

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

ПЛЁНКИН АНДРЕЙ ВАЛЕРЬЕВИЧ

**РАЗРЫВЫ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В МЕТОДАХ
СКВОЗНОГО СЧЕТА, ИХ АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ И
КЛАССИФИКАЦИЯ**

Специальность 05.13.18 - математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель - профессор
Афендиков Андрей Леонидович

Москва

2013

Оглавление

Введение.....	4
1 Обзор известных методов выделения особенностей	10
1.1 Основные определения и некоторые свойства вейвлетов.....	11
1.1.1 Показатель гладкости Липшица	11
1.1.2 Условие Фурье.....	12
1.1.3 Вейвлеты	13
1.1.4 Нулевые моменты вейвлетов	14
1.1.5 Многомасштабный дифференциальный оператор.....	15
1.1.6 Многомасштабный (кратномасштабный) анализ	16
1.1.7 Масштабирующая (скейлинг) функция и материнский вейвлет.....	17
1.1.8 Вейвлет – фильтры и дискретное вейвлет - преобразование.....	18
1.2 Связь асимптотики убывания вейвлет - преобразования с равномерной гладкостью Липшица на отрезке	19
1.3 Точечная гладкость Липшица	21
1.3.1 Теорема Жаффара	21
1.3.2 Конус влияния	22
1.4 Максимумы модуля вейвлет – преобразования	23
1.4.1 Максимумы модуля и выделение особенностей.....	23
1.4.2 Распространение максимумов.....	26
1.5 Многомасштабное выделение перепадов	26
1.5.1 Алгоритм Кэнни выделения перепадов	27
1.5.2 Многомасштабное выделение перепадов	28
1.5.3 Кривые максимумов.....	29
1.5.4 Гладкость Липшица	30
1.6 Увеличение четкости изображений, при помощи Лапласиана.....	32
1.7 Риджлеты.....	34
1.7.1 Оценки аппроксимации функции в различных базисах.....	34
1.7.2 Базис риджлетов	34
1.8 Выделение особенностей методом С.Б. Базарова.....	35
1.9 Локализация сингулярностей газодинамических полей при помощи вейвлетов	36
1.9.1 Детектор, основанный на оценке показателя гладкости Липшица в точках исследуемого поля	37
1.9.2 Детектор на основе пары вещественных ортогональных вейвлет - фильтров.....	39
1.10 Заключение	45
2 Локализация разрывов в полях газодинамических функций с помощью вейвлет анализа ..	46
2.1 Введение.....	46
2.2 Применение вейвлетов для выделения и классификации особенностей газодинамических полей	47
2.2.1 Детектор на основе симметричных комплексных вейвлетов Добеши	48
2.2.1.1 Симметричные комплексные вейвлеты Добеши	48
2.2.1.2 Конструкция детектора.....	49
2.2.1.3 Многомерная версия детектора	52
2.2.2 Построение детектора-корректора	54
2.2.3 Классификация разрывов	55
2.2.3.1 Определения и обозначения.....	55
2.2.3.2 Классификация	56
2.2.4 Алгоритм локализации и классификации разрывов в двумерном случае, оценка числа необходимых вычислительных операций	57
2.3 Численные эксперименты	59
2.3.1 Тестовый пример.....	59
2.3.2 Численное моделирование	60

2.3.3	Исследование одномерной задачи.....	61
2.3.4	Исследование 2D задачи.....	63
2.3.5	Выделение и классификация разрывов.....	64
2.3.6	Сравнение результатов локализации разрывов в расчетах, полученных по схемам 1-го и 2-го порядков аппроксимации.....	67
2.3.7	Обработка исходных данных методом С.Б. Базарова.....	69
2.4	Заключение.....	71
3	Многомасштабный анализ особенностей газодинамических полей и оценка качества работы детектора.....	72
3.1	Введение.....	72
3.2	Численное моделирование.....	73
3.3	Многомасштабный вейвлет анализ.....	74
3.4	Структуры, локализуемые у границы расчетной области.....	83
3.5	Локализация разрывов с помощью корректора.....	83
3.6	Сравнение расчетов выполненных на различных сетках.....	86
3.7	Заключение.....	88
4	Обобщение алгоритма локализации особенностей на неструктурированные расчетные сетки, локализация структур в идеальной и вязкой моделях, адаптация расчетной сетки к положению разрывов.....	90
4.1	Введение.....	90
4.2	Алгоритм.....	91
4.3	Численное моделирование.....	95
4.4	Анализ расчетов.....	96
4.5	Локализация разрывов в трехмерных расчетах.....	101
4.6	Применение детектора для адаптации расчетной сетки к положению разрывов.....	105
4.7	Заключение.....	110
	Заключение.....	112
5	Приложения.....	115
5.1	Симметричные комплексные вейвлеты Добеши.....	115
5.2	Связь между вещественной и мнимой частями скейлинг функции.....	118
5.3	Лемма о сходимости масштабирующих функций.....	119
5.4	Низкочастотные фильтры использованных в работе вейвлетов.....	120
	Список литературы.....	122

Введение

При математическом моделировании течений газа, содержащих ударные волны, контактные разрывы и др., актуальна задача построения прецессионных алгоритмов, в которых указанные объекты могут быть выделены с высокой точностью.

Можно условно выделить два класса методов расчета. В первом разрывы выделяются, а сетка привязывается к расположению разрывов. Очевидно, что в этом случае логическая сложность алгоритмов и требования к производительности ЭВМ быстро растут при усложнении картины расположения разрывов. Альтернативой является применение методов сквозного счета, которые не учитывают информацию о положении разрывов. Универсальность этих методов привела к их широкому распространению.

Использование численных методов для решения задач гидро и газовой динамики, по сути, является моделированием, поскольку для большинства задач нет даже теорем о глобальном по времени существовании и единственности решения соответствующих систем уравнений. Более того реальные физические поверхности разрыва представляют собой в действительности переходные слои конечной толщины, уменьшающиеся при увеличении величины скачков. Ширина ударных волн большой интенсивности оказывается порядка нескольких длин свободного пробега молекул газа [1]. В свою очередь при использовании методов сквозного счета разрывы в течениях, которым в идеальной модели соответствуют скачки, размазываются и формируются переходные зоны ненулевой толщины. В итоге, основным способом оценки качества полученного расчета является сравнение с экспериментом и эталонными расчетами, а также проверка сходимости решения при стремлении шага сетки к нулю.

Можно выделить две существенных особенности методов сквозного счета:

- 1) размазываются разрывы газодинамических функций;
- 2) в случае использования аппроксимаций высокого порядка, предназначенных для приближения гладких решений, в окрестности разрыва могут возникать эффекты типа явления Гиббса, которые могут со временем привести к авосту.

Первая из указанных выше проблем может быть решена за счет измельчения расчетной сетки. Однако увеличение точности расчета только за счет равномерного измельчения сетки не оптимально [2, 3] и не всегда возможно даже на современных супер ЭВМ. В такой ситуации оказалось эффективным использование адаптивных сеток сгущающихся в окрестности разрывов. Эффективность применения адаптивных сеток при расчете газодинамических течений продемонстрирована в работах [4, 5, 6]. Использование адаптивных сеток, сгущающихся в областях высоких градиентов, позволило сократить число расчетных узлов в 30 раз, по сравнению с рав-

номерной сеткой, без ухудшения качества расчета.

Вторая проблема не может быть решена только за счет измельчения сетки. В окрестности разрывов требуется модификация самого разностного метода, что привело, например, к созданию TVD схем.

Также следует отметить, что при численном моделировании газодинамических течений используются различные вспомогательные модели, в частности модели позволяющие задавать граничные условия на расчетной сетке. Использование этих моделей может по-разному влиять на качество расчета. Поэтому возникает задача алгоритмического анализа расчета, в частности расположения разрывов.

Таким образом, задача алгоритмического выделения разрывов в расчете, полученном методом сквозного счета, является актуальной. Постановка задачи о выделении разрывов в числовых полях заданных в дискретном наборе узлов требует принятия дополнительных гипотез о структуре разрывов, например, можно построить математическую модель для выделения разрывов, которая использует информацию о том, каким методом были получены анализируемые численные поля, и экспериментально протестировать ее эффективность.

Создание такого алгоритма позволяет вести усовершенствованное моделирование газодинамических течений, основанных на методах сквозного счета, за счет учета информации о положении разрывов. Тем не менее, алгоритмизации задачи локализации особенностей полей газодинамических величин до сих пор уделялось сравнительно мало внимания. При этом выделение сингулярностей рассматривалось в основном в рамках задачи о визуализации течения.

В настоящей работе предполагается, что заданная сеточная вектор функция является малым возмущением проекции значений (обобщенного) решения уравнений Эйлера на множество узлов некоторой сетки. При этом предполагается, что решения являются гладкими вне множеств разрывов самих функций и их производных, являющихся регулярными множествами, состоящими из кусочногладких поверхностей (кривых). Сам анализ базируется на усовершенствованных методах, характерных для общей теории анализа изображений, в сочетании с физическими условиями на поверхностях разрывов.

К нашей постановке задачи ближе всего лежат исследования Н.Н. Яненко, Е.В. Ворожцова [7] и С.Б. Базарова [8]. Отметим, что имеется значительное количество работ, посвященных решению задачи выделения краев (edge detection), возникающей при обработке изображений. Показательным является то, что в основе большинства этих методов лежит использование вейвлет - анализа, который в задачах обработки изображений доказал свою эффективность. Использование вейвлет - разложения также оказалось эффективным средством для ускорения расчетов использующих методы типа Галеркина [9].

Представленная работа состоит из четырех глав.

Глава 1 посвящена обзору известных методов выделения особенностей, в основе которых лежит применение вейвлет – анализа.

Глава 2 посвящена построению математической модели алгоритма выделения и классификации разрывов для одномерных течений газа. Модель основана на использовании построенного в [10] семейства комплексных симметричных ортогональных вейвлетов Добеши. Свойства этих вейвлетов (приложения 5.1, 5.2) оказались полезным инструментом в исследуемой задаче. Предобработка изучаемых полей использует соображения близкие к применяемым в [10] для повышения контрастности рентгеновских снимков.

Существенным отличием предлагаемого анализа от метода, предложенного в [10], является использование корректора, построенного на основе классических несимметричных вейвлетов и дополнительное использование соотношений на разрывах, наличие которых жестко связывает особенности различных компонент вектора газодинамических величин.

На основе предложенной модели выделения и классификации особенностей строится многомерный алгоритм для локализации разрывов в полях газодинамических величин, полученных в результате моделирования течений с использованием методов сквозного счета на прямоугольных расчетных сетках.

На входе алгоритм получает поля плотности и давления, заданные в узлах (или центрах ячеек расчетной сетки). На выходе каждому узлу сетки сопоставляется число, характеризующее течение в окрестности этого узла. Разработанный алгоритм может быть использован как в автоматическом режиме непосредственно в ходе расчета для его адаптации к положению разрывов, так и в постобработке для визуализации и оценки качества моделирования течения.

Альтернативный подход предложен в [11, 12, 13]. Там информация об особенностях течений извлекалась с помощью кратномасштабного анализа из коэффициентов вейвлет - разложения изучаемого поля по базису из комплексных ортогональных вейвлетов, а в качестве индикаторов особенностей использовались скачки фазы вейвлет - коэффициентов.

Представленный в диссертации алгоритм был использован при моделировании разрывов для класса течений, связанных с изучением управления потоком с помощью локального энерговыделения. Рассматриваемые течения представляют большой интерес с разных точек зрения. В них реализуются такие явления, как взаимодействие ударной волны с прогретым приповерхностным слоем и неустойчивость тангенциального разрыва под действием ударной волны. Сложная конфигурация разрывов нестационарных течений предъявляет высокие требования к численным алгоритмам и методам анализа и обработки результатов. При этом при малых временах в расчете есть области, для которых течение задается аналитическим решением, что было использовано для тестирования.

Отметим, что в расчетах могут существовать эффекты, соответствующие разным мас-

штабам (шумы различных амплитуд, разрывы разных интенсивностей). Удобно отделить эти эффекты друг от друга и анализировать различные масштабы независимо.

В главе 3 представлен многомасштабный алгоритм выделения особенностей течения. Дополнительная предобработка поля с использованием многомасштабного вейвлет - анализа позволило избавиться от части артефактов и ложных особенностей. Показано, что оставшиеся артефакты можно удалить за счет введения порога чувствительности.

Также было выявлено, что разработанный алгоритм может быть использован для исследования влияния граничных условий на качество расчета.

Результаты расчетов, приведенные в главах 2 и 3, показали, что предлагаемый алгоритм является эффективным инструментом для локализации особенностей. Недостатком является то, что область его использования ограничена расчетами, проведенными на конформных прямоугольных расчетных сетках, что мешает его использованию в задачах построения адаптивных сеток, где расчетная сетка, как правило, имеет более сложную структуру.

В главе 4 предложенный алгоритм обобщается на произвольные расчетные сетки, включая сетки для расчетов трехмерных течений. Также в ней вводится набор фильтров, позволяющий частично избавиться от артефактов, возникающих при выделении разрывов. Модифицированный алгоритм был апробирован при моделировании разрывов для осесимметричной задачи о сверхзвуковом обтекании тела. Расчет задачи был выполнен с помощью пакета NSC2KE на треугольной сетке.

Об ударных волнах как о скачках можно говорить только для случая идеальной среды. В вязкой среде им соответствуют переходные зоны ненулевой толщины. Но моделирование вязких течений с высокой точностью, а значит и выделение таких структур в расчетах, выполненных по вязкой модели, также является актуальным.

Для исследования этого вопроса были проведены соответствующие расчеты обтекания вязким газом осесимметричных тел. Анализ показал, что головной ударной волне и ряду разрывов в расчете по невязкой модели в точности соответствует набор переходных зон в расчете, выполненном по вязкой модели. Кроме того в расчете по вязкой модели четко выделяется граница пограничного слоя и ряд эффектов связанных с вихревыми зонами.

Алгоритм оказался эффективным и при анализе трехмерных течений. Он был апробирован на модельных трехмерных данных и на расчете задач о сверхзвуковом обтекании тел под углом атаки (расчет был выполнен по модели Навье – Стокса). Особенности течений были локализованы с высокой точностью. Кроме того алгоритм позволил выделить тонкие структуры и разрывы слабой интенсивности, обнаружить которые другими средствами достаточно сложно.

Разработан алгоритм для моделирования одномерных течений с адаптацией сетки на основе вейвлет - анализа особенностей решения. Использование адаптивного подхода позволило

существенно повысить качество расчета, за счет уменьшения зон размазывания разрывов, и сократить время расчета в 2,5 раза.

В работе получены следующие основные результаты:

1) На основе методов вейвлет-анализа разработана математическая модель выделения особенностей в полях газодинамических функций. Модель основана на использовании симметричных комплексных вейвлетов Добеши и классических вещественных вейвлетов Добеши, а также соотношений Гюгонио на разрывах.

2) Разработаны численные алгоритмы, включая многомасштабный, позволяющие на основании численных данных, полученных методом сквозного счета, восстановить содержащуюся в них информацию о положении и типах разрывов. В основе алгоритмов лежат методы вейвлет – анализа. Алгоритмы позволяют проводить локализацию разрывов в расчетах двумерных и трехмерных течений. Высокая точность локализации разрывов подтверждена решением ряда тестовых задач.

3) Разработанные алгоритмы реализованы в виде комплекса программ для локализации разрывов двумерных и трехмерных течений на прямоугольных и неструктурированных сетках. Программно реализован алгоритм для моделирования одномерных течений с адаптацией сетки на основе вейвлет-анализа особенностей решения.

4) Проведено численное моделирование и выделение разрывов в ряде задач газовой динамики: сверхзвуковое обтекание тел под углом атаки, распространение ударных волн в каналах при наличии импульсного энерговыделения. Расчеты проводились для идеальных и вязких течений при больших числах Рейнольдса. Показано, что «разрывы» выделяемые в численных решениях уравнений Навье-Стокса при больших числах Рейнольдса, вдали от тела близки к разрывам в решении уравнений Эйлера. В решениях уравнений Навье-Стокса дополнительно выделяются структуры свойственные только вязким течениям.

Результаты работы докладывались автором и обсуждались на научно-исследовательских семинарах:

1) Научно-исследовательские семинары кафедры вычислительной механики механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова;

2) Научно-исследовательские семинары ИПМ им. М.В. Келдыша РАН;

3) Научно-исследовательский семинар Института вычислительной математики РАН;

4) XVI Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» 2009г. (Москва);

5) Научная конференция «Ломоносовские чтения» 2009г. МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва);

6) XVIII Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященная памяти К.И. Бабенко 2010г. (Абрау-Дюрсо, Новороссийск)

7) XIV Всероссийская молодежная Конференция-школа с международным участием «Современные проблемы математического моделирования» 2011г. (Абрау-Дюрсо, Новороссийск);

8) Международная молодёжная конференция-школа «Современные проблемы прикладной математики и информатики» 2012г. (Дубна);

9) XIX Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященная памяти К.И. Бабенко 2012г. (Абрау-Дюрсо, Новороссийск);

10) XIII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям 2012г. (Новосибирск);

11) XVII молодежная научная конференция Объединения молодых ученых и специалистов (ОМУС-2013) 2013г. (Дубна);

12) Международная конференция по математической теории управления и механике 2013г. (Суздаль);

13) The International Conference MATHEMATICAL MODELING AND COMPUTATIONAL PHYSICS (MMCP 2013) 2013г. (Дубна);

14) XV Всероссийская молодежная Конференция-школа с международным участием «Современные проблемы математического моделирования» 2013г. (Абрау-Дюрсо, Новороссийск).

Доклад на XVI международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (г. Москва 2009 г.) отмечен грамотой за лучший доклад. Доклад на XVII молодежной научной конференции Объединения молодых ученых и специалистов (ОМУС-2013) (г. Дубна 2013 г.) отмечен почетным дипломом за лучший доклад секции «Математическое моделирование и вычислительная физика».

1 Обзор известных методов выделения особенностей

Задача локализации сингулярностей в газодинамических полях исследована относительно слабо и существует мало эффективных алгоритмов ее решения. В первую очередь следует упомянуть монографию Е. В. Ворожцова и Н. Н. Яненко [7] в которой алгоритмы выделения особенностей условно разбиваются на две группы. В первой группе алгоритмов локализация разрывов производится путем слежения за движением точек, соответствующих начальной конфигурации разрывов. К ней относится, например, оптимизационный метод Минакера-Пироно (Miranker–Pironneau), который применим к задачам, для которых геометрия разрывов относительно проста и слабо зависит от времени. Если со временем в течении возникают новые разрывы, то метод нуждается в модификации и комбинировании с методами определения места и времени возникновения скачка. Алгоритмы второй группы используют только мгновенные (на заданный момент времени) числовые значения параметров течения. Эти алгоритмы применимы и к методам сквозного счета, так как работают с числовыми параметрами течения в фиксированные моменты времени. Описанные в книге так называемые дифференциальные анализаторы, по сути, относятся к одномерным методам, а при рассмотрении двумерных и трехмерных задач требуется выбор лучей ортогональных линиям разрывов, что является отдельной нетривиальной задачей. Также большой интерес представляют развивающие эти работы исследования С.Б. Базарова, в которых, однако, используются лишь сравнительно простые локальные детекторы сингулярностей с вычислением градиента по всему расчетному полю.

В то же время в области обработки и распознавания изображений существует родственная задача «выделения краев» (edge detection), которая исследована довольно тщательно. К сожалению, методы «выделения краев» не достаточно эффективны при анализе газодинамических полей. Они нуждаются в модификации, поскольку не учитывают специфику расположения структуры разрывов в газодинамических течениях. Показательным является тот факт, что в большинстве методов «выделения краев» используются вейвлеты.

В этой главе приведен обзор известных методов применения вейвлетов для выделения особенностей сигнала. Некоторые из этих методов (параграфы 1.3, 1.4) имеют достаточное теоретическое обоснование, но не могут быть использованы на практике, так как либо требуют трудоемких расчетов (вычисление непрерывного вейвлет - преобразования), либо не приспособлены для анализа дискретного входного сигнала, с которым приходится иметь дело в большинстве прикладных задач. На практике могут быть использованы только некоторые дискретные модификации этих алгоритмов. Также приведено описание некоторых прикладных алгоритмов (параграфы 1.5, 1.6), включая многомасштабную версию известного детектора Кэнни. В

параграфе 1.7 описана модификация базиса вейвлетов, которая лучше адаптирована для представления двумерного сигнала и может быть использована для построения более эффективных, но и более ресурсоемких, алгоритмов выделения и анализа особенностей. В параграфе 1.8 приведен метод, предложенный С.Б. Базаровым, который не использует вейвлеты, этот метод был реализован в ходе исследований и апробирован в главе 2 (пункт 2.3.7). В параграфе 1.9 представлены методы локализации особенностей газодинамических полей, разработанные на ранних этапах исследования данной задачи.

В обзоре использованы материалы, изложенные в [14] (параграфы 1.1-1.5), [10] (параграф 1.6), [15] (параграф 1.7), [8] (параграф 1.8 и [11] (параграф 1.9) Вейвлет – анализ еще достаточно молод, поэтому в научной литературе встречаются различные определения и обозначения. В данной работе материалы, взятые из различных источников, представлены в единообразном виде, принятом в [10].

1.1 Основные определения и некоторые свойства вейвлетов

В этом параграфе приведены основные факты о связи гладкости Липшица и преобразования Фурье, а также основные определения и теоремы из теории вейвлет - анализа. Эти материалы будут использованы в дальнейшем при построении алгоритмов локализации особенностей.

1.1.1 Показатель гладкости Липшица

Чтобы характеризовать структуры с особенностями, необходимо давать точное количественное выражение гладкости сигнала $f(t)$. Показатели Липшица позволяют измерить равномерную гладкость на временных интервалах, а также и в любой точке ν . Если f имеет особенность, при $t = \nu$, которая означает, что функция недифференцируема в этой точке, то показатель Липшица при $t = \nu$ характеризует сингулярное поведение функции.

Формула Тейлора связывает дифференцируемость сигнала с локальной полиномиальной аппроксимацией. Предположим, что функция f является m раз дифференцируемой на отрезке $[\nu - h, \nu + h]$. Пусть $p_\nu(t)$ — многочлен Тейлора в окрестности ν :

$$p_\nu(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(\nu)}{k!} (t - \nu)^k.$$

Из формулы Тейлора следует, что погрешность аппроксимации

$$\varepsilon_\nu(t) = f(t) - p_\nu(t)$$

удовлетворяет условию

$$\forall t \in [v-h, v+h] \quad |\varepsilon_v(t)| \leq \frac{|t-v|^m}{m!} \sup_{u \in [v-h, v+h]} |f^m(u)|.$$

Следовательно, m -й порядок дифференцируемости функции f в окрестности точки v определяет верхнюю границу погрешности $\varepsilon_v(t)$ при t , стремящемся к v . Гладкость Липшица уточняет эту верхнюю границу введением нецелого показателя. В математической литературе показатели Липшица называются также показателями Гёльдера.

Определение 1.1 (ЛИПШИЦ). Функция f удовлетворяет условию Липшица $\alpha \geq 0$ в точке v , если существуют $K > 0$ и многочлен p_v степени $m = [\alpha]$ такие, что

$$\forall t \in R \quad |f(t) - p_v(t)| \leq K|t-v|^\alpha. \quad (1.1)$$

Функция f удовлетворяет равномерному условию Липшица α на отрезке $[a, b]$, если она удовлетворяет (1.1) для всех $v \in [a, b]$ с константой K , не зависящей от точки v .

Гладкость Липшица функции f в точке v или на отрезке $[a, b]$ есть верхняя грань α таких, что f удовлетворяет условию Липшица α .

В каждой точке v многочлен $p_v(t)$ определяется единственным образом. Если функция f непрерывно дифференцируема $m = [\alpha]$ раз в окрестности точки v , то p_v есть разложение Тейлора функции f в точке v . Показатели Липшица могут произвольно меняться от точки к точке. Если f удовлетворяет равномерному условию Липшица $\alpha > m$ в окрестности точки v , то можно убедиться, что функция f обязательно m раз непрерывно дифференцируема в этой окрестности.

Замечание. Иногда в литературе принимается, что показатель Липшица $0 \leq \alpha^* < 1$, тогда, если функция m раз непрерывно дифференцируема, в определении 1.1 $\alpha = m + \alpha^*$.

Если $0 \leq \alpha < 1$, то $p_v(t) = f(t)$ и условие Липшица (1.1) принимает вид

$$\forall t \in R \quad |f(t) - f(v)| \leq K|t-v|^\alpha.$$

Ограниченная, но разрывная в точке v функция удовлетворяет условию Липшица 0 в точке v . Если гладкость Липшица есть $\alpha < 1$ в точке v , то функция f не дифференцируема в v , и α характеризует тип особенности.

1.1.2 Условие Фурье

Равномерная гладкость Липшица функции f на R связана с асимптотическим убыванием ее преобразования Фурье.

Теорема 1.1. Функция f ограничена и удовлетворяет равномерному условию Липшица α на R , если

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)| (1 + |\omega|^\alpha) d\omega < +\infty.$$

Преобразование Фурье является мощным средством для измерения минимальной глобальной гладкости функций. Однако невозможно анализировать гладкость функции f в отдельных точках ν по убыванию $|\hat{f}(\omega)|$ при больших частотах ω . В противоположность этому, вейвлет - преобразование дает гладкость Липшица, как на интервалах (теорема 1.3), так и в отдельных точках (теорема 1.4), поскольку вейвлет - базисы, в отличие от базиса Фурье, хорошо локализованы не только в частотном, но и пространственно – временном диапазоне.

1.1.3 Вейвлеты

Определение 1.2 Функция $\psi(t) \in L^2(R)$ называется вейвлетом, если она удовлетворяет следующему соотношению допустимости:

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{-1} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Это соотношение означает, что преобразование Фурье функции $\psi(t)$ достаточно быстро стремится к нулю при $t \rightarrow 0$.

Обычно в приложениях используют более простое условие допустимости (подразумевая, что функция $\psi(t)$ гладкая и быстро убывает на бесконечности):

$$\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

Определение 1.3 Образует семейство функций

$$\psi_{u,s}(t) = |s|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right),$$

где $u, s \in R, s \neq 0$. Тогда непрерывное вейвлет – преобразование, заданное допустимым вейвлетом $\psi(t)$ определяется следующим образом:

$$Wf(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) |s|^{-1/2} \overline{\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)} dt.$$

Далеко не все вейвлеты имеют практически полезные свойства. Большим достижением последних лет было построение вейвлетов с компактным носителем. Также важными характеристиками вейвлетов являются ортогональность двоичных сдвигов и растяжений, число нулевых моментов, гладкость и др.

На практике очень важно подобрать вейвлет, обладающий необходимым, для данной задачи, набором свойств.

Свойства симметричных комплексных вейвлетов Добеши, используемых в данной работе приведены в приложении 5.1.

1.1.4 Нулевые моменты вейвлетов

Для измерения локальной гладкости сигнала не так важно использовать вейвлет с узким частотным носителем, решающим являются его нулевые моменты.

Формула Липшица (1.1) приближает f многочленом p_ν в окрестности ν .

$$f(t) = p_\nu(t) + \varepsilon_\nu(t), \text{ где } |\varepsilon_\nu(t)| \leq K|t - \nu|^\alpha.$$

Вейвлет - преобразование позволяет оценить показатель α без знания многочлена p_ν . Для этой цели может быть использован вейвлет, который имеет $n > \alpha$ нулевых моментов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0 \text{ при } 0 \leq k < n, k \in Z.$$

Вейвлет с n нулевыми моментами ортогонален многочленам степени $n-1$. Так как $\alpha < n$, то максимальная степень многочлена p_ν равна $n-1$. С помощью замены переменных $t' = (t-u)/s$ можно убедиться, что

$$Wp_\nu(u, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\nu \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt = 0.$$

Так как $f = p_\nu + \varepsilon_\nu$,

$$Wf(u, s) = W\varepsilon_\nu(u, s).$$

В параграфах 1.2, 1.3 объясняется, как измерить α по $|Wf(u, s)|$ в тех случаях, когда u принадлежит окрестности точки ν .

1.1.5 Многомасштабный дифференциальный оператор

Если вейвлет имеет n нулевых моментов, то можно показать, что вейвлет - преобразование можно интерпретировать как многомасштабный дифференциальный оператор порядка n . Это позволяет установить основополагающую связь между дифференцируемостью функции f и убыванием модуля ее вейвлет - преобразования при убывании масштаба.

Следующая теорема утверждает, что вейвлет имеющий n нулевых моментов может быть записан как производная n -го порядка быстроубывающей функции θ , а вейвлет - преобразование $Wf(u, s)$ – как n -я производная усреднения функции по области пропорциональной масштабу s .

Предполагается, что вейвлет ψ имеет быстрое убывание; это означает, что для любого показателя убывания $m \in \mathbb{N}$ существует константа C_m такая, что

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |\psi(t)| \leq \frac{C_m}{1 + |t|^m}.$$

Теорема 1.2. Вейвлет ψ с быстрым убыванием имеет n нулевых моментов тогда и только тогда, когда существует быстроубывающая функция θ такая, что

$$\psi(t) = (-1)^n \frac{\partial^n \theta(t)}{\partial t^n}.$$

Как следствие

$$Wf(u, s) = s^n \frac{\partial^n}{\partial u^n} (f * \bar{\theta}_s)(u), \text{ где } \bar{\theta}_s(t) = s^{-1/2} \bar{\theta}(-t/s). \quad (1.2)$$

Более того, вейвлет ψ имеет не более чем n нулевых моментов тогда и только тогда, когда $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) dt \neq 0$.

Если $K = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) dt \neq 0$, то свертка $f * \bar{\theta}_s(t)$ может быть интерпретирована как усреднение функции f с весом — ядром, растянутым в s раз. Из (1.2) следует, что $Wf(u, s)$ есть n -я производная усреднения f по области, пропорциональной s .

Так как θ имеет быстрое убывание, то можно убедиться, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{\theta}_s = K \delta$$

в смысле слабой сходимости. Это означает, что для любой ϕ , которая непрерывна в точке u ,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \phi * \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{\theta}_s(u) = K\phi(u).$$

Если функция f n раз непрерывно дифференцируема в окрестности u , то (1.2) означает, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{Wf(u, s)}{s^{n+1/2}} = \lim_{s \rightarrow 0} f^{(n)} * \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{\theta}_s(u) = Kf^{(n)}(u). \quad (1.3)$$

В частности, если f принадлежит C^n с ограниченной n -й производной, то $|Wf(u, s)| = O(s^{n+1/2})$. Это — основополагающая связь убывания $|Wf(u, s)|$ при уменьшении s и равномерной гладкости f . Более тонкие соотношения изучаются ниже.

1.1.6 Многомасштабный (кратномасштабный) анализ

На практике часто необходимо иметь возможность анализировать только определенные детали исследуемых сигналов. При обработке изображений для этого можно, например, построить многомасштабную пирамиду, и первоначально проводить обработку изображения с низким разрешением, а затем при необходимости локально повышать разрешение. Вейвлеты порождают естественную структуру масштабов, а также позволяют получить алгоритмы быстрого разложения исходного сигнала по масштабам.

Определение 1.4 (БАЗИСС РИССА) Система функций $\{\theta_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ образует базис Рисса в пространстве V , если функции системы линейно независимы, линейная оболочка системы функций $\{\theta_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ является всюду плотной в V и существуют константы A и B , $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для любой суммируемой с квадратом последовательности $\{c_n\} \in l^2$ выполняется соотношение:

$$A \|\{c_n\}\|_{l^2}^2 \leq \left\| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \theta_n \right\|_2^2 \leq B \|\{c_n\}\|_{l^2}^2.$$

Определение 1.5 (КРАТНОМАСШТАБНЫЕ ПРОСТРАНСТВА). Последовательность замкнутых пространств $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ из $L^2(\mathbb{R})$ образует кратномасштабную аппроксимацию, если удовлетворяются следующие шесть свойств:

- 15) $\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2 \quad f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j,$
- 16) $\forall j \in \mathbb{Z} \quad V_{j+1} \subset V_j,$

$$17) \quad \forall j \in Z \quad f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1},$$

$$18) \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\},$$

$$19) \quad \text{clos}_{L^2} \left(\bigcup_{j \in Z} V_j \right) = L^2(\mathbf{R}),$$

20) Существует функция $\theta(t)$ такая, что семейство $\{\theta(t-n)\}_{n \in Z}$ образует базис Рисса в пространстве V_0 .

Пусть W_{n+1} ортогональное дополнение V_{n+1} в V_n : $V_n = V_{n+1} \oplus W_{n+1}$, тогда $V_0 \oplus \sum_{k=0}^{-n} W_k = \bigoplus_{k=-\infty}^{-n} W_k = V_{-(n+1)}$ и $\text{clos}_{L^2} \left(\bigoplus_{k \in Z} W_k \right) = L^2(\mathbf{R})$.

1.1.7 Масштабирующая (скейлинг) функция и материнский вейвлет

Пусть $\{V_j\}_{j \in Z}$ - кратномасштабная аппроксимация и семейство $\{\theta(t-n)\}_{n \in Z}$ образует базис Рисса в пространстве V_0 , а преобразование Фурье функции $\varphi(t)$ есть:

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{\hat{\theta}(\omega)}{\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2 \right)^{1/2}},$$

тогда семейство $\{\varphi_{n,j}\}_{n \in Z}$, где $\varphi_{n,j}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \varphi\left(\frac{t-n}{2^j}\right)$, образует ортонормированный базис пространства V_j при всех $j \in Z$.

Функция $\varphi(t)$ называется масштабирующей (скейлинг) функцией или отцовской функцией.

Из третьего свойства кратномасштабной аппроксимации следует, что функция $\varphi\left(\frac{t}{2}\right)$ может быть представлена в виде разложения по системе сдвигов $\{\varphi(t-n)\}_{n \in Z}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \varphi(t-n).$$

Из этого следует, что: $\hat{\varphi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(\omega) \hat{\varphi}(\omega)$, где $\hat{h}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n e^{-in\omega}$.

Функция $\varphi(t)$ и коэффициенты $\{h_n\}_{n \in Z}$ обладают следующими свойствами [16]:

$$21) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n = \hat{h}(0) = \sqrt{2},$$

$$22) \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1,$$

$$23) \quad \forall \omega \in R \quad |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2,$$

$$24) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h_n = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{2n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$25) \quad \hat{h}(\pi) = 0,$$

$$26) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{n-2k} \bar{h}_{n-2l} = \delta_{kl},$$

$$27) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(t-n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(n) = 1.$$

Пусть:

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n \varphi(2t-n), \quad \text{при} \quad g_n = (-1)^n \bar{h}_{1-n},$$

тогда можно показать, что семейство $\{\omega_{n,j}\}_{n \in Z}$, где $\omega_{n,j}(t) = \psi_{n,2^j}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t-n}{2^j}\right)$, образует ортонормированный базис пространства W_j при всех $j \in Z$.

Функция $\psi(t)$ называется *материнским вейвлетом*.

1.1.8 Вейвлет – фильтры и дискретное вейвлет - преобразование

Коэффициенты $\{h_k\}_{k \in Z}$ и $\{g_k\}_{k \in Z}$ называют *низкочастотным и высокочастотным вейвлет – фильтрами* соответственно.

Пусть функция $f(t) \in V_j$, тогда $f(t)$ можно разложить по системе функций $\{\varphi_{k,j}\}_{k \in Z}$: $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^o \varphi_{k,j}(t)$. Из определения семейства пространств $\{W_j\}_{j \in Z}$ и второго свойства кратномасштабной аппроксимации следует, что функцию $f(t)$ можно представить в виде суммы функций $f(t) = f_1(t) + r_1(t)$, таких, что $f_1(t) \in V_{j+1}$ и $r_1(t) \in W_{j+1}$, это означает, что $f(t)$ можно разложить на две компоненты: сглаженную $f_1(t)$ и шумливую $r_1(t)$. Очевидно, что функции $f_1(t)$ и $r_1(t)$ можно представить в виде разложения:

$$\begin{cases} f_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^1 \varphi_{k,j+1}(t), \\ r_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k^1 \omega_{k,j+1}(t). \end{cases}$$

Аналогично функцию $f_n(t) \in V_{j+n}$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$) можно представить в виде суммы функций $f_n(t) = f_{n+1}(t) + r_{n+1}(t)$, таких, что $f_{n+1}(t) \in V_{j+n+1}$ и $r_{n+1}(t) \in W_{j+n+1}$.

Фильтры $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ и $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ могут быть использованы для вычисления коэффициентов разложения $\{c_k^n\}_{k \in \mathbb{Z}}$ и $\{d_k^n\}_{k \in \mathbb{Z}}$ функции $f(t)$ по пространствам кратномасштабной аппроксимации, а также для восстановления исходной функции по коэффициентам разложения, поскольку:

$$\begin{cases} c_k^{n+1} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \bar{h}_{j-2k} c_j^n, \\ d_k^{n+1} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \bar{g}_{j-2k} c_j^n, \\ c_k^n = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_{k-2j} c_j^{n+1} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} g_{k-2j} d_j^{n+1}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Для ускорения вычисления сверток в (1.4) можно использовать алгоритм быстрого преобразования Фурье [17, 18] и быстрой свертки.

Часто на практике при анализе функции $f(t) \in L^2$ на первом шаге отождествляют значения функции в целочисленных узлах $\{f_k = f(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ с коэффициентами $\{c_k^0\}_{k \in \mathbb{Z}}$ её разложения по базису $\{\varphi_{k,0}\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Затем, с помощью формул (1.4), вычисляется дискретное вейвлет – разложение сигнала $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ по масштабам. Таким образом, вейвлет – анализ позволяет использовать быстрые дискретные алгоритмы для разложения сигнала по пространствам кратномасштабной аппроксимации.

1.2 Связь асимптотики убывания вейвлет - преобразования с равномерной гладкостью Липшица на отрезке

Убывание амплитуды вейвлет - преобразования в зависимости от масштаба связано с равномерной и точечной гладкостью Липшица сигнала. Измерение этого асимптотического убывания эквивалентно приближению структур сигнала при масштабе, стремящемся к нулю. Предполагается, что вейвлет ψ имеет n нулевых моментов и принадлежит классу функций C^n с быстроубывающими производными. Это означает, что для любого $0 \leq k \leq n$ и $m \in \mathbb{N}$ существует константа C_m такая, что

$$\forall t \in R \quad |\psi^{(k)}(t)| \leq \frac{C_m}{1+|t|^m}.$$

Следующая теорема связывает равномерную гладкость Липшица функции f на интервале с амплитудой ее вейвлет - преобразования при малых масштабах.

Теорема 1.3. Если функция $f \in L^2(R)$ удовлетворяет равномерному условию Липшица α , $\alpha \leq n$ на отрезке $[a, b]$, то существует число $A > 0$ такое, что

$$\forall (u, s) \in [a, b] \times R^+ \quad |Wf(u, s)| \leq As^{\alpha+1/2}. \quad (1.5)$$

Обратно, если функция f ограничена и $Wf(u, s)$ удовлетворяет (1.5) для нецелого $\alpha < n$. Тогда f удовлетворяет равномерному условию Липшица α на отрезке $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ при любом $\varepsilon > 0$.

Неравенство (1.5) на самом деле есть условие асимптотического убывания $|Wf(u, s)|$ при s , стремящемся к нулю. При больших масштабах это не накладывает никаких ограничений, так как неравенство Коши-Шварца гарантирует ограниченность вейвлет - преобразования:

$$|Wf(u, s)| = |\langle f, \psi_{u,s} \rangle| \leq \|f\| \|\psi\|$$

При убывании масштаба $Wf(u, s)$ измеряет мелкомасштабные изменения в окрестности u . В теореме 1.3 доказывается, что $|Wf(u, s)|$ убывает как $s^{\alpha+1/2}$ на интервалах, где функция f удовлетворяет равномерному условию Липшица α .

В противоположность преобразованию Фурье, которое дает условие гладкости Липшица на R (теорема 1.1), вейвлет - преобразование дает условие гладкости Липшица, которое локализовано на конечном интервале и тем обеспечивает необходимое и почти достаточное условие. Если $[a, b] = R$, то (1.5) есть необходимое и достаточное условие того, что f удовлетворяет равномерному условию Липшица α на R .

Если ψ имеет точно n нулевых моментов, то убывание вейвлет - преобразования не дает информации о гладкости Липшица функции f при $\alpha > n$. Если f удовлетворяет равномерному условию Липшица $\alpha > n$, то она принадлежит C^n и из (1.3) следует, что $\lim_{s \rightarrow 0} s^{-n-1/2} Wf(u, s) = Kf^{(n)}(u)$, где $K \neq 0$. Из этого следует, что $|Wf(u, s)| \sim s^{n+1/2}$ при малых масштабах, несмотря на более высокую гладкость функции f .

Если показатель Липшица α — целое число, то неравенства (1.5) недостаточно для того факта, что f удовлетворяет равномерному условию Липшица α . Если $[a, b] = R$, $\alpha = 1$ и ψ имеет два нулевых момента, то класс функций, удовлетворяющих (1.5), называется классом Зиг-

мунда [19]. Он немного шире, чем множество функций, удовлетворяющих равномерному условию Липшица 1. Например, $f(t) = t \ln t$ принадлежит классу Зигмунда, хотя не удовлетворяет условию Липшица 1 при $t = 0$.

1.3 Точечная гладкость Липшица

Изучение показателей Липшица в точках с помощью вейвлет - преобразования — это деликатная и красивая тема, которая своими корнями уходит в работы Литтлвуда и Пэли 1930-х годов по характеристике пространств Соболева. Характеризовать гладкость функции f в точке ν может быть очень трудно, потому что f может иметь различные виды особенностей, присутствующих в окрестности точки ν . В 1984 году Бони [20] ввел теорию «дважды микролокализации», которая уточняет подход Литтлвуда-Пэли для получения точечной характеристики особенностей, которую он использовал для изучения решения гиперболических уравнений в частных производных. Эти технические результаты становятся гораздо проще в работах Жаффара [21], который доказал, что «дважды микролокализационные» свойства эквивалентны специфическим условиям на убывание амплитуды вейвлет - преобразования. Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие на вейвлет - преобразование для оценки гладкости Липшица функции f в точке ν .

1.3.1 Теорема Жаффара

Предполагается, что вейвлет ψ имеет n нулевых моментов и n производных с быстрым убыванием.

Теорема 1.4 (ЖАФФАРА). Если функция $f \in L^2(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию Липшица $\alpha \leq n$ в точке ν , то существует число A такое, что

$$\forall (u, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad |Wf(u, s)| \leq As^{\alpha+1/2} \left(1 + \left| \frac{u - \nu}{s} \right|^\alpha \right). \quad (1.6)$$

Обратно, если $\alpha < n$ — нецелое, и существуют A и $\alpha' < \alpha$ такие, что

$$\forall (u, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad |Wf(u, s)| \leq As^{\alpha+1/2} \left(1 + \left| \frac{u - \nu}{s} \right|^{\alpha'} \right), \quad (1.7)$$

то функция f удовлетворяет условию Липшица α в точке ν .

1.3.2 Конус влияния

Необходимое условие (1.6) и достаточное условие (1.7), можно интерпретировать более ясно. Пусть вейвлет ψ имеет компактный носитель, равный $[-C, C]$, тогда конус влияния точки v в масштабно-пространственной плоскости — это множество точек (u, s) таких, что точка v содержится в носителе $\psi_{u,s}(t) = s^{-1/2}\psi((t-u)/s)$. Так как носитель $\psi((t-u)/s)$ равен $[u - Cs, u + Cs]$, то конус влияния v определяется неравенством

$$|u - v| \leq Cs.$$

Это иллюстрирует рисунок 1.1. Если u находится в конусе влияния точки v , то $Wf(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle$ зависит от значения функции f в окрестности v . Так как $|u - v|/s \leq C$, то условия (1.6) и (1.7) могут быть записаны в виде:

$$|Wf(u, s)| \leq A' s^{\alpha+1/2},$$

что тождественно равномерному условию Липшица (1.5), данному в теореме 1.3.

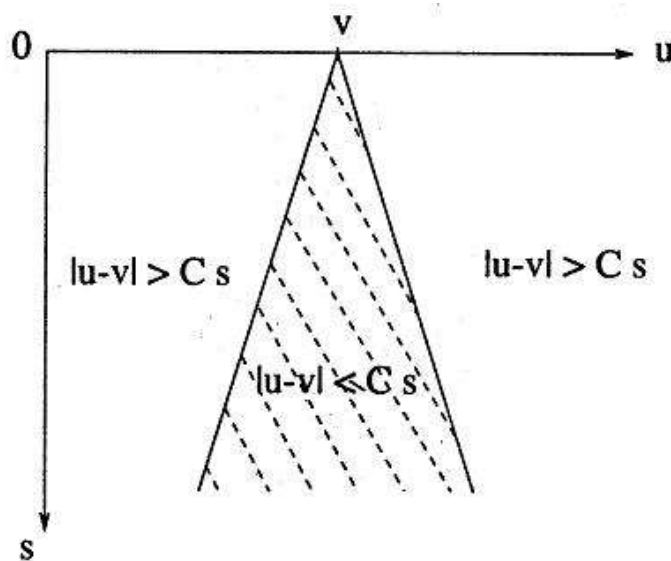


Рисунок 1.1 – Конус влияния абсциссы v состоит из пространственно-масштабных точек (u, s) , для которых носитель $\psi_{u,s}(t)$ пересекает прямую $t = v$

На рисунке 1.2 изображено вейвлет - преобразование $Wf(u, s)$, вычисленное с $\psi = -\theta'$, где θ — функция Гаусса, для имеющего особенности сигнала $f(t)$. Переменная u и масштаб s

изменяются соответственно вдоль горизонтальной и вертикальной осей. Черные, серые и белые точки обозначают соответственно положительные, нулевые и отрицательные вейвлет - коэффициенты. Видно, что особенности создают коэффициенты с большими амплитудами в конусах их влияния.

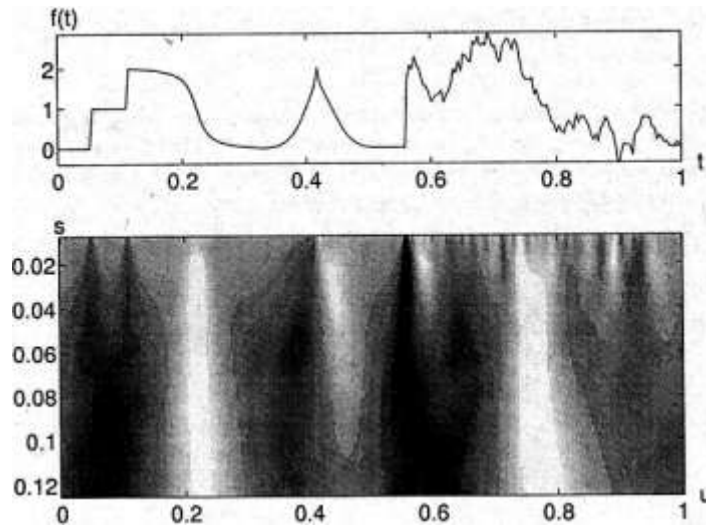


Рисунок 1.2 – Вейвлет - преобразование $Wf(u, s)$, вычисленное с $\psi = -\theta'$, где θ — функция Гаусса, для сигнала f , показанного выше

1.4 Максимумы модуля вейвлет – преобразования

В теоремах 1.3 и 1.4 доказывается, что гладкость Липшица функции f в точке ν зависит от убывания $|Wf(u, s)|$ при малых масштабах в окрестности ν . Однако нет необходимости прямого измерения этого убывания в масштабно-временной плоскости (u, s) . В данном параграфе показано, что убывание $|Wf(u, s)|$ может быть проконтролировано по его максимальным значениям.

1.4.1 Максимумы модуля и выделение особенностей

Термин максимум модуля будет использоваться для описания любой точки (u_0, s_0) такой, что $|Wf(u, s_0)|$ имеет локальный максимум в точке $u = u_0$. Это означает, что

$$\frac{\partial Wf(u_0, s_0)}{\partial u} = 0.$$

Этот локальный максимум должен быть строгим локальным максимумом в правой или левой окрестности u_0 , чтобы исключить другие локальные максимумы, когда $|Wf(u, s_0)|$ константа. Линией максимумов будем называть любую связную кривую $s(u)$ в пространственно-масштабной плоскости (u, s) , все точки которой — это точки максимумов модуля. Так, на рисунке 1.3 показаны линии максимумов вейвлет - преобразования сигнала.

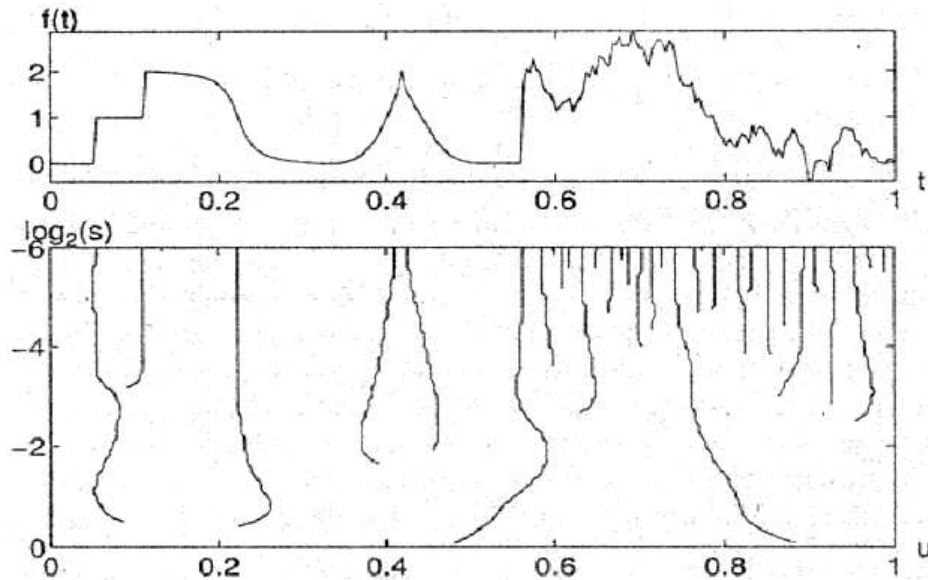


Рисунок 1.3 – Максимумы модуля $Wf(u, s)$

Особенности выделяются путем нахождения абсцисс, к которым сходятся максимумы модуля при малых масштабах. Чтобы лучше понять свойства этих максимумов, следует записать вейвлет - преобразование как многомасштабный дифференциальный оператор. В теореме 1.2 доказывается, что если ψ имеет точно n нулевых моментов и компактный носитель, то существует функция θ с компактным носителем такая, что $\psi = (-1)^n \theta^{(n)}$, где $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) dt \neq 0$, а вейвлет - преобразование можно переписать как многомасштабный дифференциальный оператор (1.2).

Если вейвлет имеет только один нулевой момент, то максимумы модуля — это максимумы производной первого порядка функции f , сглаженной $\bar{\theta}_s$, как это проиллюстрировано на рисунке 1.4. Эти многомасштабные максимумы модуля используются для определения местонахождения разрывов и перепадов в изображениях. Если вейвлет имеет два равных нулю момента, то максимумы модуля соответствуют локальным максимумам кривизны.

В следующей теореме доказывается, что если $Wf(u, s)$ не имеет локальных максимумов

модуля при малых масштабах, то f — локально гладкая функция.

Теорема 1.5 (МАЛЛА, ХВОНГ). Предположим, что ψ из C^n имеет компактный носитель и $\psi = (-1)^n \theta^{(n)}$ при $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) dt \neq 0$. Пусть $f \in L^1[a, b]$. Если существует $s_0 > 0$ такое, что $|Wf(u, s)|$ не имеет локальных максимумов при $u \in [a, b]$ и $s < s_0$, то f удовлетворяет равномерному условию Липшица n на $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$.

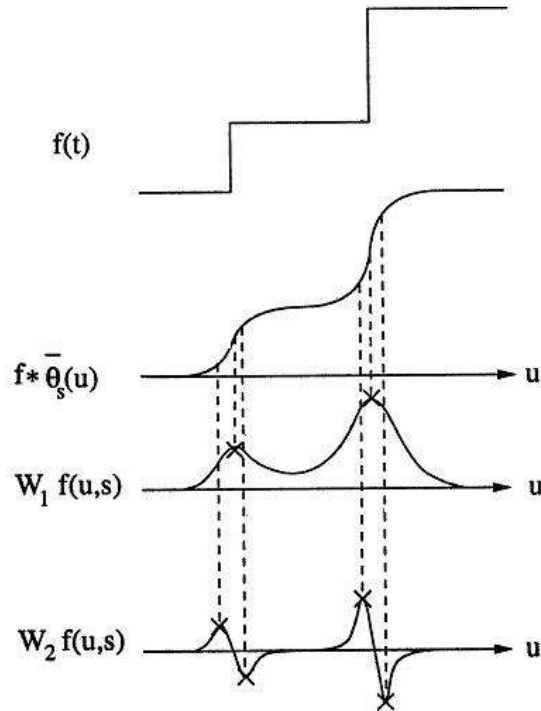


Рисунок 1.4 – Свертка $f * \bar{\theta}_s(u)$ усредняет f по области, пропорциональной s . Если $\psi = -\theta'$, то $W_1 f(u, s) = s \frac{d}{du} (f * \bar{\theta}_s)(u)$ имеет максимумы модуля в точках резкого изменения $f * \bar{\theta}_s(u)$. Если

$$\psi = \theta'', \text{ то максимумы модуля } W_2 f(u, s) = s^2 \frac{d^2}{du^2} (f * \bar{\theta}_s)(u) \text{ соответствуют локальным}$$

максимумам кривизны

Эти точки максимумов модуля могут быть расположены как вдоль одной и той же линии максимумов, так и вдоль нескольких линий максимумов. Этот результат гарантирует, что все особенности выделяются, если следовать максимумам модуля вейвлет-преобразования при уменьшении масштаба. Рисунок 1.4 дает пример, когда все особенности получаются при следовании по линиям максимумов.

Эта теорема доказана в [22]. Из нее вытекает, что если функция f имеет особенность (не

удовлетворяет условию Липшица 1) в точке ν , то существует последовательность точек вейвлет - максимумов $(u_p, s_p)_{p \in \mathbb{N}}$, которая сходится к точке ν при малых масштабах:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} u_p = \nu \text{ и } \lim_{p \rightarrow +\infty} s_p = 0.$$

1.4.2 Распространение максимумов

Для произвольного вейвлета $\psi = (-1)^n \theta^{(n)}$ нет гарантии, что максимум модуля, расположенный в точке (u_0, s_0) , принадлежит линии максимумов, которая распространяется по направлению к малым масштабам. Когда s убывает, $Wf(u, s)$ может не иметь больше максимумов в окрестности $u = u_0$. Однако этого не может быть, если θ — функция Гаусса.

Утверждение 1.1 (ХЮММЕЛЬ, ПОДЖИО, ЮИЙ). Пусть $\psi = (-1)^n \theta^{(n)}$, где θ — функция Гаусса. Для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ максимумы модуля $Wf(u, s)$ принадлежат связным кривым, которые никогда не прерываются при убывании масштаба.

Производные функции Гаусса часто используются для гарантии того, что линии максимумов распространяются до самых малых масштабов. Объединение максимумов модуля в линии также позволяет удалить ложные максимумы модуля, возникших за счет численных погрешностей в областях, где вейвлет - преобразование близко к нулю.

Оценка асимптотики и отслеживание линий максимумов, требует вычисления непрерывного вейвлет – преобразования. Это требует больших вычислительных мощностей, кроме того на практике, в большинстве случаев, приходится работать с дискретными сигналами. Поэтому для анализа необходимы эффективные дискретные алгоритмы.

Чтобы построить дискретные версии описанных выше алгоритмов требуется учитывать необходимость предельного перехода, что не всегда возможно в реальных задачах. Тем не менее, можно построить алгоритмы, которые имеют широкую область применения, один из них — алгоритм Кэнни.

1.5 Многомасштабное выделение перепадов

Перепады в структурах изображений часто являются наиболее важной особенностью при распознавании изображения. Однако понятие перепада изображения далеко не очевидно. Его можно определить как точки, где интенсивность изображения имеет резкие переходы, но более внимательный взгляд показывает, что это определение часто неудовлетворительно. Текстура изображения может иметь резкие изменения интенсивности, которые часто не рассматриваются

как перепады. Если смотреть на кирпичную стену, то можно решить, что перепады — это контуры стены, там, где кирпичи определяют ее границы. С другой стороны, можно включить контуры каждого кирпича во множество перепадов и рассматривать негладкую поверхность каждого кирпича как текстуру. Умение разбираться в текстуре на основе перепадов зависит от масштабности анализа. Это побудило исследователей компьютерной визуализации выделять резкие изменения изображения при различных масштабах [23, 24]. Данный раздел описывает многомасштабный детектор перепадов Кэнни [25]. Применение детектора эквивалентно выделению максимумов модуля в двумерном вейвлет - преобразовании [26]. Гладкость Липшица точек перепада выводится из убывания максимальных вейвлет - модулей в зависимости от масштаба.

1.5.1 Алгоритм Кэнни выделения перепадов

Алгоритм Кэнни выделяет точки резкого изменения функции $f(x_1, x_2)$ с помощью вычисления модуля её вектора градиента

$$\vec{\nabla}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right).$$

Частная производная f в направлении единичного вектора $\vec{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ в плоскости $x = (x_1, x_2)$ вычисляется как скалярное произведение с вектором градиента

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \vec{\nabla}f \cdot \vec{n} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial x_2} \sin \alpha.$$

Абсолютное значение этой частной производной максимально, если вектор \vec{n} коллинеарен $\vec{\nabla}f$. Это показывает, что $\vec{\nabla}f(x)$ параллелен направлению максимального изменения поверхности $f(x)$. Точка $y \in R^2$ определяется как перепад, если $|\vec{\nabla}f(x)|$ имеет локальный максимум при $x = y$, когда $x = y + \lambda \vec{\nabla}f(y)$ для достаточно малых $|\lambda|$. Это означает, что частные производные f достигают локального максимума при $x = y$, когда x изменяется в одномерной окрестности y вдоль направления максимального изменения f в точке y . Эти точки перепада — точки перегиба f .

На практике в структуру детектора часто вводят параметр чувствительности α , при этом из множества перепадов исключаются те, для которых $|\vec{\nabla}f(x)| < \alpha$. Это позволяет избавиться от артефактов, порожденных шумовыми эффектами, но требует более активного участия пользователя в процессе обработки данных.

1.5.2 Многомасштабное выделение перепадов

Многомасштабная версия этого детектора перепада выполняется сглаживанием поверхности с растянутым ядром свертки $\theta(x)$. Это ядро вычисляется с помощью вейвлетов, которые являются частными производными θ :

$$\psi^1 = -\frac{\partial \theta}{\partial x_1} \text{ и } \psi^2 = -\frac{\partial \theta}{\partial x_2}.$$

Для экономии вычислений и памяти рассматриваются только масштабы вейвлет - преобразования, соответствующие двоичной последовательности $\{2^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Если обозначить

$$\psi_{2^j}^k(x_1, x_2) = \frac{1}{2^j} \psi^k\left(\frac{x_1}{2^j}, \frac{x_2}{2^j}\right) \text{ и } \bar{\psi}_{2^j}^k(x) = \psi_{2^j}^k(-x), \text{ где } k = 1, 2 \text{ и } x = (x_1, x_2),$$

то двоичное вейвлет - преобразование функции $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ в точке $u = (u_1, u_2)$ в двух направлениях может быть записано в виде:

$$W^k f(u, 2^j) = \langle f(x), \psi_{2^j}^k(x-u) \rangle = f * \bar{\psi}_{2^j}^k(u) \text{ (при } k = 1, 2). \quad (1.8)$$

Затем, если обозначить $\theta_{2^j}(x) = 2^{-j} \theta(2^{-j} x)$ и $\bar{\theta}_{2^j}(x) = \bar{\theta}_{2^j}(-x)$, то два масштабированных вейвлета могут быть переписаны в виде

$$\bar{\psi}_{2^j}^1 = 2^j \frac{\partial \bar{\theta}_{2^j}}{\partial x_1} \text{ и } \bar{\psi}_{2^j}^2 = 2^j \frac{\partial \bar{\theta}_{2^j}}{\partial x_2}.$$

Таким образом, из (1.8) следует, что компоненты вейвлет - преобразования пропорциональны координатам вектора градиента функции f , сглаженного ядром $\bar{\theta}_{2^j}$:

$$\begin{pmatrix} W^1 f(u, 2^j) \\ W^2 f(u, 2^j) \end{pmatrix} = 2^j \begin{pmatrix} \frac{\partial (f * \bar{\theta}_{2^j})(u)}{\partial u_1} \\ \frac{\partial (f * \bar{\theta}_{2^j})(u)}{\partial u_2} \end{pmatrix} = 2^j \bar{\nabla} (f * \bar{\theta}_{2^j})(u). \quad (1.9)$$

Модуль этого вектора градиента пропорционален модулю вейвлет - преобразования

$$Mf(u, 2^j) = \sqrt{|W^1 f(u, 2^j)|^2 + |W^2 f(u, 2^j)|^2}$$

Пусть $Af(u, 2^j)$ — угол вектора вейвлет - преобразования (1.9) в плоскости (x_1, x_2) :

$$Af(u, 2^j) = \begin{cases} \alpha(u), & W^1 f(u, 2^j) \geq 0, \\ \pi - \alpha(u), & W^1 f(u, 2^j) < 0, \end{cases}$$

$$\text{где } \alpha(u) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{W^2 f(u, 2^j)}{W^1 f(u, 2^j)} \right).$$

Единичный вектор $\vec{n}_j(u) = (\cos Af(u, 2^j), \sin Af(u, 2^j))$ коллинеарен вектору $\vec{\nabla}(f * \bar{\theta}_{2^j})(u)$. Точка перепада с масштабом 2^j — это точка ν такая, что $Mf(u, 2^j)$ имеет локальный максимум при $u = \nu$, когда $u = \nu + \lambda \vec{n}_j(\nu)$ для достаточно малых $|\lambda|$. Эти точки называются также максимумами модуля вейвлет - преобразования. Сглаженное изображение $f * \bar{\theta}_{2^j}$ имеет точку перегиба в расположении максимума модуля. Рисунок 1.5 иллюстрирует пример, где максимумы модуля вейвлет - преобразования расположены вдоль контура круга.

1.5.3 Кривые максимумов

Отдельные максимумы вейвлет - модулей, объединенные вместе, образуют кривые максимумов, которые следуют вдоль перепадов. В любой области касательная к кривой перепада аппроксимируется вычислением касательной к линии уровня. Это направление касательной используется для объединения вейвлет - максимумов, расположенных вдоль одной кривой хребта.

Линии уровня $g(x)$ — это кривые $x(s)$ в плоскости (x_1, x_2) , где $g(x(s))$ — константа. Параметр s есть длина дуги линии уровня. Пусть $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ — направление касательной к кривой $x(s)$. Так как $g(x(s))$ — константа при изменении s , $\frac{\partial g(x(s))}{\partial s} = \frac{\partial g}{\partial x_1} \tau_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} \tau_2 = \vec{\nabla} g \cdot \vec{\tau} = 0$.

Поэтому вектор $\vec{\nabla} g(x)$ ортогонален направлению $\vec{\tau}$ касательной линии уровня, которая проходит через x .

Из этого свойства линии уровня, примененного к $g = f * \bar{\theta}_{2^j}$, следует, что в точке максимума ν вектор $\vec{n}_j(\nu)$ с углом $Af(\nu, 2^j)$ перпендикулярен линии уровня $f * \bar{\theta}_{2^j}$, проходящей через ν . Если профиль интенсивности остается константой вдоль перепада, то точки перегиба (точки максимума) расположены вдоль линии уровня. Поэтому касательная к кривой максимумов перпендикулярна $\vec{n}_j(\nu)$. Профиль интенсивности перепада может и не быть константой, но его изменения часто пренебрежимо малы в окрестности размера 2^j для достаточно малого масштаба 2^j , исключения составляют окрестности угловых точек. Касательная к кривой максимумов в этом случае почти перпендикулярна вектору $\vec{n}_j(\nu)$. Поэтому в дискретных вычисле-

ниях кривые максимумов восстанавливаются объединением вместе любых двух вейвлет - максимумов в точках ν и $\nu + \bar{n}$, которые являются соседними на решетке выборки изображения и таких, что вектор \bar{n} почти перпендикулярен $\bar{n}_j(\nu)$.

Пример. Двоичное вейвлет - преобразование изображения на рисунок 1.5 дает модули изображений $Mf(2^j, \nu)$, максимумы которых расположены вдоль границы диска. Этот круговой перепад есть также линия уровня изображения. Поэтому вектор $\bar{n}_j(\nu)$ с углом $Af(2^j, \nu)$ перпендикулярен к перепаду в точках максимумов.

1.5.4 Гладкость Липшица

Убывание двумерного вейвлет - преобразования зависит от гладкости функции f . Такой анализ сужается до показателей Липшица $0 \leq \alpha \leq 1$. Говорится, что функция f удовлетворяет условию Липшица α в точке $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, если существует $K > 0$ такое, что для всех $(x_1, x_2) \in R^2$

$$|f(x_1, x_2) - f(\nu_1, \nu_2)| \leq K(|x_1 - \nu_1|^2 + |x_2 - \nu_2|^2)^{\alpha/2}. \quad (1.10)$$

Если существует $K > 0$ такое, что (1.10) выполняется для всех $\nu \in \Omega$, то f удовлетворяет равномерному условию Липшица α в области Ω . Как и в одномерном случае, гладкость Липшица функции f связана с асимптотическим убыванием $|W^1 f(u, 2^j)|$ и $|W^2 f(u, 2^j)|$ в соответствующей окрестности. Это убывание определяется величиной $Mf(u, 2^j)$. Как и в теореме 1.3, можно доказать, что f удовлетворяет равномерному условию Липшица α внутри ограниченной области R^2 тогда и только тогда, когда существует $A > 0$ такое, что для всех u внутри этой области и для всех масштабов 2^j

$$|Mf(u, 2^j)| \leq A 2^{j(\alpha+1)}. \quad (1.11)$$

Если изображение имеет изолированную кривую, на которой f имеет гладкость Липшица α , то значение $|Mf(u, 2^j)|$ в двумерной окрестности этой кривой может быть ограничено значениями вейвлет - модулей вдоль кривой перепада. Гладкость Липшица α перепада оценивается с помощью (1.11) измерением наклона $\log_2 |Mf(u, 2^j)|$ как функции j .

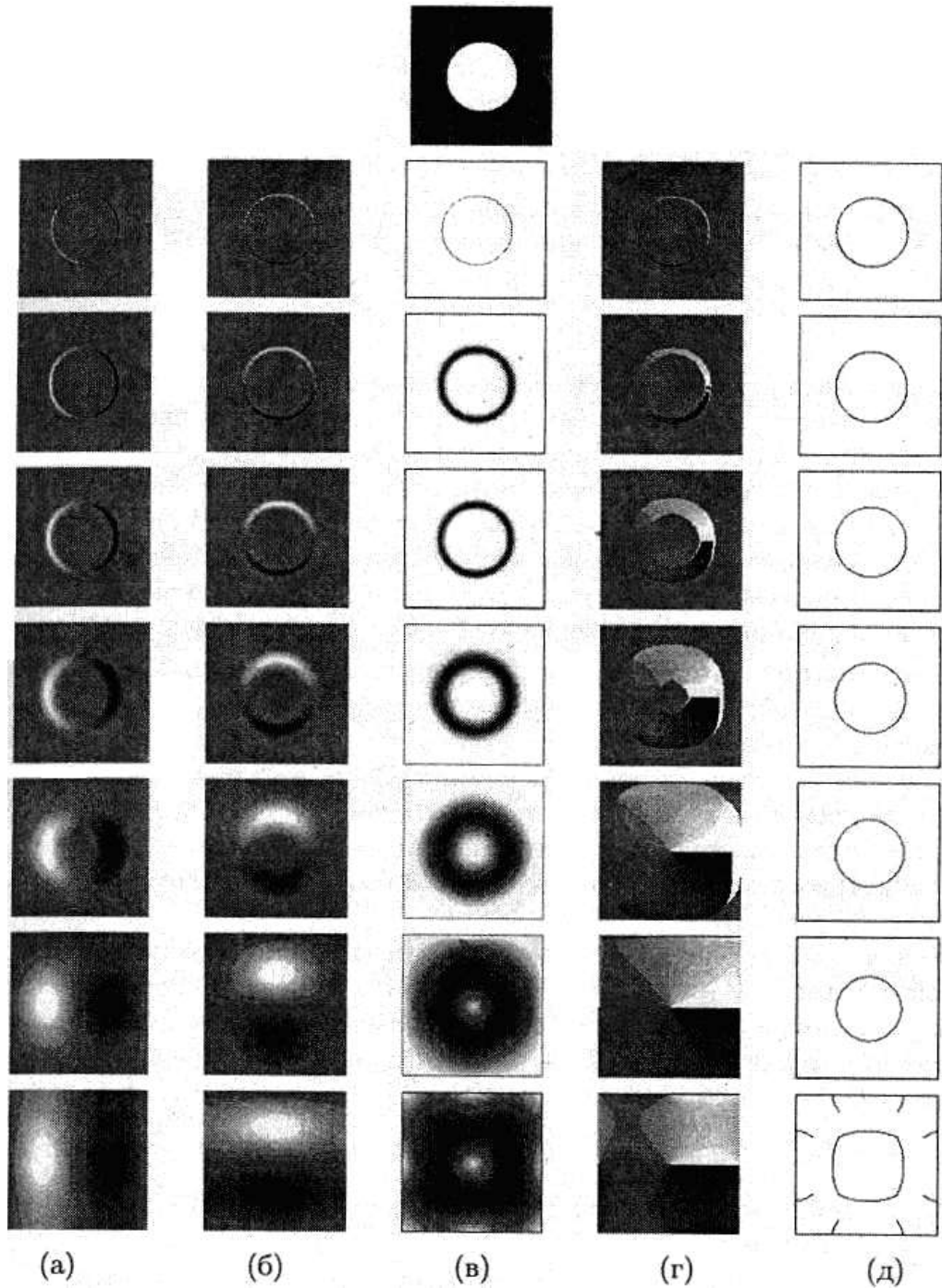


Рисунок 1.5 – Верхнее изображение имеет $N^2 = 128^2$ пикселей. Столбец (а) - вейвлет - преобразование в горизонтальном направлении с масштабом 2^j , который возрастает сверху вниз: $\{W^1 f(u, 2^j)\}_{-6 \leq j \leq 0}$. Черный, серый и белый пиксели соответственно определяют отрицательные, нулевые и положительные значения. Столбец (б) - вейвлет - преобразование в вертикальном направлении: $\{W^2 f(u, 2^j)\}_{-6 \leq j \leq 0}$. Столбец (в) - модули вейвлет - преобразования $\{Mf(u, 2^j)\}_{-6 \leq j \leq 0}$. Белые и черные пиксели соответственно определяют нулевые коэффициенты и коэффициенты с большой амплитудой. Столбец (г) - углы $\{Af(u, 2^j)\}_{-6 \leq j \leq 0}$ в точках, где модули не равны нулю. Столбец (д) - максимумы вейвлет - модулей — черные линии

1.6 Увеличение четкости изображений, при помощи Лапласиана

Приведенный в этом параграфе алгоритм, основан на использовании специфической структуры скейлинг функции $\varphi(x)$ симметричных комплексных вейвлетов Добеши (приложение 5.2):

$$\varphi(x) = u(x) + v(x) \approx (1 + i\alpha\partial_x^2)u(x).$$

Одновременное наличие сглаживающего ядра и его Лапласиана в комплексной скейлинг функции может быть использовано для определения некоторых элементарных операций на вейвлет коэффициентах. Вещественная и мнимая части коэффициентов вейвлет – преобразования соответствует свертке исходного вещественного поля с вещественной и мнимой частями вейвлет - фильтров соответственно. Поэтому симметричные комплексные вейвлеты Добеши могут быть использованы для получения многомасштабного представления сглаженного Лапласиана изображения (более подробные выкладки приведены в пункте 2.2.1).

Рассматривается изображение, то есть вещественная матрица $I_{m,n}$, и комплекснозначная функция $f(x, y) = \sum_{m,n} I_{m,n} \Phi_{0,m,n}(x, y)$, $\Phi_{j,m,n}(x, y) = 2^{-j} \Phi(2^{-j}x - m, 2^{-j}y - n)$, где $\Phi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$. Функция $f(x, y)$ - точка в пространстве R_0 . Пространство R_j определяется как множество всех функций $I(x, y) = \sum_{m,n} c_{m,n}^j \Phi_{j,m,n}(x, y)$ на масштабе j с вещественными коэффициентами $c_{m,n}^j$.

Сглаживающий оператор $Z: R_0 \rightarrow R_{-1}$ определяется как обратное вейвлет – преобразование только с вещественной частью фильтров симметричных комплексных вейвлетов Добеши. Изображение Zf имеет вдвое большее разрешение, чем исходное. Мнимая часть низкочастотных коэффициентов вейвлет разложения WZf обеспечивает хорошую оценку Лапласиана изображения $I_{m,n}$.

Этот алгоритм может быть проиллюстрирован повышающим четкость оператором $f \rightarrow \tilde{f} = f - \rho \Delta f$. При высочайшем разрешении, он может быть выражен как

$$c_{m,n}^0 \rightarrow \tilde{c}_{m,n}^0 = c_{m,n}^0 + \frac{\rho}{\alpha} g_{m,n}^0,$$

где ρ - параметр улучшения, $g_{m,n}^0 = \sum_r \eta_{r-2m} \sum_l \eta_{l-2n} \left(\sum_p \xi_{r-2p} \sum_q \xi_{l-2q} c_{p,q}^0 \right)$, а ξ и η вещественная и мнимая компоненты низкочастотного фильтра симметричного комплексного вейвлета Добеши.

Данный алгоритм может быть обобщен и использован для многомасштабного улучшения, путем рассмотрения N уровней разложения изображения Zf и применения на каждом уровне адаптированного улучшения:

$$c_{m,n}^j \rightarrow c_{m,n}^j + \frac{\rho_j}{2^{2j}\alpha} g_{m,n}^j.$$

Параметр улучшения ρ теперь зависит от уровня разложения ($\rho \rightarrow \rho_j$).

Пример использования алгоритма представлен на рисунках 1.6, 1.7.

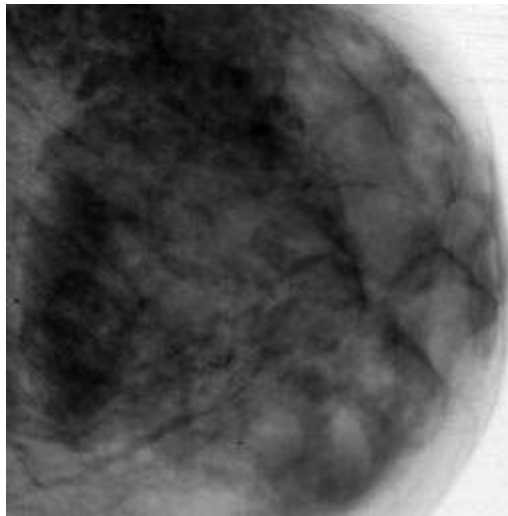


Рисунок 1.6 – Исходная маммограмма

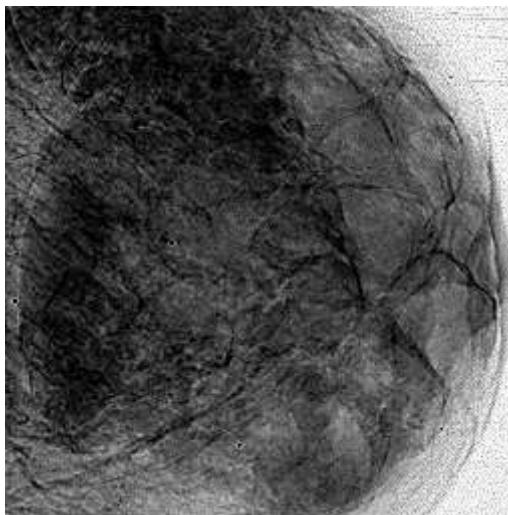


Рисунок 1.7 – Обработанная маммограмма

Исходное изображение (рисунок 1.6) обрабатывается с помощью комплексного симмет-

ричного вейвлета Добеши, фильтр которого содержит 6 ненулевых элементов, на трех уровнях многомасштабного разложения ($N = 3$) с параметрами улучшения $\rho = \{20, 5, 1\}$. Четкость рентгеновского снимка в обработанном изображении (рисунок 1.7) значительно возросла.

1.7 Риджлеты

В одномерном случае вейвлеты позволяют эффективно локализовать особенности сигнала, как по частоте, так и по координате. Однако в двумерном случае базис вейвлетов уже не так хорошо приближает функцию, поскольку он адаптирован только к вертикальным и горизонтальным особенностям.

1.7.1 Оценки аппроксимации функции в различных базисах

Пусть f ограниченная кусочно-гладкая функция, заданная в области $[0; 1]^2$, которая имеет особенности вдоль кусочно-гладких кривых. Тогда при использовании стандартного представления Фурье и аппроксимации \tilde{f}_m^F , построенной из m ненулевых коэффициентов Фурье, определяющих лучшую аппроксимацию по норме L^2 , мы имеем оценку: $\|f - \tilde{f}_m^F\|_2^2 = O(m^{-1/2})$.

Эта оценка в случае вейвлет представления улучшается: $\|f - \tilde{f}_m^W\|_2^2 = O(m^{-1})$.

Если расположение особых линий известно, то можно построить адаптивный базис, для которого выполняется оценка:

$$\|f - \tilde{f}_m^A\|_2^2 = O(m^{-2}).$$

Грубо говоря, адаптивный базис задается на треугольниках, причем триангуляция идеально адаптирована к линиям особенностей.

Однако выясняется, что можно построить неадаптивный базис, такой, что для приближения \tilde{f}_m^R , построенного из m наибольших по модулю коэффициентов, выполняется оценка:

$$\|f - \tilde{f}_m^R\|_2^2 = O(m^{-2}(\log m)^3).$$

1.7.2 Базис риджлетов

Чтобы приспособить вейвлеты к особенностям произвольного направления, можно ввести угол в конструкцию вейвлетов:

$$\psi_{a,b,\theta}(x_1, x_2) = a^{-1/2} \psi((x_1 \cos(\theta) + x_2 \sin(\theta) - b)/a).$$

Это так называемые функции горного хребта (риджлеты).

Теперь можно рассмотреть разложение сигнала по базису:

$$\psi_{j,k,i,l}(x_1, x_2) = 2^{-j/2} \psi((x_1 \cos(l/2^i) + x_2 \sin(l/2^i) - 2^j k)/2^j)$$

Индексы j и k характеризуют масштаб и сдвиг базисной функции, а i и l – угол поворота.

Особенностям сигнала соответствуют наибольшие по модулю коэффициенты. По ним можно определить не только расположение, но и направление разрывов. Однако вычислительная сложность риджлет - преобразования, по сравнению с вейвлет - преобразованием, значительно возрастает.

1.8 Выделение особенностей методом С.Б. Базарова

В данном параграфе представлен метод выделения особенностей, в котором не используются вейвлеты. Достоинством данного алгоритма является то, что он не требует тонкой настройки и подбора порогов чувствительности.

Рассматривается функция $f(x_1, x_2)$ – интенсивность изображения, состоящего из $M_1 \times M_2$ квадратных пикселей (со стороной Δx). В центральной точке каждого пикселя (i, j) используется детектор перепадов для окна изображения 3×3 :

$$H_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}, \quad H_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} f_{i-1,j+1} & f_{i,j+1} & f_{i+1,j+1} \\ f_{i-1,j} & f_{i,j} & f_{i+1,j} \\ f_{i-1,j-1} & f_{i,j-1} & f_{i+1,j-1} \end{vmatrix},$$

и вычисляются выражения – дискретные свертки данного окна изображения с масками H_1 и H_2 :

$$S_1 = H_1 * F = (f_{i-1,j+1} + 2f_{i,j+1} + f_{i+1,j+1}) - (f_{i-1,j-1} + 2f_{i,j-1} + f_{i+1,j-1}),$$

$$S_2 = H_2 * F = (f_{i+1,j+1} + 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1}) - (f_{i-1,j+1} + 2f_{i-1,j} + f_{i-1,j-1}),$$

тогда модуль градиента $g_{i,j}(f)$ функции f в точке (i, j) равна: $g_{i,j} = \frac{1}{8\Delta x} \sqrt{S_1^2 + S_2^2}$, а ориентация вектора градиента в центре пикселя (i, j):

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} \arctan(S_1 / S_2), & S_2 \geq 0 \\ \pi - \arctan(S_1 / S_2), & S_2 < 0 \end{cases}.$$

Затем вычисляется среднее значение градиента по всему расчетному полю: $T = \sum_{i,j} g_{i,j} / (M_1 \times M_2)$ и из множества всех точек ($i = 1, 2, \dots, M_1, j = 1, 2, \dots, M_2$) выбираются те, в

которых $g_{i,j} > T$ (то есть точки, в которых градиент превышает среднее значение). Это множество точек обозначается через N_1 .

Во множество N_1 попадают не только пиксели истинных перепадов, но и близлежащие. Для их исключения применяется метод подавления «немаксимумов», при котором исключается конкуренция между собой соседних точек, расположенных вдоль перепада. Угол $\alpha_{i,j}$ определяет направление, нормальное к поверхности перепада интенсивности, две соседних с (i, j) ячейки (i_l, j_l) и (i_r, j_r) определяются как ячейки, задающие ближайшее к этой нормали направление. Из точек множества N_1 выбираются те, в которых одновременно выполняются условия $g_{i,j} > g_{i_l, j_l}$, $g_{i,j} > g_{i_r, j_r}$. Это множество точек обозначается через N_2 . На практике значение $\alpha_{i,j}$ аппроксимируется одним из восьми направлений из центра пикселя (i, j) на центры соседних ячеек.

Для сохранения свойства линейной протяженности перепада необходимо исключить изолированные выбросы интенсивности изображения. Из точек множества N_2 выбираются те, в которых одновременно выполняются условия: $|\alpha_{i_l, j_l} - \alpha_{i,j}| < \pi/4$, $|\alpha_{i_r, j_r} - \alpha_{i,j}| < \pi/4$. Поиск изолированных артефактов осуществляется рассмотрением круговой окрестности каждой точки радиусом $R = Q\Delta x$ (обычно используется константа $Q=2$). Точка удаляется из множества в том случае, если в этой окрестности нет других точек перепада. Множество оставшихся точек N_3 отражает положение особенностей функции $f(x_1, x_2)$.

1.9 Локализация сингулярностей газодинамических полей при помощи вейвлетов

В данном параграфе представлены алгоритмы локализации особенностей газодинамических полей, разработанные на ранней стадии исследования этой задачи. Один из них, по сути, является адаптацией метода, представленного в параграфе 1.3, которая позволяет использовать его для анализа полей газодинамических величин, заданных в дискретном наборе узлов расчетной сетки. Другой детектор основан на создании комплексного фильтра из пары вещественных вейвлет - фильтров (низкочастотного и высокочастотного). Этот детектор в большей степени адаптирован для локализации разрывов преимущественно вертикального или горизонтального направлений.

1.9.1 Детектор, основанный на оценке показателя гладкости Липшица в точках исследуемого поля

Алгоритм локализации и классификации особенностей состоит из трех этапов. На первом шаге вычисляется вейвлет - разложение исследуемого расчетного поля. Разложение может быть вычислено как классическим способом с прореживанием коэффициентов по формулам (1.4), так и без прореживания коэффициентов по формулам:

$$\begin{cases} c_k^{n+1} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \bar{h}_{j-k} c_j^n \\ d_k^{n+1} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \bar{g}_{j-k} c_j^n \end{cases}$$

Первый вариант требует значительно меньше вычислений, а второй позволяет получить более точную локализацию сингулярностей.

На втором этапе к полученному массиву данных применяется детектор сингулярностей. Классификация точек на сингулярные и регулярные зависит от значений $\varepsilon_{k,j}$, которые определяются из соотношения $\varepsilon_{k,j} = \frac{c_{k,j}}{C_{k,j}}$, где $c_{k,j} = \text{Im}(\langle f(x), \varphi_{k,j}(x) \rangle)$, $C_{k,j} = \text{Im}(\langle x, \varphi_{k,j}(x) \rangle)$, а $\varphi(x)$ -

скейлинг - функция симметричного комплексного вейвлета из семейства Добеши - dcola8 [27]. Величина коэффициентов $c_{k,j}$ значительно больше в точках сингулярности числового поля, чем в гладких областях. Результатом работы детектора является бинарное поле, в котором единицам соответствуют подозрительные на сингулярность точки, где $\varepsilon_{k,j}$ больше заданного порога ε .

На третьем шаге к полученному "подозрительному" множеству точек применяется метод классификации, основанный на анализе показателя гладкости Липшица. Он заключается в отбор тех точек газодинамического поля данных, в которых показатель гладкости Липшица α находится в заданном диапазоне. Разным диапазонам изменения α соответствуют разные типы сингулярностей поля. Численная оценка показателя α в точке, в зависимости от номера уровня вейвлет разложения i , определяется по формуле:

$$\alpha_i(n) \approx \log_2 \left| \frac{\langle f, \psi_{n,2^{i+1}} \rangle}{\langle f, \psi_{n,2^i} \rangle} \right| - \frac{1}{2}. \quad (1.12)$$

Эта эмпирическая оценка, соответствует теоретической, которую можно получить из (1.5) и теоремы 1.3. Точки классифицируются как ударные волны, если соответствующие им значения α_i , найденные по формуле (1.12), попадают в диапазон $-1 < \alpha_i < 0$.

Алгоритм был использован для анализа одномерной нестационарной задачи о течении газа при мгновенном выделении тепла на некотором внутреннем участке (рисунок 1.8).

На рисунках 1.9 и 1.10 представлен результат обработки поля распределения плотности для случая классической реализации вейвлет - разложения, а на рисунках 1.11, 1.12 - для случая реализации вейвлет - разложения без прореживания. Интенсивность цвета соответствует показателю Липшица α в точках газодинамического поля, рассчитанному по формуле (1.12). Видно, что отказ от прореживания позволяет более четко выявить границы разрывов.

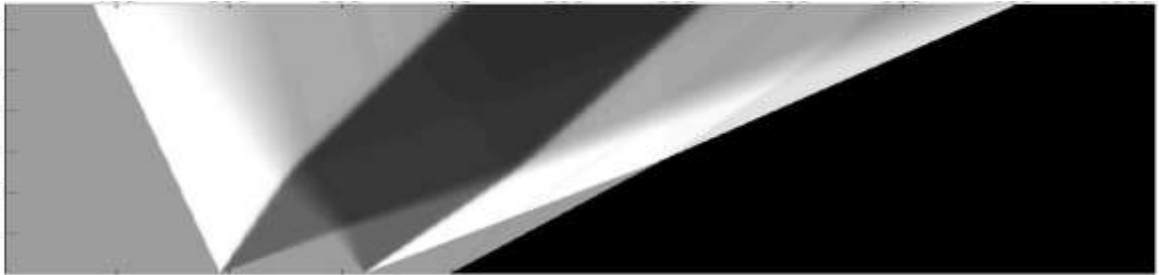


Рисунок 1.8 – Распределение поля плотности

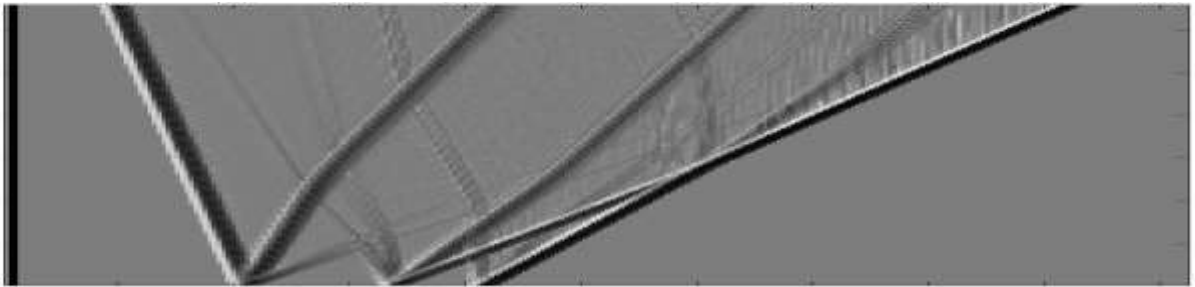


Рисунок 1.9 – Показатель Липшица α_1 , полученный при классической реализации вейвлет – разложения

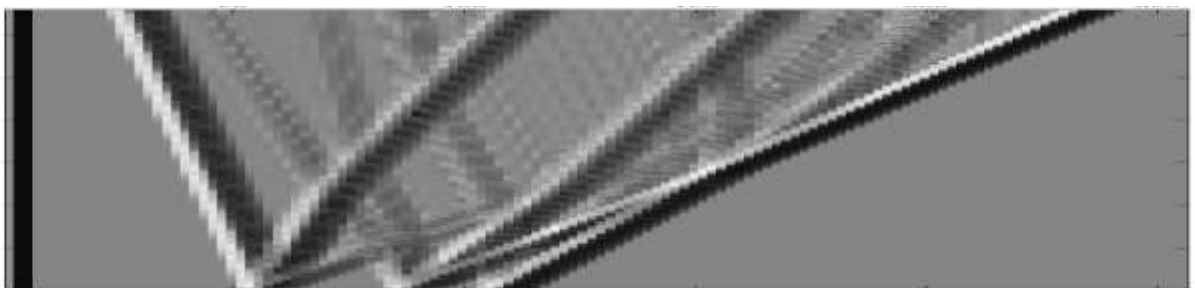


Рисунок 1.10 – Показатель Липшица α_2 , полученный при классической реализации вейвлет – разложения

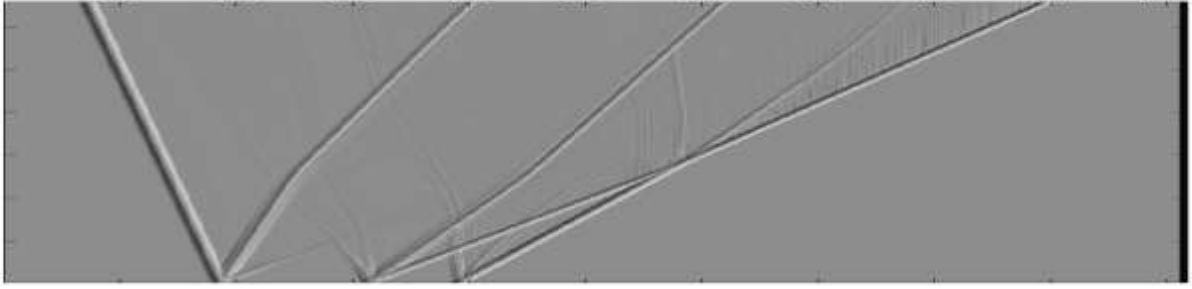


Рисунок 1.11 – Показатель Липшица α_1 , полученный при реализации вейвлет – разложения без прореживания

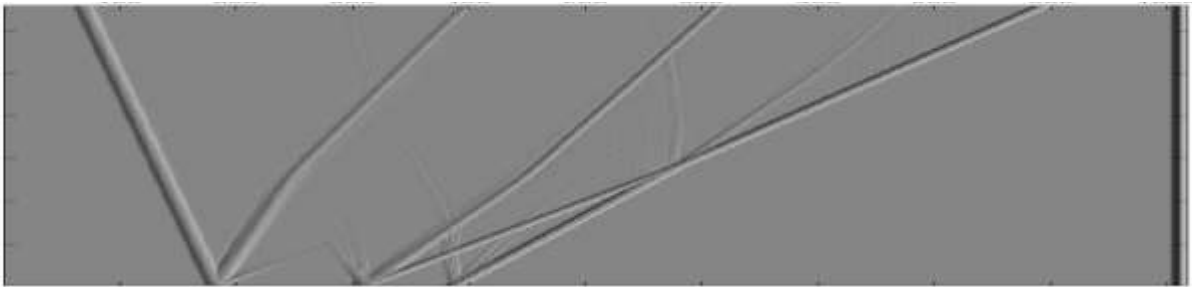


Рисунок 1.12 – Показатель Липшица α_2 , полученный при реализации вейвлет – разложения без прореживания

Угол наклона φ крайней правой ударной волны в начальный период времени может быть получен аналитически, он равен $\varphi \approx 0.857$. Оценка того же угла, полученная при помощи детектора, равна $\varphi \approx 0.873$. Этот факт позволяет судить об адекватности полученных результатов локализации.

1.9.2 Детектор на основе пары вещественных ортогональных вейвлет - фильтров

Рассматривается пара вещественных фильтров h , g , разделяющих частотный диапазон, h - низкочастотный, g - высокочастотный. Используя эти фильтры, можно построить новые комплексные фильтры $H = h + i\varepsilon g$ и $G = g + i\varepsilon h$, где ε - малый параметр (на практике обычно используется значение $\varepsilon = 0.0001$). Фильтры H и G , используются для вычисления двумерного преобразование заданного поля по формулам (1.4) соответствующим классическому вейвлет - разложению, свертка производится сначала по строкам, а затем по столбцам. Операции, относящиеся к строкам и столбцам, будут обозначаться индексами '-' и '|', соответственно:

$$H^- f = h^- f + i\varepsilon g^- f, G^- f = g^- f + i\varepsilon h^- f \text{ и так далее.}$$

$$\begin{cases} H^{\dagger}H^{-}f = (h^{\dagger}h^{-}f - \varepsilon^2 g^{\dagger}g^{-}f) + \varepsilon(h^{\dagger}g^{-}f + g^{\dagger}h^{-}f)i; \\ H^{\dagger}G^{-}f = (h^{\dagger}g^{-}f - \varepsilon^2 g^{\dagger}h^{-}f) + \varepsilon(h^{\dagger}h^{-}f + g^{\dagger}g^{-}f)i; \\ G^{\dagger}H^{-}f = (g^{\dagger}h^{-}f - \varepsilon^2 h^{\dagger}g^{-}f) + \varepsilon(h^{\dagger}h^{-}f + g^{\dagger}g^{-}f)i; \\ G^{\dagger}G^{-}f = (g^{\dagger}g^{-}f - \varepsilon^2 h^{\dagger}h^{-}f) + \varepsilon(h^{\dagger}g^{-}f + g^{\dagger}h^{-}f)i. \end{cases}$$

В трех первых выражениях при достаточно малом ε вторым слагаемым в первой скобке можно пренебречь. Первое слагаемое в первой скобке четвертого выражения носит характер шумов, и его взаимодействие с малой величиной $\varepsilon^2 h^{\dagger}h^{-}f$ не позволяет использовать это выражение в дальнейшем анализе.

Таким образом, получим:

$$\begin{cases} H^{\dagger}H^{-}f = (h^{\dagger}h^{-}f - O(\varepsilon^2)) + \varepsilon(h^{\dagger}g^{-}f + g^{\dagger}h^{-}f)i; \\ H^{\dagger}G^{-}f = (h^{\dagger}g^{-}f - O(\varepsilon^2)) + \varepsilon(h^{\dagger}h^{-}f + g^{\dagger}g^{-}f)i; \\ G^{\dagger}H^{-}f = (g^{\dagger}h^{-}f - O(\varepsilon^2)) + \varepsilon(h^{\dagger}h^{-}f + g^{\dagger}g^{-}f)i. \end{cases} \quad (1.13)$$

В правой части (1.13) встречающиеся следующие выражения:

- 1) $h^{\dagger}h^{-}f = f_{\tilde{n}\tilde{d}}$ - сглаженная по двум направлениям исходная функция;
- 2) $h^{\dagger}g^{-}f$ - сглаженные по вертикали горизонтальные детали (шумы) исходной функции;
- 3) $g^{\dagger}h^{-}f$ - сглаженные по горизонтали вертикальные детали исходной функции.
- 4) $g^{\dagger}g^{-}f$ - вертикальные детали горизонтальных деталей исходной функции. Если исходная функция достаточно гладкая, и интенсивность разрывов мала, то это слагаемое мало по сравнению со слагаемым $h^{\dagger}h^{-}f$, и им можно пренебречь.

На практике для сокращения объема вычислений, можно заменить $\text{Im}(H^{\dagger}G^{-}f) = \text{Im}(G^{\dagger}H^{-}f) = \varepsilon(h^{\dagger}h^{-}f + g^{\dagger}g^{-}f)$ на $\varepsilon \text{Re}(H^{\dagger}H^{-}f) = \varepsilon(h^{\dagger}h^{-}f) + O(\varepsilon^3)$.

Пусть $f(x, y) > 0$ (например, функция, соответствующая плотности или давлению), а функция $\Omega f(x, y)$ определяет абсолютную величину разрывов функции $f(x, y)$. В областях, где $f(x, y)$ гладкая, $\Omega f(x, y) = 0$.

Дискретные функции:

$$\begin{cases} \text{dat}_{xy} := \frac{|\text{Im}(H^{\dagger}H^{-}f)|}{|\text{Re}(H^{\dagger}H^{-}f)|} \approx \varepsilon \frac{|(h^{\dagger}g^{-}f + g^{\dagger}h^{-}f)|}{|(h^{\dagger}h^{-}f)|}, \\ \text{dat}_x := \varepsilon \frac{|\text{Re}(H^{\dagger}G^{-}f)|}{|\text{Re}(H^{\dagger}H^{-}f)|} \approx \varepsilon^2 \frac{|\text{Re}(H^{\dagger}G^{-}f)|}{|\text{Im}(H^{\dagger}G^{-}f)|} \approx \varepsilon \frac{|(h^{\dagger}g^{-}f)|}{|(h^{\dagger}h^{-}f)|}, \\ \text{dat}_y := \varepsilon \frac{|\text{Re}(G^{\dagger}H^{-}f)|}{|\text{Re}(H^{\dagger}H^{-}f)|} \approx \varepsilon^2 \frac{|\text{Re}(G^{\dagger}H^{-}f)|}{|\text{Im}(G^{\dagger}H^{-}f)|} \approx \varepsilon \frac{|(g^{\dagger}h^{-}f)|}{|(h^{\dagger}h^{-}f)|}, \end{cases}$$

можно считать аналогами фазы компонент комплекснозначного вейвлет - преобразования.

Взаимодействие слагаемых в числителе первого выражения может быть очень сильным, вплоть до полного сокращения. Поэтому первое выражение можно эффективно применять, только если предполагается, что все разрывы близки к вертикальным и горизонтальным, в противном случае часть разрывов не будет обнаружена.

Если предположить, что разрывы анализируемой функции не "размазываются", то числитель второго выражения пропорционален Ωf там, где имеются сильные разрывы в направлениях, далеких от горизонтального, а в остальных точках - близок к нулю. Аналогично, можно считать, что числитель третьего выражения имеет вид $a\Omega f$, где $a > 0$ - некоторый коэффициент пропорциональности, там, где имеются сильные разрывы в направлениях, далеких от вертикального направления, а в остальных точках мал. Поскольку $h^l h^- f = f_{\tilde{n}\delta}$, то можно считать,

что $\text{Re}(H^l H^- f) \approx f$. Пусть $C(x, y) = \frac{\Omega f}{f}$, тогда можно сформулировать следующие эвристические условия, которые выполняются в точках, подозрительных на наличие разрыва:

$dat_{xy} = \left| \frac{\text{Im}(H^l H^- f)}{\text{Re}(H^l H^- f)} \right| \approx \varepsilon \frac{a\Omega f}{f} = a\varepsilon C(x, y)$ - в точках подозрительных на горизонтальные и вертикальные разрывы;

$dat_x = \varepsilon \left| \frac{\text{Re}(H^l G^- f)}{\text{Re}(H^l H^- f)} \right| \approx \varepsilon \frac{a\Omega f}{f} = a\varepsilon C(x, y)$ - в точках подозрительных на негоризонтальные разрывы;

$dat_y = \varepsilon \left| \frac{\text{Re}(G^l H^- f)}{\text{Re}(H^l H^- f)} \right| \approx \varepsilon \frac{a\Omega f}{f} = a\varepsilon C(x, y)$ - в точках подозрительных на негоризонтальные разрывы.

невертикальные разрывы.

Пусть $test(dat, C^*)_{i,j} = \begin{cases} 1, & dat_{i,j} \geq \varepsilon C^* \\ 0, & dat_{i,j} < \varepsilon C^* \end{cases}$, тогда для каждой дискретной функции dat

функция $test$ служит индикатором точек, в которых могут быть разрывы соответствующей пространственной ориентации и относительная интенсивность которых больше C^*/a .

Таким образом, точки разрывов с относительной интенсивностью больше C^*/a определяются индикатором:

$$res(C^*)_{i,j} = \begin{cases} 1, & (test(dat_x, C^*)_{i,j} = 1) \vee (test(dat_y, C^*)_{i,j} = 1) \\ 0, & (test(dat_x, C^*)_{i,j} = 0) \& (test(dat_y, C^*)_{i,j} = 0) \end{cases}$$

который задан в узлах сетки, шаг которой вдвое больше шага исходной расчетной сетки.

Алгоритм был использован для анализа двумерной стационарной задачи о

сверхзвуковом обтекании тонкого клина в узкой трубе (рисунок 1.13).

На рисунке 1.14 представлены результаты обработки исходного поля, полученные с использованием детектора на основе вейвлета Хаара: $h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$, $g_0 = 1/\sqrt{2}$, $g_1 = -1/\sqrt{2}$. Видно, что даже этот простейший вейвлет позволяет определить расположение ударных волн (рисунок 1.14(а)). Однако границы волны разрежения постепенно закругляются, что не соответствует действительности. Наиболее же интересный результат заключается в том, что при сравнительно большом пороге чувствительности можно выделить все области, в которых действуют ударные волны или волны разрежения (рисунок 1.14(б)). Однако следует отметить, что ударные волны уже немного размазываются.

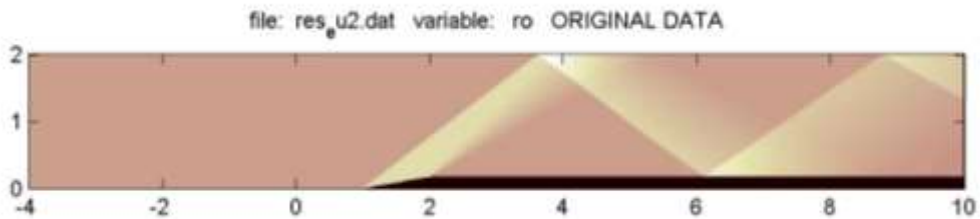


Рисунок 1.13 – Распределение поля плотности

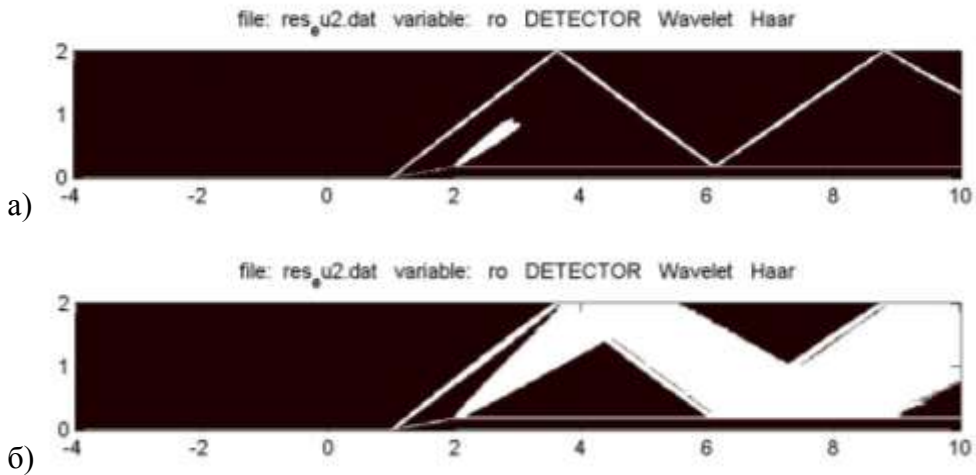


Рисунок 1.14 – Применение детектора на основе вейвлета Хаара с чувствительностями

$$\tilde{N}^* = 0.004, 0.0004$$

На рисунках 1.15, 1.16 и 1.17 представлены результаты обработки исходного поля, полученные с использованием детекторов на основе классических вещественных вейвлетов Добеши, фильтры которых имеют 4, 10 и 20 ненулевых коэффициентов соответственно.

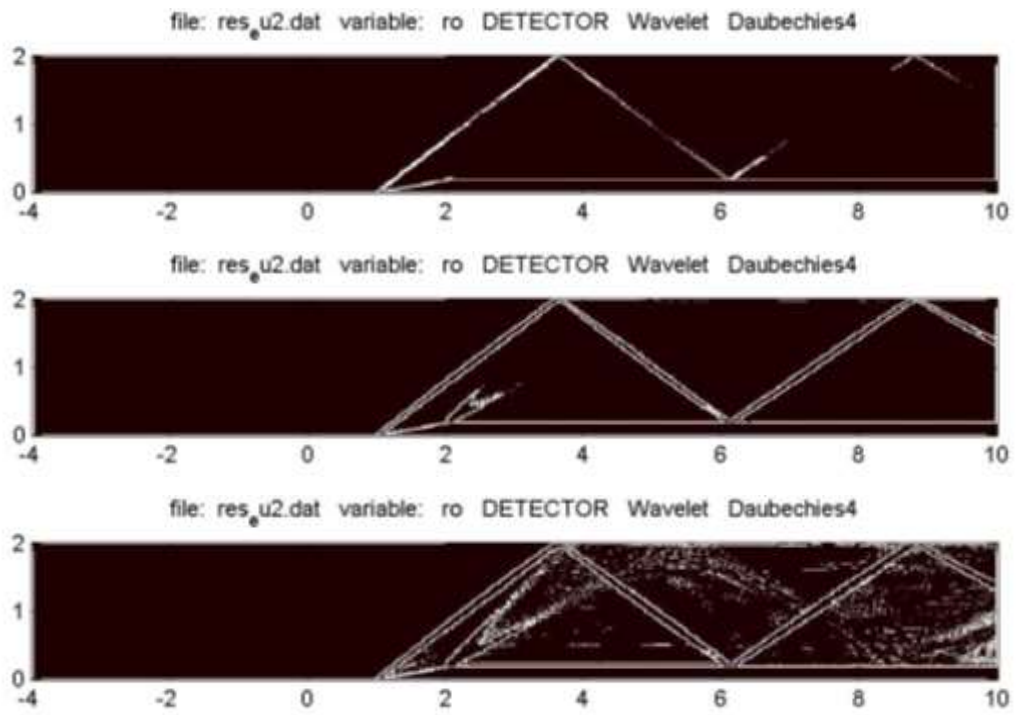


Рисунок 1.15 – Применение детектора на основе вейвлета Добеши 4 с чувствительностями $\tilde{N}^* = 0.008, 0.0004, 0.00015$ (только границы выделяемых областей)

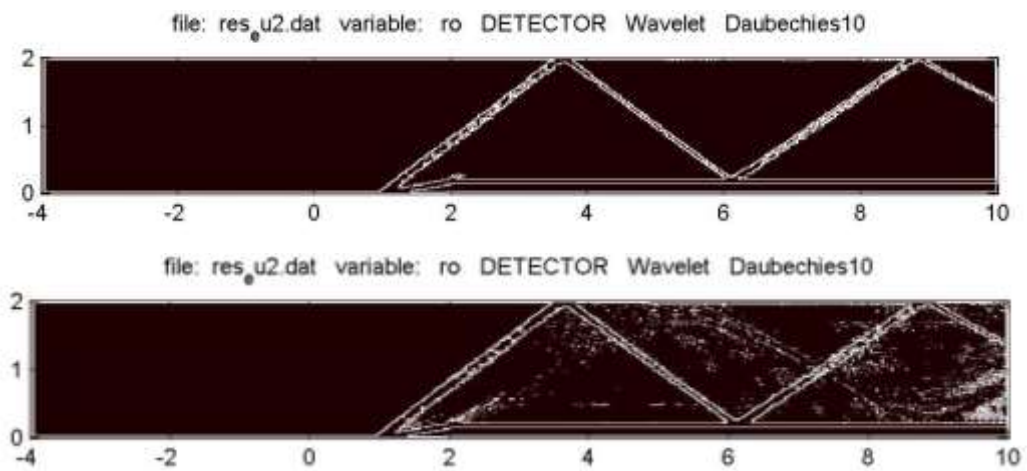


Рисунок 1.16 – Применение детектора на основе вейвлета Добеши 10 с чувствительностями $\tilde{N}^* = 0.0004, 0.00015$ (только границы выделяемых областей)

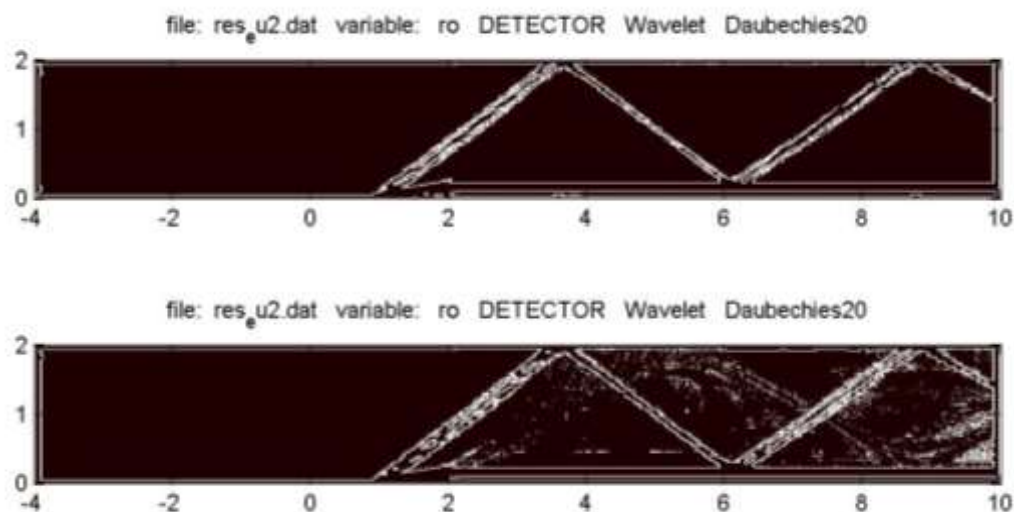


Рисунок 1.17 – Применение детектора на основе вейвлета Добеши 20 с чувствительностями $\tilde{N}^* = 0.0004, 0.00015$ (только границы выделяемых областей)

Все детекторы позволяют локализовать положение ударной волны. Однако чем больше ненулевых коэффициентов имеет фильтр соответствующего вейвлета, тем сильнее размываются ударные волны. Положение волны разрежения удастся локализовать только при использовании детектора на основе вейвлета Добеши, фильтр которого имеет 4 ненулевых коэффициента, за счет повышения чувствительности. Для детекторов на основе вейвлетов Добеши, фильтры которых имеют 10 и 20 ненулевых коэффициентов, повышение чувствительности приводит только к появлению дополнительных артефактов.

Так же как и в предыдущем пункте оценить адекватность результатов, полученных с использованием детектора, можно сравнив значения угла наклона ударной волны и углов наклона границ волны разрежения, полученные при помощи детектора, с теоретическими значениями. Аналитическое решение, позволяющее определить расположение ударной волны в вершине клина хорошо известно [28]; угол наклона β ударной волны находится из уравнения (6.37) том 1, стр. 392 [28]. Для данной задачи этот угол, вычисленный при помощи детектора, оказался равен $\beta \approx 0.824$ при теоретическом (с тремя верными десятичными знаками) значении $\beta \approx 0.827$.

Положение волны разрежения находится при решении задачи Прандтля-Майера и определяется местной скоростью звука. Отклонение вычисленных углов наклона границ волны разрежения от теоретических не превосходит $\Delta_0 \approx 0.035$.

Замечание. Описание алгоритма и результатов локализации в этом пункте соответствуют приведенным в [11]. Тем не менее, очевидно, что на практике можно отказаться от создания комплексных фильтров из пары вещественных. Вместо этого достаточно определить:

$$\begin{cases} dat_x^* = \frac{h^+ g^- f}{h^+ h^- f} \\ dat_y^* = \frac{g^+ h^- f}{h^+ h^- f} \end{cases} \text{ И}$$

$$test^*(dat^*, C^*)_{i,j} = \begin{cases} 1, & dat_{i,j}^* \geq C^* \\ 0, & dat_{i,j}^* < C^* \end{cases}$$

При этом, точки разрывов с относительной интенсивностью больше C^*/a будут определяться индикатором:

$$res^*(C^*)_{i,j} = \begin{cases} 1, & (test^*(dat_x^*, C^*)_{i,j} = 1) \vee (test^*(dat_y^*, C^*)_{i,j} = 1) \\ 0, & (test^*(dat_x^*, C^*)_{i,j} = 0) \& (test^*(dat_y^*, C^*)_{i,j} = 0) \end{cases}$$

1.10 Заключение

Итак, хотя задаче построения алгоритмов локализации сингулярностей газодинамических полей посвящено мало работ, близкая к ней задача «выделения краев» подробно исследована.

Тем не менее, методы «edge detection» применимы только к определенному кругу задач. В частности, методы «выделения краев» разрабатывались для обработки изображений, то есть данных, которые представляются в виде двумерной матрицы, но в газовой динамике часто используются неструктурированные сетки, а наибольший интерес представляет анализ трехмерные задач.

Очевидно, что при построении детектора особенностей газодинамических полей необходимо учитывать специфику данной задачи. Так, например, при решении этой задачи нерационально тратить огромные вычислительные ресурсы на использование риджлетов. В тоже время, требуется уделять особое внимание минимизации числа артефактов, поскольку в задачах адаптивного построения расчетных сеток, они приводят к чрезмерному измельчению ячеек, а, следовательно, и увеличению времени счета.

Разумеется, все методы, представленные в данной главе, обладают своими достоинствами, однако для обработки газодинамических полей требуется детектор, который не только объединяет эти достоинства, но и учитывает специфику газодинамических задач. Построению такого детектора посвящена глава 2.

2 Локализация разрывов в полях газодинамических функций с помощью вейвлет анализа

Глава посвящена построению алгоритма выделения и классификации сингулярностей газодинамических полей, полученных в результате численного моделирования методом сквозного счета на прямоугольных расчетных сетках. В основе алгоритма – разложения исходных полей по вейвлет базисам, с последующим анализом полученных коэффициентов. Исходные идеи этого подхода были предложены в [11, 12,13]. В этой главе предложен и апробирован линейный по трудоемкости алгоритм выделения и классификации разрывов. В нем используется разложение компонент поля газодинамических величин по базису комплексных симметричных ортогональных вейвлетов и дополнительная обработка с использованием классических вещественных вейвлетов Добеши. Алгоритм использован для анализа структуры двумерных течений газа при управлении потоком с помощью локального тепловыделения.

Основные результаты, полученные в этой главе, опубликованы в [29].

2.1 Введение

Глава посвящена построению алгоритма выделения и классификации сингулярностей газодинамических полей – ударных волн, слабых и контактных разрывов и его использованию для анализа результатов численного моделирования задач газовой динамики.

Целью данной работы было построение достаточно гибкого алгоритма, который с одной стороны не требует тонкой настройки, что позволит использовать его, непосредственно в расчете, а с другой стороны сможет быть использован аналитиком для тонкого анализа свойств течения.

Разработанный алгоритм базируется не только на усовершенствованных методах характерных для общей теории анализа изображений, но и на газодинамической природе задачи.

При построении алгоритма предполагается, что заданная сеточная вектор функция является малым возмущением проекции значений (обобщенного) решения уравнений Эйлера на множество узлов некоторой прямоугольной сетки. При этом предполагается, что решения являются гладкими вне достаточного регулярного множества поверхностей (кривых) разрывов самих функций и их производных, а на разрывах выполняются условия Ранкина - Гюгонио.

Предлагаемый в работе алгоритм использует построенное в [10] семейство комплекснозначных симметричных ортогональных вейвлетов Добеши, а препроцессинг изучаемого поля использует соображения близкие к примененным в [10] для повышения контрастности рентге-

новских снимков. Существенным же отличием разработанного алгоритма является использование корректора, построенного на основе классических вейвлетов и дополнительное использование соотношений на разрывах, наличие которых жестко связывает особенности различных компонент вектора газодинамических величин.

Представленный алгоритм линеен по объему входных данных и непосредственно обобщался на случай трехмерных задач.

Разработанный алгоритм был апробирован на модельных данных и на расчете течения из класса задач, связанных с изучением управления потоком с помощью локального энерговыделения. Рассматриваемые течения представляют большой интерес с разных точек зрения. В них реализуются такие явления, как взаимодействие ударной волны с прогретым приповерхностным слоем и неустойчивость тангенциального разрыва под действием ударной волны. Сложная конфигурация разрывов нестационарных течений предъявляет высокие требования к численным алгоритмам и методам анализа и обработки результатов.

2.2 Применение вейвлетов для выделения и классификации особенностей газодинамических полей

Предполагается, что в результате расчета были получены значения компонент вектора скорости, давление, плотность и так далее, в узлах (или центрах ячеек) равномерной прямоугольной сетки.

Задача алгоритмического выделения сингулярностей поля состоит в том, чтобы каждому узлу сетки $m \in R^3$ сопоставить число $A(m) \in (0, 1, 2, \dots, k)$, где k – число исследуемых особенностей. Так, например, числу 1 соответствует разрыв первого рода соответствующей функции, числу 2 – разрыв производной, а в случае, если функция гладкая, $f \in C^2(O_\delta(x_m))$, то $A(m) = 0$. При исследовании газодинамических задач среди разрывов первого рода требуется различать ударные волны, тангенциальные и контактные разрывы и число k возрастает.

Естественно, что в такой постановке задача – математически неразрешима. В более точной постановке необходимо рассматривать последовательности измельчающихся сеток и говорить о нахождении разрыва в окрестности узла. Кроме того необходимы и структурные предположения о функциональных компактах, которым принадлежит рассматриваемое решение. Однако, поскольку математическая теория для многомерных задач газовой динамики пока разработана недостаточно, то подобного рода предельные переходы не рассматриваются, а задача о выделении сингулярностей рассматривается, как задача математического моделирования.

2.2.1 Детектор на основе симметричных комплексных вейвлетов Добеши

Задача о выделении разрывов в поле газодинамических величин полученных с помощью численного моделирования рассматривалась неоднократно [7], [8]. Принципиальная новизна предлагаемого подхода по сравнению с этими работами состоит в том, что в нем используются фильтры, построенные на основе вейвлетов Добеши с компактными носителями (см. приложения 5.1, 5.2).

2.2.1.1 Симметричные комплексные вейвлеты Добеши

Известно, что в семействе вейвлетов Добеши не существует симметричных вещественных ортогональных вейвлетов с компактным носителем [30]. Это доставляет существенные неудобства в силу того, что продолжение расчетных данных с конечного набора узлов на всю числовую ось, производится из соображений симметрии. Кроме того в исследуемой задаче использование несимметричных вейвлетов может привести к смещению результатов локализации. Однако комплексные ортогональные вейвлеты, у которых скейлинг - функция симметрична, а вейвлет антисимметричен, были построены [10] и [31] в рамках классической конструкции Добеши. Как обычно симметричность и антисимметричность функции означает наличие сдвига аргумента при котором она переходит в четную, соответственно, нечетную функцию. В этих работах результаты, включая вычисление масок, были получены численно. Однако маски вейвлетов для небольшого числа ненулевых коэффициентов могут быть найдены в явном виде аналитически (приложение 5.1). Явный вид коэффициентов позволил существенно уточнить результаты, полученные численно в работе [10], где в частности было показано, что для некоторых скейлинг - функции $\varphi(x) = u(x) + i\nu(x)$, с высокой точностью выполняется соотношение:

$$\nu(x) \approx \alpha \partial_x^2 u(x), \text{ где } \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Поскольку α - мало (приложение 5.2), то можно рассматривать эту величину как малый параметр и получить, что сдвиги $u(x-k)$ с учетом (2.1) являются взаимно ортогональными с точностью до членов порядка α^2 . В этом можно убедиться, заменив в соотношении ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \bar{\varphi}(x-k) dx = 0$$

функцию $\nu(x)$ ее выражением через вторую производную $u(x)$ из (2.1). Это свойство используется в следующем пункте при построении детектора.

2.2.1.2 Конструкция детектора

Соотношения рескейлинга для скейлинг функции $\varphi(x)$ и соответствующего вейвлета $\psi(x)$ имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(x/2) = \sum_n h_n \varphi(x-n), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \psi(x/2) = \sum_n g_n \varphi(x-n), \end{cases} \quad (2.2)$$

где $h_k = \xi_k + i\eta_k$ и $g_n = (-1)^n h_{1-k}$ - соответствующие зеркальные фильтры, а нормировка функции $u(x)$ определяется условием $\int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx = 1$. Из первого уравнения системы (2.2) можно получить:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} u(x/2) = \sum_n \xi_n u(x-n) - \sum_n \eta_n v(x-n) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} v(x/2) = \sum_n \eta_n u(x-n) + \sum_n \xi_n v(x-n) \end{cases}.$$

Считая (с учетом (2.1), малости α и того, что ξ_n и η_n имеют одинаковый порядок малости (приложение 5.1)) мнимую часть $v(x)$ комплексной скейлинг-функции малой по сравнению с вещественной частью $u(x)$, получаем:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} u(x/2) \approx \sum_n \xi_n u(x-n) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} v(x/2) \approx \sum_n \eta_n u(x-n) \end{cases}. \quad (2.3)$$

Эти соотношения по форме аналогичны обычным соотношениям рескейлинга для ортогональных скейлинг - функции и вейвлета. Описание стандартных алгоритмов разложения ("прямого преобразования") исходного поля по ортогональным вейвлетам и его восстановления ("обратного преобразования") из полученных компонент имеется в [14] (также см. 1.1.8). Прямое вейвлет - преобразование сводится к свертке полученного вектора коэффициентов разложения (для простоты обозначений считаем, что речь идет о бесконечных векторах; на практике часто применяется либо периодизация конечного набора коэффициентов либо, как в нашем случае, симметризация относительно концов) с низкочастотным и высокочастотным фильтрами, и последующему прореживанию полученных компонент разложения вдвое (см. (1.4)). Об-

ратное преобразование состоит в свертке этих компонент с соответствующими транспонированными фильтрами и суммировании полученных сигналов.

Для функций $u(x)$ и $v(x)$ соотношения рескейлинга выполнены лишь приближенно (2.3), тем не менее, далее фильтры ξ и η используются для построения детектора, как если бы они были ортогональными вейвлетными низкочастотным и высокочастотным фильтрами, а функции $u(x)$ и $v(x)$ скейлинг функцией и вейвлетом соответственно.

В качестве исходных данных при использовании вейвлет - анализа служат коэффициенты разложения исходного поля по сдвигам функции $u(x)$. Однако, из леммы о сходимости масштабирующих функций (приложение 5.3) следует, что, подбирая должным образом начальный масштаб m , можно добиться, чтобы в равенстве $f(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)u_m(x-k)dx + r_k$ разность между коэффициентами разложения и значениями исходного поля r_k была сколь угодно мала. Поэтому для задачи выделения особенностей газодинамических течений, в качестве коэффициентов разложения принимаются значения самого исходного поля в узлах сетки (как уже отмечалось в пункте 1.1.8, данный подход широко распространен при использовании вейвлет – анализа).

Далее через A обозначается линейный оператор "свертки с прореживанием" отвечающий фильтру ξ , а через B - аналогичный оператор для фильтра η . Эти операторы действуют на произвольную последовательность f по формулам:

$$A(f) = c, \text{ где } c_n = \sum_m \xi_{m-2n} f_m, \quad (2.4)$$

$$B(f) = d, \text{ где } d_n = \sum_m \eta_{m-2n} f_m. \quad (2.5)$$

Если $\{f_m\}$ - последовательность скейлинг - коэффициентов исходного поля, то $\{c_n\}$ и $\{d_n\}$ задают представление этого поля с вдвое более грубым «разрешением» ([14], пункты 1.1.6, 1.1.7, 1.1.8). Переход от более грубого к более тонкому разрешению осуществляется с помощью операторов A^* и B^* применения транспонированных фильтров (т. е. умножение на соответствующие транспонированные матрицы):

$$A^*(c) = f^{(1)}, \text{ где } f_n^{(1)} = \sum_m \xi_{n-2m} c_m, \quad (2.6)$$

$$B^*(d) = f^{(2)}, \text{ где } f_n^{(2)} = \sum_m \eta_{n-2m} d_m. \quad (2.7)$$

Выражения (2.4-2.7) являются стандартными для кратномасштабного анализа (см. (1.4) и пункты 1.1.6, 1.1.7, 1.1.8). Для ортогональных вейвлетных фильтров h и g выполнено условие

точного восстановления $f_n = f_n^{(1)} + f_n^{(2)}$.

Предполагается, что исходное поле можно отождествить с коэффициентами $c = \{c_n^0\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ его вейвлет разложения по системе функций $u(x-n)$. Для того, чтобы повысить точность дальнейшей локализации особенностей, к этому полю применяется обратное вейвлет - преобразование A^* . Исходное поле при этом интерпретируется как низкочастотная составляющая некоторого поля $\{c_n^{-1}\}$, заданного на удвоенной сетке, высокочастотная же составляющая этого поля полагается равной нулю, т. е.:

$$c_n^{-1} = \sum_m \xi_{n-2m} c_m^0.$$

К полученным данным $\{c_n^{-1}\}$ применяется прямое вейвлет - преобразование, и для дальнейшего анализа используется лишь «высокочастотная часть» отображения, что соответствует переходу к исходной сетке:

$$q_k = \sum_n \eta_{n-2k} c_n^{-1} = \sum_n \eta_{n-2k} \sum_m \xi_{n-2m} c_m^0. \quad (2.8)$$

Во введенных обозначениях вся эта процедура записывается так: $j = BA^*(c^0)$.

При этом низкочастотная составляющая разложения $AA^*(c_n^0) \approx c_n^0$, в силу того, что сдвиги вещественной компоненты скейлинг-функции можно считать ортогональными друг другу.

Если бы в определении преобразований A и B участвовали фильтры h и g , соответствующие скейлинг функции и вейвлету, то последовательность $\{q_k\}$ была бы тождественно нулевой. В данном случае, однако, целочисленные сдвиги функций $u(x)$ и $v(x)$ не ортогональны. В силу того что вещественная и мнимая части скейлинг функции связаны соотношением (2.1) полученные значения $\{q_k\}$ можно рассматривать, как сглаженную вторую производную от исходных данных в соответствующих точках. Близкие соображения были использованы в [10] в качестве составной части алгоритма, повышающего четкость рентгеновских снимков.

На языке функций вычисление $\{q_k\}$ (2.8) означает, что, если рассматривать соответствующую компоненту исходного поля, как гладкую функцию $f(x)$, то можно сказать, что полученные после преобразования данные являются коэффициентами разложения этой функции по системе функций $v(x-k)$. Пространства, порожденные наборами функций $u(x-k)$ и $v(x-k)$, не ортогональны, и, используя специфическую структуру функций $v(x-k)$, можно получить:

$$q_k = \int_{-\infty}^{\infty} \nu(x-k)f(x)dx \approx \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x^2 u(x-k)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(x-k)(\alpha \partial_x^2 f(x))dx. \quad (2.9)$$

Последнее равенство получается, если два раза применить интегрирование по частям и учесть финитность функции $u(x)$.

Выражение (2.9) означает, что величины $r_n = q_n \alpha^{-1}$ представляют собой значения в целых точках свертки $\partial_x^2 f(x)$ со «сглаживающим ядром» $u(x)$. Поэтому можно считать, что эти величины задают коэффициенты разложения сглаженной функции $\partial_x^2 f(x)$.

В этих наводящих соображениях опущены уточнения, связанные с приближенной ортогональностью целочисленных сдвигов функций $u(x)$ и $\nu(x)$.

Итак, основную роль в рассматриваемом детекторе особенностей поля играют коэффициенты:

$$\alpha r_n = \sum_k \eta_{k-2n} \sum_m \xi_{k-2m} c_m^0. \quad (2.10)$$

Интерпретация этих коэффициентов в терминах исходного поля такова: индексы n , при которых коэффициенты $\{r_n\}$ меняют знак, соответствуют перегибам сглаженной функции $f(x)$ (в частности, сильным разрывам исходного поля, которые при сглаживании превращаются в перегибы рисунок 2.1(а, б, г)); локальные экстремумы $\{r_n\}$ соответствуют разрывам первой производной исходного поля (рисунок 2.1 (е, и)).

В экспериментах, при построении детектора, использовались фильтры симметричного комплексного вейвлета Добеши `dcosmsb`, имеющие по шесть ненулевых элементов (приложение 5.4).

2.2.1.3 Многомерная версия детектора

Алгоритм, описанный в предыдущем пункте, очевидным образом обобщается на случай поля произвольной размерности (на данном этапе предполагается, что точки поля соответствуют узлам некоторой прямоугольной расчетной сетки).

Для выделения в n -мерном поле разрывов, не параллельных заданному k -ому направлению (индекс i_k) надо:

- 1) разбить n -мерную таблицу на векторы (фиксируются все индексы, кроме i_k),
- 2) провести фильтрацию каждого вектора по описанному выше алгоритму,
- 3) в отфильтрованном поле выделить индексы, соответствующие характерным син-

гулярностям (нули, локальные экстремумы).

Так в случае трехмерного поля отдельно производится фильтрация по каждому из направлений (x, y, z), и точки помечаются как особые, если отфильтрованное поле имеет в них по соответствующему направлению ноль или локальный экстремум.

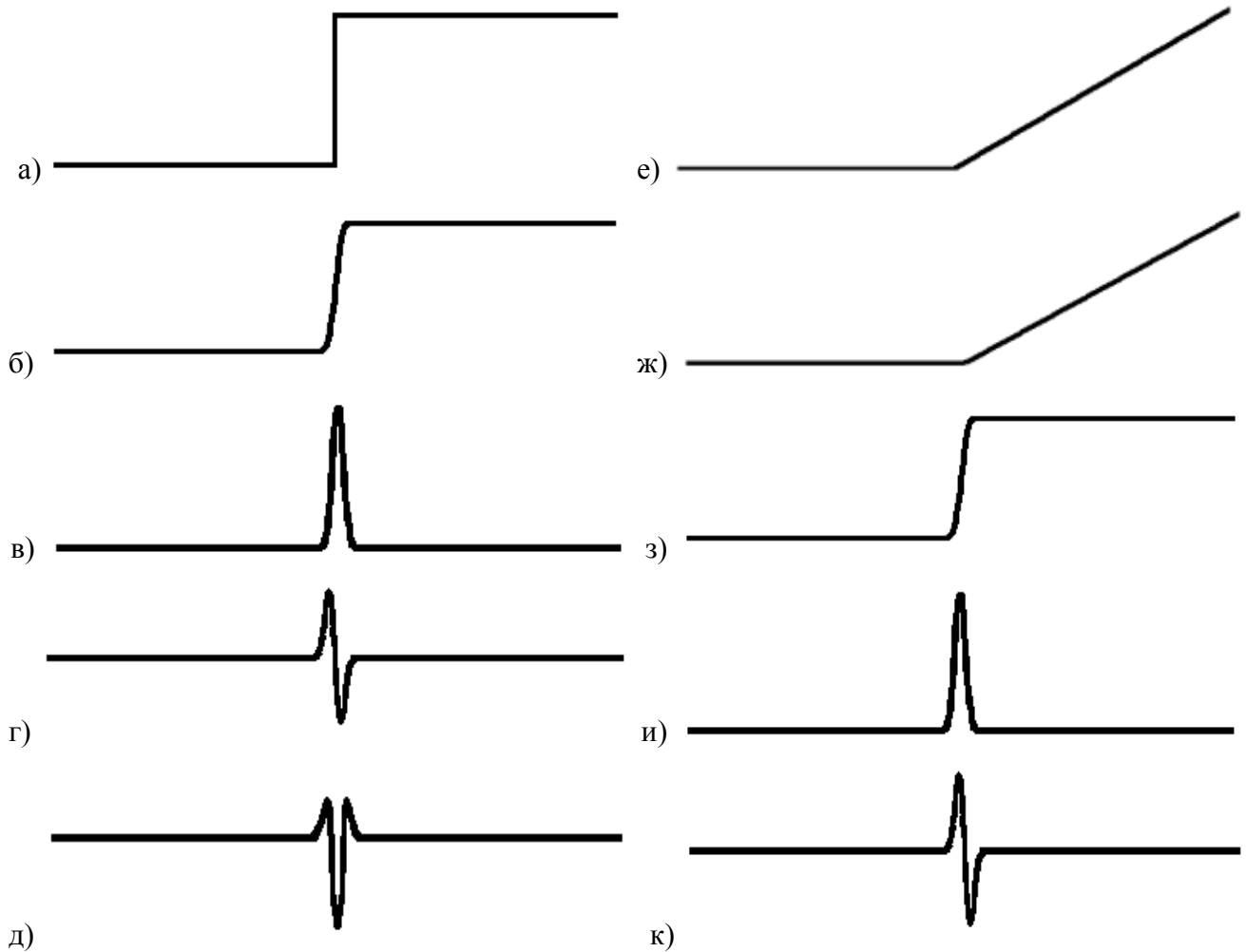


Рисунок 2.1 – Шаблоны разрывов: а) сильный разрыв; б) сглаженный сильный разрыв; в) первая производная сглаженного сильного разрыва; г) вторая производная сглаженного сильного разрыва; д) третья производная сглаженного сильного разрыва; е) слабый разрыв; ж) сглаженный слабый разрыв; з) первая производная сглаженного слабого разрыва; и) вторая производная сглаженного слабого разрыва; к) третья производная сглаженного слабого разрыва

При данном подходе не производится полное вычисление многомерного вейвлет - преобразования, что приводит к сокращению объема вычислений на данном этапе обработки поля. Так в двумерном случае объем вычислений сокращается в 2,25 раза, а в трехмерном – 4 раза (по сравнению с ситуацией, где используется полное вейвлет - преобразование – как, например, в

алгоритме из параграфа 1.6).

Таким образом, приведенный алгоритм непосредственно обобщается на произвольную размерность, и может быть полезен в анализе широкого круга задач, где требуется быстро оценить расположение сингулярностей поля.

Тем не менее, указанный метод обобщения применим только при анализе расчетов, выполненных на прямоугольных расчетных сетках. Обобщение алгоритма на случай произвольных конформных расчетных сеток приведено в главе 4.

2.2.2 Построение детектора-корректора

Детектор, описанный в предыдущем пункте, обладает существенным недостатком – разрывам первого рода функции $f(x)$ соответствуют нули последовательности $\{r_n\}$. Поэтому невозможно ввести пороговый параметр, который характеризовал бы интенсивность разрывов.

Кроме того, так как локализация слабых разрывов является гораздо более тонкой задачей в силу их высокой чувствительности к заданию пороговых значений детектора, необходима дополнительная информация об их расположении.

Поэтому дополнительно используется ещё один детектор (далее «корректор»), который может порождать больше артефактов и приводить к смещению результатов локализации, но у которого сильным разрывам соответствуют локальные экстремумы, а слабым – нули. Из множества особенностей, выделенных посредством детектора, описанного в предыдущем пункте (далее «основной детектор»), выбрасываются те, которые не обнаруживает корректор. Таким образом, результаты обработки существенно уточняются.

В качестве такого корректора используется свертка с вещественными вейвлетами Добеши подходящего порядка. Известно (см. пункт 1.1.5), что свертка с быстроубывающим вейвлетом эквивалентна композиции свертки исходного сигнала со сглаживающим ядром и взятию производной ровно того порядка, сколько нулевых моментов имеет вейвлет. Для корректора необходимо, чтобы порядок производной был нечетным и был больше двух (последнее требуется для локализации волн разрежения). Вещественные вейвлеты Добеши обладают всеми необходимыми свойствами, поэтому они были выбраны для построения корректора. Чтобы получить значения корректора на сетке исходного размера, исходный сигнал сначала интерполируется на более мелкую сетку с помощью обратного вейвлет - преобразования на основе комплексных вейвлетов Добеши, а затем вычисляется вейвлет - разложение с помощью фильтров, соответствующих классическим вещественным вейвлетам Добеши и анализируется высокочастотная компонента разложения, то есть последовательность $\{s_n\}$:

$$s_n = \sum_k \zeta_{k-2n} \sum_m \xi_{k-2m} c_m^0, \quad (2.11)$$

где $\{\xi_k\}$ – вещественная часть низкочастотного фильтра комплексного вейвлета Добеши, а $\{\zeta_k\}$ высокочастотный фильтр классического вейвлета Добеши.

Следует отметить, что выбор указанного способа перехода к более мелкой сетке позволяет оптимизировать алгоритм, поскольку указанные вычисления уже произведены в основном детекторе (2.10).

Чем больше нулевых моментов имеет вейвлет, тем сильнее «размазывается» разрыв (другими словами, тем дальше от фактического положения разрыва начинают появляться нули или максимумы модуля детектора). Поэтому при расчетах использовался вейвлет daub (приложение 5.4) с наименьшим подходящим числом нулевых моментов (3 нулевых момента).

Свертка с выбранным вейвлетом эквивалентна композиции свертки исходного сигнала со сглаживающим ядром и взятию производной третьего порядка. При этом индексы n , при которых коэффициенты $\{s_n\}$ меняют знак, соответствуют разрывам первой производной сглаженной функции $f(x)$ (рисунок 2.1 (е, к)), а локальные экстремумы $\{s_n\}$ соответствуют сильным разрывам (рисунок 2.1 (а, д)).

По аналогии с основным детектором, корректор так же может быть обобщен на случай многомерного поля заданного в узлах прямоугольной расчетной сетки.

2.2.3 Классификация разрывов

Используя построенные детекторы, можно провести классификацию особенностей течения.

2.2.3.1 Определения и обозначения

В результате применения детекторов, описанных в пунктах 2.2.1 и 2.2.2, к полям плотности и давления, каждый узел расчетной сетки получает некоторый набор из 8 возможных меток, обозначим их: mzd, sed, mzp, ser, med, czd, mer, czp. При этом символ ‘m’ означает, что метка относится к основному детектору, ‘с’ – к корректору, ‘d’ означает, что метка характеризует поле плотности, а ‘р’ – давления. Символы ‘z’ и ‘e’ определяют какие структуры были выделены в детекторе: ‘z’ соответствует переходам через ноль, а ‘e’ – локальным экстремумам модуля. В случае многомерных расчетных обработка производится по каждому из направлений (подпункт 2.2.1.3), при этом для разных направлений один и тот же узел сетки может получить несовпа-

дающие наборы меток. В этом случае итоговый набор меток для узла определяется как объединение всех наборов меток, полученных при обработке по различным направлениям.

Через MZD , CZD , MED , CED , MZP , CZP , MEP , CEP обозначим множества, состоящие из всех точек сетки имеющих соответствующие метки.

Поскольку существует некоторая погрешность при локализации разрывов, требуется определить новые операции над множествами точек, являющимися подмножествами узлов расчетной сетки.

Введем натуральный параметр R (при вычислениях R брался равным 4), характеризующий допустимую погрешность локализации.

Расстоянием между узлами сетки x_{i_1, \dots, i_n} и x_{j_1, \dots, j_n} будем называть $\max(|i_1 - j_1|, \dots, |i_n - j_n|)$.

Для операции пересечения ($C = A \tilde{\cap} B$): точка $a \in C$, если $a \in A$ и $\exists b \in B$, такое что расстояние между a и b меньше R .

Для операции разности ($C = A \tilde{\setminus} B$): точка $a \in C$, если $a \in A$ и $\bar{\exists} b \in B$, такого что расстояние между a и b меньше R .

Следует отметить, что при таком определении $A \tilde{\cap} B \neq B \tilde{\cap} A$. Поэтому в формулах следующего подпункта важен порядок выполнения операций над множествами, так как основной детектор обладает более высокой точностью локализации и выделенные с его помощью особенности лишь проверяются с помощью корректора.

2.2.3.2 Классификация

Известно, что для любого разрыва с нормальной скоростью распространения D выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \rho_l(u_{n_l} - D) &= \rho_r(u_{n_r} - D) \\ \rho_l(u_{n_l} - D)^2 + p_l &= \rho_r(u_{n_r} - D)^2 + p_r \\ \rho_l(u_{n_l} - D)u_{\tau_l} &= \rho_r(u_{n_r} - D)u_{\tau_r} \\ \rho_l(u_{n_l} - D) \left[e_l + p_l / \rho_l + (u_{n_l} - D)^2 / 2 \right] &= \rho_r(u_{n_r} - D) \left[e_r + p_r / \rho_r + (u_{n_r} - D)^2 / 2 \right], \end{aligned}$$

которые являются следствием законов сохранения массы, импульса и энергии.

На ударных волнах существует поток массы через поверхность разрыва $\rho_l(u_{n_l} - D) = \rho_r(u_{n_r} - D) = J \neq 0$, в то время как на контактных разрывах $J=0$ и, следовательно, $p_l = p_r$. Таким образом, на ударных волнах рвется и плотность, и давление, а на контактных разрывах только плотность.

В силу свойств детекторов, описанных в пунктах 2.2.1 и 2.2.2:

Ударным волнам соответствует множество точек:

$$(M Z D \tilde{\cap} C E D) \tilde{\cap} (M Z P \tilde{\cap} C E P).$$

Так как на контактных разрывах рвется плотность, но не рвется давление, им соответствует множество точек:

$$(M Z D \tilde{\cap} C E D) \tilde{\cap} (M Z P \tilde{\cap} C E P).$$

Волнам разрежения соответствует множество точек:

$$(M E D \tilde{\cap} C Z D) \tilde{\cap} (M E P \tilde{\cap} C Z P).$$

Вычисления показали, что кроме волн разрежения структуры, которые детекторы локализируют как разрывы производных, возникают на границах, размазанных в результате счета сильных разрывов. Поэтому в последнее множество также входит множество точек соответствующее границам размазывания ударных волн. Кроме того дополнительно выделяется множество точек: $(M E D \tilde{\cap} C Z D) \tilde{\cap} (M E P \tilde{\cap} C Z P)$ - образующих границы размазывания контактных разрывов.

2.2.4 Алгоритм локализации и классификации разрывов в двумерном случае, оценка числа необходимых вычислительных операций

На входе алгоритм получает две матрицы размера M на N , значения которой являются дискретизацией полей плотности $\{\rho_{i,j}\}_{1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N}$ и давления $\{p_{i,j}\}_{1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N}$ в узлах (или центрах ячеек) прямоугольной сетки.

На первом этапе производится независимая обработка строк и столбцов матриц в соответствии с пунктами 2.2.1.2 и 2.2.2. Так как все строки и столбцы обрабатываются независимо, алгоритм допускает очевидное распараллеливание.

Далее приводится подробная обработка i -й строки матрицы поля плотности (оценки числа операций приводятся без учета констант не зависящих от размерности входных данных):

1) вычисляется интерполяция данных на мелкую сетку $\hat{\rho}_{i,k} = \sum_m \xi_{k-2m} \rho_{i,m}$, требуется по $K_\xi N$ операций сложения и умножения, где K_ξ - число ненулевых элементов фильтра ξ ;

2) вычисляется сглаженная вторая производная $q_{i,k} = \sum_n \eta_{n-2k} \hat{\rho}_{i,n}$, требуется по $K_\eta N$ операций сложения и умножения, где K_η - число ненулевых элементов фильтра η ;

3) вычисляются данные для корректора $s_{i,k} = \sum_n \zeta_{n-2k} \widehat{\rho}_{i,n}$, требуется по $K_\zeta N$ операций сложения и умножения, где K_ζ - число ненулевых элементов фильтра ζ ;

4) локализуется множество переходов второй производной через ноль $\widehat{A}_{MZD}^i = \{k \in Z : 1 \leq k \leq N, q_{i,k} q_{i,n} < 0, |q_{i,k}| + |q_{i,n}| \neq 0, n = k-1 \vee n = k+1\}$, требуется $4N$ операций;

5) локализуется множество переходов корректора через ноль $\widehat{A}_{CZD}^i = \{k \in Z : 1 \leq k \leq N, s_{i,k} s_{i,n} < 0, |s_{i,k}| + |s_{i,n}| \neq 0, n = k-1 \vee n = k+1\}$, требуется $4N$ операций;

6) локализуется множество локальных экстремумов второй производной $A_{MED}^i = \{k \in Z : 1 \leq k \leq N, |q_{i,k}| > \alpha_M, |j_{i,k}| \geq |q_{i,n}|, \forall n \in Z, k - R_M \leq n \leq k + R_M, |q_{i,k}| > |q_{i,k-1}| \vee |q_{i,k}| > |q_{i,k+1}|\}$, где α_M - порог чувствительности, R_M - радиус окрестности в которой в точке множества A_{MED}^i должен достигаться максимум модуля, требуется $(2 R_M + 4)N$ операций;

7) локализуется множество локальных экстремумов корректора $A_{CED}^i = \{k \in Z : 1 \leq k \leq N, |s_{i,k}| > \alpha_C, |s_{i,k}| \geq |s_{i,n}|, \forall n \in Z, k - R_C \leq n \leq k + R_C, |s_{i,k}| > |s_{i,k-1}| \vee |s_{i,k}| > |s_{i,k+1}|\}$, где α_C - порог чувствительности, R_C - радиус окрестности в которой в точке множества A_{CED}^i должен достигаться максимум модуля, требуется $(2 R_C + 4)N$ операций;

8) из множества \widehat{A}_{MZD}^i исключаются точки соответствующие осцилляциям $A_{MZD}^i = \left\{ k \in \widehat{A}_{MZD}^i : \left(\forall n \in Z, k+1 \leq n \leq k+R_{MZ}, n \notin \widehat{A}_{MZD}^i \right) \vee \left(\forall m \in Z, k-R_{MZ} \leq m \leq k-1, m \notin \widehat{A}_{MZD}^i \right) \right\}$, где R_{MZ} заданный радиус окрестности, число необходимых операций зависит от мощности множества \widehat{A}_{MZD}^i , максимум - $2 R_{MZ} N$ операций;

9) из множества \widehat{A}_{CZD}^i исключаются точки соответствующие осцилляциям $A_{CZD}^i = \left\{ k \in \widehat{A}_{CZD}^i : \left(\forall n \in Z, k+1 \leq n \leq k+R_{CZ}, n \notin \widehat{A}_{CZD}^i \right) \vee \left(\forall m \in Z, k-R_{CZ} \leq m \leq k-1, m \notin \widehat{A}_{CZD}^i \right) \right\}$, где R_{CZ} заданный радиус окрестности, число необходимых операций зависит от мощности множества \widehat{A}_{CZD}^i , максимум - $2 R_{CZ} N$ операций;

10) узлам сетки соответствующим элементам множеств A^i присваиваются соответствующие метки из подпункта 2.2.3.1.

Таким образом, для обработки одной строки матрицы поля плотности требуется $(2 K_\xi + 2 K_\eta + 2 K_\zeta + 4 + 4 + 2 R_M + 4 + 2 R_C + 4 + 2 R_{MZ} + 2 R_{CZ})N$ операций. На практике $K_\xi = K_\eta = K_\zeta = 6$, а $R_M = R_C = R_{MZ} = R_{CZ} = 3$ и число операций соответственно равно $76N$. Для обработки всех строк и столбцов матрицы поля плотности требуется $152MN$ операций. Столько же операций требуется на обработку матрицы поля давления.

После обработки полей плотности и давления производится классификация узлов сетки в соответствии с подпунктом 2.2.3.2.

2.3 Численные эксперименты

В этой параграфе приведены результаты применения разработанного алгоритма к численным полям, для модельной задачи и задачи о взаимодействии разрывов течения в канале, под действием импульсного вложения энергии [32].

Рассматриваемое течение представляет большой интерес с разных точек зрения. В нем реализуются такие явления, как взаимодействие ударной волны с прогретым приповерхностным слоем и неустойчивость тангенциального разрыва под действием ударной волны. Сложная конфигурация разрывов нестационарного течения предъявляет высокие требования к численным алгоритмам и методам анализа и обработки результатов.

2.3.1 Тестовый пример

Исходные данные заданы на прямоугольной сетке и содержат сильный разрыв вдоль кривой $(j - i)/1.4 = 60 * \sin(\pi(i + j)/500)$, кроме того на данные наложен шум $\omega_{i,j} = 0.01 \sin(30i) \sin(30j)$:

$$c_{i,j} = \begin{cases} 3 + 0.01 \sin(30i) \sin(30j), & (j - i)/1.4 < 60 * \sin(\pi(i + j)/500) \\ 2 + 0.01 \sin(30i) \sin(30j), & (j - i)/1.4 \geq 60 * \sin(\pi(i + j)/500) \end{cases},$$

где $i, j \in Z$, $0 \leq i < 500$, $0 \leq j < 500$.

Результат локализации разрывов с помощью основного детектора представлен на рисунке 2.2. Сильный разрыв удалось успешно локализовать, ошибка точности локализации не превышает размер одной ячейки сетки.

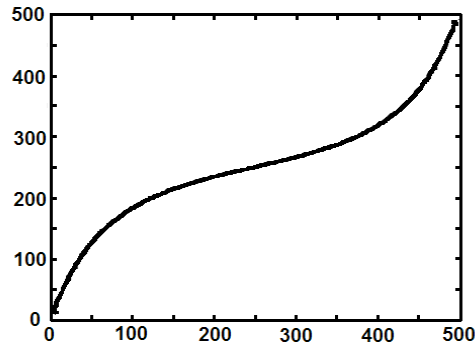


Рисунок 2.2 – Результаты обработки тестовых данных

2.3.2 Численное моделирование

Моделирование проводилось в рамках математической модели нестационарных 2D уравнений Эйлера. Расчет производился «сквозным» образом на неподвижной сетке с размазыванием разрывов. Постановка задачи представлена на рисунке 2.3. В начальный момент времени плоская ударная волна с числом Маха $M = 2.9$ располагается в сечении $x = 0$. В эксперименте в объемную часть разряда $0 < x < 2$, $|y| < 1.1$ (область 2 на рисунке 2.3) вкладывалось 0.83 Дж, в листы около стенок $0 < x < 2$, $1.1 < |y| < 1.2$ (области 3 на рисунке 2.3) – по 0.11 Дж. На основании ранее проведенных исследований [33] предполагалось, что в поступательные степени свободы мгновенно переходит 50% вложенной энергии.

Равномерное по времени и пространству вложение энергии $\Delta E/V$ в постоянный поток приводит к росту давления на величину $\Delta p = (\gamma - 1) \Delta E/V$ при сохранении плотности и скорости. В расчетах плотность и давление были отнесены к величинам в невозмущенном газе – область 1 на рисунке 2.3.

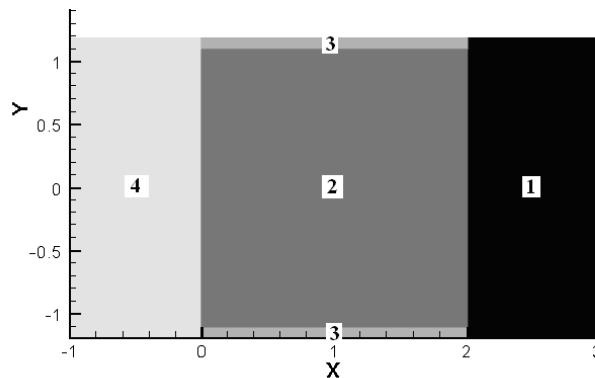


Рисунок 2.3 – Начальное распределение давления для 2D расчета

Таким образом, в начальный момент времени существует 5 областей с постоянными значениями газодинамических величин:

- 1) невозмущенный неподвижный газ перед фронтом падающей ударной волны:

$$x > 2, \quad |y| < 1.2, \quad \rho_1=1, \quad u_1=0, \quad v_1=0, \quad p_1=1,$$

- 2) объемная часть разряда:

$$0 < x < 2, \quad |y| < 1.1, \quad \rho_2=1, \quad u_2=0, \quad v_2=0, \quad p_2=4.9309,$$

- 3) пристеночные области («плазменные листы»):

$$0 < x < 2, \quad 1.1 < |y| < 1.2, \quad \rho_3=1, \quad u_3=0, \quad v_3=0, \quad p_3=12.4625,$$

- 4) область за фронтом падающей волны:

$$x < 0, \quad |y| < 1.2, \quad \rho_4=3.7629, \quad u_4=2.5194, \quad v_4=0, \quad p_4=9.6450.$$

Расчеты 2D течения проводились на сетке, содержащих 1280*256 ячеек в полуплоскости $y > 0$ с учетом симметрии течения.

2.3.3 Исследование одномерной задачи

На границах областей, описанных в предыдущем пункте, в начальный момент происходят распады разрывов с образованием волн разрежения, ударных волн и тангенциальных разрывов. В последующие моменты времени течение характеризуется достаточно сложным процессом движения и взаимодействия этих вторичных разрывов. Для исследования такого течения целесообразно предварительно рассмотреть упрощенную одномерную задачу. Поскольку большая часть энергии приходится на объемную часть разряда, можно ожидать, что в одномерном течении, возникающем при отсутствии вложения энергии в пристеночные листы (области 3 на рисунке 2.3), некоторые существенные детали реального двумерного течения будут выявлены. На рисунке 2.4 представлена начальная конфигурация разрывов.

Энергия вкладывается на отрезке АВ. В результате распада разрыва в точке А формируется ударная волна АІ, тангенциальный разрыв АН, ударная волна АG. Распад разрыва в точке В дает волну разрежения ЕВF, тангенциальный разрыв ВD, ударную волну ВС. Начальные интенсивности перечисленных разрывов зависят от двух факторов – числа Маха падающей ударной волны и количества вложенной энергии.

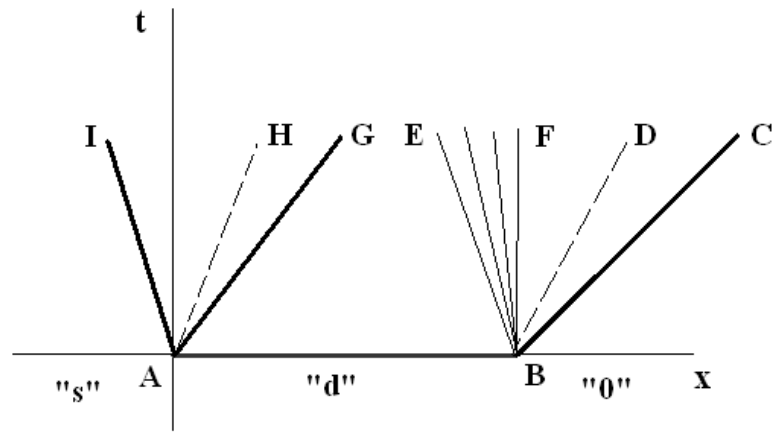


Рисунок 2.4 – Начальное расположение разрывов в одномерной задаче

Течение в последующие моменты времени рассчитывалось путем численного интегрирования нестационарных одномерных уравнений Эйлера. Основная часть расчетов проводилась без выделения разрывов на сетке, содержащей 2048 ячеек. Использовался одномерный вариант обобщенной разностной схемы С.К. Годунова 2-го порядка аппроксимации. Линии постоянной плотности представлены на рисунке 2.5.

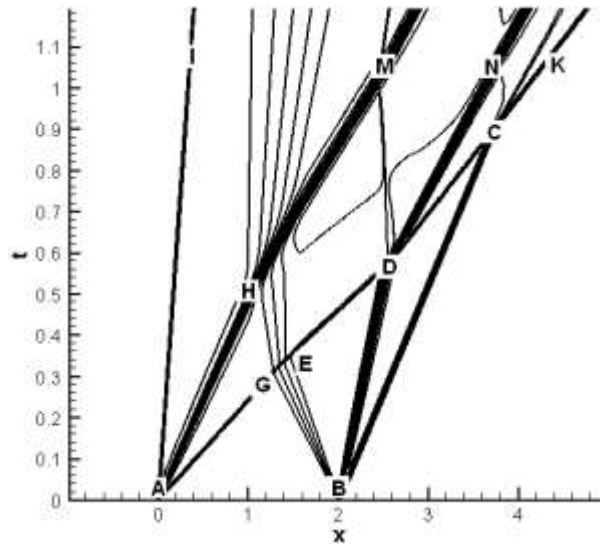


Рисунок 2.5 – Линии постоянной плотности в одномерном продольном течении

Отрезок АВ соответствует области энерговыделения в момент времени $t=0$. С течением времени ударная волна АG последовательно взаимодействует с волной разрежения GBE и тангенциальным разрывом BD. В более поздний момент времени эта волна догоняет ударную волну BC, в результате чего формируется ударная волна СК, являющаяся правой границей области

возмущенного течения. Интенсивность этой результирующей ударной волны с течением времени выходит на уровень исходной падающей ударной волны. Вложенная энергия расходуется, главным образом, на формирование прогретой области между тангенциальными разрывами M,N.

2.3.4 Исследование 2D задачи

Начальные стадии двумерного течения, возникающего при одновременном вложении энергии в объемную область и плазменные листы, можно условно охарактеризовать как суперпозицию одномерных течений (продольного и поперечного).

Вблизи плоскости симметрии ($y=0$) течение близко к продольному одномерному (пункт 2.3.3). Однако, около стенок ударные волны I_1I , C_1C , G_1G и тангенциальные разрывы H_1H , D_1D (рисунок 2.6) движутся с более высокими скоростями. Кроме того, на границах плазменных листов в начальный момент образуются разрывы, распространяющиеся и взаимодействующие в поперечном направлении. Линия тангенциального разрыва D_1D , которая в начальный момент совпадала с правой границей области энерговыделения, достаточно быстро оказывается искривленной в силу ускоренного движения вблизи стенок. Эта стадия течения изображена на рисунках 2.7(а) и 2.7 (б).

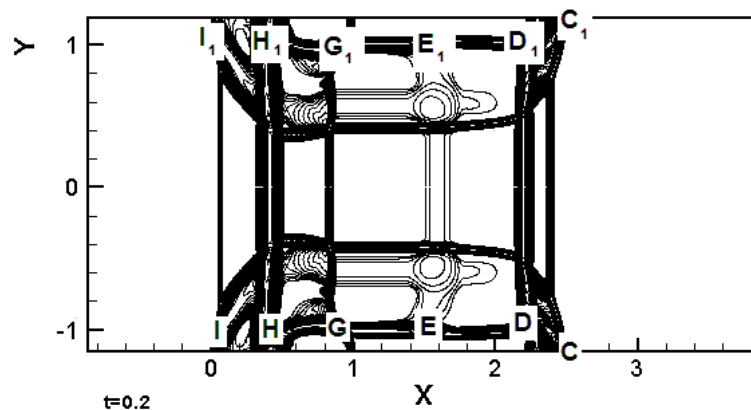


Рисунок 2.6 – Изолинии модуля градиента плотности

В некоторый момент времени ударная волна G_1G (также искривленная) догоняет контактный разрыв D_1D . В результате взаимодействия этих разрывов образуются две ударные волны: отраженная и проходящая. Амплитуда возмущений тангенциального разрыва D_1D увеличивается – рисунки 2.7 (в) – (е).

Такие свойства течения позволяют говорить о своеобразном проявлении неустойчивости Рихтмайера-Мешкова [34, 35].

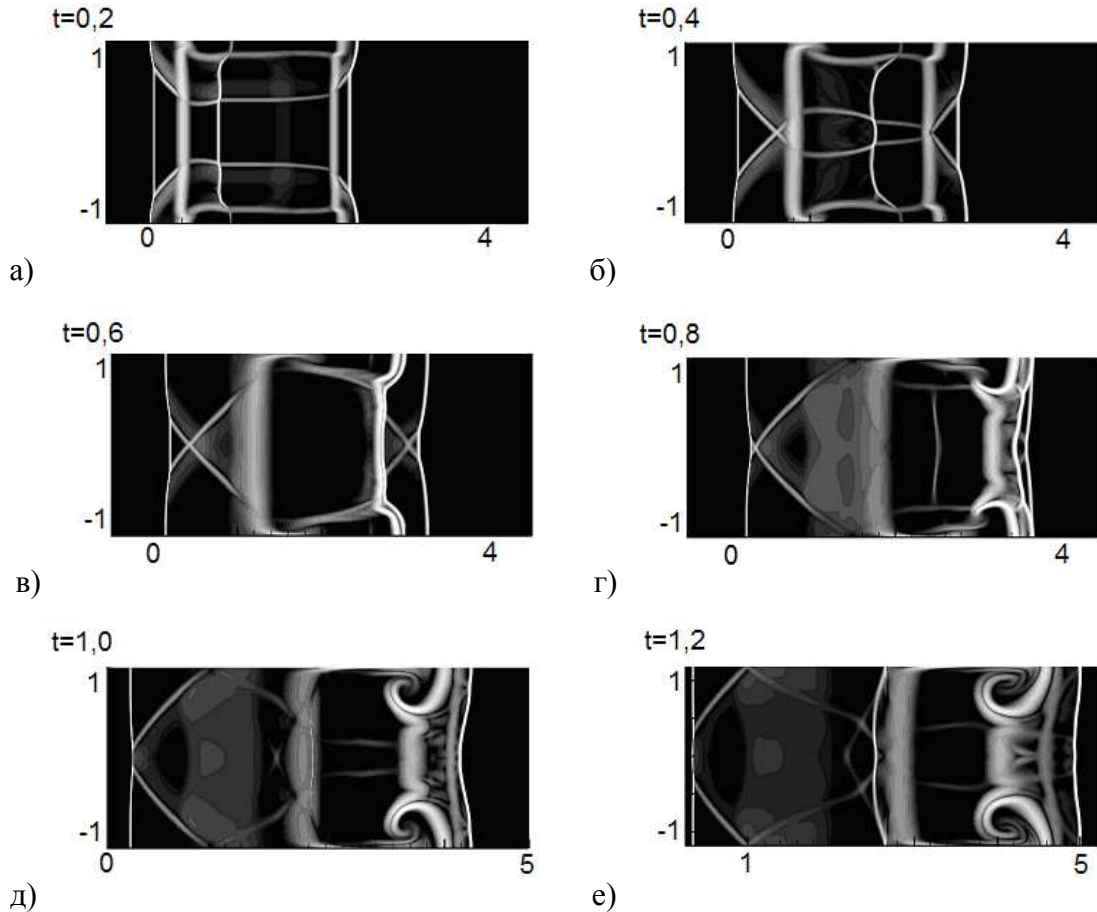


Рисунок 2.7 – Распределение модуля градиента плотности в последовательные моменты времени

2.3.5 Выделение и классификация разрывов

В результате применения детектора к исходной дискретной функции получается матрица, ячейки которой соответствуют центрам ячеек расчетной сетки. Нулевые элементы матрицы соответствуют гладкому течению, ненулевые – характеризуют тип особенности. Полученный в таком виде результат может быть использован в вычислительных алгоритмах без непосредственного (визуального) анализа.

На рисунках 2.8, 2.9 и 2.10 представлены результаты локализации разрывов плотности течения в различные моменты времени. Соответствующие распределение модуля градиента плотности представлены на рисунках 2.7 (а) – (в) Черные линии соответствуют сильным разры-

вам, серые – слабым разрывам и границам размазывания сильных разрывов, поскольку результаты получены без анализа поля давления, классификация разрывов неполна. При локализации разрывов в корректоре использовался нулевой порог чувствительности $\alpha_c = 0$, поэтому на рисунках присутствуют артефакты (структуры и шумы, которые не соответствуют реальным разрывам). Влияние порога чувствительности на результат локализации представлено в главе 3.

Четко локализуются вертикальные ударные волны. Сильные разрывы, окруженные серыми линиями, соответствуют размазанному контактному разрыву. В области между проходящей ударной волной и контактными разрывом (рисунок 2.8 $x \in [0.4, 0.8]$, рисунок 2.9 $x \in [0.9, 1.7]$, рисунок 2.10 $x \in [1.2, 2.6]$) формируется зона шумов. Для локализации особенностей течения в этой области требуется использовать разностную схему более высокого порядка аппроксимации при проведении расчетов течения.

Очевидно, что отдельным точкам на рисунках не соответствуют никакие физические объекты. В следующем пункте показано, что при более точном расчете, в окрестности этих точек могут быть локализованы новые структуры.

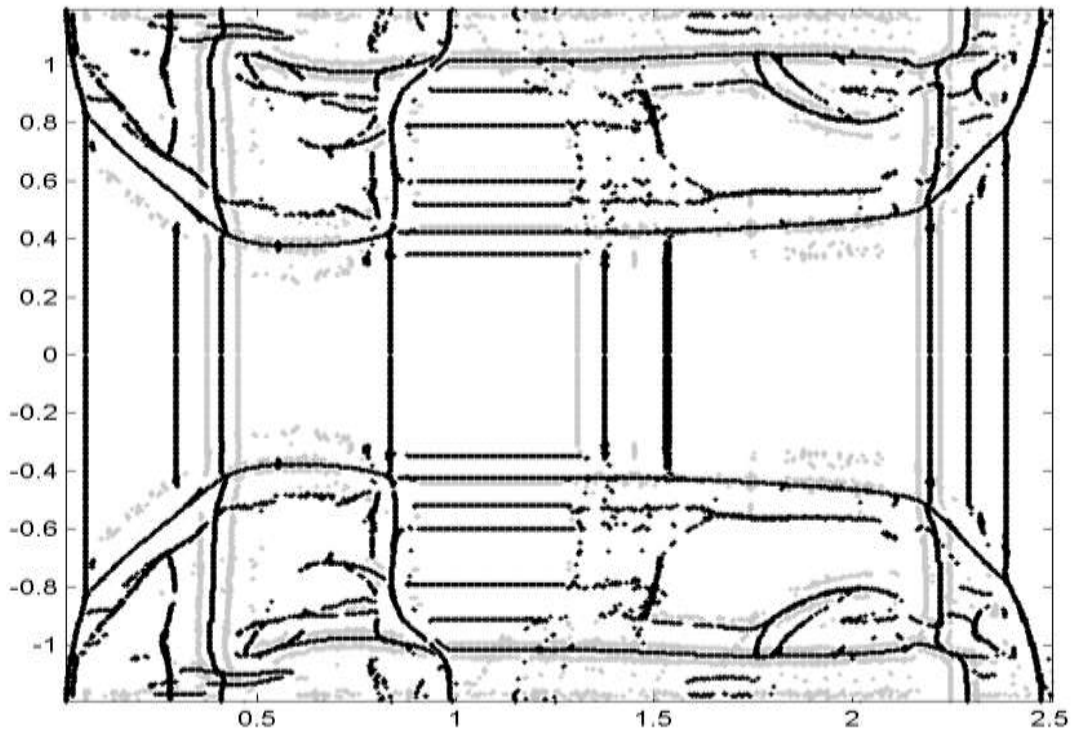


Рисунок 2.8 – Локализация разрывов поля плотности в момент времени 0.2

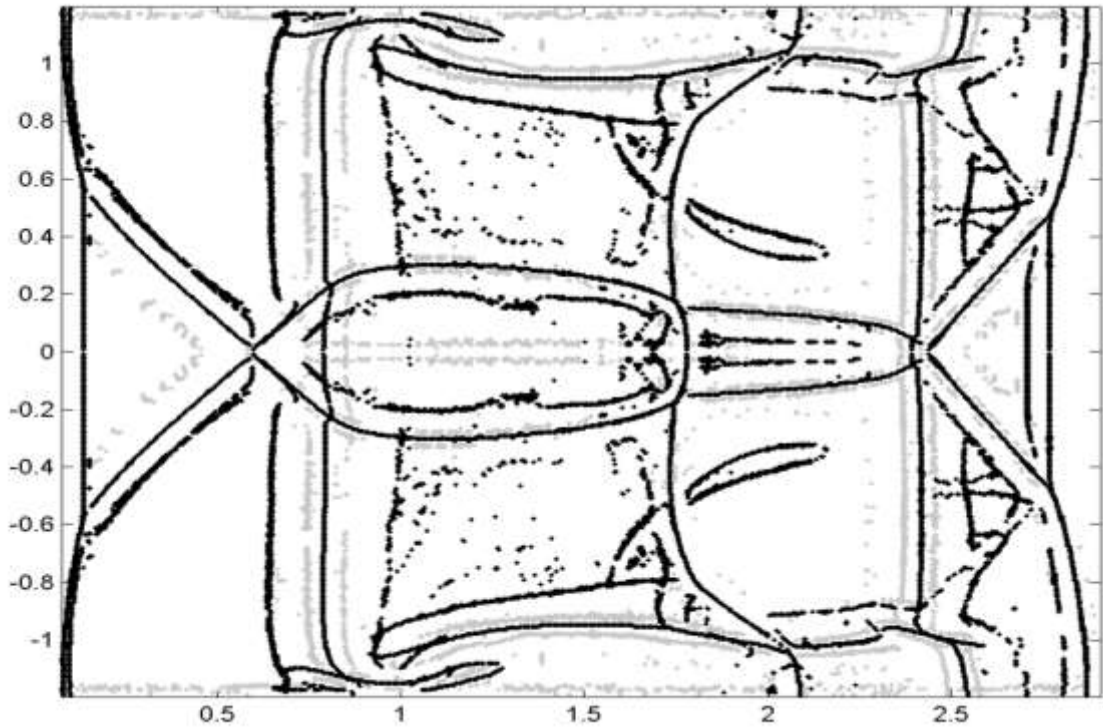


Рисунок 2.9 – Локализация разрывов поля плотности в момент времени 0.4

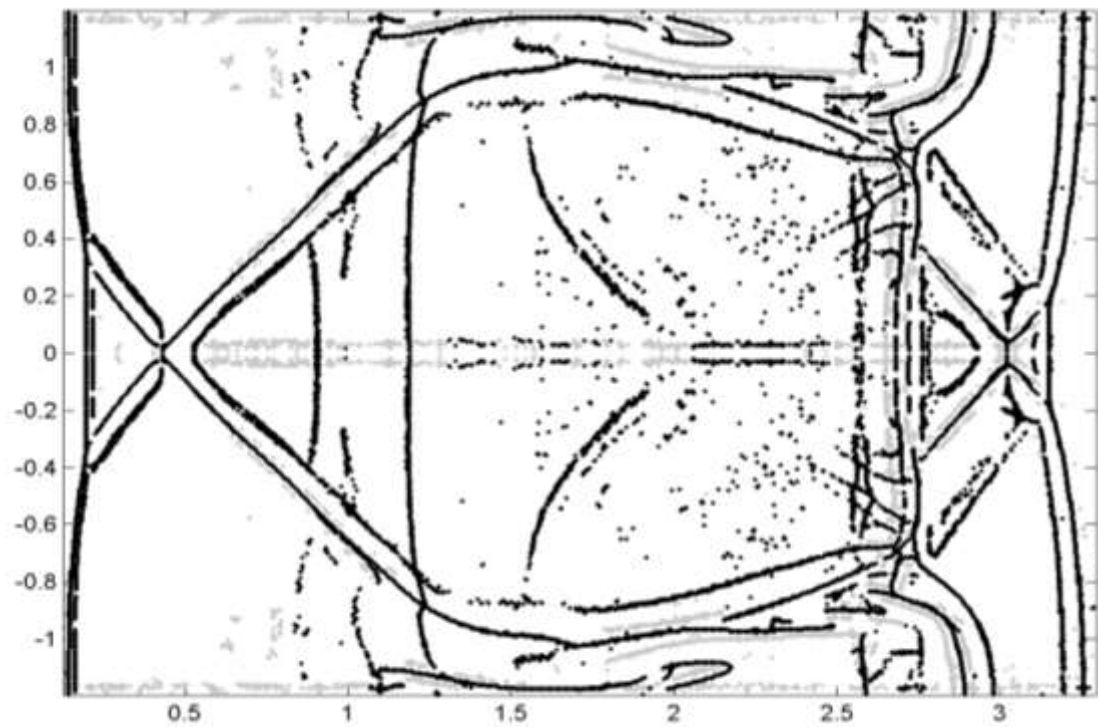


Рисунок 2.10 – Локализация разрывов поля плотности в момент времени 0.6

2.3.6 Сравнение результатов локализации разрывов в расчетах, полученных по схемам 1-го и 2-го порядков аппроксимации

Представленный алгоритм выделения особенностей может быть использован для исследования свойств различных разностных схем. В частности, был выполнен сравнительный анализ разностных решений, полученных по схемам 1-го и 2-го порядков аппроксимации (рисунки 2.11, 2.12). Поскольку течение симметрично относительно середины трубы, на последующих рисунках представлены данные только для верхней половины расчета.

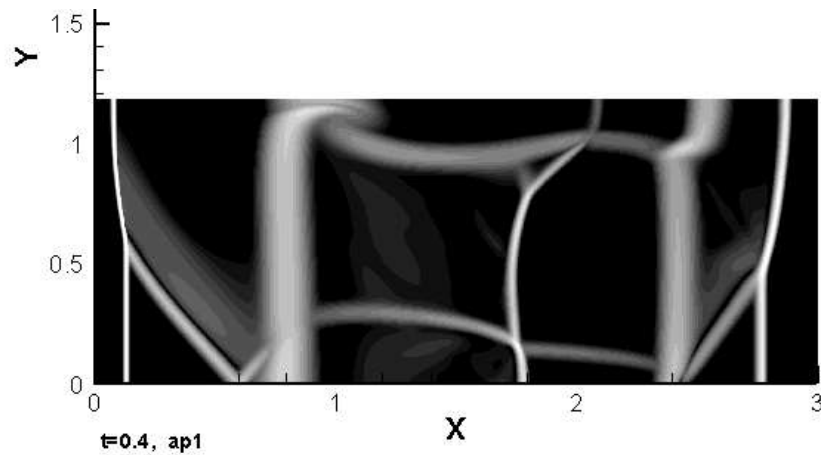


Рисунок 2.11 – Распределение градиента плотности в расчете, полученном по схеме 1-го порядка аппроксимации

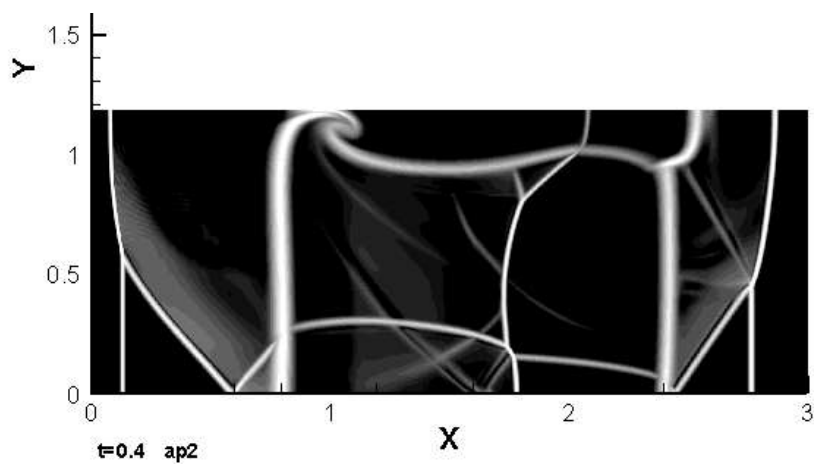


Рисунок 2.12 – Распределение градиента плотности в расчете, полученном по схеме 2-го порядка аппроксимации

В расчете, выполненном по схеме первого порядка аппроксимации, контактные разрывы сильно размазываются рисунок 2.11. На рис 2.13 показано положение разрывов, а на рисунке 2.14 границы размазывания разрывов.

В расчете, выполненном по схеме второго порядка аппроксимации, разрывы размазываются значительно слабее рисунок 2.12. Все «вертикальные» разрывы локализируются в тех же точках, что в расчете, выполненном по схеме первого порядка, однако «горизонтальные» разрывы локализованы более точно. В зоне $[0.9, 1.7] \times [0.3, 0.8]$ на рисунке 2.13 наблюдается зашумление, а в расчете, выполненном по схеме второго порядка аппроксимации (рисунок 2.15), в этой области локализованы новые структуры, которые носят характер разрывов плотности (контактные).

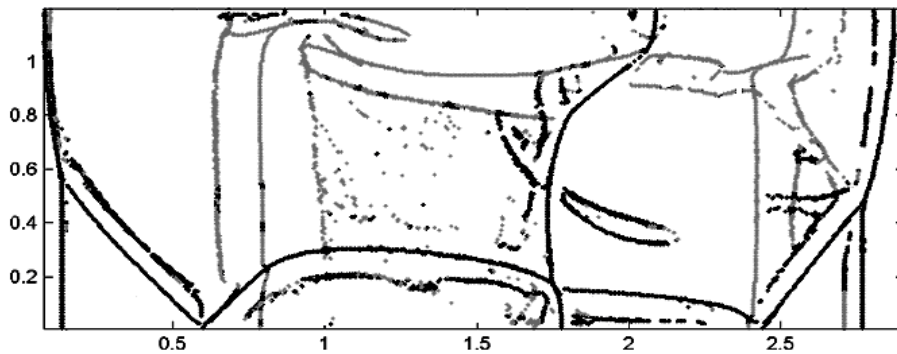


Рисунок 2.13 – Разрывы, локализованные в расчете, полученном по схеме 1-го порядка аппроксимации. Черные линии – ударные волны, серые – контактные разрывы

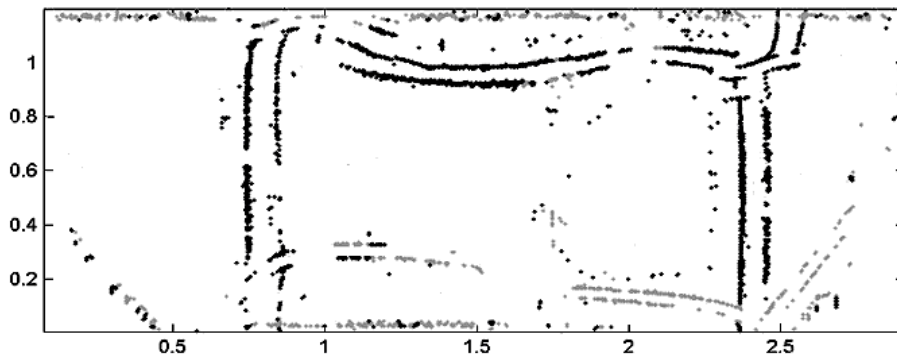


Рисунок 2.14 – Разрывы, локализованные в расчете, полученном по схеме 1-го порядка аппроксимации. Светлые линии – границы размазывания ударных волн, темные – границы размазывания контактных разрывов

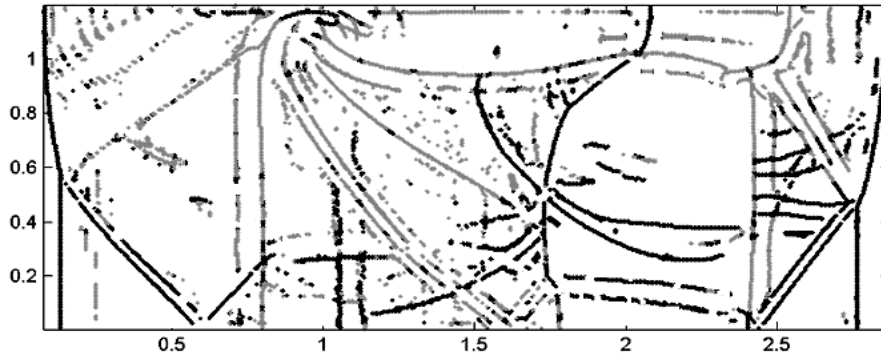


Рисунок 2.15 – Разрывы, локализованные в расчете, полученном по схеме 2-го порядка аппроксимации. Черные линии – ударные волны, серые – контактные разрывы

2.3.7 Обработка исходных данных методом С.Б. Базарова

Для сравнения, в этом параграфе представлены результаты локализации разрывов методом, описанным в параграфе 1.8, в полях плотности расчетов, выполненных по схемам первого и второго порядков аппроксимации. Для удобства в алгоритме выделяются два этапа. На первом этапе выделяются все “подозрительные точки” (множество N_1) и из него выбираются те точки, в которых по некоторому направлению достигается максимум градиента плотности (множество N_2). Окончательный результат локализации (множество N_3) получается на втором этапе после удаления ложных структур из множества N_2 .

При сравнении результатов локализации методом Базарова с результатами, полученными в пункте 2.3.5 (рисунки 2.13-2.19), видно, что на втором этапе обработки исчезает ряд важных структур, например, фронт ударной волны в зоне $[2.7, 2.9] \times [0, 0.4]$ и часть контактного разрыва в зоне $[0.7, 0.8] \times [0.4, 1]$. При этом сохраняется часть артефактов. В то же время часть артефактов, присутствующих на рисунках 2.13-2.15, отсутствует на рисунках 2.16-2.19. Для удаления этих артефактов требуется введение порога в корректоре (параграф 3.5).

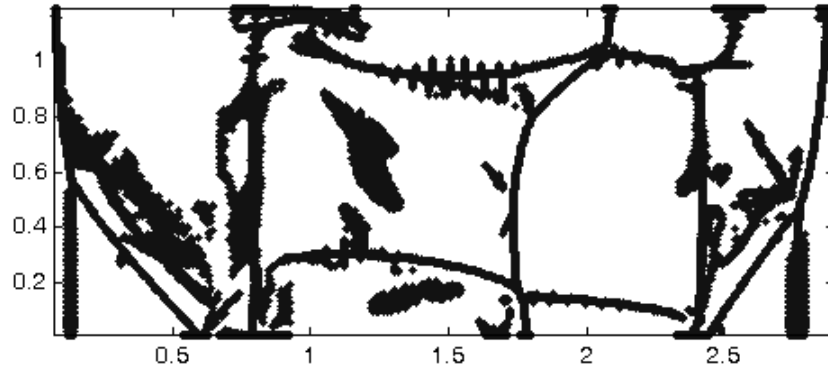


Рисунок 2.16 – Разрывы, локализованные в поле плотности методом Базарова в расчете, полученном по схеме 1-го порядка аппроксимации (первый этап)

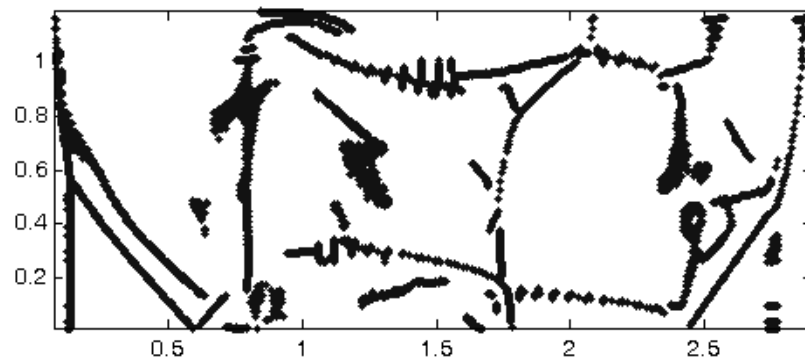


Рисунок 2.17 – Разрывы, локализованные в поле плотности методом Базарова в расчете, полученном по схеме 1-го порядка аппроксимации (второй этап)

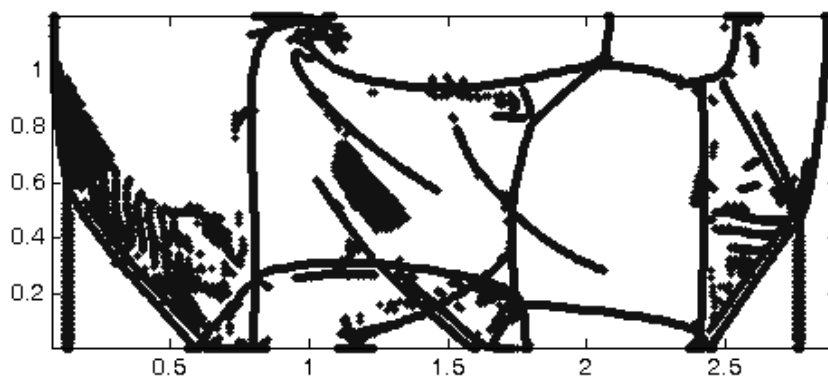


Рисунок 2.18 – Разрывы, локализованные в поле плотности методом Базарова в расчете, полученном по схеме 2-го порядка аппроксимации (первый этап)

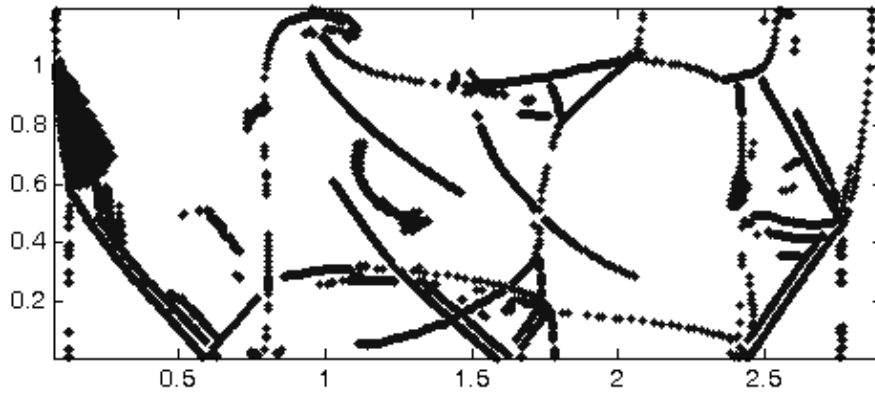


Рисунок 2.19 – Разрывы, локализованные в поле плотности методом Базарова в расчете, полученном по схеме 2-го порядка аппроксимации (второй этап)

2.4 Заключение

Представленный в этой главе алгоритм позволяет проводить локализацию и классификацию разрывов в расчетах газодинамических течений, полученных методом сквозного счета на прямоугольной сетке. Достоинством этого алгоритма является то, что он не требует тонкой настройки и оказывается эффективен (выделяет все разрывы при умеренном числе артефактов) даже при задании нулевых порогов чувствительности. Это особенно важно для приложений требующих автоматизированного использования детектора и задач, в которых в одном расчете могут присутствовать разрывы разной интенсивности. В следующих главах будут более подробно рассмотрены свойства построенного детектора, а детектор будет обобщен на случай произвольных расчетных сеток.

3 Многомасштабный анализ особенностей газодинамических полей и оценка качества работы детектора

Глава посвящена сравнительному анализу особенностей, проявляющихся на различных уровнях вейвлет разложений полей газодинамических величин, найденных методом сквозного счета. Сравнение проведено также для расчетов, полученных на сетках с шагами дискретизации h и $h/2$. Численные эксперименты показали, что использование нескольких шагов кратномасштабного анализа позволяет получить дополнительную информацию о структуре разрывов в течении. Кроме того, оказалось, что построенный детектор позволяет локализовать артефакты течения, возникающие из-за локальных неточностей в дискретизации.

Основные результаты, полученные в этой главе, опубликованы в [36,37].

3.1 Введение

В главе 2 на основе вейвлет анализа был построен детектор сингулярностей газодинамических полей. В качестве исходных данных детектор использует результаты расчета газодинамических полей плотности и давления, полученные на прямоугольной расчетной сетке методом сквозного счета. В результате алгоритм присваивает каждому узлу сетки число, которое характеризует тип течения в окрестности этого узла. Особенностью алгоритма является то, что он не требует обязательного задания порогов чувствительности, хотя такая возможность *ar priori* имеется. Это расширяет область использования детектора для автоматического выделения разрывов, но приводит к появлению артефактов, которые могут быть исключены при дополнительной, тонкой настройке.

Однако, при решении задачи локализации сингулярностей, также следует учитывать, что в одном и том же расчете могут присутствовать эффекты соответствующие разным масштабам, такие как разрывы разных интенсивностей, шумы разных частот и амплитуд, структуры обусловленные типом разностной схемы и численных методов. Поэтому перед решением задачи о выделении и классификации особенностей необходимо решить задачу о разложении исходных данных по уровням, так что на каждом уровне разложения остаются только структуры соответствующего масштаба. После разложения можно либо исключить из обработки структуры соответствующие мелким масштабам, как несущественные, либо проводить полный анализ.

Вейвлет анализ предлагает естественный метод многомасштабного разложения исходного сигнала. На каждом шаге разложения сигнал разлагается на две компоненты: сглаженную низкочастотную и зашумленную высокочастотную. На каждом последующем шаге происходит

разложение низкочастотной компоненты разложения. При этом каждый последующий уровень разложения соответствует более грубой сетке.

В этой главе проведен сравнительный анализ сингулярностей и артефактов, проявляющихся на различных уровнях вейвлет разложения исходного поля, выполненного при помощи различных вещественных и комплексных вейвлетов.

Также исследовался вопрос о том, особенности какого типа и интенсивности выделяются детектором наиболее надежно. Для определения интенсивности особенностей при локализации разрывов вводились различные пороги чувствительности.

Кроме того, большой интерес представляет сравнительный анализ разрывов локализованных в расчетах одной и той же задачи, произведенных на различных сетках, таких, что при разложении расчета проведенного на более мелкой сетке переходим на сетку соответствующую расчету, проведенному на грубой сетке. При этом можно определить: насколько точно локализованы разрывы на грубой сетке, в каких областях чаще проявляются счетные артефакты, а также исследовать вопрос о допустимости отождествления поля с коэффициентами его вейвлет-разложения. Исследованию данных вопросов посвящена заключительная часть этой главы.

Глава в целом посвящена описанию широкого круга экспериментов, проведенных в рамках решения задачи о построении наиболее качественного алгоритма автоматического выделения сингулярностей в газодинамических полях полученных методами сквозного счета.

3.2 Численное моделирование

В качестве модельной была выбрана задача об эволюции и взаимодействии разрывов в канале под действием импульсного вложения энергии из пункта 2.3.2 главы 2.

В главе 2 и [32] был проведен подробный анализ этого течения для расчета, выполненного по разностной схеме первого порядка аппроксимации на сетке, содержащей 1280×256 ячеек. Там также представлено решение одномерного варианта этой задачи, при исключении вложений энергии в областях 3 (рисунок 2.2). Это решение позволило проследить эволюцию вертикальных разрывов в начальные моменты времени и теоретически обосновать полученные результаты.

Для данной главы были выполнены еще два варианта расчета этой же задачи. Оба расчета выполнены по схеме второго порядка аппроксимации. Расчет 1 выполнен на сетке содержащей 2048×256 ячеек, а расчет 2 на сетке содержащей 4096×512 ячеек.

Для получения более точных оценок были проведены расчеты упрощенного варианта этой задачи, в котором отсутствуют дополнительные вложения энергии в областях $0 < x < 2$, $1.1 < |y| < 1.2$. Моделирование проводилось в рамках уравнений Эйлера. Расчеты были выполне-

ны в области $-1 < x < 3$, $0 < y < 1.2$. На границе $y = 0$ было задано условие симметричности течения относительно горизонтальной оси, на границе $y = 1.2$ - условие твердой стенки, а на границах $x = -1$, $x = 3$ - условия свободной границы.

В начальный момент времени существуют три области с постоянными значениями газодинамических величин:

- 1) невозмущенный неподвижный газ перед фронтом падающей ударной волны:

$$x > 2, \quad |y| < 1.2, \quad \rho_1=1, \quad u_1=0, \quad v_1=0, \quad p_1=1,$$

- 2) объемная часть разряда:

$$0 < x < 2, \quad |y| < 1.2, \quad \rho_2=1, \quad u_2=0, \quad v_2=0, \quad p_2=4.9309,$$

- 3) область за фронтом падающей волны:

$$x < 0, \quad |y| < 1.2 \quad \rho_3=3.7629, \quad u_3=2.5194, \quad v_3=0, \quad p_3=9.6450.$$

Очевидно, что задача, по сути, является одномерной. Указанный подход к расчету обусловлен желанием проследить за реальными счетными эффектами на примере достаточно простой для анализа задачи. В начальный момент времени происходит распад разрывов в начальных данных. Разрыв при $x = 0$ распадается на две ударные волны и контактный разрыв между ними, а разрыв при $x = 2$ - на идущую вправо ударную волну, идущую влево волну разрежения и контактный разрыв между ними (пункт 2.3.3).

Расчеты проводились в трех блоках, соответствующих различным начальным условиям. Были осуществлены два варианта расчета: в первом каждому расчетному блоку соответствует сетка, содержащая 400×400 ячеек, а во втором - сетка, содержащая 200×200 ячеек. Анализ расчетов проводился в блоке $0 < x < 2$, $0 < y < 1.2$ в момент времени $t = 0.2$, когда разрывы, порожденные разрывами в начальных данных, еще не начали взаимодействовать. В этом случае положение разрывов можно определить аналитически. Ударные волны и контактный разрыв, порожденные разрывом в начальных данных при $x = 0$, расположены в окрестностях прямых $x = 0.068$, $x = 0.827$ и $x = 0.412$ соответственно.

Поскольку все расчеты проводились в верхней половине области симметрии, дальнейшие результаты обработки также представлены только для области $0 < y < 1.2$.

3.3 Многомасштабный вейвлет анализ

Основными соотношениями вейвлет анализа являются соотношения рескейлинга:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(x/2) = \sum_n h_n \varphi(x-n), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \psi(x/2) = \sum_n g_n \varphi(x-n). \end{cases} \quad (3.1)$$

Эти соотношения устанавливают связь между сдвигами и растяжениями вейвлета $\psi(x)$ и масштабирующей функции $\varphi(x)$. Здесь h_n и $g_n = (-1)^n \bar{h}_{1-n}$ - соответствующие низкочастотный и высокочастотный зеркальные фильтры [38, пункты 1.1.6, 1.1.7].

Из соотношения (3.1) следует, что проекцию $f^0(x)$ разложения произвольной функции $f(x)$ на базис сдвигов масштабирующей функции $\varphi(x-n)$ можно разложить на две компоненты:

$$f^0(x) = \sum_n c_n^0 \varphi(x-n) = f^1(x) + d^1(x), \text{ где} \quad (3.2)$$

$$f^1(x) = \sum_n c_n^1 \varphi(x/2 - n), \quad d^1(x) = \sum_n d_n^1 \psi(x/2 - n), \text{ а}$$

$$c_n^0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \bar{\varphi}_n(x-n) dx, \quad c_n^1 = \sum_m \bar{h}_{m-2n} c_m^0, \quad d_n^1 = \sum_m \bar{g}_{m-2n} c_m^0.$$

Соотношение (3.2) можно интерпретировать как разложение исходного сигнала $f^0(x)$ на сглаженную компоненту $f^1(x)$ и высокочастотную $d^1(x)$ компоненты. Аналогично сглаженную компоненту $f^1(x)$ можно разложить на $f^2(x)$ и $d^2(x)$ и так далее (пункт 1.1.8). Таким образом, применение вейвлет – анализ позволяет разложить исходный сигнал по масштабам.

В приложениях при работе с дискретным исходным сигналом $\{f_n\}$ на первом шаге дискретизацию функции обычно отождествляют с коэффициентами её вейвлет разложения $\{c_n^0\}$. Этот подход широко распространен, поскольку множество целочисленных сдвигов масштабирующей функции $\{\varphi(x-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ близко к разбиению единицы (приложение 5.3).

Вещественные вейвлеты с компактным носителем сильно несимметричны. В исследуемой задаче применение таких вейвлетов может привести к смещению разрывов, однако можно воспользоваться симметричными комплексными вейвлетами, которые, кроме того, являются более гладкими. Получаемая в этом случае в результате разложения комплекснозначная функция нефизична, в приложениях при этом анализируют только ее вещественную компоненту [14].

Предполагается, что при переходе к следующему уровню вейвлет разложения при локализации будут исключаться наименее значимые для текущего уровня особенности. Кроме того, за счет удаления шумов, могут проявиться тонкие структуры, которые ранее не удавалось вы-

делить.

Чтобы определить – какие вейвлеты могут быть использованы для разложения данных по масштабам в исследуемой задаче, сравним результаты локализации разрывов на первом уровне вейвлет – разложений поля плотности, полученных с использованием различных вейвлетов, для расчета, выполненного на сетке содержащей 4096*512 ячеек.

При разложении использовались три различных вейвлета:

- 1) симметричный комплексный вейвлет Добеши, фильтр которого содержит шесть ненулевых коэффициентов - dcoms6,
- 2) вещественный вейвлет Добеши, фильтр которого содержит двадцать ненулевых коэффициентов - dau20
- 3) симметричный комплексный вейвлет Добеши, фильтр которого содержит двадцать два ненулевых коэффициента – dcoms22.

Низкочастотные фильтры этих вейвлетов приведены в приложении 5.4.

При использовании комплексных вейвлетов анализировалась только вещественная компонента вейвлет - разложения.

Каждый из детекторов, введенных в главе 2, может быть независимо использован для локализации разрывов. На рисунках 3.1, 3.2 представлены результаты, полученные при локализации разрывов на нескольких уровнях вейвлет - разложения расчета, выполненного на сетке содержащей 4096*512 ячеек, с использованием только основного детектора, без корректора. Линии, представленные на рисунках, соответствуют сильным разрывам поля плотностей, то есть ударным волнам и контактными разрывам.

Основной детектор выделяет точку n , если:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_n = \left(\sum_k \eta_{k-2n} \sum_m \xi_{k-2m} c_m \right), \\ j_n j_j \leq 0 \\ |j_n| + |j_j| \neq 0 \\ (j = n - 1) \vee (j = n + 1), \end{array} \right.$$

где $\{c_m\}$ – исследуемое поле, $\{\xi_k\}$ – вещественная компонента низкочастотного фильтра симметричного комплексного вейвлета Добеши (dcoms6), $\{\eta_k\}$ – мнимая компонента низкочастотного фильтра симметричного комплексного вейвлета Добеши (dcoms6).

Кроме того, для удаления артефактов проводилась дополнительная постобработка, основанная на эвристических алгоритмах, которые будут подробно описаны в главе 4.

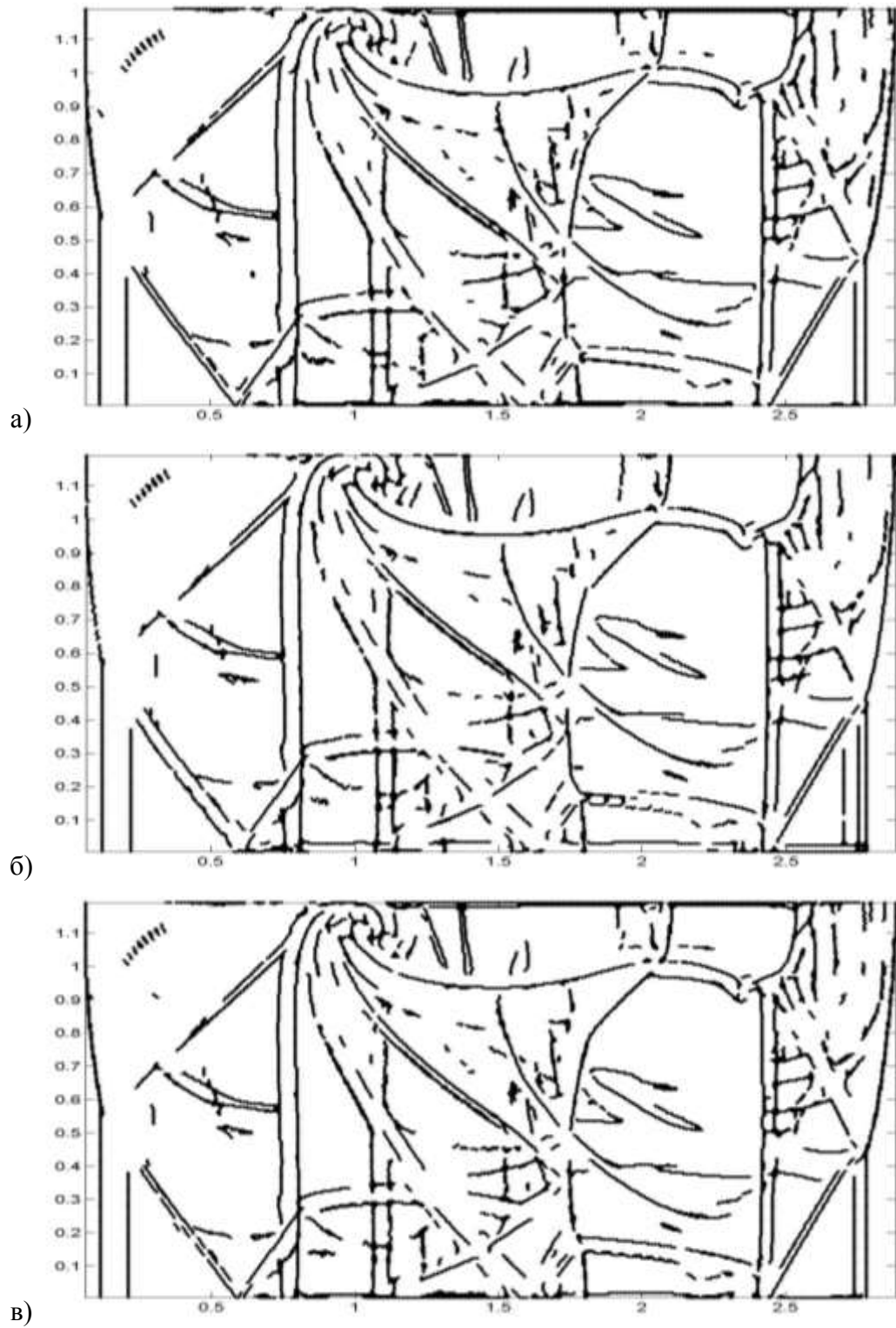


Рисунок 3.1 – Разрывы, локализованные основным детектором на первом уровне вейвлет разложения поля плотности. Разложение выполнялось с помощью вейвлетов а) `dcoms6`, б) `dau20`, в) `dcoms22`

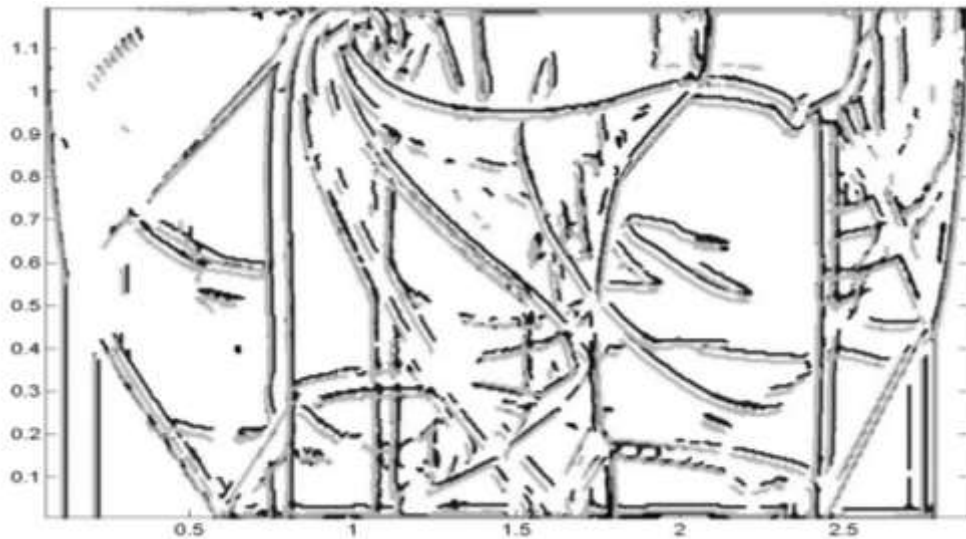


Рисунок 3.2 – Разрывы, локализованные основным детектором на первом уровне вейвлет разложения поля плотности. Разложение выполнялось с помощью вейвлетов: dau20 - черный, dcoms22 - серый

Для задачи выделени разрывов и совместного анализа результатов локализации на различных масштабах необходимо, чтобы переход к вейвлет-разложению поля не вызвал смещения разрывов, поэтому при анализе результатов локализации особое внимание уделялось оценке смещения разрывов.

Основные сильные разрывы (пункт 2.3.3) выделяются во всех вариантах вейвлет – разложения исходного поля (рисунки 3.1, 3.2), однако использование для вейвлет - разложения вещественного несимметричного вейвлета приводит к смещению разрывов внутри области возмущенного течения ($0 < x < 3$) относительно разрывов, локализованных в разложениях, полученных с использованием симметричных вейвлетов. При этом положение разрывов, локализованных у границы области возмущенного течения, для всех вариантов разложения практически совпадает.

Применение симметричных комплексных вейвлетов dcoms6 и dcoms22 для вычисления вейвлет – разложения при локализации разрывов дает практически эквивалентный результат, однако использование вейвлета dcoms22 все же приводит к небольшому сокращению количества артефактов, а линии разрывов, выделенные в разложении, полученном с помощью этого вейвлета, являются более гладкими.

Для получения более точных оценок смещения разрывов была проведена локализация разрывов во втором блоке расчета упрощенной задачи, выполненного на сетке содержащей 400×400 ячеек в каждом расчетном блоке и первых уровнях его вейвлет - разложения, полученных с использованием вейвлетов dcoms22 и dau20. Результаты выделения разрывов показали,

что правая ударная волна, локализованная на первом уровне вейвлет – разложения, выполненного с помощью вейвлета `dcoms22`, смещена на 0.0029 относительно положения правой ударной волны локализованной в исходном поле, а при использовании для вычисления вейвлет – разложения вейвлета `dau20` смещение составляет 0.037. Для контактного разрыва смещения равны 0.0029 и 0.033 соответственно.

Таким образом, применение несимметричного вещественного вейвлета `dau20` приводит к заметному смещению разрывов. Анализ других расчетов показал, что это смещение не является постоянным и, следовательно, не может быть скомпенсировано. В то же время, использование при вычислении вейвлет – разложения симметричных комплексных вейвлетов приводит к минимальному смещению разрывов.

Теперь сравним результаты локализации разрывов с помощью основного детектора на нулевом, первом и втором уровнях вейвлет - разложения поля плотности. Для разложения использовался симметричный комплексный вейвлет Добеши `dcoms22`. При анализе следует помнить, что каждый следующий уровень разложения соответствует вдвое более грубой сетке, по сравнению с предыдущим. Таким образом, нулевому уровню вейвлет разложения (исходное поле) $c_{i,j}^0$ соответствует сетка, содержащая $4096*512$ ячеек ($1 \leq i \leq 4096$, $1 \leq j \leq 512$, $i, j \in Z$), первому уровню $c_{i,j}^1$ - сетка, содержащая $2048*256$ ячеек ($1 \leq i \leq 2048$, $1 \leq j \leq 256$, $i, j \in Z$), второму уровню $c_{i,j}^2$ - сетка, содержащая $1024*128$ ячеек ($1 \leq i \leq 1024$, $1 \leq j \leq 128$, $i, j \in Z$).

В первую очередь следует отметить, что на втором уровне разложения (рисунок 3.3(в)) выделяется только часть существенных разрывов, причем достаточно грубо и обрывочно. Это может быть вызвано уже достаточно грубой сеткой, тем, что при вычислении вейвлет - разложении отбрасывается мнимая часть коэффициентов, и сильной размазанностью разрывов.

Более информативным является сравнение особенностей, локализованных на нулевом (рисунок 3.3 (а)) и первом (рисунок 3.3 (б)) уровнях вейвлет - разложения. При переходе к первому уровню разложения сокращается число артефактов (область $[0, 0.5]*[1, 1.2]$). Часть двойных линий стали одинарными $[1, 2]*[0.8, 1]$ и наоборот $[1, 1.7]*[0.5, 0.8]$. Исчезают некоторые разрывы $[0, 0.2]*[0.4, 0.6]$, но появляются и новые структуры $[1.7, 2.2]*[0.5, 0.7]$.

Большинство новых структур появляется в областях, которые раньше были сильно зашумлены (на рисунках эти шумы отсутствуют, поскольку они были удалены с помощью эвристических алгоритмов, которые будут подробно описаны в главе 4). Тем не менее, возникает вопрос о физичности этих структур. Структура, выделенная в области $[1.7, 2.2]*[0.5, 0.7]$, проявляется и при анализе поля давления (рисунок 3.4). Тем не менее, этой структуре не соответствуют ни какие разрывы, а лишь перегибы плотности (рисунок 3.5).

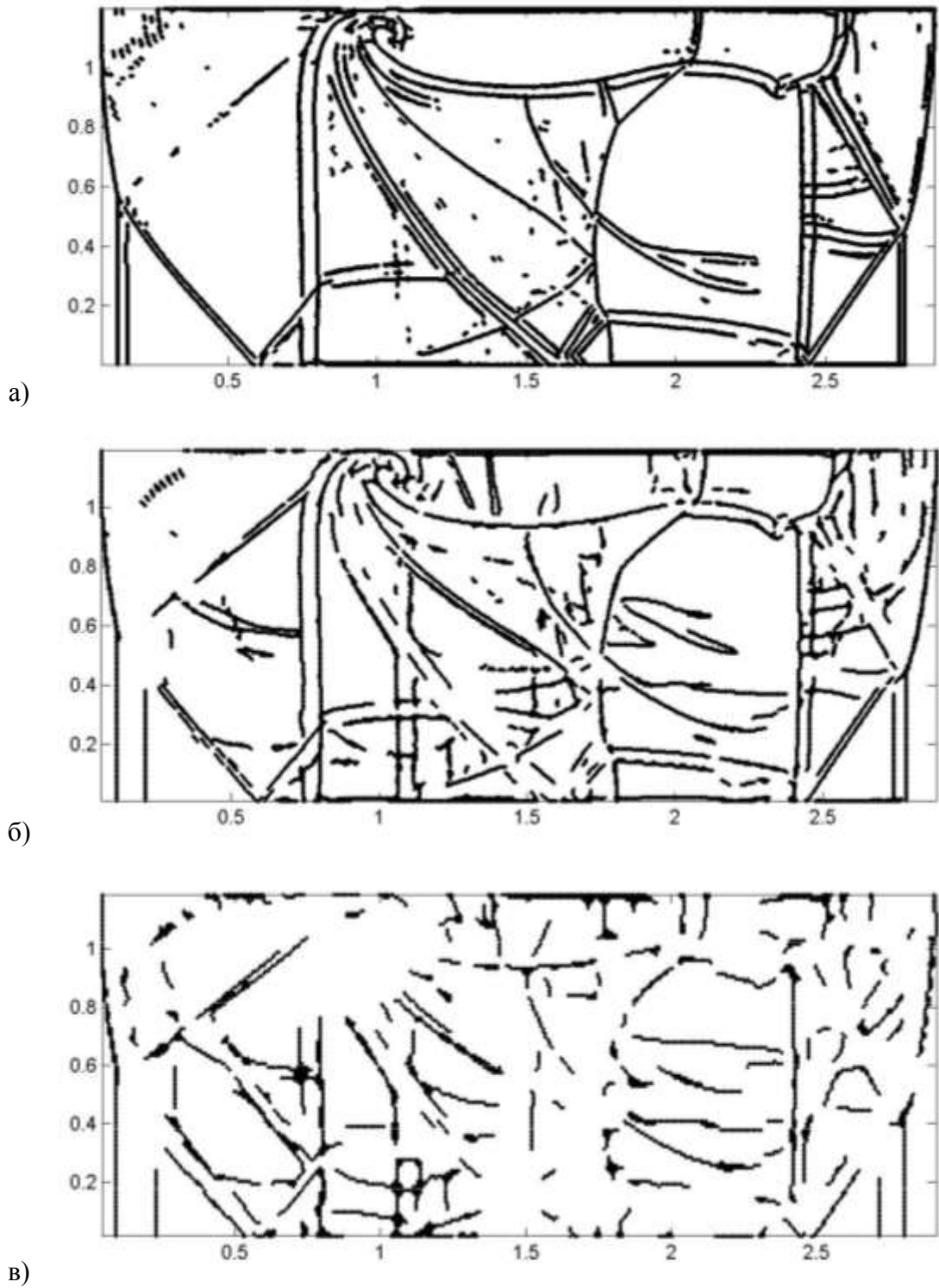


Рисунок 3.3 – Разрывы, локализованные основным детектором на нулевом (а), первом (б) и втором (в) уровнях вейвлет разложения поля плотности. Расчет течения проводился на сетке содержащей 4096×512 ячеек

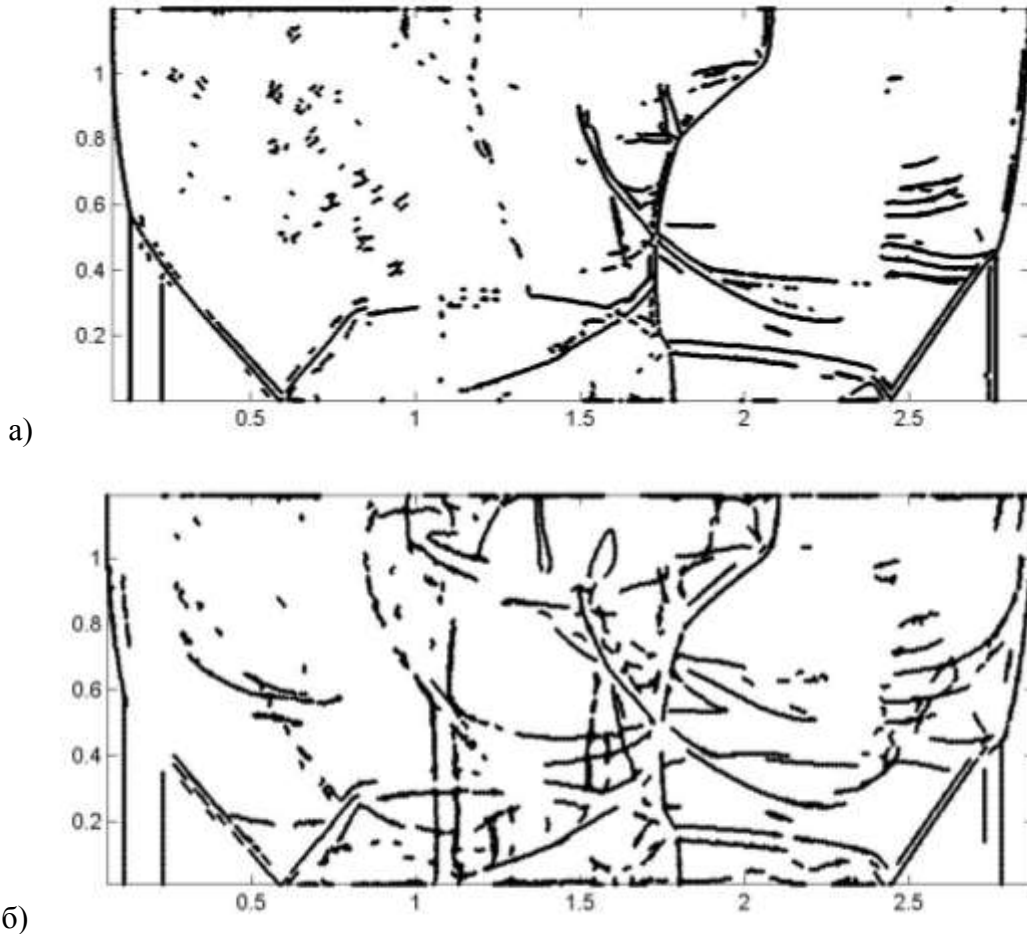


Рисунок 3.4 – Разрывы, локализованные основным детектором на нулевом (а) и первом (б) уровнях вейвлет разложения поля давления. Расчет течения проводился на сетке содержащей 4096*512 ячеек

Поскольку пороги чувствительности не вводились, детектор «воспринимает» (рисунок 2.1) и выделяет эти перегибы как разрывы пусть и очень слабой интенсивности. Этот недостаток детектора может быть устранен только анализом интенсивности разрывов и введением порогов чувствительности. Для этих целей и был разработан корректор (пункт 2.2.2), который позволяет провести дополнительную отбраковку разрывов, выделенных основным детектором.

Анализ упрощенной задачи показал, что сравнение результатов локализации разрывов на нескольких уровнях вейвлет – разложения позволяет избавиться от части артефактов. При выделении разрывов во втором блоке расчета, содержащего 400*400 ячеек в каждом блоке, ошибка локализации не превышает одну ячейку расчетной сетки, однако кроме разрывов выделяется и ряд артефактов, которые представляют собой вертикальные линии, расположенные между разрывами. В правой части области находится волна разрежения, которая в данном случае не приводит к появлению артефактов.

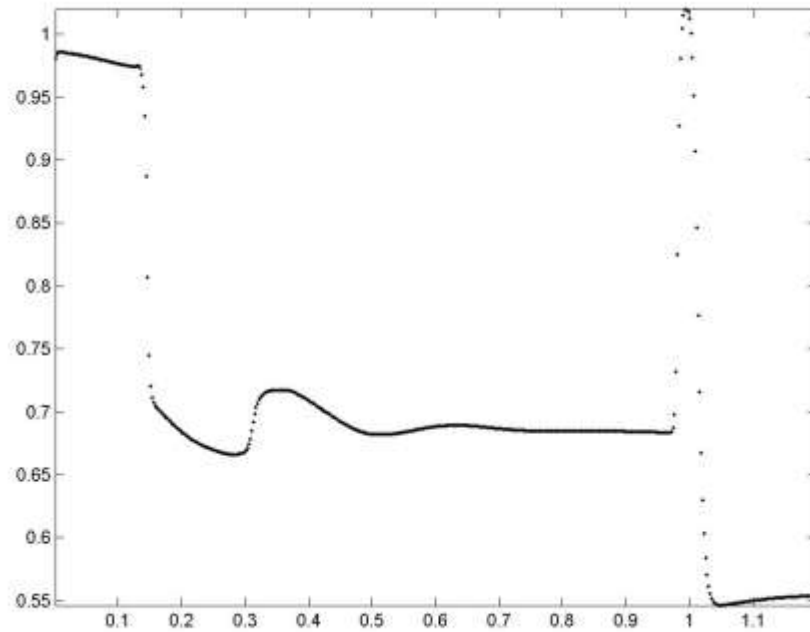


Рисунок 3.5 – Распределение плотности в сечении $x = 2$

Если для выделения разрывов используется только основной детектор, то при локализации выделяется достаточно много артефактов, которые, как и разрывы, представляют собой вертикальные линии, и поэтому не могут быть удалены только из логических соображений. Так, при локализации разрывов в исходном поле, отношение числа выделенных точек к числу точек, соответствующих трем линиям разрывов, равно 6.7. При локализации разрывов на первом уровне вейвлет – разложения, выполненного с помощью вейвлета `dcoms22`, отношение равно 4.4, а при локализации разрывов на первом уровне вейвлет – разложения, выполненного с помощью вейвлета `dau20`, отношение равно 5.3.

Это говорит о том, что переход к первому уровню вейвлет - разложения позволяет сократить число артефактов. При локализации разрывов в исходном поле все артефакты расположены в области между левой ударной волной и контактным разрывом, а при локализации разрывов на первом уровне вейвлет – разложения, выполненного с помощью вейвлета `dcoms22`, большая часть артефактов находится в области между контактным разрывом и правой ударной волной. Поэтому совместный анализ результатов локализации позволяет убрать почти все артефакты даже без использования корректора и введения порога чувствительности, что очень важно для задач, работающих без участия аналитика.

3.4 Структуры, локализуемые у границы расчетной области

Особого внимания заслуживают структуры, выделенные в окрестности границы расчетной области. Поскольку ось $y = 0$ является осью симметрии течения, а поле при обработке вейвлет фильтрами на границе продолжается из соображений симметрии, в данной задаче на этой оси не должно возникать стационарных разрывов. Более тщательный анализ показал, что там, где в окрестности оси симметрии локализуются артефакты, поле плотностей имеет «излом» (рисунок 3.6).

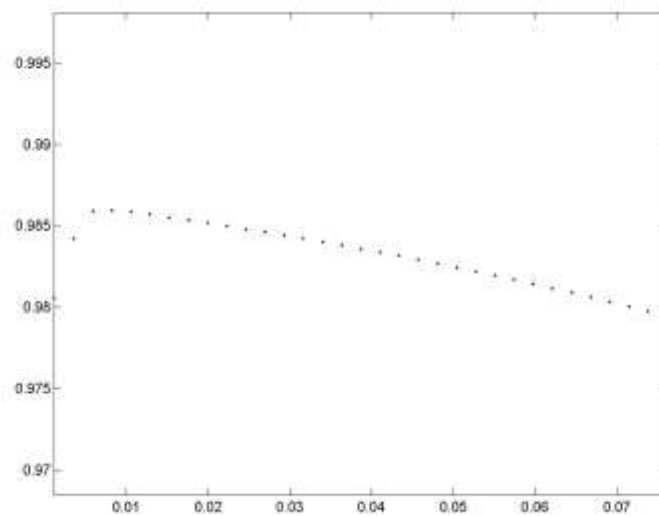


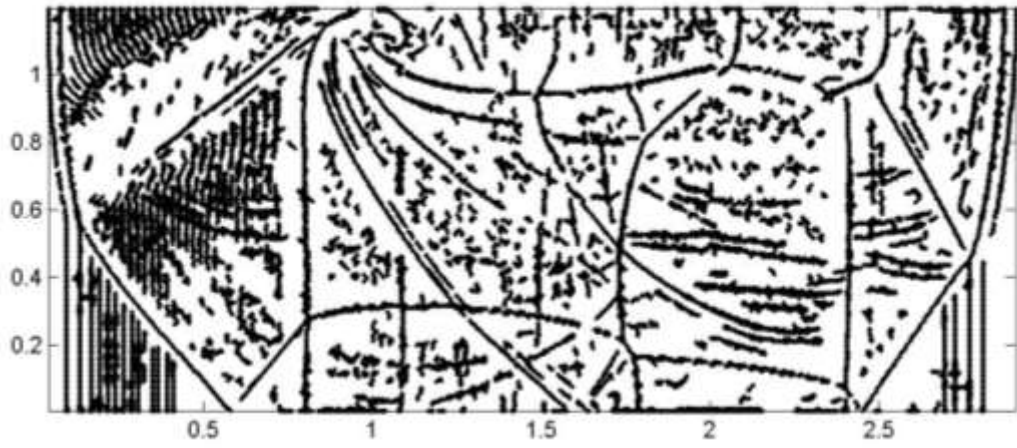
Рисунок 3.6 – Распределение плотности в сечении $x = 2$ в окрестности оси $y = 0$

Этот эффект может быть объяснен некорректностью постановки граничных условий на оси симметрии. Аналогичные эффекты имеют место и на границе $y = 1.2$.

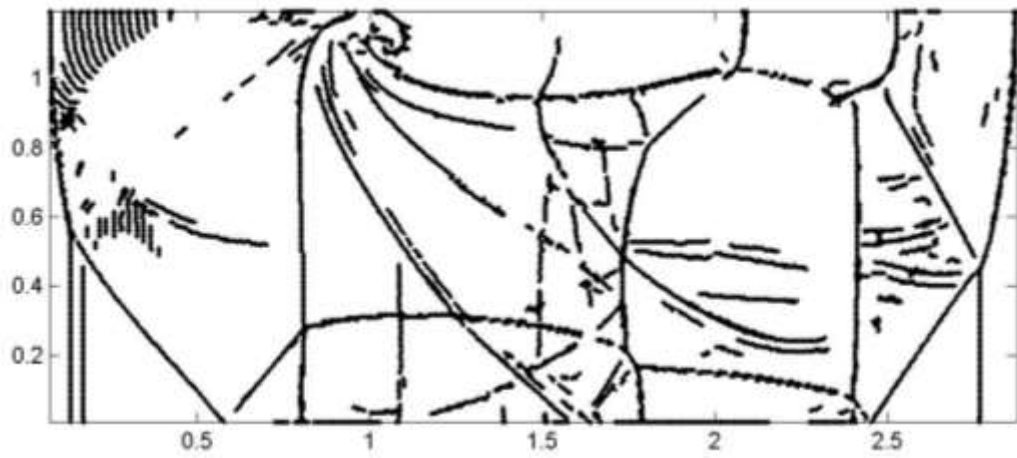
Таким образом, дефекты расчета оказывают непосредственное влияние на результаты локализации, поэтому детектор может быть использован для оценки качества расчета и проверки корректности постановки граничных условий при моделировании течений.

3.5 Локализация разрывов с помощью корректора

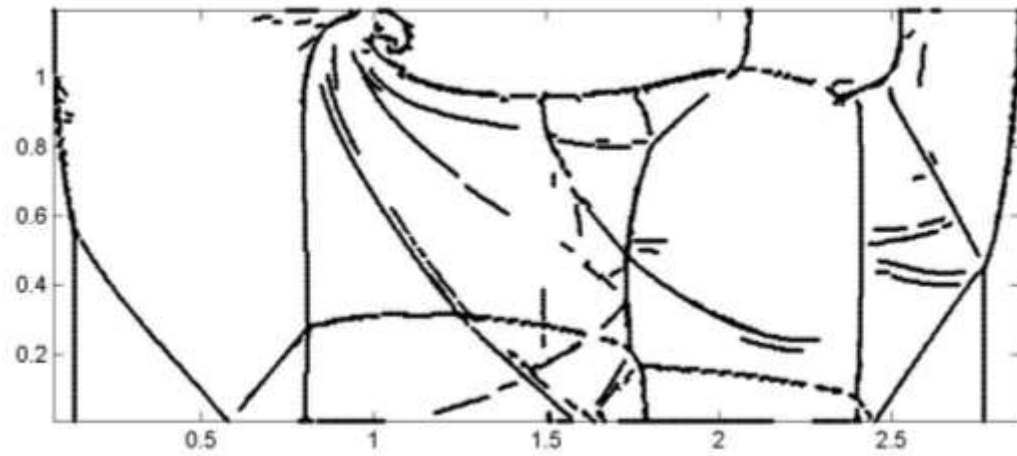
Хотя корректор (пункт 2.2.2) выдает больше артефактов, он также позволяет вводить порог чувствительности, который эти артефакты отсеивает. Результаты локализации разрывов с помощью на первом уровне вейвлет – разложения расчета, проведенного на сетке содержащей 4096×512 ячеек, приведены на рисунке 3.7.



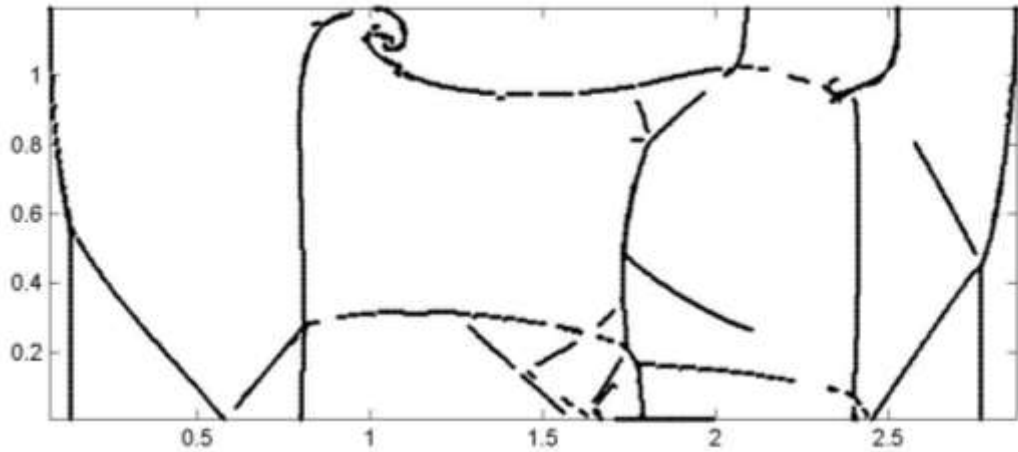
a)



б)



в)



г)

Рисунок 3.7 – Разрывы, локализованные корректором на первом уровне вейвлет разложения поля плотностей для расчета, выполненного на сетке содержащей 4096*512 ячеек. Разложение выполнялось с помощью вейвлета dcoms22. Порог чувствительности равен а) 0, б) 0.00002, в) 0.00005, г) 0.0005

Корректор выделяет точку n с порогом чувствительности α , если:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_n = \left| \left(\sum_k \zeta_{k-2n} \sum_m \xi_{k-2m} c_m \right) / c_n \right|, \\ s_n > \alpha, s_n \geq s_j, \forall j \in \mathbb{Z}, n-3 \leq j \leq n+3, \\ (s_n > s_{n-1}) \vee (s_n > s_{n+1}), \end{array} \right.$$

где $\{c_m\}$ – исследуемое поле, $\{\xi_k\}$ – вещественная компонента низкочастотного фильтра симметричного комплексного вейвлета Добеши (dcoms6), $\{\zeta_k\}$ – высокочастотный фильтр вещественного вейвлета Добеши (daub). В отличие от (2.11) здесь при определении корректора после вычисления свертки производится обезразмеривание полученной величины за счет деления на c_n . Данный подход допустим, поскольку элементы обрабатываемых полей плотности и давления являются положительными, и более корректен с точки зрения введения порога чувствительности.

Результат обработки с порогом чувствительности $\alpha = 0$ сильно зашумлен (рисунок 3.7(а)), особенно в области между ударной волной и контактным разрывом $0 < x < 0.7$. Следует отметить, что на практике корректор используется только для отбраковки части ложных разрывов, локализованных основным детектором, а, следовательно, артефакты корректора напрямую не входят в окончательный результат локализации.

После введения порога $\alpha = 0.00002$ артефакты слабой интенсивности исчезают (рисунок

3.7 (б)). Видно, что наибольшей интенсивностью обладают те артефакты и “ложные” структуры, которые локализуются и основным детектором (рисунок 3.3(б)) области $[0, 0.5] \times [1, 1.2]$, $[1.7, 2.2] \times [0.4, 0.7]$.

Эти артефакты исчезают при дальнейшем увеличении порога $\alpha = 0.00005$, хотя по-прежнему сохраняется ряд двойных и сомнительных линий (рисунок 3.7 (в)). Последующее увеличение порога $\alpha = 0.0005$, однако, приводит к исключению части наклонных разрывов (рисунок 3.7 (г)), в то время как все горизонтальные и вертикальные разрывы выделяются почти идеально.

3.6 Сравнение расчетов выполненных на различных сетках

Перейдем к сравнительному анализу результатов выделения разрывов в расчетах, выполненных на различных сетках (рисунки 3.3, 3.4, 3.8, 3.9).

Следует отдельно отметить, что сравнение рисунков 3.3 (в) и 3.8(б) показывает, что одной из причин достаточно плохого результата на рисунке 3.3 (в) в действительности является довольно грубая сетка. Тем не менее, структура разрывов на рисунке 3.8(б) все же более четкая, чем на рисунке 3.3 (в), откуда следует, что переход на следующий уровень разложения сглаживает данные сильнее, чем переход на более грубую сетку при расчете.

Наибольший интерес представляет сравнение результатов локализации, представленных на рисунках 3.3(б), 3.4(б), с результатами, представленными на рисунках 3.8(а), 3.9. Эти рисунки соответствуют одной и той же сетке, содержащей 2048×256 ячеек.

При сравнении рисунков 3.3(б) и 3.8(а) видно, что выделяются практически одни и те же структуры, но на рисунке 3.3(б) они более четкие. Но, с точки зрения представления разрывов (сдвоенные или одинарные линии), рисунок 3.8(а) ближе к рисунку 3.3(а). Однако на рисунке 3.3(б) выделяется ряд структур, соответствующих перегибам слабой интенсивности. Эти структуры отсутствуют на рисунке 3.8(а) или выделены менее четко и полностью отсутствуют на рисунке 3.3(а). Это в очередной раз подтверждает тот факт, что и переход на следующий уровень разложения и переход на более грубую сетку при расчете сглаживают данные, при переходе на следующий уровень вейвлет – разложения данные сглаживаются сильнее. Таким образом, большинство артефактов выделяемых грубом расчете локализуются в областях, соответствующих зашумленным зонам в расчете выполненном на мелкой сетке. Аналогичная картина имеет место и при сравнении рисунков 3.4(б) и 3.9.

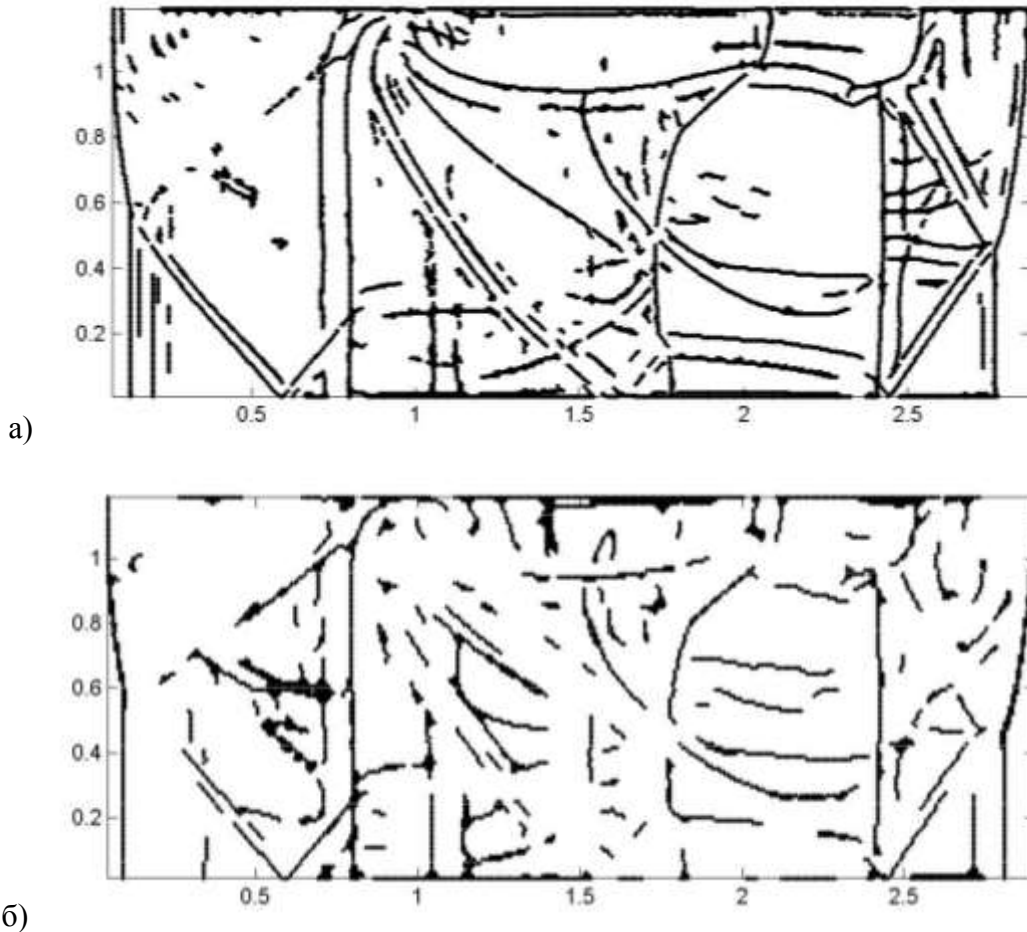


Рисунок 3.8 – Разрывы, локализованные основным детектором на нулевом (а) и первом (б) уровнях вейвлет разложения поля плотности. Расчет течения проводился на сетке содержащей 2048*256 ячеек. Для вычисления разложения использовался вейвлет `dcoms22`

Для проверки корректности отождествления поля с коэффициентами его вейвлет - разложения сравнивались результаты выделения разрывов во втором блоке расчетов упрощенной задачи. Локализация разрывов проводилась для первого уровня вейвлет – разложения (при вычислении разложения использовался вейвлет `dcoms22`) расчета, выполненного на сетке, содержащей 400*400 ячеек в каждом расчетном блоке, и для расчета, выполненного на сетке, содержащей 200*200 ячеек в каждом расчетном блоке. Результаты локализации соответствуют одной и той же сетке. Мелкомасштабные эффекты должны подавляться за счет использования более грубой расчетной сетки в первом случае и перехода на более грубый уровень вейвлет - разложения во втором случае. Положения контактного разрыва и левой ударной волны в обоих случаях совпадают, а правая ударная волна в первом случае смещается ровно на одну ячейку вправо. Такая погрешность допустима, если разрыв находится между ячейками. Эти факты позволяют говорить о допустимости указанного подхода.

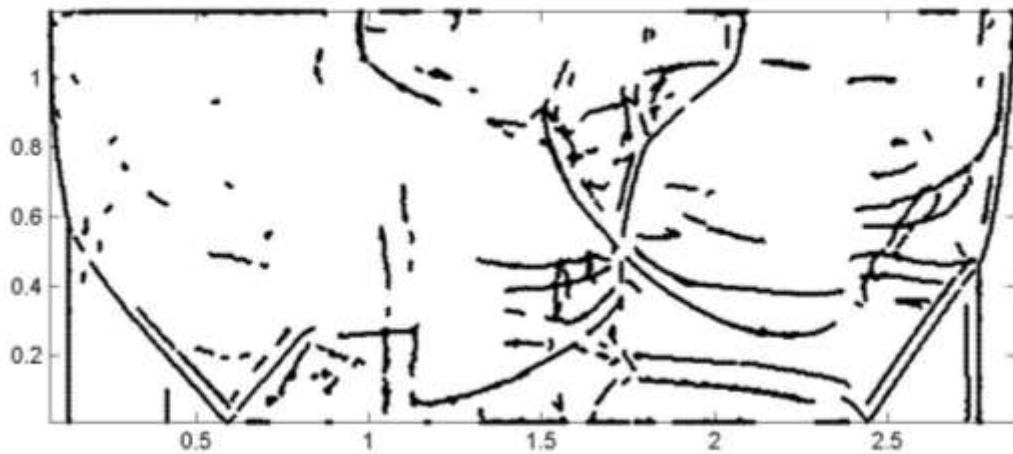


Рисунок 3.9 – Разрывы, локализованные основным детектором на нулевом уровне вейвлет разложения поля давления. Расчет течения проводился на сетке содержащей 2048*256 ячеек. Для вычисления разложения использовался вейвлет dcoms22

3.7 Заключение

Эксперименты показали, что использование многомасштабного анализа позволяет получить дополнительную информацию о структуре разрывов в течении, а совместный анализ нескольких уровней вейвлет - разложения дает возможность значительно сократить количество артефактов при локализации разрывов в расчете без дополнительного введения порога чувствительности. Однако это возможно только в том случае, если расчет выполнен на достаточно мелкой сетке.

Для многомасштабного разложения целесообразно использовать симметричные и достаточно гладкие вейвлеты. Использование же несимметричных вейвлетов приводит к смещению разрывов на различных уровнях разложения.

Переход от анализа исходного поля к анализу его вейвлет разложения позволяет исключить часть шумовых эффектов, но приводит к проявлению слабых структур соответствующих перегибам. Эти структуры могут быть удалены совместным анализом исходного поля и вейвлет разложения, либо использованием корректора.

Эксперименты также показали, что детектор чувствителен к дефектам расчета, благодаря чему может использоваться для оценки его корректности и качества.

Структура разрывов выделенных в вейвлет - разложении расчета, выполненного на мелкой сетке, в целом соответствует структуре разрывов локализованных в расчете, выполненном на грубой сетке. Однако, при обработке расчета, выполненного на грубой сетке, выделяется больше артефактов.

Опыты также позволили убедиться в допустимости отождествления газодинамических полей с коэффициентами их вейвлет - разложения.

Эксперименты показали, что построенный в главе 2 детектор, является эффективным инструментом для анализа расчетов газодинамических полей полученных методом сквозного счета. И хотя для получения наиболее полной и качественной информации о течении требуется подбор порогов чувствительности, алгоритм остается эффективным и без привлечения аналитика и поэтому может использоваться в автоматическом режиме непосредственно в ходе расчета газодинамических течений.

Алгоритм выделения и классификации особенностей газодинамических полей, представленный в главе 2, может использоваться только для анализа расчетов, выполненных на прямоугольных сетках. На практике же, особенно в расчетах, использующих технологии адаптивного построения сеток, используются сетки более сложной структуры. В главе 4 алгоритм будет адаптирован для выделения особенностей в расчетах, выполненных на произвольных расчетных сетках. Также будут введены дополнительные эвристические алгоритмы, позволяющие сократить количество артефактов.

4 Обобщение алгоритма локализации особенностей на неструктурированные расчетные сетки, локализация структур в идеальной и вязкой моделях, адаптация расчетной сетки к положению разрывов

Как уже отмечалось, при работе с адаптивными сетками необходимо учитывать, что эти сетки зачастую неструктурированы, поэтому предложенный в главе 2 алгоритм, введенный для прямоугольных расчетных сеток, нуждается в модификации. В данной главе, этот алгоритм обобщается на произвольные расчетные сетки. Также был разработан набор фильтров, позволяющих избавиться от большей части артефактов и повышающих качество локализации. Кроме того большой интерес представляет локализация структур в вязких течениях. Исследования показали, что в вязкой среде при числах Рейнольдса $R \sim 10^6$ четко проявляются структуры, соответствующие ударным волнам в идеальной среде, при этом на них с высокой точностью выполняются соотношения Гюгонио. Кроме того, в вязкой среде выделяются дополнительные структуры, соответствующие вихрям, пограничному слою и слоям смешения.

Основные результаты, полученные в этой главе, опубликованы в [39, 40, 41, 42].

4.1 Введение

Большой интерес представляет локализация структур в вязких течениях. Часть этих структур имеет аналоги в расчетах, выполненных по уравнениям Эйлера (ударные волны), другие имеют исключительно вязкую природу (пограничный слой). При этом важно сравнить структуры, которые имеют аналоги в расчетах по обеим моделям, и исследовать их свойства. В частности, интересно выяснить: с какой точностью выполняются соотношений Гюгонио на «разрывах» в вязкой среде.

В главе 2 был представлен метод локализации сингулярностей газодинамических полей для случая конформных прямоугольных сеток (то есть таких, что вершина одного прямоугольника не может лежать на ребре другого), что является существенным ограничением, для задачи построения адаптивных сеток, где условие конформности часто нарушается.

Для сравнения структуры разрывов в вязкой и идеальной среде была выбрана осесимметричная задача о сверхзвуковом обтекании тела. Расчеты выполнялись с помощью пакета NSC2KE на треугольной сетке, в области с криволинейными границами. Для анализа этих расчетов предложенный в главе 2 метод обобщается на произвольные расчетные сетки. Также был разработан набор фильтров, позволяющих избавиться от большей части артефактов и повышающих качество локализации. Метод излагается со всеми существенными для реализации и рас-

параллеливания деталями, но без обоснования, которое достаточно подробно представлено в главе 2.

В качестве входных данных представленный алгоритм получает поля физических величин плотности и давления, заданных в узлах расчетной сетки. В результате работы алгоритма каждому узлу сетки сопоставляется натуральное число, характеризующее течение в окрестности этого узла. Особенностью метода является то, что он не требует тонкой настройки (одни и те же пороги чувствительности и наборы фильтров могут быть эффективно использованы для множества различных задач), что позволяет использовать его в автоматическом режиме. В то же время возможность тонкой настройки также заложена в алгоритм, что позволяет получить более качественные результаты в постобработке (параграф 3.5).

В результате применения алгоритма обработки удалось выделить характерные структуры в расчетах для вязкой и идеальной среды, убедиться, что для структур, локализованных в расчете по уравнениям Рейнольдса с $k - \epsilon$ [43, 44] моделью турбулентности и соответствующих ударным волнам в идеальной среде, условия Гюгонио выполняются с высокой точностью. Также был установлен критерий, позволяющий выделить структуры, имеющие исключительно вязкую природу.

Алгоритм оказался эффективным и при обработке трехмерных данных. Он был апробирован как на модельных трехмерных данных, так и на расчете задачи о сверхзвуковом обтекании тела под углом атаки шесть градусов. Детектор продемонстрировал высокую точность локализации разрывов. Кроме того, оказалось, что он может быть использован для выделения тонких структур и разрывов слабой интенсивности, обнаружить которые другими средствами достаточно трудоемко.

В заключение главы представлен и апробирован простейший способ применения детектора для адаптации расчета к положению разрывов. Использование адаптивного метода позволило повысить качество расчета за счет уменьшения зон размазывания разрывов и сократить время расчета в 2,5 раза.

4.2 Алгоритм

В качестве исходных данных используются результаты расчета полей плотности и давления, заданных в узлах или центрах ячеек расчетной сетки. Сетка состоит из ячеек (треугольники, четырехугольники тетраэдры и т.д.), которые задаются координатами узлов, являющихся их вершинами, и гранями (ребра или поверхности). В трехмерном случае для ячейки дополнительно задаются ребра её граней. Для повышения качества локализации и удобства обработки вместо исходной расчетной сетки при локализации может быть использована другая сетка с тем

же набором узлов.

Структура сетки, с которой работает алгоритм локализации, определяется тем, что для качества локализации важно, чтобы сетку можно было разбить на достаточно регулярные ломаные, не обрывающиеся внутри области. Этому часто трудно достичь на неконформных или неструктурированных сетках, поэтому иногда имеет смысл перейти от произвольной, к примеру, прямоугольной неконформной сетки к треугольной конформной, полученной из исходной, например, с помощью триангуляции Делоне [45, 46]. Такой переход приводит к увеличению объема вычислений, но позволяет получить более качественный результат (уменьшается число артефактов и уточняется локализация разрывов). Кроме того, поскольку от любой сетки можно перейти к треугольной, с алгоритмической точки зрения формат, в котором данные задаются на треугольной сетке, является наиболее универсальным.

В результате обработки расчета каждому узлу сетки необходимо сопоставить число, которое характеризует течение в окрестности узла (нет разрывов, ударная волна, контактный разрыв, волна разрежения и т.д.).

Обработку расчета можно условно разделить на четыре этапа:

- 1) разделение расчетной сетки на ломаные,
- 2) обработка ломаных с помощью вейвлетов и выделение особенностей,
- 3) объединение результатов обработки ломаных,
- 4) фильтрация артефактов и классификация особенностей.

Первый этап заключается в том, чтобы свести многомерную задачу к набору одномерных задач. Из сетки выбирается произвольное ребро. Затем из его соседей выбираются те ребра, которые образуют минимальный угол с этим ребром, причем угол должен быть меньше заданной величины, которая определяет гладкость строящейся ломаной. Если подходящего ребра нет, ломаная на этом конце обрывается, иначе это ребро добавляется в ломаную и на его свободном конце повторяется аналогичная процедура. Чтобы избежать закливания, каждое ребро может быть добавлено в ломаную только один раз. После того как на обоих концах ломаной не удалось подобрать подходящих ребер, начинается построение следующей ломаной. Ее построение начинается с ребра, не входящего ни в одну ломаную, но ребра других ломаных могут быть в нее добавлены. Это делается для того, чтобы ломаные, по возможности, не обрывались внутри области, поскольку обработка границ ломаных может приводить к появлению артефактов или пропуску разрывов. Первый этап завершается, если каждое ребро включено в некоторую ломаную.

На втором этапе производится независимая обработка ломаных. Обрабатываются только ломаные, у которых число узлов N больше 6, это число определяется количеством ненулевых

элементов в фильтрах вейвлетов, используемых при обработке. Массивы плотности d_k и давления p_k , где $0 \leq k < N$, заданные в узлах ломаной, также обрабатываются независимо. Для каждого из массивов вычисляется два преобразования $m(x)$ и $c(x)$:

$$m_k = \sum_n \eta_{n-2k} \sum_i \xi_{n-2i} x_i, \quad c_k = \sum_n \varsigma_{n-2k} \sum_i \xi_{n-2i} x_i, \quad \text{для } 0 \leq k < N.$$

При этом x_i - элементы массивов плотности или давления, продолженных на границах ломаных из соображений симметрии, ξ_i и η_i - вещественная и мнимая компоненты низкочастотного фильтра симметричного комплексного вейвлета Добеши 6 (dcomsб), ς_i - вещественный фильтр классического вейвлета Добеши 6 (dauб). Цифра 6 обозначает, что фильтры имеют 6 ненулевых элементов. Низкочастотные фильтры указанных вейвлетов приведены в приложении 5.4. Указанные преобразования соответствуют двум введенным в главе 2 детекторам (пункты 2.2.1, 2.2.2), которые используются совместно для повышения точности локализации разрывов (основной детектор более точен и выдает меньше артефактов, а корректор помогает уточнить локализацию и избавиться от дополнительных артефактов за счет введения порога чувствительности). В каждом из четырех полученных массивов выделяются два типа узлов:

1) 'нули' – если значения массива в двух соседних узлах имеют разный знак или только одно из значений нулевое, то выделяется узел с минимальным по модулю значением. Два первых и два последних узла не выделяются;

2) 'локальные экстремумы модуля' – узел выделяется, если модуль значения поля в нем больше заданного порога чувствительности α , он не меньше модулей значений четырех его левых и правых соседей и строго больше модуля значения хотя бы одного из ближайших соседей. Три первых и три последних узла не выделяются.

Из множества нулей исключаются точки, соответствующие осцилляциям. Считается, что точка соответствует осцилляциям, если слева и справа от нее в радиусе трех точек есть выделенные нули.

Таким образом, каждый узел ломаной получает некоторый набор из 8 возможных меток: mzd, sed, mzp, ser, med, czd, mer, czp. Символ 'm' означает, что метка относится к основному детектору, 'с' – к корректору, 'd' означает, что метка характеризует поле плотности, а 'р' – давления. Символы 'z' и 'е' определяют, какие структуры были выделены в детекторе: 'z' соответствует переходам через ноль, а 'е' - локальным экстремумам модуля. При этом первые четыре метки соответствуют сильным разрывам, а последние – слабым разрывам (рисунок 2.1). Классификация разрывов производится в соответствии с пунктом 2.2.3.

В общем случае через узел проходит более одной ломаной, и наборы меток, которые по-

лучает узел на втором этапе, при обработке каждой из них могут отличаться (так, например, разрыв не будет выделен при обработке расположенной вдоль него ломаной, но будет выделен при обработке пересекающей его ломаной).

На третьем этапе определяется окончательный набор меток, которыми обладают узлы сетки. Набор меток, которые получает узел, определяется как объединение всех меток, которые он получил при обработке каждой из содержащих его ломаных.

Из первых трех этапов наиболее вычислительно затратным является второй, однако, поскольку каждая ломаная обрабатывается независимо, этот этап допускает легкое распараллеливание. Первый же этап тривиален для широкого класса сеток. По сути, при реализации алгоритма на многопроцессорной машине, первый этап служит для распределения данных по процессорам, а третий - для слияния результатов.

Алгоритм обработки данных на первых этапах не зависит от структуры сетки и размерности задачи, однако на этапе удаления артефактов и классификации особенностей эти факторы начинают оказывать существенное влияние. Далее приводится описание алгоритмов фильтрации для случая двумерных сеток.

Предварительно необходимо ввести ряд *определений*.

Узлы называются соседними, если они являются вершинами одной и той же ячейки сетки (треугольника, четырехугольника, тетраэдра и т.д.). Например, противоположные вершины четырехугольника являются соседними.

Путь – ломаная, состоящая из отрезков, соединяющих соседние узлы.

Расстояние между узлами – минимальное число ребер в пути, соединяющем эти узлы.

Дискретный набор точек называется связанным, если для любой пары точек набора существует путь, соединяющий эти точки и состоящий только из ребер, вершинами которых являются точки из данного набора.

Для удаления артефактов разработан набор из следующих фильтров:

1) Узел помещается в список кандидатов на удаление метки, если его соседи с такой же меткой образуют связное множество и их число не больше половины общего числа соседей. Данная проверка проводится для всех узлов. Из списка кандидатов удаляются точки, исключение которых привело к тому, что их соседи с данной меткой перестали быть связными. Наконец, все кандидаты теряют рассматриваемую метку. Фильтр позволяет удалять неровности на линиях разрывов.

2) Первый фильтр применяется M раз. Если какой-либо связанный набор точек, имеющих заданную метку, не был полностью удален, то все его точки возвращают исходные метки. В отличие от первого фильтра, второй служит для удаления крупных артефактов.

3) Точка с меткой A получает дополнительную метку B , если существует путь длины

не больше заданного параметра K , соединяющий эту точку, с точкой, имеющей метку B . Фильтр убирает несоответствия, вызванные неточностью локализации.

4) Точка с меткой A теряет её, если расстояние от нее до любой из точек, имеющих метку B , больше заданного параметра K . Фильтр служит для уточнения данных одного детектора с помощью данных другого.

5) Точка получает метку, если она входит в путь, состоящий из 2 или 3 ребер, соединяющий несвязанные узлы, имеющие ту же метку. Фильтр служит для восстановления целостности разрывов.

Двухмерность сетки существенна только для фильтров 1, 2. Фильтры 3 – 5, очевидно, применимы и к трехмерным задачам.

Порядок и параметры фильтров, вообще говоря, индивидуальны для каждой задачи и расчетного метода. Фильтр 4 используется для модификации данных основного детектора с помощью корректора, а фильтр 3 позволяет различить разрывы, на которых рвется только плотность, от тех, на которых рвется и давление, тем самым отличая контактные разрывы от ударных волн.

4.3 Численное моделирование

Рассматривается осесимметричная задача о сверхзвуковом обтекании тела. Были проведены расчеты, соответствующие уравнениям Эйлера (рисунок 4.1) и Рейнольдса с $k - \varepsilon$ моделью турбулентности (рисунок 4.2). Параметры набегающего потока в обоих случаях одинаковы и соответствуют числу Маха 1.5. Число Рейнольдса для вязкой среды приближенно равно 3 000 000.

Геометрия расчетной области представлена на рисунках 4.1, 4.2 (расчет проводился в подобласти $y \geq 0$). Расчеты проводились на треугольной сетке, полученной из четырехугольной сетки, содержащей 400×200 ячеек, за счет добавления диагоналей в четырехугольники, при этом сетка равномерно сгущается вблизи обтекаемого тела.

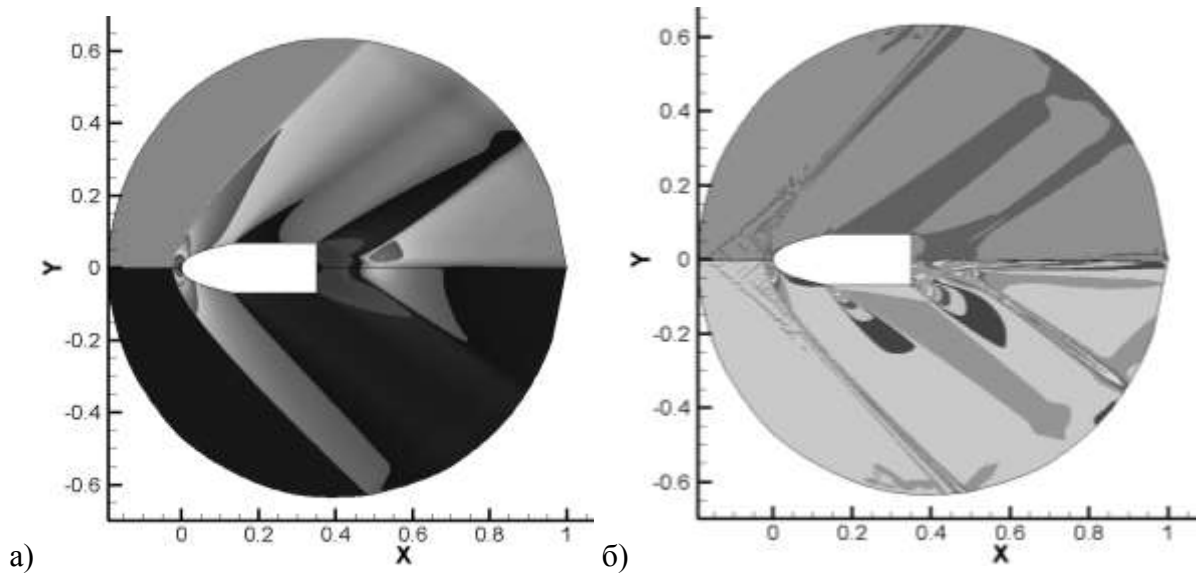


Рисунок 4.1 – Распределение полей физических величин в расчете, выполненном по идеальной модели: а) распределение плотности (сверху) и давления (снизу), б) распределение x (сверху) и y (снизу) компонент градиента плотности

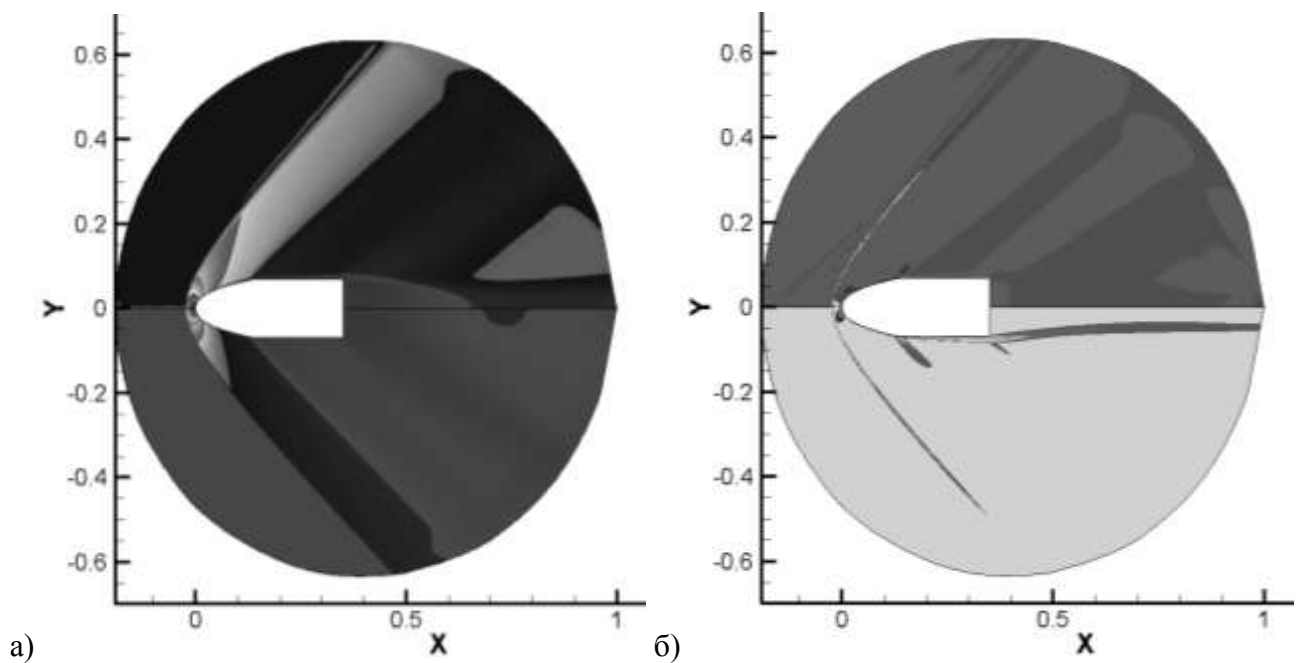


Рисунок 4.2 – Распределение полей физических величин в расчете, выполненном по вязкой модели: а) распределение плотности (сверху) и давления (снизу), б) распределение x (сверху) и y (снизу) компонент градиента плотности

4.4 Анализ расчетов

Известно, что в идеальной среде для любого разрыва с нормальной скоростью распро-

странения D выполняются 4 соотношения:

$$\rho_l(u_{n_l} - D) = \rho_r(u_{n_r} - D) \quad (4.1)$$

$$\rho_l(u_{n_l} - D)^2 + p_l = \rho_r(u_{n_r} - D)^2 + p_r \quad (4.2)$$

$$\rho_l(u_{n_l} - D)u_{\tau_l} = \rho_r(u_{n_r} - D)u_{\tau_r} \quad (4.3)$$

$$\rho_l(u_{n_l} - D)[e_l + p_l/\rho_l + (u_{n_l} - D)^2/2] = \rho_r(u_{n_r} - D)[e_r + p_r/\rho_r + (u_{n_r} - D)^2/2], \quad (4.4)$$

которые являются следствием законов сохранения массы, импульса и энергии.

Проверка этих соотношений на разрывах в расчете нетривиальна, поскольку некоторая ошибка вносится алгоритмом локализации и за счет размазывания разрывов. В экспериментах для проверки соотношений выбирались точки, лежащие на нормали к разрыву вне области размазывания максимально близко к ее границе (она определялась визуально).

При выделении разрывов в корректоре использовался порог чувствительности $\alpha = 0$.

При обработке использовались следующие фильтры в указанном порядке:

- 1) фильтр 1, для удаления мелких артефактов и неровностей;
- 2) фильтр 4, для $A = mzd$, $B = ced$, $K = 1$, удаляет из множества сильных разрывов плотности, выделенных основным детектором, те, которые не выделил корректор;
- 3) фильтр 4, для $A = mzp$, $B = ser$, $K = 1$, удаляет из множества сильных разрывов давления, выделенных основным детектором, те, которые не выделил корректор;
- 4) фильтр 3, для $A = mzd$, $B = mzp$, $K = 2$, компенсирует неточности локализации, что необходимо на этапе классификации разрывов, поскольку решение о типе разрыва в точке принимается на основании всех ее меток. В то же время возможны ситуации, когда за счет неточности локализации точка имеет, например, метку mzd , но не имеет метку mzp (то есть в точке есть разрыв плотности, но не давления), хотя ее имеет одна из соседних точек;
- 5) фильтр 2, для $M = 1$, удаление только мелких артефактов;
- 6) фильтр 5, применяется для восстановления целостности разрывов, так как при локализации возможны ситуации, в которых линия разрыва локализуется как несколько несвязных множеств;
- 7) фильтр 1, для удаления мелких артефактов и неровностей, которые могли появиться на этапах 2-6;
- 8) фильтр 2, для $M = 3$, удаление крупных артефактов;

Обработка в этом примере направлена только на локализацию сильных разрывов. Узлы, которые по результатам фильтрации имеют и метку mzd , и метку mzp , классифицируются как ударные волны, а имеющие метку mzd , но не имеющие метки mzp – контактные разрывы.

В расчете, выполненном по модели Эйлера (рисунок 4.3), контактные разрывы (серый цвет) присутствуют только в виде артефактов. Четко выделяется головная ударная волна, однако в области волны разрежения остаются артефакты, избавиться от которых можно, подобрав соответствующий порог чувствительности α . Также выделяется некая структура разрывов за обтекаемым телом.

В расчете, выполненном с учетом вязкости, четко выделяется линия, соответствующая головной ударной волне в идеальной среде (рисунок 4.4). Артефактов в зоне волны разрежения в расчете, выполненном по вязкой модели, стало меньше. Четко выделяется пограничный слой и граница следа за моделью, эти линии классифицированы детектором частично как ударные волны, а частично как контактные разрывы.

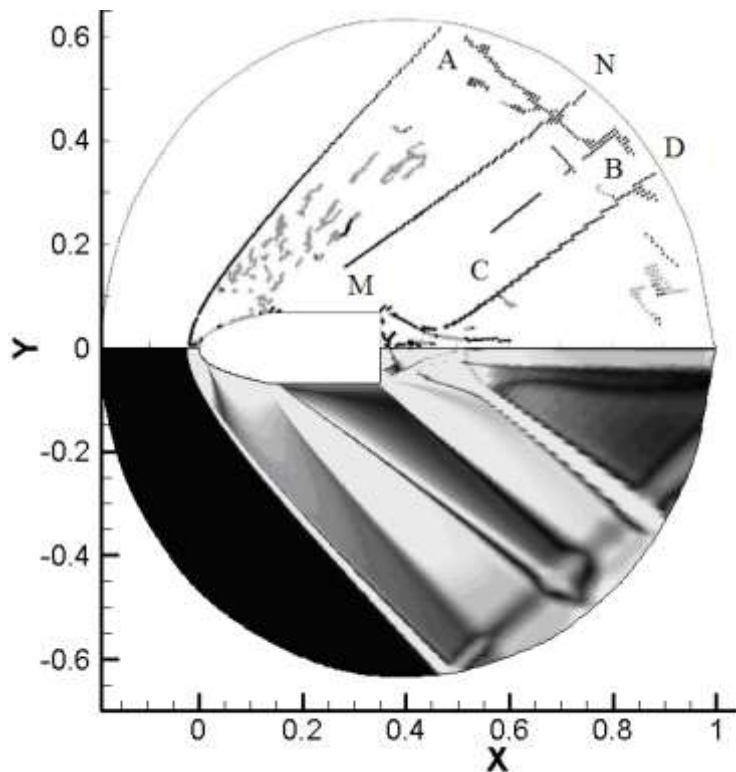


Рисунок 4.3 – Разрывы, локализованные в расчете, выполненном по идеальной модели, (сверху) и распределение градиента плотности (снизу)

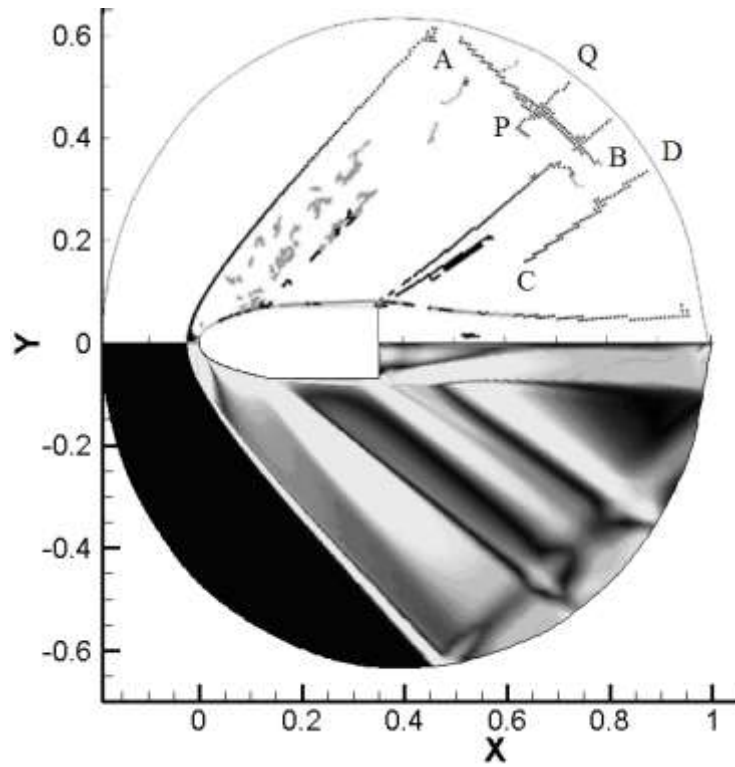


Рисунок 4.4 – Разрывы, локализованные в расчете, выполненном по вязкой модели, (сверху) и распределение градиента плотности (снизу)

При наложении результатов локализации структур в двух расчетах (рисунок 4.5) видно, что положение головной ударной волны в расчетах в точности совпадает. Также в обоих расчетах присутствует разрыв АВ, порожденный взаимодействием головной ударной волны с границей области и разрыв CD: $(0.63, 0.12) - (0.9, 0.33)$.

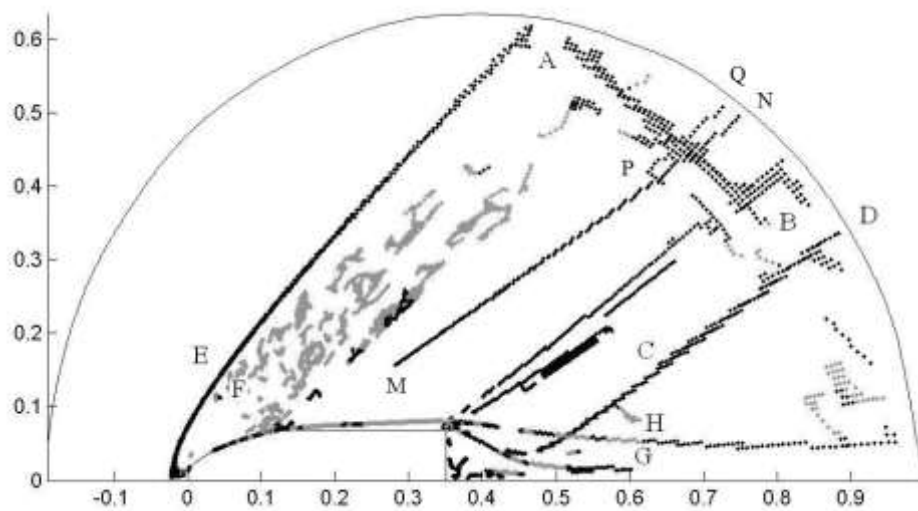


Рисунок 4.5 – Наложение результатов локализации разрывов

В идеальной среде за волной разрежения локализуется «разрыв» MN, соответствующий перегибу плотности (рисунок 4.6), вызванному ростом плотности за волной разрежения, возникающим при обтекании цилиндрических тел [47, 48]. Аналогичный эффект имеет место и в вязкой среде, однако соответствующий «разрыв» PQ локализуется на значительном удалении от тела, практически у границы расчетной области.

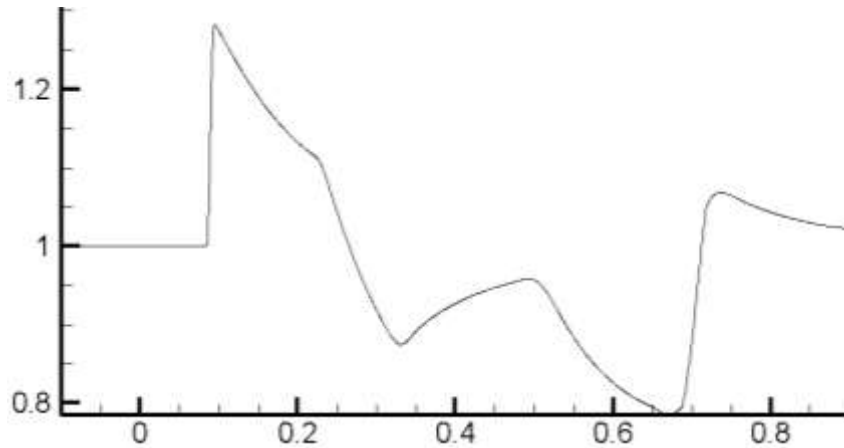


Рисунок 4.6 – Распределение плотности в вязкой среде в сечении $y = 0.2$

Таким образом, при обработке расчета, полученного по уравнениям Рейнольдса с $k - \varepsilon$ моделью турбулентности, выделяются два типа структур: структуры, которым в идеальной среде соответствуют ударные волны, и структуры, имеющие исключительно вязкую природу. Для того чтобы иметь возможность алгоритмически определять, к какой из групп относится структура, была выполнена проверка соотношений на разрывах для структур каждого типа.

Ошибки в соотношениях (4.1-4.4) на разрыве для точек E(0.02, 0.16) и F(0.07, 0.14) (слева и справа от головной ударной волны) для идеальной среды составляют 0.039, 0.00075, 0.077 и 0.063, а для вязкой среды 0.038, 0.0011, 0.078 и 0.061. В обоих случаях отношения ошибок к значениям выражений в точке E составляют примерно 0.04, 0.001, 0.18 и 0.04. Таким образом, наиболее точно выполняются соотношения, следующие из закона сохранения массы (4.1), нормальной компоненты импульса (4.2) и энергии (4.4). Подобная картина наблюдается вдоль всего разрыва.

Если же в расчете, выполненном по уравнениям Рейнольдса с $k - \varepsilon$ моделью турбулентности, проверить соотношения на структурах, которые локализируются только в вязком течении, например, для точек G(0.6, 0.05) и H(0.6, 0.065) (внутри и вне следа за моделью), то отношения ошибок к значениям выражений в точке G составят 0.058, 0.007, 0.7 и 0.57 соответственно. В отличие от предыдущего случая, нарушение уже значительно. Из этого можно заключить, что

выделяемая детектором линия не является ударной волной, а имеет вязкую природу, что также подтверждается тем, что для этой линии не существует аналога в расчете, выполненном по модели Эйлера. Таким образом, нарушение соотношений (4.3, 4.4) может быть использовано для определения природы структур выделяемых в расчетах вязких течений.

Для того чтобы разрешить вязкую структуру ударной волны требуется сетка с гораздо более мелким шагом по пространству, чем та, что использовалась в расчете. Тем не менее, в расчете, проведенном по вязкой модели, удалось локализовать положение ударной волны, причем ее положение совпало с положением ударной волны в соответствующем расчете для идеальной модели, а также положение пограничного слоя и границу следа за моделью. Кроме того, удалось убедиться в выполнении соотношений Гюгонио на ударной волне.

4.5 Локализация разрывов в трехмерных расчетах

Рассматриваются модельные поля:

$$\rho_{i,j,k} = \begin{cases} 2, & i \geq 0.1 * ((j-50)^2 + (k-50)^2) \\ 1, & i < 0.1 * ((j-50)^2 + (k-50)^2) \end{cases}$$

$$p_{i,j,k} = \begin{cases} 2, & \begin{cases} i \geq 0.1 * ((j-50)^2 + (k-50)^2) \\ j \geq 50 \end{cases} \\ 1, & \begin{cases} i < 0.1 * ((j-50)^2 + (k-50)^2) \\ j < 50 \end{cases} \end{cases}$$

где $i, j, k \in Z$, $0 \leq i < 50$, $0 \leq j < 100$, $0 \leq k < 100$. Таким образом, на одной половине чаши параболоида существует разрыв и плотности и давления, моделирующий ударную волну, а на другой – только разрыв плотности, моделирующий контактный разрыв. В плоскости $j = 50$ рвется только давление, но данный разрыв не имеет газодинамических аналогов и не должен выделяться.

На рисунке 4.7 представлены результаты локализации разрывов. Темная поверхность соответствует ударной волне, а светлая – контактному разрыву. Поверхность, на которой рвется только давление, не была выделена. Ошибка локализации не превышает одну ячейку сетки.

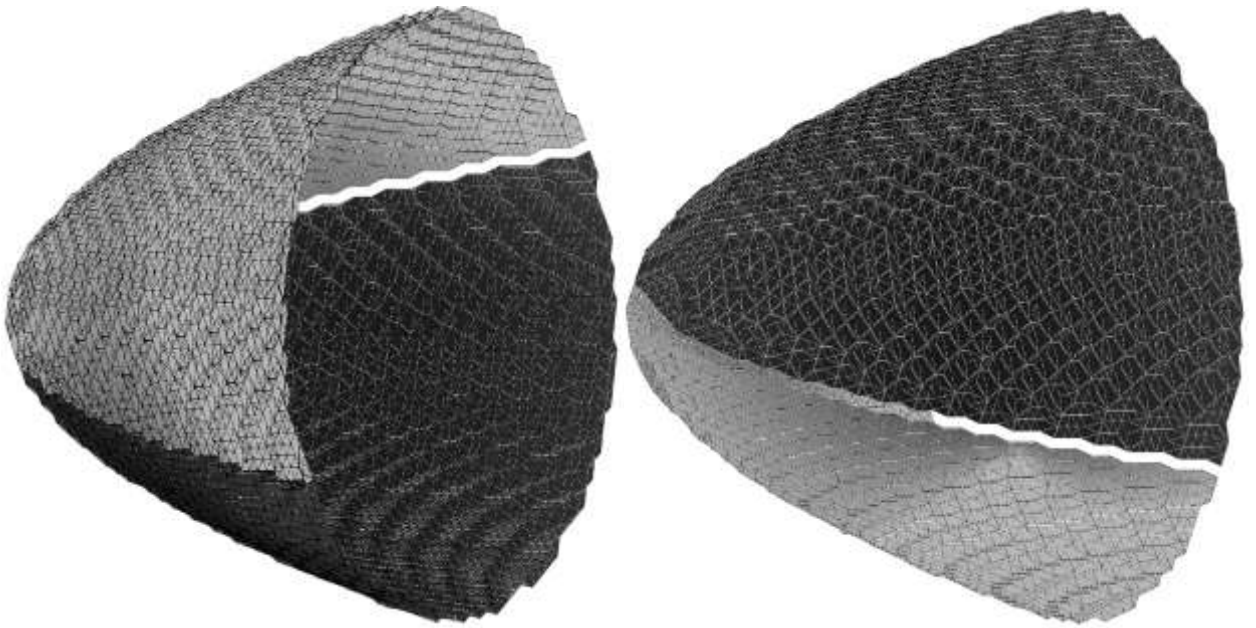


Рисунок 4.7 – Разрывы, локализованные в модельных данных

Для анализа была выбрана задача о сверхзвуковом обтекании тела под углом атаки шесть градусов. Расчет выполнялся методом установления по модели Навье - Стокса на сетке, состоящей из 25 блоков (рисунок 4.8).

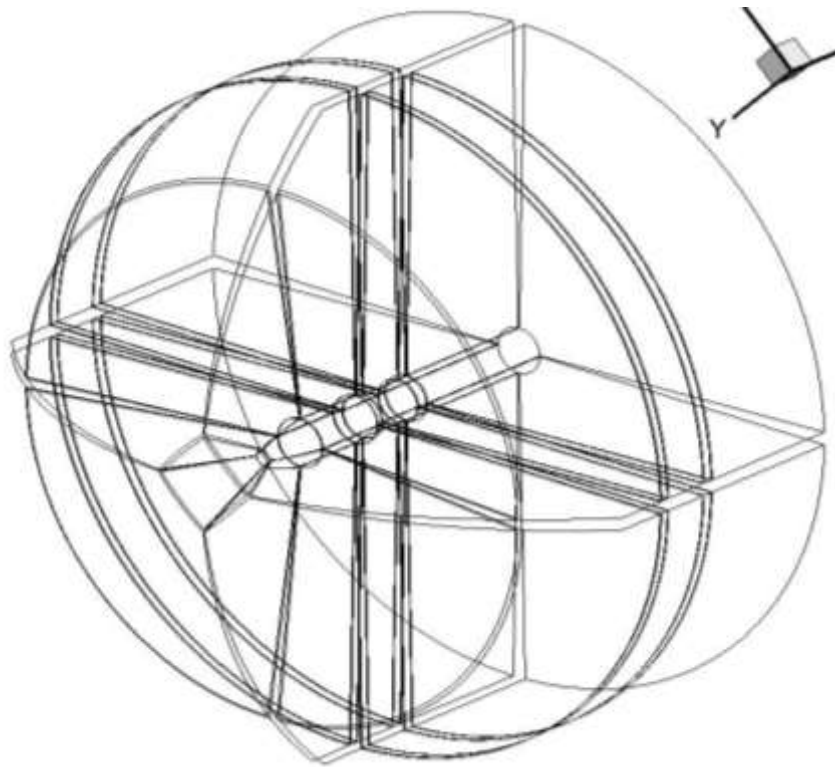


Рисунок 4.8 – Схема расположения блоков расчетной сетки

На рисунке 4.9 представлены результаты локализации ударных волн в трех блоках расчетной сетки для двух моментов времени.

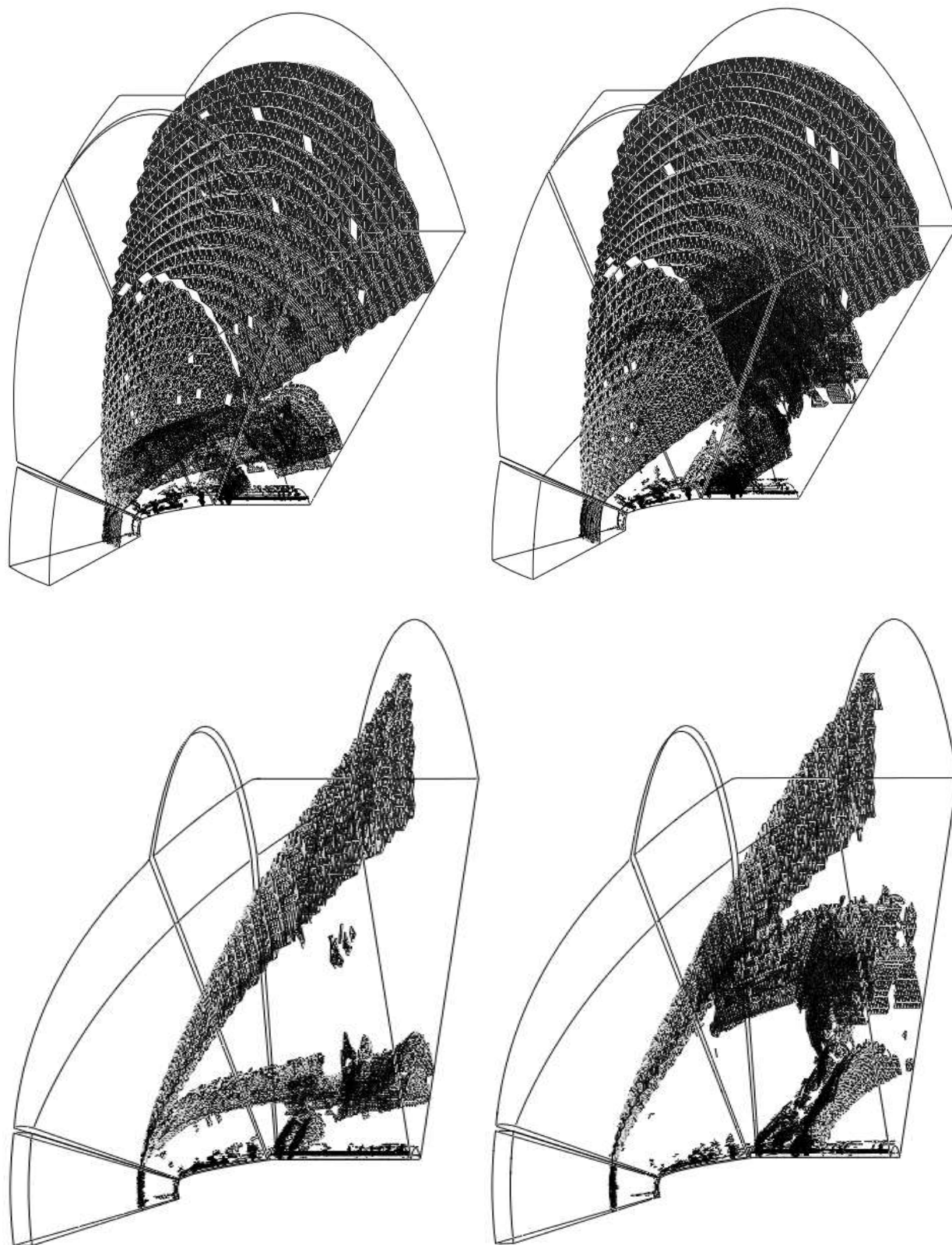


Рисунок 4.9 – Результаты локализации ударных волн на шаге 176000 (слева) и 239200 (справа)

Четко локализируются структуры, соответствующие головной ударной волне и уплотнению, возникающему за волной разрежения при обтекании цилиндрических тел.

В течении также наблюдается нестационарный процесс. За головной ударной волной был выделен разрыв слабой интенсивности (рисунок 4.9 слева). Этот скачок постепенно удаляется от тела (рисунок 4.9 справа) и при дальнейшем установлении течения должен покинуть расчетную область. Указанный факт свидетельствует о том, что течение еще не установилось и требуется продолжение расчета.

В силу слабой интенсивности установить наличие указанного нестационарного разрыва стандартными средствами может быть достаточно трудоемко. Так, на шаге 176000 его наличие может быть визуально установлено по распределению поля плотности (рисунок 4.10).

Однако на шаге 239200 визуально установить наличие разрыва уже невозможно (рисунок 4.11). Приходится прибегать к дополнительным средствам, например, использованию «дикой палитры» (рисунок 4.12). Однако интерпретация результатов, полученных с использованием подобных средств, (как и выбор самих средств) требует определенного опыта и навыков в анализе расчетов газодинамических течений.

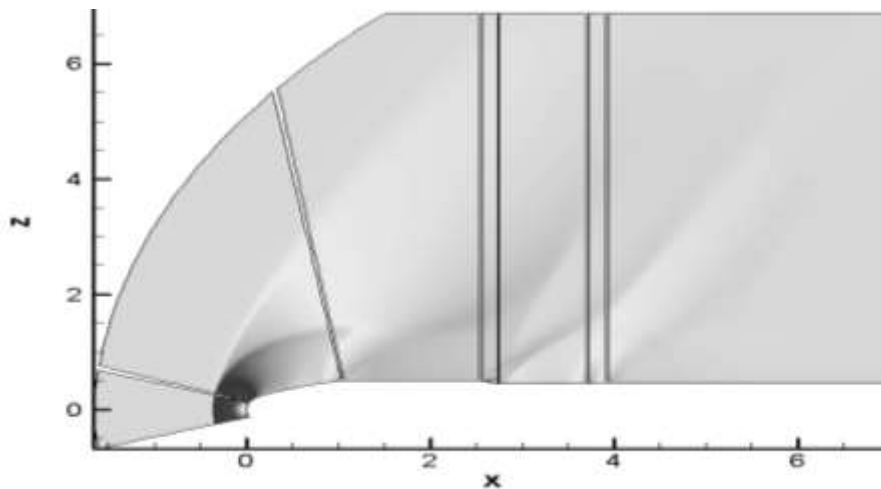


Рисунок 4.10 – Распределение плотности в плоскости $y = 0$ на шаге 176000

В то же время представленный в данной работе детектор позволяет с легкостью обнаружить и локализовать указанный разрыв. Таким образом, детектор может применяться для анализа качества расчета, а при построении дополнительной логики (сравнение положения разрывов, локализованных в различные моменты времени) может быть использован для проверки того, что течение установилось.

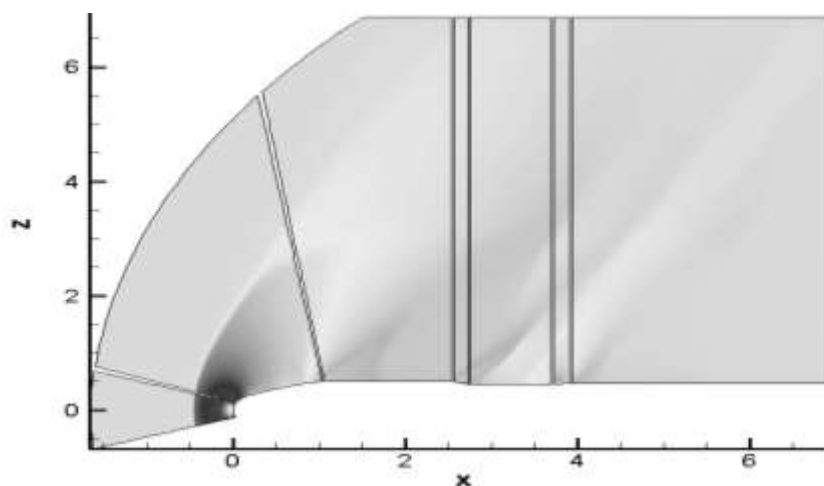


Рисунок 4.11 – Распределение плотности в плоскости $y = 0$ на шаге 239200

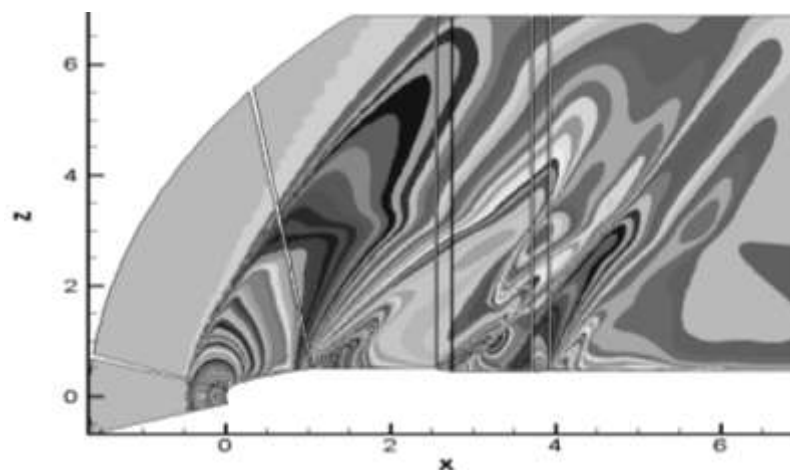


Рисунок 4.12 – Распределение плотности в плоскости $y = 0$ на шаге 239200 («дикая палитра»)

4.6 Применение детектора для адаптации расчетной сетки к положению разрывов

В заключение, на примере одномерной задачи о распаде и взаимодействии разрывов в трубе под действием импульсного вложения энергии (пункт 2.3.3), рассмотрим простейший вариант применения детектора для адаптации расчета к положению разрывов.

В начальный момент времени существуют три области с постоянными значениями газодинамических величин:

- 1) невозмущенный неподвижный газ перед фронтом падающей ударной волны:

$$x > 2, \quad \rho_1=1, \quad u_1=0, \quad p_1=1,$$

- 2) объемная часть разряда:

$$0 < x < 2, \quad \rho_2=1, \quad u_2=0, \quad p_2=12.4625,$$

3) область за фронтом падающей волны:

$$x < 0, \quad \rho_3=3.7629, \quad u_3=2.5194, \quad p_3=9.6450.$$

В результате распада разрыва в точке $x = 0$ формируются две ударных волны и контактный разрыв между ними. Распад разрыва в точке $x = 2$ дает идущую влево волну разрежения, идущую вправо ударную волну и контактный разрыв между ними. Начальная конфигурация разрывов представлена на рисунке 2.4. Начальные интенсивности перечисленных разрывов зависят от двух факторов – числа Маха падающей ударной волны и количества вложенной энергии.

Течение в последующие моменты времени рассчитывалось путем численного интегрирования нестационарных одномерных уравнений Эйлера. Использовался одномерный вариант обобщенной разностной схемы Годунова 2-го порядка аппроксимации. Изначально расчеты проводились на равномерной подвижной сетке, границы которой соответствуют положению крайней левой и крайней правой ударных волн. Результаты расчета на сетке, содержащей 2048 ячеек, представлены на рисунке 4.13.

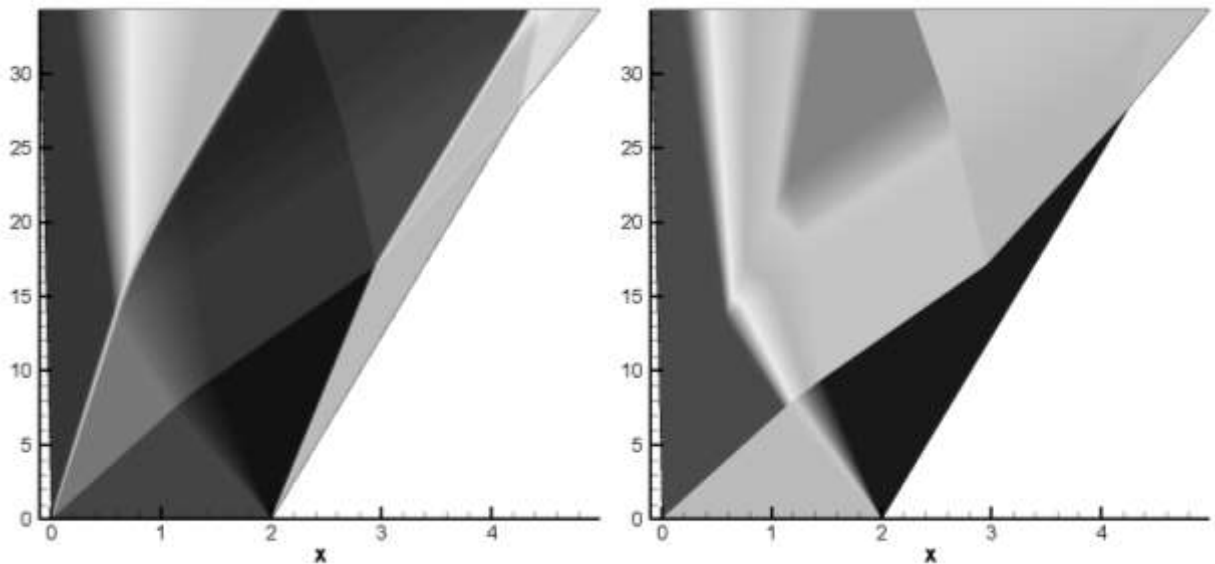


Рисунок 4.13 – Распределение плотности и давления в расчете на равномерной подвижной сетке, содержащей 2048 ячеек

Затем в расчет был внедрен алгоритм выделения особенностей течения. Локализация разрывов проводилась на каждом шаге расчета. Результаты локализации представлены на рисунке 4.14.

Чтобы проверить качество выделения разрывов, для начального интервала времени было проведено сравнение полученных результатов локализации с точным решением (таблица 4.1).

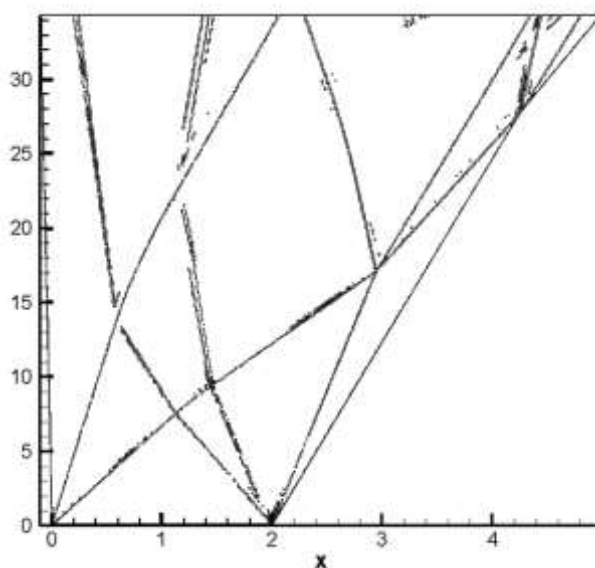


Рисунок 4.14 – Разрывы, локализованные в расчете

Таблица 4.1

Сравнение точных и полученных скоростей разрывов

Распад слева	Теоретическая скорость	Полученная скорость
Контактный разрыв	1.468936	1.462891
Ударная волна	5.150371	5.131882
Распад справа	Теоретическая скорость	Полученная скорость
Волна разрежения - левая граница	-4.177036	-3.928539
Волна разрежения - правая граница	-1.87936	-1.953756
Контактный разрыв	1.91473	1.911167

Для контактных разрывов и ударной волны получено достаточно точное совпадение, ло-

кализованные границы волны разрежения смещены внутрь волны разрежения.

После этого был реализован адаптивный вариант расчета, использующий информацию о положении разрывов, полученную от детектора. На каждом шаге расчета сначала проводилась локализация разрывов в исходных данных (начальных или данных с предыдущего шага). Затем ячейки, в которых были локализованы разрывы, и две соседние с ними ячейки разбивались на восемь равных частей. Таким образом формировалась неравномерная сетка, на которой выполнялся очередной шаг расчета. Значения полей газодинамических величин в ячейках этой сетки задавались в зависимости от того, какая сетка использовалась на предыдущем шаге:

- 1) если в обоих случаях ячейка разбивалась на части, то значения для каждой части, полученные на предыдущем шаге, используются как исходные на текущем шаге;
- 2) если в обоих случаях ячейка не разбивалась, то значения, полученные для этой ячейки на предыдущем шаге, используются как исходные на текущем шаге;
- 3) если на текущем шаге ячейка разбивается на части, а на предыдущем нет, то для каждой из частей ячейки в качестве исходных данных используются одни и те же величины, полученные в результате расчета на предыдущем шаге для целой ячейки;
- 4) если на предыдущем шаге ячейка разбивается на части, а на текущем нет, то в качестве исходных данных для ячейки используются осредненные по всем частям ячейки величины.

Результаты неадаптивного расчета, проведенного на равномерной сетке, содержащей 256 ячеек, и адаптивного расчета, проведенного с использованием информации о положении разрывов на неравномерной сетке (изначально сетка состоит из 256 ячеек, но каждая может разбиваться на 8 частей), представлены на рисунках 4.15 и 4.16 соответственно.

Использование адаптивного подхода позволило существенно повысить качество расчета за счет уменьшения зон размазывания разрывов, особенно контактных (рисунок 4.17).

Использование адаптивной сетки позволяет сократить время расчета по сравнению с расчетом на равномерной мелкой сетке. Чтобы оценить ускорение были проведены различные варианты расчета данной задачи и получены оценки времени, необходимого для расчета каждого из вариантов. Для каждого из вариантов оценивалось время необходимое для 100 циклов расчета. При этом отсутствовала запись файлов, то есть определялось именно время счета.

1) Расчет без локализации разрывов и без адаптации сетки, исходная сетка содержит 256 ячеек (рисунок 4.15). Для расчета 100 циклов данной задачи требуется 12 секунд, однако разрывы сильно размазываются.

2) Расчет без локализации разрывов и без адаптации сетки, исходная сетка содержит 2048 ячеек (рисунок 4.13). Для расчета 100 циклов данной задачи требуется 662 секунды. Раз-

рывы уже не размазаны. Такое существенное замедление вызвано не только увеличением числа ячеек, но и уменьшением шага по времени, необходимым для устойчивости расчета

3) Расчет с локализацией разрывов, но без адаптации сетки, исходная сетка содержит 256 ячеек. Для расчета 100 циклов данной задачи требуется 22 секунды, таким образом, на определение положения разрывов в расчете тратится 10 секунд.

4) Расчет с локализацией разрывов и адаптацией сетки, исходная сетка содержит 256 ячеек, каждая из ячеек может разбиваться на 8 равных частей (рисунок 4.16). Расчет проводился с различным шагом по времени для мелких и крупных ячеек, локализация разрывов проводилась только на шаге времени, соответствующем грубой сетке. Для расчета 100 циклов данной задачи требуется 268 секунд. Качество расчета эквивалентно варианту 2, разрывы почти не размазаны (рисунок 4.17).

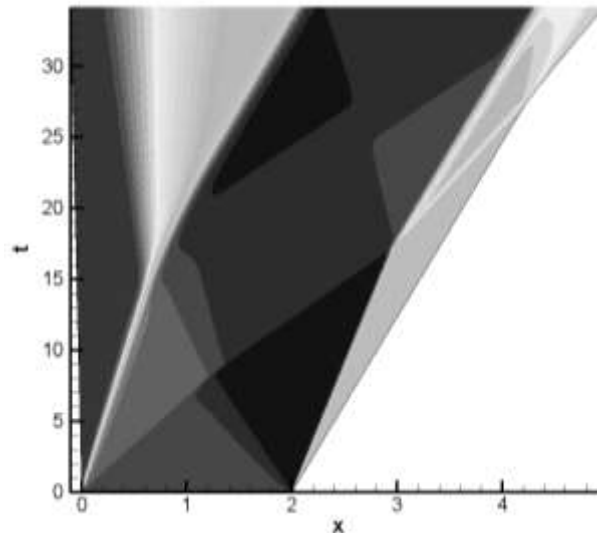


Рисунок 4.15 – Распределение плотности в расчете на равномерной сетке

Таким образом, использование адаптивного подхода позволило ускорить расчет данной задачи в 2.5 раза. Поскольку исходная сетка содержит всего 256 ячеек, а разрывов, к которым адаптируется сетка, достаточно много (7 в начальный момент времени), то такой результат является весьма успешным.

Данный пример демонстрирует точность выделения сингулярностей течения и высокий потенциал использования детектора для адаптации расчета к положению разрывов. Естественно, описанный выше подход является одним из простейших. На практике могут использоваться методы, связанные не только с построением адаптивных сеток, но и с модификацией в окрестности разрывов самого разностного алгоритма. Однако описанный в данной работе детектор сингулярностей остается универсальным элементом, который может быть эффективно исполь-

зован для локализации разрывов при любом из подходов к адаптации расчетов газодинамических течений к положению разрывов.

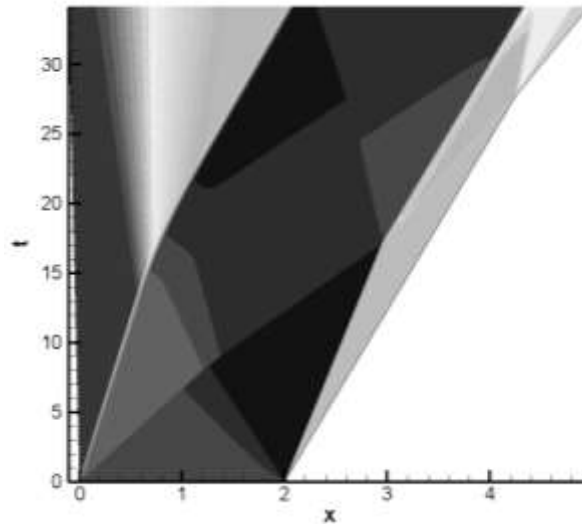


Рисунок 4.16 – Распределение плотности в расчете, выполненном на адаптивной сетке

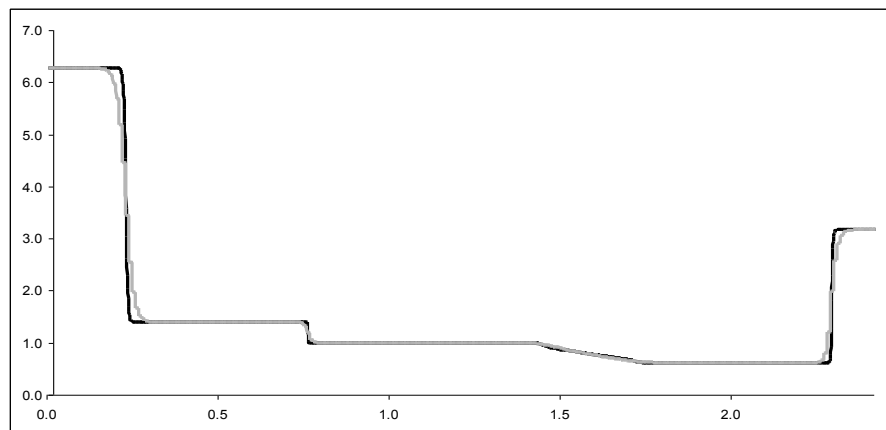


Рисунок 4.17 – Распределение плотности в момент $t = 5$ для адаптивного (черный) и неадаптивного (серый) расчетов

4.7 Заключение

Установлено, что модифицированный алгоритм локализации особенностей позволяет эффективно обрабатывать двумерные и трехмерные расчеты в областях со сложной геометрией и подавлять значительную часть артефактов. Кроме того детектор может быть успешно использован для ускорения и повышения качества расчета за счет его адаптации к положению разрывов. Сравнительная обработка расчетов, соответствующих уравнениям Эйлера и Рейнольдса,

показала, что в расчете для вязкой среды выделяются как особенности, соответствующие ударным волнам в расчете по уравнениям Эйлера, так и особенности, соответствующие вязким эффектам. Для особенностей, соответствующих ударным волнам, с достаточно высокой точностью выполняются соотношения на разрывах для идеальной среды. При численной проверке на границе следа за моделью с высокой точностью выполняется только соотношение для нормальной компоненты импульса (4.2), а остальные соотношения (4.3, 4.4) нарушаются. Данные факты позволяют разделить особенности, соответствующие вязким и невязким эффектам.

Заключение

На основе анализа методов вейвлет-анализа разработана математическая модель выделения особенностей в полях газодинамических функций. Модель основана на использовании симметричных комплексных вейвлетов Добеши и классических несимметричных вещественных вейвлетов Добеши, а также на соотношениях Гюгонио на разрывах. Она была использована при моделировании разрывов в ряде задач газовой динамики: сверхзвуковое обтекание тел под углом атаки, распространение ударных волн в каналах при наличии импульсного энерговыделения. Расчеты проводились для идеальных и вязких течений при больших числах Рейнольдса. Показано, что «разрывы» выделяемые в численных решениях уравнений Навье-Стокса при больших числах Рейнольдса, вдали от тела близки к разрывам в решении уравнений Эйлера. В решениях уравнений Навье-Стокса дополнительно выделяются структуры свойственные только вязким течениям (граница пограничного слоя, вихревые структуры).

Разработаны алгоритмы, в том числе и многомасштабный, позволяющий на основании численных данных, полученных методом сквозного счета, восстановить содержащуюся в них информацию о положении и типах разрывов.

В качестве входных данных алгоритмы получают поля физических величин плотности и давления, заданных в узлах расчетной сетки. В результате каждому узлу сетки сопоставляется натуральное число, характеризующее течение в окрестности этого узла. Особенностью разработанного метода является то, что он не требует тонкой настройки, что позволяет использовать его непосредственно в ходе расчета для его адаптации к положению разрывов. В тоже время тонкая настройка допускается, что позволяет получить более качественные результаты в постобработке.

В основе алгоритмов лежат методы вейвлет - анализа и элементы логического анализа, использующие соотношения Гюгонио на разрывах. Также используется предположение о том, что разрывы газодинамических функций представляют собой набор кусочно-гладких кривых или поверхностей. Алгоритмы позволяют проводить локализацию разрывов в расчетах двумерных и трехмерных течений выполненных на неструктурированных расчетных сетках. Высокая точность локализации разрывов подтверждена решением ряда тестовых задач.

В работе также представлен многомасштабный алгоритм выделения особенностей, применение которого позволило существенно сократить количество артефактов, локализуемых в расчетах газодинамических полей.

Также был разработан набор фильтров, позволяющих избавиться от большей части артефактов и повышающих качество локализации.

Показано, что разработанные методы в постобработке позволяют выявить дефекты расчетов, которые сложно обнаружить другим способом.

Разработанные алгоритмы реализованы в виде комплекса программ, включающего в себя программы: BreaksLock2D - для локализации разрывов двумерных течений на прямоугольной сетке; BreaksLock2DMultiScale - для многомасштабной локализации разрывов двумерных течений на прямоугольной сетке; BreaksLock2DUnStruckt - для локализации разрывов двумерных течений на неструктурированной сетке; BreaksLock3D - для локализации разрывов трехмерных течений на неструктурированной сетке; AdaptiveEuler – для моделирования одномерного течения в канале под действием энерговыделения с использованием алгоритмов выделения особенностей и адаптивных сеток. Программы написаны на языке программирования C++ и содержат в общей сложности порядка 3000 строк исходного кода. Программы BreaksLock2D, BreaksLock2DMultiScale, BreaksLock2DUnStruckt, BreaksLock3D на входе получают файл в формате «Tecplot Data». На выходе программ BreaksLock2D, BreaksLock2DMultiScale, BreaksLock2DUnStruckt создают файл, содержащий список узлов в которые соответствуют особенностям и типы особенностей. Для визуализации результатов написаны программы для Matlab. На выходе программы BreaksLock3D создается файл, содержащий триангуляцию поверхностей разрывов в формате «VTK». Программа AdaptiveEuler на входе получает газодинамические параметры для трех начальных областей и параметры адаптации сетки, на выходе создается файл в формате «Tecplot Data».

В работе получены следующие основные результаты:

1) На основе методов вейвлет-анализа разработана математическая модель выделения особенностей в полях газодинамических функций. Модель основана на использовании симметричных комплексных вейвлетов Добеши и классических вещественных вейвлетов Добеши, а также соотношений Гюгонио на разрывах.

2) Разработаны численные алгоритмы, включая многомасштабный, позволяющие на основании численных данных, полученных методом сквозного счета, восстановить содержащуюся в них информацию о положении и типах разрывов. В основе алгоритмов лежат методы вейвлет – анализа. Алгоритмы позволяют проводить локализацию разрывов в расчетах двумерных и трехмерных течений. Высокая точность локализации разрывов подтверждена решением ряда тестовых задач.

3) Разработанные алгоритмы реализованы в виде комплекса программ для локализации разрывов двумерных и трехмерных течений на прямоугольных и неструктурированных сетках. Программно реализован алгоритм для моделирования одномерных течений с адаптацией сетки на основе вейвлет-анализа особенностей решения.

4) Проведено численное моделирование и выделение разрывов в ряде задач газовой динамики: сверхзвуковое обтекание тел под углом атаки, распространение ударных волн в каналах при наличии импульсного энерговыделения. Расчеты проводились для идеальных и вязких течений при больших числах Рейнольдса. Показано, что «разрывы» выделяемые в численных решениях уравнений Навье-Стокса при больших числах Рейнольдса, вдали от тела близки к разрывам в решении уравнений Эйлера. В решениях уравнений Навье-Стокса дополнительно выделяются структуры свойственные только вязким течениям.

5 Приложения

5.1 Симметричные комплексные вейвлеты Добеши

При построении фильтров для симметричных комплексных вейвлетов Добеши считаются выполненными следующие условия:

1) скейлинг функция $\varphi(x)$ (а, следовательно, и вейвлет $\psi(x)$) имеет компактный носитель в интервале $(-J, J+1)$, для некоторого целого J (Это условие означает, что коэффициенты h_k , где $k \in \mathbb{Z}$, соответствующего низкочастотного фильтра равны нулю если $k < -J$ или $k > J+1$),

2) сдвиги $\varphi(x-k)$ взаимно ортогональны, то есть $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-i) \overline{\varphi(x-j)} dx = \delta_{i,j}$ (Если

определить полином $F(z) = \sum_{n=-J}^{J+1} h_n z^n$, где $F(1) = 1$, а z принадлежит единичной окружности

$|z| = 1$, то ортонормированность набора $\{\varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$ может быть установлена следующим тождеством: $P(z) - P(-z) = z$, где полином $P(z)$ определяется как: $P(z) = zF(z)\overline{F(z)}$,

3) вейвлет $\psi(x)$ имеет J нулевых моментов (В терминах полинома $P(z)$ данное условие записывается в виде: $P'(-1) = P''(-1) = \dots = P^{(j)}(-1) = 0$),

4) скейлинг функция симметрична, то есть $\varphi\left(x - \frac{1}{2}\right) = \varphi\left(-\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$ (Это условие

означает, что $h_k = h_{1-k}$).

Эти условия порождают систему полиномиальных уравнений на коэффициенты фильтра [10]. Для небольшого числа J уравнения могут быть решены аналитически рисунки 5.1, 5.2 и 5.3.

Следует отметить, что для 10 ненулевых коэффициентов существует ровно два симметричных решения.

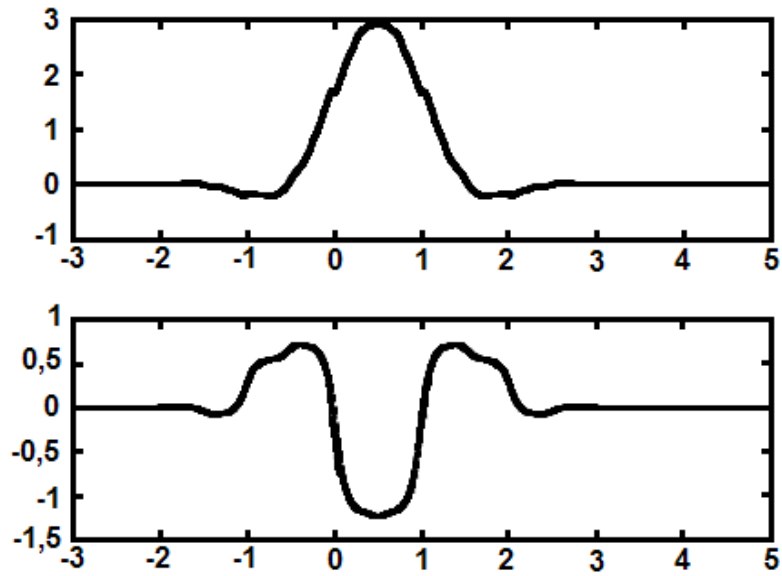


Рисунок 5.1 – Вещественная и мнимая части скейлинг функции для 6 ненулевых коэффициентов

$$h_{-2} = h_3 = -\frac{3}{64} - i\frac{\sqrt{15}}{64}, h_{-1} = h_2 = \frac{5}{64} - i\frac{\sqrt{15}}{64}, h_0 = h_1 = \frac{15}{32} + i\frac{\sqrt{15}}{32}$$

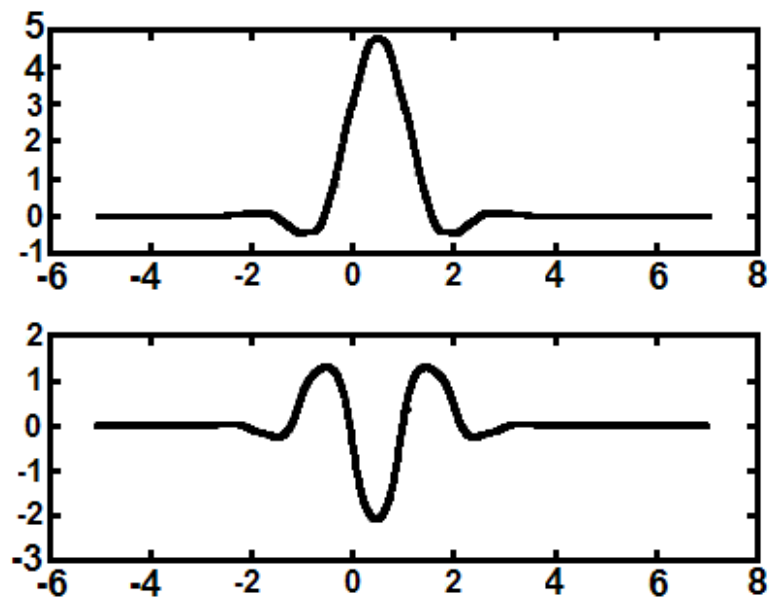


Рисунок 5.2 – Вещественная и мнимая части скейлинг функции для 10 ненулевых коэффициентов (решение 1)

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{-4} = h_5 = \frac{5}{256} + \frac{t}{2^{10}} + i\sqrt{\frac{35}{2^{17}} - \left(\frac{5}{256} + \frac{t}{2^{10}}\right)^2}, \\ h_{-3} = h_4 = \frac{t}{2^{10}} + i\sqrt{-\frac{t}{2^{14}} - \frac{75}{2^{17}} - \frac{t^2}{2^{20}}}, \\ h_{-2} = h_3 = -\frac{27}{256} - \frac{t}{256} + i\left(3\sqrt{-\frac{t}{2^{14}} - \frac{75}{2^{17}} - \frac{t^2}{2^{20}}} - 7\sqrt{\frac{35}{2^{17}} - \left(\frac{5}{256} + \frac{t}{2^{10}}\right)^2}\right), \\ h_{-1} = h_2 = \frac{15}{256} - \frac{t}{256} + i\left(\sqrt{-\frac{t}{2^{14}} - \frac{75}{2^{17}} - \frac{t^2}{2^{20}}} - 5\sqrt{\frac{35}{2^{17}} - \left(\frac{5}{256} + \frac{t}{2^{10}}\right)^2}\right), \\ h_0 = h_1 = \frac{135}{256} + \frac{3t}{512} + i\left(-5\sqrt{-\frac{t}{2^{14}} - \frac{75}{2^{17}} - \frac{t^2}{2^{20}}} - 11\sqrt{\frac{35}{2^{17}} - \left(\frac{5}{256} + \frac{t}{2^{10}}\right)^2}\right), \end{array} \right.$$

$$\text{где } t = -15 - \frac{2 \cdot 15^{2/3} (1 - i\sqrt{3})}{(-15 + 7i\sqrt{15})^{1/3}} - \frac{1}{2} (1 + i\sqrt{3}) (15(-15 + 7i\sqrt{15}))^{1/3}.$$

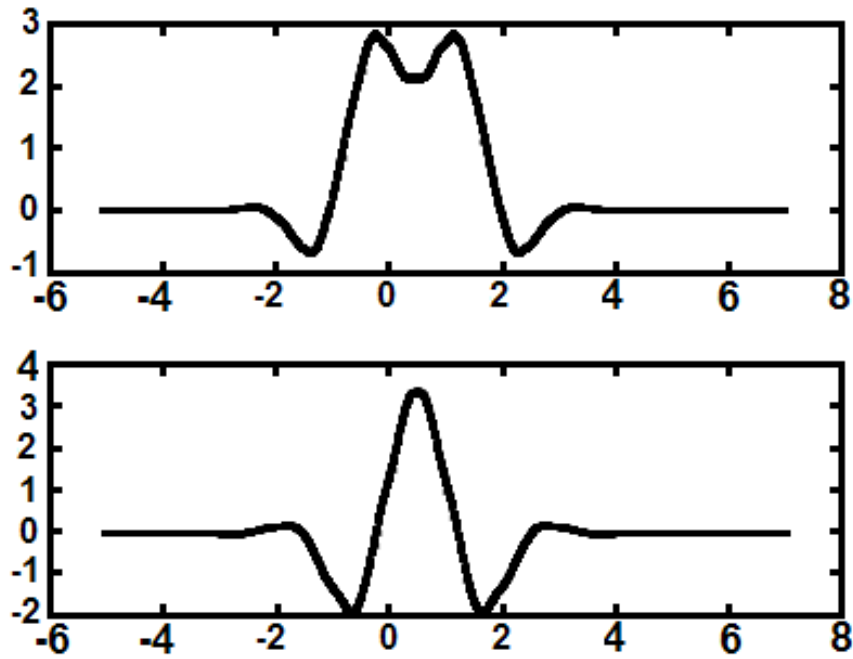


Рисунок 5.3 – Вещественная и мнимая части скейлинг функции для 10 ненулевых коэффициентов (решение 2)

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{-4} = h_5 = \frac{5}{256} + \frac{t}{2^{10}} - i\sqrt{\frac{35}{2^{17}} - \left(\frac{5}{256} + \frac{t}{2^{10}}\right)^2}, \\ h_{-3} = h_4 = \frac{t}{2^{10}} + i\sqrt{-\frac{t}{2^{14}} - \frac{75}{2^{17}} - \frac{t^2}{2^{20}}}, \\ h_{-2} = h_3 = -\frac{27}{256} - \frac{t}{256} + i\left(3\sqrt{-\frac{t}{2^{14}} - \frac{75}{2^{17}} - \frac{t^2}{2^{20}}} + 7\sqrt{\frac{35}{2^{17}} - \left(\frac{5}{256} + \frac{t}{2^{10}}\right)^2}\right), \\ h_{-1} = h_2 = \frac{15}{256} - \frac{t}{256} + i\left(\sqrt{-\frac{t}{2^{14}} - \frac{75}{2^{17}} - \frac{t^2}{2^{20}}} + 5\sqrt{\frac{35}{2^{17}} - \left(\frac{5}{256} + \frac{t}{2^{10}}\right)^2}\right), \\ h_0 = h_1 = \frac{135}{256} + \frac{3t}{512} + i\left(-5\sqrt{-\frac{t}{2^{14}} - \frac{75}{2^{17}} - \frac{t^2}{2^{20}}} + 11\sqrt{\frac{35}{2^{17}} - \left(\frac{5}{256} + \frac{t}{2^{10}}\right)^2}\right), \end{array} \right.$$

$$\text{где } t = -15 - \frac{2 \cdot 15^{2/3} (1 + i\sqrt{3})}{(-15 + 7i\sqrt{15})^{1/3}} - \frac{1}{2} (1 - i\sqrt{3}) (15(-15 + 7i\sqrt{15}))^{1/3}.$$

5.2 Связь между вещественной и мнимой частями скейлинг функции

Симметричные комплексные вейвлеты Добеши, фильтры которых приведены в приложении 5.1, обладают следующим важным свойством.

Для скейлинг - функции $\varphi(x) = u(x) + i\nu(x)$, для подходящей константы α , с высокой точностью выполняется соотношение:

$$\nu(x) \approx \alpha \partial_x^2 u(x). \quad (5.1)$$

Справедливость этого соотношения проиллюстрирована на рисунке 5.4 log-log графиком, изображающим отношение $r(\omega) = \frac{\hat{\nu}(\omega)}{\hat{u}(\omega)}$ образов Фурье вещественной и мнимой частей скейлинг - функции. Величина $r(\omega)$ является вещественной в силу симметричности функций $u(x)$ и $\nu(x)$. Ее log-log график близок к линейному графику с угловым коэффициентом 2, как это показано на рисунке 5.4.

Другими словами, Фурье - образы мнимой и вещественной частей связаны приближенным соотношением $\hat{\nu}(\omega) \approx \alpha \omega^2 \hat{u}(\omega)$, откуда и вытекает соотношение (5.1).

Кроме того, в [10] показано, что вещественная часть симметричной комплексной скейлинг - функции, удовлетворяет соотношениям на моменты:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx = 1 \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} u(x) (x - 1/2)^m dx = 0 \text{ (при } m = 1, 2, 3). \quad (5.2)$$

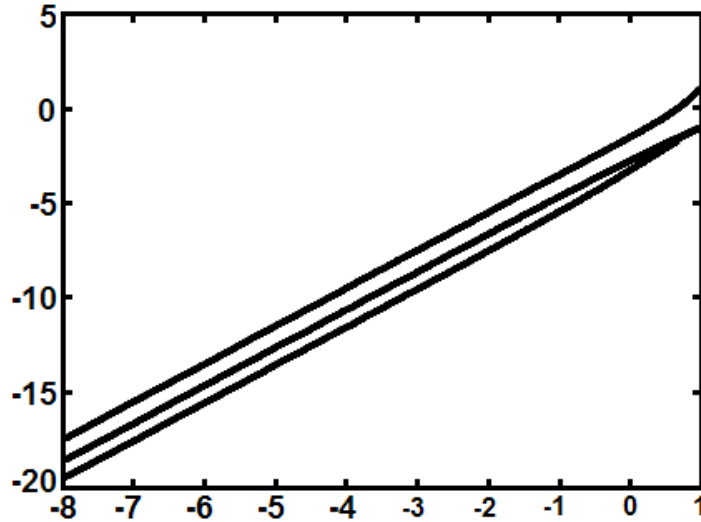


Рисунок 5.4 – Величина $r(\omega)$ в логарифмическом масштабе (графики для нескольких вейвлетов построенного в [10] семейства)

Если считать, что равенство (5.1) выполняется точно, то используя соотношения (5.2) можно найти параметр α . Для симметричных комплексных вейвлетов Добеши величина α сравнительно мала (например, для 6 ненулевых коэффициентов $\alpha_6 = -\sqrt{15}/24$, а для 10, с учетом наличия двух решений, $\alpha_{10,j} = \frac{32}{3} \text{Im}(h_4 - h_5)$, где $j=1,2$ или $\alpha_{10,1} \approx -0.089468$, $\alpha_{10,2} \approx 0.35625$).

5.3 Лемма о сходимости масштабирующих функций

В теории вейвлет анализа множество сдвигов и растяжений скейлинг функции вводится как:

$$\varphi_{n,j}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \varphi\left(\frac{t-n}{2^j}\right).$$

Из такого определения следует, что $\|\varphi_{n,j}\|_{L_2} = \text{const}$.

Для того чтобы выполнялось соотношение $\|\tilde{\varphi}_{n,j}\|_{L_1} = \text{const}$, достаточно положить:

$$\tilde{\varphi}_{n,j}(t) = \frac{1}{2^j} \varphi\left(\frac{t-n}{2^j}\right), \quad (5.3)$$

то есть различие заключается только в умножении на число, которое зависит от масштаба, но не зависит от сдвига.

В случае, когда масштабирование определено формулой (5.3), верно следующее утверждение:

Лемма: Пусть для функции $\varphi(x)$ с компактным носителем выполнены соотношения $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| dx = M < \infty$. Функция $f(x) \in C(x_0)$ и $f(x)$ интегрируема по Лебегу. Тогда

для семейства функций $\varphi_m(x) = \frac{1}{2^m} \varphi\left(\frac{x}{2^m}\right)$ существует такое $M \in \mathbb{Z}$, что существует

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x + x_0) \varphi_m(x) dx = I_m < \infty, \text{ при } m < M, \text{ и } \lim_{m \rightarrow -\infty} I_m = f(x_0).$$

Доказательство:

Так как функция $\varphi(x)$ имеет компактный носитель, то существует такое $A \in \mathbb{R}$, что $\varphi(x) = 0$, при $|x| > A$. Поэтому $\int_{-A}^A \varphi(x) dx = 1$, $\int_{-A}^A |\varphi(x)| dx = M$. А для функций $\varphi_m(x)$ выполняется

$$\int_{-2^m A}^{2^m A} \varphi_m(x) dx = 1, \quad \int_{-2^m A}^{2^m A} |\varphi_m(x)| dx = M.$$

Из условия $f(x) \in C(x_0)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $d = d(\varepsilon, x_0)$, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/M$, при $|x - x_0| < d$.

Так как для любого $d > 0$ существует такое $m_0 \in \mathbb{Z}$, что $|2^m A| < d$, при $m < m_0$, то определен интеграл:

$$\int_{-2^m A}^{2^m A} f(x + x_0) \varphi_m(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + x_0) \varphi_m(x) dx = I_m, \text{ и при } m < m_0 \text{ выполняется оценка:}$$

$$|I_m - f(x_0)| = \left| \int_{-2^m A}^{2^m A} (f(x + x_0) - f(x_0)) \varphi_m(x) dx \right| < \int_{-2^m A}^{2^m A} |f(x + x_0) - f(x_0)| |\varphi_m(x)| dx < \varepsilon/M \int_{-2^m A}^{2^m A} |\varphi_m(x)| dx = \varepsilon.$$

Откуда и следует требуемое утверждение.

5.4 Низкочастотные фильтры использованных в работе вейвлетов

dcoms6 =

$$\{-0.066291 - i * 0.085582; \quad 0.11049 - i * 0.085582;$$

$0.66291 + i * 0.17116;$ $0.66291 + i * 0.17116;$
 $0.11049 - i * 0.085582;$ $-0.066291 - i * 0.085582}$.

dau6 =

{0.33267; 0.806891; 0.459877; -0.135011, -0.085441; 0.035226}.

dcoms22 =

$\{-2.843587e-4 - i * 5.619067e-5;$ $3.943661e-5 - i * 1.995730e-4;$
 $3.503067e-3 - i * 6.987157e-6;$ $2.610443e-4 + i * 1.162351e-3;$
 $-1.826877e-2 + i * 3.762785e-3;$ $-2.986205e-3 + i * 5.055616e-3;$
 $5.069295e-2 - i * 1.130173e-2;$ $-1.211437e-2 - i * 5.680614e-2;$
 $-1.204103e-1 - i * 7.712723e-2;$ $1.474823e-1 + i * 6.042637e-3;$
 $6.59192e-1 + i * 1.294744e-1;$ $6.59192e-1 + i * 1.294744e-1;$
 $1.474823e-1 + i * 6.042637e-3;$ $-1.204103e-1 - i * 7.712723e-2;$
 $-1.211437e-2 - i * 5.680614e-2;$ $5.069295e-2 - i * 1.130173e-2;$
 $-2.986205e-3 + i * 5.055616e-3;$ $-1.826877e-2 + i * 3.762785e-3;$
 $2.610443e-4 + i * 1.162351e-3;$ $3.503067e-3 - i * 6.987157e-6;$
 $3.943661e-5 - i * 1.99573e-4;$ $-2.843587e-4 - i * 5.619067e-5}$.

dau20 =

$\{0.026670057901;$ $0.188176800078;$ $.527201188932;$ $0.688459039454;$
 $0.281172343661;$ $-0.249846424327;$ $-0.195946274377;$ $0.127369340336;$
 $0.093057364604;$ $-0.071394147166;$ $-0.029457536822;$ $0.033212674059;$
 $0.003606553567;$ $-0.010733175483;$ $0.001395351747;$ $0.001992405295;$
 $-0.000685856695;$ $-0.000116466855;$ $0.000093588670;$ $-0.000013264203}$.

Список литературы

1. **Ландау, Л. Д.** Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – Москва : Физматлит, 2003. – 732 с.
2. **Марчук, Г. И.** Повышение точности решений разностных схем / Г. И. Марчук, В. В. Шайдуров. – Москва : Наука, 1979. – 320 с.
3. **Марчук, Г. И.** Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – Москва : Наука, 1977. – 456 с.
4. **Мажукин, В. И.** Метод динамической адаптации для нестационарных задач с большими градиентами / В. И. Мажукин, А. А. Самарский, О. Кастельянос, А. В. Шапранов // Математическое Моделирование. – 1993. – № 4. – С. 32–56.
5. **Бреславский, П. В.** Метод динамической адаптации для нестационарных задач с большими градиентами / П. В. Бреславский, В. И. Мажукин // Математическое Моделирование. – 1995. – № 12. – С. 48–78.
6. **Бреславский, П. В.** Динамически адаптирующиеся сетки для взаимодействующих разрывных решений / П. В. Бреславский, В. И. Мажукин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – № 4. – С. 717–737.
7. **Ворожцов, Е. В.** Методы локализации особенностей в вычислительной газодинамике / Е. В. Ворожцов, Н. Н. Яненко. – Новосибирск : Наука, 1985. – 224 с.
8. **Базаров, С. Б.** Применение методов обработки изображений в вычислительной газодинамике / С. Б. Базаров // Труды GraphiCon 98. – 1998. – С. 258–264.
9. **Plattner, A.** Three-dimensional geoelectric modelling with optimal work/accuracy rate using an adaptive wavelet algorithm / A. Plattner, H.-R. Maurer, J. Vorloeper, W. Dahmen // Geophysical Journal International. – 2010. – V. 182. – № 2. – P. 741–752.
10. **Lina, J.-M.** Image enhancement with symmetric Daubechies wavelets / J.-M. Lina, L. Gagnon // Wavelet Applications in Signal and Image Processing III. – 1995. – SPIE Proceedings V. 2569 – P. 196–207.
11. **Афенди́ков, А. Л.** Локализация сингулярностей газодинамических полей при помощи комплексных и вещественных вейвлетов / А. Л. Афенди́ков, В. В. Горбунова, Л. И. Левкович-Маслюк, А. В. Плёнкин // Препринт Института прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН. – 2005. – № 98. – 32 с.
12. **Афенди́ков, А. Л.** Локализация особенностей газодинамических полей при помощи комплексных ортогональных вейвлет - разложений / А. Л. Афенди́ков, Л. И. Левкович-Маслюк // Препринт Института прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН. – 2003. – № 101. –

15 с.

13. **Afendikov, A. L.** Localization of Singularities of Gas-Dynamic Fields by Using Complex Orthogonal Wavelet Expansions / A. L. Afendikov, L. I. Levkovich-Maslyuk // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2004. – V. 11. – № 3. – P. 250–258.
14. **Малла, С.** Вэйвлеты в обработке сигналов / С. Малла. – Москва : Мир, 2005. – 672 с.
15. **Candes, E. J.** Curvelets - A Surprisingly Effective Nonadaptive Representation For Objects with Edges / E. J. Candes, D. L. Donoho. – Nashville, TN : Vanderbilt University Press, 2000. – 16 p.
16. **Bultheel, A.** Learning to swim in a sea of wavelets / A. Bultheel // Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin. – 1995. – V. 2. – № 1. – P. 1–45.
17. **Duhamel, P.** Fast fourier transforms: A tutorial review and a state of the art / P. Duhamel, M. Vetterli // Signal Processing. – 1990. – V. 19. – № 4. – P. 259–299.
18. **Nussbaumer, H. J.** Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms / H. J. Nussbaumer. – Berlin : Springer-Verlag. – 1982. – 276 p.
19. **Meyer, Y.** Wavelets and Operators / Y. Meyer. – Cambridge university press, 1995. – 244 p.
20. **Bony, J. M.** Second Microlocalization and Propagation of Singularities for Semi-linear Hyperbolic Equations / J. M. Bony // Hyperbolic Equations and Related Topics: Proceedings of the Taniguchi International Symposium. – 1984. – P. 11–49.
21. **Jaffard, S.** Pointwise smoothness, two-microlocalization and wavelet coefficients / S. Jaffard // Publications Mathematiques. – 1991. – V. 35. – № 1. – P. 155–168.
22. **Mallat, S.** Singularity detection and processing with wavelets / S. Mallat, W. L. Hwang // IEEE Transactions on Information Theory. – 1992. – V. 38. – № 2. – P. 617–643.
23. **Март, Д.** Зрение. Информационный подход к изучению представления и обработки зрительных образов / Д. Март. – Москва : Радио и связь, 1987. – 400 с.
24. **Rosenfeld, A.** Edge and curve detection for visual scene analysis / A. Rosenfeld, M. Thurston // IEEE Transactions on Computers. – 1971. – V. C-20. – № 5. – P. 562–569.
25. **Canny, J.** Characterization of signal from multiscale edges / J. Canny // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 1986. – V. PAMI-8. – № 8. – P. 679–698.
26. **Mallat, S.** Characterization of signal from multiscale edges / S. Mallat, S. Zhong // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 1992. – V. 14. – № 7. – P. 710–732.
27. **Taswell, C.** Constraint-selected and search-optimized families of Daubechies wavelet filters computable by spectral factorization / C. Taswell // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2000. – V. 121. – № 1. – P. 179–195.
28. **Седов, Л. И.** Механика сплошной среды / Л. И. Седов. – Москва : Наука, 1970. – 2 т.
29. **Афендиков, А. Л.** Локализация разрывов в полях газодинамических функций с по-

мощью вейвлет анализа / А. Л. Афендигов, Л. И. Левкович-Маслюк, А. Е. Луцкий, А. В. Плёткин // Математическое Моделирование. – 2008. – № 7. – С. 65–84.

30. **Добеши, И.** Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – Москва-Ижевск : НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 464 с.

31. **Lawton, W.** Application of complex valued wavelet transform to subband decomposition / W. Lawton // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1993. – V. 41. – № 12. – P. 3566–3568.

32. **Знаменская, И. А.** Исследование эволюции и взаимодействия разрывов течения в канале под действием импульсного вложения энергии / И. А. Знаменская, А. Е. Луцкий // Препринт Института прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН. – 2005. – № 88. – 21 с.

33. **Знаменская, И. А.** Исследование поверхностного энерговклада в газ при инициировании импульсного разряда типа «плазменный лист» / И. А. Знаменская, А. Е. Луцкий, И. В. Мурсенкова // Письма в ЖТФ. – 2004. – № 24. – С. 38–42.

34. **Richtmyer, R. D.** Taylor instability in a shock acceleration of compressible fluids / R. D. Richtmyer // Communications on Pure and Applied Mathematic. – 1960. – V. 13. – № 2. – P. 297–319.

35. **Мешков, Е. Е.** О Неустойчивость границы раздела двух газов, ускоряемой ударной волной / Е. Е. Мешков // Изв. АН СССР. Механика жидкостей и газов. – 1968. – № 5. – С. 151–158.

36. **Афендигов, А. Л.** Многомасштабный анализ особенностей газодинамических полей / А. Л. Афендигов, А. Е. Луцкий, А. В. Плёткин // Препринт Института прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН. – 2008. – № 98. – 17 с.

37. **Плёткин, А. В.** Кратно-масштабный анализ газодинамических полей / А. В. Плёткин // Вестник Московского университета Серия 1. Математика. Механика. – 2011. – № 2. – С. 56–59.

38. **Чуи К.** Введение в вэйвлеты / К. Чуи. – Москва : Мир, 2001. – 416 с.

39. **Афендигов, А. Л.** Локализованные структуры в идеальной и вязкой моделях. Вейвлетный анализ / А. Л. Афендигов, А. Е. Луцкий, А. В. Плёткин // Препринт Института прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН. – 2009. – № 78. – 10 с.

40. **Афендигов, А. Л.** Вейвлетный анализ локализованных структур в идеальной и вязкой моделях / А. Л. Афендигов, А. Е. Луцкий, А. В. Плёткин // Математическое Моделирование. – 2011. – № 1. – С. 41–50.

41. **Афендигов, А. Л.** Применение вейвлет анализа для выделения структур в расчетах газодинамических течений и для адаптации сеток / А. Л. Афендигов, А. Е. Луцкий, А. В. Плёткин // Научная визуализация. – 2012. – № 3. – С. 8–25.

42. **Афендигов, А. Л.** Локализация особенностей газодинамических полей и адаптация

расчетной сетки к положению разрывов / А. Л. Афендигов, А. Е. Луцкий, А. В. Плёткин // Математическое Моделирование. – 2012. – № 12. – С. 49–54.

43. **Jones, W. P.** The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence / W. P. Jones, B. E. Launder // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1972. – V. 15. – № 2. – P. 301–312.

44. **Launder, B. E.** The Application of the Energy Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning Disc / B. E. Launder, B. I. Sharma // Letters in Heat and Mass Transfer. – 1974. – V. 1. – № 2. – P. 131–138.

45. **Делоне, Б. Н.** О пустоте сферы / Б. Н. Делоне // Изв. АН СССР. ОМЭН. – 1934. – № 4. – С. 793–800.

46. **Скворцов, А. В.** Триангуляция Делоне и её применение / А. В. Скворцов – Томск : Издательство Томского университета, 2002. – 128 с.

47. **Краснов, Н. Ф.** Аэродинамика. Часть 2: Методы аэродинамического расчета / Н. Ф. Краснов. – Издание 4-е. – Москва : Либроком, 2010. – 418 с.

48. **Петров, К. П.** Аэродинамика тел простейших форм / К. П. Петров. – Москва : Физматлит, 1998. – 428 с.