



Пережогин Павел Александрович

**Стохастические и детерминистические подсеточные
параметризации для двумерной турбулентности и их
применение в моделях циркуляции океана**

Специальность 05.13.18 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук.

Научный руководитель: **Глазунов Андрей Васильевич**,
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник Института вы-
числительной математики им. Г.И. Марчука
РАН

Официальные оппоненты: **Дружинин Олег Александрович**,
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник Института при-
кладной физики РАН

Курганский Михаил Васильевич,
доктор физико-математических наук,
главный научный сотрудник Института физи-
ки атмосферы им. А.М. Обухова РАН

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт океанологии им.
П.П. Ширшова Российской академии наук

Защита диссертации состоится «10» июня 2021 года в 14 часов на засе-
дании диссертационного совета Д002.024.03, созданного на базе ИПМ им.
М.В. Келдыша РАН, расположенного по адресу: 125047, г. Москва, Ми-
усская пл., д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института прикладной
математики им. М.В. Келдыша РАН и на сайте [https://keldysh.ru/
council/3/D00202403/defence3.htm](https://keldysh.ru/council/3/D00202403/defence3.htm).

Автореферат разослан «___» _____ 2021 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д002.024.03,
кандидат физико-математических
наук

Корнилина М.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Численные модели, участвовавшие в предыдущем проекте сравнения совместных моделей климата CMIP5 (Coupled Model Intercomparison Project), имели в качестве своей океанской компоненты модели океана с достаточно грубым горизонтальным разрешением порядка 1 градуса. Такие модели явно не воспроизводят на вычислительной сетке мезомасштабные вихри, а их воздействие на средние течения и поля температуры и солёности учитывается с помощью параметризаций горизонтального перемешивания (например, изопикническая диффузия) и параметризации Гента-Маквильямса.

В текущей программе CMIP6 разрешение многих моделей океана было повышено до $1/4$ градуса. При таком разрешении мезомасштабные вихри в средних широтах частично воспроизводятся явным образом. Такие модели называются "вихредопускающими". Однако, в вихредопускающих моделях вихревая динамика значительно ослаблена за счет низкого эффективного пространственного разрешения и ошибок аппроксимации численных схем. Это приводит к заниженным значениям вихревого переноса тепла, соли и импульса (в частности, к ослаблению меридиональных переносов), что, в свою очередь, существенно искажает среднее состояние океана и чувствительность океанских моделей к атмосферным воздействиям. Параметризации "подсеточной" турбулентности, предназначенные для грубых моделей, оказываются неприменимыми. Для эффективного использования имеющегося пространственного разрешения требуется разработка и внедрение принципиально новых "подсеточных" замыканий.

С точки зрения способа воспроизведения квазидвумерной турбулентности, вихредопускающие модели могут рассматриваться как LES (Large Eddy Simulation) модели, то есть они разрешают турбулентное вихревое поле лишь частично, а масштаб расчетной сетки принадлежит инерционному энстрофийному интервалу.

Способ построения подсеточных замыканий в LES моделях хорошо изучен для случая трехмерной турбулентности, однако двумерному случаю в литературе уделено гораздо меньшее внимание. В частности, LES-подход должен учитывать существенно нелокальную природу взаимодействий и возможность переноса энергии от мелких масштабов к крупным, а также возможное влияние ошибок аппроксимации численных схем на разрешаемую явно динамику. Далее мы будем называть "подсеточными силами" суммарный вклад неразрешенных на сетке масштабов и ошибок аппроксимации, которые необходимо ввести для того, чтобы скорректировать решение на грубой сетке.

Качество подсеточных параметризаций может быть оценено в априорных и апостериорных экспериментах. В априорных экспериментах

исследуется, насколько хорошо подсеточная модель описывает подсеточные силы, вычисленные на траектории эталонной модели, имеющей высокое пространственное разрешение. В апостериорных экспериментах статистические характеристики решений грубой модели с подсеточной параметризацией сравниваются со статистическими характеристиками решений эталонной модели. В данной диссертации мы рассматриваем оба подхода к оценке качества подсеточных параметризаций.

Большинство современных моделей подсеточной квазидвумерной турбулентности были разработаны для квазигеострофических уравнений с небольшим числом слоев [Jansen, 2014], [Berloff, 2018], [Grooms, 2015], [Zanna, 2017]. Наиболее простыми параметризациями с точки зрения включения в существующие модели океана являются параметризации обратного перераспределения кинетической энергии (ОПКЭ), в англоязычной литературе "Kinetic Energy Backscatter" (KEB, [Schumann, 1995]). Действие таких параметризаций противоположно моделям турбулентной вязкости – они возвращают энергию в крупные масштабы таким образом, чтобы энергетический эффект суммарной подсеточной модели был нулевым или близким к нулевому ("energetically consistent backscatter", [Jansen, 2014]). Параметризации ОПКЭ способны улучшать среднее состояние модельного решения, спектр кинетической энергии, вихревой поток тепла и глобальную термохалинную циркуляцию. В настоящий момент целесообразно, используя накопленный опыт, адаптировать подсеточные параметризации к моделям циркуляции океана.

Целью диссертационной работы является улучшение качества воспроизведения динамики океана современными численными моделями с помощью подсеточных параметризаций мезомасштабных вихрей.

Для достижения поставленной цели было необходимо решить следующие **задачи**:

1. Исследовать статистически-равновесные состояния, возникающие в двумерной идеальной жидкости и в двумерной форсированной вязкой жидкости, в зависимости от используемых численных аппроксимаций адвективного слагаемого.
2. Построить спектральные характеристики подсеточных сил в задаче вынужденной двумерной турбулентности с учетом численных аппроксимаций адвекции и соответствующие им схемнозависимые параметризации ОПКЭ.
3. Исследовать воспроизведение баротропной неустойчивости при грубом пространственном разрешении и изучить влияние подсеточных параметризаций на рост неустойчивых мод.
4. Включить параметризации ОПКЭ в модель океана NEMO и провести расчеты при вихредопускающем разрешении.
5. Провести сравнение спектральных характеристик подсеточных сил и подсеточных параметризаций ОПКЭ в модели NEMO.

Методология и методы исследования. Результаты работы получены в ходе проведения расчетов с численными гидродинамическими моделями различного уровня сложности. При этом использовались численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных и методы статистического анализа характеристик турбулентных течений. При проведении расчетов использовались многопроцессорные вычислительные системы. Расчеты были проведены с использованием разработанных блоков параметризаций, реализованных в различных численных гидродинамических моделях.

Научная новизна заключается в том, что впервые:

1. Продемонстрирована роль численных аналогов законов сохранения и различных аппроксимаций уравнений двумерной жидкости в формировании обратного каскада энергии.
2. Предложено моделировать ОПКЭ с помощью модели подобия масштабов.
3. Продемонстрирована роль подсеточных замыканий в формировании развития неустойчивости баротропного струйного течения в статистическом смысле.
4. Проведено сравнение стохастического и детерминистического подходов к моделированию ОПКЭ в примитивных уравнениях океана.
5. Предложен новый метод спектрального анализа неразрешаемых нелинейных взаимодействий на основе метода релаксации, и показано, что характерный пространственный масштаб обратного перераспределения кинетической энергии в океане определяется масштабом бароклинной неустойчивости. Предложены и реализованы параметризации ОПКЭ с соответствующими спектральными характеристиками.

Достоверность изложенных в диссертационной работе результатов обеспечивается проверкой предложенных параметризаций на тестовых задачах, включающих в себя проведение прямого численного моделирования идеализированных двумерных турбулентных течений, а также согласованностью полученных результатов с известными теоретическими моделями и результатами вычислительных экспериментов, опубликованными другими авторами.

Теоретическая значимость. На основе спектрального анализа подсеточных сил выделены особенности ОПКЭ для классических двумерных течений и океанической циркуляции. Исследованы различные подсеточные модели с точки зрения их применимости для воспроизведения ОПКЭ.

Практическая значимость. Применение специализированных параметризаций ОПКЭ позволит увеличить эффективное разрешение моделируемой квазидвумерной турбулентности, что в свою очередь позволит производить расчеты с моделью климата на длительные промежутки времени с незначительными затратами на вычислительные ресурсы.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Установлена роль численных аналогов законов сохранения, присущих уравнениям двумерной жидкости, в формировании обратного каскада энергии. Отсутствие закона сохранения интегральной завихренности приводит к ложному каскаду энергии в масштаб, определяемый размером области, а отсутствие закона сохранения энтропии приводит к ослаблению обратного каскада энергии.
2. Показано, что модель подобия масштабов воспроизводит спектральный приток энергии от подсеточных сил. По этой причине ее можно использовать как параметризацию ОПКЭ для восстановления обратного каскада энергии, если произвести фильтрацию тенденции в мелкомасштабном диссипативном интервале.
3. Показано, что подсеточные параметризации способны ускорять переход к турбулентному режиму течения в задаче моделирования баротропной неустойчивости струйного течения. Механизм работы подсеточных моделей различный: параметризация отрицательной вязкости препятствует сглаживанию среднего течения; модель подобия масштабов модифицирует линеаризованную систему и увеличивает инкременты роста неустойчивых мод; стохастическая параметризация возбуждает неустойчивые моды.
4. Показано, что моделирование ОПКЭ в примитивных уравнениях океана может быть осуществлено как стохастическим, так и детерминистическим образом. Обе параметризации восстанавливают уровень вихревой энергии, вихревой меридиональный поток тепла и меридиональную опрокидывающую циркуляцию.
5. В модели NEMO реализован новый подход к анализу неразрешаемых нелинейных взаимодействий. Подход основан на методе релаксации. Показано, что характерный пространственный масштаб обратного перераспределения кинетической энергии определяется масштабом бароклинной неустойчивости. Предложены и реализованы параметризации ОПКЭ с соответствующими спектральными характеристиками. Модель отрицательной вязкости верно воспроизводит спектральную плотность возвращения кинетической энергии, а стохастическая параметризация требует настройки радиуса пространственной корреляции случайного поля.
6. Разработан комплекс программ, предназначенный для априорного анализа подсеточных сил и моделирования тенденций, связанных с ОПКЭ, в гидродинамических моделях двумерной и квазидвумерной турбулентности, а именно в DNS модели НИВЦ МГУ и ИВМ РАН и в модели океана NEMO.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих международных и российских конференциях: 58-я, 59-я, 60-я, 61-я, 62-я научные конференции МФТИ, Москва, Россия, 2015 –

2019; Международная молодежная школа и конференция по вычислительно-информационным технологиям для наук об окружающей среде: "CITES-2017", 2017, и "CITES-2019", 2019, Москва, Россия; 21-я Всероссийская школа-конференция молодых ученых "Состав атмосферы. Атмосферное электричество. Климатические процессы" (СатЭП-2017), Борок, Россия, 2017; International Symposium Topical Problems of Nonlinear Wave Physics (NWP-2017), Нижний Новгород, Россия, 2017; International Union of Geodesy and Geophysics 32nd IUGG Conference on Mathematical Geophysics, Нижний Новгород, Россия, 2018; Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения академика А.М. Обухова "Турбулентность, динамика атмосферы и климата", Москва, Россия, 2018 года; Всероссийский форум Суперкомпьютерные технологии и искусственный интеллект, Нижний Новгород, Россия, 2018; Международная конференция "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2019" (АПВМ-2019), Новосибирск, Россия, 2019; Winter school "Physics and Mathematics of Turbulent flows at different scales", Лес Уж, Франция, 2019; Summer school "Mathematics for Climate and the Environment", Каржез, Корсика, Франция, 2019; Workshop on Novel Approaches in Observations and Modeling of Geophysical Turbulence, Москва, 2019; EGU General Assembly 2020, Вена, Австрия, 2020; ECMWF Annual Seminar 2020 (online); Всероссийская конференция, посвященная памяти академика Александра Михайловича Обухова "Турбулентность, динамика атмосферы и климата", Москва, 2020; AGU fall meeting, 2020 (online).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ [1–8] в рецензируемых изданиях, которые индексируются в международных базах данных Scopus или Web of Science. Из них 4 работы [3; 5–7] опубликованы в журналах из списка ВАК по профилю специальности.

Личный вклад. Изложенные в диссертации результаты получены лично автором. Автор принимал участие как в постановке задач, так и в проведении численных экспериментов и интерпретации результатов.

Объем и структура диссертационной работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и четырех приложений. Полный объем диссертации составляет 152 страницы, включая 49 рисунков и 9 таблиц. Список литературы содержит 158 наименований.

Благодарности. Автор выражает благодарность научному руководителю Глазунову А.В. и соавторам работ Дымникову В.П., Грицуну А.С., Мортикову Е.В., а также Лыкосову В.Н., Яковлеву Н.Г., Нечепуренко Ю.М., Демьянко К.В. и Шашкину В.В. за конструктивные замечания.

Работа поддержана грантами РФ (14-27-00126, 17-17-01210), грантами РФФИ (19-35-90023, 18-05-60184, 16-55-12015, 18-05-60126), грантом Президента НШ-9836.2016.5 и Московским центром фундаментальной и прикладной математики (Соглашение с Минобрнауки России № 075-15-2019-1624).

Содержание работы

Во **введении** приводится обзор литературы, обосновывается актуальность работы, формулируется цель работы и ставятся задачи, необходимые для её достижения. Излагается практическая значимость, научная новизна и положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** изучаются статистически-равновесные состояния, возникающие в двумерной идеальной жидкости и в форсированной вязкой жидкости.

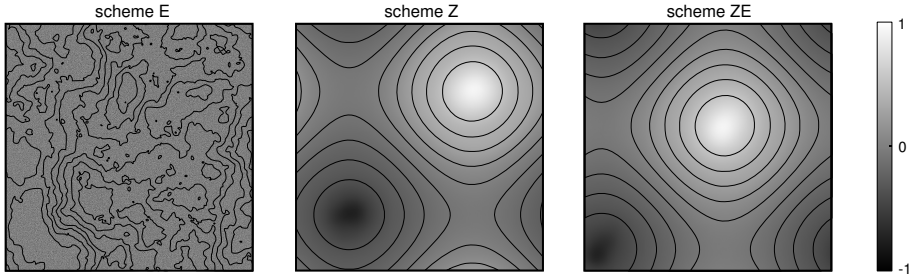


Рис. 1 — Идеальная жидкость. Завихренность (обозначена цветом) и функция тока (изображена линиями), осредненные по времени. Схемы Аракавы, Z — сохраняющая энтрофию, E — сохраняющая энергию, ZE — сохраняющая энтрофию и энергию.

Рассматривается следующее уравнение в двояко-периодическом канале:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = F + D, \quad (1)$$

где ψ и $\omega = \Delta \psi$ — функция тока и завихренность, Δ — оператор Лапласа, $J(\psi, \omega) = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}$ — якобиан. Идеальная жидкость ($F = 0$ и $D = 0$) обладает двумя квадратичными инвариантами: энергией $E = -\frac{1}{2}(\psi, \omega)$ и энтропией $Z = \frac{1}{2}(\omega, \omega)$, где круглые скобки обозначают скалярное произведение.

В двумерной идеальной жидкости должны образовываться крупномасштабные когерентные структуры [Robert, Sommeria, 1991]. Способность конечномерных аппроксимаций идеальной жидкости воспроизводить такие структуры зависит от законов сохранения, которыми обладает численная схема (см. рисунок 1): схема, сохраняющая только энергию (E) и допускающая рост энтропии, когерентной структуры не образует. Показано, что свойства решений идеальной жидкости проявляются и в более реалистичной задаче — форсированной вязкой жидкости (F — стохастическое воздействие, D — вязкость и рэлеевское трение): при малом рэлеевском трении формируются схожие когерентные структуры.

Во второй главе исследуется воспроизведение двунаправленного каскада энергии-энтропии для двух случаев внешнего воздействия (длинноволновое и коротковолновое) при использовании различных аппроксимаций адвективного слагаемого.

Теория [Kraichnan, 1967] предсказывает для вынужденной турбулентности наступление статистически-равновесного состояния со следующей спектральной плотностью энергии (если диссипация отсутствует у масштаба внешнего воздействия k_f):

$$E(k) = \begin{cases} C_1 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, & k < k_f, \\ C_2 \eta^{2/3} k^{-3}, & k > k_f, \end{cases} \quad (2a)$$

$$(2б)$$

где k – волновое число, ε – поток энергии по обратному каскаду, η – поток энтропии по прямому каскаду, C_1, C_2 – безразмерные константы.

Исследованы схемы, традиционно используемые в различных моделях атмосферы и океана ИВМ РАН, схемы реализованные в новых версиях модели прогноза погоды ПЛАВ [Tolstykh, 2010], а также классические схемы Аракавы. Показано, что если внешнее воздействие находится в крупных масштабах (рисунок 2(а)), то энтропийный интервал имеет достаточную протяженность, и динамика крупных масштабов не зависит от выбора численной дискретизации. В другом предельном случае, когда внешнее воздействие расположено в мелких масштабах (рисунок 2(б)), наблюдается нарушение обратного каскада энергии, и большинство схем демонстрируют сильно заниженный уровень энергии, причем наименьший уровень энергии наблюдается для схемы Е, для которой крупномасштабные когерентные структуры не формируются в идеальной жидкости.

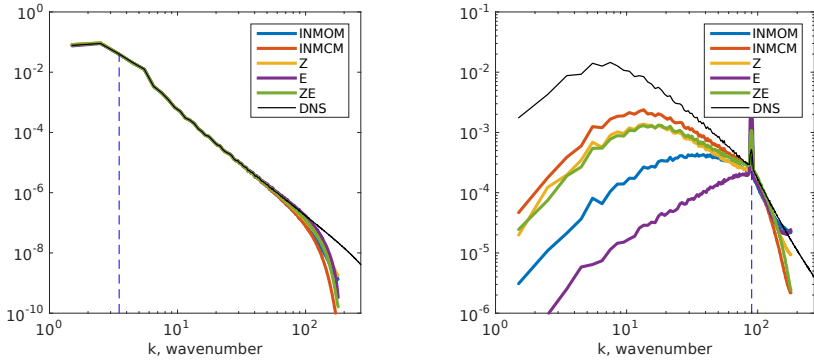
В третьей главе по данным модели высокого разрешения выполнен априорный анализ посеточных сил в задаче вынужденной двумерной турбулентности с мелкомасштабным стохастическим форсингом. Подсеточные силы определены следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} = \dots - \underbrace{J^h(\bar{\psi}, \bar{\omega})}_{\text{схема}} + \sigma, \quad (3)$$

$$\sigma = -\underbrace{\bar{J}(\bar{\psi}, \bar{\omega})}_{\text{подсеточные силы}} + J^h(\bar{\psi}, \bar{\omega}), \quad (4)$$

здесь черта означает спектральный фильтр, исключаяющий неразрешаемые на грубой сетке гармоники, а индекс h – аппроксимацию якобиана на грубой сетке.

Подсеточные силы систематически возвращают энергию на масштабах обратного каскада энергии, причем характерная спектральная плотность возвращения энергии практически совпадает для трех исследуемых численных схем адвекции второго порядка, см. рисунок 3.



а) крупномасштабный форсинг

б) мелкомасштабный форсинг

Рис. 2 — Спектр энергии в форсированной турбулентности в экспериментах с различным масштабом форсинга. Исследуются различные схемы адвекции, описанные в диссертации (INMOM, INMCM, Z, E, ZE). DNS — модель при высоком пространственном разрешении.

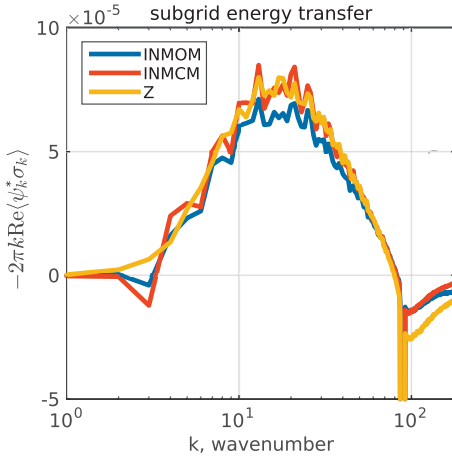


Рис. 3 — Спектральная плотность генерации энергии подсеточными силами для трех схем (INMOM, INMCM, Z) в априорном эксперименте.

Для моделирования спектра генерации энергии были предложены три параметризации ОПКЭ.

1. Стохастическая параметризация ("stochastic") реализована в Фурье-пространстве:

$$\frac{d\omega_k}{dt} = \dots + s_k(t), \quad (5)$$

где ω_k — Фурье-коэффициент завихренности, k — волновое число, $s_k(t)$ — авторегрессионный процесс первого порядка с автоковариационной функцией $\langle s_k(t)s_k(t') \rangle = \langle s_k(t)^2 \rangle \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_k}\right)$, где τ_k

- время корреляции. Время корреляции τ_k выбирается равным времени корреляции подсеточных сил при заданном модуле волнового числа, а приток энергии от стохастической параметризации ($\frac{1}{k^2} \langle s_k(t)^2 \rangle \tau_k$) выбирается равным генерации энергии подсеточными силами на инерционном интервале обратного каскада энергии.
2. Модель отрицательной вязкости ("negative visc.") имеет вид:

$$\frac{d\omega_k}{dt} = \dots - \nu(k) k^2 \omega_k, \quad (6)$$

где $\nu(k) \leq 0$ выбирается таким образом, чтобы воспроизводить спектр генерации энергии подсеточными силами.

3. Модель подобия масштабов ("similarity") имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \dots - C_{sim} \frac{\partial}{\partial x_j} (\widehat{l}_j), \quad l_j = \widetilde{u_j \omega} - \widetilde{u_j} \widetilde{\omega}, \quad (7)$$

где $\widetilde{(\cdot)}$ – "тестовый фильтр", $\widehat{(\cdot)}$ – спектральный фильтр, удаляющий мелкие диссипативные масштабы. В априорном анализе показано, что такая модель способна воспроизводить спектр генерации энергии.

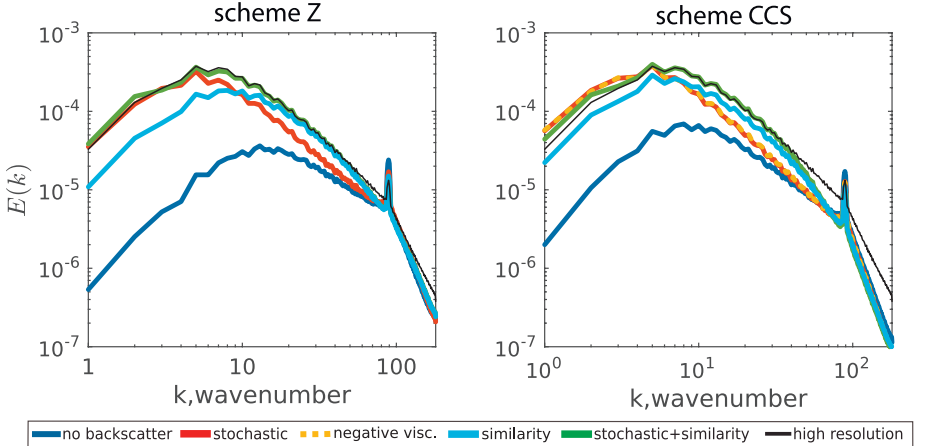


Рис. 4 — Спектральная плотность кинетической энергии грубых моделей для двух схем адвекции (Z, CCS) при разрешении 360^2 . Черная линия соответствует эталонной модели (2160^2).

В результате применения трех описанных моделей ОПКЭ, спектральная плотность кинетической энергии восстанавливается на интервале обратного каскада энергии, см. рисунок 4. Модель отрицательной вязкости и стохастическая параметризация преимущественно воздействуют

на крупные масштабы, а уровень энергии в средних масштабах оказывается заниженным. Модель подобия масштабов более эффективна в средних масштабах. Различное воздействие на решение для этих параметризаций позволяет рассмотреть комбинацию подсеточных замыканий ("stochastic+similarity"), для которой наблюдается максимальное совпадение с эталонной моделью на всем инерционном интервале обратного каскада энергии. Показано, что построенная комбинированная модель при соответствующем выборе коэффициентов применима для различных численных схем второго порядка.

В **четвертой главе** рассмотрена задача развития баротропной неустойчивости. Развитие неустойчивости существенно различается в зависимости от горизонтального разрешения модели, см. рисунок 5. При грубом разрешении возбуждаются более крупномасштабные неустойчивые моды и замедляется переход к турбулентному режиму течения. Показано, что подсеточные параметризаций способны ускорить рост неустойчивых мод.

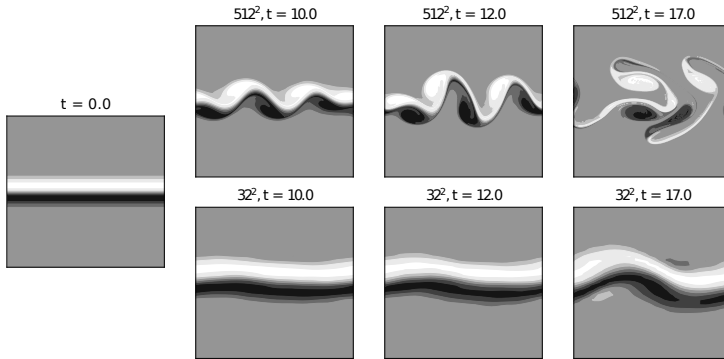


Рис. 5 — Завихренность в различные моменты времени. Эталонная модель (512^2) сверху, грубая модель (32^2) снизу.

Анализ роста неустойчивых мод проведен в статистическом смысле. Неустойчивость возбуждается внешним стохастическим воздействием, которое задает ансамбль реализаций траекторий системы. Получаемые в экспериментах флуктуации относительно среднеансамблевого струйного течения раскладываются по базису неустойчивых мод и рассматривается рост их энергии. На рисунке 6 приведена полная энергия флуктуаций и энергия трех наиболее развитых неустойчивых мод. Энергия второй и третьей неустойчивых мод ("2nd mode TKE", "3rd mode TKE") оказывается заниженной в грубой модели без дополнительных параметризаций ("bare"). Параметризация отрицательной вязкости ("neg.visc.") и модель подобия масштабов ("SS") способны ускорить рост неустойчивых мод, причем, как показано в диссертации, различным образом. Это позволяет

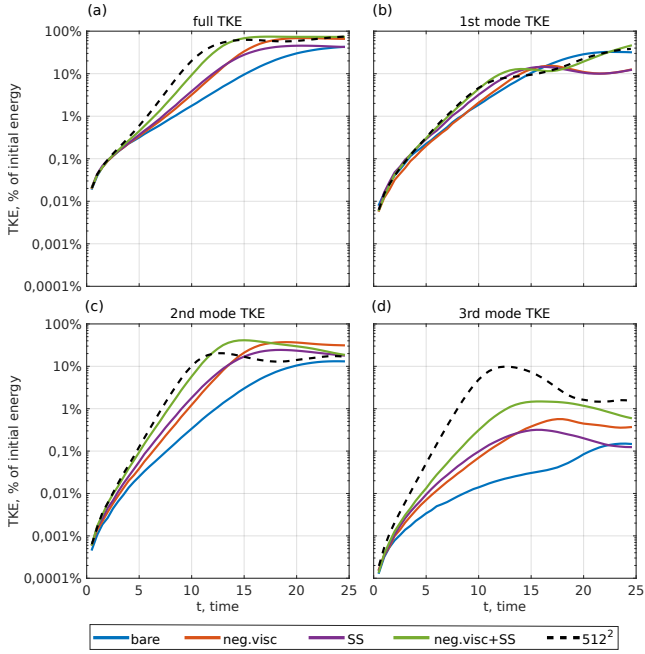


Рис. 6 — Кинетическая энергия флуктуаций (а) и энергия неустойчивых мод $k_x = 1, 2, 3$ соответственно (b), (c), (d), в % от начальной энергии струи. Результаты показаны для моделей при разрешении 32^2 . Черная линия – эталонный расчет для модели с разрешением 512^2 .

рассмотреть комбинацию моделей ("neg.visc.+SS"), для которой наблюдается максимальное соответствие с эталонной моделью в энергии второй неустойчивой моды ("2nd mode TKE").

В **пятой главе** исследованные выше параметризации ОПКЭ обобщаются на примитивные уравнения океана и исследуются в модели NEMO [Maded, 2015] в конфигурации Double Gyre. Параметризации модифицируют уравнение на эволюцию горизонтальной компоненты импульса. Количество возвращаемой с помощью параметризации ОПКЭ энергии пропорционально количеству диссипируемой энергии аналогично работам [Jansen, 2015], [Berner, 2009]. Показано, что использование таких параметризаций позволяет восстановить количество вихревой кинетической энергии, меридиональный вихревой поток тепла и меридиональную опрокидывающую циркуляцию.

В данной главе исследованы две подсеточные модели.

1. Модель отрицательной вязкости в комбинации с бигармонической вязкостью в уравнении на горизонтальную компоненту импульса:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t} = \dots \nu_4 \nabla_h^4 \mathbf{U}_h + \nabla_h (\nu_2 \nabla_h \mathbf{U}_h), \quad (8)$$

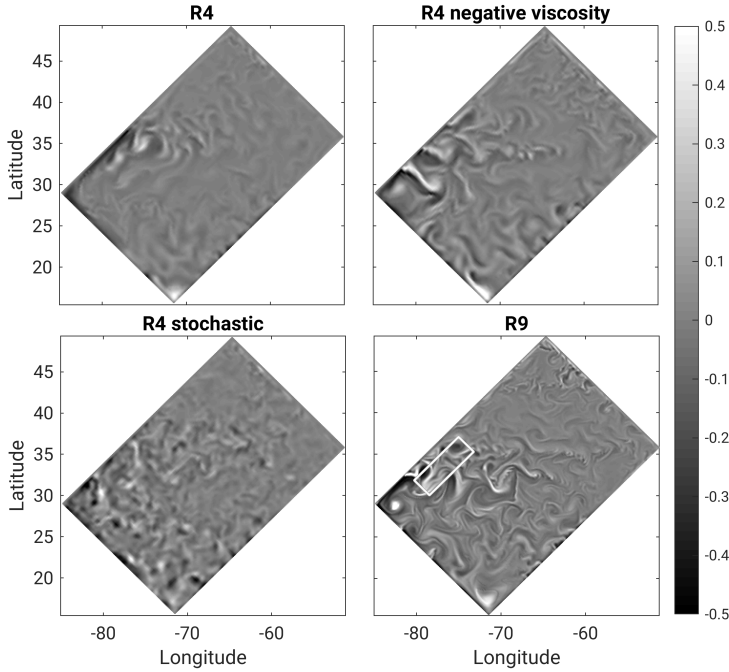


Рис. 7 — Мгновенное поле относительной завихренности в единицах параметра Кориолиса (f). R4 – вихредопускающая модель, R9 – вихреразрешающая модель, R4 negative viscosity и R4 stochastic – вихредопускающие модели с ОПКЭ параметризациями. Цветовая шкала насыщается при значениях ± 0.5 .

где $\mathbf{U}_h$ – горизонтальные компоненты скорости, зависящие от трех пространственных переменных, $\nabla_h = (\partial_x, \partial_y)$. Первый член в правой части уравнения (8) задает мелкомасштабную диссипацию, а второй член параметризует ОПКЭ ($\nu_2(x, y, z, t) \leq 0$).

Для вычисления коэффициента ν_2 вводится дополнительное уравнение на подсеточную кинетическую энергию ($e \equiv e(x, y, z, t)$):

$$\frac{de}{dt} = c_{diss} \dot{E}_{diss} + \dot{E}_{back} + \nu_e \nabla_h^2 e, \quad (9)$$

где $\frac{d}{dt}$ – лагранжева производная, ν_e – коэффициент диффузии подсеточной кинетической энергии, $c_{diss} \leq 1$ – количество возвращаемой энергии; $\dot{E}_{diss}$ – диссипация энергии бигармонической вязкостью, $\dot{E}_{back}$ – генерация энергии за счет параметризации ОПКЭ. Подсеточная энергия e задает коэффициент отрицательной вязкости согласно следующей формуле:

$$\nu_2 = -c_{back} \Delta x \sqrt{\max(e, 0)}, \quad (10)$$

где c_{back} – безразмерный коэффициент, Δx – шаг сетки.

2. Стохастическая параметризация строится на основе квази-баротропной функции тока:

$$\psi(x, y, z, t^n) = \phi(x, y, t^n) \cdot A(x, y, z, t^n), \quad (11)$$

где $\phi(x, y, t^n)$ – дискретный пространственно-временной белый шум с распределением $N(0,1)$, т.е. в каждой точке горизонтальной сетки и на каждом временном слое t^n реализации случайной величины являются независимыми. A – амплитуда, задающая пространственное распределение притока энергии. Функция тока ψ модифицирует уравнение на горизонтальную компоненту импульса следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t} = \dots + \alpha \nabla_h^\perp S^{n_s}(\psi), \quad (12)$$

где $\nabla_h^\perp = (-\partial_y, \partial_x)$, α будет определена позже. Оператор $S^{n_s}(\cdot)$ обозначает n_s применений пространственного дискретного фильтра:

$$S(\psi) = \psi + \frac{(\Delta x)^2}{8} \nabla_h^2 \psi. \quad (13)$$

Используется значение $n_s = 6$, которое обеспечивает корреляционный радиус, равный нескольким шагам сетки.

Поскольку генерация энергии белым по времени шумом пропорциональна квадрату амплитуды, A выбирается следующим образом:

$$A(x, y, z, t^n) = \sqrt{\max(\dot{E}_{diss}, 0)}. \quad (14)$$

Наконец, мы находим параметр α на каждом шаге по времени исходя из равенства интегральных потоков энергии:

$$\frac{\alpha^2 \Delta t}{2} \int |\nabla_h^\perp S^{n_s}(\psi)|^2 dx dy dz = c_{diss} \int \dot{E}_{diss} dx dy dz, \quad (15)$$

где $c_{diss} \leq 1$ – количество возвращаемой энергии.

Характерный вид решений для эталонной модели и для грубых моделей с параметризациями ОПКЭ и без них показан на рисунке 7. Применение параметризаций ОПКЭ позволяет увеличить вихревую кинетическую энергию. В результате разрешаемая вихревая активность изменяет явно воспроизводимые меридиональный вихревой поток тепла и функцию тока меридиональной опрокидывающей циркуляции до значений, близких к значениям, наблюдаемым в эталонной модели, см. рисунок 8.

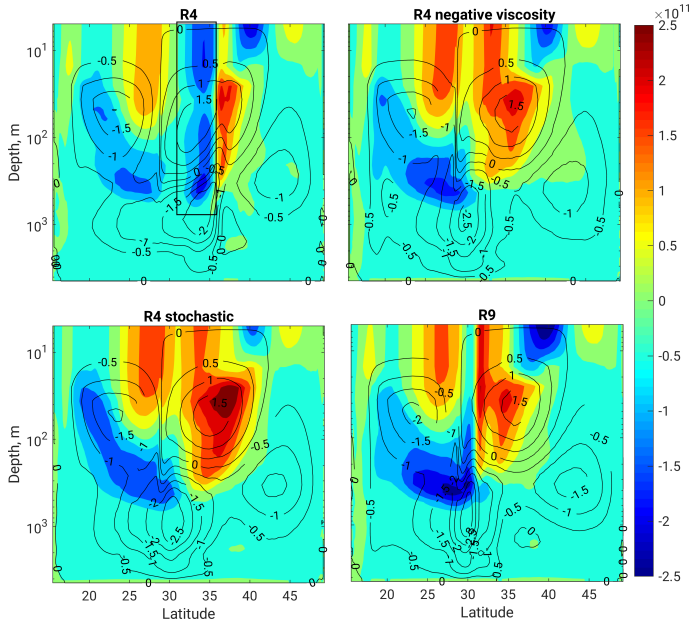


Рис. 8 — Цветом: средний меридиональный вихревой поток тепла, зонально проинтегрированный, $\text{Вт} \cdot \text{м}^{-1}$. Контурами: средняя функция тока опрокидывающей меридиональной циркуляции, в Свердрупсах.

В шестой главе проведено сравнение спектральных характеристик подсеточных сил и подсеточных параметризаций, построенных в предыдущей главе. Априорный анализ проведен стандартным способом, как в третьей главе диссертации (вычисление нелинейного взаимодействия между разрешаемыми и неразрешаемыми течениями), и альтернативным способом с помощью релаксации модели грубого разрешения к эталонной модели. Последний способ позволяет явно учесть ошибку, связанную с неверным моделированием диссипации с помощью бигармонического оператора.

По результатам априорного анализа, проведенного стандартным образом, было показано, что возвращение энергии из подсеточных масштабов (ОПКЭ) происходит на одном и том же спектральном интервале независимо от пространственного разрешения грубой модели, см. рисунок 9(b). ОПКЭ компенсирует недостаточный поток энергии по обратному каскаду в грубых моделях, см. рисунок 9(a).

Как видно из рисунка 10, приток энергии от подсеточных сил ("R4 subgrid") и от построенных в предыдущей главе параметризаций ОПКЭ ("R4 negvisc", "R4 stoch") не совпадает. Вместе с тем, эти параметризации обеспечивают правильную динамику грубой модели. Для того чтобы

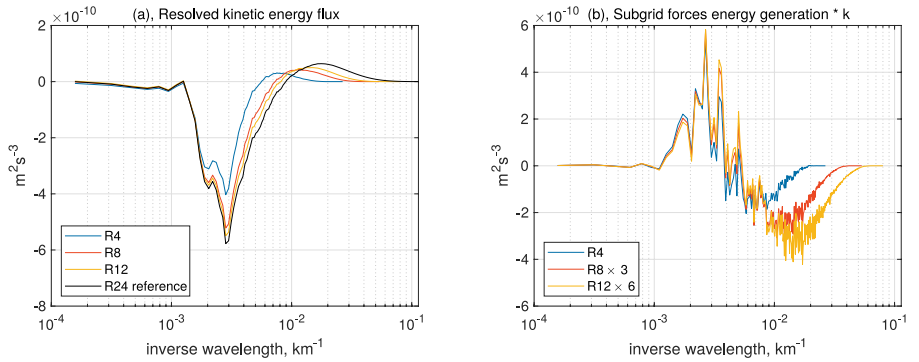


Рис. 9 — (а), разрешаемый на грубой сетке спектральный поток энергии. (б), спектральная плотность притока энергии для подсеточных сил. Разрешение грубых моделей: R4 — $1/4^\circ$, R8 — $1/8^\circ$, R12 — $1/12^\circ$, эталонная модель — $1/24^\circ$.

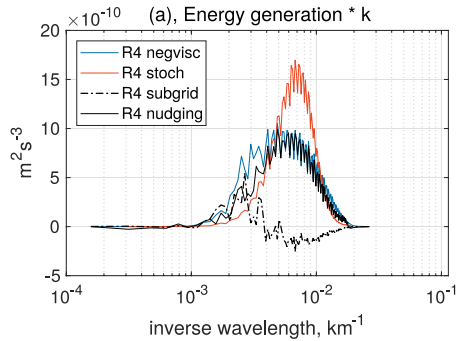


Рис. 10 — Приток энергии от подсеточных сил ("R4 subgrid"), релаксации ("R4 nudging") и параметризаций ОПКЭ.

объяснить этот эффект, был предложен альтернативный способ диагностики части подсеточных сил, обеспечивающей ОПКЭ, и учитывающий несовершенство модели диссипации и возможные эффекты, связанные с искажением мелкомасштабной части спектра в грубой модели. В данном методе оператор диссипации в грубой модели фиксируется, после чего осуществляется релаксация траектории грубой модели к траектории эталонной модели ("R4 nudging"). Согласно данным метода релаксации, физический масштаб, на котором происходит возвращение энергии, приблизительно соответствует масштабу бароклиновой неустойчивости. Параметризация отрицательной вязкости верно воспроизводит этот масштаб, а для стохастической параметризации требуется настройка радиуса корреляции по пространству в зависимости от разрешения грубой модели (соответствующие эксперименты приведены в тексте диссертации).

В заключении приведены результаты работы, которые состоят в следующем:

1. Исследовано влияние численных аппроксимаций на формирование крупномасштабных когерентных структур в двумерной идеальной жидкости. Показано, что преимущественно обладают численные аппроксимации адвекции, сохраняющие численный аналог энтропии.
2. Исследовано влияние численных аппроксимаций на формирование обратного каскада энергии в вынужденной турбулентности. В том случае, когда внешнее воздействие расположено вблизи сеточного масштаба, обратный каскад оказывается ослабленным. Преимуществом обладают схемы, сохраняющие численный аналог энтропии и интегральной завихренности.
3. Показано, что подсеточные вихри участвуют в формировании обратного каскада энергии при грубом пространственном разрешении и вносят энергию на крупные масштабы (ОПКЭ). Значительная часть ОПКЭ связана с компенсацией ошибок аппроксимации.
4. Построены параметризации, моделирующие спектральную плотность возвращения энергии подсеточными силами, вычисленными с учетом ошибок аппроксимации. Такие параметризации способны восстановить спектральную плотность энергии на инерционном интервале обратного каскада энергии. Преимуществом обладает комбинированная модель, где часть ОПКЭ описывается с помощью модели подобию масштабов.
5. Исследовано влияние параметризаций подсеточной турбулентности на развитие неустойчивости баротропного струйного течения. Преимуществом обладают модели подобию масштабов и отрицательной вязкости, потому что ускоряют рост неустойчивых мод. Поскольку данные модели воздействуют на флуктуации и среднее течение различным образом, то их можно использовать совместно. Стохастическая параметризация является менее предпочтительной, так как возбуждает все собственные моды системы.
6. Разработан блок программ для моделирования подсеточной двумерной турбулентности в модели океана NEMO. Показано, что параметризации ОПКЭ способны улучшить воспроизведение вихревой кинетической энергии, вихревого потока тепла, меридиональной опрокидывающей циркуляции, распределение кинетической энергии по временным масштабам и уменьшить ошибки в средних полях. Аналогичные результаты невозможно получить, изменяя коэффициенты вязкости и диффузии.
7. Проведено сравнение построенных параметризаций ОПКЭ в модели океана NEMO с подсеточными силами. Показано, что наибольшее соответствие между параметризациями и подсеточными

силами наблюдается в том случае, когда подсеточные силы вычисляются с помощью метода релаксации. Согласно данным метода релаксации, ОПКЭ происходит на пространственном масштабе, связанном с физическим масштабом задачи – масштабом бароклинной неустойчивости. Модель отрицательной вязкости верно воспроизводит этот масштаб, а для стохастической модели необходима дополнительная настройка радиуса корреляции случайного поля.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Пережогин, П. А.* Равновесные состояния конечномерных аппроксимаций уравнений двумерной идеальной жидкости / П. А. Пережогин, В. П. Дымников // Нелинейная динамика. — 2017. — Т. 13, № 1. — С. 55—79.
2. *Пережогин, П.* Моделирование квазиравновесных состояний двумерной идеальной жидкости / П. Пережогин, В. Дымников // Доклады академии наук. — 2017. — Т. 474, № 1. — С. 36—40.
3. Comparison of numerical advection schemes in two-dimensional turbulence simulation / P. A. Perezhogin [и др.] // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2017. — Т. 32, № 1. — С. 47—60.
4. *Дымников, В.* О системах гидродинамического типа, аппроксимирующих уравнения двумерной идеальной жидкости / В. Дымников, П. Пережогин // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. — 2018. — Т. 54, № 3. — С. 272—282.
5. *Perezhogin, P. A.* Stochastic and deterministic kinetic energy backscatter parameterizations for simulation of the two-dimensional turbulence / P. A. Perezhogin, A. V. Glazunov, A. S. Gritsun // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2019. — Т. 34, № 4. — С. 197—213.
6. *Perezhogin, P. A.* 2D turbulence closures for the barotropic jet instability simulation / P. A. Perezhogin // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2020. — Т. 35, № 1. — С. 21—35.
7. *Perezhogin, P. A.* Testing of kinetic energy backscatter parameterizations in the NEMO ocean model / P. A. Perezhogin // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2020. — Т. 35, № 2. — С. 69—82.
8. *Perezhogin, P.* Deterministic and stochastic parameterizations of kinetic energy backscatter in the NEMO ocean model in Double-Gyre configuration / P. Perezhogin // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. T. 386. — IOP Publishing. 2019. — C. 012025.

Пережогин Павел Александрович

Стохастические и детерминистические подсеточные параметризации для
двумерной турбулентности и их применение в моделях циркуляции океана

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____