

Федеральное государственное автономное учреждение «Федеральный научный
центр Научно-исследовательский институт системных исследований»
Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»

На правах рукописи

Пестов Дмитрий Александрович

**Исследование взаимного влияния трещин на
направление их роста в различных условиях
нагружения**

1.2.2. – Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. проф. Н.Н. Смирнов

Москва, 2025

Оглавление

Введение.....	3
Обзор литературы.....	7
Глава 1. Математическая модель задачи роста криволинейных трещин	20
1.1. Постановка	20
1.2. Метод решения.	21
1.3. Верификация численного решения.....	24
1.3.1. Плоская трещина под наклонной нагрузкой	24
1.3.2. Две параллельные трещины расположенные перпендикулярно растягивающим нагрузкам.....	25
1.3.3. Эксперимент, трещина, растущая под распределенными сдвиговыми нагрузками	26
1.3.4. Зависимость траектории трещины от размера граничных элементов.....	27
1.4. Обезразмеривание решения.....	28
1.5. Влияние трещины на окружающее поле напряжений	30
1.6. Исследование траектории поворота трещины.....	34
1.7. Оценка устойчивости траектории трещины	35
Выводы главы 1	39
Глава 2: Исследование влияния взаимного расположения трещин на траекторию их роста.....	41
2.1. Взаимодействие двух параллельных трещин при одновременном росте	42
2.2. Взаимодействие трех параллельных трещин при неравномерном росте.....	50
Выводы главы 2:.....	56
Глава 3: моделирование нелинейного взаимодействия трещин при наличии сжимающих нагрузок.....	59
3.1. Метод моделирования нелинейных задач со смыканием берегов трещин	60
3.2 Результаты расчетов	65
3.2.1. Активация закрытой трещины на различном расстоянии от активной.....	65
3.2.2. Влияние пассивной трещины на напряжения в активной	68
3.2.3. Влияние пассивной трещины на траекторию активной.....	69

Выводы главы 3	71
Заключение	72
Список литературы	73

Введение

Актуальность работы.

Задача вычислительного моделирования прочности материалов и конструкций является одной из важнейших инженерных задач. Одним из основных механизмов разрушения является рост и объединение микродефектов среды, называемых трещинами. Рост трещин может иметь различную природу. Это может быть хрупкое разрушение под действием больших нагрузок, коррозионное разрушение под действием сочетания химических и механических процессов, рост усталостных трещин под действием циклических нагрузок или рост трещин под действием внутреннего давления, который может быть как умышленным, как в процессе гидроразрыва, где рост трещин под давлением закачиваемой жидкости увеличивает проницаемость нефтенесущих пластов, так и случайным, как рост трещин в зданиях или дорожном покрытии, когда попавшая в полости материала вода расширяется при замерзании.

Задачи математического моделирования процессов роста трещин и их взаимного влияния приобретают особую актуальность в свете разработки вычислительных кодов для предсказательного моделирования роста и взаимодействия трещин в различных средах, включая конструкционные материалы или взаимодействие трещин гидроразрыва с природными разломами или другими трещинами при многостадийном ГРП. При этом, учитывая большую относительную протяженность системы трещин по сравнению с толщиной отдельной трещины, задача вычислительного моделирования механики трещин становится сложной ввиду малости расчетной ячейки, сравнимой с толщиной трещины и, как следствие, необходимости введения большого количества ячеек в трехмерной расчетной области. Поэтому, встает актуальная задача применения точных фундаментальных решений уравнений теории упругости для сокращения времени вычислений. В диссертации разрабатываются методы граничных элементов для решения интегральных уравнений и технологии их применения в задачах взаимодействия и ветвления трещин в материалах. Применение таких методов позволяет понизить размерность решаемой задачи: для трехмерных объектов ограничиться рассмотрением сеток только на двумерных границах, а для двумерных задач ограничиться рассмотрением условий на кривых, отображающих каждую трещину или свободную границу. Решение же во всей области получается как линейная комбинация фундаментальных решений с соответствующими весами,

определяемыми из граничных условий. Это позволяет достичь существенного сокращения времени вычислений. Механика разрушения и, в частности, механика трещин активно развивалась на протяжении прошлого века, было получено много точных решений, множество задач были или решены или достаточно хорошо изучены. Так были получены критерии роста трещин, в том числе и критерии определения направления дальнейшего роста. Изучены вопросы распространения усталостных трещин, получены зависимости скорости их роста от перепадов приложенных нагрузок. Существенное развитие получили задачи моделирования трещин гидроразрыва, получены как аналитические, так и множество численных решений. Для статических задач о нагружении тел, ослабленных трещинами, получено множество аналитических решений в плоских случаях для различного взаимного расположения трещин и границ тела, а также получено некоторое количество аналитических решений для трехмерных случаев.

Таким образом, задачи с одиночными трещинами достаточно хорошо изучены в различных их аспектах, в том числе и в вопросе роста криволинейных трещин. Задачи с множественными трещинами сильно более тщательно изучены в статической постановке. Задачи же взаимодействия растущих трещин изучены заметно слабее ввиду того, что решение большинства из них возможно только численно, а множество параметров взаимодействия усложняет получение каких-либо общих законов и закономерностей.

Также одной из важных проблем моделирования трещин и, особенно, взаимодействия трещин, является нелинейность данной задачи в случае, если берега какого-либо участка трещин сомкнутся. В таком случае граничные условия на сомкнутом участке меняются, что требует иного подхода к численному решению данных задач. Такая проблема встречается при моделировании взаимодействия трещин гидроразрыва с природными разломами, а также в других условиях, когда трещина растет в среде, находящейся под действием сжимающих напряжений.

В данной работе исследовано взаимодействие растущих криволинейных трещин и получены оценки взаимного влияния трещин на траекторию и прочностные характеристики в зависимости от взаимного расположения трещин.

Предложенная в данной работе модификация метода разрывных смещений позволяет решать нелинейные задачи с частично закрытыми системами трещин без необходимости итеративного пересчета всей матрицы коэффициентов метода, что существенно уменьшает вычислительную сложность данной задачи.

Цели работы.

Одной из основных целей данной работы является оценка необходимости применения моделей криволинейного роста трещин в задачах взаимодействия трещин друг с другом или с другими неоднородностями среды. Ввиду более высокой по сравнению с моделями прямолинейных трещин вычислительной сложности данные модели зачастую не применяются в ситуациях, где они необходимы. Кроме того возможны и случаи, где без их применения можно обойтись, не теряя существенно в точности.

Одним из случаев, которые следует исследовать, является взаимодействие трещины с малыми дефектами среды. Так вопрос предсказания траектории трещины в среде, содержащей множество дефектов является достаточно малоизученным и может быть применимым для задач о росте трещин в неоднородных средах. Также важным является вопрос взаимодействия трещин с другими существующими в среде трещинами. Одной из наиболее удобных характеристик для оценки систем трещин является коэффициент влияния: отношение вычисляемых значений коэффициентов интенсивности в кончиках трещин системы к их теоретическим значениям для одиночной трещины той же длины. Коэффициенты интенсивности напряжений позволяют прогнозировать рост и направление движения трещин, а коэффициент влияния – сравнивать возможности роста трещин системы в различных направлениях с известными результатами для одиночных трещин. Оценка данных коэффициентов может упростить оценку необходимости применения разрабатываемой модели в различных случаях.

Другим важным вопросом является взаимодействие активной трещины с закрытыми трещинами, оценка условий, при которых эти трещины будут активироваться и открываться, а также оценка взаимного влияния этих трещин, что может быть полезно в задачах оценки взаимодействия трещин гидроразрыва с природными разломами или существующими трещинами гидроразрыва.

Научная новизна работы.

В работе предложен новый метод, позволяющий моделировать рост криволинейных трещин с учетом взаимного влияния трещин и возможного смыкания берегов трещин под действием сжимающих напряжений.

С использованием разработанного метода в работе впервые исследовано взаимное влияние растущих криволинейных трещин в упругой плоскости и получены критерии оценки исходов их взаимодействия. Исследовано влияние трещины на траекторию и возможность роста окружающих трещин.

С использованием разработанного метода впервые показана устойчивость траектории трещины нормального отрыва к малым отклонениям и дефектам среды, а также изучено влияние случайных отклонений на траекторию роста трещины.

Достоверность результатов

Предложенный в работе метод решения задачи о росте криволинейных трещин основан на граничноэлементном методе разрывных смещений, показавшем свою эффективность в решении задач для тела, ослабленного наличием трещин. Достоверность полученных результатов установлена путем сравнения с имеющимися аналитическими решениями и экспериментальными данными. Определены границы применимости данного метода. В пределах границ применимости показано хорошее совпадение численных характеристик и траектории трещины. Дальнейшее исследование проведено с учетом границ применимости, в которых верификация показала надёжность и достоверность результатов используемого численного метода.

Теоретическая и практическая ценность работы.

Теоретическая ценность работы заключается в разработанных методах, которые могут быть использованы в других задачах моделирования роста трещин при наличии контакта между их берегами. Показанная устойчивость траекторий растущих трещин к малым отклонениям позволяет использовать разработанные методы и в задачах с неоднородными средами или с наличием других дефектов. Прикладная ценность работы связана с полученными критериями необходимости применения моделей криволинейного роста для задач взаимодействия растущих трещин. Такая задача часто встречается при проведении гидроразрыва, как в формате взаимодействия трещины гидроразрыва с естественными разломами, так и в виде взаимодействия трещин при многостадийном гидроразрыве пласта.

Положения, выносимые на защиту.

1. Предложен новый метод моделирования роста криволинейных трещин в упругой среде в плоской постановке. Модель развития трещины учитывает наличие нескольких трещин произвольной конфигурации с учетом возможного контакта берегов трещин.

2. Разработан и программно реализован вычислительный алгоритм для анализа развития системы трещин с учетом контактных условий на их берегах. Проведена его верификация и валидация. Показано точное (с отклонением менее 3%) совпадение численно предсказанной траектории растущей криволинейной трещины с экспериментом, а также

устойчивость предложенного метода моделирования по отношению к выбору параметров алгоритма.

3. Показано, что траектория трещины при наличии внешнего перепада напряжений устойчива к малым возмущениям её начального состояния и траектории, в том числе случайным. Это обосновывает применимость разработанного метода для анализа развития систем трещин в неодородных материалах или средах с дефектами, если характерный размер неоднородностей много меньше масштабов задачи.

4. С использованием разработанного метода определены критерии взаимодействия изначально параллельных трещин в ходе их роста. Определен характер зависимости критического расстояния между трещинами от режима нагружения и их длин.

Обзор литературы

Вопросы прочности и разрушения материалов были актуальны с древних времен. С тех же времен эти вопросы были связаны с ростом трещин, начиная от наблюдения, что кирпичи или каменные блоки выдерживают серьёзную нагрузку при сжатии, но легко разламываются при растяжении. Так каменные мосты приобрели свою арочную форму, за счет которой собственный вес конструкции обеспечивал сжимающие напряжения в каменных блоках. В то же время и даже раньше нашло своё применение контролируемое объединение трещин. Одним из древнейших способов добычи каменных блоков являлось вбивание множества клиньев, которые, во-первых обеспечивали растягивающие напряжения, а во-вторых создавали зародышевые трещины, которые при объединении приводили к тому, что большой кусок породы откалывался практически по плоскости, берущей начало из линии клиньев (Рис. 1).

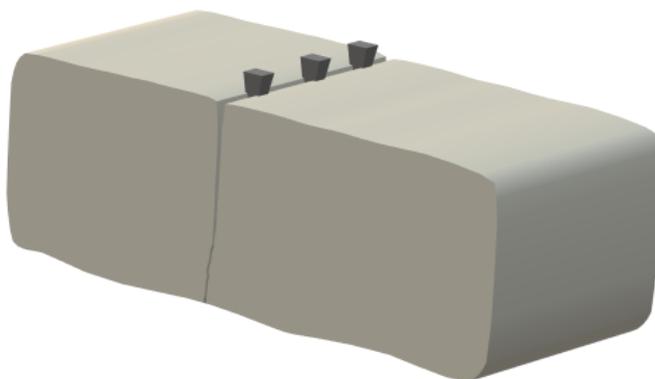


Рисунок 1. схематическое изображение раскола камня при помощи клиньев.

С переходом к стальным конструкциям, выдерживающим большие растягивающие нагрузки, обнаружилось ещё одно свойство материалов: разрушение при циклических

нагрузках, не превосходящих критические. Этот эффект был вызван ростом и объединением усталостных трещин, но в то время ещё не был объяснен.

Основополагающей работой в исследовании трещин принято считать работу Гриффитса [1]. В ней он сформулировал энергетический критерий развития трещины, в соответствии с которым трещина растёт, если интенсивность высвобождающейся при этом потенциальной (упругой) энергии G достигает критического значения G_{cr} , равного плотности поверхностной энергии. Этот критерий показал хорошее совпадение с экспериментами для хрупких материалов наподобие стекла. С другой стороны для конструкционных материалов выводы Гриффитса экспериментами не подтверждались, поскольку высвобождающаяся потенциальная (упругая) энергия расходовалась на необратимые пластические деформации материала.

Учет пластических свойств материалов был реализован в работах Ирвина [2] и Орована [3], где они независимо друг от друга экспериментально показали, что пластическая деформация в металлах возникает в малой окрестности кончика трещины. Был также сформулирован принцип квазихрупкого разрушения: поскольку область пластической деформации мала в сравнении с размерами тела и трещин, то поток упругой энергии рассчитывается из упругого решения, но расходуется эта энергия не только на образование новой свободной поверхности трещин, но и на необратимые пластические деформации. В работах Вестгарда [4] были получены аналитические формулы для напряжений и деформаций вблизи кончика трещины, а затем в работе Вильямса [5] было показано, что напряжения и деформации в окрестности кончика трещины (рис.2) определяются значениями коэффициентов интенсивности напряжений (КИН). В зависимости от приложенной нагрузки выделяют три основных вида трещин: трещина нормального отрыва, трещина продольного сдвига и трещина антиплоской деформации, которым соответствуют три коэффициента интенсивности напряжений, обозначаемые, соответственно, K_I, K_{II}, K_{III} . В случае преобладания одного из коэффициентов интенсивности применим критерий, сформулированный Ирвином [6]: рост трещины происходит, если КИН достигает критического значения. В плоских задачах это значение называют трещинойстойкостью и обозначают K_{IC} .

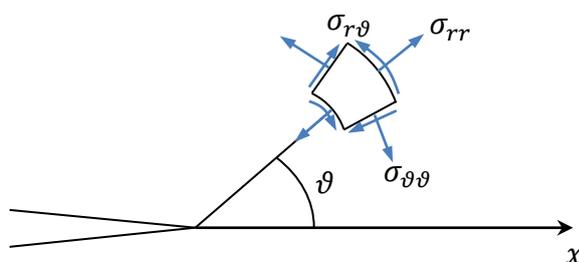


Рисунок 2. Компоненты тензора напряжений в окрестности трещины. r – расстояние от кончика, ϑ – угол отклонения от оси трещины.

Силовой и энергетический критерий роста трещин можно назвать первыми критериями линейной механики разрушения. Еще одним критерием, позволяющим учитывать пластические деформации, стал силовой критерий Баренблатта [7-9], в котором распространение трещин определяется модулем сцепления K , характеризующим действие сил сцепления в окрестности кончика трещины. В простейших случаях все три этих критерия эквивалентны между собой [10]. В работе Райса [11] был предложен способ расширить эти критерии на материалы с большой зоной пластической деформации. В качестве характеристики скорости выделения энергии на единицу новой поверхности при разрушении был предложен интеграл Райса или J -интеграл. В работах Хатчинсона [12], Райса и Росингерна [13] было показано, что J -интеграл может быть применен в качестве силовой характеристики трещин для материалов с зоной больших пластических деформаций. Также было показано взаимоотношение этого интеграла и коэффициентов интенсивности деформаций. Это делает J -интеграл более удобным параметром для критериев роста трещин в случае сложного нагружения. Методы определения прочности на разрушение с использованием J -интеграла показали хорошее совпадение с экспериментальными данными [14].

Для случаев сложных нагружений, когда модель прямолинейной трещины неприменима, были разработаны критерии определения направления роста трещины. Первыми из них стали двумерные критерии, относящиеся к плоской задаче для случая, когда антиплоские деформации не учитываются и $K_{III} = 0$. Первым из них является критерий максимальных растягивающих напряжений, предложенный Эрдоганом и Сих [15]. В нем используется разложение Вильямса, в котором напряжения в окрестности кончика трещины выражаются через коэффициенты интенсивности напряжений K_I, K_{II} . В цилиндрической системе координат компоненты тензора напряжений принимают вид

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{K_I}{4} \left(5 \cos \frac{\vartheta}{2} - \cos \frac{3\vartheta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4} \left(-5 \sin \frac{\vartheta}{2} + 3 \cos \frac{3\vartheta}{2} \right) \right] + T \cos^2 \vartheta$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{K_I}{4} \left(3 \cos \frac{\vartheta}{2} + \cos \frac{3\vartheta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4} \left(-3 \sin \frac{\vartheta}{2} - 3 \sin \frac{3\vartheta}{2} \right) \right] + T \sin^2 \vartheta$$

$$\sigma_{r\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{K_I}{4} \left(\sin \frac{\vartheta}{2} + \sin \frac{3\vartheta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} + \cos \frac{3\vartheta}{2} \right) \right] - T \sin \vartheta \cos \vartheta$$

где конечное слагаемое T обычно игнорируется в бесконечно малой окрестности кончика трещины. Согласно предложенному критерию, трещина при заданных КИН будет распространяться в направлении θ , для которого кольцевые растягивающие напряжения $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ будут максимальными, что дает соотношение на КИН:

$$K_I \sin \theta + K_{II}(3 \cos \theta - 1) = 0$$

которое позволяет получить явное выражение для угла поворота:

$$\theta = 2 \arctan \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 8(K_{II}/K_I)^2}}{4K_{II}/K_I} \right).$$

Следующим критерием является предложенный Сих [16] критерий минимальной плотности энергии деформаций. Согласно этому критерию трещина распространяется в направлении, для которого достигается минимум функции плотности энергии деформаций, которая для однородного изотропного материала имеет вид

$$W = \frac{1}{r} S = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

где S – коэффициент плотности энергии деформаций, и в окрестности кончика плоской трещины может быть выражен через КИН:

$$S = a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2$$

где

$$a_{11} = \frac{1 + \nu}{8E} (3 - 4\nu - \cos \vartheta)(1 + \cos \vartheta)$$

$$a_{12} = \frac{1 + \nu}{8E} 2 \sin \vartheta (\cos \vartheta - 1 + 2\nu)$$

$$a_{22} = \frac{1 + \nu}{8E} [4(1 - \nu)(1 - \cos \vartheta) + (1 + \cos \vartheta)(3 \cos \vartheta - 1)]$$

Здесь E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона. Трещина распространяется, если минимальная величина коэффициента плотности энергии деформаций достигает критического значения $S = S_{cr}$. Особенностью данного метода является то, что в отличие от критерия максимальных растягивающих напряжений, коэффициент Пуассона материала оказывает влияние на направление роста трещины. Сравнение с экспериментальными данными [17], впрочем, показывает, что данный критерий имеет меньшую точность, чем критерий максимальных растягивающих напряжений.

Другим подходом являются критерии, основанные на предположении, что рост трещины происходит в таком направлении, для которого значение скорости высвобождения упругой энергии G будет наибольшим после возникновения новой поверхности при распространении под углом θ к текущему направлению трещины. А критерием распространения является достижение критического значения $G(\theta, t + \Delta t) = G_c$. Скорость высвобождения упругой энергии G может быть выражена через КИН:

$$G(\theta, t + \Delta t) = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2(\theta, t + \Delta t) + \frac{1 - \nu^2}{E} K_{II}^2(\theta, t + \Delta t) + \frac{1 + \nu}{E} K_{III}^2(\theta, t + \Delta t)$$

В работе Нуизмера [18] предполагается, что при малом приращении трещины значения КИН изменятся мало, что позволяет использовать значения КИН в момент t . Далее с использованием разложения Вильямса получается, что угол, для которого $G(\theta, t + \Delta t)$ будет максимальным, совпадает с углом θ , получаемым из критерия максимальных растягивающих напряжений. В работе Аместой [19] предположение о малом изменении КИН не делается. Угол поворота трещины определяются итерационно, пока не будет найден такой угол θ , при котором значение G будет максимальным при распространении под этим углом на малое расстояние Δr .

Также были предприняты и попытки получить приближенный критерий на основе экспериментальных данных. Ричард, в своей работе [17] воспользовался квадратичным приближением и получил простую форму критической кривой для коэффициентов интенсивности напряжений и угла поворота трещины:

$$K_{eq} = \frac{K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{K_I^2 + 4(\alpha K_{II})^2} \leq K_{IC}$$

$$\theta = \mp \left[A \left(\frac{|K_{II}|}{|K_I| + |K_{II}|} \right) + B \left(\frac{|K_{II}|}{|K_I| + |K_{II}|} \right)^2 \right]$$

Здесь положительным значениям K_{II} соответствуют отрицательные углы поворота θ , а отрицательным значениям K_{II} , соответственно, положительные. В работе были использованы результаты экспериментов по определению прочности образцов из стали при сложном нагружении. Наилучшее совпадение прочности и углов поворота обеспечивается при выборе параметров, равных $\alpha = 1.155$, $A = 155.5^\circ$, $B = -83.4^\circ$.

Дальнейшим развитием критериев роста трещин можно назвать промежуточные между двумерными и трехмерными методы, в которых учитывается влияние K_{III} на НДС в окрестности фронта трещины, но направление роста описывается только углом θ . Такие методы представлены в работах [20-25]. Следующим шагом являются трехмерные критерии распространения трещин, учитывающие не только первые две моды: раскрытие и сдвиг, но и кручение (Рис.3).

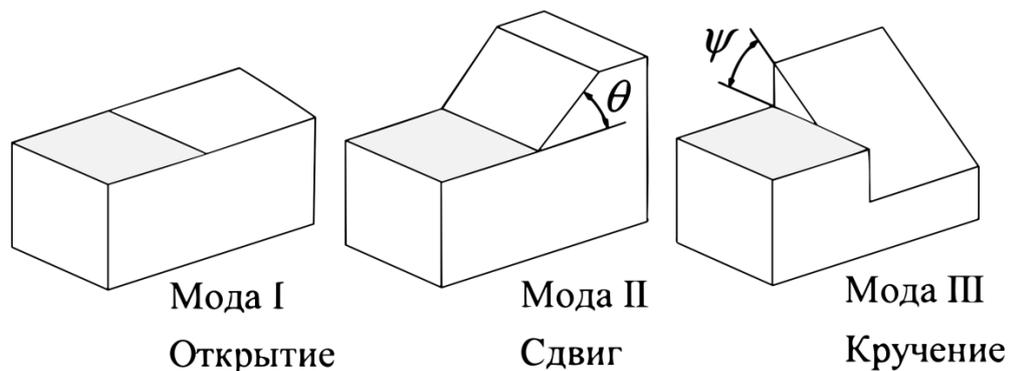


Рисунок 3. различные моды роста трещин при сложном нагружении.

Для ранее приведенных критериев в свое время были разработаны и трехмерные варианты. В работе [26] представлен трехмерный критерий максимальных растягивающих напряжений, а в работе [27] проведена его валидация на экспериментальных данных по разрушению образцов с наклонным пропилом под действием растяжения и кручения. В работе [28] рассмотрен трехмерный случай критерия минимальной плотности энергии деформаций, а в работах [29-31] – критерия максимальной скорости высвобождения упругой энергии. В работе [17] также представлен трехмерный вариант критерия Ричарда, дающий простое выражение, как для угла θ , так и для угла кручения ψ .

Рассмотрение подобных задач приводит не только к усложнению формул расчета, но и к фундаментальным сложностям, поскольку, как показано в работах [32-34] при соотношении $K_{III}/K_I > 0.5$ фронт трещины разрушается на множество мелких трещин, которые потом сливаются образуя новый фронт [35,36]. Таким образом, для корректного моделирования роста трещины в таких условиях требуется учет не только локального состояния в данном участке фронта трещины, но и глобальный учет состояния всего фронта. Более подробное исследование критериев применимых к трехмерному росту трещины приведено в работе [37].

Помимо рассмотрения более сложных режимов нагружений, немало работ посвящено уточнению имеющихся критериев роста к реальным экспериментам. Большинство классических критериев при определении угла поворота трещины не учитывают особенности материала. Так для критерия максимальных растягивающих напряжений и скорости высвобождения упругой энергии упругие свойства материала вообще не влияют на угол поворота трещины, а для критерия минимальной плотности энергии деформаций, хоть углы поворота и зависят от значения коэффициента Пуассона ν , но для различных материалов с одинаковым значением ν они будут одинаковыми. В то же время эксперименты для различных материалов показывают различные углы поворота при разных условиях [38,39], что приводит к необходимости уточнять критерии роста. Так в работе [40] учет свойств материала обеспечивается различными прочностями материала к сдвиговым и растягивающим напряжениям, а в работах [41-45] рассмотрено влияние конечного слагаемого T в разложении тензора напряжений в окрестности трещины, которое показывает неплохие результаты при сравнении с экспериментами для различных материалов. В работе [45] приведен подробный обзор исследований на эту тему.

С другой стороны, развивались и методы решения задач с трещинами. Было получено множество аналитических решений статических краевых задач о телах с трещинами. Так для плоского случая были найдены аналитические решения для одиночной прямолинейной трещины [46], трещины с изломом [47], различно расположенных параллельных трещин [48] и периодических систем трещин [49], а также произвольно расположенных прямолинейных трещин [50] и других случаев [51]. В трехмерной постановке также были получены решения

для различных форм трещины: круговой под симметричной[52] и кососимметричной[53] нагрузкой, эллиптической[54], параболической[55], а также для трещин в виде полуплоскости[56] или произвольной поверхности Ляпунова[57]. Решения для нескольких трещин были получены для частных случаев, таких как круговые трещины в одной плоскости [58] или на одной оси [59]. Решение подобных задач потребовало разработки множества методов, получить представление о которых можно из работ [60]. Для многих задач получены значения КИН, а для некоторых исследованы возможные направления роста [61]. Однако аналитические решения для растущей трещины чаще всего недоступны ввиду усложнения формы получаемой трещины. В связи с этим, для моделирования растущих трещин, а также трещин сложной формы используются численные методы.

Для численных методов, используемых для моделирования тел с трещинами можно выделить два основных подхода: методы конечных элементов (МКЭ), в которых уравнения упругости решаются во всём теле и методы граничных элементов (МГЭ), в которых упругая задача сводится к решению граничных уравнений. Методы конечных элементов предполагают разбиение всей расчетной области на отдельные элементы, из чего вытекают как преимущества, так и недостатки такого подхода в случае задач с трещинами. С одной стороны, МКЭ позволяет моделировать задачу для произвольной геометрии тела, содержащего трещины, и для различных нагрузок, приложенных к этому телу. С другой стороны, для моделирования самих трещин, ввиду их малых размеров, необходимы дополнительные действия. Одним из подходов является измельчение сетки вблизи контура трещины [62]. Такой подход позволяет моделировать влияние трещины и определять КИН, но требует, во-первых, значительного увеличения количества расчетных ячеек (особенно в трёхмерном случае), а во-вторых, перестроения расчетной сетки при каждом шаге роста трещины, что существенно повышает вычислительные затраты. Также для определения условий роста трещин необходимо определять КИН в окрестности кончика трещины [63], напрямую вычислять энергию деформации [64] или рассчитывать работу, необходимую для закрытия трещины [65]. Таким образом, МКЭ не подходит для сложных систем трещин и задач взаимодействия трещин, ввиду существенной сложности построения трещин и определения критериев роста, однако подходит для моделирования сложных тел с простыми по форме трещинами, например для композитов[66,67] Одним из методов, позволяющих избежать необходимости постоянного перестроения сетки во время роста трещины, является обобщенный метод конечных элементов [68], в котором трещина предполагается растущей сквозь конечные элементы, а сам разрыв смещений моделируется через дополнительные разрывные степени свободы. Этот метод позволяет моделировать достаточно сложные системы трещин, однако условия роста определяются асимптотически и в имеющихся работах он применяется только для случая постоянного давления на берегах трещин.

Более часто для моделирования задач с трещинами применяются методы граничных элементов. Классический МГЭ основан на связи перемещений в теле с перемещениями и напряжениями на границе с помощью интегрального соотношения, называемого тождеством Сомильяны [69,70]. Граница разбивается на элементы, на которых граничное условие ставится в одной точке. Таким образом, интегральное соотношение, связывающее смещения и напряжения на границе сводится к системе алгебраических уравнений. Полученные таким образом значения перемещений и напряжений на границе, затем могут быть использованы для получения перемещений и напряжений в теле. Такой подход в сравнении с МКЭ требует существенно меньшего количества элементов сетки, а также не требует полного перестроения сетки при появлении новой граничной поверхности. Тем не менее, для применения такого подхода к задачам с трещинами необходимо решить одну существенную проблему. Трещина представляет собой вырожденную границу, поскольку оба её берега являются границами, расстояние между которыми мало, но между ними существует разрыв поля перемещений. Уравнения классического МГЭ вырождаются при наличии таких вырожденных границ[71].

В связи с этим для решения задач с трещинами были разработаны различные разновидности метода граничных элементов. Первый подход предполагает модификацию расчетной области, где вместо трещины моделируется пропилен конечной толщины[72], что позволяет решить проблему вырождения границы ценой некоторого понижения точности расчета. Вторым подходом является разбиение расчетной области на несколько подобластей таким образом, чтобы берега трещин оказывались в различных подобластях. Таким образом, граница каждой подобласти окажется невырожденной, и на них можно будет применять классический МГЭ. На границе между зонами ставится условие жесткой сцепки: равновесие действующих сил и неразрывность поля перемещений. Такой подход называется многозонным МГЭ[71] и позволяет моделировать тела с трещинами, в рамках классического МГЭ, но требует перестроения границ между зонами и, соответственно, расчетной сетки при росте трещины. Кроме того задача разбиения расчетной области на зоны может быть достаточно сложной в случае множественных трещин или трещины сложной формы.

Другим подходом является использование в качестве условия на границе не смещений, а вектора разрывов смещений между берегами трещины. Впервые метод разрывных смещений (МРС) был предложен в работе [73]. Этот метод использует решения на основе потенциалов двойного слоя, на основе которых получены соотношения, связывающие разрыв смещений на участке трещины с полем напряжений и смещений в среде. Подробно этот метод описан в работах [74], в работах [75-79] представлено его развитие для трехмерных задач. Кроме того, в работах [80,81] исследован вопрос численного определения коэффициентов интенсивности напряжений для сложных систем пространственных трещин.

Использование численных методов позволяет решать уже существенно более сложные задачи, включая задачи роста и взаимодействия трещин [82,83]. Взаимодействие трещин чаще рассматривается в контексте роста усталостных трещин, поскольку для них важно взаимодействие множества трещин, а не только рост одиночной [84,85]. Также в этих задачах другую форму принимают критерии роста, поскольку рост усталостных трещин происходит без достижения критических значений растягивающих напряжений. Также стоит отметить оценку влияния трещиноватости на упругие свойства среды [86,87] или влияние трещины на ориентацию критически напряженных трещин в окрестности её носика [88]. В случае если рассматривается трещина или множество трещин в породе, то не всегда реализуются режим нормального отрыва [89], а существуют и сдвиговые трещины, а кроме того активация и рост трещин происходит под действием сдвиговых напряжений [90]. Помимо того исследовалась и задача взаимодействия трещин [91-93] или их ветвления [94]. Для подобных задач с точки зрения прочности конструкций введен коэффициент влияния [56,58], отмечающий отношение J -интеграла для взаимодействующих трещин к его значению для одиночной трещины при тех же нагрузках. Исследования подобных задач в основном проведены для случая неподвижных трещин. Помимо этого, методы моделирования трещин позволяют решать и смежные задачи, такие как задачи теплопроводности в телах с трещинами [95].

Другой важной областью применения механики трещин является моделирование трещин гидроразрыва пласта или ГРП. Важным отличием задачи гидроразрыва является необходимость одновременного решения как задачи упругости, так и задачи движения жидкости, для того чтобы моделировать как движение вязкой жидкости в трещине, так и изменение формы трещины и её распространение под действием давления жидкости. Сложность решения такой совместной задачи крайне высока, так что для её снижения были разработаны различные модели, отличающиеся набором упрощающих предположений. В зависимости от ограничений, налагаемых на геометрию трещины этими предположениями, модели трещин гидроразрыва можно условно разделить на следующие категории: одномерные, двумерные, псевдо-трехмерные, плоско-трехмерные и трехмерные.

К одномерным моделям трещин гидроразрыва относят модель радиальной трещины [96-99], модели PKN и KGD, а также их вариации. В этих моделях предполагается, что трещина распространяется в плоскости (перпендикулярно минимальным сжимающим напряжениям), а также что форма трещины зависит только от одной пространственной координаты и времени. Модель радиальной трещины была впервые рассмотрена в работах [100]. В ней предполагается, что трещина осесимметрична, с нагнетающей скважиной в центре. Таким образом, уравнения описывающие форму трещины зависят только от радиальной координаты и времени, движение жидкости описывается законом Пуазейля [101], а раскрытие трещины зависит только от распределения давления вдоль радиуса трещины и определяется из известного решения для

осесимметрично нагруженной круговой трещины [102]. Рост трещины может определяться как критерием Ирвина [103], где трещина распространяется при достижении КИН критического значения $K_I = K_{IC}$, так и, например, условием Баренблатта [104], где предполагается плавное смыкание берегов трещины, что эквивалентно $K_{IC} = 0$. В таких условиях задача имеет точное решение, позволяющее определять длину и форму трещины в зависимости от времени и параметров закачки.

В работах Кристиановича и Желтова [105] была предложена, а в работах Гиртсма и Де Клерка [106] доработана модель вертикальной трещины гидроразрыва, в настоящее время известная как KGD-модель. В ней предполагается, что трещина растет от вертикальной скважины и высота трещины много больше её длины, вследствие чего горизонтальные сечения трещины независимы друг от друга. В таком случае в горизонтальных сечениях реализуются условия плоской деформации, а течение жидкости определяется как течение Пуазейля между двумя пластинами. Раскрытие трещины получается из решения плоской задачи о прямолинейном разрезе [107]. В качестве критерия распространения трещины также выступают критерии Баренблатта о плавном смыкании [103], или силовой критерий [102] $K_I = K_{IC}$. Для движения жидкости ставятся граничные условия на скважине (заданный расход или давление) и в кончике трещины (нулевой расход [108-111] или наличие отставания жидкости или «лага» [112-114]). В этой постановке рост трещины в основном определяется процессом разрушения, а не течением жидкости.

В работах Перкинса и Керна [115], а также Нордгрена [116] предложен другой подход, который известен как PKN-модель. В ней также рассматривается вертикальная трещина, однако предполагается, что длина этой трещины много больше её высоты, а высота фиксирована. Так вертикальные сечения трещины предполагаются независимыми, и в них реализуется плоское деформированное состояние. Давление жидкости предполагается однородным по сечению, то есть в каждом вертикальном сечении форма трещины определяется из решения задачи об однородно нагруженной трещине [117]. Само же давление определяется из решения для течения вязкой жидкости в эллиптическом канале. Фронт трещины определяется не из критериев прочности породы, а из условий распространения жидкости гидроразрыва. Все эти модели позволяют максимально упростить решение для задачи о росте плоской трещины под действием движения вязкой жидкости, вследствие чего активно использовались ранее и получили множество модификаций, в которых рассматриваются как комбинированные KGD-PKN модели [118,119], так и учитываются дополнительные эффекты, такие как сложная реология жидкости [120], движение проппанта [121-123] или утечка жидкости из трещины ввиду фильтрации в породу. В настоящее время одномерные модели применяются чаще для нахождения закономерностей процесса ГРП и оценки работоспособности более сложных моделей [124-127]. С другой стороны, зачастую результаты, полученные для одномерных

моделей, могут быть включены в более сложные модели. Например, в работах [128,129] представлена зависимость поведения трещины от неоднородности окружающего поля напряжений, а также исследовано поведение лага, с расчетом на применение данных результатов в псевдотрехмерных моделях роста трещин ГРП.

Следующим типом моделей ГРП являются двумерные модели, постановка которых аналогична постановке модели KGD, за исключением предположения о прямолинейности трещины. Направление роста трещины в большинстве работ определяется исходя из напряжений в окрестности кончика трещины [130-132]. Наиболее применимым для трещин гидроразрыва предполагается критерий максимальных растягивающих напряжений, поскольку для ГРП преобладает первая мода напряжений K_I [37]. Для криволинейной трещины в общем случае не получено аналитических решений упругой задачи, поэтому для получения связи раскрытия трещины и давления жидкости используются численные методы, такие как метод разрывных смещений [74]. Влияние ограниченной высоты трещины может моделироваться при помощи введения добавочных коэффициентов [133]. Совместное решение задачи упругости и движения жидкости в таких условиях является достаточно сложным, поэтому в первых моделях такого типа предполагалось равномерное распределение давления в трещине или заданное распределение давления [130-132]. Позднее были представлены модели, полноценно учитывающие и движение жидкости, что позволило описывать эффекты, возникающие в окрестности скважины [134] или при взаимодействии с другими трещинами [135,136]. Способ описания взаимодействия трещины ГРП с естественными разломами был предложен в работе [137] для плоской трещины и может быть модифицирован для двумерной трещины для более точного описания этого взаимодействия.

Наиболее часто используемыми в коммерческих симуляторах ГРП являются псевдо-трехмерные [138,139] и плоско-трехмерные [140-144] модели. В них трещина представляет собой некоторую область в плоскости, ограниченную фронтом трещины. Такие модели позволяют описывать рост трещин переменной высоты. Псевдо-трехмерные модели описывают такие трещины с помощью упрощающих предположений либо о форме фронта трещины (т.н. Lumped модели) либо о независимости вертикальных сечений трещины (такие модели известны как Cell-based [145-147]). Псевдотрехмерные модели обладают вычислительной сложностью легко доступной современным компьютерам и при этом позволяют учитывать множество аспектов процесса ГРП: слоистость пласта [148,149], сложную реологию жидкости и движение пропанта [150,151]. Недостатком псевдо-трехмерных моделей является некорректное описание трещины в сложных условиях, например в случае прорыва сквозь более напряженный пласт [152]. В плоско-трехмерных моделях не делается упрощающих предположений о форме трещины и для её определения решается трехмерная упругая задача, а распространение трещины рассчитывается из критериев разрушения. Такая задача требует численного решения с

разбиением трещины на отдельные элементы. Получившаяся сетка может быть подвижной и пересчитываться на каждом шаге [153] или неподвижной, в которой подвижна только линия фронта [154-158]. Движение жидкости в таких моделях двумерное, что позволяет учитывать эффекты расположения перфорации в скважине и движение проппанта. Плоско-трехмерные модели заметно более вычислительно сложные, чем псевдо-трехмерные, но способны описывать сложные случаи, недоступные псевдо-трехмерным и дают заметное преимущество в точности моделирования. Плоско-трехмерные модели ГРП дают возможность учитывать сложные конфигурации пластов [159], неоднородность среды [156], эффекты пороупругости [161] и более точно описывать поведение жидкости ГРП и проппанта.

В псевдотрёхмерных и плоско-трехмерных моделях также рассматриваются случаи многостадийного ГРП или множественного ГРП, но взаимодействие трещин описывается в упрощенном виде, где влияние других трещин на поле напряжений учитывается (т.н. stress shadow эффект), но влиянием этих изменений на направление роста трещины пренебрегается [162]. В работе [152] представлена оценка расстояния между трещинами ГРП в зависимости от контраста сжимающих напряжений, когда эффектами поворота пренебрегать не следует. Для оценки области применимости псевдо-трехмерных и плоско-трехмерных моделей в случае взаимодействия с другими трещинами или неоднородностями среды необходимо использование двумерных или трёхмерных моделей.

К трёхмерным моделям ГРП можно отнести те модели, для которых не делается предположений, напрямую ограничивающих возможную форму трещины. Попытки построения таких моделей предпринимались еще в XX веке [163-165], однако даже в настоящее время в промышленных симуляторах используются псевдотрёхмерные и плоско-трехмерные модели, в то время как полностью трёхмерные используются в основном в научных исследованиях и в качестве верификации для более простых моделей. Этот факт обусловлен сложностью решения полностью трёхмерной задачи деформации породы и выбора критериев распространения трещины. Для полностью трёхмерной задачи трещина представляет собой двухмерную поверхность в трёхмерном пространстве, ограниченную линией фронта. В отличие от плоской трещины, произвольность полученной поверхности не позволяет получить значение давления как интегральной функции раскрытия. Численное решение подобных задач предполагает учет не только большого количества ячеек, как в плоско-трехмерном случае, но и большее число учитываемых параметров, поскольку если в плоско-трехмерном случае рассматривается только нормальный разрыв, то в трёхмерном случае учитываются также продольный и поперечный сдвиги. В современной литературе для численного решения такой задачи используются трёхмерный метод разрывных смещений [75,166], метод граничных элементов [73], а также классический метод конечных элементов [167,168,169] или обобщенный/расширенный метод конечных элементов [170-173]. Предпринимаются также попытки описать деформацию породы

при распространении заполненной жидкостью трещины с использованием методов частиц и решеток [174-176]. Благодаря исследованиям с помощью трехмерных моделей возможно точнее изучить взаимное влияние трещин при многостадийном ГРП [166,176], эффекты пороупругости, взаимодействие с естественными разломами [177] и многие другие эффекты. Однако, за счет высокой вычислительной сложности такие исследования требуют существенных временных и вычислительных затрат на свое проведение, в связи с чем более предпочтительным является получение некоторых закономерностей с помощью двумерных моделей, а затем их верификация с помощью трехмерных.

Глава 1. Математическая модель задачи роста криволинейных трещин

1.1. Постановка

Рассмотрим задачу о росте трещин в линейно упругой однородной среде в условиях плоской деформации. Будем предполагать, что раскрытие трещин мало по сравнению с их длинами, то есть трещины можно считать отрезками кривых, на которых поле перемещений терпит разрыв. В таком случае поле напряжений и перемещений можно описать с помощью уравнений равновесия

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0\end{aligned}\tag{1.1}$$

и закона Гука, где G – модуль сдвига, а ν – коэффициент Пуассона.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{1}{2G} [(1 - \nu)\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}] \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} &= \frac{1}{2G} [(1 - \nu)\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}] \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) &= \frac{1}{2G} \sigma_{xy}\end{aligned}\tag{1.2}$$

В общем случае граничные условия ставятся на берегах трещины и на бесконечности. Граничные условия на «бесконечности» или, согласно принципу Сен-Венана, на достаточном удалении от трещины представляют собой внешние напряжения, действующие на трещину. Это могут быть сжимающие напряжения в горной породе, растягивающие напряжения в образце под нагрузкой или иные нагрузки, приложенные на достаточном расстоянии от трещины. Далее предполагаем случай изначально однородного поля напряжений, определяемого условиями (1.3), принимая сжимающие напряжения за положительные:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}|_{\infty} &= \sigma_{xx}^0 \\ \sigma_{yy}|_{\infty} &= \sigma_{yy}^0 \\ \sigma_{xy}|_{\infty} &= \sigma_{xy}^0\end{aligned}\tag{1.3}$$

На берегах трещины ставится условие свободной поверхности или заданного давления, например, для трещины гидроразрыва. Таким образом, для точек кривой C , представляющей собой трещину, ставятся условия на напряжения, нормальные и касательные к этой кривой в данной точке

$$\begin{aligned}\sigma_{nn}|_{(x,y) \in C} &= p(s) \\ \sigma_{ns}|_{(x,y) \in C} &= 0\end{aligned}\tag{1.4}$$

где $p(s)$ – заданное распределение внутреннего давления вдоль трещины.

Ввиду линейности задачи её решение можно представить в виде суперпозиции решений двух задач: Первой, с граничными условиями на бесконечности при условии отсутствия трещины, и второй, где напряжения на бесконечности равны нулю, а условия на берегах трещины принимают вид

$$\begin{aligned}\sigma_{nn}|_{(x,y)\in C} &= p(s) - \sigma_n^0(s) \\ \sigma_{ns}|_{(x,y)\in C} &= 0 - \sigma_{ns}^0(s)\end{aligned}\tag{1.5}$$

где σ_n^0 и σ_{ns}^0 получаются из $\sigma_{xx}^0, \sigma_{xy}^0, \sigma_{yy}^0$ путем поворота системы координат на угол $\theta(s)$.

Такой подход позволяет, во-первых, оценить влияние наличия трещин на поле напряжений и перемещений в среде, а во вторых упрощает использование численных методов. Будем предполагать, что решение первой задачи известно и сконцентрируемся на второй. Далее мы будем рассматривать случай одноосного или двухосного растяжения на бесконечности, но основные рассуждения, изложенные в этой работе, могут быть применены и для случаев более сложных внешних напряжений, в том числе неоднородных. Следует отметить, что в случае наличия достаточно больших сжимающих напряжений некоторые участки трещин могут оказаться закрытыми. В таком случае на них должны ставиться иные граничные условиями, а также несколько изменяться методы решения. Такая постановка и методы её решения рассмотрены в третьей главе данной диссертации.

1.2. Метод решения.

Для решения полученной задачи будем использовать численный метод разрывных смещений[74]. В данном методе трещина представляется в виде множества прямолинейных отрезков, на каждом из которых раскрытие и сдвиг берегов трещины предполагаются постоянными и обозначается как D_n^i и D_s^i , соответственно. На рис. 1.1 изображена схема разбиения трещины на элементы.

В таком случае поле напряжений, вызываемое отдельным элементом, описывается уравнениями (1.6). где A – известные функции, зависящие от размера элемента, его ориентации и расстояния до точки (x, y) , которые будут рассмотрены позже.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, y) &= A_{xx}^n(x, y, x_i, y_i, \theta_i, a_i)D_n^i + A_{xx}^s(x, y, x_i, y_i, \theta_i, a_i)D_s^i \\ \sigma_{xy}(x, y) &= A_{xy}^n(x, y, x_i, y_i, \theta_i, a_i)D_n^i + A_{xy}^s(x, y, x_i, y_i, \theta_i, a_i)D_s^i \\ \sigma_{yy}(x, y) &= A_{yy}^n(x, y, x_i, y_i, \theta_i, a_i)D_n^i + A_{yy}^s(x, y, x_i, y_i, \theta_i, a_i)D_s^i\end{aligned}\tag{1.6}$$

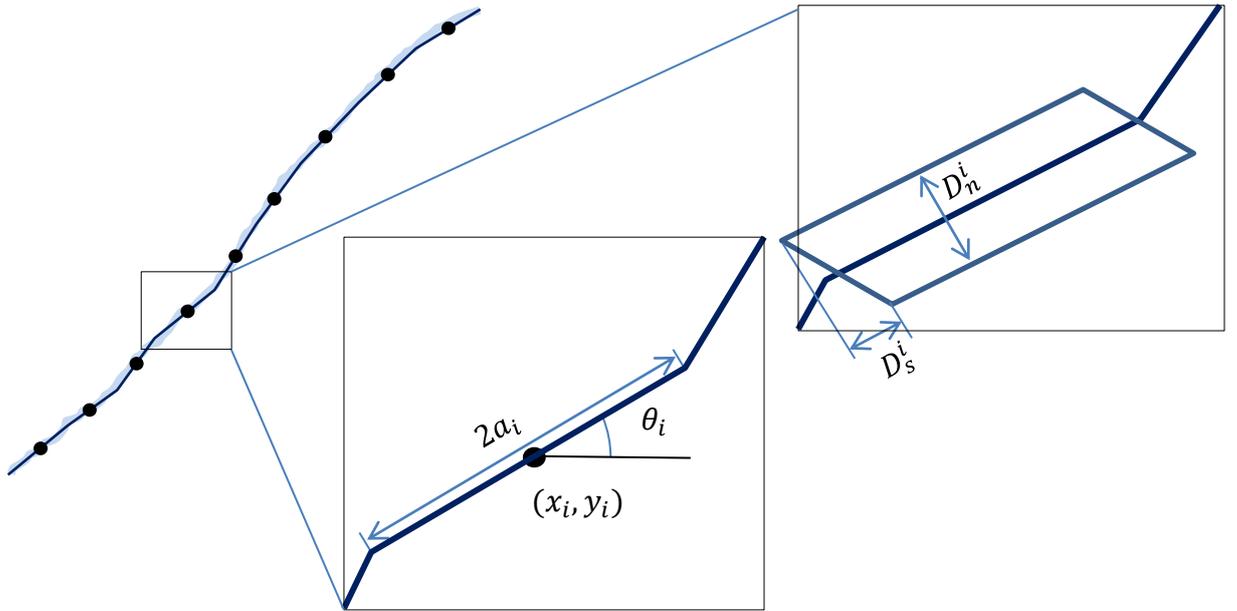


Рисунок 1.1. Схематичное разбиение трещины на элементы. $2a_i$ – длина элемента, θ_i – угол наклона от оси x , (x_i, y_i) – координаты центра элемента. D_n^i, D_s^i – нормальный и касательный разрывы смещений.

Граничное условие (1.5) при использовании этого метода выполняется только в точках соответствующих центрам элементов.

$$\begin{aligned}\sigma_{nn}(x_i, y_i) &= p_i - \sigma_{i_n}^0 = \sigma_n^i \\ \sigma_{ns}(x_i, y_i) &= -\sigma_{i_s}^0 = \sigma_s^i\end{aligned}\quad (1.7)$$

Подстановка уравнений (1.6) в условия (1.7) даёт нам систему линейных алгебраических уравнений относительно переменных D_n и D_s , где $A_{nn}^{ij}, A_{ns}^{ij}, A_{ss}^{ij}$ и A_{sn}^{ij} это постоянные коэффициенты, зависящие от взаимного расположения элементов i, j .

$$\begin{aligned}\sigma_n^j &= \sum_{i=1}^N A_{nn}^{ij} \cdot D_n^i + A_{sn}^{ij} \cdot D_s^i \\ \sigma_s^j &= \sum_{i=1}^N A_{ns}^{ij} \cdot D_n^i + A_{ss}^{ij} \cdot D_s^i\end{aligned}, \quad j = 1, \dots, N \quad (1.8)$$

Решение системы (1.8) позволяет получить раскрытия трещин и сдвиги берегов D_n и D_s . А использование формулы (1.6) позволяет при известных D_n и D_s определить напряжения в любой точке.

Для решения задачи о росте трещин, помимо уравнений (1.8) и условий (1.7), нам потребуются также законы описывающие рост трещин: его направление и скорость.

Для определения направления роста трещины используем метод наибольших растягивающих напряжений [15]. В данном методе для определения направления и критерия роста используется асимптотическое разложение поля напряжений в окрестности кончика трещины, также называемое разложением Вильямса [5]. В полярной системе координат с центром в кончике трещины и осью направленной вдоль предыдущего направления трещины это разложение принимает вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta - 2K_{II} \tan \frac{\theta}{2} \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + K_{II}(3 \cos \theta - 1)]\end{aligned}\quad (1.9)$$

Здесь напряжения в области перед трещиной выражаются через коэффициенты интенсивности напряжений K_I и K_{II} , соответствующие нормальному отрыву и сдвигу. Согласно критерию максимальных растягивающих напряжений, трещина распространяется под таким углом θ к предыдущему направлению, чтобы кольцевые напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ были максимальными при имеющихся K_I и K_{II} . Уравнения (1.9) при таком условии дают соотношение, связывающее K_I , K_{II} , и θ

$$K_I \sin \theta + K_{II}(3 \cos \theta - 1) = 0,$$

которое имеет явное решение

$$\theta = 2 \arctan \left(\frac{K_I - \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{4K_{II}} \right).\quad (1.10)$$

Также метод максимальных растягивающих напряжений предполагает силовой критерий распространения трещин для случая сложных нагружений

$$K_{eq} = \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] \geq K_{IC}\quad (1.11)$$

где K_I^C – трещиностойкость материала. Распространение трещины будем предполагать квазистатическим, то есть на каждом шаге, в случае выполнения критерия разрушения, трещина увеличивается вдоль полученного направления на фиксированную длину Δs , равную размеру граничного элемента.

Следует отметить, что определение коэффициентов интенсивности напряжений само по себе является отдельной задачей, которая имеет аналитическое решение для отдельных

конфигураций трещин, но в случае криволинейной трещины должна решаться численно. В данной работе воспользуемся приближенным решением [178].

$$\begin{aligned} K_I &= 0.806 \frac{G}{2(1-\nu)} \sqrt{\frac{\pi}{\Delta s}} D_n \\ K_{II} &= 0.806 \frac{G}{2(1-\nu)} \sqrt{\frac{\pi}{\Delta s}} D_s \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь D_n, D_s это нормальный и касательный разрывы смещения ближайшего к кончику трещины элемента, Δs – его длина.

Используя данный метод, на основе уравнений (1.6, 1.8, 1.10-1.12) был реализован программный код, позволяющий вычислить поле напряжений вокруг трещины или системы трещин, находящихся под заданными нагрузками, а также моделировать рост этой системы трещин.

1.3. Верификация численного решения

Для определения точности и границ применимости предложенного метода было проведено его сравнение с аналитическими и экспериментальными результатами:

1.3.1. Плоская трещина под наклонной нагрузкой

На рис. 1.2 показана постановка задачи. Растяжение образца с одиночной прямолинейной трещиной ориентированной под углом к растягивающим нагрузкам [4].

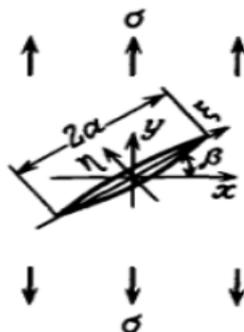


Рисунок 1.2. Растяжение образца с трещиной длины $2a$, находящейся под углом β к приложенным нагрузкам.

Эта задача имеет аналитическое решение для коэффициентов интенсивности напряжений:

$$K_I^t = \sigma \sqrt{\pi a} \cdot \cos^2 \beta, \quad K_{II}^t = \sigma \sqrt{\pi a} \cdot \cos \beta \sin \beta$$

В таблице 1.1 Представлены значения относительной погрешности $\Delta K_I = (K_I - K_I^t)/K_I^t$ и $\Delta K_{II} = (K_{II} - K_{II}^t)/K_{II}^t$ коэффициентов интенсивности напряжений K_I, K_{II} , полученных численно, к теоретическим значениям K_I^t и K_{II}^t . Для данной постановки значения ΔK_I оказались

равны ΔK_{II} . Кроме того, эти значения оказались независимыми от угла β , поэтому в таблице приведена только зависимость от количества N элементов в разбиении трещины. Видим, что для одиночной прямолинейной трещины даже десяти элементов достаточно для обеспечения высокой точности определения коэффициентов интенсивности напряжений.

N	10	30	100	300	1000
$\Delta K_I, \Delta K_{II}$	0.0023	0.005	0.0089	0.009	0.01

Таблица 1.1 Значения относительной погрешности $\Delta K_I, \Delta K_{II}$ для различных значений количества элементов N

Следует также отметить, что повышение количества элементов свыше некоторого предела не увеличивает точность определения КИН. Это обусловлено тем, что в методе разрывных смещений кончики элементов являются особенностями, возмущающими решение в своей окрестности. Таким образом, увеличение точности за счет более точного определения раскрытия каждого элемента уравнивается уменьшением точности за счет более частого расположения особенностей. Данная проблема может быть решена за счет использования методов более высокого порядка точности [179].

1.3.2. Две параллельные трещины расположенные перпендикулярно растягивающим нагрузкам

На рис. 1.3 представлена постановка задачи [180,61]. В таблице 1.2 представлены отношения численного и теоретического значения коэффициентов интенсивности для различных значений отношения расстояния между трещинами к их длине.

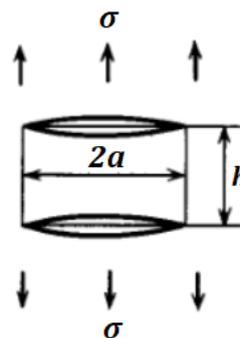


Рисунок 1.3. Две параллельные трещины длины $2a$ на расстоянии h друг от друга, под действием одноосного растяжения.

ΔK_{II}				
$2a/h$	N=10	N=30	N=100	N=300
0.2	-0.0035	0.0057	0.0090	0.0099
0.4	-0.0078	0.0039	0.0095	0.0092
0.6	-0.018	0.0028	0.0082	0.0097
0.8	-0.018	0.0002	0.0067	0.0081
1.0	-0.009	0.012	0.0203	0.022
1.25	-0.013	0.013	0.022	0.025
2	-0.026	0.012	0.026	0.033
5	-0.081	0.0011	0.03	0.042
10	-0.16	-0.022	0.036	0.053
100	-0.25	-0.41	-0.05	0.081

Таблица 1.2 Значения ΔK_I при различных N и $2a/h$

Результаты показывают, что в случае, если расстояние между трещинами превосходит размер элемента, то ошибка между численными и теоретическими значениями коэффициентов интенсивности напряжений не превосходит нескольких процентов. Существенное повышение ошибки происходит только для больших значений $2a/h$, что соответствует случаю очень близкого расположения трещин, где используемый метод неприменим. При этом повышение количества элементов свыше 100 не даёт увеличения точности.

1.3.3. Эксперимент, трещина, растущая под распределенными сдвиговыми нагрузками

На рис. 1.4(а) показана экспериментально полученная траектория роста изначально прямолинейной трещины в образце из плексигласа, к которой были приложены сдвиговые нагрузки [15]. На рис. 1.4(б) показана траектория роста трещины в той же постановке полученная численно. Совмещение двух траекторий на рис. 1.4(в) показывает хорошее совпадение траектории роста не только в момент начала роста, но и в дальнейшем.

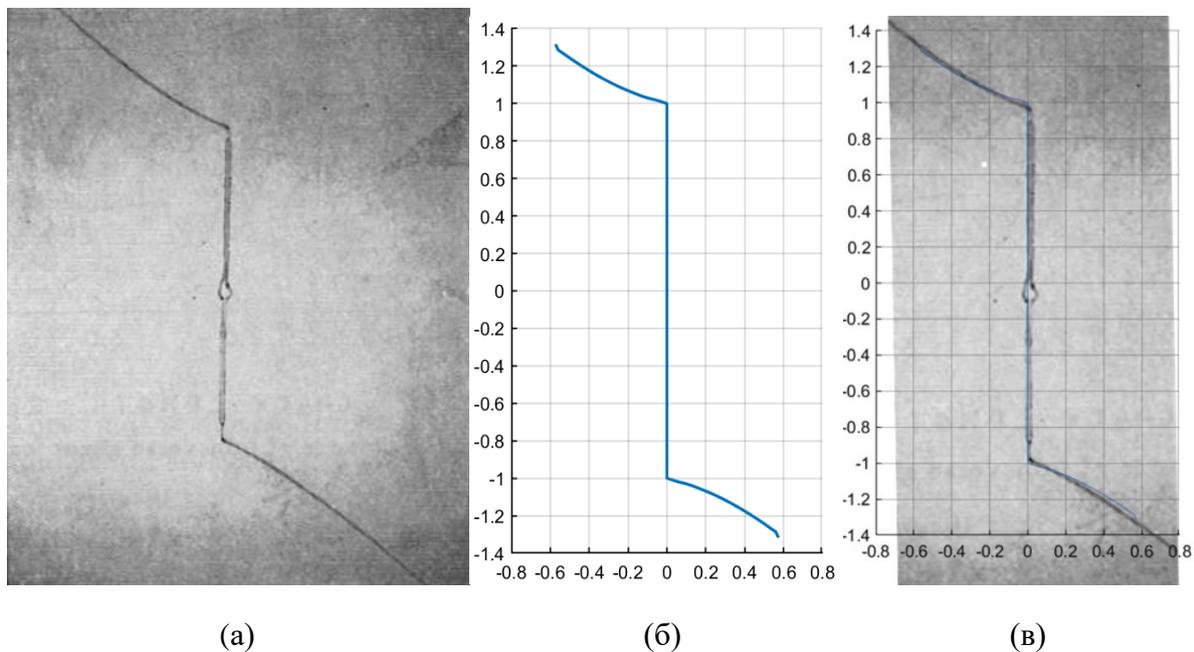


Рисунок 1.4. Траектория трещины. а – экспериментальная, б – численная, в – наложение численной на экспериментальную.

Полученные результаты показывают, что данный метод даёт хорошую точность для задач с одиночными, а также взаимодействующими и растущими трещинами. Ограничением применимости данного метода являются случаи, когда трещины находятся друг к другу на расстоянии меньшем, чем размер граничного элемента. В таком случае можно предполагать неточное определение как полей напряжений у кончиков, так и последующего направления роста.

1.3.4. Зависимость траектории трещины от размера граничных элементов

Помимо сравнения численно полученной траектории с экспериментальной, рассмотрим также зависимость траектории от размера элементов. Для этого рассмотрим рост горизонтально расположенной трещины начальной длины $l=1$, под действием комбинации сдвиговых и растягивающих напряжений: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy}$. На рис. 1.5 показаны траектории роста трещины для различного размера граничных элементов. Точками на графике отмечены центры элементов. Значения N_0 обозначают начальное количество элементов, на которые разбита трещина.

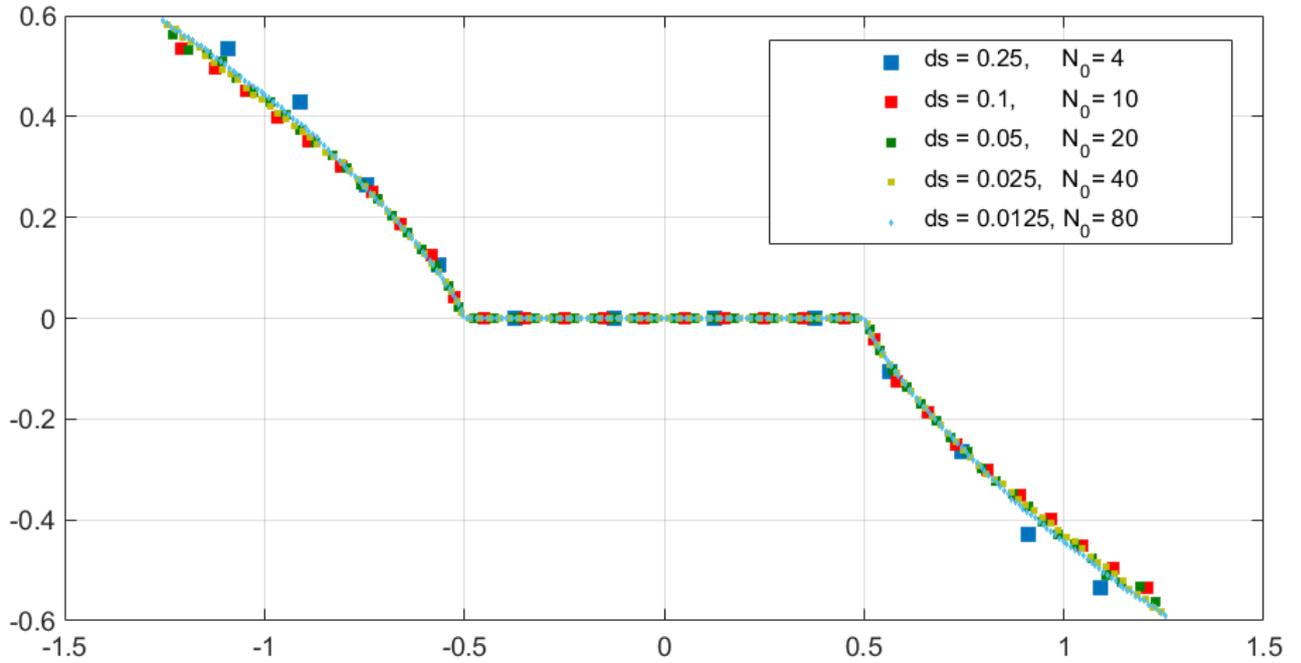


Рисунок 1.5. Траектория трещины при различных значениях длины ds граничного элемента. N_0 – начальное количество элементов в трещине.

Полученные результаты показывают отсутствие существенной зависимости траектории трещины от размера используемых элементов. Таким образом, мы можем считать, что в нашей постановке величина приращения длины на каждом шаге не оказывает существенного влияния на траекторию трещины.

1.4. Обезразмеривание решения

Для исследования влияния трещины на окружающее поле напряжений следует определить зависимость решения от параметров задачи. С учетом того, что численное решение даёт достаточно точное совпадение с аналитическими решениями в пределах своей применимости, анализировать будем используемое решение (1.8).

Рассмотрим уравнения (1.6), описывающее поле напряжений, вызываемое одиночным элементом с заданными разрывами смещения. Для простоты предположим, что выбранный элемент трещины расположен вдоль оси x с центром в начале координат. Функции A в таком случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 A_{xy}^s = A_{xx}^n &= \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x-a)y^2 - (x-a)^3}{((x-a)^2 + y^2)^2} - \frac{(x+a)y^2 - (x+a)^3}{((x+a)^2 + y^2)^2} \right] \\
 A_{yy}^n &= \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{3(x+a)y^2 + (x+a)^3}{((x+a)^2 + y^2)^2} - \frac{3(x-a)y^2 + (x-a)^3}{((x-a)^2 + y^2)^2} \right]
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$A_{yy}^s = A_{xy}^n = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{y(x+a)^2 - y^3}{((x+a)^2 + y^2)^2} - \frac{y(x-a)^2 - y^3}{((x-a)^2 + y^2)^2} \right]$$

$$A_{xx}^s = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{3y(x-a)^2 + y^3}{((x-a)^2 + y^2)^2} - \frac{3y(x+a)^2 + y^3}{((x+a)^2 + y^2)^2} \right]$$

В безразмерном виде они принимают вид

$$A_{xx}^n = \frac{\sigma_0}{l_0} A_{xx}^{*n} = \frac{\sigma_0}{l_0} \frac{G^*}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x^* - a^*)y^{*2} - (x^* - a^*)^3}{((x^* - a^*)^2 + y^{*2})^2} - \frac{(x^* + a^*)y^{*2} - (x^* + a^*)^3}{((x^* + a^*)^2 + y^{*2})^2} \right]$$

$$A_{yy}^n = \frac{\sigma_0}{l_0} A_{yy}^{*n} = \frac{\sigma_0}{l_0} \frac{G^*}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x^* + a^*)y^{*2} + (x^* + a^*)^3}{((x^* + a^*)^2 + y^{*2})^2} - \frac{3(x^* - a^*)y^{*2} + (x^* - a^*)^3}{((x^* - a^*)^2 + y^{*2})^2} \right] \quad (1.15)$$

$$A_{xy}^n = \frac{\sigma_0}{l_0} A_{xy}^{*n} = \frac{\sigma_0}{l_0} \frac{G^*}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{y^*(x^* + a^*)^2 - y^{*3}}{((x^* + a^*)^2 + y^{*2})^2} - \frac{y^*(x^* - a^*)^2 - y^{*3}}{((x^* - a^*)^2 + y^{*2})^2} \right]$$

$$A_{xx}^s = \frac{\sigma_0}{l_0} A_{xx}^{*s} = \frac{\sigma_0}{l_0} \frac{G^*}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{3y^*(x^* - a^*)^2 + y^{*3}}{((x^* - a^*)^2 + y^{*2})^2} - \frac{3y^*(x^* + a^*)^2 + y^{*3}}{((x^* + a^*)^2 + y^{*2})^2} \right]$$

А уравнения (1.8), соответственно, вид

$$\sigma_n^{*j} = \sum_{i=1}^N A_{nn}^{*ij} \cdot D_n^{*i} + A_{sn}^{*ij} \cdot D_s^{*i}, \quad j = 1, \dots, N \quad (1.15)$$

$$\sigma_s^{*j} = \sum_{i=1}^N A_{ns}^{*ij} \cdot D_n^{*i} + A_{ss}^{*ij} \cdot D_s^{*i}$$

Где $x = x^*l_0, y = y^*l_0, a = a^*l_0, D = D^*l_0, \sigma = \sigma^*\sigma_0, G = G^*\sigma_0$

Таким образом, характерный линейный размер l_0 не влияет на поле напряжений, вызываемое трещиной. Характерное напряжение σ_0 также не влияет на вид уравнения и является линейным множителем. Таким образом, поля напряжений, вызываемые геометрически подобными системами трещин под одинаковой нагрузкой, будут совпадать с точностью до масштаба. Также поля напряжений вокруг геометрически равных систем трещин, нагруженных одинаковым образом с точностью до некоторого множителя, будет совпадать с точностью этого множителя.

Критерии распространения трещин также обладают некоторыми независимыми от характерного размера и характерного напряжения свойствами. Так угол θ , под которым происходит рост трещин, не зависит от значений K_I, K_{II} , а зависит только от их безразмерного отношения K_{II}/K_I , согласно (1.10)

$$\theta = 2 \arctan \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 8 \left(\frac{K_{II}}{K_I} \right)^2}}{4 \frac{K_{II}}{K_I}} \right). \quad (1.16)$$

Уравнения для (1.12) определения коэффициентов K_I и K_{II} обезразмериваются следующим образом:

$$\begin{aligned} K_I &= \sigma_0 \sqrt{l_0} K_I^* = \sigma_0 \sqrt{l_0} \cdot 0.806 \frac{G^*}{2(1-\nu)} \sqrt{\frac{\pi}{\Delta s^*}} D_n^* \\ K_{II} &= \sigma_0 \sqrt{l_0} K_{II}^* = \sigma_0 \sqrt{l_0} \cdot 0.806 \frac{G^*}{2(1-\nu)} \sqrt{\frac{\pi}{\Delta s^*}} D_s^* \end{aligned} \quad (1.17)$$

Таким образом, угол поворота трещины также не зависит от характерного размера и характерного напряжения. То есть в случае роста подобные трещины под схожими нагрузками растут в одних и тех же направлениях.

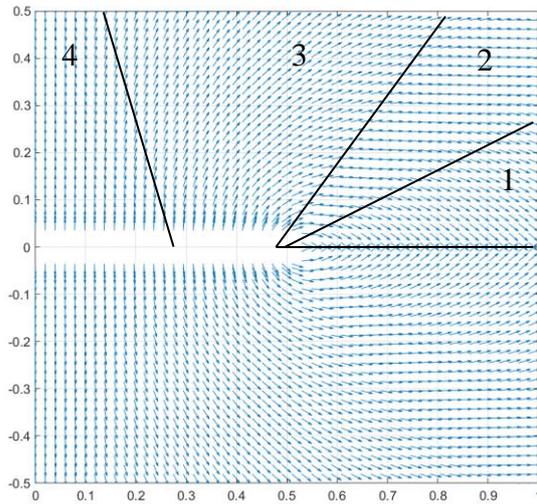
Следует отметить, что одно уравнение (1.11) всё-таки зависит от размеров и напряжений задачи. В обезразмеренном виде оно принимает вид

$$\cos \frac{\theta}{2} \left[K_I^* \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II}^* \sin \theta \right] \geq \frac{K_{IC}}{\sigma_0 l_0^{1/2}} \quad (1.18)$$

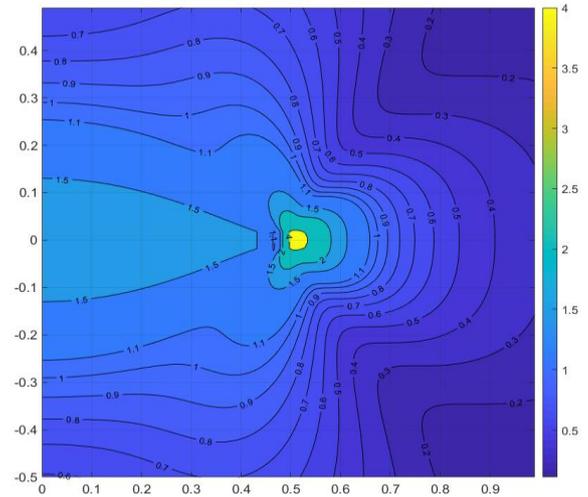
То есть при одинаковой геометрии задачи условие распространения трещины зависит от безразмерного параметра $\frac{K_{IC}}{\sigma_0 l_0^{1/2}}$. Остальные же свойства от масштаба и величины приложенных нагрузок не зависят. По крайней мере, до тех пор, пока задача остаётся в пределах линейной механики трещин.

1.5. Влияние трещины на окружающее поле напряжений

Рассмотрим влияние трещины на окружающее поле напряжений. С точки зрения влияния на рост других трещин нас интересуют два свойства этого поля: влияние на возможность роста и влияние на направление этого роста. На направление роста трещин влияет ориентация главных осей тензора напряжений, а именно направление наибольших растягивающих напряжений. На рис 1.6(а) показаны направления, перпендикулярные наибольшим растягивающим напряжениям, то есть направления, в которых, ориентировочно, будут расти трещины. На рис 1.6(б) представлены значения наибольших сдвиговых напряжений $2\tau_{max} = \sigma_{max} - \sigma_{min}(x, y)$. Данная величина определяет то, насколько значительно влияние поля напряжений трещины в сравнении с внешним полем напряжений. Все значения напряжений в данном разделе приведены в безразмерном виде, с размерным множителем равным напряжениям σ_0 , приложенным к берегам трещины.



(a)



(б)

Рисунок 1.6. Поле напряжений в окрестности трещины нормального отрыва. (а) – направления минимальных растягивающих напряжений, (б) – контраст напряжений (разница между главными значениями тензора напряжений)

Основываясь на этих двух графиках можно построить приближенную траекторию трещины при прохождении рядом с другой трещиной. Трещину, траекторию которой мы определяем, назовём растущей. Другую трещину назовём влияющей. Во-первых, существенные изменения в траектории растущей трещины должны происходить при нахождении на расстоянии от влияющей трещины, не превышающем одной её длины. Во-вторых, итоговая траектория зависит, помимо влияющей трещины, от исходного направления и внешних напряжений. В качестве примера можем рассмотреть траекторию трещины, которая растет навстречу влияющей трещины из некоторой точки (x_0, y_0) параллельно оси Ox :

При малых y_0 (кривая а на рис.1.7) поле напряжений от влияющей трещины будет отклонять траекторию от влияющей трещины (участок 1 на рис 1.7), после чего траектория вновь станет параллельна оси Ox (участок 2), а затем будет приближаться к влияющей трещине, вплоть до возможного пересечения (участок 3). Для случая, больших y_0 (кривая b), траектория не пройдёт через область отклонения (участок 1), а сразу попадет в область притяжения (участок 3), после чего, в случае, если растущая трещина достигнет середины влияющей, её траектория выровняется, и пересечения или существенного сближения трещин не произойдёт.

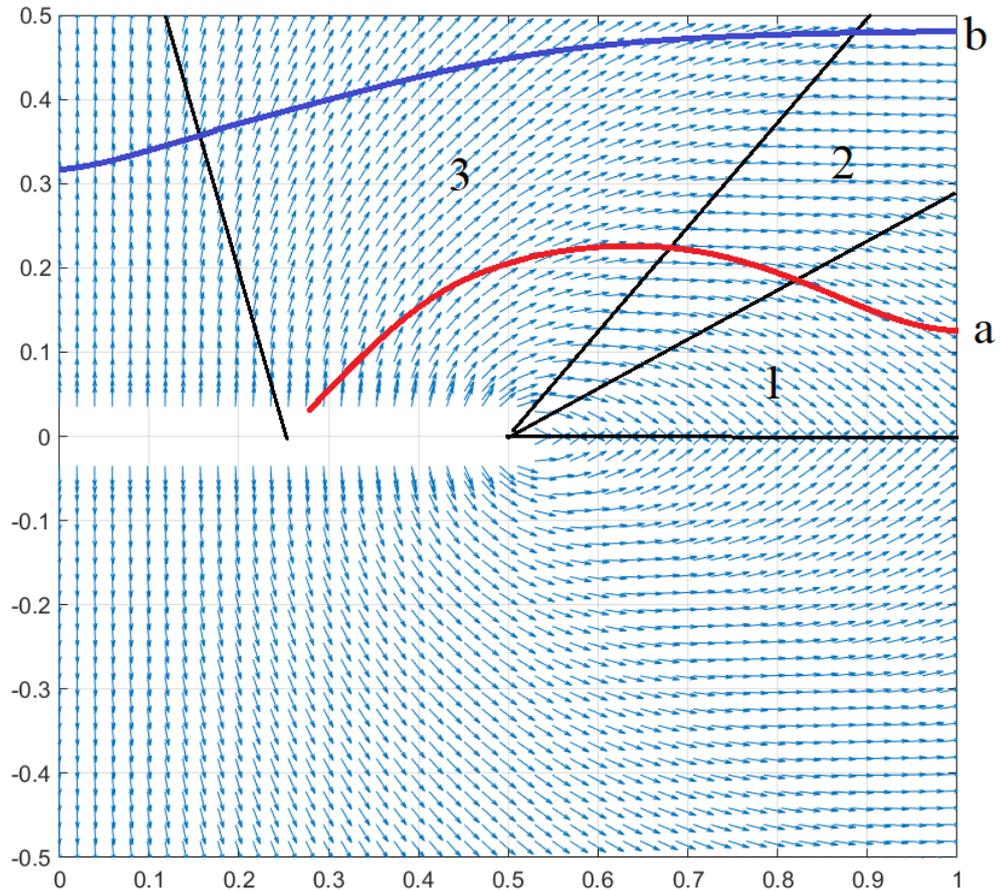


Рисунок 1.7. Возможные траектории изначально параллельной трещины. a,b – предполагаемые траектории. 1,2,3 – условные области, разделенные по влиянию на траекторию.

Помимо влияния на направление роста следует учитывать и влияние на саму возможность роста окружающих трещин. В качестве меры подобного влияния может служить среднее напряжение $\sigma_{cp} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$. Так, если $\sigma_{cp} > 0$, в среднем трещина увеличивает растягивающие напряжения, что способствует росту окружающих трещин, а если $\sigma_{cp} < 0$, то уменьшает, препятствуя. На рис. 1.8 представлены значения σ_{cp} в окрестности трещины нормального отрыва, отнесенные к значению давления приложенного к её берегам. Отметим, что область растягивающих напряжений находится перед трещиной, а сжимающих – по сторонам от неё. Сжимающие напряжения на расстоянии меньше полудлины трещины имеют тот же порядок, что и напряжения, приложенные к самой трещине. Таким образом, в гипотетическом сценарии взаимодействия трещин, описанном выше, после преодоления области у кончика влияющей трещины, растущая трещина может замедлиться или даже остановиться. Растягивающие напряжения имеют наибольшее значение у самого кончика трещины, где они обращаются в бесконечность. На рис. 1.8(б) видно, что разделяющая области сжимающих и растягивающих напряжений кривая $\sigma_{cp}(x, y) = 0$ выглядит как гипербола вида

$x^2 - y^2 = (\gamma l)^2$, где l – полудлина трещины, а γ – коэффициент, который для трещины под постоянным давлением можно оценить как $\gamma \approx 0.9$.

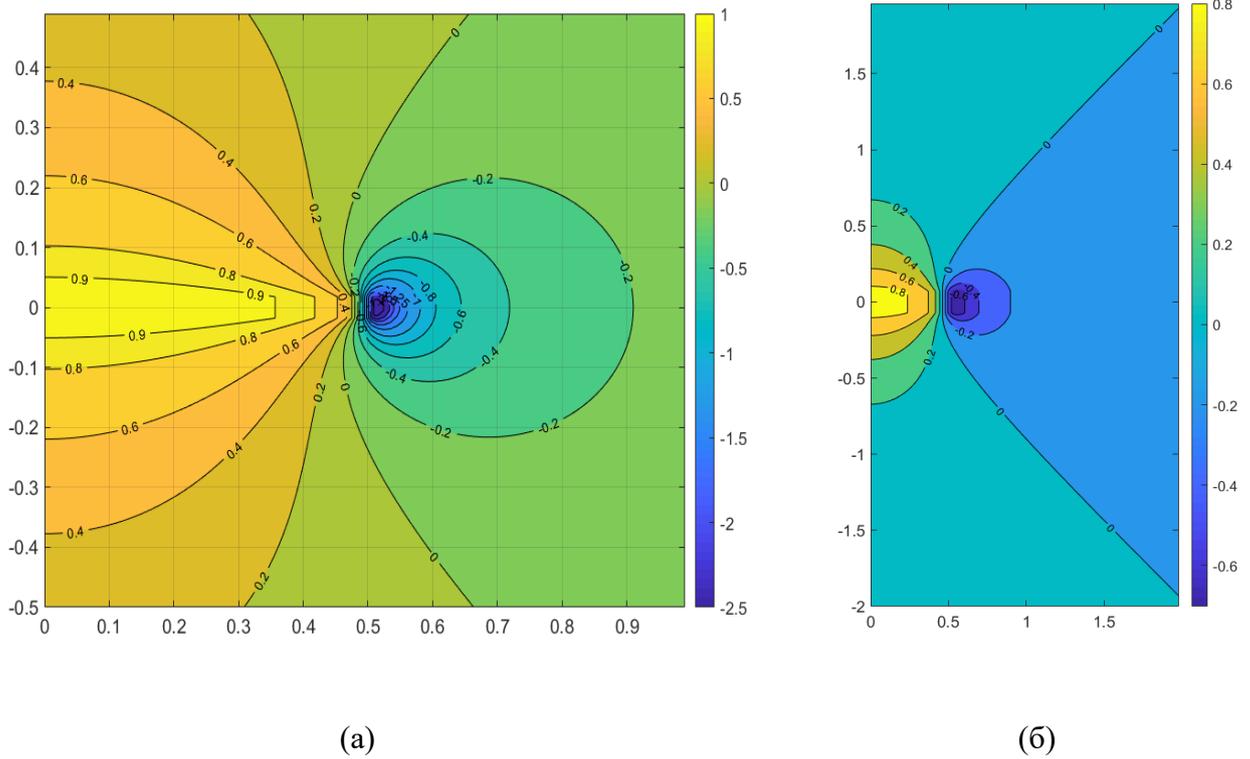


Рисунок 1.8. Поле средних напряжений в окрестности трещины нормального отрыва.

Для одиночного разрывного элемента можно получить аналитическое выражение для этой кривой. Подставим выражения (1.13 и 1.6) в уравнение $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 0$. Получим следующее выражение:

$$4a \frac{(y^2 - x^2 + a^2)D_n + 2xyD_s}{((x - a)^2 + y^2)((x + a)^2 + y^2)} = 0$$

Знаменатель этого выражения отличен от нуля во всех точках, кроме $y = 0, x = \pm a$, то есть за исключением этих точек кривая $\sigma_{cp}(x, y) = 0$ имеет вид

$$x^2 + 2xy \frac{D_s}{D_n} - y^2 = a^2 \quad (1.19)$$

Уравнение (1.19) описывает гиперболу, пересекающую ось x в точках $(\pm a, 0)$. В случае, если $D_s = 0$, то есть для чисто нормального отрыва, гипербола принимает более простой вид

$$x^2 - y^2 = a^2$$

То есть для одиночного элемента кривая, отделяющая область сжатия от области растяжения в точности является гиперболой, проходящей через концы этого элемента.

1.6. Исследование траектории поворота трещины

Главные направления тензора напряжений в окрестности кончика трещины нормального отрыва дают нам возможность оценивать не только направления роста других трещин в этой области, но и направление роста самой трещины. В частности из рис.1.6(а) можно сделать вывод, что растущая трещина нормального отрыва должна обладать устойчивостью к малым отклонениям от начального направления. В реальных материалах такие отклонения могут происходить вследствие неоднородности среды или наличия микротрещин. Для проверки данного предположения проведём численный эксперимент.

Рассмотрим трещину, состоящую из трёх прямолинейных участков. Первый участок длины l_0 расположен вдоль оси x с центром в начале координат. Два других длиной $l_1 = l_0/20$ расположены в концах первого участка под углом α к нему (рис. 1.9).

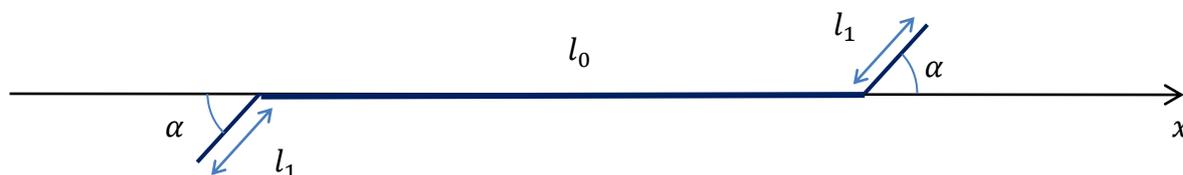


Рисунок 1.9. Начальная форма трещины с изломом.

На рис. 1.10 представлены траектории роста трещин при различных значениях α для одноосного растяжения. Видим, что для углов $\alpha \leq 30^\circ$ первый же шаг роста направлен по направлению к оси x , а для углов $\alpha < 70^\circ$ рост трещины направляется к ней через несколько шагов прироста трещины. Ни в одном случае траектория вновь не пересекает оси x , но начальное отклонение от неё уменьшается.

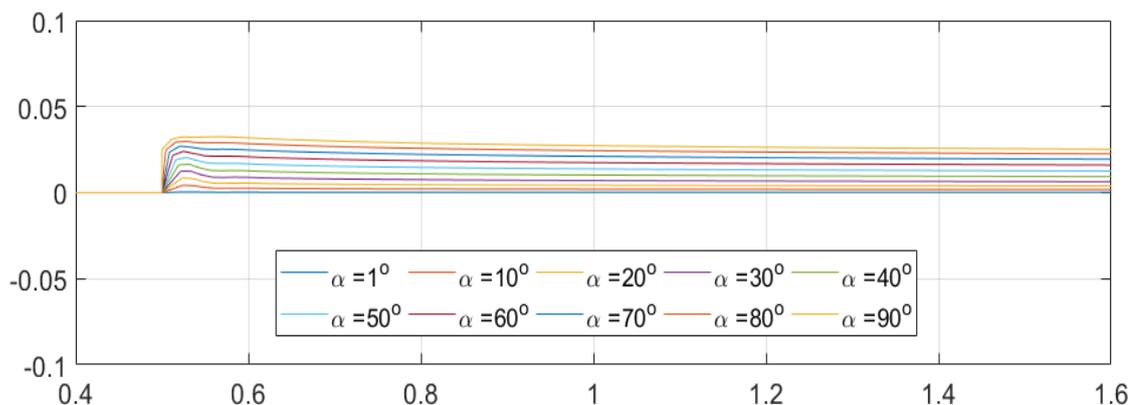


Рисунок 1.10. Траектории роста трещины при различных углах начального излома в случае одноосного растяжения.

На рис. 1.11 показаны траектории роста трещин в той же постановке для случая двухосного растяжения, для которого направление роста трещины определяется только полем напряжений, вызванным самой трещиной.

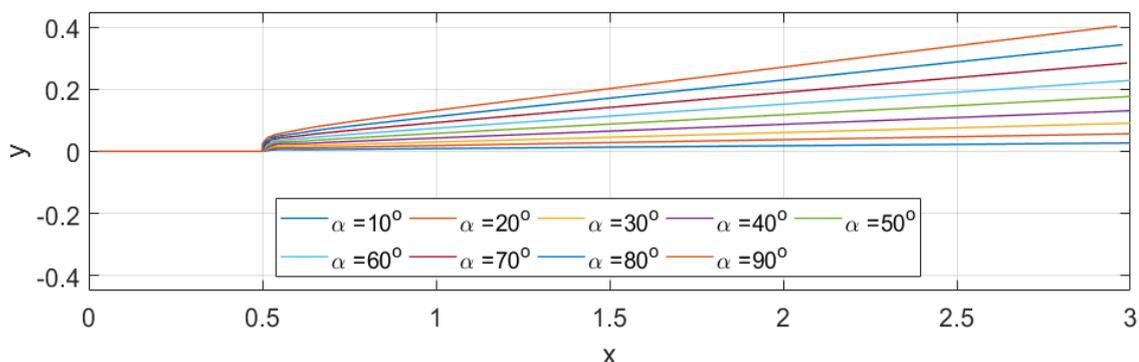


Рисунок 1.11. Траектории роста трещины для различных углов начального излома, в случае двухосного растяжения.

В таком случае трещина, отклонившаяся от оси, не возвращается к ней, а продолжает рост вдоль нового направления. Это направление можно получить, проведя прямую через два кончика трещины (ввиду симметрии задачи данная прямая проходит через начало координат, совпадающее с серединой трещины). Для малых углов α это направление устанавливается сразу, для больших – в течение нескольких шагов, поскольку согласно критерию наибольших растягивающих напряжений, растущая трещина не может одновременно повернуть более чем на 70° и даже этот поворот происходит только при чистом сдвиге, то есть реальные углы поворота несколько меньше.

1.7. Оценка устойчивости траектории трещины

Полученные в разделах 1.6 и 1.3.4 результаты дают возможность предполагать устойчивость траектории трещины к малым отклонениям, возникающим ввиду неоднородности среды или наличия в ней других трещин или иных дефектов. Для проверки данного утверждения рассмотрим задачу о росте трещины при наличии в среде множества мелких неоднородностей, оказывающих влияние на направление роста трещины. Такое предположение смоделируем следующим образом:

На каждом шаге роста трещины, угол поворота трещины θ определяем как сумму

$$\theta = \theta_0 + \theta_r$$

где θ_0 представляет собой угол, определяемый уравнением 1.10 в соответствии с напряжениями в кончике трещины, а θ_r представляет собой случайное возмущение. Для простоты предположим, что величина θ_r равномерно распределена на отрезке $[-\alpha, \alpha]$, где α – угол максимального случайного отклонения. Данный угол частично характеризует масштаб

неоднородностей в среде, влияющих на траекторию трещины. Так в случае если неоднородности сравнимы с размером граничного элемента, угол α может составлять до 45° . В случае если масштаб неоднородностей меньше, то и угол α будет, соответственно, меньше.

Для оценки влияния случайных отклонений рассмотрим сначала рост трещины, которая при отсутствии таких отклонений была бы прямолинейной, а именно рост трещины, расположенной перпендикулярно растягивающим нагрузкам. Изначально имеется прямолинейная трещина длины $l = 1$. Прирост на каждом шаге составляет $ds = 0.05$. На рис. 1.12 показаны траектории роста трещины в данных условиях. Черным цветом показана траектория без случайных отклонений, красным и зеленым для значений $\alpha = 10^\circ$ и $\alpha = 45^\circ$ соответственно. Проведенная серия расчетов показывает, что для $\alpha = 10^\circ$ отклонение траектории составляет не более 1% от пройденного расстояния. Для $\alpha = 45^\circ$ оно может составлять до 5%.

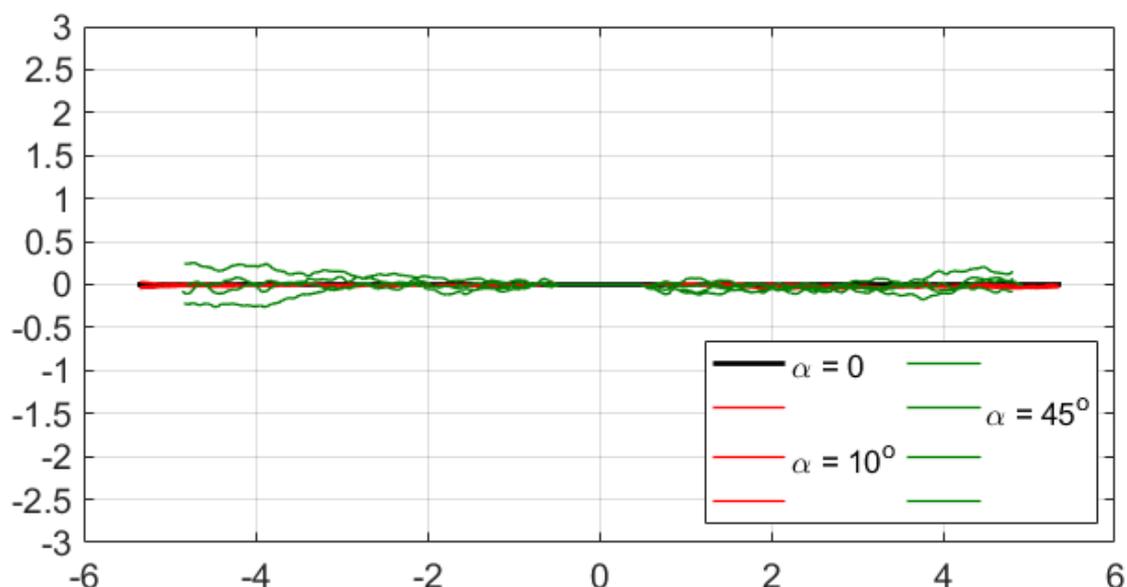


Рисунок 1.12. Траектории роста трещины для различных диапазонов случайных отклонений в случае одноосного растяжения.

Помимо случая одноосного растяжения рассмотрим также случай всестороннего растяжения, где внешнее поле напряжений не оказывает влияния на направление роста трещины и оно определяется только геометрией самой трещины. Рассмотрим аналогичный предыдущему случай роста изначально прямолинейной трещины длины $l = 1$, с приращением $ds = 0.05$ на каждом шаге роста. На рис. 1.13 показаны траектории роста для значений $\alpha = 0$ (невозмущенная траектория), $\alpha = 10^\circ$ и $\alpha = 45^\circ$. Серия вычислений показывает, что в таком случае отклонения для $\alpha = 10^\circ$ могут составлять до 7%, а для случая $\alpha = 45^\circ$ — до 25%. Также как и для одиночного отклонения имеет место стабилизация трещины вдоль своей протяженности по мере роста.

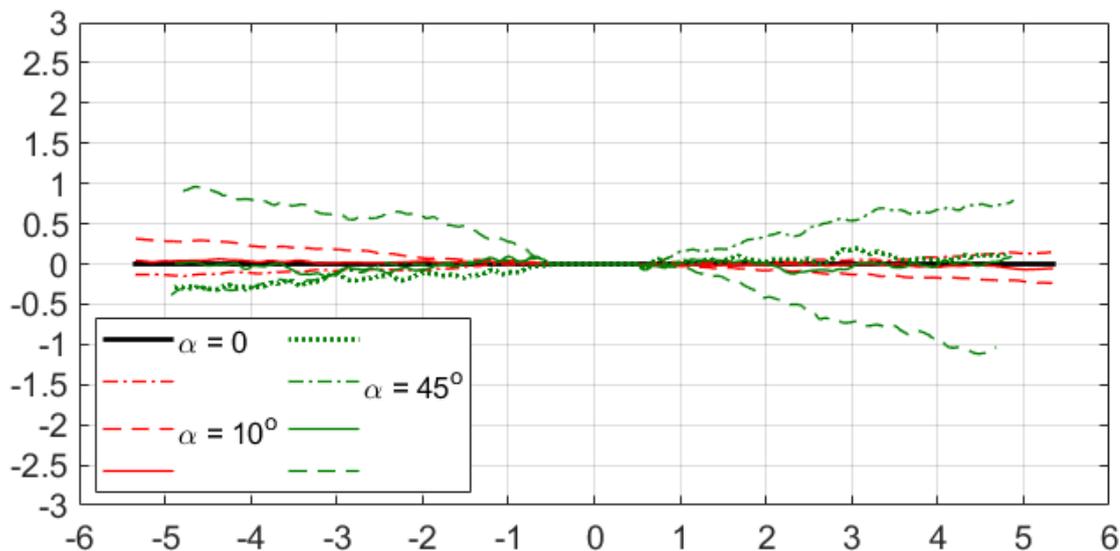


Рисунок 1.13. Траектории роста трещины для различных диапазонов случайных отклонений в случае одноосного растяжения. Черный – невозмущенный рост, красный $\alpha = 10^\circ$, зеленый – $\alpha = 45^\circ$.

Рассмотрим также то, насколько величина приращения ds влияет на итоговое отклонение. На рис. 1.14 и рис. 1.15 показаны траектории для случая $\alpha = 45^\circ$ и различных значений ds . На рис. 1.14 представлены траектории для одноосного растяжения. Можно отметить, что величина ds не оказывает существенного влияния на траектории трещин.

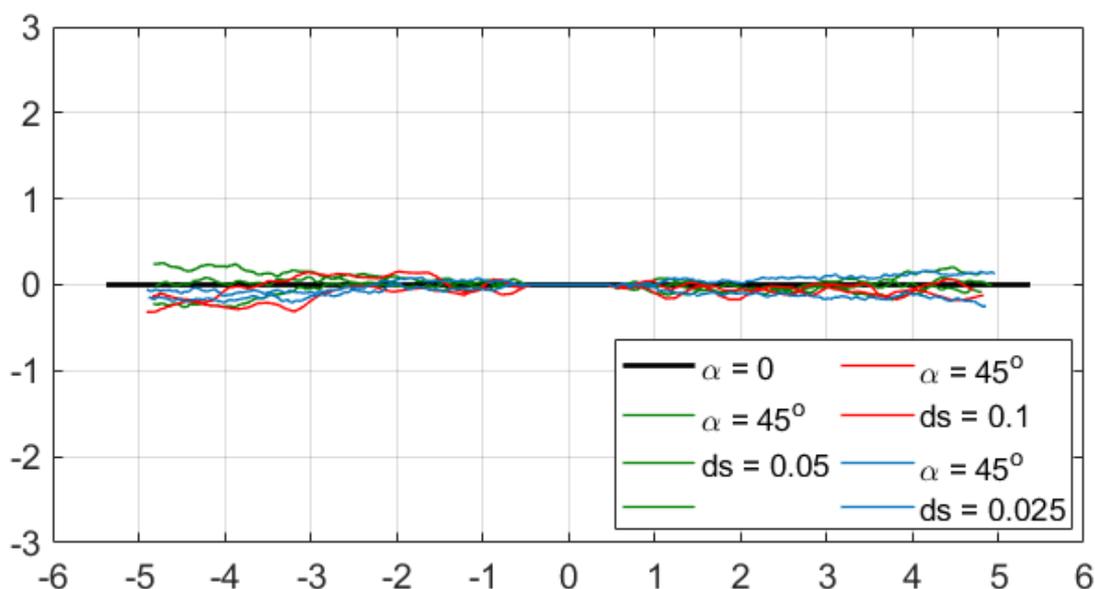


Рисунок 1.14. Траектории роста трещины для различных значений длин элементов в случае одноосного растяжения.

На рис. 1.15 показаны траектории для случая всестороннего растяжения. Здесь уже имеет место существенная зависимость траекторий и величины отклонения от длины элемента ds . Это можно объяснить тем, что поскольку в этом случае трещина стабилизируется вдоль своей протяженности, большие возможные отклонения в начале роста ведут к большему изменению траектории на протяжении дальнейшего роста. Также следует отметить, что несмотря на

существенное отклонение от начального направления, рост трещин происходит с достаточно небольшими отклонениями от прямой, если за прямую принять продолжение отрезка, соединяющего кончики трещин.

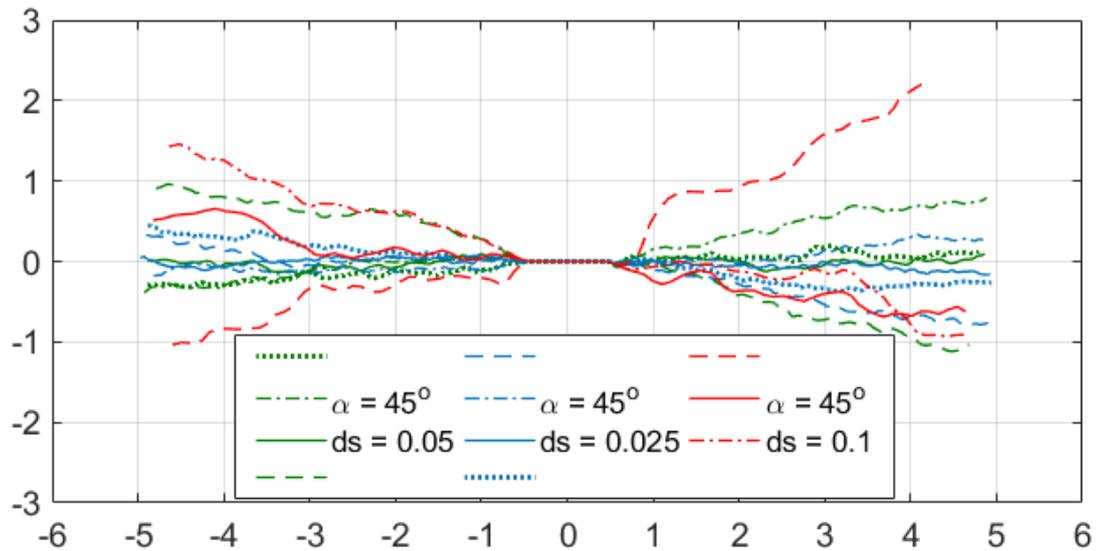


Рисунок 1.15. Траектории роста трещины для различных диапазонов случайных отклонений в случае одноосного растяжения.

Помимо изначально прямолинейных трещин следует рассмотреть и влияние случайных отклонений на трещину криволинейную. В качестве примера возьмём трещину, растущую в условиях, схожих с представленными в разделе 1.3.4. Горизонтальный прямолинейный разрез длины $l = 1$, под действием внешних напряжений $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -\sigma_{xy}$. На рис. 1.16 показаны траектории роста трещины в таких условиях для различных значений α .

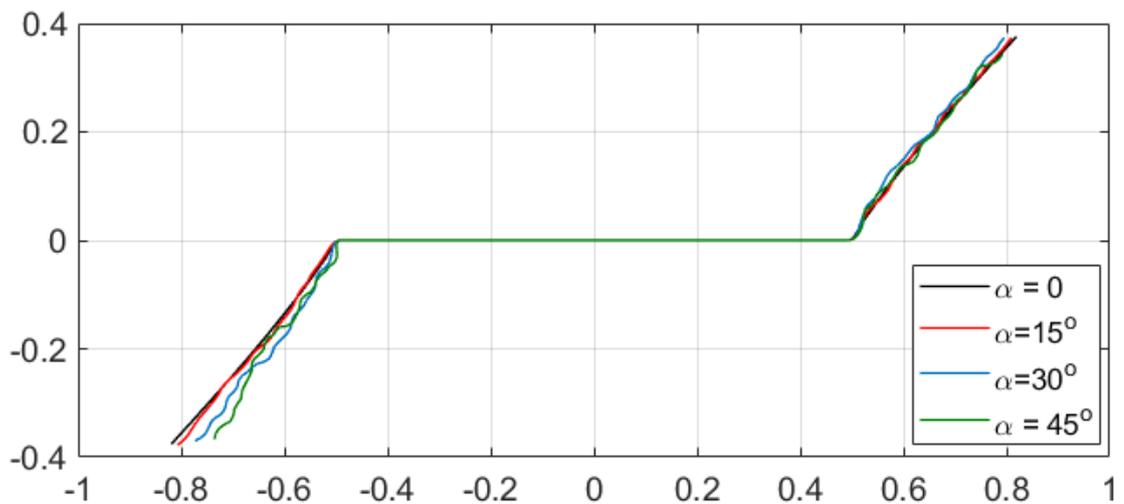


Рисунок 1.16. Траектории роста трещины для различных диапазонов случайных отклонений в случае наличия сдвиговых напряжений.

Отметим, что при $\alpha = 15^\circ$ отклонение траектории не превышает продемонстрированное в разделе 1.3.4. для различных размеров граничного элемента. Для бóльших значений α отклонение более существенно, но также не превышает порядка 10% для $\alpha = 30^\circ$ и 15% для

$\alpha = 45^\circ$. Результаты серии расчетов также показывают, что отклонение траектории в данном случае происходит чаще в одну и ту же сторону: по направлению начального поворота трещины (например, траектории у левого кончика трещины на рис. 1.16). Вместе с тем, дальнейшее направление роста у невозмущенных и возмущенных трещин совпадает, что позволяет делать вывод об устойчивости траектории и в этом случае.

Выводы главы 1

- Предложенный метод расчета роста криволинейных трещин показывает хорошее совпадение с аналитическими решениями задач с трещинами, при условии, расстояния между трещинами больше, чем размер элемента. Также данный метод показывает хорошее совпадение траектории растущей трещины с экспериментальными результатами.
- Показана слабая зависимость траектории криволинейной трещины от величины приращения на каждом шаге.
- Показано, что растущая трещина обладает некоторой мерой устойчивости относительно направления своего роста. Для малых отклонений от изначального направления, в условиях одноосного растяжения (или случая, когда есть контраст внешних напряжений) траектория растущей трещины возвращается к изначальному направлению. В случае, когда нет контраста внешних напряжений, новое направление роста трещины можно определить, проведя прямую, соединяющую кончик отклонённой трещины с её серединой или же проведя прямую между двумя кончиками трещины.
- Показано, что аналогичная устойчивость наблюдается и при наличии случайных отклонений на каждом шаге роста. В случае если присутствует внешнее поле напряжений, определяющее направление роста, траектория трещины является устойчивой к случайным возмущениям. При отсутствии такого поля напряжений, рост трещины выравнивается вдоль своей протяженности, но возможно отклонение направления роста от изначального. Величина данного отклонения также может зависеть от величины приращения на каждом шаге.
- Для трещины, поворачивающей под действием внешних нагрузок, имеет место аналогичная устойчивость траектории к случайным отклонениям, как и для прямолинейной. Направление роста устанавливается в соответствии с полем напряжений. Однако отклонение в таком случае распределено не симметрично относительно невозмущенной траектории, чаще происходит отклонение в сторону, соответствующую повороту трещины.
- Характерный линейный размер системы трещин l_0 и характерное напряжение σ_0 не влияет на вид описывающих систему уравнений, кроме критерия разрушения. Таким образом, характер поля напряжений вокруг трещины, а также потенциальное направление её роста, не зависят от масштаба задачи и порядка приложенных к системе нагрузок, пока такие

нагрузки остаются в пределах применимости линейной модели. От этих переменных зависит только сама возможность роста трещины, ввиду наличия в критерии роста размерного параметра K_{IC} .

Глава 2: Исследование влияния взаимного расположения трещин на траекторию их роста

В данной главе представлено численное исследование зависимости траектории роста трещин от их взаимного расположения с использованием разработанного программного кода. Для ограничения числа параметров, влияющих на результат взаимодействия, рассмотрим случай изначально параллельных прямолинейных трещин, расположенных со смещением друг относительно друга (рис.2.1). Для случая статического нагружения эта задача хорошо исследована [48]. В случае же растущих трещин, помимо исследуемого нами вопроса взаимного влияния трещин на траекторию их роста, возникают сразу несколько вопросов, на которые следует обратить внимание.

1. При каких условиях происходит рост трещин?
2. Возможен ли одновременный рост нескольких трещин?
3. Возможен ли рост трещин с различной скоростью и от чего зависит скорость роста трещин?

Подробный ответ на поставленные вопросы находится за рамками данного исследования, однако некоторые рассуждения на этот счет необходимы. Рассмотрим в качестве критерия роста трещин энергетический критерий, а именно равенство критическому значению скорости высвобождения упругой энергии на единицу свободной поверхности. Математически он выражается в равенстве функции G критическому значению G_{cr} . Согласно [18] функция G может быть выражена через коэффициенты интенсивности напряжений на кончиках трещины.

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 + \frac{1 - \nu^2}{E} K_{II}^2$$

Для одиночной прямолинейной трещины знание скорости её роста необязательно для определения её траектории, поскольку значения G в обоих кончиках трещины равны, а сам рост трещины происходит вдоль изначального направления. В случае если изначально трещина ориентирована под углом к растягивающим напряжениям, вопрос определения скорости роста трещин становится более значим, поскольку от скорости роста трещины может зависеть напряженно-деформированное состояние среды. К примеру, в стекле скорость роста трещин достигает четверти скорости звука, и динамические эффекты могут оказывать существенное влияние на траекторию. Однако задача остается симметричной и траектория, пусть и менее точно, может быть определена в квазистатическом приближении.

При рассмотрении нескольких трещин мы сталкиваемся с тем, что значения G на различных кончиках трещин могут быть различными. В таком случае критерий роста может быть выполнен одновременно для более чем одного кончика трещин, но скорость роста в этих кончиках может отличаться. Вопрос определения скорости роста трещин является достаточно

сложным, поскольку зависит не только от значения G . Так для усталостных трещин скорость роста зависит от перепадов напряжений при циклических нагрузках и геометрии образца [181, 182], для трещин в агрессивных условиях – от значения коэффициентов интенсивности напряжений и условий среды [181], а для трещин гидроразрыва – от динамики течения жидкости в трещине. В данной работе мы будем рассматривать два предельных случая определения скорости при одновременном росте трещин: равномерный одновременный рост и рост только ведущей трещины. При равномерном одновременном росте все трещины, для которых выполнен критерий, растут с одинаковой скоростью (в нашем случае на один элемент за шаг). В случае роста только ведущей трещины на каждом шаге растёт только тот или те кончики трещин, для которых значение G – максимально.

На практике такие случаи могут иметь место, например, при росте трещины гидроразрыва, где рост происходит при достижении равенства $G = G_{cr}$, а скорость роста определяется течением жидкости в трещине, которое происходит существенно медленнее процесса разрушения.

2.1. Взаимодействие двух параллельных трещин при одновременном росте

Для оценки влияния взаимного расположения трещин на траекторию и возможность дальнейшего роста, рассмотрим следующую постановку: две трещины расположенные согласно (рис.2.1) растут под действием приложенного на бесконечности растягивающего напряжения. Каждый из концов трещины на шаге расчета прирастает на один элемент. При этом для сравнения также будем рассматривать случай прямолинейного роста трещин в той же постановке.

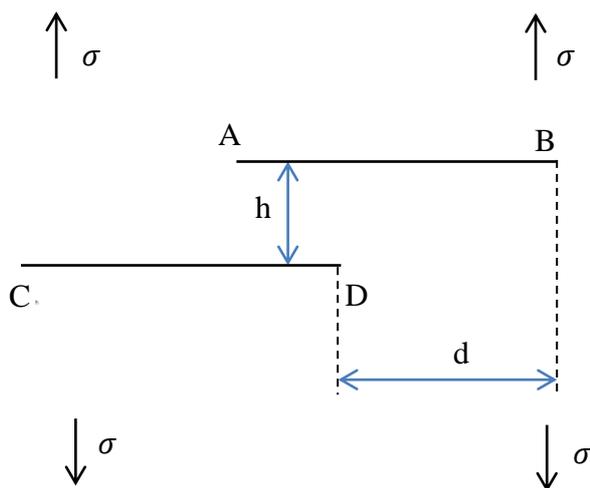


Рисунок 2.1. Начальное расположение трещин. Две параллельные прямолинейные трещины на расстоянии h между плоскостями и с продольным сдвигом d между центрами. На бесконечности приложены растягивающие напряжения σ перпендикулярно трещинам. А, В, С, D – кончики трещин.

Для оценки того, как получаемая на каждом шаге конфигурация трещин влияет на окружающее поле напряжений, а также на возможность дальнейшего роста трещин, будем рассматривать значение G – функции на кончиках трещин, отнесенной к её теоретическому значению для одиночной прямолинейной трещины той же длины $G_t(L)$. Значение G_t для плоской трещины длины $2L$ под действием перпендикулярных ей растягивающих напряжений σ имеет вид:

$$G_t = \frac{1 - \nu^2}{E} \pi \sigma^2 L$$

Таким образом, по значению величины G/G_t можно судить о влиянии других трещин. Будем называть данную величину коэффициентом влияния. Значение коэффициента влияния, превышающее единицу, означает ослабление материала за счет других трещин и понижение нагрузок, которые нужно приложить для роста данной трещины. Соответственно, значение коэффициента влияния меньше единицы означает, что наличие других трещин, наоборот, затрудняет рост рассматриваемой трещины. Также следует отметить, что поскольку значение G_t прямо пропорционально длине трещины, случай $G/G_t \leq (G/G_t)_0 \cdot \frac{L_0}{L}$ значит, что рост рассматриваемого кончика трещины может быть не самоподдерживающимся, поскольку для обеспечения того же значения G будет требоваться приложения больших нагрузок σ .

Далее представлены результаты расчетов. На рис. 2.2 слева показаны траектории роста изначально соосных трещин ($d=0$), а справа – значения коэффициента влияния в кончиках трещин. Ввиду симметрии задачи он будет одинаковым для любого из кончиков. Сплошной линией представлены значения коэффициентов влияния для прямолинейных трещин, прерывистой – для криволинейных трещин, траектория которых представлена слева. Значения G/G_t для всех рассмотренных значений h меньше единицы, то есть параллельные соосные трещины требуют для своего роста приложения больших напряжений, чем одиночные трещины той же длины. Следует отметить, что коэффициент влияния с учетом криволинейности растущих трещин превышает таковой для прямолинейных, ввиду отклонения траекторий трещин друг от друга.

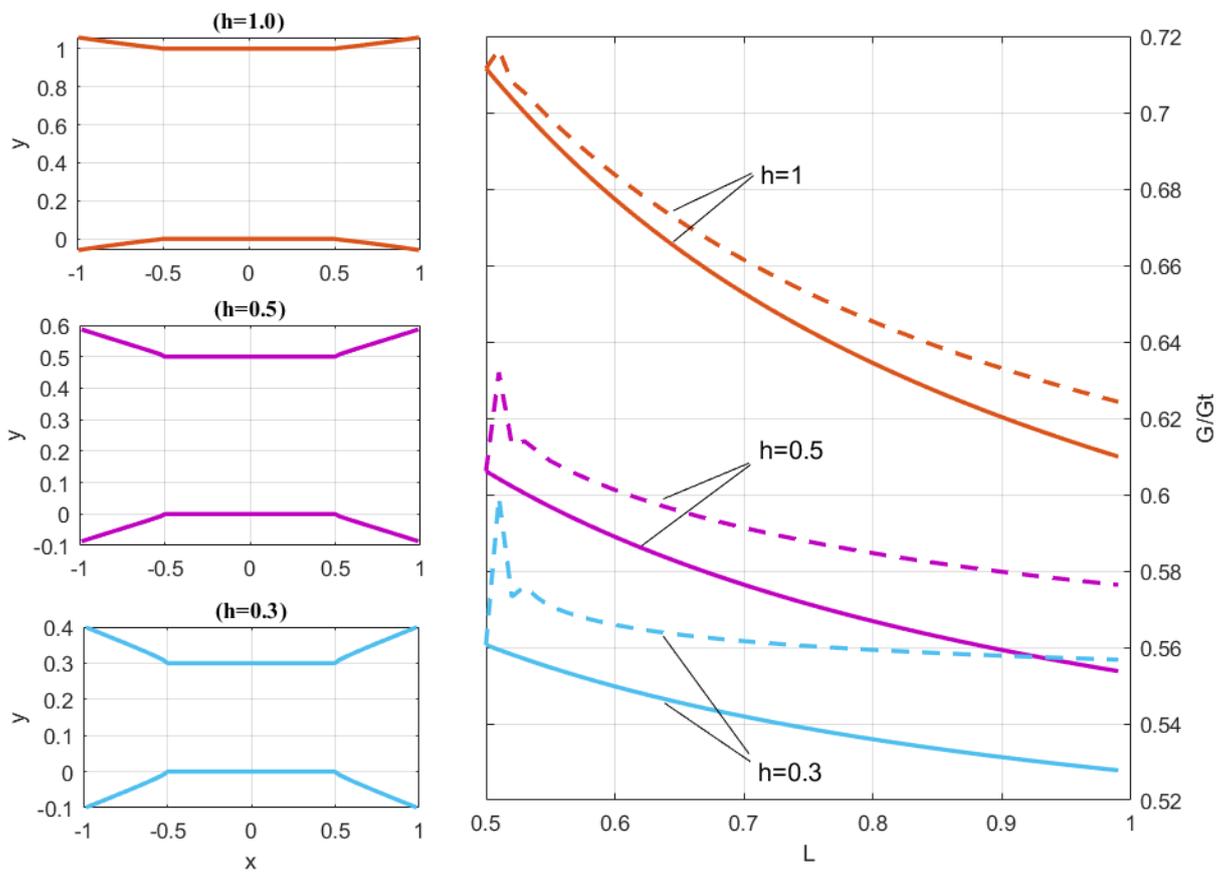


Рисунок 2.2. Траектории (слева) и зависимости коэффициентов влияния G/G_t (справа) для изначально соосных трещин ($d=0$) при различных h . Сплошная линия – коэффициенты влияния для прямолинейных трещин, прерывистая – для криволинейных.

Далее представлены результаты расчетов для случая $d=0.5$. На рис. 2.3 изображены траектории роста трещин, а на рис. 2.4 – коэффициенты влияния. Для данного случая, значения коэффициентов интенсивности напряжений на различных кончиках трещин не совпадают. Далее будем называть кончики трещин, расположенные ближе к другой трещине внутренними (точки А и D с рис.2.1), а противоположные к ним – внешними (точки В и С, соответственно). На рис.2.4(а) представлены значения коэффициентов влияния для внешних кончиков трещин, а на рис.2.4(б) – для внутренних.

Из рис. 2.3 видно, что при росте навстречу друг другу имеет место отклонение траектории в сторону другой трещины под постепенно уменьшающимся углом к начальному направлению, а при росте друг от друга – отклонение в сторону от другой трещины. При этом для рассмотренных значений h траектории трещин не имеют тенденции к пересечению, поскольку угол отклонения внутренних кончиков от изначального направления уменьшается по мере роста.

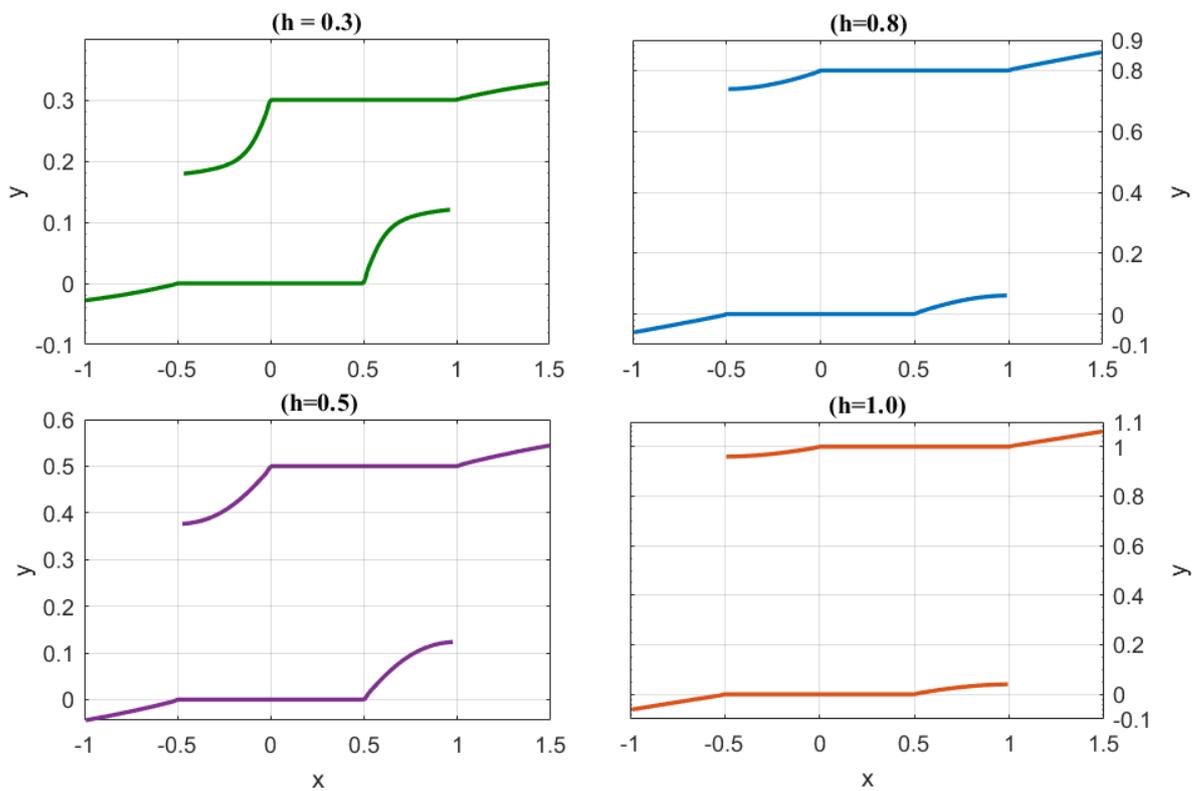


Рисунок 2.3. Траектории трещин расположенных с малым смещением ($d=0.5$) при различных значениях h .

На рис.2.4(а) видно, что для кончика, обращенного навстречу другой трещине, при таком расположении коэффициент влияния меньше единицы и уменьшается по мере роста трещины, а также резко падает при уменьшении расстояния h между трещинами. Кроме того, сравнение значений коэффициента влияния для прямолинейных и криволинейных трещин показывает, что сближение трещин приводит к уменьшению коэффициента влияния. Также следует отметить, что для значений $h = 0.5$ и $h = 0.3$ значение G/G_t падает быстрее чем L_0/L , то есть значение G в этих кончиках падает по мере роста трещин. В случае если в этих кончиках значение G изначально не превосходило существенно G_{cr} , то рост трещин в этом направлении мог бы прекратиться.

Траектории роста трещин для случая $d = 1$, представленные на рис. 2.5 показывают схожее поведение со случаем $d = 0.5$. Поведение коэффициентов влияния для этого случая (рис. 2.6), впрочем, существенно отличаются. В начале роста (значение $L = 0.5$ на рис. 2.6(б)) коэффициент влияния существенно превосходит единицу, в случае если расстояние h меньше полудлины трещины. При этом для прямолинейных трещин значение G/G_t далее будет монотонно убывать, в то время как в случае криволинейного роста трещин поведение коэффициента влияния будет немонотонным. Далее коэффициент влияния резко падает.

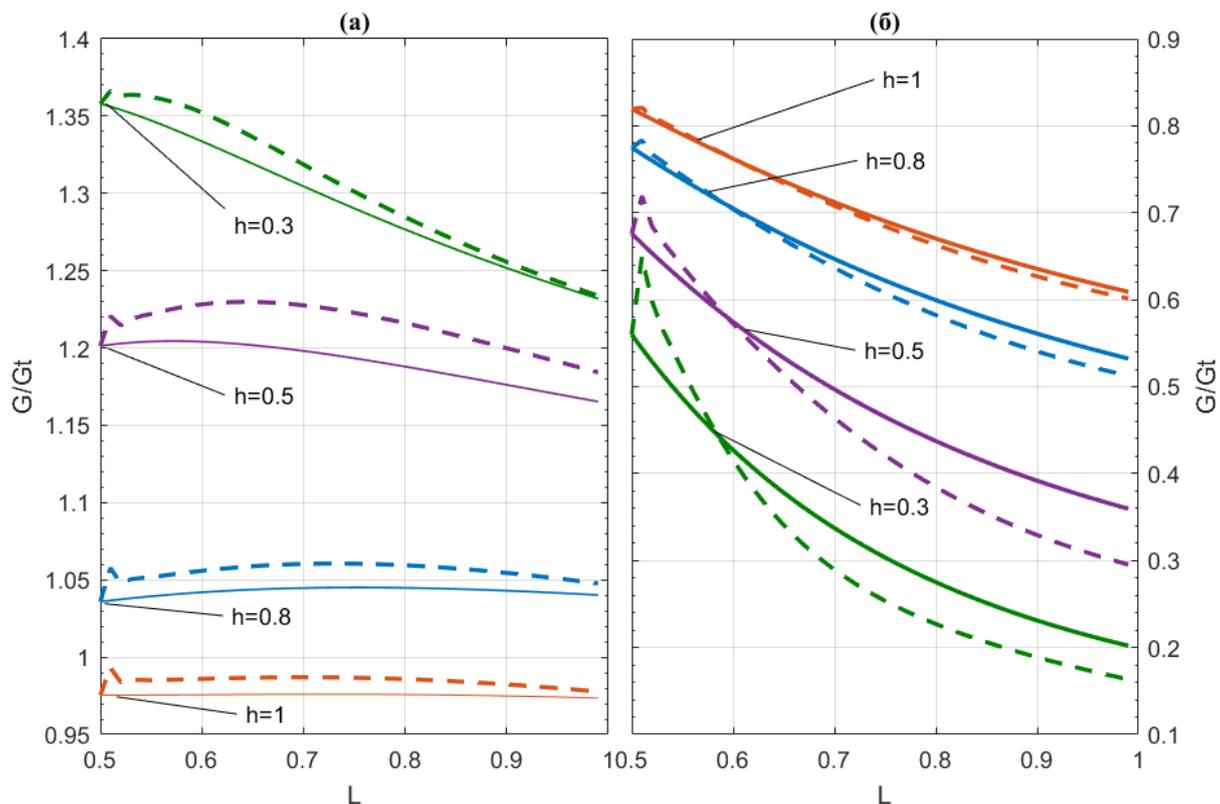


Рисунок 2.4. Изменение коэффициентов влияния по мере роста трещин для трещин со смещением ($d=0.5$). (а) – в кончиках, расположенных вдали от другой трещины (внешних), (б) – вблизи (внутренних).

Введем такой параметр как доля перекрытия P равный длине пересечения проекций двух трещин на ось x , отнесенной к длине трещины. В случае если проекции не пересекаются, примем значение P как расстояние между проекциями трещин, взятое со знаком минус, отнесенное к длине трещины. Этот параметр будет удобен нам для оценки взаимного расположения криволинейных трещин.

В случае $h \leq 0.5$, при $P \leq 0.2$ значение коэффициента влияния превосходит единицу, а далее – не превосходит. То есть для параллельных трещин их взаимное влияние способствует их росту не только при нулевых P , но и при значениях $P \leq 0.2$.

На противоположном от другой трещины краю коэффициент влияния для рассмотренных значений h превосходит единицу. Кроме того, при криволинейном росте трещин значение коэффициента влияния выше, чем при прямолинейном.

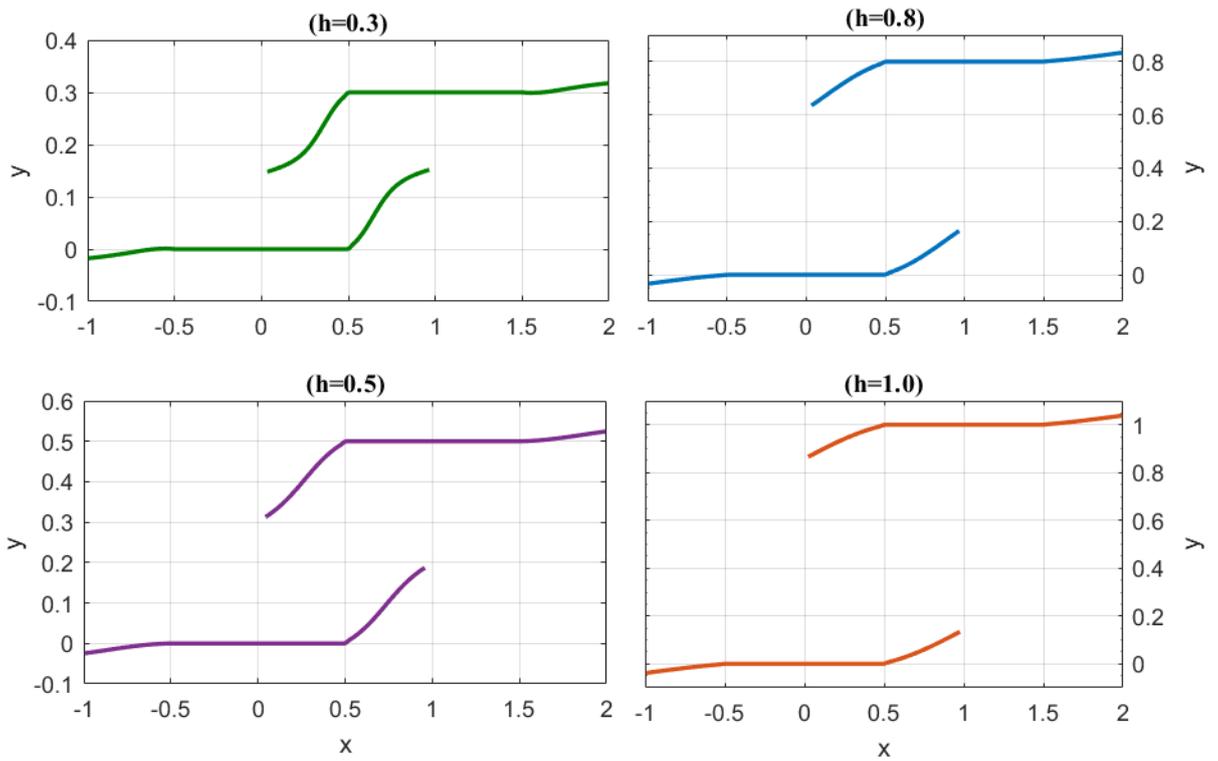


Рисунок 2.5. Траектории трещин при различных значениях h для случая $d = 1.0$

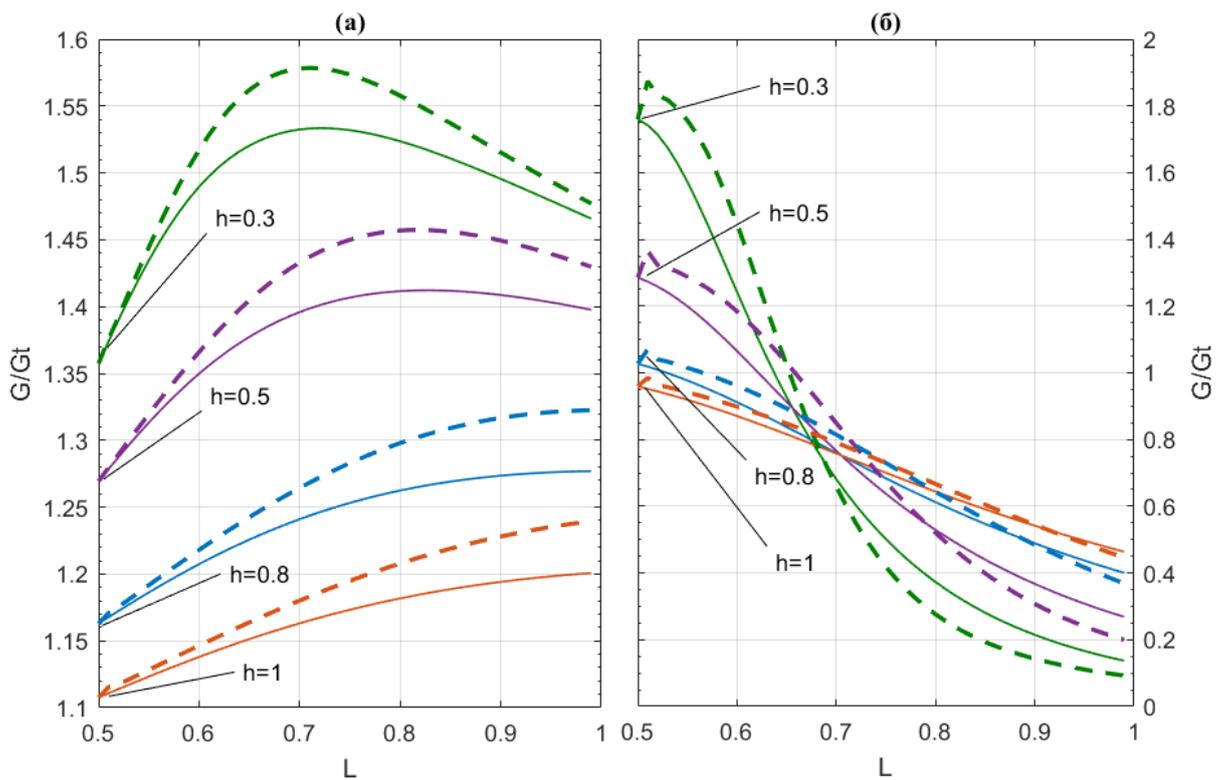


Рисунок 2.6. Изменение коэффициентов влияния по мере роста трещин для случая $d = 1.0$. (а) – на внешних кончиках трещин, (б) – на внутренних.

На рис. 2.7 и 2.8 представлены результаты расчета для случая $d = 2$. Из рис. 2.7 видно, что при малых h имеет место отклонение трещин друг от друга, которое затем сменяется

поворотом навстречу друг другу. Такое поведение подтверждает выводы раздела 1.5 относительно поля напряжений, вызываемого наличием трещины. Значения коэффициента влияния показывают некоторое увеличение G/G_t на внешних кончиках трещин (рис. 2.8(a)) и существенное увеличение G/G_t на внутренних.

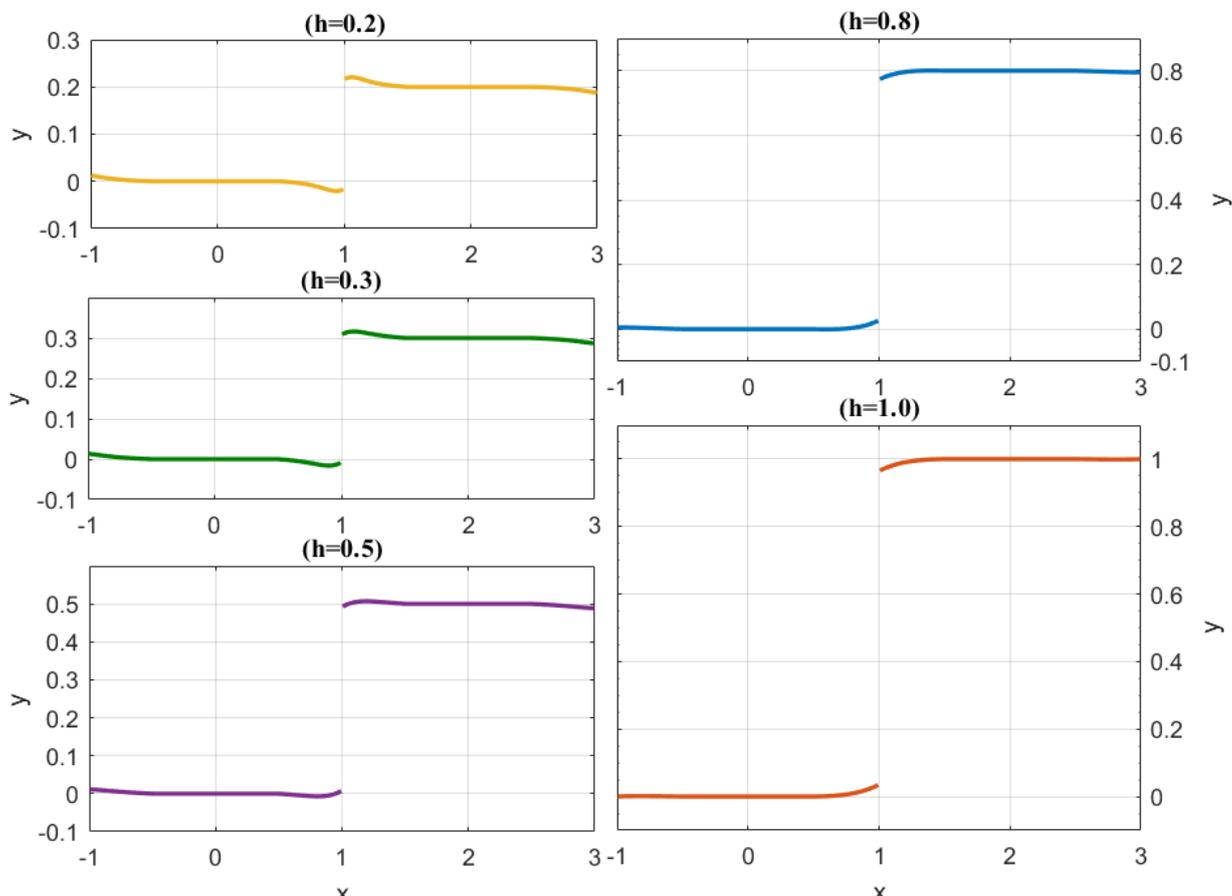


Рисунок 2.7. траектории трещин при различных значениях h для случая $d = 2.0$.

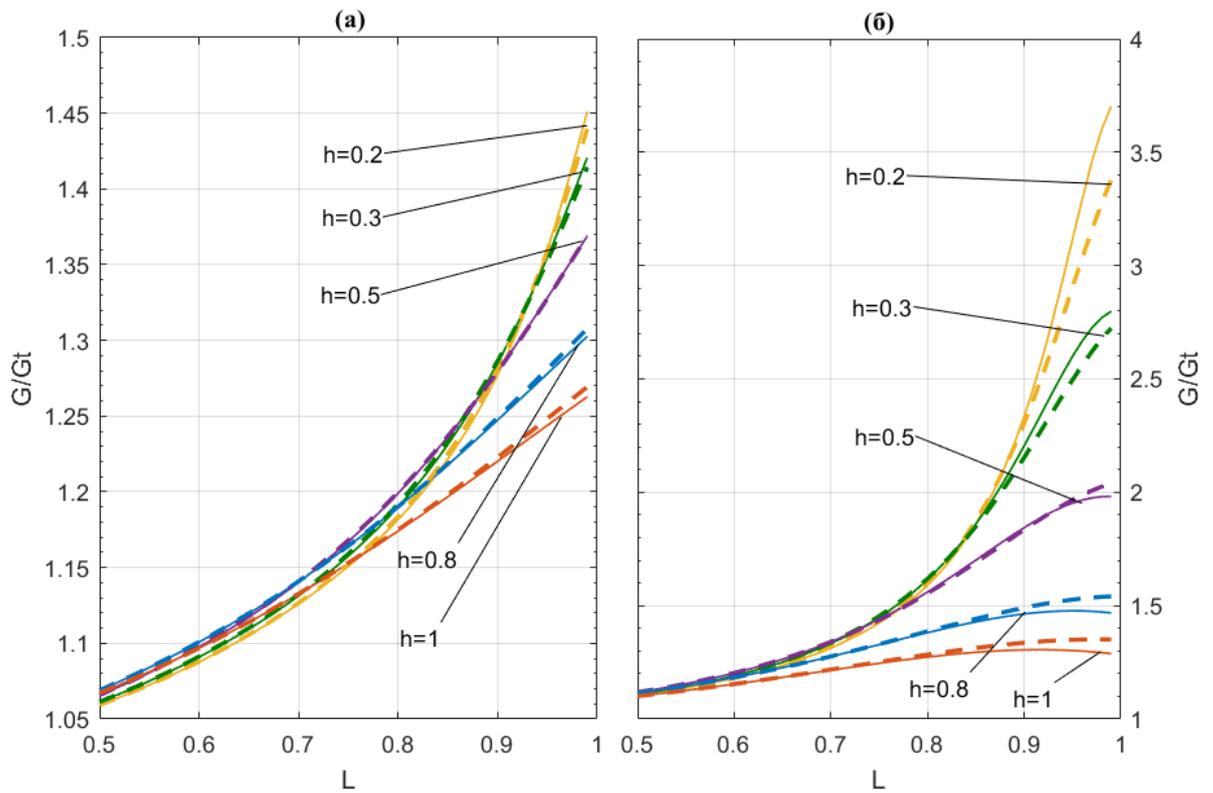


Рисунок 2.8. Изменение коэффициентов влияния по мере роста трещин для случая $d = 2.0$. (а) – для внешних кончиков трещин, (б) – для внутренних.

Представленные выше расчеты показывают существенное изменение значения G/G_t в зависимости от расположения трещин. Можно выделить следующую зависимость от значения коэффициента перекрытия P :

- Когда проекции трещин не пересекаются ($P \leq 0$) коэффициент влияния больше единицы, как для внутренних, так и для внешних кончиков. Резко возрастает при уменьшении h и расстояния между трещинами. Значение на внутренних кончиках превосходит таковое для внешних. В случае не равномерного роста всех кончиков более вероятен рост внутренних.
- При малом пересечении проекций трещин ($0 < P \leq 0.2$) коэффициент влияния больше единицы как для внутренних, так и для внешних кончиков трещин, растет при уменьшении h , но на внутренних кончиках падает по мере увеличения P . Значения G/G_t на внутренних и внешних кончиках сравнимы. В случае неравномерного роста возможен рост как внутренних, так и внешних кончиков.
- При существенном пересечении проекций трещин ($0.2 < P \leq 0.5$) коэффициент влияния для внутренних кончиков трещин становится меньше единицы и уменьшается с уменьшением h , а также резко падает с ростом P . Коэффициент влияния для внешних кончиков больше единицы, растет с уменьшением h , но не растет существенно с ростом P . В случае неравномерного роста расти будут внешние кончики.
- При близком к полному пересечению проекций трещин ($0.5 < P \leq 1$) коэффициент влияния для внутренних кончиков меньше единицы, а для внешних кончиков близок к единице и уменьшается при увеличении P . В случае если h достаточно велико (больше чем сдвиг d между трещинами), коэффициент влияния для внешних кончиков меньше

единицы и трещины полноценно осложняют рост друг друга. В случае неравномерного роста будут расти внешние кончики. Для соосного случая в случае нарушения симметрии также начнут расти внешние кончики.

Помимо этого следует отметить, что полученные коэффициенты влияния для случая прямолинейного роста и для случая криволинейного роста отличаются незначительно. В большинстве случаев разница составляет не более 10%, кроме случаев близко расположенных трещин, растущих навстречу друг другу (рис. 2.6.(б) случаи $h=0.5$, $h=0.3$). Таким образом, модели криволинейного роста обеспечивают существенное преимущество в точности определения параметров напряженного состояния при взаимодействии трещин в случаях, где возможно сближение траекторий трещин. В частности, когда расстояние между трещинами составляет порядка их полудлины и менее.

2.2. Взаимодействие трех параллельных трещин при неравномерном росте.

Для учета взаимного влияния трещин, как на траекторию, так и на скорость роста, рассмотрим случай, когда на каждом шаге будут расти только те кончики трещин, для которых значение G максимально. Ввиду симметрии задачи таких на каждом шаге будет два. Для двух трещин такое предположение приводит к схожим результатам для различных значений d и h : обе трещины растут навстречу друг другу, пока не достигнут области $P > 0$. После этого происходит неограниченный рост внешних кончиков, с постепенным ростом внутренних, когда значение P слишком уменьшается. По мере этого роста сокращается расстояние между трещинами и в дальнейшем (при неограниченном росте) следует пересечение. Качественно поведение и траектория трещин не зависят от значений d и h .

Для более информативного результата рассмотрим следующую постановку: Пусть у нас есть три изначально параллельных трещины, на расстоянии h между плоскостями и со сдвигом d между центрами (рис.2.9). Образец с данной системой трещин находится под действием растягивающих напряжений σ_0 , приложенных на бесконечности. Будем рассматривать два случая: одноосное растяжение перпендикулярное плоскостям трещин и всестороннее растяжение. Ввиду линейности задачи значение напряжений в любой точке пропорционально σ_0 , то есть в предположение о росте только кончиков трещин с максимальным значением G может быть рассмотрено как предположение, что значение σ_0 на каждом шаге берется таким, что максимальное значение $G = G_{cr}$.

Здесь и далее верхнюю и нижнюю трещину будем называть крайними, а находящуюся между ними – центральной. Кончики крайних трещин, обращенные в сторону центральной будем называть внутренними, а противоположные – внешними.

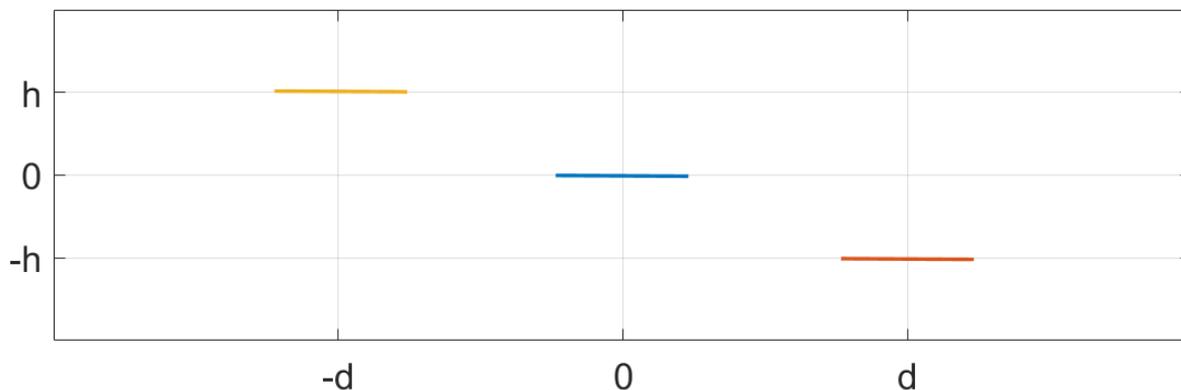


Рисунок 2.9. Схема начального расположения трещин

В таком случае можно выделить три основных сценария роста трещин:

1. Растут только крайние трещины: Ввиду того, что центральная трещина находится в области, укрепляемой наличием крайних трещин, её рост затруднен, и значения G на ней не превосходят таковые для внешних кончиков крайних трещин. В основном растут внешние кончики, но и внутренние тоже прирастают, обеспечивая значение коэффициента перекрытия P в диапазоне $0 < P \leq 0.2$. Траектория такого роста представлена на рис. 2.10
2. Растёт только центральная трещина: В случае если трещины расположены так, что попадают в область, ослабляемую другими, значение G/G_t для всех трещин будет больше единицы, но для центральной оно будет наибольшим, ввиду меньшего расстояния до обеих влияющих трещин. В таком случае центральная трещина начнет расти, после чего, за счет большего размера, будет иметь большее значение G и, соответственно, будет продолжать расти. Траектория такого роста представлена на рис. 2.11.
3. Рост центральной трещины переходит в рост крайних: Изначально данный случай аналогичен предыдущему, но по мере роста центральной трещины она оказывается достаточно близко к крайним, вследствие чего G центральной трещины уменьшается за счет попадания в область, укрепляемую наличием крайних трещин, а G во внешних кончиках крайних трещин, наоборот, увеличивается, за счет попадания в область, ослабляемую наличием центральной. Если это значение становится больше, чем таковое для центральной трещины, то крайние трещины начинают расти, а центральная замедляется, прирастая вместе с внутренними кончиками крайних трещин, когда значение P становится достаточно малым. Траектория такого роста представлена на рис. 2.12.

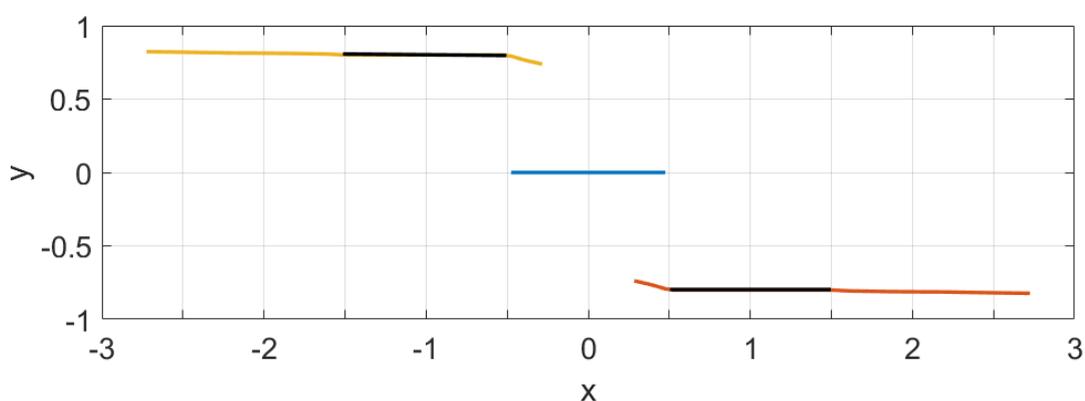


Рисунок 2.10. Пример траекторий трещин для случая роста крайних трещин.

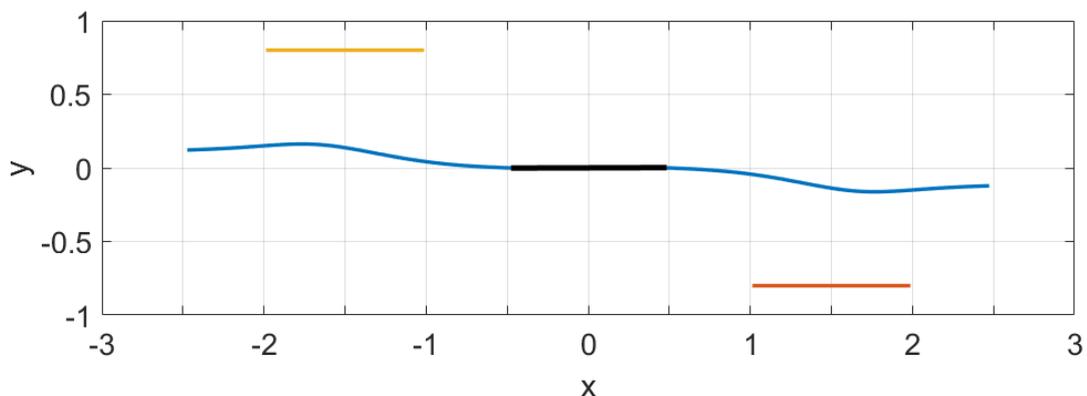


Рисунок 2.11. Пример траектории роста трещин для случая роста центральной трещины.

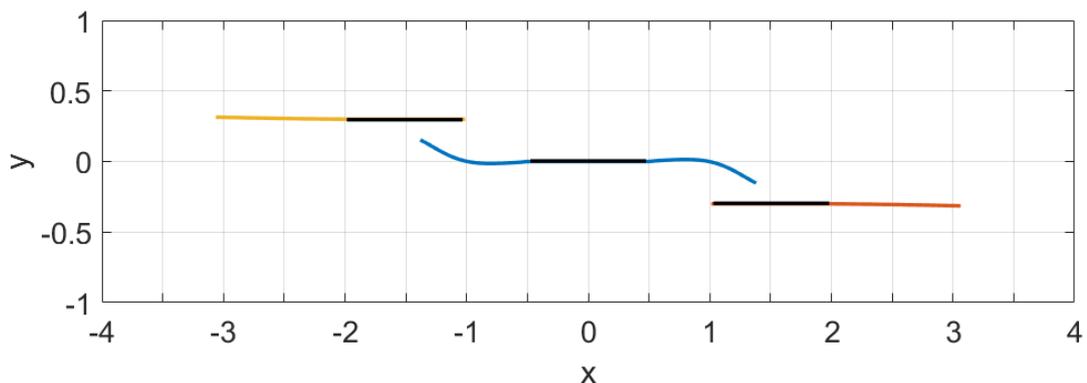


Рисунок 2.12. Пример траектории роста трещин для случая роста центральной, переходящего в рост крайних трещин.

Для оценки критериев, согласно которым будет различаться поведение трещин, была проведена серия расчетов для различных значений h и d . На рис. 2.13 представлено распределение различных сценариев поведения трещин в зависимости от начального расположения. Границы между областями параметров d и h , соответствующим представленным выше исходам взаимодействия, представляют собой две пересекающиеся кривые.

Первая граница, отделяющая случаи роста крайних трещин от случаев роста центральной, представляет собой кривую, схожую с гиперболой. При больших h асимптотически приближается к прямой $d \cong 0.68 \cdot h$. При $h/2a \cong 0.25$ значение d достигает минимума $d \cong 0.8$. Следует отметить, что при $h/2a < 0.7$ рост центральной трещины происходит и при $d < 1$, то есть при пересечении изначальных проекций трещин.

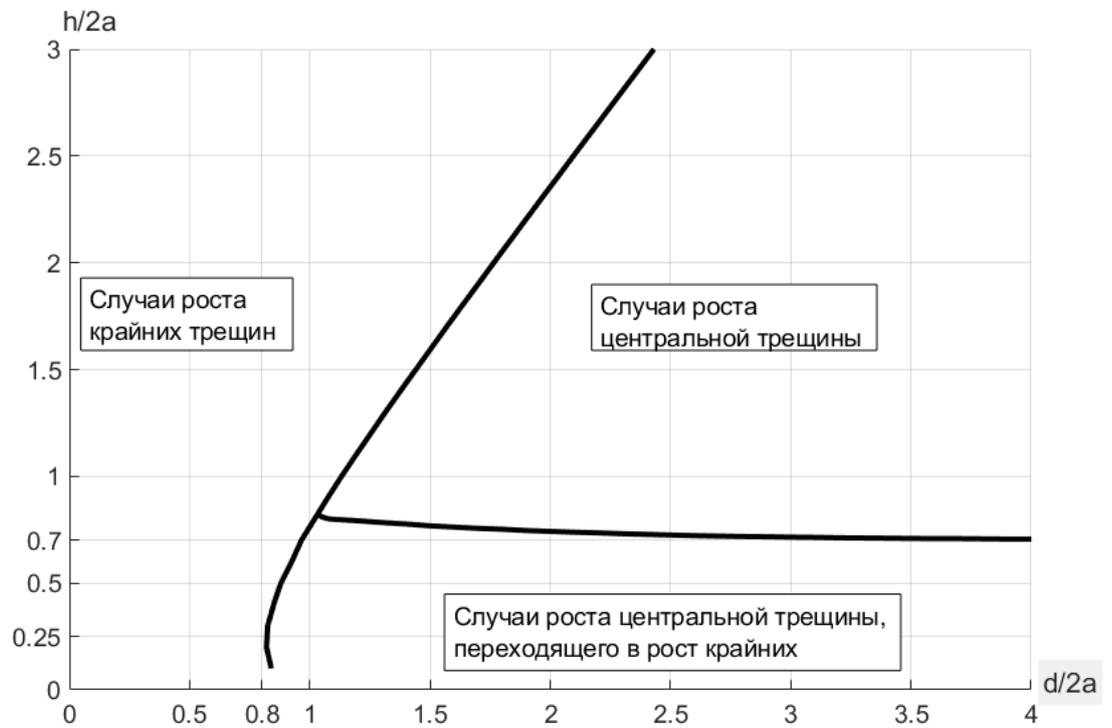


Рисунок 2.13. Распределение различных сценариев роста в зависимости от расстояний h и d между трещинами в случае одноосного растяжения.

Кривая, отделяющая случаи неограниченного роста центральной трещины от случаев, когда рост центральной трещины переходит в рост крайних, имеет горизонтальную асимптоту $h/2a = 0.7$. Из этого можно сделать вывод, что, во-первых, существует критическое расстояние между плоскостями параллельных трещин, при котором большая трещина не сможет расти в сторону меньшей, не активировав её рост в противоположную сторону. Во-вторых, это расстояние практически не зависит от длины большей трещины и приблизительно равно 0.7 длины меньшей трещины.

Для случая всестороннего растяжения также имеют место все три сценария взаимодействия трещин (рис. 2.14), но изменения траектории трещин более выраженные. Также есть некоторое отличие и в зависимости поведения трещин от d и h (рис.2.15). Так, для малых d переходный режим взаимодействия осуществляется при больших h . Это может быть обусловлено тем, что при всестороннем растяжении трещины более чувствительны к изменению направления. Кроме того, критическое значение h к которому стремится кривая при увеличении d несколько отличается от одноосного случая и составляет $h = 0.75$. Кривая, отделяющая рост крайних трещин от роста центральных, в точности совпадает с таковой с рис.2.13.

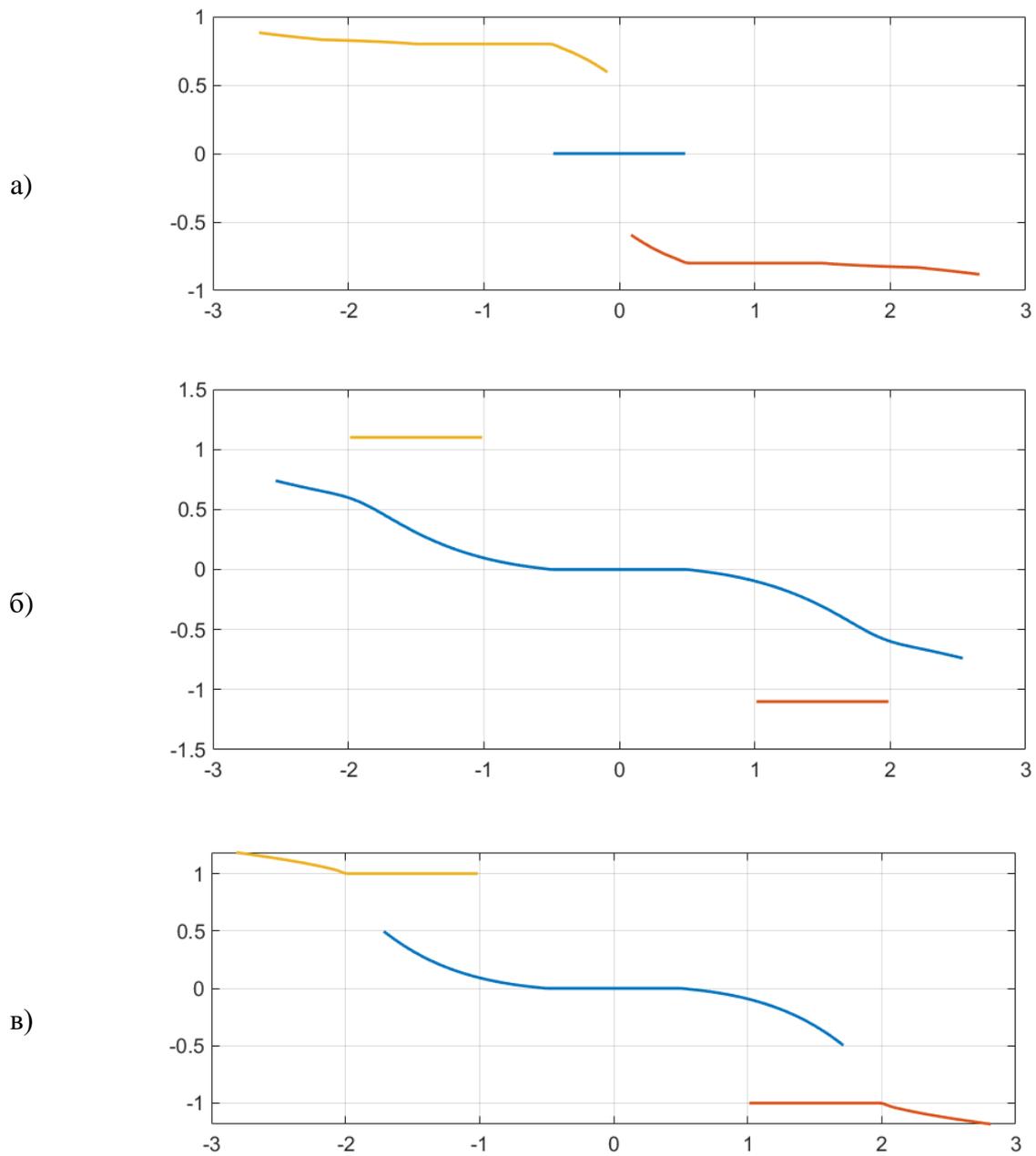


Рисунок 2.14. Траектории для различных сценариев взаимодействия в случае всестороннего растяжения. (а) – рост крайних трещин, (б) – рост центральной трещины, (в) – рост центральной трещины, переходящий в рост краевых.

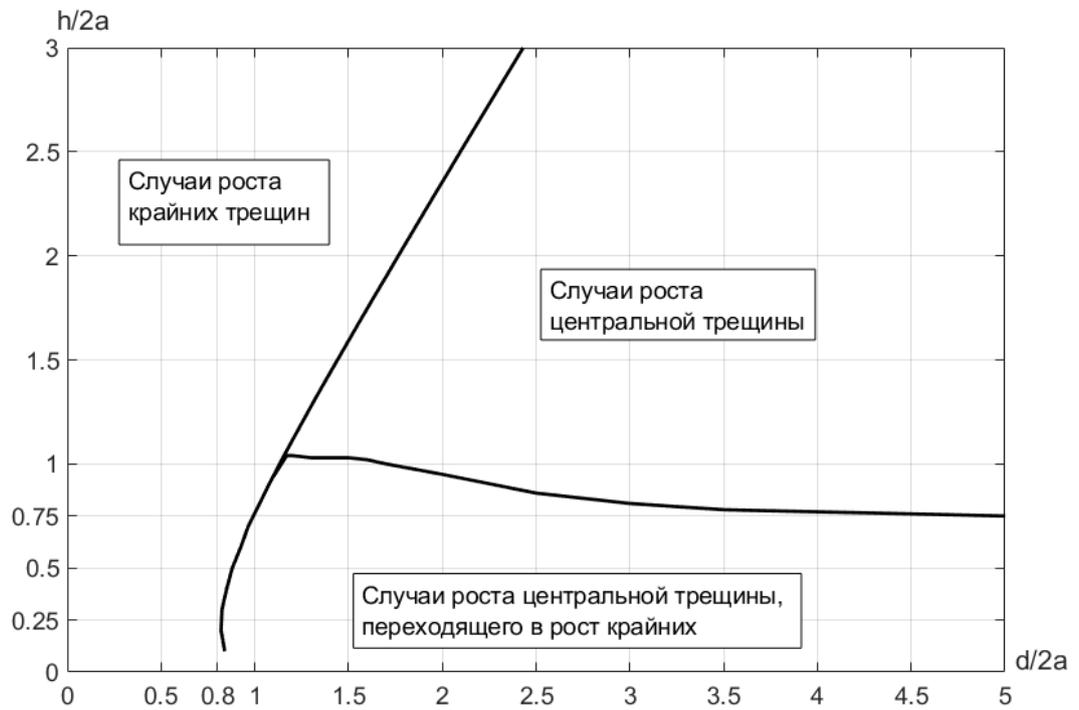


Рисунок 2.15. Распределение различных сценариев роста в зависимости от расстояний h и d между трещинами в случае всестороннего растяжения.

Одной из проблем приведенных выше постановок является то, что рост трещин в под действием внешних нагрузок в реальных условиях может являться неустойчивым, из-за чего могут возникать динамические эффекты, которые в данной модели не учитываются. Рассмотрим следующую постановку: пусть при начальном расположении трещин, аналогичном предыдущим случаям, к берегам центральной трещины приложена сосредоточенная сила, а напряжения на бесконечности равны нулю (рис.2.16). В таких условиях рост трещин будет устойчивым, поскольку при увеличении длины трещины при неизменном значении f значение G будет убывать. Аналогично предыдущим случаям, на каждом шаге значение f подбирается таким образом, чтобы наибольшее значение G среди всех кончиков трещин совпадало с G_{cr} .

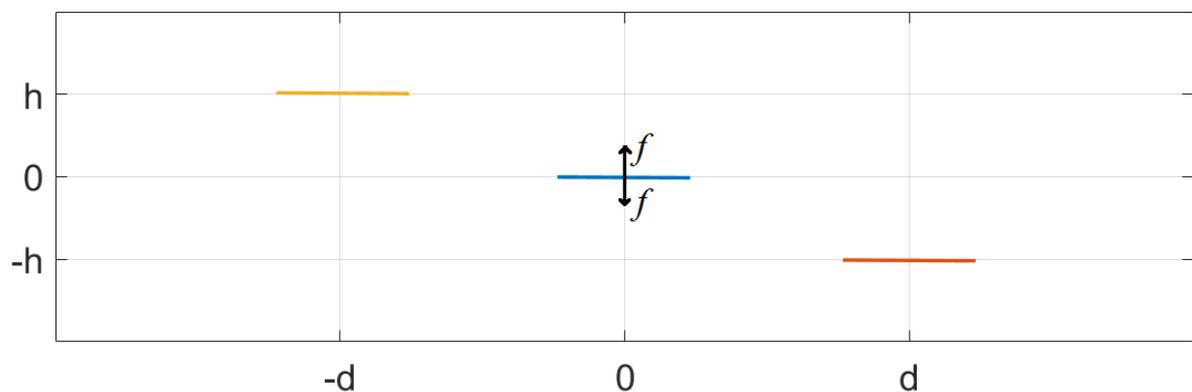


Рисунок 2.16. Схема расположения трещин и приложенных сил

Также такая постановка может дать представление о том, как трещина под действием приложенных к берегам сил (например, под действием внутреннего давления) ведет себя при наличии в среде других трещин.

Для данной постановки, в отличие от предыдущих, имеют место всего два сценария взаимодействия растущих трещин:

- неограниченный рост центральной трещины, при котором крайние трещины не растут, а после некоторого момента и вовсе закрываются.
- рост центральной трещины, переходящий в рост крайних трещин, после чего может следовать объединение трещин.

На рис. 2.17 показано распределение сценариев в зависимости от начального расположения трещин, а именно от параметров d и h . Для больших значений d граница между двумя различными сценариями выходит на горизонтальную асимптоту $\frac{h}{2a} \approx 0.75$. Случай роста крайних трещин в данной постановке не реализуется и при уменьшении d вместо этого происходит рост центральной трещины. Переход к росту крайних трещин при этом реализуется при меньших значениях h . Это обусловлено тем, что при малых сдвигах d крайние трещины оказываются частично закрытыми, что уменьшает их эффективную длину.

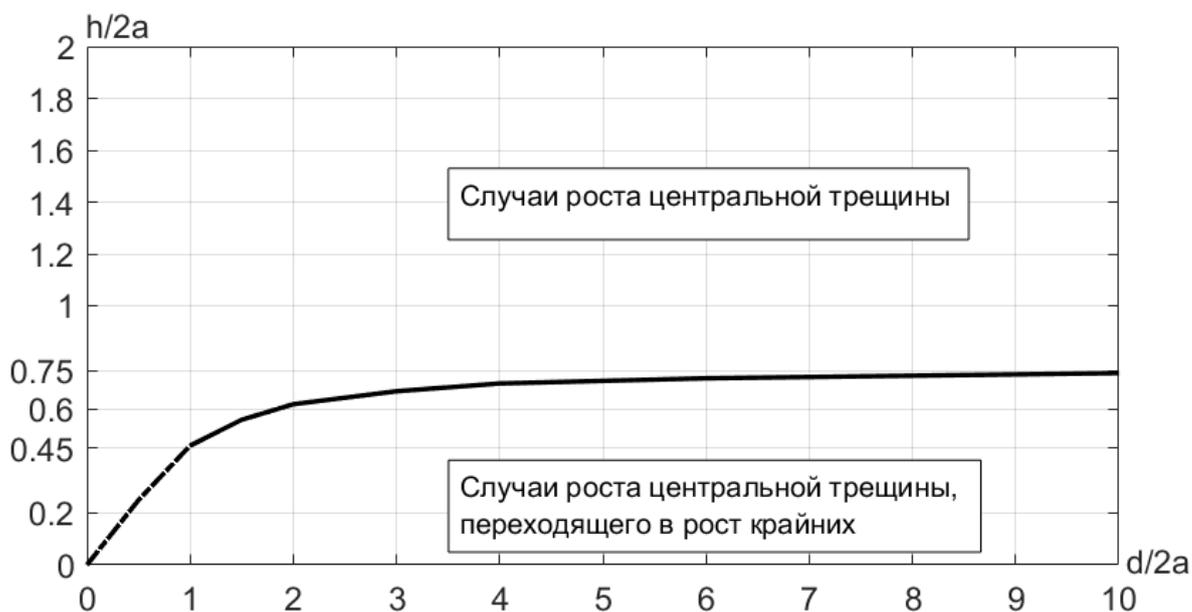


Рисунок 2.17. Распределение различных сценариев роста в зависимости от расстояний h и d между трещинами в случае всестороннего растяжения.

Выводы главы 2:

С использованием разработанного программного кода была исследована задача взаимодействия растущих трещин на примере изначально параллельных трещин. Получены следующие оценки взаимного влияния растущих трещин друг на друга:

Изменение траекторий растущих трещин под действием других трещин в целом согласуется с результатами, полученными в главе 1, и может быть разделено на несколько этапов в зависимости от расстояния h между плоскостями трещин и отношения P между длиной пересечения проекций трещин на направление их изначального роста и длиной трещины. Для $P < 0$ и h меньшей или близкой к полудлине трещины имеет место отклонение трещин друг от друга при росте навстречу. Для малых $P \geq 0$ имеет место сближение траекторий трещин. По мере увеличения P это сближение траекторий становится менее выраженным. При $P > 0.5$ оно постепенно меняется на отклонение трещин друг от друга, достигающее наибольшего значения при P близком к единице, то есть при полном пересечении проекций трещин.

Взаимное влияние трещин на напряжения в кончиках друг друга и, соответственно, на возможность дальнейшего роста также согласуется с результатами, полученными в предыдущей главе. Так, до пересечения ($P < 0$) трещины существенно облегчают друг другу рост навстречу и несколько облегчают рост в противоположных направлениях, причем это влияние увеличивается при уменьшении h . После пересечения проекций ($0 \leq P < 0.2$) коэффициент влияния на внутренних (направленных навстречу друг другу) кончиках трещин достигает максимума после чего начинает убывать. На внешних (направленных в противоположные стороны) кончиках он, наоборот, возрастает и значения для внешних и внутренних кончиков сравниваются. При дальнейшем пересечении ($0.2 \leq P < 0.5$) коэффициент на внутренних кончиках резко падает, в то время как на внешних – растет. При дальнейшем росте пересечения проекций убывать и значение коэффициента влияния на внешних кончиках.

При достаточно большом значении P и при h превосходящем значение сдвига между трещинами коэффициент влияния на внешних кончиках становится меньше единицы. Только для такого расположения система параллельных трещин требует приложения больших нагрузок, чем одиночная трещина. В остальных случаях хотя бы один из кончиков трещин данной системы будет ослаблен (то есть потребует меньших нагрузок для роста) в сравнении с одиночной трещиной той же длины.

В случае взаимодействия параллельных трещин различной длины возможны два качественно отличающихся сценария взаимодействия, в зависимости от расстояния между плоскостями трещин. В случае если расстояние h больше критического, большая трещина продолжит рост мимо меньшей, меньшая может даже не активироваться. В случае, если расстояние h будет меньше критического, напряжения во внешнем (удаленном от другой трещины) кончике внешней трещины превзойдут таковые для большей трещины и меньшая трещина будет расти по направлению от большей. Напряжения же во внутреннем (ближайшем к другой трещине) кончике большей трещины будут по мере дальнейшего роста уменьшаться за счет влияния другой трещины, вплоть до возможной остановки роста.

Данное критическое расстояние h_{cr} для случая одноосного растяжения практически не зависит от длины большей трещины и приблизительно равно $0.7 \cdot 2a$, где $2a$ – длина меньшей трещины. Для случая двухосного растяжения оно зависит от соотношения длин трещин и меняется от $1 \cdot 2a$ при трещинах сравнимой длины, до $0.75 \cdot 2a$ в случае, если длина большей трещины в 4 и более раза превосходит длину меньшей. Для случая роста центральной трещины под действием приложенных к её берегам нагрузок критическое расстояние h_{cr} также стремится к значению $h_{cr} = 0.75 \cdot 2a$ при увеличении отношения между длинами трещин.

Данные оценки позволяют сформулировать критерии необходимости применения моделей криволинейного роста для задач взаимодействия трещин: При взаимодействии параллельных трещин криволинейность их роста необходимо учитывать в случае, если расстояние между ними составляет 0.75 длины меньшей трещины или менее. В таких условиях нельзя пренебрегать как взаимным влиянием трещин на рост друг друга, так и влиянием криволинейности роста трещин на их взаимодействие.

Данный критерий можно обобщить и на не параллельные трещины, впрочем, в случае непараллельных трещин следует иметь в виду, что рост одной из них в любом случае будет криволинейным, так что использование моделей криволинейного роста при их взаимодействии может быть оправдано и на больших расстояниях.

Глава 3: моделирование нелинейного взаимодействия трещин при наличии сжимающих нагрузок

В некоторых случаях задача о нагружении тела, ослабленного наличием трещин, может оказаться нелинейной даже в случае, когда напряжения или деформации не выходят за пределы линейной механики. Такое происходит, когда берега каких-либо трещин смыкаются под действием приложенных нагрузок. Например, при взаимодействии трещины гидроразрыва с имеющимся в среде природным разломом, поскольку природный разлом изначально закрыт под действием сжимающих напряжений в среде и может, как открыться, так и закрыться вновь при наличии рядом трещины гидроразрыва.

В таких условиях линейные методы, к которым относится и используемый в данной работе метод разрывных смещений, могут давать физически некорректный результат, заключающийся в отрицательном раскрытии трещин, то есть перехлесте берегов друг сквозь друга. Причиной тому является изменение граничных условий в случае соприкосновения берегов. Так вместо граничного условия (1.4) описывающего свободные берега трещины.

$$\sigma_n = 0, \sigma_s = 0$$

Должно быть поставлено условие нулевого нормального разрыва смещений между берегами.

$$D_n = 0, \text{ при } \sigma_n \geq 0, \quad (3.1)$$

а также условие на касательный разрыв. В качестве данного условия можно использовать закон сухого трения. То есть в случае если касательные напряжения на стенках не превосходят трения, обеспечиваемого нормальными напряжениями, ставится условие прилипания:

$$D_s = D_s^0 = const, \quad |\sigma_s| \leq k_{тр} \sigma_n \quad (3.2)$$

В случае если касательные напряжения превосходят трение, условие на берегах принимает следующий вид, где $k_{тр}$ – коэффициент сухого трения, а знак перед ним противоположен изменению D_s :

$$\sigma_s = \pm k_{тр} \sigma_n, \quad D_s \neq D_s^0 \quad (3.3)$$

Таким образом, в зависимости от напряжений, приложенных к берегам трещины, и её раскрытия можно разделить элементы трещины на три типа: открытые и закрытые, которые в свою очередь могут быть неподвижными или скользящими. Отметим, что «скользящими» такие элементы называются условно, поскольку задача квазистатическая и движение берегов не рассматривается. В нашем случае это обозначает только то, что касательный разрыв смещения

может изменяться на шаге вычислений, а к берегам прилагаются касательные нагрузки, ограничивающие это изменение.

Одной из существенных сложностей данного рода задач является то, что для корректного решения нужно сначала определить на каких граничных элементах ставятся те или иные условия, что можно сделать только корректно определив раскрытия и напряжения на них.

Для решения данной задачи используется метод последовательных приближений [137]. В нем используется метод простой итерации, когда для начального распределения элементов по типам решается упругая задача, после чего определяется, какие элементы должны сменить тип, после чего задача решается снова с учетом полученных изменений. Задача считается решенной, когда на очередном шаге итерации ни один из элементов не сменил тип.

У такого способа есть один существенный недостаток: на каждом шаге итерации из-за изменения элементов приходится пересчитывать матрицу коэффициентов и заново решать уравнение (1.8) для всех элементов системы трещин.

$$\begin{pmatrix} A_{nn} & A_{sn} \\ A_{ns} & A_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_n \\ \mathbf{D}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_n \\ \boldsymbol{\sigma}_s \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Здесь $\mathbf{D}_n = \begin{pmatrix} D_n^1 \\ \vdots \\ D_n^N \end{pmatrix}$, $\mathbf{D}_s = \begin{pmatrix} D_s^1 \\ \vdots \\ D_s^N \end{pmatrix}$ – нормальные и касательные разрывы смещений на элементах, $\boldsymbol{\sigma}_n = \begin{pmatrix} \sigma_n^1 \\ \vdots \\ \sigma_n^N \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\sigma}_s = \begin{pmatrix} \sigma_s^1 \\ \vdots \\ \sigma_s^N \end{pmatrix}$ – нормальные и касательные напряжения, приложенные к берегам трещин. N – число элементов, а $A_{nn}, A_{sn}, A_{ns}, A_{ss}$ – матрицы коэффициентов, вместе образующие матрицу A .

Таким образом, вычислительная сложность каждого шага возрастает пропорционально количеству итераций в сравнении с линейной задачей, поскольку каждый пересчет системы (3.4) требует решения СЛАУ из порядка $2N$ уравнений с плотной матрицей.

3.1. Метод моделирования нелинейных задач со смыканием берегов трещин

Для решения данной задачи без необходимости пересчета всей матрицы коэффициентов на каждом шаге воспользуемся следующим методом.

Рассмотрим нахождение раскрытий трещины с помощью метода разрывных смещений. Решение данной задачи выглядит как решение системы (3.4). Его можно получить, найдя матрицу, обратную A и подставив в выражение.

$$A^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_n \\ \boldsymbol{\sigma}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_n \\ \mathbf{D}_s \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Элементами, которые необходимо проверить будут все те, для которых значение $D_n^i < 0$. Эти элементы трещин являются закрытыми. Обозначим раскрытия и напряжения, относящиеся к закрытым элементам, как D^{cl} и σ^{cl} , соответственно. Для открытых – D^{op} и σ^{op} . Для закрытых элементов необходимо обеспечить раскрытие $D_n^{cl} = 0$, а касательный разрыв смещений задается равным либо начальному значению, если таковое имеется, либо полученному при расчете значению $D_s^{cl} = D_s^0$. Далее, чтобы проверить, являются ли какие-либо элементы из закрытых скользящими, необходимо найти значение напряжений на этих элементах. В других итерационных методах для этого пришлось бы пересчитывать матрицу A^{-1} для нового набора открытых элементов. Вместо этого воспользуемся другим способом, а именно рассмотрим, какие именно напряжения нам нужно обеспечить на берегах закрытых трещин, чтобы удовлетворить условиям на закрытых элементах. Уравнение (3.5) в таком случае примет следующий вид.

$$A^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_n^{cl} + \Delta\sigma_n^{cl} \\ \sigma_n^{op} \\ \sigma_s^{cl} + \Delta\sigma_s^{cl} \\ \sigma_s^{op} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ D_n^{op} + \Delta D_n^{op} \\ D_s^0 \\ D_s^{op} + \Delta D_s^{op} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Или, с учетом имеющегося решения (3.5)

$$A^{-1} \begin{pmatrix} \Delta\sigma_n^{cl} \\ 0 \\ \Delta\sigma_s^{cl} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_n^{cl} \\ \Delta D_n^{op} \\ 0 \\ \Delta D_s^{op} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

где необходимо выяснить значения $\Delta\sigma_n^{cl}$ и $\Delta\sigma_s^{cl}$, после чего значения ΔD_n^{op} и ΔD_s^{op} дадут нам изменения в разрывах смещений открытых элементов, необходимые для удовлетворения граничных условий. Для решения этой системы возьмем подматрицу матрицы A^{-1} . Пусть закрытыми являются первые k элементов.

$$B = \begin{pmatrix} B_{nn} & B_{sn} \\ B_{ns} & B_{ss} \end{pmatrix}, \text{ где } B_{nn}^{ij} = A^{-1ij}_{nn}, B_{sn}^{ij} = A^{-1ij}_{sn}, B_{ns}^{ij} = A^{-1ij}_{ns}, B_{ss}^{ij} = A^{-1ij}_{ss}, \text{ для } i, j = 1, \dots, k$$

Взяв обратную к ней B^{-1} , получим

$$B^{-1} \begin{pmatrix} -D_n^{cl} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\sigma_n^{cl} \\ \Delta\sigma_s^{cl} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Полученные напряжения $\Delta\sigma$ обозначают напряжения, приложенные к сомкнувшимся берегам трещин, обеспечивающие неподвижность этих берегов друг относительно друга и нулевое раскрытие. Физически эти напряжения обеспечиваются за счет давления берегов трещин друг на друга и за счет силы трения между берегами. Следовательно, значение $\Delta\sigma_n^i$

должно быть неотрицательным, а значение $|\Delta\sigma_s^i|$ не может превосходить значения $k_{\text{тр}}\Delta\sigma_n^i$. Из этого получаем следующие условия для нашего итерационного процесса:

$$\Delta\sigma_n^i \geq 0 \quad (3.9)$$

$$|\Delta\sigma_s^i| \leq k_{\text{тр}}\Delta\sigma_n^i \quad (3.10)$$

Для закрытых элементов должно быть выполнено условие (3.9), иначе этот элемент не закрыт, и необходимо его исключить из набора закрытых элементов.

Если не выполнено условие (3.10), значит силы трения между стенками недостаточно, чтобы обеспечить неизменность значения D_s , следовательно, этот элемент можно отнести к скользящим.

Для первого случая проблема решается исключением элемента из набора закрытых, и пересчетом матрицы B для другого набора.

Рассмотрим второй случай, когда необходимо получить новое значение ΔD_s^i при граничном условии (3.3), когда берега могут сдвинуться, но к ним приложена сила трения.

$$\Delta\sigma_s^i = \pm k_{\text{тр}}\Delta\sigma_n^i \quad (3.11)$$

Допустим, что из набора закрытых элементов под это условие попадает первый. Тогда уравнение (3.7), с учетом изменившихся условий, будет выглядеть так

$$B \begin{pmatrix} 1 & 0 & \pm k_{\text{тр}} & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\sigma_n^1 \\ \vdots \\ \Delta\sigma_n^k \\ \Delta\sigma_s^1 \\ \vdots \\ \Delta\sigma_s^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_n^1 \\ \vdots \\ -D_n^k \\ \Delta D_s^1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

где знак перед $k_{\text{тр}}$ выбирается так, чтобы совпадать со знаком $\Delta\sigma_s^1$, полученного на предыдущем шаге. В уравнении (3.12) неизвестными являются ΔD_s^1 , все $\Delta\sigma_n^i$ и все $\Delta\sigma_s^i$ кроме $\Delta\sigma_s^1$. Перемножив матрицы в левой части (3.12), получим:

$$\begin{pmatrix} B_{nn}^{11} \pm k_{\text{тр}}B_{ns}^{11} & & B_{nn}^{1k} & 0 & & B_{nn}^{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{nn}^{k1} \pm k_{\text{тр}}B_{ns}^{k1} & & B_{nn}^{kk} & 0 & & B_{ns}^{kk} \\ B_{sn}^{11} \pm k_{\text{тр}}B_{ss}^{11} & & B_{sn}^{1k} & 0 & & B_{ss}^{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{sn}^{k1} \pm k_{\text{тр}}B_{ss}^{k1} & & B_{sn}^{kk} & 0 & & B_{ss}^{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\sigma_n^1 \\ \vdots \\ \Delta\sigma_n^k \\ \Delta\sigma_s^1 \\ \vdots \\ \Delta\sigma_s^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_n^1 \\ \vdots \\ -D_n^k \\ \Delta D_s^1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Перенеся все неизвестные в одну сторону, уравнение (3.13) можно привести к виду:

$$\begin{pmatrix} B_{nn}^{11} \pm k_{\text{тр}} B_{ns}^{11} & & B_{nn}^{1k} & 0 & & B_{nn}^{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{nn}^{k1} \pm k_{\text{тр}} B_{ns}^{k1} & & B_{nn}^{kk} & 0 & & B_{ns}^{kk} \\ B_{sn}^{11} \pm k_{\text{тр}} B_{ss}^{11} & & B_{sn}^{1k} & -1 & & B_{ss}^{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{sn}^{k1} \pm k_{\text{тр}} B_{ss}^{k1} & & B_{sn}^{kk} & 0 & & B_{ss}^{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\sigma_n^1 \\ \vdots \\ \Delta\sigma_n^k \\ \Delta D_s^1 \\ \vdots \\ \Delta\sigma_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_n^1 \\ \vdots \\ -D_n^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Решение данной системы позволяет найти как напряжения $\Delta\sigma$ на закрытых элементах, так и сдвиги ΔD_s на скользящих. В случае если скользящих элементов больше одного решение строится аналогично. Таким образом, получаем новые значения ΔD_s^{cl} , для которых условие (3.10) выполнено. После этого элементы получают новые значения $D_s^{cl} = D_s^0 + \Delta D_s^{cl}$ и перестают быть скользящими. Для уменьшения количества итераций можно использовать различные значения $k_{\text{тр}}$: при определении условия (3.10) использовать коэффициент трения покоя, а в условии (3.11) и расчете (3.14) использовать коэффициент трения скольжения. В таком случае элементы, которые перестали быть скользящими, не станут ими вновь при минимальном изменении $\Delta\sigma_s^i$ или $\Delta\sigma_n^i$.

Шаг итерации для определения закрывшихся или открывшихся элементов требует решения системы из k уравнений, где k – число закрытых элементов. Следовательно, данный способ будет существенно упрощать расчет, если $k \ll N$. С другой стороны, можно уменьшить значение k , исключив часть закрытых элементов, для которых значение $\Delta\sigma_n$ достаточно велико и значение $|\Delta\sigma_s|$ существенно меньше $k_{\text{тр}}\Delta\sigma_n$. Такие элементы можно считать неактивными, и не включать в систему A , пока напряжения в этих элементах, вызванные другими элементами, не превзойдут пороговых значений, для которых нарушатся условия (3.9) или (3.10). Общая схема алгоритма решения представлена на рис.3.1.

Следует отметить, что помимо предложенного метода решения подобной задачи, существуют и другие. Проблема нелинейного поведения системы, когда граничные условия представлены не уравнениями, а неравенствами, рассмотрена в работах, посвященных задачам о системах трещин под динамическими нагрузками [183,184], а также в задачах дискретного контакта [185,186]. Основными используемыми методами решения таких задач являются вариационные методы [187-189] с использованием методов конечных [190] или граничных [191] элементов. Обзор о методах решения данных задач представлен в работе [192].

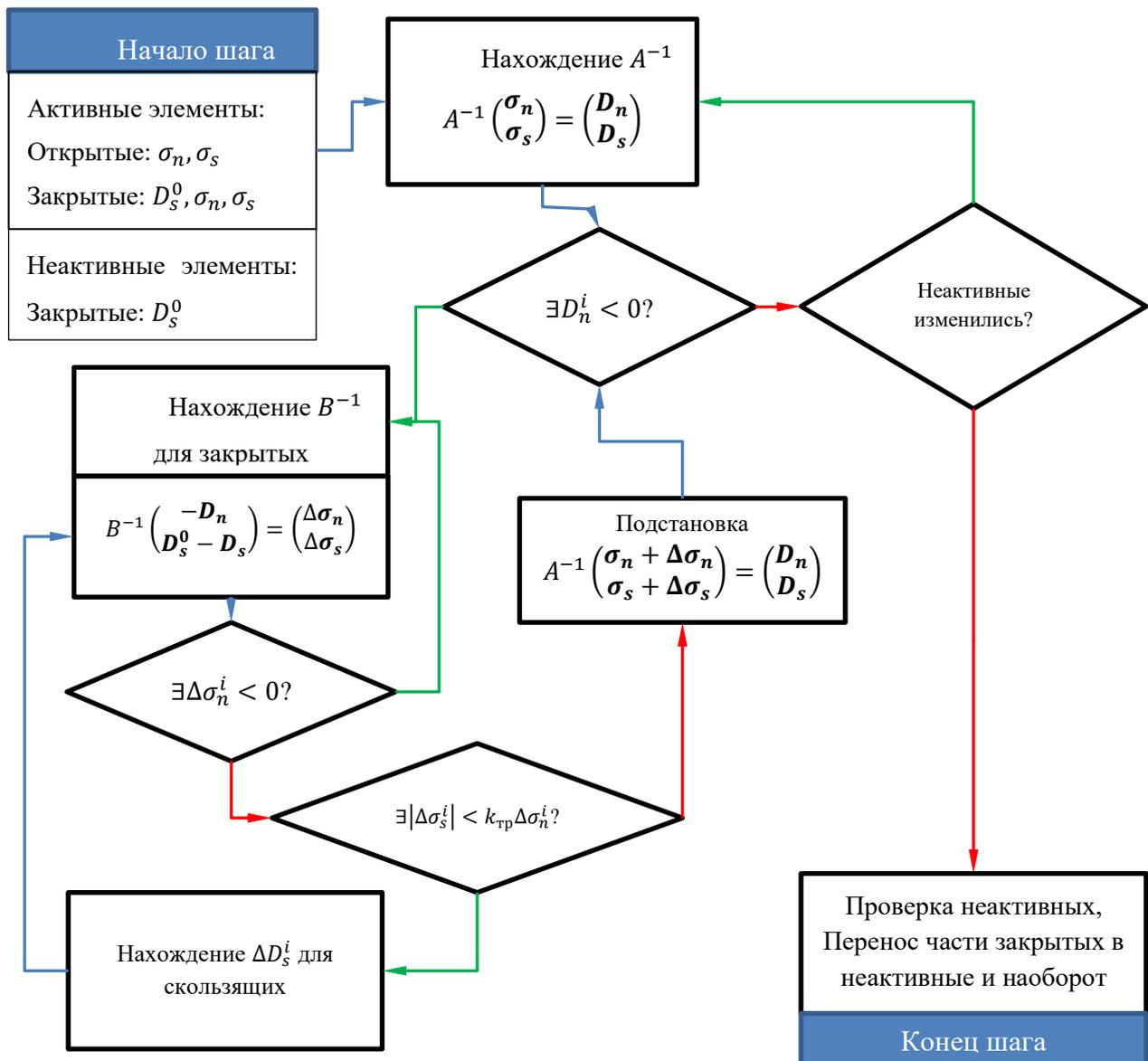


Рисунок 3.1. Схема алгоритма решения нелинейной задачи. Зеленые стрелки обозначают выполненное условие, красные – не выполненное.

Согласно этому алгоритму была написана программа на языке C++ для моделирования роста трещин в различных условиях нагружения. Полученные результаты представлены далее.

3.2 Результаты расчетов

3.2.1. Активация закрытой трещины на различном расстоянии от активной

Для начала рассмотрим следующую задачу: пусть в плоскости, находящейся под действием двухосного сжатия, находятся две параллельные трещины, длина одной из которых много больше другой (рис 3.2). К берегам меньшей трещины длины l приложено равномерно распределенное давление p . Для удобства будем называть трещину под внутренним давлением активной, а закрытую трещину будем называть пассивной или разломом.

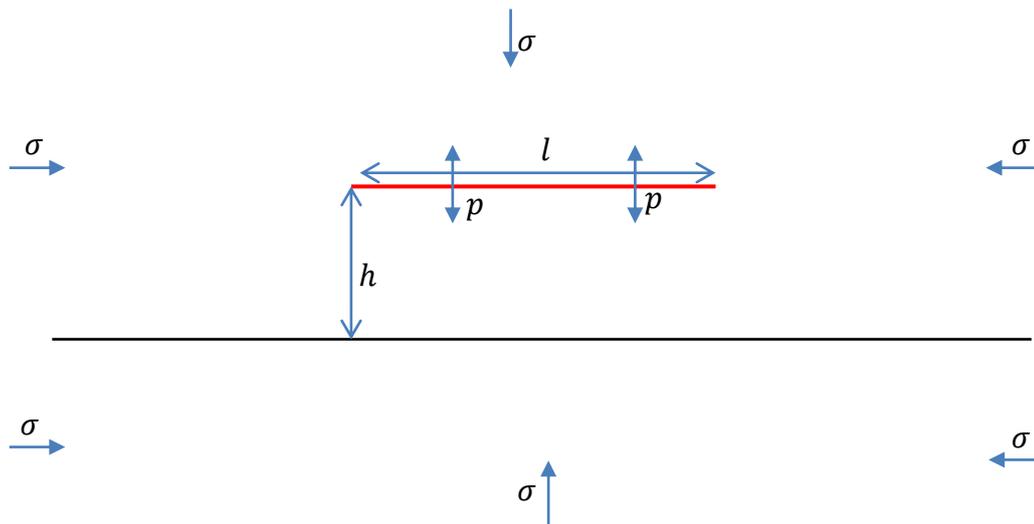


Рисунок 3.2. Схема расположения трещин. Сверху – активная трещина под внутренним давлением p . Снизу – пассивная трещина, изначально закрыта под действием внешних нагрузок σ .

Рассмотрим различные значения p при выбранном значении $l = l_0$. Для начала рассмотрим три значения: $p = 2\sigma$, $p = 2.5\sigma$ и $p = 3\sigma$. В таком случае избыточные давления $p_{изб} = p - \sigma$ в трещине варьируются в диапазоне от σ до 2σ . На рис. 3.3 представлены результаты расчетов. На каждом рисунке красным цветом отмечены открытые участки трещин ($D_n > 0$), синим цветом – участки закрытые, но со сдвигом берегов ($D_n = 0, D_s \neq 0$). Пунктирной линией отмечены неактивные участки разлома ($D_n = 0, D_s = 0$). Каждая горизонтальная линия представляет собой результат отдельного расчета для соответствующего значения h . Система координат обезразмерена на длину трещины l_0 . Значение коэффициента трения $k_{тр} = 0.3$.

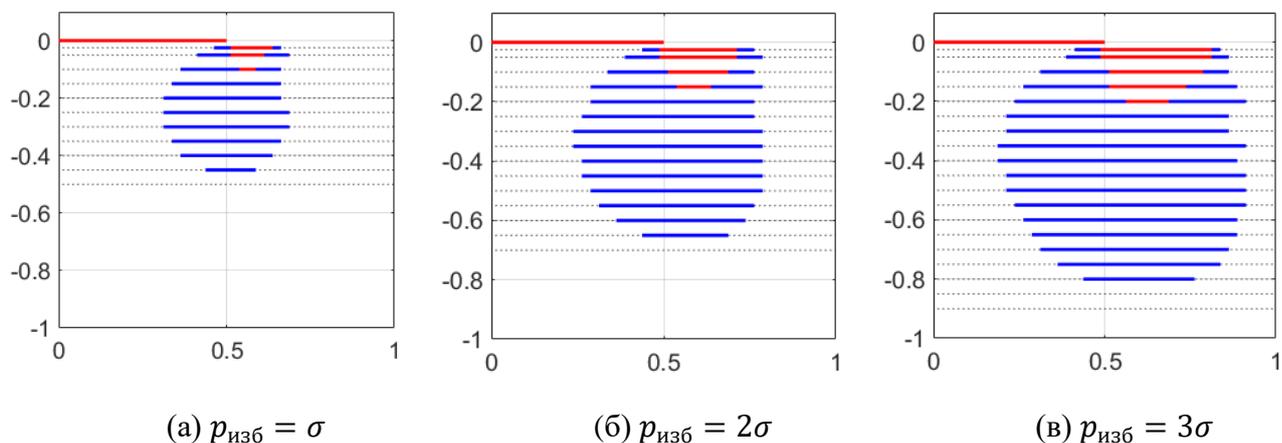


Рисунок 3.3. Области открытия и активации закрытых трещин при различных значениях давления в активной трещине длины l_0 . Красный – открытые области. Синий – закрытые, со смещением берегов. Пунктир – закрытые области.

Область влияния активной трещины можно условно разделить на две части. Первой из них является небольшой сектор перед самым кончиком, где растягивающие напряжения, продуцируемые трещиной достаточно велики, чтобы преодолеть сжимающие напряжения среды и открыть часть закрытой трещины. Второй частью является более крупная цилиндрическая область, касающаяся кончика активной трещины и протяженная перпендикулярно ей, в которой касательные напряжения достаточно велики, чтобы преодолеть трение между берегами закрытой трещины и вызвать их сдвиг. Следует отметить, что в обоих случаях имеет место влияние активизированных областей разлома на соседние: открытые вызывают дополнительные растягивающие напряжения, проскальзывающие – дополнительные касательные.

При взаимодействии трещин гидроразрыва с природными разломами, которое в упрощенном виде моделирует эта задача, давление в активной трещине падает по мере её роста. Если не рассматривать распределение давления в трещине, зависящее от динамики вязкого течения жидкости, можно сказать, что на каждом шаге роста трещины давление в ней таково, чтобы выполнять условие

$$K_I = K_{IC}$$

Или, в случае другого критерия роста:

$$G = G_C$$

Рассмотрим в таких условиях влияние изменения длины активной трещины на активизацию пассивной. Будем варьировать длину активной трещины, а давление в трещине выбирать таким образом, чтобы значение G оставалось таким же, как в соответствующем случае предыдущего расчета. Теоретическое значение G для одиночной трещины под постоянным давлением равно:

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 = \frac{1 - \nu^2}{E} \pi l (p - \sigma)^2$$

Из этого следует, что $(p - \sigma)^2 l = (p_0 - \sigma)^2 l_0$ и, соответственно,

$$p = \sigma + (p_0 - \sigma) \sqrt{\frac{l_0}{l}}$$

Или

$$p_{\text{изб}} = p_{\text{изб}}^0 \sqrt{l_0/l}.$$

Рассмотрим два случая, с $l = 2.25 \cdot l_0$ и $l = 4 \cdot l_0$. На рис 3.4 и 3.5 изображены результаты расчетов с соответствующими $p_{\text{изб}}$.

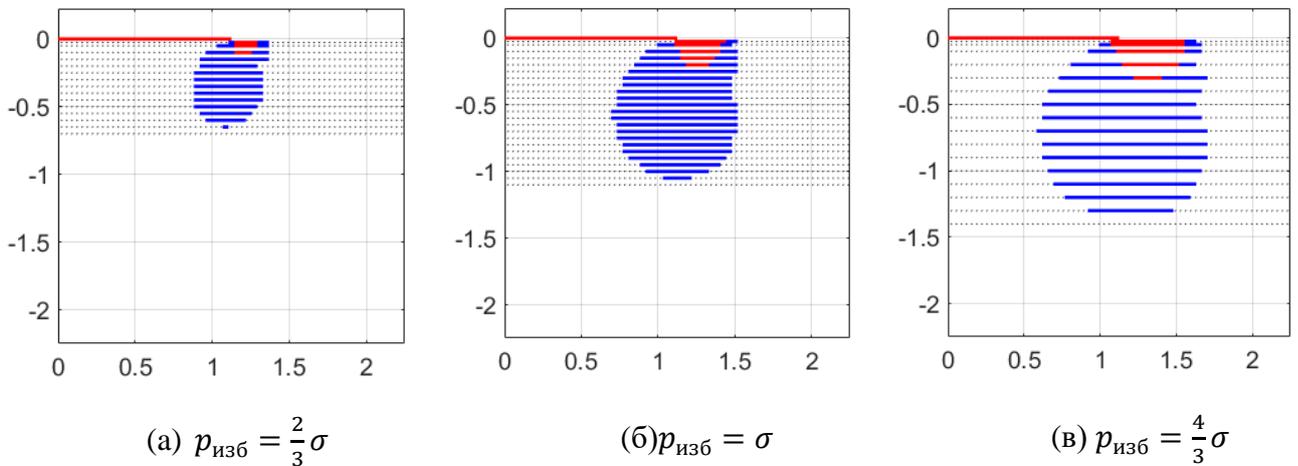


Рисунок 3.4. Области открытия и активации закрытых трещин при различных значениях давления в активной трещине длины $2.25 \cdot l_0$. Красный – открытые области. Синий – закрытые, со смещением берегов. Пунктир – закрытые области.

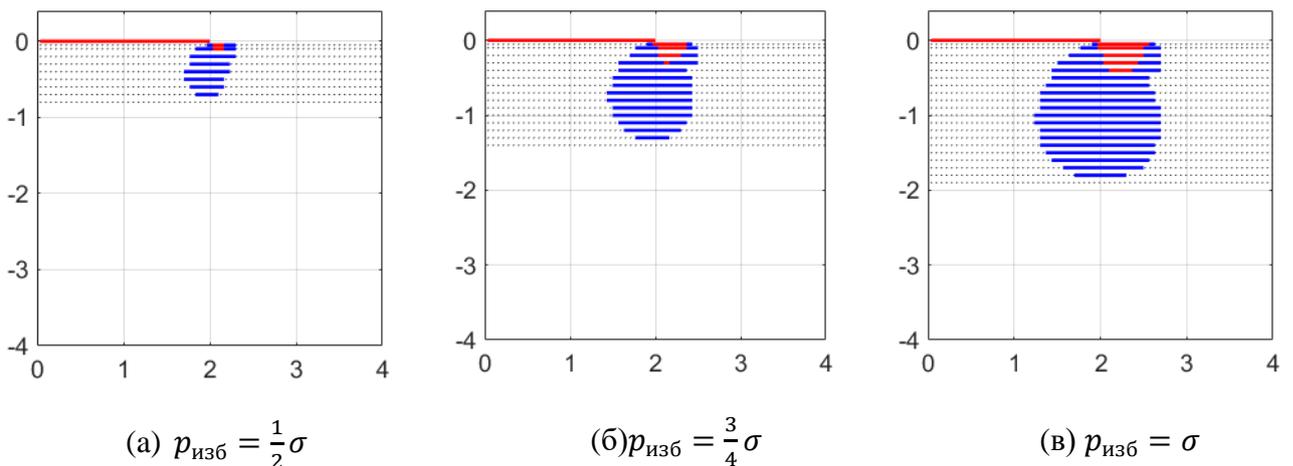


Рисунок 3.5. Области открытия и активации закрытых трещин при различных значениях давления в активной трещине длины $4 \cdot l_0$. Красный – открытые области. Синий – закрытые, со смещением берегов. Пунктир – закрытые области.

Сравнение рис. 3.3-3.5 показывает, что расстояние, на котором активная трещина активирует участки пассивной, увеличивается по мере удлинения активной трещины

пропорционально корню из её длины. Сравнение рисунков 3.3(а), 3.4(б), 3.5(в) показывает, что при одинаковом давлении в активной трещине, увеличение её длины пропорционально увеличивает расстояние, на котором она активизирует участки пассивной трещины и их протяженность.

3.2.2. Влияние пассивной трещины на напряжения в активной

Следует отметить, что кроме влияния активной трещины на пассивную, имеет место и ответное влияние активированных участков пассивной трещины на активную. Для его оценки используем коэффициент влияния G/G_t , где G_t – теоретическое значение для одиночной трещины данной длины под данным давлением, а G – полученное численно значение с учетом влияния открывшегося участка трещины. На рис. 3.6 представлена зависимость G/G_t от расстояния h

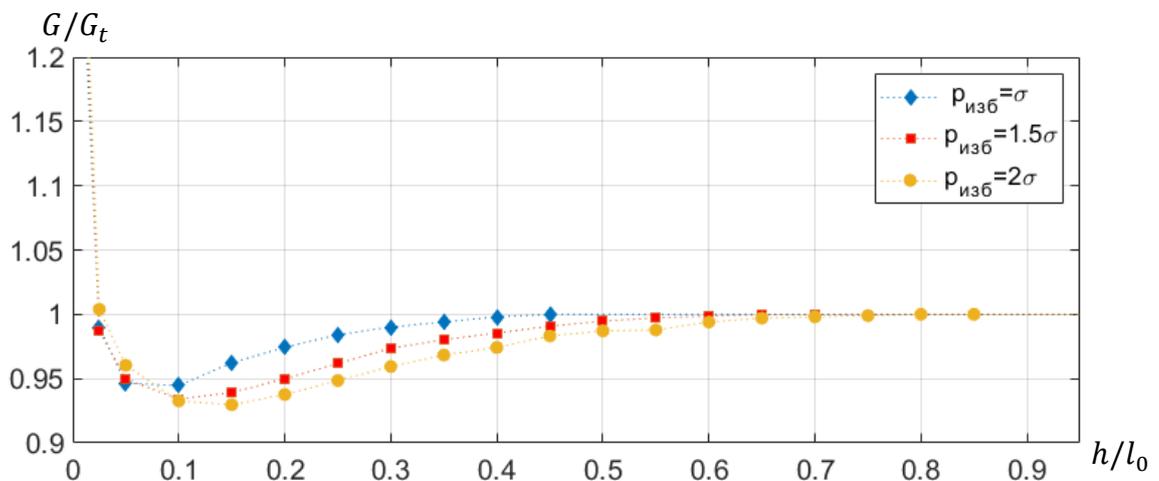


Рисунок 3.6. Зависимость коэффициента влияния от расстояния между активной и пассивной трещиной.

С учетом предыдущих выводов о расстоянии, на котором активная трещина активизирует участки пассивной, введем следующую безразмерную величину:

$$h^* = \frac{h \sigma}{l p_{изб}}$$

В случае если избыточное давление неизвестно и определяется из критериев распространения, h^* можно выразить через трещиностойкость породы K_{IC}

$$h^* = h \cdot \frac{\sigma \sqrt{\pi}}{K_{IC} \sqrt{l}}$$

На рис. 3.7. показано распределение коэффициента влияния $G/G_t(h^*)$ для различных длин l и давлений $p_{изб}$ активных трещин. При таком обезразмеривании все кривые ведут себя одинаковым образом, возрастают при h^* стремящемся к 0, имеют минимум при $h^* \cong 0,07$, где

падение G может достигать 5%. При дальнейшем увеличении h^* коэффициент влияния возрастает обратно до единицы при $h^* \cong 0.4$.

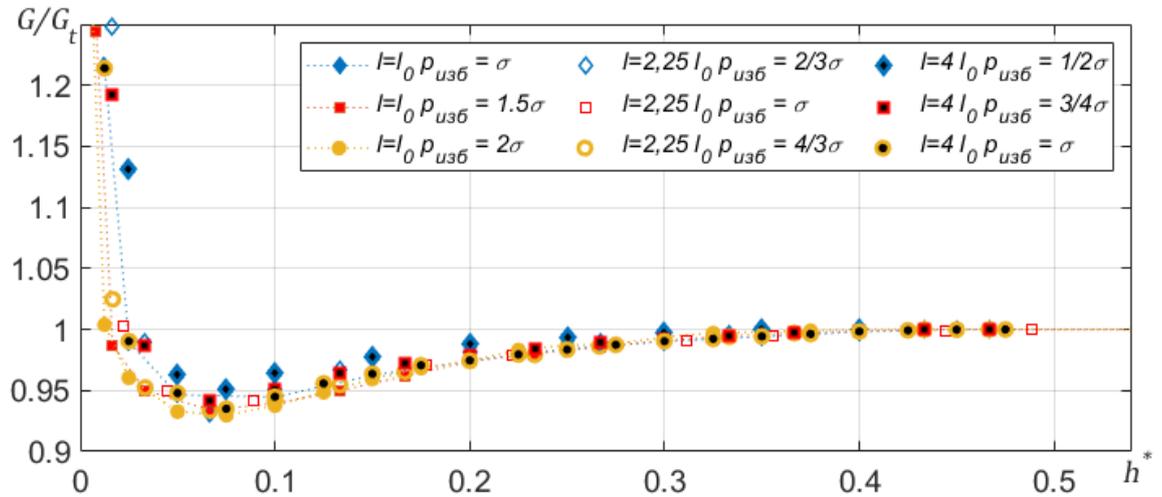


Рисунок 3.7. Зависимость коэффициента влияния от безразмерного параметра h^* при различных значениях l и $p_{изб}$ активной трещины.

Заметим, что коэффициент влияния превосходит единицу только на узком участке $h^* < 0.02$, в то время, когда пассивная трещина имеет открытый участок вплоть до значений $h^* \cong 0.1$. Также при $h^* > 0.1$ открытого участка пассивной трещины уже нет, а коэффициент влияния остается меньше единицы. Из этого можно сделать вывод, что касательные сдвиги берегов пассивной трещины, вызванные наличием активной, приводят к упрочнению среды перед кончиком активной трещины. Нормальные же сдвиги, согласно выводам глав 1 и 2, ослабляют только область перед кончиком раскрытого участка. Таким образом, пассивная трещина способствует росту параллельной ей активной трещины только при крайне малых расстояниях между трещинами.

3.2.3. Влияние пассивной трещины на траекторию активной

По мере роста активной трещины, её расположение относительно разлома может меняться, соответственно изменяя и параметры взаимодействия между ними. Рассмотрим следующую задачу: Пусть в плоскости, находящейся под действием двухосного сжатия на расстоянии h друга находятся две параллельные трещины, одна из которых много длиннее другой (рис. 3.8). Меньшая из трещин, начальной длины l_0 , квазистатически растет под действием приложенного к её берегам равномерно распределенного давления p , такого, что на

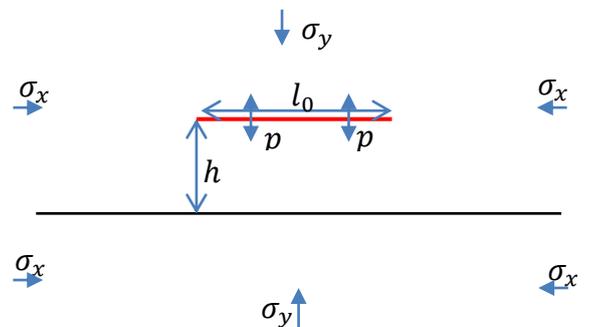


Рисунок 3.8. Схема расположения трещин

кончиках трещины на каждом шаге выполняется условие роста.

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) = G_{cr}$$

Значение G_{cr} взято таким образом, чтобы при начальной длине l_0 избыточное давление в трещине без учета влияния разлома было равно внешним напряжениям по оси y .

$$p_{изб} = \sigma_y$$

Трещины расположены перпендикулярно минимальному сжимающему напряжению, значение σ_x взято равным $1.5\sigma_y$.

На рис. 3.9. показаны траектории роста активных трещин для различных начальных значений h . Рассмотрены значения $h = 0.025l_0, 0.05l_0, 0.1l_0, 0.2l_0$ и $0.3l_0$, для которых в предыдущих задачах была зафиксирована активация участка пассивной трещины. Для значений 0.025, 0.05, и 0.1 также имели место открытые области.

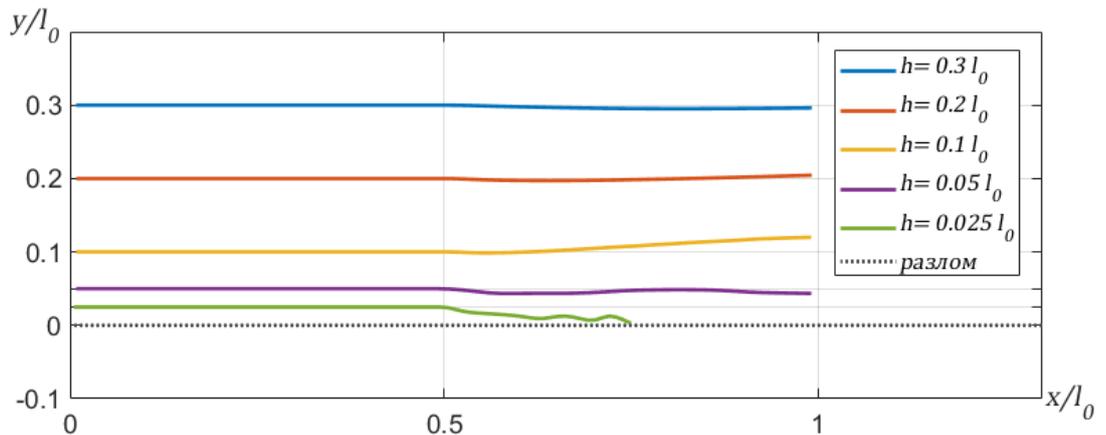


Рисунок 3.9. Траектории активной трещины вблизи разлома для различных h .

При $h = 0.2l_0$ и $0.3l_0$ разлом не оказывает существенного влияния на траекторию активной трещины. Для $h = 0.1l_0$ траектория трещины отклоняется от разлома. При дальнейшем уменьшении h происходит переход от отклонения к притяжению трещины и становится возможным пересечение активной трещины и разлома. Такое влияние на траекторию трещины достаточно хорошо соотносится с результатами для коэффициента влияния с рис.3.7: для малых h коэффициент влияния близок к единице или превосходит её, а траектория активной трещины притягивается к разлому. При увеличении h коэффициент влияния падает до своего минимума, а траектория активной трещины отталкивается от разлома. При дальнейшем увеличении h значение коэффициента влияния возвращается к единице, соответственно исчезает влияние и на траекторию.

Выводы главы 3

Разработан метод, позволяющий решать нелинейную задачу о трещинах под действием сжимающих напряжений с помощью метода разрывных смещений без необходимости итеративного пересчета всей матрицы коэффициентов. С использованием данного метода исследована задача взаимодействия трещины под внутренним давлением (трещины гидроразрыва) с параллельной ей закрытой под действием внешних сжимающих напряжений трещиной (природным разломом). Получены следующие выводы:

В пассивной трещине при наличии рядом активной возникают участки касательных сдвигов и нормального отрыва. Эти участки располагаются вблизи от кончика активной трещины. Их протяженность нелинейно зависит от расстояния между активной и пассивной трещиной. Участок нормального отрыва располагается в области перед кончиком активной трещины. Его протяженность быстро уменьшается с увеличением расстояния между трещинами. Участок касательного сдвига располагается в области расположенной у кончика активной трещины и протяженной перпендикулярно ему. Длина участка касательного сдвига до некоторого предела увеличивается по мере увеличения расстояния между трещинами, после чего уменьшается. Протяженность области, где активная трещина вызывает касательный сдвиг в несколько раз больше области, где она вызывает нормальный отрыв.

Характер взаимодействия активной трещины и параллельной ей пассивной трещины большей длины (или расположенной так, что активируемая область полностью содержится внутри трещины), зависит от значения безразмерного параметра $h^* = h \cdot \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{K_{IC}\sqrt{l}}$, зависящего от расстояния между трещинами, длины активной трещины, внешних напряжений, приложенных перпендикулярно трещинам и трещиностойкости породы.

Активированные участки пассивной трещины влияют на рост и траекторию активной в зависимости от значения h^* :

- При малых h^* ($h^* < 0.02$) они ослабляют среду, упрощая рост активной трещины и притягивая её траекторию к разлому.
- При увеличении h^* ($0.05 < h^* < 0.1$) ослабление среды сменяется укреплением (коэффициент влияния достигает минимума порядка 0.95), а притяжение траектории сменяется отталкиванием траектории от разлома.
- При дальнейшем увеличении расстояния ($0.2 < h^* < 0.4$) влияние постепенно ослабевает. Пассивная трещина активируется, но не оказывает существенного влияния на рост активной.
- При превышении предельного расстояния ($h^* > 0.5$) активная трещина не активирует пассивную. В таком случае наличие разлома можно не учитывать.

Заключение

В работе представлен метод решения задачи роста криволинейных трещин в плоской постановке на основе метода граничных элементов. Разработан метод решения контактной задачи в случае смыкания берегов трещин, не требующий итеративного пересчета всей матрицы коэффициентов системы. На основе предложенных методов реализован авторский программный код для решения задач о росте систем трещин, проведена его верификация и валидация.

Сравнение с аналитическими решениями для статических трещин показало высокую точность метода в условиях, когда расстояние между трещинами больше размеров граничных элементов. Сравнение с экспериментом показало точное совпадение численно предсказанной траектории роста трещины с полученной экспериментально.

С помощью разработанного программного кода проведено исследование влияния различных факторов на рост трещины нормального отрыва. Продемонстрирована малая зависимость численно рассчитанной траектории роста трещины от размера граничного элемента. Исследовано влияние трещины на окружающее её поле напряжений.

На основании полученных результатов предположена, а далее подтверждена устойчивость траектории трещины к малым отклонениям в случае наличия внешних напряжений, обеспечивающих направление роста. В тех же условиях показана устойчивость траектории трещины к случайным отклонениям на каждом шаге. Таким образом, разработанный метод может быть применен и в случае исследования неоднородных сред или сред с наличием дефектов, в случае если размер дефектов или неоднородностей меньше масштаба задачи.

С помощью разработанного программного кода исследовано взаимодействие растущих трещин. Показано наличие качественно различных сценариев взаимодействия изначально параллельных трещин в зависимости от их взаимного расположения. Получены критические значения расстояния между плоскостями трещин, на которых поведение системы качественно меняется. Показано, что взаимодействие происходит схожим образом в различных условиях нагружения. Разработаны критерии необходимости применения моделей криволинейного роста трещин в задачах взаимодействия трещин в зависимости от их длин и расположения.

Исследована задача о взаимодействии трещины гидроразрыва с параллельным ей разломом, получены оценки влияния с трещины на активацию разлома и разлома на рост и траекторию трещины. Получена зависимость характера взаимодействия от безразмерной переменной $h^* = \frac{h\sigma}{K_{IC}\sqrt{l}}$, связывающей расстояние между трещинами, сжимающие напряжения в среде, длину активной трещины и трещиностойкость среды.

Список литературы

1. Griffith A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids // *Philosophical Transactions*. 1920. Vol. 221. P. 163-198.
2. Irwin G. *Fracture Dynamics // Fracturing of Metals*. American Society for Metals, Cleveland. 1948.
3. Orowan E. Fracture and Strength of Solids // *Reports on Progress in Physics*. 1948. Vol. XII. P. 185-232.
4. Westergaard H. Bearing Pressures and Cracks // *Journal of Applied Mechanics*. 1939. Vol. 6. P. 49-53.
5. Williams M. On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack // *Journal of Applied Mechanics*. 1957. Vol. 24, P. 109-114.
6. Irwin G. Onset of Fast Crack Propagation in High Strength Steel and Aluminum Alloys // *Sagamore Research Conference Proceedings*. 1956. Vol. 2, P. 289-305.
7. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины // *ПММ* 1959. т. 23, №3. С. 434-444.
8. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинках // *ПММ*. 1959. т. 23, №4. С. 706-721.
9. Баренблатт Г.И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // *ПМТФ*. 1961. № 4. С.3-56.
10. Реутов В.А. Гидравлический разрыв пласта. // *Итоги н. и т., Мех. деф. тв.* т. 1989. Т. 20. С.84-188.
11. Rice J. Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks // *Journal of Applied Mechanics*. 1968. Vol. 35. P. 379–386.
12. Hutchinson J. Singular Behavior at the End of a Tensile Crack Tip in a Hardening Material // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1968. Vol. 16. P. 13–31.
13. Rice J.R. and Rosengren G.F. Plane Strain Deformation near a Crack Tip in a Power-Law Hardening Material // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1968. Vol. 16. P. 1–12.
14. Begley J.A. and Landes J.D. The J-Integral as a Fracture Criterion // *ASTM STP 514*, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1972.
15. Erdogan F., Sih G.C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear // *Journal of Basic Engineering*. 1963. Vol. 85. No. 4. P. 519–525.
16. Sih G. C. Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems // *Intern. J. Fract.* 1974. V. 10, N 3. P. 305–321.

17. Richard H.A., Fulland M., Sander M. Theoretical crack path prediction // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures*. 2005. Vol. 28. No. 1-2. P. 3–12.
18. Nuismer R.J. An energy release rate criterion for mixed mode fracture // *Int. J. Fracture*. — 1975. Vol. 11. No. 2. P. 245–250.
19. Amestoy, M. & Leblond, J.-B. Sur le critère donnant la direction de propagation des fissures dans la théorie de Griffith (On the criterion giving the direction of propagation of crack in the Griffith theory)// *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. 1985. Série II. 301.
20. Vandamme L., Curran J.H. A three-dimensional hydraulic fracturing simulator // *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*. 1989. Vol. 28. No. 4. P. 909–927.
21. Barr D.T. Leading-edge Analysis for Correct Simulation of Interface Separation and Hydraulic Fracturing: Ph. D. thesis / D.T. Barr ; Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering. 1991. 229 p.
22. Carter B.J., Desroches J., Ingraffea A.R., Wawrzynek P.A. Simulating fully 3D hydraulic fracturing // *Modeling in Geomechanics* / Ed. by M. Zaman, G. Gioda, J. Booker. — John Wiley & Sons. 2000. P. 525–557.
23. Sousa J.L., Carter B.J., Ingraffea A.R. Numerical simulation of 3D hydraulic fracture using newtonian and power-law fluids // *Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*. 1993. Vol. 30. No. 7. P. 1265–1271.
24. Rungamornrat J. A Computational Procedure for Analysis of Fractures in Three Dimensional Anisotropic Media: Ph. D. thesis / J. Rungamornrat ; Department of Aerospace Engineering and Engineering Mechanics, The University of Texas at Austin. 2004.
25. Rungamornrat J., Wheeler M.F., Mear M.E. Coupling of fracture/non-newtonian flow for simulating nonplanar evolution of hydraulic fractures // *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. 2005. SPE-96968- MS.
26. Schollmann M., Richard H.A., Kullmer G., Fulland M. A new criterion for the prediction of crack development in multiaxially loaded structures // *Int. J. Fracture*. 2002. Vol. 117. No. 2. P. 129–141.
27. Buchholz F.-G., Just V., Richard H. A. Computational simulation and experimental findings of three-dimensional fatigue crack growth in a single-edge notched specimen under torsion loading // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. Vol. 28. No. 1-2. P. 127–134.
28. Sih G. C., Ho J. W. Sharp notch fracture strength characterized by critical energy density // *Theor. Appl. Fract. Mech*. 1991. V. 16. P. 179–214.
29. Germanovich L.N., Cherepanov G.P. On some general properties of strength criteria // *Int. J. Fracture*. 1995. Vol. 71. No. 1. P. 37–56.
30. Weber W., Steinmann P., Kuhn G. Precise 3D crack growth simulations // *Int. J. Fracture*. — 2008. Vol. 149. No. 2. P. 175–192.

31. Chang Jun, Quan Xu Jin, Mutoh Yoshiharu. A general mixed-mode brittle fracture criterion for cracked materials // *Engineering Fracture Mechanics*. 2006. Vol. 73. No. 9. P. 1249 – 1263.
32. Xu X.-P., Needleman A. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1994. Vol. 42. No. 9. P. 1397–1434.
33. Pons A.J., Karma A. Helical crack-front instability in mixed-mode fracture // *Nature Letters*. 2010. Vol. 464. P. 85–89.
34. Leblond J.-B., Karma A., Lazarus V. Theoretical analysis of crack front instability in mode I+III // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2011. Vol. 59. No. 9. P. 1872 – 1887.
35. Pham K. H., Ravi-Chandar K. On the growth of cracks under mixed-mode I + III loading // *International Journal of Fracture*. 2016. Vol. 199. No. 1. P. 105–134.
36. Lazarus V., Leblond J.-B., Mouchrif S.-E. Crack front rotation and segmentation in mixed mode I+III or I+II+III. part II: Comparison with experiments // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2001. Vol. 49. No. 7. P. 1421 – 1443.
37. Методы моделирования зарождения и распространения трещин / С.Г. Черный, В.Н. Лапин, Д.В. Есипов, Д.С. Куранаков; Ин-т вычислительных технологий СО РАН. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016. 312 с.
38. Sajjadi S.H., Salimi-Majd D., Ghorabi M.J. Ostad A. Development of a brittle fracture criterion for prediction of crack propagation path under general mixed mode loading // *Engineering Fracture Mechanics*. 2016. Vol. 155. P. 36 – 48.
39. Shlyannikov V.N. T-stress for crack paths in test specimens subject to mixed mode loading // *Engineering Fracture Mechanics*. 2013. Vol. 108. No. Complete. P. 3–18.
40. Sajjadi S. H., Ostad A., Ghorabi M. J., Salimi-Majd D. A novel mixed-mode brittle fracture criterion for crack growth path prediction under static and fatigue loading // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2015. Vol. 38. No. 11. P. 1372–1382
41. Smith D. J., Ayatollahi M. R., Pavier M. J. The role of t-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed-mode loading // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. Vol. 24. No. 2. P. 137– 150.
42. Ayatollahi Majid R., Saboori B. T-stress effects in mixed mode I/II/III brittle fracture // *Engineering Fracture Mechanics*. 2015. Vol. 144. P. 32 – 45.
43. Salimi-Majd D., Shahabi F., Mohammadi B. Effective local stress intensity factor criterion for prediction of crack growth trajectory under mixed mode fracture conditions // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2016. Vol. 85. P. 207 – 216.
44. Cheng C., Niu Z., Recho N., Zhou H. Analyse the role of the non-singular stress in brittle fracture by bem coupled with eigen-analysis // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2013. Vol. 36. No. 5. P. 416–426.

45. Gupta M., Alderliesten R., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in Fracture Mechanics // Engineering Fracture Mechanics. 2015. Vol. 134. P. 218-241.
10.1016/j.engfracmech.2014.10.013.
46. Irwin G.R. Analysis of stress and strains near the end of crack transversing a plate // Trans. ASME, ser. E. J. Appl. Mech. 1957. Vol. 24. No. 3. P. 361-364.
47. Nisitany H. Stress intensity factor for the tension of a semi-infinite plate having an oblique or a bent edge crack // Trans. Japan Soc. Mech. Engrs. 1975. Vol. 41. No. 344. P. 1103-1110.
48. Smith E. The opening of parallel cracks by an applied tensile stress // Int. J. Engng. Sci. 1966. Vol. 4, No. 1. P. 41-52.
49. Isida M. Elastic analysis of cracks and stress intensity factors. // Fracture Mechanics and Strength of Materials. Baifuukan. 1976. Vol. 2.
50. Badaliane R., Gupta G. Growth characteristics of two interacting cracks // Engineering Fracture Mechanics. 1976. Vol. 8. P. 341-353.
51. Dawicke D., Newman Jr. J. Analysis and prediction of Multiple-Site Damage (MSD) fatigue crack growth // NASA STI/Recon Technical Report N. 2003.
52. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1968. 246с.
53. Уэстмен Р.А. Несимметричные краевые задачи смешанного типа для упругого полупространства. // Прикл.механика. 1965. Т. 32. № 3. С. 178-185.
54. Никифоровский В.С., Шемякин Е.И. Динамическое разрушение твердых тел. Новосибирск: Наука, 1979. 271 с.
55. Shah R.C., Kobayashi A. S. On the parabolic crack in an elastic solid // Eng. Fract. Mech. 1968. V. 1. No. 2. P. 309-325.
56. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 420 с.
57. Перлин П. И., Самаров В. Н. Применение теории обобщенного потенциала к решению пространственных задач теории упругости для тел с разрезами и оценке хрупкого разрушения конструкций сложной формы // Изв. АН Казахской ССР. Серия физико-математическая. 1974. 5. С. 72-73.
58. Fabrikant V.I. Close interaction of coplanar circular cracks under shear loading.// Computational Mechanics. 1989. Vol. 4. P. 181 – 197.
59. Попов Г.Я., Шумихин С.А. Концентрация напряжений в неограниченной упругой среде возле круговых трещин, лежащих в одной плоскости // Актуальные проблемы механики деформируемых тел.- Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. ун-та. 1979. С. 168-173.
60. Шифрин Е.И. Пространственные задачи линейной механики разрушения. М. Физмалит. 2002. 368 с.

61. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В двух томах: Пер. с англ./Под ред. Ю., Мураками. М.: Изд. Мир, 1990. 1016 с.
62. Никишков Г. П. Расчет энергетического интеграла методом эквивалентного объемного интегрирования. В кн.: Вычислительные методы в механике разрушения / Под ред. С. Атлури. М.: Мир. 1990. С. 365—382.
63. Wilson W.K. Finite element methods for elastic bodies containing cracks.// *Mechanics of fracture. V. I. Methods of analysis and solutions of crack problems* /Ed. G.C. Sih.—Leyden, 1973. P. 484-515.
64. Hall C.A., Raymund M., Palusamy S. A macro element approach to computing stress intensity factors for three dimensional structures// *International journal of fracture*. 1979. V. 15. №3. P. 231—245.
65. Rybicki E. F., Kanninen M.F. A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral // *Engineering fracture mechanics*. 1977. V. 9. 4. P. 931-938.
66. Fedulov B., Fedorenko A., Safonov A., Lomakin E. Non-linear shear behavior and failure of composite materials under plane strain conditions // *Acta Mechanica*. 2017. Vol. 228. No. 6. P. 2033–2040.
67. Бондарчук Д. А., Федулов Б. Н., Федоренко А. Н., Ломакин Е. В. Анализ параметров трещиностойкости на свободной границе в слоистых композитах // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2020. 4. С. 49–59. DOI: [10.15593/perm.mech/2020.4.05](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.05)
68. Gupta P., Duarte C.A. Simulation of non-planar three-dimensional hydraulic fracture propagation // *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2014. Vol. 38. No. 13. P. 1397–1430.
69. Somigliana C. Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo // *Il Nuovo Cienmento*. 1886. P. 17–29.
70. Купрадзе В.Д. Методы теории потенциала в теории упругости. М.: Наука, 1963. — 472 с.
71. Cruse T. *Boundary element analysis in computational fracture mechanics*. Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers. 1988. ISBN: 90-247-3614-5.
72. Cherny S., Lapin V., Esipov D., Kuranakov D., Avdyushenko A., Lyutov A., Karnakov P. Simulating fully 3D non-planar evolution of hydraulic fractures // *Int. J. Fracture*. 2016. DOI:10.1007/s10704-016-0122-x
73. Crouch S.L. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. i. infinite body solution // *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*. 1976. Vol. 10, No. 2. P. 301–343.
74. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела: Пер.с англ. М.: Мир, 1987. 328 с.

75. Zvyagin A.V., Udalov A.S., Shamina A.A. Boundary element method for investigating large systems of cracks using the Williams asymptotic series // *Acta Astronautica*. 2022. Vol. 194. P. 480-487. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.11.024>.
76. Shamina A.A., Shamin A.Y., Udalov A.S., Zvyagin A.V. Computational modeling of polygonal cracks // *Acta Astronautica*. 2024. Vol. 217. P. 255-260.
77. Shamina A.A., Zvyagin A.V., Smirnov N.N., Luzhin A.A., Panfilov D.I., Udalov A.S. Computational modeling of cracks different forms in three-dimensional space // *Acta Astronautica*. 2021. Vol. 186. P. 289-302.
78. Zvyagin A.V., Luzhin A.A., Panfilov D.I., Shamina A.A. Numerical Method of Discontinuous Displacements in Spatial Problems of Fracture Mechanics // *Mechanics of Solids*. 2021. Vol. 56. P. 119-130.
79. Звягин А.В., Лужин А.А., Панфилов Д.И., Шамина А.А. Численный метод разрывных смещений в пространственных задачах механики трещин // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2021. № 1. с. 148-162.
80. Zvyagin A.V., Panfilov D.I., Luzhin A.A., Shamina A.A. A Method to Find Stress Intensity Coefficients for Spatial Cracks // *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2021. Vol. 76. № 2. P. 35-43.
81. Звягин А.В., Панфилов Д.И., Лужин А.А., Шамина А.А. Метод определения коэффициентов интенсивности напряжений для пространственных трещин // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. 2021. № 2. С. 16-22.
82. Stoia D., Linul E., Marsavina L. Mixed-mode I/II fracture properties of Selectively Laser Sintered polyamide // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2022. Vol. 121. 103527. [10.1016/j.tafmec.2022.103527](https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2022.103527).
83. Alshoaibi A.M., Fageehi Y.A. Numerical Analysis on Fatigue Crack Growth at Negative and Positive Stress Ratios // *Materials*. 2023. Vol. 16. 3669. <https://doi.org/10.3390/ma16103669>
84. Takahashi A., Suzuki A., Kikuchi M. Fatigue crack growth simulation of two non-coplanar embedded cracks using s-version finite element method // *Frattura ed Integrita Strutturale*. 2019. Vol. 13. P. 473-480. [10.3221/IGF-ESIS.48.45](https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.48.45).
85. Fletcher D., Hyde P., Kapoor A. Growth of multiple rolling contact fatigue cracks driven by rail bending modelled using a boundary element technique // *Proceedings of The Institution of Mechanical Engineers Part F-journal of Rail and Rapid Transit - PROC INST MECH ENG F-J RAIL R*. 2004. Vol. 218. P. 243-253. [10.1243/0954409042389427](https://doi.org/10.1243/0954409042389427).
86. Kachanov M. Effective elastic properties of cracked solids: critical review of some basic concepts // *Appl. Mech. Rev.* 1992. Vol. 45. P. 304-305.

87. Kushch V.I., Sevostianov I., Mishnaevsky L. Effect of crack orientation statistics on effective stiffness of microcracked solid // *International Journal of Solids and Structures*. 2009. Vol. 46. P. 1574-1588.
88. Dubinya N. Tendencies in hydraulically conductive fractures' patterns in vicinity of major faults // *Paper SEG International Exposition and 89th Annual Meeting*. 2019. P. 3659-3662.
89. Bandis S. Experimental studies of scale effects on shear strength, and deformation of rock joints. Ph.D. Thesis, Univ. of Leeds, Dept. of Earth Sciences. 1980.
90. Barton N., Choubey V. The shear strength of rock joints in theory and practice // *Rock Mechanics*. Vienna: Springer. 1977. Vol. 1. No. 2. P. 1-54.
91. Звягин А.В., Панфилов Д.И., Шамина А.А. Взаимное влияние дискообразных трещин в трехмерном упругом пространстве. // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*, Изд-во Моск. Ун-та (М.). 2019. № 4. С. 34-41.
92. Шамина А.А., Звягин А.В., Акулич А.В., Тюренкова В.В., Смирнов Н.Н. Изучение систем, ослабленных трещинами с изломом // *Успехи кибернетики*, издательство Научно-исследовательский институт системных исследований РАН (Москва). 2020. Т. 1. № 2. С. 29-38.
93. Shamina A.A., Zvyaguin A.V., Akulich A.V., Tyurenkova V.V., Smirnov N.N. The study of the strength of structures weakened by a system of cracks // *Acta Astronautica*. 2020. Vol. 176. P. 620-627.
94. Zvyagin A.V., Luzhin A.A., Smirnov N.N., Shamina A.A., Shamin A.Y. Stress intensity factors for branching cracks in space structures // *Acta Astronautica*. 2021. Vol. 180. P. 66-72.
95. Zvyagin A.V., Udalov A.S., Shamina A.A. Numerical modeling of heat conduction in bodies with cracks // *Acta Astronautica*. 2023. Vol. 214. P. 196-201.
96. Abe H., Mura T., Keer L.M. Growth rate of a penny-shaped crack in hydraulic fracturing of rocks // *J. Geophysical Research*. 1976. Vol. 81. No. 29. P. 5335-5340.
97. Abe H., Keer L.M., Mura T. Theoretical study of hydraulically fractured penny-shaped cracks in hot, dry rocks // *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 1979. Vol. 3. P. 79-96.
98. Алексеенко О.П., Вайсман А.М. Рост почти заполненной осесимметричной трещины гидроразрыва при малых и больших утечках // *ФТПРПИ*. 2004. № 3. С. 1-11.
99. Зазовский А.Ф. Распространение плоской круговой трещины гидроразрыва в непроницаемой горной породе // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1979. № 2. С. 103-109.
100. Sheddon I.N., Elliott A.A. The opening of a griffith crack under internal pressure // *Quarterly of Applied Mathematics*. 1946. Vol. 4, No. 3. P. 262-267.
101. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
102. Слепян Л.И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1990. 296 с.

103. Sneddon I., Lowengrub M. Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity. John Wiley & Sons, 1969. 221 p.
104. Баренблатт Г.И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта // ПММ. 1956. Т. 20. № 4. С. 475–486.
105. Желтов Ю.П., Христианович С.А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. Отдел технических наук. 1955. № 5. С. 3–41.
106. Geertsma J., de Klerk F. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures // J. Petroleum Technology. 1969. Vol. 21, No. 12. P. 1571–1581. SPE-2458-PA.
107. Spence D.A., Sharp P. Self-similar solutions for elastohydrodynamic cavity flow // Proc. Royal Soc. A. 1985. Vol. 400. P. 289–313.
108. Desroches J., Detournay E., Lenoach B., Papanastasiou P., Pearson J.R.A., Thiercelin M., Cheng A.H.-D. The crack tip region in hydraulic fracturing // Proc. Royal Soc. A. 1994. No. 447. P. 39–48.
109. Daneshy A.A. On the design of vertical hydraulic fractures // J. Petroleum Technology. 1973. Vol. 1. P. 83–97.
110. Adachi J.I., Detournay E. Self-similar solution of a plane-strain fracture driven by a power-law fluid // Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 2002. Vol. 26. P. 579–604.
111. Алексеенко О.П., Вайсман А.М. Некоторые особенности плоской задачи гидроразрыва упругой среды // ФТПРПИ. 1999. № 3. С. 64–70.
112. Акулич А.В., Звягин А.В. Численное моделирование распространения трещины гидроразрыва // Вестник МГУ. Серия 1: Математика. Механика. 2008. № 1. С. 43–49.
113. Алексеенко О.П., Есипов Д.В., Куранаков Д.С., Лапин В.Н., Черный С.Г. Двумерная пошаговая модель распространения трещины гидроразрыва // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11. № 3. С. 36–59.
114. Chang F.F., Bartko K., Dyer S., Aidagulov G., Suarez-Rivera R., Lund J. Multiple fracture initiation in openhole without mechanical isolation: First step to fulfill an ambition // SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference. 2014. SPE-168638-MS. P. 1–18.
115. Perkins T.K., Kern L.R. Widths of hydraulic fractures // J. Petroleum Technology. 1961. Vol. 13, No. 9. P. 937–949.
116. Nordgren R.P. Propagation of a vertical hydraulic fracture // SPE Journal. 1972. Vol. 12. No. 4. P. 306–314. SPE-3009-PA.
117. Sheddon I.N., Elliott A.A. The opening of a griffith crack under internal pressure // Quarterly of Applied Mathematics. 1946. Vol. 4, No. 3. P. 262–267.

118. Ивашнев О.Е., Смирнов Н.Н. Формирование трещины гидроразрыва в пористой среде // Вестник МГУ. Серия 1: Математика. Механика. 2003. № 6. С. 28–36.
119. Смирнов Н.Н., Тагирова В.Р. Автомодельные решения за дачи о формировании трещины гидроразрыва в пористой среде // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2007. № 1. С. 70–82.
120. Тагирова В.Р. Распространение трещины гидроразрыва под напором неньютоновской жидкости // Вестник МГУ. Серия 1: Математика. Механика. 2009. № 6. С. 33–41.
121. Татосов А.В. Модель закачки проппанта в трещину гидроразрыва // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10. № 6. С. 91–101.
122. Татосов А.В. Движение вязкой жидкости с примесью частиц в пористом канале // Вестник ТюмГУ. 2007. № 5. С. 56–60.
123. Ентов В.М., Зазовский А.Ф., Стелин И.Б., Хараидзе Д.М. Одномерная модель распространения трещины гидроразрыва // Материалы IX Всесоюзного семинара “Численные методы решения задач фильтрации. Динамика многофазных сред”. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР. 1989. С. 91–95.
124. Lecampion B., Detournay E. An implicit algorithm for the propagation of a hydraulic fracture with a fluid lag // Computer Meth. Appl. Mech. Eng. 2007. Vol. 196. No. 49–52. P. 4863–4880.
125. Garagash D.I. Propagation of a plane-strain hydraulic fracture with a fluid lag: Early-time solution // International Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43. No. 18. P. 5811 – 5835.
126. Алексеенко О.П., Вайсман А.М. Прямолинейный гидроразрыв в упругой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 145–149.
127. Зазовский А.Ф., Одишария М.Г., Песляк Ю.А. Автомодельные решения задачи о распространении трещины гидроразрыва в непроницаемой горной породе // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 92–103.
128. Garagash I. A., Osipov A. A. Effects of nonuniform initial stress state on apparent fracture toughness // Engineering Fracture Mechanics. 2020. Vol. 226. No. 1.
129. Garagash I. A., Osipov A. A. Fracture propagation in an initially stressed anisotropic reservoir under shear: Reorientation and fluid lag // Engineering Fracture Mechanics. 2021. Vol. 242, No. 1. P. 107457. <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.107457>
130. Atkinson C., Eftaxiopoulos D.A. Numerical and analytical solution for the problem of hydraulic fracturing from cased and cemented wellbore // Int. J. Solids and Structures. 2002. Vol. 39, No. 6. P. 1621–1650.
131. Зубков В.В., Кошелев В.Ф., Линьков А.М. Численное моделирование инициирования и роста трещин гидроразрыва // ФТПРПИ. 2007. № 1. С. 45–63.
132. Мартынюк П.А. Особенности развития трещин гидроразрыва в поле сжатия // ФТПРПИ. 2008. № 6. С. 19–29.

133. Olson J.E. Predicting Fracture Swarms – The Influence of Sub critical Crack Growth and the Crack-Tip Process Zone on Joints Spacing in Rock / In The Initiation, Propagation and Arrest of Joints and Other Fractures, ed. J.W. Cosgrove and T. Engelde // Geological Soc. Special Publications, London. 2004. 231.73-78.
134. Алексеенко О.П., Есипов Д.В., Куранаков Д.С., Лапин В.Н., Черный С.Г. Двумерная пошаговая модель распространения трещины гидроразрыва // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11. № 3. С. 36–59.
135. Wu K., Olson J. E. Simultaneous Multifracture Treatments: Fully Coupled Fluid Flow and Fracture Mechanics for Horizontal Wells // SPE J. 2015. Vol. 20. P. 337–346. doi: <https://doi.org/10.2118/167626-PA>
136. Weng X., Kresse O., Cohen C., Wu R., Gu H. Modeling of Hydraulic Fracture-Network Propagation in a Naturally Fractured Formation // SPE Production and Operations. 2011. Vol. 26. No. 04. P. 368–380.
137. Акулич А. В., Звягин А. В. Взаимодействие трещины гидроразрыва с естественной трещиной // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2008. № 3. С. 104–112.
138. Meyer fracturing simulators. user's guide. ninth edition. 2011. URL: http://tm.spbstu.ru/images/d/df/MFRAC_User's_Guide.pdf. (дата обращения: 23.10.2022)
139. Fracpro fracture design and analysis software. 2021. URL: <https://carboceramics.com/products/software-platforms-data-management/fracpro-software/fracpro-classic>. (дата обращения: 25.10.2022)
140. Erofeev A.A., Nikitin R.N., Mitrushkin D.A., Golovin S.V., Baykin A.N., Osiptsov A.A., Paderin G.V., Shel E.V. CYBER FRAC – software platform for modeling, optimization and monitoring of hydraulic fracturing operations // Oil Industry. 2019. Т. 12. С. 64–68.
141. Ахтямов А. В., Макеев Г. А., Байдюков К. Н., Муслимов У. С., Матвеев С. Н., Пестриков А. В., Резаев С. Н. Корпоративный симулятор гидроразрыва пласта «РН-ГРИД»: от программной реализации к промышленному внедрению // Нефтяное хозяйство. 2018. Vol. 2018. No. 05. P. 94–97.
142. Gohfer fracture modeling software. 2021. URL: <https://www.halliburton.com/en/completions/stimulation/fracture-modeling> (дата обращения: 20.09.2024)
143. Fraccade fracturing design and evaluation software. URL: <https://www.slb.com/-/media/files/sand-control/product-sheet/fraccade-frac-design-software-ps.ashx> (дата обращения: 20.09.2024)
144. Stimplan™ software. — 2021. — URL: <https://www.nsitech.com/stimplan-software/> (дата обращения: 21.09.2024)

145. Comprehensive Design Formulae For Hydraulic Fracturing. Vol. All Days of SPE Annual Technical Conference and Exhibition, 1980. SPE-9259-MS.
146. Adachi J.I., Detournay E., Peirce A.P. Analysis of the classical pseudo-3D model for hydraulic fracture with equilibrium height growth across stress barriers // *Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2010. Vol. 47. No. 4. P. 625–639.
147. Dontsov E.V., Peirce A.P. An enhanced pseudo-3d model for hydraulic fracturing accounting for viscous height growth, non-local elasticity, and lateral toughness // *Engineering Fracture Mechanics*. 2015. Vol. 142. P. 116–139.
148. Dontsov E., Peirce A. Incorporating viscous, toughness, and intermediate regimes of propagation into enhanced pseudo-3d model. In *Proceedings 49th U.S. Rock Mechanics Symposium, San Francisco, CA, USA, ARMA-2015-297*. American Rock Mechanics Association. 2015.
149. Markov N.S., Linkov A.M. Correspondence principle for simulation hydraulic fractures by using pseudo 3d model // *Materials Physics and Mechanics*. 2018. Vol. 40. P. 181–186.
150. Dontsov E.V., Peirce A.P. Proppant transport in hydraulic fracturing: Crack tip screen-out in kgd and p3d models // *International Journal of Solids and Structures*. 2015. Vol. 63. P. 206–218.
151. Skopintsev A.M., Dontsov E.V., Kovtunencko P.V., Baykin A.N., Golovin S.V. The coupling of an enhanced pseudo-3d model for hydraulic fracturing with a proppant transport model // *Engineering Fracture Mechanics*. 2020. Vol. 236. P. 107177.
152. Wong Sau-Wai. Hydraulic fracture modeling and design - a perspective on how things have changed from conventional to unconventional reservoirs // *IPTC*. March 27. 2019.
153. A Practical Numerical Simulator for Three-Dimensional Fracture Propagation in Heterogeneous Media. Vol. All Days of SPE Reservoir Simulation Conference. 1983. SPE-12273-MS.
<https://onepetro.org/spersc/proceedings-pdf/83RS/All-83RS/SPE-12273-MS/2037375/spe-12273-ms.pdf>.
154. Siebrits E., Peirce A. P. An efficient multi-layer planar 3d fracture growth algorithm using a fixed mesh approach // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2002. Vol. 53. No. 3. P. 691–717.
155. Advani S. H., Lee T. S., Lee J. K. Three-Dimensional Modeling of Hydraulic Fractures in Layered Media: Part I—Finite Element Formulations // *Journal of Energy Resources Technology*. 1990. Vol. 112. No. 1. P. 1–9.
156. Ben Naceur K., Thiercelin M., Touboul E. Simulation off Fluid Flow in Hydraulic Fracturing: Implications for 3D Propagation // *SPE Production Engineering*. 1990. Vol. 5. No. 02. P. 133–141.
157. Devloo P., Fernandes P., Gomes S., Ayala B., Damas R. A finite element model for three dimensional hydraulic fracturing // *Mathematics and Computers in Simulation*. 2006. Vol. 73, No. 1-4. P. 142–155.

158. Peirce A., Detournay E. An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2008. Vol. 197. No. 33-40. P. 2858–2885.
159. Stacked Height Model to Improve Fracture Height Growth Prediction, and Simulate Interactions With Multi-Layer DFNs and Ledges at Weak Zone Interfaces. Vol. Day 2 Wed, January 25, 2017 of SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference and Exhibition, 2017. — D021S003R007. <https://onepetro.org/SPEHFTC/proceedings-pdf/17HFTC/2-17HFTC/D021S003R007/1304720/spe-184876-ms.pdf>.
160. Li K., Smirnov N. N., Qi C. et al. A planar-3d mathematical model for studying the effect of heterogeneity of rock fracture toughness on hydraulic fracture propagation: Early-time solution including the stage before propagation // *Mathematics*. 2023. Vol. 11. P. 2083.
161. Baykin A N, Golovin S V. Application of the fully coupled planar 3D poroelastic hydraulic fracturing model to the analysis of the permeability contrast impact on fracture propagation // *Rock Mech. Rock Eng.* 2018. Vol. 51. No. 10. P. 3205–3217.
162. Муртазин Р.Р., Аксаков А.В., Ямилев И.М., Садыков А.М., Галлямов И.Ф. Исследование развития продольных трещин при проведении гидроразрыва пласта в горизонтальных скважинах // *Нефтяное Хозяйство*. 2023. № 2. С. 90–94.
163. Vandamme L., Curran J.H. A three-dimensional hydraulic fracturing simulator // *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*. 1989. Vol. 28. No. 4. P. 909–927.
164. Sousa J.L., Carter B.J., Ingraffea A.R. Numerical simulation of 3D hydraulic fracture using newtonian and power-law fluids // *Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*. 1993. Vol. 30. No. 7. P. 1265–1271.
165. Development of a True 3D Hydraulic Fracturing Simulator. Vol. All Days of SPE Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition, 1999. SPE-54265-MS.
166. Sun T., Zeng Q., Xing H. A model for multiple hydraulic fracture propagation with thermo-hydro-mechanical coupling effects // *Energies*. 2021. Vol. 14. No. 4.
167. Kumar D., Ghassemi A. Three-dimensional poroelastic modeling of multiple hydraulic fracture propagation from horizontal wells // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2018. Vol. 105. P. 192–209.
168. Lee S., Wheeler M., Wick T. Pressure and fluid-driven fracture propagation in porous media using an adaptive finite element phase field model // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2016. Vol. 305. P. 111–132.
169. Zhang D., Zhang L., Tang H., Zhao Y. Fully coupled fluid-solid productivity numerical simulation of multistage fractured horizontal well in tight oil reservoirs // *Pet. Explor. Dev.* — 2022. Vol. 49. No. 2. P. 382–393.

170. Gupta P., Duarte C. A. Coupled formulation and algorithms for the simulation of non-planar three-dimensional hydraulic fractures using the generalized finite element method // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2016. Vol. 40. No. 10. P. 1402–1437.
171. Paul B., Faivre M., Massin P., Giot R., Colombo D., Golfier F., Martin A. 3d coupled HM–XFEM modeling with cohesive zone model and applications to non planar hydraulic fracture propagation and multiple hydraulic fractures interference // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2018. Vol. 342. P. 321–353.
172. Liu Wenzheng, Zeng Qingdong, Yao Jun, Liu Ziyou, Li Tianliang, Yan Xia. Numerical study of elasto-plastic hydraulic fracture propagation in deep reservoirs using a hybrid edfm–xfem method // *Energies*. 2021. Vol. 14. No. 9.
173. Li Jianxiong, Dong Shiming, Hua Wen, Yang Yang, Li Xiaolong. Numerical simulation on deflecting hydraulic fracture with refracturing using extended finite element method // *Energies*. 2019. Vol. 12. No. 11.
174. Damjanac B., Detournay C., Cundall P. A. Application of particle and lattice codes to simulation of hydraulic fracturing // *Comput. Part. Mech*. 2016. Vol. 3. No. 2. P. 249–261.
175. Lefort V., Nouailletas O., Grégoire D., Pijaudier-Cabot G. Lattice modelling of hydraulic fracture: Theoretical validation and interactions with cohesive joints // *Eng. Fract. Mech.* — 2020. Vol. 235. No. 107178. P. 107178.
176. Zhao Kaikai, Stead Doug, Kang Hongpu, Gao Fuqiang, Donati Davide. Three-dimensional numerical investigation of the interaction between multiple hydraulic fractures in horizontal wells // *Eng. Fract. Mech*. 2021. Vol. 246. No. 107620. P. 107620.
177. Kamali, A., Ghassemi, A., Kumar, D. 3D Modeling of Hydraulic and Natural Fracture Interaction // *Rock Mech Rock Eng*. 2023. Vol. 56. P. 875–893. <https://doi.org/10.1007/s00603-022-03029-w>
178. Olson, J. Fracture aperture, length and pattern geometry development under biaxial: A numerical study with applications to natural, cross-jointed systems // *Geological Society, London, Special Publications*. 2007. Vol. 289. P.123-142. 10.1144/SP289.8.
179. Звягин А. В., Удалов А. С. Метод разрывных смещений высокого порядка точности в механике трещин // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. 2020. № 6. С. 34–39.
180. Kamei A., Yokobori T. Some results on the stress intensity factors of cracks and/or slip bands system. // *Reports of the Research Institute for Strength and Frac. Mater., Tohoku Univ*. 1974. Vol. 10. No. 2. P. 29-93.
181. Морозов Е.М., *Техническая механика разрушения*. Под ред. Зайнуллина Р.С. Изд-во МНТЦ "БЭСТС", УФА. 1977.

182. Кнесл З., Беднар К., Радон Дж. Влияние τ -напряжений на скорость распространения усталостных трещин // Физическая мезомеханика. 2000. Том.3. №5. С.5-9.
doi:10.24411/1683-805X-2000-00046
183. Guz A.N., Zozulya V.V. Elastodynamic unilateral contact problems with friction for bodies with cracks // Int. Appl. Mech. 2002 Vol.38. No.8. P. 895–932 .
184. Czekanski, A., Zozulya, V. V. Solution of the 3-D elastodynamic contact problem for body with cracks using the BIEM and constrained optimization algorithm // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2019. Vol. 106. P. 599–608. doi:10.1016/j.enganabound.2019.06
185. Бобылев А.А. Применение метода сопряженных градиентов к решению задач дискретного контакта для упругой полуплоскости // Изв. РАН. МТТ. 2022. No 2. С. 154–172.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922020052>
186. Бобылев А.А. Алгоритм решения задач дискретного контакта для упругого слоя // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2023. №2. С. 70-89. doi: 10.31857/S0572329922100129
187. Wriggers P. Computational Contact Mechanics. Berlin: Springer-Verlag. 2006. 518 p.
188. Yastrebov V.A . Numerical Methods in Contact Mechanics. New York: ISTE/Wiley. 2013. 416 p.
189. Eck C., Jarušek J., Krbeč M. Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems. New York: CRC Press, 2005. 398 p.
190. Czekanski A., Meguid S.A. On the use of variational inequalities to model impact problems of elasto-plastic media // Int. J. Impact Eng. 2006. Vol. 32. P. 485–511 .
191. Man K.W. Contact mechanics using boundary elements. Southampton: Computational Mechanics Publications; 1994. 182 p.
192. Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y. Development of discrete contact mechanics with applications to study the frictional interaction of deformable bodies // Mech. Solids. 2020. V. 55. P. 1441–1462. <https://doi.org/10.3103/S0025654420080099>