

Орлов Степан Геннадьевич

**Математические модели, алгоритмы
и программный комплекс для расчёта
динамики систем твёрдых деформируемых тел
с многочисленными контактными
взаимодействиями**

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Работа выполнена в *Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования Санкт-Петербургском политехническом университете Петра Великого.*

- Научный консультант:** доктор технических наук, профессор
Шабров Николай Николаевич
- Официальные оппоненты:** доктор технических наук
Бухановский Александр Валерьевич
Университет ИТМО, Санкт-Петербург
директор мегафакультета трансляционных информационных технологий
- доктор физико-математических наук, доцент
Мухин Сергей Иванович
МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва
профессор кафедры вычислительных методов факультета ВМК
- доктор физико-математических наук
Федулов Борис Никитович
Московский авиационный институт, Москва
ведущий инженер лаборатории прочности и композиционных материалов НИО-101
- Ведущая организация:** федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Санкт-Петербургский государственный университет

Защита состоится 21 марта 2019 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.024.03 при *Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН*, расположенном по адресу: *125047, Москва, Миусская площадь, д. 4.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН* и на сайте <http://keldysh.ru/council/3/>

Автореферат разослан

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к. ф.-м. наук

Корнилина М. А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Основным объектом исследования в данной работе является бесступенчатая трансмиссия, состоящая из большого числа твёрдых деформируемых тел, находящихся в условиях многочисленных контактных взаимодействий друг с другом.

Бесступенчатые трансмиссии (вариаторы) широко применяются в автомобильной промышленности благодаря ряду их преимуществ перед традиционными трансмиссиями с фиксированным набором передаточных чисел. В конструкциях автомобильных вариаторов используется цепь или металлический ремень, опирающийся на конические или тороидальные контактные поверхности шкивов ведущего и ведомого валов. Передача крутящего момента в таких вариаторах происходит за счёт сил трения между телами, составляющими цепь или металлический ремень, и шайбами шкивов.

Автопромышленные компании постоянно совершенствуют конструкции вариаторов, увеличивая передаваемый крутящий момент и КПД, повышая надёжность, поэтому представляет большой интерес предсказательное моделирование динамики вариатора. Оно позволяет существенно сократить время разработки серийного изделия и оптимизировать его характеристики, не прибегая к созданию большого числа экспериментальных образцов. При моделировании основной интерес представляют следующие аспекты:

- динамика изменения передаточного числа при воздействии внешних (в том числе, управляющих) факторов (глобальная динамика);
- напряжённо-деформированное состояние отдельных элементов трансмиссии, определяющее их ресурс;
- зависимость КПД трансмиссии от режима её работы и параметров конструкции;
- акустический шум, производимый трансмиссией, в диапазоне до 5 КГц.

Лишь в первом из этих случаев иногда удаётся обойтись относительно простыми моделями. Как правило, получение результатов моделирования, согласующихся с реальностью, требует разработки сложных детализированных моделей.

Отметим, что детальное моделирование динамики бесступенчатой трансмиссии с использованием коммерческих систем инженерного анализа общего назначения (ANSYS, ABAQUS и др.) не представляется возможным. Попытки их использования приводили к громоздким моделям, вообще не позволяющим получить адекватный результат.

Моделированию динамики бесступенчатой трансмиссии посвящён ряд работ, в частности, выполненных под руководством проф. Ф. Пфайффера. Часть из них (работы Пфайффера, Неймана, Ульбриха, Гайера, Фоерга, Цандера)

предлагает модели, в которых цепь или металлический ремень считаются состоящими из отдельных элементов, соответствующих элементам реальной конструкции. В работах Буллингера, Пфайффера, Ульбриха, Шиндлера, Лебрехта, Функа, Шриваставы, Хака предложены некоторые упрощённые модели, в том числе, с использованием метода Ритца при описании деформируемых тел. В одних работах рассматриваются «двумерные» модели, в которых цепь или металлический ремень совершает плоское движение, в других — пространственное (хотя такое деление несколько условно). В одних работах элементы трансмиссии считаются абсолютно твёрдыми телами, в других — упругими. Моделированию конструкции с металлическим ремнём посвящено заметно больше работ, чем с цепью, и в них часто в той или иной форме производится гомогенизация ремня (отметим в этой связи ещё работы Карбоне, Манджиаларди и Мантриоты). Настоящая же работа посвящена в основном конструкции с цепью, звенья которой состоят из множества пластинок, охватывающих двойные соединительные оси.

Диссертационная работа Брэдли близка к данной работе тем, что в обеих рассмотрено множество одних и тех же факторов: деформации элементов цепи, использование теории Герца при описании контактных взаимодействий, ряд других. Однако у Брэдли они рассмотрены по отдельности, в том смысле, что динамическая модель всей системы учитывает лишь часть из них. Например, влияние изгиба соединительных осей цепи на распределение сил натяжения в пластинках цепи рассмотрено лишь в статике.

В нашей стране моделированию бесступенчатой трансмиссии была посвящена кандидатская работа В. Ю. Каменскова. Она также перекликается с настоящей работой по охвату рассмотренных факторов, однако предложенная там динамическая модель вариатора (плоское движение цепи, три степени свободы на звено) значительно проще моделей, предложенных в данной работе.

Несмотря на значительное число работ по моделированию динамики вариатора, представляется, что предлагаемые там модели не учитывают всех факторов, существенных для предсказательного моделирования напряжённо-деформированного состояния отдельных элементов конструкции. Сосредоточившись на уточнённом моделировании выбранных факторов, авторы не рассматривают другие — например, учтя податливость шайб, считают соединительные оси звеньев цепи абсолютно твёрдыми, что представляется недопустимым, если представляет интерес напряжённо-деформированное состояние элементов цепи. Автору не удалось найти публикации, описывающие динамические пространственные модели вариатора с цепью, в которых были бы одновременно учтены деформации элементов цепи, упругость при контактных взаимодействиях, уточнённая кинематика контакта (существенно влияющая на распределение напряжений в элементах цепи), податливость валов, упругие опоры валов и др. Это обуславливает актуальность разработки значительно более детализированных моделей, чем созданные до сих пор. В диссертации такие модели предложены.

Расчёты по детализированным моделям вариатора классическими методами численного интегрирования требуют значительных вычислительных затрат

в связи с возрастающей жёсткостью системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Авторы некоторых работ мотивируют отказ от более детальных моделей именно этим обстоятельством, хотя иногда, напротив, встречаются попытки сократить время расчётов за счёт использования параллельных технологий, а не упрощения модели. Ясно, что для ускорения расчётов динамики по детализированным математическим моделям необходимо сочетать правильный выбор метода численного интегрирования и использование параллельных технологий.

Практическое использование предлагаемых в данной работе моделей невозможно без специализированного проблемно-ориентированного программного обеспечения, что обуславливает актуальность его разработки.

Цели и задачи диссертационной работы. Основная цель работы — создание специализированного прикладного программного комплекса для предсказательного моделирования динамики бесступенчатой трансмиссии с пластинчатой цепью. При этом, помимо глобальной динамики, интерес представляют напряжённо-деформированное состояние отдельных элементов трансмиссии, в частности, пластинок и соединительных осей цепи; зависимость КПД трансмиссии от режима её работы и параметров конструкции; акустический шум, производимый трансмиссией, в диапазоне до 5 КГц. Конечными пользователями программного комплекса являются инженеры, занимающиеся конструированием бесступенчатой трансмиссии и оптимизацией её параметров. Возможность практического использования программного комплекса подразумевает не слишком большое время типового расчёта на современном персональном компьютере.

Для достижения этой цели были решены следующие задачи.

1. Сделаны оценки, оправдывающие решения, принятые при дальнейшей разработке физических и математических моделей. В частности, к ним относятся оценка влияния сжимающей силы на изгибающую жёсткость стержня; оценка перекоса цепи в вариаторе с коническими шайбами; оценка обусловленного этим перекосом изгибающего момента в пластинке цепи; оценка осевых сил трения между половинками соединительных осей цепи; оценка частот, обусловленных дискретной структурой движущейся цепи.
2. Разработана модель вариатора с одной степенью свободы, позволяющая судить об устойчивости положения равновесия в зависимости от геометрических параметров шкивов.
3. Разработаны малоразмерные модели вариатора для расчёта глобальной динамики, в которых цепь считается однородной лентой. Благодаря малому числу степеней свободы (4 в первой, $6 + 2n$, $1 \leq n < 10$, во второй) эти модели не требуют больших вычислительных затрат для расчёта динамики и могут быть использованы для расчётов в реальном времени. Вторая

модель позволяет найти распределение сил трения по дугам контакта благодаря учёту сжимаемости цепи в поперечном направлении.

4. Разработаны динамические модели цепи, учитывающие её дискретную структуру. Сложность и размерность моделей постепенно увеличивается в связи с учётом новых факторов в каждой следующей модели. Простейшая модель предполагает наличие плоскости симметрии и имеет две степени свободы на звено; более сложные модели учитывают осевую инерцию соединительных осей; изгиб соединительных осей; фактическое отсутствие плоскости симметрии; изгиб и кручение пластинок цепи; ограниченность изгибающего момента в пластинках; наличие двух обкатывающихся друг по другу половинок в каждой соединительной оси.
5. Разработаны модели валов, шайб шкивов, упругих опор валов, имеющие разную сложность. В простейшей модели валы и опоры считаются жёсткими; в наиболее сложной модели рассматривается растяжение, изгиб и кручение вала на нелинейных изотропных опорах, упругое соединение вала с шайбой, которая считается абсолютно твёрдым телом.
6. Разработаны модели контактного взаимодействия соединительных осей цепи с шайбами шкивов при наличии трения, близкого к кулонову. Рассмотрены два направления: ударное взаимодействие и упругое взаимодействие в соответствии с контактной теорией Герца. В последнем случае рассмотрена как простейшая модель с фиксированным положением точки контакта на соединительной оси, так и более сложная модель, позволяющая определить положение точки контакта с учётом формы двояковыпуклых контактных поверхностей и деформаций элементов конструкции. Обоснована важность моделей с уточнённой кинематикой контакта.
7. Разработаны системы стабилизации угловых скоростей, используемые для достижения расчётных параметров режима работы трансмиссии в численных экспериментах.
8. Создана архитектура программных компонентов, облегчающих конструирование методов численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений и исследования их поведения с целью оценки быстродействия и дальнейшей оптимизации. Она представляет собой фреймворк с открытым исходным кодом, в котором, кроме архитектуры интерфейсов, реализован ряд методов численного интегрирования задачи Коши и ряд методов для решения систем нелинейных алгебраических уравнений.
9. С использованием созданного фреймворка исследована возможность применения различных методов численного интегрирования для решения за-

дач динамики вариатора. Определены классы методов, использование которых представляется перспективным.

10. Создана инфраструктура программных компонентов, предназначенная для создания масштабируемых проблемно-ориентированных программных комплексов. Она состоит из множества модулей и облегчает решение как задач общего характера (таких, как сериализация дерева свойств или подготовка документации конечного пользователя, или создание сценариев), так и более специфичных: двумерная и трёхмерная визуализация сцен, расчёт динамики, расчёт частот и форм колебаний, общие алгоритмы обработки численного решения, выполнение многовариантных расчётов, подготовка отчётов.
11. На базе созданной инфраструктуры компонентов создан программный комплекс, являющийся полноценным программным продуктом, в котором реализованы созданные модели элементов трансмиссии, методы численного интегрирования, а также все средства, необходимые для комфортной работы инженера по численному моделированию вариатора — подготовки исходных данных, в том числе для многовариантных расчётов, запуска расчётов, анализа численного решения в отдельно взятом расчёте, подготовки сводных отчётов по результатам многовариантных расчётов.

Научная новизна.

1. Предложена модель вариатора с одной степенью свободы, позволяющая судить об устойчивости положения равновесия. Несмотря на свою простоту, модель является новой.
2. Предложены детализированные динамические модели бесступенчатой трансмиссии с пластинчатой цепью. Наиболее сложные из них описывают пространственное движение всех элементов конструкции, причём все тела, за исключением шайб шкивов, считаются упругими.
3. Предложена методика описания локального контактного взаимодействия на основе теории Герца. Она позволяет уточнить положение точки контакта тел с двояковыпуклыми контактными поверхностями, что может оказаться важным в приложениях. При некоторых дополнительных предположениях это не требует решения нелинейных алгебраических уравнений.
4. Разработан фреймворк с открытым исходным кодом, позволяющий относительно легко программировать новые схемы численного интегрирования задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и исследовать их поведение в конкретных задачах.

5. Разработана модульная инфраструктура компонентов, позволяющая небольшим командам разработчиков быстро создавать проблемно-ориентированные программные комплексы, ориентированные в первую очередь (но не обязательно) на задачи динамики.

Теоретическая значимость. В работе демонстрируется подход к моделированию механических систем, основанный на последовательном применении аппарата аналитической механики, что, безусловно, не является новой идеей. Для использования этого аппарата необходимо в первую очередь аккуратное описание кинематики несвободных систем. Описание кинематики твёрдых деформируемых тел в значительной степени облегчается и формализуется при использовании прямого тензорного исчисления, в частности — тензора поворота. Среди работ по математическому моделированию бесступенчатой трансмиссии автору не удалось найти ни одной, в которой бы последовательно применялись аналитическая механика и тензорное исчисление. Это разочаровывает и подталкивает к мысли позиционировать данную работу как теоретически значимую в области методологии построения математических моделей механических систем. Не претендуя на новизну самой этой методологии, лишь подчеркнём, что данная работа её иллюстрирует.

Наиболее важный теоретический результат работы — математические модели бесступенчатой трансмиссии. Теоретическая значимость заключается как в возможности их непосредственного использования для предсказательного моделирования, так и в ряде нетривиальных идей, использованных при их создании и применимых в других случаях.

Также теоретически значимым может быть описание локального контактного взаимодействия двояковыпуклых поверхностей, позволяющее рассматривать упругое герцевское взаимодействие, считая контактные поверхности недеформируемыми.

Практическая значимость работы состоит в первую очередь в том, что созданные модели и комплекс программ позволяют осуществлять расчёт динамики бесступенчатой трансмиссии с пластинчатой цепью, — для этого они фактически используются на предприятии, занимающемся разработкой и производством таких трансмиссий.

Другие практически значимые результаты связаны с разработанным программным обеспечением. Программный комплекс для расчёта динамики вариатора представляет собой не монолит, но модульную архитектуру компонентов, значительная часть которой предоставляет развитую инфраструктуру, на которой могут базироваться другие проблемно-ориентированные комплексы.

Разработанный фреймворк для программирования и исследования методов численного интегрирования может быть использован непосредственно по назначению любой заинтересованной стороной; его исходный код опубликован в открытом доступе.

Методология и методы исследования. Математические модели раз-

работаны с использованием аппарата аналитической механики, в частности — уравнений Лагранжа II рода, так как рассматриваемые системы голономны. Для описания кинематики несвободной системы, состоящей из твёрдых деформируемых тел, зачастую используется язык прямого тензорного исчисления.

При описании упругого контактного взаимодействия использована контактная теория Герца.

Численные эксперименты проведены с использованием известных методов численного интегрирования задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом потребовалась их адаптация для систем с дискретным состоянием, изменяющимся при наступлении событий. Системы нелинейных алгебраических уравнений, возникающих на шаге неявных методов численного интегрирования, решались различными модификациями методов ньютоновского типа. Системы линейных алгебраических уравнений решались прямым методом (LU-разложение для несимметричных матриц и разложение Холецкого для симметричных), так как размеры матриц относительно невелики (тысячи строк и столбцов), и они разрежены.

Достоверность полученных результатов определяется

- наличием оценок, обосновывающих принятие тех или иных решений при моделировании;
- корректным формальным выводом кинематических соотношений;
- корректным использованием аппарата лагранжевой механики;
- контролем ошибки численного решения;
- сопоставлением численных данных с экспериментальными;
- многолетним опытом использования программного комплекса на предприятии, занимающемся разработкой и производством бесступенчатых трансмиссий.

Положения, выносимые на защиту:

1. Создано множество физических и математических моделей вариатора различной сложности и степени детализации, позволяющих судить об устойчивости положения равновесия, предсказывать глобальную динамику, детали напряжённно-деформированного состояния элементов цепи, КПД, акустический шум.
2. Предложен практический способ описания кинематики локального контактного взаимодействия двояковыпуклых поверхностей.
3. По результатам исследования выбраны методы численного интегрирования задачи Коши для уравнений динамики бесступенчатой трансмиссии,

дающие непосредственный выигрыш в быстродействии или обладающие потенциальной возможностью достичь его, в частности, за счёт параллелизации алгоритмов.

4. Создана инфраструктура программных компонентов, предназначенная для создания масштабируемых проблемно-ориентированных программных комплексов. На её основе создан программный комплекс для расчёта динамики бесступенчатой трансмиссии с пластинчатой цепью.
5. Разработан фреймворк для конструирования методов численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений и исследования их поведения.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих международных и всероссийских конференциях: 6th Nonlinear dynamics conference (EUROMECH), 30 июня – 4 июля 2008, Санкт-Петербург, Россия; 13-я Международная научно-техническая конференция «Совершенствование турбоустановок методами математического и физического моделирования», 5–9 сентября 2009, Харьков, Украина; Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ), 2007, 2008, 2009, 2010; Научный сервис в сети Интернет: масштабируемость, параллельность, эффективность. 21–26 сентября 2009, Новороссийск, Россия; International conference on automation, control, and information technology (ACIT-ICT), 15–18 июня, 2010, Новосибирск, Россия; 3rd International conference on vibro-impact-systems and systems with non-smooth interactions (ICOVIS), July 22–26, 2013, Leinsweiler, Germany; 29th Congress of the international council of the aeronautical sciences (ICAS) 7–12 сентября 2014, Санкт-Петербург, Россия; The first international conference on advances and trends in software engineering (SOFTENG), April 19–24, 2015, Barcelona, Spain; 27th European modeling and simulation symposium (EMSS), 21–23 сентября 2015, Bergeggi, Italy; Russian supercomputing days 2015, 2016, 2017, 2018, Москва, Россия; Supercomputing in scientific and industrial problems. German-Russian conference 2016, 2017; IV Международная научная конференция: конвергенция цифровых и физических миров: технологические, экономические и социальные вызовы, 16–18 мая 2018, Санкт-Петербург, Россия.

Публикации. Основные результаты, полученные в диссертации, отражены в 28 опубликованных печатных работах, из них 13 статей [1–13] в изданиях, индексируемых системой Scopus, и журналах из перечня ВАК, 8 статей [14–21] в сборниках трудов конференций, 4 тезисов докладов [22–25], 3 прочих [26–28].

Внедрение результатов работы. Разработанный программный комплекс для расчёта бесступенчатых трансмиссий на протяжении многих лет используется компанией LuK и является стандартным инструментом инженера-расчётчика; опыт его использования и взаимодействие с пользователями определяют направление дальнейшего развития моделей бесступенчатых трансмиссий, поиск путей сокращения вычислительных затрат при расчётах и функциональ-

ность программного комплекса. Компания LuK, входящая в группу компаний Schäffler, производит бесступенчатые трансмиссии с пластинчатой цепью и является поставщиком таких трансмиссий для компаний Audi (multitronic), Subaru (Lineartronic) и др.; согласно пресс-релизу, LuK производит 6000 экземпляров цепи ежедневно.

Инфраструктура программных компонентов, рассмотренная в третьей главе, использована при создании ряда других программных комплексов. В частности, на один из них получено свидетельство о регистрации [29].

Личный вклад автора. Все представленные в диссертации результаты получены автором самостоятельно или при его непосредственном участии. Направление развития моделей бесступенчатых трансмиссий определялась по результатам использования компанией LuK ранее созданных моделей с участием пользователей программного комплекса. Модели созданы автором лично, при этом были получены консультации от проф. Ю. Г. Исполова по вопросам механики деформируемого твёрдого тела и механики контактного взаимодействия, от проф. Н. Н. Шаброва по вопросам организации вычислительных процедур. Лично автором проделаны все приведённые расчёты динамики бесступенчатой трансмиссии, исследованы методы численного интегрирования, создано не менее 90% исходного кода программного комплекса для расчёта динамики трансмиссий и весь исходный код фреймворка для построения и исследования численных методов. В публикациях, выполненных в соавторстве, автору принадлежит ведущая роль в разделах, отражающих выносимые на защиту положения диссертационного исследования. Соавторам принадлежит вклад в другие разделы совместных публикаций, не связанные напрямую с выносимыми на защиту положениями.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 353 страниц текста, включая 132 рисунка. Библиография включает 110 наименований на 13 страницах.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана теоретическая и практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Глава 1 посвящена математическому моделированию бесступенчатой трансмиссии с пластинчатой цепью. Рассматриваемая конструкция, изображённая на рис. 1 описана в *разд. 1.1*. Она состоит из ведущего и ведомого валов с параллельными осями, на каждом из которых находятся две *шайбы*, образующие шкив. Одна из шайб на каждом валу может двигаться вдоль вала. Крутящий момент передаётся благодаря *цепи*, охватывающей оба вала и находящейся в

контакте с внутренними коническими или тороидальными поверхностями шайб. При контакте с шайбами цепь принимает форму, близкую к окружности; её радиус называется *радиусом контакта*. На шайбы действуют осевые силы, обеспечивающие сжатие цепи в поперечном направлении и натяжение в продольном. Изменение их соотношения приводит к изменению расстояний между шайбами и, как следствие, радиусов контакта — таким образом, меняется передаточное число. Крутящий момент передаётся благодаря силам трения в точках контакта цепи с шайбами.

В рассматриваемой конструкции контактные поверхности шайб имеют тороидальную или коническую форму. Их осевые сечения представляют собой дуги окружностей или отрезки.



Эскиз вариатора

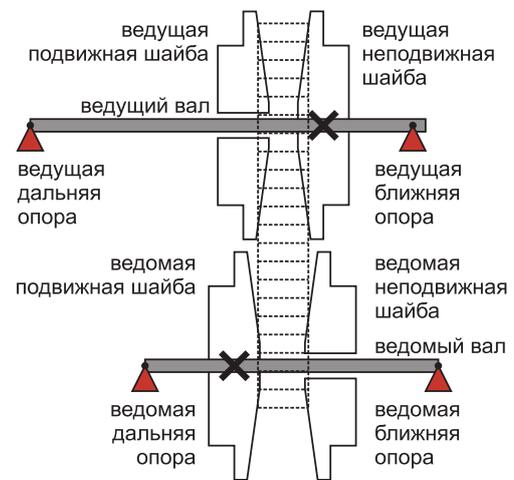


Схема расположения шайб

Рис. 1. Конструкция бесступенчатой трансмиссии.

Цепь состоит из пластинок и двойных соединительных осей (рис. 2). Соединительные оси цепи в дальнейшем именуется *пинами* (от англ. *rocker pin*); их торцы находятся в контакте с внутренними поверхностями шайб. Каждая половинка пина охвачена набором пластинок. Геометрические формы пластинок и сечения пина таковы, что фактически отсутствует возможность независимого поворота пластинки и охваченной ею половинки пина вокруг оси, параллельной оси вала. Соседние звенья цепи, однако, могут поворачиваться друг относительно друга вокруг этой же оси. Поворот возможен благодаря тому, что половинки пина обкатываются друг по другу.



Рис. 2. Цепь вариатора.

Сложность математического моделирования и численных расчетов динамики бесступенчатой трансмиссии главным образом состоит в большом количестве контактов между частями конструкции — между торцами пинов и шайбами шкивов; между пластинками цепи и боковыми поверхностями пинов; между по-

ловинками пинов. Общее число тел в цепи превышает 1000, и между ними происходит контактное взаимодействие. Для правильного предсказания глобальной динамики системы и напряжённо-деформированного состояния этих тел важно учитывать в математической модели их деформации.

В разд. 1.2 сформулирован использованный в работе подход к описанию динамики несвободных голономных механических систем. Для получения уравнений движения используется классический аппарат лагранжевой механики. Обобщённые силы, связанные с упругими деформациями, вычисляются по выражению потенциальной энергии; для описания диссипативных сил, линейно зависящих от скоростей, используется диссипативная функция Рэлея. Обобщённые силы, соответствующие силам трения при контактных взаимодействиях, находятся по выражениям элементарных работ на виртуальных перемещениях.

Кроме уравнений Лагранжа второго рода, описывающих динамику, в общую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) входят также несколько ОДУ первого порядка, описывающих эволюцию внутреннего состояния систем стабилизации, обеспечивающих заданный режим работы трансмиссии.

В рассматриваемых системах может присутствовать дискретное состояние, от которого зависят обобщённые силы и которое может переключаться при наступлении определённых событий. Изменение дискретного состояния может быть связано, например, с началом или окончанием контакта поверхностей.

При выводе кинематических соотношений по возможности используется прямая тензорная запись, поскольку она позволяет представить соотношения в обозримом инвариантном виде. Также используется описание поворота трёхмерного тела, предложенное П. А. Жилиным: оно во многих случаях позволяет в значительной степени формализовать вывод кинематических соотношений.

Разд. 1.3 посвящён различным оценочным формулам, позволяющих обосновать некоторые принятые при моделировании решения. Вычислены осевые силы, сжимающие шайбы, необходимые для передачи заданного крутящего момента. Найдена критическая сжимающая сила для пина. Оценено влияние сжимающей силы на изгибную жёсткость пина. Оценены характерные частоты, обусловленные дискретной структурой цепи.

В разд. 1.4 предложены модели малой размерности, описывающие равновесие и глобальную динамику бесступенчатой трансмиссии. На основании модели с одной степенью свободы получено условие устойчивости положения равновесия (при отсутствии вращения): радиусы контактных поверхностей в осевых сечениях шайб должны быть больше некоторой величины, зависящей от других геометрических параметров трансмиссии. В частности, для конических шайб положение равновесия всегда устойчиво.

Далее рассмотрены три динамических модели возрастающей сложности, позволяющие описать глобальную динамику бесступенчатой трансмиссии. Во всех этих моделях цепь считается однородной лентой, нерастяжимой в продольном направлении. В первой модели конфигурация ленты определяется всего

двумя обобщёнными координатами — углом между её прямолинейным участком и плоскостью валов, а также координатой, определяющей продольное движение ленты. Ещё две обобщённые координаты — углы поворота валов с шайбами. Модель позволяет очень быстро рассчитывать глобальную динамику трансмиссии, однако не позволяет установить детали распределения сил трения по дугам контакта шайб с лентой, поскольку последняя считается несжимаемой в поперечном направлении. Поэтому далее предложена уточнённая модель, имеющая $6 + 2n$ степеней свободы и учитывающая поперечное сжатие ленты. Её форма на дугах контакта с каждой шайбой аппроксимируется при помощи линейной комбинации n дополнительных координатных функций, подобранных таким образом, чтобы обеспечить нерастяжимость ленты в продольном направлении. Коэффициенты в линейной комбинации и осевые перемещения шайб — новые обобщённые координаты. Как показала практика, для получения удовлетворительных результатов при расчёте глобальной динамики требуется ещё одно уточнение модели, а именно учёт податливости валов, приводящий к возможности малых перемещений и наклонов шайб. На этом пути получена модель с $6 + 2n + 8$ степенями свободы. Распределение сил по дугам контакта в этой модели очень близко к соответствующему распределению, полученному в расчётах с большими моделями, рассмотренными в разд. 1.5, уже при $n = 5$. Так как число степеней свободы в этой модели мало, расчёты глобальной динамики по ней можно производить быстрее, чем в реальном времени.

Разд. 1.5 посвящён значительно более детализированным («большим») моделям бесступенчатой трансмиссии, учитывающим дискретную структуру цепи. Эти модели позволяют рассчитывать не только глобальную динамику, но и многое другое, в том числе детали напряжённо-деформированного состояния элементов цепи, зависимость КПД от режима движения и параметров системы, параметры акустического шума.

Большинство элементов, составляющих бесступенчатую трансмиссию, рассматриваются в рамках этого раздела как упругие тела; при этом в физических моделях цепи присутствуют все её элементы (пины и пластинки); в одних моделях пин считается одним телом, в других — двумя телами. В физических моделях трансмиссии присутствуют в виде отдельных тел валы, шайбы, опоры валов. Пространственная дискретизация моделей заключается в определении конфигурации каждого из этих тел при помощи некоторых обобщённых координат, число которых конечно. Определяя зависимость положений точек всех тел от обобщённых координат (аппроксимацию), закон распределения массы и законы контактного взаимодействия, можно получить разные физические модели. Соотношения для кинетической и потенциальной энергии, входящих в функцию Лагранжа, выводятся формально; затем потенциальная энергия упругих деформаций как правило редуцируется до квадратичной формы некоторых малых деформаций. После задания диссипативной функции и закона трения дальнейший вывод уравнений движения также становится формальной процедурой.

Разд. 1.5.1 посвящён моделям цепи. Рассматриваются модели, сложность которых постепенно увеличивается. Вначале считается, что вся конструкция обладает плоскостью симметрии, перпендикулярной осям валов, валы и шайбы — твёрдые тела, изгиб и кручение пинов цепи отсутствуют. Это позволяет получить две простейшие большие модели цепи, с $2N$ и $3N$ степенями свободы соответственно (N — число звеньев цепи). Пусть $\mathbf{u}_p = \sum_{i=1}^3 u_{p,i} \mathbf{e}_i$ — радиус-вектор точки на конце оси p -го пина, $u_{p,i}$ — его координаты в декартовой системе координат (СК) с осями $\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{k}$ (орт \mathbf{k} параллелен осям валов), $\xi \in [-1, 1]$ — безразмерная координата вдоль оси пина, $\eta \in [0, 1]$ — безразмерная координата вдоль оси пластинки. Тогда радиус-вектор $\mathbf{U}_p(\xi)$ точки на оси p -го пина и радиус-вектор $\mathbf{U}_{p,p+1}^k(\eta)$ точки на оси k -й пластинки между p -м и $(p+1)$ -м пинами можно выразить через \mathbf{u}_p соотношениями

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_p^\perp + \mathbf{k}u_p^\parallel, \quad \mathbf{u}_p^\perp \equiv u_{p,1}\mathbf{i} + u_{p,2}\mathbf{j}, \quad u_p^\parallel \equiv u_{p,3},$$

$$\mathbf{U}_p(\xi) = \mathbf{U}_p^\perp + \mathbf{k}U_p^\parallel, \quad \mathbf{U}_p^\perp = \mathbf{u}_p^\perp, \quad U_p^\parallel = \xi u_p^\parallel, \quad (1)$$

$$\mathbf{U}_{p,p+1}^k(\eta) = (1 - \eta)\mathbf{U}_p(\xi_{p,p+1}^k) + \eta\mathbf{U}_{p+1}(\xi_{p,p+1}^k) \quad (2)$$

(здесь $\xi_{p,p+1}^k$ — фиксированная координата, определяющая положение k -й пластинки вдоль оси пина).

Если далее считать, что масса пина и половина массы прилегающих к нему пластинок, m_p , сосредоточена в середине оси пина, то получается модель цепи с $2N$ степенями свободы ($u_{p,1}$, $u_{p,2}$ в каждом пине, далее «модель 1»); осевая координата $u_{p,3}$ вычисляется исходя из условия равновесия пина в осевом направлении. Если же считать, что масса m_p равномерно распределена вдоль оси пина, то $u_{p,3}$ — независимая обобщённая координата (далее «модель 2»). Обобщённые координаты в двух моделях представлены на рис. 3.

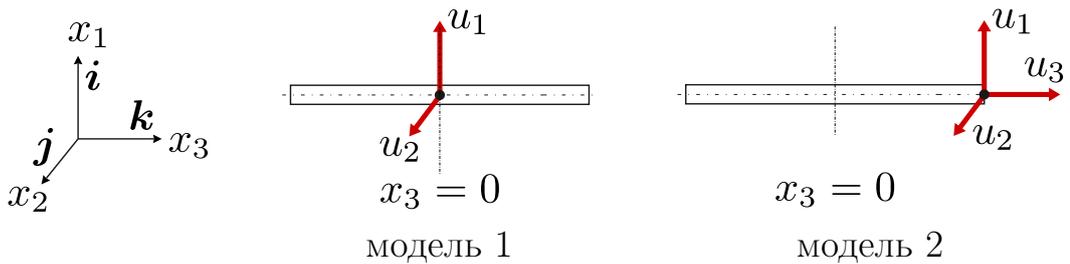


Рис. 3. Обобщённые координаты двух простейших моделей цепи вариатора.

При использовании этих двух простейших моделей цепи использовался закон контактного взаимодействия с шайбами, в рамках которого считалось, что при наличии контакта точка \mathbf{u}_p находится на поверхности шайбы, и в ней к пину приложены нормальная сила $\mathbf{N} = N\mathbf{n}$ (где \mathbf{n} — орт нормали к поверхности шайбы) и сила трения \mathbf{R} . При скольжении пина по шайбе с относительной скоростью $\mathbf{v}_r = v_r\boldsymbol{\tau}$, $v_r > 0$, $|\boldsymbol{\tau}| = 1$, закон трения имеет вид $\mathbf{R} = -fN\boldsymbol{\tau}$ с коэффициентом трения f . Рассматривалось как кулоново трение с $f = \text{const}$ и возможностью залипания пина на шайбе, так и «регуляризованное» трение

с законом $f(v_r) = f_0 \max\{v_r/v_0\}$. Во всех случаях, за исключением модели 2 в сочетании с регуляризованным законом трения, это приводит к системе с переменным числом степеней свободы (оно меняется при переходе от скольжения к залипанию и обратно, а также, в случае модели 3, в моменты начала и окончания контакта пина с шайбой). Кроме того, в случае модели 3 в момент начала контакта пина с шайбой происходит их соударение, для моделирования которого использовались дополнительные соотношения (баланс импульса, заданный уровень потери энергии при ударе). Сравнение моделей 1 и 2 показало, что учёт ударного взаимодействия пинов с шайбами не влияет сколько-нибудь существенным образом на динамику системы. Это позволило в дальнейшем отказаться от моделирования указанного ударного взаимодействия в пользу моделей, основанных на контактной теории Герца. В сочетании с регуляризованным законом трения это позволяет полностью избежать систем с переменным числом степеней свободы.

Очевидным недостатком моделей цепи 1 и 2 является отсутствие возможности выяснить детали распределения сил натяжения по пластинкам звена цепи: их деформации в этих моделях одинаковы, так как ось каждого пина находится на прямой, параллельной оси Ox_3 . В реальности пины изгибаются, и из-за этого деформации пластинок в звене различны. Для описания изгиба пина в рамках модели с плоскостью симметрии вводятся две координаты $u'_{p,1}$, $u'_{p,2}$ вектора касательной к оси пина на его конце (рис. 4) и комбинация $\mathbf{u}'_p \equiv u'_{p,1}\mathbf{i} + u'_{p,2}\mathbf{j}$. Соотношение (1) для $\mathbf{U}_p^\perp(\xi)$ заменяется следующим:

$$\mathbf{U}_p^\perp = h_0(\xi)\mathbf{u}_p^\perp + h_1(\xi)\mathbf{u}'_p, \quad h_0(\xi) = 1, \quad h_1(\xi) = \frac{l}{2}(\xi^2 - 1) \quad (3)$$

(l — длина оси пина).

Считая массу m_p равномерно распределённой вдоль оси пина, можно получить следующее выражение его кинетической энергии T_p :

$$T_p = \frac{1}{2} \int_0^1 m_p |\dot{\mathbf{u}}_p|^2 d\xi = \frac{1}{2} m_p \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 \left[\dot{u}_{p,\alpha}^2 - \frac{2l}{3} \dot{u}_{p,\alpha} \dot{u}'_{p,\alpha} + \frac{2l^2}{15} (\dot{u}'_{p,\alpha})^2 \right] + \frac{1}{3} \dot{u}_{p,3}^2 \right\}$$

Потенциальная энергия изгиба пина Π_p^{bend} , вычисленная в предположении отсутствия сдвига, равна

$$\begin{aligned} \Pi_p^{bend} &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\mathbf{u}_p^\perp)'' \cdot \hat{\mathbf{a}} \cdot (\mathbf{u}_p^\perp)'' l d\xi = \frac{1}{2l} \hat{a}_{\alpha\beta} u'_{p,\alpha} u'_{p,\beta}, \\ \hat{\mathbf{a}} &\equiv -\mathbf{k} \times \mathbf{a} \times \mathbf{k} = \hat{a}_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta, \quad \mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_p^\perp \mathbf{e}_p^\perp + a_2 \mathbf{n}_p^\perp \mathbf{n}_p^\perp \\ \mathbf{e}_p^\perp &\equiv \frac{\tilde{\tau}_{p-1,p}^\perp + \tilde{\tau}_{p,p+1}^\perp}{|\tilde{\tau}_{p-1,p}^\perp + \tilde{\tau}_{p,p+1}^\perp|}, \quad \mathbf{n}_p^\perp \equiv \mathbf{k} \times \mathbf{e}_p^\perp, \quad \tilde{\tau}_{p,p+1}^\perp \equiv \frac{\mathbf{u}_{p+1}^\perp - \mathbf{u}_p^\perp}{L_{p,p+1}}. \end{aligned}$$

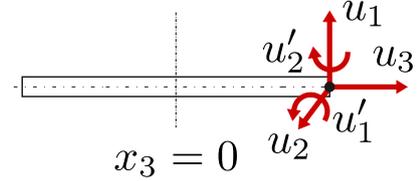


Рис. 4. Обобщённые координаты в симметричной модели цепи с учётом изгиба пина.

Здесь $\underline{\mathbf{a}}$ — тензор изгибной жесткости пина, $L_{p,p+1}$ — длина недеформированной пластинки звена между p -м и $(p+1)$ -м пинами. Отметим, что знание угловой ориентации пина в этой модели необходимо из-за неравножесткости его сечения; эта ориентация определяется при помощи векторов $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp$ и $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p-1,p}^\perp$, определяющих в свою очередь направления прилегающих к пину звеньев.

Потенциальная энергия растяжения пластинок звена $\Pi_{p,p+1}^{link}$ цепи может быть аппроксимирована следующей квадратичной формой малых деформаций $\Delta_{p,p+1}$, $\Delta'_{p,p+1}$:

$$\begin{aligned} \Delta_{p,p+1} &= \frac{L_{p,p+1}}{2} (\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp - 1), \\ \Delta'_{p,p+1} &\equiv L_{p,p+1} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}'_{p,p+1}, \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}}'_{p,p+1} \equiv \frac{\mathbf{u}'_{p+1} - \mathbf{u}'_p}{L_{p,p+1}}, \\ \Pi_{p,p+1}^{link} &= \frac{1}{2} [c_{p,p+1} \Delta_{p,p+1}^2 + 2c'_{p,p+1} \Delta_{p,p+1} \Delta'_{p,p+1} + c''_{p,p+1} (\Delta'_{p,p+1})^2], \\ c'_{p,p+1} &\equiv \sum_{k=1}^{n_{p,p+1}} c_{p,p+1}^k h_1(\xi_{p,p+1}^k), \quad c''_{p,p+1} \equiv \sum_{k=1}^{n_{p,p+1}} c_{p,p+1}^k h_1^2(\xi_{p,p+1}^k), \end{aligned}$$

где $c_{p,p+1}^k$ — жесткость пластинки на растяжение. Диссипативная функция Рэлея имеет структуру, аналогичную структуре потенциальной энергии; при этом вместо деформаций ставятся их скорости. Отметим также, что для изгибных колебаний p -го пина вводится т. н. внутреннее демпфирование Φ_p^{bend} учитывающее его вращение вокруг оси:

$$\Phi_p^{bend} = \frac{1}{2} \int_0^1 b_p^{bend} (\mathbf{u}_p^{\perp \nabla})'' \cdot \underline{\hat{\mathbf{a}}} \cdot (\mathbf{u}_p^{\perp \nabla})'' l d\xi, \quad \mathbf{u}_p^{\perp \nabla} \equiv \dot{\mathbf{u}}_p^\perp - \omega_p \mathbf{k} \times \mathbf{u}_p^{\perp \nabla}$$

(здесь ω_p — скорость осевого вращения пина, b_p^{bend} — коэффициент демпфирования).

Симметричная модель цепи с учётом изгиба пинов в принципе позволяет найти силы натяжения в отдельных пластинках, но они ещё далеки от реальных: во-первых, плоскость симметрии в реальности отсутствует, поэтому реальная конфигурация цепи существенно иная; во-вторых, форма изогнутого пина во многом определяется положением точки контакта пин — шайба (внецентренное сжатие), поэтому нужна уточнённая модель контактного взаимодействия цепи с шайбой (модели контактного взаимодействия рассматриваются в разд. 1.5.3).

Более сложные модели цепи не предполагают наличия плоскости симметрии. Благодаря этому появляется возможность моделирования ряда эффектов, отсутствующих в моделях с плоскостью симметрии, в частности, сдвиг и закручивание цепи; перекося цепи при изменении передаточного числа восстанавливающий момент, возникающий при контакте пина с шайбами и препятствующий перекося цепи (рис. 5).

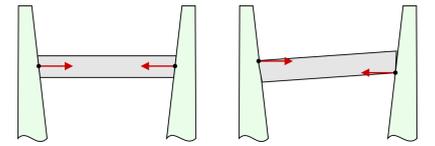


Рис. 5. Восстанавливающий момент, препятствующий перекося цепи.

Создано несколько несимметричных моделей цепи. В более простых из них пины считаются цельными, в более сложных — состоящими из двух независимых половинок, обкатывающихся друг по другу; в последнем случае также учитывается возможность движения блока пластинок, охватывающих пин, вдоль оси пина. Обобщённые координаты, определяющие конфигурацию цепи, представлены на рис. 6

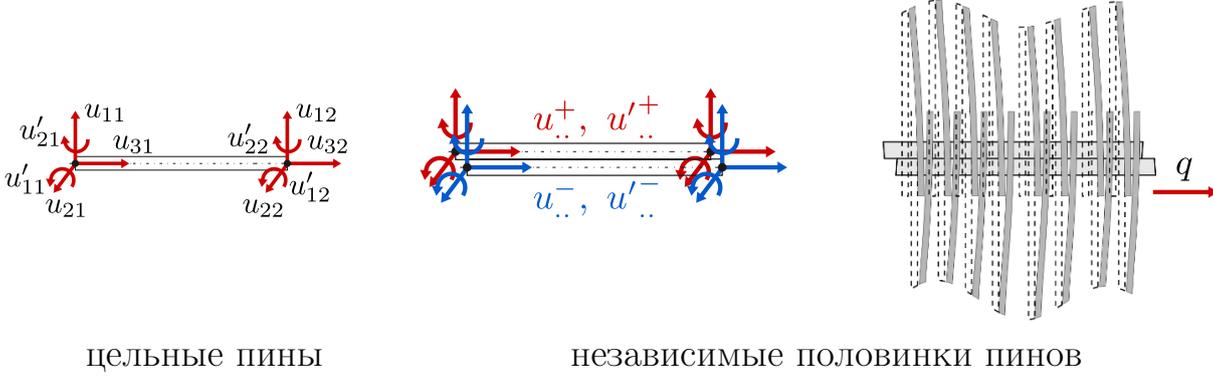


Рис. 6. Обобщённые координаты в несимметричной модели цепи с цельными пилами.

Форма изогнутой оси пина (или его половинки) аппроксимируется кубическими полиномами Эрмита.

В несимметричных моделях цепи необходим учёт её жёсткости на сдвиг и кручение, которая обеспечивается изгибом и закручиванием пластинок. Для этого вводятся в рассмотрение соответствующие деформации пластинок. Если при описании изгиба пластинки считать её жёстко связанной с пином, деформации, определяющие изгиб, таковы:

$$\zeta_{p,p+1,1}^k = \mathbf{t}_p^k \cdot \mathbf{e}_{p,p+1}^k, \quad \zeta_{p,p+1,2}^k = \mathbf{t}_{p+1}^k \cdot \mathbf{e}_{p,p+1}^k$$

(вектор \mathbf{t}_p^k — орт касательной к оси p -го пина в месте крепления k -й пластинки; единичный вектор $\mathbf{e}_{p,p+1}^k$ — нормированная разность положений концов оси пластинки). Кручение определяется деформацией

$$\varphi_{p,p+1}^k = (\mathbf{t}_{p+1}^k - \mathbf{t}_p^k) \times \mathbf{e}_{p,p+1}^k \cdot \mathbf{k}$$

Потенциальная энергия изгиба и кручения пластинки:

$$\begin{aligned} \Pi_{p,p+1}^{k,bend+tors} &= \frac{1}{2} \left[c_{p,p+1,1}^{k,bend} \left((\zeta_{p,p+1,1}^k)^2 + (\zeta_{p,p+1,2}^k)^2 \right) + 2c_{p,p+1,2}^{k,bend} \zeta_{p,p+1,1}^k \zeta_{p,p+1,2}^k \right] + \\ &+ \frac{1}{2} c_{p,p+1}^{k,tors} \left(\varphi_{p,p+1}^k \right)^2 \end{aligned}$$

(коэффициенты $c_{p,p+1,1}^{k,bend}$, $c_{p,p+1,2}^{k,bend}$ — изгибные жёсткости, $c_{p,p+1}^{k,tors}$ — крутильная).

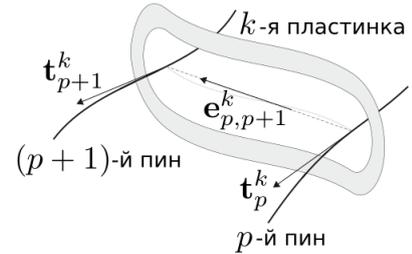


Рис. 7. К определению деформаций изгиба и закручивания пластинки цепи.

Рассмотрена также модель, уточняющая жёсткость цепи на сдвиг. В ней учтено, что пластинки не связаны с пинами жёстко, поэтому изгибающий момент в пластинке ограничен величиной $Th/2$, где T — её натяжение, h — толщина. Изгибные деформации находятся из условий равновесия пластинки (она считается безынерционной).

В разд. 1.5.2 описаны модели валов, шайб и упругих элементов (опор) между валами и корпусом, между шайбой и валом. При описании растяжения, изгиба и кручения валов используются одномерные конечные элементы, узловые переменные — перемещения и повороты оси вала. Шайбы считаются твёрдыми телами; поворот шайбы представлен в виде композиции малого поворота с вектором, перпендикулярным оси вала, и конечного поворота вокруг оси. Модель опоры допускает нелинейность упругой характеристики.

В разд. 1.5.3 рассмотрены модели контактного взаимодействия пина с шайбой. Во всех случаях считалось, что контактное взаимодействие локализовано в точке на торцевой поверхности пина. В простейших моделях эта точка находится на оси пина; в более сложных её положение определяется взаимным расположением двумерных контактных поверхностей, аппроксимированных параболоидами. Одна из моделей, в рамках которой точка на конце оси пина находится на поверхности шайбы, уже вкратце изложена выше; по ряду причин были созданы более совершенные модели упругого контакта, основанные на контактной теории Герца. В частности, они позволяют отказаться от неудерживающих связей. В этих моделях нормальная сила N вычисляется по формуле Герца: $N = c\Delta^{3/2}$, где c — контактная жёсткость (она зависит от упругих модулей материалов, геометрии и взаимного расположения поверхности, однако в нашем случае может быть принята постоянной), Δ — контактная деформация. Она может быть определена как глубина взаимопроникновения контактных поверхностей пина и шайбы, остающихся при этом недеформируемыми в рамках предлагаемых моделей. Скорость проскальзывания, от которой зависит касательная сила трения \mathbf{R} , — проекция относительной на касательную плоскость:

$$\mathbf{R} = -f(v_r)N\boldsymbol{\tau}_\perp, \quad v_r = |\mathbf{v}_\perp^r|, \quad \boldsymbol{\tau}_\perp = \mathbf{v}_\perp^r/v_r, \quad \mathbf{v}_\perp^r = (\underline{\mathbf{E}} - \mathbf{n}\mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v}^{pin} - \mathbf{v}^{pul}).$$

(\mathbf{v}^{pin} и \mathbf{v}^{pul} — скорости соответственно пина и шайбы в точке контакта, \mathbf{n} — орт нормали к поверхности шайбы в точке контакта). В качестве закона трения принимается «регуляризованный», с коэффициентом трения вида $f = f_0 \max\{v_r/v_0\}$.

Вопрос о расположении точки контакта и величине контактной деформации решался для разных моделей по-разному. Считая, что контактная поверхность пина отсутствует, можно получить формулу $\Delta = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{R}^{surf} - \mathbf{R}^{pin})$, причём радиус-вектор \mathbf{R}^{surf} допустимо считать проекцией положения конца оси пина \mathbf{R}^{pin} на поверхность шайбы вдоль орта \mathbf{k} , параллельного осям валов. За точку контакта можно принять \mathbf{R}^{pin} . Основной недостаток этой модели в том, что она некорректно описывает внецентренное сжатие пина, и, следовательно не позволяет получить правильные силы натяжения пластинок цепи.

Для вычисления уточнённого положения точки контакта необходимо учесть геометрию обеих контактных поверхностей, Γ^{pin} (пина) и Γ^{pul} (шайбы). Принимая их квадратичные аппроксимации в окрестности конца оси пина

$$\begin{aligned} z^{pul} &= a + \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \hat{\mathbf{x}} + O(|\hat{\mathbf{x}}|^3), \quad \mathbf{a} = a_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}} = a_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta \\ z^{pin} &= b + \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \hat{\mathbf{x}} + O(|\hat{\mathbf{x}}|^3), \quad \mathbf{b} = b_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}} = b_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta \\ \hat{\mathbf{x}} &\equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}_0^{pin}, \quad \mathbf{x}_0^{pin} \equiv (\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \mathbf{k}\mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}^{pin} \end{aligned}$$

(рис. 8) и определяя контактную деформацию как максимальную глубину их взаимопроникновения

$$\Delta = \min_{\mathbf{R}^{pin} \in \Gamma^{pin}, \mathbf{R}^{pul} \in \Gamma^{pul}, \mathbf{n}^{pin} = -\mathbf{n}^{pul}} |\mathbf{R}^{pin} - \mathbf{R}^{pul}|$$

(здесь \mathbf{n}^{pin} и \mathbf{n}^{pul} — орты нормалей к поверхностям пина и шайбы соответственно), получаем задачу для определения точки контакта в виде следующей системы нелинейных алгебраических уравнений относительно $\hat{\mathbf{x}}_*^{pin}$, $\hat{\mathbf{x}}_*^{pul}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_*^{pin} &= \nabla_{\perp} z^{pin} = \nabla_{\perp} z^{pul} = \mathbf{b} + \underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_*^{pul}, \\ \hat{\mathbf{x}}_*^{pin} - \hat{\mathbf{x}}_*^{pul} &= -v_3 \nabla_{\perp} z^{pin} = -v_3 \nabla_{\perp} z^{pul}, \\ v_3 &\equiv z^{pin}(\hat{\mathbf{x}}_*^{pin}) - z^{pul}(\hat{\mathbf{x}}_*^{pul}). \end{aligned}$$

Её точное аналитическое решение затруднительно, однако благодаря малому наклону нормали к орту \mathbf{k} легко найти удовлетворительное приближённое решение:

$$\hat{\mathbf{x}}_*^{pin} = \hat{\mathbf{x}}_*^{pul} = \hat{\mathbf{x}}_*, \quad \nabla_{\perp} z^{pin} = \nabla_{\perp} z^{pul} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{x}}_* = (\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \underline{\underline{\mathbf{B}}})^{-1} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

В разд. 1.6 предложены две системы стабилизации угловых скоростей бесступенчатой трансмиссии, обеспечивающие возможность расчёта стационарных и переходных режимов. Подчеркнём, что их назначение именно в этом; реальные системы управления бесступенчатой трансмиссии — другие, они в работе не рассматриваются. Первая система обеспечивает близость передаточного числа к наперёд заданному (допускается зависимость последнего от времени, но не слишком быстрая). Наблюдаемый параметр — передаточное число, вычисленное по усреднённым при помощи апериодического звена угловым скоростям валов, управляющее воздействие — осевая сжимающая сила на шайбах ведущего вала. Вторая система обеспечивает близость скорости вращения ведомого вала к наперёд заданной (также допускается зависимость от времени). Наблюдаемый параметр — скорость вращения ведомого вала (также усреднённая), управление — коэффициент момента сопротивления, приложенного на ведомом валу

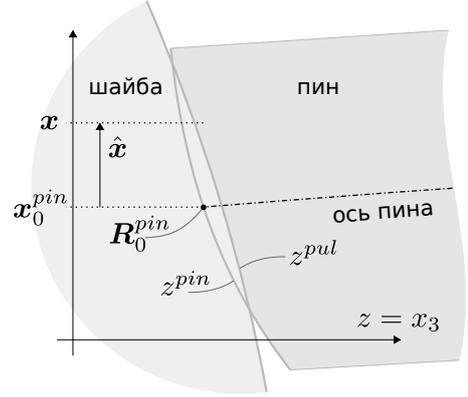


Рис. 8. Контактные поверхности пина и шайбы.

и линейно зависящего от угловой скорости. Обе системы имеют астатические подсистемы и поэтому обладают внутренним состоянием, изменяющимся в силу ОДУ, которые вместе с апериодическими звеньями для угловых скоростей добавляются к системе уравнений динамики. Коэффициенты обратных связей и временные константы в апериодических звеньях подобраны таким образом, чтобы обеспечить устойчивость систем стабилизации в представляющих практический интерес расчётах.

В разд. 1.7 представлены примеры результатов численного моделирования бесступенчатой трансмиссии. На примере стационарных и переходных режимов произведён сравнительный анализ различных моделей и продемонстрированы преимущества более сложных моделей над более простыми. Результаты проиллюстрированы многочисленными графиками — параметров режимов, КПД, сил в пинах и пластинках цепи, сил трения в контакте пин — шайба, радиусов контакта, параметров перекоса цепи и др. Для переходных режимов представлены спектрограммы радиальных сил в опорах, определяющие акустический шум при работе трансмиссии. Показано влияние рандомизации цепи (то есть неоднородности распределения длин звеньев по цепи) на спектры. Идентифицированы формы колебаний валов и цепи, соответствующие различным частотам колебаний.

В разд. 1.8 представлен сравнительный анализ данных, полученных в натурных и численных экспериментах. В одной серии экспериментов рассматривалась зависимость КПД трансмиссии от параметров режима; во второй серии сравнивались спектрограммы радиальных сил в опорах. Несмотря на отсутствие полного соответствия между данными, полученными в натурных и численных экспериментах, по результатам анализа можно сделать вывод о том, что они удовлетворительно согласуются.

Глава 2 посвящена выбору метода численного решения начальной задачи для системы ОДУ динамики бесступенчатой трансмиссии. Разд. 2.1 носит постановочный характер. В связи с моделированием контактных взаимодействий в рассматриваемую систему уравнений входит *дискретное состояние* — вектор переменных $\phi = [\phi_1, \dots, \phi_m]^T$, которые изменяются лишь при наступлении соответствующих им *событий*:

$$\dot{x} = F(t, x, \phi), \quad x|_{t=t_0} = x_0, \quad \phi|_{t=t_0} = \phi_0 \quad (4)$$

События в нашем случае связаны с началом или окончанием контакта; компоненты вектора ϕ — логические значения, определяющие состояние каждой контактной пары. Информацию о событиях численный метод получает в виде *индикаторов событий* — m скалярных функций $e_k(t, x)$. При наступлении события соответствующий индикатор обращается в нуль. Кроме того, система должна быть

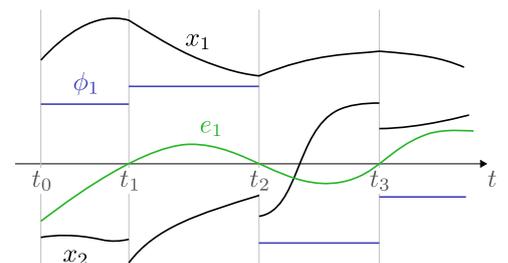


Рис. 9. Эволюция в системе с дискретным состоянием.

дополнена конечным автоматом, определяющим правила изменения дискретного состояния при наступлении события. В системах с ударными взаимодействиями при наступлении событий могут изменяться и компоненты вектора x . Логику системы с дискретным состоянием иллюстрирует рис. 9.

В данной главе рассмотрены различные одношаговые методы численного интегрирования систем ОДУ. Все они были дополнены процедурой, отвечающей за нахождение моментов времени t_* , соответствующих событиям, интерполяцию вектора x в эти моменты времени и вызов процедуры изменения состояния при наступлении события. При этом оказалось достаточно линейной интерполяции индикаторов на каждом шаге интегрирования, что позволяет несколько сократить время расчёта по сравнению с более традиционным подходом, когда для решения уравнений $e_k = 0$ используется метод половинного деления и/или метод Ньютона. Указанная процедура состоит в следующем. Пусть в начале очередного шага интегрирования $x = x_n, t = t_n$. Сначала производится шаг интегрирования без учёта событий, в конце шага $x = x_{n+1}, t = t_{n+1} = t_n + h$. Если обнаруживается, что $e_k(t_n)$ и $e_k(t_{n+1})$ имеют разные знаки, вычисляется $t_{*,k} = t_n + h/(1 - e_k(t_{n+1})/e_k(t_n))$. Наименьшее из них принимается в качестве t_* , затем производится линейная интерполяция $x(t_*) = x_n(1 - \tau_*) + x_{n+1}\tau_*$, где $\tau_* \equiv (t_* - t_n)/h$. Далее происходит изменение состояния, и интегрирование продолжается с момента времени t_* . Линейной интерполяции достаточно при практически интересующих нас значениях шага h .

В разд. 2.2 описана математическая модель и режим движения трансмиссии, дающие конкретную систему ОДУ, к которой далее применяются исследуемые численные методы.

В разд. 2.3 произведён анализ собственных чисел матрицы Якоби правой части системы ОДУ, $J = \partial F/\partial x$. Установлено, что наибольшие по абсолютной величине собственные числа — вещественные отрицательные и достигают -10^8 с^{-1} ; они связаны с трением при контактном взаимодействии. При этом наиболее высокочастотным колебаниям соответствуют близкие к чисто мнимым собственные числа с мнимыми частями порядка 10^6 с^{-1} . С учётом того, что временной шаг H , определяющий требуемую подробность численного решения, имеет значения 10^{-5} – 10^{-3} с, можно классифицировать систему ОДУ как умеренно жёсткую.

В разд. 2.4 представлена методика тестирования численных методов в задаче динамики трансмиссии и оценки качества численного решения. При этом основное внимание уделяется зависимостям локальной ошибки метода на шаге интегрирования и глобальной ошибки на заданном временном интервале от величины шага интегрирования. Далее рассмотрены классические явные методы Рунге-Кутты: явный метод Эйлера (для сравнения с другими методами); классический метод 4-го порядка точности (RK4); вложенные схемы с автоматическим управлением размером шага DOPRI45, DOPRI56, DOPRI78; метод Грэгга – Булирша – Штера (ГБШ) при различных порядках экстраполяции,

со сглаживанием и без; ричардсоновская экстраполяция различных порядков с явным методом Эйлера в качестве опорного. Отметим, что во всех методах управление размером шага было отключено, а порядок экстраполяции был фиксирован. Ни один из этих методов не дал значительный выигрыш в быстродействии по сравнению с применявшимся ранее методом RK4. Этого и следовало ожидать, исходя из вида областей устойчивости классических явных методов и специфики задачи.

В разд. 2.5 рассмотрены линейно- неявные методы типа Розенброка — т. н. W-методы. Схема метода W1 первого порядка точности имеет вид

$$x_1 = x_0 + hk_1, \quad Wk_1 = F(t_0, x_0), \quad W \equiv E - hdA.$$

Здесь x_0 и x_1 — состояние в начале и в конце шага соответственно, h — длина шага, A — матрица, аппроксимирующая $J(t_0)$ (формально — любая матрица подходящего размера), $d \in (0, 1]$ — параметр. Схема была использована в качестве опорной при экстраполяции по Ричардсону. Рассматривался также метод второго порядка SW2-4, предложенный Штайхаугом и Вольфбрандтом. Его схема (без контроля ошибки для управления длиной шага) имеет вид

$$x_1 = x_0 + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2), \quad Wk_1 = F(t_0, x_0), \quad W \equiv E - hdA, \\ Wk_2 = F\left(t_0 + \frac{2}{3}h, x_0 + \frac{2}{3}hk_1\right) - \frac{4}{3}hdAk_1.$$

Вопреки ожиданиям, рассмотренные W-методы (схемы W1, SW2-4 и экстраполяция W1 по Ричардсону) оказались неприменимыми к тестовой задаче динамики трансмиссии. В частности, локальная ошибка на шаге для них столь велика (даже при шестикратной экстраполяции схемы W1), что приемлемое численное решение получается лишь при шагах, значительно меньших, чем требует метод RK4 — около 10^{-8} с.

В разд. 2.6 рассмотрен метод трапеций. Таблица Бутчера этого A-устойчивого неявного метода второго порядка точности представлена на рис. 10. Сложность его применения к системам нелинейных ОДУ состоит в том, что на каждом шаге интегрирования приходится численно решать систему нелинейных алгебраических уравнений вида

$$f(x) = 0. \tag{5}$$

0	1
1	1/2 1/2
	1/2 1/2

Рис. 10. Таблица Бутчера для метода трапеций.

Для этого использовались различные модификации метода Ньютона. Практически максимальный размер шага интегрирования определяется сходимостью ньютоновских итераций, а быстродействие метода — средней длительностью одной итерации и их общим количеством. Численные методы ньютоновского типа определяют итерационный процесс

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \quad B_k d_k = -f(x_k), \tag{6}$$

где x_0 — начальное приближение, x_k — приближение, полученное на k -той итерации, B_k — некоторая аппроксимация матрицы Якоби $J \equiv Df/Dx$, d_k — направление поиска, $\alpha_k \in (0, 1]$ — скалярная величина, значение которой определяется при помощи алгоритма поиска вдоль направления d_k .

Количество неизвестных в (5) — около 1800. При таком размере системы существенно (в том числе, при решении системы линейных уравнений относительно d_k), что матрица J — редкозаполненная. Явные формулы для J недоступны, а вычисление при помощи конечных разностей — трудоёмкая процедура даже при учёте редкозаполненности. С другой стороны, вычисление J легко распараллелить.

Многочисленные модификации метода Ньютона связаны с выбором матриц B_k , позволяющим избежать частого вычисления J и в то же время обеспечить достаточно быструю сходимость, а также скаляров α_k . Среди них в работе рассмотрен собственно метод Ньютона (далее обозначается **exact**); модификация, основанная на формуле Бройдена для однорангового обновления B_k , но с отбрасыванием элементов, равных нулю в J (далее **fake-broyden**); некоторые другие, в том числе с матрицами B_k , сохраняемыми постоянными как можно дольше (при превышении порогового значения числа итераций принимается $B_k = J(x_k)$ (далее **const**); Кроме того, в модификациях **fake-broyden** и **const** B_0 инициализируется значением с предыдущего временного шага метода трапеций. Отметим, что в модификации **const** время экономится не только за счёт меньшего количества вычислений $f(x)$, но и благодаря возможности осуществлять LU -факторизацию B_k лишь при её изменении и решать линейную систему на итерации значительно быстрее.

По результатам применения метода трапеций можно заключить, что он позволяет использовать значительно (в 100 раз) бóльшие значения шага интегрирования, чем RK4; однако ни одна из модификаций метода Ньютона не позволила получить большой выигрыш в быстродействии: **exact** работает почти в 8 раз медленнее RK4, среднее число итераций на шаге 2,9; **fake-broyden** — в 1,2 раза медленнее RK4, 13 итераций на шаге; **const** — в 1,5 быстрее RK4, 24 итерации на шаге. Вместе с тем, модификация **exact** может быть значительно (до 100 раз) ускорена при условии параллельного вычисления J и параллельного решения линейного уравнения для d_k .

В разд. 2.7 исследован стабилизированный явный метод DUMKAZ. В рамках этого метода реализован набор схем с разным числом стадий; с увеличением номера схемы увеличивается степень её многочлена устойчивости, а область устойчивости распространяется всё дальше в область отрицательных вещественных значений на комплексной плоскости. В методе реализовано управление размером шага и степенью многочлена устойчивости, но при тестировании метода оно было отключено. Исследование показало, что несколько схем метода DUMKAZ позволяют производить расчёты динамики трансмиссии при больших шагах (до $4 \cdot 10^{-6}$ с против $5 \cdot 10^{-8}$ для RK4), существенно (более, чем в 5 раз) выигрывая в быстродействии (подчеркнём, что здесь не идёт речь о распараллеливании).

В главе 3 описан программный комплекс для расчёта динамики гетерогенных систем, в частности, бесступенчатой трансмиссии. Он состоит примерно из 80 отдельных модулей (динамических библиотек) и двух исполняемых программ, предоставляющих графический пользовательский интерфейс и интерфейс командной строки. Упрощённая схема комплекса представлена на рис. 11. Стрелки, изображённые сплошными линиями, показывают откуда и куда отправляются управляющие команды, пунктирными линиями — потоки данных. Это деление до некоторой степени условно; схема не полна в силу упрощённости. Например, часть с общей инфраструктурой и вспомогательными библиотеками не соединена с другими частями — следовало бы соединить её со всеми остальными частями стрелками обоих типов в обе стороны, но это загромождило бы схему.

Целевые платформы для сборки комплекса — ОС MS Windows и Linux. Исходный код написан на языке C++. Основные зависимости — сторонние библиотеки V8 (реализует JavaScript, используемый в качестве языка сценариев), Qt (графический пользовательский интерфейс); FFmpeg (синтез видео); также для визуализации используется OpenGL 3.0 (через интерфейсы Qt). Имеется возможность сборки приложения без зависимостей от сторонних библиотек, предназначенного для проведения расчётов в пакетном режиме.

Фундамент комплекса составляют компоненты общей инфраструктуры (модули, предоставляющие *модель составного объекта*, *свойства* и *методы* объектов, механизм *сериализации* свойств, механизм *синхронных сообщений* и другую функциональность). Общая инфраструктура обеспечивает возможность создания больших программных комплексов и решает ряд задач общего характера.

В состав комплекса также входят решатели — все численные методы, используемые при решении задачи Коши; динамические модели бесступенчатой трансмиссии и специфичные для них элементы графического пользовательского интерфейса и визуализации; модуль, обеспечивающий сборку системы ОДУ, управление расчётами, обработку численного решения (графики зависимостей всех доступных величин от времени или другого параметра; БПФ,



Рис. 11. Состав программного комплекса (упрощённая схема).

скользящее среднее, скользящий минимум и максимум); язык сценариев; модуль двумерной визуализации и компоновки сцен; модуль трёхмерной визуализации; модули, реализующие графический пользовательский интерфейс; модули поддержки многовариантных расчётов и автоматизированного создания отчётов по ним.

Разработанный программный комплекс имеет обширную документацию пользователя. Её создание и поддержка осуществляется при помощи интроспективного генератора документации, обеспечивающего создание дерева документации на основе текущей конфигурации комплекса; наполнение отдельных частей страниц документации содержимым на основе интроспективного анализа объектов; добавление документации, созданной разработчиком вручную.

Не останавливаясь на деталях архитектуры программного комплекса, отметим наиболее важную её часть — модель составного объекта [3]. *Составной объект* содержит один или более *компонентов*, образующих дерево. Его корень назовём *первичным объектом* (primary object), а все остальные компоненты — *отрывными объектами* (tear-offs).

Компонент составного объекта является экземпляром класса C++; этот класс должен открыто наследовать один из двух базовых классов, определяющих его тип (первичный или отрывной); в классе должен быть объявлен числовой *идентификатор компонента*, уникальный для каждого компонента в системе; вдобавок каждый компонент, как правило, реализует *интерфейсы*.

Интерфейсом считается класс C++, содержащий объявления чисто виртуальных или встроенных (inline) методов; также в интерфейсах допускаются экземплярные (не статические) поля. Обычные (не встроенные) методы и статические поля не допускаются в интерфейсах, так как мы отказываемся от экспорта символов из модулей в пользу автоматической регистрации компонентов при загрузке модулей. Дизайн составного объекта также требует от интерфейса виртуально открыто унаследовать некоторый базовый класс (общий для всех интерфейсов) и объявить числовой *идентификатор интерфейса*, уникальный в пределах системы.

Предусмотрены интерфейсы, относящиеся ко всему составному объекту (объектные интерфейсы, или просто интерфейсы), и интерфейсы, относящиеся к компоненту (компонентные интерфейсы). Модуль объектной модели предоставляет функциональность для преобразования любого интерфейсного указателя составного объекта к указателю на требуемый интерфейс. Имеется воз-

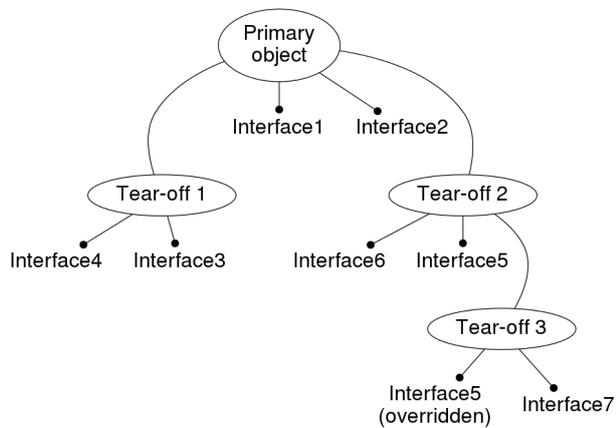


Рис. 12. Составной объект и его интерфейсы.

возможность *переопределить* реализацию интерфейса в составном объекте — для этого следует сделать отрывной объект с переопределённой реализацией дочерним по отношению к компоненту, интерфейс которого требуется переопределить (эта возможность используется исключительно редко). На рис. 12 представлен пример составного объекта; отметим, что интерфейс `Interface5` переопределён компонентом `Tear-off 3`.

Считается, что компонент *поддерживает* интерфейс, если его класс открыто наследует класс интерфейса. Модуль объектной модели предоставляет функциональность преобразования интерфейсных указателей в пределах компонента.

Существенно, что компоненты составного объекта могут быть экземплярами классов, реализованных в разных модулях.

Модель составного объекта предоставляет широкие возможности для повторного использования кода. Для этого код инкапсулируется в отрывных компонентах, которые далее добавляются в конфигурацию составных объектов, использующих его.

Создание экземпляров составных объектов осуществляется по известному идентификатору первичного объекта единой для всей системы *фабрикой*. Предварительно в фабрику загружается конфигурационный файл с информацией о расположении компонентов в модулях и конфигурации составных объектов. Создание конфигурационного файла всего комплекса автоматизировано при помощи специализированной оснастки интерфейса командной строки.

Модель составного объекта упрощает связывание библиотек, реализующих ту или иную функциональность: каждый функциональный модуль связывается лишь с модулем `OM`, реализующим модель составного объекта, чтобы получить доступ к функциональности из любых других модулей (рис. 13).



Рис. 13. Зависимости между модулями в случае подхода с экспортом символов (слева) и в случае автоматической регистрации при загрузке (справа).

Все представленные в работе численные результаты по модулированию бесступенчатой трансмиссии и большая часть графиков и рисунков в разд. 1.7 получены непосредственно при помощи разработанного программного комплекса.

В главе 4 дан обзор разработанной автором программной системы (фрейм-

ворка), предназначенной для экспериментов с методами численного решения задачи Коши (4) для систем ОДУ в нормальной форме при наличии дискретного состояния и числом переменных состояния n порядка нескольких тысяч.

В отличие от множества существующих библиотек программного кода (такие как CVODE, odeint, PETSc и др.), реализующих методы численного решения задачи Коши и предназначенных в первую очередь для получения численных решений, назначение предлагаемого фреймворка `ode_num_int`¹ иное: ставится задача разработки доступных пользователю простых компонентов, из которых можно собирать различные решатели и исследовать поведение последних.

В настоящий момент компоненты `ode_num_int` реализуют одношаговые методы численного интегрирования — все, рассмотренные в гл. 2, за исключением DUMKAZ. Проблематика решения систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений охвачена отдельными компонентами, а не реализована прямо в неявных методах, чтобы предоставить пользователю максимальную гибкость в использовании компонентов за счёт агрегирования.

Реализация явных методов решения ОДУ, как правило, проста; они не требуют дополнительной настройки для работы. С другой стороны, реализация неявных методов может потребовать от разработчика значительных усилий, особенно если система ОДУ нелинейна и требуется получить эффективный с точки зрения быстродействия решатель. Это относится как к полностью неявным методам, таким как ОДНРК², так и к линейно неявным методам типа Розенброка, в частности, к W -методам. Оба класса методов требуют вычисления матрицы Якоби $J = DF/Dx$ правой части системы ОДУ или аппроксимации A к ней. Для эффективной работы применяемого к решению имеющейся задачи Коши неявного метода необходим учёт ряда факторов, в том числе следующих.

- Качество численного решения, полученного линейно неявным W -методом, может сильно зависеть от того, насколько A близка к J . Поэтому для разработчика численного метода естественно экспериментировать с различными стратегиями обновления матрицы A . Именно благодаря сохранению одного и того же значения A на протяжении многих шагов интегрирования W -метод становится более быстродействующим по сравнению с другими неявными методами. Всякий раз при изменении матрицы A или шага интегрирования h требуется очередная факторизация матрицы $W = E - hdA$, что требует заметных вычислительных затрат.
- Матрица Якоби J может вычисляться по-разному: для одних систем легко найти её в виде аналитической зависимости $J(t, x)$; для более сложных систем аналитическое вычисление может оказаться возможным с использованием средств автоматического дифференцирования, таких как

¹ Репозиторий с исходным кодом доступен по адресу https://github.com/deadmorous/ode_num_int

² Однократно диагонально-неявный метод Рунге – Кутты

ADOL-C; для сложных систем часто приходится довольствоваться численной процедурой, вычисляющей матрицу, близкую к J , с использованием конечных разностей.

- Матрица Якоби может оказаться редкозаполненной; учёт этого при её вычислении и решении линейных систем становится ключевым фактором, влияющим на быстродействие решателя в целом, если только n не слишком мал. Кроме того, редкозаполненность матрицы Якоби накладывает ограничения на выбор алгоритмов обновления аппроксимирующей её матрицы A .
- Сходимость и быстродействие квази-ньютоновских итераций при решении системы нелинейных алгебраических уравнений на шаге интегрирования может зависеть от нескольких факторов. Количество итераций обычно возрастает, если A не обновляется достаточно часто; с другой стороны, при $A = J$ на каждой итерации требуется большой объём вычислений; наконец, сходимость может отсутствовать без применения некоторой регуляризации. Ещё один важный фактор, влияющий на число итераций — начальное приближение.

При разработке фреймворка `ode_num_int` мы стремились дать его пользователю — разработчику численного метода решения своей конкретной задачи — максимальную свободу комбинирования различных компонентов, так как выбор эффективного численного метода в большой степени является исследовательской задачей. Такая свобода появляется, когда каждый компонент отвечает лишь за выполнение одной простой задачи (*single responsibility principle*).

Фреймворк `ode_num_int` написан на C++11 и состоит из множества шаблонов классов. Кроме того, в нём есть несколько единиц трансляции, обеспечивающих динамическое создание экземпляров и реализующих функции измерения времени. Вся основная функциональность реализована в заголовочных файлах.

Далее в главе описаны инфраструктурные и функциональные компоненты фреймворка. В числе первых важен шаблон `Observers` дающий простую возможность получить необходимую информацию о работе тех или иных компонентов (подсчитать количество вызовов, измерить их время, вывести на экран невязку на текущей итерации и др.). Отметим также класс `TickCounter`, реализующий высокоточный таймер.

К функциональным компонентам относятся классы-шаблоны, реализующие основные операции над векторами и матрицами (в том числе, редкозаполненными); шаблон класса `LUFactorizer` для решения систем линейных алгебраических уравнений с редкозаполненной матрицей с использованием LU-факторизации.

Далее, набор минимальных компонентов для решения систем нелинейных алгебраических уравнений представлен интерфейсами `VectorMapping` (векторное отображение), `ErrorEstimator` (оценщик ошибки), `JacobianProvider` (по-

ставщик матрицы Якоби), `JacobianTrimmer` (интерфейс для дальнейшего редуцирования редкозаполненной матрицы Якоби путём отбрасывания выбранных элементов); `NewtonDescentDirection` (интерфейс для вычисления направления поиска d_k на итерации ньютоновского типа (6)); `NewtonLinearSearch` (для вычисления α_k на итерации); `NewtonIterationPerformer` (исполнитель итераций); `NewtonSolverInterface` (решатель ньютоновского типа); ряд других. Для каждого интерфейса, за исключением `VectorMapping`, имеется одна или несколько реализаций. В частности, для `NewtonDescentDirection` есть реализации `exact`, `fake-broyden` и `const`, описанные в гл. 2, а также ряд других.

Для конструирования решателей систем ОДУ предусмотрены интерфейсы `OdeRhs` (аналогичен `VectorMapping`, но с рядом отличий и дополнений); и `OdeSolver`. Для классических явных методов Рунге – Кутты предусмотрены реализации `OdeSolverExplicitRK` и `OdeSolverExplicitEmbeddedRK` (для вложенных схем), принимающие таблицу Бутчера в качестве параметра конструктора. Кроме того, имеются реализации `OdeSolverGragg` (метод Грэгга) и `OdeSolverExtrapolator` (экстраполяция по Ричардсону с использованием алгоритма Эйткена – Невилла). Для управления длиной шага предусмотрен интерфейс `OdeStepSizeController` и его реализация. Для поддержки систем с дискретным состоянием имеется интерфейс `OdeEventController` и его упрощённая реализация, основанная на линейной интерполяции индикаторов событий.

Линейно неявные W-методы типа Розенброка представлены реализациями `OdeSolverRosenbrock_SW2_4` (метод SW24) и `OdeSolverRosenbrock_W1` (метод W1) интерфейса `OdeSolver`. Однопараметрический метод первого порядка, частными случаями которого являются неявный метод Эйлера и метод трапеций, реализован в классе `OdeSolverImplicitEuler`.

Фреймворк `ode_num_int` также определяет и реализует ряд других интерфейсов служебного характера (например, для сбора и вывода статистики или текущей информации о решении задачи).

Все численные решения гл. 2, за исключением расчётов методом DUMKAZ, получены с использованием созданного фреймворка.

В Заключение перечислены основные результаты, полученные в диссертационной работе.

1. Разработаны физические и математические модели вариатора различной сложности и степени детализации (с числом степеней свободы от одной до тысяч), позволяющие судить об устойчивости положения равновесия, предсказывать глобальную динамику, детали напряжённно-деформированного состояния элементов цепи, КПД, акустический шум. Малоразмерные модели вариатора для предсказательного моделирования глобальной динамики не требуют больших вычислительных затрат и могут быть использованы для расчётов в реальном времени. Наиболее детализированная модель цепи вариатора учитывает её дискретную структуру; изгиб соединительных осей; изгиб и кручение пластинок цепи; ограниченность

изгибающего момента в пластинках; наличие двух обкатывающихся друг по другу половинок в каждой соединительной оси.

2. На основе контактной теории Герца разработана модель локального контактного взаимодействия тел с двояковыпуклыми поверхностями при наличии трения, близкого к кулонову, отличающаяся уточнённым описанием кинематики контакта.
3. Создана архитектура (фреймворк) программных компонентов, облегчающих конструирование явных и неявных одношаговых методов численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений и исследования их поведения с целью оценки быстродействия и дальнейшей оптимизации.
4. С использованием созданного фреймворка исследована возможность применения различных методов численного интегрирования для решения задач динамики вариатора. Определены классы методов, использование которых представляется перспективным.
5. Создана инфраструктура программных компонентов, предназначенная для создания масштабируемых проблемно-ориентированных программных комплексов. Она состоит из множества модулей и облегчает решение как задач общего характера, так и более специфичных для предсказательного моделирования.
6. На базе созданной инфраструктуры компонентов создан программный комплекс, являющийся полноценным программным продуктом, в котором реализованы созданные модели элементов трансмиссии, методы численного интегрирования, а также все средства, необходимые для комфортной работы инженера по численному моделированию вариатора — подготовки исходных данных, в том числе для многовариантных расчётов, запуска расчётов, анализа численного решения в отдельно взятом расчёте, подготовки сводных отчётов по результатам многовариантных расчётов.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своим учителям, проф. Н. Н. Шаброву за всестороннюю поддержку на протяжении всего диссертационного исследования; проф. Ю. Г. Исполу за оказанную помощь при разработке математических моделей бесступенчатой трансмиссии и обсуждение использованных при этом идей; проф. П. А. Жилину за образование в области прямого тензорного исчисления, проф. В. В. Елисееву и проф. В. А. Пальмову — за образование в области механики деформируемого твёрдого тела; коллегам доц. А. К. Кузину за всестороннее обсуждение архитектуры компонентов, составляющих фундамент разработанного программного комплекса; сотрудникам компании LuK А. Фидлину, Л. Бурковски, Ю. Лукито, А. Тойберту — за

многолетнее плодотворное сотрудничество и предоставленные экспериментальные данные; А. Б. Богатырёву — за обсуждение стабилизированных явных методов решения ОДУ. Особую благодарность автор приносит своей жене, А. К. Канидьевой, за терпение и поддержку.

Основные публикации по теме диссертации

1. *Shabrov N., Ispolov Yu., Orlov S.* Simulations of continuously variable transmission dynamics // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 2014. — Т. 94, № 11. — С. 917—922.
2. *Orlov S., Shabrov N.* Vertex shader for visualizing a deformable strip // Scientific Visualization. — 2016. — Т. 8, вып. 2. — С. 1—14.
3. *Orlov S., Melnikova N.* Compound Object Model for Scalable System Development in C++ // Procedia Computer Science. — 2015. — Т. 66. — С. 651—660.
4. *Елусеев В. В., Орлов С. Г.* Асимптотическое расщепление в пространственной задаче линейной упругости для удлиненных тел со структурой // Прикладная математика и механика. — 1999. — Т. 63, вып. 1. — С. 93—101.
5. Generation of isosurface on a large mesh / А. Акыев [и др.] // Proceedings of the International Conference on Automation, Control, and Information Technology. — 2010. — С. 236—240.
6. Virtual prototyping modeling in the cave 3D environment / N. Shabrov [и др.] // Proceedings of 29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, ICAS 2014. — 2014.
7. CAVE 3D: Software Extensions for Scientific Visualization of Large-scale Models / N. Melnikova [и др.] // Procedia Computer Science. — 2015. — Т. 66. — С. 679—688.
8. High-performance simulations of continuously variable transmission dynamics / S. Orlov [и др.] // CEUR Workshop Proceedings. — 2015. — Т. 1482. — С. 41—48.
9. *Orlov S., Shabrov N.* Numequares — online simulation tool for education and academic research // Proceedings of 27th European Modeling and Simulation Symposium. — 2015. — С. 258—265.
10. Application of Numerical time Integration Schemes to Continuously Variable Transmission Dynamics Analysis / S. Orlov [и др.] // Procedia Computer Science. — 2016. — Т. 101. — С. 53—57.
11. *Orlov S., Kuzin A., Shabrov N.* Two approaches to speeding up dynamics simulation for a low dimension mechanical system // Communications in Computer and Information Science. — 2017. — Т. 793. — С. 95—107.

12. *Orlov S.* C++ playground for numerical integration method developers // Communications in Computer and Information Science. — 2017. — Т. 793. — С. 418—429.
13. *Орлов С. Г.* Малоразмерные динамические модели бесступенчатой трансмиссии // Доклады академии наук. — 2018. — Т. 479, вып. 4. — С. 368—372.
14. Исследование и комплексный анализ динамики автомобиля / Ю. М. Ветюков [и др.] // Материалы IX Всероссийской конференции по проблемам науки и высшей школы. — Санкт-Петербург, 2005.
15. Проблемы реализации приложений на вычислительных кластерах / Н. Н. Шабров [и др.] // Труды международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ 2007)». — Челябинск, 2007.
16. *Мельникова Н. Б., Орлов С. Г., Шабров Н. Н.* Разработка и развитие альтернативного программного обеспечения // Труды международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ 2008)». — Санкт-Петербург, 2008. — С. 172—177.
17. *Orlov S., Ispolov Yu.* Contact interactions in the problem of tooth chain transmission dynamics // Proceedings of the 6th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference, Saint Petersburg, Russia, 2008. — 2008.
18. *Шабров Н. Н., Орлов С. Г., Мельникова Н. Б.* Моделирование и параллельные вычисления в системе виртуальной реальности CAVE // Труды международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ 2009)». — Нижний Новгород, 2009. — С. 784—786.
19. Параллельные алгоритмы построения изоповерхностей на больших сетках / В. А. Киев [и др.] // Труды международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ 2010)». — Уфа, 2010. — С. 220—226.
20. *Orlov S., Shabrov N.* NumEquaRes — Web Application for Numerical Analysis of Equations // SOFTENG, International Conference on Advances and Trends in Software Engineering. — ThinkMind, 2015. — С. 41—47.
21. *Orlov S.* Application of numerical integration methods to continuously variable transmission dynamics models // SHS Web of Conf. — 2018. — Т. 44. — С. 00065. — DOI: [10.1051/shsconf/20184400065](https://doi.org/10.1051/shsconf/20184400065).
22. *Мельникова Н. Б., Орлов С. Г., Шабров Н. Н.* Проект новой масштабируемой системы численного моделирования в задачах механики. Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах // Материалы шестого Международного научно-практического семинара. Т. 2. — Санкт-Петербург, 2006. — С. 43—50.

23. *Шабров Н. Н., Орлов С. Г., Куриков Н. Н.* Развитие средств виртуальной реальности и технологий повышения эффективности программных кодов на новых вычислительных архитектурах // Научный сервис в сети Интернет: масштабируемость, параллельность, эффективность: Труды Всероссийской суперкомпьютерной конференции. — Новороссийск, 2009.
24. *Ispolov Yu., Orlov S.* Modeling contact interactions in CVT // 3rd International Conference on vibro-impact systems and systems with non-smooth interactions. — Leinsweiler, Germany, 2013.
25. *Shabrov N., Ispolov Yu., Orlov S.* Simulations of dynamics of CVT // 3rd International Conference on vibro-impact systems and systems with non-smooth interactions. — Leinsweiler, Germany, 2013.
26. *Елисеев В. В., Орлов С. Г.* О критических скоростях массивных упругих роторов // Теория механизмов и машин. — 2005. — Т. 3, вып. 5. — С. 40—43.
27. *Орлов С. Г., Кондрамашин Д. А.* Построение плоских и пространственных кривых с помощью интерполяционных натуральных параметрических кубических В-сплайнов и их использование для формирования каркасных моделей переменного поперечного сечения // Компьютерная графика и геометрическое моделирование в САПР: Сб. науч. тр. — 1997. — Вып. 11. — С. 131—139.
28. *Orlov S., Shabrov N.* Designing Data Processing Systems with NumEquaRes // International journal on advances in systems and measurements. — 2015. — Т. 8, вып. 3/4. — С. 288—307.
29. *Мамаев В. В., Орлов С. Г., Кузин А. К.* Расчёт абсолютных и относительных тепловых перемещений ротора и статора турбины для различных режимов её работы. — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012612403 от 06.03.2012.

