

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

На правах рукописи

УДК 519.6

*Перепёлкина Анастасия Юрьевна*

**Трехмерный кинетический код для  
моделирования замагниченной плазмы**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
кандидат физико-математических наук  
Левченко Вадим Дмитриевич

МОСКВА – 2015

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Кинетическая модель замагниченной плазмы</b> . . . . .	13
1.1. Математическое моделирование замагниченной плазмы в актуальных задачах плазменных технологий . . . . .	13
1.2. Обоснование выбора кинетической трехмерной самосогласованной модели без калибровок . . . . .	18
1.3. Уравнения и численные методы самосогласованной модели плазмы	21
1.4. Отражающие граничные условия . . . . .	33
1.5. Источник фокусированного гауссова импульса . . . . .	34
1.6. Многомасштабность в кинетической самосогласованной модели .	35
1.7. Тестирование порядка аппроксимации реализации кинетического подхода в CFHall . . . . .	36
<b>Глава 2. Алгоритмы и реализация</b> . . . . .	38
2.1. Алгоритм как разбиение графа зависимостей . . . . .	38
2.2. Выбор оптимального алгоритма для метода макрочастиц . . . . .	41
2.3. Свойства LRnLA алгоритмов . . . . .	43
2.4. ConeFold для метода частиц . . . . .	44
2.5. Адаптация алгоритма для параллельной реализации . . . . .	47
2.6. Реализация в программном комплексе CFHall . . . . .	50
2.7. Тестирование . . . . .	58
<b>Глава 3. Моделирование филаментационной неустойчивости</b> . .	66
3.1. Линейная теория филаментации в плазме . . . . .	66
3.2. Роль численного эксперимента в исследовании вейбелевской филаментации . . . . .	70

3.3. Филаментация в двухпучковой системе . . . . .	72
3.4. Взаимодействие релятивистского лазерного импульса со сверх- критическим плазменным слоем . . . . .	79
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>91</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>93</b>

## Введение

Диссертация посвящена разработке эффективного программного комплекса CFHall для моделирования замагниченной плазмы. В ней исследуются следующие вопросы: разработка и реализация локально-рекурсивных нелокально-асинхронных (LRnLA) алгоритмов [1] для решения самосогласованной системы уравнений Власова-Максвелла методом «частица-в-ячейке» для существенно многомасштабных задач кинетики плазмы; применение кода для решения актуальных задач физики плазмы на примере исследования мелкомасштабной неустойчивости во взаимодействии лазерного импульса со сверхкритической плазмой.

**Актуальность работы.** Кинетические коды выбирают для моделирования такой плазмы, в которой неравновесностью функции распределения нельзя пренебречь. Методы кинетического моделирования плазмы развиваются с 1980-х годов, но использование написанных ранее кодов в современных приложениях затруднительно, так как трехмерная полностью кинетическая реализация очень требовательна к вычислительным ресурсам [2, 3]. Появление новых параллельных вычислительных архитектур с развитой иерархией подсистемы памяти и развитие методов программирования приводят к возможности решения ранее неисследованных задач. В этих условиях нельзя не уделять внимания таким направлениям исследований, как выбор численного метода с учетом возможности эффективной реализации при сохранении точности результатов, разработка и реализация алгоритмов с учетом выбранной схемы и устройства компьютера.

Среди комплекса проблем, возникающих при реализации метода для новых вычислительных систем, выделяются следующие. В актуальных сейчас трех-



мерных многомасштабных задачах для хранения значений полей во всех сеточных узлах, а также импульсов и положений всех частиц, необходимо большое количество данных (задачи класса big data [4]). При проведении распределенных вычислений в моменты синхронизации время затрачивается на передачу большого количества данных между процессорами и на простой процессоров при ожидании завершения операций другими (проблема Weak/Strong scaling [5]). При проведении локальных вычислений загрузка и сохранение этих данных оказывает заметную нагрузку на пропускную способность памяти (Memory bound problem [6]).

Из-за этого, если код реализован без внимания к эффективному выбору схемы, алгоритмов и программных средств, повышение производительности (количества операций в секунду) вычислительной системы, что является основным направлением развития компьютеров, не приводит к надлежащему повышению темпа вычислений.

Например, численный эксперимент считается наиболее перспективным методом изучения причин транспорта электронов к аноду в холловских плазменных двигателях [7]. Вероятно, турбулентные процессы в плазме играют в этом явлении решающую роль. Оценить скорость переноса электронов важно как можно более точно, так как от этого зависят такие важные параметры, как расход топлива, эффективность ионизации рабочего тела и тяга двигателя. Для этой задачи используют специализированные кинетические коды в 2D3V геометрии [7–11] и с некоторым количеством приближений. Специализация кодов заключается в использовании разных моделей столкновений и ионизации частиц, описании пристеночных эффектов. Приближения включают изменение отношения масс электронов и ионов, калибровку постоянной проницаемости вакуума. Но, так как приближения сдвигают порог возникновения плазменных

неустойчивостей, такие коды не подходят для изучения явления аномального переноса.

В настоящее время в международном научном сообществе считается невозможным моделирование этого процесса в трехмерной постановке без упрощающих предположений [7, 11]. Это связано именно с широким диапазоном масштабов протекающих в плазме двигателя процессов [12]. Пространственная сетка должна быть достаточно подробной, чтобы разрешить самые небольшие характерные масштабы плазмы канала, и в то же время она должна охватывать область градиента магнитного поля. Необходимо разрешить высокочастотные процессы, а время моделирования должно быть достаточным, чтобы получить оценки выходных параметров. Это приводит к необходимости выполнения до  $10^7$  шагов по времени. Кроме того, что большое число шагов требует большого количества вычислений и времени, необходимого на эти вычисления, требуется обеспечить сохранение энергии после выполнения такого количества шагов. Это указывает на необходимость работы над увеличением порядка точности используемых численных схем.

Другая задача, которая была рассмотрена в процессе работы над программным кодом CFHall, — это исследование роли вейбелевской неустойчивости [13] при взаимодействии лазерного импульса со сверхкритическим плазменным слоем [14]. Вейбелевской (филаментационной) неустойчивостью [13] называют неустойчивость в плазме с анизотропным распределением частиц по скоростям. Она проявляется в экспоненциальном росте компонент магнитного поля, перпендикулярных выделенной оси анизотропии, сначала в виде структуры из тонких филаментов, толщина (поперечный размер) которых порядка длины скин-слоя [15]. В процессе развития этой структуры филаменты сливаются в более крупные, и в итоге могут образоваться крупномасштабные устойчивые магнитные

поля в плазме. Все больше внимания этому явлению уделяется в связи с исследованиями астрофизической плазмы [16–18] и в задачах ускорения заряженных частиц лазерным импульсом [14, 19, 20].

Во взаимодействии лазерного излучения со слоем плазмы создаются условия для протекания филаментационной неустойчивости. Кроме этого, проходит множество трехмерных нелинейных процессов, распределение частиц заметно отлично от максвелловского, так что дать описание более точного поведения системы только при помощи аналитических выкладок пока не считается возможным. Процесс филаментации проходит слишком быстро и на небольших пространственных масштабах, чтобы экспериментальное наблюдение могло дать надежную информацию о ранней стадии процесса. На возникновение магнитных полей вследствие филаментации тока может уйти заметная доля энергии. Крупные и устойчивые структуры магнитного поля могут повлиять на протекание последующих более медленных процессов. В последних работах, посвященных трехмерному моделированию взаимодействия лазерного импульса со сверхкритическим плазменным слоем, использованы сетки с количеством ячеек не более  $1.5 \cdot 10^6$  [21]. Этот результат получен на персональном компьютере, а при использовании суперкомпьютеров это число может быть увеличено до  $10^8$  [22]. Это приводит к тому, что либо размер шага по пространству соизмерим с мельчайшим масштабом исследуемой филаментационной структуры (а должен быть хотя бы в 4 раза меньше [23]), либо область моделирования недостаточна для того, чтобы вместить поперечные размеры лазерного импульса.

В представленных выше задачах также часто используют 2D3V геометрию в цилиндрических координатах [19], что существенно снижает объем вычислений. Однако при рассмотрении нелинейных эффектов в плазме предположение о симметрии процесса сомнительно.

**Цель работы** состоит в создании инструмента для моделирования плазмы, отвечающего необходимым требованиям для наблюдения самосогласованных нелинейных многомасштабных процессов в замагниченной плазме на доступных вычислительных устройствах. При работе над поставленной целью решены следующие задачи:

- Выбор наиболее подходящей математической модели и численных методов ее решения.
- Реализация численной схемы в коде на основе локально-рекурсивных нелокально-асинхронных алгоритмов.
- Верификация полученного программного комплекса в задаче о филаментационной неустойчивости.
- Применение в решении задачи о роли вейбелевской неустойчивости в ускорении частиц электромагнитным импульсом.

**Практическая ценность.** Разработан программный комплекс для моделирования кинетики замагниченной плазмы. Он обладает высокой эффективностью, позволяющей проводить расчеты с высокой скоростью без существенных приближений.

- Становится доступным решение новых типов задач, вычисления для которых ранее считались невыгодными с точки зрения затрат времени и использования вычислительных мощностей.
- Благодаря универсальности кинетического подхода, высокому темпу счета и понятному интерфейсу код можно использовать для решения трехмерных задач в интерактивном режиме в образовательных целях.

- В применении к актуальным вопросам плазменных технологий проведены вычисления по образованию магнитных полей при взаимодействии фокусированного лазерного импульса с сверхкритическим плазменным слоем. Получены оценки доли энергии, уходящей на генерацию магнитных полей. Этот результат полезен для усовершенствования механизмов ускорения частиц электромагнитным излучением.

**Научная новизна.** Ко времени работы над диссертацией все существующие программные комплексы для 3D3V моделирования плазмы методом «частица-в-ячейке» использовали пошаговую синхронизацию, так что LRnLA алгоритм для выбранной численной модели реализован впервые. Разработаны новые LRnLA алгоритмы для схемы макрочастиц. Моделирование взаимодействия лазерного импульса со сверхкритическим плазменным слоем в предшествующих работах производилось с рядом упрощений. Впервые проведено 3D3V моделирование в постановке, включающей сфокусированный лазерный импульс при шаге сетки, много меньшим ожидаемого размера филамента магнитного поля.

### **Положения, выносимые на защиту.**

- Разработаны и реализованы локально рекурсивные нелокально асинхронные алгоритмы для метода макрочастиц решения трехмерной самосогласованной системы уравнений Власова-Максвелла. В сравнении с алгоритмами с пошаговой синхронизацией минимизируется нагрузка на пропускную способность памяти и количество синхронизаций между процессами.
- Создан универсальный программный комплекс для моделирования трехмерной кинетики замагниченной плазмы с применением различных шагов по времени для электромагнитных полей и частиц, использованием эффективных алгоритмов и современных возможностей процессоров. Продемонстрирована возможность решения существенно разномасштабных задач на доступных вычислительных системах.
- В результате вычислительного эксперимента показано, что зависимость доли энергии, ушедшей на образование квазистационарных магнитных полей вследствие вейбелевской филаментационной неустойчивости при ускорении частиц лазерным импульсом, от амплитуды используемого импульса в проведенном вычислительном эксперименте оказывается немонотонна и максимум достигает 4.5%.

**Личный вклад соискателя.** Теория LRnLA алгоритмов разработана научным руководителем, Левченко В.Д. Подготовка безразмерной системы единиц (разд. 1.3), подбор задач для тестирования (разд. 2.7.1), численных параметров к ним выполнена Горячевым И.А. Моделирование с использованием кода CFHall частично проведено Горячевым И.А. (разд. 2.7.1) и Левченко В.Д. (разд. 3.3.1). Остальные представленные в диссертации результаты получены автором

самостоятельно.

**Достоверность и обоснованность результатов** в первую очередь обеспечивается использованием признанных и неоднократно исследованных численных схем и алгоритмов. Тестирование кода проведено на ряде изученных ранее задач, для которых справедливы аналитические оценки. Применимость к целевым задачам показана примером вычисления в актуальной задаче о роли вейбелевской неустойчивости при взаимодействии лазерного импульса со сверхкритическим плазменным слоем

**Апробация.** Результаты, описанные в диссертации, докладывались и обсуждались на международных научно-технических конференциях:

- 38-я, 39-я, 40-я, 41-я Международная (Звенигородская) Конференция По Физике Плазмы и Управляемому Термоядерному Синтезу;
- 54-я, 55-я, 56-я научные конференции МФТИ;
- First Russian — Italian joint seminar on mathematical and physical models applications to condensed matter and preservation of the cultural heritage (On the occasion of ICIAP 2011, г. Равенна, Италия);
- ISPlasma 2011, 3rd International Symposium on Advanced Plasma Science and its Applications for Nitrides and Nanomaterials (г. Нагоя, Япония);
- Забабахинские научные чтения, г. Снежинск, 16-20 апреля 2012 г.;
- Международная молодёжная конференция-школа «Современные проблемы прикладной математики и информатики», г. Дубна, 22-27 августа 2012 г.

- Научный сервис в сети Интернет: многообразие суперкомпьютерных миров (г. Новороссийск, 2014 г.)
- 11th APCPST (Asia Pacific Conference on Plasma Science and Technology) and 25th SPSM (Symposium on Plasma Science for Materials) (г. Киото, Япония);
- The International Conference Mathematical Modeling And Computational Physics (ММСР 2013, г. Дубна);
- XXXI International Conference on Phenomena in Ionized Gases (г. Гранада, Испания);
- XXV IUPAP Conference on Computational Physics (г. Москва);
- 41st EPS conference (г. Берлин, Германия);

Также результаты были представлены и неоднократно обсуждались на научных семинарах кафедры прикладной математики научно-образовательного центра ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, семинаре ФГУП ВНИИА им. Н. Л. Духова. Работа поддержана грантами РФФИ 11-01-00282-а, 12-01-00490-а, 12-01-00708-а, 14-01-00787-а, 14-01-31483-мол\_а.

Научные результаты диссертации опубликованы в 23 работах [24–47], из которых 3 в изданиях, рекомендованных ВАК РФ [45–47].

Объем диссертации составляет 109 страниц, диссертация содержит 39 рисунков, 6 таблиц и 122 наименований списка литературы.



## Глава 1

# Кинетическая модель замагниченной плазмы

### 1.1. Математическое моделирование замагниченной плазмы в актуальных задачах плазменных технологий

Существует множество реализаций метода частиц-в-ячейках. Из числа актуальных на сегодняшний день можно отметить OSIRIS [48, 49], WARP [50], Mandor [51], Vorpal [52], VLPL [53]. В последнее время развиваются реализации этого метода с применением графических ускорителей [54–57]. Перечисленные программы являются универсальными инструментами, подразумевающими широкий круг применений в разных областях физики плазмы, например, исследование сильно нелинейных режимов возбуждений импульсом кильватерных волн [58–63]. Они используют максимально точные численные схемы и оптимизируются для использования на современных компьютерных архитектурах.

Благодаря тому, что метод макрочастиц подробно описан в классической литературе [23, 64, 65], иногда исследователи не используют готовые программы, и создают свои версии кода для стоящих перед ними задач. Версии, разрабатываемые под конкретную задачу, могут содержать улучшения, связанные с приспособлением численного метода к потребностям задачи, но оптимизация вычислений оказывается недостаточно проработана.

Приспособление метода к конкретной задаче часто составляет использование приближений в физической постановке. В реальных применениях приходится решать существенно многомасштабные задачи. Под многомасштабными процессами понимаются явления, в которых интересно учесть явления, во много

раз отличающиеся между собой своими масштабами скоростей, частот, размеров. Это означает, что при моделировании необходимо использовать достаточно подробные сетки, чтобы разрешить наиболее мелкие масштабы, и при этом моделируемая область должна покрывать размеры самых больших масштабов. Универсальные кинетические коды имеют ограничение на размер сетки моделирования, связанное с памятью компьютера или с временем, затрачиваемым на расчет. Поэтому для решения многомасштабных задач разрабатываются специализированные инструменты, содержащие различные упрощения постановки для того, чтобы сделать расчет выполнимым.

Эти упрощения можно проиллюстрировать на следующем примере. Среди задач, в которых интересны многомасштабные процессы самосогласованной кинетики плазмы, и с которыми современные инструменты не справляются, можно отметить моделирование замагниченной плазмы в холловских плазменных двигателях (ХД) [66].

Один из наиболее интересных для численного исследования процессов, происходящих в плазме внутри канала ХД – аномальная проводимость [67]. Суть ее заключается в том, что из известного решения для движения частицы в скрещенных электрическом и магнитных полях [68], транспорт электронов поперек магнитного поля невозможен. Ток электронов слишком сильный, чтобы его можно было объяснить только столкновительной диффузией. Однако перенос электронов к аноду имеет место. Он необходим для ионизации нейтрального газа в анодной области и, следовательно, для работы двигателя в целом. Точное описание переноса электронов в область ионизации позволит получить более правильные оценки выходных параметров двигателя, что полезно для конструирования ХД.

Среди возможных причин переноса электронов в область ионизации отме-

чают столкновения частиц плазмы, плазменные неустойчивости и пристеночные процессы [69]. Проблема в проверке гипотезы о том, что наибольший вклад дают турбулентные процессы в плазме, состоит в трудности вычислений. Аналитическое решение в данном случае невозможно в силу высокой математической сложности, а кинетическое моделирование плазмы в холловском двигателе очень требовательно к вычислительным ресурсам. Необходимо разрешить высокочастотные процессы, а время моделирования должно быть достаточным, чтобы получить оценки выходных параметров. Исходя из диапазона величин характерных частот и размеров процессов, протекающих в плазме ХД (рис. 1.1) [12, 70], можно оценить, что необходимые число узлов пространственной сетки составляет  $\sim (10^2)^d$ , а число шагов по времени –  $\sim 10^7$  ( $d$  – размерность пространства).

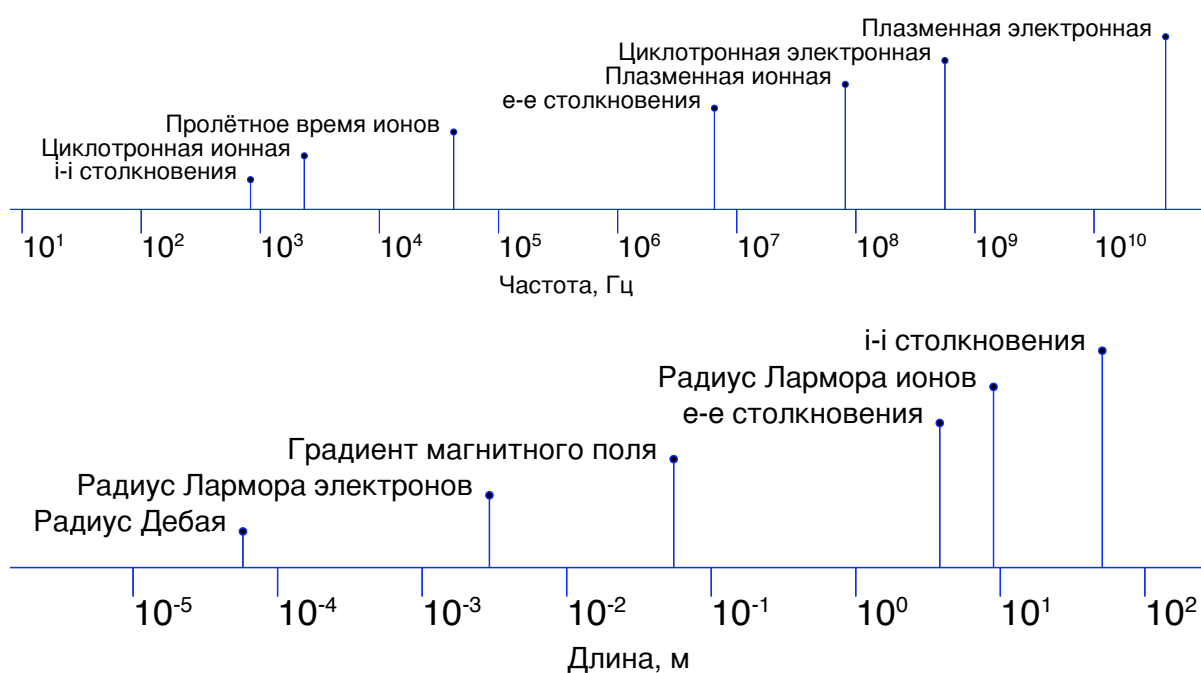


Рис. 1.1. Масштабы характерных длин и частот процессов в плазме канала холловского двигателя

Значительный вклад в создание специализированных кодов, направленных

на моделирование ХД, в последние годы был сделан в Массачусетском технологическом институте. Начало было положено диссертацией J. Fife и его кодом HPHALL [71]. В нем сочетаются гидродинамический подход для описания электронной подсистемы и метод «частицы в ячейке» для описания тяжелых атомов и ионов. Приближение о равновесной функции распределении электронов слишком неточно, так что полученный код полезен лишь для получения некоторых макроскопических характеристик. Тем не менее, благодаря своей эффективности с точки зрения вычислительных ресурсов, он используется до сих пор, например, для моделирования выходной струи двигателя [72, 73], просчитывая для подобных задач граничное условие на выходной плоскости двигателя, или для описания эрозии стенок двигателя [74].

Следующим шагом было создание полностью кинетического кода [9], проводящего моделирование в 2D3V геометрии. Тем не менее, из-за ограничения вычислительных ресурсов, некоторые приближения остались необходимыми. Искусственно изменено отношение масс электронов и ионов, что привело к увеличению скорости ионов и нейтральных атомов, и количество временных итераций, необходимых для прохождения ионов до их выхода из расчетной области, существенно сократилось. Однако это приводит к необходимости искусственно настраивать другие параметры задачи, чтобы сохранить неизменными длины свободного пробега и плотности. Второе предположение — введение искусственной проводимости — позволяет использовать более грубую сетку и больший шаг во времени. Двумерная модель также не позволяет напрямую моделировать перенос электронов к аноду, поэтому использованы другие механизмы переноса электронов — пристеночная проводимость и диффузия Бома. Коэффициент аномальной диффузии (коэффициент Бома) считается обратно пропорциональным величине магнитного поля с точностью до некоторого множителя, кото-

рый подбирается исходя из экспериментальных данных. Вторичная электронная эмиссия не была учтена. Похожих успехов достигла работа [8].

Следующий код [7], разработанный в той же лаборатории, изначально разрабатывался как параллельный, что дало ему значительное преимущество над предыдущими версиями. С точки зрения оптимизации кода была введена адаптивная сетка и динамическое распределение нагрузки. Параллельность исполнения кода реализована при помощи MPI и MUMPS, и успешно тестировался на 128 процессорах. Кроме того, на основе последних исследований, проведенных в Массачусетском технологическом институте, улучшено физическое описание задачи. Для описания процессов столкновения автор, в отличие от обыкновенного метода Монте-Карло, использует полностью детерминированный механизм столкновения, не зависящий от случайных чисел. Каждой макрочастице приписывается некоторый статистический вес, в зависимости от которого она при столкновении разбивается на несколько макрочастиц другого сорта со своим статистическим весом. Для описания аномальной диффузии используется «правило погашения», и при помощи коэффициента Бома ее можно считать аналитически, не опираясь на экспериментальные данные. Тем не менее, код остается двумерным (2D3V) и использует приближения: искусственную проводимость и измененное отношение масс.

В работе [11] также использована размерность 2D3V, а из калибровок остается только изменение массы ионов. Уравнение Пуассона решается неявным методом, за счет этого увеличен шаг по времени. Для описания столкновений и пристеночной зоны использованы соотношения и коэффициенты, полученные эмпирически. В результате получено сходство выходных параметров с полученными из лабораторного эксперимента в пределах 10%. Но, так как моделирование не предоставляет лучшего представления об интересующих процессах,

не известно, насколько достоверными будут результаты о не сконструированных заранее установках, для которых получить эмпирические коэффициенты заранее невозможно.

2D3V модель в работе [10] возможно, наиболее приближена к точному описанию аномальной проводимости. В этой работе выбрана плоскость  $z - \phi$  и не используются искусственные калибровки физических параметров. Это позволило наблюдать азимутальные колебания электрического поля и перенос электронов к аноду. Моделирование было произведено на кластере из четырех процессоров, и для получения выходных параметров необходимое время вычислений составило один месяц. Из-за этого код неудобен для многократного моделирования с целью нахождения оптимальных решений в конструкции двигателя, а также из-за выбранной геометрии совсем не подходит для моделирования пристеночных эффектов.

Отсутствие необходимых инструментов для решения приведенной задачи стало причиной написания программного комплекса CFHall [27, 29]

## **1.2. Обоснование выбора кинетической трехмерной самосогласованной модели без калибровок**

Выбор вычислительной модели обусловлен характеристиками рассматриваемой среды. В данной работе целью становится моделирование замагниченной плазмы. Это означает, что рассматриваются системы с сильно неравновесными функциями распределения, динамически меняющимися электромагнитными полями. Задача состоит в том, чтобы адекватно описать турбулентные процессы в плазме и проследить их влияние на ключевые параметры исследуемой системы. В качестве базовых (тестовых) моделей для верификации рассмотре-

на плазма канала ХД, кильватерное ускорение лазерным импульсом ([28, 31]). Математическая модель должна быть выбрана такой, чтобы соответствовать основной задаче разработки.

Во-первых, используется полностью кинетическая модель плазмы. Приближение гидродинамики даже для электронов плазмы в рассматриваемом круге задач не верно, так как функция распределения заведомо отлична от равновесной.

Модель должна быть *трехмерной* (3D3V). Упрощения в виде понижения размерности задачи уместны, если известно, что характер исследуемых явлений двумерный, имеет место симметрия. Но неуместны при изучении качественно новых явлений, где роль трехмерных эффектов заранее оценить невозможно.

Модель должна *учитывать самосогласованную динамику магнитных полей*. Это не осуществляется, если вместо полной системы уравнений Власова-Максвелла используется система уравнений Власова-Пуассона. В этом случае магнитное поле является стационарным или несогласованным с динамикой плазмы. Плазменные неустойчивости, связанные с ростом магнитных полей, учтены неверно.

Способом ускорения вычислений в этой задаче является искусственная калибровка основных физических параметров. Например, искусственное изменение электрической проводимости вакуума увеличивает радиус Дебая [75] плазмы и уменьшает плазменную частоту.

$$\varepsilon'_0 = \varepsilon_0 \gamma^2. \quad (1.1)$$

Тогда плазменная частота уменьшается, а радиус Дебая увеличивается в  $\gamma$  раз. Это приближение позволяет использовать большие шаги по времени и по пространству, на несколько порядков ускоряя расчеты. Искусственное изменение

отношения масс электронов и ионов уменьшает пролетное время ионов, так что достаточно моделировать меньшие временные промежутки для получения выходных параметров. Эти приближения достаточны грубы с точки зрения моделирования физики плазмы, так как сдвигают порог возникновения плазменных неустойчивостей. Подобные калибровки в описываемом коде *не используются*.

Для моделирования плазменных двигателей часто используют ту или иную модель столкновений. В данной работе модель выбрана *бесстолкновительной*. В применении к ХД это означает, что будут исследоваться процессы, намного более быстрые, чем характерное время столкновений и ионизации. В этой задаче наиболее часто используют метод Монте-Карло [9, 10, 71]. Но так как стохастические свойства макрочастиц отличны от свойств частиц реальной плазмы, этот метод обычно содержит калибровочные параметры, и математическая модель становится менее надежной. Составление модели столкновений и ионизации, которая бы не препятствовала пониманию реальных свойств рассматриваемой системы, является отдельным трудом и выходит за рамки диссертации.

Необходимо, чтобы численная схема была явной. Неявные численные схемы позволяют снять ограничение на шаг по времени (условие Куранта), но накладывают существенные ограничения на возможности повышения эффективности программы. Теряется локальность вычислений, и объем пересылаемых данных между процессорами при параллельной реализации возрастает многократно. LRnLA (локально-рекурсивные нелокально-асинхронные) алгоритмы неприменимы для схем с нелокальным шаблоном.

Следует использовать схему наиболее высокого порядка. В силу упомянутых выше условий, для целевых задач необходимо большое число шагов по времени (более  $\sim 10^6$ ). Схемы первого порядка довольно быстро теряют точность. Необходимо проследить, чтобы порядок аппроксимации выбранного численно-



го метода был не ниже второго, и сохранялась расширяемость кода для схем более высокого порядка.

Помимо того, что схема обладает высокой точностью при описании кинетических процессов, она выбрана такой, что зависимости в вычислениях локальны. Это позволяет реализовать ее в высокоэффективном коде с применением LRnLA алгоритмов.

### 1.3. Уравнения и численные методы самосогласованной модели плазмы

Код основан на решении самосогласованной системы уравнений Власова-Максвелла [23, 76].

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}} + e_\alpha \left( \vec{v} \times \vec{B} + \vec{E} \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{p}} = 0. \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \times \vec{B} - \vec{j}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \rho. \quad (1.3)$$

Плотность заряда и ток определяются как нулевой и первый моменты функции распределения частиц.

$$\rho = \sum_\alpha \int f_\alpha e_\alpha d\vec{p}, \quad \vec{j} = \sum_\alpha \int \vec{v}_\alpha f_\alpha e_\alpha d\vec{p}. \quad (1.4)$$

Уравнения записаны в безразмерной системе единиц. Масса измеряется в массах электрона  $m_e$ , заряд – в зарядах электрона  $e$ , скорости – в скоростях света  $c$ , время – в обратных плазменных частотах электронов  $\omega_p^{-1}$ . Из этого выбора следует единица измерения полей  $m_e \omega_p c / e$  и единица измерения размеров  $c / \omega_p$ .  $f_\alpha = f_\alpha(t, \vec{r}, \vec{p})$  – это функция распределения частиц сорта  $\alpha$ .  $\vec{v} = \vec{p} / m_\alpha \sqrt{1 + p^2 / m_\alpha^2}$  – скорость частиц. Задача дополняется граничными и начальными условиями.

### 1.3.1. Построение конечно-разностной схемы для уравнений Максвелла с заданным порядком аппроксимации

Эволюция электромагнитных полей реализована по схеме в конечных разностях во временной области на сдвинутых сетках [77, 78] (FDTD — Finite Difference Time Domain) со вторым порядком аппроксимации. Вводится сетка дискретизации. На целых моментах времени определено электрическое поле. На полуцелых моментах — магнитное поле и плотность токов. Значения полей на сетке известны в точках, определяемых ячейкой  $\Delta$  (рис. 1.2).

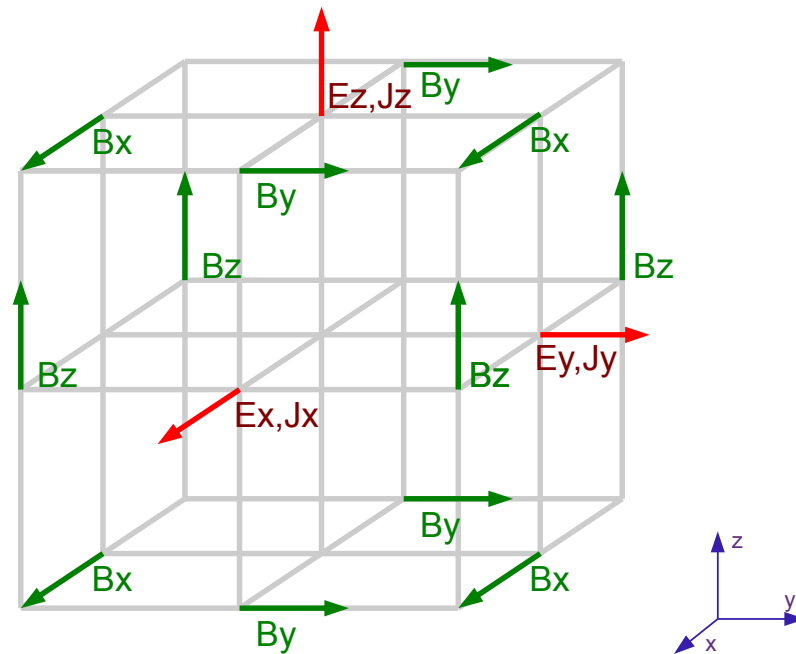


Рис. 1.2. Расположение сеточных значений полей в ячейке

Задачей является выражение производной в узле сетки через известные сеточные значения функций с заданным порядком точности. Соотношения численного дифференцирования получаются методом неопределенных коэффициентов [79]. Общее выражение для центрированных конечно-разностных схем

вплоть до шестого порядка можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_n &= \\ &= c \frac{f_{x_0+5/2\Delta x} - f_{x_0-5/2\Delta x}}{5\Delta x} + b \frac{f_{x_0+3/2\Delta x} - f_{x_0-3/2\Delta x}}{3\Delta x} + a \frac{f_{x_0+1/2\Delta x} - f_{x_0-1/2\Delta x}}{\Delta x}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $x_0$  — точка, в которой определена величина производной,  $\Delta x$  — шаг сетки или времени,  $f$  — в данном случае компонента электрического или магнитного поля. Разложим все слагаемые в ряд Тейлора около узла  $n$ . За счет выбора одинаковых (или с противоположным знаком) коэффициентов при симметричных относительно  $n$  слагаемых все члены разложения, содержащие четные производные, сократятся. Получим выражение:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( (a + 3^{2n-2}b + 5^{2n-2}c) \frac{\Delta x^{2n-2}}{(2n-1)!} \frac{1}{2^{2n-2}} \left. \frac{\partial^{2n-1} f}{\partial x^{2n-1}} \right|_n \right). \quad (1.6)$$

Собирая коэффициенты у первой и третьей производной, получаем уравнения

$$\begin{aligned} 1 &= a + b + c, \\ 0 &= (a + 9b + 25c) \frac{1}{24}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

При  $a = 1, b = c = 0$  выражение (1.5) является явной схемой второго порядка аппроксимации.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} = \frac{f_{x_0+1/2\Delta x} - f_{x_0-1/2\Delta x}}{\Delta x}. \quad (1.8)$$

Приравнивая в (1.6) коэффициенты при первых, третьих и пятых производных, получаем:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1, \\ a + 9b + 25c &= 0, \\ a + 3^4b + 5^4c &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Решая систему, получаем коэффициенты для схемы шестого порядка

$$a = \frac{75}{64}, b = -\frac{25}{128}, c = \frac{3}{128}.$$

Положив  $c = 0$  и используя лишь два первых уравнения, получим коэффициенты для схемы четвертого порядка:

$$a = \frac{9}{8}, b = -\frac{1}{8}.$$

В этом случае производная вычисляется по четырем точкам:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} = \frac{9}{8\Delta x} (f_{x_0+1/2\Delta x} - f_{x_0-1/2\Delta x}) - \frac{1}{24\Delta x} (f_{x_0+3/2\Delta x} - f_{x_0-3/2\Delta x}). \quad (1.10)$$

Рассмотренная схема используется при решении задач о поверхностных плазмон-поляритонах [80] при прямом полноволновом моделировании в сейсморазведке [81]. В итоге решено использовать второй порядок аппроксимации в коде. В первых двух уравнениях (1.3) производные всех компонент полей и токов по времени и по трем координатам заменяются на конечные разности вида:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} = \frac{f|_{x_0+0.5\Delta x} - f|_{x_0-0.5\Delta x}}{\Delta x}. \quad (1.11)$$

Вторые два уравнения 1.3 не используются в методе. За счет центрированности схемы выполняются соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} E - \rho) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} B = 0. \quad (1.12)$$

### 1.3.2. Метод макрочастиц

Для моделирования плазмы использован метод «частица-в-ячейке» [64, 65].

Вводится модельная функция распределения частиц

$$f_N^\alpha(t, \vec{r}, \vec{v}) = \int \tilde{f}_N^\alpha(t, \vec{r}', \vec{v}) G^\ell(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}',$$

где  $\tilde{f}_N^\alpha(t, \vec{r}, \vec{v}) = \sum e_\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}_j(t)) \delta(\vec{v} - \vec{v}_j(t))$ ,  $e_\alpha$  – это заряд частиц сорта  $\alpha$ , а  $\vec{r}_j, \vec{v}_j$  – положение и скорость частицы в момент времени  $t$ . Ядро интегрального преобразования  $G^\ell(\vec{r}, \vec{r}')$  определяется как

$$G^\ell(\vec{r}, \vec{r}') = \int \Lambda^\ell(\vec{r} - \vec{r}'') \sum \psi_i(\vec{r}') \psi_i^*(\vec{r}'') d\vec{r}'', \quad (1.13)$$

$$\psi_i(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Omega_i}}, & \text{если } \vec{r} \text{ попадает в } i\text{-ю ячейку;} \\ 0, & \text{если } \vec{r} \text{ не попадает в } i\text{-ю ячейку.} \end{cases} \quad (1.14)$$

Ячейка метода частиц соответствует ячейке Йи, использованной в обновлении полей. Индекс  $i$  обозначает номер ячейки и подразумевает полный набор координат центра ячейки  $i_x, i_y, i_z$ . Отметим, что в дальнейшем изложении при обработке частиц их координаты ( $\vec{r}$ ) измеряются в шагах сетки. В качестве форм-факторов рассматривалось семейство функций  $\Lambda^\ell$  (рис. 1.3):

$$\Lambda^\ell(x - x') = \int \Lambda^{\ell-1}(x - x'') \Lambda^0(x' - x'') dx'', \quad \Lambda^0(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 0.5; \\ 0, & |x| > 0.5. \end{cases} \quad (1.15)$$

$$\Lambda^\ell(\vec{r}) = \Lambda^\ell(x) \Lambda^\ell(y) \Lambda^\ell(z). \quad (1.16)$$

Для кода важен порядок точности не ниже второго, так как при выполнении

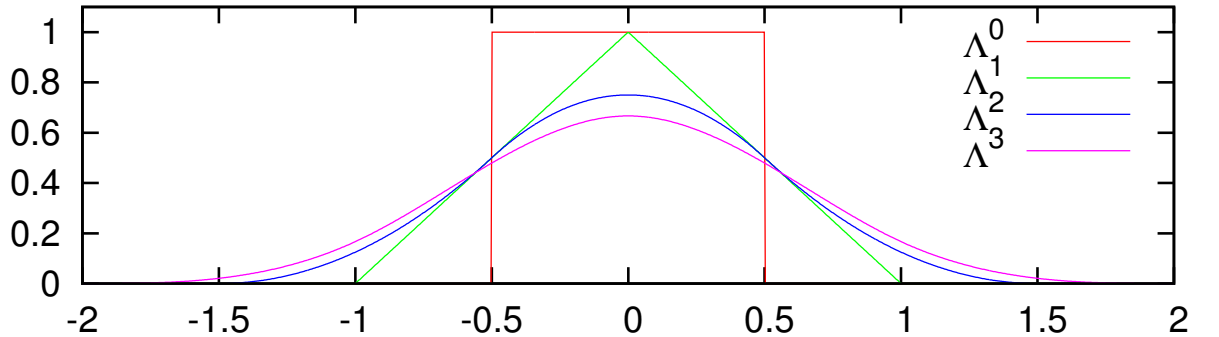


Рис. 1.3. Семейство функций  $\Lambda^\ell$

множества шагов по времени схемы низкого порядка дают недостоверный результат. Поэтому выбран форм-фактор с  $\ell = 2$ .

$$\Lambda^2(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} - x^2, & |x| \leq 0.5; \\ \frac{1}{2} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2, & 0.5 < |x| \leq 1.5; \\ 0, & |x| > 1.5. \end{cases} \quad (1.17)$$

После подстановки модельной функции распределения в кинетическое уравнение Власова (1.2) и интегрирования по скоростям и пространству можно получить силу, действующую на  $j$ -ю частицу в момент времени  $t$ :

$$\vec{F}(\vec{r}_j) = \int dr'' \Lambda^\ell(\vec{r}_j(t) - \vec{r}'') \sum \psi_i(\vec{r}'') \vec{F}_i(\vec{r}_i), \quad (1.18)$$

$$\vec{F}_i(\vec{r}_i) = e_\alpha (\vec{E}(\vec{r}_i) + [\vec{v}_\alpha \times \vec{B}(\vec{r}_i)]). \quad (1.19)$$

Значения полей, полученные по схеме FDTD, соответствуют точкам на гранях и ребрах ячейки. Метод макрочастиц работает со значениями полей, связанных с центрами ячеек, и со значениями токов на гранях ячеек. Поэтому в начале проводится интерполяция значений всех компонент полей в центры ячеек.

Для многомерной интерполяции всех компонент полей выбрана формула

$$f(\vec{r}) = \sum f(\vec{r}_i) \Lambda^\ell(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (1.20)$$

где суммирование производится по точкам, в которых из схемы FDTD известны значения полей. Положение центров ячеек относительно ребер и граней — фиксированная величина. Вместо функций форм-факторов сразу подставляются численные коэффициенты:

$$\Lambda^2(0) = \frac{3}{4}, \quad \Lambda^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad \Lambda^2(1) = \frac{1}{8}. \quad (1.21)$$

Движение макрочастиц описывается уравнениями

$$\frac{d\vec{v}_j}{dt} = \vec{F}(\vec{r}_j), \quad \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \frac{\vec{v}_j}{\sqrt{1 + (\vec{v}_j/c)^2}}, \quad F(\vec{r}_j) = e_\alpha(\vec{E}(\vec{r}_j) + [\vec{v}_j \times \vec{B}(\vec{r}_j)]) \quad (1.22)$$

Необходимо провести интерполяцию значений компонент полей из центров ячеек в положение, в котором находится частица. Используется формула

$$E_x(\vec{r}_j) = \sum E_x(\vec{r}_i) \Lambda^\ell(\vec{r}_i - \vec{r}_j). \quad (1.23)$$

Для каждой частицы собирается вклады от 27 ячеек в каждую компоненту полей. Положение частиц относительно сетки произвольно, поэтому нельзя заменить вычисление функции умножением на фиксированные коэффициенты. Но, зная в какой ячейке находится частица, можно упростить вычисление. Например, при вычислении коэффициента для вклада в импульс частицы от ячейки, соседней справа вдоль оси  $x$ :

$$x_i - x_j > \frac{1}{2}, \quad (1.24)$$

поэтому сразу выбрана нужная ветвь в 1.17. Если положение частицы в ячейке относительно центра этой ячейки обозначено  $x$ , то сразу вычисляется

$$\Lambda^2(1 - x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{2} \right)^2, \quad (1.25)$$

так как в этом случае  $x_i - x_j = 1 - x$ . Аналогично для вклада от ячейки слева:

$$\Lambda^2(1 + x) = \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{2} \right)^2. \quad (1.26)$$

Вычисление коэффициента для ячейки, в которой находится сама частица, упрощается до:

$$\Lambda^2(x) = \frac{3}{4} - x^2 = 1 - \Lambda^2(1 + x) - \Lambda^2(1 - x). \quad (1.27)$$

При известных значениях электрического и магнитного полей в положении частицы обновление импульсов частиц с учетом релятивизма производится

в соответствии со схемой Бóриса [82], подробно описанной в [23, 64]. Схема для ускорения записывается через два промежуточных значения импульса. Пусть  $p^{(0)}$  и  $p^{(1)}$  — значения импульса частицы до и после ускорения. Алгоритм вычисления выглядит как

$$\begin{aligned}
\vec{p}^+ &= \vec{p}^{(0)} + e \frac{dt}{2} \vec{E}, \\
\gamma &= \sqrt{1 + p^{+2}/m^2}, \\
\vec{B}^* &= \vec{B} \frac{e}{m} \frac{dt}{2} \frac{1}{\gamma}, \\
B_{corr} &= 1 + \frac{1}{3} B^{*2} + \frac{2}{15} B^{*4} + \frac{17}{315} B^{*6}, \\
\beta &= 2 - \frac{4}{3} B^{*2} + \frac{4}{15} B^{*4} - \frac{8}{315} B^{*6}, \\
\vec{B}^{**} &= \vec{B}^* B_{corr}, \\
\vec{p}_S &= \vec{p}^+ + \vec{p}^+ \times \vec{B}^{**}, \\
p^{(1)} &= p^+ + e \frac{dt}{2} \vec{E} + \beta \vec{p}_S \times B^{**}.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Здесь поворот скорости за шаг по времени считается малым ( $|B^*| \ll 1$ ), поэтому вместо вычисления тригонометрических функций использовано их представление в виде суммы первых слагаемых ряда Тейлора.

Для алгоритма взвешивания токов использован метод Езиркепова [83]. Посчитав нулевой момент модельной функции распределения, можно получить выражение для плотности заряда в дискретной модели плазмы

$$\rho(\vec{r}) = \sum \psi_i(\vec{r}) \int \sum_{\alpha} e_{\alpha} \sum_j \Lambda^{\ell}(\vec{r}_j(t) - \vec{r}') \psi_i^*(\vec{r}') dr' = \sum \psi_i \rho(\vec{r}_i), \tag{1.29}$$

$$\rho(\vec{r}_i) = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \sum_j \Lambda^{\ell+1}(\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i). \tag{1.30}$$

Из этого выражения видно, что  $\Lambda^{\ell+1}(\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i)$  определяет вклад  $j$ -й частицы



в плотность  $i$ -й ячейки. Похожее выражение можно записать и для токов:

$$\vec{j}(\vec{r}_i) = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \sum_j \vec{J}_{ij}, \quad (1.31)$$

где  $\vec{J}_{ij}$  представляет собой вклад  $j$ -й частицы в ток  $i$ -й ячейки и выражается через функции  $\Lambda^{\ell+1}(\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i)$  от координат частиц в два соседних момента времени. Выражения для подсчета токов получаются из уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0. \quad (1.32)$$

После подстановки выражений (1.30) и (1.31) для токов и полей в дискретное представление этого уравнения получается выражение для вклада в токи через грани  $i$ -й ячейки от одной частицы:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{dt_{PIC}} (\Lambda^{\ell+1}(\vec{r}_j(t + dt_{PIC}) - \vec{r}_i) - \Lambda^{\ell+1}(\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i)) + \frac{1}{dx} (J_{j,i_x+\frac{1}{2},i_y,i_z}^x - J_{j,i_x-\frac{1}{2},i_y,i_z}^x) + \\ & \frac{1}{dy} (J_{j,i_x,i_y+\frac{1}{2},i_z}^y - J_{j,i_x,i_y-\frac{1}{2},i_z}^y) + \frac{1}{dz} (J_{j,i_x,i_y,i_z+\frac{1}{2}}^z - J_{j,i_x,i_y,i_z-\frac{1}{2}}^z) = 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Чтобы найти вклад от движения частицы во все компоненты токов, необходимо «расщепить» движение частицы на три составляющие:

$$\Lambda^{\ell+1}(\vec{r}_j(t + dt_{PIC}) - \vec{r}_i) - \Lambda^{\ell+1}(\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i) = w_{ji}^x + w_{ji}^y + w_{ji}^z. \quad (1.34)$$

Для более удобной записи значений компонент  $w_{ji}^x$ ,  $w_{ji}^y$  и  $w_{ji}^z$  заметим, что  $\Lambda^{\ell}(\vec{r} - \vec{r}'')$  является перемножением соответствующих функций от  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Соответствующее значение функции от новой координаты обозначим символом «+», а от координаты на предыдущем шаге по времени – символом «-». В этих обозначениях предыдущее уравнения принимает вид

$$\Lambda^{\ell+1,+++} - \Lambda^{\ell+1,---} = w_{ji}^x + w_{ji}^y + w_{ji}^z. \quad (1.35)$$

Следующие алгебраические преобразования заключаются в том, чтобы сопоставить каждой компоненте  $w_{ji}^x$ ,  $w_{ji}^y$  и  $w_{ji}^z$  смещение по соответствующей оси.

Выражения принимают вид

$$\begin{aligned} w_{ji}^x &= \frac{1}{3}(\Lambda^{\ell+1, \cdot \cdot \cdot} - \Lambda^{\ell+1, \cdot \cdot \cdot})(\Lambda^{\ell+1, \cdot \cdot \cdot} + \Lambda^{\ell+1, \cdot \cdot \cdot} + \frac{1}{2}(\Lambda^{\ell+1, \cdot \cdot \cdot} + \Lambda^{\ell+1, \cdot \cdot \cdot})), \\ w_{ji}^y &= \frac{1}{3}(\Lambda^{\ell+1, \cdot \cdot \cdot} - \Lambda^{\ell+1, \cdot \cdot \cdot})(\Lambda^{\ell+1, \cdot \cdot \cdot} + \Lambda^{\ell+1, \cdot \cdot \cdot} + \frac{1}{2}(\Lambda^{\ell+1, \cdot \cdot \cdot} + \Lambda^{\ell+1, \cdot \cdot \cdot})), \\ w_{ji}^z &= \frac{1}{3}(\Lambda^{\ell+1, \cdot \cdot \cdot} - \Lambda^{\ell+1, \cdot \cdot \cdot})(\Lambda^{\ell+1, \cdot \cdot \cdot} + \Lambda^{\ell+1, \cdot \cdot \cdot} + \frac{1}{2}(\Lambda^{\ell+1, \cdot \cdot \cdot} + \Lambda^{\ell+1, \cdot \cdot \cdot})), \end{aligned} \quad (1.36)$$

где точкой обозначено отсутствие в перемножении соответствующей функции. После этого в общем случае для каждой компоненты получается система уравнений, в которой следующее уравнение записывается для каждой ячейки:

$$J_{j, i_x + \frac{1}{2}, i_y, i_z}^x - J_{j, i_x - \frac{1}{2}, i_y, i_z}^x = -\frac{dx}{dt_{PIC}} w_{ji}^x. \quad (1.37)$$

Количество ненулевых уравнений в системе определяется форм-фактором  $\ell$ . В случае  $\ell = 2$  после решения системы получаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} J_{j, i_x + \frac{1}{2}, i_y, i_z}^x &= \frac{dx}{dt_{PIC}} w_{j, i_x + 1, i_y, i_z}^x, & J_{j, i_x - \frac{1}{2}, i_y, i_z}^x &= -\frac{dx}{dt_{PIC}} w_{j, i_x - 1, i_y, i_z}^x, \\ J_{j, i_x, i_y + \frac{1}{2}, i_z}^y &= \frac{dy}{dt_{PIC}} w_{j, i_x, i_y + 1, i_z}^y, & J_{j, i_x, i_y - \frac{1}{2}, i_z}^y &= -\frac{dy}{dt_{PIC}} w_{j, i_x, i_y - 1, i_z}^y, \\ J_{j, i_x, i_y, i_z + \frac{1}{2}}^z &= \frac{dz}{dt_{PIC}} w_{j, i_x, i_y, i_z + 1}^z, & J_{j, i_x, i_y, i_z - \frac{1}{2}}^z &= -\frac{dz}{dt_{PIC}} w_{j, i_x, i_y, i_z - 1}^z. \end{aligned} \quad (1.38)$$

В целом, расчёт происходит следующим образом. Из известных значений полей на сетке считаются их значения в центрах ячеек, а после – их значения в точках, соответствующих положению частиц. Исходя из этих значений обновляется импульс частиц, а из импульса и текущей координаты считается положение частицы на следующем шаге по времени. По положению частицы в два соседних момента времени считается ее вклад в токи через границы ячеек. Новые значения токов участвуют в последующей эволюции полей.

На рис. 1.4 представлена более точная схема. Чтобы из схемы на сдвинутых сетках привести значения электрического и магнитного поля на один слой по времени вместо одного обновления магнитного поля на шаг  $dt$  проводятся два обновления на шаг  $dt/2$ .

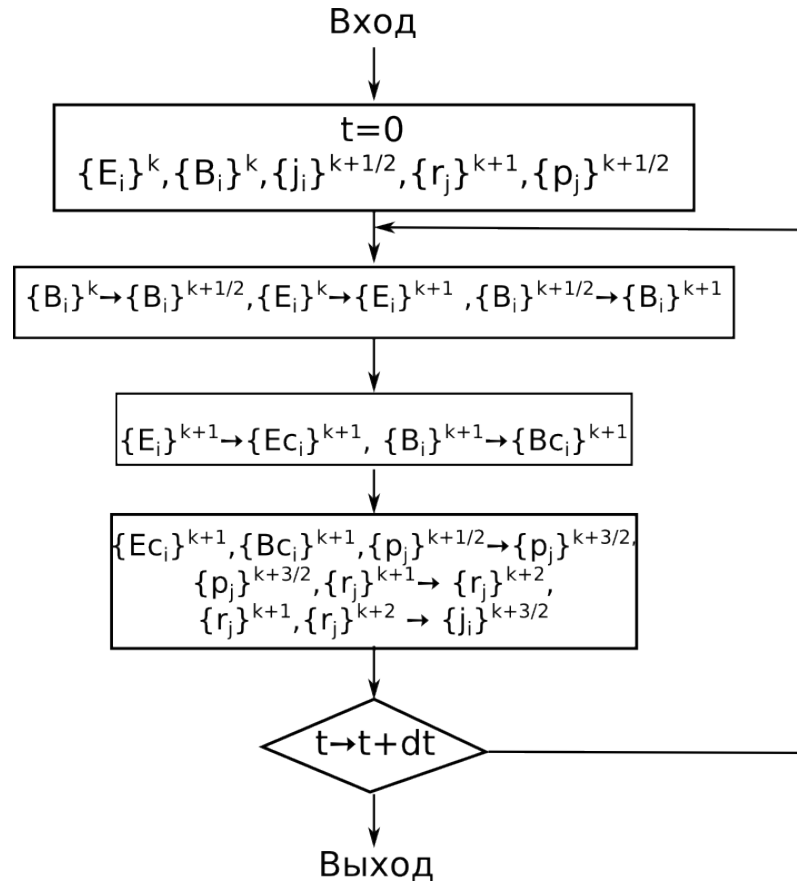


Рис. 1.4. Схема вычислений. Индексом  $i$  обозначена принадлежность значения к ячейке,  $j$  — к частице;  $c$  обозначает интерполированные на центр ячейки значения полей;  $k$  — индекс по времени

### 1.3.3. Дисперсионное соотношение в методе частиц

В [23] получено дисперсионное соотношение для одной схемы решения уравнений Власова-Пуассона для малого отклонения от равновесной функции. В приближении тепловой плазмы соотношение содержит параметр тепловой ско-

рости. Численное решение дисперсионного уравнения позволило автору сделать выводы о выхождении на насыщение нефизических неустойчивостей в зависимости от соотношения шага с радиусом экранировки. В [64] приводятся выжимки из этой работы. В [84] похожие выводы получены при помощи другого математического аппарата.

В [85] численный метод совпадает с выбранным для CFHall, вывод проведен для произвольного форм-фактора. Авторы заметили, что в определенной технике моделирования (boosted frame, задание дрейфующего фона теплой плазмы) возникают численные неустойчивости, и исследование их возникновения проведено при помощи вывода дисперсионного соотношения. Решение получено в одномерном приближении, без учета дискретизации по времени. Рассмотрение максвелловского распределения в [85] обосновано рассматриваемой задачей.

Напомним вывод дисперсионного соотношения для электромагнитной волны в вакууме. Рассмотрим поперечную волну в вакууме. Подставив выражение для поля плоской монохроматической волны (например,  $E_z = E_0 \exp(i\omega t -iky)$ ,  $B_x = B_0 \exp(i\omega t -iky)$ ) в уравнения поля, получим дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 = k^2. \quad (1.39)$$

Если заменить производные в уравнениях поля на их дискретные аналоги со вторым порядком точности, то при подстановке тех же выражений для электромагнитной волны получим

$$\frac{\sin^2(\omega\Delta t/2)}{\Delta t^2} = \frac{\sin^2(k\Delta y/2)}{\Delta y^2}, \quad (1.40)$$

где  $\Delta t$ ,  $\Delta x$  — шаги дискретизации по времени и пространству.

## 1.4. Отражающие граничные условия

Реализовано несколько видов граничных условий: периодические граничные условия, условия симметрии и граничные условия на идеальном проводнике.

Для расчета магнитных полей на границе по схеме FDTD, и для получения значений сил, действующих на макрочастицу, согласно шаблонам выбранной схемы необходимы значения полей за границей области. Для вычисления токов граничных ячеек необходим вклад от всех соседних частиц, в том числе тех, что оказались за пределами области.

При использовании периодических граничных условий значения полей за границей принимаются равными соответствующим значениям у противоположной границы. Частицы у одной границы области дают вклад в плотности токов противоположной.

При использовании двух других видов граничных условия используется метод отображений. Значения полей за границей считаются равными соответствующим значениям у границы с тем же или с противоположным знаком. Например, условия идеального проводника получаются, если тангенциальную компоненту электрического и нормальную компоненту магнитного поля брать с противоположными знаками, а нормальную электрического и тангенциальную магнитного — отражать без изменений. Таблица 1.1 иллюстрирует выбор знака полей. Индексом  $\tau$  обозначены поля, тангенциальные к границе, индексом  $n$  — нормальные. Если считать, что за границей происходит тот же процесс, что и в области, зеркально отраженный относительно границы, получаются условия симметрии. Для получения такого условия в предыдущем случае все знаки нужно заменить на противоположные.

Таблица 1.1. Выбор знака поля у границы

	симметрия	проводник
$E_\tau$	«+»	«-»
$E_n$	«-»	«+»
$B_\tau$	«+»	«-»
$B_n$	«-»	«+»

Вклад в токи от частиц за границей считаются равным вкладу от частиц, находящихся рядом с границей, в значения токов за пределами области. Если граница – идеальный проводник, этот вклад считается с противоположным знаком, а если в качестве граничного условия выбрана симметрия, с тем же.

При попадании на границы области частицы либо упруго отталкиваются, либо их импульс становится равным нулю и больше не изменяется.

Если вместо отражения задано поле, равное некоторой постоянной, или некоторая зависимость поля от времени и двух координат, то это условие будет соответствовать источнику полей на границе.

## 1.5. Источник фокусированного гауссова импульса

Форма источника электромагнитного импульса, распространяющегося вдоль оси  $x$ , задается в виде прибавления к значениям магнитных полей на границе вида

$$A_0 R(y, z) T(t - t_{ph}(x, y)) \sin(\omega_0(t - t_{ph}(x, y))). \quad (1.41)$$

Здесь  $A_0$  — амплитуда импульса,  $\omega_0$  — частота.  $R(y, z)$  задает поперечную

форму импульса. Например, для гауссова импульса

$$R(y, z) = \exp(-(x^2 + y^2)/w^2), \quad (1.42)$$

где параметр  $w$  определяет ширину огибающей.  $T(t)$  определяет продольную огибающую. Отставанием фазы  $t_{ph}(x, y)$  регулируется поверхность фронта для фокусировки.

Фокусировка нужна потому, что если огибающая импульса  $w$  имеет значения порядка длины волны импульса ( $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$  в вакууме), импульс заметно расплывается [86]. А именно, фронт искривляется (приближается к сферической форме) и поперечная огибающая увеличивается по закону

$$w(z) = \sqrt{1 + \left(\frac{z\lambda_0}{\pi w^2}\right)^2}. \quad (1.43)$$

## 1.6. Многомасштабность в кинетической самосогласованной модели

Для описания существенно разномасштабных систем введена следующая особенность [24, 25]. При использовании эволюционных уравнений Максвелла из условия Куранта возникает условие на шаг по времени для полей

$$dt_{FLD} < \frac{dx}{\sqrt{3}c}. \quad (1.44)$$

Временной шаг движения частиц должен быть достаточно мал, чтобы разрешить плазменные колебания, то есть быть в несколько раз меньше обратной плазменной частоты:

$$dt_{PIC} < \frac{1}{\omega_e}. \quad (1.45)$$

Эти ограничения на временные шаги для полей и частиц могут быть отличны друг от друга на порядок, поэтому выгодно использовать в модели два различных временных шага:  $dt_{FLD}$  для обновления значений полей и  $dt_{PIC}$  для ускорения и движения макрочастиц и подсчета токов [64]. Последовательность вычислений изображена на рис. 1.5.

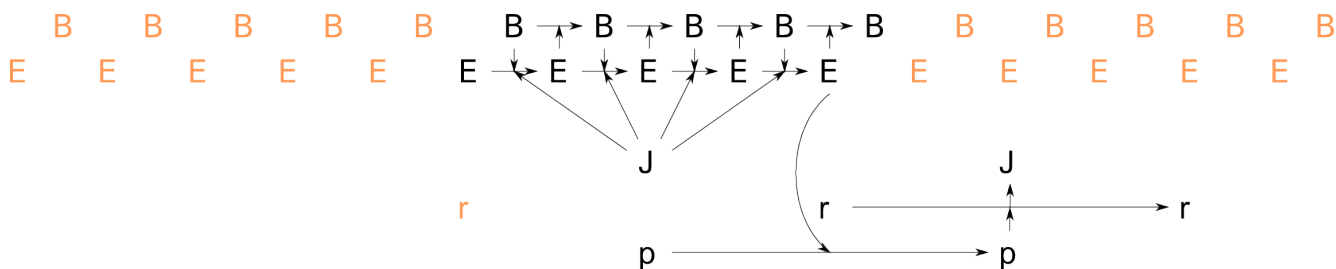


Рис. 1.5. Последовательность итераций при вычислении для  $dt_{PIC}/dt_{FLD} = 4$ . E — обновление электрического поля, B — магнитного, p — обновление импульсов частиц, r — обновление координат частиц, J — вычисление токов по значениям координат двух моментов времени

## 1.7. Тестирование порядка аппроксимации реализации кинетического подхода в CFHall

Наиболее простым тестом является задача о продольных колебаниях холодной плазмы. В области моделирования изначально электромагнитные поля равны нулю, в центре каждой ячейки содержится одна макрочастица (электрон). В момент  $t = 0$  всем электронам системы придается нерелятивистский импульс  $p_0 \ll mc$  направленный вдоль оси  $z$ . По этой оси наложены периодические граничные условия. Ожидается, что  $z$ -компоненты электрического поля, плотности токов, смещения макрочастиц и их импульсы будут совершать гармонические колебания с частотой  $\omega_p$ , значение которой равно единице из-за выбора безразмерной системы отсчета.



Выбраны шаги  $dt_{PIC} = 4dt_{FLD}$ ,  $dx_0 = dy_0 = dz_0 = 0.05$ . Условие Куранта ограничивает шаг по времени величиной  $\approx 0.029$ . Выбран шаг  $dt_{FLD,0} = 0.025$ . Проведены расчеты с шагами дискретизации  $dx = dy = dz = dx_0 \cdot sc$ ,  $dt_{FLD} = dt_{FLD,0} \cdot sc$ , где шкалирующий параметр  $sc$  принимал значения 0.5, 1, 2, 4, 6, 8. Измерена частота колебания компоненты поля  $E_z$ , получившаяся в результате расчета, и посчитано отклонение от ожидаемого значения. Результат представлен на графике 1.6. Зависимость ошибки аппроксимации от шага имеет квадратичный характер.

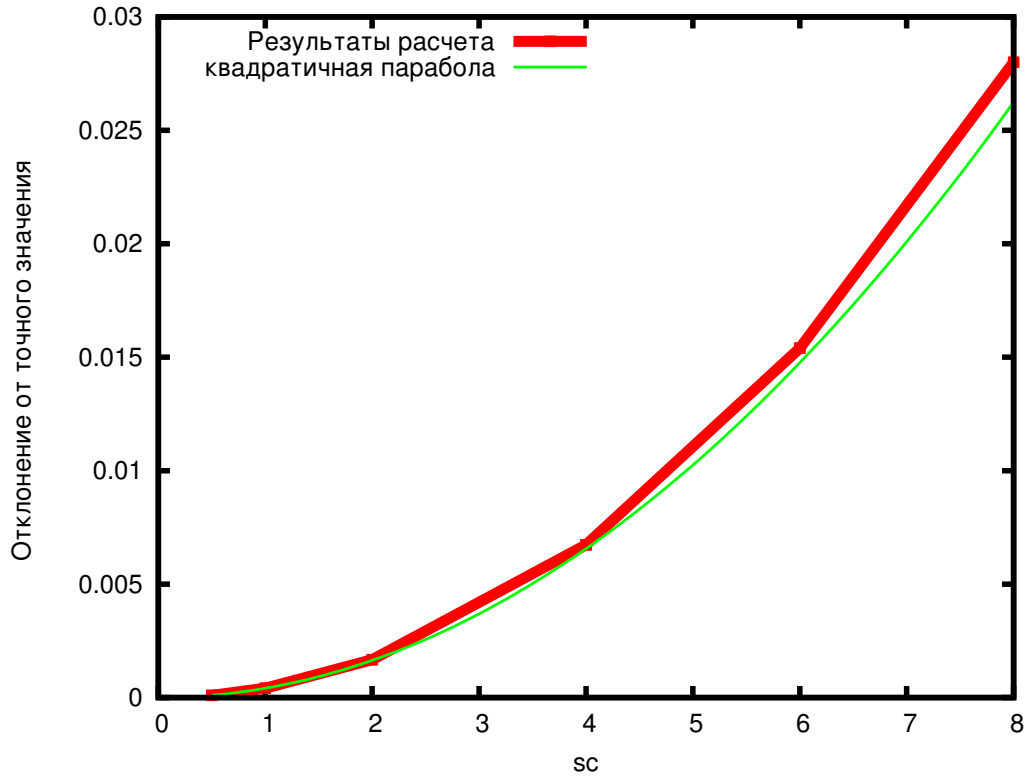


Рис. 1.6. Отклонение частоты продольных колебаний холодной плазмы от ее теоретического значения в зависимости от шага дискретизации.  $sc = dx/0.05 = dt_{FLD}/0.025$

## Глава 2

# Алгоритмы и реализация

Данная глава содержит обоснование выбора и описание алгоритмов, средств и методов реализации программного комплекса для трехмерного моделирования замагниченной плазмы.

### 2.1. Алгоритм как разбиение графа зависимостей

Алгоритм задает правило обхода графа зависимостей [87] задачи. Определив граф зависимостей задачи в  $(d + 1)$ -мерном пространстве операций-данных, можно задать алгоритм как  $(d + 1)$ -мерную фигуру в этом пространстве вместе с правилом ее разбиения на более мелкие фигуры и порядком их обхода [47, 88].

На  $d$ -мерной сетке заданы некоторые начальные значения. Задача моделирования состоит в нахождении значений спустя  $NT$  итераций выбранной численной схемы. Граф зависимостей в  $(d + 1)$ -мерном пространстве состоит из  $NT$  слоев по оси итераций. Каждому из слоев соответствует сетка, идентичная сетке данных, но ее узлы содержат не значение некоторого поля, а операцию вычисления этого значения по выбранной численной схеме на конкретной итерации. Между узлами графа определяются односторонние связи зависимостей, указывающие данные результатов каких операций необходимы для выполнения этого узла.

Представим алгоритм в этом пространстве как некоторую фигуру (см. рис. 2.1). Содержание алгоритма состоит в исполнении всех операций (узлов графа зависимостей), которые он покрывает. Эту фигуру можно разбить на составные части так, чтобы зависимости, пересекающие каждую границу разбиения,

были исключительно односторонними. Это будет означать, что для выполнения алгоритма необходимо выполнить все его составные части в порядке, определяемом зависимостями между ними. Выполнение составных частей можно распределить между несколькими процессорами. Если между частями есть зависимость, то их необходимо выполнять последовательно. Если зависимости нет, то возможно асинхронное выполнение.

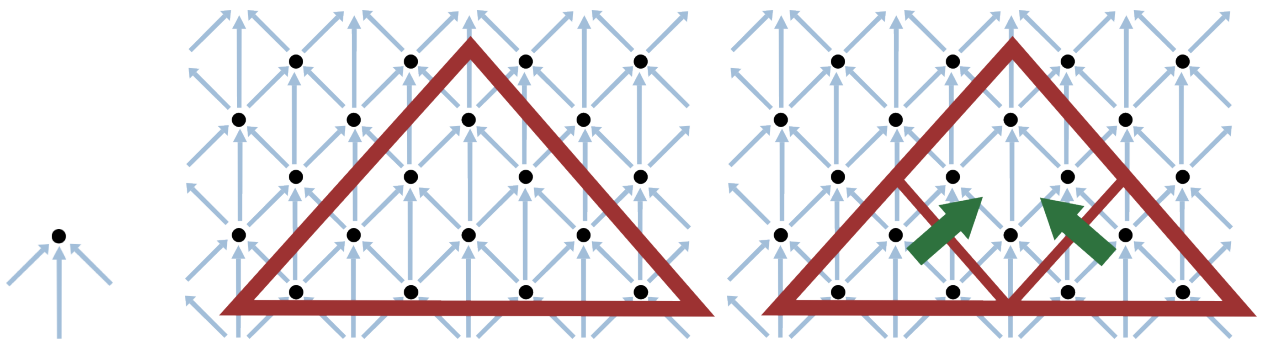


Рис. 2.1. Пример графа зависимости для одномерного вычисления по схеме FDTD. Локальный шаблон численной схемы (слева). Многоугольник покрывает некоторые узлы графа (в центре). Многоугольник разбит на части; зависимости, пересекающие границу разбиения, односторонние (справа)

Каждая из составных частей также соответствует алгоритму и имеет правило разбиения. Уровень разбиения определяется параметром, названным ранг. При однократном разбиении из алгоритма ранга  $R$  получаются алгоритмы ранга  $R - 1$ . Если фигура покрывает лишь один узел графа (или их некоторое минимальное количество), то ее алгоритм может состоять не в дальнейшем разбиении, а в выполнении операции, соответствующей этому узлу. Этой фигуре присвоен минимальный ранг, равный нулю.

На начальном этапе разбиения алгоритм определяется фигурой, покрывающей весь граф зависимостей задачи.

Например, наиболее часто используется пошаговый обход (рис. 2.2). Каж-

дый следующий слой графа зависимостей вычисляется только после полного выполнения предыдущего. В описанной выше терминологии фигура, покрывающая весь граф, разбивается на NT частей, каждая из которых покрывает один слой итераций. Внутри каждого слоя обход сетки при вычислениях часто реализован как  $d$ -мерный цикл, или используются параллельные вычисления.

В методе пространственного разбиения области (domain decomposition) каждый из слоев разбивается на несколько частей и каждый из них выполняется асинхронно параллельными вычислителями (рис. 2.2).

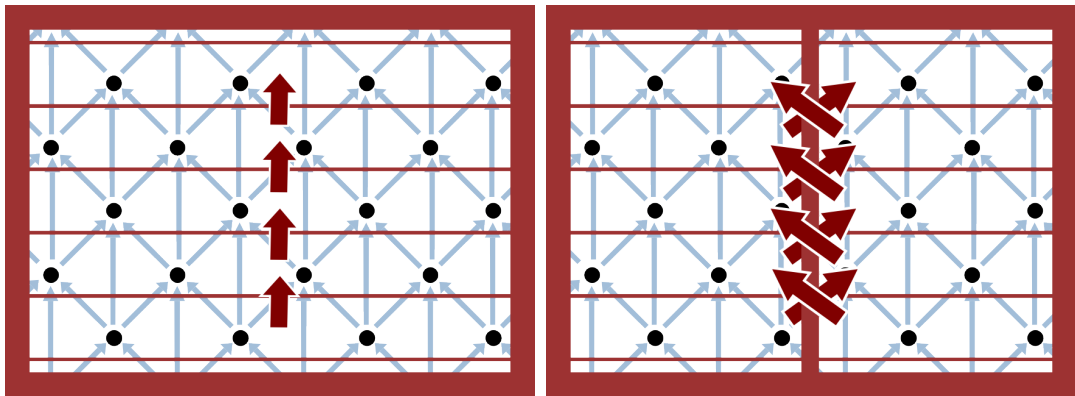


Рис. 2.2. Пошаговый обход (слева). Метод разбиения области; синхронизация между процессорами происходит на каждой итерации (справа)

Существует семейство локально рекурсивных нелокально асинхронных (LRnLA) [1] алгоритмов, в которых применяется разбиение графа на составные части, содержащие узлы на различных итерациях по времени. Кроме семейства LRnLA такой подход в современных реализациях встречается редко [89].

## 2.2. Выбор оптимального алгоритма для метода макрочастиц

Вариантов разбиения графа, кроме послойного, существует множество. Выбор алгоритма определяется шаблоном численной схемы, моделью параллельности используемого вычислительного устройства, средствами реализации.

Одним из вариантов является разбиение  $(d + 1)$ -мерного пространства на призмы. Основания призмы целиком лежат в одном слое итераций по времени. Наклон боковых ребер призмы выбирается так, чтобы они были как можно ближе к нормали к основаниям (для повышения локальности), но удовлетворяли необходимому свойству при разбиении фигуры алгоритма на подобные фигуры. То есть, все зависимости, пересекающие одну грань, должны быть односторонними. Этот наклон определяется шириной локального шаблона схемы.

Основание призмы выбирается исходя из требований локальности алгоритма и простоты его реализации. Из первого требования основания выбирается согласно форме локального шаблона схемы. Для схем типа «крест» одной из оптимальных фигур оснований становится  $d$ -мерный ортоплекс (отрезок, ромб или октаэдр), так как эта фигура наиболее плотно описывает шаблон. Шаблон для схемы макрочастиц оптимально вписывается в  $d$ -мерный куб.

Основание вида  $d$ -мерного куба отвечает также требованию простоты реализации рекурсивного алгоритма, так как при произвольном  $d$  возможно  $d$ -бинарное разбиение основания на подобные фигуры, и  $(d + 1)$ -бинарное разбиение фигуры алгоритма.

Такими свойствами обладает алгоритм, названный ConeFold (рис. 2.3). Этот алгоритм выбран для реализации в коде.

Чтобы воспользоваться возможностью SSE/AVX векторизации при реали-

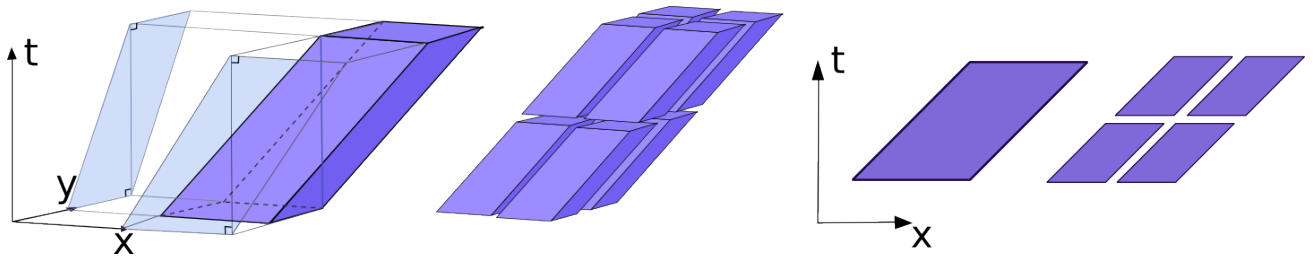


Рис. 2.3. Форма и разбиение алгоритма ConeFold. Проекция для 1D (справа) и 2D (слева) разбиений

зации кода, LRnLA разбиение на ConeFold сделано двумерным ( $d = 2$ ). В разбиении графа зависимостей предполагается двумерная область, а данные каждой ячейки представляют собой весь набор данных вдоль третьей оси трехмерной области моделирования.

При этом подходе обработка происходит следующим образом. Граф зависимостей задачи вписывается в трехмерный куб. При разбиении его на фигуры типа ConeFold получаются выделенные случаи алгоритма на границах (рис. 2.4). Эти алгоритмы отличаются разбиением. При однократном разбиении алгоритма в области получаем 8 таких же алгоритмов меньшего ранга. В случае граничных фигур, некоторые из них соответствуют алгоритмам внутри области, некоторые — граничным фигурам, некоторые оказываются снаружи и не учитываются. На минимальном ранге алгоритм отличается выполнением операций, соответствующих граничным условиям. Для одномерного случая всего 3 вида пересечения границы. Для областей больших размерностей возникает большое количество вариантов алгоритмов, для их написания и работы с ними введены обозначения:  $I$  — алгоритм на левой грани,  $D$  — внутри области,  $X$  — на правой грани. Для больших размерностей обозначения аналогичны. Например, в двумерном разбиении  $I\bar{X}$  описывает угол левый по оси  $x$ , правый по оси  $y$ ,  $D\bar{X}$  — правая грань по оси  $y$  (рис. 2.5, 2.6).

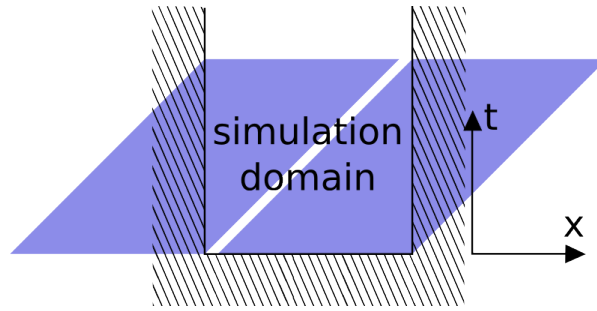


Рис. 2.4. Покрытие полного графа зависимостей прямоугольной области при помощи ConeFold максимального ранга для 1D разбиения

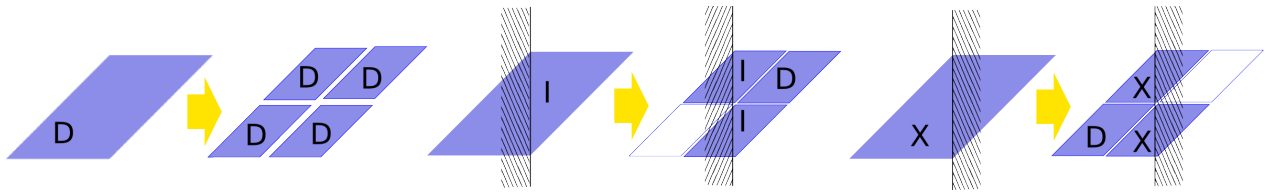


Рис. 2.5. Разбиение алгоритма внутри области, на левой границе и на правой границе. Одномерное LRnLA разбиение

### 2.3. Свойства LRnLA алгоритмов

Свойство локальности означает, что с определенным количеством данных можно выполнить большее число операций. Снижается нагрузка на пропускную способность вычислителя, которая для приложений численного моделирования является основным узким местом. Это свойство характеризуется параметром локальности алгоритма — отношением числа операций алгоритма к числу используемых в нем данных. В терминологии раздела 2.1 параметр аппроксимируется как отношение объема фигуры к ее проекции на пространство данных. Значит, чем меньше основание фигуры, и чем больше слоев по времени она включает, тем эффективнее соответствующий алгоритм. Послойный обход в этом смысле наименее эффективен.

Рекурсивность проявляется в разбиении алгоритмов. Разбиение каждой со-

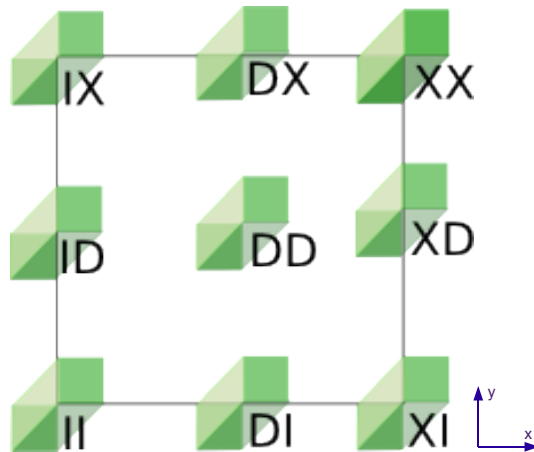


Рис. 2.6. Разбиение алгоритма внутри области и на границе, двумерное разбиение ставной части фигуры проходит аналогично исходной.

Высокая параллельная эффективность достигается за счет того, что в сравнении с алгоритмами с пошаговой синхронизацией, большее число операций проводится без передачи данных между параллельными процессорами.

## 2.4. ConeFold для метода частиц

Специфика применения алгоритмов к методу макрочастиц связана во-первых, с тем, что шаблоны метода могут захватывать до трех ячеек сетки, во-вторых, с возможностью перемещения частиц между ячейками. Возможность задания различных шагов для полей и для частиц также приводит к изменениям исходного алгоритма. Алгоритмы максимального ранга в этом случае рекурсивно разбиваются только вплоть до ConeFold ранга  $PicRank + 1$ . При последующем разбиении 4 верхних ConeFold продолжают рекурсивное разбиение вплоть до нулевого ранга, и на нулевом ранге произойдут вычисления полей по схеме FDTD с добавлением полученных ранее токов. Макрочастицы в этих вычислениях напрямую не участвуют. 4 нижних части алгоритма также разбиваются,



выделяя в верхнем слое только вычисления полей, до тех пор, пока в нижней части не образуются несколько ConeFold ранга  $FFRank = 2$  (рис. 2.7). Содержание этих функций отвечает за перемещение частиц и вычисление связанных с этим токов. На каждое выполнение функции нулевого ранга с вычислением по схеме PIC будет приходиться  $2^{PICRank+1} - 2^{FFRank}$  выполнений функций, отвечающих за пересчет полей. Для соотношения шагов  $dt_{PIC} = 12dt_{FLD}$  требуется  $PicRank = 3$ .

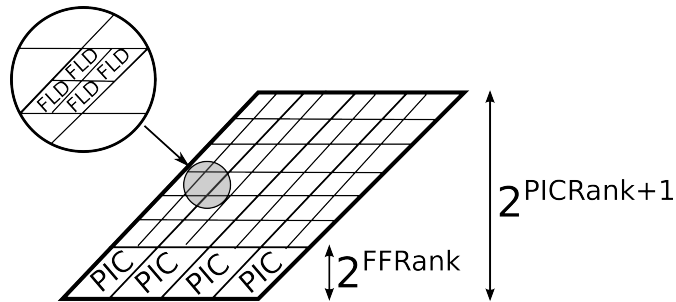


Рис. 2.7. ConeFold ранга  $PICRank + 1$  для метода макрочастиц, проекция на плоскость

ConeFold, обозначенный «PIC» на рис. 2.7, содержит четыре слоя алгоритмов ConeFold нулевого ранга (рис. 2.8). PIC1 — интерполяция полей на центры ячеек и обнуление массива токов. PIC2 — обработка частиц и суммирование новых токов. PIC0 и PIC3 пусты, но могут содержать дополнительные вычисления, например, для диагностики. PIC1 и PIC2 обладают важным отличием от ConeFold для полей. Так как шаблон схемы макрочастиц шире шаблона схемы FDTD, для вычислений в них необходимы данные из ячеек, находящихся левее проекции оснований призмы на один шаг сетки по всем осям. Это учтено при обработке граничных условий и смещении слоев друг относительно друга.

Для граничного условия выходит так, что нет ConeFold вида PIC1 и PIC2, основание которых выходило бы за левые границы области. Но шаблон схемы пересекает эту границу. Граничные ConeFold с этой особенностью кодируются символом J (рис. 2.9).

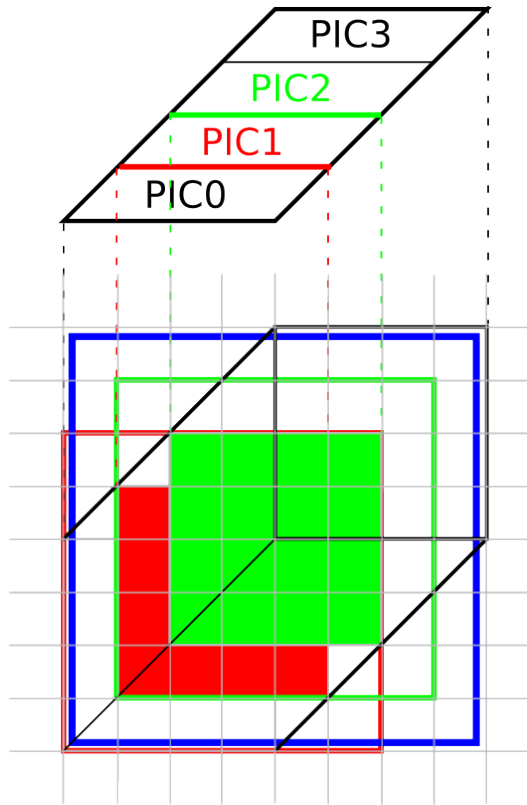


Рис. 2.8. Четыре слоя алгоритмов ConeFold PIC. Красным (зеленым) закрашено основание слоя PIC1 (PIC2). Контуром того же цвета обведен диапазон ячеек, предыдущие итерации в которых должны быть завершены для выполнения вычислений в ячейках оснований. Синий контур покрывает ячейки, на которые влияет выполнение PIC2

Если для стандартных ConeFold после каждого из них возможно выполнение следующего сверху (нижнее основание которого совпадает с верхним основанием предыдущего), то для ConeFold метода макрочастиц нужно провести смещение еще на одну ячейку вправо по всем осям. Так построены PIC1, PIC2, и за счет пустых PIC0, PIC3 вычисления полей в шагах FDTD тоже выполнены с необходимым смещением. Смещения на одну ячейку достаточно только в случае, если за один шаг частицы не могут пересечь более одной границы ячеек по каждой оси. Это алгоритмическое ограничение необходимо учитывать при выборе шага по времени каждого расчета.

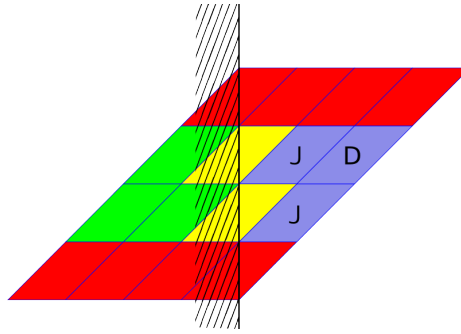


Рис. 2.9. Разбиение алгоритма PIC на границе, проекция на  $d = 1$ . ConeFold зеленого цвета выполнять не нужно, так как он находится за границей. ConeFold красного цвета отвечают PIC0 и PIC3, в них не содержатся вычисления, и их выполнение не требуется. ConeFold D содержит PIC2 и не отличается от таких же функций внутри области. На слоях PIC1 и PIC2 ConeFold J имеет основание внутри области, но использует данные, находящиеся за границей. Функции ConeFold желтого цвета кодировались бы буквой I, но, так как не содержат вычислений, попадающих в область, то они не нужны

## 2.5. Адаптация алгоритма для параллельной реализации

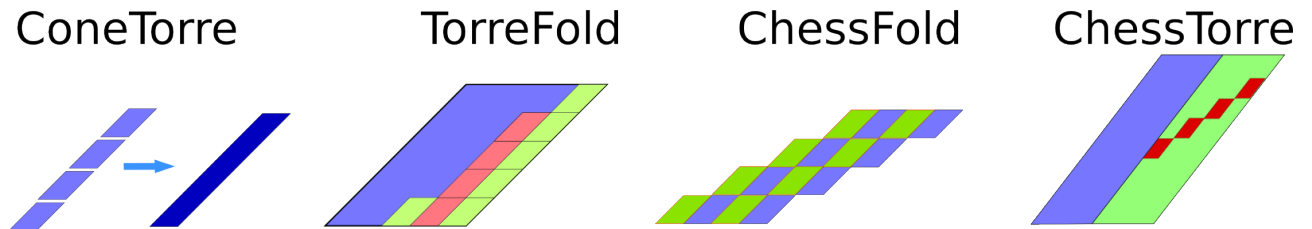


Рис. 2.10. Алгоритмы на основе ConeFold в одномерной проекции. В TorreFold сегменты разного цвета могут обрабатываться параллельными потоками. В ChessFold сегменты одного цвета асинхронны. В ChessTorre сегменты синего и зеленого цвета могут быть обработаны параллельно на разных узлах, а элементы красного цвета асинхронны между процессорами

Если на верхнем основании ConeFold поставить еще одну такую же фигуру, получится более высокая призма. Так строится алгоритм ConeTorre (рис. 2.10). ConeTorre представляет из себя высокую наклонную призму, которая разбивается горизонтальными плоскостями на алгоритмы ConeFold. ConeTorre имеет коэффициент локальности больший, чем ConeFold. Так как основания состав-

ляющих его ConeFold попарно совпадают (верхнее основание предыдущего с нижним основанием следующего), для вычислений требуется меньше загрузок данных.

Чтобы при помощи ConeTorre покрыть всю область моделирования, использован алгоритм TorreFold. Внешняя его форма такая же, как у алгоритма ConeFold максимального ранга. Его разбиение проходит на фигуры класса ConeTorre той же высоты. TorreFold параметризуется числом  $nLArank$ , и основание получившихся ConeTorre составляет  $2^{d(MaxRank-nLArank)}$  ячеек сетки. Так как ConeTorre собран из ConeFold ранга  $PICRank + 1$ , то необходимо выполнение соотношения  $MaxRank - nLArank - PICRank > 0$

Для подробного описания двумерного разбиения графа зависимостей на алгоритмы TorreFold воспользуемся иллюстрацией (рис. 2.11) и введем обозначения. На иллюстрации изображена двумерная проекция данных всей области моделирования. На ней отмечены символами А, В, С и т. д. квадратные области. Пусть в области моделирования выполняется TorreFold, разбивающийся на ConeTorre, использующие эти области в качестве оснований. В этом примере  $nLArank = 2$ . Обозначим ConeTorre символом, записанным в основании. Обозначим ConeFold ранга  $2^{MaxRank-nLArank}$  в ConeTorre А символом А0, А1, А2 и т.д., где цифра обозначает в каком слое (всего  $2^{MaxRank-nLArank}$  слоев) конкретного ConeTorre находится этот ConeFold.

F	E	B	A
H	G	D	C
N	M	J	I
P	O	L	K

Рис. 2.11. Иллюстрация к описанию алгоритма TorreFold

Итак, выполнение необходимо начать с A0. От результатов A0 напрямую зависят B0, C0, A1. Эти три алгоритма между собой асинхронны. Выполнение каждого из них не зависит от результата другого, и их можно выполнять в произвольном порядке или параллельно. После их выполнения могут быть асинхронно запущены I0, D0, E0, B1, D1, A2.

Алгоритм TorreFold устроен так, что каждый ConeTorre отдается на выполнение одному параллельному потоку. Только когда выполнение некоторого ConeTorre завершается, поток освобождается и начинает следующий ConeTorre, который не был ранее задействован.

Пример последовательности выполнения приведен в табл. 2.1 для случая, если в системе доступно 4 параллельных потока. После выполнения A3 первый поток начинает выполнение следующего ConeTorre, E (начиная с ConeFold E0).

Таблица 2.1. Иллюстрация к описанию алгоритма TorreFold (глава 2.5)

	1-й поток	2-й поток	3-й поток	4-й поток
1-й этап	A0			
2-й этап	A1	B0	C0	
3-й этап	A2	B1	C1	D0
4-й этап	A3	B2	C2	D1
5-й этап	E0	B3	C3	D2
...	...	...	...	...

TorreFold подходит для систем, где количество параллельных потоков ограничено, а именно для многоядерных процессоров, от настольных (2-4 ядра) до Xeon Phi [90].

Если целью является максимальная асинхронность, то лучше подходят алгоритмы на основе ChessTorre (рис. 2.10). Ранее описанные алгоритмы ConeTorre

и TorreFold при  $d = 1$  покрывают квадратный массив  $2^{MaxRank} \times 2^{MaxRank}$  ячеек (в каждой ячейке вектор из  $Nz$  элементов для трехмерного моделирования). Из таких квадратов можно собрать произвольную прямоугольную область. Квадраты распределяются между процессорами. Все алгоритмы ConeFold с основанием на некотором квадрате выполняются соответствующим ему процессором, независимо от того, на каком уровне по итерациям он находится. Если собранная из  $N_c$  квадратов область остается квадратной, то оптимально использование  $N_c/(d + 1) = N_c/3$  процессоров.

Этот подход используется для распределения вычислений между NUMA-узлами. Внутри узла вычисления могут быть распределены между потоками при помощи алгоритма TorreFold. При использовании суперкомпьютера доступно дальнейшее вложение алгоритмов. Полную область можно подвергнуть декомпозиции на ConeTorre и использовать TorreFold. Каждый алгоритм ConeTorre будет посчитан на отдельном узле кластера. На узле внутри ConeTorre выполняется ChessFold, и это составляет алгоритм ChessTorre (рис. 2.10).

Последнее время актуальными становятся гетерогенные вычислительные системы, включающие в себя вычислительные узлы как с обычными процессорами, так и с графическими процессорами общего назначения. Рассмотренные алгоритмы обобщаются и на эти системы [43, 44, 91].

## 2.6. Реализация в программном комплексе CFHall

Код написан на языке C++, асинхронные вычисления осуществляются при помощи интерфейса POSIX threads. Алгоритмы ConeFold выполнены в виде рекурсивных шаблонов функций, параметризованных по рангу и типу данных.

### 2.6.1. Рекурсивное хранение данных

Для хранения данных используются не стандартные многомерные массивы, а локально-рекурсивный массив cubeLR, обход элементов в котором соответствует кривой Лебега [92] (см. рис. 2.12). В вычислительной технике этот подход для хранения больших массивов данных был применен Муртоном [93].

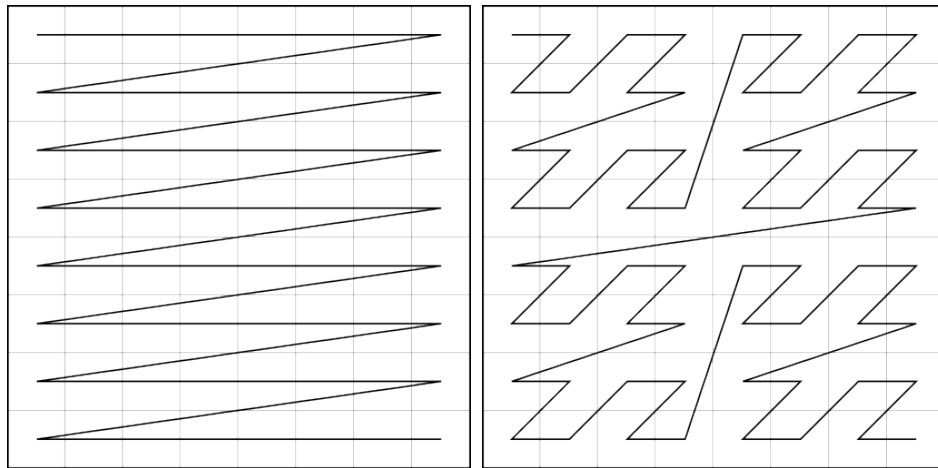


Рис. 2.12. Заполнение двумерного массива в обычном порядке (слева) и по кривой Лебега (справа)

Существенным недостатком обыкновенных многомерных массивов для вычислительных программ является нелокальный доступ к соседним элементам на вычислительной сетке. Если размер вычислительной области составляет  $N_x \cdot N_y \cdot N_z$  элементов, то в обыкновенном массиве для каждой ячейки данные, относящиеся к соседней к ней по первой оси, лежат прямо следом за ней, по второй оси отстоят на  $N_x$  элементов, по третьей оси — на  $N_x \cdot N_y$ . Современные вычислительные системы устроены таким образом, что чем ближе расположены данные, участвующие в одной операции, тем быстрее производятся вычисления. Для актуальных вычислений размеры сеток обычно достаточно велики, так что использование обыкновенных массивов крайне неэффективно.

Хранение данных в локально-рекурсивном массиве ускоряет вычисление во много раз. Отличие в расположении данных в этих двух структурах проиллюстрировано на рис. 2.13. Цифрами обозначен порядок расположения данных в памяти. В трехмерном случае эти данные представляют собой структуры, включающие в себя все компоненты электромагнитных полей, токов, а также данные, относящиеся к частицам, в одной ячейке. То есть, для определенности, внутри ячейки, на трех ее левых гранях, на трех ребрах между этими гранями, и на узле, ближайшем к началу координат. При таком выборе трехмерный массив `cubeLR` может покрыть всю область, кроме правых границ. Для значений полей на правых гранях используется двумерный локально-рекурсивный массив, для значений полей на ребрах между ними — одномерный, а для узла, наиболее далекого от начала координат используется нульмерный массив, содержащий одну ячейку.

1	2	3	4	5	6	...	$N_x$
$N_x+1$	$N_x+2$	$N_x+3$	$N_x+4$	$N_x+5$	$N_x+6$	...	$2*N_x$
$2*N_x+1$	$2*N_x+2$	$2*N_x+3$	$2*N_x+4$	$2*N_x+5$	$2*N_x+6$	...	$3*N_x$
...	...	...	...	...	...	...	...

(a)

1	2	5	6	17	18	...
3	4	7	8	...	...	...
9	10	13	14	...	...	...
11	12	15	16	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...

(б)

Рис. 2.13. Отличие в расположении данных в стандартном массиве (а) и в `cubeLR` (б)



### 2.6.2. Структуры для обработки частиц

В методе макрочастиц частицы свободно перемещаются внутри области моделирования. Для локальности доступа к данным важна сортировка частиц, то есть хранение данных частиц должно быть сопоставлено с данными ячеек сетки, и это должно быть верным и при перемещении частиц в другие ячейки.

Для каждой частицы в памяти содержатся ее сорт, 3 компоненты импульса, 3 компоненты координаты. Координаты указывают смещение частицы относительно центра ячейки, в которой она находится, принимают значения от  $(-0.5)$  до  $0.5$ . По тому, в списке какой ячейки находится частица, можно определить ее координату с точностью до одной ячейки (см. ниже) в плоскости  $x-y$ . Поэтому дополнительно для каждой частицы сохраняется координата ее ячейки, т. е. целые числа  $i_z = 1 \dots N_z$ ,  $i_x = 0, 1$ ,  $i_y = 0, 1$ .

Управление данными частиц организовано при помощи виртуальной памяти операционной системы. Каждой ячейке двумерного локально-рекурсивного массива присвоен список частиц, находящихся в этой ячейке. Изначально это — массив определенного размера. Если в ячейке окажется больше частиц, чем предусмотрено, в виртуальной памяти выделяется дополнительное место того же размера.

ConeFold слоя PIC2 специфицированы не на нулевом ранге, как все остальные функции в коде, а на первом. В одной функции обрабатываются подряд 4 списка частиц. Если соединить 4 списка в один, эффективность использования памяти возрастет. Это объясняется тем, что 4 не заполненных до конца списка содержат больше зарезервированной неиспользованной памяти, чем один.

Частицы при переходе в другие ячейки (за пределы четырех, которые обрабатываются в этой функции) записываются в списки этих ячеек. Если эти ячейки еще не обрабатывались на этом шаге, пришедшие частицы должны быть

отмечены, чтобы не производить их ускорение еще раз. Они копируются в начало списка этой ячейки (место освобождается за счет того, что данные частицы из начала списка перемещаются в его конец), и обновляется число таких частиц ( $Nexch$ ) в списке. При обработке ячейки с  $Nexch > 0$  частицы списка обрабатываются, начиная с элемента с номером  $Nexch$ . После обработки ячейки  $Nexch$  становится равным нулю.

### 2.6.3. Векторизация

LRnLA разбиение выбрано двумерным (см. раздел 2.2), и в конкретной реализации массив `cubeLR` сделан двумерным, для третьей оси использована векторизация SSE/AVX. Суть ее заключается в том, что современные процессоры могут производить вычисления не только с обыкновенными числами, но и с векторами из двух, четырех или восьми чисел. Времени на такую операцию затрачивается не больше, чем на операцию с числами. Составив из чисел одномерного массива вектора по 4 числа, можно в 4 раза увеличить производительность программы. В данной реализации для применения векторизации используется векторизованный массив `VecC`, который гибко выбирает тип векторизации (SSE, AVX, или ее отсутствие) в зависимости от возможностей используемого процессора. Его использование обеспечивает, во-первых, возможность компиляции программы на процессорах, поддерживающих различные типы векторизации, и во-вторых, удобную работу с периодическими граничными условиями.

### 2.6.4. Тестирование векторизации

Ввиду сложности полного программного комплекса, реализация кода проходила в несколько последовательных этапов с постепенно возрастающей сложностью. Начальным этапом была реализация только схемы FDTD для полей.

Для постепенного перехода к описанию плазмы на следующем шаге была реализована модель плазмы аналогичная модели Друде [94]. В предположении, что в каждой ячейке находится один электрон, на который действует только электрическое поле, уравнения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{E}, & \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \nabla \times \vec{B} - \vec{j}, \\ \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} &= -\vec{E}, & \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} &= \vec{p}, & \vec{j} &= -\vec{p}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Эта модель подходит для моделирования малых продольных колебаний плазмы. Дисперсионное соотношение для этой системы получается подстановкой плоской волны ( $E_x = E_0 \exp(i\omega t - ik_x x)$ ) в систему уравнений:

$$\omega^2 = 1. \quad (2.2)$$

Его численный аналог:

$$\frac{4}{\Delta t^2} \sin^2 \left( \frac{\omega \Delta t}{2} \right) = 1. \quad (2.3)$$

На этом этапе была введена векторизация массива по оси  $z$ . Исследовано время, затрачиваемое на вычисления в одной ячейке на одном шаге по времени в двух вариантах:

- с вычислением импульсов, смещений и токов,
- только с решением уравнений Максвелла.

Результаты приведены в таблице 2.2. Тестирование проводилось на компьютере с процессором Intel Core i5 2400.

### 2.6.5. Кодогенерация

В разделе 2.2 было упомянуто отличие функций ConeFold для обработки границ. При двумерном разбиении получаем всего 9 вариантов. Для каждого

Таблица 2.2. Число тактов, необходимых для вычислений в одной ячейке, реальная производительность и эффективность вычислений при различных способах векторизации. В правых столбцах отмечено ускорение

Maxwell, 15*,27+	clocks	GFLOPs	Eff(+)		
float	1	29,6	4,68	91,2%	
Float[4]	4	9,54	14,53	70,8%	3,10
Float[8]	8	7,72	17,95	43,7%	1,24 3,8
double	1	32,5	4,26	83,1%	
Double[2]	2	19,3	7,18	69,9%	1,68
Double[4]	4	15,9	8,72	42,5%	1,21 2,0
Gcc 4.5					
+Current, 18*,18+	clocks	GFLOPs	Eff(+)		
float	1	55,26	4,66	81,4%	
Float[4]	4	18	14,30	62,5%	3,07
Float[8]	8	14,96	17,21	37,6%	1,20 3,7
double	1	61,43	4,19	73,3%	
Double[2]	2	38,3	6,72	58,7%	1,60
Double[4]	4	33,4	7,71	33,7%	1,15 1,8

из уровней рекурсии алгоритмов должно быть написано 9 функций, отличающихся способом обработки границы. Так как содержание этих функций может быть достаточно объемным, а отличие для границ минимально и однозначно определено граничным условием, используется автоматическая кодогенерация [34], которая дает следующие преимущества.

Численная схема для метода частиц занимает более сотни строк кода. Ручная отладка девяти вариантов подобных функций затратна. Автоматическая генерация исключает человеческие ошибки при написании и упрощает возможное изменение численной схемы.

Кодогенерация позволяет отделить численную схему от граничных условий с точки зрения написания кода. Вместо ручного написания всех вариантов, достаточно указать численную схему, и определить, какие замены в ней необходимы у каждой из четырех границ. В области генерируется основная схема, у

границ в вычислениях производятся строго определенные замены в вычислениях. В углах вычисления получены последовательным применением замен около двух границ.

Еще одно отличие функций, обрабатывающих границы, связано с реализацией ConeFold для массивов вида cubeLR. Для обращения к данным правых границ используются другие типы указателей, так как там использованы массивы меньшей размерности (см. раздел 2.6.1). Для обращения к данным левых границ смещения в массиве определяются отлично от основной области.

Преобразование заданной численной схемы в текст кода осуществляется при помощи средств языка Python.

### 2.6.6. Интерфейс

При помощи инструмента SWIG программный код компилируется в библиотеку `hall.so`. Библиотека содержит функции настройки и запуска вычисления, и они вызываются при помощи Python. Такой подход позволяет удобно изменять параметры вычислений. Создан файл интерфейса на языке Python, который содержит кодогенерацию, запуск компилятора, запуск функций настройки и запуска счета.

### 2.6.7. Вывод результатов

Все полученные при расчетах значения полей можно выводить и обрабатывать.

Стандартом вывода являются трехмерные рекурсивные массивы значений полей в определенные моменты времени. А именно, согласно описанному алгоритму, моменты, когда все значения массива соответствуют одной временной итерации, наступают каждые  $2^{MaxRank}(2^{PICRank+1} - 2^{FFRank})$  шагов  $dt_{FLD}$ . Ути-

литами для просмотра таких файлов являются `arr3D` [95] и `im3D`.

В эти же моменты можно выводить данные (координаты и импульсы) всех макрочастиц для просмотра шестимерного распределения частиц в фазовом пространстве. Для просмотра используется утилита `mxwPts`.

Можно отслеживать траектории отдельных частиц. В отдельный текстовый файл записываются координаты и импульсы помеченной частицы в зависимости от времени.

Имеются диагностики усредненных значений компонент поля и энергии системы.

## 2.7. Тестирование

Тестирование кода проводилось в задачах, для которых известны решения полученного аналитически дисперсионного соотношения. В круг задач, в которых проводилось тестирование, входят:

- вычисления частот и длин волн поперечных электромагнитных колебания в вакууме и в плазме,
- отражение электромагнитного импульса от границы вакуум-плазма в зависимости от длины волны и частоты.
- возбуждение продольной волны при наклонном падении импульса на слой плазмы
- возбуждение кильватерных волн лазерным импульсом
- возбуждение волны биения встречными лазерными импульсами

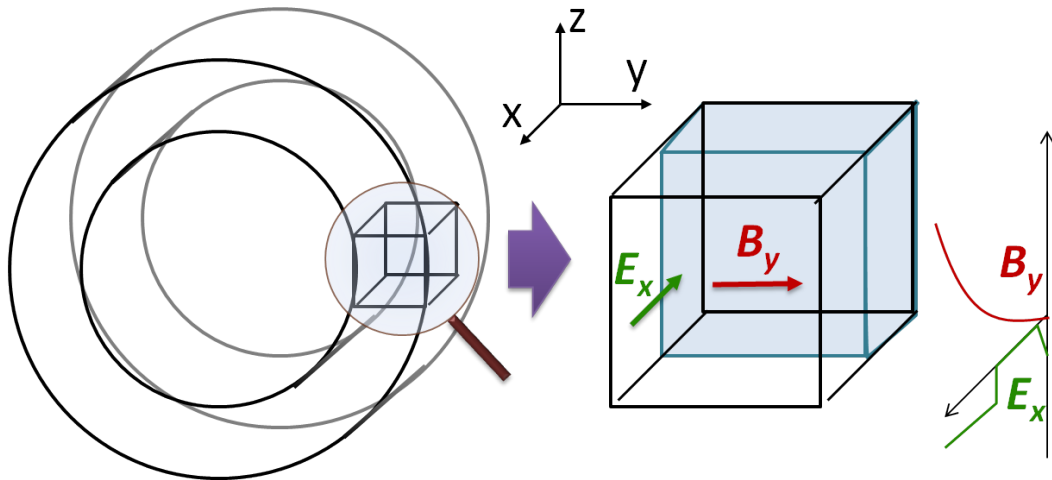


Рис. 2.14. Исследуемая трехмерная область

### 2.7.1. Тестирование в задаче о поведении плазмы в скрещенных электрическом и магнитных полях

Ниже описана одна из задач, которые были использованы при тестировании программного комплекса [26, 29, 30, 36]. Цель проведения расчета состояла в проверке описания аномального транспорта в канале холловского двигателя. Хотя параметры не строго соответствуют реальным системам, подобные сильно упрощенные постановки могут быть полезны для получения представлений об исследуемом явлении, понимания физических механизмов, создания моделей и постановок задачи для последующих численных экспериментов, описывающих плазменные двигатели. Исследуемой трехмерной областью выбран параллелепипед, изображенный на рис. 2.14. На трех парах противоположных граней параллелепипеда наложены три различных вида граничных условий - периодические, условия на идеальном проводнике и условия симметрии. Такую геометрию можно трактовать как сектор канала холловского двигателя с бесконечным радиусом. Условия симметрии приближают условия на диэлектрических стенках канала, а условия на идеальном проводнике — анод и катод.

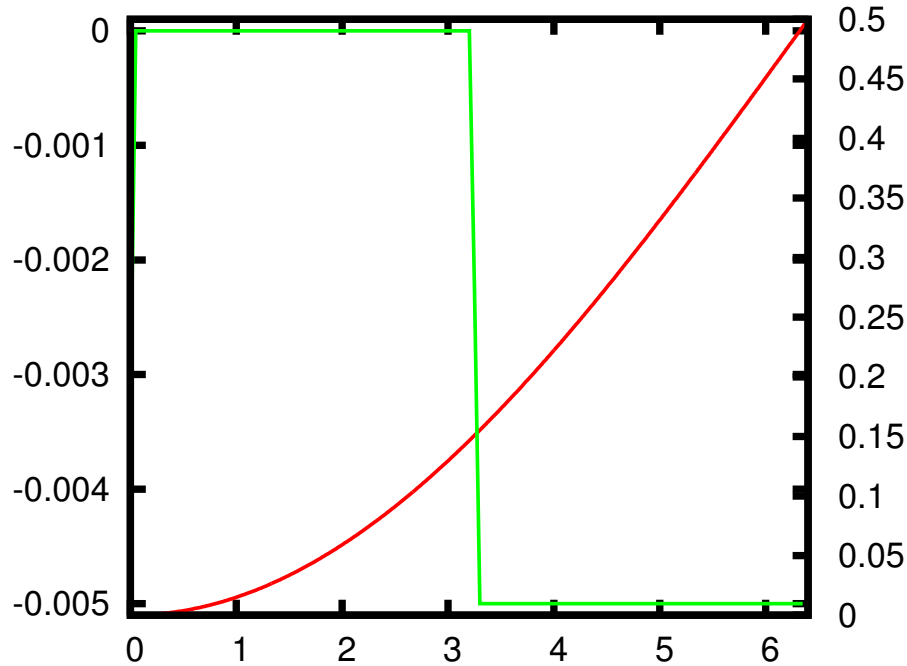


Рис. 2.15. Профили вдоль оси  $x$  электрического (зеленым) и магнитного (красным) полей в области

В начальный момент плазма занимает половину области около левой границы по  $x$ , скорости частиц соответствуют распределению Максвелла с температурой 0.0025. В области задаются внешний постоянный профиль магнитного поля вдоль оси  $y$   $B_y = B_0(1 - \cos(x))$  и электрическое поле вдоль оси  $x$  (рис. 2.15). Электрическое поле задается равным нулю в плазме, чтобы исключить из рассмотрения процесс установления равновесия между плазмой и полем. Ненулевое значение  $E_x$  остается в области вакуума.

Необходимо, чтобы в начальном условии электрическое поле было согласовано соотношением  $div \vec{E} = \rho$  с плотностью заряда. Поэтому вводится заданное смещение  $\delta = 0.1$  электронов относительно ионов, и из значения этого смещения с учетом того, что в области плазмы  $E_x = 0$ , посчитано необходимое значение поля.

В такой постановке можно исследовать  $E \times B$  ток, появление плазменных



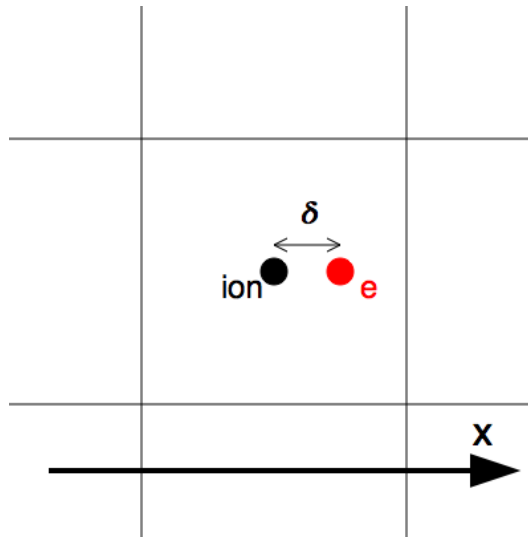


Рис. 2.16. Смещение электронов относительно ионов в начальный момент

неустойчивостей и транспорт электронов к противоположной границе.

Исследованы три варианта с разными амплитудами магнитного поля, которые следуют из соотношения радиусов Лармора для электронов и ионов и размера области  $L$ :

- $B_0 = 5$  (вариант 1)  $r_e < r_i < L$  и электроны и ионы замагничены;
- $B_0 = 0.5$  (вариант 2) замагничены только электроны,  $r_e < L < r_i$ ;
- $B_0 = 0.05$  (вариант 3) ионы и электроны не замагничены,  $L < r_e < r_i$ .

В выбранных безразмерных единицах граничными значениями полей, при которых  $r_e \sim L$  и  $r_i \sim L$  являются  $B \sim 0.008$  и  $B \sim 0.3$  соответственно.

Время моделирования составляет до 8000, размер области  $6.4 \times 6.4 \times 6.0$  ( $128 \times 128 \times 120$  ячеек). С использованием кода CFhall такие расчеты по времени занимают немногим более суток на одном процессоре.

В результате расчетов обнаружено, что проникновение плазмы сквозь магнитное поле имеет место во всех рассмотренных вариантах (рис.2.17), однако,

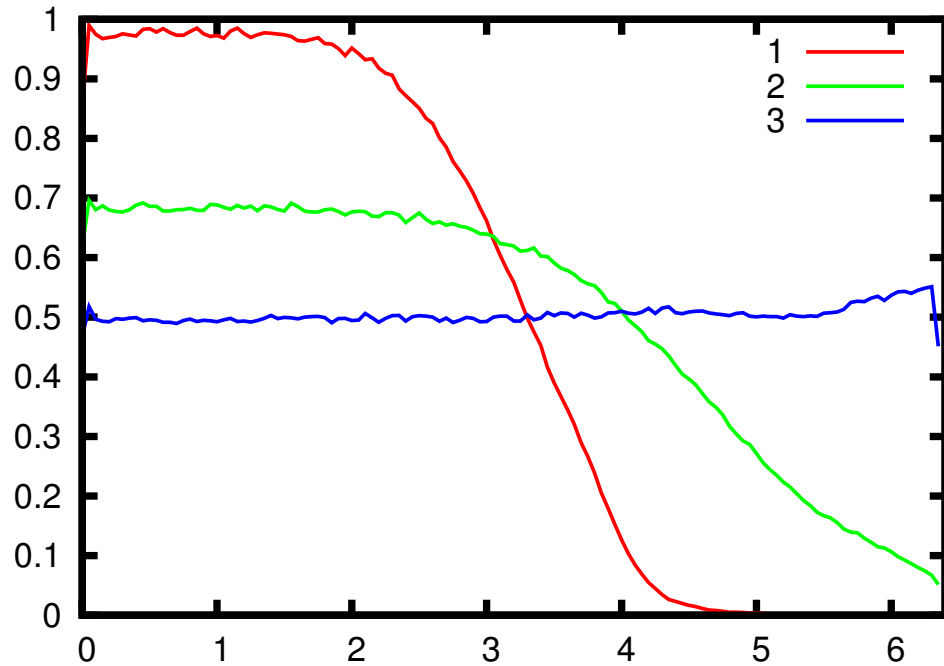


Рис. 2.17. Профили вдоль оси  $x$  плотности ионов в момент времени  $t \sim 8000$  для различных вариантов (по номеру) максимальных амплитуд полей

изменение магнитного поля приводит к существенно различным механизмам проникновения.

В случае, когда магнитное поле настолько мало, что электроны не замагничены (вариант 3), электроны выходят из области, занимаемой плазмой, ускоряются электрическим полем, и вытягивают за собой ионы.

В варианте 2 электроны замагничены. Они выходят из области, занимаемой плазмой, на величину ларморовского радиуса и создают отрицательно заряженное облако, которое ускоряет ионы в положительном направлении оси  $x$ . После начала продвижения ионов в область вакуума в плазме возникает возмущение, соответствующее распространению затухающего ионного звука в изотермической плазме (рис.2.18).

Описанное поведение подтверждается изменением со временем суммарной плотности заряда (рис. 2.19). В варианте 1, в котором магнитное поле доста-

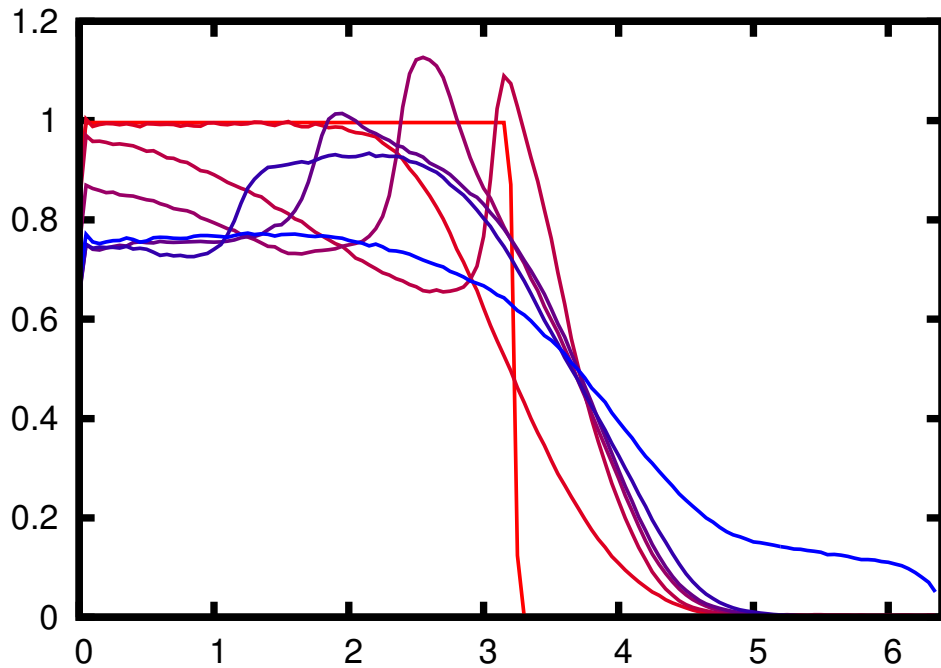


Рис. 2.18. Профили по оси  $x$  плотности ионов в моменты времени  $t = 0, 400, 1200, 1500, 1900, 2300, 8000$ . Максимальные амплитуды внешних полей  $B_y = 0.5, E_x = 0.005$

точно велико, ионы также становятся замагниченными, и за все время расчета плазма не доходит до противоположной границы области.

В течение всего времени моделирования сохраняется квазинейтральность плазмы.

При распространении плазмы в области на границе плазма-вакуум наблюдаются азимутальные волны с фазовой скоростью, равной тепловой скорости электронов (рис. 2.20). Стоит отметить, что изначальная постановка задачи содержала лишь одномерные зависимости полей от пространства, поэтому этот результат показывает полезность кода для исследования трехмерных процессов.

При проведении дискретного Фурье-анализа [96] выявлены доминирующие частоты колебаний электронов на переднем фронте распространяющейся плазмы на характерных временных масштабах (табл. 2.3). Как было замечено при

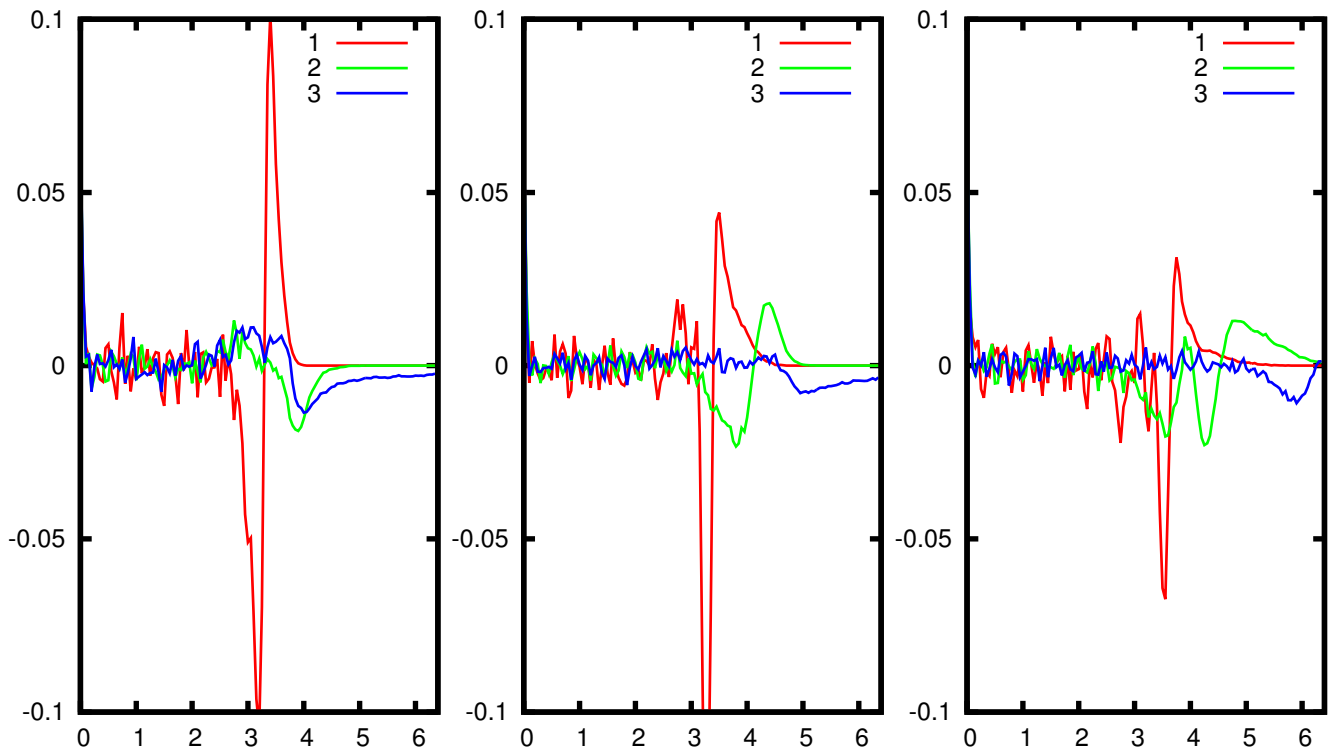


Рис. 2.19. Профиль по оси  $x$  суммарной плотности заряда для трех вариантов расчета в моменты времени  $t \sim 200, t \sim 400, t \sim 800$

аналитическом анализе, зависимость значений магнитного поля от волнового азимутального числа  $B(k)$  носит кубический характер.

В ходе тестирования исследовано три варианта постановки в зависимости от величины внешнего магнитного поля. В этих вариантах получено три различных режима распространения плазмы сквозь магнитное поле.

Проведенные тестовые расчеты показывают применимость программного комплекса при моделировании трехмерных процессов и его основное преимущество: при том, что используется кинетическая модель без широко распространенных калибровок физических параметров, вычисления возможны за реальные сроки.

Значение магн.поля	5.0	0.5	0.05
Время возникновения	870	3270	2020
Мода колебаний	10	4	2
Координата возникновения	$3.7 \pm 0.1$	$5.35 \pm 0.15$	$5.95 \pm 0.10$
Волновое число	10.47	4.19	2.09
Длина волны	$12 \lambda_D$	$30 \lambda_D$	$60 \lambda_D$

Таблица 2.3. Значения характеристик возникающих азимутальных возмущений

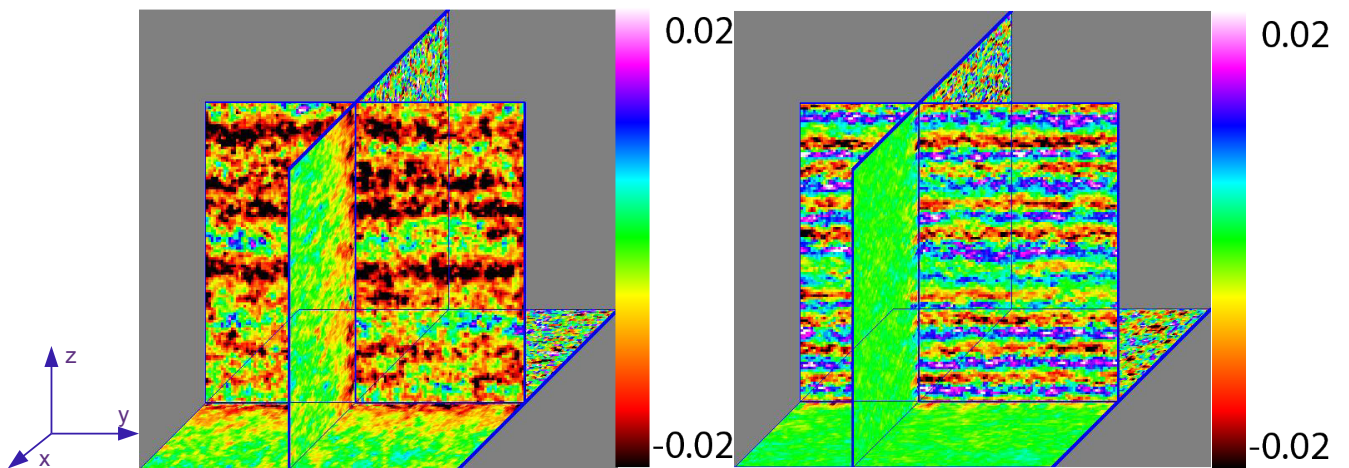


Рис. 2.20. Азимутальные колебания поля  $E_x$  (слева) и  $E_z$  (справа) на границе вакуум-плазма

## Глава 3

## Моделирование филаментационной неустойчивости

Данная глава посвящена исследованию роли филаментационной неустойчивости во взаимодействии лазерного импульса со сверхкритическим плазменным слоем.

### 3.1. Линейная теория филаментации в плазме

Напомним теорию филаментационной неустойчивости.

**Вейбелевской (филаментационной) неустойчивостью** называют неустойчивость в плазме с анизотропным распределением частиц по скоростям. В работе [13] проведен линейный анализ ее развития в системе с бимаксвелловским распределением плазмы. В сопутствующей работе [97] объяснен механизм ее развития в системе с простейшим примером анизотропии скоростей — в двухпучковой системе. Этот механизм другими словами и с иллюстрациями повторен в некоторых других работах [19, 98].

Пусть изначально система состояла из двух пучков частиц, со скоростями, равными  $v_0$ , направленными противоположно вдоль оси  $z$ . Суммарный ток в этой системе равен нулю. Предположим, возникло небольшое возмущение компоненты магнитного поля  $B_x(y)$  (рис. 3.1). Это возмущение повернет траектории пучков так, что возникнут нескомпенсированные токи. В соответствии с законом Ампера, эти токи усилят существующее магнитное поле. Таким образом, случайное возмущение магнитного поля в такой системе будет нарастать.

Из общих соображений о механизме нарастания поля может быть получена

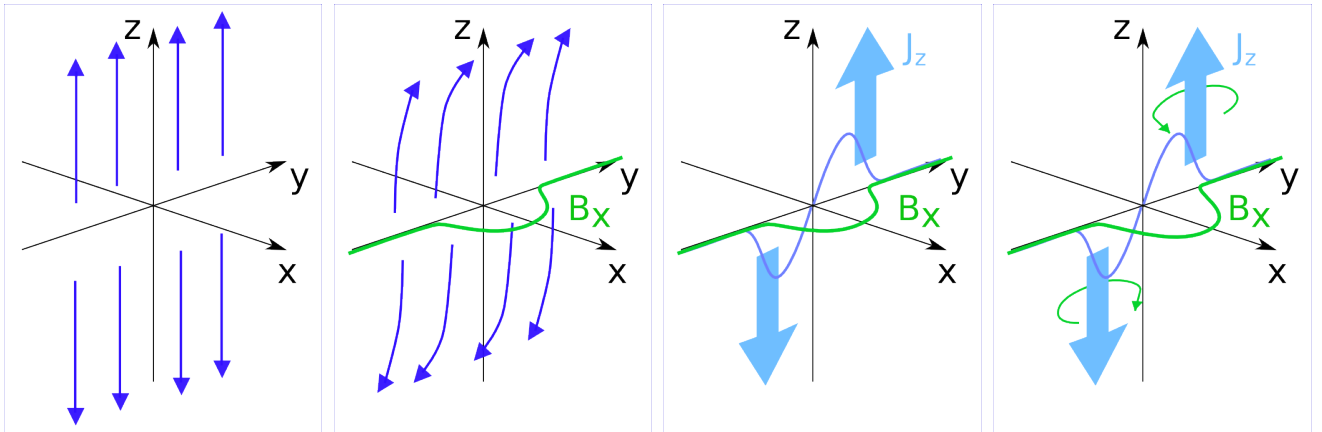


Рис. 3.1. Механизм развития филаментационной неустойчивости

оценка инкремента экспоненциального нарастания полей и токов, равная  $v_0$  в выбранных единицах.

Более точную оценку можно получить, проведя линейный анализ этой системы. Обычно это производится следующим образом. Проводится линеаризация системы: все величины представляются в виде сумм равновесных значений и малых отклонений от равновесия. Считается, что невозмущенные значения удовлетворяют системе, и отвечающие им слагаемые сокращаются. Членами второго порядка малости пренебрегают. Благодаря линейности системы ее можно представить в виде суммы плоских волн. Для получения дисперсионного соотношения в этом случае можно было бы использовать преобразование Фурье. Такой подход используют для простых оценок [23, 76], но в некоторых случаях он приводит к расходящимся интегралам. Более правильно решать систему при помощи преобразования Лапласа [99]. В преобразованных величинах система решается. Обратное преобразование состоит во взятии интеграла по прямой, параллельной мнимой оси, и сводится к вычислению вычетов в конечном числе особых точек. Эти точки являются корнями уравнений  $\omega(\vec{k}) = 0$ , где  $\omega$  — комплексная величина. Ее мнимая часть  $\gamma(\vec{k})$  указывает инкремент нарастания первоначального возмущения поля. В зависимости  $\gamma(\vec{k})$  интересно

выделить участки максимума. Значения  $\vec{k}$ , при которых инкремент максимален, указывают на длину волны колебания, которое будет нарастать наиболее быстро.

Численные параметры моделирования, направленного на изучение вейбелевской неустойчивости, должны быть подобраны так, чтобы шаг сетки оказался в несколько раз меньше ожидаемой длины волны нарастающих колебаний.

Уравнение в общем виде оказывается сложным для аналитического решения. Упростить его можно, ограничив геометрию решения. Например, рассмотреть только строго поперечные направлению оси анизотропии колебания. Для системы противоположно направленных холодных пучков электронов равной плотности анализ проведен в [100, 101]. Формула для инкремента с учетом релятивизма выглядит (в безразмерном виде) так [102]:

$$\gamma_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left(\frac{1}{\gamma_0^3} + k_{\perp}^2\right)^2 + \frac{4k_{\perp}^2 v_0^2}{\gamma_0}} - \left(\frac{1}{\gamma_0^3} + k_{\perp}^2\right)}. \quad (3.1)$$

Здесь  $\gamma_0$  – релятивистский фактор. У этой зависимости нет максимума. С нарастанием  $\vec{k}$  инкремент увеличивается и приближается к

$$\frac{\gamma_{\perp}^{\text{Max}}}{\omega_p} \sim \frac{|v_0|}{\sqrt{\gamma_0} c}. \quad (3.2)$$

Это означает, что наиболее быстрое нарастание проявляют возмущения с как можно меньшей длиной волны. Однако холодные пучки — это только приближение реальной или численной плазмы, и минимальная длина волны имеет естественное ограничение. В первом случае это радиус экранировки Дебая [103], во втором — шаг сетки, эффекты численного шума. Малый размер поперечных колебаний указывает на то, что развитие неустойчивости проявляется в появлении нитевидной структуры (филаментации) в магнитных полях и плотности токов. По оценкам, толщина филамента имеет порядок  $\sim 2c/\omega_p$  [15].



Возможен нелинейный анализ неустойчивости в некоторых конкретных случаях [51, 104].

Если ограничиться рассмотрением продольных к направлению движения пучков возмущений, то получатся соотношения для продольной двухпучковой неустойчивости. Максимум инкремента двухпучковой неустойчивости приходится на колебание с волновым числом

$$k_{\parallel}^{\text{Max}} \frac{c}{\omega_p} = \frac{c\sqrt{3}}{2v_0\gamma_0^{3/2}}, \quad (3.3)$$

где  $v_0$  — скорость пучков,  $\omega_p$  — ленгмюровская частота электронов. Его значение при  $k_{\parallel}^{\text{Max}}$  равно

$$\frac{\gamma_{\parallel}^{\text{Max}}}{\omega_p} = \frac{1}{2\gamma_0^{3/2}}. \quad (3.4)$$

Численное решение позволяет рассмотреть все направления вектора  $\vec{k}$  в двумерном пространстве (под любым углом к направлению пучков) [105–109]. В двухпучковой системе поперечная неустойчивость преобладает, если скорость пучков близка к релятивистской. Показано [105], что для неравных по плотности пучков преобладающей окажется косая неустойчивость с направлением колебаний, не лежащем на основных осях системы.

Определенный максимум для поперечной неустойчивости и пучков одинаковой плотности можно наблюдать, если вместо холодных пучков взять пучки с некоторым распределением по скоростям, например, распределением «водяной мешок» [110] или Максвелла-Ютнера [111]. Для распределения Максвелла линейный анализ на данный момент не проведен. Наиболее приближенным решением является решение задачи об ансамбле водяных мешков, аппроксимирующее распределение горячей плазмы [112]. Есть выкладки для систем с бимаксвелловской анизотропией [13, 100, 101, 113].

### 3.2. Роль численного эксперимента в исследовании вейбелевской филаментации

Для актуальных приложений все результаты, полученные из линейного анализа, подходят только для начальных оценок поведения системы. Дело в том, что это описание учитывает только рост малых невзаимодействующих колебаний на малом промежутке времени в двумерной геометрии. Не учитывается взаимодействие колебаний в возникающей трехмерной структуре, расширение и слияние филаментов.

Поэтому даже в простых постановках, где функция распределения, дающая рост филаментации, приближается известной формулой, численное моделирование позволяет получить результаты, недоступные в аналитической теории. Слияние филаментов и образование стационарных структур магнитного поля предсказывается из соображений механизма развития филаментации [114]. Точные результаты о стационарности, величине и направлении магнитного поля могут быть получены из моделирования. Такие задачи интересны в астрофизике [110, 115].

При ускорении частиц слоя сверхкритической плазмы лазерным импульсом также создаются условия для филаментации тока [116]. Ускоренные электроны с фоном стационарной плазмы создают систему с анизотропией функции распределения по скоростям. Интерес представляют вопросы: какую роль вейбелевская неустойчивость играет в этом процессе, как быстро она протекает, какого масштаба возникают вследствие нее магнитные поля, и как они влияют на остальные протекающие в этой системе процессы. В этом случае приближения функции распределения известными формулами пригодны, только если считать отклонение от максвелловского распределения малым [20, 117], что не

выполняется в высокоэнергетичных экспериментах. Так что роль филаментации можно оценить только при помощи компьютерного моделирования.

Численное моделирование, в свою очередь, обладает некоторыми ограничениями. Помимо ограничений, наложенных выбранной математической моделью, можно отметить следующие. Для того, чтобы некоторое колебание могло быть описано с адекватной точностью, необходимо, чтобы на масштаб этого колебания приходилось не менее десяти шагов сетки вычислений [23]. При исследовании взаимодействия лазерного импульса со слоем плазмы в область моделирования должна уместиться поперечная ширина импульса и исследуемая на неустойчивость область плазмы. В определенных постановках количество шагов сетки должно быть достаточно большим. От заданного количества макрочастиц зависит уровень численного шума. Кроме этого, очевидно, что в случае, если исследуемый физический процесс трехмерен, то результаты моделирования меньшей размерности [19, 118, 119] не всегда полезны для его изучения.

Эти требования усложняют задачу численного моделирования, поэтому выполнением всех этих требований часто пренебрегают. В недавних работах, посвященных численному изучению взаимодействия лазерного импульса со сверхкритическим плазменным слоем, использованы сетки с количеством ячеек не более  $1.5 \cdot 10^6$  [21, 120, 121]. При использовании суперкомпьютеров это число может быть увеличено до  $10^8$  [22]. Это приводит к тому, что либо размер шага по пространству соизмерим с мельчайшим масштабом исследуемой филаментационной структуры (а должен быть хотя бы в 4 раза меньше [23]), либо область моделирования недостаточна для того, чтобы вместить поперечные размеры лазерного импульса. Такие ограничения, как правило, связаны с неспособностью используемых компьютеров и кодов справиться с большей вычислительной сложностью задачи. Но, если принять численное моделирование как

основной инструмент для наблюдения развития интересующего нас процесса, необходимо, чтобы численная модель и параметры вычислений были выбраны так, что результаты можно считать достоверными. В этом случае такие результаты не только могут быть применимы для понимания механизмов процесса, но и могут оказаться полезными на практике для планирования экспериментальных установок.

Далее рассмотрены три отдельные задачи [42]:

- Два холодных релятивистских пучка электронов с противоположно направленными скоростями [40]. Рост неустойчивости происходит из начального возмущения в скорости частиц. Ионы являются неподвижным фоном.
- Два противоположно направленных релятивистских пучка электронов с конечной тепловой скоростью [32, 33, 45, 46]. Начального периодического возмущения нет, рост неустойчивости происходит из начального теплового шума. Ионы являются неподвижным фоном.
- Ускорение электронов в слое плазмы фокусированным лазерным импульсом [35, 37–39, 41]. Электроны слой плазмы обладает конечной тепловой скоростью. Ионы подвижны.

### 3.3. Филаментация в двухпучковой системе

#### 3.3.1. Изучение выделенного возмущения поля

Зависимость инкремента от волнового числа (3.1) изучалась в численной постановке следующим образом. Заданы два релятивистских холодных пучка электронов со скоростями  $0.5c$  и  $-0.5c$  вдоль оси  $z$ . Моделирование производит-

ся в трехмерной области с небольшим числом ячеек по оси  $z$ , на поля и частицы наложены периодические граничные условия по этой оси. Остается только поперечная неустойчивость, развитие продольной ограничено геометрией.

Задается начальное возмущение на скорость частиц и рассматривается инкремент нарастания этого возмущения. Возмущение аксиально симметрично относительно центра области; имеет форму одного филамента, занимающего всю область моделирования. Его поперечный срез имеет форму, представленную на рис. 3.2. Поперечный размер области составляет  $L$ , так что волновое число преобладающей моды оценивается как  $k = 2\pi/L$ . Полученная зависимость представлена на рис. 3.3 вместе с кривой, построенной по формуле (3.1). Зависимости имеют схожий характер, но отличаются. В частности, полученный из численного эксперимента инкремент для больших волновых чисел ниже значения, следующего из (3.2).

Отличие ожидаемо, так как постановка задачи, в которой получена формула (3.1), отличается от постановки описанного вычисления. При аналитическом решении задача считалась двумерной, с аксиальной симметрией. Рассматривалось приближение невзаимодействующих мод. При численном расчете геометрия трехмерна и проявляется развитие всех мод из заданного диапазона.

Получен результат, что можно ожидать, что инкремент неустойчивости в реальных постановках при самосогласованном расчете в трехмерной геометрии окажется ниже полученного из аналитического рассуждения.

### 3.3.2. Структура филаментационной неустойчивости

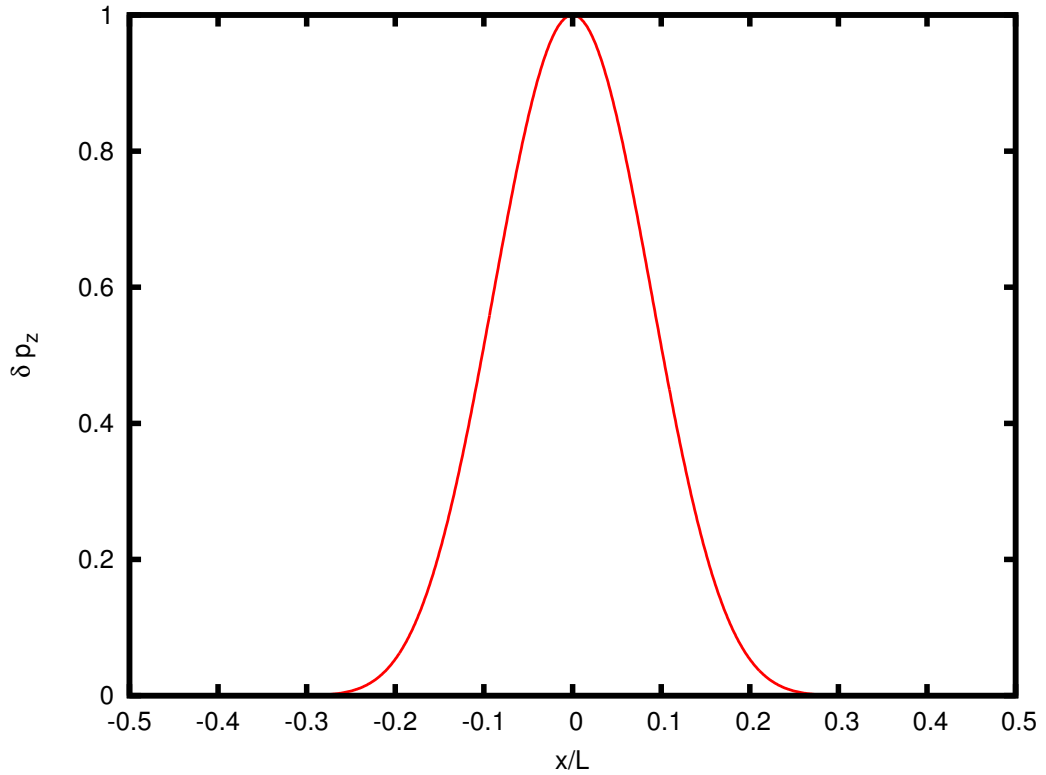


Рис. 3.2. Поперечный срез начального возмущения импульса частиц

### в двухпучковой системе

Зададим однородное начальное распределение пучков с некоторой температурой.

$$f(\vec{r}, \vec{p}, t = 0) = f_M(p_x) f_M(p_y) (f_M(p_z - p_0) + f_M(p_z + p_0)). \quad (3.5)$$

Здесь  $f_M$  — это функция распределения Максвелла с тепловой скоростью  $v_T$ ,  $p_0 = mv_0\gamma_0$ ,  $v_0$  предполагается релятивистской с релятивистским фактором  $\gamma_0$ . Ионы входят в систему как неподвижный фон. Начальные значения всех компонент электромагнитных полей равны нулю. Заданный начальным условием тепловой шум содержит колебания, которые в связи с вейбелевской неустойчивостью будут нарастать и образовывать филаментационную структуру.

Проведена серия численных экспериментов, для которых выбраны парамет-

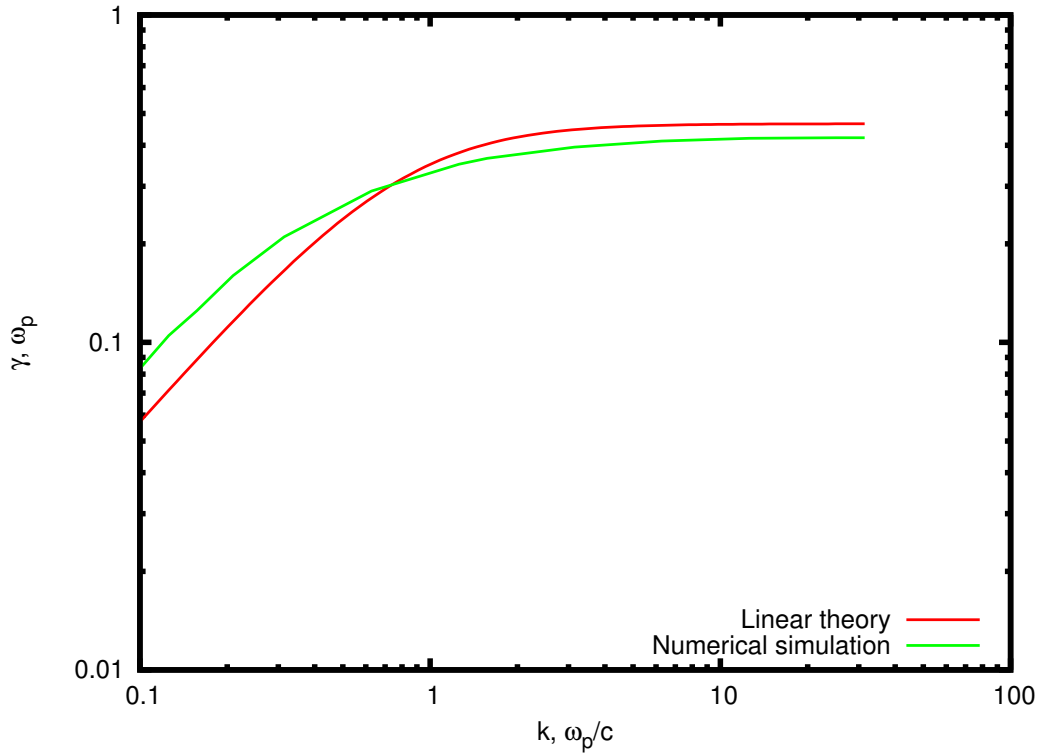


Рис. 3.3. Зависимость инкремента вейбелевской неустойчивости для двух релятивистских холодных электронных пучков от волнового числа, полученная из линейной теории, и зависимость инкремента нарастания магнитного поля от волнового числа заданного начального возмущения в эксперименте с выделенным филаментом

ры  $p_0 = 0.5m_e c$ ,  $v_T = 0.001 \div 0.05$ . Шаг дискретизации по пространству выбирался с учетом того, чтобы на масштаб одного филамента приходилось несколько шагов сетки. Моделирование проходит на сетке размером  $Nx \times Ny \times Nz$  с шагами дискретизации  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и с количеством макрочастиц равным  $N_{PIC}$  от каждого из двух пучков электронов в каждой ячейке. Проведено несколько вычислений с различными численными параметрами, представленными в таблице 3.1.

Проведены исследования по трем вопросам. Во-первых, можно сравнить инкремент нарастания энергии полей с полученным из аналитических оценок (3.1) и в системе с уединенным филаментом.

Далее, полученная в линейной теории для холодных пучков зависимость инкремента вейбелевской неустойчивости от волнового числа (3.1) не имеет максимума, поэтому только из нее нельзя оценить ожидаемый размер филаментов. Ожидается, что размер филамента ограничен длиной Дебая, связанной с тепловой скоростью частиц. Численная постановка может наложить искусственные ограничения за счет размера сетки и численного шума, связанного с недостаточным количеством макрочастиц в расчете. То, как ширина зависит от физических и численных параметров, и каких численных параметров достаточно для того, чтобы наблюдать адекватную физике структуру полей и токов, становится вторым вопросом.

В-третьих, образующиеся трехмерные структуры при численном исследовании можно подробно наблюдать при визуализации и сделать выводы о том, допустимы ли упрощения геометрии в постановке.

Имеющаяся диагностика показывает следующие результаты.

Большая часть вариантов посчитана в геометрии, где поперечная неустойчивость изолирована (малое число ячеек вдоль оси  $z$ ). В этом случае при развитии неустойчивости существуют зависимости только от поперечных координат  $x$  и  $y$ , и достаточно рассматривать двумерное распределение. Для изучения неустойчивых мод использовано двумерное преобразование Фурье от распределения плотности тока. Выбраны некоторые колебания, с наиболее быстро нарастающей амплитудой, и построены зависимости их амплитуд от времени (рис. 3.4). Инкремент нарастания в выбранных единицах соответствует  $\sim 0.38$ . Это значение меньше ожидаемого из линейной теории для холодных пучков ( $\sim 0.46$ , формула 3.2) и полученного в изучении уединенного филамента ( $\sim 0.42$ , из зависимости, представленной на графике 3.3).

Для изучения размера филамента в двумерном распределении плотности



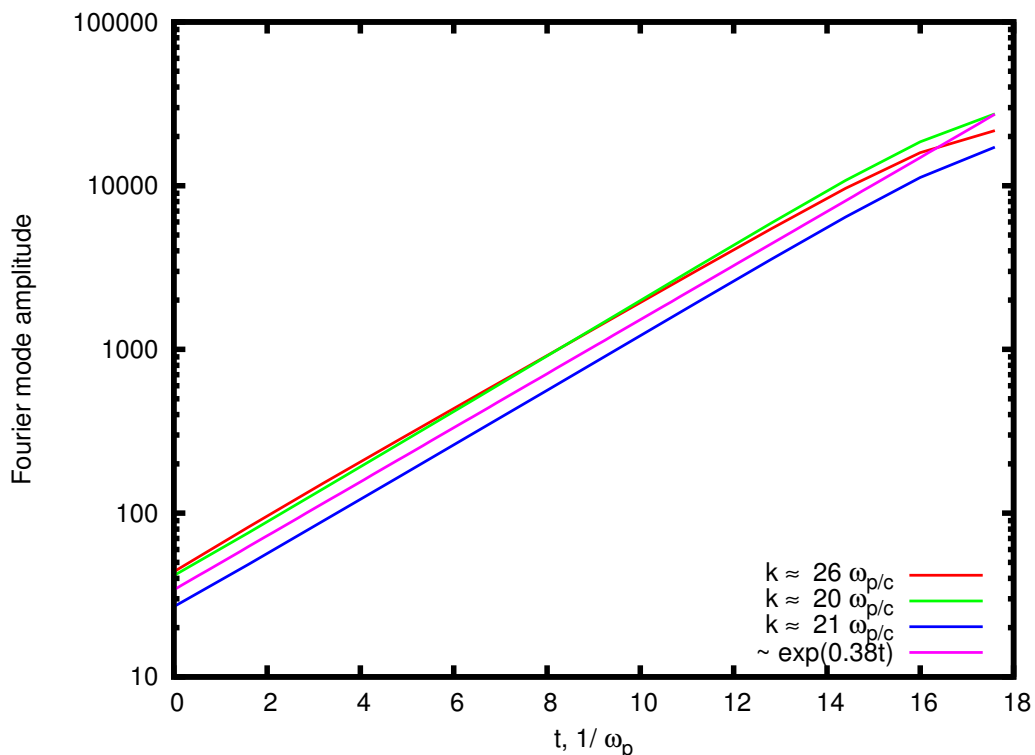


Рис. 3.4. Зависимость амплитуды нескольких наиболее быстро развивающихся колебаний от времени. В подписи указан модуль волнового числа каждого из выбранных колебаний

тока была посчитана автокорреляционная функция (рис. 3.5). Ее зависимость от модуля расстояния  $r$  (рис. 3.6) можно трактовать следующим образом. Чем лучше картина распределения тока совпадает сама с собой после сдвига на  $r$ , тем больше значение автокорреляционной функции от аргумента  $r$ . Поэтому по расположению первого минимума на этой зависимости можно оценивать ширину филамента структуры плотности токов.

На рис. 3.7 показана зависимость определяемой таким образом ширины филамента от времени для различных вариантов таблицы 3.1. Из графиков можно сделать следующие выводы.

До начала слияния филаментов их поперечный размер растет линейно со временем.

Варианты 6, R3, R2 отличаются тепловой скоростью частиц плазмы в пуч-

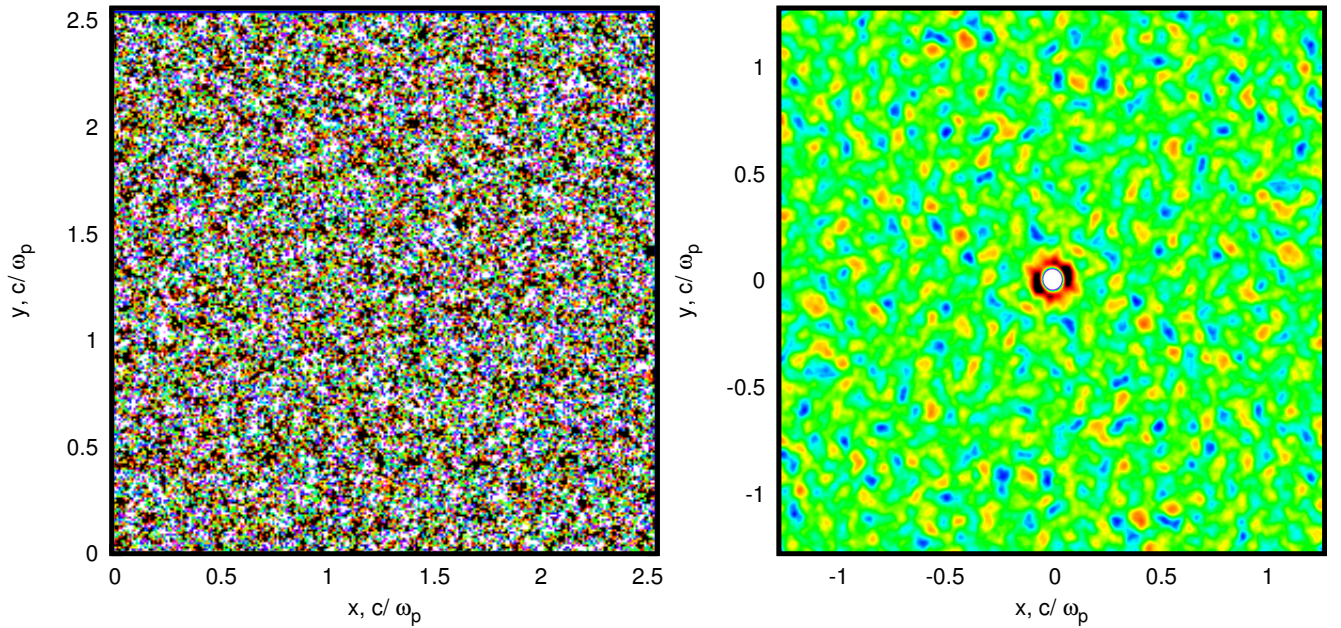


Рис. 3.5. Двумерное распределение плотности тока на плоскости  $x$ - $y$ . (вариант R3,  $t = 9.6\omega_p^{-1}$ ) и автокорреляционная функция этого распределения

ках. Видно, что скорость роста ширины филаментов на начальной стадии пропорциональна тепловой скорости. Ширина филамента при малом значении температуры ограничена снизу дискретностью сетки вычислений. Также рассмотрены варианты с большим шагом дискретизации (вариант R1, на графике не представлен), в которых поведение колебаний таких масштабов выявить нельзя.

Варианты 4, 7, 5, 2, 6 отличаются количеством частиц в ячейке в выбранном методе моделирования плазмы, что определяет уровень численного шума. Из графиков видно, что этот параметр влияет на адекватность описания поздних стадий развития неустойчивости, стадий слияния филаментов. При использовании 32 частиц в каждой ячейке результат мало отличается от полученного в варианте с 64 частицами. Из этого следует, что использование большего числа частиц приведет только к усложнению вычислений, и не улучшит описания исследуемого процесса.

Трехмерные картины компонент электромагнитных полей и плотности то-

ка (для варианта 1, рис. 3.8) показывают нарастание филаментов в поперечных компонентах магнитного поля  $B_x$ ,  $B_y$  и продольной компоненте плотности тока  $J_z$ . После насыщения филаментов происходит их слияние [122] и образование устойчивой крупномасштабной структуры магнитного поля. Образующиеся филаменты имеют конечный размер вдоль оси  $z$ , определяющийся двухпучковой неустойчивостью. Также, если продольный размер филаментов меньше размера области по оси  $z$ , можно видеть, что они направлены не строго вдоль оси  $z$ , а имеют наклон. Так, наблюдается развитие косых мод неустойчивости, и чисто поперечная в выбранной постановке преобладает.

Из этого сделаны выводы, что характер неустойчивости даже в простейшей постановке является трехмерным, поэтому двумерных моделей для ее описания недостаточно.

### **3.4. Взаимодействие релятивистского лазерного импульса со сверхкритическим плазменным слоем**

При исследовании этого процесса отдельное внимание необходимо уделить постановке задачи и диагностике результатов.

При взаимодействии лазерного импульса со слоем плазмы наблюдается целый ряд нелинейных эффектов. Для конкретного исследования необходимо выделить среди них филаментационную неустойчивость, оценить ее роль в этом процессе. Из этих соображений решено использовать плоскую геометрию лазерного импульса.

В выбранной постановке слой плазмы занимает около половины области (рис. 3.9). Лазерный импульс задается через компоненты  $B_z$ ,  $E_y$ , распространяется в положительном направлении оси  $x$ . Он имеет огибающую по оси  $y$

(гауссиан) и по времени ( $\sim \sin^2$ ). Из-за огибающей в нем также имеется компонента поля  $E_x$ . Импульс сфокусирован в точку на поверхности плазменного слоя. Постановка задачи получается двумерной, но для моделирования использована трехмерная модель и трехмерная область, так что появление трехмерных структур ничем не ограничено.

Ожидается, что ускоренные вдоль оси  $x$  электроны создадут с фоном плазменного слоя систему с анизотропией распределения частиц по скоростям. Вследствие этого возникнут филаменты в продольных этому направлению токах  $J_z$  и поперечных компонентах магнитного поля  $B_y$  и  $B_z$ . Филаментацию в компоненте  $B_z$  диагностировать сложнее, так как она присутствует в импульсе, который распространяется и вне плазмы и проникает в нее на глубину скин-слоя. Зато за появление компоненты  $B_y$  отвечает главным образом исследуемая в данной работе неустойчивость.

Для серии расчетов выбрана частота импульса  $\omega_0 = (1/3)\omega_p$ , протяженность по времени  $\sim 200\omega_p^{-2}$ . Таким образом, уместается около десяти длин волн. Амплитуда варьировалась в пределах от  $A = (1/3)$  до  $A = 9$  в выбранных безразмерных единицах. Область моделирования составляет  $2048 \times 1024 \times 128$  ячеек. В каждой ячейке присутствуют 4 электрона и 1 ион с зарядом  $Z = 1$  (макрочастицы), всего около  $\sim 0.6 \cdot 10^9$  макрочастиц. Один шаг сетки соответствует размеру  $0.1c/\omega_p$ , размер области получается равным  $204.8 \times 102.4 \times 12.8c/\omega_p$ . Расчет прекращается, когда проникшее в слой плазмы возмущение, отразившись от границы по  $x$ , возвращается в область возникновения филаментации, так как поведение системы при многократном прохождении возмущений находится за рамками данного исследования.

Так как система единиц шкалируется в зависимости от электронной плазменной частоты, выбранные численные параметры соответствуют определенно-

му промежутку физических параметров. Этот диапазон представлен в таблице 3.2.

Периодические граничные условия, наложенные на границы по оси  $z$ , дополняют изначально двумерную постановку задачи.

Развитие филаментации в компоненте  $B_y$  для одного из посчитанных вариантов представлено на рис. 3.11, в компоненте плотности токов — на рис. 3.10.

Из трехмерных картин величин компонент полей видно следующее.

Под действием лазерного излучения слой плазмы (изначально только электронная компонента) немного прогибается. С поверхности ускоряются электроны, часть которых вылетает наружу, часть ускоряется в область плазмы. Движение ионов не ограничено, но их смещение за время моделирования незначительно.

Как и ожидалось, в компоненте  $B_y$  наблюдается возникновение филаментационной структуры. Заметнее всего вблизи поверхности плазмы. Магнитные поля также образуются в областях, находящихся сразу за пучками ускоренных электронов в плазме. Филаменты у поверхности плазмы со временем соединяются и образуют устойчивые крупномасштабные структуры, которые сохраняются неизменными до конца времени моделирования. Для образования такого стационарного магнитного поля достаточно времени около  $200\omega_p^{-1}$ .

Исходя из этого можно обратить внимание на то, что процесс вейбелевской неустойчивости является одним из самых быстрых в системе ускорения частиц релятивистским лазерным импульсом, и в его результате в плазменном слое образуются устойчивые магнитные поля.

Для дальнейшего выявления влияния процесса филаментации в этой системе построены графики зависимости отношения энергии, содержащейся в

магнитных полях, и кинетической энергии ускоренных частиц от времени. На рис. 3.12 представлено несколько таких графиков для разных амплитуд падающего импульса. Можно заметить, что это отношение достигает  $\sim 4.5\%$  для определенных вариантов. Для построения графиков усреднение проводилось по всей области моделирования. Кинетическая энергия частиц вычислена  $W_K = \sum_j w_j (\sqrt{p^2 + 1} - 1)$ ,  $j$  — номер электрона,  $w_j$  — вес макрочастицы. Энергия магнитных полей —  $W_B = \sum_i (B_{xi}^2 + B_{yi}^2 + B_{zi}^2) \Delta_x \Delta_y \Delta_z$ ,  $i$  — номер ячейки,  $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$  — шаги сетки.

Зависимость максимума по времени этого отношения от амплитуды импульса  $A$  показана на рис. 3.12, 3.13. Зависимость оказалась немонотонной с максимумом около значения  $A = 2$ .

Кроме параметров, выбранных для конкретной серии расчетов, проводились расчеты с большим размером по оси  $z$  и большим числом частиц в ячейке (до 16). При большем размере области в установившейся структуре магнитного поля длина волны колебания по оси  $z$  может достигать большего размера. Однако на характер приведенных графиков и величину их максимума эти изменения не влияют. При большем количестве частиц в ячейке снижается уровень численного шума. Это отражается только на уровне теплового фона, из которого вырастает неустойчивость, что не существенно в данном исследовании. Так как расчеты с увеличенными параметрами могут занимать достаточно большое время (до  $\sim 2.5$  суток), в представленной серии расчетов они не использованы.

Из результатов работы можно заключить, что процесс филаментации может являться одним из самых быстрых при взаимодействии лазерного излучения со сверхкритической плазмой. При этом его влиянием нельзя пренебрегать при изучении более медленно протекающих процессов, так как в результате возникают устойчивые структуры магнитных полей. На их генерацию теряется

необходимая для ускорения частиц энергия лазерного импульса, а также создаются начальные условия для протекания последующих процессов.

Таблица 3.1. Варианты выбора численных параметров

Вариант	$N_x = N_y$	$N_z$	$dx=dy$	$dz$	$dt$	$v_T$	$N_{PIC}$
1	512	240	0.02	0.05	0.005	0.005	4
2	256	12	0.01	0.01	0.0025	0.0025	16
3	128	12	0.01	0.05	0.0025	0.001	16
4	256	12	0.01	0.01	0.0025	0.0025	1
5	256	12	0.01	0.01	0.0025	0.0025	32
6	256	12	0.01	0.01	0.0025	0.0025	64
7	256	12	0.01	0.01	0.0025	0.0025	4
R1	128	12	0.02	0.02	0.005	0.02	64
R2	256	12	0.01	0.01	0.0025	0.01	64
R3	256	12	0.01	0.01	0.0025	0.005	64

Таблица 3.2. Диапазон физических параметров, описываемых представленным моделированием

длина волны $\lambda_0$ , мкм	длительность импульса $T_{\text{pulse}}$ , фс	напряженность поля $E_0$ , В/см	интенсивность $I_0$ , Вт/см <sup>2</sup>	плотность заряда $n_p$ , 1/см <sup>3</sup>	скин- слой $c/\omega_p$ , нм
0.35	13	$(3 \div 81) \cdot 10^8$	$(1.9 \div 800) \cdot 10^{19}$	$0.8 \cdot 10^{23}$	19
1.06	40	$(1 \div 27) \cdot 10^8$	$(1.2 \div 900) \cdot 10^{18}$	$0.9 \cdot 10^{22}$	56



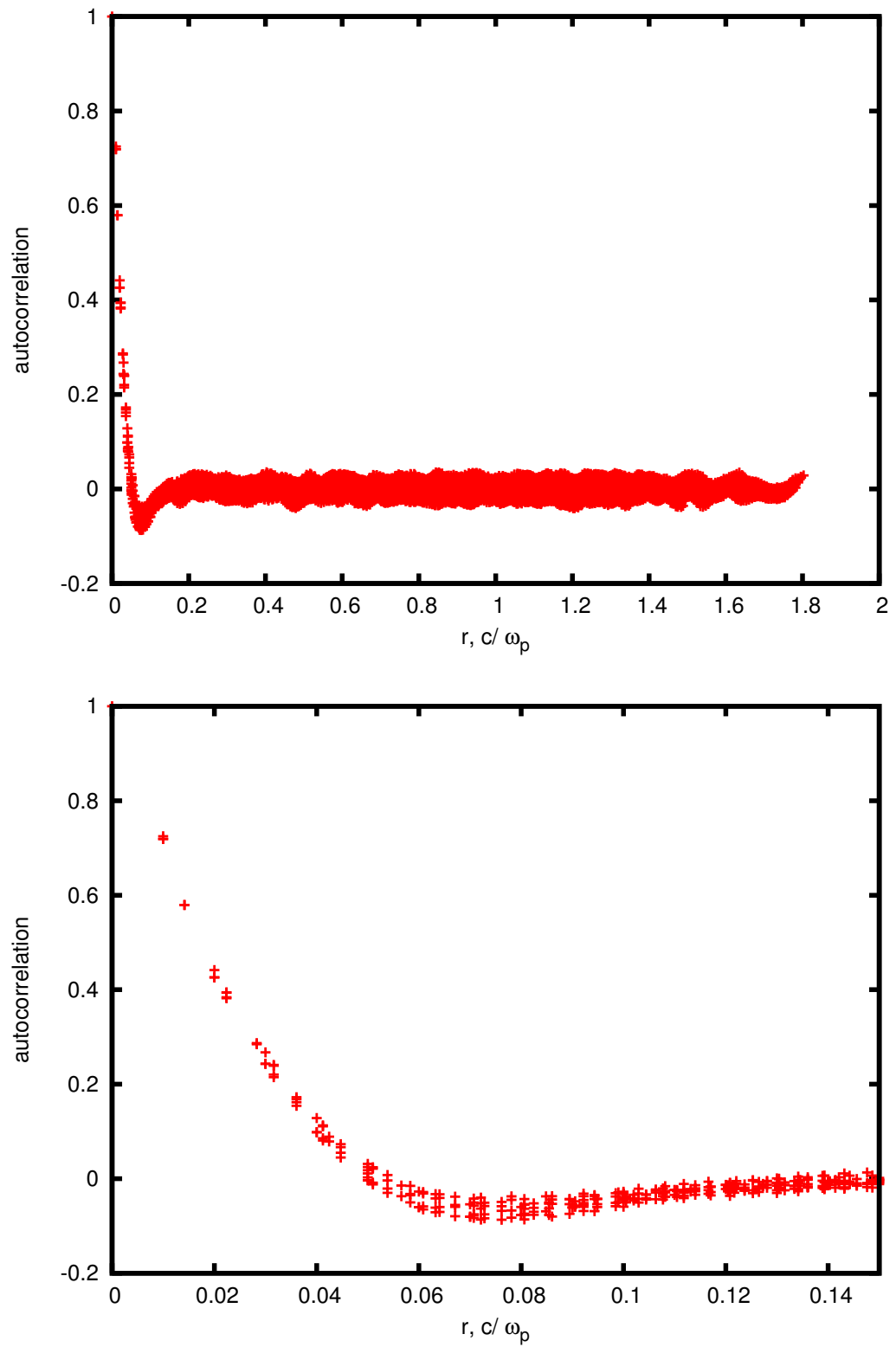


Рис. 3.6. Автокорреляционная функция распределения плотности тока в зависимости от модуля  $r$ , нормированная на единицу. Отдельно увеличена область малого  $r$

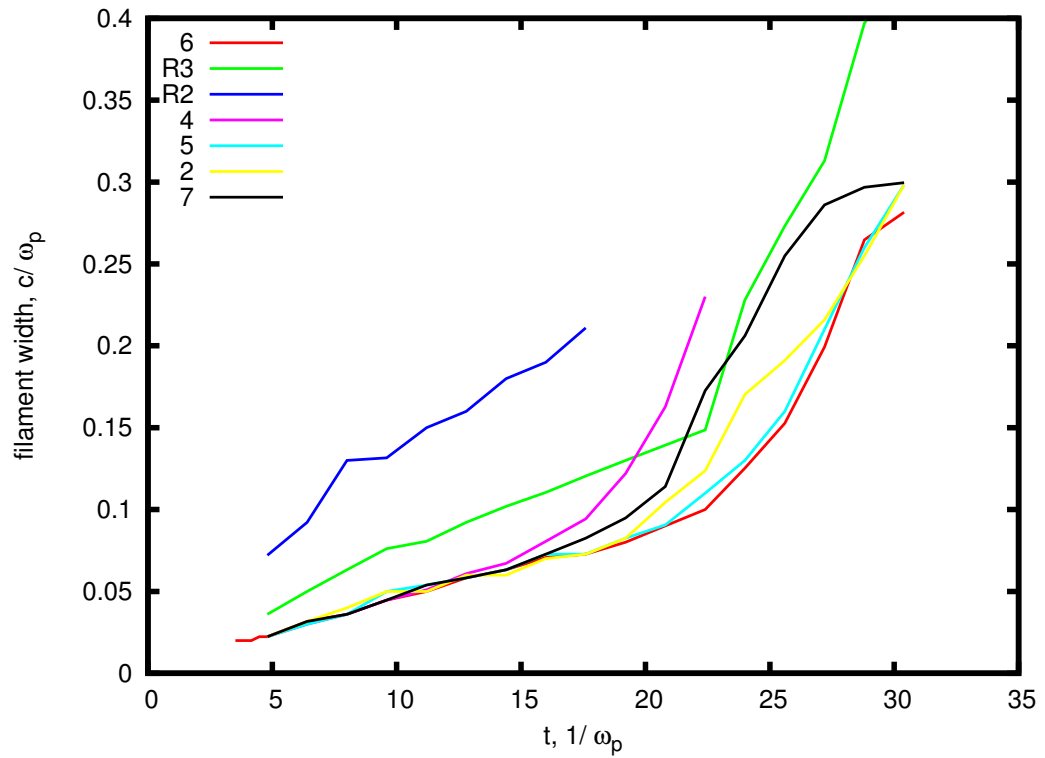


Рис. 3.7. Зависимость ширины филамента от времени для различных вариантов

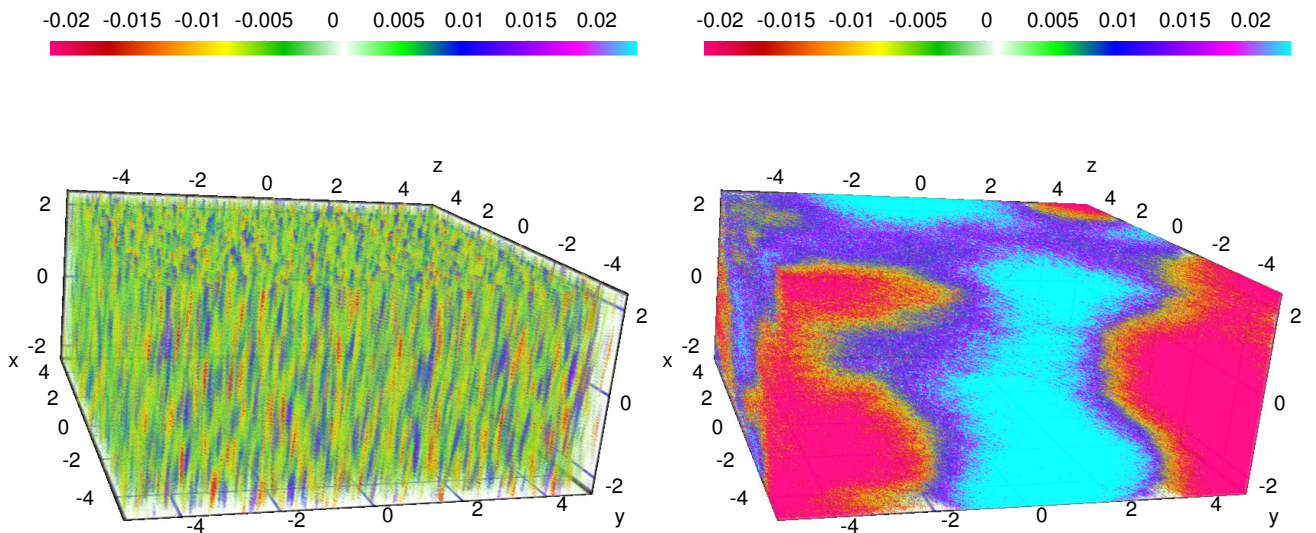


Рис. 3.8. Трехмерное распределение компоненты магнитного поля  $B_y$ , полученное в расчете по варианту 1 таблицы 3.1.  $t = 8.96\omega_p^{-1}$  и  $t = 102.4\omega_p^{-1}$  с начала движения частиц

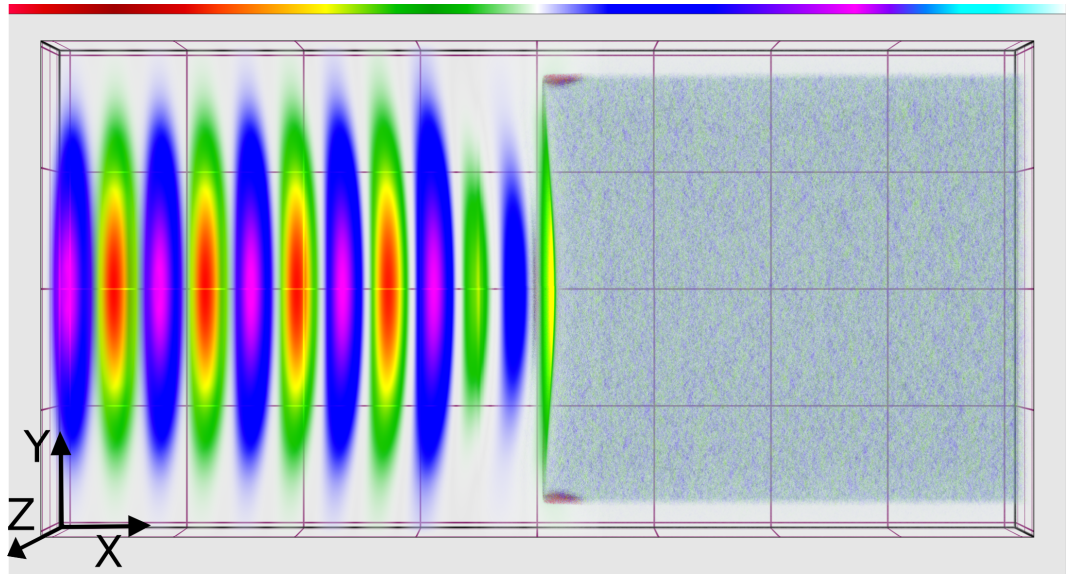
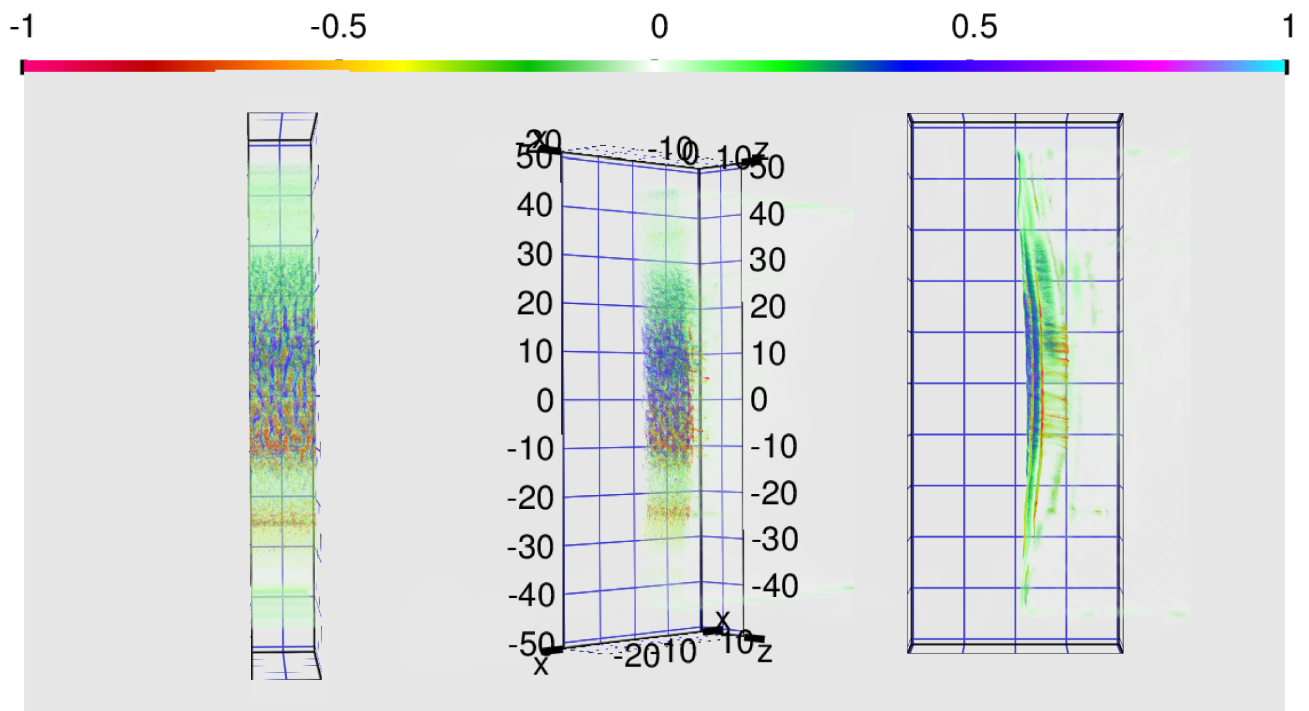


Рис. 3.9. Геометрия постановки задачи

Рис. 3.10. Трехмерное распределение компоненты плотности токов  $J_x$  в момент времени  $t = 89.6$ . Амплитуда импульса данного варианта  $A = 1$

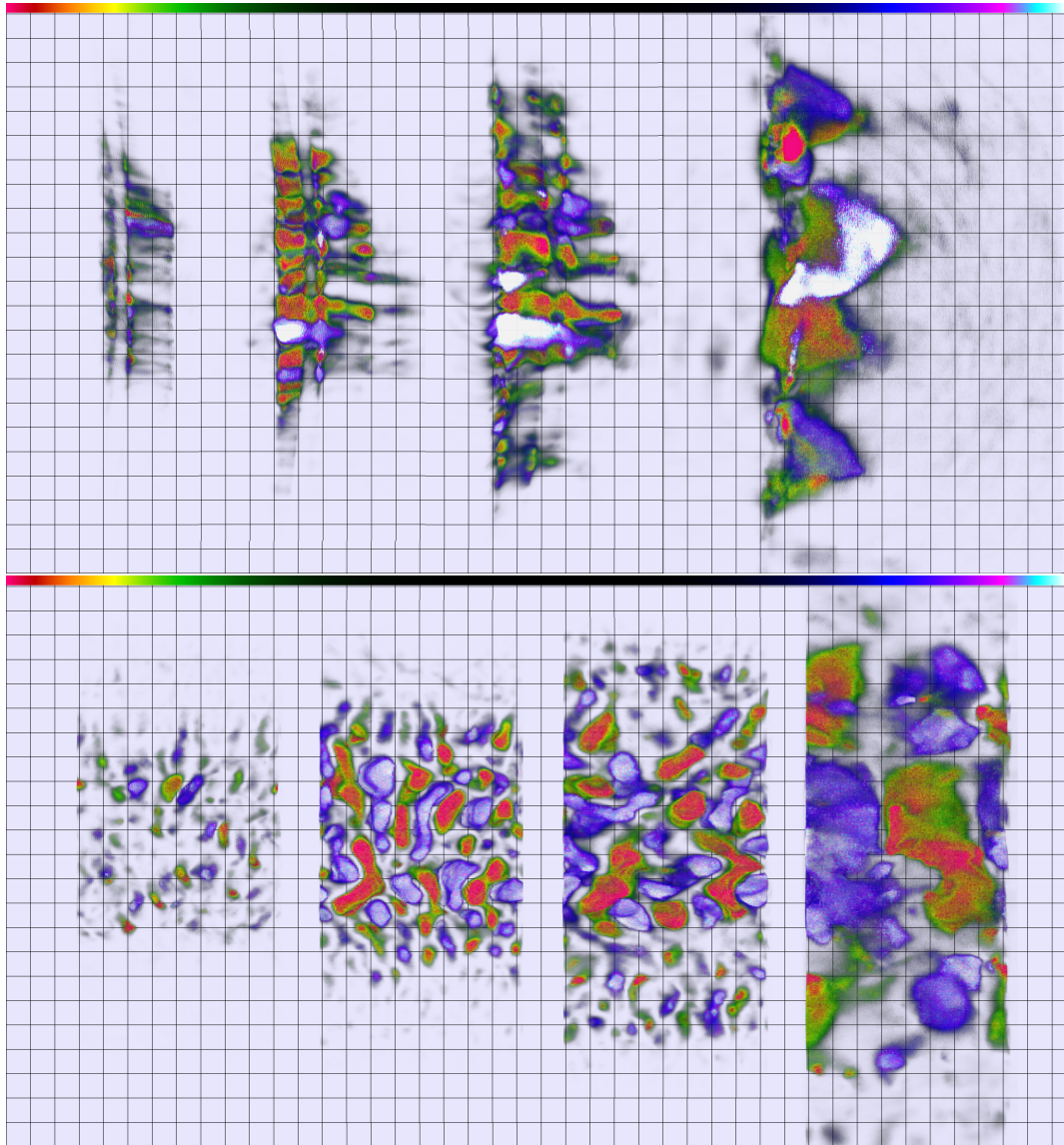


Рис. 3.11. Трехмерное распределение компоненты магнитного поля  $B_y$  в моменты времени  $t = 89.6, 102.4, 115.2, 230.4$  в проекциях  $x-y$  и  $x-z$ . Амплитуда импульса данного варианта  $A = 1$

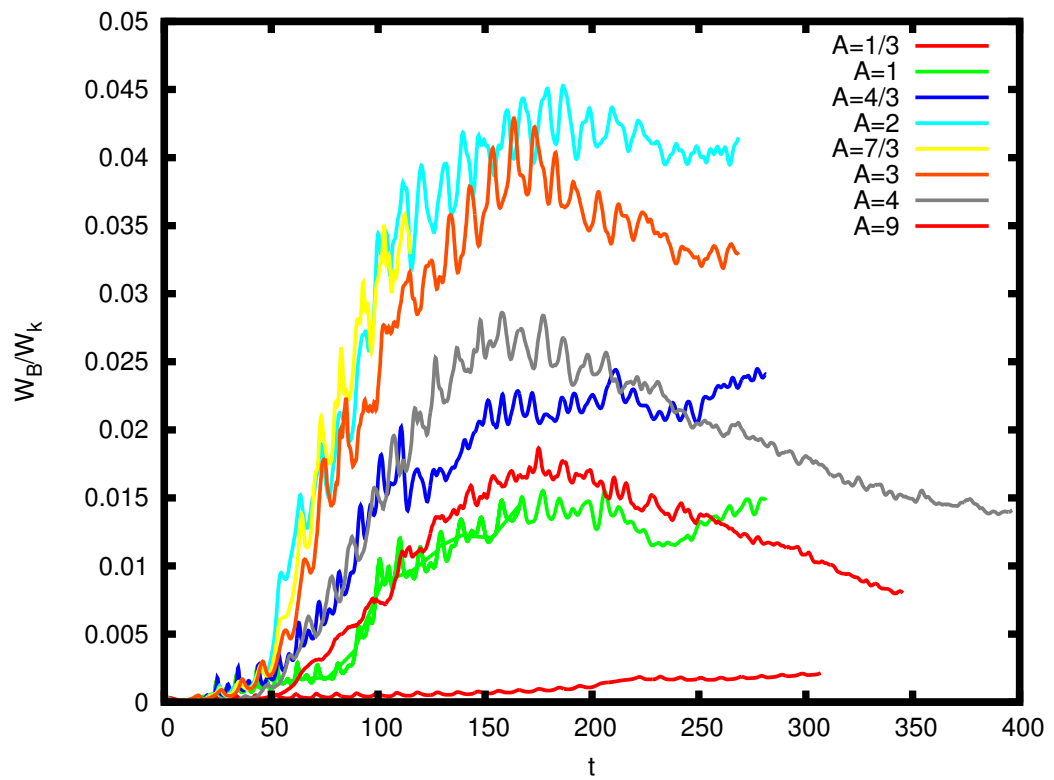


Рис. 3.12. Графики зависимости отношения энергии, содержащейся в магнитных полях, к кинетической энергии ускоренных частиц от времени для различных амплитуд

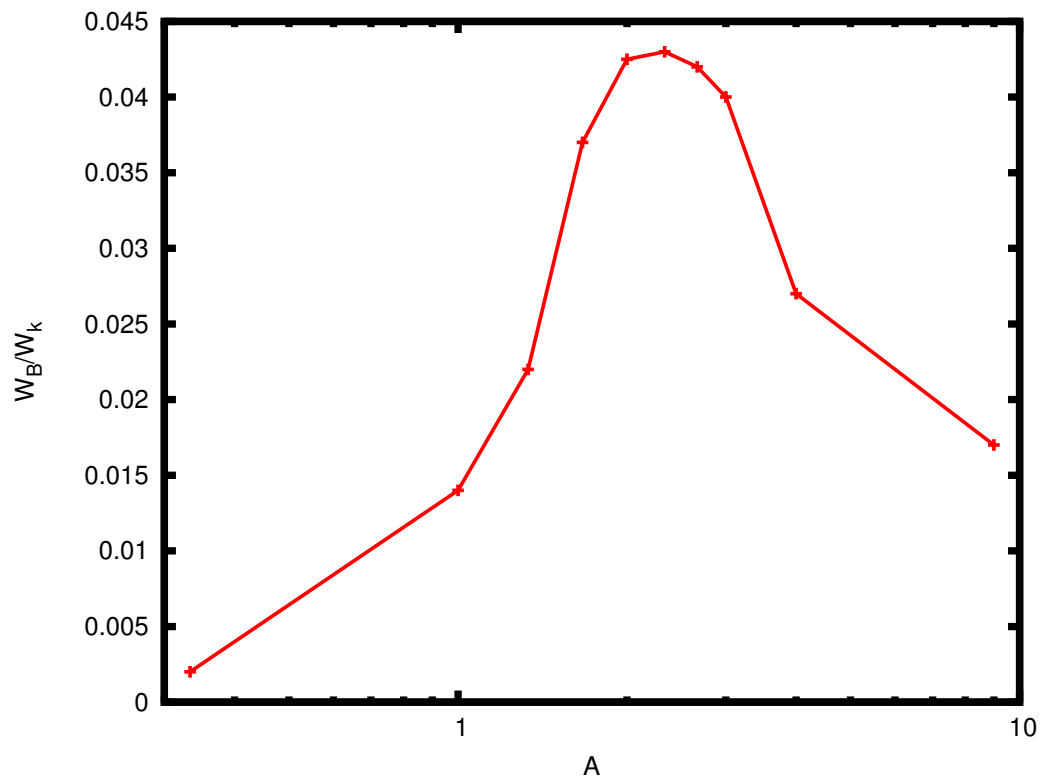


Рис. 3.13. Зависимость максимума по времени отношения энергии, содержащейся в магнитных полях, и кинетической энергии ускоренных частиц от амплитуды импульса

## Заключение

### Основные результаты работы

- Реализованы локально рекурсивные нелокально асинхронные алгоритмы класса ConeFold для метода макрочастиц решения самосогласованной системы уравнений Власова-Максвелла. Разработанный программный комплекс оптимален для моделирования неустойчивостей в замагниченной плазме. Выполнение расчетов за приемлемое время обеспечено не приближениями математической модели, а увеличением эффективности использования компьютера. Моделирование проходит в 3D3V геометрии, решается полная самосогласованная система уравнений Власова-Максвелла, использован форм-фактор второго порядка точности, нет калибровок физических параметров.
- Проведено моделирование эволюции филаментационной неустойчивости в изолированных постановках с целью выявления необходимых условий численного эксперимента для адекватного наблюдения ее в более сложных процессах. Получен инкремент нарастания отдельных мод поперечной неустойчивости. Исследована эволюция ширины филаментов в зависимости от физических и численных параметров. Показано, что филаменты возможно наблюдать до тех пор, пока их поперечный размер занимает не менее 4 ячеек. До начала слияния филаментов их ширина растет линейно со временем и скорость роста пропорциональна тепловой скорости в начальном распределении частиц. На процесс слияния может существенно повлиять численный шум, но этим влиянием можно пренебречь, если брать 16 и более макрочастиц на ячейку. Из трехмерных распределений компонент токов и полей сделан вывод о том, что для полного описания

процесса необходима полностью трехмерная численная модель.

- Для примера актуального применения численного эксперимента в исследовании роли вейбелевской неустойчивости во взаимодействии лазерного импульса со слоем плазмы выбрана двумерная постановка с плоской геометрией лазерного импульса. Такая постановка позволила в некоторой степени отделить процесс образования филаментации от других нелинейных процессов и получить следующие полезные результаты о природе протекания филаментации. Во-первых, филаментация оказывается одним из самых быстрых процессов в системе, и уже на временах  $\sim 200\omega_p^{-1}$  в результате нее вблизи поверхности плазменного слоя образуются стационарные магнитные поля. Во-вторых, зависимость доли энергии, ушедшей на образование магнитных полей, от амплитуды используемого импульса немонотонна. Знание этой зависимости может оказаться полезным в планировании будущих экспериментов ускорения частиц плазмы.

**Благодарности** В первую очередь хочу выразить благодарность научному руководителю Левченко Вадиму Дмитриевичу. Благодарю коллег, оказывающих постоянную помощь в работе над исследованием: Горячева Ивана, Закирова Андрея, Хилкова Сергея, Жданова Сергея. Написание текста диссертации является частью долгого пути, в котором принимало участие большое количество людей, повлиявших на мое образование и на выбор научного пути. Поэтому необходимо поблагодарить всех преподавателей института МИФИ, которые принимали участие в моем образовании, в особенности Игоря Викторовича Евсеева, Сергея Георгиевича Позднякова и моего первого научного руководителя Чечёткина Валерия Михайловича.



## Литература

1. Левченко В. Д. Асинхронные параллельные алгоритмы как способ достижения эффективности вычислений // Информационные технологии и вычислительные системы. — 2005. — Vol. 1. — P. 68–87.
2. Recent results and future challenges for large scale particle-in-cell simulations of plasma-based accelerator concepts / C Huang, W An, V K Decyk et al. // Journal of Physics: Conference Series. — 2009. — Vol. 180, no. 1. — P. 012005. — URL: <http://stacks.iop.org/1742-6596/180/i=1/a=012005>.
3. Three-Dimensional Simulations of Laser-Plasma Interactions at Ultrahigh Intensities / F. Fiuza, R. A. Fonseca, L. O. Silva et al. // IEEE Transactions on Plasma Science. — 2011. — Nov. — Vol. 39. — P. 2618–2619. — 1205.3120.
4. Cox Michael, Ellsworth David. Application-controlled Demand Paging for Out-of-core Visualization // Proceedings of the 8th Conference on Visualization '97. — VIS '97. — Los Alamitos, CA, USA : IEEE Computer Society Press, 1997. — P. 235. — URL: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=266989.267068>.
5. Neuman B. Clifford. Scale in Distributed Systems // Readings in Distributed Computing Systems. — IEEE Computer Society Press, 1994. — P. 463–489.
6. Williams Samuel, Waterman Andrew, Patterson David. Roofline: An Insightful Visual Performance Model for Multicore Architectures // Commun. ACM. — 2009. — apr. — Vol. 52, no. 4. — P. 65–76. — URL: <http://doi.acm.org/10.1145/1498765.1498785>.
7. Fox Justin M. Advances in Fully-Kinetic PIC Simulations of a Near Vacuum

- Hall Thruster and Other Plasma Systems : Ph. D. thesis / Justin M. Fox ; Massachusetts Institute of Technology. — 2007.
8. Иришков Сергей Валерьевич. Численное моделирование динамики плазмы в холловском двигателе : Дисс... кандидата наук / Сергей Валерьевич Иришков ; Исследовательский центр имени М.В.Келдыша. — 2006.
  9. Szabo James Joseph Jr. Fully Kinetic Numerical Modeling of a Plasma Thruster : Ph. D. thesis / James Joseph Jr. Szabo ; Massachusetts Institute of Technology. — 2001.
  10. J.C. Adam A.Heron G. Laval. Study of Stationary plasma thrusters using two-dimensional fully kinetic simulations // *Physics of Plasmas*. — 2004. — Vol. 111, number 1. — P. 295–305.
  11. Cho Shinatora, Komurasaki Kimiya, Arakawa Yoshihiro. Kinetic particle simulation of discharge and wall erosion of a Hall thruster // *Physics of Plasmas (1994-present)*. — 2013. — Vol. 20, no. 6. — P. 063501. — URL: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pop/20/6/10.1063/1.4810798>.
  12. E.Y. Choueiri. An overview of oscillations in Hall thrusters. In 31rd International Conference on Spacecraft Propulsion // Cannes, France, ICSP-134. — 2000.
  13. Weibel Erich S. Spontaneously Growing Transverse Waves in a Plasma Due to an Anisotropic Velocity Distribution // *Phys. Rev. Lett.* — 1959. — Feb. — Vol. 2. — P. 83–84. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.2.83>.
  14. On the role of the purely transverse Weibel instability in fast ignitor scenarios / Luis O. Silva, Ricardo A. Fonseca, John W. Tonge et al. // *Physics of Plasmas (1994-present)*. — 2002. — Vol. 9, no. 6. — P. 2458–2461. — URL: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pop/9/6/10.1063/1.1476004>.

15. Treumann R. A., Baumjohann W. A note on the Weibel instability and thermal fluctuations // *Annales Geophysicae*. — 2012. — Vol. 30, no. 2. — P. 427–431. — URL: <http://www.ann-geophys.net/30/427/2012/>.
16. Three-dimensional Weibel instability in astrophysical scenarios / Ricardo A. Fonseca, Luis O. Silva, John W. Tonge et al. // *Physics of Plasmas* (1994-present). — 2003. — Vol. 10, no. 5. — P. 1979–1984. — URL: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pop/10/5/10.1063/1.1556605>.
17. Bret A. Weibel, Two-Stream, Filamentation, Oblique, Bell, Buneman...Which One Grows Faster? // *The Astrophysical Journal*. — 2009. — Vol. 699, no. 2. — P. 990. — URL: <http://stacks.iop.org/0004-637X/699/i=2/a=990>.
18. Cosmological Effects of Weibel-Type Instabilities / M. Lazar, R. Schlickeiser, R. Wielebinski, S. Poedts // *The Astrophysical Journal*. — 2009. — Vol. 693, no. 2. — P. 1133. — URL: <http://stacks.iop.org/0004-637X/693/i=2/a=1133>.
19. Ёлкина Н. В., Левченко В. Д. Генерация филаментационной структуры магнитного поля в лазер-плазменном взаимодействии // *Прикладная физика*. — 2003. — Т. 5. — С. 16–23.
20. Гришков В. Е., Урюпин С. А. Неустойчивость Вейбеля в поле короткого лазерного импульса // *Физика плазмы*. — 2013. — Vol. 39, no. 3. — P. 268.
21. Okada T., Ogawa K. Saturated magnetic fields of Weibel instabilities in ultraintense laser-plasma interactions // *Physics of Plasmas* (1994-present). — 2007. — Vol. 14, no. 7. — P. 072702. — URL: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pop/14/7/10.1063/1.2746023>.
22. Ruhl H. 3D kinetic simulation of super-intense laser-induced anomalous transport // *Plasma Sources Science and Technology*. — 2002. — Vol. 11, no. 3A. — P. A154. — URL: <http://stacks.iop.org/0963-0252/11/i=3A/a=323>.

23. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. — Москва : Мир, 1987.
24. Горячев И.А., Левченко В.Д., Перепёлкина А.Ю. Исследование аномального переноса электронов в плазме холловского двигателя (ХД) // Тезисы XXXVIII Конференции по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу / ИОФАН. — г. Звенигород Московской обл., 2011. — 14–18 февраля.
25. Perepelkina A.Yu, Goryachev I.A., Levchenko V.D. Fully Kinetic Model of Hall Thruster Plasma Dynamics Based on LRnLA // 3rd International Symposium on Advanced Plasma Science and its Applications for Nitrides and Nanomaterials (ISPlasma -2011) / Nagoya Institute of Technology. — Nagoya, Japan, 2011. — March 6-9. — P. 110.
26. Perepelkina A.Yu., Levchenko V.D. Fully kinetic 3D model of magnetized plasma // First Russian – Italian Joint Seminar on Mathematical and Physical Models Applications to Condensed Matter and Preservation of the Cultural Heritage. — Ravenna, Italy, 2011. — September 12-13. — P. 8–9.
27. Перепёлкина А.Ю. Численное моделирование плазмы в канале холловского двигателя // Труды 54-й научной конференции МФТИ. Управление и прикладная математика / МФТИ. — Т. 2. — Долгопрудный, 2011. — С. 116.
28. Левченко В.Д., Перепёлкина А.Ю., Калининкова Е.И. 3D3V моделирование взаимодействия лазерных импульсов с плазмой при помощи универсального PIC кода CFHALL // Тезисы докладов XXXIX Международной (Звенигородской) конференции по физике плазмы и УТС / Плазмаиофан. — Москва, 2012. — 6-10 февраля. — С. 102.
29. Горячев И.А., Левченко В.Д., Перепёлкина А.Ю. Трёхмерная полностью кинетическая численная модель замагниченной плазмы канала холловско-

- го двигателя // Тезисы докладов XXXIX Международной (Звенигородской) конференции по физике плазмы и УТС / Плазмаиофан. — Москва, 2012. — 6-10 февраля. — С. 222.
30. Горячев И.А., Левченко В.Д., Перепёлкина А.Ю. Трёхмерная полностью кинетическая численная модель замагниченной плазмы канала холловского двигателя // Забабахинские научные чтения: сборник материалов XI Международной конференции / РФЯЦ–ВНИИТФ. — Снежинск : РФЯЦ–ВНИИТФ, 2012. — 16-20 апреля. — С. 147.
31. Левченко В.Д., Перепёлкина А.Ю. 3D3V моделирование взаимодействия пикосекундных лазерных импульсов с подкритическим плазменным слоем // Забабахинские научные чтения: сборник материалов XI Международной конференции / РФЯЦ–ВНИИТФ. — Снежинск : РФЯЦ–ВНИИТФ, 2012. — 16-20 апреля. — С. 135.
32. Горячев И.А., Левченко В.Д., Перепёлкина А.Ю. Трёхмерный кинетический код CFHALL для моделирования замагниченной плазмы // Международная молодёжная конференция-школа «Современные проблемы прикладной математики и информатики». Тезисы докладов. — Дубна, 2012. — 22-27 августа. — С. 158–161.
33. Perepelkina A.Yu., Goryachev I.A., Levchenko V.D. 3D3V Weibel Instability Simulation with CFhall Code // 11th APCPST (Asia Pacific Conference on Plasma Science and Technology) and 25th SPSM (Symposium on Plasma Science for Materials) / Nagoya Institute of Technology. — Kyoto, Japan, 2012. — Oct 2-5. — P. 145.
34. Перепёлкина А.Ю. Инструмент генерации кода LRnLA алгоритмов // Труды 55-й научной конференции МФТИ. Управление и прикладная математика / МФТИ. — Т. 2. — Долгопрудный, 2012. — С. 58.

35. Горячев И.А., Левченко В.Д., Перепёлкина А.Ю. Генерация мелкомасштабного поля при взаимодействии лазерного импульса со сверхкритической плазмой // XL Международная Звенигородская конференция по физике плазмы и УТС. Тезисы докладов / Плазмаиофан. — Москва, 2013. — 11-15 февраля. — С. 102.
36. Перепёлкина А.Ю., Левченко В.Д. Кинетическая 3D модель замагниченной плазмы // Физические и математические модели плазмы и плазмopodobных сред / Под ред. Дж.Майно, Г.И.Змиевская. — Москва : ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2012. — С. 43–52.
37. Perepelkina A.Yu., Levchenko V.D., Goryachev I.A. 3D Simulation of Filamentation Instability in Laser Interaction with Overdense Plasma with CFhall Code // Mathematical modeling and computational physics. Book of Abstracts of the International Conference. — Dubna, 2013. — July 8-12. — P. 144–145.
38. Perepelkina A.Yu., Levchenko V.D., Goryachev I.A. Numerical simulation of Weibel instability driven magnetic field generation with CFHall code // XXXI International Conference on Phenomena in Ionized Gases. e-Book of abstracts / Ed. by F.J. Gordillo-Vázquez. — Granada, Spain : Spanish National Research Council (CSIC), 2013. — July 14-19. — P. PS4-022. — URL: <http://www.icpig2013.net/buscador/index.html>.
39. Perepelkina A., Levchenko V., Goryachev I. Numerical simulation of Weibel instability in laser interaction with plasma // XXV IUPAP Conference on Computational Physics. — Moscow, Russia, 2013. — August 20-24.
40. Перепёлкина А.Ю., Левченко В.Д. Численное исследование вейбелевской неустойчивости в двухлучковой системе // Труды 56-й научной конференции МФТИ. Управление и прикладная математика / МФТИ. — Т. 2. — Долгопрудный, 2013. — С. 70.

41. Перепёлкина А.Ю., Левченко В.Д., Горячев И.А. Исследование роли вейбелевской неустойчивости во взаимодействии лазерного излучения со сверхкритической плазмой при помощи численного моделирования // XLI Международная Звенигородская конференция по физике плазмы и УТС. Тезисы докладов / Плазмаиофан. — Москва, 2014. — 10-14 февраля. — С. 142.
42. Горячев И.А., Левченко В.Д., Перепёлкина А.Ю. Исследование роли вейбелевской неустойчивости во взаимодействии лазерного излучения со сверхкритической плазмой при помощи численного моделирования // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. — 2014. — no. 26. — P. 19. — URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-123>.
43. Perepelkina A Yu, Levchenko VD, Goryachev IA. 3D3V plasma kinetics code DiamondPIC for modeling of substantially multiscale processes on heterogenous computers // 41st EPS Conference on Plasma Physics / Ed. by Prof. O. Scholten ; EPS. — Europhysics Conference Abstracts no. 38F. — Berlin : European Physical Society, 2014. — June. — P. O2.304.
44. Перепёлкина А.Ю., Левченко В.Д. Реализация метода макрочастиц физики плазмы на графических ускорителях // Научный сервис в сети Интернет: многообразие суперкомпьютерных миров: Труды Международной суперкомпьютерной конференции. — Москва : Издательство МГУ, 2014. — 22-27 сентября, г. Новороссийск. — С. 325–327. — URL: <http://agora.guru.ru/abrau2014/pdf/325.pdf>.
45. Перепёлкина А.Ю., Левченко В.Д., Горячев И.А. Трёхмерный кинетический код CFHall для моделирования замагниченной плазмы // Математическое моделирование. — 2013. — Т. 25, № 11. — С. 98–110. — URL: <http://mi.mathnet.ru/mm3421>.
46. Perepelkina A Yu, Goryachev I A, Levchenko V D. CFHall Code Validation with 3D3V Weibel Instability Simulation // Journal of Physics:

- Conference Series. — 2013. — Vol. 441, no. 1. — P. 012014. — URL: <http://stacks.iop.org/1742-6596/441/i=1/a=012014>.
47. Perepelkina A.Yu, Goryachev I.A., Levchenko V.D. Implementation of the Kinetic Plasma Code with Locally Recursive non-Locally Asynchronous Algorithms // Journal of Physics: Conference Series. — 2014. — Vol. 510, no. 1. — P. 012042. — URL: <http://iopscience.iop.org/1742-6596/510/1/012042>.
48. OSIRIS: A Three-Dimensional, Fully Relativistic Particle in Cell Code for Modeling Plasma Based Accelerators / R. A. Fonseca, L. O. Silva, F. S. Tsung et al. // Lecture Notes in Computer Science. — 2002. — Vol. 2331. — P. 342–351.
49. Exploiting multi-scale parallelism for large scale numerical modelling of laser wakefield accelerators / R A Fonseca, J Vieira, F Fiuza et al. // Plasma Physics and Controlled Fusion. — 2013. — Vol. 55, no. 12. — P. 124011. — URL: <http://stacks.iop.org/0741-3335/55/i=12/a=124011>.
50. Novel methods in the Particle-In-Cell accelerator Code-Framework Warp / J-L Vay, D P Grote, R H Cohen, A Friedman // Computational Science and Discovery. — 2012. — Vol. 5, no. 1. — P. 014019. — URL: <http://stacks.iop.org/1749-4699/5/i=1/a=014019>.
51. Self-Organization of a Plasma due to 3D Evolution of the Weibel Instability / D. V. Romanov, V. Yu. Bychenkov, W. Rozmus et al. // Phys. Rev. Lett. — 2004. — Nov. — Vol. 93. — P. 215004. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.215004>.
52. Nieter Chet, Cary John R. VORPAL: a versatile plasma simulation code // Journal of Computational Physics. — 2004. — Vol. 196, no. 2. — P. 448 – 473. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999103006041>.
53. Pukhov A. Three-dimensional electromagnetic relativistic particle-in-cell code VLPL (Virtual Laser Plasma Lab) // Journal of



- Plasma Physics. — 1999. — 4. — Vol. 61. — P. 425–433. — URL: [http://journals.cambridge.org/article\\_S0022377899007515](http://journals.cambridge.org/article_S0022377899007515).
54. Particle-in-cell plasma simulation on heterogeneous cluster systems / S. Bastrakov, R. Donchenko, A. Gonoskov et al. // Journal of Computational Science. — 2012. — Vol. 3, no. 6. — P. 474 – 479. — Next Generation Computational Scientists: Russian Federation. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877750312001019>.
55. Stantchev George, Dorland William, Gumerov Nail. Fast parallel Particle-To-Grid interpolation for plasma PIC simulations on the GPU // Journal of Parallel and Distributed Computing. — 2008. — Vol. 68, no. 10. — P. 1339–1349.
56. Particle-in-cell Simulations with Charge-conserving Current Deposition on Graphic Processing Units / Xianglong Kong, Michael C. Huang, Chuang Ren, Viktor K. Decyk // J. Comput. Phys. — 2011. — feb. — Vol. 230, no. 4. — P. 1676–1685. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2010.11.032>.
57. Radiative Signatures of the Relativistic Kelvin-Helmholtz Instability / M. Bussmann, H. Baur, T. E. Cowan et al. // Proceedings of the International Conference on High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis. — SC '13. — New York, NY, USA : ACM, 2013. — P. 5:1–5:12. — URL: <http://doi.acm.org/10.1145/2503210.2504564>.
58. Esarey E., Schroeder C., Leemans W. Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators // Rev. Mod. Phys. — 2009. — Aug. — Vol. 81. — P. 1229–1285. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.1229>.
59. Pukhov A., Meyer-ter Vehn J. Laser wake field acceleration: the highly non-linear broken-wave regime // Applied Physics B. — 2002. — Vol. 74, no. 4-5. — P. 355–361. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s003400200795>.

60. Relativistic laser-matter interaction and relativistic laboratory astrophysics / S. V. Bulanov, T. Zh. Esirkepov, D. Habs et al. // The European Physical Journal D.— 2009.— Vol. 55, no. 2.— P. 483–507.— URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjd/e2009-00138-1>.
61. Electron bunch acceleration in the wake wave breaking regime / S.V. Bulanov, M. Yamagiwa, T.Zh. Esirkepov et al. // Plasma Physics Reports.— 2006.— Vol. 32, no. 4.— P. 263–281.— URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S1063780X06040015>.
62. Manipulation and electron-oscillation-measurement of laser accelerated electron beams / H Kotaki, Y Hayashi, K Kawase et al. // Plasma Physics and Controlled Fusion.— 2011.— Vol. 53, no. 1.— P. 014009.— URL: <http://stacks.iop.org/0741-3335/53/i=1/a=014009>.
63. Андреев Н. Е., Горбунов Л. М. Лазерно-плазменное ускорение электронов // Успехи физических наук.— 1999.— Vol. 169, no. 1.— P. 53–58.— URL: <http://ufn.ru/ru/articles/1999/1/g/>.
64. Birdsall C.K., Langdon A.B. Plasma Physics Via Computer Simulation. Course notes for electrical engineering and computer sciences.— McGraw-Hill, 1976.— ISBN: 9780070661516.— URL: <http://books.google.ca/books?id=Qi5APgAACAAJ>.
65. Сигов Ю. С. Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. Избранные труды/ Сост. Г.И. Змиевская, В.Д. Левченко.— Москва : Физматлит, 2001.
66. Морозов А.И. Физические основы космических электроракетных двигателей.— Атомиздат, 1978.— Т. 1.
67. Janes G. S., Lowder R. S. Anomalous Electron Diffusion and Ion Acceleration in a Low-Density Plasma // Physics of Fluids (1958-1988).— 1966.— Vol. 9, no. 6.— P. 1115–1123.— URL: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof1/9/6/10.1063/1.1761810>.

68. Ландау Л. Д., М. Лифшиц Е. Теоретическая физика (в 10 томах). — ФИЗМАТЛИТ, 2003. — Т. 2.
69. Thomas Cliff Avery. Anomalous electron transport in the Hall-effect thruster : Ph. D. thesis / Cliff Avery Thomas ; Massachusetts Institute of Technology. — 2006.
70. И.А. Горячев. Исследование высокочастотных процессов в плазме разрядного канала Холловского двигателя (ХД). — 2011. — магистерская диссертация, НИЯУ МИФИ.
71. Fife J. M. Hybrid-PIC Modeling and Electrostatic Probe Survey of Hall Thrusters : Ph. D. thesis / J. M. Fife ; Massachusetts Institute of Technology. — 1998.
72. Hybrid PIC-DSMC simulation of a Hall thruster plume on unstructured grids / Shannon Cheng, Mark Santi, Murat Celik et al. // Computer Physics Communications. — 2004. — Vol. 164, no. 1–3. — P. 73 – 79. — Proceedings of the 18th International Conference on the Numerical Simulation of Plasmas. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465504002590>.
73. Experimental and Numerical Examination of the BHT-200 Hall Thruster Plume : Rep. / Air Force Research Laboratory (AFMC) ; Executor: Michael R. Nakles, et al. : 2007.
74. Gamero-Castano M, Katz I. Estimation of Hall Thruster Erosion Using HPHall // 29th International Electric Propulsion Conference. — 2005.
75. Дебай П. Избранные труды. — Наука, 1987.
76. Власов А.А. О вибрационных свойствах электронного газа // ЖЭТФ. — 1938. — Т. 8. — С. 291.

77. Taflove Allen, Hagness Susan C. Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method. — 3rd edition. — Norwood : Artech House, 2005.
78. Yee Kane. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media // Antennas and Propagation, IEEE Transactions on. — 1966. — May. — Vol. 14, no. 3. — P. 302–307.
79. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — Лабортрия Базовых Знаний, 2002.
80. Трехмерное численное моделирование распространения плазмонных поляритонов в волноводе / И.А. Горячев, А.В. Закиров, В.Д. Левченко, А.Ю. Перепёлкина // XL Международная Эвенигородская конференция по физике плазмы и УТС. Тезисы докладов / Плазмаиофан. — Москва, 2013. — 11-15 февраля. — С. 274.
81. Верификация программного комплекса для Прямого моделирования в сейсмозведке CF/Geo4 на стандартных геофизических моделях / Т.В. Левченко, С.А. Хилков, А.В. Иванов и др. // Школа-семинар Петромодель 2013. — Петергоф, 2013. — 15-20сентября.
82. Boris J. P. Relativistic plasma simulation. Optimization of a hybrid code // Proc. 4th Conf. Numer. Simul. Plasmas. — 1970. — P. 3–67.
83. Esirkepov T.Zh. Exact charge conservation scheme for Particle-in-Cell simulation with an arbitrary form-factor. — 2001.
84. Ю.С. Сигов. Метод макрочастиц в задаче о бесстолкновительной релаксации плазмы с размытым электронным пучком // Численное моделирование коллективных процессов в плазме: Сборник научных трудов / М.В. Масленников, Институт прикладной матема-

- тики им. М.В. Келдыша. — ИППМ, 1980. — С. 172–191. — URL: <http://books.google.ru/books?id=SS4JAQAIAAJ>.
85. On the Numerical Dispersion of Electromagnetic Particle-In-Cell Code : Finite Grid Instability / M. D. Meyers, C.-K. Huang, Y. Zeng et al. // ArXiv e-prints. — 2014. — July. — 1407.5253.
86. Siegman Anthony E. Lasers. — Mill Valley, California : University Science Books, 1986.
87. Воеводин В.В., Воеводин Вл В. Параллельные вычисления. — БХВ-Петербург СПб, 2002. — С. 608.
88. Левченко В. Д. Вычислительная модель локально-рекурсивных нелокально асинхронных алгоритмов для гетерогенных систем // Научный сервис в сети Интернет: все грани параллелизма: Труды Международной суперкомпьютерной конференции (23-28 сентября 2013). — Изд-во МГУ, 2013.
89. Wonnacott David. Achieving Scalable Locality with Time Skewing // International Journal of Parallel Programming. — 2002. — Vol. 30, no. 3. — P. 181–221. — URL: <http://dx.doi.org/10.1023/A%3A1015460304860>.
90. Intel Xeon Phi Coprocessor System Software Developers Guide.
91. Горячев И.А., Левченко В.Д., Перепёлкина А.Ю. Программная модель и оценка производительности для гетерогенных систем с графическими процессорами // Международная молодёжная конференция-школа «Современные проблемы прикладной математики и информатики». Тезисы докладов. — Дубна, 2012. — 22-27 августа. — С. 78–80.
92. Lebesgue Henri Léon. Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France. — Gauthier-Villars, 1904.

93. A computer oriented geodetic data base and a new technique in file sequencing :  
Rep. : Ottawa, Ontario, Canada ; Executor: Morton : 1966. — URL:  
<http://ibm.co/1w2qaSf>.
94. Drude P. Zur Elektronentheorie der Metalle // *Annalen der Physik*. — 1900. —  
Vol. 306. — P. 566–613.
95. А.В. Иванов. Библиотека aivlib [сайт]. — 2012. — URL: <http://a-iv.ru/aivlib/>.
96. Boashash Boualem. Time-Frequency Signal Analysis and Processing: A  
Comprehensive Reference. — Oxford, UK : Elsevier, 2003.
97. Fried Burton D. Mechanism for Instability of Transverse Plasma Waves //  
*Physics of Fluids (1958-1988)*. — 1959. — Vol. 2, no. 3. — P. 337–337. — URL:  
<http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof1/2/3/10.1063/1.1705933>.
98. Generation of Magnetic Fields in Cosmological Shocks / M. V. Medvedev,  
L. O. Silva, M. Fiore et al. // *Journal of Korean Astronomical Society*. —  
2004. — dec. — Vol. 37. — P. 533–541.
99. Ландау Л.Д. О колебаниях электронной плазмы // *ЖЭТФ*. — 1946. —  
Т. 16. — С. 574.
100. Ахиезер А.И. Электродинамика плазмы. — Наука, 1974.
101. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродина-  
мики плазмы. — Высшая школа, 1978.
102. Nonlinear filamentation instability driven by an inhomogeneous current in a  
collisionless plasma / F. Califano, R. Prandi, F. Pegoraro, S. V. Bulanov //  
*Phys. Rev. E*. — 1998. — Dec. — Vol. 58. — P. 7837–7845. — URL:  
<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.58.7837>.

103. Stockem A., Dieckmann M. E., Schlickeiser R. PIC simulations of the temperature anisotropy-driven Weibel instability: analysing the perpendicular mode // Plasma Physics and Controlled Fusion. — 2010. — aug. — Vol. 52, no. 8. — P. 085009. — 1006.3057.
104. Tautz R. C., Lerche I. Nonlinear Weibel-type soliton modes // Journal of Physics A Mathematical General. — 2011. — jan. — Vol. 44, no. 4. — P. 045501. — 1003.1055.
105. Bret A., Firpo M.-C., Deutsch C. Collective electromagnetic modes for beam-plasma interaction in the whole  $k$  space // Phys. Rev. E. — 2004. — Oct. — Vol. 70. — P. 046401. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.70.046401>.
106. Bret Antoine, Firpo Marie-Christine, Deutsch Claude. Bridging the gap between two stream and filamentation instabilities // Laser and Particle Beams. — 2005. — 9. — Vol. 23. — P. 375–383. — URL: [http://journals.cambridge.org/article\\_S0263034605050536](http://journals.cambridge.org/article_S0263034605050536).
107. Bret A., Deutsch C. Hierarchy of beam plasma instabilities up to high beam densities for fast ignition scenario // Physics of Plasmas (1994-present). — 2005. — Vol. 12, no. 8. — P. 082704. — URL: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pop/12/8/10.1063/1.2012067>.
108. Bret A., Deutsch C. Mixed two-stream filamentation modes in a collisional plasma // Physics of Plasmas (1994-present). — 2005. — Vol. 12, no. 8. — P. 082109. — URL: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pop/12/8/10.1063/1.2007067>.
109. Bret A., Firpo M.-C., Deutsch C. Electromagnetic instabilities for relativistic beam-plasma interaction in whole  $k$  space: Nonrelativistic beam and plasma temperature effects // Phys. Rev. E. — 2005. — Jul. — Vol. 72. — P. 016403. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.72.016403>.

110. Three-dimensional Weibel instability in astrophysical scenarios / Ricardo A. Fonseca, Luis O. Silva, John W. Tonge et al. // *Physics of Plasmas* (1994-present). — 2003. — Vol. 10, no. 5. — P. 1979–1984. — URL: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pop/10/5/10.1063/1.1556605>.
111. Exact Relativistic Kinetic Theory of an Electron-Beam–Plasma System: Hierarchy of the Competing Modes in the System-Parameter Space / A. Bret, L. Gremillet, D. Bénisti, E. Lefebvre // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — May. — Vol. 100. — P. 205008. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.205008>.
112. Bret A., Gremillet L., Dieckmann M. E. Multidimensional electron beam-plasma instabilities in the relativistic regime // *Physics of Plasmas* (1994-present). — 2010. — Vol. 17, no. 12. — P. 120501. — URL: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pop/17/12/10.1063/1.3514586>.
113. Lazar M., Schlickeiser R., Shukla P. K. Cumulative effect of the filamentation and Weibel instabilities in counterstreaming thermal plasmas // *Physics of Plasmas* (1994-present). — 2006. — Vol. 13, no. 10. — P. 102107. — URL: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pop/13/10/10.1063/1.2357047>.
114. Achterberg A., Wiersma J., Norman C. A. The Weibel instability in relativistic plasmas. II. Nonlinear theory and stabilization mechanism // *Astronomy and Astrophysics*. — 2007. — nov. — Vol. 475. — P. 19–36.
115. PIC simulation of a thermal anisotropy-driven Weibel instability in a circular rarefaction wave / M E Dieckmann, G Sarri, G C Murphy et al. // *New Journal of Physics*. — 2012. — Vol. 14, no. 2. — P. 023007. — URL: <http://stacks.iop.org/1367-2630/14/i=2/a=023007>.
116. Beam-Weibel filamentation instability in near-term and fast-ignition experiments / Jeremy Martin Hill, Michael H. Key, Stephen P. Hatchett, Richard R. Freeman // *Physics of Plasmas*



- (1994-present). — 2005. — Vol. 12, no. 8. — P. 082304. — URL: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pop/12/8/10.1063/1.1986988>.
117. V.P. Krainov. Weibel instability in plasma produced by a super-intense femtosecond laser pulse // *ЖЭТФ*. — 2003. — Vol. 123, no. 3. — P. 487.
118. Morse R. L., Nielson C. W. Numerical Simulation of the Weibel Instability in One and Two Dimensions // *Physics of Fluids* (1958-1988). — 1971. — Vol. 14, no. 4. — P. 830–840. — URL: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof1/14/4/10.1063/1.1693518>.
119. Pukhov A. Three-Dimensional Simulations of Ion Acceleration from a Foil Irradiated by a Short-Pulse Laser // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Apr. — Vol. 86. — P. 3562–3565. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.3562>.
120. Sugie M., Okada T., Ogawa K. Energetic electron generation and Weibel-type magnetic field generation with ultraintense laser pulses in overdense plasmas // *Journal of Korean physical society*. — 2006. — Vol. 49. — P. S381–S383.
121. Anshuman Borthakur Nilakshi Das. Weibel instability due to ultra intense laser plasma interaction relevant to fusion // *International Journal for Basic Sciences and Social Sciences*. — 2012. — Vol. 2, no. 1. — P. 107–111. — URL: <http://www.rfbss.org/journal/index.php/IJBSS/article/view/21>.
122. Growth of filaments and saturation of the filamentation instability / M. Gedalin, M. Medvedev, A. Spitkovsky et al. // *Physics of Plasmas* (1994-present). — 2010. — Vol. 17, no. 3. — P. 032108. — URL: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pop/17/3/10.1063/1.3345824>.