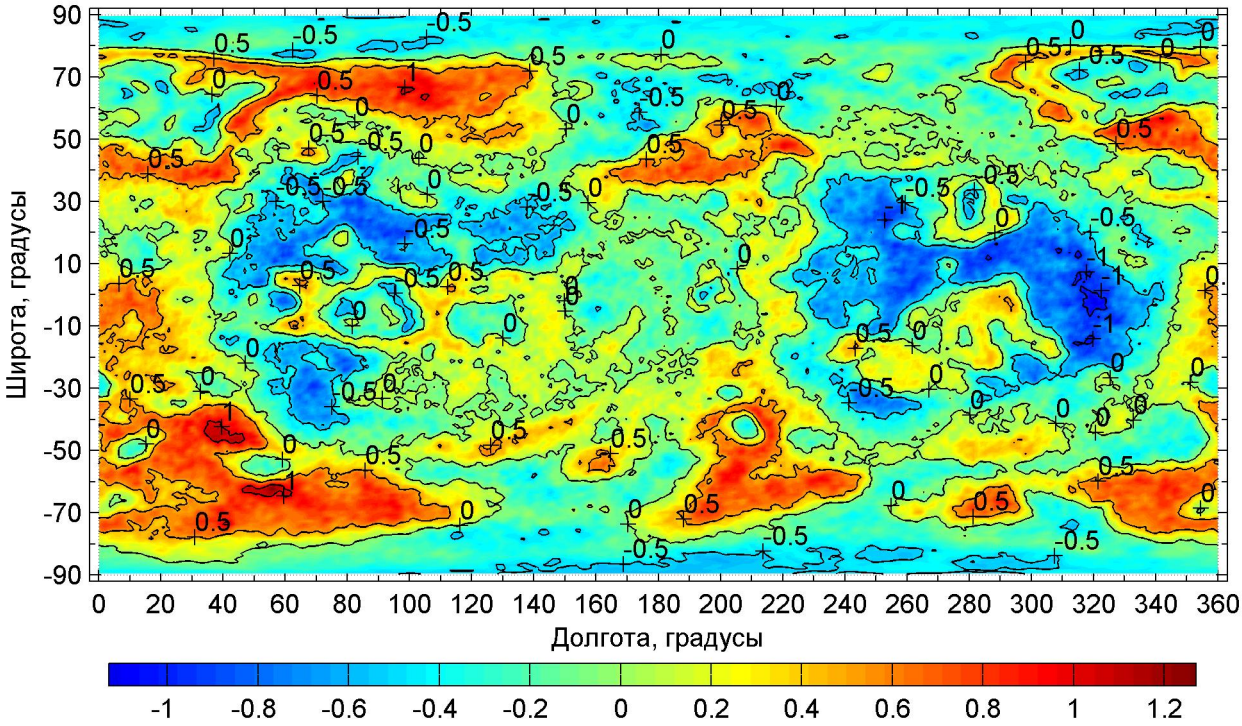

Рис. II.18. *Распределение вертикальной составляющей ветра (м/с) на высоте 110 км через 16595 часов после начала моделирования.*

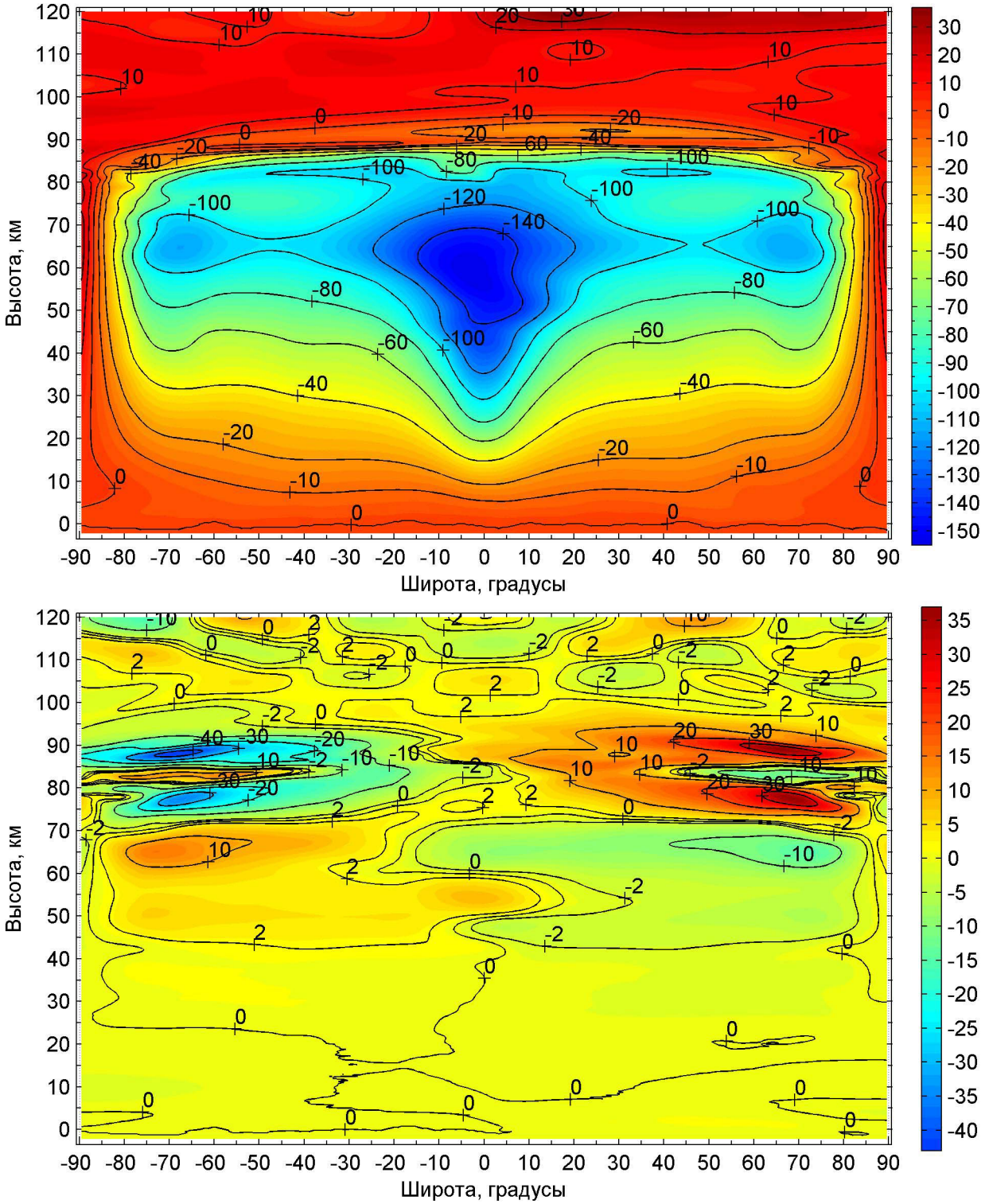

Рис. II.19. *Распределения зональной (вверху) и меридиональной (внизу) составляющих ветра (м/с) на утреннем меридиане через 16595 часов после начала моделирования.*

Из рис. II.18 также видно, что вертикальная составляющая ветра направлена вниз вблизи полюсов, а также в районах пересечения экватора с вечерним терминатором (долгота 62°), с утренним терминатором (долгота 242°) и с по-

луночным меридианом (долгота 332°), причем в районе пересечения экватора и полуночного меридиана значения вертикальной составляющей ветра лежат в пределах от -1.1 м/с до -0.5 м/с.

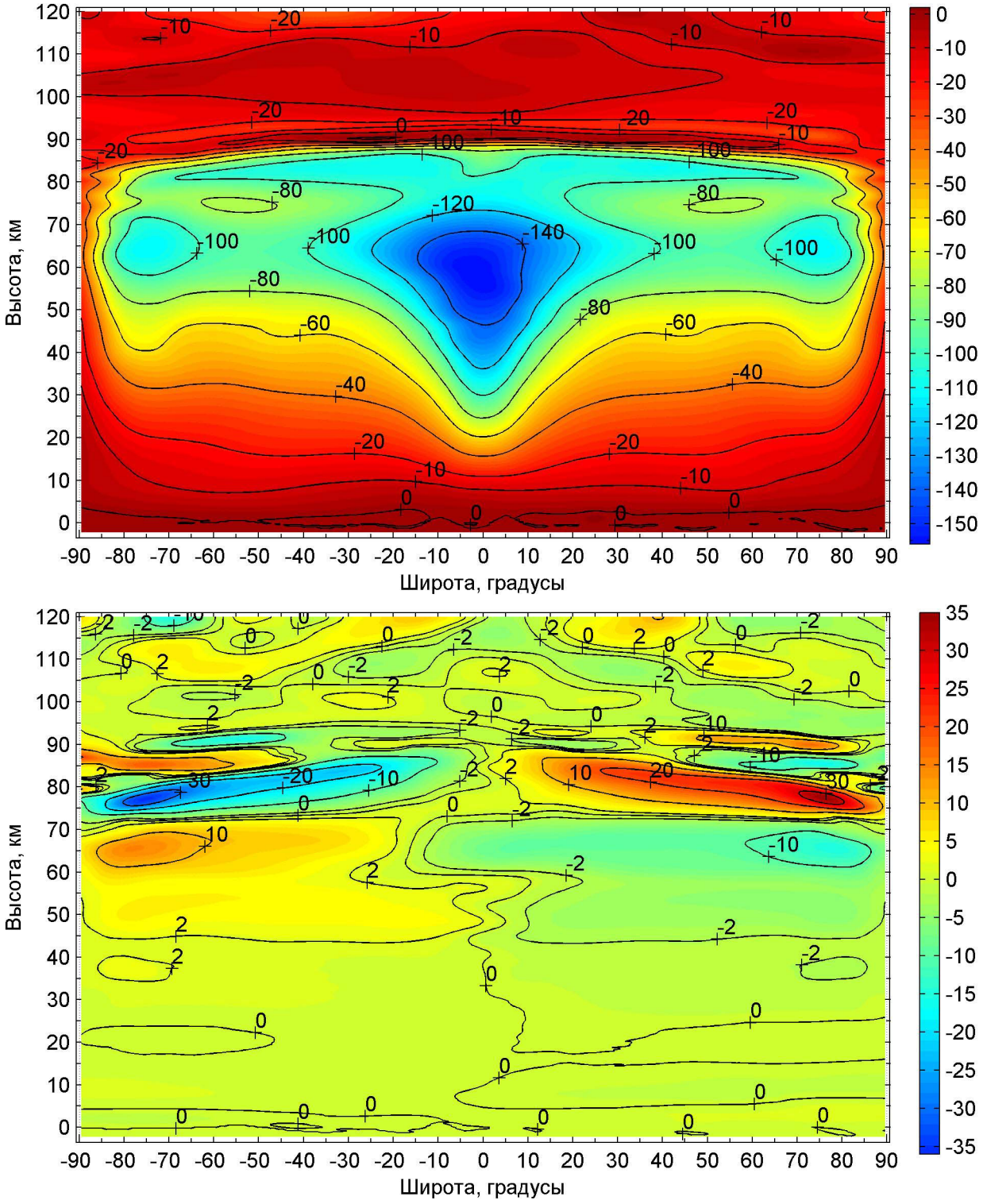

Рис. II.20. *Распределения зональной (вверху) и меридиональной (внизу) составляющих ветра (м/с) на вечернем меридиане через 16595 часов после начала моделирования.*

Также из рис. II.18 видно, что в приэкваториальной области в районе полуденного меридиана (долгота 332^o) и на ночной стороне между долготой 350^o и долготой 40^o вертикальная составляющая ветра направлена преимущественно вверх. В каждом полушарии на широтах от $\pm 35^o$ до $\pm 80^o$ вертикальная составляющая ветра направлена преимущественно вверх, но имеются области, где эта составляющая направлена вниз.

Из рис. II.19 и II.20 видно, что на высотах от 0 до 85 км имеет место зональная суперротация атмосферы, причем максимальная скорость зональной суперротации до 155 м/с достигается на экваторе на высотах от 50 до 70 км. Видно, что на широтах от -80^o до 80^o скорость зональной суперротации при движении от поверхности Венеры вверх растет с высотой наиболее быстро на экваторе, а медленнее всего на средних широтах. Видно, что на высотах 85–95 км скорость зональной суперротации убывает с ростом высоты. Также видно, что на высотах 60–90 км зональная и меридиональная компоненты ветра быстро изменяются, а на высотах 0–50 км меридиональная компонента ветра слабо меняется при изменении широты и долготы, причем величина этой компоненты ветра на этих высотах не превышает 2 м/с.

II.4 Анализ результатов моделирования

Изложенные выше результаты моделирования показали, что при предложенном в данной работе упрощенном способе расчета нагрева атмосферы излучением получилось распределение горизонтального ветра, которое неплохо согласуется с данными наблюдений о скорости суперротации на верхней границе облачного слоя [*Катунцев и др., 2013*] по величине максимальной скорости зональной суперротации и по области, где эта скорость наблюдается. Также результаты моделирования показали, что суперротация неразрывно связана с термическим приливом в атмосфере, который ее поддерживает. На дневной стороне происходит преобразование энергии излучения во внутреннюю энергию атмосферного газа, которая при его подъеме преобразуется в потенциальную энергию, а затем на ночной стороне при опускании атмосферного газа его потенциальная энергия преобразуется в механическую. Также удалось получить нисходящее движение атмосферного газа в районе полюсов на высотах 50–75 км, которое объясняет наблюдаемое понижение в районе полюсов верхней границы облачного слоя на 8–10 км по сравнению с экватором. Кроме того, удалось получить вблизи полюсов нисходящие воронкообразные течения на высотах 70–80 км, которые известны из наблюдений [*Piccioni и др., 2007*].

Результаты моделирования показали, что отсутствие квазистационарной кар-

тины циркуляции на высотах 90–110 км обусловлено рельефом поверхности Венеры. Из–за обтекания рельефа зональным течением генерируются подветренные волны, которые распространяясь вверх, становятся источником возмущений для формирования системы волн выше слоя зональной суперротации. Эти волны были обнаружены при помощи наблюдений. На высотах 8–10 км на средних и экваториальных широтах полученная при моделировании средняя скорость зональной суперротации составляет примерно 10–12 м/с. Обтекание зональным течением имеющихся на Венере горных систем высотой 5–11 км генерирует подветренные волны плавучести. В диапазоне высот от поверхности до 70–80 км, в котором скорость зональной суперротации растет с увеличением высоты, амплитуда этих волн при их распространении вверх с увеличением высоты растет незначительно. Из–за этого они слабо проявляются на верхней границе облачного слоя. Но выше 90 км, где величина горизонтальной компоненты в целом не растет с высотой, эти волны усиливаются и вызывают наблюдаемые динамические изменения в поле горизонтального ветра и вертикальные перемещения атмосферного газа со скоростью более 1.2 м/с на высоте 110 км. При моделировании с тем же самым нагревом атмосферы и теми же самыми начальными условиями, но при отсутствии рельефа на поверхности Венеры на всех высотах получилась квазистационарная картина циркуляции, которая перемещалась относительно поверхности Венеры вместе с подсолнечной точной, причем вертикальная компонента ветра на высотах более 90 км была в 5–10 раз меньше, чем в случае наличия рельефа.

Следует отметить, что численные эксперименты показали, что использующие уравнение гидростатики модели не описывают правильно возникновение в атмосфере волн плавучести при обтекании горных систем и распространение этих волн. Таким образом, описанный выше эффект не может быть получен в рамках моделей, использующих уравнение гидростатики.

Также результаты моделирования показали, что переход от наблюдаемой на верхней границе облачного слоя зональной суперротации к циркуляции с переносом атмосферного газа через полярные области с дневной стороны на ночную возможен только в случае, когда над облачным слоем на дневной стороне скорость нагрева атмосферного газа излучением достаточно быстро растет с высотой.

II.5 Выводы главы II

В данной главе представлена модель общей циркуляции атмосферы Венеры, которая основана на численном интегрировании полной системы уравнений

газовой динамики. В модели учитывается рельеф поверхности Венеры и используется равномерная сетка в связанной с центром Венеры сферической системе координат с шагом сетки по вертикали 200 м и шагами сетки по горизонтальным направлениям менее 1°. Такое высокое разрешение сетки при моделировании общей циркуляции атмосферы Венеры используется впервые в мировой практике. Программная реализация модели выполнена с использованием параллельных вычислений на нескольких графических процессорах одновременно. Представленная модель позволяет исследовать ряд динамических процессов, которые ранее были недоступны для моделирования с помощью известных гидростатических моделей. К таким процессам относятся волновые процессы, а также вихри в полярных областях на высотах 60–80 км.

В данной главе также предложен упрощенный способ расчета поля объемной мощности нагрева–охлаждения атмосферы Венеры за счет солнечного и собственного электромагнитного излучения. Предложенный способ позволяет исследовать ряд важных процессов в атмосфере Венеры. Изложены результаты численного моделирования общей циркуляции атмосферы Венеры, полученные с помощью представленной модели при использовании предложенного упрощенного способа расчета нагрева–охлаждения атмосферы Венеры излучением.

Впервые в мировой практике при моделировании удалось получить одновременно такие особенности общей циркуляции атмосферы Венеры, как зональную суперротацию на высотах менее 80 км, изменение типа горизонтальной циркуляции на высотах 80–95 км от зональной суперротации к циркуляции с преобладанием переноса атмосферного газа из центра дневной стороны на центр ночной стороны через области средних широт и через полярные шапки, а также наличие вблизи полюсов нисходящих воронкообразных течений на высотах 60–80 км, которые известны из наблюдений [*Piccioni и др., 2007*].

Также впервые в мировой практике исследовано влияние рельефа на общую циркуляцию атмосферы Венеры с использованием полной системы уравнений газовой динамики. Показано, что из–за обтекания рельефа зональным течением генерируются подветренные волны, которые распространяясь вверх, становятся источником возмущений для формирования выше слоя зональной суперротации системы волн, усиливающих вертикальный перенос и обнаруженных при помощи наблюдений.

Глава III.
Численное моделирование сезонных изменений общей циркуляции атмосферы Титана

III.1 Введение главы III

Титан является самим большим спутником Сатурна и единственным среди спутников планет Солнечной системы, обладающим плотной атмосферой. Титан имеет почти сферическую форму, его средний радиус равен 2575 км, а отклонение поверхности от сферы этого радиуса по последним данным лежит в пределах от -1.7 км до 0.5 км. Ускорение свободного падения на поверхности Титана составляет 1.352 м/с^2, что примерно в 7 раз меньше, чем на поверхности Земли. Полный оборот Титана вокруг Сатурна происходит за 15.945 земных суток. Плоскость орбиты Титана отклонена от экватора Сатурна и плоскости колец на 0.348 $^\circ$, а эксцентриситет орбиты равен 0.0288. Период вращения Титана вокруг своей оси и период его обращения вокруг Сатурна совпадают (синхронное вращение относительно Сатурна). Титан повёрнут к Сатурну всегда одной и той же стороной. Вследствие этого на поверхности Титана есть точка, в которой Сатурн находится в зените. От меридиана, проходящего через эту точку, ведется отсчет долготы. Период обращения Сатурна вокруг Солнца составляет примерно 29.46 лет. Ось вращения Титана перпендикулярна плоскости его орбиты вокруг Сатурна и почти сонаправлена оси вращения Сатурна, наклон которой составляет 26.73 $^\circ$. Последнее обеспечивает смену времён года на Титане. Каждый сезон длится примерно 7.365 земных лет. Последнее лето в южном полушарии Титана закончилось в августе 2009 года.

Атмосфера Титана состоит из азота на 98.4% и примерно на 1.6% из аргона и метана, которые преобладают в верхних слоях атмосферы, где их концентрация достигает 43%. Имеются также следы этана, диацетилена, метилацетилена, цианоацетилена, ацетилена, пропана, углекислого газа, угарного газа, циана, гелия. Практически отсутствует свободный кислород. Магнитное поле Титана очень мало. Поэтому, когда он выходит из магнитосферы Сатурна, его атмосфера подвергается воздействиям солнечного ветра и космического излучения. Также она подвержена солнечному облучению. Под воздействием этих трех факторов молекулы азота и метана разлагаются на ионы или углеводородные радикалы. Эти фрагменты, в свою очередь, образуют сложные органические соединения азота или соединения углерода, в том числе ароматические соединения (например, бензол). Также в верхних слоях атмосферы образуется полиин — полимер с сопряжённой тройной связью. Органические соединения, включающие в себя атомы

азота, придают поверхности Титана и атмосфере оранжевый цвет. На поверхности имеются метан–этановые озера и реки. На поверхности Титана давление примерно 1.5 атм, а температура 93–100 K. Граница тропосферы располагается примерно на высоте 35 км. На высотах 35–50 км простирается обширная тропопауза, где температура остается практически постоянной около 80 K, а затем начинает расти с высотой и на высоте 500 км достигает 152 K.

К настоящему моменту достаточно полно экспериментально изучены общие закономерности распределения температуры в атмосфере Титана. Данные наблюдений об общей циркуляции атмосферы пока не достаточно полны. В работах [*Kostiuk et al., 2001, 2005, 2006, 2010; Luz et al., 2005; Moreno et al., 2005; Flasar et al., 2005; Porco et al., 2005*] приведены результаты измерений величины зональной составляющей ветра на разных высотах, полученные различными методами на основании наблюдений с Земли. При посадке зонда *Huygens* на поверхность Титана в январе 2005 года были проведены измерения скорости горизонтального ветра, опубликованные в работах [*Bird et al., 2005; Tomasko et al., 2005*]. Анализ указанных измерений будет проведен ниже вместе с анализом результатов моделирования.

В данной главе представлены результаты численного моделирования общей циркуляции атмосферы Титана для межсезонного перехода от момента равноденствия до середины лета в северном полушарии. Для моделирования общей циркуляции атмосферы Титана автором диссертации вместе с К. Г. Орловым была создана модель, основанная на численном решении полной системы уравнений движения вязкого сжимаемого газа без каких-либо упрощений на пространственной сетке с горизонтальным разрешением 15/16 градуса, которое в 3–5 раз лучше, чем у моделей, разработанных другими научными группами [*Tokano, 2013; Newmana et al, 2011; Lora et al, 2015*]. В модели учтен рельеф поверхности Титана. Карта рельефа поверхности Титана [*Lorenz et al., 2013*] приведена на рис. III.1. Из этого рисунка видно, что на средних и низких широтах возвышенности и понижения чередуются, а отклонения поверхности от сферы среднего радиуса здесь находятся в пределах от -800 м до 500 м. Видно также, что в полярных областях имеются только понижения, причем отклонения поверхности от сферы среднего радиуса здесь находятся в пределах от -1670 м до -400 м.

В нашей модели пока используется упрощенный способ расчета радиационного нагрева–охлаждения атмосферы — так называемое релаксационное приближение. Упрощенный подход в данной версии модели используется по причине сложности создания точной модели переноса излучения в атмосфере Титана, об-

ладающей необходимым быстродействием. В то же время использование упрощенного способа расчета нагрева–охлаждения атмосферы позволяет исследовать ряд важных закономерностей циркуляции атмосферы Титана.

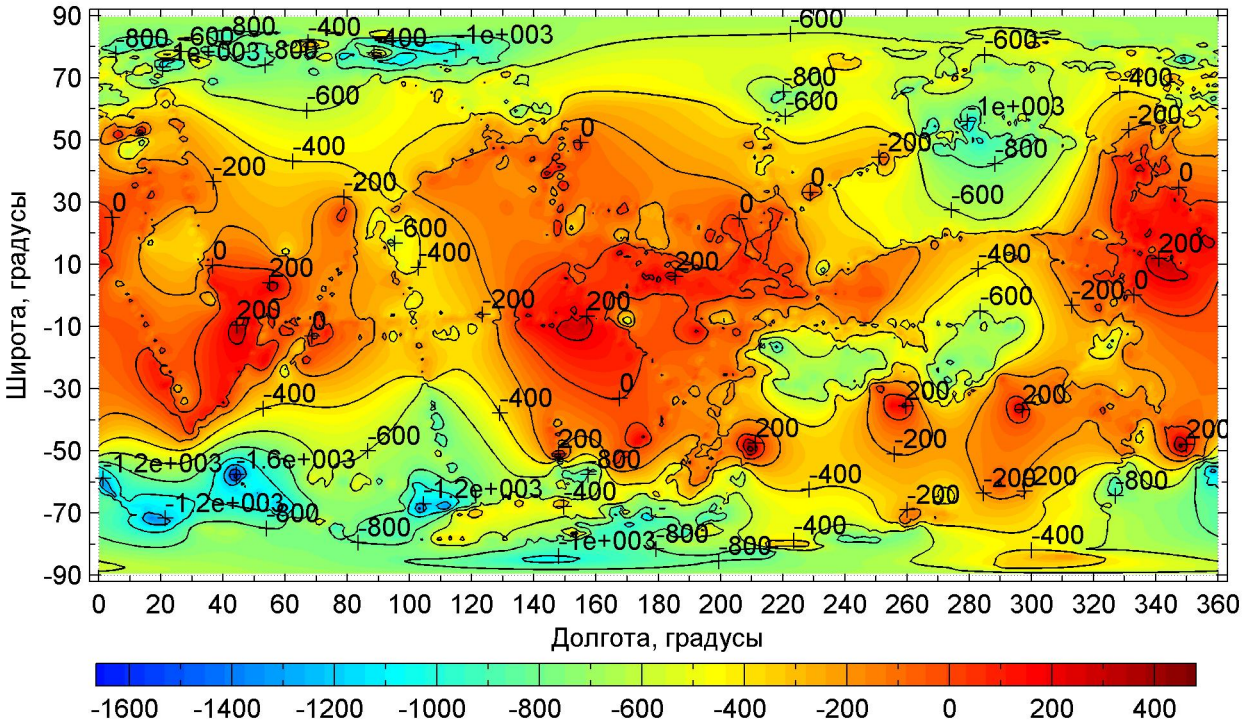

Рис. III.1. *Отклонение в метрах поверхности Титана от сферы радиуса 2575 км.*

При моделировании для условий равноденствия удалось получить переход типа горизонтальной циркуляции атмосферы Титана на высотах более 400 км от зональной суперротации к циркуляции с преобладанием переноса атмосферного газа от подсолнечной области на дневной стороне к противосолнечной области на ночной стороне. Также получились существенные различия между циркуляцией для условий равноденствия и циркуляцией для условий, когда подсолнечная точка смещена в северное полушарие на 5 градусов широты или более того. Моделирование показало, что вертикальный перенос играет важную роль в общей циркуляции атмосферы Титана.

III.2 Описание модели

III.2.1 Система уравнений, расчетная сетка и метод численного интегрирования

В модели атмосферный газ рассматривается как смесь газов постоянного состава, аэрозольная составляющая атмосферы не рассматривается. Область моделирования простирается от поверхности до высоты 565 км над средним уровнем поверхности. Нижняя граница области моделирования является ступенчатой

поверхностью, проходящей через границы контрольных объемов узлов сетки, и аппроксимирует рельеф поверхности Титана. При проведении расчетов использовалась равномерная сетка в сферических координатах, описанная в разделе I.4.1 главы I. Сетка имела 386 узлов по долготе и 192 узла по широте (шаг 15/16 градуса), а также 566 узлов по высоте (шаг 1 км).

Модель основана на численном решении системы осредненных по Фавру уравнений динамики вязкого сжимаемого газа (I.1)–(I.4), записанных в консервативной форме. В данном случае ускорение внешних сил складывается из ускорения силы тяжести, заданного формулой (I.5), а также из ускорения силы Кориолиса и из ускорения центробежной силы, которые заданы по формулам, приведенным в разделе I.2 главы I.

Для численного решения системы (I.1)–(I.4) использовалась явная разностная схема, детально описанная в разделах I.4.2 и I.4.3 главы I. Программная реализация модели выполнена для использования параллельных вычислений на графических процессорах фирмы NVIDIA последнего поколения и допускает одновременное использование при вычислениях от 1 до 4 графических процессоров на компьютере с логически общей памятью.

III.2.2 Задание радиационного нагрева атмосферы Титана

Для задания мощности нагрева–охлаждения атмосферного газа в единице объема за счет поглощения–испускания электромагнитного излучения в модели использовалось релаксационное приближение, описанное в разделе I.6 главы I. Указанная мощность вычислялась по формуле (I.82).

Входящие в эту формулу время релаксации $\tau_{\text{рел}}(h)$ и релаксационная температура $T_{\text{рел}}(t, h, \varphi, \beta)$ задавались следующим образом. Время релаксации считалось не зависящим от высоты и равным 5-ти часам. Релаксационная температура зависела от времени, высоты, долготы и широты и задавалась для условий равноденствия по формуле

$$T_{rel}(t, h, \varphi, \beta) \,=\, T_{\text{ср}}(h) + T_{dop}(h) \left(\max\{\cos\theta,\, 0\} - 0.25 \right) . \qquad \text{(III.1)}$$

В этой формуле через $T_{\text{ср}}(h)$ обозначена средняя температура на высоте h, вычисленная по инженерной модели атмосферы Титана [*Yelle et al, 1997*], θ — зенитный угол Солнца в точке с долготой φ и широтой β в момент времени t, а $T_{dop}(h)$ — поправочная температура, которая зависит только от высоты и подбирается так, чтобы обеспечить наилучшее соответствие результатов моделирования данным наблюдений. В данной главе представлены результаты, полученные с использованием поправочной температуры, которая в градусах Кельвина за-

дана формулами

$$T_{dop}(h) = \begin{cases} 5 & \text{при } 0 \le h \le h_1, \\ 5 + 45 \cdot x^3(2-x)^3\,, \;\; x = \dfrac{h-h_1}{h_2-h_1} & \text{при } h_1 \le h \le h_2, \\ 50 & \text{при } h_2 \le h \le h_3, \\ 50 - 15 \cdot x^3(2-x)^3\,, \;\; x = \dfrac{h-h_3}{h_4-h_3} & \text{при } h_3 \le h \le h_4, \\ 35 & \text{при } h_4 \le h, \end{cases}$$

в которых $h_1 = 70\,$км, $h_2 = 220\,$км, $h_3 = 360\,$км, $h_4 = 510\,$км.

Второе слагаемое в правой части (III.1) задает нагрев на освещенной стороне и выхолаживание на ночной стороне. Вертикальный профиль $T_{\text{ср}}(h)$ изображен на рис. III.2 слева, а вертикальный профиль $T_{dop}(h)$ изображен на этом рисунке справа.

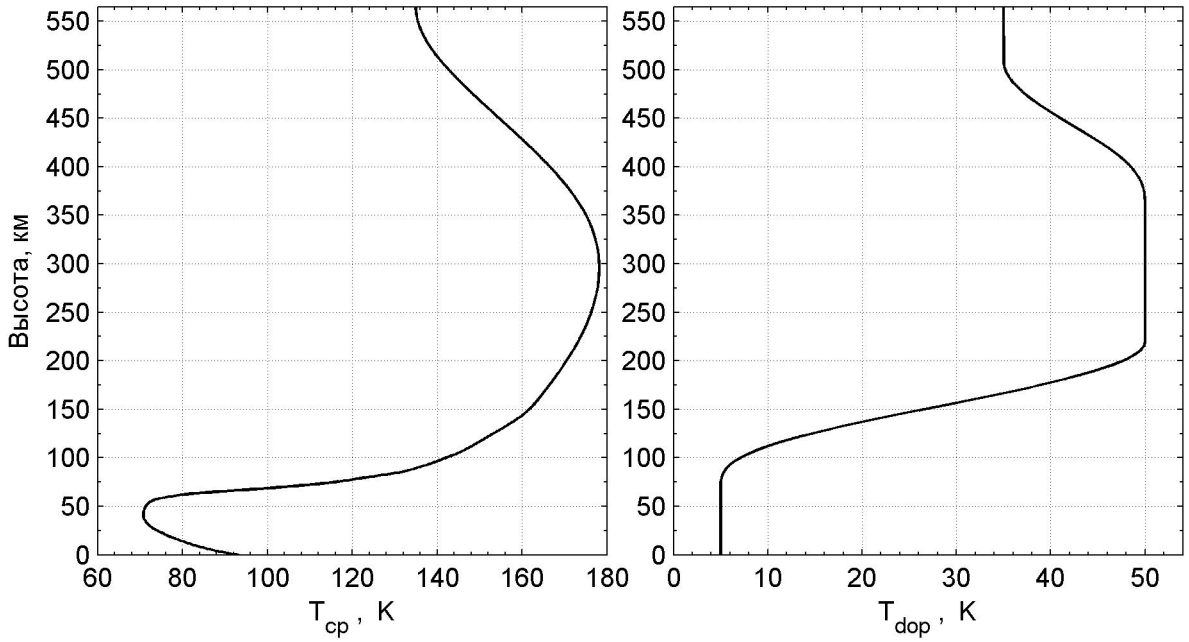

Рис. III.2. *Вертикальные профили средней температуры $T_{ср}(h)$ по инженерной модели атмосферы Титана (слева) и поправочной температуры $T_{dop}(h)$ (справа).*

III.2.3 Начальные и граничные условия

В модели использовались следующие граничные условия. На нижней границе области моделирования было задано условие прилипания, то есть полагалась равной нулю гидродинамическая скорость на поверхности Титана. Также на нижней границе была задана нулем вертикальная компонента вектора потока тепла. На верхней границе области моделирования были заданы условие непротекания через границу (то есть была задана равной нулю вертикальная компонента

гидродинамической скорости), а также условие проскальзывания (были заданы равными нулю производные по высоте от горизонтальных компонент гидродинамической скорости). Кроме того, на верхней границе была задана равной нулю производная по высоте от вертикальной компоненты вектора потока тепла.

Распределение температуры атмосферного газа в начальный момент задавалось горизонтально однородным по формуле $T(t, h, \varphi, \beta) = T_{\text{ср}}(h)$, где $T_{\text{ср}}(h)$ — средний по планете профиль температуры, вычисленный по инженерной модели атмосферы Титана [*Yelle et al., 1997*]. Начальное распределение плотности атмосферного газа на поверхности Титана задавалось однородным по долготе и равным значению плотности на поверхности для профиля, вычисленного по инженерной модели атмосферы Титана. Зависимость плотности от высоты при фиксированной широте рассчитывалась из условия гидростатического равновесия по вертикали. В начальный момент времени долгота подсолнечной точки равнялась 180^{o}.

Вертикальная и меридиональная компоненты скорости ветра в начальный момент брались равными нулю, а зональная компонента зависела только от высоты и широты и вычислялась по формуле

$$v_{\text{зон}}(h,\, \beta) = -v_{\text{макс}} \cdot v_{\text{экв}}(h) \cdot \cos\beta\,, \qquad \text{(III.2)}$$

в которой $v_{\text{макс}}$ – максимальное значение зональной компоненты ветра на экваторе, а $v_{\text{экв}}(h)$ – гладкий безразмерный вертикальный профиль зональной компоненты ветра, заданный формулами

$$v_{\text{экв}}(h) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot (5 - x^4)}{4}\,, \;\; x = \dfrac{h}{180\,\text{км}} & \text{при } h \in [0,\, 180]\,\text{км}, \\ 1 & \text{при } h \in [50,\, 68]\,\text{км}. \end{cases}$$

В интервале высот 0–180 км $v_{\text{экв}}(h)$ почти линейно возрастает с высотой до значения 1, в интервале высот 180–565 км сохраняет это значение. Значения v_{max} брались равными от 150 до 250 м/с. Описанное начальное условие означает суперротацию атмосферы (зональный ветер направлен в сторону вращения Титана).

III.3 Результаты моделирования

Было проведено моделирование процесса установления общей циркуляции атмосферы Титана для условий равноденствия с использованием описанных в предыдущем разделе этой главы начальных условий. Также было проведено моделирование процесса установления общей циркуляции атмосферы Титана и для

условий, когда подсолнечная точка находилась в северном полушарии на широтах 5^0, 10^0, 15^0 и 20^0, то есть изучался процесс перехода от середины весны к лету в северном полушарии. Выяснилось, что циркуляция атмосферы Титана существенно изменяется при смене сезонов. Моделирование показало, что через 4000 часов физического времени после начала моделирования (солнечные сутки на Титане примерно 375 часов) качественная картина циркуляции практически перестает меняться и выходит на квазипериодический режим, на который накладываются различные волновые и колебательные процессы.

III.3.1 Результаты моделирования для условий равноденствия

Для условий равноденствия были получены следующие основные закономерности общей циркуляции. На высотах 30—380 км имеют место термический прилив на дневной стороне и связанная с ним зональная суперротация, а также расширение зонального потока на дневной стороне и его сужение на ночной стороне. Максимальную ширину зональный поток имеет в районе вечернего терминатора, а минимальную — в районе утреннего терминатора. При этом скорость обгоняющего вращение Титана зонального потока лежит в пределах 0–140 м/с. Максимальные значения скорости зонального ветра достигаются в районе утреннего меридиана на экваторе на высотах 180–220 км и на средних широтах на высотах 260–300 км. Также в полученной циркуляции на высотах выше 400 км с ростом высоты меняется характер поля горизонтального ветра от зональной суперротации на экваториальных и средних широтах, характерной для высот менее 400 км, к полю ветра с преобладанием переноса с освещенной стороны на ночную сторону. Поле ветра последнего типа было получено на высоте более 500 км. Также моделирование показало, что в атмосфере Титана имеет место существенный вертикальный перенос. Величина вертикального ветра на высоте 200 км превышает 1 м/с, а на высоте 380 км превышает 5 м/с.

На рис. III.3–III.15 отражена циркуляция атмосферы Титана, полученная через 6400 часов после начала моделирования для случая, когда учитывался рельеф поверхности, максимальная скорость суперротации в начальный момент ($v_{\text{макс}}$ в формуле (III.2)) равнялась 150 м/с, а релаксационная температура вычислялась по формуле (III.1), как описано в разделе III. 2.2 этой главы. В этот момент подсолнечная точка находилась на экваторе на долготе примерно 80^o, вечерний терминатор находился на долготе 170^o, утренний терминатор находился на долготе 350^o, а полуночный меридиан находился на долготе 260^o . На рис. III.4–III.7 приведены распределения горизонтальной компоненты ветра на высотах 100, 200, 300, 400 и 500 км. На всех этих рисунках стрелки указыва-

ют направление горизонтальной составляющей ветра, а их длина и цвет фона указывают ее абсолютную величину.

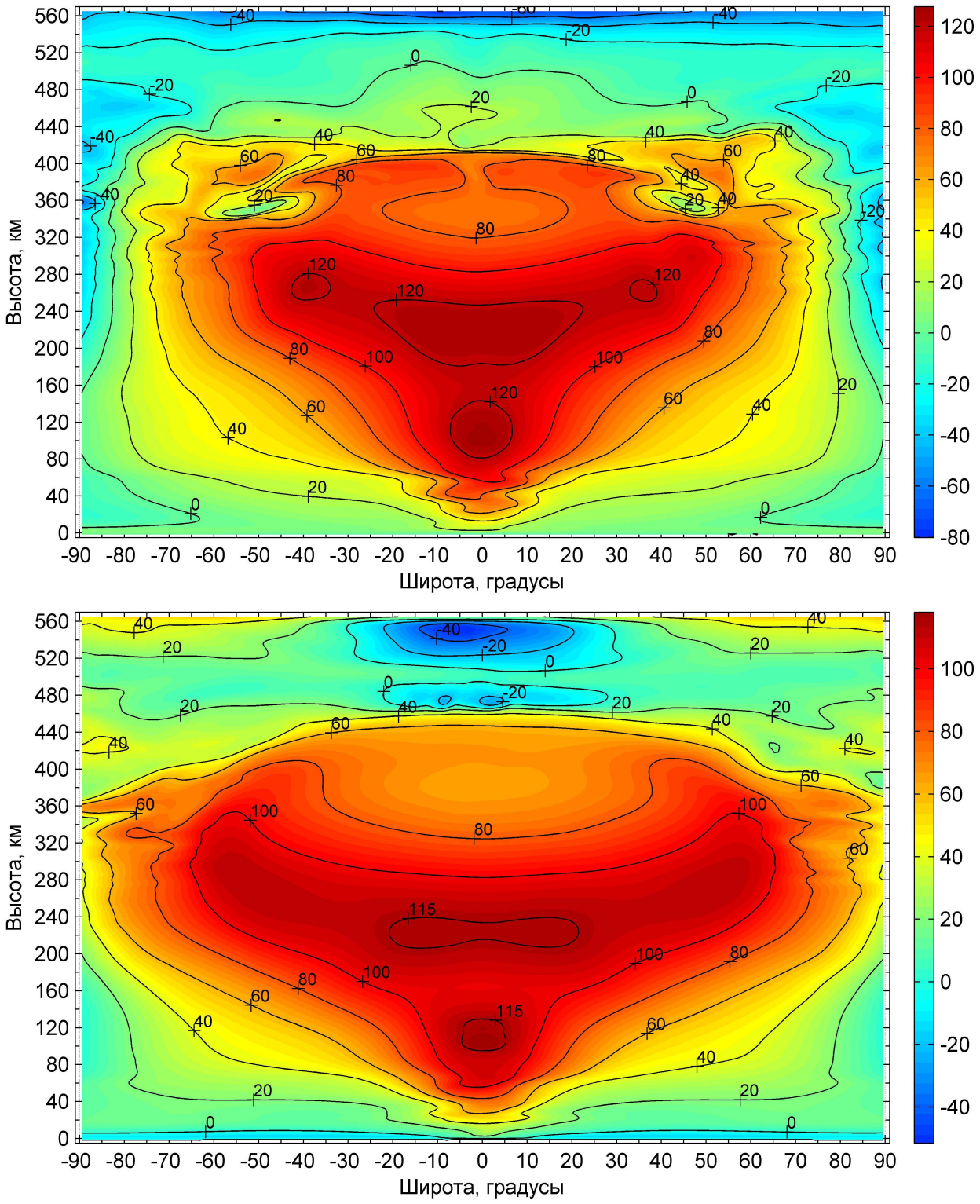

Рис. III. 3. *Распределения зональной компоненты скорости ветра (м/с) на утреннем (вверху) и вечернем (внизу) терминаторах, полученные для условий равноденствия через 6400 часов после начала моделирования.*

Из рис. III.3 видно, что на высотах от 20 до 440 км имеет место зональная

суперротация атмосферы, причем максимальная скорость зональной суперротации около 125 м/с достигается на утреннем терминаторе в районе экватора на высотах от 100 до 140 км и от 200 до 240 км, а также на широтах $\pm 40^{o}$ на высотах от 260 до 280 км. Видно, что в районе экватора на высотах от 0 до 240 км зависимость зональной компоненты ветра от высоты не является монотонной. Также видно, что на вечернем терминаторе зональный поток на высотах от 160 до 320 км заметно шире, чем на утреннем терминаторе. Верхняя граница зонального потока со скоростью более 20 м/с на вечернем терминаторе примерно на 20–30 км выше, чем на утреннем терминаторе. Видно, что на широтах от -60^{o} до 60^{o} скорость зональной суперротации при движении от поверхности Титана вверх растет с высотой наиболее быстро на экваторе, а медленнее всего на средних широтах. Видно, что на высотах 400–450 км скорость зональной суперротации убывает с ростом высоты. Также видно, что на высотах 380–450 км зональная компонента ветра быстро изменяется.

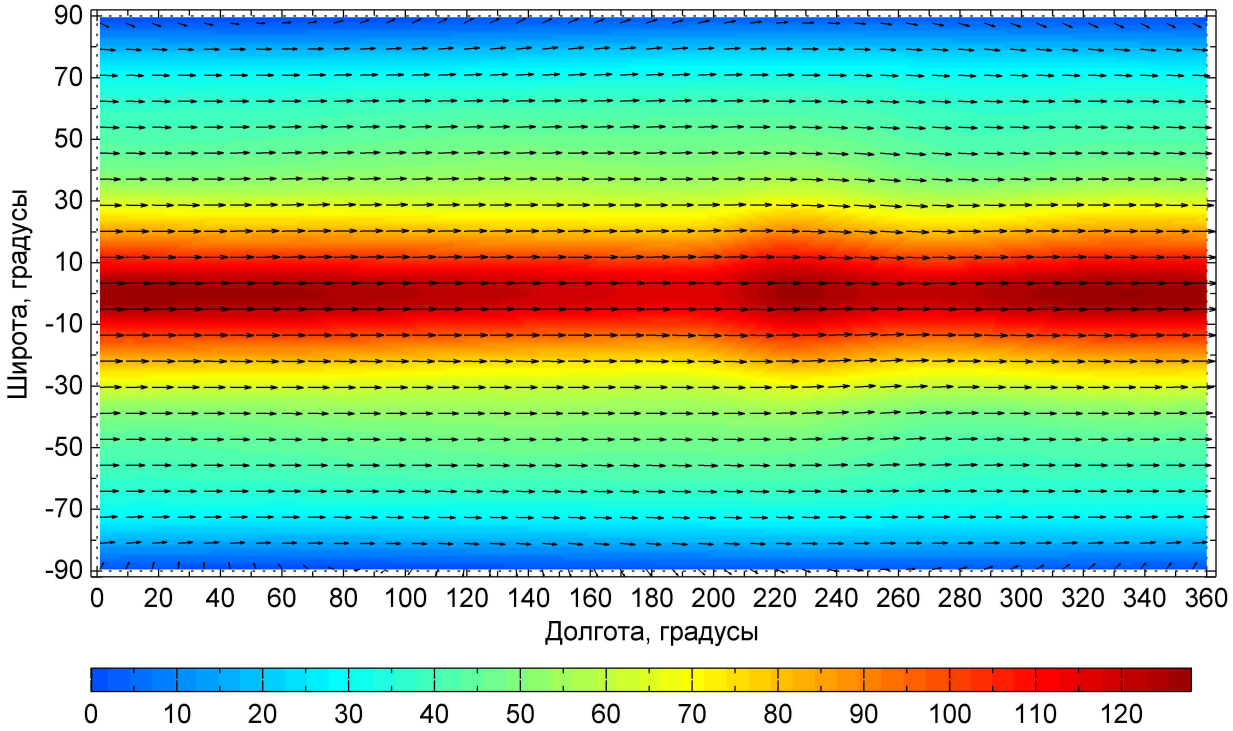

Рис. III.4. *Распределение горизонтальной компоненты скорости ветра (м/с) на высоте 100 км, полученное для условий равноденствия через 6400 часов после начала моделирования.*

Из рис. III.4 видно, что на высоте 100 км горизонтальный ветер слабо зависит от долготы и направлен преимущественно с запада на восток, причем максимальной величины около 125 м/с его скорость достигает в районе экватора в широтном интервале от -5^{0} до 5^{0}. Также видно, что вне экваториальной об-

ласти горизонтальный ветер плавно уменьшается при движении от экватора к полюсам.

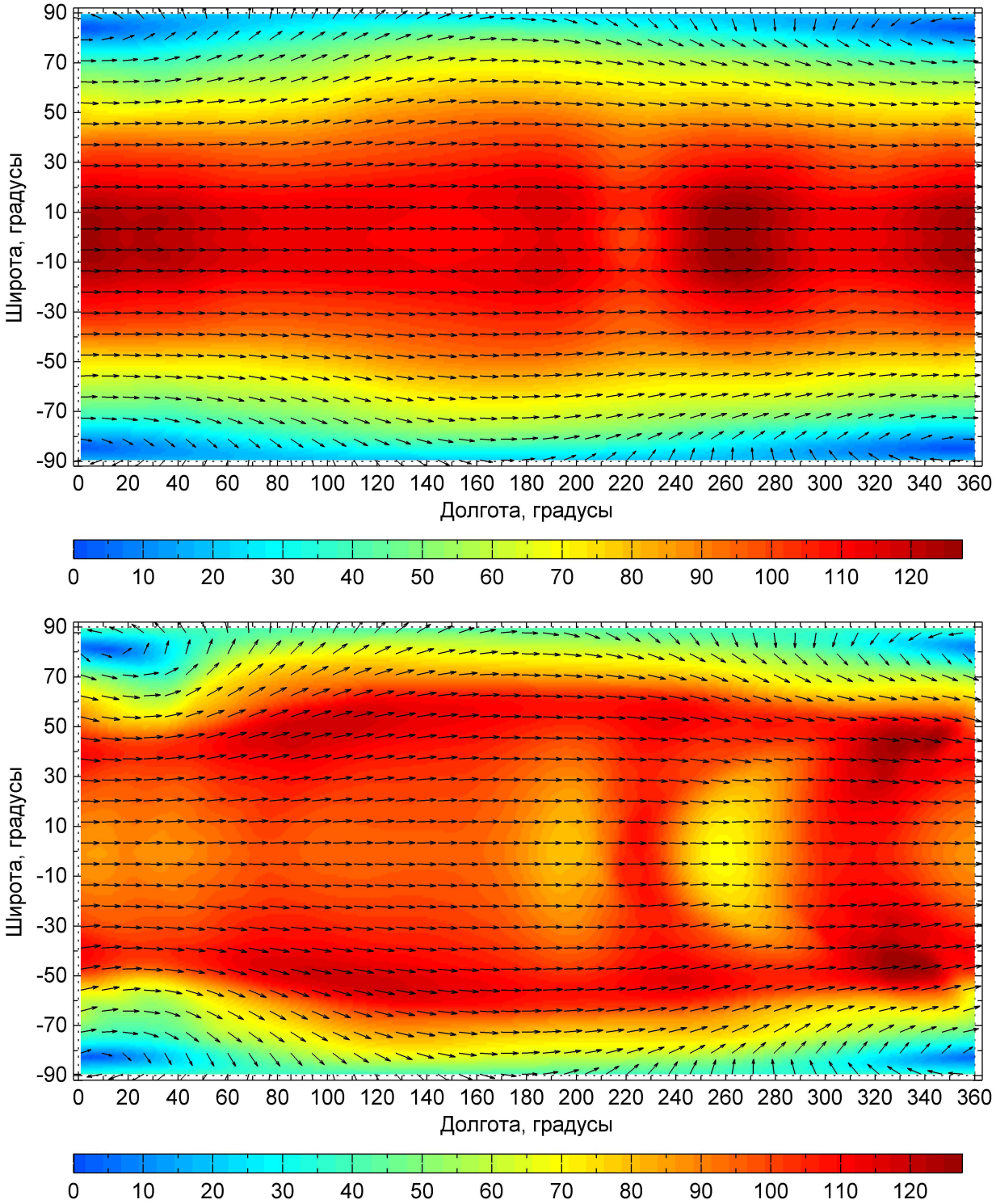

Рис. III.5. *Распределения горизонтальной компоненты скорости ветра (м/с) на высоте 200 км (вверху) и на высоте 300 км (внизу), полученные для условий равноденствия через 6400 часов после начала моделирования.*

Из рис. III.5 видно, что на высоте 200 км горизонтальный ветер заметно зависит от долготы и направлен преимущественно с запада на восток, причем мак-

симальной величины около 128 м/с его скорость достигает в районе пересечения экватора и утреннего терминатора, а также в районе экватора в интервале долгот от 250^0 до 270^0. Видно, что на этой высоте зональный поток расширяется на дневной стороне при долготе от 15^o до 195^o и сужается на ночной стороне.

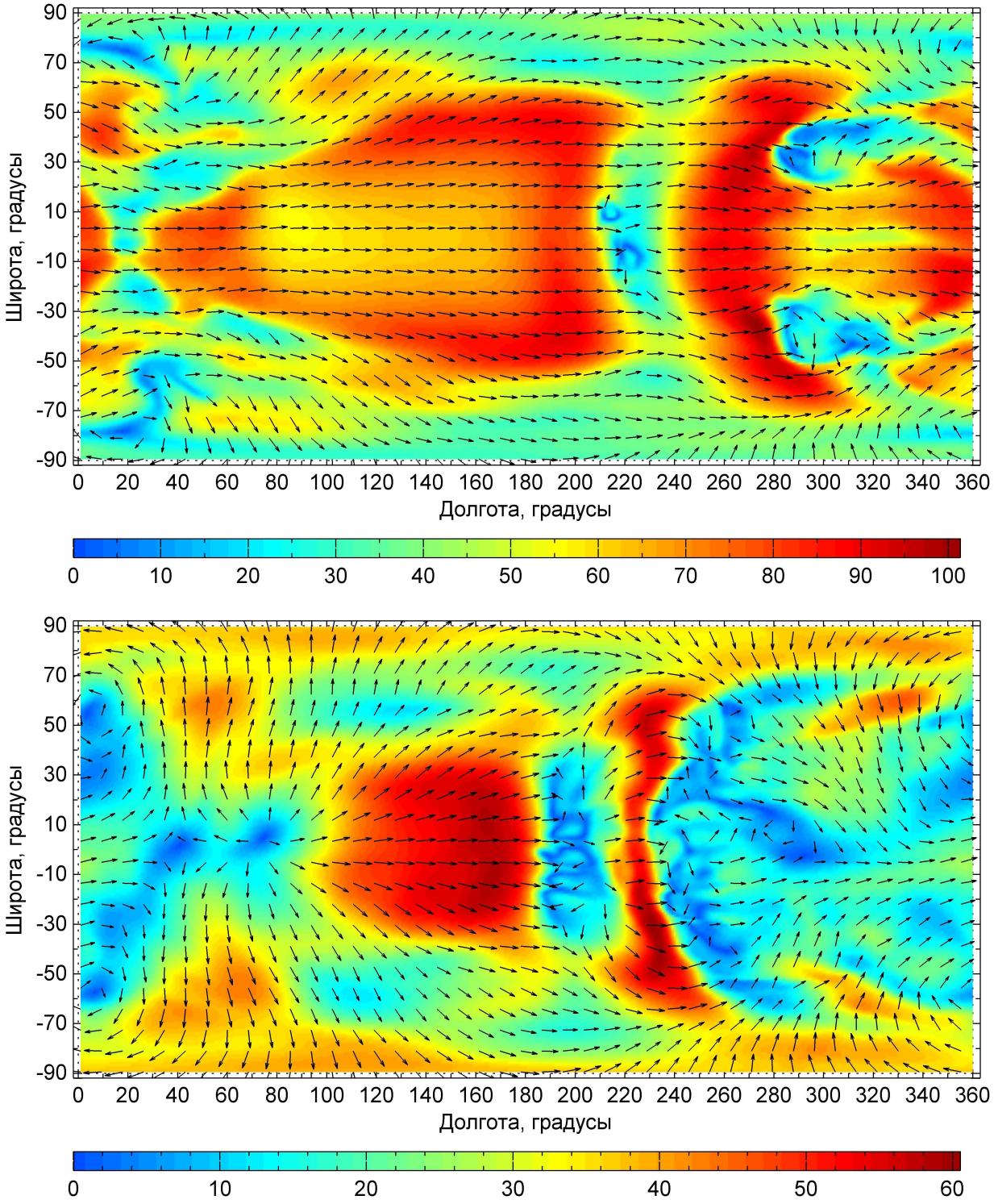

Рис. III.6. *Распределения горизонтальной компоненты скорости ветра (м/с) на высоте 400 км (вверху) и на высоте 450 км (внизу), полученные для условий равноденствия через 6400 часов после начала моделирования.*

Также из рис. III.5 видно, что на высоте 300 км горизонтальный ветер также направлен преимущественно с запада на восток, причем зональный поток расширяется на дневной стороне и сужается на ночной стороне заметно сильнее, чем на высоте 200 км. Видно, что на высоте 300 км скорость горизонтального ветра достигает максимальной величины около 125 м/с на средних широтах на ночной стороне в интервале долгот от 320^0 до 350^0.

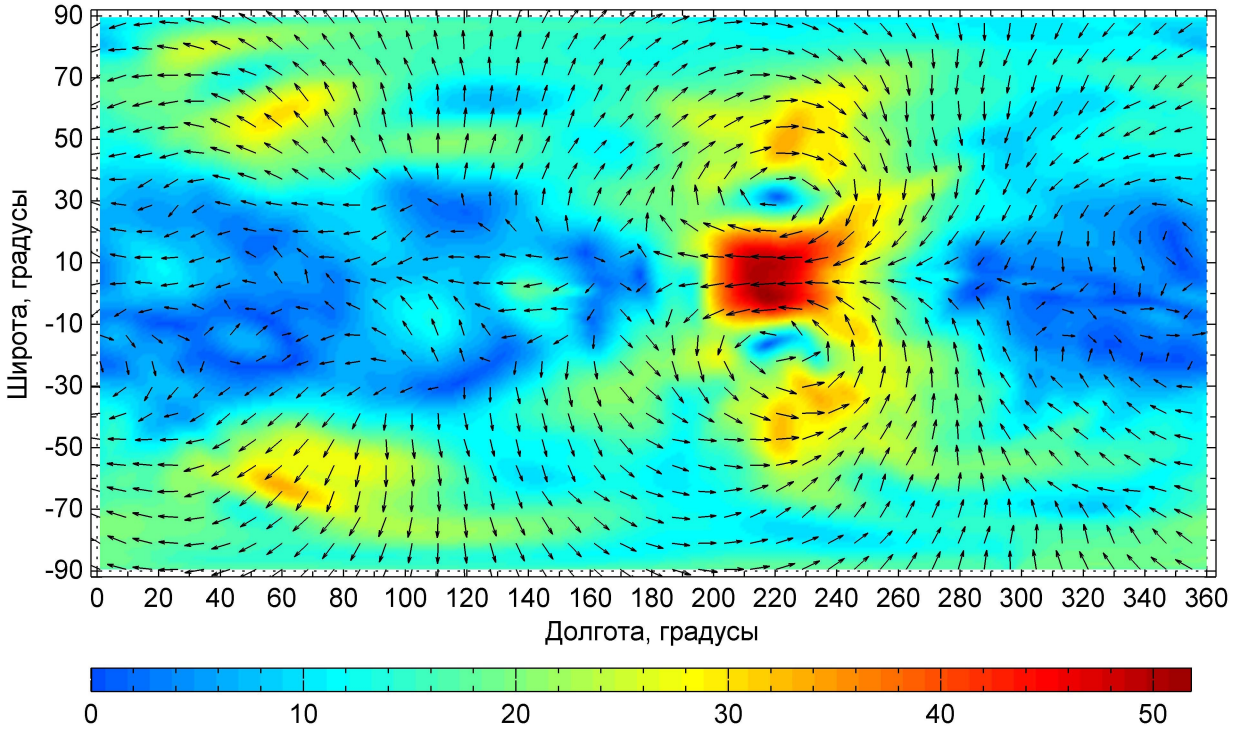

Рис. III.7. *Распределение горизонтальной компоненты скорости ветра (м/с) на высоте 500 км, полученное для условий равноденствия через 6400 часов после начала моделирования.*

Из рис. III.6 видно, что на высоте 400 км распределение горизонтальной составляющей ветра существенно отличается от ее распределения на высоте 300 км. На дневной стороне на низких и средних широтах преобладает зональная суперротация атмосферы. Значительно увеличивается полусуточная вариация горизонтальной составляющей ветра по сравнению с высотой 300 км, и появляется перенос атмосферного газа с дневной стороны на ночную через приполюсные области. В районе утреннего терминатора и на ночной стороне в интервале долгот от 210^0 до 250^0 и интервале долгот от 280^0 до 330^0 имеются области, на границах которых величина горизонтальной составляющей ветра резко понижается. Максимальные значения горизонтальной составляющей ветра на высоте 400 км составляют около 100 м/с. Также из рис. III.6 видно, что на высоте 450 км распределение горизонтальной составляющей ветра существенно отличается от

ее распределения на высоте 400 км. Преобладает горизонтальный перенос атмосферного газа с дневной стороны на ночную через приполюсные области и через область средних и низких широт между подсолнечной точкой и вечерним терминатором, где величина горизонтальной составляющей ветра достигает своих максимальных значений около 60 м/с. В районе этого терминатора величина горизонтальной составляющей ветра резко понижается.

Из рис. III.7 видно, что на высоте 500 км распределение горизонтальной составляющей ветра существенно отличается от ее распределения на высоте 400 км. На высоте 500 км отсутствует зональная суперротация атмосферы и преобладает перенос атмосферного газа с дневной стороны на ночную через приполюсные области и области средних широт. На ночной стороне между вечерним терминатором и полуночным меридианом имеются два крупномасштабных вихря с центрами в районе точек с долготой 225^0 и широтой $\pm 30^0$. Между этими вихрями на экваторе величина горизонтальной составляющей ветра достигает своих максимальных значений около 51 м/с.

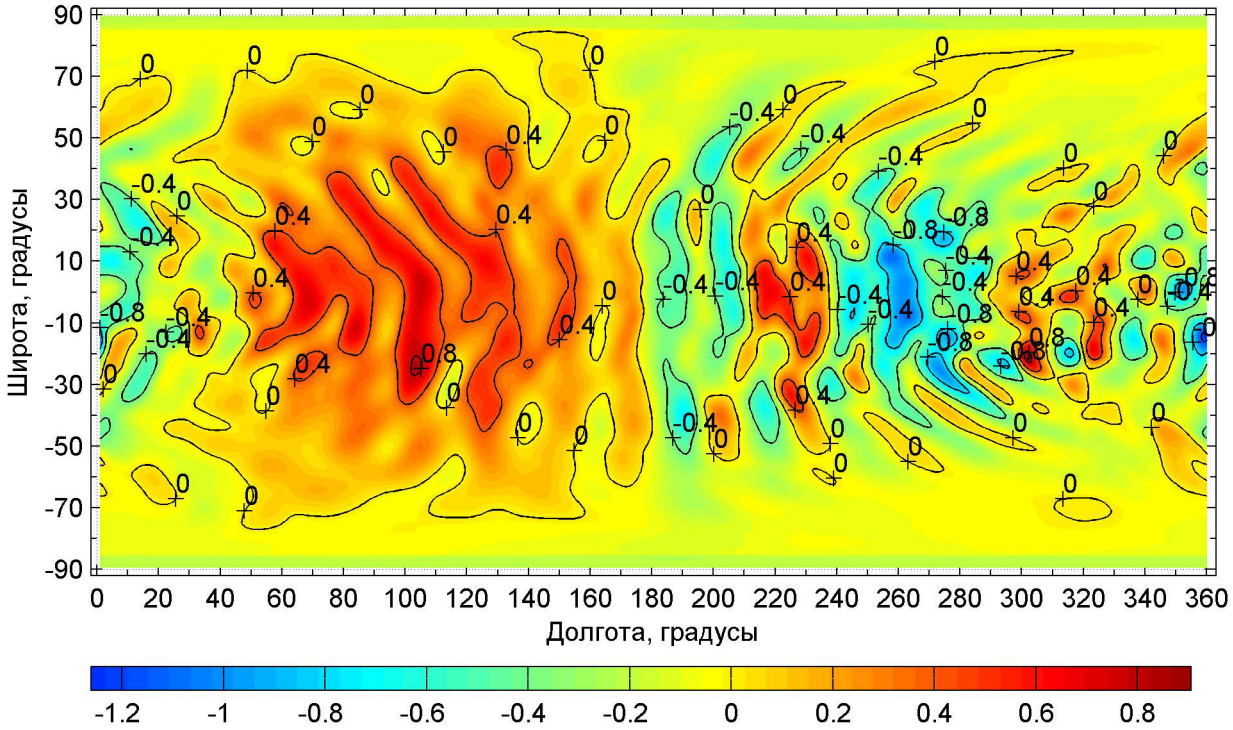

Рис. III.8. *Распределение вертикальной компоненты скорости ветра (м/с) на высоте 200 км, полученное для условий равноденствия через 6400 часов после начала моделирования.*

Из рис. III.8 видно, что на высоте 200 км вертикальная компонента ветра имеет весьма неоднородное распределение, на дневной стороне примерно в интервале долгот от 30^o до 180^o направлена преимущественно вверх и направлена пре-

имущественно вниз на ночной стороне, а также в районах утреннего и вечернего терминаторов и в приполюсных областях. И на дневной, и на ночной сторонах имеются области, в которых вертикальная компонента ветра направлена вверх и имеет величину более 0.4 м/с. На ночной стороне имеются области, имеющие форму пятен и полос, в которых вертикальная компонента ветра направлена вниз и имеет величину более 0.8 м/с. Таким образом, имеет место термический прилив. Максимальная величина вертикальной компоненты ветра на дневной стороне составляет более 0.8 м/с, а на ночной стороне составляет более 1.2 м/с. Эти области нестационарны по времени, и наблюдаются их колебания с периодами примерно 20–40 часов.

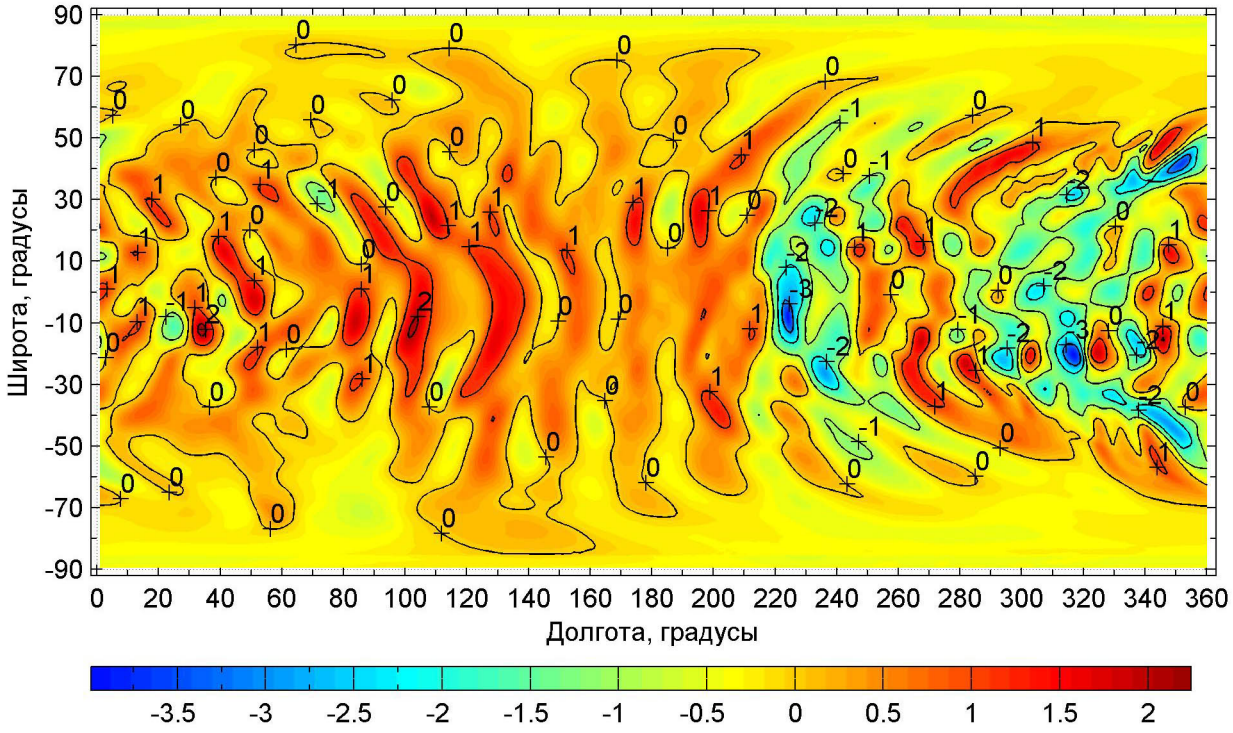

Рис. III.9. *Распределение вертикальной компоненты скорости ветра (м/с) на высоте 300 км, полученное для условий равноденствия через 6400 часов после начала моделирования.*

Из рис. III.9 видно, что распределение вертикальной компоненты ветра на высоте 300 км качественно подобно ее распределению на высоте 200 км. Области, в которых вертикальная компонента ветра направлена вверх, чередуются с областями, в которых эта компонента направлена вниз. На дневной стороне вертикальная компонента ветра направлена преимущественно вверх, а на ночной стороне и в приполюсных областях направлена преимущественно вниз. И на дневной, и на ночной сторонах имеются области, в которых вертикальная компонента ветра направлена вверх и имеет величину более 1 м/с. На ночной стороне

имеются области, в которых вертикальная компонента ветра направлена вниз и имеет величину более 3 м/с. Максимальная величина вертикальной компоненты ветра на дневной стороне составляет более 2 м/с, а на ночной стороне более 3.8 м/с.

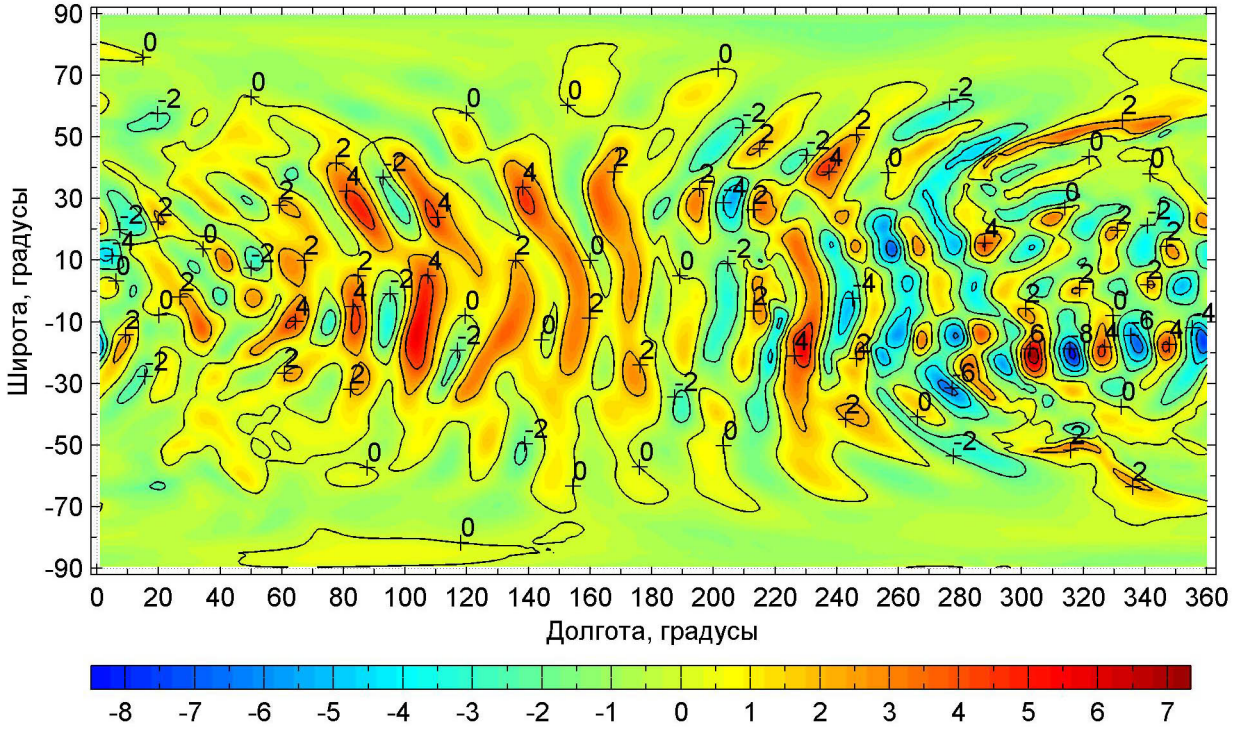

Рис. III.10. *Распределение вертикальной компоненты скорости ветра (м/с) на высоте 400 км, полученное для условий равноденствия через 6400 часов после начала моделирования.*

Из рис. III.10 видно, что распределение вертикальной компоненты ветра на высоте 400 км качественно подобно ее распределению на высоте 300 км, но является более неоднородным. Области, в которых вертикальная компонента ветра направлена вверх, чередуются с областями, в которых эта компонента направлена вниз. На дневной стороне вертикальная компонента ветра направлена преимущественно вверх, и ее значения лежат в пределах от -2 до 6 м/с. На ночной стороне и в приполюсных областях вертикальная компонента ветра направлена преимущественно вниз. На ночной стороне на средних и низких широтах ее значения лежат в пределах от -9 до 7 м/с. В приполюсных областях ее значения лежат в пределах от -1 до 0 м/с.

Из рис. III.11 видно, что распределение вертикальной компоненты ветра на высоте 500 км является более неоднородным, чем ее распределение на высоте 400 км. На дневной стороне вертикальная компонента ветра направлена преимущественно вверх, и ее значения лежат в пределах от -12 до 14 м/с. На ночной

стороне и в приполюсных областях вертикальная компонента ветра направлена преимущественно вниз. На ночной стороне на средних и низких широтах ее значения лежат в пределах от -23 до 22 м/с. В приполюсных областях ее значения лежат в пределах от -2 до 0 м/с. Области, в которых вертикальная компонента ветра направлена вверх, и области, в которых эта компонента направлена вниз, на низких и средних широтах имеют преимущественно форму полос или пятен и чередуются между собой. Эти полосы и пятна присутствуют на всех высотах, начиная с высоты чуть менее 200 км, и движутся с запада на восток, причем при движении они меняют свою форму, пропадают и возникают снова. Такой характер их поведения указывает на существование на низких и средних широтах на высотах более 200 км системы волн с вертикальным и зональным движением атмосферного газа, которые движутся вместе с обгоняющим вращения Титана зональным потоком.

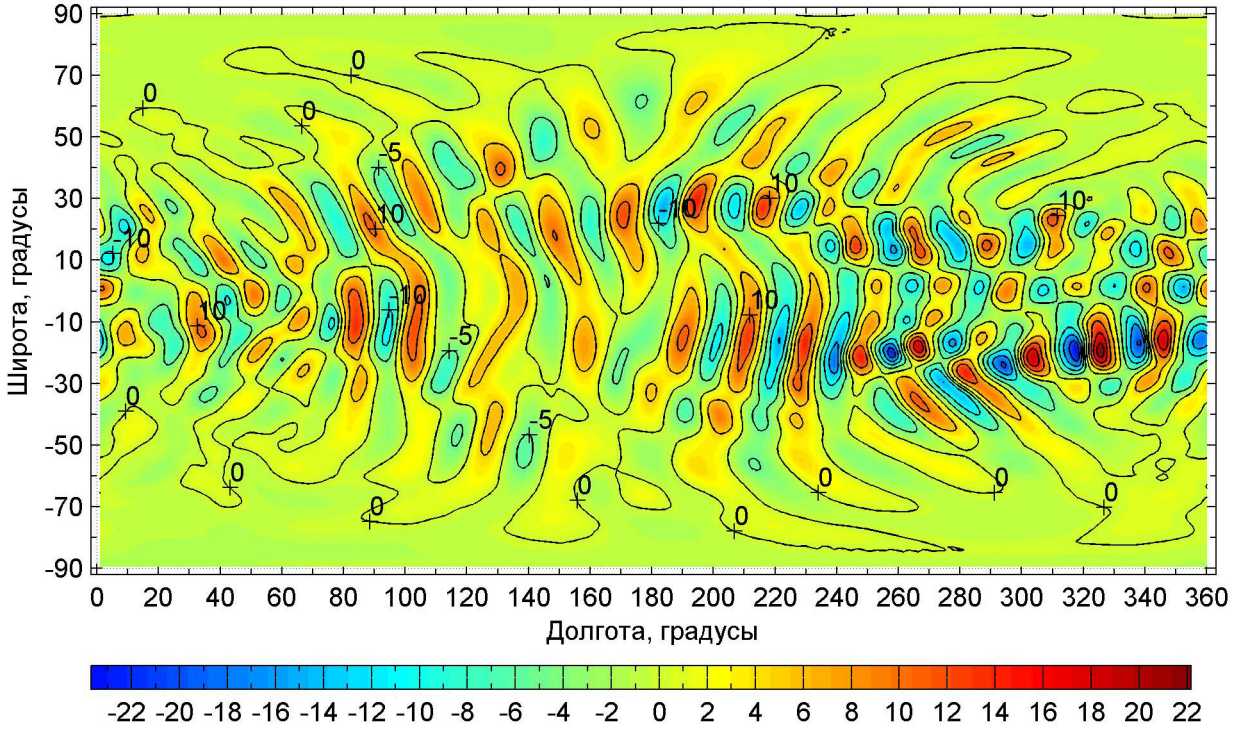

Рис. III.11. *Распределение вертикальной компоненты скорости ветра (м/с) на высоте 500 км, полученное для условий равноденствия через 6400 часов после начала моделирования.*

Из рис. III.12 видно, что распределение температуры на высоте 200 км имеет следующие особенности. Максимальные значения температуры около 178 K достигаются в районе экватора, а минимальные значения температуры около 161 K достигаются в районе полюсов. На средних и низких широтах имеются три хорошо заметных максимума в распределении температуры. Из рис. III.12

и III.13 видно, что распределение температуры на высоте 300 км качественно отличается от ее распределения на высоте 200 км. Видно, что на высоте 300 км в районе экватора достигаются как максимальные значения температуры около 188 K, так и ее минимальные значения температуры около 168 K, а в районе полюсов значения температуры около 180–182 K. На средних и низких широтах имеются три области повышенной температуры, а между ними расположены три области пониженной температуры. Причем две области повышенной температуры и области пониженной температуры расположены на ночной стороне. Такой характер распределения температуры обусловлен динамическим нагревом из-за неоднородности в распределении горизонтальной компоненты ветра.

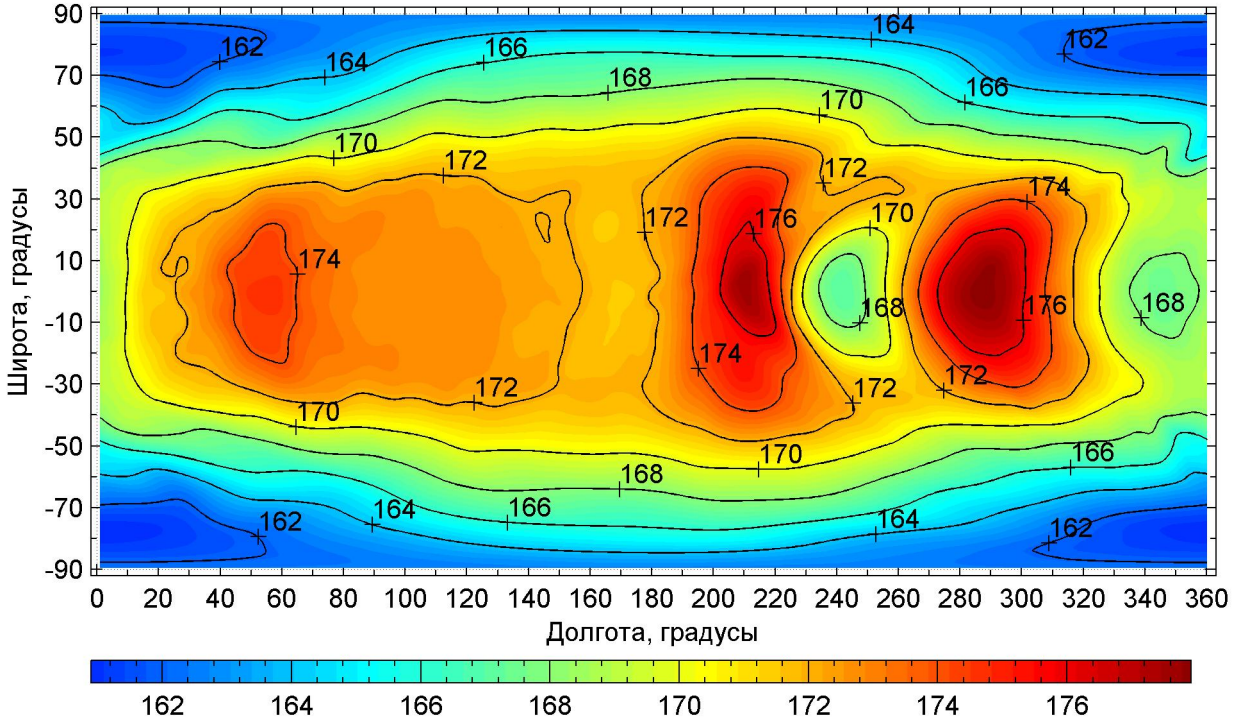

Рис. III.12. *Распределение температуры (K) на высоте 200 км, полученное для условий равноденствия через 6400 часов после начала моделирования.*

Из рис. III.13 и III.14 видно, что распределение температуры на высоте 400 км качественно подобно ее распределению на высоте 300 км, но отличается большим перепадом температуры. Области повышенной температуры совпадают с областями, где величина горизонтальной компоненты ветра уменьшается по сравнению с соседними областями. Из рис. III.14 и III.6 видно, что области пониженной температуры совпадают с областями, где величина горизонтальной компоненты ветра достигает наибольших значений. Этот факт указывает на то, что на высоте 400 км динамический нагрев преобладает над радиационным.

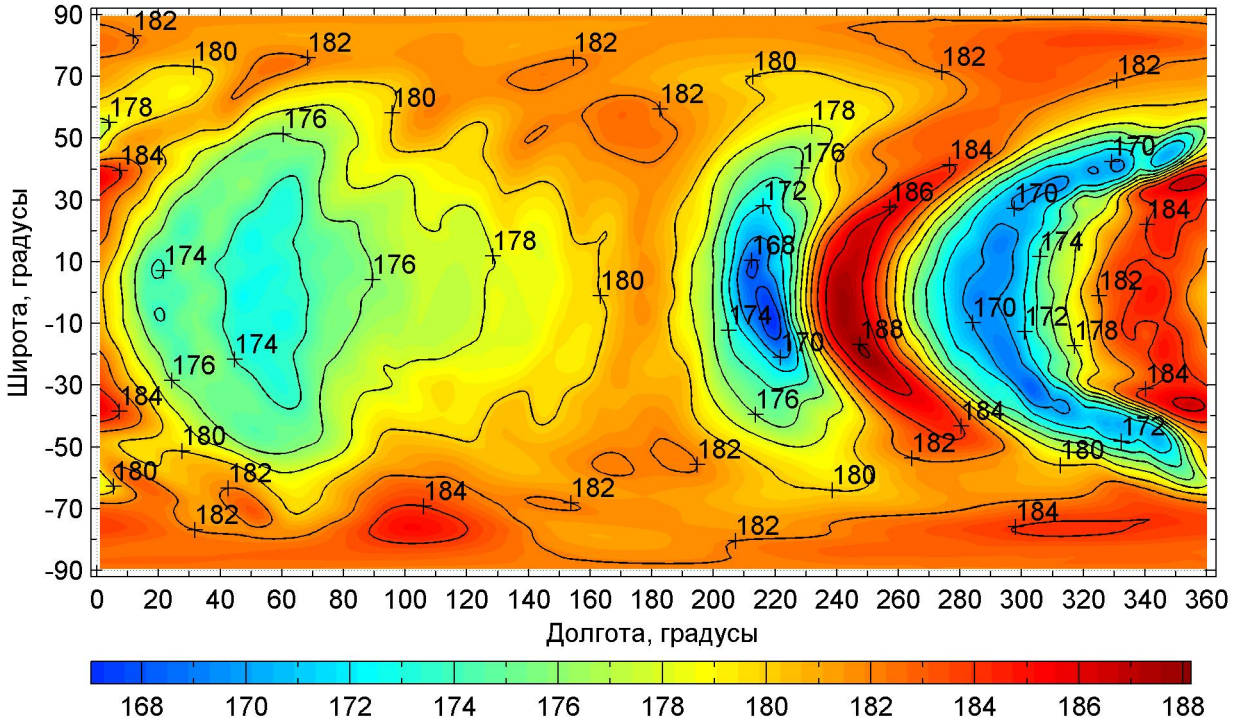

Рис. III.13. *Распределение температуры (K) на высоте 300 км, полученное для условий равноденствия через 6400 часов после начала моделирования.*

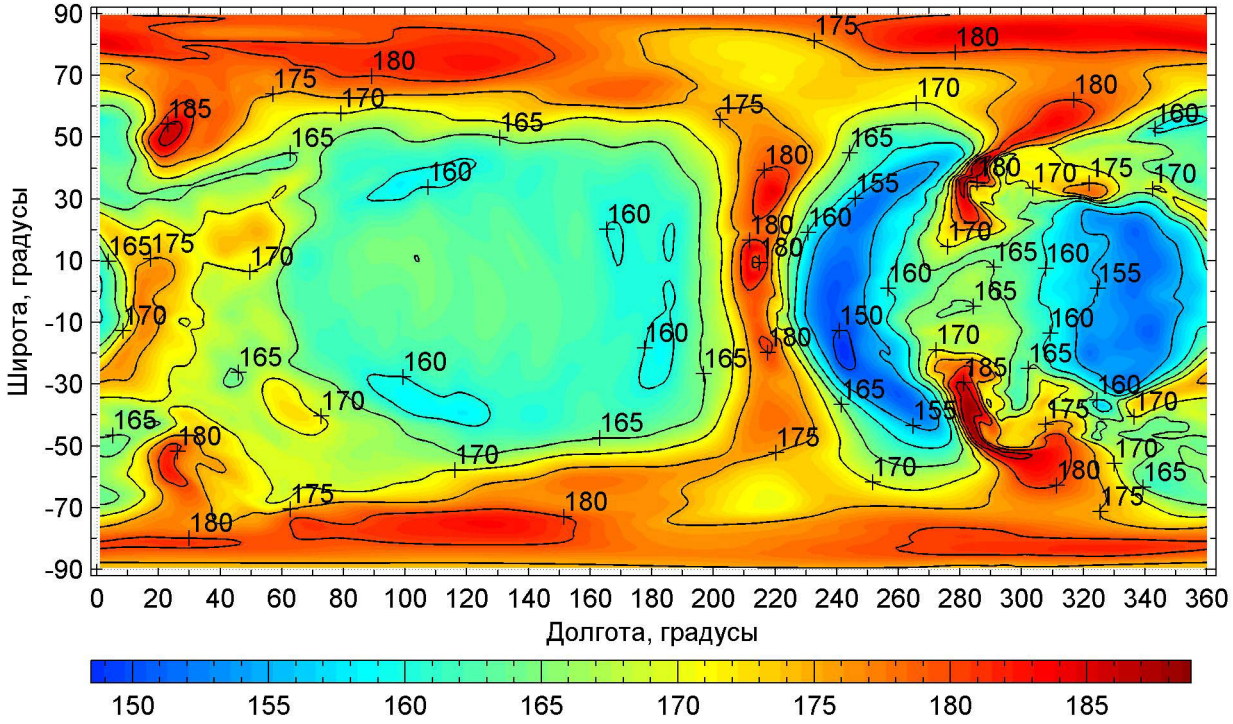

Рис. III.14. *Распределение температуры (K) на высоте 400 км, полученное для условий равноденствия через 6400 часов после начала моделирования.*

Из рис. III.14 и III.15 видно, что распределение температуры на высоте 500 км качественно отличается от ее распределения на высоте 400 км. Видно, что на вы-

соте 500 км максимальные значения температуры чуть более 150 K достигаются в районе пересечения экватора и полуденного меридиана, а минимальные значения температуры около 133 K достигаются на средних и низких широтах на ночной стороне в интервале долгот от 200^{o} до 230^{o}. В районе полюсов температура находится в пределах 142–146 K.

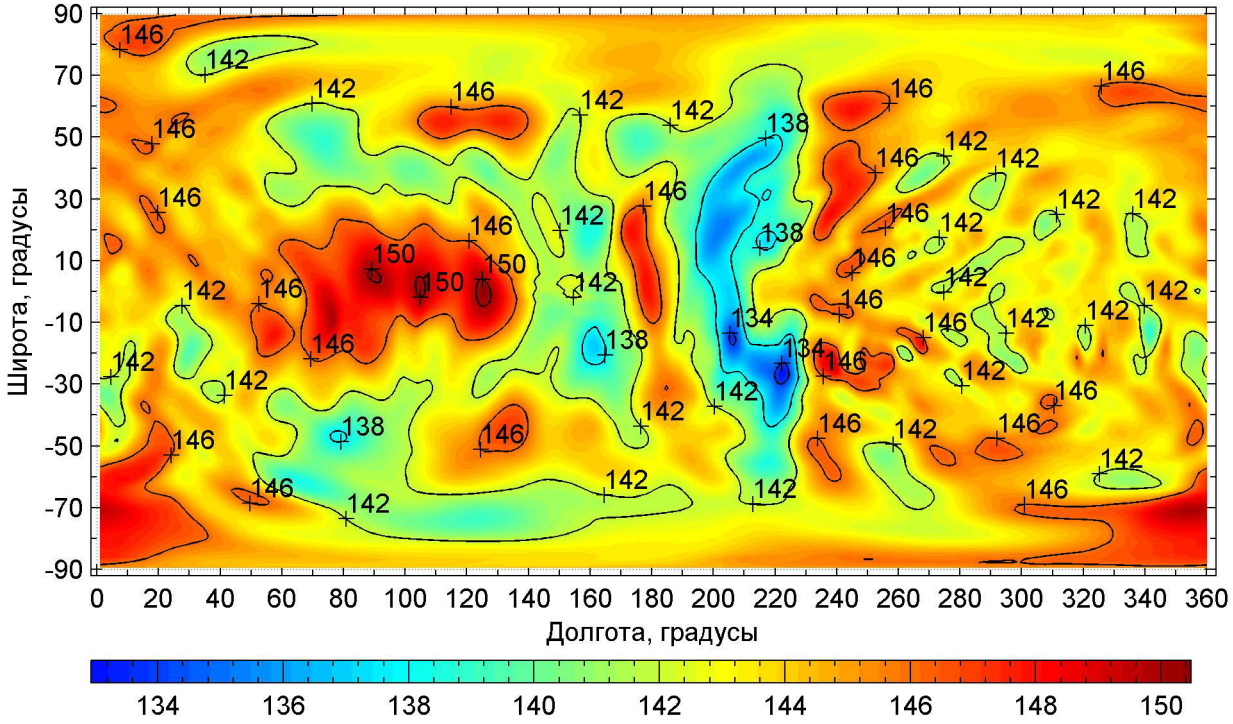

Рис. III.15. *Распределение температуры (K) на высоте 500 км, полученное для условий равноденствия через 6400 часов после начала моделирования.*

III.3.2 Результаты моделирования при нахождении подсолнечной точки на широте 5^0

Общая циркуляция атмосферы Титана, полученная при нахождении подсолнечной точки в северном полушарии на широте 5^0, имеет следующие особенности. В диапазоне высот от поверхности до 150 км поле ветра этой циркуляции крайне незначительно отличается от поля ветра циркуляции, полученной для условий равноденствия. Выше с высот 180–200 км отличие между этими циркуляциями становится более заметным и увеличивается с ростом высоты. На рис. III.16 и III.17 представлены распределения горизонтальной компоненты скорости ветра на высотах 200 и 300 км в общей циркуляции атмосферы Титана, полученной через 8536 часов после начала моделирования для случая, когда подсолнечная точка находится на широте 5^0. В этот момент полуденный меридиан находился на долготе примерно 290^{o}, вечерний терминатор находился на

долготе 20^o, утренний терминатор находился на долготе 200^o, а полуночный меридиан находился на долготе 110^o .

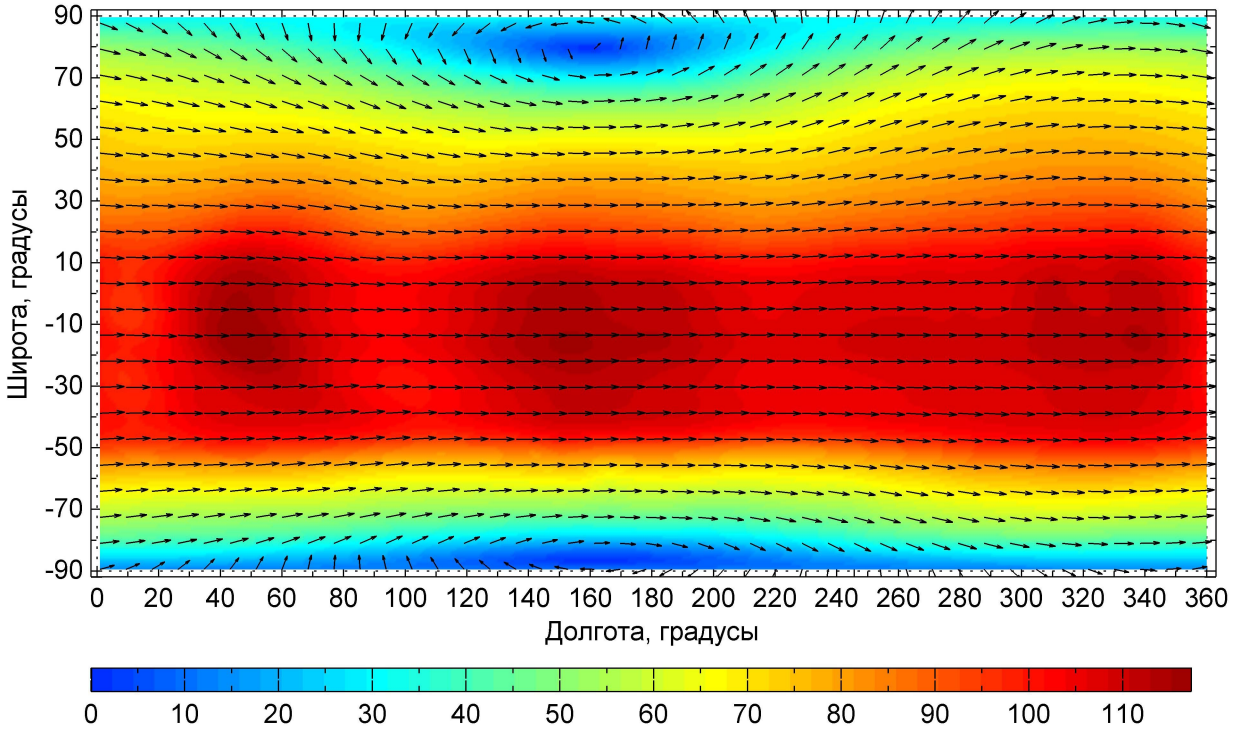

Рис. III.16. *Распределение горизонтальной компоненты ветра (м/с) на высоте 200 км, полученное при нахождении подсолнечной точки на широте* 5^0.

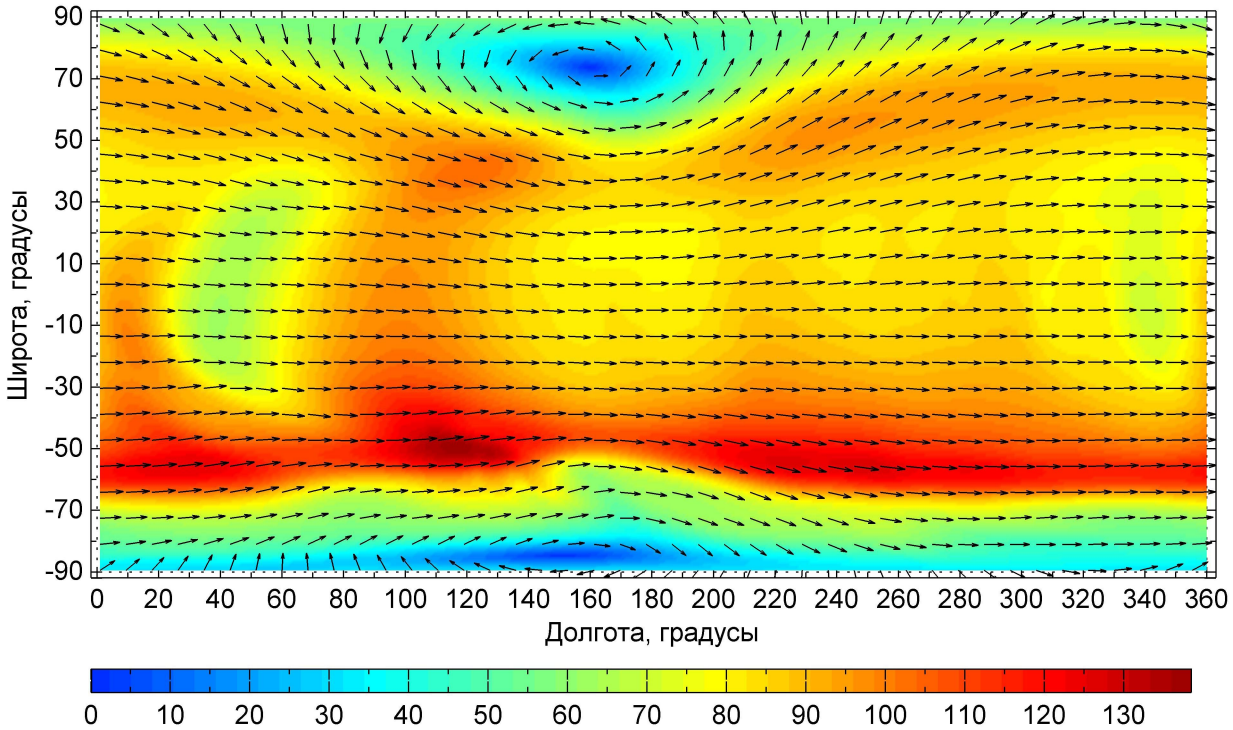

Рис. III.17. *Распределение горизонтальной компоненты ветра (м/с) на высоте 300 км, полученное при нахождении подсолнечной точки на широте* 5^0.

Из рис. III.16 видно, что на высоте 200 км обгоняющий вращение Титана зональный поток смещается в южное полушарие так, что центры областей, где достигаются максимальные значения скорости горизонтального ветра, находятся в южном полушарии на широте примерно -10^0. При этом условная северная граница зонального потока на дневной стороне смещается на север примерно на 15^0, а условная южная граница этого потока смещается на юг примерно на 5^0. Таким образом, на дневной стороне зональный поток расширяется несимметрично. Из рис. III.17 видно, что на высоте 300 км упомянутый выше зональный поток смещается в южное полушарие в среднем примерно на 10^0, причем область, в которой достигаются максимальные значения скорости горизонтального ветра, находится вблизи южной границы зонального течения на широтах от -65^0 до -45^0. При этом условная северная граница зонального потока на дневной стороне смещается на север примерно на 30^0, а его условная южная граница смещается на юг примерно на 10^0.

На высотах более 300 км циркуляция, полученная при нахождении подсолнечной точки на широте 5^0, качественно подобна циркуляции, полученной при условиях равноденствия. Все основные черты циркуляции, полученной при условиях равноденствия, наблюдаются и в рассматриваемой циркуляции. На одних и тех же высотах происходит переход от зональной суперротации к типу циркуляции с преобладанием переноса с освещенной стороны на ночную сторону. В обеих циркуляциях на высотах более 200 км существуют системы волн с вертикальным и зональным движением атмосферного газа, которые движутся вместе с обгоняющим вращения Титана зональным потоком. В этих волнах величина вертикальной компоненты ветра превышает 1 м/с на высоте 200 км и превышает 6 м/с на высоте 400 км.

III.3.3 Результаты моделирования при нахождении подсолнечной точки на широте 10^0

На рис. III.18–III.26 отражена циркуляция атмосферы Титана, полученная через 10306 часов после начала моделирования для случая, когда подсолнечная точка находится на широте 10^0. В этот момент полуденный меридиан находился на долготе примерно 30^o, вечерний терминатор находился на долготе 120^o, утренний терминатор находился на долготе 300^o, а полуночный меридиан находился на долготе 210^o . На рис. III.19–III.22 приведены распределения горизонтальной компоненты ветра на высотах 200, 300, 400 и 500 км соответственно, а на рис. III.23–III.26 приведены распределения вертикальной компоненты ветра на этих высотах. На рисунках стрелки указывают направление горизонтальной

составляющей ветра, а их длина и цвет фона указывают ее абсолютную величину. Общая циркуляция атмосферы Титана, полученная при нахождении подсолнечной точки в северном полушарии на широте 10^0, имеет следующие особенности.

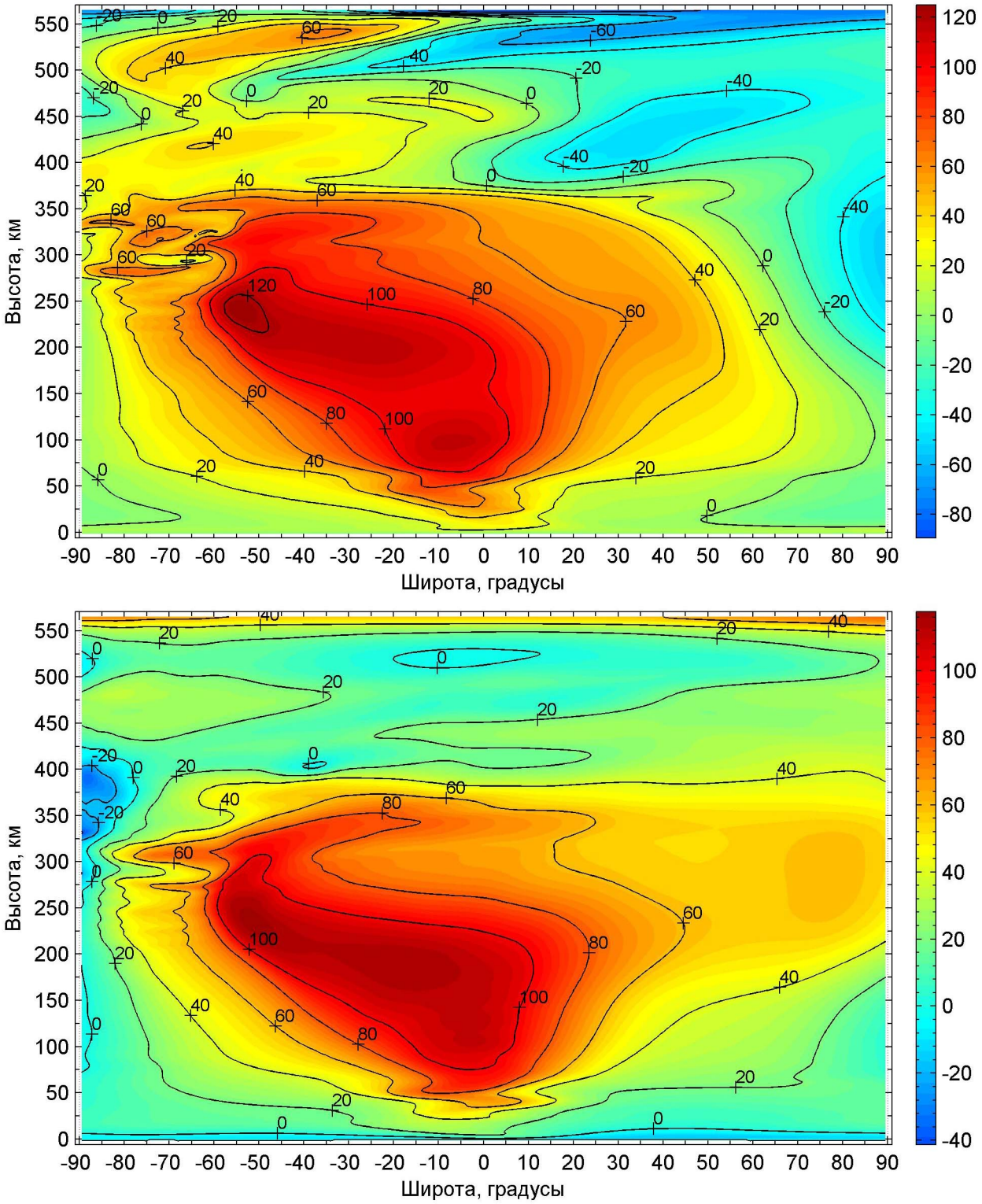

Рис. III.18. *Распределения зональной компоненты скорости ветра (м/с) на меридианах, проходящих через пересечение экватора и утреннего терминатора (вверху) и пересечение экватора и вечернего терминатора (внизу), полученные при нахождении подсолнечной точки на широте* 10^0.

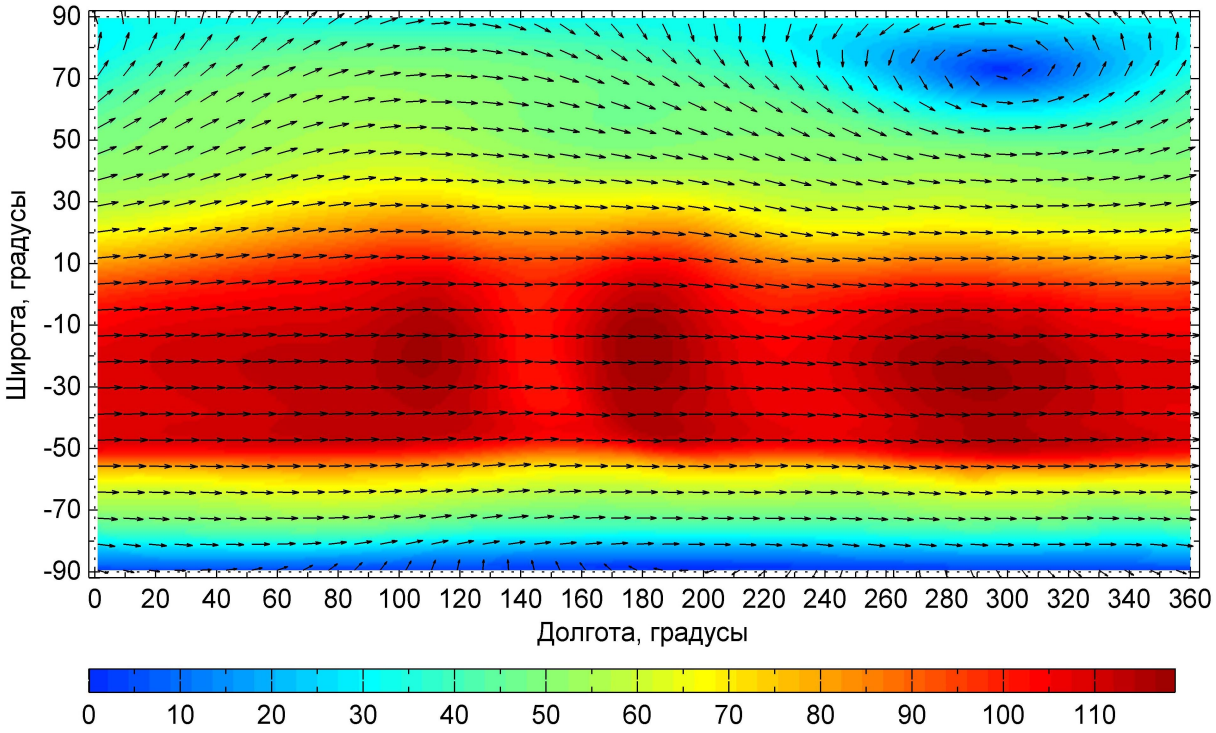

Рис. III.19. *Распределение горизонтальной компоненты ветра (м/с) на высоте 200 км, полученное при нахождении подсолнечной точки на широте* 10^0.

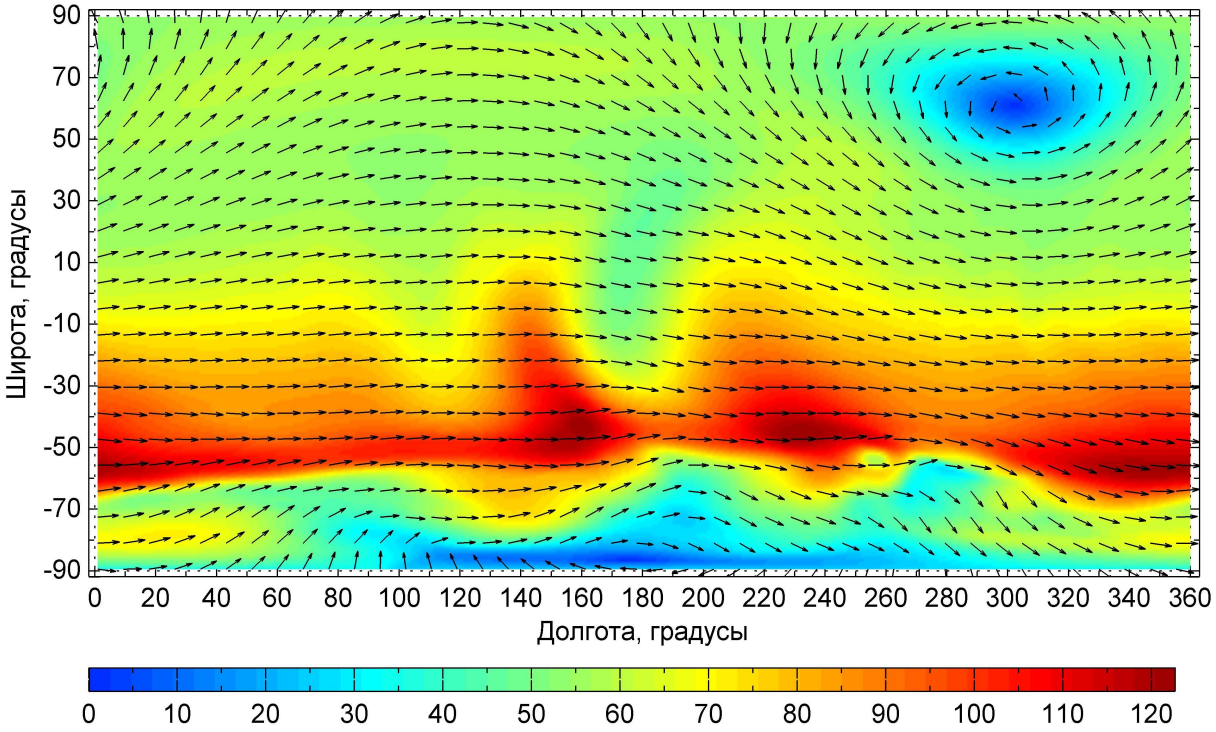

Рис. III.20. *Распределение горизонтальной компоненты ветра (м/с) на высоте 300 км, полученное при нахождении подсолнечной точки на широте* 10^0.

Эта циркуляция на всех высотах заметно отличается от циркуляции, полученной для условий равноденствия. Это хорошо видно из сравнения рис. III.3–III.11 с рис. III.18–III.26.

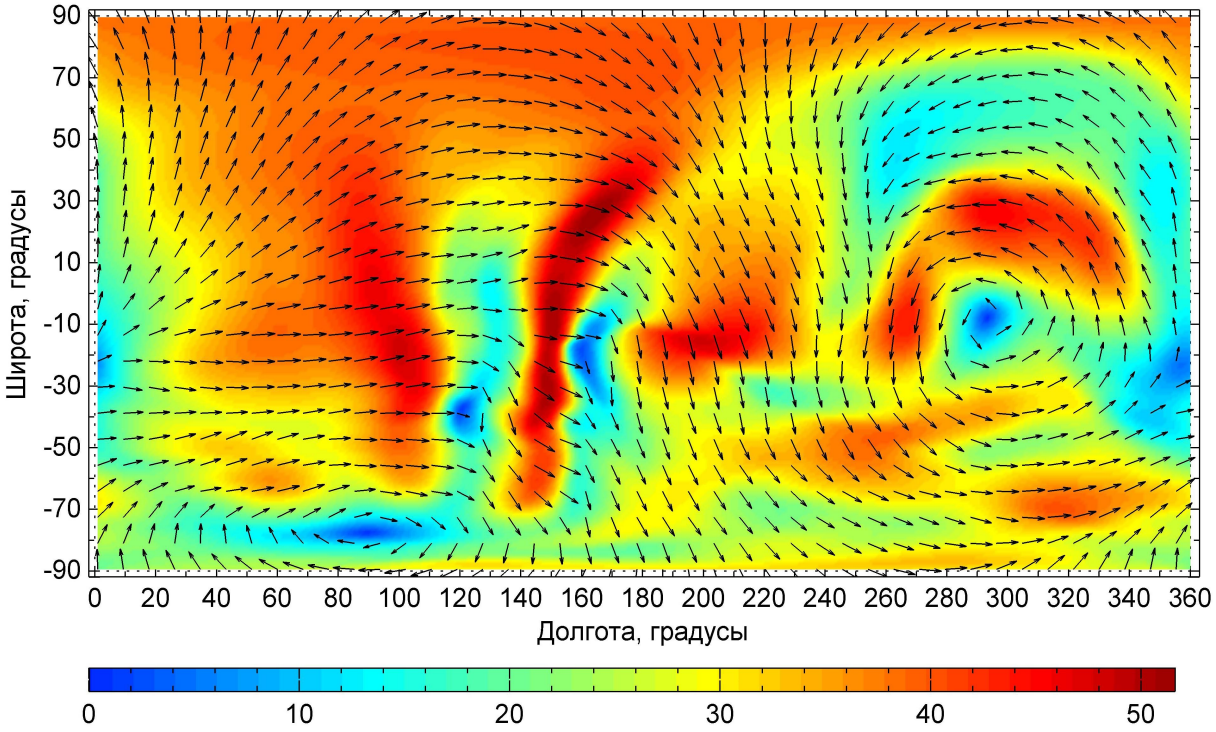

Рис. III.21. *Распределение горизонтальной компоненты ветра (м/с) на высоте 400 км, полученное при нахождении подсолнечной точки на широте* 10^0.

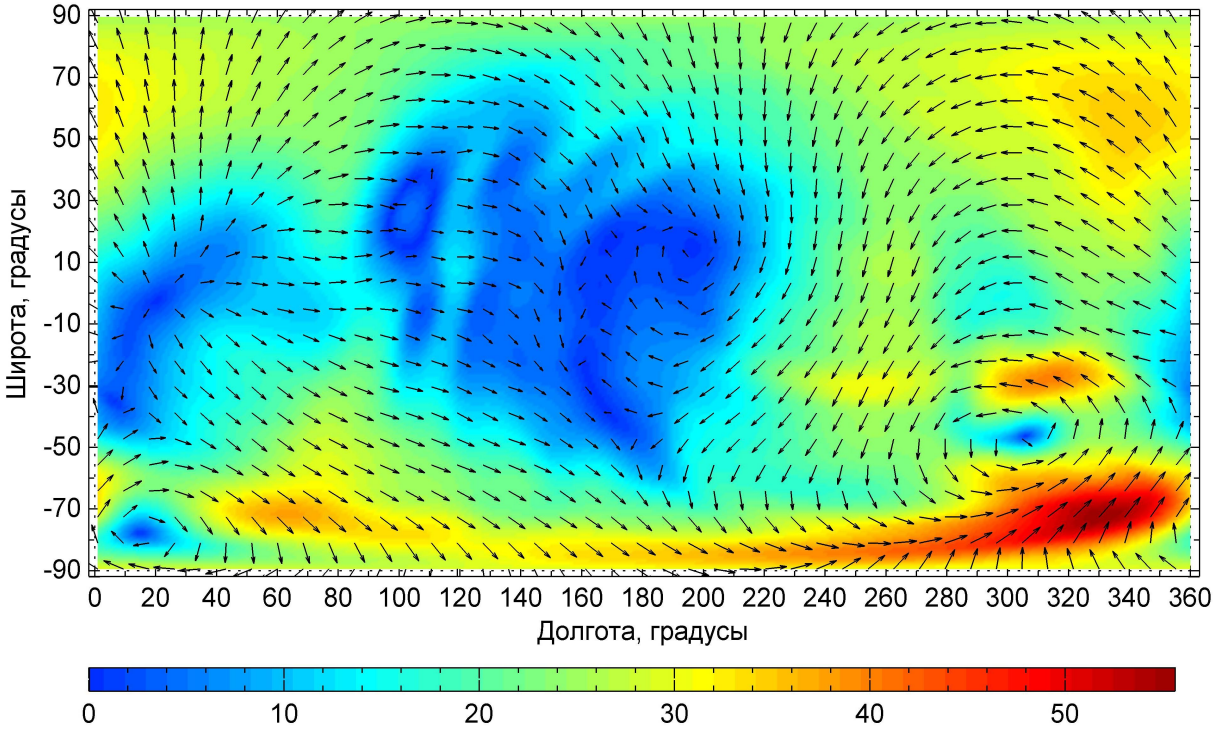

Рис. III.22. *Распределение горизонтальной компоненты ветра (м/с) на высоте 500 км, полученное при нахождении подсолнечной точки на широте* 10^0.

На всех высотах распределения температуры, плотности и компонент ветра условно можно представить в виде колебаний относительно средних распределений этих параметров, причем средние распределения движутся вместе с полу-

денным меридианом. Амплитуда этих колебаний становится особенно заметной, начиная с высот примерно 200 км, и растет с высотой.

На высотах 0–300 км обгоняющий вращение Титана зональный поток расширяется на дневной стороне и сужается на ночной, причем ядро этого потока, в котором достигаются наибольшие значения скорости ветра, смещается в южное полушарие. Величина указанного смещения зависит от высоты. На высотах 10–140 км ядро зонального потока смещается на $5 - 10^0$ в южное полушарие, а на высотах 150–240 км это ядро смещается примерно на $25 - 50^0$ в южное полушарие. При этом условная северная граница зонального потока на дневной стороне смещается на север примерно на $25 - 30^0$ относительно ее положения на ночной стороне, а условная южная граница этого потока практически не смещается на юг. Перечисленные особенности циркуляции хорошо видны на рис. III.18 и III.19.

На высотах 300–400 км качественная картина горизонтальной циркуляции изменяется вместе с высотой. С ростом высоты уменьшается зональный перенос через средние и низкие широты, и увеличивается перенос через полярные области с дневной стороны на ночную. Это хорошо видно из рис. III.20 и III.21. Из этих рисунков видно, что максимальная величина горизонтальной компоненты ветра на высоте 300 км достигает 122 м/с вблизи условной южной границы обгоняющего вращение Титана зонального потока в диапазоне широт от -55^0 до -45^0, а на высоте 400 км достигает 51 м/с на средних широтах. Кроме того, из рис. III.21 видно, что на высоте 400 км в районе вечернего терминатора (его долгота примерно 120^0) на ночной стороне в диапазоне широт от -70^0 до 40^0 имеется неоднородность в распределении горизонтальной компоненты ветра в виде трех чередующихся полос, вытянутых в меридиональном направлении. В центральной полосе величина горизонтальной компоненты ветра достигает максимальных значений около 50 м/с, а в крайних полосах эта величина не превышает 22 м/с. Также из рис. III.19 и III.20 видно, что на высотах 200 и 300 км вблизи северного полюса в районе утреннего терминатора находится центр северного циркумполярного вихря, а центр южного циркумполярного вихря находится практически на южном полюсе.

На высоте 400 км, как видно из рис. III.21, южный циркумполярный вихрь еще присутствует, причем его центр расположен на дневной стороне на долготе около 90^0 и на широте около -80^0, а северный циркумполярный вихрь отсутствует, но вместо него имеется вихревое движение, занимающее примерно половину ночной и половину дневной стороны, центр которого расположен на долготе около 295^0 (в районе утреннего терминатора) и на широте около -10^0.

На высоте 500 км, как видно из рис. III.22, горизонтальная циркуляция качественно отличается от этой циркуляции высоте 400 км. На высоте 500 км полностью преобладает перенос атмосферного газа с освещенной стороны Титана на ночную сторону, причем перенос через полярные области не менее интенсивный, чем через области низких и средних широт. Также в южном полушарии имеются два вихря, один из которых расположен вблизи южного полюса на дневной стороне, а второй расположен на средних широтах вблизи утреннего терминатора, причем в его окрестности достигаются наибольшие значения скорости ветра около 55 м/с. Видно, что на низких широтах между вечерним и полуночным меридианами имеется большая область, где скорость ветра не превышает 10 м/с.

Из рис. III.23 видно, что на высоте 200 км вертикальная компонента ветра на большей части освещенной стороны направлена вверх и достигает значений 0.4 м/с, а на ночной стороне эта компонента ветра имеет весьма неоднородное распределение и направлена преимущественно вниз и достигает значений -0.6 м/с. При этом на низких широтах присутствуют области, имеющие форму пятен и полос и расположенные рядом друг с другом, в которых вертикальная компонента ветра имеет противоположные направления.

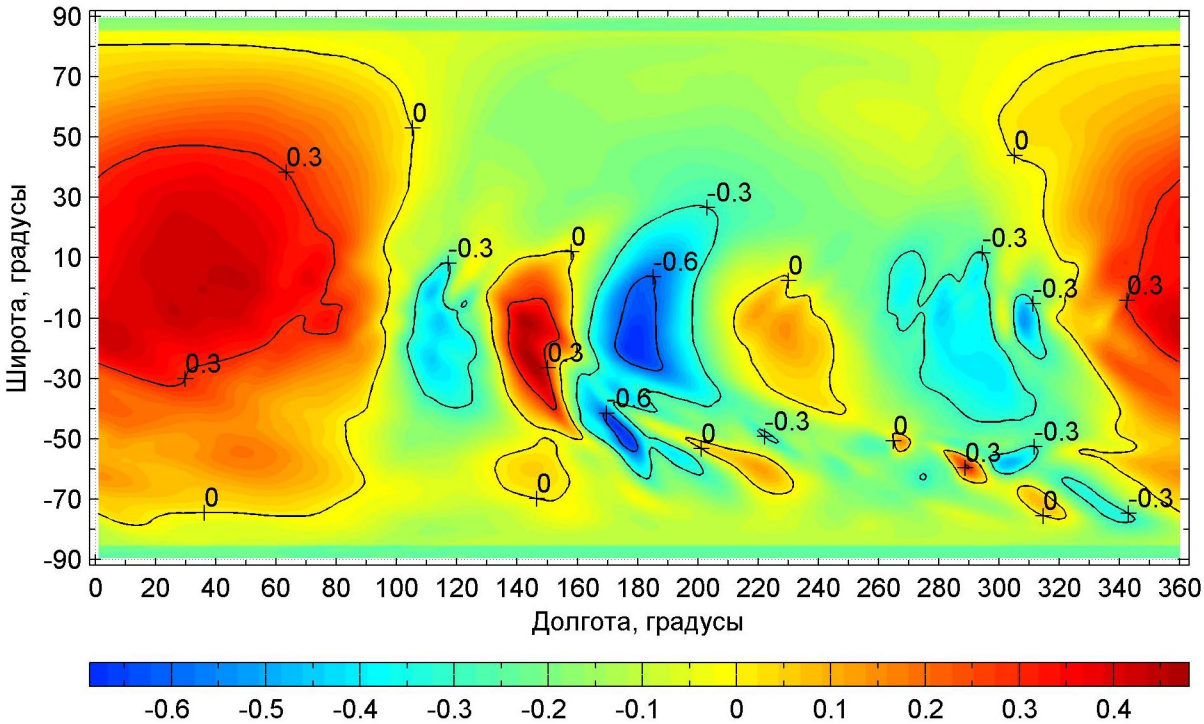

Рис. III.23. *Распределение вертикальной компоненты ветра (м/с) на высоте 200 км, полученное при нахождении подсолнечной точки на широте* 10^0.

Из рис. III.24 видно, что высоте 300 км вертикальная компонента ветра на большей части освещенной стороны направлена вверх и достигает значений 1.4 м/с, а на ночной стороне эта компонента ветра направлена преимущественно

вниз, достигает значений -2.6 м/с и имеет весьма неоднородное распределение на низких широтах и на средних широтах в южном полушарии.

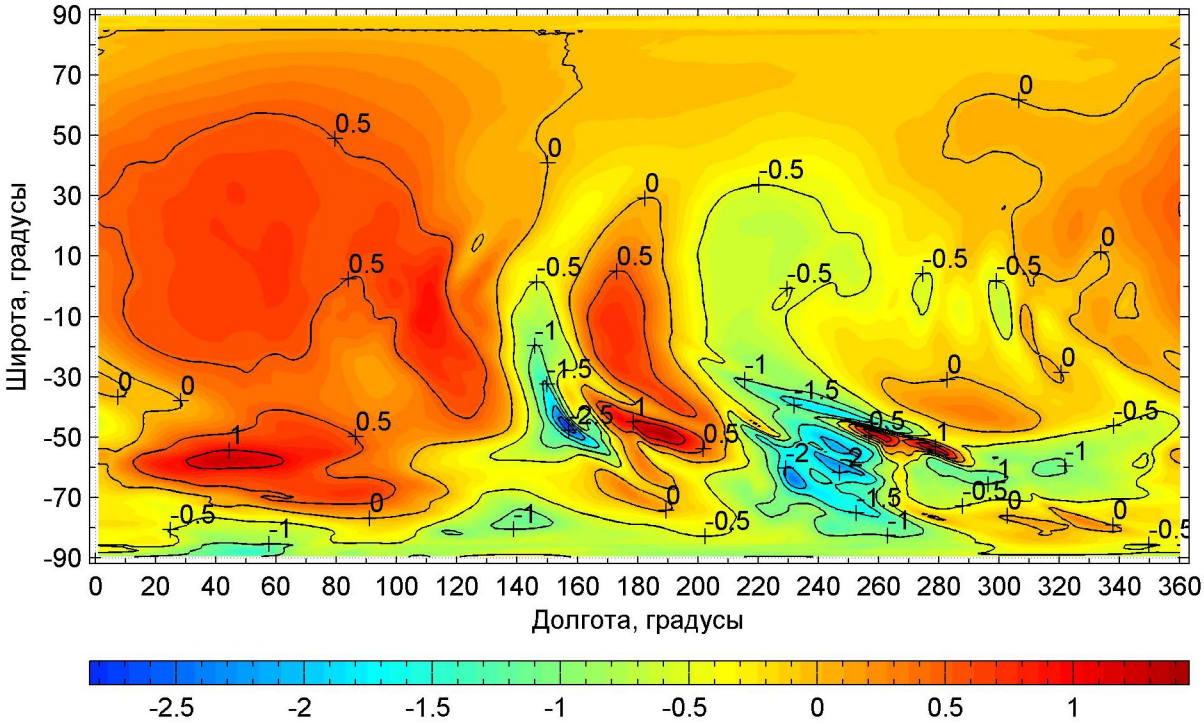

Рис. III.24. *Распределение вертикальной компоненты ветра (м/с) на высоте 300 км, полученное при нахождении подсолнечной точки на широте* 10^0.

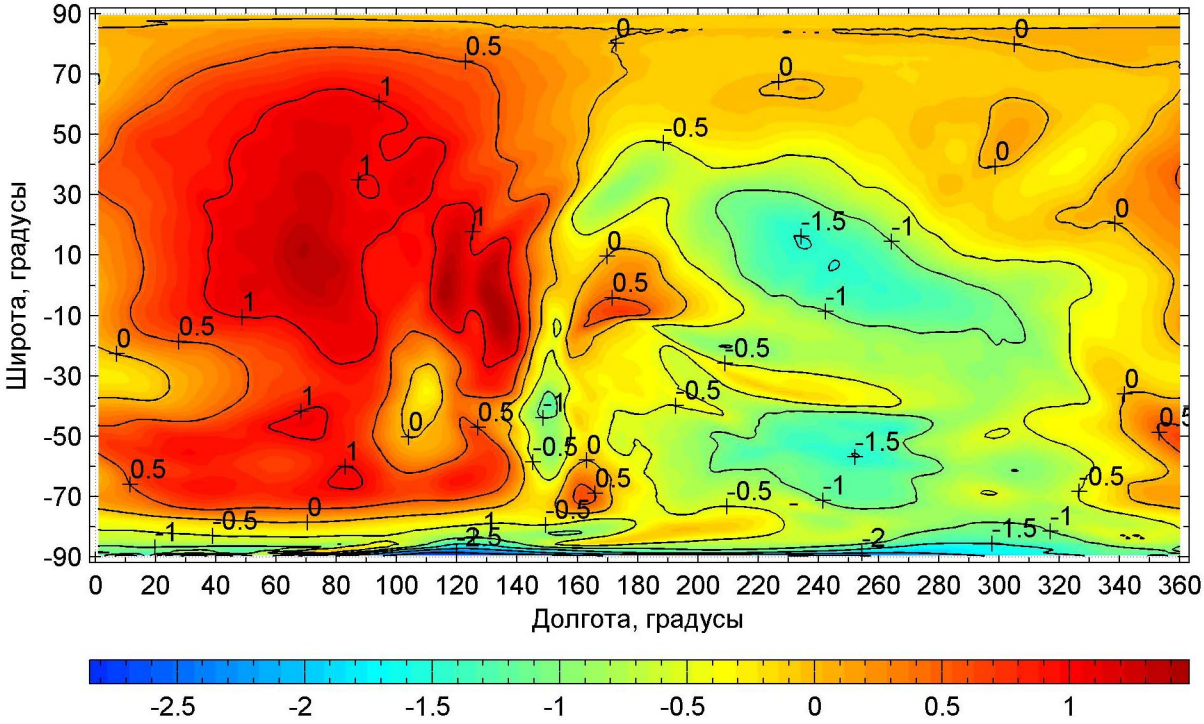

Рис. III.25. *Распределение вертикальной компоненты ветра (м/с) на высоте 400 км, полученное при нахождении подсолнечной точки на широте* 10^0.

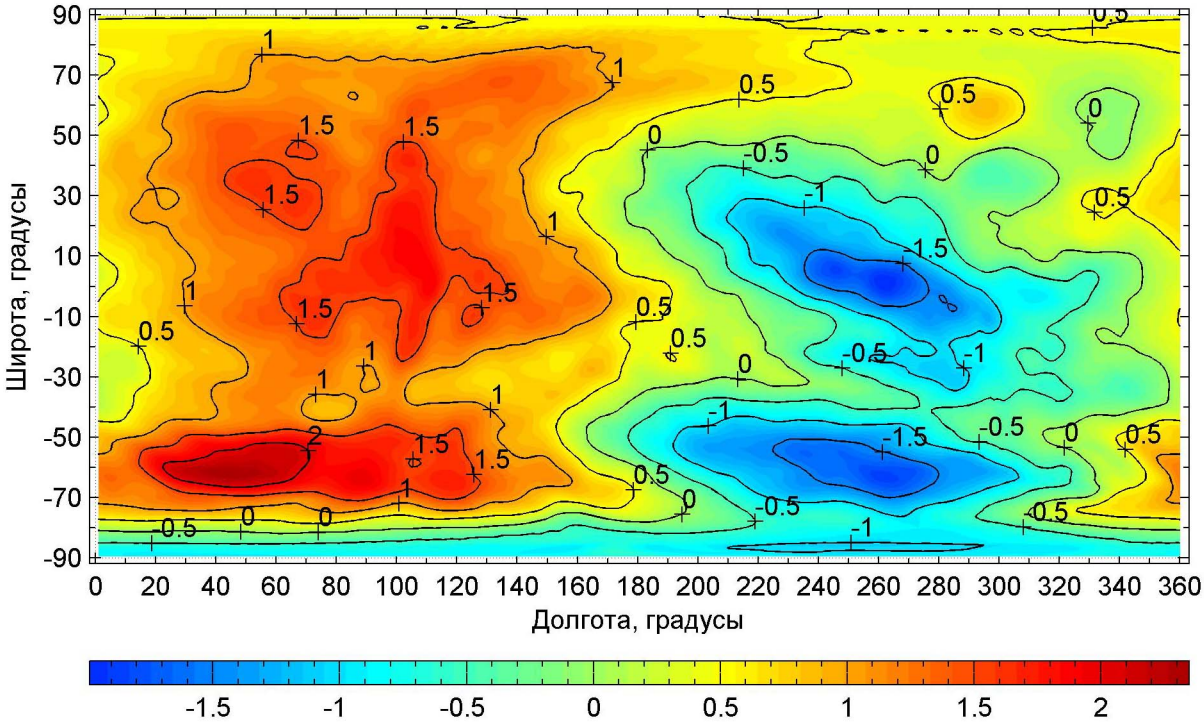

Рис. III.26. *Распределение вертикальной компоненты ветра (м/с) на высоте 500 км, полученное при нахождении подсолнечной точки на широте* 10^0.

Из рис. III.25 видно, что на высоте 400 км распределение вертикальной компоненты ветра качественно подобно ее распределению на высоте 300 км. Видно, что на высоте 400 км на большей части освещенной стороны вертикальная компонента ветра направлена вверх и достигает значений 1.4 м/с, а на ночной стороне эта компонента ветра направлена преимущественно вниз и достигает значений -1.6 м/с. В районе северного полюса величина вертикальной компоненты ветра не превышает 0.3 м/с, а в районе южного полюса ее величина достигает значений -2.6 м/с.

Из рис. III.26 видно, что высоте 500 км вертикальная компонента ветра на освещенной стороне направлена вверх и достигает значений 2.2 м/с, а на ночной стороне эта компонента ветра направлена преимущественно вниз, достигает значений -1.6 м/с в районе экватора и в диапазоне широт от -50^o до -70^o при долготах от 230^o до 290^o. В районе северного полюса вертикальная компонента ветра направлена вверх и достигает значений 0.5 м/с, а в районе южного полюса эта компонента направлена вниз и достигает значений -1 м/с.

Также из рис. III.23–III.26 и III.8–III.11 видно, что при нахождении подсолнечной точки на широте 10^0 в северном полушарии распределения вертикальной компоненты ветра существенно отличаются от этих распределений при условиях равноденствия. В частности, отсутствует система волн с вертикальным и зональным движением атмосферного газа, движущихся вместе с обгоняющим вращения Титана зональным потоком, которые существуют на низких и средних широтах на высотах более 200 км при условиях равноденствия.

III.3.4 Результаты моделирования при нахождении подсолнечной точки на широте 15^0

Общая циркуляция атмосферы Титана, полученная при нахождении подсолнечной точки в северном полушарии на широте 15^0, имеет следующие особенности. Поле ветра этой циркуляции на всех высотах заметно отличается от поля ветра циркуляции, полученной при нахождении подсолнечной точки на широте 10^0 в северном полушарии. При нахождении подсолнечной точки на широте 15^0 в северном полушарии зональная суперротация существует в диапазоне высот от поверхности до 250 км. При этом в ядре обгоняющего вращение Титана зонального потока скорость ветра растет с высотой в диапазоне высот от поверхности до 150 км. На высотах от 150 до 200 км величина зональной компоненты ветра достигает значений около 110 м/с. В диапазоне высот от 250 до 275 км с увеличением высоты происходит переход от зональной суперротации к горизонтальной циркуляции, в которой преобладает перенос атмосферного газа из области, расположенной на освещенной стороне вблизи подсолнечной точки, на ночную сторону. Выше 320 км горизонтальная циркуляция плавно изменяется с увеличением высоты.

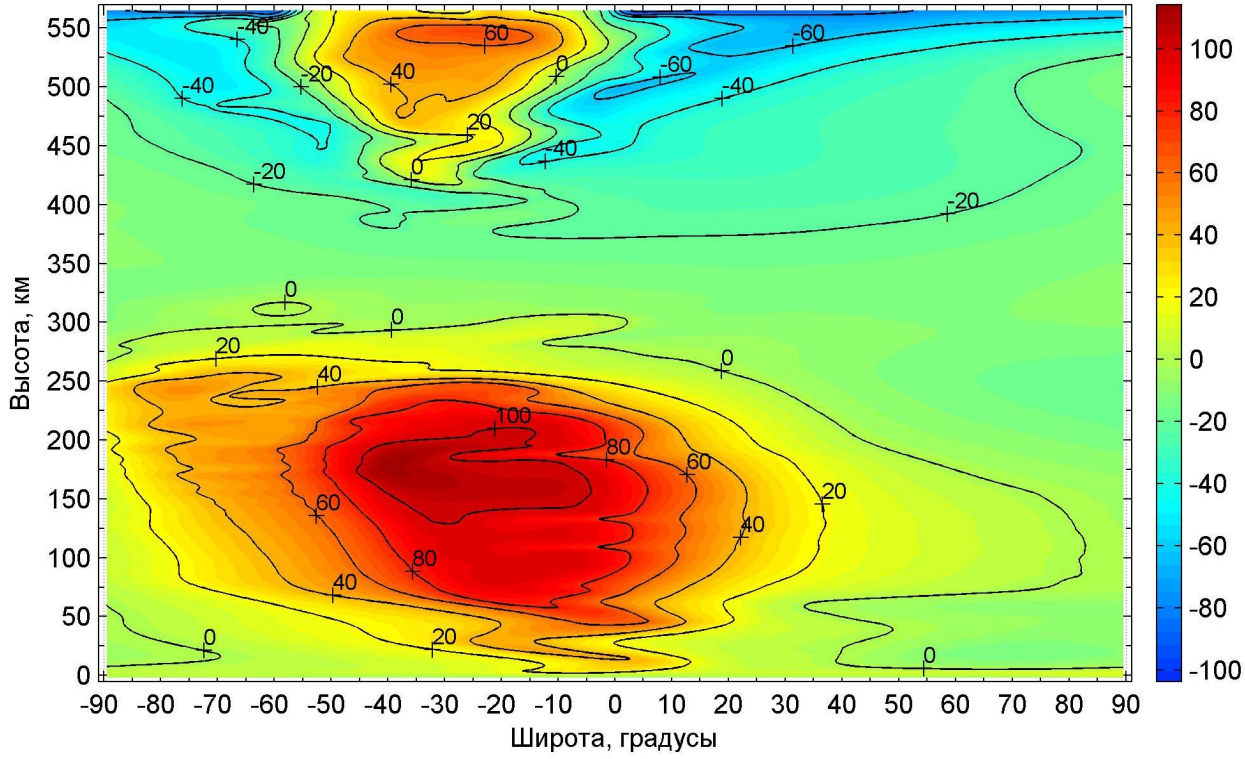

Рис. III.27. *Распределения зональной компоненты скорости ветра (м/с) на меридиане, проходящем через пересечение экватора и утреннего терминатора, полученные при нахождении подсолнечной точки на широте* 15^0.

Перечисленные закономерности видны на рис. III.27–III.30, на которых отражена циркуляция атмосферы Титана, полученная через 12558 часов после начала

моделирования для случая, когда подсолнечная точка находится на широте 15^0. В этот момент полуденный меридиан находился на долготе примерно 72^o, полуночный меридиан находился на долготе 252^o, вечерний терминатор пересекает экватор на долготе примерно 162^o, утренний терминатор пересекает экватор на долготе примерно 342^o. На рис. III.28–III.30 приведены распределения горизонтальной компоненты ветра на высотах 200, 300 и 400 км соответственно. На всех этих рисунках стрелки указывают направление горизонтальной составляющей ветра, а их длина и цвет фона указывают ее абсолютную величину.

Из рис. III.27 видно, что изображенное на нем распределение зональной компоненты скорости ветра существенно отличается от распределений на рис. III.18. Видно, что верхняя граница обгоняющего вращение Титана зонального течения находится на высотах примерно 260–280 км, что примерно на 100 км ниже, чем на рис. III.18. Видно также, что ядро зонального течения имеет меньшую протяженность по высоте и широте, чем на рис. III.18.

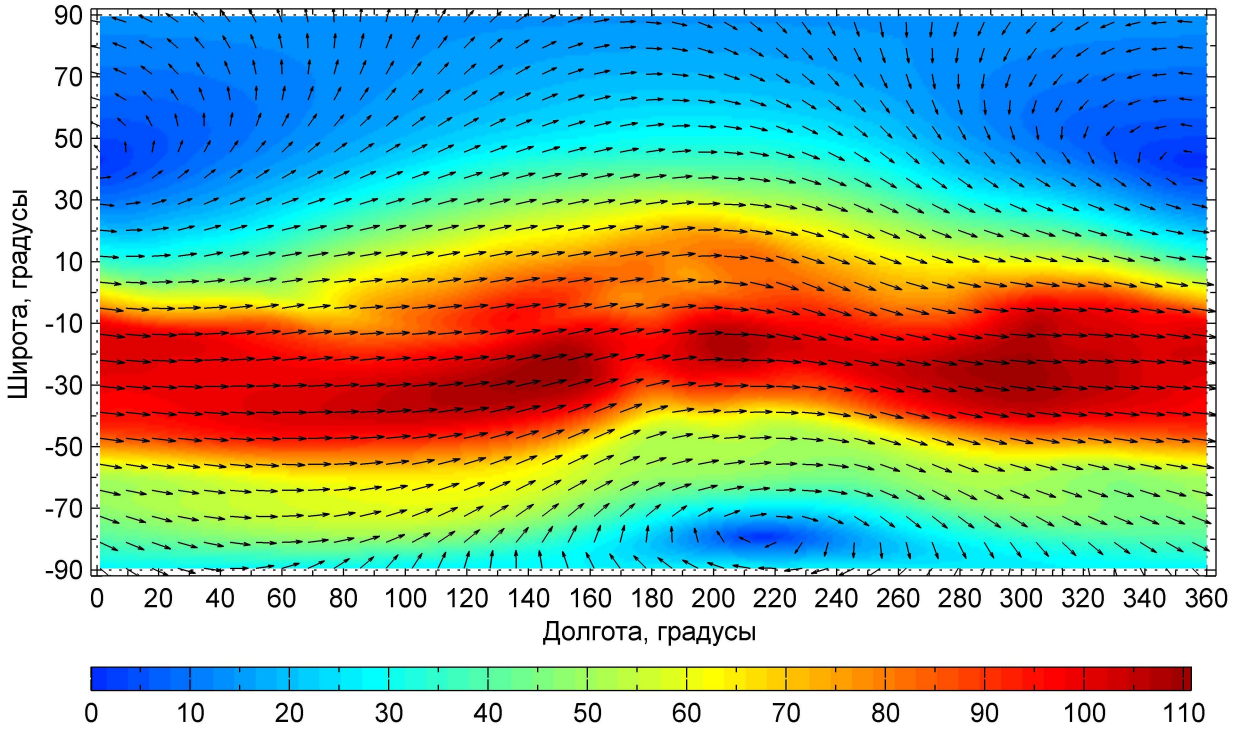

Рис. III.28. *Распределение горизонтальной компоненты ветра (м/с) на высоте 200 км, полученное при нахождении подсолнечной точки на широте* 15^0.

Из рис. III.27 и III.28 видно, что высотах 140–200 км скорость зонального течения достигает значений около 110 м/с. Из рис. III.28 видно, что на этих высотах южная и северная границы ядра зонального потока смещаются в меридиональном направлении примерно на 10^0. Видно, что поле ветра, изображенное на рис. III.28, существенно отличается от поля ветра, изображенного на рис. III.19, на котором нет смещения в меридиональном направлении южной границы ядра зонального потока.

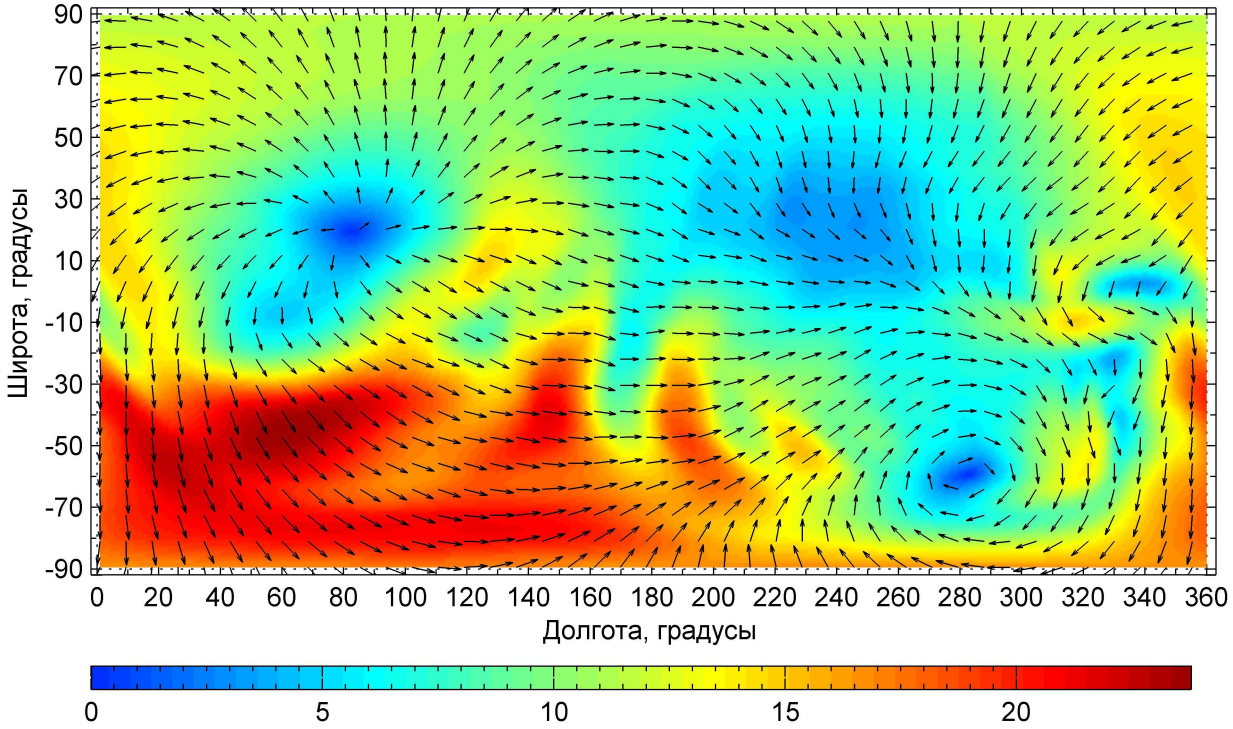

Рис. III.29. *Распределение горизонтальной компоненты ветра (м/с) на высоте 300 км, полученное при нахождении подсолнечной точки на широте* 15^0.

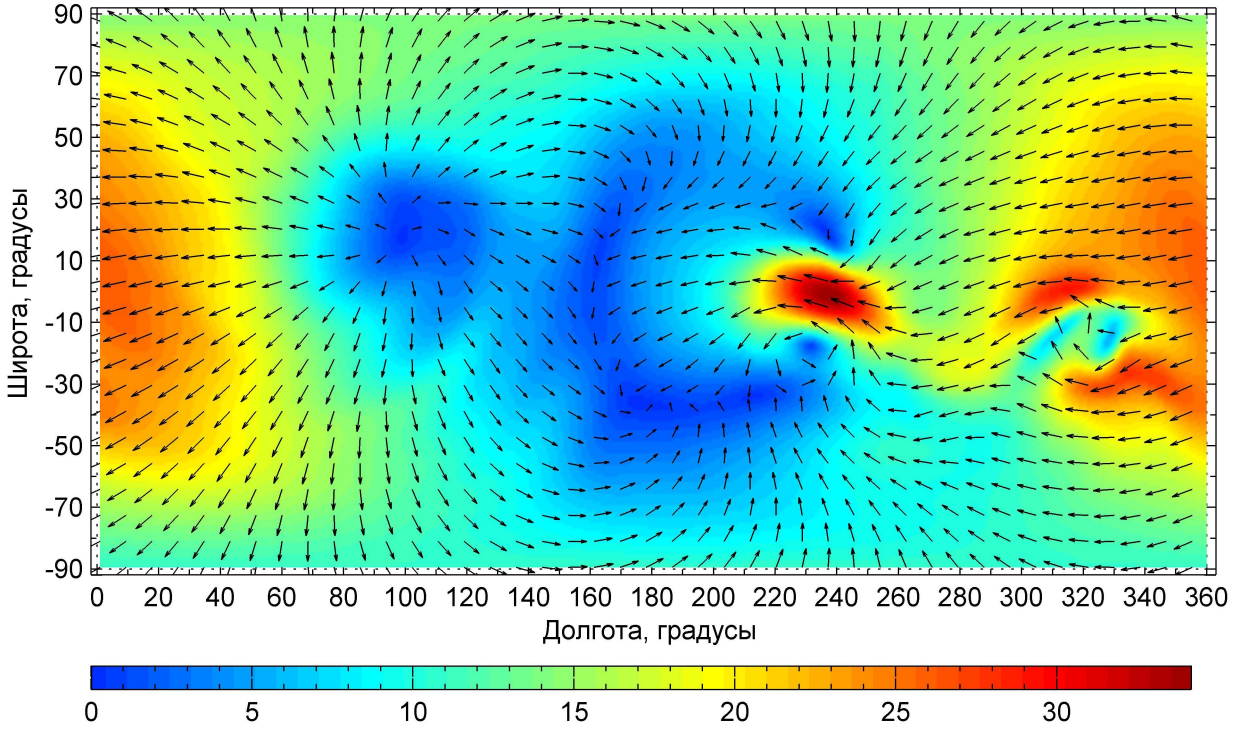

Рис. III.30. *Распределение горизонтальной компоненты ветра (м/с) на высоте 400 км, полученное при нахождении подсолнечной точки на широте* 15^0.

Из рис. III.29 видно, что в циркуляции, полученной при нахождении подсолнечной точки на широте 15^0 на высоте 300 км, отсутствует зональная суперротация и имеет место перенос атмосферного газа из области, расположенной на

освещенной стороне вблизи подсолнечной точки, на ночную сторону, причем на ночной стороне в южном полушарии имеется вихрь с центром, расположенным на широте примерно -60^0 и на долготе примерно 285^0. Также видно, что в этой циркуляции на высоте 300 км скорость горизонтального ветра не превышает 24 м/с, причем ее максимальные значения достигаются в южном полушарии и перенос через южную приполюсную область больше, чем через северную приполюсную область и области средних и низких широт.

Из рис. III.30 видно, что в рассматриваемой циркуляции на высоте 400 км также отсутствует зональная суперротация и имеет место перенос атмосферного газа из области, расположенной на освещенной стороне вблизи подсолнечной точки, на ночную сторону, причем перенос через утренний терминатор на средних и низких широтах существенно больше, чем перенос через вечерний терминатор на этих широтах и чем перенос через приполюсные области. Также видно, что на этой высоте скорость горизонтального ветра не превышает 34 м/с.

III.3.5 Результаты моделирования при нахождении подсолнечной точки на широте 20^0

Общая циркуляция атмосферы Титана, полученная при нахождении подсолнечной точки в северном полушарии на широте 20^0, на всех высотах заметно отличается от циркуляции, полученной при нахождении подсолнечной точки в северном полушарии на широте 15^0. При нахождении подсолнечной точки на широте 20^0 зональная суперротация существует в диапазоне высот от поверхности до примерно 200 км. При этом в ядре обгоняющего вращение Титана зонального потока скорость ветра растет с высотой в диапазоне высот от поверхности до 150 км. На высотах от 100 до 160 км величина горизонтальной компоненты ветра в ядре зонального течения достигает значений 80–84 м/с. В диапазоне высот от 200 до 225 км с увеличением высоты происходит переход от зональной суперротации к горизонтальной циркуляции, в которой преобладает перенос атмосферного газа из области, расположенной на освещенной стороне вблизи подсолнечной точки, на ночную сторону. При этом перенос осуществляется в основном через южное полушарие, а величина горизонтальной компоненты ветра не превышает значений 30 м/с. Выше 250 км горизонтальная циркуляция плавно изменяется с увеличением высоты. Постепенно усиливается перенос через средние и низкие широты в обоих полушариях, и на высотах более 280 км этот перенос становится доминирующим.

Указанные закономерности циркуляции видны на рис. III.31–35, на которых отражена циркуляция атмосферы Титана, полученная для случая, когда подсолнечная точка находится на широте 20^0. Циркуляция представлена в момент времени, когда полуденный меридиан находился на долготе примерно 270^o, полуночный меридиан находился на долготе 90^o, вечерний терминатор пересекал экватор на долготе примерно 0^o, а утренний терминатор пересекал экватор на

долготе примерно 180^o.

Из рис. III.31 видно, что изображенное на нем распределение зональной компоненты скорости ветра существенно отличается от распределений на рис. III.27. Видно, что ядро зонального течения на рис. III.31 имеет меньшую протяженность по высоте и широте, чем на рис. III.27, и что верхняя граница обгоняющего вращение Титана зонального течения находится на высотах примерно 200–210 км, что примерно на 80 км ниже, чем на рис. III.27.

На рис. III.32–III.35 приведены распределения горизонтальной компоненты ветра на высотах 100, 200, 300 и 400 км соответственно. На всех этих рисунках стрелки указывают направление горизонтальной составляющей ветра, а их длина и цвет фона указывают ее абсолютную величину. На рис. III.36 приведено распределение вертикальной компоненты ветра на высоте 400 км.

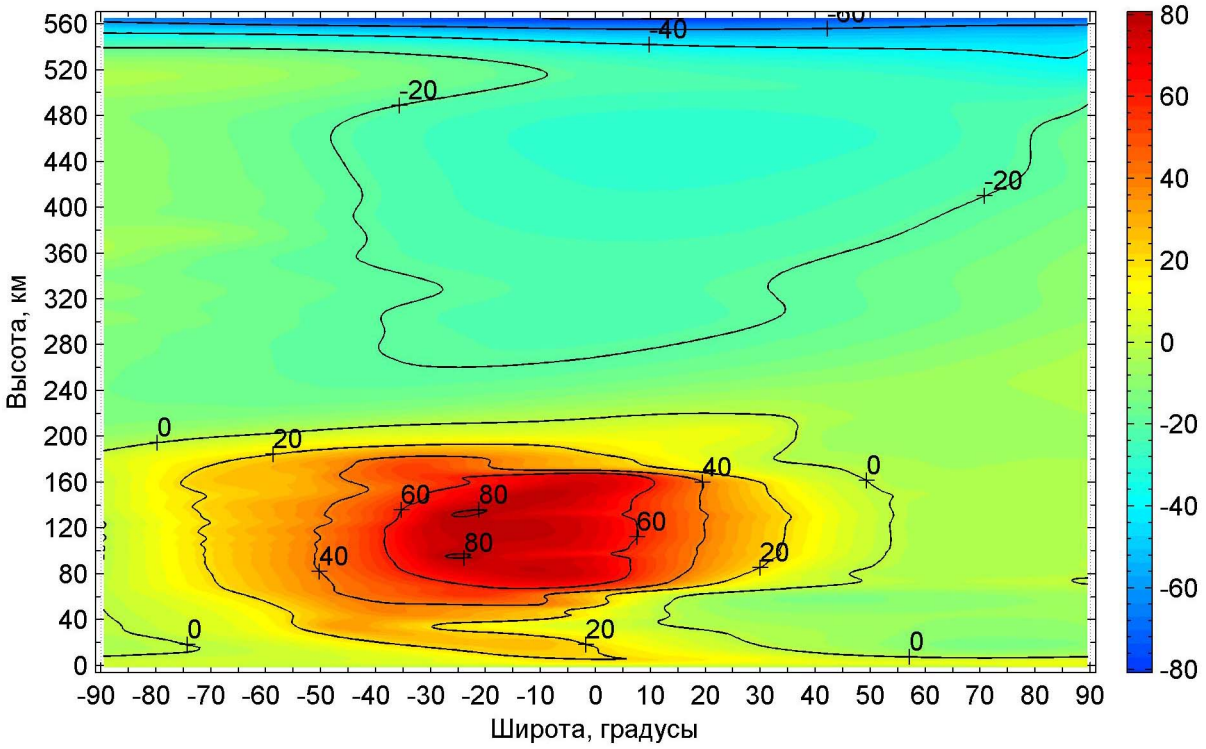

Рис. III.31. *Распределение зональной компоненты скорости ветра (м/с) на меридиане, проходящем через пересечение экватора и утреннего терминатора, полученное при нахождении подсолнечной точки на широте* 20^0.

Из рис. III.31 и III.32 видно, что на высотах 90–150 км скорость зонального течения достигает значений около 80 м/с, и что ядро этого течения смещено в южное полушарие, причем севернее широты 50^0 скорость горизонтального ветра не превышает 10 м/с. Из рис. III.32 видно, что на этих высотах южная и северная границы ядра зонального потока смещаются в меридиональном направлении примерно на 10^0 при изменении долготы. На освещенной стороне эти границы смещены на юг, а на ночной стороне они смещены на север.

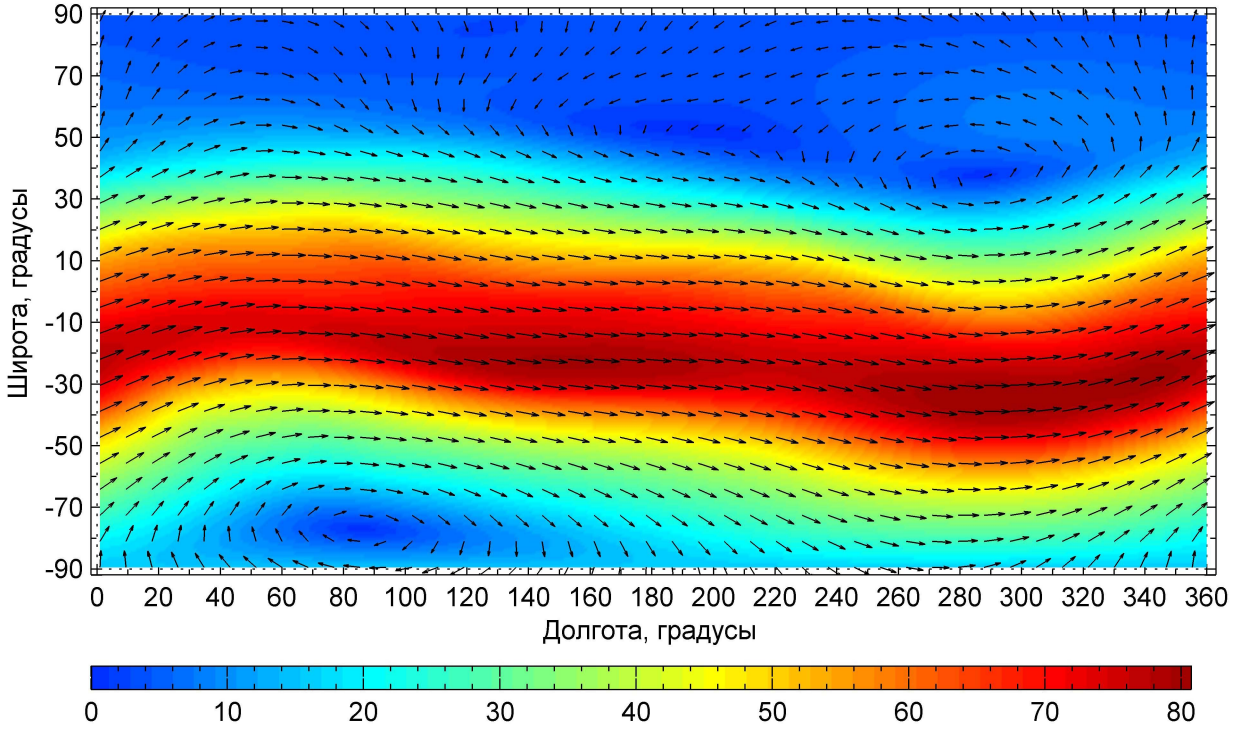

Рис. III.32. *Распределение горизонтальной компоненты ветра (м/с) на высоте 100 км, полученное при нахождении подсолнечной точки на широте* 20^0.

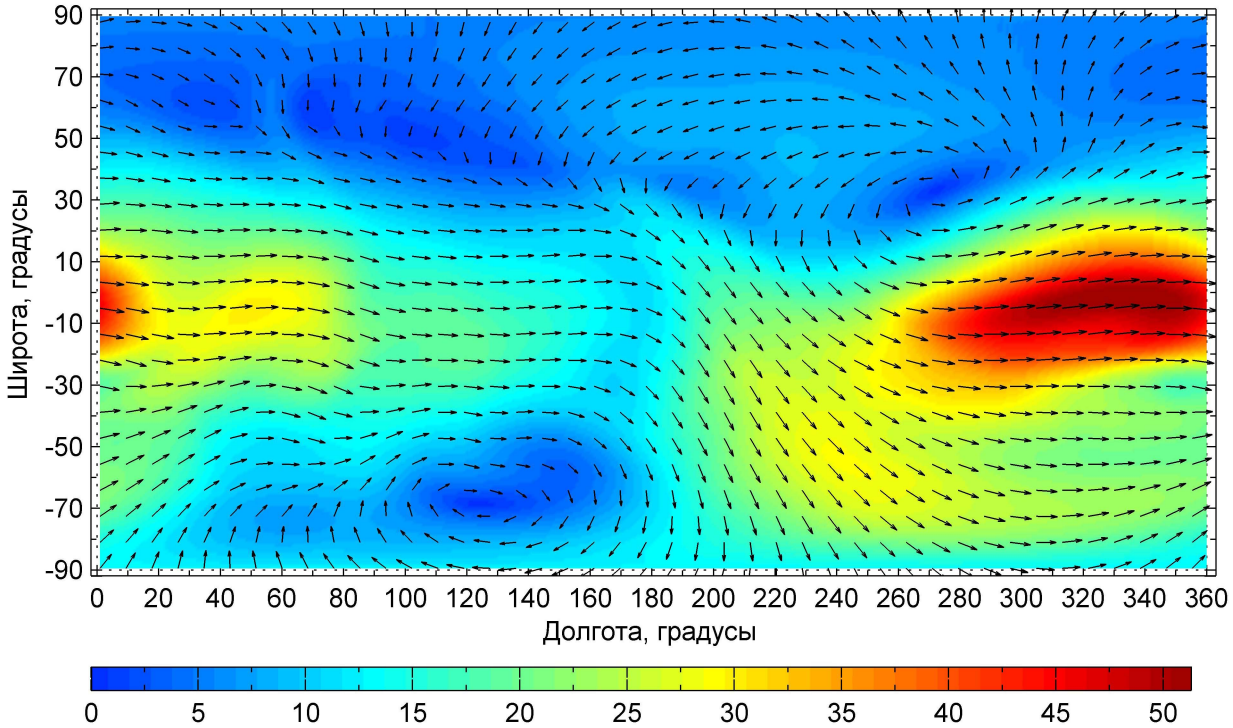

Рис. III.33. *Распределение горизонтальной компоненты ветра (м/с) на высоте 200 км, полученное при нахождении подсолнечной точки на широте* 20^0.

Из рис. III.33 видно, что в циркуляции, полученной при нахождении подсолнечной точки на широте 20^0, поле горизонтальной составляющей ветра на высоте 200 км существенно отличается от полей, изображенных на рис. III.28 и III.32.

Видно, что в северном полушарии севернее широты 40^0 отсутствует обгоняющий вращение Титана зональный поток, а скорость горизонтального ветра не превышает 20 м/с. Видно, что обгоняющий вращение Титана зональный поток находится на средних и низких широтах, а его скорость существенно зависит от долготы и меняется в пределах 25–51 м/с.

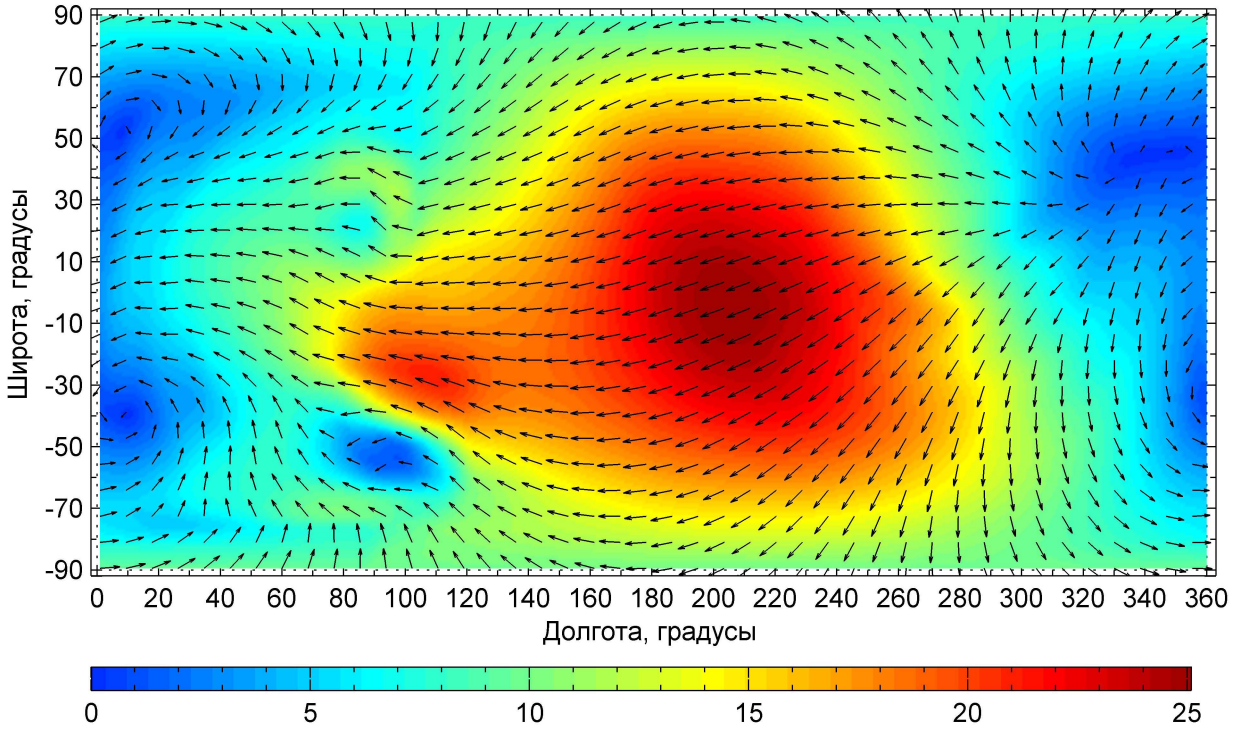

Рис. III.34. *Распределение горизонтальной компоненты ветра (м/с) на высоте 300 км, полученное при нахождении подсолнечной точки на широте* 20^0.

Из рис. III.34 видно, что в циркуляции, полученной при нахождении подсолнечной точки на широте 20^0, на высоте 300 км отсутствует зональная суперротация и имеет место перенос атмосферного газа из области, расположенной на освещенной стороне северо-восточнее подсолнечной точки, на ночную сторону, причем преобладает перенос через средние и низкие широты с востока на запад. Также видно, что в этой циркуляции на высоте 300 км скорость горизонтального ветра не превышает 25 м/с, причем ее максимальные значения достигаются на низких широтах при долготе от 180^0 до 230^0.

Из рис. III.35 видно, что в рассматриваемой циркуляции поле горизонтальной составляющей ветра на высоте 400 км подобно этому же полю на высоте 300 км. На этих высотах отсутствует зональная суперротация и имеет место перенос атмосферного газа из области, расположенной на освещенной стороне северо-восточнее подсолнечной точки, на ночную сторону, причем перенос через утренний терминатор на средних и низких широтах существенно больше, чем перенос через вечерний терминатор на этих широтах и чем перенос через приполюсные области. Также видно, что на этой высоте скорость горизонтального

ветра не превышает 29 м/с.

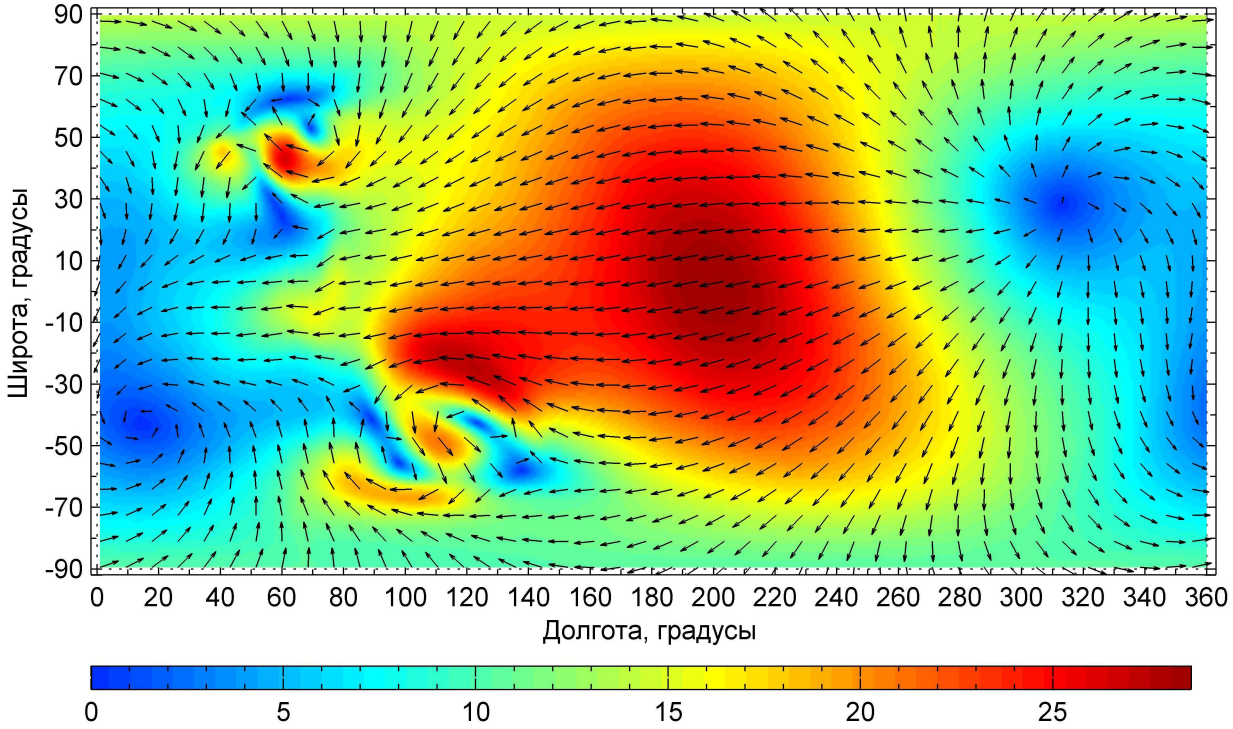

Рис. III.35. *Распределение горизонтальной компоненты ветра (м/с) на высоте 400 км, полученное при нахождении подсолнечной точки на широте* 20^0.

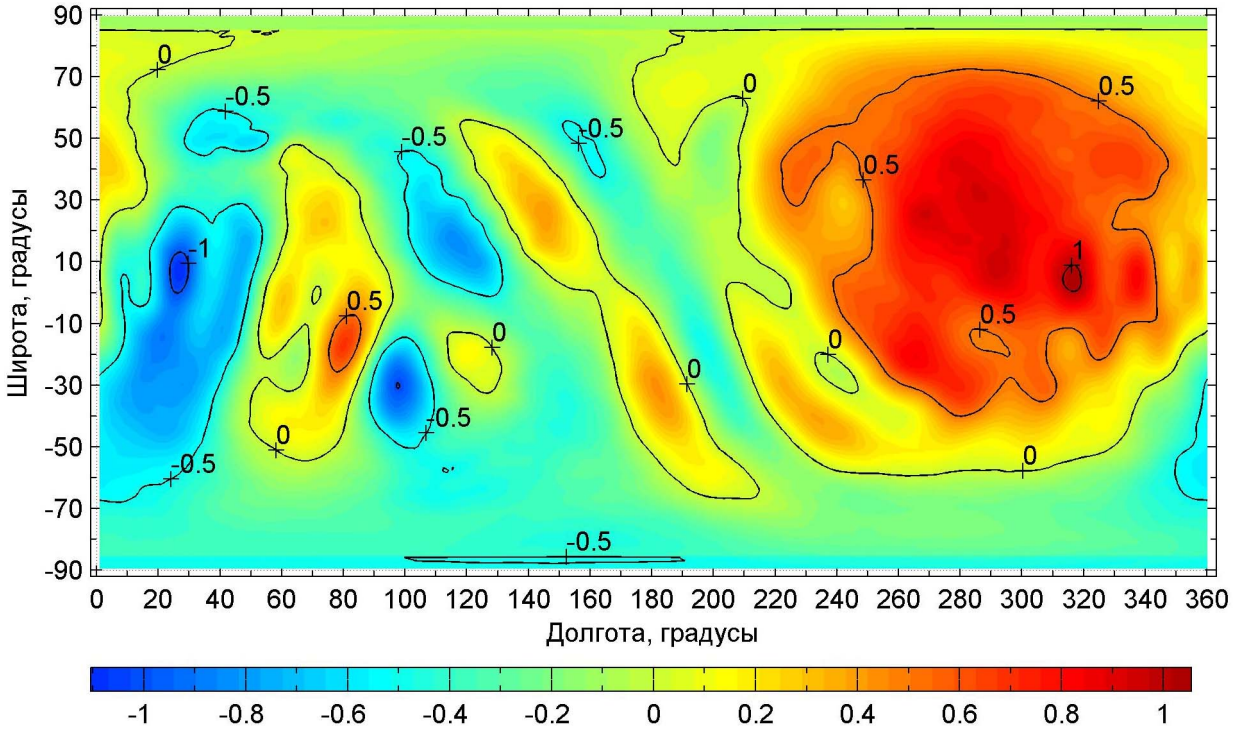

Рис. III.36. *Распределение вертикальной компоненты ветра (м/с) на высоте 400 км, полученное при нахождении подсолнечной точки на широте* 20^0.

Из рис. III.36 видно, что высоте 400 км вертикальная компонента ветра на большей части освещенной стороны направлена вверх и достигает значений 1 м/с,

а на ночной стороне эта компонента ветра направлена преимущественно вниз, достигает значений -1.1 м/с и имеет неоднородное распределение на низких широтах и на средних широтах.

III.4 Анализ результатов моделирования

Изложенные выше результаты моделирования показали, что при упрощенном способе расчета нагрева атмосферы Титана излучением, который описан в данной работе, были получены следующие основные закономерности общей циркуляции атмосферы Титана при переходе от момента равноденствия к летнему сезону в северном полушарии. Первая из них заключается в том, что примерно через 4000 часов физического времени после начала моделирования распределения всех параметров выходят на квазипериодический режим, на который накладываются различные волновые и колебательные процессы с различными временными масштабами. Амплитуда колебаний становится особенно заметной, начиная с высот примерно 200 км, и растет с высотой.

Вторая закономерность заключается в том, что для всех рассматривавшихся сезонов были получены зональная суперротация атмосферы Титана и термический прилив на дневной стороне. При этом часть атмосферы, в которой имеет место зональная суперротация, ограничена сверху, причем при удалении подсолнечной точки от экватора ядро обгоняющего вращение Титана зонального течения смещается в зимнее полушарие, а условная верхняя граница этого течения понижается. При условиях равноденствия и при нахождении подсолнечной точки на широтах от -5^0 до 5^0, начиная с высоты примерно 400 км, зональная суперротация атмосферы начинает уменьшаться и полностью исчезает на высоте примерно 480 км. При дальнейшем удалении подсолнечной точки от экватора верхняя граница области атмосферы, где имеется зональная суперротация, существенно понижается, а переходная область сжимается. При нахождении подсолнечной точки на широте 10^0 зональная суперротация атмосферы начинает быстро уменьшаться, начиная с высоты примерно 360 км. Когда подсолнечная точка находится на широте 15^0, зональная суперротация атмосферы начинает быстро уменьшаться, начиная с высоты примерно 250 км. При нахождении подсолнечной точки на широте 20^0 зональная суперротация атмосферы начинает быстро уменьшаться, начиная с высоты примерно 180 км. В полученных циркуляциях скорость в ядре обгоняющего вращение Титана зонального течения достигает величины 125–145 м/с.

На рис. III.37 представлены результаты измерений зональной компоненты ветра (м/с) на Титане, полученные различными методами. В работе [*Kostiuk et al., 2001*] на основании наблюдений с Земли в инфракрасный телескоп установлена суперротация атмосферы Титана в экваториальной области на высотах около 200 км со скоростью 210 ± 150 м/с. При посадке зонда *Huygens* на поверхность

Титана в январе 2005 года были проведены измерения скорости горизонтального ветра. Измерения начались, когда подсолнечная точка находилась на долготе $156.85^{\circ}\,\mathrm{W}$ и широте $22.52^{\circ}\,\mathrm{S}$ (лето в южном полушарии), а зонд *Huygens* находился в точке с координатами $10.33 \pm 0.17^{\circ}\,\mathrm{S}$ по широте, $196.08 \pm 0.25^{\circ}\,\mathrm{W}$ по долготе и 154.8 ± 11.2 км по высоте. Примерно через 150 мин он достиг поверхности Титана в точке с той же широтой, что у точки начала измерений, и с долготой $192.33 \pm 0.31^{\circ}\,\mathrm{W}$. Результаты измерений опубликованы в работах [*Bird et al., 2005; Tomasko et al., 2005*] и представлены на рис. III.37 серой кривой.

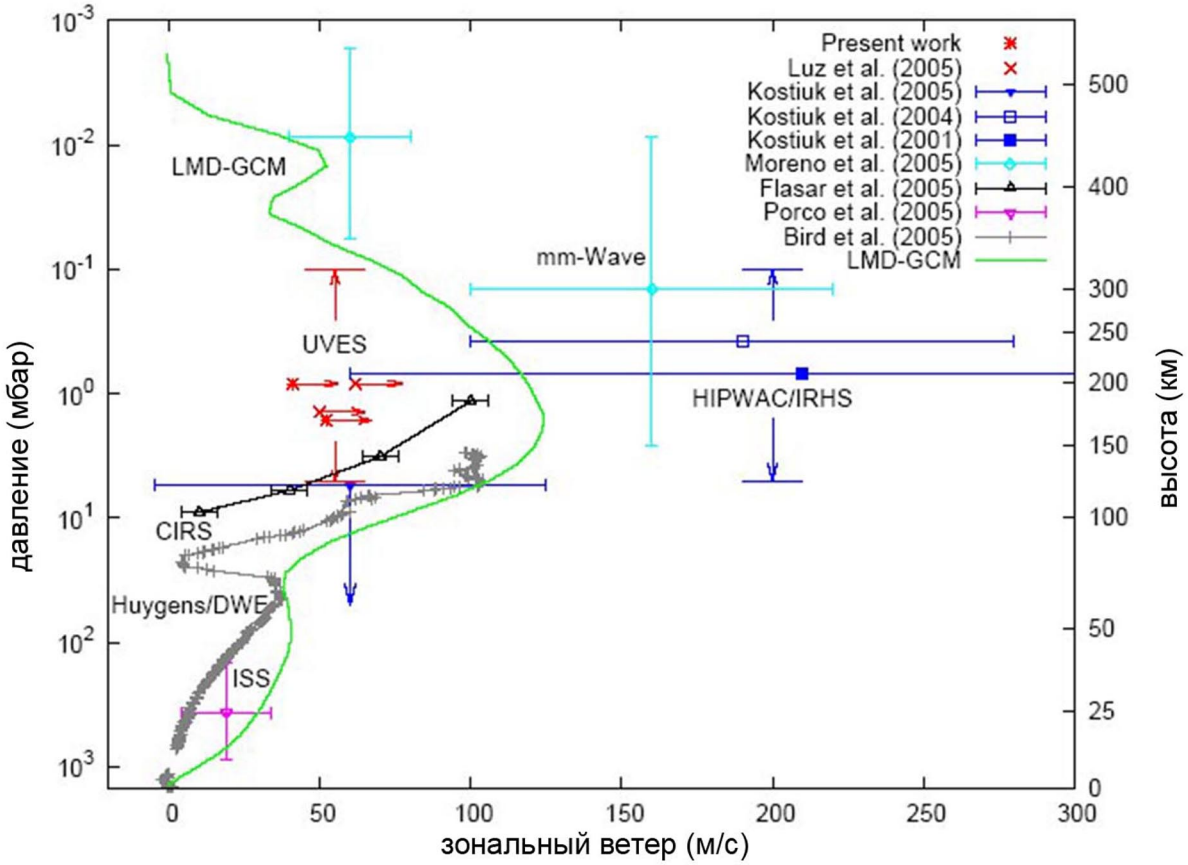

Рис. III.37. *Результаты измерений зональной компоненты ветра (м/с) на Титане, полученные различными методами.*

Видно, что измеренный профиль скорости зонального ветра немонотонно зависит от высоты. При движении от поверхности вверх скорость зонального ветра растет с высотой, достигая максимума около 35 м/с на высоте примерно 70 км, затем убывает, достигая минимума около 5 м/с на высоте примерно 80 км, а затем снова возрастает до высоты примерно 120 км, достигая 100 м/с на высотах 100–120 км. Другие измерения, приведенные в работах [*Kostiuk et al., 2005, 2006, 2010; Moreno et al., 2005*] показали, что усредненная за 2003–2005 годы скорость зонального ветра на экваторе, а на высоте 120 км лежит в пределах 65 ± 65 м/с, на высоте 245 км лежит в пределах 190 ± 90 м/с, на высоте 300 км лежит в пределах 160 ± 60 м/с, а на высоте 450 км лежит в пределах 60 ± 20 м/с. Изложенные

результаты измерений не противоречат изложенным в этой главе результатам моделирования. Отметим, что приведенные на рис. III.3 и III.18 распределения зонального ветра существенно немонотонно зависят от высоты в интервале высот 0–200 км.

Третья закономерность полученной при моделировании общей циркуляции атмосферы Титана заключается в том, что в атмосфере Титана имеет место существенный вертикальный перенос, причем величина вертикального ветра на высоте 200 км может превышать 1 м/с, а на высоте 380 км может превышать 5 м/с. При этом наиболее интенсивная вертикальная циркуляция получилась при равноденствии и при удалении подсолнечной точки от экватора менее 7° на высотах более 200 км в верхней части слоя атмосферы, в котором имеет место суперротация, и в котором величина зональной компоненты ветра с ростом высоты либо не увеличивается, либо постоянна. В этом слое на низких и средних широтах формируется система волн с вертикальным и зональным движением атмосферного газа, которые движутся вместе с обгоняющим вращения Титана зональным потоком. В этих волнах вертикальный ветер усиливается с ростом высоты, и его величина может превышать 10 м/с на высотах более 450 км. Отметим, что при горизонтальном разрешении модели грубее 1° получить указанную выше интенсивную вертикальную циркуляцию не удавалось. В областях, где имеется интенсивная вертикальная циркуляция, существенно нарушается гидростатическое равновесие.

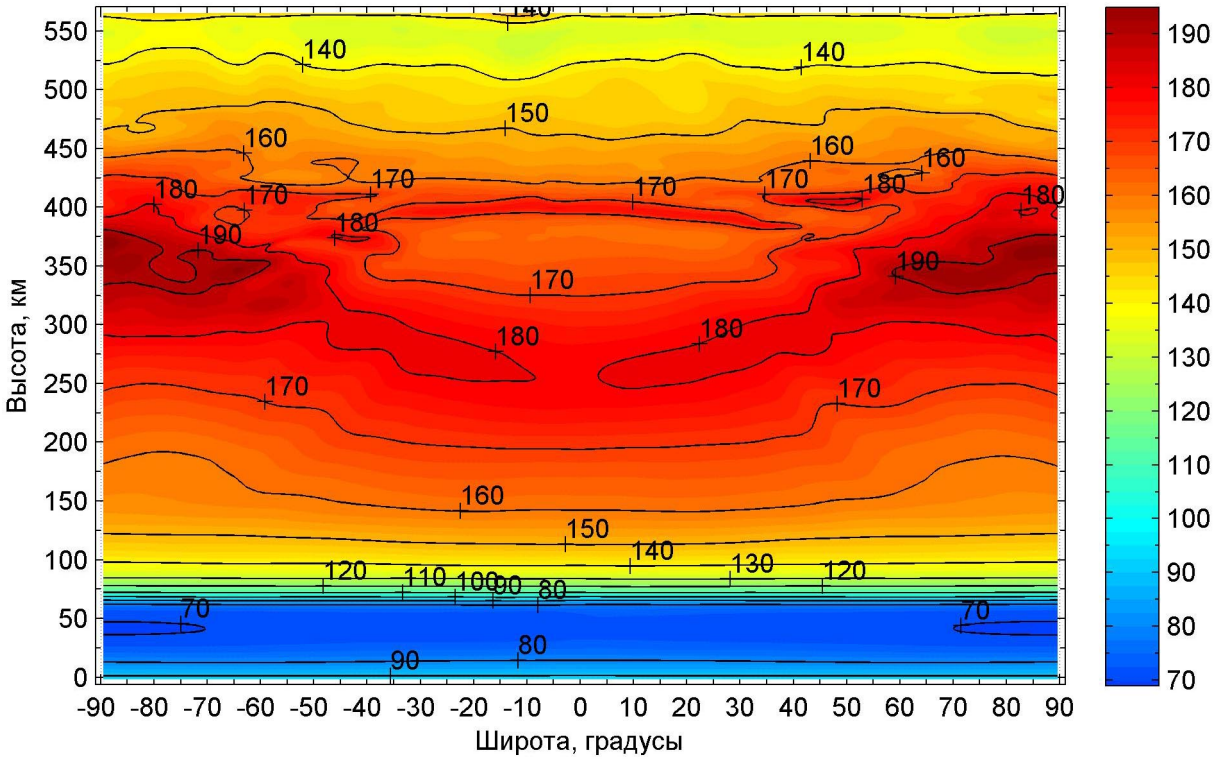

Рис. III.38. *Распределение температуры (K) на утреннем терминаторе, полученное для условий равноденствия через 6400 часов после начала моделирования.*

Четвертая закономерность заключается в том, что при моделировании для условий равноденствия в диапазоне высот от 350 до 500 км получились горячие слои, обусловленные динамическим нагревом атмосферного газа при торможении его достаточно быстрых течений. Согласно инженерной модели температуры атмосферы Титана [*Yelle et al., 1997*], на этих высотах температура должна убывать с ростом высоты. На рис. III.38 приведено распределение температуры на утреннем терминаторе, полученное для условий равноденствия.

Из рис. III.38 видно, что на высоте примерно 400 км на широтах от -45° до 45° существует слой протяженностью по высоте примерно 10 км, в котором температура с ростом высоты сначала увеличивается, достигает локального максимума и затем убывает. Также видно, что на высотах от 300 до 400 км температура в приполюсных областях выше, чем в области низких широт. Изображенное на рис. III.38 распределение температуры в целом хорошо согласуется с данными наблюдений о поле температуры в атмосфере Титана [*Flasar et al., 2005; Fulchignoni et al., 2005; Achterberg et al., 2008, 2011*].

III.5 Выводы главы III

В данной главе представлена модель общей циркуляции атмосферы Титана, основанная на численном интегрировании полной системы уравнений газовой динамики. В модели учитывается рельеф поверхности Титана и используется равномерная сетка в связанной с центром Титана сферической системе координат с вертикальным разрешением 1 км и горизонтальным разрешением меньше 1°. Такое высокое разрешение сетки при моделировании общей циркуляции атмосферы Титана используется впервые в мировой практике.

Также в данной главе изложены результаты проведенного с помощью представленной модели численного моделирования процесса изменения общей циркуляции атмосферы Титана при смене сезонов от весеннего равноденствия до середины лета в северном полушарии. Получены следующие важные закономерности общей циркуляции атмосферы Титана.

Первая из них заключается в том, что примерно через 4000 часов физического времени после начала моделирования распределения всех параметров выходят на квазипериодический режим, на который накладываются различные волновые и колебательные процессы с различными временными масштабами. Амплитуды колебаний и волн становятся заметными, начиная с высот примерно 200 км, и увеличиваются с ростом высоты.

Вторая закономерность заключается в том, что для всех рассматривавшихся сезонов были получены зональная суперротация атмосферы Титана и термический прилив на дневной стороне. При этом часть атмосферы, в которой имеет место зональная суперротация, ограничена сверху, причем при удалении подсолнечной точки от экватора ядро обгоняющего вращение Титана зонального тече-

ния смещается в зимнее полушарие, а условная верхняя граница этого течения понижается.

Третья закономерность полученной при моделировании общей циркуляции атмосферы Титана заключается в том, что в атмосфере Титана имеет место существенный вертикальный перенос, причем величина вертикального ветра на высоте 200 км может превышать 1 м/с, а на высоте 380 км может превышать 5 м/с. При этом наиболее интенсивная вертикальная циркуляция получилась при равноденствии и при удалении подсолнечной точки от экватора менее 7^o на высотах более 200 км в верхней части слоя атмосферы, в котором имеет место суперротация, и в котором величина зональной компоненты ветра с ростом высоты либо не увеличивается, либо постоянна. В этом слое на низких и средних широтах формируется система волн с вертикальным и зональным движением атмосферного газа, которые движутся вместе с обгоняющим вращения Титана зональным потоком. В этих волнах вертикальный ветер усиливается с ростом высоты, и его величина может превышать 10 м/с на высотах более 450 км. Отметим, что при горизонтальном разрешении модели грубее 1^o получить указанную выше интенсивную вертикальную циркуляцию не удавалось. В областях, где имеется интенсивная вертикальная циркуляция, имеет место существенное нарушение гидростатического равновесия.

Четвертая закономерность заключается в том, что при моделировании для условий равноденствия в диапазоне высот от 350 до 500 км получились горячие слои, обусловленные динамическим нагревом атмосферного газа при торможении его достаточно быстрых течений. Согласно инженерной модели температуры атмосферы Титана, на этих высотах температура должна убывать с ростом высоты.

Глава IV.
Численное моделирование общей циркуляции атмосферы Земли

IV.1 Введение главы IV

В данной главе изложено описание двух моделей общей циркуляции нижней и средней атмосферы Земли, а также представлены полученные с помощью этих моделей результаты.

Первая модель является моделью общей циркуляции нижней и средней атмосферы Земли и основана на численном интегрировании полной системы уравнений динамики вязкого атмосферного газа на пространственной сетке с высоким разрешением. В этой модели учитываются рельеф земной поверхности и наличие в атмосфере аэрозолей в виде микрокапель воды и ледяных микрочастиц, а также фазовые переходы водяного пара в аэрозольные частицы и обратно. Данная модель предназначена для изучения структуры и эволюции атмосферных движений в широком диапазоне пространственно–временных масштабов.

Вторая модель предназначена для получения стационарного численного решения уравнений движения атмосферы при стационарном распределении температуры воздуха, которое задается по эмпирической модели NRLMSISE–00 [*Picone et al., 2002*] для различных гелиогеофизических условий. В этой модели вертикальная скорость газа находится путем численного решения полного уравнения движения для вертикальной составляющей скорости без пренебрежения какимилибо членами. Таким образом, все три компоненты скорости ветра рассчитываются при помощи численного решения полных уравнений движения вязкого сжимаемого газа. При этом не используется уравнение гидростатики, обычно применяемое в моделях общей циркуляции атмосферы, т. е. модель является негидростатической. Температура воздуха в этой модели не рассчитывается, а является входным параметром. Получаемые с помощью этой модели стационарные решения не реализуются на практике, но отражают многие качественные черты наблюдаемой циркуляции атмосферы. Изучая различия между модельными стационарными решениями, полученными при различных полях температуры воздуха, можно судить о влиянии на общую циркуляции атмосферы Земли различных гелиогеофизических факторов, изменяющих тепловой режим земной атмосферы.

Наблюдения и результаты численного моделирования показывают, что в нижней атмосфере Земли регулярно возникают горизонтальные сдвиговые течения протяженностью более 1500 км, в которых характерные пространственные масштабы изменения гидродинамической скорости не превышают 100 км, что на порядок меньше, чем требуется при выводе системы уравнений геофизической гидродинамики. Упомянутые выше горизонтальные сдвиговые течения регулярно возникают, в частности, между ячейками циркуляции Хедли, Феррeля и при-

полюсными ячейками, а также на границах циклонов и антициклонов. Эти сдвиговые течения могут существовать в течение нескольких суток и периодически изгибаться, сжиматься и расширяться. При достаточно сильном поперечном сжатии этих течений на их изгибах развивается гидродинамическая неустойчивость, приводящая к распаду течения с образованием крупномасштабных вихрей. При образовании этих вихрей в районе внутритропической зоны конвергенции над океанами из них могут развиваться тропические циклоны. При образовании этих вихрей в районе арктических фронтов из них могут развиваться полярные циклоны. При образовании этих вихрей на границах крупных циклонов и антициклонов из них могут развиваться мезомасштабные циклоны. При образовании этих вихрей над пустынями возникают песчаные бури.

Процессы образования и эволюции вышеуказанных атмосферных вихревых течений играют в динамике атмосферы существенную роль и не могут быть правильно описаны в рамках системы уравнений геофизической гидродинамики. Для физически корректного описания таких динамических процессов и предназначена представленная в данной главе первая модель.

IV.2 Описание первой модели

IV.2.1 Система уравнений, расчетная сетка и метод численного интегрирования

Область моделирования простирается от поверхности Земли до сферы, центр которой совпадает с центром Земли, а радиус которой на 75 км превосходит средний радиус Земли на экваторе. В модели учитывается несферичность земной поверхности и несферичность гравитационного поля Земли. В модели используется расчетная сетка, равномерная в сферических географических координатах. Ближайшие к полюсам целые узлы сетки удалены от полюсов по широте на половину шага. В нынешнем варианте сетка имеет 768 узлов по долготе и 384 узла по широте (шаг 0.46875^0). Шаг сетки по высоте равен 200 м. Нижняя граница области моделирования является ступенчатой поверхностью, проходящей через границы контрольных объемов узлов сетки, и аппроксимирует рельеф поверхности Земли. Шаг сетки по долготе и широте может быть уменьшен. В модели предусмотрена вставка области, в которой шаг сетки по горизонтальным направлениям в 4 или в 8 раз меньше, чем в остальной области моделирования. В текущем варианте модели горизонтальные размеры этой области со сверхвысоким разрешением составляют 384 узлов по долготе и 192 узла по широте.

В модели атмосферный газ рассматривается как смесь воздуха и водяного пара, в которой могут присутствовать аэрозоли двух видов: первый состоит из микрокапель воды, а второй — из микрочастиц льда. Считаем микрокапли воды и микрочастицы льда сферами радиусов 0.1 мм и 0.03 мм соответственно, движущимися относительно смеси воздуха и водяного пара со скоростями осажде-

ния во внешнем силовом поле $\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{вод}}$ и $\mathbf{v}^{\text{ос}}_{\text{л}}$, определяемыми по формуле Стокса с поправкой Каннингэма. Выбранные размеры частиц аэрозолей соответствуют реальным средним размерам частиц в облаках. Температуру смеси и частиц аэрозолей считаем одинаковой и обозначим ее через T. Считаем, что аэрозоль из капель воды может присутствовать только при условиях насыщенности водяного пара и $T \geq T_0 = 273.15\,\text{K}$, а аэрозоль из частиц льда может присутствовать только при условиях насыщенности водяного пара и $T \leq T_0$. При $T = T_0$ температура среды не может увеличиться, пока не расплавятся все частицы льда, и не может уменьшиться, пока не замерзнут все капли воды. Зависимость плотности насыщенного пара $\rho^{max}_{\text{п}}$ от температуры задается уравнением (I.68).

Модель основана на численном интегрировании системы осредненных по Фавру уравнений динамики смеси вязкого сжимаемого газа и аэрозольных частиц (I.69)–(I.75), записанных в консервативной форме. Ускорение внешних сил в модели складывается из ускорения силы тяжести, заданного формулой (I.6), и из ускорений силы Кориолиса и центробежной силы, которые заданы по формулам, приведенным в разделе I.2 главы I.

Для численного интегрирования системы (I.69)–(I.75) использовалась явная разностная схема, детально описанная в разделе I.5 главы I. Программная реализация модели выполнена для использования параллельных вычислений на графических процессорах фирмы NVIDIA последнего поколения и допускает одновременное использование при вычислениях от 1 до 4 графических процессоров на компьютере с логически общей памятью.

IV.2.2 Задание радиационного нагрева атмосферы Земли

В настоящий момент для представленной модели разрабатывается блок расчета поля излучения в атмосфере и мощности нагрева–охлаждения атмосферного газа в узлах расчетной сетки за счет поглощения–испускания электромагнитного излучения.

При проведении тестовых расчетов для задания мощности нагрева–охлаждения атмосферного газа в единице объема за счет поглощения–испускания электромагнитного излучения в модели использовалось релаксационное приближение, описанное в разделе I.6 главы I. Указанная мощность вычислялась по формуле (I.82). Входящие в эту формулу время релаксации $\tau_{\text{рел}}$ и релаксационная температура $T_{\text{рел}}(t, h, \varphi, \beta)$ задавались следующим образом.

Время релаксации зависело только от высоты и задавалось по следующим формулам

$$\tau_{\text{рел}}(h) = \begin{cases} \tau_1 + \tau_2 \left(1 - \left(h/h_m\right)^2\right)^2 & \text{при } 0 \leq h \leq h_m\,, \\ \tau_1 & \text{при } h \geq h_m\,, \end{cases} \tag{IV.1}$$

в которых $h_m = 75\,\text{км}$, а параметры τ_1 и τ_2 принимают значения в диапазоне

от 3 до 6 часов. Представленные далее в этой главе результаты моделирования были получены для случая, когда оба этих параметра были равны 5-ти часам. Зависимость $\tau_{\text{рел}}(h)$ для этого случая изображена на рис. IV.1 справа.

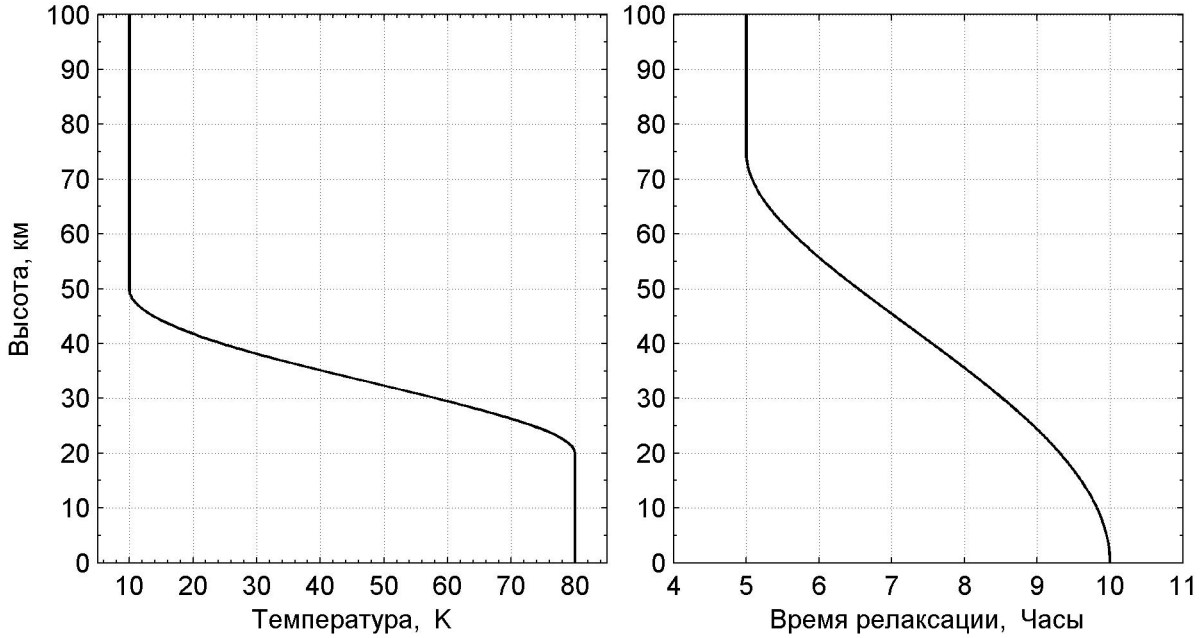

Рис. IV.1. *Вертикальные профили* $T_{dop}(h)$ *слева и* $\tau_{\text{рел}}(h)$ *справа.*

Релаксационная температура зависела от времени, высоты, долготы и широты и задавалась по формуле

$$T_{\text{рел}}(t,h,\varphi,\beta) \;=\; T_M(t,h,\varphi,\beta) \;+\; T_{dop}(h)\left(\max\{\cos\theta,\,0\} - 0.25\right), \qquad \text{(IV.2)}$$

в которой через t, h, φ, β обозначены время, высота, долгота и широта соответственно, через $T_M(t,h,\varphi,\beta)$ обозначена температура в момент времени t на высоте h при долготе φ и широте β, заданная по эмпирической модели NRLMSISE–00 [*Picone et al., 2002*], а через θ обозначен зенитный угол Солнца в точке с долготой φ и широтой β в момент времени t. Второе слагаемое в правой части (IV.2) задает нагрев на освещенной стороне и выхолаживание на ночной стороне, причем $T_{dop}(h)$ — поправочная температура, которая зависит только от высоты и подбирается так, чтобы обеспечить наилучшее соответствие результатов моделирования данным наблюдений.

Было проведено моделирование для нескольких физически оправданных вариантов $T_{dop}(h)$. Представленные далее в этой главе результаты моделирования были получены для случая, когда использовался вертикальный профиль $T_{dop}(h)$, изображенный на рис. IV.1 слева. Этот профиль в градусах Кельвина

задан следующими формулами

$$T_{dop}(h) = \begin{cases} T_1 & \text{при } 0 \le h \le h_1\,, \\ T_1 - T_2\, x^2\,(2-x)^2\,, \quad x = \dfrac{h-h_1}{h_2-h_1} & \text{при } h_1 \le h \le h_2\,, \\ T_1 - T_2 & \text{при } h \ge h_2\,, \end{cases} \qquad \text{(IV.3)}$$

в которых $T_1 = 80\,\mathrm{K}$, $T_2 = 70\,\mathrm{K}$, $h_1 = 20\,\text{км}$, $h_2 = 50\,\text{км}$.

IV.2.3 Начальные и граничные условия

В модели использовались следующие граничные условия. На нижней границе области моделирования было задано условие прилипания, то есть полагалась равной нулю гидродинамическая скорость на поверхности Земли. Также на нижней границе была задана нулем вертикальная компонента вектора потока тепла. На верхней границе области моделирования были заданы условие непротекания через границу (то есть была задана равной нулю вертикальная компонента гидродинамической скорости), условие проскальзывания (то есть были заданы равными нулю производные по высоте от горизонтальных компонент гидродинамической скорости), а также была задана равной нулю производная по высоте от вертикальной компоненты вектора потока тепла.

Распределение температуры атмосферного газа в начальный момент задавалось по эмпирической модели NRLMSISE–00 [*Picone et al., 2002*]. Начальное распределение плотности атмосферного газа на поверхности Земли также задавалось по эмпирической модели NRLMSISE–00 для соответствующей даты и гелиогеофизических условий. Зависимость плотности водяного пара от высоты в начальный момент определялась из условия, что влажность воздуха составляет 80% на поверхности и плавно убывает с высотой до значения 1% на высоте 20 км. Выше 20 км объемная доля водяного пара определялась по стандартной модели атмосферы. Зависимость плотности воздуха от высоты при фиксированной широте и долготе в начальный момент рассчитывалась из условия гидростатического равновесия по вертикали. В начальный момент времени долгота подсолнечной точки равнялась 180°. Все три компоненты скорости ветра в начальный момент брались равными нулю.

IV.3 Результаты моделирования

Были проведены различные тестовые расчеты, показавшие, что в модели правильно реализован метод численного интегрирования системы уравнений, и что модель дает физически корректные результаты. Было проведено моделирование общей циркуляции атмосферы Земли при радиационном нагреве атмосферы, заданном по формулам (I.82), (IV.1)–(IV.3), для двух случаев. В первом случае релаксационная температура и вертикальный профиль времени релаксации под-

бирались так, чтобы смоделировать нагрев атмосферы излучением в середине июля, а во втором – чтобы смоделировать этот нагрев в середине января.

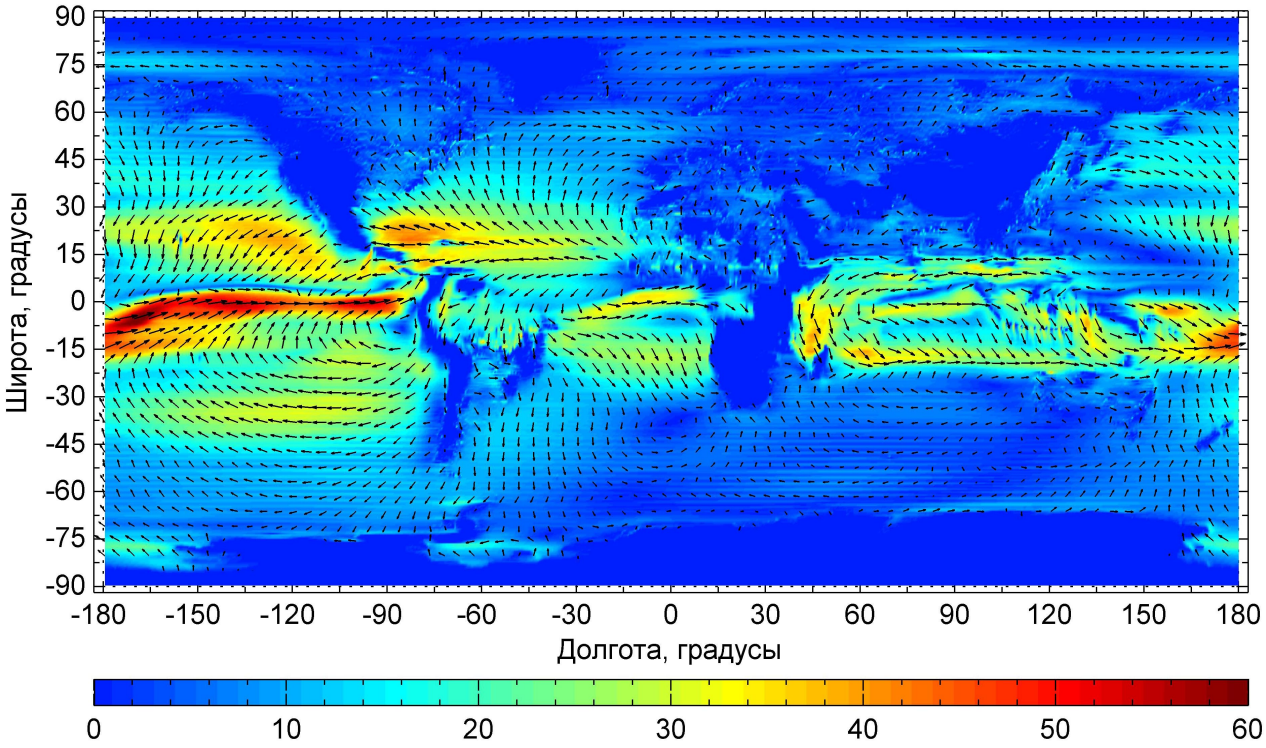

Рис. IV.2. *Распределение горизонтальной компоненты ветра (м/с) на высоте 800 м, полученное при использовании модельного нагрева атмосферы излучением для условий середины июля.*

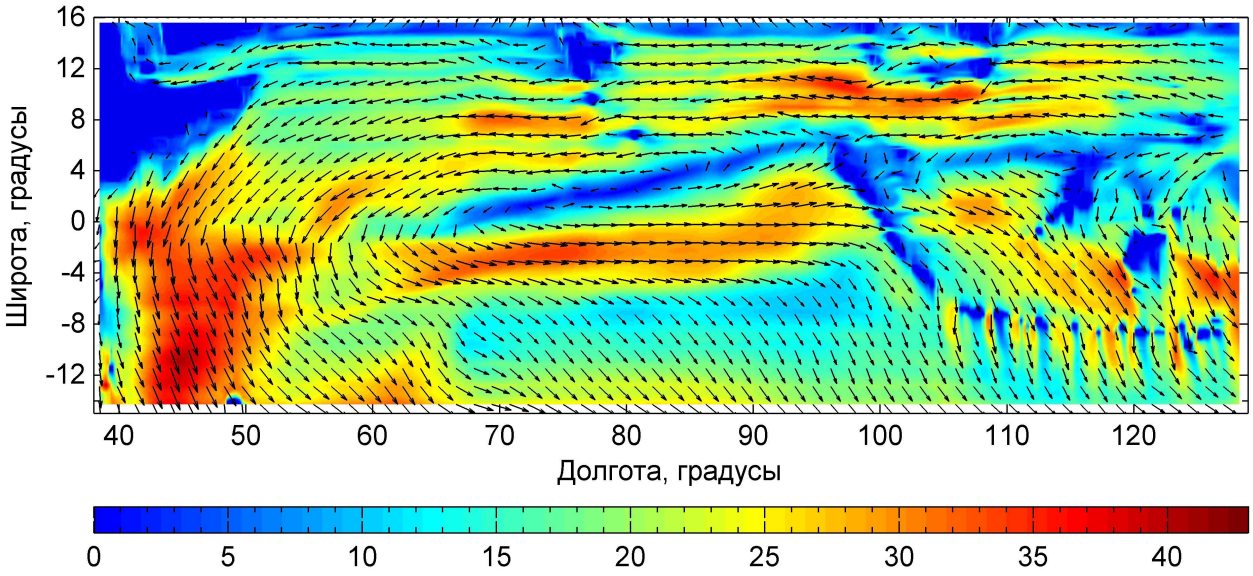

Рис. IV.3. *Увеличенный фрагмент рис. IV.2 над экваториальной частью Индийского океана.*

Установление циркуляции проводилось следующим образом. Широта подсолнечной точки считалась постоянной и осуществлялось ее суточное вращение по

поверхности Земли. В результате примерно через 20–25 суток физического времени устанавливался почти периодический режим циркуляции атмосферы. Одной из особенностей этого режима является существование в нижней тропосфере протяженных областей, в которых имеется горизонтальный сдвиг горизонтальной компоненты ветра. Протяженность этих течений с горизонтальным сдвигом ветра составляет от 1500 до 5000–7000 км, а ширина их составляет от 150 до 400 км. Некоторые из этих течений периодически возникают и распадаются, а некоторые двигаются в горизонтальных направлениях, периодически сжимаются и расширяются, а также изгибаются. Когда эти сдвиговые течения достаточно узкие, и когда в них имеется достаточно большой сдвиг горизонтального ветра, то на их изгибах развивается гидродинамическая неустойчивость, приводящая к распаду течения с образованием от одного до трех крупномасштабных вихрей.

На рис. IV.2 приведено распределение горизонтальной компоненты ветра на высоте 800 м над уровнем моря, полученное при использовании модельного нагрева атмосферы излучениием для условий середины июля. На рис. IV.3 приведен увеличенный фрагмент рис. IV.2 над экваториальной частью Индийского океана. На этих рисунках стрелки указывают направление горизонтальной составляющей ветра, а их длина и цвет фона указывают ее абсолютную величину. Из рис. IV.2. видно, что над Индийским и Тихим океанами в районе экватора имеется горизонтальный сдвиг горизонтальной компоненты ветра. Также видно, что сдвиговое течение над Тихим океаном имеет протяженность более 6000 км и ширину порядка 150–200 км, а над Индийским океаном сдвиговое течение имеет протяженность более 2000 км и ширину также порядка 150–200 км. Из рис. IV.3 видно, что это сдвиговое течение имеет слабые изгибы и в нем формируются очаги циклонической циркуляции.

Изложенные выше результаты моделирования показали, что при использовании предложенного в данной главе упрощенного способа расчета нагрева атмосферы излучением модель позволяет получить общую циркуляцию атмосферы Земли, в которой имеется внутритропическая зона конвергенции (ВЗК) с характерным для этой зоны сдвиговым течением на границе ячеек циркуляции Хедли, а также воспроизводит колебания и изгибы этого течения, которые регулярно наблюдаются на практике. Если сдвиговое течение в ВЗК является достаточно узким, и в нем имеется достаточно большой градиент горизонтального ветра, то изгибы этого течения вызывают развитие неустойчивости, в результате которой на месте ВЗК образуются крупномасштабные циклонические вихри.

IV.4 Краткое описание второй модели

Модель предназначена для исследования циркуляции атмосферы на высотах тропосферы, стратосферы, мезосферы и нижней термосферы. В модели используется сферическая географическая система координат. Областью расчетов яв-

ляется окружающий Землю глобально слой, простирающийся от земной поверхности до высоты 126 км над экватором. Земная поверхность считается сплюснутым с полюсов эллипсоидом вращения. Верхняя граница области моделирования является сферой, проходящей на высоте 126 км над экватором. Расчетная сетка является равномерной по долготе и широте и имеет по этим измерениям одинаковый шаг, равный 1^o. На полюсах узлов сетки нет. Ближайшие к полюсам узлы сетки отстоят от них по широте на половину шага по широте. По высоте расчетная сетка неравномерна и сгущается у поверхности Земли. Ее шаг у верхней границы не превышает 1 км. Влияние турбулентности, имеющей масштабы, меньшие шагов расчетной сетки, на среднее течение атмосферного газа принимается во внимание. Для параметризации этой турбулентности используется способ, описанный в главе I.2. Граничные условия задавались так, чтобы выполнялся закон сохранения массы в области расчетов.

Воздух в этой модели считается однокомпонентным сжимаемым газом, что оправдано для диапазона высот области моделирования. Искомыми величинами являются плотность воздуха и компоненты вектора гидродинамической скорости : вертикальная, зональная и меридиональная компоненты. Искомые величины определяются при решении системы уравнений движения вязкого сжимаемого газа, состоящей из уравнения неразрывности и трех уравнений для компонент вектора скорости в сферической географической системе координат. Эта система уравнений решается со следующими граничными условиями. На нижней границе ставится условие прилипания, а на верхней границе ставится однородное условие Неймана для горизонтальных компонент гидродинамической скорости и условие непротекания для ее вертикальной компоненты. Получение установившегося численного решения осуществляется по методике, описанной в работах [*Мингалев и др., 2005; Mingalev et al., 2007*], в которых модель детально описана.

IV.5 Влияние солнечной активности на глобальную ветровую систему атмосферы Земли в январских условиях

В настоящем подразделе излагаются результаты расчетов общей циркуляции атмосферы Земли, проведенных с помощью описанной выше второй модели при различных уровнях солнечной активности и для условий, когда в Северном полушарии зима. Расчеты выполнялись для условий, соответствующих дате 16 января, при низкой магнитной активности (индекс $K_p = 1$).

Были рассчитаны методом установления глобальные распределения зональной, меридиональной и вертикальной компонент скорости и плотности нейтрального газа при двух пространственных распределениях температуры, вычисленных по эмпирической модели NRLMSISE-00 для момента времени UT=10:30 и даты 16 января, при низкой магнитной активности (индекс $K_p = 1$), для двух

уровней солнечной активности. Первое распределение температуры было вычислено при низкой солнечной активности при значении индекса $F_{10.7} = 101$, а второе распределение температуры было вычислено при высокой солнечной активности при значении индекса $F_{10.7} = 230$. Результаты проведенных расчетов частично представлены на рисунках IV.4–IV.10.

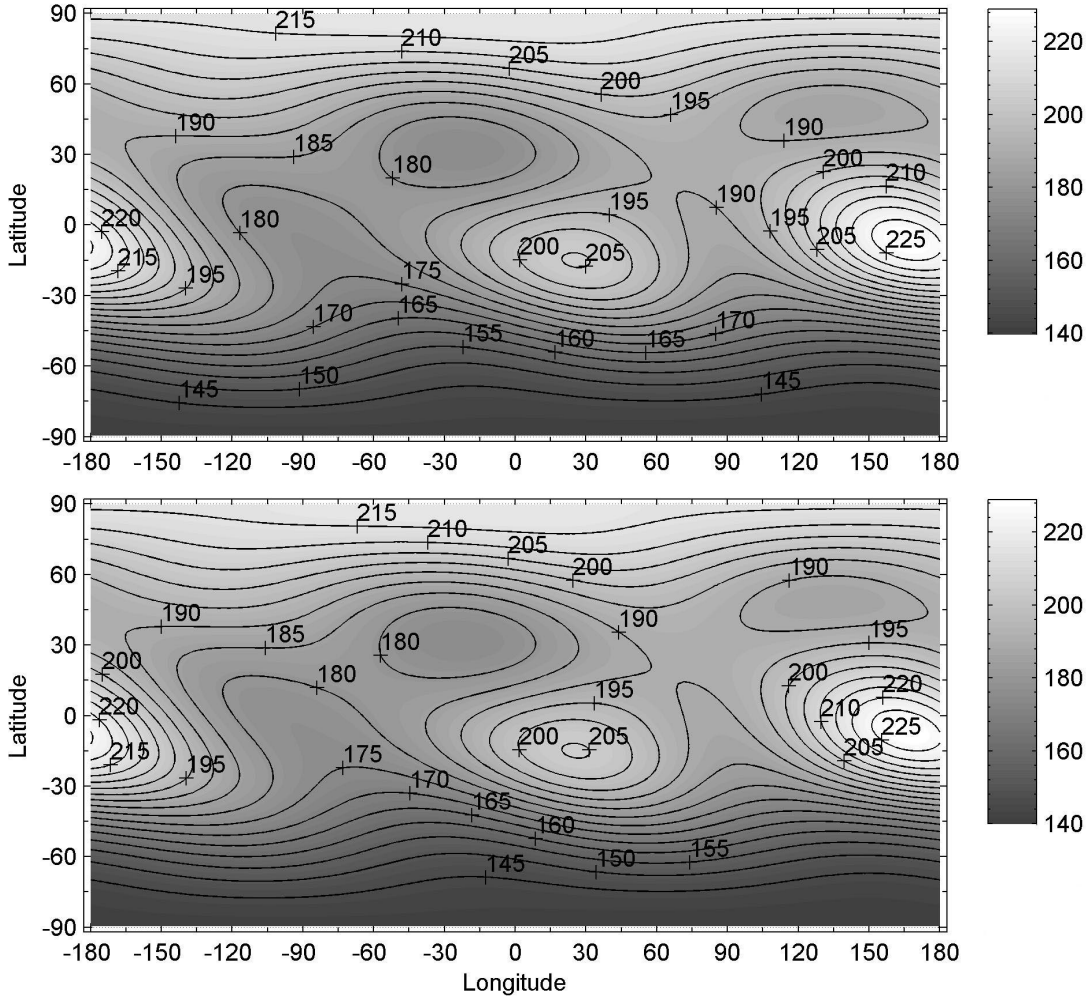

Рис. IV.4. *Глобальные распределения задаваемой температуры нейтрального газа (K) на высоте 90 км, рассчитанные по эмпирической модели NRLMSISE-00 для 16 января UT=10:30 для двух уровней солнечной активности:* $F_{10.7} = 101$ *(вверху) и* $F_{10.7} = 230$ *(внизу).*

Оказалось, что распределения задаваемой по эмпирической модели NRLMSISE-00 температуры, рассчитанные для двух рассматриваемых уровней солнечной активности, ниже высоты 90 км практически совпадают, а выше этого уровня могут заметно различаться. Это хорошо видно из рисунков IV.4 и IV.5. Таким образом, согласно эмпирической модели NRLMSISE-00 температура нейтрального газа не должна быть подвержена влиянию солнечной активности ниже примерно 100 км. В то же время, как видно из рисунков IV.6–IV.10, рассчитанные по второй модели скорости нейтрального ветра, полученные при двух

рассматриваемых уровнях солнечной активности, могут заметно различаться на высотах значительно меньших 90 км.

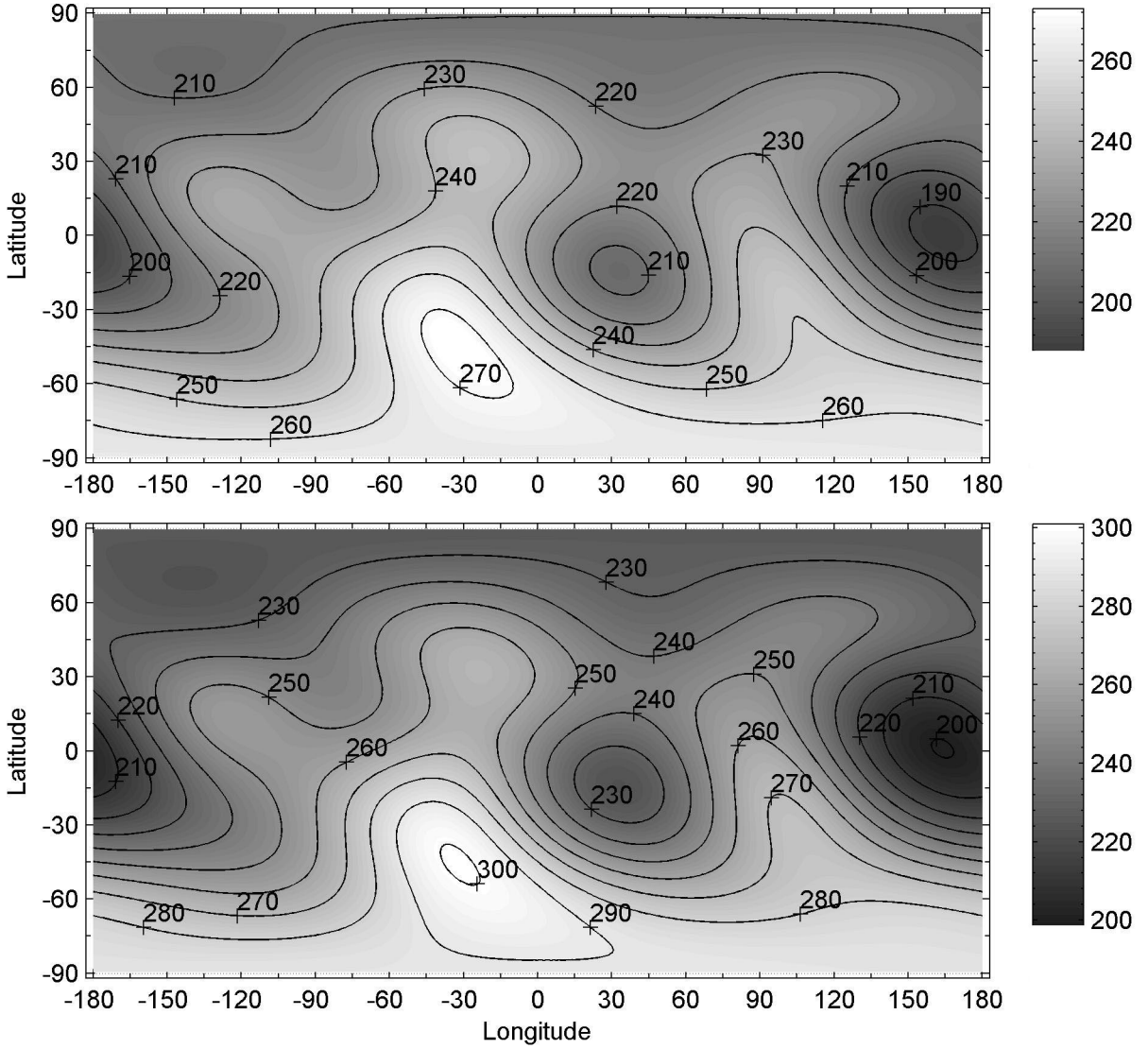

Рис. IV.5. *Глобальные распределения задаваемой температуры нейтрального газа (K) на высоте 110 км, рассчитанные по эмпирической модели NRLMSISE-00 для 16 января UT=10:30 для двух уровней солнечной активности:* $F_{10.7} = 101$ *(вверху) и* $F_{10.7} = 230$ *(внизу).*

Очевидно, что причиной различий крупномасштабных циркуляций атмосферы, рассчитанных при различных уровнях солнечной активности, на этих высотах является не различие полей давления, обусловленных неоднородной структурой полей температур, а какая-то другая причина.

Из рисунков IV.9 и IV.10 видно, что глобальные распределения рассчитанной вертикальной составляющей скорости нейтрального газа как функции долготы и широты, полученные для двух уровней солнечной активности, заметно различаются. Именно эти различия и приводят к различиям крупномасштабных циркуляций атмосферы, рассчитанных при различных уровнях солнечной активности,

на высотах, меньших 100 км.

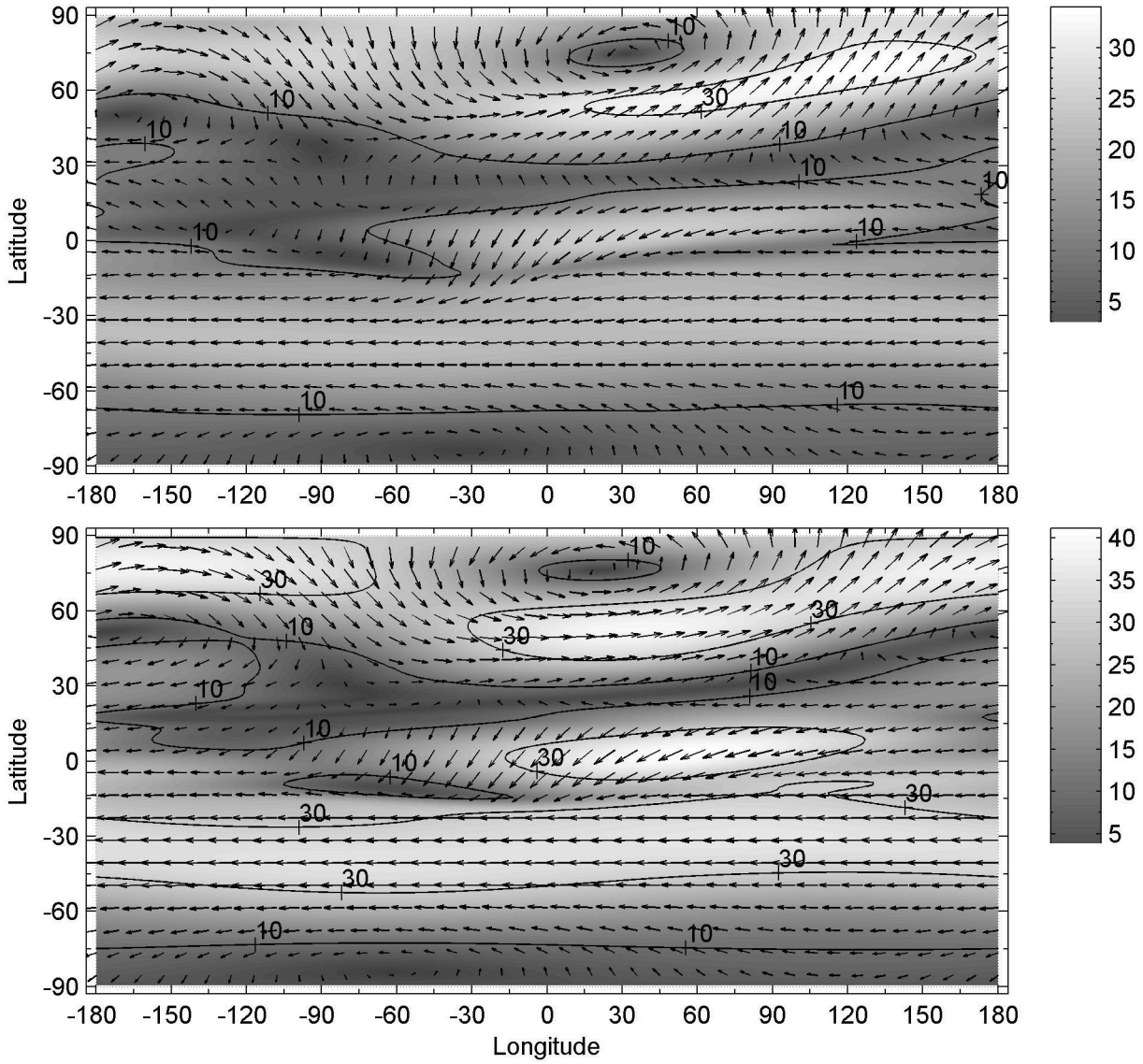

Рис. IV.6. *Глобальные распределения горизонтальной составляющей скорости нейтрального газа (м/с) на высоте 30 км, рассчитанные по второй модели для 16 января UT=10:30 для двух уровней солнечной активности:* $F_{10.7} = 101$ *(вверху) и* $F_{10.7} = 230$ *(внизу).*

Из многолетних наблюдений [*Кац,1968; Ханевская , 1968; Погосян, 1972; Кантер, 1983*] известно, что в периоды, свободные от стратосферных перестроек, в атмосфере Земли на уровнях стратосферы и мезосферы формируются симметричные относительно полюсов крупномасштабные вихревые движения — циркумполярные вихри (ЦПВ) северного и южного полушарий. В частности, в период, близкий к зимнему солнцестоянию, в северном полушарии формируется циркумполярный циклон, а в южном полушарии — циркумполярный антициклон.

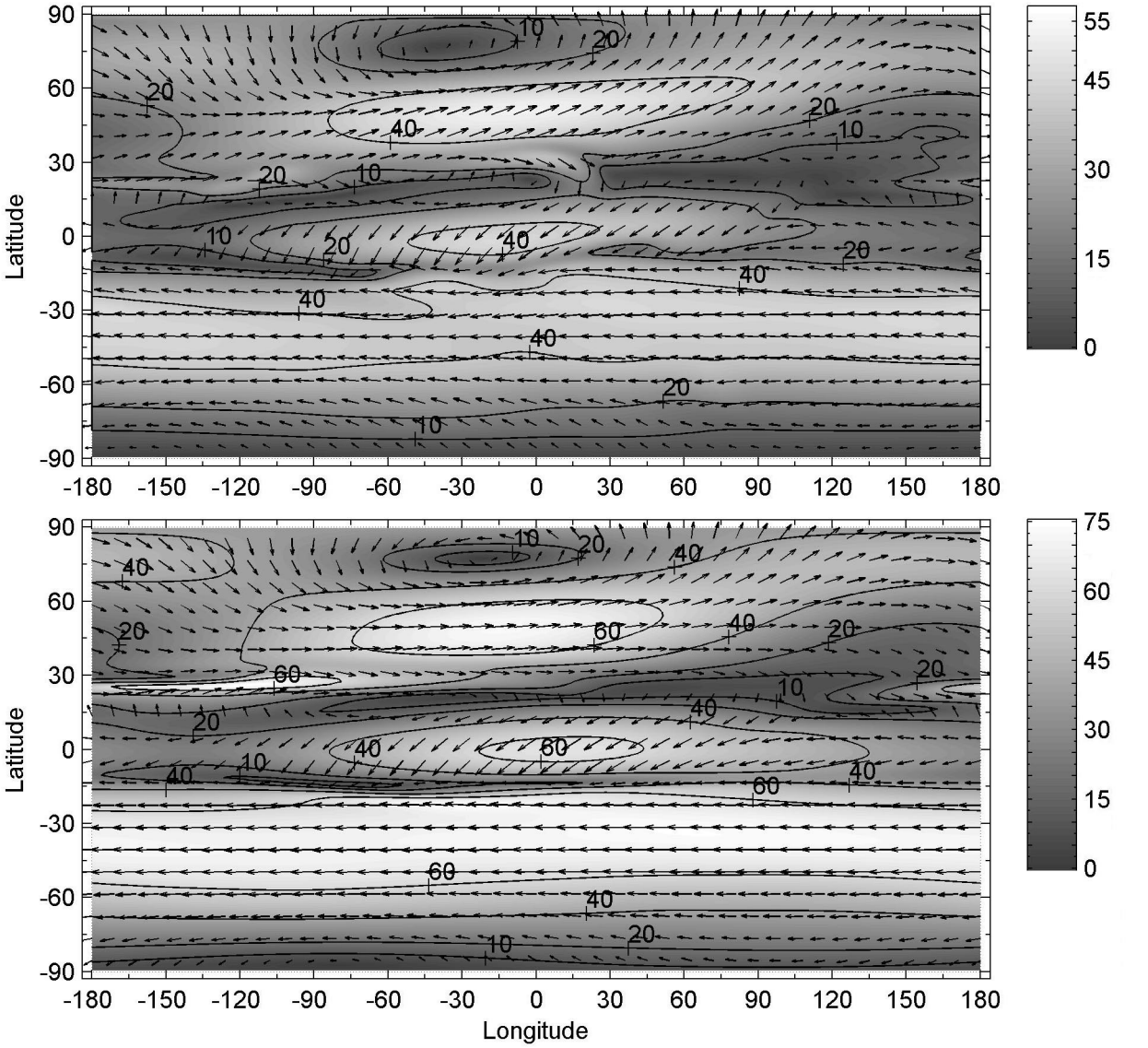

Рис. IV.7. *Глобальные распределения горизонтальной составляющей скорости нейтрального газа (м/с) на высоте 50 км, рассчитанные по модели для 16 января UT=10:30 для двух уровней солнечной активности:* $F_{10.7} = 101$ *(вверху) и* $F_{10.7} = 230$ *(внизу).*

Расчеты показали, что при обоих уровнях солнечной активности на высотах стратосферы и мезосферы была воспроизведена качественно совпадающая с известной из январских наблюдений картина, когда в северном полушарии существует циркумполярный циклон, а в южном полушарии — циркумполярный антициклон. Это хорошо видно из рисунков IV.6–IV.8. Этот факт свидетельствует об адекватности применяемой численной модели.

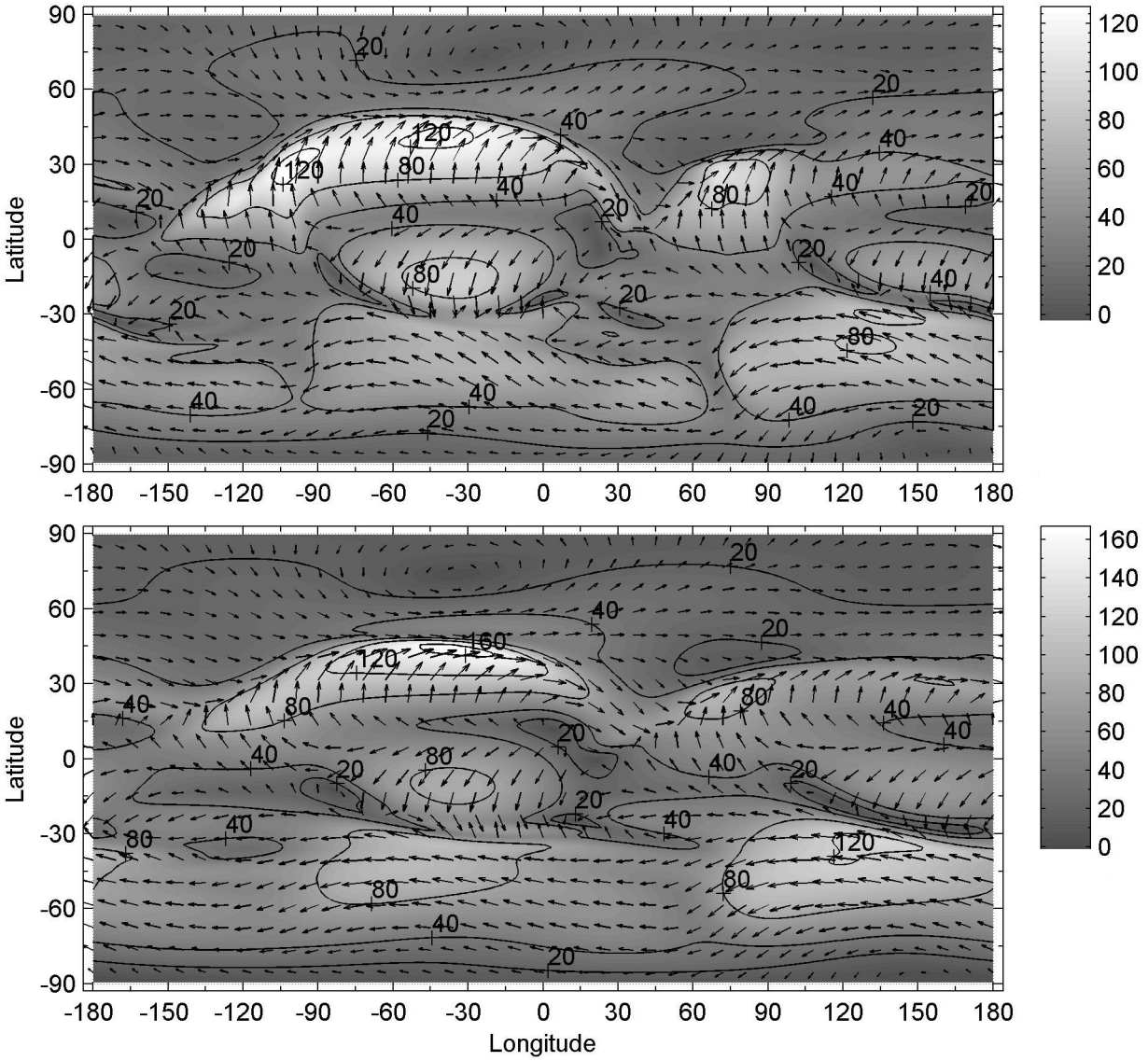

Рис. IV.8. *Глобальные распределения горизонтальной составляющей скорости нейтрального газа (м/с) на высоте 70 км, рассчитанные по модели для 16 января UT=10:30 для двух уровней солнечной активности:* $F_{10.7} = 101$ *(вверху) и* $F_{10.7} = 230$ *(внизу).*

Оказалось также, что в январских условиях при обоих уровнях солнечной активности горизонтальная компонента скорости нейтрального газа является сильно изменяющейся функцией широты, долготы и высоты. Горизонтальная скорость ветра может иметь сильно отличающиеся направления в близко расположенных точках. Существуют ограниченные по размерам горизонтальные области, в которых поле горизонтальной скорости имеет резкие градиенты. Вертикальная скорость нейтрального газа может иметь противоположные направления в горизонтальных областях, имеющих разную конфигурацию.

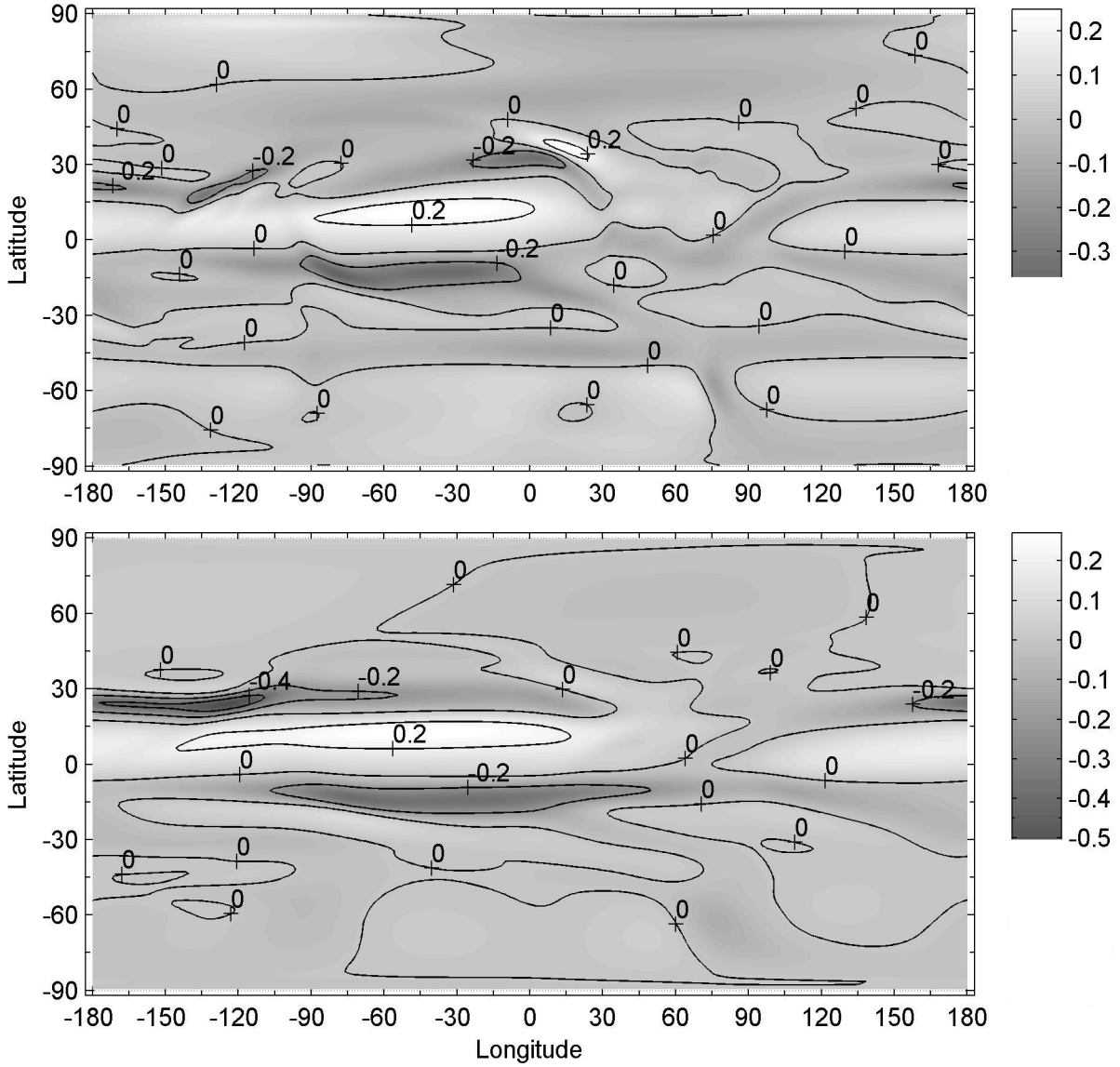

Рис. IV.9. *Глобальные распределения вертикальной составляющей скорости нейтрального газа (м/с) на высоте 50 км, рассчитанные по модели для 16 января UT=10:30 для двух уровней солнечной активности:* $F_{10.7} = 101$ *(вверху) и* $F_{10.7} = 230$ *(внизу).*

Таким образом, результаты расчетов крупномасштабной циркуляции атмосферы при различных уровнях солнечной активности и для условий, когда в Северном полушарии зима, показали, что, несмотря на независимость глобальных распределений задаваемой по эмпирической модели NRLMSISE-00 температуры от солнечной активности на высотах ниже 90 км, влияние солнечной активности на крупномасштабную циркуляцию стратосферы и мезосферы существует. Это влияние является следствием взаимосвязи крупномасштабных циркуляций средней атмосферы и термосферы. В этой взаимосвязи вертикальные движения воздуха играют значительную роль.

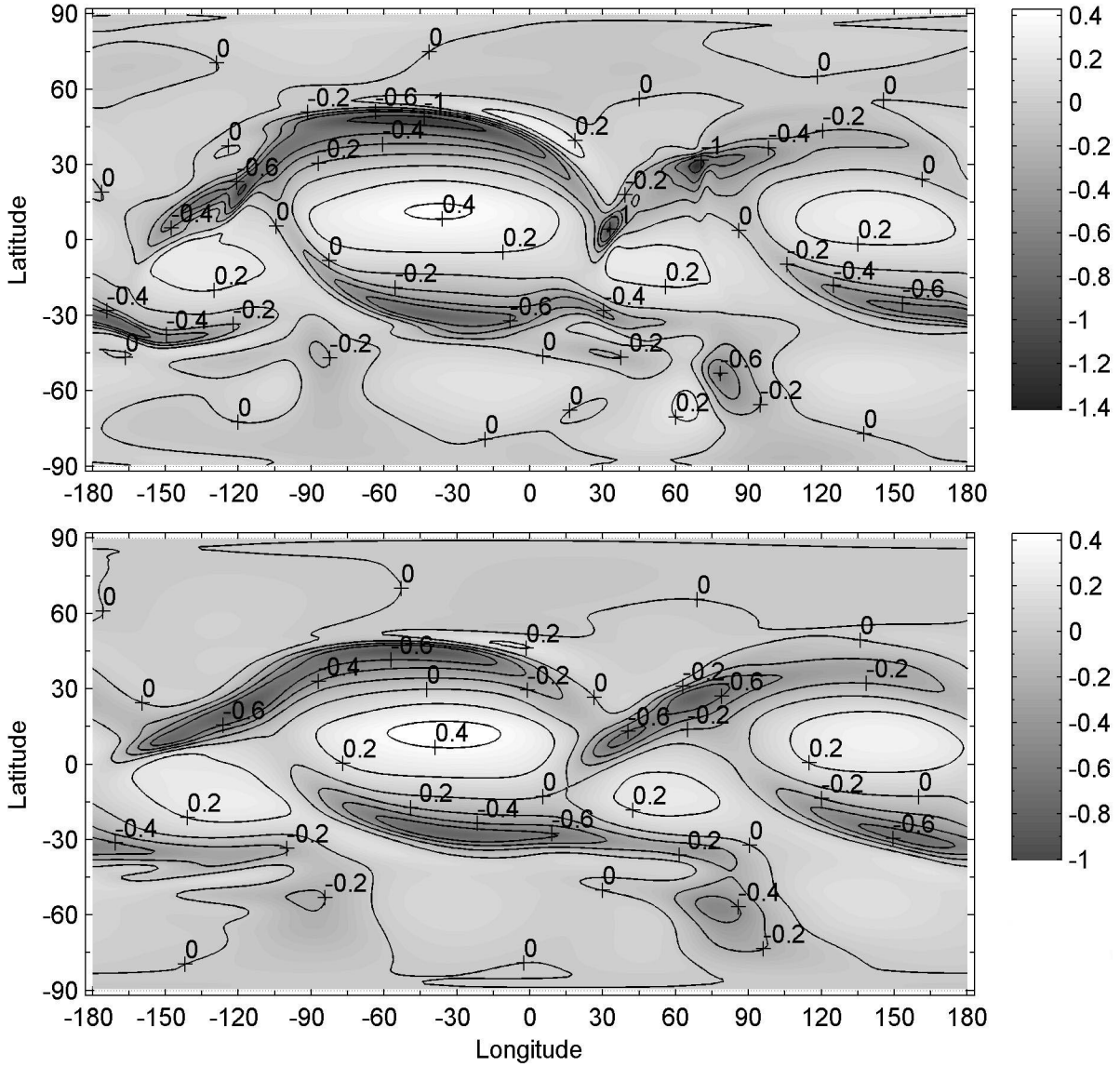

Рис. IV.10. *Глобальные распределения вертикальной составляющей скорости нейтрального газа (м/с) на высоте 70 км, рассчитанные по модели для 16 января UT=10:30 для двух уровней солнечной активности:* $F_{10.7} = 101$ *(вверху) и* $F_{10.7} = 230$ *(внизу).*

IV.6 Влияние солнечной активности на глобальную ветровую систему атмосферы Земли в июльских условиях

В настоящем подразделе излагаются результаты расчетов общей циркуляции атмосферы Земли, проведенных с помощью описанной выше второй модели при различных уровнях солнечной активности и для условий, когда в Северном полушарии зима.

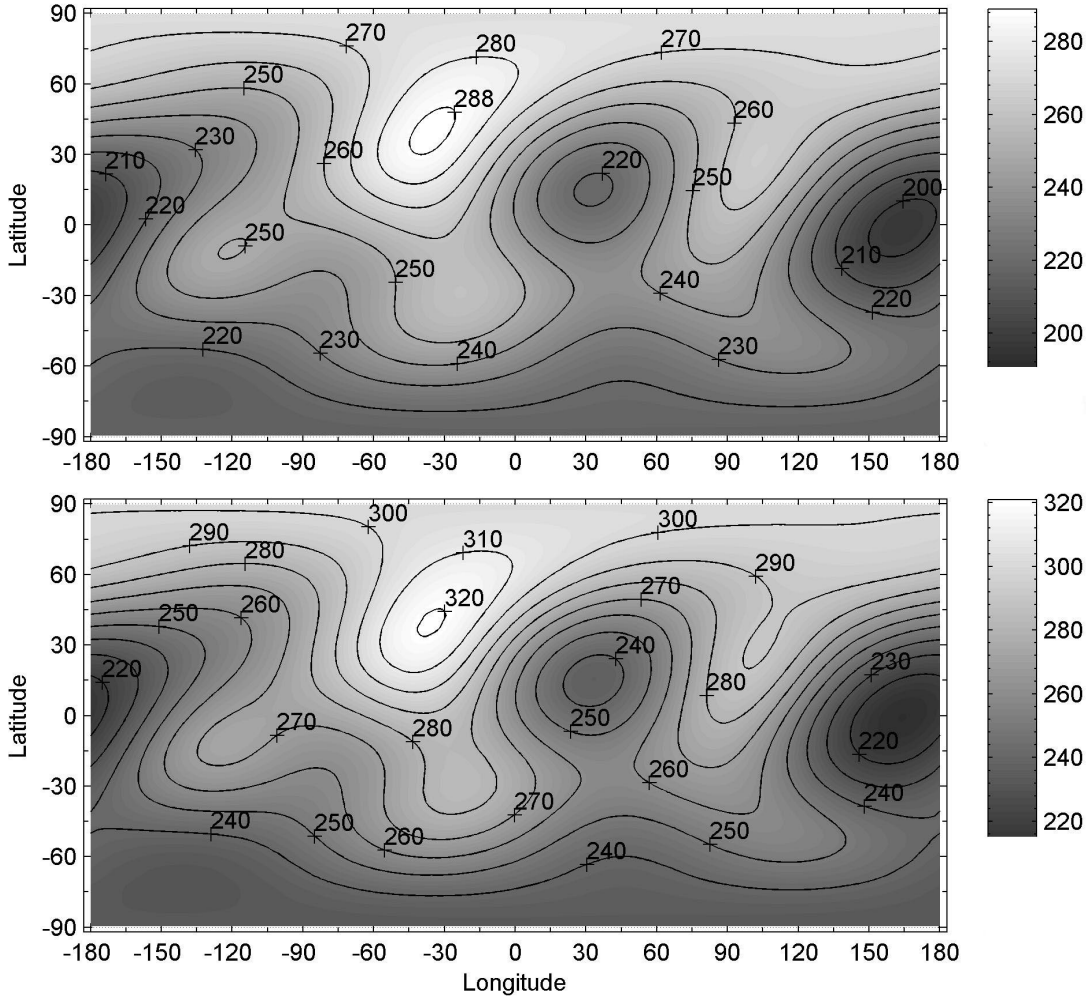

Рис. IV.11. *Глобальные распределения задаваемой температуры нейтрального газа (K) на высоте 110 км, рассчитанные по эмпирической модели NRLMSISE-00 для 16 июля UT=10:30 для двух уровней солнечной активности:* $F_{10.7} = 101$ *(вверху) и* $F_{10.7} = 230$ *(внизу).*

Были рассчитаны методом установления глобальные распределения зональной, меридиональной и вертикальной компонент скорости и плотности нейтрального газа при двух пространственных распределениях температуры, вычисленных по эмпирической модели NRLMSISE-00 для момента времени UT=10:30 и даты 16 июля, при низкой магнитной активности (индекс $K_p = 1$) для двух уровней солнечной активности. Первое распределение температуры было вычислено при низкой солнечной активности при значении индекса $F_{10.7} = 101$, а второе распределение температуры было вычислено при высокой солнечной активности при значении индекса $F_{10.7} = 230$. Результаты проведенных расчетов частично представлены на рисунках IV.11–IV.15.

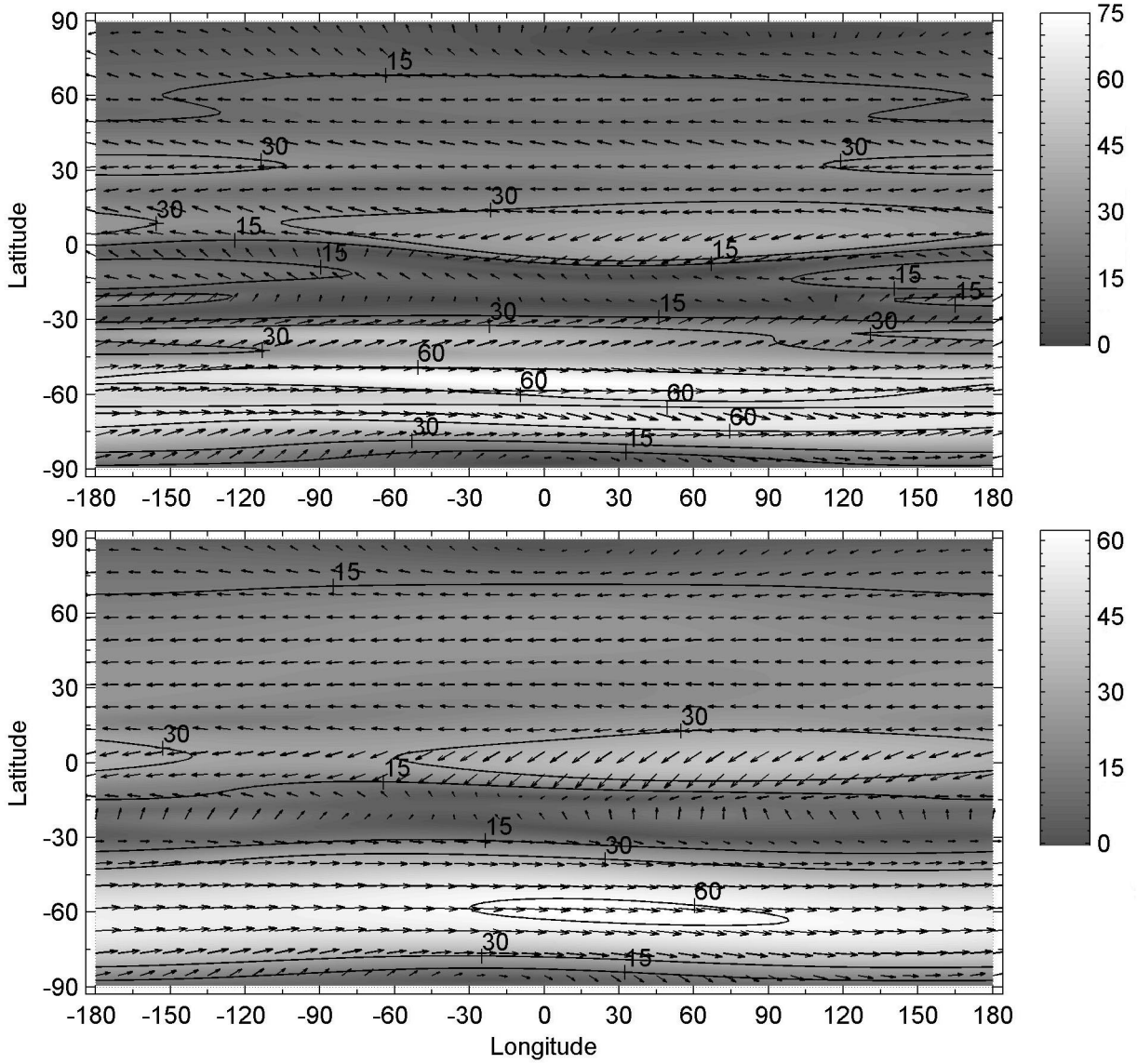

Рис. IV.12. *Глобальные распределения горизонтальной составляющей скорости нейтрального газа (м/с) на высоте 30 км, рассчитанные по второй модели для 16 июля UT=10:30 для двух уровней солнечной активности:* $F_{10.7} = 101$ *(вверху) и* $F_{10.7} = 230$ *(внизу).*

Оказалось, что и в июльских условиях распределения задаваемой по эмпирической модели NRLMSISE-00 температуры, рассчитанные для двух рассматриваемых уровней солнечной активности, ниже высоты 90 км совпадают, а выше этого уровня могут заметно различаться. Это видно из рисунка IV.11. Итак, согласно эмпирической модели NRLMSISE-00, температура нейтрального газа не должна быть подвержена влиянию солнечной активности ниже высоты 90 км.

В то же время, как видно из рисунков IV.11–IV.15, рассчитанные по второй модели скорости нейтрального ветра, полученные при двух рассматриваемых уровнях солнечной активности, могут заметно различаться на высотах, значительно меньших 90 км. Очевидно, что причиной различий крупномасштабных горизонтальных циркуляций атмосферы, рассчитанных при различных уровнях

солнечной активности, на этих высотах является различие системы вертикальных ветров нейтрального газа, получающихся при двух рассматриваемых уровнях солнечной активности.

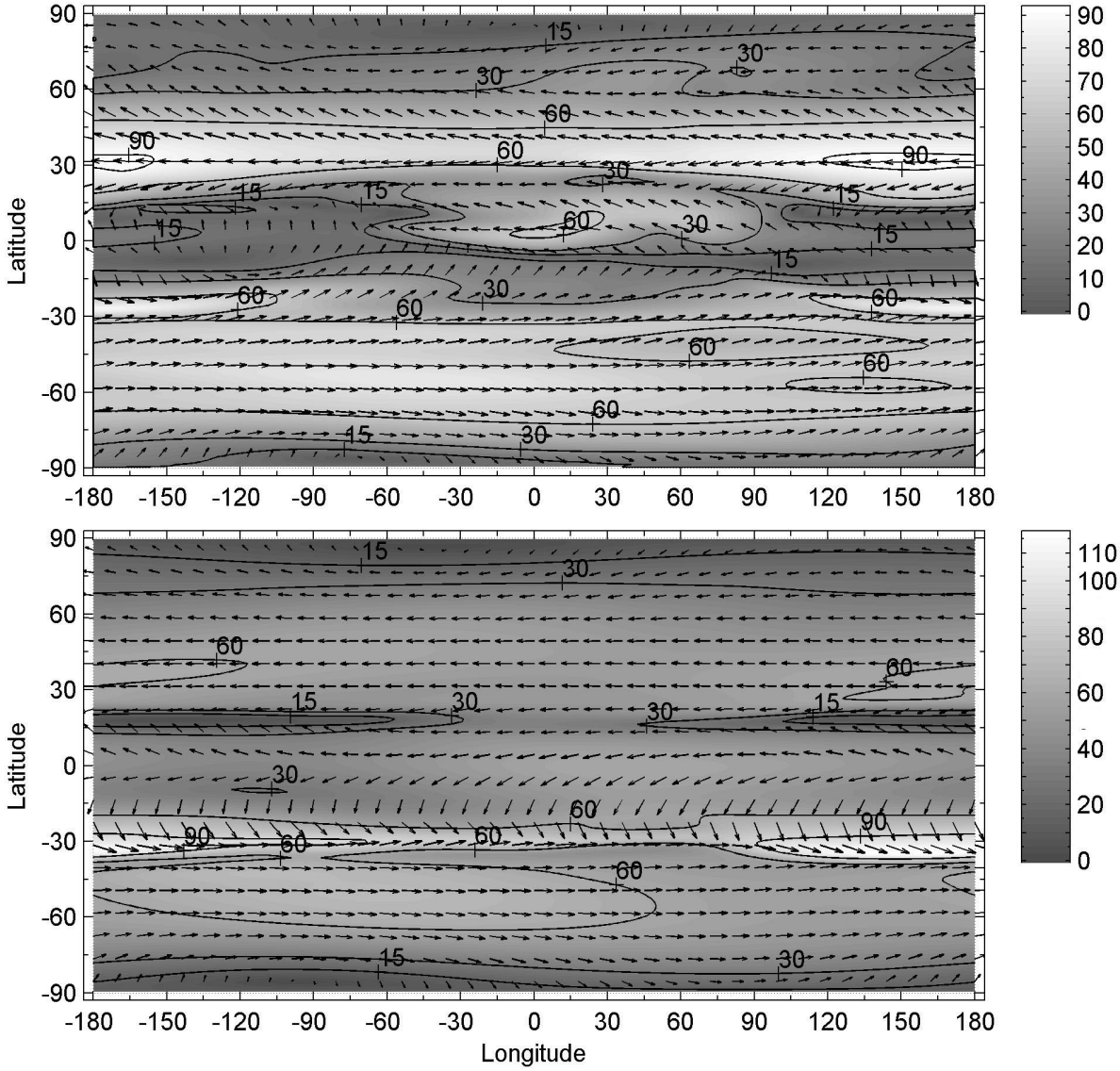

Рис. IV.13. *Глобальные распределения горизонтальной составляющей скорости нейтрального газа (м/с) на высоте 30 км, рассчитанные по второй модели для 16 июля UT=10:30 для двух уровней солнечной активности:* $F_{10.7} = 101$ *(вверху) и* $F_{10.7} = 230$ *(внизу).*

Из многолетних наблюдений [*Кац, 1968; Ханевская, 1968; Погосян, 1972; Кантер, 1983*] известно, что в период, близкий к летнему солнцестоянию, в северном полушарии формируется циркумполярный антициклон, а в южном полушарии — циркумполярный циклон. Расчеты показали, что при обоих уровнях солнечной активности на высотах стратосферы и мезосферы была воспроизведена качественно совпадающая с известной из июльских наблюдений картина, когда в северном полушарии существует циркумполярный антициклон, а в южном полушарии — циркумполярный циклон; это хорошо видно из рисунков IV.11–IV.13.

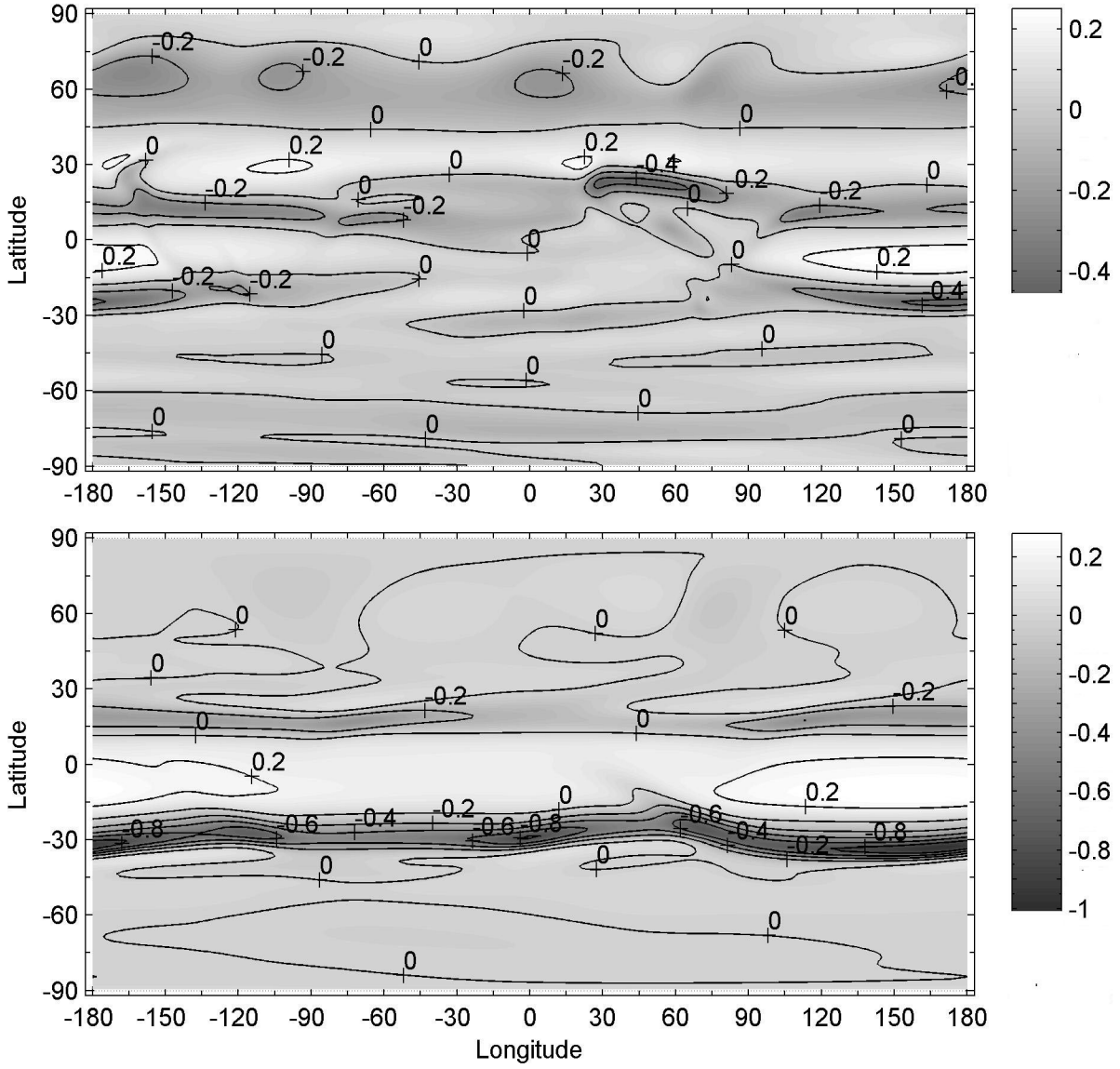

Рис. IV.14. *Глобальные распределения вертикальной составляющей скорости нейтрального газа (м/с) на высоте 50 км, рассчитанные по второй модели для 16 июля UT=10:30 для двух уровней солнечной активности:* $F_{10.7} = 101$ *(вверху) и* $F_{10.7} = 230$ *(внизу).*

Оказалось также, что в июльских условиях при обоих уровнях солнечной активности горизонтальная и вертикальная компоненты скорости нейтрального газа являются сильно изменяющимися функциями широты, долготы и высоты. Расчеты показали, что изменение солнечной активности должно привести к изменению поля ветров. В северном полушарии ниже высоты 40 км максимальные значения горизонтальной скорости при повышении солнечной активности должны увеличиваться, а выше этого уровня — должны уменьшаться. В южном полушарии ниже высоты 40 км максимальные значения горизонтальной скорости при повышении солнечной активности должны уменьшаться, а выше этого уровня — должны увеличиваться.

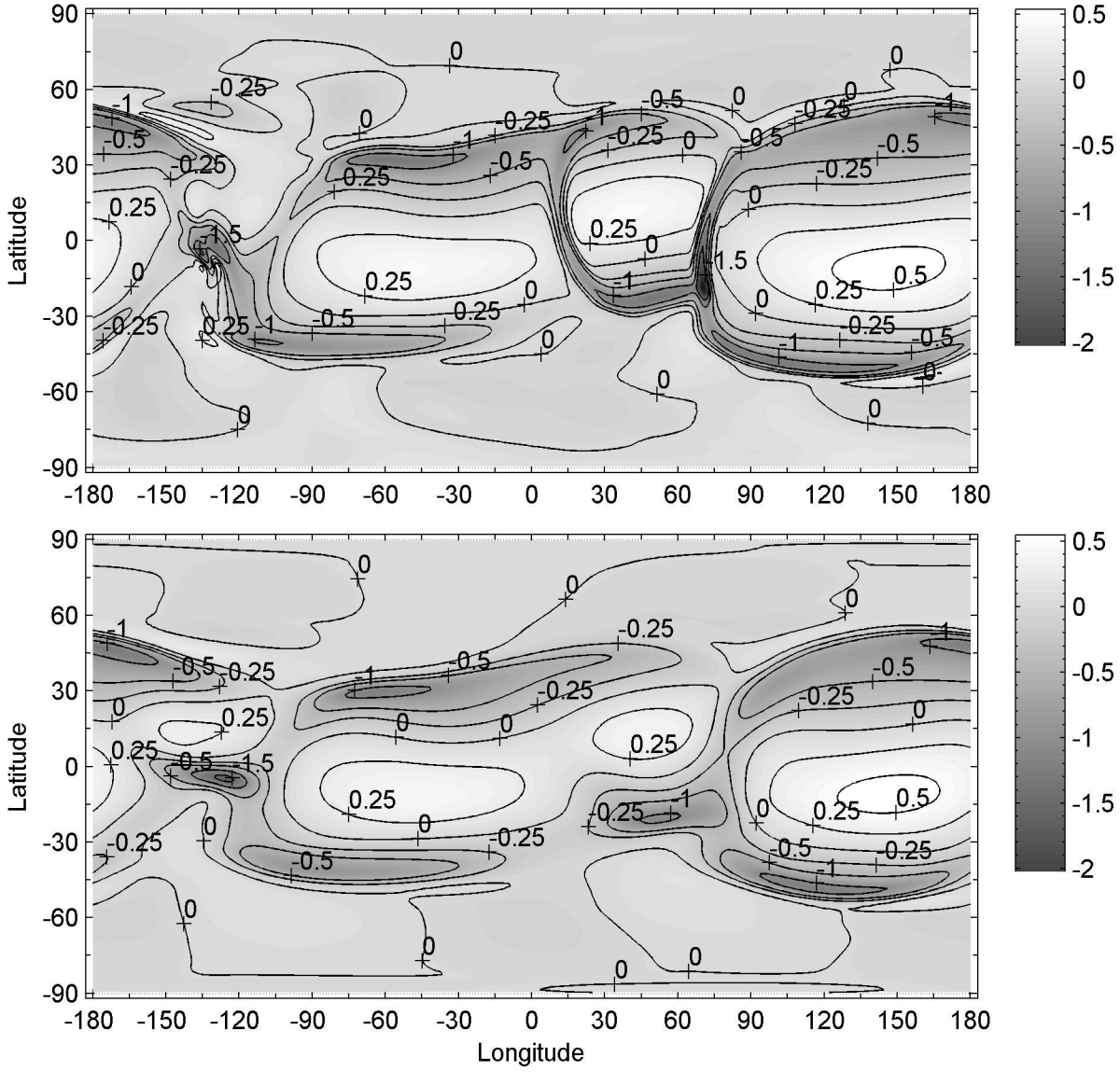

Рис. IV.15. *Глобальные распределения вертикальной составляющей скорости нейтрального газа (м/с) на высоте 90 км, рассчитанные по второй модели для 16 июля UT=10:30 для двух уровней солнечной активности:* $F_{10.7} = 101$ *(вверху) и* $F_{10.7} = 230$ *(внизу).*

Итак, результаты расчетов крупномасштабной циркуляции атмосферы при различных уровнях солнечной активности и для условий, когда в Северном полушарии лето, показали, что, несмотря на независимость глобальных распределений температуры, задаваемых по эмпирической модели NRLMSISE-00, от солнечной активности ниже высоты 90 км, влияние солнечной активности на крупномасштабную циркуляцию стратосферы и мезосферы существует. Это происходит из-за взаимосвязи крупномасштабных циркуляций средней атмосферы и термосферы. Вертикальные движения воздуха в этой взаимосвязи играют существенную роль.

IV.7 Выводы главы IV

В данной главе представлена модель общей циркуляции нижней и средней атмосферы Земли, основанная на численном интегрировании полной системы уравнений динамики вязкого атмосферного газа на пространственной сетке с горизонтальным разрешением 0.46875° и разрешением по высоте 200 м. Такое высокое разрешение сетки при моделировании общей циркуляции атмосферы Земли используется впервые в мировой практике. В модели предусмотрена вставка области, в которой шаг сетки по горизонтальным направлениям в 4 или в 8 раз меньше, чем в остальной области моделирования, а также учитываются рельеф земной поверхности и наличие в атмосфере аэрозолей из воды и льда, а также фазовые переходы водяного пара в аэрозольные частицы и обратно. Программная реализация модели использует массивные параллельные вычисления на нескольких графических ускорителях. Представленные в этой главе результаты моделирования показали, что при использовании предложенного в данной главе упрощенного способа расчета нагрева атмосферы излучением модель воспроизводит общую циркуляцию атмосферы Земли, в которой имеется внутритропическая зона конвергенции с характерным для этой зоны сдвиговым течением на границе ячеек циркуляции Хедли, а также воспроизводит колебания и изгибы этого течения. Если сдвиговое течение во внутритропической зоне конвергенции является достаточно узким, и в нем имеется достаточно большой градиент горизонтального ветра, то изгибы этого течения вызывают развитие неустойчивости, в результате которой на месте ВЗК образуются крупномасштабные циклонические вихри. Представленная модель позволяет на новом уровне исследовать динамические процессы в атмосфере Земли, в том числе те процессы, которые ранее были недоступны для численного моделирования, в частности, позволяет моделировать возникновение, движение и эволюцию крупномасштабных вихрей в земной атмосфере.

Также в данной главе представлена вторая модель, предназначенная для получения стационарного численного решения уравнений движения атмосферы при стационарном распределении температуры воздуха, которое задается по эмпирической модели NRLMSISE–00 для различных гелиогеофизических условий. В этой модели, как и в первой модели, не используется уравнение гидростатики. Температура воздуха во второй модели не рассчитывается, а является входным параметром. Получаемые с помощью этой модели стационарные решения не реализуются на практике, но отражают многие качественные черты наблюдаемой циркуляции атмосферы. Изучая различия между модельными стационарными решениями, полученными при различных полях температуры воздуха, можно судить о влиянии на общую циркуляцию атмосферы Земли различных гелиогеофизических факторов, изменяющих тепловой режим земной атмосферы. Представлены результаты расчетов крупномасштабной циркуляции атмосферы при

двух уровнях солнечной активности для условий, когда в Северном полушарии зима, и для условий, когда в Северном полушарии лето. Эти результаты показали, что, несмотря на независимость глобальных распределений температуры, заданной по эмпирической модели NRLMSISE-00, от солнечной активности на высотах ниже 90 км, влияние солнечной активности на крупномасштабную циркуляцию стратосферы и мезосферы существует. Это влияние является следствием взаимосвязи циркуляции средней атмосферы и термосферы. В этой взаимосвязи вертикальные движения воздуха играют значительную роль.

Глава V.
Численное моделирование формирования циклонических вихревых течений в области внутритропической зоны конвергенции

V.1 Введение главы V

В данной главе представлены результаты численного моделирования процессов формирования циклонических вихрей в тропической атмосфере Земли в области внутритропической зоны конвергенции. Для моделирования использовалась региональная модель, созданная И.В. Мингалевым и К.Г. Орловым и основанная на численном интегрировании полной 3-мерной системы уравнений газовой динамики с учетом фазовых переходов водяного пара в микрокапли воды и частицы льда и с учетом оседания этих капель и частиц льда в поле силы тяжести. Различные варианты этой модели использовались в работах [*Белоцерковский, Мингалев и др., 2009; Мингалев и др., 2011а, 2011б, 2012а, 2012б*].

В начальных и граничных условиях модели используются наблюдательные данные о структуре доминирующих воздушных потоков, формирующихся во внутритропической зоне конвергенции над северной Атлантикой в периоды ее наибольшей термодинамической интенсивности и неустойчивости. Численно получено формирование циклонических вихревых течений при появлении возмущений в виде изгибов внутритропической зоны конвергенции в случае, когда сдвиговое течение в этой зоне имеет достаточно большой градиент от горизонтальной составляющей ветра в горизонтальном направлении перпендикулярном направлению ветра в этом течении. Такие изгибы регулярно наблюдаются по спутниковым данным и могут возникать из-за различных причин, например, из-за прохождения волн Россби–Блиновой или из–за возникновения градиента давления в меридиональном направлении.

Проведено сравнение результатов численного моделирования с данными микроволнового спутникового мониторинга — глобальными радиотепловыми полями Земли из электронной коллекции GLOBAL–Field, позволяющими изучать структуру атмосферных движений в широком диапазоне пространственно–временных масштабов. Проведенное численное моделирование направлено на поиск физических причин, в результате которых в районе внутритропической зоны конвергенции формируются интенсивные циклонические вихри, а также на изучение возможных сценариев формирования и движения этих вихрей. Полученные результаты можно использовать для выработки критериев более раннего обнаружения опасных ситуаций.

Циклоническая деятельность — образование и перемещение в атмосфере циклонов и антициклонов самых разных пространственно-временных масштабов — едва ли не самая характерная черта земной атмосферы: это крупномасштабные

квазистационарные центры действия атмосферы, размеры которых сравнимы с масштабами океанов и континентов, крупномасштабные вихри умеренных широт, имеющие горизонтальные размеры до 6000 км, тропические циклоны, горизонтальные размеры которых от 300 до 1000 км, а также торнадо, имеющие горизонтальные размеры до 50 км и т.д. Процессы формирования и эволюции таких интенсивных природных атмосферных вихрей, как тропические циклоны, находятся в центре внимания научного сообщества в течение длительного времени. Это связано с тем, что тропические циклоны и ураганы регулярно производят большие разрушения на территории многих государств, оказывают большое влияние на многие физические процессы в атмосфере Земли и определяют погоду обширных территорий.

Наблюдения показывают, что наиболее часто (в 87% случаев) тропические циклоны возникают между 5 и 20° широты в каждом полушарии и лишь в 13% случаев в более высоких широтах. Севернее 35° с.ш. и южнее 22° ю.ш. возникновение тропических циклонов не отмечалось. Ближе 5° широты к экватору тропические циклоны наблюдаются редко, так как отклоняющая сила вращения Земли здесь слишком мала для развития интенсивной циклонической циркуляции. Тропические циклоны могут возникать в любое время года в тропиках всех океанов, за исключением юго–востока Тихого океана и южной Атлантики, т.е. в шести основных регионах зарождения тропических циклонов — шести зонах активного тропического циклогенеза: северо–запад, северо–восток и юг Тихого океана, север Атлантики, север и юг Индийского океана. Каждый год тропические циклоны, скорость ветра в которых достигает 120 км/ч и более, проносятся над тропическими морями, опустошая побережье и приводя к гибели сотен людей. Огромная энергия тропических циклонов и отсутствие адекватного прогноза приводят к катастрофам, особенно при их выходе на побережье. Выходя на материк, атмосферные вихри довольно быстро разрушаются, но при этом, обладая большой разрушительной силой, успевают нанести значительный ущерб природе и людям, а также экономике. Кинетическая энергия среднего по размерам циклона сравнима с энергией взрыва нескольких мощных водородных бомб. Рекордные ураганы по причиненному ущербу — это Katrina в 2005 году и Andrey в 1992 году (89,6 и 40,7 млрд. долларов), а по числу погибших — San–Kaliksto или Великий ураган в 1780 году и Mitch в 1998 году (по 22000 погибших). Тропические циклоны несут в себе колоссальные запасы энергии и обладают большой разрушительной силой, последствия которой усугубляются плохим прогнозом.

Приэкваториальная зона земной атмосферы и, в частности, внутритропическая зона конвергенции (ВЗК) — колоссальный генератор, постоянно производящий волны, несущие теплый влажный воздух вдоль зоны, а временами выносящие его в более высокие широты. ВЗК — это промежуточная зона преимущественно восточных ветров экваториальной барической ложбины между пассата-

ми Северного и Южного полушарий шириной несколько сотен км (или статистически значимая граница между двумя циркуляционными ячейками Хедли). Слабые тропические депрессии, часто без замкнутых изобар, постоянно возникают как волновые возмущения в ВЗК. Они перемещаются преимущественно в общем восточном направлении переноса воздуха внутри тропиков и под воздействием силы Кориолиса начинают закручиваться в спираль. Для развития интенсивного циклонического вихря нужна большая энергия неустойчивости воздушных масс и лишь малая часть слабых депрессий, образовавшихся в ВЗК, разовьется в дальнейшем в тропические циклоны или ураганы. Тем не менее, наблюдения показывают, что преобладающая часть тропических циклонов со штормовыми ветрами и катастрофическими последствиями формируется именно в ВЗК.

С существованием сдвиговых зональных ветров связан механизм генерации фронтальных синоптических вихрей. Как показывают метеорологические наблюдения в атмосферах планет, неустойчивый зональный ветер генерирует так называемые меандры (геометрический орнамент в виде кривой линии с завитками) с масштабом от нескольких сотен до тысяч километров. Отсекаемые от зональных ветров меандры трансформируются в циклонические и антициклонические вихри. Генерация циклонических и антициклонических вихрей — результат развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца в потоке со сдвигом скорости. В долгоживущих синоптических вихрях (циклонах и антициклонах) происходит захват вещества, которое переносится с вихрями на большие расстояния. Это свойство определяет их важную роль в динамике распределения среднесуточного давления, температуры, скорости ветра и др.

Несмотря на большие объемы исследований, проведенных в результате численного и лабораторного моделирования, а также накопленных данных наблюдений, физические механизмы образования тропических циклонов и ураганов однозначно не установлены. В частности, не установлены достоверно механизмы формирования в тропической атмосфере первичных слабых циклонических депрессий, из которых в дальнейшем развиваются тропические циклоны. Решение этой проблемы открыло бы возможность создания эффективной методики раннего предсказания возникновения ураганов над тропическими районами океанов, основанной на анализе данных спутниковых наблюдений. Создание такой методики является очень важной и актуальной задачей.

В настоящий момент данные наблюдений не позволяют получить детальную картину термодинамики атмосферы при зарождении тропического циклона. Измерить поле скоростей ветра, поле давления и поле температуры в области с горизонтальными размерами в несколько сотен километров и вертикальным размером более 10 км с достаточно хорошим разрешением не позволяет отсутствие технических возможностей. В то же время использование численной модели, которая адекватно описывает динамику атмосферы и главные физические процес-

сы в ней и имеет достаточное пространственное разрешение, дает возможность детально исследовать динамические процессы в атмосфере при помощи численного моделирования и, в результате, позволяет интерпретировать имеющиеся данные наблюдений более точно, чем ранее.

Численное моделирование уже применялось для исследования поведения циклонов. Имеются работы [*Rotunno and Emanuel, 1987; Emanuel, 2005*], в которых используется численная негидростатическая мезомасштабная модель эволюции циклона. В этой модели в качестве начального условия задается достаточно интенсивный горизонтальный вихрь и рассчитывается его эволюция, приводящая к формированию циклона или урагана. Вопрос же о возникновении начального горизонтального вихревого течения остается открытым.

В этой главе излагаются результаты численного моделирования динамики тропосферы в районе внутритропической зоны конвергенции (ВЗК) при наличии изгибов этой зоны в начальный момент. Проводится сравнение полученных результатов с данными микроволнового спутникового мониторинга — глобальными радиотепловыми полями Земли из электронной коллекции GLOBAL–Field (http://www.iki.rssi.ru), позволяющими изучать структуру атмосферных движений в широком диапазоне пространственно–временных масштабов.

Принимается во внимание, что по данным наблюдений достаточно крупные циклонические вихревые течения со скоростью ветра до 10–15 м/с часто возникают на границах внутритропической зоны конвергенции во время ее наибольшей интенсивности и неустойчивости. В начальных и граничных условиях модели используются данные о структуре доминирующих воздушных потоков в ВЗК: в интервале высот от поверхности Земли до высоты примерно 3 км меридиональная компонента ветра направлена к центру ВЗК, а на высотах более 3 км она направлена от центра ВЗК; вертикальная компонента ветра внутри ВЗК направлена вверх; зональная компонента ветра направлена на запад.

V.2 Описание модели

V.2.1 Система уравнений, расчетная сетка и метод численного интегрирования

В модели атмосферный газ рассматривается как смесь воздуха и водяного пара, в которой могут присутствовать аэрозоли двух видов: первый состоит из микрокапель воды, а второй — из микрочастиц льда. Считаем микрокапли воды и микрочастицы льда сферами радиусов 0.1 мм и 0.03 мм соответственно, движущимися относительно смеси воздуха и водяного пара со скоростями осаждения во внешнем силовом поле $\mathbf{v}_{\text{вод}}^{\text{ос}}$ и $\mathbf{v}_{\text{л}}^{\text{ос}}$, определяемыми по формуле Стокса с поправкой Каннингэма. Выбранные размеры частиц аэрозолей соответствуют реальным средним размерам частиц в облаках. Температуру смеси и частиц аэрозолей считаем одинаковой и обозначим ее через T. Считаем, что аэрозоль

из капель воды может присутствовать только при условиях насыщенности водяного пара и $T \geq T_0 = 273.15\,\mathrm{K}$, а аэрозоль из частиц льда может присутствовать только при условиях насыщенности водяного пара и $T \leq T_0$. При $T = T_0$ температура среды не может увеличиться, пока не расплавятся все частицы льда, и не может уменьшиться, пока не замерзнут все капли воды. Зависимость плотности насыщенного пара $\rho_{\text{п}}^{max}$ от температуры задается уравнением (I.68).

При проведении расчетов использовалась равномерная сетка в сферических координатах, описанная в главе I в разделе I.4.1, с шагами по широте и долготе, равными 0.04^{o}, и с шагом по высоте, равным 200 м. Область моделирования в настоящей работе является частью шарового слоя над ограниченным участком земной поверхности и имеет размеры по высоте от поверхности Земли до высоты 15 км, по долготе 32^{o}, а по широте 25^{o}. Южная граница области моделирования для разных вариантов расчетов находилась на широтах от 5^{o} южной широты до экватора.

Модель основана на численном интегрировании системы осредненных по Фавру уравнений динамики смеси вязкого сжимаемого газа и аэрозольных частиц (I.69)–(I.75), записанных в консервативной форме. Ускорение внешних сил в модели складывается из ускорения силы тяжести, заданного формулой (I.5), и из ускорений силы Кориолиса и центробежной силы, которые заданы по формулам, приведенным в в разделе I.2 главы I.

Для численного решения системы (1.69)–(1.75) использовалась явная разностная схема, детально описанная в разделе I.5 главы I. Программная реализация модели выполнена для использования параллельных вычислений на графических процессорах фирмы NVIDIA последнего поколения и допускает одновременное использование при вычислениях от 1 до 4 графических процессоров на компьютере с логически общей памятью.

V.2.2 Задание радиационного нагрева атмосферы Земли

Для задания мощности нагрева–охлаждения атмосферного газа в единице объема за счет поглощения–испускания электромагнитного излучения в модели использовалось релаксационное приближение, описанное в разделе I.6 главы I. Указанная мощность вычислялась по формуле (I.82). Входящие в эту формулу время релаксации $\tau_{\text{рел}}(h)$ и релаксационная температура $T_{\text{рел}}(t, h, \varphi, \beta)$ задавались описанным в подразделе IV.2.2 главы IV способом для условий июля.

V.2.3 Начальные и граничные условия

На нижней границе области моделирования заданы следующие условия: условие прилипания ($\mathbf{v} = 0$), условие насыщенности воздуха водяным паром ($\rho_{\text{п}} = \rho_{\text{п}}^{max}(T)$), а также задан поток тепла, пропорциональный разности температур воздуха и поверхности воды. Температура поверхности океана считалась постоянной и равной 25^{o}C.

На верхней границе области моделирования заданы : нисходящий поток теплового излучения, нулевая вертикальная компонента скорости $\mathbf{v}$ (непротекание), нулевые значения производных по высоте от горизонтальных компонент $\mathbf{v}$ (проскальзывание) и от вертикальной компоненты вектора потока тепла $\mathbf{j}$.

На северной и южной вертикальных границах области моделирования вертикальная и зональная компоненты скорости ветра считаются заданными. Вертикальная компонента полагается равной нулю, а зональная компонента полагается равной -5 м/с (направлена с востока на запад). На высотах ниже 3 км меридиональная компонента задана и направлена внутрь области моделирования, на высоте 3 км эта компонента равна нулю, выше 3 км задана равной нулю 1–я производная от этой компоненты в меридиональном направлении. Температура воздуха на этих границах также считается заданной.

В тех точках границы, где воздух втекает в область моделирования, его плотность считается заданной, а в тех точках границы, где воздух вытекает из области моделирования, его плотность рассчитывается с использованием условия равенства нулю 1–й производной плотности вдоль нормали через границу.

На восточной вертикальной границе области моделирования заданы постоянные по времени значения всех компонент скорости ветра, температуры, плотности воздуха и содержание в нем водяного пара, а также нулевое содержание микрокапель воды и частиц льда. Заданные распределения компонент скорости ветра моделируют течение в районе ВЗК. Зональная компонента ветра направлена на запад и увеличивается при приближении к центру ВЗК. Меридиональная компонента направлена к центру ВЗК на высотах менее 3 км и направлена от центра ВЗК на высотах более 3 км. Плотность воздуха удовлетворяет условию гидростатического равновесия. Вертикальная компонента ветра определяется из уравнения неразрывности. Вне центральной области ВЗК она равна нулю, а над этой областью направлена вверх, достигая максимальных значений над центром ВЗК. На западной вертикальной границе задаются нулевые значения производной вдоль нормали к границе от всех переменных.

Начальные распределения компонент скорости ветра моделируют течение в районе ВЗК и задаются также, как на восточной границе, являясь продолжением граничных условий внутрь области моделирования. При этом ВЗК задавалась с изгибами, размер и форма которых соответствовали данным спутниковых наблюдений.

Содержание водяных капель и микрочастиц льда в воздухе в начальный момент мы полагали равным нулю во всей области моделирования. Начальная температура задавалась горизонтально однородной, причем ее зависимость от высоты задавалась по эмпирической модели NRLMSISE–00 [*Picone et al., 2002*] для центра расчетной области. Плотности воздуха и водяного пара в начальный момент также задавались горизонтально однородными. Значение плотности воз-

духа в начальный момент на поверхности определялось по эмпирической модели NRLMSISE–00 для центра расчетной области. Зависимость плотности водяного пара от высоты в начальный момент определялась из условия, что влажность воздуха составляет 80%. Зависимость плотности воздуха от высоты в начальный момент определялась из условия гидростатического равновесия.

V.3 Результаты моделирования

Было проведено численное моделирование эволюции течения при четырех различных конфигурациях ВЗК в начальный момент, в которых имелись искривленные участки центрального сдвигового течения. Форма и размеры искривленных участков выбирались соответствующими данным микроволнового спутникового мониторинга тропосферы над Атлантикой.

Первая конфигурация ВЗК такова, что в начальный момент центральное сдвиговое течение имеет искривленный участок длиной примерно 900 км, который отклоняется примерно на 150 км на север относительно остальной части этого течения. На рис. V.1, V.2 и V.3 представлены распределения горизонтальной составляющей ветра в м/с на высоте 600 м в начальный момент и в моменты времени через 20, 40, 60 и 80 часов после начала моделирования, полученные для этой конфигурации ВЗК в начальный момент. Размеры области моделирования составляли 25^o по широте и 50^o по долготе.

В начальный момент центральное сдвиговое течение в ВЗК на рис. V.1 вверху представляет собой вытянутую с запада на восток полосу шириной примерно 1.5^o с центром на широте примерно 7.5^o на южной границе полосы красного цвета. При переходе через эту полосу горизонтальный ветер меняет направление и величину. Западнее долготы 34^o виден изгиб этой полосы.

На нижней части рис. V.1 видно, что через 20 часов после начала моделирования произошло развитие начального возмущения, изгиб ВЗК переместился примерно на 8^o на запад, а амплитуда изгиба заметно увеличилась. При этом к югу от изгиба формируется горизонтальный циклонический вихрь с центром, лежащим примерно на широте 7^o и долготе 30^o.

На верхней части рис. V.2 видно, что через 40 часов после начала моделирования этот вихрь достиг размеров примерно 800 км в диаметре, а его центр переместился в точку с широтой примерно 8^o и долготой 24^o (то есть переместился примерно на 650 км на запад). Таким образом, к этому моменту времени произошло разрушение характерного для ВЗК центрального сдвигового течения с образованием крупномасштабного циклонического вихря. Также на верхней части рис. V.2 видно, что восточнее и западнее этого вихря начинают формироваться еще два циклонических вихря. Центр западного вихря находится примерно на широте 8^o и долготе 10^o, а центр восточного вихря находится примерно на широте 6^o и долготе 38^o.

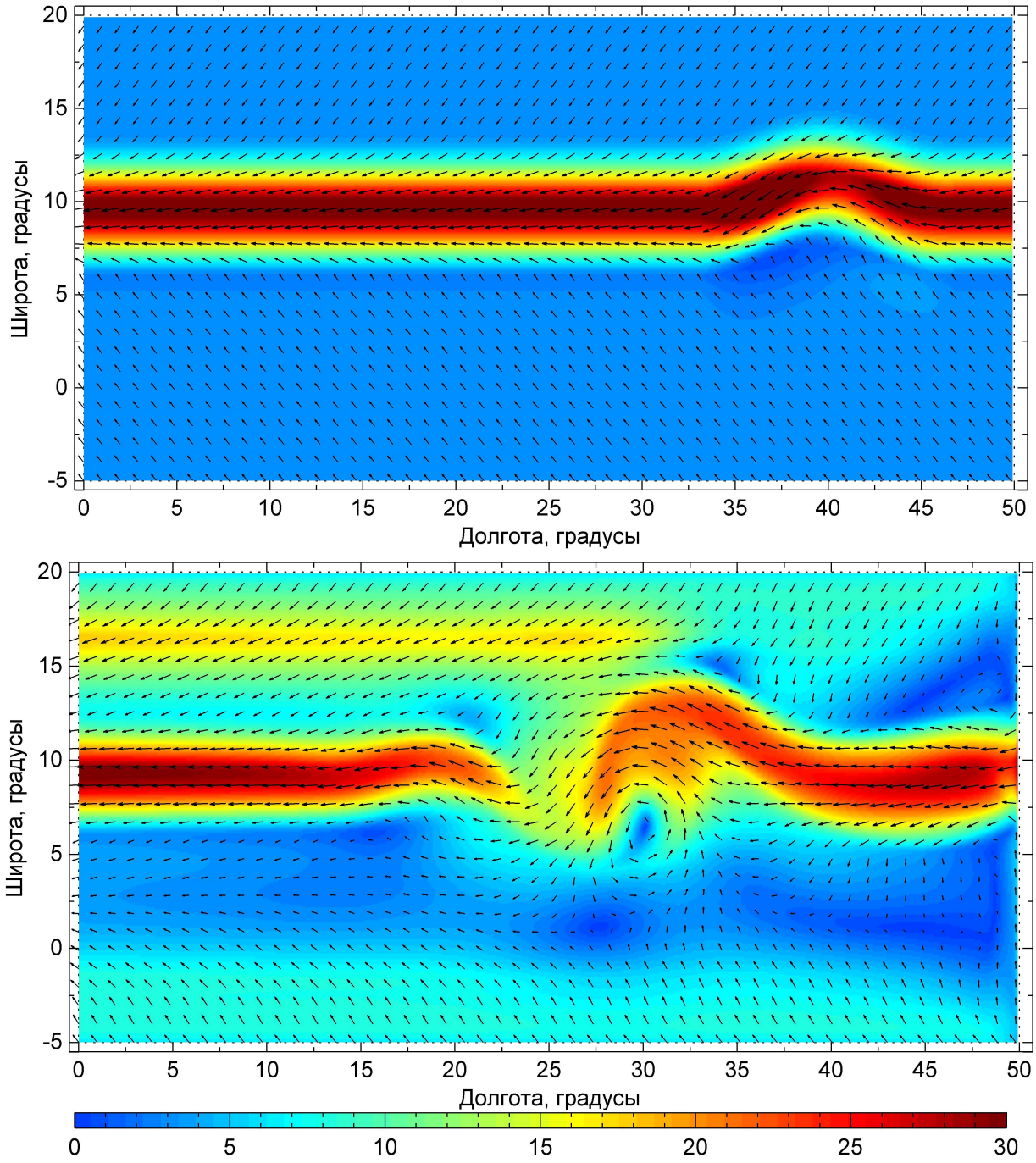

Рис. V.1. *Распределение горизонтальной составляющей ветра (м/с) на высоте 600 м в начальный момент (вверху) и через 20 часов (внизу) после начала моделирования для 1-й начальной конфигурации ВЗК.*

На нижней части рис. V.2 видно, что в момент времени 60 часов после начала моделирования первый сформировавшийся вихрь имеет 800–900 км в диаметре, а его центр лежит на широте примерно 9.5° и долготе 18°, то есть он переместился за 20 часов примерно на 650 км на запад и примерно на 100 км на север. Западный вихрь к этому моменту достиг размеров 600 км в диаметре, а его центр лежит примерно на широте 8° и долготе 7°, то есть он переместился за 20 часов примерно на 300 км на запад. Восточный вихрь к этому моменту

достиг размеров 900–1000 км в диаметре, а его центр находится примерно на широте 7° и долготе 36.5°, то есть он переместился за 20 часов примерно на 150 км на запад и примерно на 100 км на север. Скорость ветра во всех вихрях достигает значений 18–20 м/с.

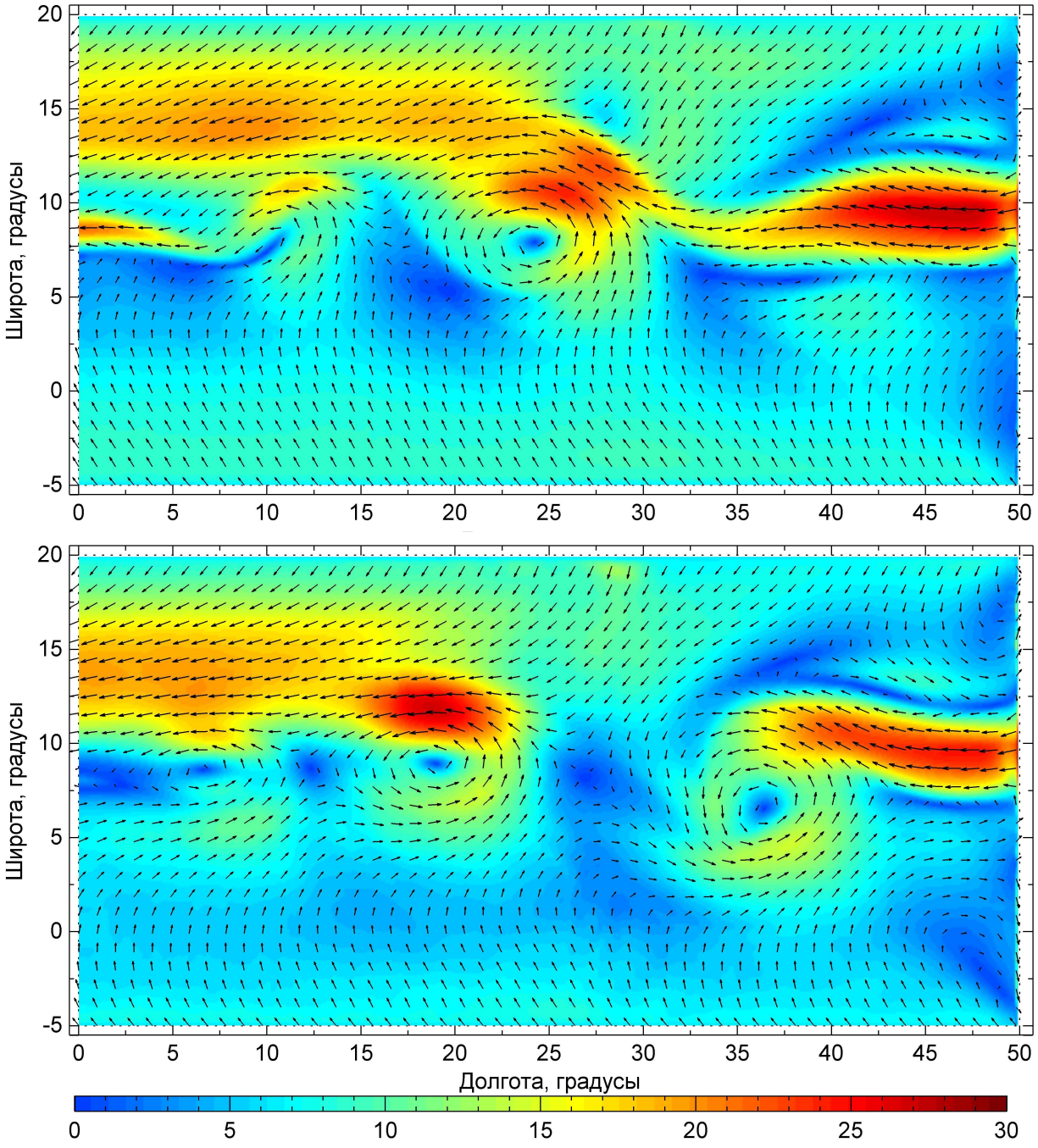

Рис. V. 2. *Распределение горизонтальной составляющей ветра (м/с) на высоте 600 м через 40 часов (вверху) и через 60 часов (внизу) после начала моделирования для 1-й начальной конфигурации ВЗК.*

Из рис. V.3 видно, что в момент времени 80 часов после начала моделирования первый сформировавшийся вихрь по-прежнему имеет диаметр 800–900 км, а его центр лежит на широте примерно 9.5° и долготе 17°, то есть он переместился за

20 часов примерно на 100 км на запад. Западный вихрь в этот момент по прежнему имеет размер 600 км в диаметре, а его центр лежит примерно на широте 8.5^o и долготе 5^o, то есть он переместился за 20 часов примерно на 200 км на запад и примерно на 50 км на север. Восточный вихрь в этот момент по-прежнему имеет размеры 900–1000 км в диаметре, а его центр находится примерно на широте 8.5^o и долготе 36.5^o, то есть он переместился за 20 часов примерно на 150 км на север. Скорость ветра во всех вихрях по-прежнему достигает значений 18–20 м/с.

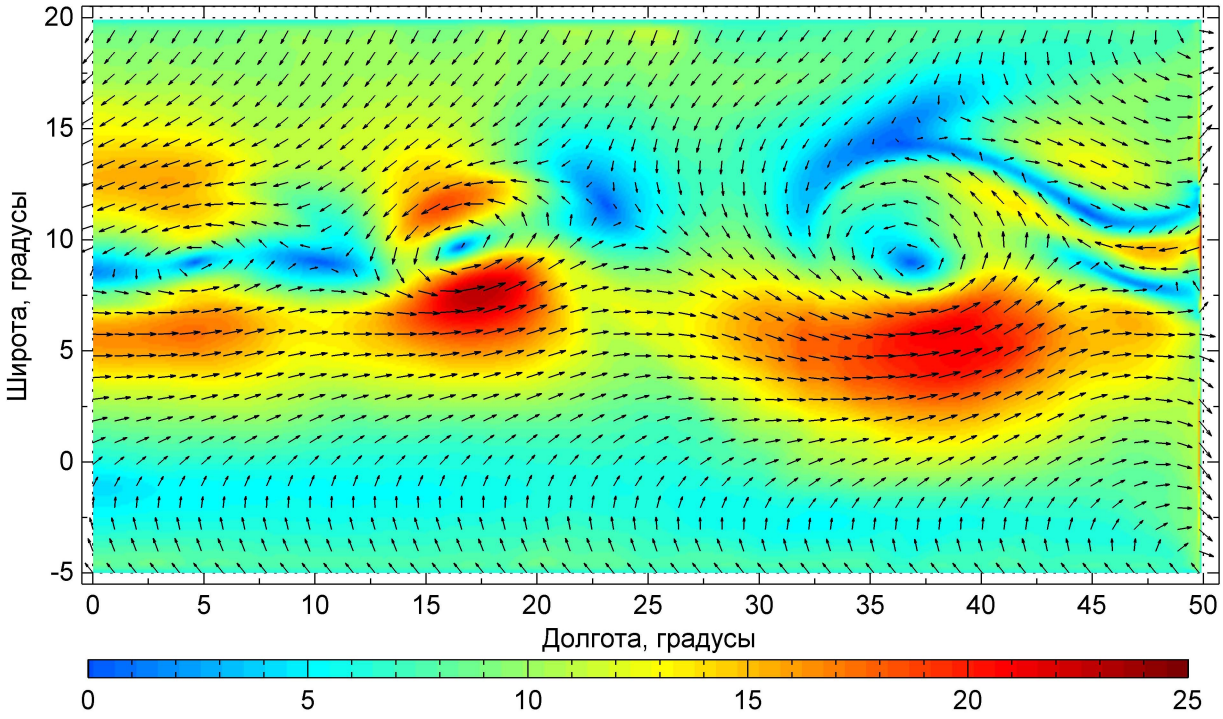

Рис. V. 3. *Распределение горизонтальной составляющей ветра (м/с) на высоте 600 м через 80 часов после начала моделирования для 1-й начальной конфигурации ВЗК.*

Таким образом, при первой начальной конфигурации ВЗК из–за наличия начального возмущения в результате развития неустойчивости характерного для ВЗК в летний период сдвигового течения произошел распад этого течения на участке длиной примерно 5000 км с последовательным образованием трех циклонических вихрей с размерами от 600 до 1000 км в диаметре. При этом первый вихрь сформировался примерно через 30 часов физического времени после начала моделирования и перемещался на запад со средней скоростью 30–33 км/ч. Второй и третий вихри сформировались примерно на 20 часов позже первого, причем в этот момент центр второго вихря располагался примерно на 1300 км к западу от центра первого вихря, а центр третьего вихря располагался примерно на 1900 км к востоку и на 200 км к югу от центра первого вихря. Второй вихрь перемещался преимущественно на запад со средней скоростью 12–16 км/ч, а третий

вихрь перемещался сначала на северо–запад, а затем на север со средней скоростью 7–8 км/ч. Отметим, что одновременное зарождение нескольких циклонических вихрей многократно фиксировалось спутниковыми наблюдениями. При дальнейшем моделировании на время более 80 часов после начала моделирования начинает сказываться влияние границ, особенно на второй циклонический вихрь. Для адекватного моделирования на срок более 3 суток необходимо использование глобальной модели с более точным, чем в данной модели, расчетом нагрева–охлаждения атмосферы солнечным и тепловым излучением.

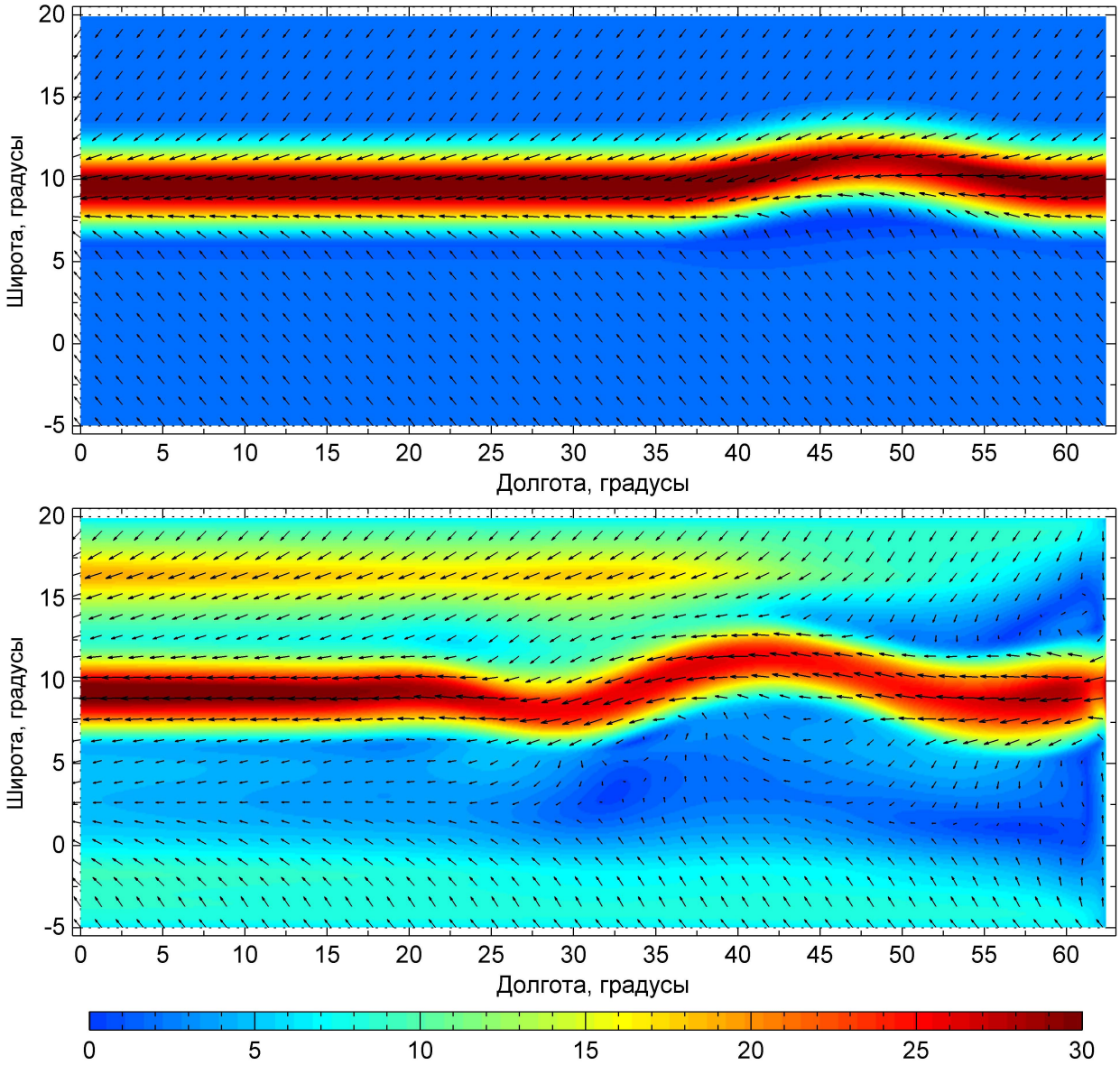

Рис. V. 4. *Распределение горизонтальной составляющей ветра (м/с) на высоте 600 м в начальный момент (вверху) и через 20 часов (внизу) после начала моделирования для 2-й начальной конфигурации ВЗК.*

Вторая начальная конфигурация ВЗК такова, что в начальный момент центральное сдвиговое течение имеет искривленный участок длиной примерно 1800

км, отклоняющийся на 150 км на север относительно остальной части этого течения. Размеры области моделирования составляли 25° по широте и 62° по долготе. На рис. V.4, V.5 и V.6 представлены распределения горизонтальной составляющей ветра в м/с на высоте 600 м в начальный момент и в моменты времени через 20, 40, 60 и 80 часов после начала моделирования, полученные для этой конфигурации ВЗК в начальный момент.

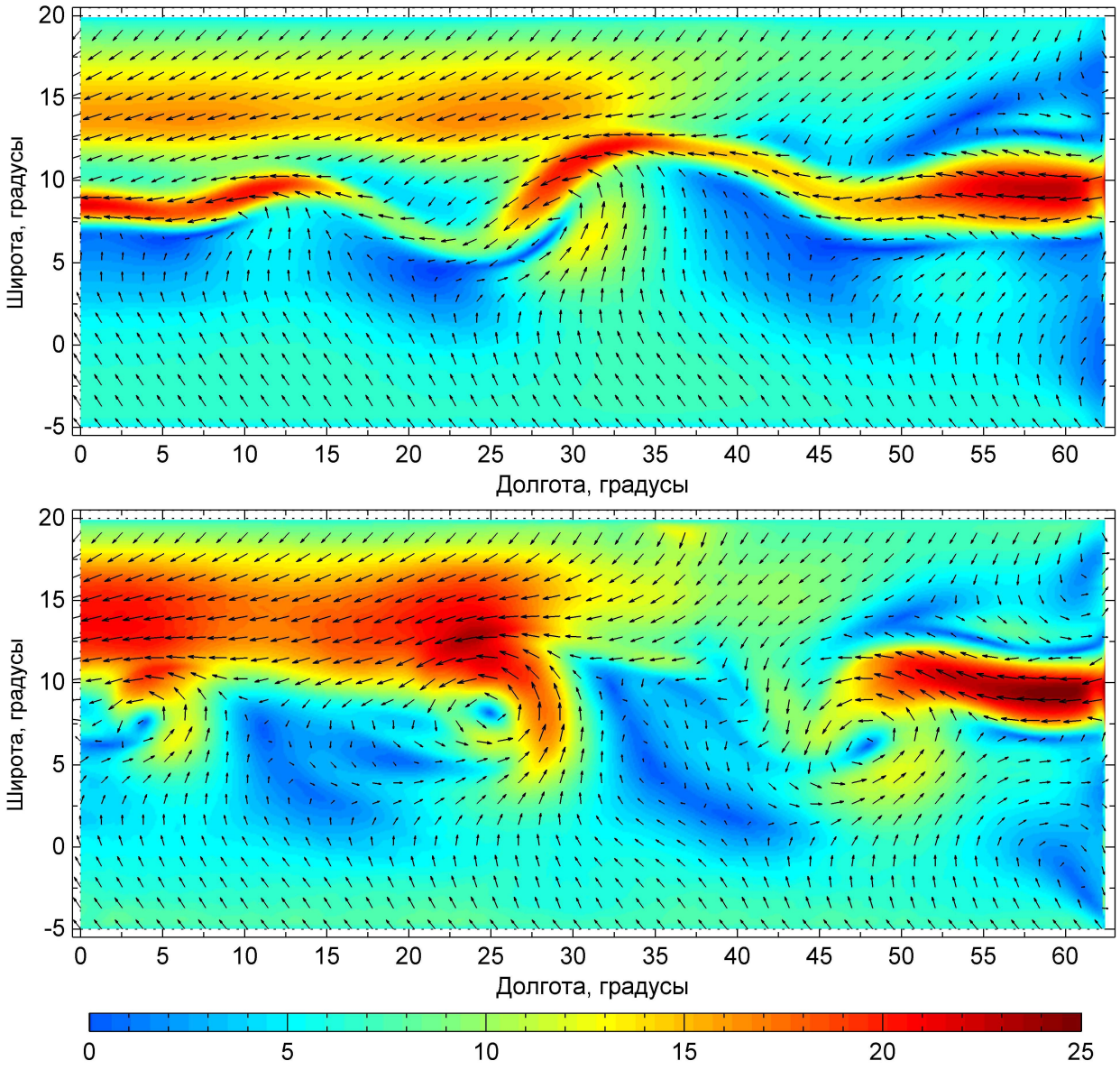

Рис. V.5. *Распределение горизонтальной составляющей ветра (м/с) на высоте 600 м через 40 часов (вверху) и через 60 часов (внизу) после начала моделирования для 2-й начальной конфигурации ВЗК.*

В начальный момент центральное сдвиговое течение в ВЗК на рис. V.4 вверху представляет собой вытянутую с запада на восток полосу шириной примерно 1.5° с центром на широте примерно 7.5° на южной границе полосы красного цвета. При переходе через эту полосу горизонтальный ветер меняет направление

и величину. Западнее долготы 39^o виден изгиб этой полосы. На нижней части рис. V.4 видно, что в течение 20 часов после начала моделирования произошло развитие начального возмущения, изгиб центрального сдвигового течения ВЗК переместился примерно на 7^o на запад, а амплитуда этого изгиба заметно увеличилась. Видно, что к югу от изгиба формируется горизонтальный циклонический вихрь с центром, расположенным примерно на широте 7^o и долготе 35^o.

На верхней части рис. V.5 видно, что через 40 часов после начала моделирования этот вихрь еще не сформировался полностью, а его центр переместился в точку с широтой примерно 8^o и долготой 28.5^o (то есть переместился примерно на 650 км на запад). Таким образом, к этому моменту времени сформировались сильные изгибы характерного для ВЗК центрального сдвигового течения, но еще не произошло его разрушение с образованием крупномасштабного циклонического вихря. Также на верхней части рис. V.5 видно, что восточнее и западнее первого вихря начинают формироваться еще два циклонических вихря. Центр западного вихря находится примерно на широте 7^o и долготе 9^o, а центр восточного вихря находится примерно на широте 6^o и долготе 49^o.

На нижней части рис. V.5 видно, что в момент времени 60 часов после начала моделирования сформировались три циклонических вихря. Центральный сформировавшийся вихрь имеет диаметр 800–1000 км, а его центр лежит на широте примерно 8^o и долготе 25^o, то есть центр этого вихря переместился за 20 часов примерно на 270 км на запад. Западный вихрь к этому моменту достиг размеров 600–700 км в диаметре, а его центр лежит примерно на широте 7.5^o и долготе 4^o, то есть центр этого вихря переместился за 20 часов примерно на 530 км на запад. Восточный вихрь к этому моменту достиг размеров 900–1000 км в диаметре, а его центр находится примерно на широте 6^o и долготе 48^o, то есть центр этого вихря переместился за 20 часов примерно на 100 км на запад. Скорость ветра во всех вихрях достигает значений 18–20 м/с.

Из рис. V.6 видно, что в момент времени 80 часов после начала моделирования центральный вихрь увеличился в размерах до 1000–1200 км в диаметре, а его центр лежит на широте примерно 10^o и долготе 22^o, то есть он переместился за 20 часов примерно на 300 км на запад и на 200 км на север. Западный вихрь в этот момент частично ушел за границу области моделирования, а его центр лежит примерно на широте 9^o и долготе 1.5^o, то есть он переместился за 20 часов примерно на 250 км на запад и примерно на 150 км на север. Восточный вихрь в этот момент достиг размеров 1000–1200 км в диаметре, а его центр находится примерно на широте 8^o и долготе 47.5^o, то есть он переместился за 20 часов примерно на 50 км на запад и на 200 км на север. Скорость ветра во всех вихрях по-прежнему достигает значений 18–20 м/с.

Таким образом, при второй начальной конфигурации ВЗК в результате развития неустойчивости характерного для ВЗК в летний период сдвигового течения

произошел распад этого течения на участке длиной примерно 5500 км с образованием трех циклонических вихрей с размерами от 600 до 1000 км в диаметре. При этом вихри сформировались почти одновременно в течение примерно 50 часов физического времени после начала моделирования, причем в этот момент центр западного вихря располагался примерно на 2200 км к западу от центра центрального вихря, а центр восточного вихря располагался примерно на 2500 км к востоку и на 200 км к югу от центра центрального вихря. Западный и центральный вихри перемещались в основном на запад со средней скоростью 12–26 км/ч, а восточный вихрь перемещался сначала на запад, а затем на северо–запад со средней скоростью 5–10 км/ч. При дальнейшем моделировании на время более 80 часов физического времени после начала моделирования начинает сказываться влияние границ.

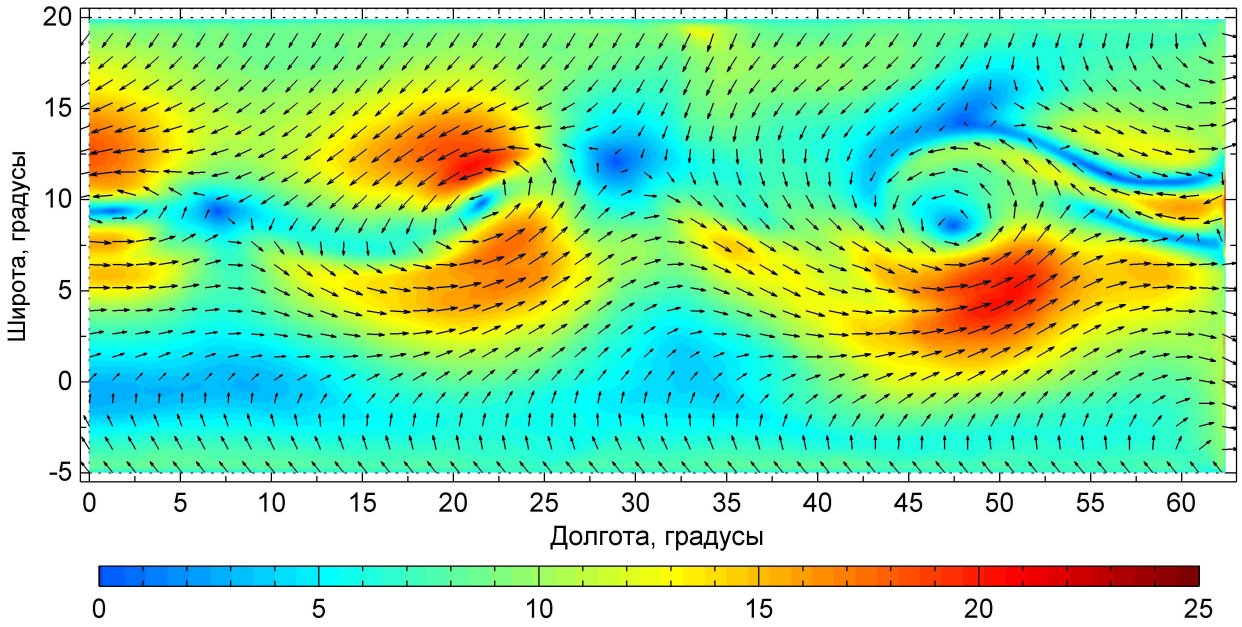

Рис. V.6. *Распределение горизонтальной составляющей ветра (м/с) на высоте 600 м через 80 часов после начала моделирования для 2-й начальной конфигурации ВЗК.*

Третья начальная конфигурация ВЗК такова, что в начальный момент имеется участок ВЗК длиной около 2500 км, на котором она смещается на север при движении с запада на восток, причем на правом конце этого участка имеется дополнительно искривленный участок длиной около 1000 км, отклоняющийся на север. Эта начальная конфигурация ВЗК представлена на рис. V.7 вверху. Размеры области моделирования для этой конфигурации составляли 25° по широте и 43.5° по долготе. Центральное сдвиговое течение ВЗК в начальный момент проходит по южной границе красной полосы на рис. V.7 вверху. При переходе через эту линию горизонтальный ветер меняет направление и величину. Западнее долготы 30° виден дополнительный изогнутый участок этой линии. На рис. V.7 и V.8 представлены результаты моделирования для этой начальной конфигурации.

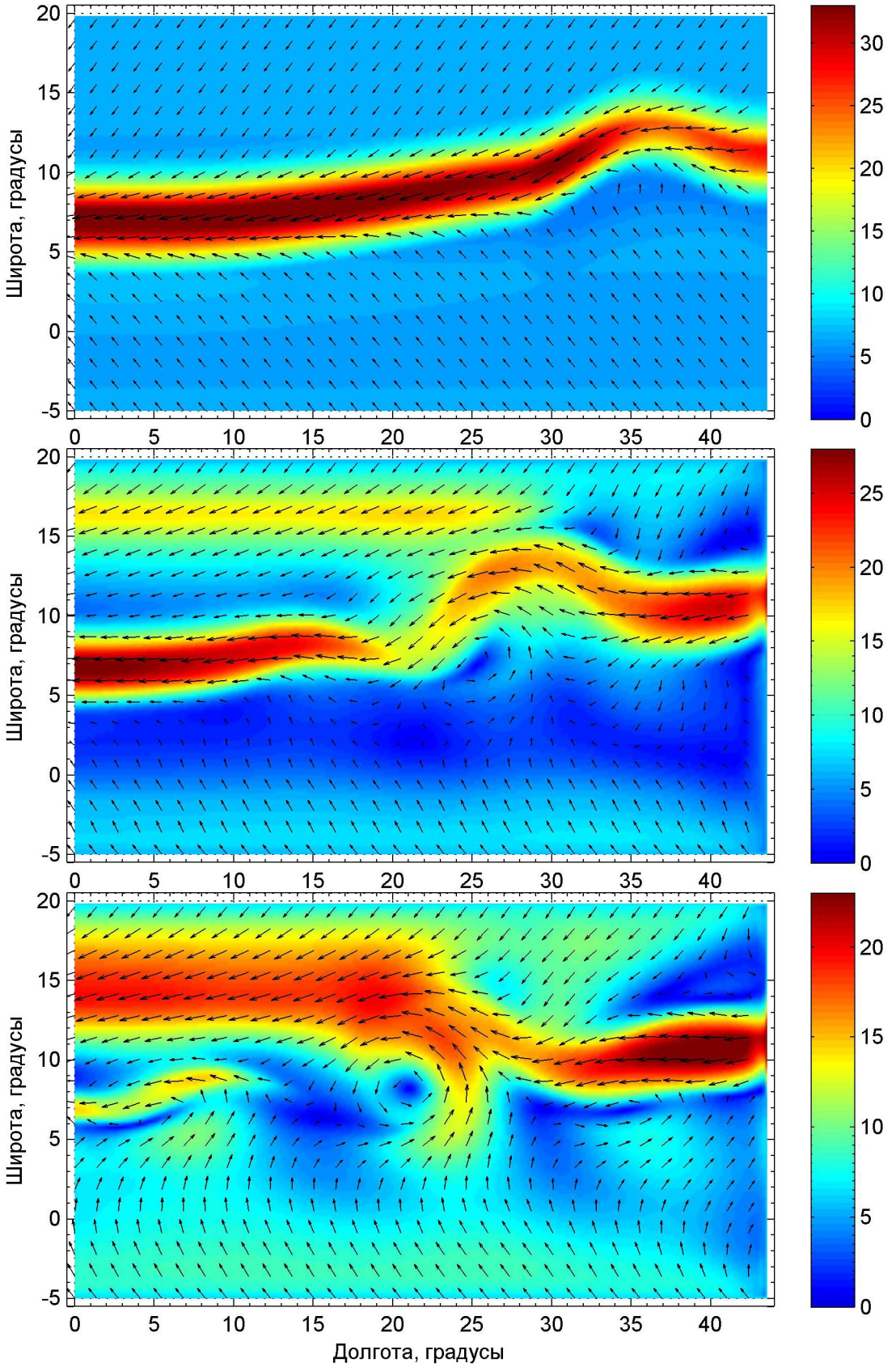

Рис.V. 7. *Распределение горизонтальной составляющей скорости ветра (м/с) на высоте 600 м в начальный момент (вверху) и в моменты времени через 20 часов (в центре) и через 40 часов (внизу) после начала моделирования для 3-й начальной конфигурации ВЗК.*

На рис. V.7 в центре видно, что через 20 часов после начала моделирования происходит развитие начального возмущения, отклонение на север дополнительно изогнутого участка увеличивается, и формируется горизонтальный циклонический вихрь с центром, лежащим примерно на широте 7^o и долготе 25.5^o. На рис. V.7 внизу видно, что через 40 часов после начала моделирования этот вихрь достиг размеров примерно 800 км в диаметре, а его центр переместился в точку на широте примерно 8^o и долготе 21^o, то есть переместился за 20 часов примерно на 450–500 км на запад и на 110 км на север. Также видно, что к этому моменту начинают формироваться второй циклонический вихрь с центром, лежащим примерно на широте 7^o и долготе 35^o, и третий циклонический вихрь с центром, лежащим примерно на широте 6^o и долготе 5^o.

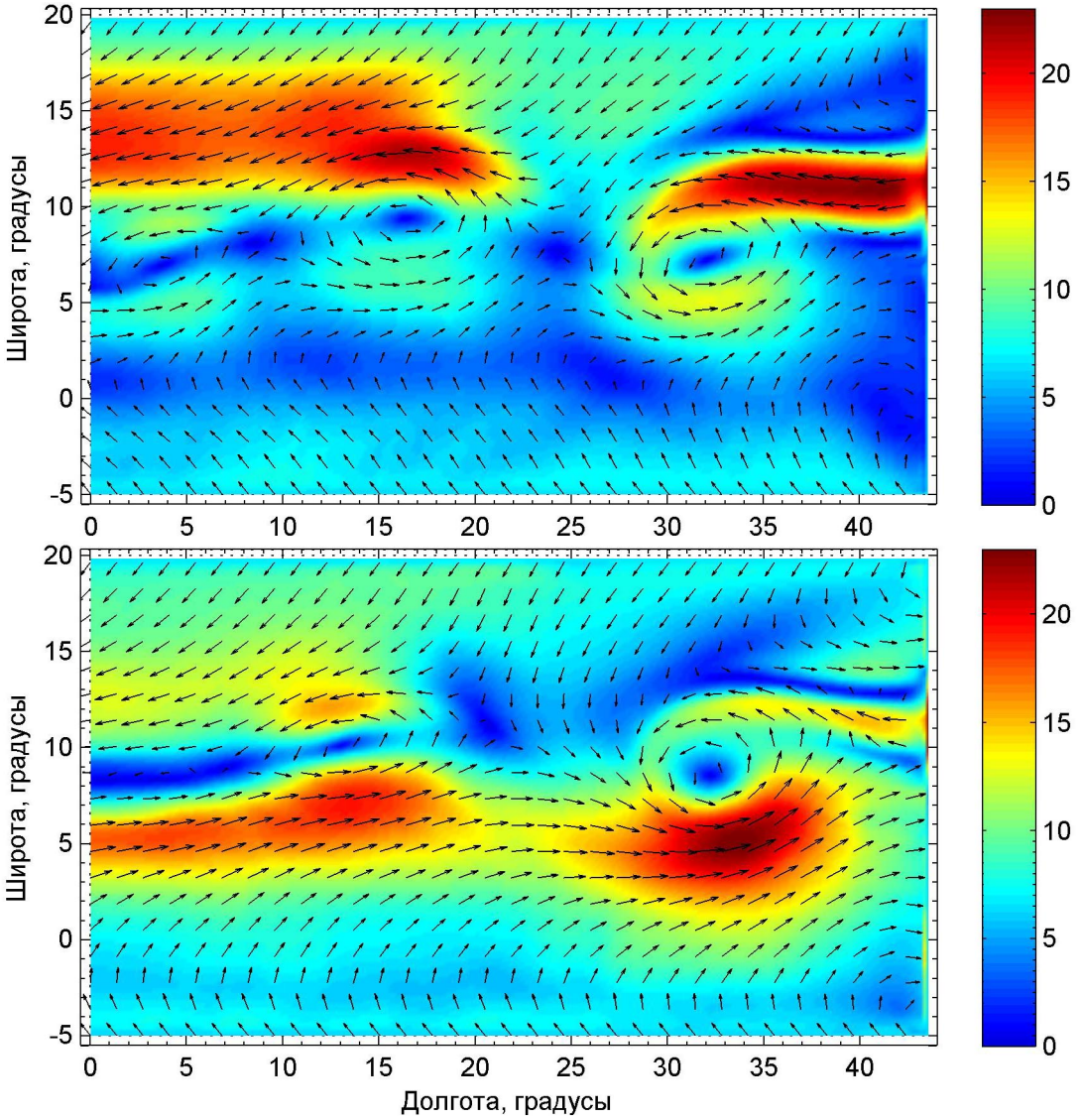

Рис. V. 8. *Распределение горизонтальной составляющей скорости ветра (м/с) на высоте 600 м в моменты времени через 60 часов (вверху) и через 80 часов (внизу) после начала моделирования для 3-й начальной конфигурации ВЗК.*

На рис. V.8 вверху видно, что в момент времени 60 часов после начала модели-

рования сформировавшийся первым центральный вихрь сохранил свои размеры, а его центр лежит на широте примерно 9.5^o и долготе 17^o, то есть этот центр переместился за 20 часов еще на 400–450 км на запад и на 160 км на север. Расположенный к востоку от центрального вихря второй вихрь к этому моменту достиг размеров примерно 800 км в диаметре, а его центр лежит примерно на широте 7^o и долготе 32^o, то есть этот центр переместился за 20 часов примерно на 330 км на запад. Скорость ветра в обоих этих вихрях достигает значений 20 м/с и более. Расположенный к западу от центрального вихря третий вихрь к этому моменту времени достиг размеров примерно 700 км в диаметре, а его центр лежит примерно на широте 7^o и долготе 4^o, то есть этот центр переместился за 20 часов примерно на 150 км на северо–запад.

На рис. V.8 внизу видно, что в момент времени 80 часов после начала моделирования центральный вихрь сохранил свои размеры, а его центр лежит на широте примерно 9.5^o и долготе 13^o, то есть этот центр переместился еще на 400-450 км на запад. Расположенный к востоку от центрального вихря второй вихрь к этому моменту имеет примерно прежние размеры, а его центр лежит примерно на широте 9^o и долготе 32^o, то есть этот центр за 20 часов переместился примерно на 220 км на север. Скорость ветра в обоих вихрях достигает значений 20 м/с и более. Расположенный к западу от центрального вихря третий вихрь к этому моменту времени вышел за пределы области моделирования через ее западную границу.

Таким образом, для третьей начальной конфигурации течения в разных местах сформировались сначала первый циклонический вихрь, а затем еще два циклонических вихря с горизонтальными размерами примерно 800 км. При этом первый вихрь сформировался примерно через 20 часов после начала моделирования и переместился за последующие 60 часов примерно на 1300–1400 км на запад и на 250–270 км на север от места образования. Второй вихрь сформировался примерно на 1500 км к востоку и на 200 км к югу от первого вихря примерно через 45 часов после начала моделирования и за последующие 35 часов переместился примерно на 300–350 км на запад и на 210–230 км на север от места образования, причем последние 20 часов второй вихрь перемещался исключительно на север. Третий вихрь сформировался примерно на 1300 км к западу и на 200 км к югу от первого вихря примерно через 45 часов после начала моделирования и последующие 25 часов перемещался на запад от места образования и покинул область моделирования через ее западную границу.

Четвертая конфигурация ВЗК в начальный момент такова, что центральное сдвиговое течение ВЗК расположено во всей области моделирования на одной широте, за исключением участка длиной около 3300 км, на котором ВЗК синусоидально изгибается, дважды смещаясь на север.

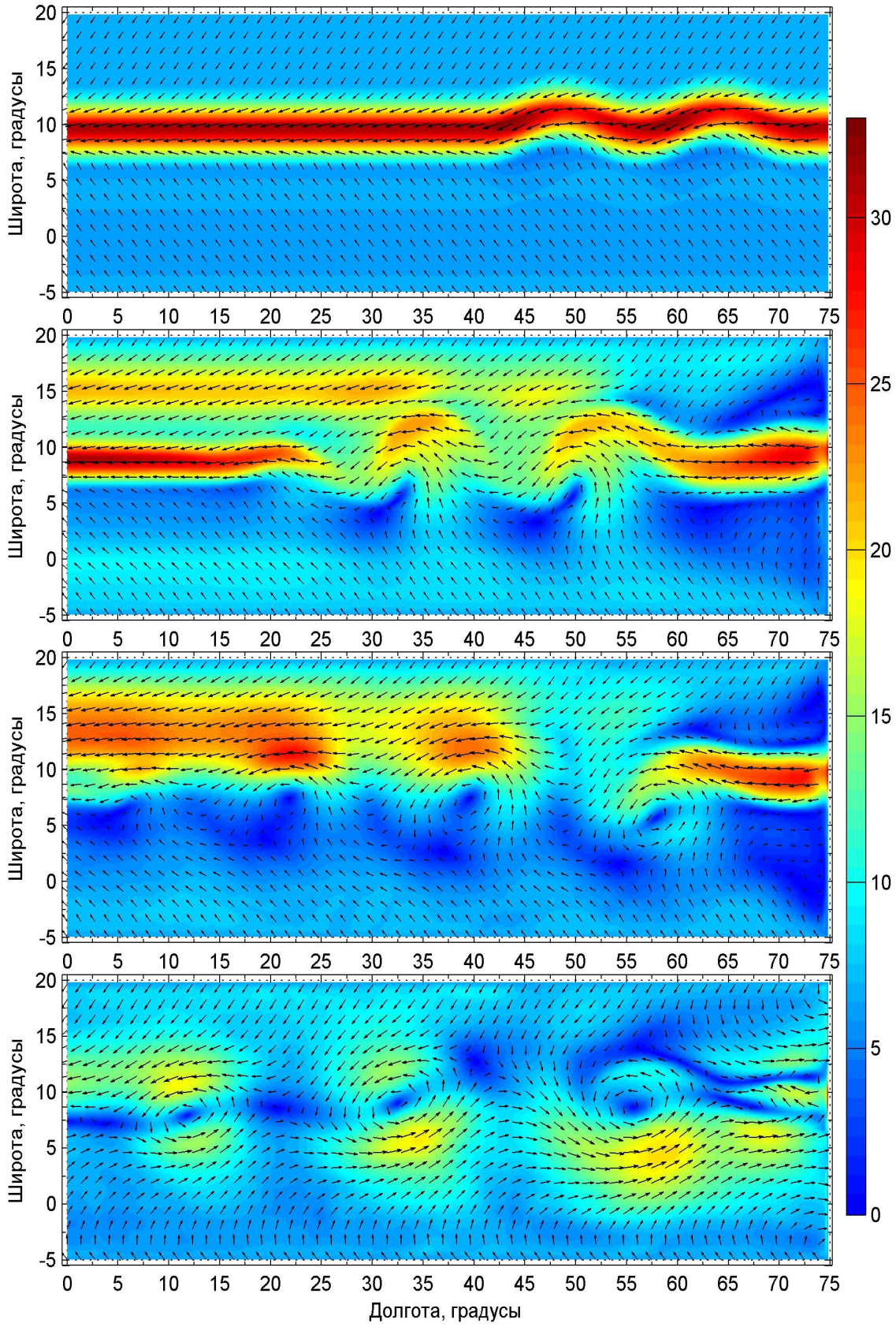

Рис.V.9. *Распределение горизонтальной составляющей скорости ветра (м/с) на высоте 600 м в начальный момент (вверху) и в моменты времени через 30 часов (в центре), через 60 часов (в центре) и через 90 часов (внизу) после начала моделирования для 4-й начальной конфигурации ВЗК.*

Эта начальная конфигурация ВЗК представлена на рис. V.9 вверху. Размеры области моделирования для этой конфигурации составляли 25^o по широте и 75^o по долготе. На рис. V.9 представлены результаты моделирования при этой начальной конфигурации. На второй сверху панели этого рисунка видно, что к моменту времени 30 часов после начала моделирования произошло развитие начального возмущения, отклонение на север изогнутого участка увеличилось, и почти сформировались два горизонтальных циклонических вихря. Их центры лежат примерно на широте 7^o и на долготах 33^o и 50^o.

На рис. V.9 на второй снизу панели видно, что к моменту времени 60 часов после начала моделирования первые два вихря переместились на запад, и, в дополнение к ним, почти сформировался третий вихрь, расположенный восточнее первых двух. Все вихри имеют диаметры примерно 800 км. Центры первых двух вихрей лежат на широте примерно 7.5^o и на долготах 22^o и 40^o. То есть эти вихри переместились за 30 часов примерно на 1000-1100 км на запад и на 50 км на север. Центр третьего вихря лежит примерно на широте 6^o и долготе 57.5^o. На рис. V.9 внизу видно, что к моменту времени 90 часов после начала моделирования все вихри увеличили свои размеры по сравнению с моментом 60 часов после начала моделирования. Центр вихря, расположенного восточнее других и сформировавшегося последним, лежит на широте примерно 8.5^o и долготе 56^o, то есть он за 30 часов переместился на 150 км на запад и на 250 км на север. Центр вихря, расположенного между двумя другими, лежит на широте примерно 9^o и долготе 32.5^o, то есть он за 30 часов переместился на 800 км на запад и на 150 км на север. Центр вихря, расположенного западнее других, лежит на широте примерно 8^o и долготе 12^o, то есть он за 30 часов переместился примерно на 1100 км на запад и на 50 км на север.

Таким образом, при четвертой начальной конфигурации ВЗК в результате развития неустойчивости характерного для ВЗК в летний период сдвигового течения произошел распад этого течения на участке длиной примерно 7000 км с образованием трех циклонических вихрей с размерами от 800 до 1000 км в диаметре. При этом два вихря сформировались почти одновременно в течение примерно 40 часов физического времени после начала моделирования, а третий вихрь полностью сформировался примерно через 70 часов физического времени после начала моделирования, то есть на 30 часов позже, чем первые два вихря. Центры первых двух вихрей вначале расположены примерно на одной широте на расстоянии около 1700 км друг от друга, а затем это расстояние увеличивается примерно до 2200 км. Центр третьего вихря вначале располагался примерно на 1900 км на восток и на 150 км на юг от центра центрального вихря. Западный и центральный вихри перемещались в основном на запад со средней скоростью 33–36 км/ч, а восточный вихрь перемещался примерно на северо–запад со средней скоростью около 10 км/ч. При дальнейшем моделировании на время более 90

часов физического времени после начала моделирования начинает сказываться влияние границ.

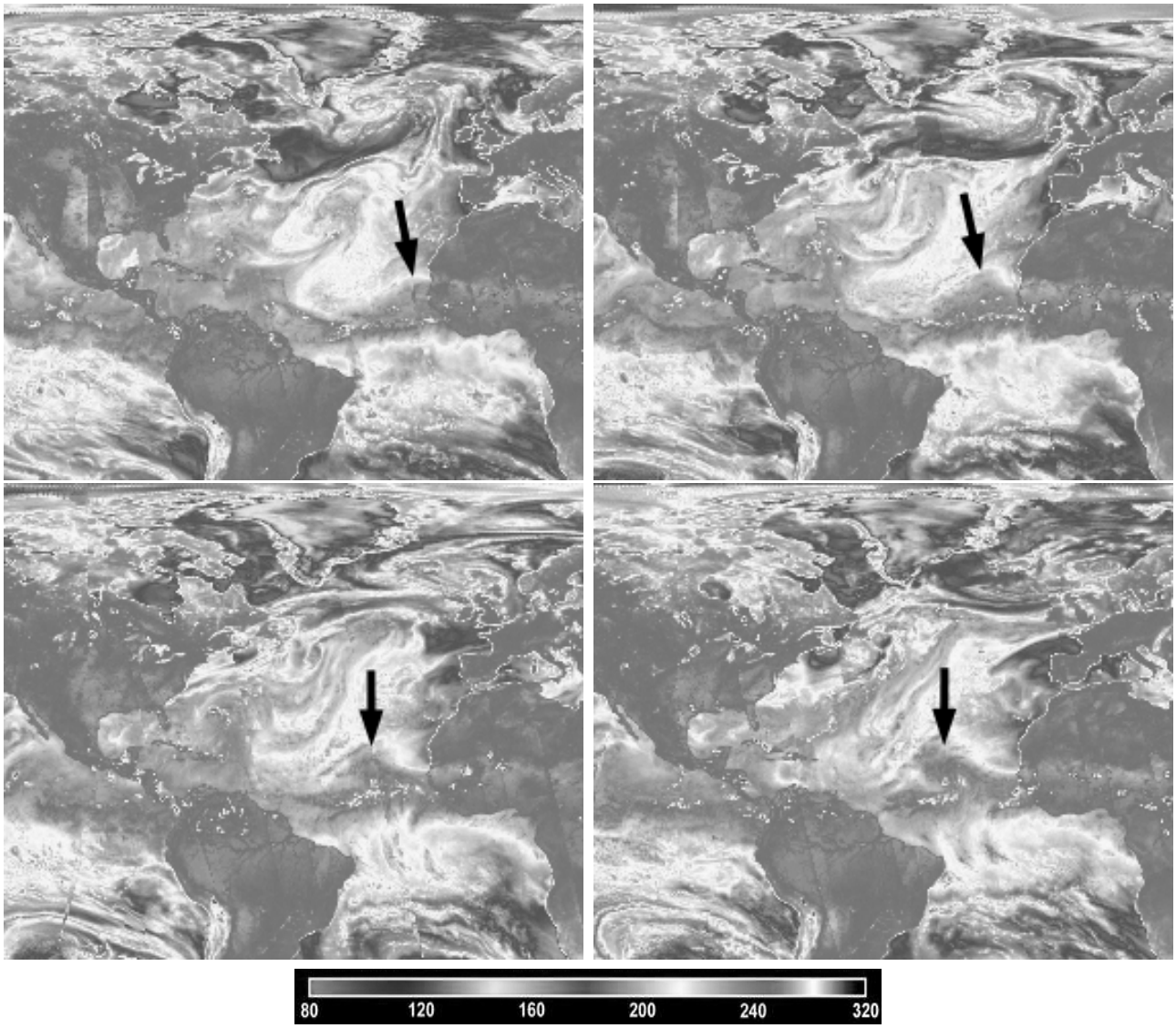

Рис. V.10. *Фрагменты глобального радиотеплового поля Земли (K) на частоте 85.5 ГГц по данным спутников от 3 августа (слева вверху), от 4 августа (справа вверху), от 5 августа (слева внизу) и от 6 августа (справа внизу) 2005 г.*

Спутниковый мониторинг Земли на частоте 85.5 ГГц обеспечивает глобальное наблюдение распределения в тропосфере общего содержания воды в виде примесей — водяной пар, капли воды и льдинки разных размеров, поскольку эти примеси имеют резонансные линии поглощения на этой частоте. Известно, что ВЗК испытывает сезонные смещения на несколько сотен километров в летнее полушарие и характеризуется высокими температурами воздуха. ВЗК плохо различима в поле температуры, которая в обоих пассатах довольно близка, но хорошо различима в поле влажности, поскольку общее содержание воды в вертикальном столбе заметно увеличивается по мере приближения к ВЗК. Последнее обусловлено тем, что на удаленных от экватора границах ячеек Хедли сухой воздух опус-

кается к поверхности, затем, двигаясь в области пассатов над теплым океаном, насыщается водяным паром и поднимается вверх в районе ВЗК с образованием мощного облачного слоя. Изложенные обстоятельства позволяют использовать глобальные радиотепловые поля Земли в соответствующих диапазонах частоты для изучения перемещений ВЗК, а также формирования и развития горизонтальных вихревых течений [*Астафьева и др., 2006, 2008а, 2008б, 2009; Гранков, Мильшин, 2004*].

На рис. V.10 приведены фрагменты глобальных радиотепловых полей Земли на частоте 85.5 ГГц над акваторией Атлантики с координатами 90° с.ш. — 30° ю.ш., 120° з.д. — 30° в.д., полученные 3, 4, 5 и 6 августа 2005 г. Фрагмент показан в меркаторской проекции. Разные оттенки серого цвета отражают радиояркостную температуру и согласуются с распределением влагозапаса тропосферы по широте и долготе в указанный день 2005 г. Каждая деталь радиотеплового поля отражает структуру атмосферных движений и является отпечатком осредненных по высоте течений воздуха, переносящих вмороженный водяной пар. Повышенная радиояркостная температура вблизи экватора демонстрирует расположение ВЗК (темная полоса между Африкой и Южной Америкой, окаймленная светлыми полосами). Черные стрелки указывают на искривленный участок ВЗК и развивающийся из него тропический циклон. Видно, что 3 августа 2005 г. возмущение находится вблизи побережья Африки, 4 августа 2005 г. оно уже полностью находится над океаном, формируя изгиб ВЗК, и продвигается (см. фрагмент для 5 августа 2005 г.) вместе с зональным восточным потоком в западном направлении, 6 августа 2005 г. можно видеть хорошо сформировавшийся циклонический вихрь. Параметры наблюдаемого течения (размеры и скорость продвижения на запад) согласуются с полученными в результате численного моделирования.

Наблюдения показывают, что ситуации, когда в структуре ВЗК появляются волны и изгибы, довольно часты в период интенсивного тропического циклогенеза. В результате формируются циклонические вихри. Некоторые из них, попадая в благоприятные условия, развиваются в интенсивные тропические циклоны и ураганы.

На рис. V.11 приведено поле горизонтального ветра над поверхностью Тихого океана по данным спутникового мониторинга в момент времени 0:30 UT 5 октября 2015 года (www.Windyty.com). Из рис. V.11 видно, что в этот момент к северу от центральной части Тихого океана (в центре рисунка) находятся два циклонических вихря, в которых скорость горизонтального ветра достигает 15–25 м/с, к западу от этих вихрей (в левой части рисунка) находится более крупный циклонический вихрь, достигший стадии урагана, в котором скорость горизонтального ветра достигает 35–45 м/с, в восточнее двух центральных вихрей имеется искривленное сдвиговое течение на восточном краю которого (в правой части рисунка) образуется четвертый циклонический вихрь. Наблюдаемое расположение

двух центральных вихрей и наличие формирующегося третьего вихря хорошо согласуется результатами моделирования представленными на рис. V.1–V.9.

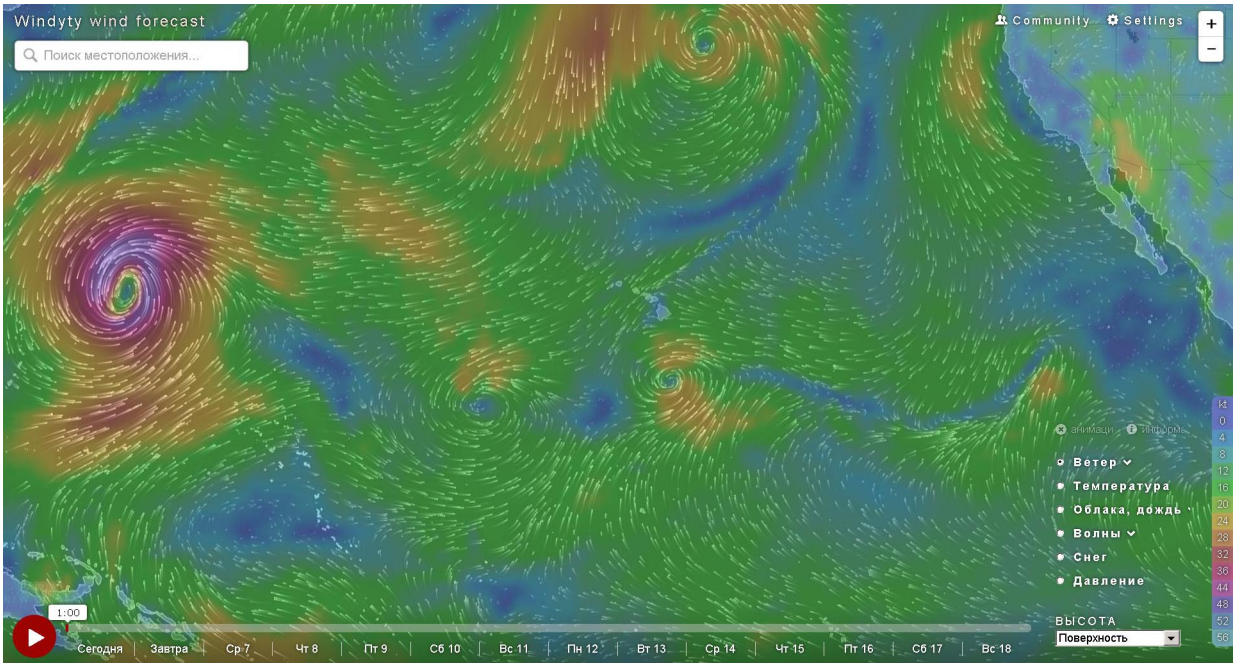

Рис. V.11. *Поле горизонтального ветра над поверхностью Тихого океана по данным спутникового мониторинга в момент времени 0:30 UT 5 октября 2015 года.*

V.4 Выводы главы V

В данной главе представлена региональная модель циркуляции нижней атмосферы Земли, основанная на численном интегрировании полной системы уравнений газовой динамики на пространственной сетке с горизонтальным разрешением лучше 0.1^{o} и разрешением по высоте 200 м, причем в модели учитывается наличие аэрозолей из воды и льда и фазовых переходов водяного пара в аэрозольные частицы и обратно, и используется массивные параллельные вычисления на нескольких графических ускорителях. Также представлены результаты численного моделирования начальной фазы зарождения тропических циклонов и сравнение его результатов с данными спутникового мониторинга. Показано, что появление искривленных участков центрального сдвигового течения внутритропической зоны конвергенции (ВЗК), имеющих длину 800–2000 км, в случае, когда в указанном сдвиговом течении имеется достаточно большой градиент горизонтального ветра, приводит к развитию гидродинамической неустойчивости сдвигового течения и распаду этого течения на участке длиной 5000–7000 км с образованием за 40–70 часов крупномасштабных циклонических вихрей, имеющих диаметр 800–1200 км и скорость ветра до 15–20 м/с. Эти циклонические вихри впоследствии могут развиваться над океанами в тропические циклоны и ураганы, а над Сахарой вызывать песчаные бури.

В летний и осенний периоды часто возникают ситуации, когда во внутритропической зоне конвергенции центральное сдвиговое течение является достаточно узким (шириной 100–150 км), и изменение зональной компоненты ветра в этом течении составляет 25–30 м/с. Искривленные участки центрального сдвигового течения внутритропической зоны конвергенции, например, так называемые африканские волны, могут возникать при прохождении планетарных волн Россби–Блиновой, а также из-за возникновения меридионального градиента давления и других причин.

Таким образом, полученные в данной главе результаты позволяют сделать вывод, что появление искривленных участков центрального сдвигового течения ВЗК в период с июня по сентябрь является предвестником образования крупномасштабных циклонических вихрей, которые могут со временем либо затухнуть, либо развиться в тропический циклон, если первичный вихрь возник над океаном внутри теплой и влажной воздушной массы с достаточно большими горизонтальными размерами. Обнаружение искривленных участков центрального сдвигового течения ВЗК при помощи спутниковых наблюдений внутри теплой и влажной воздушной массы или на ее западной границе указывает на то, что высока вероятность образования тропического циклона или урагана в течение 4–7 суток. При этом по положению ВЗК и обнаруженного искривленного участка можно предсказать район зарождения тропического циклона.

Результаты моделирования также позволяют сделать вывод, что при увеличении длины искривленного участка центрального сдвигового течения ВЗК увеличивается время формирования вихрей и их конечные размеры, и что геометрия течения в районе ВЗК и форма искривленного участка ВЗК влияют на количество образующихся циклонических вихрей и их дальнейшее движение. Таким образом, исследованы физические механизмы образования крупномасштабных циклонических вихрей в районе ВЗК и обоснована методика их раннего предсказания.

Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Создана общая методика построения моделей общей циркуляции планетных атмосфер, основанных на численном интегрировании уравнений газовой динамики, и разработан эффективный способ программной реализации этих моделей на графических процессорах последних моделей с использованием технологии CUDA.

2. Созданы новые варианты явной гибридной разностной схемы для численного интегрирования системы уравнений газовой динамики со 2-м порядком точности на регулярных пространственных сетках в декартовых и в сферических координатах с учетом ускорения внешних массовых сил, которые обеспечивает отсутствие нефизического разогрева или выхолаживания атмосферы при проведении расчетов на большом промежутке времени. В этой схеме в качестве рабочих переменных используются компоненты плотности импульса в декартовых координатах. Эта схема является консервативной, монотонной и устойчивой при выполнении условия Куранта. Она обладает хорошей точностью и позволяет вести безаварийные расчеты без использования сглаживающих фильтров сколь угодно долго по времени. Эта схема хорошо себя зарекомендовала при расчетах динамики сложных трехмерных течений сжимаемого газа и позволяет очень эффективно использовать параллельные вычисления на графических процессорах.

3. Построена система уравнений, описывающая динамику смеси воздуха, водяного пара и аэрозолей из микрокапель воды и микрочастиц льда с учетом фазовых переходов между различными состояниями воды, а также создана методика численного интегрирования этой системы, использующая созданную в этой работе явную гибридную схему.

4. Создана программная реализация модели общей циркуляции атмосферы Венеры, которая основана на численном интегрировании полной системы уравнений газовой динамики, причем в модели учитывается рельеф поверхности Венеры и используется равномерная сетка в связанной с центром Венеры сферической системе координат с шагом сетки по вертикали 250 м и шагами сетки по горизонтальным направлениям менее 1^o. Программная реализация модели выполнена с использованием параллельных вычислений на нескольких графических процессорах одновременно. Представленная модель позволяет исследовать ряд динамических процессов, которые ранее были недоступны для моделирования с помощью известных гидростатических моделей. К таким процессам относятся волновые процессы, а также вихри в полярных областях на высотах 60–80 км.

5. Разработан упрощенный способ расчета поля объемной мощности нагрева–охлаждения атмосферы Венеры за счет солнечного и собственного электромагнитного излучения, который позволяет исследовать ряд важных процессов в атмосфере Венеры. Изложены результаты численного моделирования общей циркуляции атмосферы Венеры, полученные с помощью представленной модели при использовании предложенного упрощенного способа расчета нагрева–охлаждения атмосферы Венеры излучением.

6. Впервые в мировой практике при моделировании удалось получить одновременно такие особенности общей циркуляции атмосферы Венеры, как зональную суперротацию на высотах менее 80 км, изменение типа горизонтальной циркуляции на высотах 80–95 км от зональной суперротации к циркуляции с преобладанием переноса атмосферного газа из центра дневной стороны на центр ночной стороны через области средних широт и через полярные шапки, а также наличие вблизи полюсов нисходящих воронкообразных течений на высотах 60–80 км, которые известны из наблюдений.

7. Впервые в мировой практике исследовано влияние рельефа на общую циркуляцию атмосферы Венеры с использованием полной системы уравнений газовой динамики. Показано, что из–за обтекания рельефа зональным течением генерируются подветренные волны, которые, распространяясь вверх, становятся источником возмущений для формирования выше слоя зональной суперротации системы волн, усиливающих вертикальный перенос и обнаруженных при помощи наблюдений.

8. Впервые создана программная реализация модели общей циркуляции атмосферы Титана, основанной на численном интегрировании полной системы уравнений газовой динамики. В модели учитывается рельеф поверхности Титана и используется равномерная сетка в сферической системе координат с вертикальным разрешением 1 км и горизонтальным разрешением лучше 1^{o}, а также используются параллельные вычисления на нескольких графических процессорах одновременно. Эта модель позволяет исследовать ряд динамических процессов, которые ранее были недоступны для моделирования с помощью известных гидростатических моделей.

9. Впервые с помощью моделирования эволюции общей циркуляции атмосферы Титана при смене сезонов от весеннего равноденствия до середины лета в северном полушарии получены следующие важные закономерности общей циркуляции атмосферы Титана. Первая из них заключается в том, что примерно через 4000 часов физического времени после начала моделирования распределения всех параметров выходят на квазипериодический режим, на который накладываются различные волновые и колебательные

процессы с различными временными масштабами. Амплитуды колебаний и волн становятся заметными, начиная с высот примерно 200 км, и увеличиваются с ростом высоты. Вторая закономерность заключается в том, что для всех рассматривавшихся сезонов были получены зональная суперротация атмосферы Титана и термический прилив на дневной стороне. При этом часть атмосферы, в которой имеет место зональная суперротация, ограничена сверху, причем при удалении подсолнечной точки от экватора ядро обгоняющего вращение Титана зонального течения смещается в зимнее полушарие, а условная верхняя граница этого течения понижается. Третья закономерность полученной при моделировании общей циркуляции атмосферы Титана заключается в том, что в атмосфере Титана имеет место существенный вертикальный перенос, причем величина вертикального ветра на высоте 200 км может превышать 1 м/с, а на высоте 380 км может превышать 5 м/с. При этом наиболее интенсивная вертикальная циркуляция получилась при равноденствии и при удалении подсолнечной точки от экватора менее 7° на высотах более 200 км в верхней части слоя атмосферы, в котором имеет место суперротация, и в котором величина зональной компоненты ветра с ростом высоты либо не увеличивается, либо постоянна. В этом слое на низких и средних широтах формируется система волн с вертикальным и зональным движением атмосферного газа, которые движутся вместе с обгоняющим вращения Титана зональным потоком. В этих волнах вертикальный ветер усиливается с ростом высоты, и его величина может превышать 10 м/с на высотах более 450 км. Отметим, что при горизонтальном разрешении модели грубее 1° получить указанную выше интенсивную вертикальную циркуляцию не удавалось. В областях, где имеется интенсивная вертикальная циркуляция, имеет место существенное нарушение гидростатического равновесия. Четвертая закономерность заключается в том, что при моделировании для условий равноденствия в диапазоне высот от 350 до 500 км получились горячие слои, обусловленные динамическим нагревом атмосферного газа при торможении его достаточно быстрых течений. Согласно инженерной модели температуры атмосферы Титана, на этих высотах температура должна убывать с ростом высоты.

10. Создана программная реализация модели общей циркуляции нижней и средней атмосферы Земли, основанной на численном интегрировании полной системы уравнений динамики вязкого атмосферного газа на пространственной сетке с горизонтальным разрешением 0.46875° и разрешением по высоте 200 м. В модели предусмотрена вставка области, в которой шаг сетки по горизонтальным направлениям в 4 или в 8 раз меньше, чем в остальной области моделирования, а также учитываются рельеф земной поверхности и наличие в атмосфере аэрозолей из воды и льда, а также фазовые

переходы водяного пара в аэрозольные частицы и обратно. Программная реализация модели использует массивные параллельные вычисления на нескольких графических ускорителях и позволяет на новом уровне исследовать динамические процессы в атмосфере Земли, в частности, позволяет моделировать процессы возникновения, движения и эволюции крупномасштабных вихрей в земной атмосфере. Показано, что при использовании предложенного в диссертации упрощенного способа расчета нагрева атмосферы Земли излучением модель воспроизводит общую циркуляцию атмосферы Земли, в которой имеется внутритропическая зона конвергенции с характерным для этой зоны сдвиговым течением на границе ячеек циркуляции Хедли, а также воспроизводит колебания и изгибы этого течения.

11. Создана модель, предназначенная для получения стационарного численного решения уравнений движения атмосферы при стационарном распределении температуры воздуха, которое задается по эмпирической модели NRLMSISE–00 для различных гео- и гелиофизических условий. В этой модели, как и в первой модели, не используется уравнение гидростатики. Температура воздуха во второй модели не рассчитывается, а является входным параметром. Получаемые с помощью этой модели стационарные решения не реализуются на практике, но отражают многие качественные черты наблюдаемой циркуляции атмосферы. Изучая различия между модельными стационарными решениями, полученными при различных полях температуры воздуха, можно судить о влиянии на общую циркуляции атмосферы Земли различных гео- и гелиофизических факторов, изменяющих тепловой режим земной атмосферы. Представлены результаты расчетов крупномасштабной циркуляции атмосферы при двух уровнях солнечной активности для условий, когда в Северном полушарии зима, и для условий, когда в Северном полушарии лето. Эти результаты показали, что, несмотря на независимость глобальных распределений температуры, заданной по эмпирической модели NRLMSISE-00, от солнечной активности на высотах ниже 90 км, влияние солнечной активности на крупномасштабную циркуляцию стратосферы и мезосферы существует и доказывает взаимосвязь между циркуляциями средней атмосферы и термосферы.

12. Создана программная реализация региональной модели циркуляции нижней атмосферы Земли, основанная на численном интегрировании полной системы уравнений газовой динамики на пространственной сетке с горизонтальным разрешением лучше 0.1° и разрешением по высоте 200 м, причем в модели учитывается наличие аэрозолей из воды и льда и фазовых переходов водяного пара в аэрозольные частицы и обратно, и используются массивно-параллельные вычисления на нескольких графических ускорите-

лях одновременно.

13. Проведено численное моделирование развития неустойчивости сдвигового течения во внутритропической зоне конвергенции и проведено сравнение результатов с данными спутникового мониторинга. Показано, что появление искривленных участков центрального сдвигового течения внутритропической зоны конвергенции, имеющих длину 800–2000 км, в случае, когда в указанном сдвиговом течении имеется достаточно большой градиент горизонтального ветра, приводит к развитию гидродинамической неустойчивости сдвигового течения и распаду этого течения на участке длиной 5000–7000 км с образованием за 40–70 часов крупномасштабных циклонических вихрей, имеющих диаметр 800–1200 км и скорость ветра до 15–20 м/с. Эти циклонические вихри могут со временем либо затухнуть, либо развиться над океанами в тропические циклоны и ураганы, а над Сахарой вызывать песчаные бури.

14. Обоснован вывод, что появление искривленных участков центрального сдвигового течения ВЗК в период с июня по сентябрь является предвестником образования крупномасштабных циклонических вихрей, которые могут со временем либо затухнуть, либо развиться в тропический циклон, если первичный вихрь возник над океаном внутри теплой и влажной воздушной массы с достаточно большими горизонтальными размерами. Обнаружение искривленных участков центрального сдвигового течения ВЗК при помощи спутниковых наблюдений внутри теплой и влажной воздушной массы или на ее западной границе указывает на то, что высока вероятность образования тропического циклона или урагана в течение 4–7 суток. При этом по положению ВЗК и обнаруженного искривленного участка можно предсказать район зарождения тропического циклона. Таким образом, исследованы физические механизмы образования крупномасштабных циклонических вихрей в районе ВЗК и обоснована методика их раннего предсказания.

Положения, выносимые на защиту

1. Впервые созданы варианты явной консервативной монотонной гибридной разностной схемы для численного интегрирования системы уравнений газовой динамики с учетом ускорения внешних массовых сил, которая описывает динамику планетных атмосфер. Эти варианты обеспечивают 2-й порядок точности и отсутствие нефизического разогрева или выхолаживания атмосферы при проведении расчетов на сколь угодно большом промежутке времени. Впервые построена система уравнений, описывающая динамику смеси воздуха, водяного пара и аэрозолей из микрокапель воды и микрочастиц льда с учетом фазовых переходов между различными состояниями

воды, а также создана методика численного интегрирования этой системы, использующая построенную в этой работе явную гибридную схему.

2. Впервые созданы программные реализации моделей общей циркуляции атмосфер Земли, Венеры и Титана с учетом рельефа поверхности, основанных на численном интегрировании полной системы уравнений газовой динамики со 2-м порядком точности, причем в моделях используются пространственные сетки с высоким разрешением, а также параллельные вычисления на нескольких графических процессорах одновременно.

3. Впервые с помощью моделирования в рамках полной системы уравнений газовой динамики исследованы и объяснены важные закономерности общей циркуляции атмосферы Венеры, а также изучено влияние рельефа на эту циркуляцию. Впервые показано, что внутренние гравитационные волны, наблюдаемые в атмосфере Венеры над облачным слоем, возникают из–за генерации горных подветренных волн при обтекании рельефа поверхности зональным течением. Установлено, что эти подветренные волны являются причиной формирования в средней и верхней атмосфере системы волн, усиливающих вертикальный перенос. Впервые с помощью численного моделирования в рамках полной системы уравнений газовой динамики эволюции общей циркуляции атмосферы Титана при смене сезонов получены четыре важных закономерности этой циркуляции, изложенные выше, и изучено влияние рельефа на эту циркуляцию.

4. Впервые исследовано влияние солнечной активности на крупномасштабную циркуляцию стратосферы и мезосферы Земли. Впервые проведено численное моделирование развития неустойчивости сдвигового течения во внутритропической зоне конвергенции и показано, что в случае, когда в этом течении имеется достаточно большой горизонтальный градиент горизонтальной составляющей ветра, появление искривленных участков этого течения приводит к развитию гидродинамической неустойчивости и распаду этого течения с образованием за 40–70 часов крупномасштабных циклонических вихрей диаметром 800–1200 км. Впервые установлен физический механизм образования крупномасштабных циклонических вихрей в районе внутритропической зоны конвергенции и обоснована методика прогноза их образования.

Список литературы

Абалкин И. В., Жохова А. В., Четверушкин Б. Н. Кинетически–согласованные схемы повышенного порядка точности. // Математическое моделирование. 2001. Т. 13, № 5, С. 53–61.

Алексеев В. А., Володин Е. М., Галин В. Я., Дымников В. П., Лыкосов В. Н. Моделирование современного климата с помощью атмосферной модели ИВМ РАН. Препринт № 2086–В98. 1988. 180 с.

Астафьева Н. М, Раев М. Д., Шарков Е. А. Глобальное радиотепловое поле системы океан — атмосфера по данным микроволновых космических комплексов. // Исследования Земли из космоса, 2006, № 3, С. 64–69.

Астафьева Н. М., Раев М. Д., Шарков Е. А. Междугодовые и сезонные изменения радиотеплового поля Земли по данным микроволнового спутникового мониторинга. // Исследования Земли из космоса, 2008а, № 5, С. 9–15.

Астафьева Н. М., Шарков Е. А. Траектория и эволюция урагана ALBERTO от тропических до средних и средневысоких широт: спутниковая микроволновая радиометрия. // Исследования Земли из космоса, 2008б, № 6, С. 60–66.

Астафьева Н. М., Раев М. Д. Методика изучения радиотеплового поля Земли и распределения влагозапаса тропосферы. // Исследования Земли из космоса, 2009, № 6, С. 16–23.

Афанасенко Т. С., Родин А. В. Влияние столкновительного уширения линий на спектр и потоки теплового излучения в нижней атмосфере Венеры. // Астрономический вестник, 2005, Т. 39, № 3, С. 1-13.

Белоцерковский О. М., Гущин В. А., Коньшин В. Н. Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью. // ЖВМ и МФ. 1987. Т. 27, С. 594.

Белоцерковский О. М., Крагинский Л. М., Опарин А. М., Численное моделирование пространственных течений в стратифицированной атмосфере, вызванных сильными крупномасштабными возмущениями. // ЖВМ и МФ, 2003, Т. 43, № 11, С. 1744–1758.

Белоцерковский О. М., Мингалев И. В., Мингалев В. С., Мингалев О. В., Опарин А. М., О механизме возникновения крупномасштабного вихря в тропосфере над неравномерно нагретой поверхностью. // ДАН, 2006, Т. 410, № 6, стр. 816–820.

Белоцерковский О.М., Мингалев И.В., Мингалев В.С., Мингалев О.В., Опарин А.М., Чечеткин В.М. Образование крупномасштабных вихрей в сдвиговых

течениях в нижней атмосфере Земли в области тропических широт // Космические исследования, 2009, Т. 47, № 6, С. 501–514.

Бисикало Д.В., Жилкин А.Г., Боярчук А.А. Газодинамика тесных двойных звезд. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 632 стр.

Боресков А. В., Харламов А. А. Основы работы с технологией CUDA. М.: ДМК Пресс, 2010. 232 с.

Гранков А. Г., Мильшин А. А. Взаимосвязь радиоизлучения системы океан — атмосфера с тепловыми и динамическими процессами на границе раздела. М.: Физматлит, 2004. 168 с.

Гущин В. А., Матюшин П. В. Численное моделирование пространственных отрывных течений около сферы. // ЖВМ и МФ. 1997. Т. 37, № 9, С. 1122–1137.

Гущин В. А., Матюшин П. В. Классификация режимов отрывных течений жидкости около сферы при умеренных числах Рейнольдса. // Математическое моделирование: проблемы и результаты, М.: "Наука С. 199–235, 2003.

Гущин В. А., Матюшин П. В. Математическое моделирование пространственных течений несжимаемой жидкости. // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 5, С. 5–20.

Гущин В. А., Матюшин П. В. Механизмы формирования вихрей в следе за сферой при $200 < \mathrm{Re} < 380$. // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 5, С. 135–151.

Жохова А. В., Четверушкин Б. Н. Моделирование нестационарных газодинамических течений. // Математическое моделирование. 2002. Т. 14, № 4, С. 35–44.

Засова Л. В., Мороз В. И., Линкин В. М. и др. Строение атмосферы Венеры от поверхности до 100 км. // Космические исследования. 2006. Т. 44. № 4. С. 381–400.

Игнатьев Н.И., Мингалев И.В., Родин А.В., Федотова Е.А. Новый вариант метода дискретных ординат для расчета собственного излучения в горизонтально однородной атмосфере // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015, том 55, № 10, С. 1741-1755.

Изаков М. Н. КА Venus Express: подтверждение присутствия турбулентности в атмосфере Венеры. // Астрономический Вестник, 2010а., Т. 44, № 2, С. 99–107.

Изаков М. Н. Диссипация волн плавучести и турбулентность в атмосфере Венеры // Астрономический Вестник, 2010б, Т. 44, № 4, С. 1–12.

Кантер Ц.А. Вертикальный профиль циркумполярного движения в 60-километровом слое атмосферы // Исследование динамических процессов в верхней атмосфере. М: Гидрометеоиздат, 1983. С.215–222.

Кац А.Л. Циркуляция в стратосфере и мезосфере. Л: Гидрометеоиздат, 1968. 203 с.

Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.

Колесниченко А. В., Маров М. Я. Турбулентность многокомпонентных сред. М.: МАИК "Наука 1998. 336 с.

Курбаткин Г. П., Дегтярев А. И., Фролов А. В. Спектральная модель атмосферы, инициализация и база данных для численного прогноза погоды. СПб.: Гидрометеоиздат, 1994. 183 с.

Маров М. Я., Гальцев А. П., Шари В. П. Тепловой режим атмосферы Венеры. // Планета Венера. Атмосфера, поверхность, внутреннее строение. М.: Наука. 1989. С. 94–132.

Маров М. Я., Колесниченко А. В. Введение в планетную аэрономию. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 456 с.

Маров М. Я., Гальцев А. П., Шари В. П. Профиль H2O в нижней атмосфере Венеры по измерениям эффективного потока. // Космические исследования 1984, Т. 22, № 2, С. 267–272.

Маров М. Я., Гальцев А. П., Шари В. П. Перенос теплового излучения и содержание воды в атмосфере Венеры. // Астрон. вестн. 1985. Т. 19. С. 15–41.

Мингалев И.В., Астафьева Н.М., Орлов К.Г., Мингалев В.С., Мингалев О.В., Чечеткин В.М. Возможность предсказания образования тропических циклонов и ураганов по данным спутниковых наблюдений // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2011 а. Т. 8, № 3. С. 290–296.

Мингалев И.В., Астафьева Н.М., Орлов К.Г., Чечеткин В.М., Мингалев В.С., Мингалев О.В. Численное моделирование формирования циклонических вихревых течений в области внутритропической зоны конвергенции и их раннее обнаружение // Космические исследования. 2012 а. Т. 50, № 3. С. 242–257.

Мингалев И.В., Астафьева Н.М., Орлов К.Г., Мингалев В.С., Мингалев О.В., Чечеткин В.М. Влияние геометрии течения воздушных масс в области внутритропической зоны конвергенции на процесс формирования циклонических вихрей // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2012б. Т. 9, № 4. С. 154–161.

Мингалев В.С., Мингалев И.В., Мингалев О.В., Опарин А.М., Орлов К.Г. Обобщение монотонной гибридной схемы второго порядка для уравнений газовой динамики на случай нерегулярной пространственной сетки // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50, № 5. С. 923–936.

Мингалев И. В., Мингалев В. С. Модель общей циркуляции нижней и средней атмосферы Земли при заданном распределении температуры // Математическое моделирование. 2005. Т. 17, № 5. стр. 24–40.

Мингалев И.В., Мингалев В.С., Мингалев О.В., Каземинеджад Б., Ламмер Х., Бирнат Х.К., Лихтенегер Х.И.М., Швингеншу К., Рукер Х.О. Численное моделирование циркуляции атмосферы Титана: интерпретация измерений зонда HUYGENS // Космические исследования. 2009. Т. 47, № 2. С. 134–145.

Мингалев И.В., Орлов К. Г., Мингалев В.С. Механизм образования полярных циклонов и возможность их прогноза // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2011б. Т. 8, № 1. С. 255–262.

Мингалев И.В., Орлов К.Г., Мингалев В.С. Механизм формирования полярных циклонов и возможность их предсказания по данным спутниковых наблюдений // Космические исследования. 2012 в. Т. 50, № 2. С. 166–175.

Мингалев И.В., Родин А.В., Орлов К.Г. Негидростатическая модель общей циркуляции атмосферы Венеры // Астрономический вестник. 2012 г. Т. 46, № 4. С. 282–296.

Мингалев И. В., Родин А. В., Орлов К. Г. Численное моделирование общей циркуляции атмосферы Венеры. Влияние рельефа поверхности и режима нагрева излучением // Астрономический вестник, 2015. Т. 49, № 1, стр. 27–45.

Монин А. С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 423 с.

Мороз В. И., Родин А. В. Сколько конвективных зон в атмосфере Венеры ? // Астрон. вестн. 2002, Т. 36, № 6, С. 535–538.

Обухов А. М., Турбулентность и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 413 с.

Опарин А. М. Численное моделирование проблем, связанных с интенсивным развитием гидродинамических неустойчивостей. // Новое в численном моделировании: алгоритмы, вычислительный эксперимент, результаты. М.: Наука, 2000.

Петросянц С. П., Хромов М. А. Метеорология и климатология. М.: Изд-во МГУ, 1994. 520 с.

Погосян Х.П. Общая циркуляция атмосферы. - Л: Гидрометеоиздат, 1972. 55 с.

Райст П. Аэрозоли. Введение в теорию. М.: Мир, 1987.

Троценко А. Н., Фомин Б. А. Расчет характеристик переноса теплового излучения в атмосфере на основе метода прямого интегрирования. // Изв. АН СССР, ФАО, 1989, Т. 25, № 1, стр. 106–109.

Ханевская И.В. Температурный режим свободной атмосферы над северным полушарием. Л: Гидрометеоиздат, 1968. 111 с.

Эртель Д., Мороз В. И., Линкин В. М. Инфракрасный эксперимент на орбитальных станциях Венере-15 и Венере-16. // Космические исследования. 1985. т. 23. № 2. с. 191–205.

Achterberg, R. K., Conrath, B. J., Gierasch, P. J., et al. Observation of a tilt of Titan's middle-atmospheric superrotation. // Icarus. 2008. V. 197, P. 549–555. doi:10.1016/j.icarus.2008.05.014.

Achterberg, R. K., Gierasch, P. J., Conrath, B. J., et al. Temporal variations of Titan's middle-atmospheric temperatures from 2004 to 2009 observed by the Cassini/CIRS. // Icarus. 2011. V. 211, P. 686–698. doi:10.1016/j.icarus.2010.08.009.

Beam R.M., Warming R.F. An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic System in Conservation Law Form // J. Comp. Phys., 1976, v. 22, p. 87.

Bird M. K., Allison M., Asmar S. W., et al. The vertical profile of winds on Titan // Nature. 2005. V. 438. P. 800–802.

Chakravarthy S.R., Osher S. A New Class of High Accuracy TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // AIAA Pap., 1985, № 85-0363.

CUDA CUFFT Library.— NVIDIA Corporation, 2009.— Version 2.2.

Del Genio A. D., Zhou W. Simulations of superrotation on slowly rotating planets: Sensitivity to rotation and initial conditions. // Icarus, 1996. V. 120, PP. 332–343.

Del Genio A. D., Zhou W., Eichler T. P. Equatorial superrotation in a slowly rotating GCM: Implications for Titan and Venus. // Icarus, 1993. V. 101, PP. 1–17.

Dickinson R. E., Ridley E. C., and Roble R. G., A three-dimensional general circulation model of the thermosphere // J. Geophys. Res., 1981. V. 86. NO. A3. P. 1499-1512.

Dowling T. E., Bradley M. E., Colon E., Kramer J., LeBeau R. P., Lee G. CH., Mattox T. I., Morales-Juberias R., Palotai C. J., Parimi V. K., Showman A. P. The EPIC atmospheric model with an isentropic/terrain-following hybrid vertical coordinate. // Icarus, 2006. V. 182, PP. 259–273.

Emanuel K. A., Genesis and maintenance of "Mediterranean hurricanes". // Advances in Geosciences, 2005, V. 2, P. 217–220.

Flasar F. M. The dynamic meteorology of Titan // Planet. Space Sci. 1998. V. 46. P. 1125–1147.

Flasar, F. M. et al. Titan's atmospheric temperatures, winds, and composition. // Science. 2005. V. 308 (5724), P. 975–978.

Fromm J. E. A Method for Reducing Dispersion in Convective Difference Schemes // J. Comp. Phys., 1968, v. 3, p. 176.

Gushchin V. A., Kostomarov A. V., Matyushin P. V., Pavlyukova E. R. Direct Numerical Simulation of the Transitional Separated Fluid Flows Around a Sphere. // Japan Society of CFD/CFD Journal. 2001. Vol. 10, No. 3, pp. 344–349.

Harris M. CUDA data parallel primitives library. URL: http://gpgpu.org/developer/cudpp

Hansen J., Russel G., Rind D., Stone P., Lacis A., Lebedeff S., Ruedy R., and Traves L., Efficient three-dimensional global models for climate studies : Models 1 and 2 // Monthly weather review. 1983. V. 111. P. 609-622.

Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys., 1983, v. 49, p. 357.

Herrnstein A., Dowling T. E. Effect of topography on the spin-up of a Venus atmospheric model. // J. Geophys. Res., 2007. V. 112:E04S08, DOI 10.1029/2006JE002804

Hollingsworth J. L., Young R. E., Schubert G., Covey C., Grossman A. S. A Simple-physics Global Circulation Model for Venus: Sensitivity assessments of atmospheric superrotation. // Geophys. Res. Lett., 2007. V. 34:L05202, DOI 10.1029/2006GL028567

Hourdin F., Couvreux F., Menut L. Parameterization of the dry convective boundary layer based on a mass flux representation of thermals. // J. of Atm. Sci., 2002. V. 59, PP. 1105–1123.

Juan M. Lora., Jonathan I. Lunine, Joellen L. Russell. GCM simulations of Titan's middle and lower atmosphere and comparison to observations // Icarus. 2015. V. 250, P. 516–528.

Kido A., Wakata Y. Multiple equilibrium states appear in a Venus-like Atmospheric General Circulation Model. // J. of the Met. Soc. of Japan, 2008. V. 86, PP. 969–979.

Kostiuk T., Fast K. E., Livengood T. A., et al. Direct measurement of winds on Titan // Geophys. Res. Lett. 2001. V. 28. N. 12. P. 2361–2364.

Kostiuk, T., T. Hewagama, K. Fast, et al. High Spectral Resolution Infrared Studies of Titan: Winds, Temperature and Composition // Planetary and Space Science, 2010. V. 58. P. 715-1723. [10.1016/2010.08.004].

Kostiuk, T., T. A. Livengood, G. Sonnabend, et al. Stratospheric zonal winds on Titan at the time of Huygens decent // J. Geophys. Res.-Planets, 2006. V. 111: E11S90 [10.1029/2005JE002669]

Kostiuk, T., T. Livengood, T. Hewagama, et al. 2005. Titan's Stratospheric Zonal Wind, Temperature and Ethane Abundance a Year Prior to Huygens Insertion // Geophys. Res. Lett., 32: L22205 [10.1029/2005GL023897]

Lebonnois S., Hourdin F., Eymet V., Crespin A., Fournier R., Forget F. Superrotation of Venus atmosphere analysed with a full General Circulation Model. // J. Geophys. Res., 2010. V. 115:E06006, DOI 10.1029/2009JE003458

Lee C. Modelling of the atmosphere of Venus. // PhD thesis, University of Oxford, 2006.

Lee C., Richardson M. I. A General Circulation Model ensemble study of the atmospheric circulation of Venus. // J. Geophys. Res., 2010. V. 115:E04002, DOI 10.1029/2009JE003490

Lee C., Lewis S. R., Read P. L. A numerical model of the atmosphere of Venus. // Adv. Space Res., 2005. V. 36, PP. 2142–2145.

Lee C., Lewis S. R., Read P. L. Superrotation in a Venus general circulation model. // J. Geophys. Res., 2007. V. 112:E04S11, DOI 10.1029/2006JE002874

Lorenz R. D. et al. A global topographic map of Titan // Icarus. 2013. V. 225. Issue 1. P. 367–377.

Luz, D., T. Civeit, R. Courtin, et al. Characterization of zonal winds in the stratosphere of Titan with UVES, II: Observations coordinated with the Huygens Probe entry. // JGR-Planets. 2006. V. 111: E08S90 [10.1029/2005JE002617]

Mellor G. L., Yamada T. Development of a turbulent closure model for geophysical fluid problems. // Rev. Geophys. Space Phys., 1982. V. 20, PP. 851–875.

Mingalev I.V., Astafieva N.M., Orlov K.G., Mingalev V.S., Mingalev O.V., Chechetkin V.M. A simulation study of the formation of large-scale cyclonic and anticyclonic vortices in the vicinity of the intertropical convergence zone // ISRN Geophysics, Volume 2013 a, Article ID 215362, 12 pages, (http://dx.doi.org/10.1155/2013/215362).

Mingalev I.V., Astafieva N.M., Orlov K.G., Mingalev V.S., Mingalev O.V., Chechetkin V.M. Numerical modeling of the initial formation of cyclonic vortices at tropical latitudes // Atmospheric and Climate Sciences, 2014 a, vol. 4, pp. 899–906.

Mingalev I.V., Mingalev V. S., Mingalev O.V., Kazeminejad B., Lammer H., Biernat H. K., Lichtenegger H. I. M., Schwingenschuh K., and Rucker H. O. First simulation results of Titan's atmosphere dynamics with a global 3-D non-hydrostatic circulation model // Annales Geophysicae. 2006, V. 24. № 8. P. 2115-2129. Sref-ID: 1432-0576/ag/2006-24-2115.

Mingalev I.V., Mingalev O.V., Mingalev V.S. Model simulation of the global circulation in the middle atmosphere for January conditions // Advances in Geosciences. 2008, V. 15. P. 11–16.

Mingalev I., Mingaleva G., Mingalev V. A simulation study of the effect of geomagnetic activity on the global circulation in the Earth's middle atmosphere // Atmospheric and Climate Sciences, vol.3, no. 3A, 2013 b, pp. 8–19, doi:10.4236/acs.2013.33A002, (http://www.scirp.org/journal/acs).

Mingalev I. V., Mingalev V. S., Mingaleva G. I. Numerical simulation of the global distributions of the horizontal and vertical wind in the middle atmosphere using a given neutral gas temperature field. // J. Atmos. Solar–Terr. Phys. 2007. V. 69, Nos. 4/5. P. 552–568.

Mingalev I., Orlov K., Mingalev V. A Modeling Study of the Initial Formation of Polar Lows in the Vicinity of the Arctic Front // Advances in Meteorology, 2014, Vol. 2014 b, Article ID 970547, 10 p.

Mingalev I.V., Orlov K.G., Mingalev V.S. A computational study of the transformation of global gas flows in the Earth's atmosphere over the course of a year // Open Journal of Fluid Dynamics, 2014 c, vol. 4, pp. 379–402.

Moreno, R., A. Marten, T. Hidayat. Interferometric measurements of zonal winds on Titan. // A & A. 2005. V. 437, P. 319.

Newman M., Leovy C. B. Maintenance of strong rotational winds in Venus middle atmosphere by thermal tides. // Science, 1992. V. 257, PP. 647–650.

Newmana C.E., et al. Stratospheric superrotation in the TitanWRF model // Icarus. 2011. V. 213. P. 636–654

NVIDIA CUDA Programmingguide.— NVIDIA Corporation, 2009.— Version 2.2.

Parish H. F., Schubert G., Covey C., Walterscheid R. L., Grossman A., Lebonnois S. Decadal variations in a Venus General Circulation Model. // Icarus Accepted, 2010.

Piccioni G., Drossart P., Sanchez-Lavega A., et al. South-polar features on Venus similar to those near the north pole. // Nature, 2007, V. 450, No. 7170, P. 637–640.

Picone J. M., Hedin A. E., Drob D. P., and Aikin A. C., NRLMSISE-00 empirical model of the atmosphere: Statistical comparisons and scientific issues. // J. Geophys. Res., 2002, V. 107, No. A12, P. 1468–1483.

Read P. Super-rotation and diffusion of axial angular momentum : I. TSpeed limitsT for axisymmetric flow in a rotating, cylindrical, fluid annulus. // Quater J. R. Met. Soc., 1986. V. 112, PP. 231–251.

Revercomb H. E., Sromovsky L. A., Suomi V. E. et al. Net radiation measurements in the atmosphere of Venus. // Icarus. 1985. Vol. 61, No. 3. P. 521-538.

Rotunno R., and Emanuel K. A. An air–sea interaction theory for tropical cyclones. Part II. // J. Atmos. Sci., 1987, V. 44, P. 542–561.

Sanchez-Lavega A., Hueso R., Piccioni G., Drossart P., Peralta J., Perez-Hoyos S., Wilson C., Taylor F. W., Baines K. H., Luz D., Erard S., Lebonnois S. Variable winds on Venus mapped in three dimensions. // Geophys. Res. Lett., 2008. V. 35:L13204, DOI 10.1029/2008GL033817

Seiff A., Schofield J. T., Kliore A. J., et al. Model of the structure of the atmosphere of Venus from surface to 100 km altitude. // Adv. Space Res., 1985. V. 5(11), PP. 3–58.

Sweby P.K. High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws. - SIAM J. Numer. Anal., 1984, v. 21, p. 995.

Takagi M., Matsuda Y. Model of the structure of the atmosphere of Venus from surface to 100 km altitude. // J. Geophys. Res., 2007. V. 112:D09112, DOI 10.1029/2006JD007901

Tokano T., Wind-induced equatorial bulge in Venus and Titan general circulation models: Implication for the simulation of superrotation // Geophysical Research Letters, 2013, V. 40, P. 4538–4543, doi:10.1002/grl.50841

Tomasko M. G., Archinal B., Becker T., et al. Rain, winds and haze during the Huygens probe's descent to Titan's surface // Nature. 2005. V. 438. P. 765–778.

Warming R.F., Beam R.M. Upwind second order difference schemes and application in aerodynamic flows // AIAA J., 1976, v. 14, p. 1241.

Yamamoto M., Takahashi M. Superrotation and equatorial waves in a T21 Venus-like AGCM. // Geophys. Res. Lett., 2003a. V. 30:1449, DOI 10.1029/2003GL016924

Yamamoto M., Takahashi M. The Fully Developed Superrotation Simulated by a General Circulation Model of a Venus-like Atmosphere. // J. Atm. Sc., 2003b. V. 60, PP. 561–574.

Yamamoto M., Takahashi M. Dynamics of Venus' superrotation: The eddy momentum transport processes newly found in a GCM. // Geophys. Res. Lett., 2004. V. 31:L09701, DOI 10.1029/2004GL019518

Yamamoto M., Takahashi M. Superrotation Maintained by Meridional Circulation and Waves in a Venus-Like AGCM. // J. Atm. Sci., 2006. V. 63(12), PP. 3296–3314.

Yamamoto M., Takahashi M. Dynamical effects of solar heating below the cloud layer in a Venus-like atmosphere. // J. Geophys. Res., 2009. V. 114:E12004, DOI 10.1029/2009JE003381

Yelle R. V., Lellowch E., Gautier D., and Strobel D. F. Engineering models for Titan's atmosphere // Huygens Science Payload and Mission. Eur. Space Agency Sci. Tech. Rep. 1997. ESA SP–1177. P. 243–256.

Young R. E., Pollack J. B. A three-dimensional model of dynamical processes in the Venus atmosphere. // J. Atmos. Sci., 1977. V. 34, PP. 1315–1351.