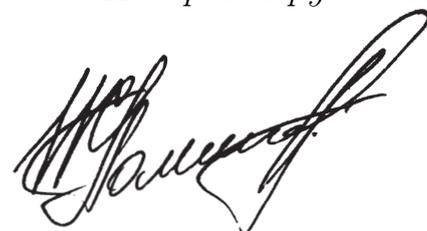


ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ОХРАНЫ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
АКАДЕМИЯ

На правах рукописи



ПОЛЯНСКИЙ ИВАН СЕРГЕЕВИЧ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ
АДАПТИВНЫХ МНОГОЛУЧЕВЫХ ЗЕРКАЛЬНЫХ АНТЕНН**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, доцент Мисюрин С. Ю.

Москва – 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ	5
ВВЕДЕНИЕ	7
Глава 1. РЕТРОСПЕКТИВНЫЙ АНАЛИЗ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ И ФОРМАЛИЗОВАННАЯ ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ АДАПТИВНОЙ МНОГОЛУЧЕВОЙ ЗЕРКАЛЬНОЙ АНТЕННОЙ	20
1.1. Предпосылки существования научной проблемы, характеристика объ- екта и предмета исследования	21
1.2. Критерии и показатели эффективности управления адаптивной мно- голучевой зеркальной антенной в условиях воздействия помех	34
1.3. Структура и содержание теории математического моделирования и синтеза адаптивных многолучевых зеркальных антенн, общий подход к разработке ее элементов	41
1.4. Физико-математическая модель управления адаптивной многолуче- вой зеркальной антенной во взаимосвязи решения внешней и внутренней задач электродинамики	47
1.5. Подавление помех адаптивной многолучевой зеркальной антенной . .	55
Выводы по первой главе	57
Глава 2. БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЙ МЕТОД В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЭЛЕК- ТРОДИНАМИКЕ	59
2.1. Бариецентрические координаты Пуассона–Римана	60
2.2. Бариецентрический метод для решения скалярного уравнения Гельм- гольца	78
2.3. Бариецентрический метод для решения векторного уравнения Гельм- гольца	88
2.4. Бариецентрический метод во временной области	98
Выводы по второй главе	101

Глава 3. МЕТОДЫ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЗАМКНУТЫХ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ В \mathbb{R}^2 И \mathbb{R}^3	102
3.1. Модифицированный метод последовательных конформных отображе- ний наперед заданных многоугольных областей	103
3.2. Кватернионы и разложение кватернион-функций	117
3.3. Простейшие конформные отображения областей с кусочно-линейной границей в \mathbb{R}^3	133
3.4. Прямая и обратная задачи конформного отображения многогранни- ков в \mathbb{R}^3	140
Выводы по третьей главе	144
Глава 4. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ЧИС- ЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СИНТЕЗА АДАПТИВНЫХ МНОГО- ЛУЧЕВЫХ ЗЕРКАЛЬНЫХ АНТЕНН	145
4.1. Модифицированный токовый метод расчета характеристик направ- ленности адаптивных многолучевых зеркальных антенн	146
4.2. Бариецентрический метод в решении сингулярных интегральных урав- нений электродинамической теории адаптивных многолучевых зеркаль- ных антенн	158
4.3. Бариецентрический метод в задаче управления формой отражающей поверхности адаптивной многолучевой зеркальной антенны	170
4.4. Обоснование достоверности получаемых результатов на основе разра- ботанных методов математического моделирования адаптивных многолу- чевых зеркальных антенн	177
Выводы по четвертой главе	183
Глава 5. ОБОСНОВАНИЕ И ТЕСТИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ СФОРМИРОВАННЫХ РЕШЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЭВМ ПРИ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ В ВИДЕ ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА	185

5.1. Гибридный генетический метод с градиентным обучением и прогнозированием для решения задач глобальной оптимизации многоэкстремальных функций	186
5.2. Алгоритм структурно-параметрического синтеза адаптивной многолучевой зеркальной антенны	196
5.3. Алгоритм адаптации многолучевой зеркальной антенны	204
5.4. Реализация разработанных методов и алгоритмов численного решения задач анализа, синтеза и управления в виде проблемно-ориентированного программного комплекса	211
5.5. Оценка эффективности разработанных алгоритмов и порядок настройки входных параметров	220
Выводы по пятой главе	224
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	226
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	230
Приложение А	250
Приложение Б	254
Приложение В	256

СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

ААР	– адаптивная антенная решетка
АМЛЗА	– адаптивная многолучевая зеркальная антенна
АПВ	– апостериорная плотность вероятности
АР	– антенная решетка
АС	– антенная система
АФР	– амплитудно-фазовое распределение
АЧХ	– амплитудно-частотная характеристика
БК	– барицентрические координаты
БМ	– барицентрический метод
ВБМ	– векторный барицентрический метод
ВМКЭ	– векторный метод конечных элементов
ГГА	– гибридный генетический алгоритм
ДН	– диаграмма направленности
ЗА	– зеркальная антенна
ЗС	– зеркальная система
ИУМП	– интегральное уравнение магнитного поля
ИУЭП	– интегральное уравнение электрического поля
КУ	– коэффициент усиления
КИП	– коэффициент использования поверхности
КНД	– коэффициент направленного действия
КПД	– коэффициент полезного действия
МКЭ	– метод конечных элементов
МЛЗА	– многолучевая зеркальная антенна
ММВС	– минимум мощности выходного сигнала
МОП	– максимум отношения правдоподобия
МСКО	– минимум среднеквадратического отклонения
МСПП	– максимум сигнала при полном подавлении помех
МСШП	– максимум отношения мощности полезного сигнала к мощности совокупности шума и помехи

- ПВОС – пространственно-временная обработка сигналов
- ОДУ – обыкновенное дифференциальное уравнение
- ОСШП – отношение сигнал/(шум плюс помеха)
- СДУ – система дифференциальных уравнений
- СИУ – сингулярное интегральное уравнение
- ФПК – Фоккера–Планка–Колмогорова (уравнение)
- ЭВМ – электронно-вычислительная машина
- ЭДС – электродвижущая сила
- ЭМВ – электромагнитная волна
- ЭМП – электромагнитное поле

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. В современных условиях бурного развития средств радиосвязи особую актуальность представляет проблема защиты каналов приема радиосигналов от преднамеренных и непреднамеренных помех. Один из основных путей ее разрешения связан с применением адаптивных антенн, которые за счет пространственно-временной обработки сигналов при максимизации мощности в основном канале приема позволяют формировать глубокие провалы характеристики направленности в направлении на источники помех. Процесс работы адаптивных антенн осуществляется в условиях априорной неопределенности о большинстве параметров сигнально-помеховой обстановки и формализуется алгоритмом обработки сигналов, который управляет антенной системой с учетом ее конструктивно-технологических особенностей [1].

Значительный вклад в изучение этого вопроса внесли: Антонов О. Е., Валеев В. Г., Ван Трис Г., Воскресенский Д. И., Кассама С., Кайлатцев Т., Кловский Д. Д., Комарович В. Ф., Литвинов О. С., Лукошкин А. П., Мелс Дж., Миллер Т. У., Монзинго Р. А., Пистолькорс А. А., Попов М. П., Сейдж Э., Сосулин Ю. Г., Стирнз С., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И., Уидроу Б., Фалькович С. Е., Хадсон Дж., Ширман Я. Д., Щесняк С. С., Ярлыков М. С. и др. Исследования этих ученых направлены на развитие корреляционной теории пространственно-временной обработки сигналов, ориентированной на решение проблемы синтеза адаптивных антенных решеток, инвариантных к сигнально-помеховой обстановке. Вместе с тем конструктивно-технологические и энергетические ограничения антенных решеток затрудняют практическое воплощение инвариантной к помеховым сигналам адаптивной антенной решетки.

Указанный недостаток с учетом достижений адаптивной оптики [2] формирует предпосылки к необходимости разработки адаптивных многолучевых зеркальных антенн (АМЛЗА), при том что зависимость свойств АМЛЗА от особенностей конструкции, взаимного размещения облучающих элементов и формы деформируемого рефлектора приводит к выявлению дополнительных возможностей антенны при реализации пространственно-временной обработки

сигналов. Такая постановка для адаптивных многолучевых зеркальных антенн предполагает решение проблемы синтеза оптимального нелинейного наблюдателя стохастического процесса, понимаемого в смысле Ито. Эффективное решение указанной проблемы связано с разработкой и развитием математической теории адаптивных многолучевых зеркальных антенн в частности и теории математического моделирования и синтеза зеркальных антенн в целом.

Современная математическая теория зеркальных антенн, синтезируя методы вычислительной математики и электродинамики, получила развитие в работах Андреева В. Б., Архипова Н. С., Бахраха Л. Д., Вааза И. Л., Вуда П., Галимова Г. К., Гряника М. В., Еремина Ю. А., Зелкина Е. Г., Ильинского А. С., Классена В. И., Кинбера Б. Е., Клэррикоутса П. Дж. Б., Коростышевского Е. Н., Неганова В. А., Покраса А. М., Пистолькорса А. А., Самарского А. А., Свешникова А. Г., Сестрорецкого Б. В., Сильвестера П., Сомова А. М., Уфимцева П. Я., Фельда Я. Н., Фрадина А. З., Ямпольского В. Г. и др. В исследованиях этих ученых для математического моделирования и синтеза зеркальных антенн напрямую или опосредованно предлагается ряд аналитических и численных методов. В то же время применение численных методов (к примеру, наиболее полно реализованных в САПР Ansoft HFSS) требует значительных затрат вычислительных ресурсов, что затрудняет решение задачи синтеза за обозримый отрезок машинного времени. Аналитические методы расчета не обеспечивают требуемого уровня адекватности (особенно в области ближней зоны [3]). В частности, они не способны в требуемой мере учесть эффекты дифракции и переотражения. Указанные недостатки не позволяют выполнить эффективного решения задачи управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной.

С учетом изложенного перспективными и актуальными являются следующие направления исследования в формируемой математической теории адаптивных многолучевых зеркальных антенн: 1) разработка физико-математической модели управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной; 2) разработка новых численных методов для снижения вычислительных затрат при

достижении приемлемого уровня адекватности; 3) модификация существующих аналитических методов для увеличения точности оценки показателей эффективности адаптивной антенны зеркального типа при учете эффектов дифракции и переотражения. Результаты исследования позволят разрабатывать адекватные математические модели для анализа, синтеза и управления адаптивными многолучевыми зеркальными антеннами при совместном решении внешней и внутренней электродинамических задач теории антенн и формировать на их основе эффективные алгоритмы управления и программные средства.

Объект исследования. Антенные системы зеркального типа, функционирующие в составе средств многоканальной радиосвязи в условиях преднамеренных и непреднамеренных помех.

Предмет исследования. Закономерности, принципы, методы, методики, алгоритмы анализа и синтеза антенных систем зеркального типа с динамическим изменением параметров.

Цель исследования заключается в разработке методов математического моделирования, анализа, эффективного решения задач синтеза и управления адаптивными многолучевыми зеркальными антеннами во взаимосвязи внешней и внутренней задач электродинамики с учетом эффектов дифракции и переотражения.

Научная проблема. Разработать математическую теорию адаптивных многолучевых зеркальных антенн, представленную совокупностью аналитических и численных методов математического моделирования, анализа, синтеза и управления и сформировать на основе разработанных решений проблемно-ориентированный программный комплекс.

Для достижения поставленной цели в диссертации решены следующие **научные задачи:**

1. Разработана физико-математическая модель управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной во взаимосвязи решений внешней и внутренней задач электродинамики при определении максимально возможного числа подавляемых помех.

2. Разработан барицентрический метод для численного решения скалярных и векторных волновых уравнений в ограниченной расчетной области анализа, заданной в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 .
3. Разработаны методы определения барицентрических координат для односвязной области с кусочно-линейной границей, заданной в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 .
4. Модифицирован метод последовательных конформных отображений наперед заданных многоугольных областей для эффективного решения обратной задачи конформного отображения многоугольника на каноническую область.
5. Разработаны методы прямого и обратного конформного отображения многогранников на каноническую область в \mathbb{R}^3 с применением для описания изометрий дополненной теории кватернионного анализа в части разложения кватернион-функций в обобщенные степенные ряды.
6. Для решения задач электродинамики в неограниченной расчетной области анализа с учетом эффектов дифракции и переотражения модифицирован токовый метод расчета характеристик направленности зеркальных антенн с использованием приближений Кирхгофа–Котлера и методов физической оптики, а также определена реализация барицентрического метода в решении сингулярных интегральных уравнений электродинамической теории зеркальных антенн.
7. Определена реализация барицентрического метода в решении задачи управления формой отражающей поверхности адаптивной многолучевой зеркальной антенны.
8. Модифицирован гибридный генетический метод с градиентным обучением и прогнозированием для решения задач глобальной оптимизации многоэкстремальных функций.
9. Разработаны алгоритмы численного решения задач структурно-параметрического синтеза и управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной.
10. Полученные результаты реализованы в виде проблемно-ориентированного программного комплекса для решения задач моделирования, анализа, син-

теза и управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной при последующем обосновании и тестировании эффективности предложенных решений с применением ЭВМ.

Диссертационная работа включает введение, пять глав, заключение, список литературы и приложения.

В первой главе проведен анализ ретроспективы объекта и предмета исследования, определяющий предпосылки существования научной проблемы при структуризации проблем теории и практики. Выделены типовые критерии и показатели эффективности управления адаптивными антеннами зеркального типа. На основе результатов ретроспективного анализа сформулирована концепция диссертационного исследования, общая проблема и определены основные частные задачи. Рассмотрены основные методы анализа и синтеза зеркальных антенн. Задана физико-математическая модель управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной во взаимосвязи решения внешней и внутренней задач электродинамики теории антенн. Выполнена оценка предельного числа подавления помех адаптивной многолучевой зеркальной антенной.

Вторая глава посвящена разработке численного метода решения задач вычислительной электродинамики (уравнений Максвелла или соответствующих им волновых уравнений) в произвольной односвязной области Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^2 \vee \Omega \subset \mathbb{R}^3$) с кусочно-линейной границей – барицентрического метода. Определены методы задания гармонических барицентрических координат для Ω . Заданные методы базируются на решении задач прямого и обратного конформных отображений Ω на каноническую область. Изложена суть барицентрического метода, применяемого для решения как скалярных, так и векторных однородных и неоднородных уравнений Гельмгольца для односвязных областей с кусочно-линейной границей, заданных в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 . Также определена реализация барицентрического метода при решении волновых уравнений во временной области при управлении электромагнитным полем.

В третьей главе на основе теории функции комплексного переменного разработан модифицированный метод последовательных конформных отобра-

жений, позволяющий выполнить строгое решение задачи обратного конформного отображения многоугольника на единичный круг. Сформированы методы прямого и обратного конформных отображений многогранника на каноническую область, заданных в \mathbb{R}^3 . Для алгебраического описания изометрий в \mathbb{R}^3 использована алгебра кватернионов. С целью строгого решения прямой и обратной задач конформного отображения $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ определены следующие простейшие конформные отображения в \mathbb{R}^3 : шара на верхнее полупространство, верхнего полупространства с выброшенным сегментом шара на двухгранный угол, двухгранного угла на верхнее полупространство, многогранного угла на верхнее полупространство. Формирование простейших конформных отображений в \mathbb{R}^3 основано на разработанных в третьей главе методах разложения кватернион-функций в обобщенные степенные ряды.

В четвертой главе выполнена модификация токового метода, позволяющего учесть эффекты дифракции и переотражения для различных поляризационных составляющих электромагнитного поля при решении задач анализа антенных систем зеркального типа. В приближении барицентрического метода разработано вариационное решение сингулярных интегральных уравнений электрического и магнитного полей в теории зеркальных антенн. С применением барицентрического метода и принципа максимума Понтрягина сформулирована задача управления формой рефлектора при определении способа параметризации деформируемой отражающей поверхности адаптивной многолучевой зеркальной антенны. Проведено обоснование достоверности получаемых результатов на основе разработанных аналитических и численных методов математического моделирования адаптивных многолучевых зеркальных антенн, сформированы рекомендации по предпочтительности выбора конкретного метода в зависимости от числа и вида элементов в конструкции анализируемой антенны зеркального типа.

В пятой главе с целью наиболее эффективного синтеза и управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной выполнена модификация гибридного генетического метода для решения задач глобальной оптимизации

многоэкстремальных функций, в общем случае содержащей точки разрыва первого и второго рода. Разработаны алгоритмы структурно-параметрического синтеза и управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной. Проведена оценка их эффективности. На основе полученных в рамках диссертации результатов разработан проблемно-ориентированный программный комплекс автоматизированного решения класса задач по моделированию, анализу, синтезу и управлению адаптивными многолучевыми зеркальными антеннами.

В заключении подведены итоги исследования на предмет достижения цели, поставленной в рамках решенной научной проблемы.

Научная новизна результатов работы состоит в следующем:

1. Разработана физико-математическая модель управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной при взаимоувязанном решении внешней и внутренней задач электродинамики теории антенн и сведения стохастического дифференциального уравнения состояния в смысле Ито к краевой задаче в раскрывах излучателей по распределению нормированного значения плотности потока энергии.

2. Разработаны методы определения барицентрических координат для односвязной области Ω с кусочно-линейной границей, которые, в отличие от известных, позволяют формировать строгие решения при нахождении гармонических барицентрических координат для Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^2 \vee \Omega \subset \mathbb{R}^3$).

3. Разработан барицентрический метод анализа электромагнитного поля в частотной и временной областях для односвязной области Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^2 \vee \Omega \subset \mathbb{R}^3$) с кусочно-линейной границей, позволяющий при соизмеримых вычислительных затратах повысить точность численного решения уравнений Максвелла или соответствующих им волновых уравнений в 2,6 раза в сравнении с известными методами и сформировать аппроксимирующие полиномы для решения задач синтеза и управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной.

4. Разработаны метод решения обратной задачи конформного отображения многоугольника на единичный круг и методы решения прямой и обратной задач конформного отображения многогранника на каноническую область с

определением простейших конформных отображений шара, верхнего полупространства, двухгранного и многогранного углов в \mathbb{R}^3 , и обобщением интегральной формулы Кристоффеля–Шварца с использованием алгебры кватернионов.

5. Для формирования прямых и обратных конформных отображений многогранников и простейших конформных отображений в \mathbb{R}^3 определены решения по разложению регулярных кватернион-функций в обобщенные степенные ряды.

6. Предложена модификация токового метода расчета характеристик направленности адаптивных многолучевых зеркальных антенн, которая дает возможность для различных составляющих электромагнитного поля учесть эффекты дифракции и переотражения в приближениях Кирхгофа–Котлера и методов физической оптики, что позволило снизить среднюю относительную ошибку оценки дальнего бокового излучения в 2,38 раза в сравнении с известными аналитическими методами.

7. Сформированы решения сингулярных интегральных уравнений электродинамической теории зеркальных антенн и задачи управления формой отражающей поверхности адаптивной многолучевой зеркальной антенны в приближении барицентрического метода, которые позволяют повысить точность вариационного решения краевой задачи в среднем в 3,32 раза в сравнении с известными при соизмеримых вычислительных затратах.

8. С целью наиболее эффективного численного решения задач глобальной оптимизации многомерных многоэкстремальных функций на основе объединения эволюционных методов, работающих в вещественных кодах, с современными методами локального поиска и статистического анализа разработан модифицированный гибридный генетический метод, который в сравнении с известными решениями позволяет сократить вычислительные затраты при решении задачи глобальной оптимизации в среднем в 1,3 раза.

Теоретическая значимость проведенного исследования заключается:

1) в разработке и развитии математической теории адаптивных многолучевых зеркальных антенн в частности и теории математического моделиро-

вания, анализа и синтеза зеркальных антенн, их излучающих и отражающих элементов в целом при совершенствовании вариационных методов решения краевых задач математической физики – барицентрического метода.

2) разработке эффективных методов прямого и обратного конформных отображений односвязных областей с кусочно-линейной границей в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 на основе теории функции комплексного переменного и дополненной теории кватернионного анализа в части разложения кватернион-функций в обобщенные степенные ряды.

Практическая значимость. Разработано алгоритмическое и специальное программное обеспечение в виде проблемно-ориентированного программного комплекса для интеллектуальной поддержки при проектировании и управлении адаптивными многолучевыми зеркальными антеннами. Практическую значимость определяют также конструктивные предложения по реализации полученных в исследовании теоретических результатов с учетом выполненных экспериментальных исследований с применением разработанного проблемно-ориентированного программного комплекса. Разработанный барицентрический метод использован в расчетах рационального места установки дополнительного облучателя при расширении оперативно-технических возможностей станции космической связи «Ребус-Ц» в в/ч 61608.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе для решения обозначенных частных задач использованы теория системного анализа и принятия решений, теория оптимального управления, стохастические дифференциальные уравнения, классическая электродинамика и методы вычислительной электродинамики, вариационные методы решения краевых задач математической физики, теория антенн, теория функции комплексного переменного, теория кватернионного анализа, теория рядов, теория ортогональных многочленов, методы конечных элементов, численные методы поиска экстремумов, теория алгоритмов, методы цифровой обработки сигналов и корреляционного анализа, методология экспериментальных исследований с применением вычислительной техники и коммерческих пакетов прикладных программ.

Положения, выносимые на защиту:

1. Физико-математическая модель управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной во взаимосвязи решений внешней и внутренней задач электродинамики.

2. Бариецентрический метод в численном решении уравнений Максвелла или соответствующих им волновых уравнений в ограниченной расчетной области анализа без ее разбиения на конечные элементы.

3. Методы конформных отображений замкнутых односвязных областей с кусочно-линейной границей в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 , позволяющие формировать строгие решения задач прямого и обратного конформных отображений области с кусочно-линейной границей на каноническую.

4. Методы решения задач вычислительной электродинамики в неограниченной расчетной области анализа в приложении к электродинамической теории зеркальных антенн, а также задачи управления формой отражающей поверхности адаптивной многолучевой зеркальной антенны.

5. Проблемно-ориентированный программный комплекс, разработанный для проведения вычислительных экспериментов с учетом современных технологий параллельных вычислений и реализующий комбинированное использование сформированных методов и алгоритмов решения задач моделирования, анализа, синтеза и управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной с применением модификации гибридного генетического метода с градиентным обучением и прогнозированием для решения задач глобальной оптимизации многоэкстремальных функций.

Соответствие работы паспорту специальности. Диссертационное исследование направлено на разработку методов математического моделирования, численных методов и комплекса программ взаимосвязанных в формируемой математической теории адаптивных многолучевых зеркальных антенн и вносит вклад в следующие области исследований, перечисленные в паспорте специальности 05.13.18:

1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений (1-е положение, выносимое на защиту).

2. Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей (3-е положение, выносимое на защиту).

3. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий (2-, 4-е положения, выносимые на защиту).

4. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента (5-е положение, выносимое на защиту).

Апробация и реализация результатов работы. Полученные в рамках диссертационного исследования результаты использованы при разработке проблемно-ориентированного программного комплекса по анализу интегральных характеристик направленности зеркальных параболических антенн в ФГУП НИИР (г. Москва). Экспериментальная проверка достоверности полученных результатов осуществлялась путем математического и имитационного моделирования в Академии ФСО России (г. Орёл), ФГУП «НИИ «Радио»» (г. Москва). Результаты апробированы и внедрены в в/ч 61608 (г. Москва).

Полученные результаты диссертационного исследования докладывались на III Международной интернет-конференции молодых ученых, аспирантов и студентов «Инновационные технологии: теория, инструменты, практика» (Inno-Tech 2011); VI Ежегодной международной научно-практической конференции «Перспективы развития информационных технологий» (ПТ-6), Центр развития научного сотрудничества, г. Новосибирск., 2012 г.; VII Международной научно-практической конференции «Актуальные вопросы науки», г. Москва, 25 октября 2012 г.; VI Всероссийской научно-практической конференции «Территориально распределенные системы охраны», ФГКОУ ВПО «Калининградский пограничный институт ФСБ России», г. Калининград, 2–4 апреля 2013 г.; XVIII Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Научная сессия ТУСУР – 2013», г. Томск, 15–17 мая 2013 г.;

XIV Международной научно-практической конференции «Научное образование физико-математических и технических наук в XXI веке», Москва, 2015 г.; Научном семинаре «Проблемы современной математики» в НИЯУ МИФИ, г. Москва, 11 февраля 2016 г.; X Всероссийской межведомственной научной конференции «Актуальные направления развития систем охраны, специальной связи и информации для нужд органов государственной власти Российской Федерации» в Академии ФСО России, г. Орёл 2017 г.; Московском электродинамическом семинаре в ИРЭ РАН им. В. А. Котельникова 5 декабря 2017 г., г. Москва.

Личный вклад. Все основные результаты, выводы, положения, выносимые на защиту, информационное обеспечение, на которых основана диссертация, получены лично автором либо под его руководством. В совместных работах автору принадлежит ведущая роль в разработке общей концепции работы, ее структуры, методов и алгоритмов математического моделирования, анализа, синтеза и управления адаптивными многолучевыми зеркальными антеннами. Под научным руководством автора защищена одна диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук Бесединым И. И. по специальности 05.13.18. Автор также является руководителем при подготовке диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук Степановым Д. Е. по специальности 05.13.18. Все патенты (№№ 2461929, 2547627, 2576493) выполнены в соавторстве, при этом основные идеи патентуемых технических решений принадлежали автору диссертации. Разработаны алгоритмы программ и получены свидетельства о государственной регистрации компьютерных программ в Роспатенте, зарегистрированные под №№ 2011610149, 2011610619, 2011610620, 2011610621, 2011610623, 2011615638, 2011615639, 2011616903, 2013615091, 2013616337, 2013611206, 2014619647, 2014617058, 2015619651.

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием строгих математических процедур, общеизвестных уравнений, методов и подходов, которые обоснованы в общепринятой научной литературе, апробированы и хорошо себя зарекомендовали при проведении научных исследований.

Достоверность результатов подтверждается их верификацией при разнообразном тестировании, включающем сравнение с точными решениями (при их наличии) и с выходными результатами современных и широко используемых в практике производств оборонно-промышленного комплекса систем автоматизированного проектирования, а также сравнением с известными теоретическими результатами. Достоверность полученных результатов обеспечивается адекватностью разработанных методов математического моделирования, корректностью исходных и упрощающих допущений.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 64 работы. Из них 33 статьи в рецензируемых журналах из перечня ВАК при Минобрнауки России, в том числе в журналах, входящих в системы цитирования Scopus и Web of Science (7 статей). По результатам исследования изданы 3 монографии (в соавторстве и единолично), 1 учебное пособие (в соавторстве), получено 3 патента на изобретение и 14 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Глава 1. РЕТРОСПЕКТИВНЫЙ АНАЛИЗ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ И ФОРМАЛИЗОВАННАЯ ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ АДАПТИВНОЙ МНОГОЛУЧЕВОЙ ЗЕРКАЛЬНОЙ АНТЕННОЙ

Закон необходимого разнообразия [4] дает возможность утверждать, что одним из необходимых условий эффективной работы любой кибернетической системы при влиянии внешних дестабилизирующих воздействий является обеспечение наибольшего разнообразия управлений при условии минимизации потерь от их неоднозначности. В этой связи с позиции максимизации разнообразия управления и с учетом существующих технических решений, применяемых в адаптивной оптике [2, 5, 6], перспективой к использованию в современных комплексах многоканальной радиосвязи обладают адаптивные многолучевые зеркальные антенны. Зависимость свойств АМЛЗА от особенностей конструкции, взаимного размещения облучающих элементов [7] и формы деформируемого рефлектора [8] приводит не только к выявлению дополнительных возможностей антенны при реализации пространственно-временной обработки сигналов (ПВОС) [9], но и к необходимости решения вопросов эффективного нелинейного оценивания параметров антенной системы (АС) в изменяющихся условиях сигнально-помеховой обстановки в отличающейся от свободного пространства интерференционной картине электромагнитного поля (ЭМП) [10] с точки зрения минимизации потерь от неоднозначности управления.

Необходимым условием разрешения указанных вопросов относительно АМЛЗА является анализ ретроспективы объекта и предмета исследования, определяющий тенденции и перспективы развития, предпосылки существования научной проблемы при структуризации проблем теории и практики, критерии и показатели эффективности управления адаптивными антеннами зеркального типа. С учетом проведенного анализа ретроспективы формулируется концепция настоящего исследования, формализованная постановка проблемы управления и оценивается способность АМЛЗА к подавлению помех. Вопросы, рассмотренные в настоящей главе, нашли отражение в [8, 10, 18, 20, 48, 49, 53–56, 60, 72, 74–76, 106].

1.1. Предпосылки существования научной проблемы, характеристика объекта и предмета исследования

Теория оптимального приема средствами многоканальной радиосвязи на фоне помех, изначально основанная на корреляционной теории помехоустойчивого приема (К. Шеннон, Ф. М. Вудворд, А. А. Харкевич), получила широкое развитие в работах таких отечественных и зарубежных ученых, как О. Е. Антонов, В. Г. Валеев, Г. Ван Трис, С. Кассама, Д. Д. Кловский, А. П. Лукошкин, Дж. Мелс, Э. Сейдж, В. И. Тихонов, Б. Уидроу, С. Е. Фалькович, Я. Д. Ширман, М. С. Ярлыков и др., и связана с достижениями антенной техники – появление антенных решеток (АР). Относительно простые электродинамические подходы, основанные на теории Флоке [11], привели к развитию методов, способов и алгоритмов ПВОС АР. Эти результаты положены в основу корреляционной теории ПВОС, развитой Т. Кайлатцевым, В.Ф. Комаровичем, М.П. Поповым, Ю.Г. Сосулиным, С.С. Щесняком и [12] др. в направлении формирования оценочно-корреляционного и оценочно-корреляционно-компенсационного подходов, по сути сориентированных на решение проблемы синтеза адаптивных АР (ААР) инвариантных к сигнально-помеховой обстановке [13–15]. Вместе с тем конструктивно-технологические для M степеней свободы [2, 16, 17] (M – число элементов ААР) и энергетические ограничения АР в практике инженерных решений затрудняют реализацию инвариантной к помеховым сигналам ААР.

Относительная принципиальная простота антенного устройства, возможность получения высокой направленности и энергетики при сохранении этих свойств в широком диапазоне частот при малых потерях, возможность гибкого управления характеристикой излучения при проектировании в альтернативу АР ставит зеркальные антенны (ЗА). Для применения в составе комплексов многоканальной радиосвязи за последние сорок лет ЗА прошли путь от простых взаимных устройств до сложных многофункциональных антенн зеркального типа [18, 45] (рис. 1.1).

Классификация ЗА по данной схеме выполнена с целью рассмотрения общей задачи проектирования АС зеркального типа, определения области, места и

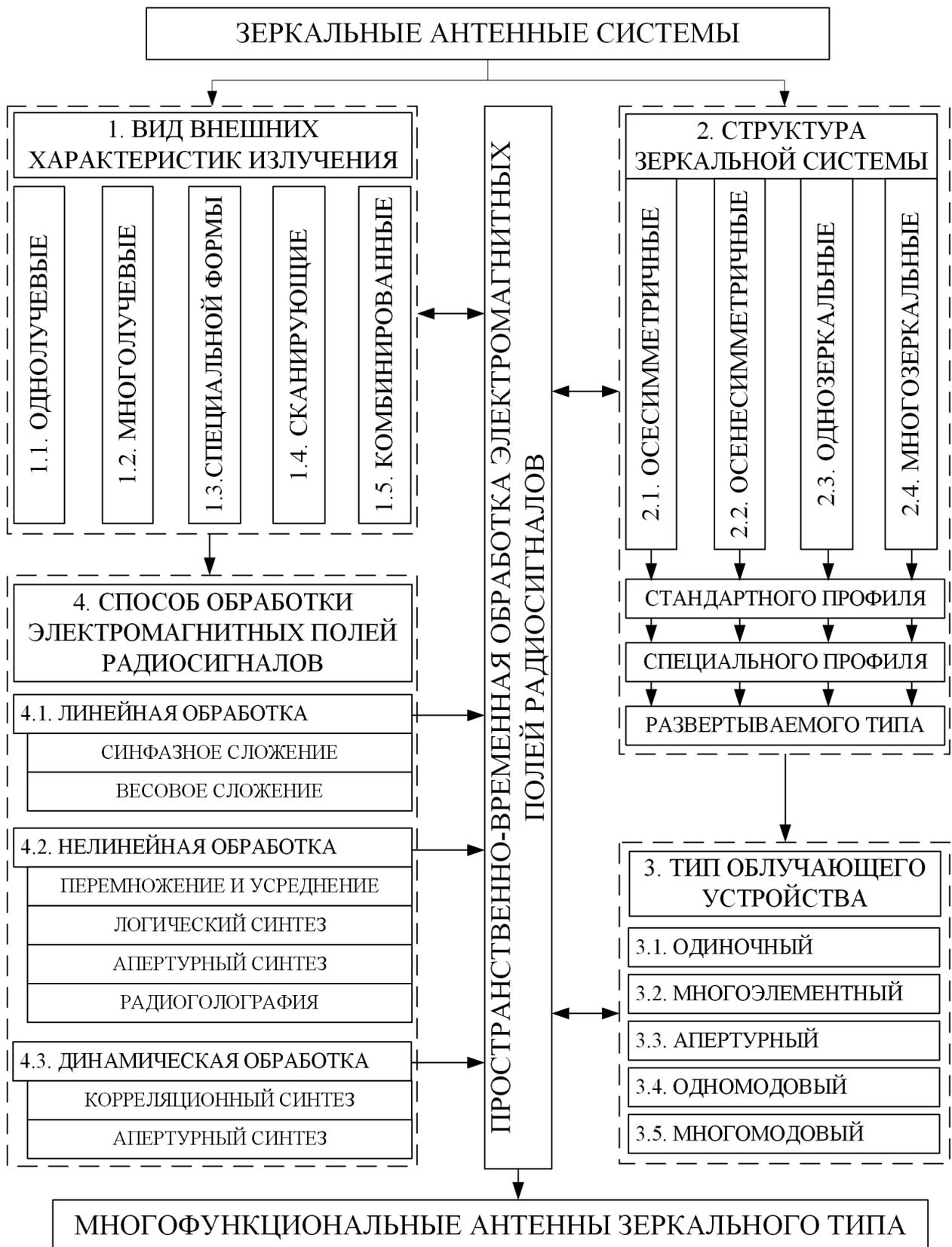


Рис. 1.1. Классификация зеркальных антенных систем

роли разрабатываемых элементов теории синтеза среди общих методов анализа и синтеза АС. При этом, по существующим взглядам [19], проблема синтеза антенных систем, включая и многофункциональные АС зеркального типа [20], делится на две части – теоретическую и конструктивно-технологическую.

Теоретическую часть принято разделять на внутреннюю и внешнюю задачи электродинамики, принимающие общетеоретический характер в практике построения АС. Принципиальная возможность независимого подхода к синтезу антенн с точки зрения решения внешней и внутренней задач электродинамики объективно привела к формированию двух основных направлений в теории синтеза АС, наиболее ярко проявившихся в теории АР:

- 1) формированию токов или полей по законам, обеспечивающим требуемые характеристики направленности излучения в дальней зоне антенны;
- 2) электродинамической оптимизации устройств возбуждения и распределения энергии сигналов как элементов структуры антенной системы.

В практике ЗА данные направления выразились в поиске [20]:

- 1) конструкций зеркальных систем и методов анализа их характеристик [21, 22] с целью оптимизации параметров АС по заданным требованиям;
- 2) облучающих устройств и методов их разработки [21–23] как элементов АС, обеспечивающих требуемую энергетическую эффективность.

Развитие радиотехнических систем наблюдения за движущимися объектами и техники многоканальной радиосвязи, особенно спутниковых систем связи, потребовало совершенствования и АС зеркального типа [23]. Разнообразие исходных характеристик синтеза, требований к помехозащищенности, направленности, диапазонным свойствам, поляризации поля излучения, временным характеристикам управления параметрами объективно привело к появлению многофункциональных антенных систем зеркального типа [45] на базе гибридных зеркальных антенн (ГЗА). Объединение зеркальной системы (в общем случае многозеркальной) с облучающей АР излучающих элементов в ГЗА потенциально позволяет расширить число степеней свободы, создать новые возможности в формировании многолучевых и сканирующих диаграмм направленно-

сти (ДН) при реализации пространственно-временной обработки электромагнитных полей радиосигналов. Однако новые дополнительные положительные свойства ГЗА привели к появлению следующих основных проблем [18, 20]:

1) определение оптимального положения фазового центра излучателя в фокальной области, при котором обеспечиваются наибольшая симметрия луча, высокий коэффициент усиления (КУ) антенны и низкий уровень боковых лепестков ДН;

2) определение размера, оптимальной формы и выбор числа элементов, формирующих один или несколько лучей многолучевой ДН;

3) выбор оптимальной геометрии и взаимного размещения отражающих поверхностей и облучающей решетки – оптимизация компоновки, необходимая для расширения пределов сканирования и уменьшения размеров излучателя, а также упрощения его фидерного тракта;

4) расчет профилей отражающих поверхностей – синтез зеркальной системы по заданным параметрам распределения мощности излучения в пространственной зоне;

5) синтез амплитудно-фазового распределения (АФР) многоэлементного облучателя – определение амплитуд и фаз токов, возбуждающих излучатели кластеров облучающей АР (ОАР), исходя из требуемого коэффициента направленного действия (КНД) антенны в направлении излучения;

6) реализация максимально возможной эффективности антенны в секторе сканирования путем минимизации фазовых искажений в раскрытии главного зеркала и учета реального фазового фронта поля, создаваемого ОАР;

7) расчет электрических характеристик ЗА, усложнение которых вызвано необходимостью учитывать особенности геометрии АС и сложностью определения поля многоэлементного облучателя в условиях многосвязности элементов антенной системы.

Большинство публикаций [7, 21, 48–56, 74–78], рассматривающих пространственную и поляризационную фильтрацию сигналов многолучевыми ЗА (МЛЗА), построенными на базе ГЗА, во взаимосвязи с корреляционной тео-

рией пространственно-временной обработки сигналов косвенно определяют появление нового направления антенной техники, связанного с синтезом адаптивных зеркальных АС – АМЛЗА. Их основной задачей является обеспечение принципов самонастраиваемых (самоорганизующихся) систем. Реализация свойственных самоорганизующимся системам процедур, а именно адаптация к быстро изменяемым в широком диапазоне внешним дестабилизирующим факторам для заданного критерия качества, предполагает динамическое целенаправленное управление процессом изменения структуры (формы отражающих поверхностей, размещения, ориентации облучающих элементов ОР и др.) и параметров (амплитудно-фазового распределения токов возбуждения элементов ОР) АС зеркального типа. В целом, предпосылками к необходимости применения АМЛЗА являются: 1) появление новых задач статистического анализа и синтеза АС в условиях априорной неопределенности; 2) появление технологий решения задач анализа и синтеза характеристик излучения АС в масштабе времени близкому к реальному; 3) развитие элементной базы и конструктивно-технологических решений по разработке: отражающих элементов антенных систем зеркального типа с произвольным специальным профилем; деформирующих систем, управляющих формой адаптивной отражающей поверхности. Разработка методов, способов и алгоритмов оптимального управления АМЛЗА предполагает исследование существующих методов анализа и синтеза ЗА из общей теории антенн.

Существующие методы решения рассмотренных проблем лежат в различных областях знаний, накопленных в процессе развития науки, техники и технологии конструкторских разработок. Построение взаимоувязанной теории, характеризующейся зависимостью одних элементов от других и выводимостью содержания теоретических конструкций по определенным методологическим правилам, возможно на основе исходного базиса подтвержденных практикой утверждений, понятий и аксиом электродинамики, теории антенн, теории обработки сигналов, обнаружения, оценок, управления и адаптивного поиска. Взаи-

связь теорий и методов анализа и синтеза АС зеркального типа, образующих исходный базис, показана на рисунке 1.2.

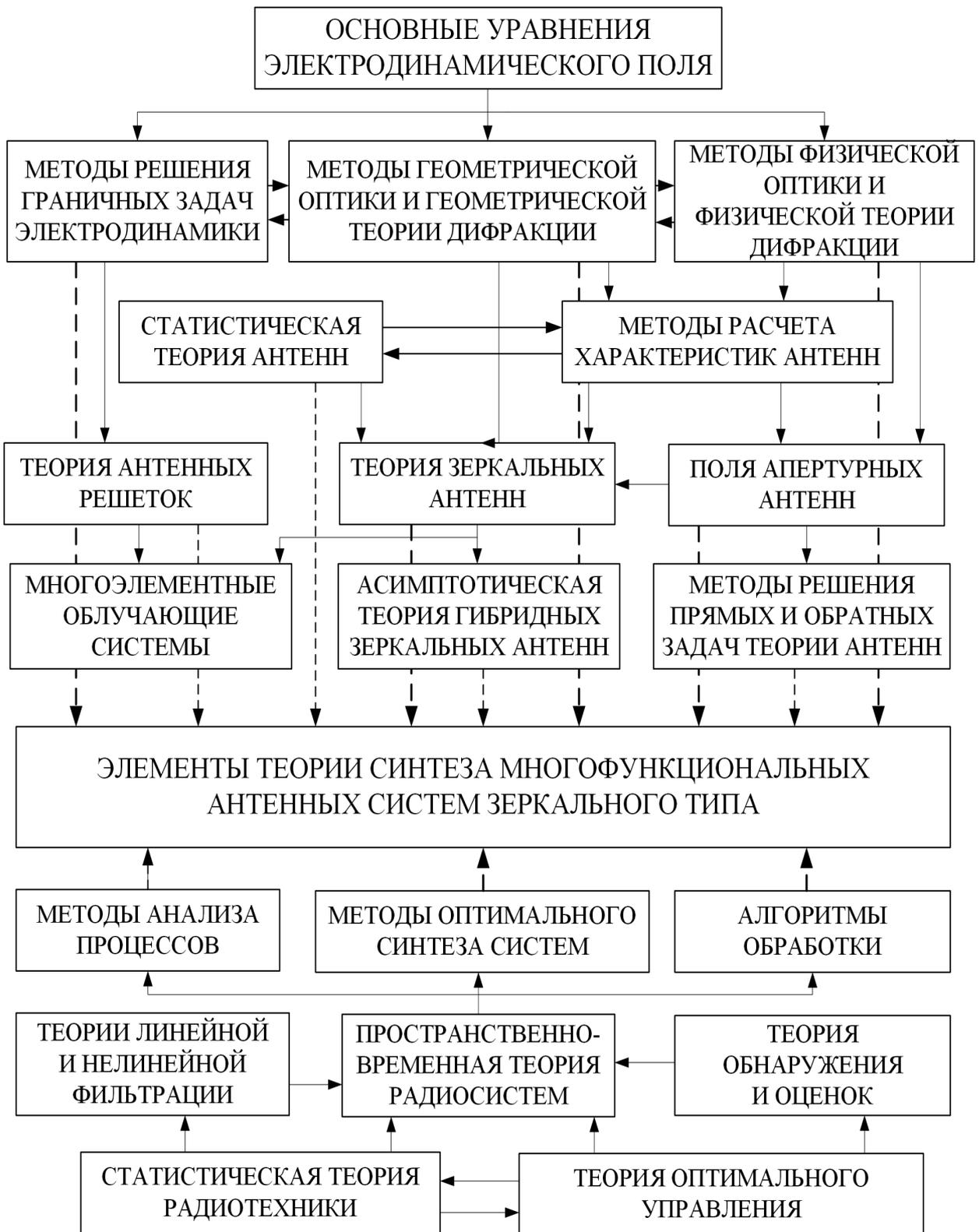


Рис. 1.2. Ретроспектива методов анализа и синтеза зеркальных антенн

К настоящему времени известен довольно широкий спектр направлений, приемов и вариантов методов анализа ЗА, которые сведены к нескольким основным методам вычислительной электродинамики (Андреев В. Б., Архипов Н. С., Бахрах Л. Д., Вааз И. Л., Воскресенский Д. И., Вуд П., Галимов Г. К., Граглия Р. Д., Гряник М. В., Еремин Ю. А., Зелкин Е. Г., Ильинский А. С., Классен В. И., Кинбер Б. Е., Клэррикоутс П. Дж. Б., Коростышевский Е. Н., Ломан В. И., Неганов В. А., Пистолькорс А. А., Петерсон А. Ф., Самарский А. А., Свешников А. Г., Сестрорецкий Б. В., Сильвестер П., Сомов А. М., Уфимцев П. Я., Фельд Я. Н., Фрадин А. З., Ямпольский В. Г. и др.). Они связаны с определением распределения токов в излучающих системах при заданном возбуждении, определением излучаемых полей и их характеристик, нахождением входных импедансов излучающих систем, рассеяния электромагнитных волн, решения обратных задач синтеза поля в апертуре антенны или синтеза фазового фронта и пр. [24, 25] с учетом известных доказательств условий существования и единственности решений задач дифракции [34, 80, 179]. Эти методы можно условно разделить относительно вида решаемой ими внешней или внутренней задачи электродинамики. Первая группа (задачи электродинамики I типа) связана с отысканием решения уравнений Максвелла или соответствующих им волновых уравнений в ограниченной расчетной области с заданными граничными условиями. В нее входят методы прямого решения краевых и начально-краевых задач [31]. К основным из них относятся методы конечных разностей [32], конечных элементов [33, 34], матрицы линий передачи [35] (метод импедансного аналога электромагнитного пространства [36, 37]). Вторая группа (задачи электродинамики II типа) не ограничивает расчетную область анализа и связана с решением неоднородного волнового уравнения, удовлетворяющего условию излучения на бесконечности [26]. К ней относятся метод моментов [27] (метод сингулярных интегральных уравнений [180]) и ряд асимптотических методов [20, 28–30, 79–81] (геометрической оптики, геометрической теории дифракции, физической оптики, физической теории дифракции, метод вспомогательных источников, метод дискретных источников и др.). Все перечисленные мето-

ды вычислительной электродинамики составляют основу широко используемых во всем мире коммерческих программ моделирования высокочастотных электромагнитных полей [38]: Ansis-Ansoft HFSS, CST Microwave Studio Suite, QWAVE QuickWave3D, Remcom XFDTD, EMSS-SA FEKO, Russian R&D Center LG Electronics RFS, Ticra и др. (рис. 1.3).

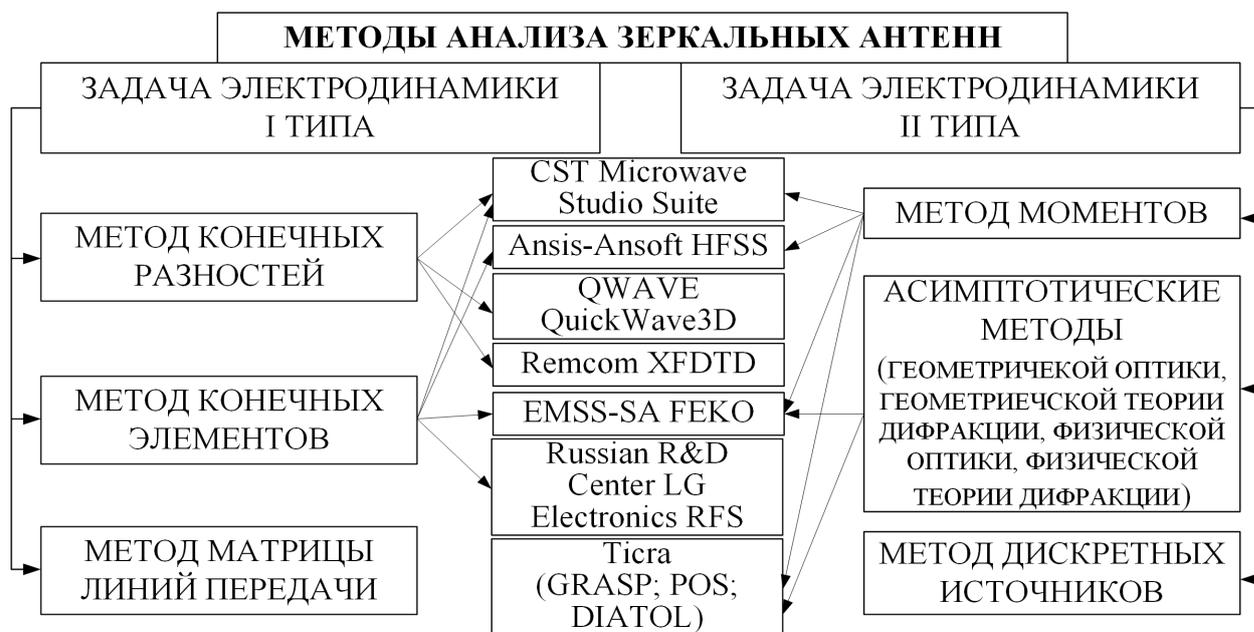


Рис. 1.3. Методы анализа зеркальных антенн и основные современные САПР, реализующие их

Ввиду некоторой универсальности (возможность анализа практически любой структуры) методы первой группы реализованы во всех указанных программах моделирования. При этом все они тем или иным образом связаны с разбиением области анализа или некоторой проводящей поверхности на подобласти простой формы. Следствием этого и своего рода платой за универсальность являются значительные вычислительные затраты при их программной реализации. С точки зрения пользователя последнее приводит к существенному недостатку – большому времени [39], необходимому для анализа, что существенно затрудняет, а иногда и делает практически невозможным решение задач синтеза ЗА за обозримый отрезок машинного времени при существующих огромных скоростях ЭВМ.

Основу методов второй группы составляют [3, 20]: метод геометрической оптики (ГО) и геометрической теории дифракции (ГТД), метод физической оптики (ФО), метод дискретных источников, метод сингулярных интегральных уравнений.

Метод ГО составляют законы отражения и преломления (Снеллиуса, или Снелла) [28] и принцип Ферма [40]. Основные недостатки метода связаны с тем, что: 1) в приближении ГО как такового понятия поля не вводится [3]; 2) геометрическая модель метода ГО в непосредственной близости к границе тени и в областях концентрации большого числа лучей и в общем случае при отражении электромагнитной волны на криволинейной границе раздела теряет адекватность [20]. Перечисленные эффекты во втором недостатке связаны с проявлением дифракционных явлений, изучаемых ГТД. Группа законов ГТД базируется на следующих положениях [20, 41]: 1) конгруэнция дифракционных ГО-лучей порождается ГО-лучами, которые образуют границу свет-тень при падении на неоднородные участки тела (острия, ребра, линии разрывов кривизны) или касаются тела на его краях; 2) каждый луч первичного поля, удовлетворяющий первому условию, порождает бесконечное множество лучей; 3) амплитуда дифракционного луча пропорциональна амплитуде порождающего его первичного луча в точке падения; 4) коэффициент дифракции определяется локальными особенностями геометрии тела в окрестности поверхностного луча (для остриев и ребер) или между точкой падения и точкой отрыва дифракционного луча (для гладкого тела). Основным недостатком ГТД заключается в существенном усложнении решений с позиции вычислительной сложности при анализе характеристик направленности ЗА, связанных с эффектами переотражения ГО-лучей и возникновением ГО-лучей вторичной, третичной и так далее (до бесконечности) дифракции [20, 41]. При этом метод ГТД не разрешает первый недостаток метода ГО.

Метод ФО состоит в определении ЭМП излучения по известному распределению возбуждающего поля на отражающей поверхности ЗА. Основу метода составляет принцип Гюйгенса–Кирхгофа (принцип Гюйгенса–Френеля в фор-

мулировке Кирхгофа) [26]. На основе метода ФО для анализа ЗА сформированы апертурный [42] и токовый методы расчета [43]. Основные достоинства апертурного метода связаны с относительной простотой реализации и низкими вычислительными затратами [18]. Недостатки апертурного метода заключаются в том, что [20]: 1) метод не позволяет учесть реальную конфигурацию АС (кривизну поверхности рефлектора) и поляризационную структуру ЭМП облучателя; 2) соответствие рассчитанной и реальной ДН (точность расчета) ограничивается пределами основного лепестка ДН и наложением максимумов/нулей первых боковых лепестков; 3) метод позволяет производить расчет только для ЗА с симметричным раскрывом в случае осевой симметрией ДН облучающей системы. Токовый метод позволяет снять некоторые ограничения апертурного метода, однако он [18]: 1) ограничен сложностью вычисления интегралов излучения, возрастающей с увеличением размеров отражающих поверхностей и отношения D/λ диаметра апертуры D к длине волны λ ; 2) не учитывает эффект дифракции ЭМП на кромке отражающей поверхности ЗА; 3) не учитывает обратного воздействия рефлектора на излучатель (эффекты переотражения).

Для устранения ряда недостатков токового метода расчета в ряде работ [18, 20, 44] предлагается его модификация при объединении с методом ГТД. При этом характеристика излучения в области главного и ближнего бокового излучения рассчитывается токовым методом, а в остальной части пространства – методом ГТД [44]. Также предлагается уточнение токового метода расчета ЗА с учетом эффекта затенения части зеркала его боковой кромкой [20]. Подобные модификации позволяют учесть краевые эффекты, однако не исключают остальных недостатков токового метода и метода ГТД.

Перечисленные особенности методов анализа ЗА, базирующихся на приближениях ГО, ГТД и ФО, приводят к главному недостатку – ими невозможно корректно рассчитать ЭМП в ближней зоне антенны. Другими словами перечисленные аналитические методы не обеспечивают требуемого уровня адекватности.

Метод вспомогательных источников [81] и его развитие – метод дискретных источников [80], модифицированный метод дискретных источников [82, 83] – сформированы при допущении о том, что источник поля расположен на достаточном удалении от рассеивателя при изучении энергетических характеристик рассеяния в дальней зоне. Указанные методы не обеспечивают «... тщательного исследования токов на поверхности рассеивателя» [80] и как следствие не позволяют обеспечить требуемого уровня адекватности решения задач анализа, синтеза и управления АМЛЗА.

Метод сингулярных интегральных уравнений заключается в определении поля, рассеянного рефлектором ЗА, по наведенным на нем токам. Функция распределения плотности поверхностного тока на рефлекторе определяется из численного решения уравнений вида [31]:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}, \quad (1.1)$$

где \mathbf{A} – дифференциальный, интегральный или интегро-дифференциальный оператор [46, 47].

Наиболее часто уравнение вида (1.1) сводится к численному решению сингулярного интегрального уравнения Фредгольма первого и/или второго рода [218–220] относительно неизвестной поверхностной плотности тока. Численное решение предполагает разбиение отражающей поверхности на подобласти простой формы, и плотность тока в каждой подобласти задается суперпозицией некоторых линейных или кусочно-полиномиальных базисных функций. Затем полученные уравнения умножаются на введенные базисные функции и сводятся к системе линейных уравнений относительно коэффициентов разложения [31]. Решение системы линейных уравнений и сформированная аппроксимация базисными функциями позволяют определить искомую функцию распределения плотности поверхностного тока на рефлекторе. В последующем распределение ЭМП в точке наблюдения аналогично токовому методу находится интегрированием по поверхности рефлектора для найденной плотности электрического тока. Метод сингулярных интегральных уравнений в отличие от вышерассмот-

ренных аналитических методов позволяет учесть эффекты дифракции и переотражения, однако в сравнении с апертурным, токовым и модифицированным токовым методами обладает высокой вычислительной сложностью. Вычислительные затраты зависят от удачного выбора вида базисных функций, которые при минимальном порядке аппроксимации обеспечивают требуемую адекватность решения. Известные методы позволяют формировать подобные базисные функции путем разбиения проводящей поверхности рефлектора на подобласти простой формы (конечные элементы) [27, 94]. При этом численное решение «привязанной» к геометрии АС задачи анализа с подобными базисными функциями существенным образом затрудняет последующую реализацию эффективных алгоритмов синтеза ЗА.

Из ретроспективы методов анализа ЗА следует, что основными задачами синтеза на этапе проектирования являются решения внешней и внутренней задач электродинамики теории АС зеркального типа [18]:

- 1) по заданным требованиям к характеристикам направленности ЗА определить реализующее их АФР поля в раскрыве (токи);
- 2) определить элементы конструкции ЗА, устройства возбуждения, распределительные системы и др.

Для указанных задач варьируемыми при параметрическом и структурном синтезе являются [20]:

- 1) параметры, характеризующие облучающую систему: – АФР возбуждения в раскрыве излучателей; – положение и ориентация в пространстве излучателей;
- 2) параметры, характеризующие зеркальную систему (ЗС): – положение и ориентация отражающих элементов (рефлекторов); – число рефлекторов в зеркальной системе; – геометрические характеристики, учитывающие вид поверхности отражающих элементов; – электромагнитные свойства элементов ЗС.

Рассмотренные методы анализа ЗА в практике решения задач синтеза используются [18, 20]:

1) при синтезе поверхности зеркал (одного или нескольких), формирующих требуемое поле в апертуре основного рефлектора в приближении методов геометрической оптики [57–60, 77];

2) структурном синтезе многоэлементных облучателей в приближении методов геометрической оптики, геометрической теории дифракции и геометрии масс [7, 49, 61–63];

3) синтезе отражающей поверхности в приближении методов физической оптики (токовый метод) в сочетании с процедурами численной оптимизации [64, 65, 71];

4) синтезе АФР в раскрыве многоэлементных облучателей зеркальной антенны [48, 54, 66, 67] в приближении методов физической оптики (методов парциальных диаграмм [68], сшивания электромагнитных полей облучающей и отражающей систем в базисе ортогональных функций облучающей системы [69, 70, 72]).

Основу численного решения задач структурного и параметрического синтеза ЗА составляют следующие методы:

1) метод наименьших квадратов [87], алгоритмы имитации отжига и генетические алгоритмы;

2) градиентные методы первого и второго порядков (Левенберга–Марквардта, Ньютона–Рафсона, Дэвидона–Флэтчера–Пауэлла и др.) [87–90, 226–230];

3) методы решения систем линейных уравнений (методы Гаусса, Крамера, вращений, прогонки и др.) при синтезе группового облучателя [61, 62, 91];

4) методы приближенного синтеза антенны по заданной ДН [68, 92, 93] (метод А.А. Пистолькорса; разложение ДН по функциям Бесселя, атомарных функций – вейвлеты, В-сплайны и др.; приближенный расчет по методу интеграла Фурье).

Несмотря на рассматриваемое в ряде указанных работ последовательное включение различных оптимизационных методов при определении локального экстремума, достигаемого методами градиентной оптимизации, и упрощений, применяемых при сведении задачи к системе линейных уравнений и

иррациональной аппроксимации, не приходится говорить об оптимальности существующих решений задач синтеза ЗА при их обобщении на структурно-параметрический синтез МЛЗА и тем более их пригодности для решения задач управления АМЛЗА.

Для окончательного определения направлений исследования относительно структуры и содержания математической теории АМЛЗА и перспективы развития аналитических и численных методов анализа и синтеза ЗА рассмотрим типовые критерии и показатели эффективности, применяемые в решениях задач синтеза АС зеркального типа и оптимального управления адаптивными антеннами.

1.2. Критерии и показатели эффективности управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной в условиях воздействия помех

С учетом предъявляемых на практике требований к АС, определяющих форму главного лепестка ДН и уровень первых боковых лепестков в различных угловых секторах, величину кроссполяризованной составляющей излучаемого поля, конфигурацию и геометрические размеры раскрыва ЗА, а также реализуемость АФР в нем, КНД, КИП, КУ и т. п., выходные показатели эффективности ЗА можно разделить по двум классам задач, ориентированных на синтез [8, 41, 70, 73]:

- 1) по требуемой комплексной, амплитудной и/или фазовой диаграмме направленности зеркальной антенны;
- 2) оптимальным интегральным параметрам – КНД, КИП, коэффициенту концентрации, коэффициенту рассеивания, коэффициенту извлечения мощности, коэффициенту полезного действия (КПД).

В практике решения задач синтеза АС зеркального типа используются амплитудная и фазовая ДН, описываемые соответствующими функциями для произвольной составляющей \mathcal{X} напряженности электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей: $\left| F_{E\mathcal{X}}(\theta, \xi) \right| \cdot K_1^E$, $\arg \left(F_{E\mathcal{X}}(\theta, \xi) \right) \cdot K_2^E$ и $\left| F_{H\mathcal{X}}(\theta, \xi) \right| \cdot K_1^H$,

$\arg \left(F_{H\mathcal{X}}(\theta, \xi) \right) \cdot K_2^H$, где K_1^E , K_2^E и K_1^H , K_2^H – не зависящие от угловых координат θ, ξ коэффициенты нормировки соответствующих ДН.

Для заданных представлений основные критерии синтеза АС зеркального типа формируются по правилу минимума невязки между произвольной составляющей формируемой ДН, например $F_{E\mathcal{X}}(\theta, \xi)$, и ее требуемым значением $F_{E\mathcal{X}}^{\text{TP}}(\theta, \xi)$ в заданном наборе углов [18]:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left| F_{E\mathcal{X}}(\theta_n, \xi_n) - F_{E\mathcal{X}}^{\text{TP}}(\theta_n, \xi_n) \right|^2 &\rightarrow \min; \\ \sum_{n=1}^N \left(\left| F_{E\mathcal{X}}(\theta_n, \xi_n) \right| - \left| F_{E\mathcal{X}}^{\text{TP}}(\theta_n, \xi_n) \right| \right)^2 &\rightarrow \min; \\ \sum_{n=1}^N \left(\arg \left(F_{E\mathcal{X}}(\theta_n, \xi_n) \right) - \arg \left(F_{E\mathcal{X}}^{\text{TP}}(\theta_n, \xi_n) \right) \right)^2 &\rightarrow \min, \end{aligned} \quad (1.2)$$

или в заданном угловом секторе $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$, $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$ [18]:

$$\begin{aligned} \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \left| F_{E\mathcal{X}}(\theta, \xi) - F_{E\mathcal{X}}^{\text{TP}}(\theta, \xi) \right|^2 d\theta d\xi &\rightarrow \min; \\ \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \left(\left| F_{E\mathcal{X}}(\theta, \xi) \right| - \left| F_{E\mathcal{X}}^{\text{TP}}(\theta, \xi) \right| \right)^2 d\theta d\xi &\rightarrow \min; \\ \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \left(\arg \left(F_{E\mathcal{X}}(\theta, \xi) \right) - \arg \left(F_{E\mathcal{X}}^{\text{TP}}(\theta, \xi) \right) \right)^2 d\theta d\xi &\rightarrow \min, \end{aligned} \quad (1.3)$$

с учетом предъявляемых требований на «крутизну» ДН в направлении (θ, ξ) :

$$\partial \left| F_{E\mathcal{X}}(\theta, \xi) \right| / \partial \theta \rightarrow \max. \quad (1.4)$$

Ко второму классу задач синтеза относятся решения, направленные на оптимизацию требуемых интегральных параметров АС зеркального типа, к основным из которых относятся [18]:

1) КНД в направлении максимума (θ^0, ξ^0) ДН:

$$D_0 = 4\pi \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left| F_{E\mathcal{X}}(\theta, \xi) \right|^2 / \left| F_{E\mathcal{X}}(\theta^0, \xi^0) \right|^2 \sin \theta d\theta d\xi \right]^{-1}; \quad (1.5)$$

2) коэффициент концентрации, характеризующий долю мощности, излучаемой антенной в секторе углов $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$, $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$, по сравнению со всей излучаемой мощностью:

$$K_{\text{И}} = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} |F_{E\mathcal{X}}(\theta, \xi)|^2 \sin \theta d\theta d\xi / \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |F_{E\mathcal{X}}(\theta, \xi)|^2 \sin \theta d\theta d\xi; \quad (1.6)$$

3) коэффициент рассеивания, обратный коэффициенту концентрации,:

$$K_{\text{Р}} = 1 - K_{\text{И}}; \quad (1.7)$$

4) коэффициент извлечения мощности антенны, характеризующий предельные возможности антенны по извлечению мощности из падающей на нее ЭМВ:

$$\eta_{\text{Р}} = \iint_S |\vec{E}_{\text{пер}} \cdot \vec{E}_{\text{прм}}|^2 d\vec{S} / \left[\iint_S |\vec{E}_{\text{пер}}|^2 d\vec{S} \iint_S |\vec{E}_{\text{прм}}|^2 d\vec{S} \right], \quad (1.8)$$

где $\vec{E}_{\text{пер}}$ и $\vec{E}_{\text{прм}}$ – соответствующие электрические векторы АФР поля, фокусируемого в фокальной области раскрыва отражающей поверхности S рефлектора и поступающего в фокальную область раскрыва этой же поверхности от некоторого генератора (поля в раскрыве облучающей системы в режиме передачи) соответственно;

5) КПД ЗА для отражающей поверхности S рефлектора, определяемый выражением

$$\eta_{\text{КПД}} = \left| \frac{\iint_S (\vec{E}_{\text{прм}} \times \vec{H}_{\text{пер}} - \vec{E}_{\text{пер}} \times \vec{H}_{\text{прм}}) d\vec{S}}{2 \sqrt{\text{Re} \left\{ \iint_S \vec{E}_{\text{прм}} \times \vec{H}_{\text{прм}}^* d\vec{S} \right\} \text{Re} \left\{ \iint_S \vec{E}_{\text{пер}} \times \vec{H}_{\text{пер}}^* d\vec{S} \right\}}} \right|^2, \quad (1.9)$$

который согласно [22, 84], может быть представлен в виде следующего произведения:

$$\eta_{\text{КПД}} = \eta_{\Phi} \eta_{\text{А}} \eta_{\Omega} \eta_{\chi} \eta_{\text{В}} \eta_{\text{Р}}, \quad (1.10)$$

где η_{Φ} – коэффициент потерь из-за фазовых ошибок в случае осевой симметрии ЗА; $\eta_{\text{А}}$ – коэффициент потерь из-за амплитудных ошибок; η_{Ω} – коэффициент потерь из-за утечки энергии на края отражающей поверхности (коэффициент «переливания»); η_{χ} – коэффициент потерь из-за кроссполяризации; $\eta_{\text{В}}$ и $\eta_{\text{Р}}$ – коэффициенты потерь из-за затеняющего действия облучающей системы и неточности изготовления отражающей поверхности соответственно [20].

Известно, что КПД относительно любой системы является характеристикой эффективности в отношении преобразования или передачи энергии. Поэтому в качестве основного показателя эффективности (результативность) синтеза ЗА выбран КПД. При этом КПД ЗА по (1.9) может быть задан в качестве характеристики направленности при его представлении отношением $\eta_{\text{КПД}}(\theta, \xi) = \frac{P_{\text{прм}}(\theta, \xi)}{P_{\text{вых}}}$ принимаемой мощности $P_{\text{прм}}(\theta, \xi)$ электромагнитной волны, отраженной от поверхности рефлектора S с направления (θ, ξ) и приходящей в раскрыт Ω излучателя, к снимаемой мощности $P_{\text{вых}}$ с выхода этого излучателя:

$$\eta_{\text{КПД}}(\theta, \xi) = \left| \frac{0,5 \iint_{\Omega} \left(\vec{E}_{\text{прм}}(\theta, \xi) \times \vec{H}_{\text{пер}} - \vec{E}_{\text{пер}} \times \vec{H}_{\text{прм}}(\theta, \xi) \right) d\vec{\Omega}}{\sqrt{\text{Re} \left\{ \iint_{\Omega} \vec{E}_{\text{прм}}(\theta, \xi) \times \vec{H}_{\text{прм}}^*(\theta, \xi) \right\} d\vec{\Omega} \text{Re} \left\{ \iint_{\Omega} \vec{E}_{\text{пер}} \times \vec{H}_{\text{пер}}^* \right\} d\vec{\Omega}}} \right|^2. \quad (1.11)$$

В такой постановке решение задачи синтеза МЛЗА при $\eta_{\text{КПД}}(\theta, \xi) \rightarrow \max$ в соответствии с леммой Лоренса [70] и теоремой Робье [26] позволяет максимизировать интегральные характеристики направленности антенны [72] путем максимизации комплексных коэффициентов передачи для m -х излучателей МЛЗА ($m = \overline{1, M}$, M – число излучателей) $T'_m(\theta, \xi) = 0,5 \iint_{\Omega_m} \left(\vec{E}_m^{\text{прм}}(\theta, \xi) \times \vec{H}_m^{\text{пер}} - \vec{E}_m^{\text{пер}} \times \vec{H}_m^{\text{прм}}(\theta, \xi) \right) d\vec{\Omega}$, где $\vec{E}_m^{\text{прм}}(\theta, \xi)$, $\vec{H}_m^{\text{прм}}(\theta, \xi)$ и $\vec{E}_m^{\text{пер}}$, $\vec{H}_m^{\text{пер}}$ – соответствующие электрические, магнитные векторы АФР поля, фокусируе-

мого в фокальной области раскрыва Ω_m m -го излучателя, отраженной от рефлектора плоской ЭМВ с направления прихода (θ, ξ) , и поступающего в фокальную область раскрыва этого же излучателя от некоторого генератора с мощностью $P_{\text{пер}}$.

С учетом теоремы о корреляции полей и теоремы о разложении ЭМП [70] при неизменной физической сути критерия $\eta_{\text{КПД}}(\theta, \xi) \rightarrow \max$ с целью снижения вычислительных затрат при последующем решении задач синтеза МЛЗА и формализации проблемы оптимального управления АМЛЗА допустимо свести критерий максимума КПД к формированию тождества между падающим от рефлектора полем в раскрыв m -го излучателя с комплексно сопряженным полем соответствующего излучателя в режиме передачи: $\vec{E}_m^{\text{прм}}(\theta, \xi) = (\vec{E}_m^{\text{пер}})^*$; $\vec{H}_m^{\text{прм}}(\theta, \xi) = -\vec{H}_m^{\text{пер}}$ при $P_{\text{пер}} = P_{\text{прм}} = 1$ Вт. Подобное представление обобщенного критерия определяет необходимость синтеза МЛЗА во взаимосвязи решения внешней и внутренней задач электродинамики при согласовании ЭМП в режимах приема и передачи. В качестве остальных показателей при оценке эффективности синтеза МЛЗА следует выбирать количественные показатели исхода операции – оперативность (скорость сходимости и вычислительная сложность решения оптимизационной задачи синтеза) и ресурсоемкость (объем оперативной памяти на ЭВМ, занимаемый при решении оптимизационной задачи).

В теории ПВОС [85] под сигналом понимается не электрическое колебание в цепях приемника, а ЭМВ, перехватываемая АС в системе координат пространство-время. Для последующего удобства описания процессов, проходящих в АМЛЗА, под сигналом в любой точке АС будем понимать совокупность полезного сигнала, помех, а также внутренних и внешних шумов. В необходимых случаях для различия перечисленных понятий будут использованы соответствующие общепринятые термины в литературе по адаптивным антеннам [14, 17]. Под термином помехи в настоящей работе для АМЛЗА с учетом определений и классификации из [216] понимаются межсистемные электромагнитные помехи. С учетом введенных понятий содержательная постановка проблемы исследования по адаптации АС к условиям СПО определена следующим

образом (рис. 1.4). Адаптация антенны сводится к формированию характеристики направленности с провалами (минимумами) в направлениях на источники помех и максимизации уровня полезного сигнала. Априорными сведениями является информация о направлении на источник полезного сигнала и различие в направлении прихода полезного сигнала и подавляемых помех.

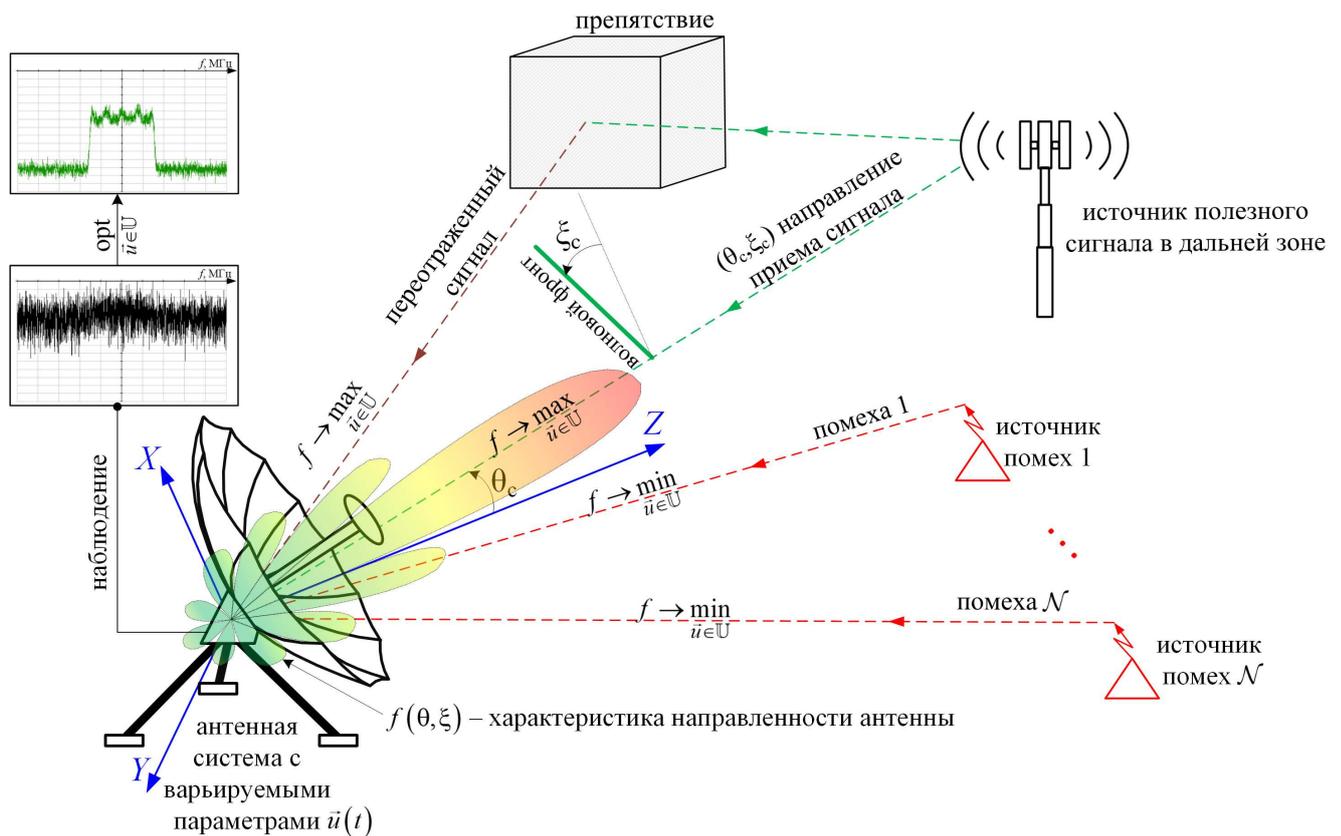


Рис. 1.4. Схема адаптации АС к условиям сигнально-помеховой обстановки

Для заданных представлений с учетом работ [9, 14, 17, 50, 86] для обеспечения инвариантности АМЛЗА к условиям сложной сигнально-помеховой обстановки будем рассматривать адаптивную антенну в качестве пространственно-поляризационного-временного фильтра. Подобные фильтры наряду с указанными ранее характеристиками направленности и интегральными параметрами АС определяются следующими показателями [14]:

1) коэффициенты подавления помех $K_{\Pi} = [P_{\Pi}/P_{\text{ш}}] / [P_{\text{а } \Pi}/P_{\text{а ш}}]$, показывающий во сколько раз уменьшилось отношение мощностей «помеха/шум» $P_{\Pi}/P_{\text{ш}}$ в результате адаптации $P_{\text{а } \Pi}/P_{\text{а ш}}$;

2) коэффициент выигрыша $K_c = [P_{a\ c} / (P_{a\ ш} + P_{a\ п})] / [P_c / (P_{ш} + P_{п})]$, показывающий во сколько раз увеличилось отношение мощности полезного сигнала P_c к суммарной мощности шума $P_{ш}$ и помех $P_{п}$ в результате адаптации $[P_{a\ c} / (P_{a\ ш} + P_{a\ п})]$;

3) число степеней свободы адаптивной антенны \mathcal{M} – количество управляемых весовых коэффициентов;

4) максимально возможное число подавляемых помех \mathcal{N} ;

5) степень адаптации АС \mathcal{K}_0 – отношение числа антенных элементов к \mathcal{M} .

Для заданных параметров эффективность адаптации определяется [14]:

1) кривыми обучения – зависимость показателя качества адаптивной АС от времени в процессе адаптации; 2) время адаптации t_a – нефиксированный интервал времени, в течение которого достигнуто заданное значение показателя качества; 3) количество итераций – число дискретных измерений наблюдения в процессе адаптации, необходимое для достижения заданного значения показателя качества; 4) количество операций – общее число элементарных математических операций, выполняемых над массивами данных алгоритмом адаптации для достижения заданного показателя качества.

В качестве критериев качества адаптации АС могут выступать [14]: 1) минимум среднеквадратической ошибки (МСКО) между реальным и ожидаемым сигналами на входе фильтра обработки; 2) максимум отношения мощности полезного сигнала к мощности совокупности шума и помехи (МСШП) на выходе адаптивной АС; 3) максимум отношения правдоподобия (МОП) – производится оценка полезного сигнала на выходе антенны при оптимальной обработке; 4) минимум мощности выходного сигнала (ММВС) – минимизация мощности помехового сигнала на выходе антенны; 5) максимум сигнала при полном подавлении помех (МСПП) – обеспечивает максимальную амплитуду полезного сигнала на выходе адаптивной АС путем максимизации уровня характеристики направленности в направлении источника сигнала. С учетом выделенного многообразия критериев качества адаптации в [14] определено, что значения оптимальных весовых коэффициентов фильтра в большинстве критериев сов-

падают, а задача выбора конкретного критерия при практической реализации не влияет на результат адаптации и определяется техническими требованиями к конкретной антенной системе. Поскольку в большинстве возможных случаев единственная априорная информация о полезном сигнале состоит в известности направления его возможного прихода, для формализации постановки проблемы оптимального управления АМЛЗА в качестве основного следует выбирать критерии МОП. В качестве основных показателей эффективности управления адаптивными антеннами зеркального типа с учетом [14] выделим отношение мощности сигнала к мощности совокупности помехи и шума, коэффициент выигрыша адаптации и время адаптации.

В целом, с учетом представленных методов анализа и синтеза ЗА в современных условиях бурного развития вычислительной техники для рассматриваемой предметной области особой актуальностью обладают следующие вопросы: 1) модификация существующих аналитических методов для увеличения точности оценки характеристик направленности и интегральных параметров при учете эффектов дифракции и переотражения; 2) разработка новых численных методов для снижения вычислительных затрат при достижении приемлемого уровня адекватности; 3) на основе полученных методов решения задач анализа МЛЗА сформировать эффективные алгоритмы структурно-параметрического синтеза, основанные на совместном решении внешней и внутренней электродинамических задач теории антенн. Разрешение указанных задач главным образом позволит сформировать методы математического моделирования и синтеза, алгоритмы управления АМЛЗА, инвариантных к воздействию помех.

1.3. Структура и содержание теории математического моделирования и синтеза адаптивных многолучевых зеркальных антенн, общий подход к разработке ее элементов

На основе полученных в рамках проведенного ретроспективного анализа результатов и с учетом главной (базовой) идеи сформирована гипотеза исследования: *для заданных конструктивно-технологических ограничений ре-*

шение задачи оптимального (субоптимального) управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной с варьируемыми структурными и параметрическими характеристиками во взаимосвязи решения внешней и внутренней задач электродинамики обеспечивает инвариантность антенной системы к воздействию помех. Сформирована концепция настоящего исследования (рис. 1.5) при структуризации проблем теории и практики, определяющих основные диспропорции относительно исследуемой предметной области:

- 1) теоретическом аспекте: – низкая адекватность аналитических методов анализа особенно в области ближней зоны и дальнего бокового излучения; – высокие вычислительные затраты численных методов анализа, затрудняющих решение задач оптимального (субоптимального) синтеза АС зеркального типа за обозримый отрезок машинного времени;
- 2) практическом аспекте в условиях накладываемых ограничений на массогабаритные показатели существующие конструкции адаптивных антенн характеризуются низкой энергетической эффективностью и ограниченным числом подавляемых помех.

Концепция определяет необходимость решения актуальной проблемы практики – обеспечение инвариантности комплексов многоканальной радиосвязи к воздействию преднамеренных и непреднамеренных помех.

Решение указанной проблемы предполагает использование на комплексах многоканальной радиосвязи адаптивных многолучевых зеркальных антенн с динамическим изменением структуры (число, положение, ориентация, форма отражающих и излучающих элементов) и параметров (амплитуды и фазы токов возбуждения, формирующих АФР в раскрыве излучающих элементов). Такая постановка определяет необходимость разработки теории математического моделирования и синтеза АМЛЗА, исходную теоретическую основу для построения которой составляют теория ААР, математическая теория ЗА, методы вычислительной электродинамики, теория оптимального управления, теория оптимальной фильтрации, теория функции комплексного переменного и гиперкомплексных функций, численные методы оптимизации и решения вариационных задач математической физики.

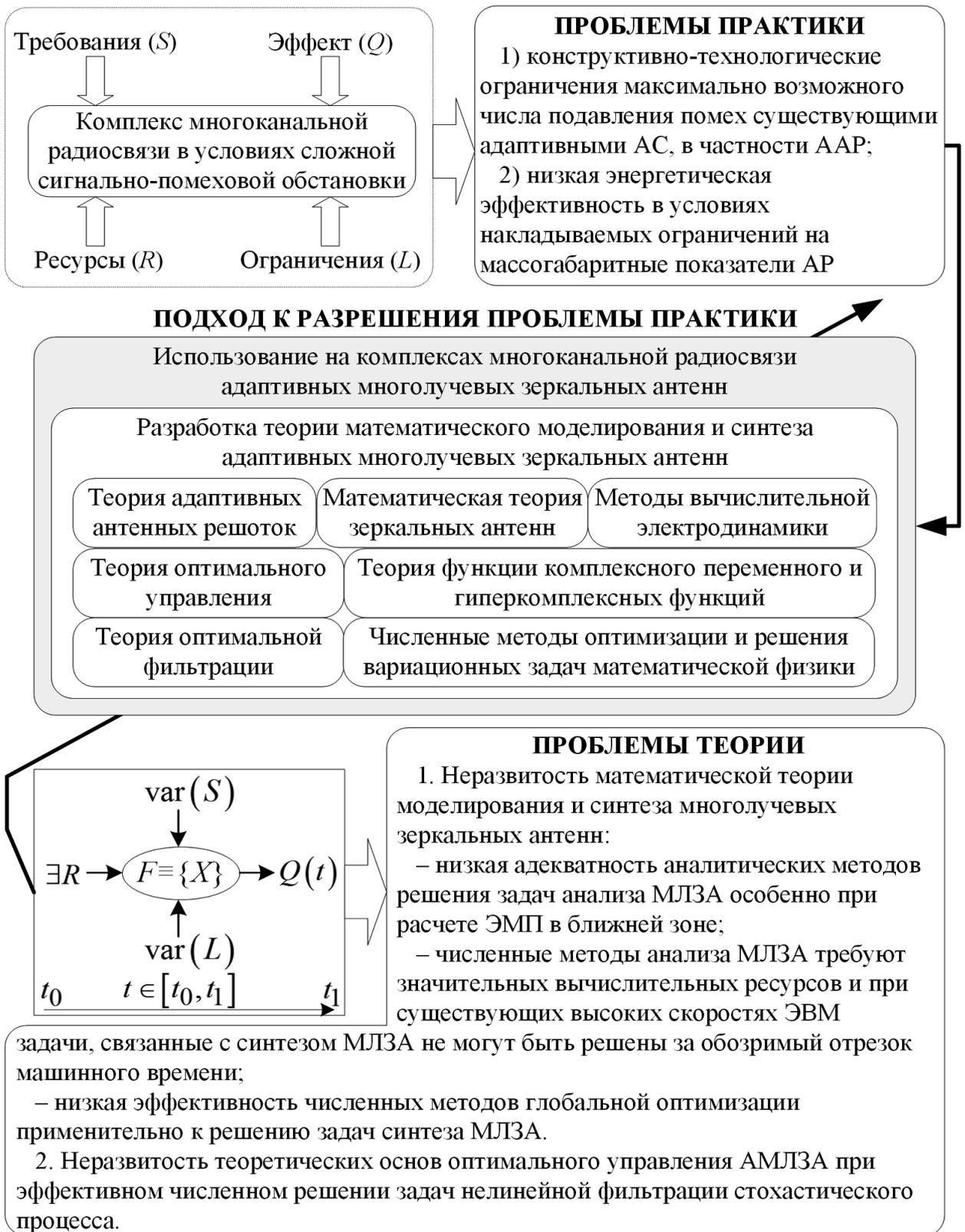


Рис. 1.5. Концепция исследования

Логика разрабатываемой теории направлена на формирование теоретических основ оптимального управления АМЛЗА (рис. 1.5). При разработки новых

эффективных математических методов анализа АМЛЗА с учетом известных строгих решений дифференциальных волновых уравнений, полученных для канонических структур, предполагается использовать свойства единственности и взаимно-однозначности конформных отображений [95].

Вышеизложенное определяет цель диссертационной работы, заключающуюся в разработке методов математического моделирования, анализа, эффективного решения задач синтеза и управления адаптивными многолучевыми зеркальными антеннами во взаимосвязи внешней и внутренней задач электродинамики с учетом эффектов дифракции и переотражения.

Достижения цели исследования предполагается выполнить разрешением следующей научной проблемы: разработать математическую теорию адаптивных многолучевых зеркальных антенн, представленную совокупностью аналитических и численных методов математического моделирования, анализа, синтеза и управления и сформировать на основе разработанных решений проблемно-ориентированный программный комплекс.

Сформулированная проблема предусматривает решение следующих частных научных задач:

1. Разработать физико-математическую модель управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной во взаимосвязи решений внешней и внутренней задач электродинамики при определении максимально возможного числа подавляемых помех.

2. Разработать барицентрический метод для численного решения скалярных и векторных волновых уравнений в ограниченной расчетной области анализа, заданной в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 .

3. Разработать методы определения барицентрических координат для односвязной области с кусочно-линейной границей, заданной в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 .

4. Модифицировать метод последовательных конформных отображений наперед заданных многоугольных областей для эффективного решения обратной задачи конформного отображения многоугольника на каноническую область.

5. Разработать методы прямого и обратного конформного отображения многогранников на каноническую область в \mathbb{R}^3 с применением для описания изометрий дополненной теории кватернионного анализа в части разложения кватернион-функций в обобщенные степенные ряды.

6. Для решения задач электродинамики в неограниченной расчетной области анализа с учетом эффектов дифракции и переотражения модифицировать токовый метод расчета характеристик направленности зеркальных антенн с использованием приближений Кирхгофа–Котлера и методов физической оптики, а также определить реализацию барицентрического метода в решении сингулярных интегральных уравнений электродинамической теории зеркальных антенн.

7. Определить реализацию барицентрического метода в решении задачи управления формой отражающей поверхности адаптивной многолучевой зеркальной антенны.

8. Модифицировать гибридный генетический метод с градиентным обучением и прогнозированием для решения задач глобальной оптимизации многоэкстремальных функций.

9. Разработать алгоритмы численного решения задач структурно-параметрического синтеза и управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной.

10. Полученные результаты реализовать в виде проблемно-ориентированного программного комплекса для решения задач моделирования, анализа, синтеза и управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной при последующем обосновании и тестировании эффективности предложенных решений с применением ЭВМ.

Последовательность решения сформулированных частных научных задач определяет структуру диссертационного исследования. Учитывая специфику предмета исследований и цели решаемой проблемы в работе, элементы теории и методологии синтеза, а также оценки качества АМЛЗА рассматриваются и

раскрываются в диалектическом единстве в рамках следующих основных положений:

1. Физико-математическая модель управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной во взаимосвязи решений внешней и внутренней задач электродинамики.

2. Бариецентрический метод в численном решении уравнений Максвелла или соответствующих им волновых уравнений в ограниченной расчетной области анализа без ее разбиения на конечные элементы.

3. Методы конформных отображений замкнутых односвязных областей с кусочно-линейной границей в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 , позволяющие формировать строгие решения задач прямого и обратного конформных отображений области с кусочно-линейной границей на каноническую.

4. Методы решения задач вычислительной электродинамики в неограниченной расчетной области анализа в приложении к электродинамической теории зеркальных антенн, а также задачи управления формой отражающей поверхности адаптивной многолучевой зеркальной антенны.

5. Проблемно-ориентированный программный комплекс, разработанный для проведения вычислительных экспериментов с учетом современных технологий параллельных вычислений и реализующий комбинированное использование сформированных методов и алгоритмов решения задач моделирования, анализа, синтеза и управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной с применением модификации гибридного генетического метода с градиентным обучением и прогнозированием для решения задач глобальной оптимизации многоэкстремальных функций.

Таким образом, на основе анализа ретроспективы объекта и предмета исследования при структуризации проблем практики и теории сформулирована концепция, общая проблема и основные частные задачи исследования в рамках фундаментальных основ и применения математического моделирования, численных методов и комплексов программ для решения научной проблемы

при формировании оригинальных результатов одновременно в трех областях: математического моделирования, численных методов и комплексов программ.

1.4. Физико-математическая модель управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной во взаимосвязи решения внешней и внутренней задач электродинамики

Адаптивную многолучевую зеркальную антенну представим деформируемым рефлектором ($M' = 1$) и M излучателями (рис. 1.6).

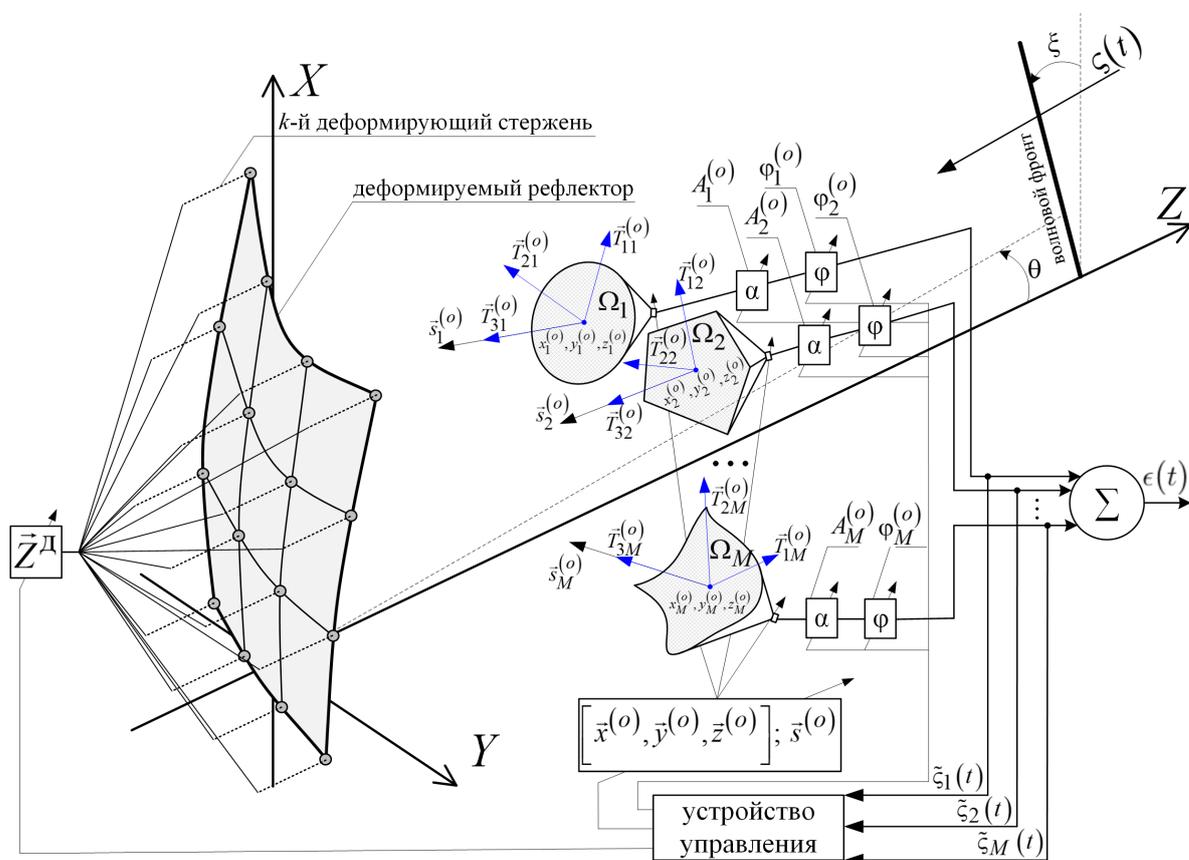


Рис. 1.6. Обобщенная схема адаптивной многолучевой зеркальной антенны

В качестве управляемых параметров выберем: амплитуду $A_m^{(o)}$ и фазу $\varphi_m^{(o)}$ тока возбуждения m -го излучателя; угол $\nu_m^{(o)}$ поворота плоскости Ω_m в системе координат рефлектора; координаты центра раскрытия m -го излучателя – $x_m^{(o)}$, $y_m^{(o)}$, $z_m^{(o)}$; орт нормали $\vec{s}_m^{(o)}$ к плоскости Ω_m , характеризующий ориентацию m -го излучателя; форма отражающей поверхности, формируемая K -мерной си-

стемой приводов, которые воздействуют на упругую поверхность отражателя при параметризации переменной Z_k^{\perp} положения k -го деформирующего стержня относительно оси OZ , где $k = \overline{1, K}$.

Пусть АМЛЗА принимает из дальней зоны с направления (θ, ξ) некоторый сигнал $\varsigma(t)$, заданный электромагнитной волной $\{\vec{E}^{(s)}(t), \vec{H}^{(s)}(t)\}$ с плоским фазовым фронтом, а с выхода АМЛЗА наблюдается суммарный сигнал $\epsilon(t)$, сформированный из сигналов $\tilde{\varsigma}_m(t)$ с выходов m -х излучающих элементов, где $m = \overline{1, M}$. В физическом смысле $\tilde{\varsigma}_m(t)$ характеризуется величиной ЭДС $X_m(t) = \oint_{L_m} \vec{E}_m(t) \cdot d\vec{l}$, которая определяется мгновенным значением напряженности электрического поля $\vec{E}_m(t)$, наводимого в режиме приема на некотором замкнутом контуре L_m внутри m -го излучателя. Для определения зависимости между входным $\varsigma(t)$ и выходными $\vec{X}(t) = (X_m(t))_M$ значениями рассмотрим задачу дифракции внешнего поля $\{\vec{E}^{(s)}, \vec{H}^{(s)}\}$ с учетом следующих допущений: 1) деформируемый рефлектор представляет собой бесконечно тонкую идеально проводящую гладкую поверхность S' ; 2) m -й облучатель представляется объемом V_m , который ограничен раскрывом Ω_m и бесконечно тонкой идеально проводящей поверхностью S_m ; 3) V_m задается однородной изотропной средой с диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ_m^a и μ_m^a ; 4) область V_0 распространения ЭМП между рефлектором и облучателями является однородной изотропной средой с диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ_0^a и μ_0^a . Тогда математическая постановка задачи примет вид:

$$\nabla \times \vec{H}_{m_0} = -i\chi_{m_0} \vec{E}_{m_0}, \quad \nabla \times \vec{E}_{m_0} = i\chi_{m_0} \vec{H}_{m_0} \text{ в } V_{m_0}, m_0 \in \{0, \overline{1, M}\}; \quad (1.12a)$$

$$\vec{n}_0 \times \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{n}_0 \cdot \vec{H}_0 = 0 \text{ на } S'; \quad (1.12б)$$

$$\vec{n}_m \times \vec{E}_m = 0, \quad \vec{n}_m \cdot \vec{H}_m = 0 \text{ на } S_m; \quad (1.12в)$$

$$\begin{cases} \vec{s}_m^{(o)} \times (\vec{E}_m - \vec{E}_m^{(o)}) = \vec{s}_m^{(o)} \times \vec{E}^{(s)}, \\ \vec{s}_m^{(o)} \times (\vec{H}_m - \vec{H}_m^{(o)}) = \vec{s}_m^{(o)} \times \vec{H}^{(s)} \end{cases} \text{ на } \Omega_m, \quad (1.12г)$$

с условиями излучения на бесконечности [80, 179]: $\{\vec{E}_{m_0}, \vec{H}_{m_0}\} = o(R^{-1})$, $R \rightarrow \infty$ при $\text{Im } \varkappa_{m_0} > 0$; $\vec{H}_0 \times \vec{e}_R - \vec{E}_0 = o(R^{-1})$, $\vec{E}_0 \times \vec{e}_R + \vec{H}_0 = o(R^{-1})$, $\{\vec{E}_0, \vec{H}_0\} = \mathcal{O}(R^{-1})$, $R \rightarrow \infty$ при $\text{Im } \varkappa_0 = 0$, $\varkappa_0 \neq 0$; $\vec{E}_m \times \vec{e}_R + \sqrt{\mu_m^a/\varepsilon_m^a} \vec{H}_m = o(R^{-1})$, $\vec{H}_m = \mathcal{O}(R^{-1})$, $R \rightarrow \infty$ при $\text{Im } \varkappa_m = 0$, $\varkappa_m \neq 0$. Здесь \vec{n}_0 и \vec{n}_m – орты векторов нормалей к S' и S_m соответственно; $\{\vec{E}_m^{(o)}, \vec{H}_m^{(o)}\}$ – ЭМП в Ω_m ; $\varkappa_{m_0} = \omega \sqrt{\varepsilon_{m_0}^a \mu_{m_0}^a}$ – волновое число; $\omega = 2\pi/\lambda$ – круговая частота; $R = |\vec{r}|$; $\vec{e}_R = \vec{r}/|\vec{r}|$; $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$.

Решение задачи (1.12) в общем виде является громоздким с точки зрения вычислений в компьютерных системах. С целью снижения вычислительных затрат примем дополнительное допущение на то, что ЭМП, приходящее в $\Omega_m \setminus \partial\Omega_m$, полностью передается в соответствующую фидерную линию (т. е. $|\Gamma_m| \rightarrow 0$, где $|\Gamma_m|$ – коэффициент отражения для m -го облучателя). Введенное допущение с учетом определенной в пп. 1.1 (см. рис. 1.3) классификации задач электродинамики позволяет декомпозировать общую задачу (1.12) на последовательное решение задач (1.12а), (1.12б), (1.12г) и (1.12а), (1.12в), (1.12г) – задач электродинамики II и I типов при задании соответствующих функций $P_2^{(m)} : \vec{E}^{(s)}(t) \rightarrow \vec{E}_m^{(o)}(t)$ и $P_1^{(m)} : \vec{E}_m^{(o)}(t) \rightarrow \vec{E}_m(t)$.

Для заданной электродинамической постановки, рассматривая величину ЭДС с выходов m -х излучателей марковским векторным процессом $\vec{X}(t)$, априорные сведения о АМЛЗА при задании зависимости от управления $\vec{u}_t \stackrel{def}{=} \vec{u}(t)$ [96] определим из уравнений состояния (задается уравнением Ланжевена):

$$\dot{\vec{X}}_t = \vec{D}^{(\mu)}(\vec{X}_t, \vec{u}_t, t) + \mathbf{D}^{(\sigma)}(\vec{X}_t, \vec{u}_t, t) \vec{V}_t, \text{ при } \vec{X}_{t_0} = \vec{X}_0 \quad (1.13)$$

и наблюдения

$$\vec{\zeta}_t = \vec{h}(\vec{X}_t, \vec{u}_t, t) + \vec{W}_t, \quad (1.14)$$

где $\vec{X}_t \stackrel{def}{=} \vec{X}(t)$; $\dot{\vec{X}}_t = (dX_m(t)/dt)_M$; $\vec{\zeta}_t \stackrel{def}{=} \vec{\zeta}(t)$; $\vec{D}^{(\mu)}(\vec{X}_t, \vec{u}_t, t) = (D_m^{(\mu)})_M$ и $\mathbf{D}^{(\sigma)}(\vec{X}_t, \vec{u}_t, t) = (D_{mm'}^{(\sigma)})_{M \times M}$ – вектор сноса и матрица диффузии; $\vec{V}_t \stackrel{def}{=} \vec{V}(t)$ – белый гауссовский нормированный вектор-шум, наблюдаемый при

помощи векторного нелинейного наблюдателя (1.14); t_0 – начальный момент времени; \vec{X}_0 – начальное распределение векторного процесса $\vec{X}(t)$; $\vec{h}(\vec{X}_t, \vec{u}_t, t)$ – нелинейная векторная функция наблюдателя, задающая выходную характеристику облучающих элементов; $\vec{W}_t \stackrel{def}{=} \vec{W}(t)$ – гауссовский белый шум с нулевым средним и матрицей интенсивностей $E[\vec{W}_t \vec{W}_\tau^T] = \mathbf{D}^{(W)}(t) \delta(t - \tau)$.

Стохастическое дифференциальное уравнение (1.13) понимается в смысле Ито. Решение задачи оптимального управления предполагает получение для заданного момента времени t наилучшей оценки $\hat{\vec{X}}_t$ векторного процесса \vec{X}_t .

Оценку $\hat{\vec{X}}_t$ предполагается получить по критерию максимума правдоподобия функции апостериорной плотности вероятности (АПВ) процесса $\rho(\vec{X}, t) = \rho(\vec{X}, t | \vec{\xi}_\tau, \tau \in [t_0, t])$, которая удовлетворяет известному уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) [97]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{m, m'=1}^M \frac{\partial^2}{\partial X_m \partial X_{m'}} [\rho G_{mm'}^{(2)}] - \sum_{m=1}^M \frac{\partial}{\partial X_m} [\rho G_m^{(1)}] \quad (1.15)$$

при $\rho(\vec{X}, t_0) = \rho_0$,

где $\vec{G}^{(1)}(\vec{X}, t) = (G_m^{(1)})_M$ при $G_m^{(1)} = D_m^{(\mu)} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta} \langle [X_{t+\Delta}^{(m)} - X_t^{(m)}] | \vec{\xi}_\tau \rangle \right\}$;
 $\mathbf{G}^{(2)}(\vec{X}, t) = (G_{mm'}^{(2)})_{M \times M}$ при $G_{mm'}^{(2)} = \sum_{j=1}^M D_{mj}^{(\sigma)} D_{jm'}^{(\sigma)}$ и $D_{mm'}^{(\sigma)} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta} \langle [X_{t+\Delta}^{(m)} - X_t^{(m)}] [X_{t+\Delta}^{(m')} - X_t^{(m')}] | \vec{\xi}_\tau \rangle \right\}$.

Сведем оценку $\hat{\vec{X}}_t$ при согласовании решений внешней и внутренней задач электродинамики [18, 20, 72] к определению плотности потока энергии $\mathcal{J}_m(x, y, t)$, формируемого в Ω_m в режиме приема.

Теорема 1. Пусть $\vec{\xi}_t$ измеряется по правилу (1.14), тогда нормированное значение $\tilde{\mathcal{J}}_m(x, y, t) = \mathcal{J}_m(x, y, t) \bigg/ \int_{\Omega_m} \mathcal{J}_m(x, y, t) d\Omega$ плотности потока энергии $\mathcal{J}_m(x, y, t)$ ЭМП в точке $(x, y) \in \Omega_m$ АМЛЗА удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{J}}_m}{\partial t} = A_m \tilde{\mathcal{J}}_m + \vec{B}_m \cdot \nabla \tilde{\mathcal{J}}_m + (\nabla \mathbf{C}_m \nabla^T) \tilde{\mathcal{J}}_m. \quad (1.16)$$

В выражении (1.16) $\tilde{\mathcal{J}}_m = \tilde{\mathcal{J}}_m(x, y, t)$; $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ – оператор набла;

$$A_m = \frac{1}{2} \sum_{m'=1}^M \frac{\partial^2 G_{mm'}^{(2)}}{\partial X_m \partial X_{m'}} - \frac{\partial G_m^{(1)}}{\partial X_m}; \vec{B}_m = b_m \left\{ \left(\frac{\partial X_m}{\partial x} \right)^{-1}, \left(\frac{\partial X_m}{\partial y} \right)^{-1} \right\} \text{ при } b_m =$$

$$= -G_m^{(1)} + \sum_{m'=1}^M \frac{\partial G_{mm'}^{(2)}}{\partial X_{m'}}; \mathbf{C}_m = c_m \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} \right)^{-1} & \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x \partial y} \right)^{-1} \\ \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial y \partial x} \right)^{-1} & \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial y^2} \right)^{-1} \end{pmatrix} \text{ при}$$

$$c_m = \left[\left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} \right)^{-1} + \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x \partial y} \right)^{-1} + \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial y^2} \right)^{-1} \right].$$

Доказательство. Относительно выхода m -го излучателя АМЛЗА m -я функция АПВ $\rho_m = \rho_m(\vec{X}, t | \vec{\mathcal{S}}_\tau, \tau \in [t_0, t])$ векторного процесса \vec{X}_t с учетом (1.15) будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{m'=1}^M \frac{\partial^2}{\partial X_m \partial X_{m'}} \left[\rho_m G_{mm'}^{(2)} \right] - \frac{\partial}{\partial X_m} \left[\rho_m G_m^{(1)} \right]. \quad (1.17)$$

Применив формулу дифференцирования произведения функций, уравнение (1.17) представим в виде:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} = A_m \rho_m + b_m \frac{\partial \rho_m}{\partial X_m} + \frac{1}{2} \sum_{m'=1}^M G_{mm'}^{(2)} \frac{\partial^2 \rho_m}{\partial X_m \partial X_{m'}}. \quad (1.18)$$

Учитывая функции $P_1^{(m)} : \vec{E}_m^{(o)} \rightarrow \vec{E}_m$, $P_2^{(m)} : \vec{E}(s) \rightarrow \vec{E}_m^{(o)}$ и $X_m = \oint_{L_m} \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$ установим зависимость составляющих X_m от $(x, y) \in \Omega_m$, заданных в соответствующих системах координат в раскрывах m -х излучателей. Для установленной зависимости $X_m = X_m(x, y)$ проведем преобразование координат фазового пространства с плотностью вероятности $\tilde{\rho}_m(x, y, t) = \rho_m(X_m, t) \sqrt{\left(\frac{\partial X_m}{\partial x} \right)^{-2} + \left(\frac{\partial X_m}{\partial y} \right)^{-2}}$ [98] в стохастическом дифференциальном уравнении (1.18) с применением правил дифференцирования сложных функций и с учетом $\mathbf{C}_m = \mathbf{C}_m^T$ представим его в квадратичной форме:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_m}{\partial t} = A_m \tilde{\rho}_m + \vec{B}_m \cdot \nabla \tilde{\rho}_m + \left(\nabla \mathbf{C}_m \nabla^T \right) \tilde{\rho}_m. \quad (1.19)$$

Для граничных условий [98]: $\int_{\Omega_m} \tilde{\rho}_m(x, y, t) d\Omega = 1$; $\tilde{\rho}_m(x, y, t) = 0, \forall (x, y) \in \Omega_{m'}, m' \neq m$; $\tilde{\rho}_m(x, y, t) \geq 0, \forall (x, y) \in \Omega_m$ и определения значений функций

АПВ $\tilde{\rho}_m$ относительно величины ЭДС, снимаемой с выходов m -х излучающих элементов, справедлива характеристика функциями АПВ $\tilde{\rho}_m$ нормированного значения плотности потока энергии ЭМП в раскрывах m -х излучателей Ω_m , т. е. $\tilde{\mathcal{J}}_m(x, y, t) = \tilde{\rho}_m(x, y, t)$.

Полученные представления позволяют задать уравнение (1.19) относительно $\tilde{\mathcal{J}}_m = \tilde{\rho}_m = \tilde{\mathcal{J}}_m(x, y, t)$ в матричной форме (1.16). \square

Решение краевой задачи (1.16) предполагается выполнять численно вариационными методами [99] при определении аппроксимации Ритца функции $\tilde{\mathcal{J}}_m$ соотношением $\tilde{\mathcal{J}}_m(x, y, t) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} I_j^{\langle m \rangle}(t) \alpha_j^{\langle m \rangle}(x, y)$, где $\alpha_j^{\langle m \rangle}(x, y)$ – некоторый интерполяционный полином, учитывающий функцию формы m -го излучателя при представлении Ω_m произвольным многоугольником из N_m вершин (любую криволинейную границу области можно сколь угодно точно представить кусочно-линейной с учетом известных решений, например [100, 101]); $I_j^{\langle m \rangle}(t)$ – величина нормированного значения плотности потока энергии в j -х узловых точках Ω_m в момент времени t ; p – порядок аппроксимации; j – мультииндекс из множества \mathbb{M}_p [102]:

$$\mathbb{M}_p = \left\{ j = (j_1, j_2, \dots, j_n, \dots, j_{N_m}) : j_n \in \mathbb{Z}, j_n \geq 0, \sum_{n \in [1; N_m]} j_n = p \right\}. \quad (1.20)$$

Для заданной аппроксимации в приближении вариационных методов Галеркина и Ритца сведем задачу (1.16) к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), представленной в матричном виде:

$$\vec{I}^{\langle m \rangle}(\vec{u}, t) - \mathbf{Q}_m(\vec{u}) \vec{I}^{\langle m \rangle}(t) = 0, \quad (1.21)$$

где $\vec{I}^{\langle m \rangle}(t) = \left(I_j^{\langle m \rangle}(t) \right)_{|\mathbb{M}_p|}$; $\vec{I}^{\langle m \rangle}(\vec{u}, t) = \left(\partial I_j^{\langle m \rangle}(\vec{u}, t) / \partial t \right)_{|\mathbb{M}_p|}$; $\mathbf{Q}_m(\vec{u}) = \left(Q_{jj'}^{\langle m \rangle}(\vec{u}) \right)_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}$ при $Q_{jj'}^{\langle m \rangle}(\vec{u}) = \int_{\Omega_m} \left\{ \left[A_m(\vec{u}) \alpha_j^{\langle m \rangle} + \vec{B}_m(\vec{u}) \cdot \nabla \alpha_j^{\langle m \rangle} + \left(\nabla \mathbf{C}_m \nabla^T \right) \alpha_j^{\langle m \rangle} \right] \alpha_{j'}^{\langle m \rangle} \right\} d\Omega$.

Полученные результаты позволяют несколько упростить известные решения, применяемые при синтезе стохастических оптимальных систем [96]. С

учетом (1.21) и связью максимума правдоподобия с минимумом эмпирического риска (средние потери) сформулируем задачу оптимального в среднем управления АМЛЗА по минимизации квадратичной функции потерь

$$F\left(\vec{I}^{\langle 1 \rangle}, \dots, \vec{I}^{\langle M \rangle}, \vec{u}\right) = \int_{t_0}^{t_1} F^0\left(\vec{I}^{\langle 1 \rangle}, \dots, \vec{I}^{\langle M \rangle}, \vec{u}, \tau\right) d\tau \rightarrow \min_{\vec{u}(\cdot) \in \mathbb{U}} \quad (1.22)$$

для заданного уравнения состояния

$$\dot{\vec{I}}^{\langle m \rangle}(\vec{u}, t) = \mathbf{Q}_m(\vec{u}) \vec{I}^{\langle m \rangle}(t), \quad (1.23)$$

и начального условия

$$\vec{I}^{\langle m \rangle}(t_0) = \vec{I}_0^{\langle m \rangle}, \quad (1.24)$$

где $F^0\left(\vec{I}^{\langle 1 \rangle}, \dots, \vec{I}^{\langle M \rangle}, \vec{u}, t\right) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \left(I_j^{\langle m \rangle}(t) - I_{p,j}^{\langle m \rangle}(\vec{u}, t)\right)^2$; $I_p^{\langle m \rangle}(\vec{u}, t)$ – распределение нормированных значений плотности потока энергии в j -х узловых точках Ω_m в момент времени t для заданных значений \vec{u} ; $t \in [t_0, t_1]$; $[t_0, t_1]$ – нефиксированный отрезок времени управления; \mathbb{U} – множество допустимых управлений.

Значения $\vec{I}_p^{\langle m \rangle}(\vec{u}, t) = \left(I_{p,j}^{\langle m \rangle}(\vec{u}, t)\right)_{|\mathbb{M}_p|}$ для $\alpha_j^{\langle m \rangle}(x, y)$ при $\tilde{\mathcal{J}}_m^p(\vec{u}, x, y, t) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} I_{p,j}^{\langle m \rangle}(\vec{u}, t) \alpha_j^{\langle m \rangle}(x, y)$ определяется из решения задачи $\int_{\Omega_m} |\tilde{\mathcal{J}}_m'(\vec{u}, x, y, t) - \tilde{\mathcal{J}}_m^p(\vec{u}, x, y, t)|^2 d\Omega \rightarrow \min$ соотношением

$$\vec{I}_p^{\langle m \rangle}(\vec{u}, t) = \tilde{\mathbf{I}}_m^{-1} \vec{\mathcal{J}}_m(\vec{u}, t), \quad (1.25)$$

где $\tilde{\mathbf{I}}_m = \left(\tilde{I}_{jj'}^{\langle m \rangle}\right)_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}$ при $\tilde{I}_{jj'}^{\langle m \rangle} = \int_{\Omega_m} \alpha_j^{\langle m \rangle} \alpha_{j'}^{\langle m \rangle} d\Omega$; $\vec{\mathcal{J}}_m(\vec{u}, t) = \left(\mathcal{J}_j^{\langle m \rangle}(\vec{u}, t)\right)_{|\mathbb{M}_p|}$ при $\mathcal{J}_j^{\langle m \rangle}(\vec{u}, t) = \int_{\Omega_m} \tilde{\mathcal{J}}_m'(\vec{u}, t) \alpha_j^{\langle m \rangle} d\Omega$; $\tilde{\mathcal{J}}_m'(\vec{u}, t) =$

$= \tilde{\mathcal{J}}'_m(\vec{u}, x, y, t)$, а $\tilde{\mathcal{J}}'_m(\vec{u}, x, y, t)$ задается соотношением [20]

$$\tilde{\mathcal{J}}'_m(\vec{u}, x, y, t) = \frac{\left| \vec{E}_m^{(o)}(\vec{u}, x, y, t) \times \vec{H}_m^{(o)}(\vec{u}, x, y, t) \right|}{\int_{\Omega_m} \left| \vec{E}_m^{(o)}(\vec{u}, x, y, t) \times \vec{H}_m^{(o)}(\vec{u}, x, y, t) \right| d\Omega}, \quad (1.26)$$

при оценке составляющих напряженностей электрического $\vec{E}_m^{(o)}(\vec{u}, x, y, t)$ и магнитного $\vec{H}_m^{(o)}(\vec{u}, x, y, t)$ полей функциями $P_2^{(m)}$ в раскрывах m -х излучателей $(x, y) \in \Omega_m$.

Решение задачи (1.22)–(1.24) в виду невозможности удовлетворить условию стационарности выполним с учетом принципа максимума Понтрягина [103]. Функцию Гамильтона определим в виде:

$$\begin{aligned} H(\vec{I}^{\langle 1 \rangle}, \dots, \vec{I}^{\langle M \rangle}, \vec{\psi}^{\langle 1 \rangle}, \dots, \vec{\psi}^{\langle M \rangle}, \vec{u}, t) &= \\ &= F^0(\vec{I}^{\langle 1 \rangle}, \dots, \vec{I}^{\langle M \rangle}, \vec{u}, t) - \sum_{m=1}^M \left[\left(\vec{\psi}^{\langle m \rangle}(t) \right)^T \mathbf{Q}_m(\vec{u}) \vec{I}^{\langle m \rangle}(t) \right], \end{aligned} \quad (1.27)$$

где $\vec{\psi}^{\langle m \rangle} = \left(\psi_j^{\langle m \rangle} \right)_{|\mathbb{M}_p|}$ – вспомогательный вектор импульсов управления.

С учетом (1.27) при $H(\vec{I}^{\langle 1 \rangle}, \dots, \vec{I}^{\langle M \rangle}, \vec{\psi}^{\langle 1 \rangle}, \dots, \vec{\psi}^{\langle M \rangle}, \vec{u}, t) \rightarrow \min_{\vec{u}(\cdot) \in \mathbb{U}}$ для $t \in [t_0, t_1]$ итоговую задачу управления АМЛЗА сведем к решению системы ОДУ, включающей для $m = \overline{1, M}$:

$$\text{уравнение управления } \partial H(t) / \partial \vec{u} = 0; \quad (1.28)$$

$$\text{уравнение состояния } \dot{\vec{I}}^{\langle m \rangle}(t) = -\partial H(t) / \partial \vec{\psi}^{\langle m \rangle}; \quad (1.29)$$

$$\text{сопряженное уравнение } \dot{\vec{\psi}}^{\langle m \rangle}(t) = \partial H(t) / \partial \vec{I}^{\langle m \rangle}, \quad (1.30)$$

где $H(t) = H(\vec{I}^{\langle 1 \rangle}, \dots, \vec{I}^{\langle M \rangle}, \vec{\psi}^{\langle 1 \rangle}, \dots, \vec{\psi}^{\langle M \rangle}, \vec{u}, t)$; $\dot{\vec{\psi}}^{\langle m \rangle}(t) = \left(\partial \psi_j^{\langle m \rangle}(t) / \partial t \right)_{|\mathbb{M}_p|}$.

Вычисление частных производных в (1.28)–(1.30) с целью снижения вычислительных затрат при последующей алгоритмической реализации предполагается выполнять аналитически с учетом (1.22), (1.25)–(1.27) и функций $P_1^{(m)}$ и $P_2^{(m)}$. Общее решение сформированной задачи управления (1.28)–(1.30) выполняется численно с использованием современных методов разделения систем

ОДУ для построения экономичных явных схем типа Рунге–Кутты [104] и комбинированных эволюционных методов [105, 106].

1.5. Подавление помех адаптивной многолучевой зеркальной антенной

Заданные соотношения (1.28)–(1.30) с учетом критерия (1.22) согласно результатам, полученных в корреляционной теории ПВОС [13, 14], соответствуют стандартному критерию качества ААР – МОП (см. пп. 1.2). Целесообразность его использования заключается в том, что на практике в большинстве возможных случаев единственная априорная информация о полезном сигнале состоит в известности направления его возможного прихода. При этом для полученных результатов в сравнении с теорией ААР [14, 16, 17] возникает дополнительный интерес в оценке числа \mathcal{N} подавляемых АМЛЗА помеховых сигналов.

Утверждение 1. Пусть задана АМЛЗА, включающая M излучателей и деформируемый рефлектор с K устройствами деформации, тогда, принимая полезный сигнал $\zeta(t)$ с направления (θ, ξ) , АМЛЗА максимально способна подавить $\mathcal{N} = M \cdot K - 1$ помеховых сигналов $\tilde{\eta}_n(t)$, которые приходят с направлений $(\theta_n, \xi_n) \neq (\theta, \xi)$, где $n = \overline{1, \mathcal{N}}$.

Доказательство. С учетом принципа обратимости процессов приема и передачи для заданной модели приемной АМЛЗА (рис. 1.6) изначально отметим, что для доказательства справедливо рассматривать антенну и как передающую. Из теории ААР известно [14], что изменением амплитуды $A_m^{(o)}$ и фазы $\varphi_m^{(o)}$ токов возбуждения m -х реальных источников ЭМП (излучатели) можно добиться подавления $M - 1$ помеховых сигналов при формировании $M - 1$ нулей диаграммы направленности (ДН) весовыми коэффициентами $w_m^{(o)} = A_m^{(o)} e^{i\varphi_m^{(o)}}$, где $i = \sqrt{-1}$. При этом ноль ДН в некотором направлении задается интерференцией когерентных волн антенны равных по амплитуде и противоположных по фазе. Число M весовых коэффициентов $w_m^{(o)}$ определяет число степеней свободы ААР. Исходя из принципа Гюйгенса–Френеля АМЛЗА содержит M

весовых коэффициентов $w_m^{(o)}$, параметризующих совокупность реальных источников (излучатели), и весовой коэффициент $w^{(d)}$, параметризующий комплексную амплитуду совокупности фиктивных вторичных источников (рефлектор). Рассмотрим $w^{(d)}$ в качестве скалярного потенциала в точке \vec{Q} . Из интегральной теоремы Кирхгофа–Гельмгольца известно, что мгновенное значение $w^{(d)}(t, \vec{Q})$ определяется соотношениями [107]

$$\begin{aligned} w^{(d)}(t, \vec{Q}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v^{(p)}(\omega, \vec{Q}) e^{-i\omega t} d\omega; \\ v^{(p)}(\omega, \vec{Q}) &= \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \frac{\partial v^{(p)}}{\partial \vec{n}_0} \frac{e^{-i\kappa R}}{R} - v^{(p)} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_0} \left(\frac{e^{-i\kappa R}}{R} \right) \right\} dS, \end{aligned} \quad (1.31)$$

где $\kappa = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$; R – расстояние между \vec{Q} и точкой интегрирования на поверхности S рефлектора; \vec{n}_0 – орт вектора нормали к поверхности рефлектора в точке интегрирования.

Задав аппроксимацию функции $v^{(p)} = \sum_{k=1}^K v_k^{\text{II}} \alpha_k^{\text{II}}(x, y)$ под знаком второго интеграла (1.31) в некоторой K -мерной системе ортогональных функций $\alpha_k^{\text{II}}(x, y)$ деформации формы приведем (1.31) к виду

$$w^{(d)}(t, \vec{Q}) = \sum_{k=1}^K A_k^{(p)}(t, \vec{Q}) e^{i\varphi_k^{(p)}(t, \vec{Q})}, \quad (1.32)$$

где $A_k^{(p)}$ и $\varphi_k^{(p)}$ характеризуются амплитудой и фазой соответствующего комплексного числа

$$w_k^{(d)} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v_k^{\text{II}} e^{-i\omega t} \oint_S \left\{ \frac{\partial \alpha_k^{\text{II}}}{\partial \vec{n}_0} \frac{e^{-i\kappa R}}{R} - \alpha_k^{\text{II}} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_0} \left(\frac{e^{-i\kappa R}}{R} \right) \right\} dS d\omega. \quad (1.33)$$

Полученные соотношения (1.32), (1.33) определяют то, что при параметризации поверхности рефлектора положением $X_k^{\text{II}}, Y_k^{\text{II}}, Z_k^{\text{II}}$ деформирующих стержней $z(x, y) = \sum_{k=1}^K Z_k^{\text{II}} \delta(x - X_k^{\text{II}}) \delta(y - Y_k^{\text{II}})$ число степеней свободы рефлектора равно K .

Поскольку k -е весовые функции $w_k^{(d)}$ являются фиктивными вторичными источниками излучения m -х излучателей ($m = \overline{1, M}$) общее число степеней свободы АМЛЗА $\mathcal{M} = M \cdot K$. Таким образом, принимая смесь, включающую один полезный и N помеховых сигналов, АМЛЗА способна подавить $\mathcal{N} = M \cdot K - 1$ помех. \square

Из утверждения 1, закона необходимого разнообразия при $K \rightarrow \infty$ следует.

Следствие 1. *Существует конструкция адаптивной многолучевой зеркальной антенны, инвариантной к воздействию помех.*

Выводы по первой главе

1. Результаты анализа ретроспективы объекта и предмета исследования по ряду энергетических и конструктивно-технологических преимуществ определили предпочтительное применение на современных комплексах многоканальной радиосвязи адаптивных многолучевых зеркальных антенн. Выявлены основные недостатки аналитических и численных методов анализа и синтеза антенных систем зеркального типа. Сформулированы направления развития теории антенных систем в части модификации существующих и разработки новых численных и аналитических методов анализа и синтеза адаптивных многолучевых зеркальных антенн при взаимоувязанном решении внешней и внутренней задач электродинамики теории антенн.

2. Выполнен анализа типовых критериев синтеза зеркальных антенн и определено, что наиболее общим критерием, позволяющим синтезировать антенную систему во взаимосвязи решения внешней и внутренней задач электродинамики, является правило максимизации КПД антенны в трактовке выражения (1.9). С целью снижения вычислительных затрат для последующей формализации проблемы управления адаптивной многолучевой зеркальной антенны в соответствии с леммой Лоренса и теоремой Робье определено, что критерий максимума КПД допустимо свести к согласованию ЭМП в режимах приема и

передачи в раскрывах излучателей. Выделены основные показатели и критерии качества адаптации антенных систем. Для формализованной постановки проблемы управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной определено, что наиболее общим критерием является правило максимизации отношения правдоподобия.

3. С учетом результатов, полученных в рамках проведенного ретроспективного анализа предметной области исследования, сформирована концепция исследования, сформулирована проблема исследования при структуризации проблем теории и практики, определена структура и содержание математической теории моделирования и синтеза адаптивных многолучевых зеркальных антенн.

4. Задана физико-математическая модель управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной (1.28)–(1.30) при определении для совместного решения внутренней и внешней задач электродинамики теории антенн в качестве состояния антенной системы распределение нормированного значения плотности потока энергии в раскрывах излучателей (1.23). Из формализованной постановки проблемы следует необходимость определения функций $P_1^{(m)} : \vec{E}_m^{(o)}(t) \rightarrow \vec{E}_m(t)$ и $P_2^{(m)} : \vec{E}^{(s)}(t) \rightarrow \vec{E}_m^{(o)}(t)$, формируемых на основе решения задач электродинамики в ограниченной и неограниченной расчетных областях соответственно, и интерполяционных полиномов $\alpha_j^{(m)}(x, y)$, учитывающих функцию формы m -го излучателя.

5. Выполнена оценка числа степеней свободы \mathcal{M} и максимально возможного числа \mathcal{N} подавляемых адаптивной многолучевой зеркальной антенной помех. С учетом закона необходимого разнообразия определена потенциальная возможность существования инвариантной к воздействию помех конструкции адаптивной многолучевой зеркальной антенны, реализация которой при условии разработки эффективных методов анализа и синтеза зеркальных антенн, численных методов оптимизации требует решение задачи по параметризации отражающей поверхности рефлектора положением деформирующих стержней.

Глава 2. БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЙ МЕТОД В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Барицентрический метод (БМ) является разновидностью вариационных методов, основой для формирования которых служат решения, полученные В. Ритцем, И.Г. Бубновым и Б.Г. Галеркиным. Его основная идея [108] заключается в обобщении процедуры аппроксимации скалярного или векторного потенциала, реализуемой полиномами лагранжевого типа в методе конечных элементов (МКЭ) и векторном методе конечных элементов (ВМКЭ) высоких порядков. При этом в БМ аппроксимирующий полином формируется в N -мерной барицентрической системе координат для всей области анализа Ω в целом без ее разбиения на элементарные подобласти. Предполагается, что Ω является областью с кусочно-линейной границей, а размерность N барицентрической системы координат определяется числом вершин Ω . Сложность БМ связана с определением взаимно-однозначного правила перевода прямоугольных координат Евклидова пространства $\mathbb{R}^{\tilde{n}}$ ($\tilde{n} \geq 2$) в N -мерную барицентрическую систему координат области анализа с кусочно-линейной границей. При этом в большинстве случаев для $N - 1 > \tilde{n}$ неполнота формируемой системы линейных уравнений при сопоставлении прямоугольных координат Евклидова пространства $\mathbb{R}^{\tilde{n}}$ с N барицентрическими координатами (БК) затрудняют обобщение известных решений для симплексов ($N - 1 = \tilde{n}$) [91, 109]. Основными этапами БМ для решения внутренней задачи электродинамики являются [24]: 1) формирование дифференциального уравнения относительно вектора напряженности электрического поля, вектора напряженности магнитного поля или векторного и скалярного потенциалов с учетом заданных граничных условий; 2) определение некоторых аппроксимирующих функций специального вида, позволяющих свести исходную задачу с достаточно большим числом степеней свободы к системе линейных алгебраических уравнений или системе ОДУ с конечным числом неизвестных; 3) численное решение полученной системы уравнений. С учетом того, что задачи электродинамики связаны с решением как скалярного, так и векторного уравнения Гельмгольца [31], по аналогии с МКЭ [33] реализацию

скалярного и векторного БМ необходимо определить отдельно. Также реализацию БМ при решении задач электродинамики I типа требуется сформировать как в частотной, так и во временной областях. Вопросы, рассмотренные в настоящей главе, нашли отражение в [24, 108, 118, 119, 125, 133, 201, 274].

2.1. Бариецентрические координаты Пуассона–Римана

Основу БМ составляют методы, связанные с определением БК. Бариецентрические координаты задаются набором скалярных параметров $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$, однозначно определяющих точку аффинного пространства P через заданный точечный базис P_1, P_2, \dots, P_N . Для БК аффинное пространство с заданным точечным базисом обобщает аффинные свойства Евклидова пространства $\mathbb{R}^{\tilde{n}}$ ($\tilde{n} \geq 2$) в замкнутой области с кусочно-линейной границей Ω (область анализа) – многограннике. Точечный базис задан N вершинами многогранника Ω .

Решение задачи определения БК для симплексов в Евклидовых пространствах, например для треугольника в \mathbb{R}^2 , известно давно [91]. Обобщение на более сложные области предложено E.L. Wachspress в \mathbb{R}^2 [110] значительно позднее в 1975 г. Соответствующие исследования активно ведутся и по настоящее время [111–124, 126]. Обзор существующих методов определения БК для областей с кусочно-линейной границей, заданных в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 , проведен в [24, 118, 119, 125, 274]. Однако решения, однозначно обобщающего все свойства БК симплекса для более сложных областей с кусочно-линейной границей, не найдено. Для формирования взаимно-однозначного решения при сохранении свойств аффинной инвариантности $\sum_{n=1}^N \zeta_n(P) P_n = P$, положительной определенности $\zeta_n \geq 0$ и равенства единице $\sum_{n=1}^N \zeta_n = 1$ БК определим следующее условие, позволяющее обобщить свойство БК для симплексов, например в \mathbb{R}^2 связанное с определением через отношение площадей.

Теорема 2. *Для того чтобы N -мерная система координат $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ являлась для Ω бариецентрической, необходимо, чтобы $\zeta_n(P)$ при $P \in \Omega$, $n = \overline{1, N}$ были гармоническими.*

Доказательство. Требования для БК и единственность их определения задают необходимость того, чтобы некоторая функция $\Phi(P) = \sum_{n=1}^N \xi_n(P) \Phi_n$, формирующая распределение потенциала Ньютона в Ω с исходно заданными произвольными значениями $\forall \Phi_n \in [0; 1]$ в вершинах многоугольника Ω , была гармонической, т. е. $\Delta\Phi = 0$ [112]. Из теоремы о среднем известно, что гармоническая функция $\Phi(P_{\zeta'})$ для круга $B_{P_{\zeta'}}^r \subset \Omega$ с центром в $P_{\zeta'}$ и радиусом r удовлетворяет равенству

$$\Phi(P_{\zeta'}) = \frac{1}{|B_{P_{\zeta'}}^r|} \int_{\partial B_{P_{\zeta'}}^r} \Phi(\zeta') dS(\zeta'), \quad (2.1)$$

где $\partial B_{P_{\zeta'}}^r$ и $|B_{P_{\zeta'}}^r|$ – граница круга и ее площадь соответственно; $dS(\zeta')$ – элемент площади.

Подставив в равенство (2.1) определение функции $\Phi(P_{\zeta'})$, получим

$$\sum_{n=1}^N \Phi_n \left(\xi_n(P_{\zeta'}) - \frac{1}{|B_{P_{\zeta'}}^r|} \int_{\partial B_{P_{\zeta'}}^r} \xi_n(\zeta') dS(\zeta') \right) = 0. \quad (2.2)$$

Из того, что тождество (2.2) должно выполняться для $\forall \Phi_n$, следует

$$\xi_n(P_{\zeta'}) = \frac{1}{|B_{P_{\zeta'}}^r|} \int_{\partial B_{P_{\zeta'}}^r} \xi_n(\zeta') dS(\zeta'), \quad (2.3)$$

т. е. БК должны быть гармоническими. □

Следствие 2. Любая барицентрическая координата $\xi_n(P)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\xi_n = 0$ для Ω при $\xi_n(P_{n'}) = \delta_n^{n'} = \begin{cases} 1, & n = n'; \\ 0, & n \neq n', \end{cases}$ ($n, n' \in \{\overline{1, N}\}$).

В [112] предложено обобщение БК для области Ω с кусочно-линейной границей с конечным множеством вершин до непрерывных (трансфинитных [127])

БК односвязной области $\tilde{\Omega}$ с непрерывной замкнутой границей $\tilde{\Gamma}$. При этом область $\tilde{\Omega}$, например для двухмерного случая, может рассматриваться как полигон с бесконечным числом вершин. Для удобства математического представления рассмотрим решение на комплексной плоскости $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}$ с сопоставлением положения точки $P \in \tilde{\Omega}$ комплексной переменной $z \in \mathbb{C}$. Трансфинитные БК определяются некоторой вещественной функцией ядра $H(\varsigma, z)$, где $\varsigma \in \tilde{\Gamma}$. При этом аппроксимация потенциала $\Phi(z)$ в $\tilde{\Omega}$ задается некоторым средневзвешенным значением:

$$\Phi(z) = \oint_{\tilde{\Gamma}} H(\varsigma, z) \Phi(\varsigma) dS(\varsigma), \quad (2.4)$$

где $dS(\varsigma)$ – элемент площади $\tilde{\Omega}$.

Согласно [112], ядро $H(\varsigma, z)$ должно быть гладким и удовлетворять требованиям:

- 1) положительной определенности $H(\varsigma, z) \geq 0$;
- 2) равенства единице $\oint_{\tilde{\Gamma}} H(\varsigma, z) dS(\varsigma) = 1$;
- 3) линейной прецессии $\oint_{\tilde{\Gamma}} \varsigma H(\varsigma, z) dS(\varsigma) = z$.

Одним из основных свойств ядра $H(\varsigma, z)$ при формировании БК является

$$\oint_{\tilde{\Gamma}} (\varsigma - z) H(\varsigma, z) dS(\varsigma) = 0. \quad (2.5)$$

С одной стороны, известно, что ядро $H(\varsigma, z)$, задающее гармоническую аппроксимацию для единичного круга $B'_P = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, называется ядром Пуассона и задается для выражения (2.4) соотношением

$$H(\varsigma, z) = |\varsigma - z|^{-2}. \quad (2.6)$$

С другой стороны, одним из важных свойств конформных отображений [95] является сохранение гармоничности некоторой функции. С учетом теоремы Римана об отображении для односвязной области $\tilde{\Omega}$ существует голоморфная

функция f на единичном круге B'_P , отображающая его на $\tilde{\Omega}$ взаимно-однозначно.

Указанные соображения позволяют определить для $\Omega \subset \mathbb{C}$ (нумерация вершин $P_n = r_n e^{i\varphi_n}$ задана в порядке положительного обхода области $\Omega : \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_N$) БК Пуассона–Римана [125], являющиеся гармоническими $\Delta \zeta_n = 0$ ($n = \overline{1, N}$) и удовлетворяющие для произвольного Ω заданным требованиям. Отметим, что в формулировке теоремы и ее доказательстве принято определение точки $P \in \tilde{\Omega}$ на комплексной плоскости, т. е. $P = z$ и $P \in \mathbb{C}$.

Теорема 3. *Барицентрические координаты $\zeta_n(P)$ для $\Omega \subset \mathbb{C}$ с вершинами $P_n = r_n e^{i\varphi_n}$ ($n = \overline{1, N}$) при $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_N$ определяются выражением*

$$\zeta_n(P) = w_n(P) \left/ \sum_{n=1}^N w_n(P) \right.; \quad (2.7)$$

$$w_n(P) = \frac{\left| \overrightarrow{PP'_{n-1}} \right| - \left| \overrightarrow{PP'_n} \right| \cos \phi_{n-1}}{\left| \overrightarrow{PP'_n} \right| \sin \phi_{n-1}} + \frac{\left| \overrightarrow{PP'_{n+1}} \right| - \left| \overrightarrow{PP'_n} \right| \cos \phi_n}{\left| \overrightarrow{PP'_n} \right| \sin \phi_n}.$$

В выражении (2.7) $P'_n = e^{i\varphi'_n} + \kappa$ – прообразы вершин P_n многоугольника Ω при его конформном отображении на единичный круг $B'_P = \{z \in \mathbb{C} : |z - \kappa| < 1\}$ с центром в $\kappa = P - P'$; P' – точка, заданная конформным отображением $P \in \Omega$ на единичный круг с центром в 0; ϕ_n – угол между $\overrightarrow{PP'_n}$ и $\overrightarrow{PP'_{n+1}}$.

Доказательство. Пусть точки $P'_n = e^{i\varphi'_n} + \kappa$, расположенные на единичной окружности $\partial B'_P \subset \mathbb{C}$ с центром в κ , являются прообразами вершин P_n многоугольника Ω при его конформном отображении на единичный круг $B'_P = \{z \in \mathbb{C} : |z - \kappa| < 1\}$. При этом точки P'_n расположены так, что $\overrightarrow{PP'_{n-1}} \cdot \overrightarrow{PP'_{n-1}} = \overrightarrow{PP'_n} \cdot \overrightarrow{PP'_n} = \overrightarrow{PP'_{n+1}} \cdot \overrightarrow{PP'_{n+1}} = 0$ (рис. 2.1), а прямое и обратное конформные отображения задают некоторые функции $f : B'_P \rightarrow \Omega$ и $F : \Omega \rightarrow B'_P$. Тогда из (2.4), (2.5) и теоремы о циркуляции для $H(\tau, P) =$

$= \left| 1 - e^{i\tau} \bar{P} \right|^{-2}$ следует, что

$$\int_0^{2\pi} (e^{i\tau} - P') H(\tau, P') d\tau = 0;$$

$$\int_{\varphi'_{n-1}}^{\varphi'_n} (e^{i\tau} - P') H(\tau, P') d\tau = \vec{r}_{n-1}; \quad \int_{\varphi'_n}^{\varphi'_{n+1}} (e^{i\tau} - P') H(\tau, P') d\tau = \vec{r}_n, \quad (2.8)$$

где \vec{r}_{n-1}, \vec{r}_n – внешние нормали к соответствующим дугам $e'_{n-1} = \{P'_{n-1}, P'_n\}$, $e'_n = \{P'_n, P'_{n+1}\}$ единичной окружности $\partial B'_P$ (рис. 2.1).

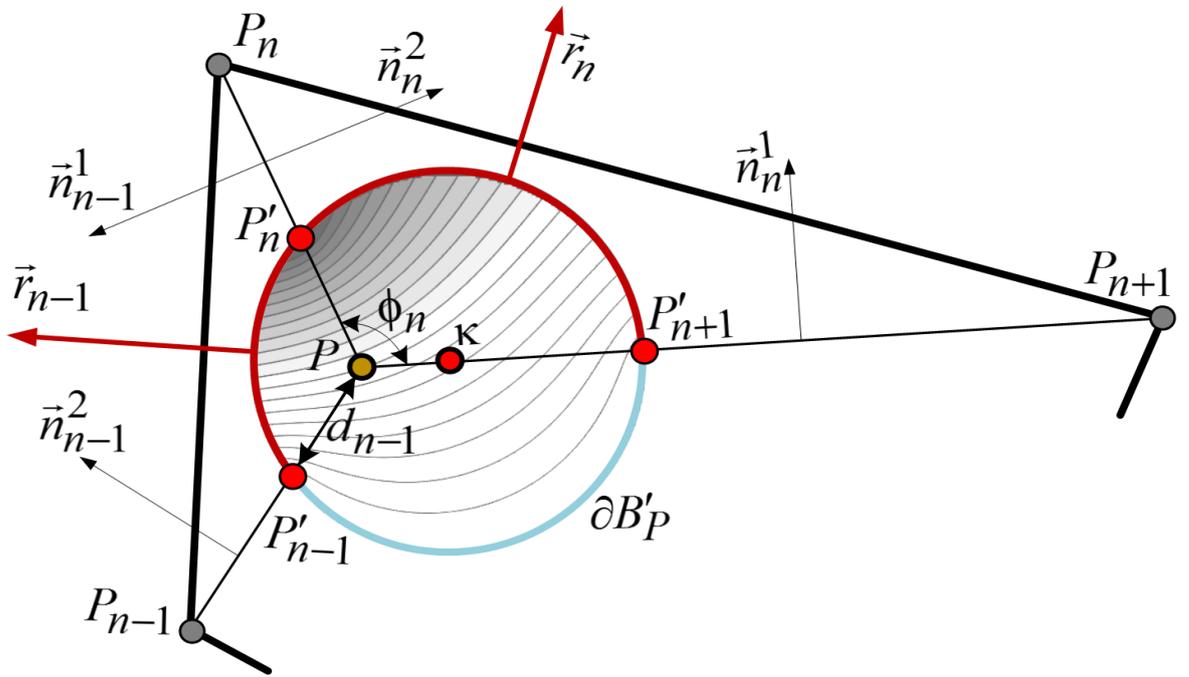


Рис. 2.1. Геометрическое представление задачи определения барицентрических координат Пуассона–Римана

С учетом свойств барицентрических координат определим значение для n -й граничной функции $\Phi_n(\tau)$, поставленное в соответствие n -й БК $\zeta_n(z)$, для $\tau \in \partial B'_P, z \in B'_P$ с учетом правила

$$\Phi_n(\tau) = \begin{cases} (\tau - \varphi'_{n-1}) / \varphi_n'^{\Delta} & \text{if } \varphi'_{n-1} \leq \tau \leq \varphi'_n; \\ (\varphi'_{n+1} - \tau) / \varphi_{n+1}'^{\Delta} & \text{if } \varphi'_n < \tau \leq \varphi'_{n+1}; \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2.9)$$

где $\varphi_n^{\Delta} = \varphi_n' - \varphi_{n-1}'$.

Из выражений (2.4), (2.9) при $\varphi_{n+1}' \leq \tau \vee \tau \leq \varphi_{n-1}'$: $\Phi_n(\tau) = 0$, $H(\tau, P) = |1 - e^{i\tau\bar{P}}|^{-2}$ и следствия 2 интеграл

$$\zeta_n(z) = \frac{1 - |z - \kappa|^2}{2\pi} \int_{\varphi_{n-1}'}^{\varphi_{n+1}'} \Phi_n(\tau) H(\tau, z - \kappa) d\tau \quad (2.10)$$

определяет $\zeta_n(z)$, где $z \in B'_P$.

Поскольку соотношение (2.10) удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\zeta_n(z) = 0$ при $z \in B'_P$ для граничных условий (2.9), то, подставив определение $z = F(P)$ в $\Delta\zeta_n(z) = 0$ и применив правило дифференцирования сложных функций, получим

$$\Delta\zeta_n(z) = \Delta\zeta_n(P) |F'(P)|^2 = 0, \quad (2.11)$$

что $\zeta_n(P)$ является решением уравнения Лапласа $\Delta\zeta_n(P) = 0$ для Ω .

Известно [126], что $\zeta_n(P)$ может быть задана $\zeta_n(P) = w_n(P) / \sum_{n=1}^N w_n(P)$ через однородные весовые функции $w_n(P)$. Для дискретного случая (2.5) $w_n(P)$ условия (2.8) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N w_n(P) (P_n - P) &= 0; \\ \frac{w_{n-1}(P) \overrightarrow{P\dot{P}}_{n-1} + w_n(P) \overrightarrow{P\dot{P}}_n}{|w_{n-1}(P) \overrightarrow{P\dot{P}}_{n-1} + w_n(P) \overrightarrow{P\dot{P}}_n|} &= \frac{\vec{r}_{n-1}}{|\vec{r}_{n-1}|}; \\ \frac{w_n(P) \overrightarrow{P\dot{P}}_n + w_{n+1}(P) \overrightarrow{P\dot{P}}_{n+1}}{|w_n(P) \overrightarrow{P\dot{P}}_n + w_{n+1}(P) \overrightarrow{P\dot{P}}_{n+1}|} &= \frac{\vec{r}_n}{|\vec{r}_n|}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

По правилу параллелограмма через пару векторов $\overrightarrow{P\dot{P}}_{n-1}$, $\overrightarrow{P\dot{P}}_n$ можно представить вектор \vec{r}_{n-1} соотношением

$$\vec{r}_{n-1} = u_{n-1}^1 \overrightarrow{P\dot{P}}_{n-1} + u_{n-1}^2 \overrightarrow{P\dot{P}}_n, \quad (2.13)$$

где u_{n-1}^1, u_{n-1}^2 – некоторые коэффициенты.

Из выражений (2.12), (2.13) и теоремы о среднем следует, что $w_n(P)$ может быть задана суммой коэффициентов:

$$w_n(P) = u_{n-1}^1 + u_n^2, \quad (2.14)$$

при определении $w_n(P)$ в качестве средневзвешенного значения точки $P \in \Omega$ по отношению к вершине P_n [126].

Из того, что векторы \vec{r}_{n-1}, \vec{r}_n определяются через единичные нормали соответствующих треугольных областей [109] и (2.13), следует, что коэффициенты u_{n-1}^1 и u_n^2 могут быть определены в виде

$$u_{n-1}^1 = \vec{r}_{n-1} \vec{n}_{n-1}^2 / \left(\overrightarrow{P\dot{P}}_n \vec{n}_{n-1}^2 \right); \quad u_n^2 = \vec{r}_n \vec{n}_n^1 / \left(\overrightarrow{P\dot{P}}_n \vec{n}_n^1 \right). \quad (2.15)$$

Используя определение единичных нормалей $\vec{n}_{n-1}^2 = \vec{N}_{n-1}^2 / \left| \vec{N}_{n-1}^2 \right|, \vec{n}_n^1 = \vec{N}_n^1 / \left| \vec{N}_n^1 \right|$, при нормировке приведем выражение (2.15) к виду

$$u_{n-1}^1 = \frac{d_n \vec{N}_{n-1}^1 \vec{N}_{n-1}^2 / \left| \vec{N}_{n-1}^1 \right| + d_{n-1} \left| \vec{N}_{n-1}^2 \right|}{\overrightarrow{P\dot{P}}_{n-1} \wedge \overrightarrow{P\dot{P}}_n}; \quad (2.16)$$

$$u_n^2 = \frac{d_n \vec{N}_n^1 \vec{N}_n^2 / \left| \vec{N}_n^2 \right| + d_{n+1} \left| \vec{N}_n^1 \right|}{\overrightarrow{P\dot{P}}_n \wedge \overrightarrow{P\dot{P}}_{n+1}},$$

где $d_n = \left| \overrightarrow{PP'_n} \right|$ – расстояние между P и точкой P'_n проекции вершины P_n многоугольника на единичную окружность $\partial B'_P$ с центром в $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y)$;

$$\vec{N}_{n-1}^1 = \begin{pmatrix} y_n - y \\ x - x_n \end{pmatrix} \overrightarrow{P\dot{P}}_{n-1} \wedge \overrightarrow{P\dot{P}}_n; \quad \vec{N}_n^1 = \begin{pmatrix} y_{n+1} - y \\ x - x_{n+1} \end{pmatrix} \overrightarrow{P\dot{P}}_n \wedge \overrightarrow{P\dot{P}}_{n+1}; \quad (2.17)$$

$$\vec{N}_{n-1}^2 = \begin{pmatrix} y - y_{n-1} \\ x_{n-1} - x \end{pmatrix} \overrightarrow{P\dot{P}}_{n-1} \wedge \overrightarrow{P\dot{P}}_n; \quad \vec{N}_n^2 = \begin{pmatrix} y_n - y \\ x - x_n \end{pmatrix} \overrightarrow{P\dot{P}}_n \wedge \overrightarrow{P\dot{P}}_{n+1}. \quad (2.18)$$

В выражениях (2.17), (2.18) \wedge – внешнее произведение векторов в \mathbb{R}^2 [24].

Подставив в соотношение (2.16) выражения (2.17), (2.18), получим

$$u_{n-1}^1 = \frac{1}{|\overrightarrow{PP'_n}|} \frac{d_{n-1} |\overrightarrow{PP'_{n-1}}| |\overrightarrow{PP'_n}| - d_n \overrightarrow{PP'_{n-1}} \overrightarrow{PP'_n}}{\overrightarrow{PP'_{n-1}} \wedge \overrightarrow{PP'_n}}; \quad (2.19)$$

$$u_n^2 = \frac{1}{|\overrightarrow{PP'_n}|} \frac{d_{n+1} |\overrightarrow{PP'_{n+1}}| |\overrightarrow{PP'_n}| - d_n \overrightarrow{PP'_n} \overrightarrow{PP'_{n+1}}}{\overrightarrow{PP'_n} \wedge \overrightarrow{PP'_{n+1}}}.$$

С учетом равенств $\cos \phi_n = \overrightarrow{PP'_n} \overrightarrow{PP'_{n+1}} |\overrightarrow{PP'_n}|^{-1} |\overrightarrow{PP'_{n+1}}|^{-1}$; $d_n = \frac{\overrightarrow{PP'_{n-1}} \overrightarrow{PP'_n}}{|\overrightarrow{PP'_n}|}$; $\sin \phi_n = \overrightarrow{PP'_n} \wedge \overrightarrow{PP'_{n+1}} |\overrightarrow{PP'_n}|^{-1} |\overrightarrow{PP'_{n+1}}|^{-1}$ представим выражение (2.19) соотношением

$$u_{n-1}^1 = \frac{|\overrightarrow{PP'_{n-1}}| - |\overrightarrow{PP'_n}| \cos \phi_{n-1}}{|\overrightarrow{PP'_n}| \sin \phi_{n-1}}; \quad u_n^2 = \frac{|\overrightarrow{PP'_{n+1}}| - |\overrightarrow{PP'_n}| \cos \phi_n}{|\overrightarrow{PP'_n}| \sin \phi_n}. \quad (2.20)$$

Подставив равенства (2.20) в выражение (2.14), получим соотношение (2.7). \square

Полученное соотношение (2.7) согласуется с результатами [124] и [126], обобщающими представление БК в \mathbb{R}^2 .

Точка проекции $P'_n = (x'_n, y'_n)$ при выполнении условия $\overrightarrow{PP'_{n-1}} \cdot \overrightarrow{PP'_{n-1}} = \overrightarrow{PP'_n} \cdot \overrightarrow{PP'_n} = \overrightarrow{PP'_{n+1}} \cdot \overrightarrow{PP'_{n+1}} = 0$ определяется решением системы уравнений пересечения вектора $\overrightarrow{PP'_n}$ с окружностью $\partial B'_P$. Корнями этой системы являются координаты:

$$x'_n = \frac{(x \operatorname{tg} \theta + \kappa_y - y) \operatorname{tg} \theta + \kappa_x \pm \sqrt{D}}{\operatorname{tg}^2 \theta + 1}; \quad (2.21)$$

$$y'_n = (x'_n - x) \operatorname{tg} \theta + y,$$

где $\operatorname{tg} \theta = \frac{y_n - y}{x_n - x}$; $D = \operatorname{tg}^2 \theta + 1 - [(x - \kappa_x) \operatorname{tg} \theta - (y - \kappa_y)]^2$.

Поскольку выражение (2.21) определяется двумя корнями, точкой проекции P'_n выбирается ближайшая к вершине P_n .

В случае, если условие $\overrightarrow{PP'_{n-1}} \cdot \overrightarrow{PP'_{n-1}} = \overrightarrow{PP'_n} \cdot \overrightarrow{PP'_n} = \overrightarrow{PP'_{n+1}} \cdot \overrightarrow{PP'_{n+1}} = 0$ не выполняется, P'_n определяется из решения задачи обратного конформно-

го отображения функцией $F : \Omega \rightarrow B'_P$. В этой ситуации заданное решение не будет являться строгим и БК, вычисленные по правилу (2.7), в общем случае будут псевдогармоническими [118]. Апостериорная оценка точности выполнения условия $\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial y^2} \right) \Omega = 0$ при определении ζ_n соотношением (2.7) показала, что погрешность вычисления БК для выпуклых Ω в худшем случае находится в пределах сотых долей процентов, что с учетом соизмеримости вычислительных затрат с известными методами определения БК [110–124, 126] является предпочтительным. К значительному снижению точности приводит определение БК по правилу (2.7) для вогнутых Ω

Таким образом, определение БК $\zeta_n(P)$ Пуассона–Римана по правилу (2.7) допустимо, если $\arg(\overrightarrow{PP}_{n-1}) < \arg(\overrightarrow{PP}_n) < \arg(\overrightarrow{PP}_{n+1})$. В противном случае для некоторых точек $P \in \Omega$ вогнутых многоугольников Ω с учетом свойств конформного отображения (2.11) и выражений (2.9), (2.10) БК $\zeta_n(P)$ Пуассона–Римана задаются следующим образом [125].

Следствие 3. Для $\Omega \subset \mathbb{C}$ весовые функции $w_n(P)$ барицентрических координат $\zeta_n(P)$ Пуассона–Римана в точке $P \in \Omega$ определяются соотношением

$$w_n(P) = \tilde{D}_n(P) + \tilde{G}_n(P), \quad (2.22)$$

где при $\varphi'_n{}^\Delta = \varphi'_n - \varphi'_{n-1}$ и $b_n = e^{i\varphi'_n}$

$$\tilde{D}_n(P) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\varphi'_{n-1}}{\varphi'_n{}^\Delta} \tilde{C}_{n-1}(P) + \frac{\varphi'_{n+1}}{\varphi'_{n+1}{}^\Delta} \tilde{C}_{n+1}(P) - \frac{\varphi'_{n+1} \varphi'_n{}^\Delta + \varphi'_{n-1} \varphi'_{n+1}{}^\Delta}{\varphi'_{n+1}{}^\Delta \varphi'_n{}^\Delta} \tilde{C}_n(P) \right];$$

$$\tilde{G}_n(P) = \frac{1 - |F(P)|^2}{2\pi \varphi'_{n+1}{}^\Delta \varphi'_n{}^\Delta} \left[\varphi'_{n+1}{}^\Delta \int_{\varphi'_n}^{\varphi'_{n+1}} \frac{\tau}{|1 - e^{i\tau} \overline{F(P)}|^2} d\tau - \varphi'_n{}^\Delta \int_{\varphi'_{n-1}}^{\varphi'_n} \frac{\tau}{|1 - e^{i\tau} \overline{F(P)}|^2} d\tau \right];$$

$$\tilde{C}_n(P) = \operatorname{arctg} \left[\frac{|F(P)| (b_n (1 + |F(P)|) - F(P)) - F(P)}{i (|F(P)| (b_n (1 + |F(P)|) - F(P)) - F(P))} \right].$$

На рисунке 2.2 приведены примеры аппроксимации скалярного потенциала БК Пуассона–Римана и кусочно-линейными функциями [24] (МКЭ, дискретизация области выполнена путем разбиения на 400 треугольных элементов) внутри вогнутой области Ω в случае задания значения потенциала единице в одной вершине и нулю для всех остальных.

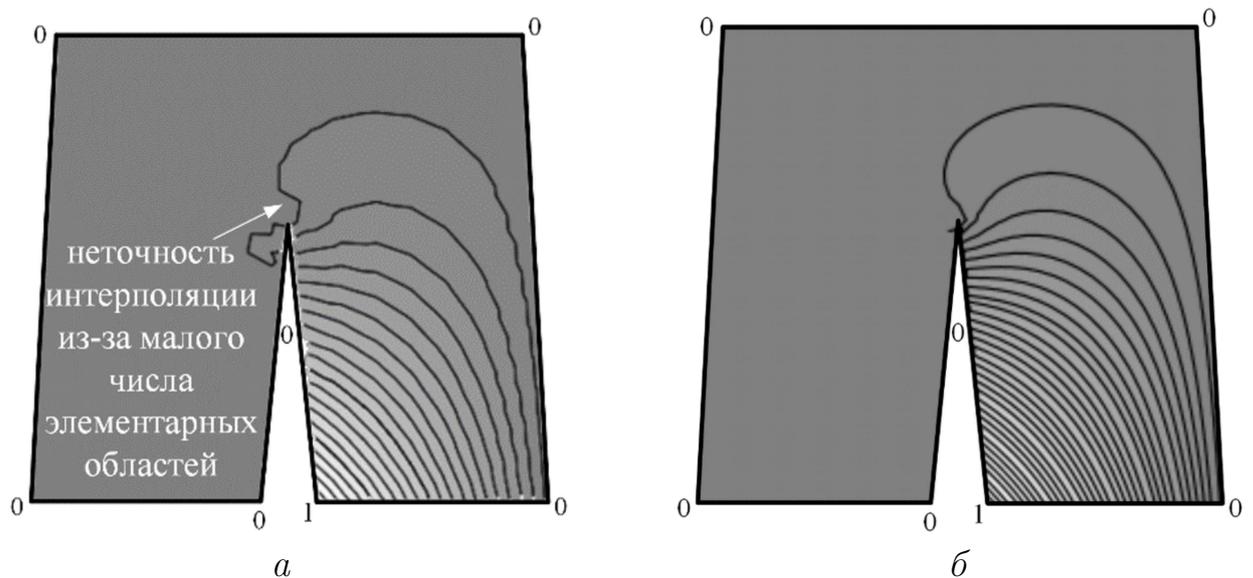


Рис. 2.2. Пример аппроксимации потенциала внутри вогнутого многоугольника: a – методом конечных элементов; b – с использованием БК Пуассона–Римана

Таким образом, полученные соотношения (2.7), (2.22) позволяют определить БК, являющиеся с учетом теоремы Римана о единственности конформного отображения гармоническими для заданной на плоскости области Ω с кусочно-линейной границей. С позиции вычислительных затрат критическим является построение обратного конформного отображения $F : \Omega \rightarrow B'_P$ и вычисление интегралов вида $\int_a^b \tau / |1 - e^{i\tau\bar{t}}| d\tau$ в выражении (2.22) в точках $P \in \Omega$, для которых условие $\arg(\overrightarrow{PP}_{n-1}) < \arg(\overrightarrow{PP}_n) < \arg(\overrightarrow{PP}_{n+1})$ не выполняется. Однако в сравнении с кусочно-линейной аппроксимацией вычислительные затраты определения БК Пуассона–Римана значительно ниже. Это связано с тем, что для получения требуемой точности аппроксимации БК Пуассона–Римана не требуются дополнительные процедуры разбиения Ω на как можно большее число элементарных подобластей с их последующим сшиванием.

С учетом заданных соотношений и геометрических представлений по формированию гармонических БК Пуассона–Римана для многоугольника определим решение задачи по заданию гармонических БК внутри многогранника в \mathbb{R}^3 . Геометрия задачи определения БК Пуассона–Римана для многогранника Ω в \mathbb{R}^3 представлена на рисунке 2.3 на примере выпуклой области Ω с пятью вершинами.

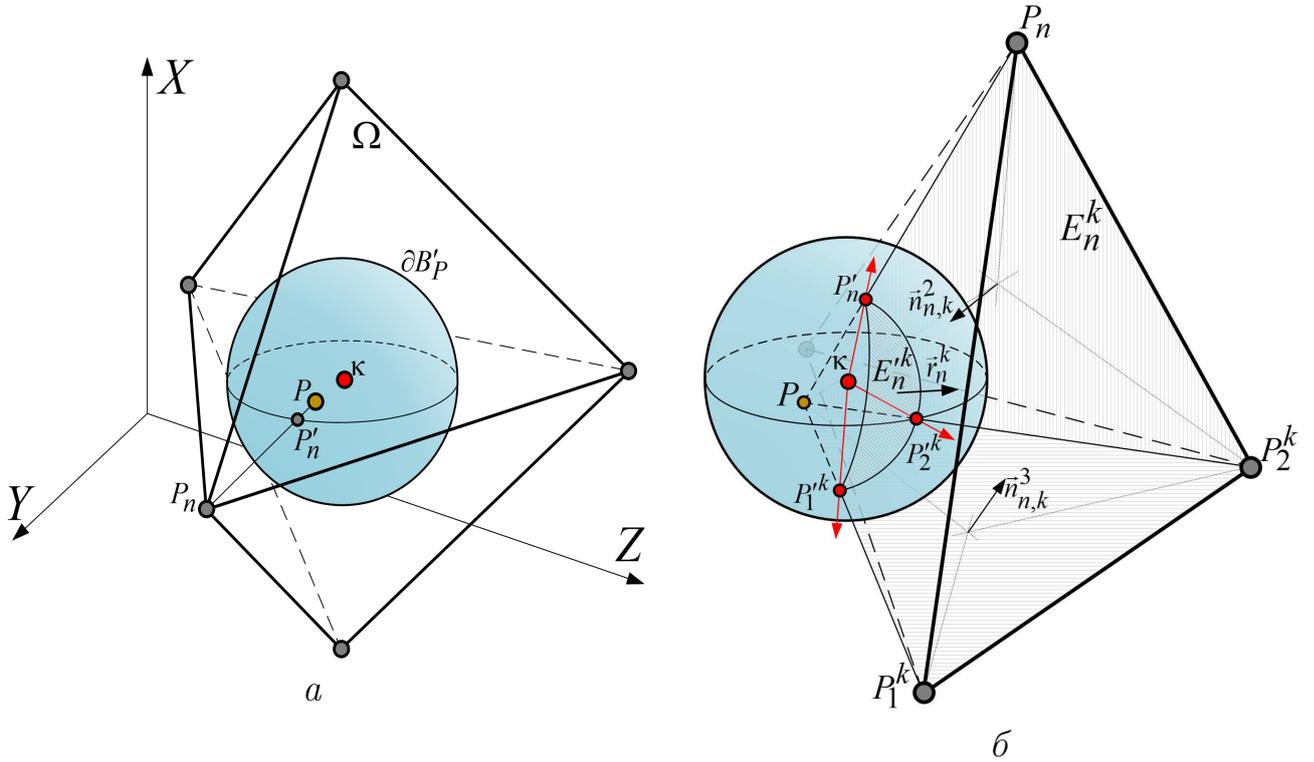


Рис. 2.3. Геометрическое представление проекции граней (δ) Ω на сегмент E_n' единичной сферы $\partial B'_P$ (a) для БК Пуассона–Римана

Нахождение БК $\zeta_n(P)$ для произвольной $P \in \Omega$ по аналогии с двухмерным решением сводится к проекции K треугольных граней $E_n^k = \{P_1^k, P_n, P_2^k\}$, $k = \overline{1, K}$ многогранника Ω на соответствующие сегменты $E_n'^k = \{P_1'^k, P_n', P_2'^k\}$ единичной сферы $\partial B'_P$ с центром в κ (рис. 2.3, δ). Набор граней E_n^k формируют грани Ω , содержащие вершину P_n .

БК Пуассона–Римана для Ω в \mathbb{R}^3 задаются из решения уравнения Лапласа $\Delta \zeta_n(z) = 0$ для единичного шара $B'_P \subset \mathbb{R}^3$, а также для прямого и обратного конформного отображений $f : B'_P \rightarrow \Omega$ и $F : \Omega \rightarrow B'_P$. Отметим, что под конформным отображением в \mathbb{R}^3 будем понимать класс отображений,

сохраняющих все свойства конформных отображений плоских областей и определенный в [160] как гармонические по М. А. Лаврентьеву отображения [161] и их обобщения – квазипотенциальные отображения [160].

Теорема 4. *Барицентрические координаты $\zeta_n(P)$ для $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с вершинами P_n ($n = \overline{1, N}$) определяются выражением*

$$\begin{aligned} \zeta_n(P) = w_n(P) / \sum_{n=1}^N w_n(P); \quad w_n(P) = \sum_{k=1}^K \left(\left| \cos \phi_k^{12n} \right|^{-1} \times \right. \\ \times \left| \overrightarrow{P\dot{P}}_n \right|^{-1} \left[d_{nk}^1 \left(\cos \phi_k^{1n} \cos \phi_k^{12} - \cos \phi_k^{2n} \right) \left(\sin \phi_k^{1n} \sin \phi_k^{12} \right)^{-1} + \right. \\ \left. + d_{nk}^2 \left(\cos \phi_k^{2n} \cos \phi_k^{12} - \cos \phi_k^{1n} \right) \left(\sin \phi_k^{2n} \sin \phi_k^{12} \right)^{-1} + d_{nk}^3 \right] \Bigg). \end{aligned} \quad (2.23)$$

В выражении (2.23) $\phi_k^{12n}, \phi_k^{1n}, \phi_k^{2n}, \phi_k^{12}$ – углы между соответствующими парами векторов $\overrightarrow{P\dot{P}}_n$ и $\overrightarrow{P\dot{P}}_2^k \times \overrightarrow{P\dot{P}}_1^k, \overrightarrow{P\dot{P}}_n$ и $\overrightarrow{P\dot{P}}_1^k, \overrightarrow{P\dot{P}}_n$ и $\overrightarrow{P\dot{P}}_1^k, \overrightarrow{P\dot{P}}_1^k$ и $\overrightarrow{P\dot{P}}_2^k$; $d_{nk}^1, d_{nk}^2, d_{nk}^3$ – площади секторов единичного круга, образованного сечением шара B'_P плоскостями, задаваемые через соответствующие тройки точек $(P, P_1^k, P_n'), (P, P_2^k, P_n'), (P, P_1^k, P_2^k)$; P_n', P_1^k, P_2^k – прообразы вершин P_n, P_1^k, P_2^k грани E_n^k многогранника Ω при его конформном отображении на единичный шар B'_P с центром в $\kappa = P - P'$; P' – точка, заданная конформным отображением $P \in \Omega$ на единичный шар с центром в 0.

Доказательство. С учетом соотношения (2.11) при обобщении выражений (2.8), (2.10) в \mathbb{R}^3 и сохранении гармоничности функции $\zeta_n(P)$ для конформного отображения $F : \Omega \rightarrow B'_P$ требования к $w_n(P)$ для дискретного случая условие (2.5) примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N w_n(P) \overrightarrow{P\dot{P}}_n = \vec{0}; \\ \frac{w_{n-1}(P) \overrightarrow{P\dot{P}}_1^k + w_n(P) \overrightarrow{P\dot{P}}_n + w_{n+1}(P) \overrightarrow{P\dot{P}}_2^k}{\left| w_{n-1}(P) \overrightarrow{P\dot{P}}_1^k + w_n(P) \overrightarrow{P\dot{P}}_n + w_{n+1}(P) \overrightarrow{P\dot{P}}_2^k \right|} = \frac{\vec{r}_n^k}{\left| \vec{r}_n^k \right|}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

при $k = \overline{1, K}$; $P_1^k = P_{n-1}$; $P_2^k = P_{n+1}$.

По правилу параллелепипеда через тройку векторов $\overrightarrow{PP_1^k}$, $\overrightarrow{PP_n}$, $\overrightarrow{PP_2^k}$ можно представить вектор \vec{r}_n^k соотношением

$$\vec{r}_n^k = u_{nk}^1 \overrightarrow{PP_1^k} + u_{nk}^2 \overrightarrow{PP_n} + u_{nk}^3 \overrightarrow{PP_2^k}, \quad (2.25)$$

где u_{nk}^1 , u_{nk}^2 , u_{nk}^3 – некоторые коэффициенты.

Из выражений (2.24), (2.25) и $\overrightarrow{PP_n} \sum_{k=1}^K \vec{r}_n^k = 0$ следует, что $w_n(P)$ может быть задана суммой коэффициентов

$$w_n(P) = \sum_{k=1}^K u_{nk}^2. \quad (2.26)$$

Определим вектор \vec{r}_n^k через единичные нормали \vec{n}_{nk}^l ($l = \overline{1,3}$) соответствующих граней (рис. 2.3) тетраэдра $\Delta(P, P_1^k, P_n, P_2^k)$ выражением

$$\vec{r}_n^k = \sum_{l=1}^3 d_{nk}^l \vec{n}_{nk}^l. \quad (2.27)$$

В выражении (2.27) орт-нормали \vec{n}_{nk}^1 , \vec{n}_{nk}^2 , \vec{n}_{nk}^3 задаются соотношениями

$$\vec{n}_{nk}^1 = \vec{N}_{nk}^1 / |\vec{N}_{nk}^1|; \quad \vec{n}_{nk}^2 = \vec{N}_{nk}^2 / |\vec{N}_{nk}^2|; \quad \vec{n}_{nk}^3 = \vec{N}_{nk}^3 / |\vec{N}_{nk}^3|, \quad (2.28)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{N}_{nk}^1 &= \delta_n^k \overrightarrow{PP_n} \times \overrightarrow{PP_1^k}; \quad \vec{N}_{nk}^2 = \delta_n^k \overrightarrow{PP_2^k} \times \overrightarrow{PP_n}; \quad \vec{N}_{nk}^3 = \delta_n^k \overrightarrow{PP_1^k} \times \overrightarrow{PP_2^k}; \\ \delta_n^k &= V_n^k / |V_n^k|; \quad V_n^k = \left[\vec{P}_1^k (\vec{P}_n \times \vec{P}_2^k) - \vec{P} (\vec{P}_n \times \vec{P}_2^k) + \right. \\ &\quad \left. + \vec{P} (\vec{P}_1^k \times \vec{P}_2^k) - \vec{P} (\vec{P}_1^k \times \vec{P}_n) \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

В выражении (2.28) $|V_n^k|$ – объем $\Delta(P, P_1^k, P_n, P_2^k)$.

Из соотношений (2.25), (2.27) следует, что коэффициенты u_{nk}^2 могут быть определены в виде

$$u_{nk}^2 = \frac{\vec{r}_n^k \vec{n}_{nk}^3}{\overrightarrow{PP_n} \vec{n}_{nk}^3}. \quad (2.30)$$

Используя выражения (2.27)–(2.29) представим равенство (2.30) в виде

$$\begin{aligned}
u_{nk}^2 = & \frac{\delta_n^k}{\overrightarrow{P\dot{P}}_n \left(\overrightarrow{P\dot{P}}_2^k \times \overrightarrow{P\dot{P}}_1^k \right)} \left[d_{nk}^3 \left| \overrightarrow{P\dot{P}}_2^k \times \overrightarrow{P\dot{P}}_1^k \right| + \right. \\
& + d_{nk}^1 \frac{\left(\overrightarrow{P\dot{P}}_1^k \times \overrightarrow{P\dot{P}}_n \right) \left(\overrightarrow{P\dot{P}}_2^k \times \overrightarrow{P\dot{P}}_1^k \right)}{\left| \left(\overrightarrow{P\dot{P}}_1^k \times \overrightarrow{P\dot{P}}_n \right) \right|} + \\
& \left. + d_{nk}^2 \frac{\left(\overrightarrow{P\dot{P}}_n \times \overrightarrow{P\dot{P}}_2^k \right) \left(\overrightarrow{P\dot{P}}_2^k \times \overrightarrow{P\dot{P}}_1^k \right)}{\left| \left(\overrightarrow{P\dot{P}}_n \times \overrightarrow{P\dot{P}}_2^k \right) \right|} \right]. \tag{2.31}
\end{aligned}$$

С учетом алгебраических свойств векторного произведения (тождества Лагранжа и смешанного произведения) и определения значений косинуса и синуса углов ϕ_k^{12n} , ϕ_k^{1n} , ϕ_k^{2n} , ϕ_k^{12} сведем (2.31) к выражению

$$\begin{aligned}
u_{nk}^2(P) = & \left| \cos \phi_k^{12n} \right|^{-1} \left| \overrightarrow{P\dot{P}}_n \right|^{-1} \left[d_{nk}^3 + d_{nk}^1 \times \right. \\
& \left. \times \frac{\cos \phi_k^{1n} \cos \phi_k^{12} - \cos \phi_k^{2n}}{\sin \phi_k^{1n} \sin \phi_k^{12}} + d_{nk}^2 \frac{\cos \phi_k^{2n} \cos \phi_k^{12} - \cos \phi_k^{1n}}{\sin \phi_k^{2n} \sin \phi_k^{12}} \right]. \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Подставив выражение (2.32) в равенство (2.26), получим итоговое соотношение (2.23). \square

В заданном геометрическом представлении (рис. 2.3) при выполнении условия $\overrightarrow{P\dot{P}}_n' \cdot \overrightarrow{P\dot{P}}_n = \overrightarrow{P\dot{P}}_1^k \cdot \overrightarrow{P\dot{P}}_1^k = \overrightarrow{P\dot{P}}_2^k \cdot \overrightarrow{P\dot{P}}_2^k = 0$ координаты точек P'_n определяются корнями системы трех уравнений пересечения вектора $\overrightarrow{P\dot{P}}_n$ с единичной сферой $\partial B'_P$. Корнями этой системы уравнений являются координаты:

$$\begin{aligned}
x'_n = & \frac{\left[\begin{aligned} & (x \operatorname{tg} \varphi + \kappa_z - z) \operatorname{tg} \varphi + \\ & + (x \operatorname{tg} \theta + \kappa_y - y) \operatorname{tg} \theta + \kappa_x \pm \sqrt{D} \end{aligned} \right]}{\operatorname{tg}^2 \theta + \operatorname{tg}^2 \varphi + 1}; \tag{2.33} \\
y'_n = & (x'_n - x) \operatorname{tg} \theta + y; \quad z'_n = (x'_n - x) \operatorname{tg} \varphi + z,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= (y_n - y) / (x_n - x); \operatorname{tg} \varphi = (z_n - z) / (x_n - x); \\ D &= \operatorname{tg}^2 \theta + \operatorname{tg}^2 \varphi + 1 - [(x - \kappa_x) \operatorname{tg} \varphi - (z - \kappa_z)]^2 - \\ &- [(x - \kappa_x) \operatorname{tg} \theta - (y - \kappa_y)]^2 - [(z - \kappa_z) \operatorname{tg} \theta - (y - \kappa_y) \operatorname{tg} \varphi]^2, \end{aligned} \quad (2.34)$$

при $P = (x, y, z)$; $P_n = (x_n, y_n, z_n)$; $\kappa = (\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z)$.

Из пары корней (2.33) точка, соответствующая P'_n , выбирается аналогично двумерному решению: из условия минимального расстояния до вершины P_n .

В случае, если условие $\overrightarrow{PP}'_n \cdot \overrightarrow{PP}_n = \overrightarrow{PP}'_1 \cdot \overrightarrow{PP}_1 = \overrightarrow{PP}'_2 \cdot \overrightarrow{PP}_2 = 0$ не выполняется, P'_n определяется из конформного отображения функцией $F: \Omega \rightarrow V'_P$ как прообраз вершины P_n .

На рисунке 2.4 представлены примеры аппроксимации потенциала внутри трехгранника, состоящего из пяти вершин с соответствующими координатами $P_1 = (0, 0, 0)$; $P_2 = (0, 50, 5)$; $P_3 = (0, 25, 50)$; $P_4 = (25, 25, 25)$; $P_5 = (-25, 25, 25)$, для различных срезов БК Пуассона–Римана в случае равенства единице его значений для одной вершины и нулю для всех остальных.

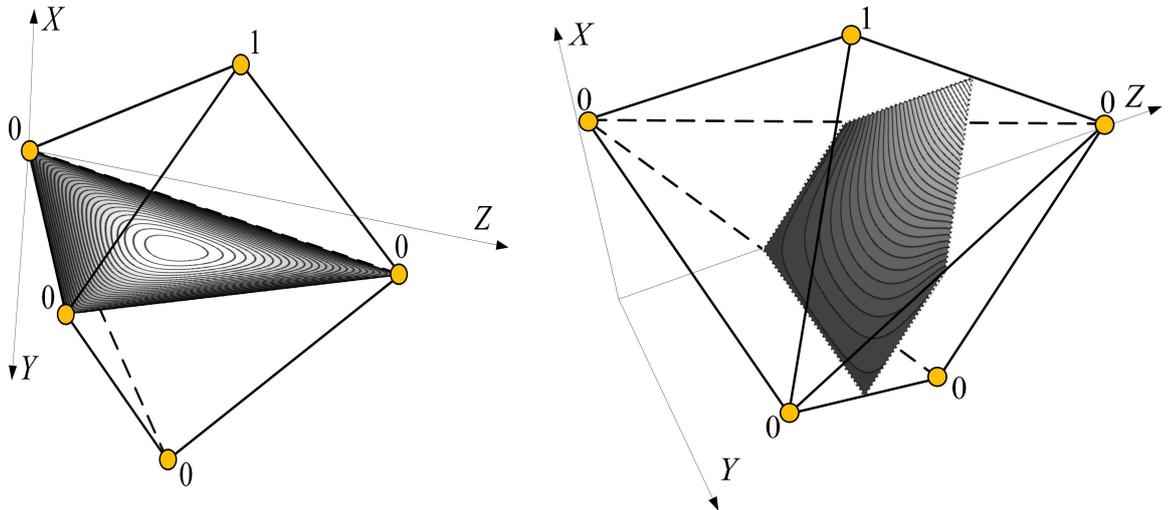


Рис. 2.4. Аппроксимация потенциала барицентрическими координатами Пуассона–Римана внутри многогранника

Следует отметить, что заданное правило (2.23) нахождения БК Пуассона–Римана в трехмерном пространстве справедливо для выпуклой области Ω , гранями которой являются треугольники.

Геометрия задачи определения БК Пуассона–Римана для произвольного многогранника Ω в \mathbb{R}^3 [125] представлена на рисунке 2.5. Основной момент нахождения БК $\zeta_n(P)$ для произвольной $P \in \Omega$ связан с проекцией K граней $E_n^k = \{P_n, P_1^k, \dots, P_{\tilde{N}}^k\}$ ($k = \overline{1, K}$) произвольного многогранника Ω на соответствующие сегменты $E_n^{k'} = \{P'_n, P_1^{k'}, \dots, P_{\tilde{N}}^{k'}\}$ единичной сферы $\partial B'_P$ с центром в κ (рис. 2.5, б). Набор граней E_n^k формирует грани многогранника Ω , содержащие вершину P_n . Переменная $\tilde{N} + 1$ определяет число вершин грани E_n^k . Точки $P'_n, P_1^{k'}, \dots, P_{\tilde{N}}^{k'}$ – прообразы вершин $P_n, P_1^k, \dots, P_{\tilde{N}}^k$ грани E_n^k многогранника Ω при его конформном отображении на единичный шар B'_P с центром в $\kappa = P - P'$; P' – точка, заданная конформным отображением $P \in \Omega$ на единичный шар с центром в 0 .

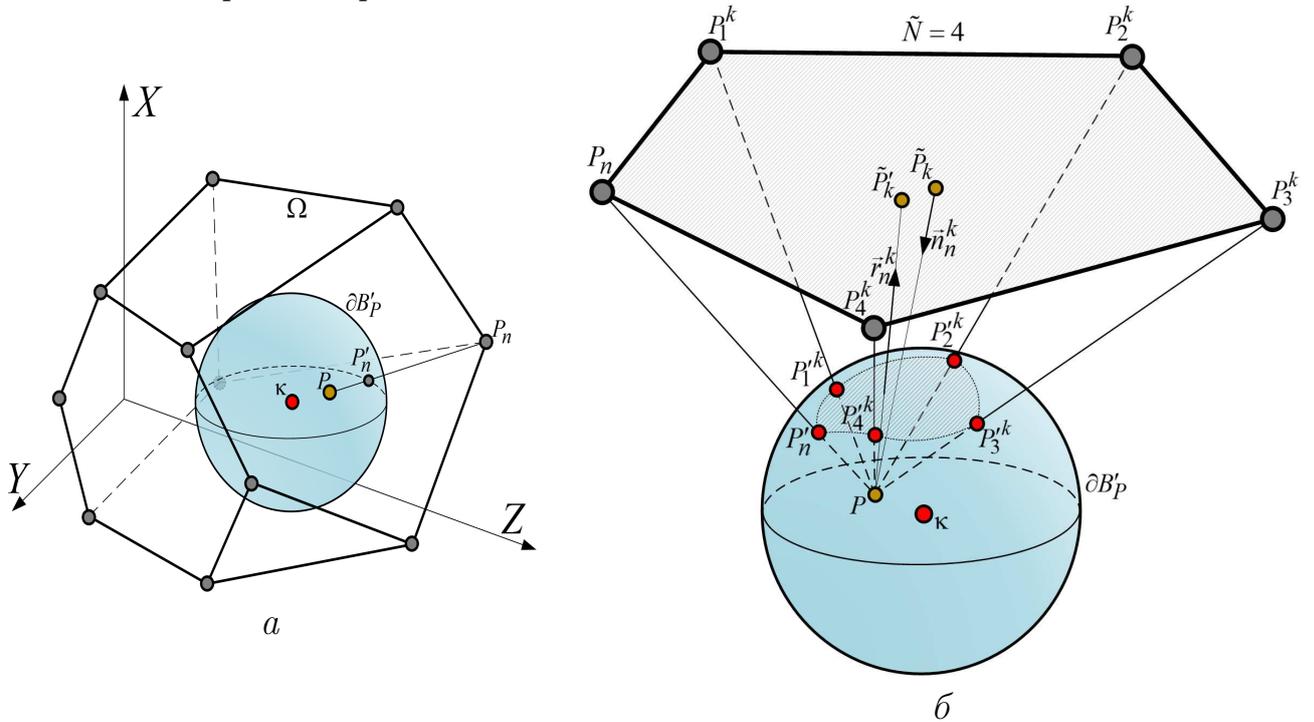


Рис. 2.5. Геометрическое представление определения проекции граней (б) произвольного многогранника Ω (а) на сегмент $E_n^{k'}$ единичной сферы $\partial B'_P$ для барицентрических координат Пуассона–Римана

Теорема 5. *Барицентрические координаты $\zeta_n(P)$ для $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с вершинами P_n ($n = \overline{1, N}$) определяются выражением*

$$\zeta_n(P) = \frac{w_n(P)}{\sum_{n=1}^N w_n(P)}; \quad w_n(P) = \sum_{k=1}^K \tilde{\zeta}_n^k(P) \frac{\vec{r}_n^k \vec{n}_n^k}{|P - \tilde{P}_k| |\vec{r}_n^k|}, \quad (2.35)$$

где $\tilde{\xi}_n^k(P)$ – барицентрическая координата многоугольника E_n^k относительно точки \tilde{P}'_k проекции $P \in \Omega$ на грань E_n^k в направлении вектора \vec{r}_n^k внешней нормали к сегменту E_n^k ; $\vec{n}_n^k = \overrightarrow{P_n \tilde{P}'_1} \times \overrightarrow{P_n \tilde{P}'_{\tilde{N}}} / \left| \overrightarrow{P_n \tilde{P}'_1} \times \overrightarrow{P_n \tilde{P}'_{\tilde{N}}} \right|$ – единичная внутренняя нормаль к E_n^k ; $\tilde{P}_k = P - \vec{n}_n^k \left[(P - P_0^k) \vec{n}_n^k \right]$ – точка проекции $P \in \Omega$ на грань E_n^k ; $P_0^k = \frac{1}{\tilde{N} + 1} \left(P_n + \sum_{\tilde{m}=1}^{\tilde{N}} P_{\tilde{m}}^k \right)$.

Доказательство. С учетом соотношения (2.11) при обобщении выражений (2.8), (2.10) в \mathbb{R}^3 и сохранения гармоничности функции $\xi_n(P)$ при конформном отображении $F : \Omega \rightarrow B'_P$ требования к $w_n(P)$ для произвольного многогранника Ω примут вид

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N w_n(P) \overrightarrow{P \tilde{P}'_n} &= \vec{0}; \\ \frac{w_n(P) \overrightarrow{P \tilde{P}'_n} + \sum_{\tilde{m}=1}^{\tilde{N}} w_{nk}^{\tilde{m}}(P) \overrightarrow{P \tilde{P}'_{\tilde{m}}}}{\left| w_n(P) \overrightarrow{P \tilde{P}'_n} + \sum_{\tilde{m}=1}^{\tilde{N}} w_{nk}^{\tilde{m}}(P) \overrightarrow{P \tilde{P}'_{\tilde{m}}} \right|} &= \frac{\vec{r}_n^k}{\left| \vec{r}_n^k \right|}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где $k = \overline{1, K}$; $w_{nk}^{\tilde{m}}(P)$ – весовые функции вершин $P_{\tilde{m}}^k$.

С одной стороны, с учетом свойств барицентрических координат, заданных для многоугольника, определим вектор \vec{r}_n^k аффинным преобразованием

$$\vec{r}_n^k = \tilde{\xi}_n^k(P) \overrightarrow{P \tilde{P}'_n} + \sum_{\tilde{m}=1}^{\tilde{N}} \tilde{\xi}_{n\tilde{m}}^k(P) \overrightarrow{P \tilde{P}'_{\tilde{m}}}, \quad (2.37)$$

где $\tilde{\xi}_n^k, \tilde{\xi}_{n\tilde{m}}^k$ – БК в плоскости многоугольника, заданного гранью E_n^k .

Для того, чтобы равенство (2.37) выполнялось, БК $\tilde{\xi}_n^k, \tilde{\xi}_{n\tilde{m}}^k$ должны быть определены в точке $\tilde{P}'_k = (x'_k, y'_k)$ проекции $P \in \Omega$ на грань E_n^k в направлении вектора \vec{r}_n^k :

$$\begin{aligned} x'_k &= \left(\tilde{P}''_k - P_0^k \right) \vec{T}_x; \quad y'_k = \left(\tilde{P}''_k - P_0^k \right) \vec{T}_y; \\ \tilde{P}''_k &= P - \vec{r}_n^k \left[\left(P - P_0^k \right) \vec{r}_n^k \right], \end{aligned} \quad (2.38)$$

где \vec{T}_x, \vec{T}_y – единичные векторы, задающие ориентацию соответствующих координатных осей \overrightarrow{OX} и \overrightarrow{OY} в плоскости грани E_n^k .

С другой стороны, вектор \vec{r}_n^k может быть задан через единичные нормали $\vec{n}_{nk}^{\tilde{m}}$ граней (рис. 2.5) пирамиды $\Delta(P, P_n, P_1^k, \dots, P_{\tilde{N}}^k)$ с вершиной в P и основанием $(P_n, P_1^k, \dots, P_{\tilde{N}}^k)$ выражением

$$\vec{r}_n^k = \sum_{m=1}^{\tilde{N}} d_{nk}^{\tilde{m}} \vec{n}_{nk}^{\tilde{m}}, \quad (2.39)$$

где $\vec{n}_{nk}^1, \vec{n}_{nk}^2, \dots, \vec{n}_{nk}^{\tilde{N}}$ – орты нормалей к соответствующим граням $(P, P_n, P_1^k), (P, P_1^k, P_2^k), \dots, (P, P_{\tilde{N}}^k, P_n)$ пирамиды $\Delta(P, P_n, P_1^k, \dots, P_{\tilde{N}}^k)$; $d_{nk}^1, d_{nk}^2, \dots, d_{nk}^{\tilde{N}}$ – площади секторов единичного круга, образованного сечением шара B'_P соответствующими гранями $(P, P_n, P_1^k), (P, P_1^k, P_2^k), \dots, (P, P_{\tilde{N}}^k, P_n)$ пирамиды $\Delta(P, P_n, P_1^k, \dots, P_{\tilde{N}}^k)$.

Объединив выражения (2.36), (2.37) и (2.39), получим равенство

$$w_n(P) = \sum_{k=1}^K \tilde{\zeta}_n^k(P) \frac{\vec{r}_n^k \vec{n}_n^k}{|P - \tilde{P}_k| |\vec{r}_n^k|}, \quad (2.40)$$

соответствующее исходному (2.35). □

На рисунке 2.6 представлены примеры аппроксимации потенциала внутри куба БК Пуассона–Римана в случае равенства единице его значений для одной вершины и нулю для всех остальных.

Заданное выражение (2.35) позволяет определить БК Пуассона–Римана как для выпуклого Ω , так и для вогнутого Ω с произвольными гранями. При этом если Ω вогнутый, то БК $\tilde{\zeta}_n^k(P)$ в точке \tilde{P}'_k проекции P для грани E_n^k , представленной вогнутым многоугольником, определяются с учетом (2.7), (2.22).

В целом заданные выражения (2.7), (2.22), (2.23), (2.35) определяют гармонические БК Пуассона–Римана для произвольной области Ω с кусочно-линейной границей в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 . Ключевым моментом задания барицентрических координат Пуассона–Римана является формирование прямого и обратного конформных отображений $f : B'_P \rightarrow \Omega$ и $F : \Omega \rightarrow B'_P$ области Ω с кусочно-

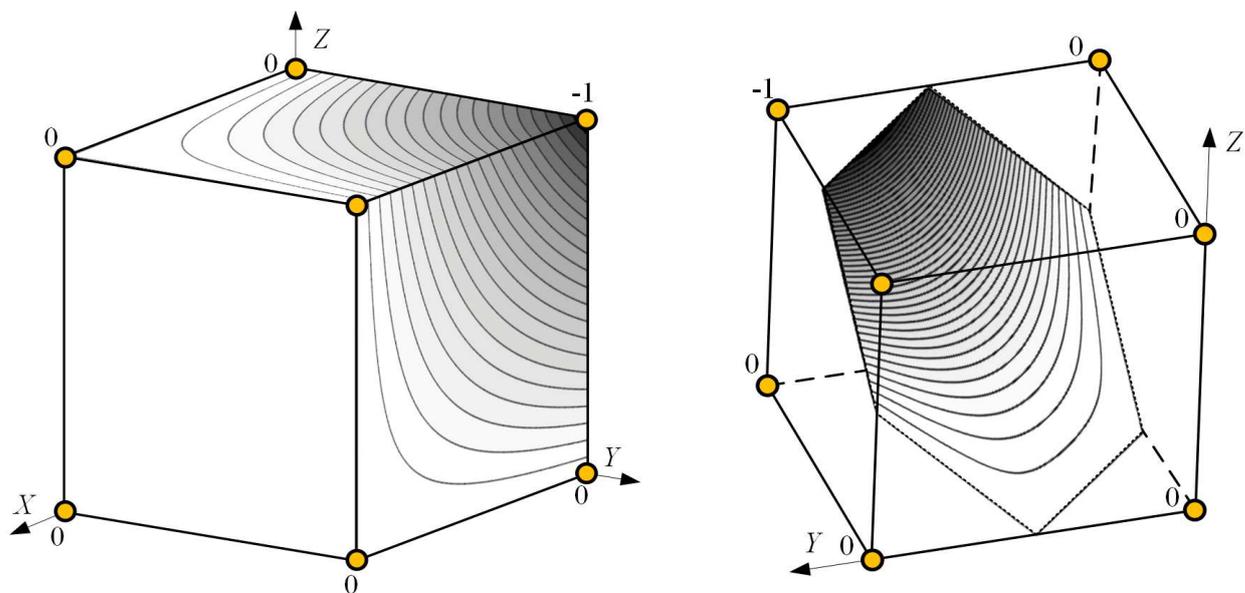


Рис. 2.6. Аппроксимация потенциала барицентрическими координатами Пуассона–Римана внутри куба

линейной границей на единичный шар и обратно. Решению указанной задачи посвящена третья глава. Определение методов задания БК позволяет перейти к непосредственной разработке БМ.

2.2. Барицентрический метод для решения скалярного уравнения Гельмгольца

Формируемой линейной аппроксимации потенциала БК недостаточно для получения необходимой точности решения скалярного однородного уравнения Гельмгольца вида

$$\nabla^2 \Phi + \kappa^2 \Phi = 0, \quad (2.41)$$

для области анализа Ω с кусочно-линейной границей. Решение задачи (2.41) с заданными граничными условиями [24] в постановке БМ предполагается выполнять в приближении методов Галеркина и Ритца. При этом основным этапом является определение аппроксимационного полинома (аппроксимация Ритца) для введенной барицентрической системы координат односвязной области Ω , ограниченной Γ . Аппроксимация Ритца в БМ формируется для всей области

анализа Ω в целом без ее разбиения на конечные элементы в N -мерной барицентрической системе координат $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ следующим образом.

Теорема 6. Функция $\Phi(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \Phi_j \alpha_j(P)$, задающая аппроксимацию порядка $p \in \mathbb{N}$ потенциала Φ в скалярном уравнении Гельмгольца (2.41), при

$$\alpha_j(P) = \prod_{n=1}^N R_{j_n}(P); R_{j_n}(P) = \prod_{k=0}^{j_n} \frac{1}{k} (p\zeta_n(P) - k + 1), \quad (2.42)$$

$$j_n > 0, R_0(P) = 1$$

является аппроксимацией Рунца.

В выражении (2.42) Φ_j – значения потенциала в j -х узловых точках; j – мультииндекс из множества \mathbb{M}_p :

$$\mathbb{M}_p = \left\{ j = (j_1, j_2, \dots, j_n, \dots, j_N) : j_n \in \mathbb{Z}, j_n \geq 0, \sum_{n \in [1; N]} j_n = p \right\}. \quad (2.43)$$

Доказательство. Пусть в Ω для барицентрической системы координат в точках $\zeta_n^k = k/p$ ($k = \overline{1, p}$), расположенных на расстоянии $1/p$, определены значения потенциала Φ_j . Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа, задающий аппроксимацию $\Phi(P)$, будет определен суммой $\Phi(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \Phi_j \alpha_j(P)$, где $\alpha_j(P)$ – базисный полином:

$$\alpha_j(P) = \prod_{k_1=0}^{j_1-1} \prod_{k_2=0}^{j_2-1} \dots \prod_{k_N=0}^{j_N-1} \left[\frac{\zeta_1(P) - \zeta_1^{k_1}}{\zeta_1^{j_1} - \zeta_1^{k_1}} \cdot \frac{\zeta_2(P) - \zeta_2^{k_2}}{\zeta_2^{j_2} - \zeta_2^{k_2}} \times \right. \\ \left. \times \dots \cdot \frac{\zeta_N(P) - \zeta_N^{k_N}}{\zeta_N^{j_N} - \zeta_N^{k_N}} \right], \quad (2.44)$$

при этом, если $j_n - 1 < 0$, то сомножителем под знаком произведения является 1.

Представим $\alpha_j(P)$ соотношением

$$\alpha_j(P) = \prod_{n=1}^N R_{j_n}(P); \quad (2.45)$$

$$R_{j_n}(P) = \prod_{k=0}^{j_n-1} \left[\left(\zeta_n(P) - \zeta_n^k \right) / \left(\zeta_n^{j_n} - \zeta_n^k \right) \right].$$

Учитывая, что $\zeta_n^k = k/p$, преобразуем полином $R_{j_n}(P)$ к виду

$$R_{j_n}(P) = \prod_{k=0}^{j_n-1} \left[\frac{\zeta_n(P) - k/p}{j_n/p - k/p} \right] = \prod_{k=1}^{j_n} \left[\frac{p\zeta_n(P) - k + 1}{k} \right]. \quad (2.46)$$

Предположим, что $\alpha_j(P)$ – гармоническая функция, тогда по теореме о среднем справедливо тождество

$$\prod_{n=1}^N R_{j_n}(P) = \prod_{n=1}^N \left[\frac{1}{|B_P^r|} \int_{\partial B_P^r} R_{j_n}(\zeta') dS(\zeta') \right], \quad (2.47)$$

которое выполняется при

$$R_{j_n}(P) = \frac{1}{|B_P^r|} \int_{\partial B_P^r} R_{j_n}(\zeta') dS(\zeta'). \quad (2.48)$$

Справедливость тождества (2.48) с учетом выражения (2.46) следует из равенства:

$$\frac{p}{k} \zeta_n(P) - 1 + \frac{1}{k} = \frac{1}{|B_P^r|} \int_{\partial B_P^r} \left(\frac{p}{k} \zeta_n(\zeta') - 1 + \frac{1}{k} \right) dS(\zeta'). \quad (2.49)$$

Выражение (2.49) при применении нетрудных преобразований определяет требование того, что БК гармонические, что соответствует теореме 2. Следовательно, исходное предположение верно и функция $\Phi(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \Phi_j \alpha_j(P)$ гармоническая и для заданного порядка аппроксимации m базисными полиномами $\alpha_j(P)$ является аппроксимацией Ритца в Ω . \square

С учетом правил задания интерполяционных тригонометрических полиномов из [128] базисный полином для аппроксимации Ритца $\Phi(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \Phi_j \times \alpha_j(P)$ может быть сформирован в виде

$$\alpha_j(P) = \prod_{n=1}^N R'_{jn}(P); R'_{jn}(P) = \prod_{k=0}^{jn-1} \left[\frac{\text{tg}(\zeta_n(P) - k/p)}{\text{tg}(jn/p - k/p)} \right], \quad (2.50)$$

$$jn > 0, R'_0(P) = 1.$$

Графики вспомогательного интерполяционного полинома Лагранжа $R_{jn}(P)$ (2.42) и вспомогательного тригонометрического интерполяционного полинома $R'_{jn}(P)$ (2.50) для отрезка линии при $p = 3$ приведены на рисунке 2.7.

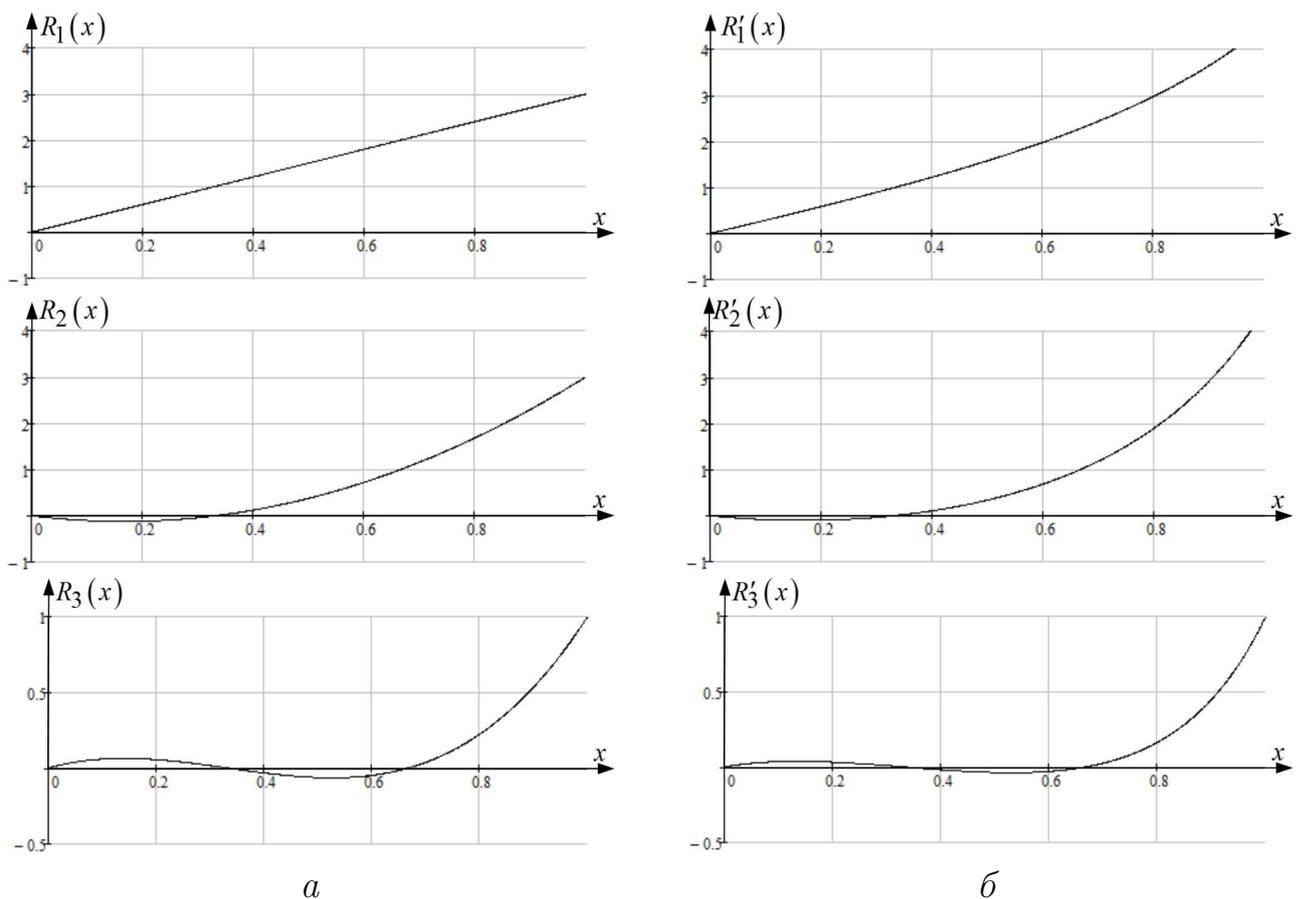


Рис. 2.7. Графики вспомогательного интерполяционного полинома Лагранжа (а) и вспомогательного тригонометрического интерполяционного полинома (б)

На рисунке 2.8 представлен пример аппроксимации потенциала базисными полиномами (2.42) и (2.50) в случае равенства единице его значения для

одной узловой точки и нулю для всех остальных при $p = 1, 2, 3$ для правильного восьмиугольника.

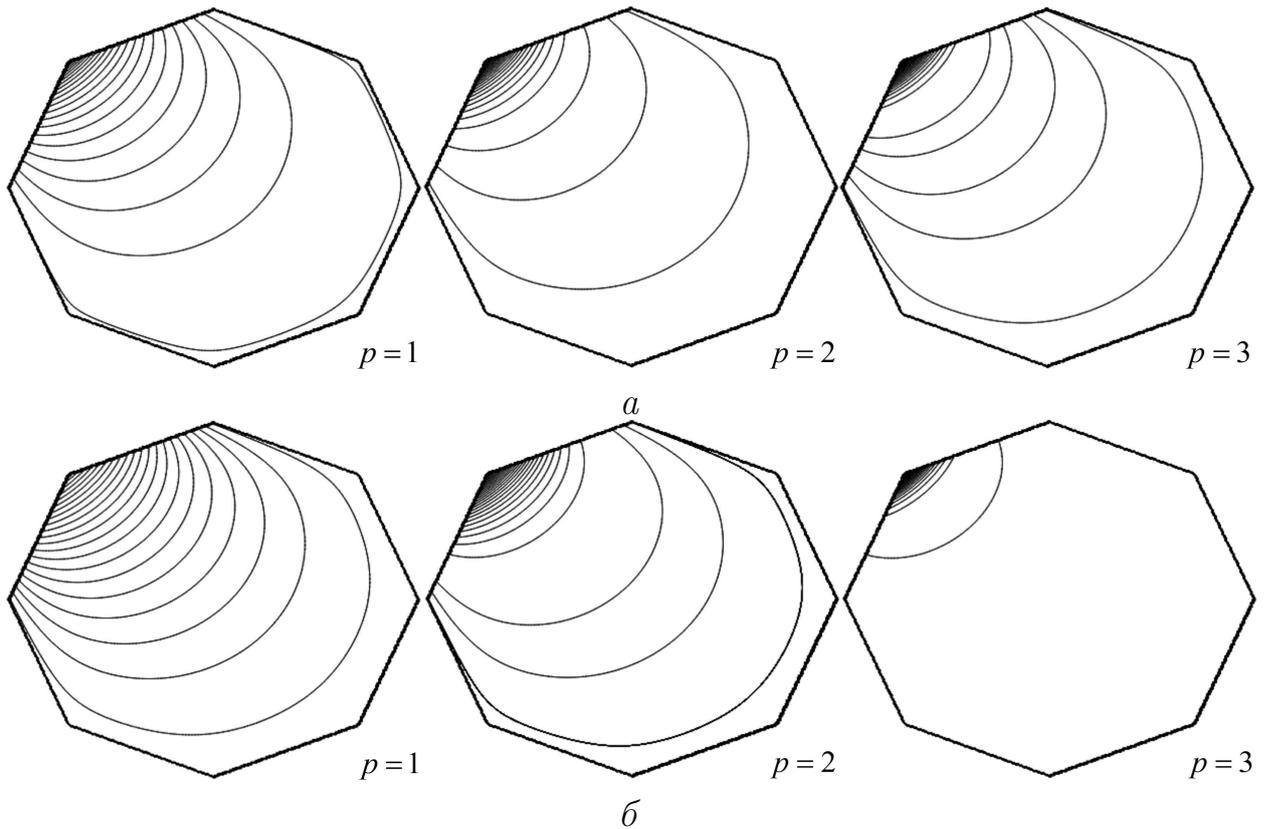


Рис. 2.8. Пример аппроксимации потенциала внутри правильного восьмиугольника при $p = 1, 2, 3$ базисными полиномами:
 $a - (2.42)$; $б - (2.50)$

Как следует из графиков (рис. 2.7) полиномы (2.42), (2.50), имеют j_n расположенных на одинаковом расстоянии $1/p$ нулей левее точки $\zeta_n = j_n/p$ и ни одного нуля справа. Последнее для барицентрического представления базисной функции $\alpha_j(P)$ с равномерным делением отрезка $[0, 1]$ для координат ζ_n на p точек позволяет задавать связь между аппроксимационной функцией и соответствующими мультииндексом j узловыми точками $\frac{j_1}{p}, \frac{j_2}{p}, \dots, \frac{j_n}{p}, \dots, \frac{j_n}{p}$ в барицентрической системе, что, в свою очередь, позволяет наилучшим образом задавать аппроксимирующий полином в Ω .

С учетом заданной аппроксимации Рунца решение задачи (2.41) выполняется в соответствии с принципом минимума потенциала запасенной энергии:

$$F(\Phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \Phi)^2 d\Omega - \frac{1}{2} \varkappa^2 \int_{\Omega} \Phi^2 d\Omega \rightarrow \min. \quad (2.51)$$

Подстановка аппроксимации $\Phi(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \Phi_j \alpha_j(P)$ в выражение (2.51) дает возможность получить новый функционал в матричной форме [108]:

$$F(\Phi) = \left(\vec{\Phi} \mathbf{S} \vec{\Phi}^T - \varkappa^2 \vec{\Phi} \mathbf{T} \vec{\Phi}^T \right) / 2, \quad (2.52)$$

где $\vec{\Phi}$ – вектор коэффициентов в аппроксимации Рунца; $\mathbf{S} = (s_{jj'})_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}$ – матрица Дирихле [33], элементы которой определяют неразрывность потенциала в области анализа Ω при переходе от узла j к узлу j' и задаются выражением

$$s_{jj'} = \int_{\Omega} (\nabla \alpha_j \cdot \nabla \alpha_{j'}) d\Omega; \quad j, j' \in \mathbb{M}_p, \quad (2.53)$$

$\mathbf{T} = (t_{jj'})_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}$ – метрическая матрица [33], элементы которой определяют форму области анализа Ω и задаются интегралом

$$t_{jj'} = \int_{\Omega} (\alpha_j \alpha_{j'}) d\Omega; \quad j, j' \in \mathbb{M}_p. \quad (2.54)$$

В выражениях (2.53), (2.54) значения α_j для заданных координат точки $P \in \Omega$ определяются равенствами (2.42) или (2.50).

Определение экстремума (2.51) выполняется сведением задачи (2.52) к системе линейных уравнений:

$$\mathbf{S} \vec{\Phi} - \varkappa^2 \mathbf{T} \vec{\Phi} = \vec{0}, \quad (2.55)$$

полученной путем дифференцирования $F(\vec{\Phi}) / \partial \Phi_j$.

Решение системы уравнений (2.55) относительно $\vec{\Phi}$ определяет приближенное значение скалярного потенциала в j -х узлах аппроксимации Рунца.

Поскольку в выражении (2.55) в качестве неизвестных выступают вектор $\vec{\Phi}$ и число \varkappa^2 , приведем полученную систему к стандартному виду задачи на определение собственных значений \varkappa_n^2 с соответствующими собственными векторами $\vec{\Phi}_n$, перенеся вычитаемое $\varkappa^2 \mathbf{T} \vec{\Phi}$ в правую часть с последующим умножением частей системы на обратную метрическую матрицу \mathbf{T}^{-1} , получим:

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{S} \vec{\Phi} = \varkappa^2 \vec{\Phi}. \quad (2.56)$$

При этом сформируем известную задачу на собственные числа и собственные векторы [129]:

$$\det(\mathbf{A} - \varkappa^2 \mathbf{E}) = 0; \quad (\mathbf{A} - \varkappa^2 \mathbf{E}) \vec{\Phi} = \vec{0}, \quad (2.57)$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{S}$; \mathbf{E} – единичная матрица размера $|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|$.

Решение задачи (2.57) на собственные числа \varkappa_n^2 выполняется стандартными методами [129], а полученные элементы вектора собственных значений \varkappa_n^2 матрицы \mathbf{A} определяют соответствующие собственные волны для заданной области анализа Ω . Величина продольных составляющих \dot{E}_z и \dot{H}_z требуемых мод определяется путем подстановки собственного вектора $\vec{\Phi}_n$, полученного в ходе решения (2.57) с заданными соответствующими граничными условиями Дирихле или Неймана, в аппроксимацию Ритца.

Решение неоднородного уравнения Гельмгольца вида

$$\nabla^2 \Phi + \varkappa^2 \Phi = G \quad (2.58)$$

выполняется в приближении метода Бубнова–Галеркина при подстановки аппроксимации $\Phi(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \Phi_j \alpha_j(P)$ в выражение (2.58) и интегрировании полученного соотношения по области Ω с последующим определением так называемой «слабой формы» [31] уравнения (2.58) в матричном виде:

$$\mathbf{S} \vec{\Phi} - \varkappa^2 \mathbf{T} \vec{\Phi} = -\mathbf{T} \vec{G}, \quad (2.59)$$

где $\vec{G} = (g_j)_{|\mathbb{M}_p|}$ – вектор коэффициентов из аппроксимации $G(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \left[g_j \times \alpha_j(P) \right]$.

Аналогичными (2.56), (2.57) преобразованиями система линейных уравнений (2.59) сводится к задаче на собственные числа и собственные векторы:

$$\det(\mathbf{A} - \kappa^2 \mathbf{E}) = 0; \quad (\mathbf{A} - \kappa^2 \mathbf{E}) \vec{\Phi} = \vec{G}. \quad (2.60)$$

Вектор коэффициентов \vec{G} в (2.60) определяется из решения задачи минимума невязки $\int_{\Omega} \left| \sum_{j \in \mathbb{M}_p} g_j \alpha_j(P) - G(P) \right|^2 d\Omega \rightarrow \min$, которая в приближении метода Бубнова–Галеркина сводится к системе линейных уравнений вида

$$\sum_{j \in \mathbb{M}_p} \left[g_j \int_{\Omega} \alpha_j(P) \alpha_{j'}(P) d\Omega \right] - \int_{\Omega} G(P) \alpha_{j'}(P) d\Omega = 0, \quad j' \in \mathbb{M}_p \quad (2.61)$$

или в матричной форме:

$$\vec{G} = \mathbf{T}^{-1} \vec{G}', \quad (2.62)$$

где $\vec{G}' = (g'_j)_{|\mathbb{M}_p|}$; $g'_j = \int_{\Omega} G(P) \alpha_j(P) d\Omega$.

Выполним сравнительную оценку БМ с МКЭ [33] и МКЭ высших порядков [130] при определении собственных значений для TE типов волн, формируемых прямоугольным волноводом, в зависимости от использования различного количества $|\mathbb{M}_p|$ узловых точек в аппроксимации. Зависимость точности определения собственных значений для прямоугольного волновода со сторонами $a = b = 0,05$ м представлена на рисунке 2.9.

Примеры распределения продольных составляющих напряженности магнитного поля в раскрыве прямоугольного волновода, полученные аналитическим решением [131], БМ, МКЭ высших порядков при разбиении области анализа двумя одинаковыми треугольниками (граница треугольных элементов показана белой линией), представлены на рисунках 2.10, 2.11.

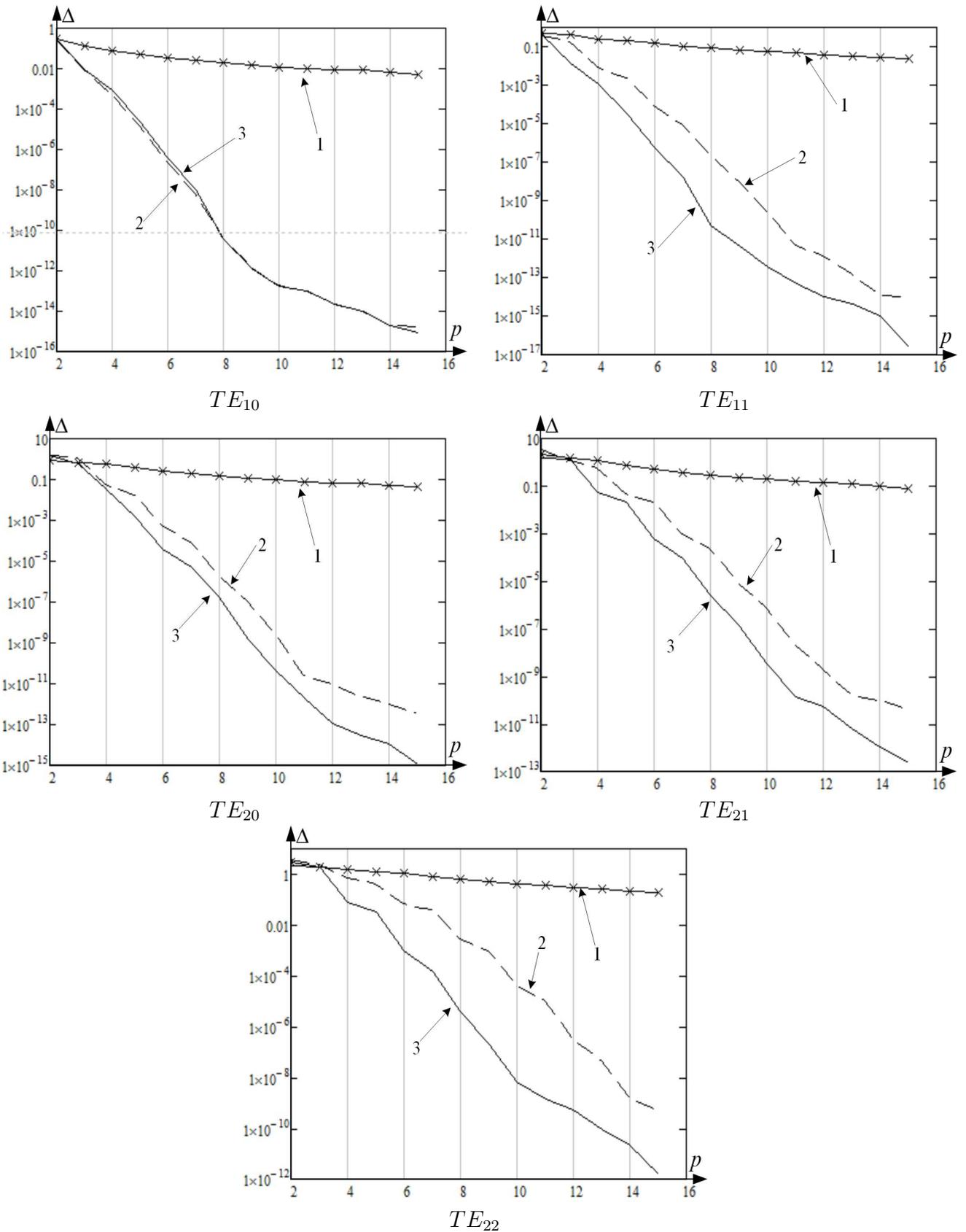


Рис. 2.9. Зависимость ошибки определения собственных значений TE -волн прямоугольного волновода от p при использовании методов: 1 – МКЭ; 2 – МКЭ высших порядков; 3 – БМ

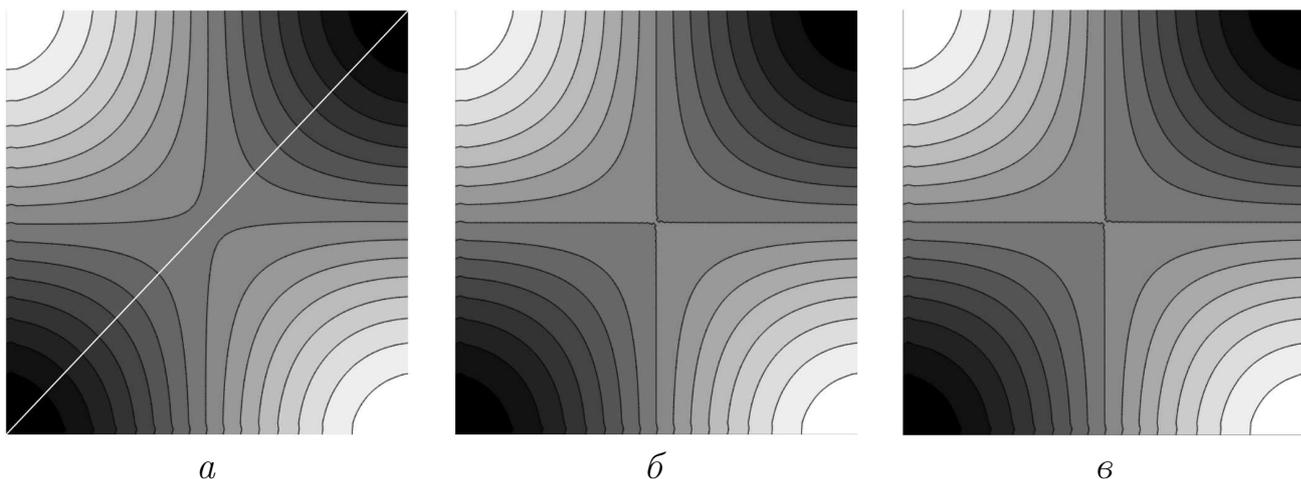


Рис. 2.10. Пример распределения продольной составляющей поля TE_{11} в раскрыве прямоугольного волновода, рассчитанный МКЭ высших порядков (а), БМ (б) при $|M_p| = 36$ и аналитическим решением (в)

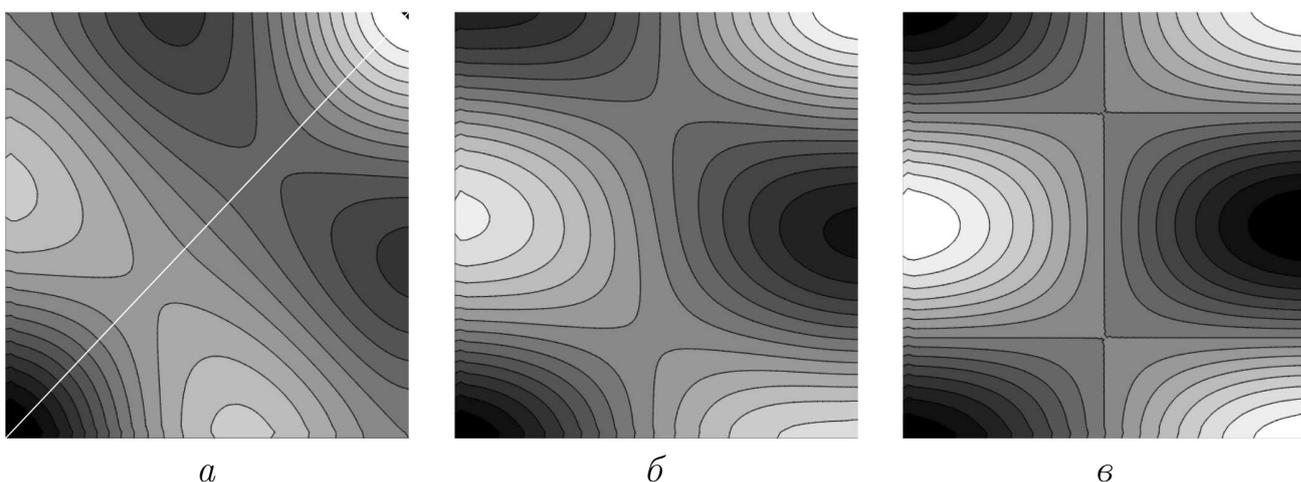


Рис. 2.11. Пример распределения продольной составляющей поля TE_{21} в раскрыве прямоугольного волновода, рассчитанный МКЭ высших порядков (а), БМ (б) при $|M_p| = 36$ и аналитическим решением (в)

Из полученных результатов численной оценки (рис. 2.9–2.11) следует, что БМ позволяет значительно повысить точность численного решения скалярного уравнения Гельмгольца при одинаковой размерности аппроксимирующего полинома в сравнении с МКЭ первого и высших порядков. Заданный в БМ переход в сравнении с МКЭ высших порядков (рис. 2.10, 2.11) от кусочно-полиномиальной аппроксимации анализируемой области к полиномиальной позволяет избежать ошибок аппроксимации потенциала на границах разбиения внутри Ω .

2.3. Бариеентрический метод для решения векторного уравнения Гельмгольца

Как известно, большинство задач электродинамики допускают решение уравнения Гельмгольца относительно оценки распределения в Ω продольных составляющих \dot{E}_z и \dot{H}_z . При этом поперечные составляющие ЭМП могут быть выражены через \dot{E}_z и \dot{H}_z [20, 24, 132]. Однако в ряде случаев возникает потребность в непосредственном расчете распределения векторного электромагнитного поля в Ω . Подобный расчет предполагает решение векторного уравнения Гельмгольца. Необходимость векторного решения связана с заданием требуемых граничных условий [24], когда, например, обеспечение непрерывности тангенциальных составляющих ЭМП на границе раздела разнородных сред невозможно по одной лишь продольной компоненте.

Разрешение указанной задачи предлагается выполнять векторным бариеентрическим методом (ВБМ). Рассмотрим численное решение ВБМ однородного векторного уравнения Гельмгольца на плоскости:

$$\nabla^2 \vec{A} + \varkappa^2 \vec{A} = 0, \quad (2.63)$$

где \varkappa – волновое число в среде распространения; \vec{A} – векторный потенциал, задающий значения векторов напряженности электрического \vec{E} и магнитного полей \vec{H} в зависимости от заданных граничных условий.

Решение задачи (2.63) выполняется в соответствии с принципом минимума потенциала запасенной энергии:

$$F(\vec{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \times \vec{A}) \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \varkappa^2 (\vec{A} \cdot \vec{A}) d\Omega \rightarrow \min. \quad (2.64)$$

Аппроксимация Ритца в ВБМ для сведения (2.64) к системе линейных уравнений формируется следующим образом [133].

Теорема 7. Функция $\vec{A}(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} A_j \vec{\beta}_j(P)$, задающая аппроксимацию порядка $p \in \mathbb{N}$ потенциала \vec{A} в векторном уравнении Гельмгольца (2.63), при

$$\vec{\beta}_j(P) = \sum_{\substack{n=1 \\ j_n > 0}}^N \hat{\alpha}_{jn}(P) \vec{\Theta}_n(P), \quad (2.65)$$

является аппроксимацией Рунца.

В $\vec{A}(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} A_j \vec{\beta}_j(P)$ A_j – числа в j -х узловых точках при аппроксимации векторного потенциала. В выражении (2.65) $\hat{\alpha}_{jn}(P)$ – вспомогательный интерполяционный сдвинутый полином Сильвестра–Лагранжа [134] относительно n -й вершины Ω , заданный через сдвинутые полиномы Лагранжа $\hat{R}_{jn}(P)$:

$$\hat{\alpha}_{jn}(P) = \hat{R}_{jn}(P) \prod_{\substack{n'=1 \\ n \neq n'}}^N R_{jn'}(P); \quad (2.66)$$

$$R_{jn'}(P) = \begin{cases} \frac{1}{(j_n-1)!} \prod_{k=1}^{j_n-1} (p\xi_n(P) - k), & \text{if } 2 \leq j_n \leq p; \\ 1, & \text{if } j_n = 1, \end{cases}$$

$\vec{\Theta}_n(P)$ – краевые базисные векторные функции Неделека относительно n -й вершины Ω , задаваемые через дифференциальные формы Уитни [135]:

$$\vec{\Theta}_n(P) = [\xi_n(p) \nabla \xi_{n+1}(P) - \xi_{n+1}(P) \nabla \xi_n(P)] |P_{n+1} - P_n|. \quad (2.67)$$

Доказательство. Из [136–138] известно, что векторные функции (2.67) для симплекса являются краевыми базисными функциями. Из свойств БК и заданного дополнительного требования (теорема 2) к БК следует, что векторные функции (2.67) для произвольного многоугольника Ω являются краевыми базисными функциями. С учетом определения в [134] предела $\lim_{j_n \rightarrow 0} \hat{R}_{jn}(P) / j_n = (p\xi_n)^{-1}$ от сдвинутого полинома Лагранжа и свойств интерполяционной формы $\alpha_j(P) = \prod_{n=1}^N R_{jn}(P)$ (см. доказательство теоремы 6) определим расширение краевых базисных функций $\vec{\Theta}_n(P)$ для узловых точек, расположенных на ребре

$e_n = (P_n, P_{n+1})$ многоугольника Ω , соотношением

$$\vec{\beta}_j(P) = \sum_{\substack{n=1 \\ j_n > 0}}^N \hat{\alpha}_{jn}(P) \vec{\Theta}_n(P). \quad (2.68)$$

Заметим, что с учетом свойств БК, интерполяционной формы $\alpha_j(P)$ и функции (2.67) для n -го ребра следует

$$\frac{P_{n+1} - P_n}{|P_{n+1} - P_n|} \cdot \sum_{\substack{j \in \mathbb{M}_p \\ j_n \neq 0}} \vec{\beta}_j(P) = 1; \quad (2.69)$$

$$\nabla \times \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \vec{\beta}'_j(P) / G_j = \sum_{n=1}^N (\nabla \zeta_n(P)) \times (\nabla \zeta_{n+1}(P)) = \text{const}; \quad (2.70)$$

$$\nabla \cdot \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \vec{\beta}'_j(P) / G_j = 0. \quad (2.71)$$

В выражениях (2.70), (2.71) введены обозначения:

$$\vec{\beta}'_j(P) = \sum_{\substack{n=1 \\ j_n > 0}}^N \hat{\alpha}_{jn}(P) \frac{\vec{\Theta}_n(P)}{|P_{n+1} - P_n|}; \quad G_j = \begin{cases} 1, & \text{if } \sum_{n=1}^N \frac{j_n}{p} P_n \in \Gamma; \\ N, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.72)$$

Тождества (2.69)–(2.71) обеспечивают отсутствие ложных решений [31] векторного уравнения Гельмгольца (2.63) при использовании аппроксимации $\vec{A}(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} A_j \vec{\beta}_j(P)$. Таким образом, для произвольной узловой точки многоугольника Ω справедливо расширение краевых базисных функций $\vec{\Theta}_n(P)$ соотношением (2.65). \square

Графики вспомогательного сдвинутого полинома Лагранжа $\hat{R}_{j_n}(P)$ (2.66) для отрезка линии при $p = 3$ приведены на рисунке 2.12. Из них следует, что сдвинутый полином Лагранжа [139] является полиномом степени $j_n - 1$ в ζ и имеет $j_n - 1$ расположенных на одинаковом расстоянии $1/p$ нулей на интервале $\left[\frac{1}{p}, \frac{j_n - 1}{p}\right]$ и ни одного нуля вне этого интервала. Подробно свойства полинома $\hat{R}_{j_n}(P)$ рассмотрены в [139].

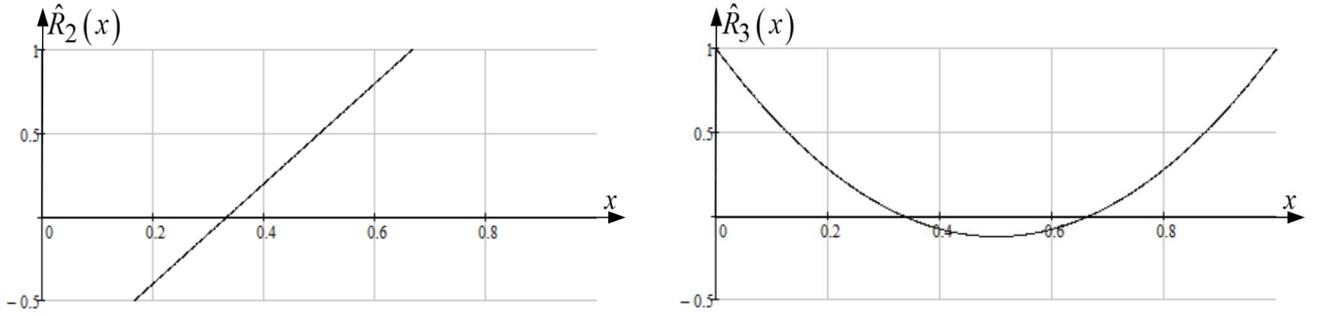


Рис. 2.12. Графики вспомогательного сдвинутого полинома Лагранжа

На рисунке 2.13 отражено графическое представление векторного поля, описываемого векторной базисной функцией $\vec{\Theta}_1(P)$ внутри треугольника, квадрата и пятиугольника.

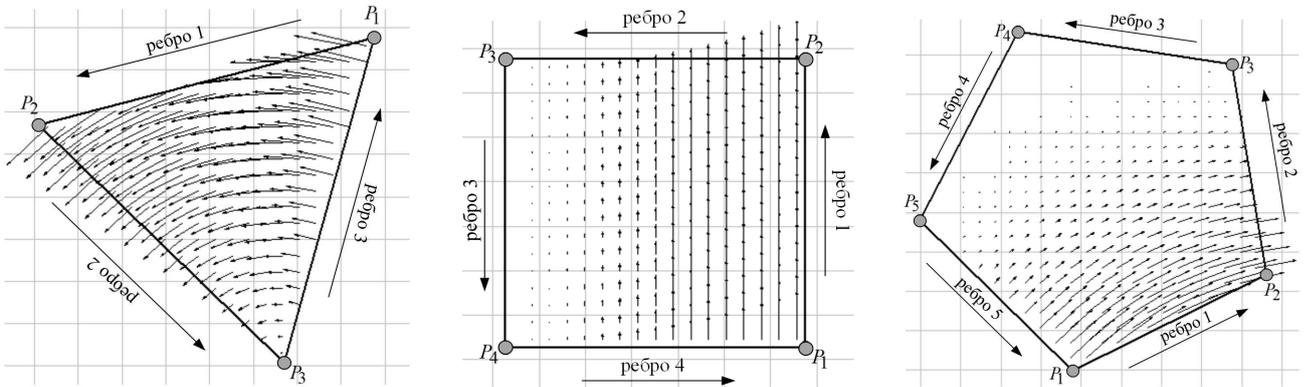


Рис. 2.13. Представление векторной базисной функции $\vec{\Theta}_1(P)$ внутри треугольника, четырехугольника и пятиугольника

На рисунке 2.14 отражено графическое представление векторного поля, описываемого расширенными векторными базисными функциями $\vec{\beta}_j(P)$ внутри пятиугольника для различных узловых точек при $p = 2$.

Подстановка аппроксимации $\vec{A}(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} A_j \vec{\beta}_j(P)$ в выражение (2.64) дает возможность получить новый функционал в матричной форме:

$$F(\vec{A}) = \frac{1}{2} \vec{A} \mathbf{S} \vec{A}^T - \frac{1}{2} \kappa^2 \vec{A} \mathbf{T} \vec{A}^T, \quad (2.73)$$

где \vec{A} – вектор коэффициентов разложения в аппроксимации (2.65); $\mathbf{S} = (s_{jj'})_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}$, $\mathbf{T} = (t_{jj'})_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}$ – квадратные матрицы размерностью $|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|$, элементы $j, j' \in \mathbb{M}_p$ которых определяются соответствующими

выражениями:

$$s_{jj'} = \int_{\Omega} (\nabla \times \vec{\beta}_j) \cdot (\nabla \times \vec{\beta}_{j'}) d\Omega; \quad (2.74)$$

$$t_{jj'} = \int_{\Omega} \vec{\beta}_j \vec{\beta}_{j'} d\Omega. \quad (2.75)$$

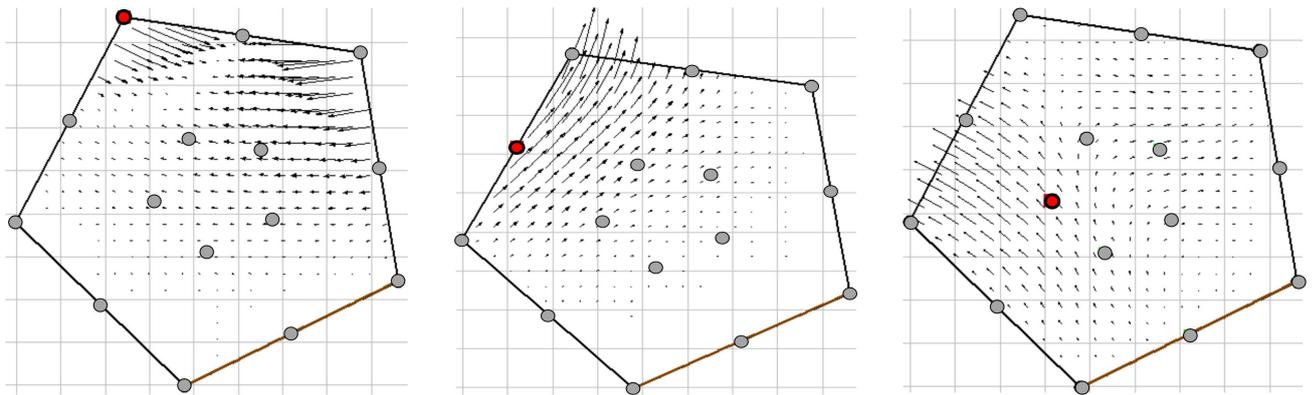


Рис. 2.14. Представление расширенных векторных базисных функций $\vec{\beta}_j(P)$ внутри пятиугольника при $p = 2$

В выражениях (2.74), (2.75) значения $\vec{\beta}_j$ для заданных координат точки $P \in \Omega$ задаются соотношением (2.65).

Определение экстремума (2.64) выполняется сведением задачи (2.73) к системе линейных уравнений

$$\mathbf{S}\vec{A} - \varkappa^2 \mathbf{T}\vec{A} = \vec{0}, \quad (2.76)$$

полученной путем дифференцирования $F(\vec{A}) / \partial A_j$.

Решение системы уравнений (2.76) относительно \vec{A} определяет приближенное значение векторного потенциала в j -х узлах аппроксимации Ритца.

В качестве примера рассмотрим применение ВБМ при определении распределения составляющих напряженности электрического поля (рис. 2.15, а) и критической частоты $f_{кр}$ для основного типа волны (H_{10}) в Н-волноводе с параметрами [131]: $l = 357,24$ мм, $c = 134,06$ мм, $a = 301,87$ мм, $h = 321,51$ мм. Оценка точности ВБМ выполнена в сравнении с векторным методом конечных

элементов при определении зависимости ошибки нахождения $f_{кр}$ от порядка аппроксимации p . Результат представлен на рисунке 2.15, б.

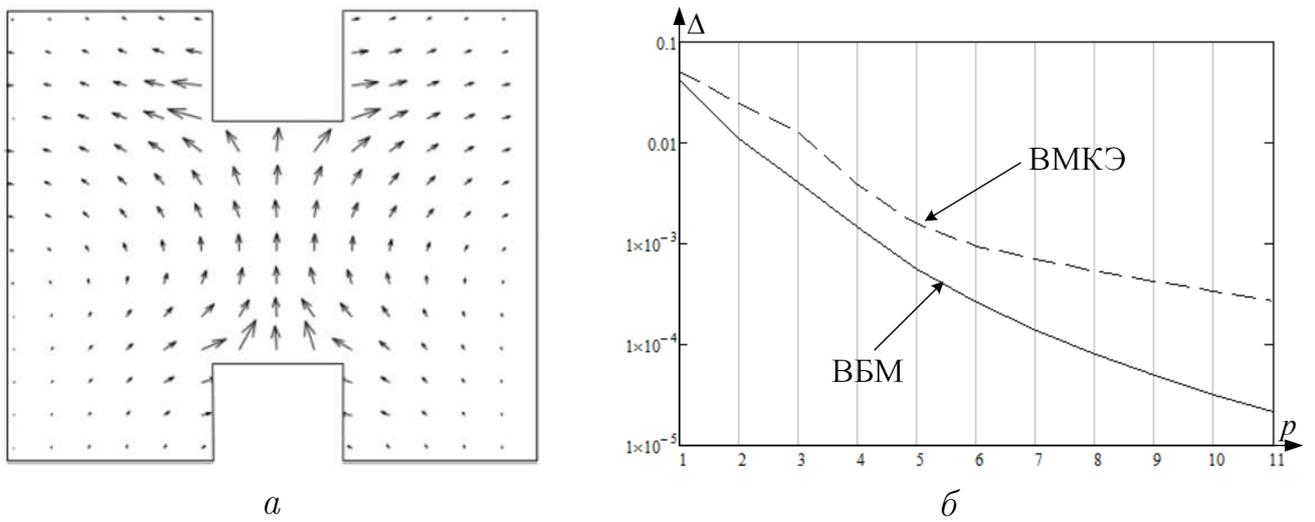


Рис. 2.15. Анализ электромагнитного поля в Н-волноводе: a – распределение волны H_{10} ; b – зависимость ошибки оценки $f_{кр}$ от p

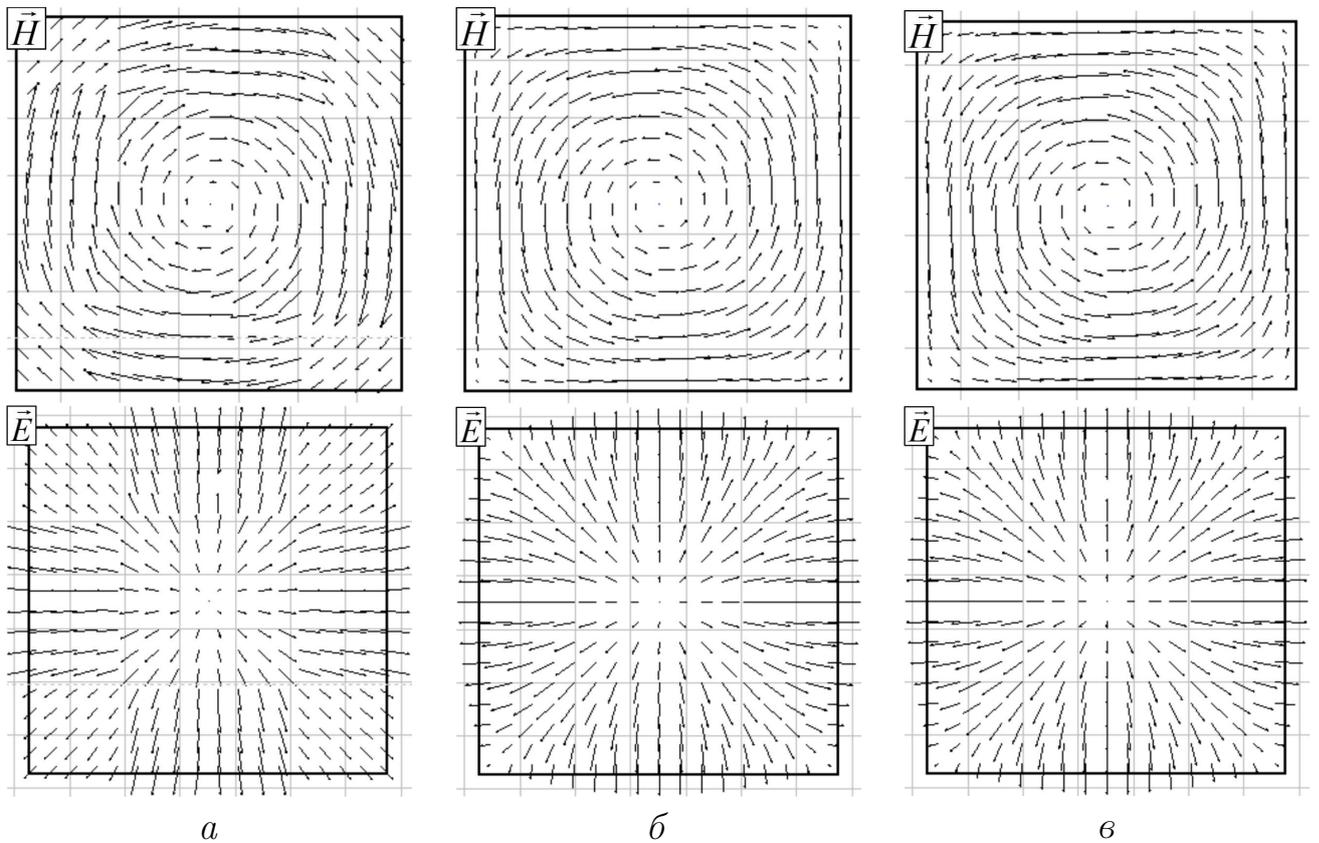


Рис. 2.16. Пример распределения тангенциальной составляющей \vec{H} и \vec{E} полей TE_{11} типа в раскрытие прямоугольного волновода, рассчитанный ВМКЭ (a), ВБМ (b) при $|M_p| = 25$ и аналитическим решением (c)

Примеры распределения тангенциальной составляющей напряженности ЭМП для TE типов волн в раскрыве прямоугольного волновода, полученные аналитическим решением [131], ВБМ, ВМКЭ, представлены на рисунках 2.16, 2.17.

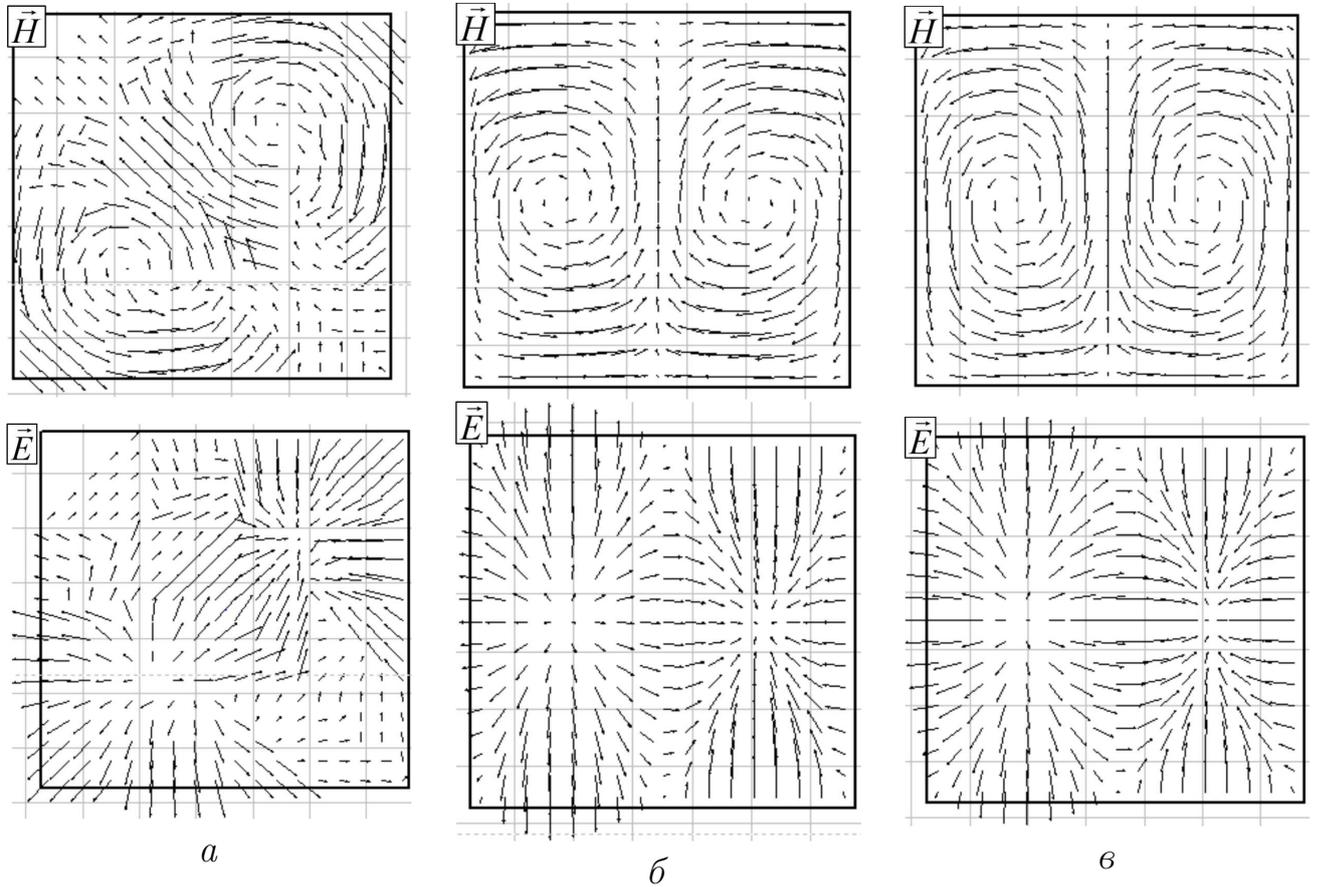


Рис. 2.17. Пример распределения тангенциальной составляющей \vec{H} и \vec{E} полей TE_{21} типа в раскрыве прямоугольного волновода, рассчитанный ВМКЭ (а), ВБМ (б) при $|M_p| = 25$ и аналитическим решением (в)

Из полученных результатов численной оценки (рис. 2.15–2.17) следует, что ВБМ позволяет повысить точность численного решения векторного уравнения Гельмгольца при одинаковой размерности аппроксимирующего полинома в сравнении с векторным МКЭ. В целом заданные соотношения (2.64)–(2.76) в постановке ВБМ позволяют определить распределение составляющих \dot{E}_x, \dot{E}_y и \dot{H}_x, \dot{H}_y ЭМП в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-линейной границей.

Для непосредственного определения компонент векторов \vec{E} или \vec{H} в $\Omega \in \mathbb{R}^3$ определим реализацию ВБМ для решения векторного уравнения Гельм-

гольца вида [136]:

$$\nabla \times \left[\varkappa^h (\nabla \times \vec{A}) \right] + \varkappa_0^2 \varkappa^e \vec{A} = \vec{0}, \quad (2.77)$$

где

$$\varkappa^h = \begin{pmatrix} \varkappa_x^h & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa_y^h & 0 \\ 0 & 0 & \varkappa_z^h \end{pmatrix}; \quad \varkappa^e = \begin{pmatrix} \varkappa_x^e & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa_y^e & 0 \\ 0 & 0 & \varkappa_z^e \end{pmatrix}; \quad (2.78)$$

\varkappa_0 – волновое число в вакууме; \vec{A} – векторный потенциал, задающий значения векторов напряженности электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей в зависимости от исходно выбираемых компонент диагональных матриц \varkappa^h и \varkappa^e , принимающих значения при $\vec{A} = \vec{E}$:

$$\begin{aligned} \varkappa_x^h &= \varkappa_y^h = \varkappa_z^h = 1; \\ \varkappa_x^e &= n_x^2; \quad \varkappa_y^e = n_y^2; \quad \varkappa_z^e = n_z^2, \end{aligned} \quad (2.79)$$

а при $\vec{A} = \vec{H}$:

$$\begin{aligned} \varkappa_x^e &= \varkappa_y^e = \varkappa_z^e = 1; \\ \varkappa_x^h &= 1 / n_x^2; \quad \varkappa_y^h = 1 / n_y^2; \quad \varkappa_z^h = 1 / n_z^2. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Здесь n_x , n_y , n_z – показатели преломления среды в соответствующих плоскостях x , y , z .

Решение задачи (2.77) выполняется в соответствии с принципом минимума потенциала запасенной энергии:

$$F(\vec{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ (\nabla \times \vec{A}) \cdot \left[\varkappa^h (\nabla \times \vec{A}) \right] - \varkappa_0^2 \varkappa^e (\vec{A} \cdot \vec{A}) \right\} d\Omega \rightarrow \min. \quad (2.81)$$

Учет граничных условий может быть выполнен путем включения в функционал (2.81) дополнительных интегралов по поверхности, задающей границу области анализа [31, 140].

Аппроксимация Ритца в ВБМ для $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ формируется в виде

$$\vec{A}(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} A_j \vec{\gamma}_j(P), \quad (2.82)$$

где полином $\vec{\gamma}_j(P)$ в зависимости от заданных граничных условий и типа потенциала \vec{A} при выполнении условий [137] $\nabla \times \vec{\gamma}_j(P) \neq 0$, $\nabla \cdot \vec{\gamma}_j(P) = 0$ может быть задан равенством

$$\vec{\gamma}_j(P) = \left(\sum_{n=1}^N \frac{\partial \alpha_j(P)}{\partial \zeta_n(P)} \frac{\partial \zeta_n(P)}{\partial y(P)}; - \sum_{n=1}^N \frac{\partial \alpha_j(P)}{\partial \zeta_n(P)} \frac{\partial \zeta_n(P)}{\partial x(P)}; \alpha_j(P) \right)^T \quad (2.83)$$

или

$$\vec{\gamma}_j(P) = \left(\left(\vec{\beta}_j(P) \right)_1; \left(\vec{\beta}_j(P) \right)_2; \alpha_j(P) \right)^T. \quad (2.84)$$

В выражениях (2.83), (2.84) приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_j(P)}{\partial \zeta_n(P)} &= \frac{\partial R_{jn}(P)}{\partial \zeta_n(P)} \prod_{\substack{n'=1 \\ n \neq n'}}^N R_{j_{n'}}(P); \\ \frac{\partial R_{jn}(P)}{\partial \zeta_n(P)} &= \sum_{k=0}^{j_n-1} \prod_{\substack{k'=0 \\ k \neq k'}}^{j_n-1} \frac{p}{k+1} \left[\frac{p \zeta_n(P) - k'}{k'+1} \right]. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Подстановка аппроксимации (2.82) в выражение (2.81) и использование аналогичной процедуры при переходе от соотношения (2.74) к равенству (2.76) позволяет получить итоговую задачу на собственные значения

$$\mathbf{S} \vec{A} - \varkappa_0^2 \mathbf{T} \vec{A} = 0, \quad (2.86)$$

где \vec{A} – вектор коэффициентов разложения в аппроксимации (2.82); $\mathbf{S} = (s_{jj'})_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}$, $\mathbf{T} = (t_{jj'})_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}$ – квадратные матрицы размерностью $|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|$, элементы $j, j' \in \mathbb{M}_p$ которых определяются соответствующими

выражениями:

$$\begin{aligned}
 s_{jj'} &= \int_{\Omega} \left\{ \varkappa_x^h [(\vec{\gamma}_j^z)_2 - (\vec{\gamma}_j^y)_3] [(\vec{\gamma}_{j'}^z)_2 - (\vec{\gamma}_{j'}^y)_3] + \right. \\
 &\quad \left. + \varkappa_y^h [(\vec{\gamma}_j^z)_1 - (\vec{\gamma}_j^x)_3] [(\vec{\gamma}_{j'}^z)_1 - (\vec{\gamma}_{j'}^x)_3] \right\} d\Omega; \\
 t_{jj'} &= \int_{\Omega} \varkappa_x^e (\vec{\gamma}_j)_1 (\vec{\gamma}_{j'})_1 + \varkappa_y^e (\vec{\gamma}_j)_2 (\vec{\gamma}_{j'})_2 + \varkappa_z^e (\vec{\gamma}_j)_3 (\vec{\gamma}_{j'})_3 d\Omega,
 \end{aligned} \tag{2.87}$$

где $\vec{\gamma}_j^x = \frac{\partial \vec{\gamma}_j}{\partial x}$; $\vec{\gamma}_j^y = \frac{\partial \vec{\gamma}_j}{\partial y}$; $\vec{\gamma}_j^z = \frac{\partial \vec{\gamma}_j}{\partial z}$.

Отметим, что правило задания расширенных векторных базисных функций соотношениями (2.83), (2.84) согласно [134] не является единственным. Векторные полиномы также можно определить по правилам из [139] $\vec{\beta}_j^n(P) = \frac{p+2}{p+2-j_n^n} \hat{\alpha}_{j^n} (P) [\zeta_{n+1}(p) \nabla \zeta_{n-1}(P) - \zeta_{n+1}(P) \nabla \zeta_{n-1}(P)] |P_{n+1} - P_n|$, где $\tilde{j}^n \in \mathbb{M}_p^n = \{j^n = (j_1^n, \dots, j_n^n, \dots, j_N^n) : j_n^n, j_{\tilde{n}}^n \in \mathbb{Z}, 0 \leq j_n^n \leq p, 1 \leq j_{\tilde{n}}^n \leq p+1, n \neq \tilde{n}\}$ при $|\tilde{\mathbb{M}}_p^n| = |\mathbb{M}_p|$.

На рисунке 2.18 отражено графическое представление векторного поля, описываемого расширенными векторными базисными функциями $\vec{\beta}_j^n(P)$ первого порядка внутри треугольника.

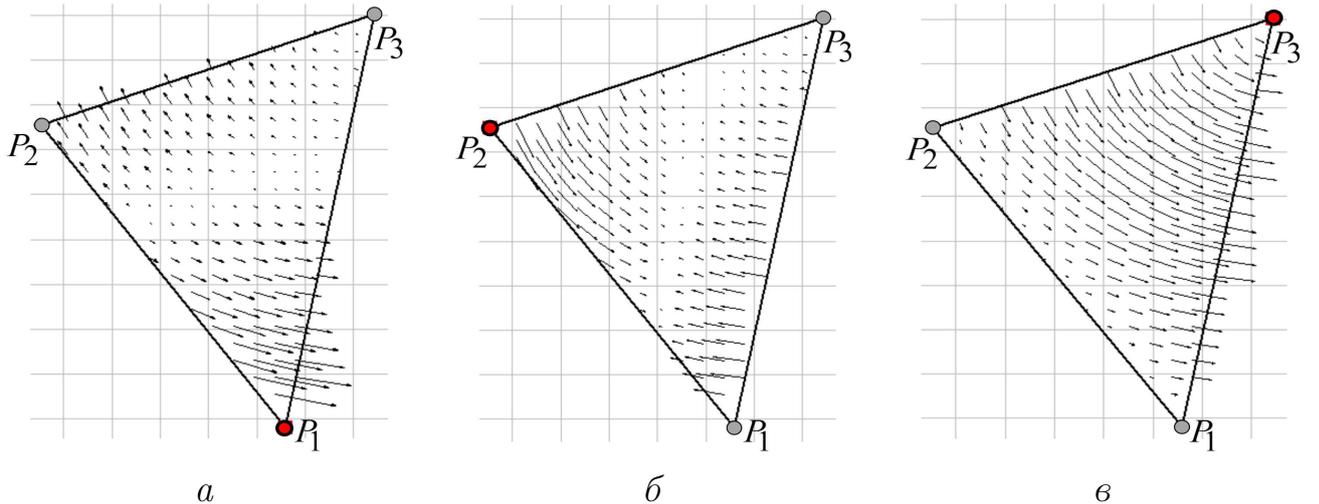


Рис. 2.18. Представление расширенных векторных базисных функций $\vec{\beta}_j^n(P)$ при $n = 1$ и $j = (0, 1, 2)$ (а), $j = (0, 2, 1)$ (б), $j = (1, 1, 1)$ (в)

В рассматриваемом случае (рис. 2.18) общий набор $\vec{\beta}_j^n(P)$ определяется в соответствии с правилами [134, 139] и равен 8.

2.4. Барицентрический метод во временной области

Рассмотренные в предыдущих пунктах реализации барицентрического метода выполняют решение уравнений Максвелла в приближении метода комплексных амплитуд (уравнения Гельмгольца). Получаемые соотношения справедливы для ЭМП, подчиняющегося гармонической зависимости от времени. В случае, когда, например, амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) сигнала источника возбуждения моделируемого СВЧ-устройства отличается от АЧХ монохроматического сигнала, оценка истинных составляющих ЭМП в частотной области может быть выполнена путем взвешенного суммирования составляющих напряженностей электрического и магнитного полей, рассчитанных на различных частотах. Такой подход может быть не всегда удобен с точки зрения вычислительных затрат, особенно для широкополосных сигналов и сигналов с АЧХ сложной формы. Более того, такой подход затрудняет решение задач управления и не позволяет оценить распределение мгновенных значений напряженностей электрического и магнитного полей в заданной области анализа в конкретный момент времени t . Оценка мгновенных составляющих ЭМП с учетом [24, 31] сводится к решению уравнения второго порядка:

$$\nabla^2 \vec{A} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \vec{J}, \quad (2.88)$$

где ϵ_a и μ_a – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

Подставив в уравнение (2.88) аппроксимацию векторного потенциала вида $\vec{A}(P, t) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} A_j(t) \vec{\gamma}_j(P)$, где $A_j(t)$ – значения коэффициентов разложения векторного потенциала в j -х узловых точках в момент времени t , сведем дифференциальное уравнение второго порядка к решению системы дифференциальных уравнений (СДУ), представленной в матричном виде:

$$\mathbf{S}\vec{A}(t) - \mathbf{T}\ddot{\vec{A}}(t) = -\vec{G}(t), \quad (2.89)$$

где $\mathbf{S} = (s_{jj'})_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}$, $\mathbf{T} = (t_{jj'})_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}$ – квадратные матрицы при $s_{jj'} = \int_{\Omega} (\nabla \times \vec{\gamma}_j) \cdot (\nabla \times \vec{\gamma}_{j'}) d\Omega$, $t_{jj'} = \varepsilon_a \mu_a \int_{\Omega} \vec{\gamma}_j \cdot \vec{\gamma}_{j'} \Omega$; $\vec{G}(t) = (g_j(t))_{|\mathbb{M}_p|}$ – вектор-столбец при $g_j(t) = \mu_a v(t) \int_{\Omega} \vec{\gamma}_j \vec{J} d\Omega$, $v(t)$ – некоторая тестовая функция входного сигнала возбуждения; $\vec{A}(t) = (A_j(t))_{|\mathbb{M}_p|}$; $\vec{\ddot{A}}(t) = (\partial^2 A_j(t) / \partial t^2)_{|\mathbb{M}_p|}$; $t \in [t_0, t_1]$; $[t_0, t_1]$ – отрезок времени анализа.

Сведем полученную системы (2.89) к СДУ первого порядка, введя дополнительные переменные $\vec{Y}(t) = \vec{A}(t)$; $\vec{\dot{Y}}(t) = \vec{\ddot{A}}(t)$ к виду

$$\vec{\dot{Y}}(t) = \mathbf{T}^{-1} \left[\mathbf{S} \vec{A}(t) + \vec{G}(t) \right]. \quad (2.90)$$

Решение задачи (2.90) предполагается выполнять численно методом Рунге–Кутты 4-го порядка для начальных условий $\vec{A}(t_0) = 0$.

Заданная постановка задачи (2.90) анализа ЭМП позволяет сформировать задачу оптимального управления ЭМП, например в виде

$$\begin{aligned} t_1 - t_0 \rightarrow \min; \vec{\dot{Y}}(t) &= \mathbf{T}^{-1} \left[\mathbf{S} \vec{A}(t) + \vec{G}(t) \right]; \\ \vec{Y}(t) &= \vec{A}(t); \vec{A}(t_0) = 0; \vec{\dot{A}}(t_0) = 0; \vec{A}(t_1) = \vec{\tilde{A}}, \end{aligned} \quad (2.91)$$

где $\vec{\tilde{A}} = (\tilde{A}_j)_{|\mathbb{M}_p|}$ – требуемые значения векторного потенциала в узлах аппроксимации.

Решение задачи (2.91) выполним с учетом принципа максимума Понтрягина [103]. Функцию Гамильтона определим в виде

$$H(\vec{Y}, v, \vec{\psi}) = \vec{\psi}(t) \left[\mathbf{T}^{-1} \left(\mathbf{S} \vec{A}(t) + \vec{G}(t) \right) \right], \quad (2.92)$$

где $\vec{\psi}(t) = (\psi_j(t))_{|\mathbb{M}_p|}$ – вспомогательный вектор импульсов управления.

С учетом соотношения (2.92) при $H(\vec{Y}, v, \vec{\psi}) \rightarrow \min$ итоговая задача управления ЭМП сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \vec{\dot{Y}}(t) &= \mathbf{T}^{-1} \left[\mathbf{S} \vec{A}(t) + \vec{G}(t) \right] + \vec{\lambda}(t) \otimes \left[\vec{\tilde{A}} - \vec{A}(t) \right]; \\ \vec{Y}(t) &= \vec{A}(t); \vec{\dot{\psi}}(t) = 0 \end{aligned} \quad (2.93)$$

для заданных начальных условий $\vec{A}(t_0) = 0, \dot{\vec{A}}(t_0) = 0$.

В выражении (2.93) \otimes – оператор поэлементного произведения векторов; $\vec{\psi}(t) = (\partial\psi_j(t)/\partial t)|_{\mathbb{M}_p}$; $\vec{\lambda}(t) = (\lambda_j(t))|_{\mathbb{M}_p}$ – вектор множителей Лагранжа.

Для заданных решений проведено математическое моделирование при решении задачи оптимального управления ЭМП, формируемого в раскрые прямоугольного волновода, для различных значений порядка m в заданной аппроксимации Ритца для ВБМ. На рисунке 2.19, *a* представлена зависимость $\Delta(t) = \sqrt{\int_{\Omega} |\vec{A} - \vec{A}_{\text{Тр}}|^2 dx dy}$ – отклонение реализуемого ЭМП $\vec{A} = \vec{A}(x, y, t)$ в раскрые прямоугольного волновода от требуемого $\vec{A}_{\text{Тр}} = \vec{A}_{\text{Тр}}(x, y, t)$ на интервале времени $[t_0, t_1]$ при $p = 4$ и $v(t) = \sin(2\pi t)$. На рисунке 4.12, *б* представлена зависимость $\Delta(t_1)$ от p .

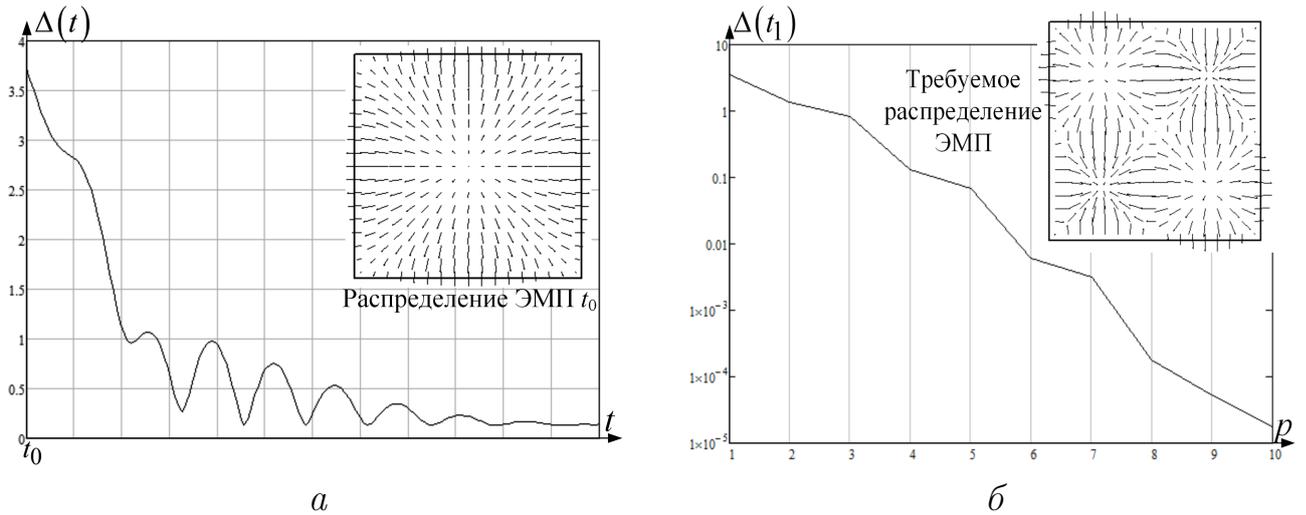


Рис. 2.19. Отклонение реализуемого ЭМП в раскрые прямоугольного волновода от требуемого: *a* – на интервале времени управления для $p = 4$; *б* – $\Delta(t_1)$ от p

Полученные результаты определяют пример решения задачи оптимального управления ЭМП в заданной области анализа Ω с кусочно-линейной границей в целом без ее разбиения на конечные элементы. Повышение точности решения достигается путем увеличения порядка аппроксимации m . Применение барицентрического метода для заданного порядка аппроксимации m и формируемого множества мультииндексов j также позволяет удобно определять положение управляющих воздействий по правилу $\tilde{P}_k = \sum_{n=1}^N j_n P_n / p$ при $k = \overline{1, |\mathbb{M}_p|}$.

Выводы по второй главе

1. Разработаны методы определения гармонических барицентрических координат для произвольной замкнутой односвязной области с кусочно-линейной границей в \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , которые позволяют сформировать взаимно-однозначное решение, обобщающее все свойства барицентрических координат симплексов. Методы основаны на решении уравнения Лапласа, полученного Пуассоном для шара, и теоремы Римана о взаимно-однозначности конформного отображения.

2. Разработан барицентрический метод для решения скалярного однородного и неоднородного уравнений Гельмгольца, который в отличие от известных методов позволяет выполнить решение скалярных волновых уравнений без разбиения области анализа на элементарные подобласти. Такой подход позволяет избежать ошибок аппроксимации скалярного потенциала на границах разбиения и при соизмеримых вычислительных затратах (определяется одинаковым порядком аппроксимации) повысить точность численного решения в среднем в 2,6 раза по сравнению с известными методами. Основу метода составляет этап формирования аппроксимирующих полиномов (2.42) в N -мерной барицентрической системе координат.

3. Разработан векторный барицентрический метод для решения векторного однородного и неоднородного уравнений Гельмгольца, который в отличие от известных позволяет выполнить решение векторных волновых уравнений без разбиения области анализа на элементарные подобласти. При соизмеримых вычислительных затратах векторный барицентрический метод позволяет повысить точность численного решения в среднем в 2,93 раза. Основу метода составляет этап формирования векторных аппроксимирующих полиномов (2.65) в N -мерной барицентрической системе координат.

4. Рассмотрено решение волнового уравнения (2.88) во временной области разработанным векторным барицентрическим методом. С учетом заданной постановки и принципа максимума Понтрягина определено решение задачи оптимального управления электромагнитным полем.

Глава 3. МЕТОДЫ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЗАМКНУТЫХ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ В \mathbb{R}^2 И \mathbb{R}^3

Разработанные методы определения барицентрических координат Пуассона–Римана базируются на решении задач прямого и обратного конформных отображений односвязной области Ω с кусочно-линейной границей на каноническую, заданных в евклидовых пространствах \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 . Решение задачи прямого конформного отображения многоугольника Ω в \mathbb{R}^2 с учетом достаточной проработки элементов теории функции комплексного переменного известно [141–144] и осуществляется путем вычисления интеграла Кристоффеля–Шварца [144]. Задача обратного конформного отображения многоугольника Ω в \mathbb{R}^2 решается с использованием приближенных методов (численно) [141, 143, 144]. Однако применение численных методов при определении БК приводит к существенному увеличению вычислительной сложности барицентрического метода, нивелируя его преимущества в сравнении с МКЭ. Методы решения задач прямого и обратного конформных отображений многогранника Ω в \mathbb{R}^3 не известны вовсе. Более того, отсутствуют решения, определяющие простейшие конформные отображения (двухгранного и многогранного углов, шаровой луночки и пр.) в \mathbb{R}^3 . С учетом заданной постановки в данной главе предполагается на основе теории функции комплексного переменного определить строгое решение обратной задачи конформного отображения многоугольника Ω на каноническую область – единичный круг B' (задача конформного отображения наперед заданной многоугольной области), затем для заданных алгебраических и геометрических представлений в \mathbb{R}^2 получить обобщение прямой и обратной задач конформного отображения многогранника Ω в \mathbb{R}^3 . При этом с учетом известного обобщения условий Коши–Римана [145] в теории кватернионов [146] для описания изометрий в \mathbb{R}^3 будем использовать некоммутативную алгебру кватернионов Гамильтона [147] с дополнительным освещением вопросов, связанных с разложением кватернион-функций в обобщенные степенные ряды. Следует отметить, что в данной главе некоторые принятые ранее обозначения относительно теории

электромагнитного поля и барицентрических координат будут переназначены с учетом общепринятых определений переменных в теории функции комплексного переменного и теории кватернионов. Вопросы, рассмотренные в настоящей главе, нашли отражение в [24, 156, 166, 168].

3.1. Модифицированный метод последовательных конформных отображений наперед заданных многоугольных областей

Для решения обратной задачи конформного отображения зададим многоугольник Ω на комплексной плоскости \mathbb{C} . Многоугольник $\Omega \subset \mathbb{C}$ определим последовательностью неповторяющихся точек P_1, P_2, \dots, P_N с заданными значениями величины внутренних углов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, соответствующих по j -му индексу ($j = \overline{1, N}$) точкам P_j и таких, что $0 < \alpha_j < \pi$, $\sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{\pi} = N - 2$. Геометрический центр Ω совпадает с началом координат комплексной плоскости. Нумерацию точек $P_j = r_j e^{i\varphi_j}$ определим в порядке положительного обхода области Ω : $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_N$. Известно, что для заданных точек P'_j , расположенных на единичной окружности $\partial B' \subset \mathbb{C}$ и являющихся прообразами вершин P_j , конформное отображение единичного круга $B' = \{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$ на Ω (прямая задача) определяется интегралом Кристоффеля–Шварца [143]:

$$z = f(t) = C_0 \int_0^t \left[\prod_{j=1}^N \left(1 - \tau / P'_j\right)^{\alpha_j / \pi - 1} \right] d\tau + C_1, \quad (3.1)$$

где $z \in \mathbb{C}$; $C_0 \neq 0$ и C_1 – комплексные константы, значение которых нетрудно определить, например для правильного многоугольника из правила:

$$C_0 = (P_{j_2} - P_{j_1}) / (\tilde{P}_{j_2} - \tilde{P}_{j_1}); \quad C_1 = P_{j_1} - C_0 \tilde{P}_{j_1}, \quad (3.2)$$

соответствия положения двух вершин P_{j_1}, P_{j_2} с точками $\tilde{P}_{j_1}, \tilde{P}_{j_2}$, полученными при отображении P'_{j_1}, P'_{j_2} по выражению (3.1) для $C_0 = 1, C_1 = 0$ при $j_1, j_2 \in \{1; N\}, j_1 \neq j_2$.

Наряду с константами C_0, C_1 в интеграле (3.2) неизвестными параметрами являются прообразы $P'_j \in \partial B'$ соответствующих точек $P_j \in \partial \Omega$, определение которых сводится к численному решению известной, например из [148], системы из $N - 2$ уравнений. Методы численного решения подобных систем уравнений направлены на подбор соответствующих параметров P'_{j_1}, C_0, C_1 для получения заданной формы Ω относительно длин его ребер и достаточно подробно рассмотрены в работах Фильчакова П. Ф. [141, 149], Trefethen L. N. [143], Driscoll T. A. [144], Куфарева П. П. [150], Хара И. С. [151], Коппенфельса В. и Штальмана Ф. [152] и др. [153]. Анализ документации современных пакетов прикладных программ компьютерной алгебры (Maple, Mathematica, Matlab, Mathcad, Scilab, GNU Octave, SMath Studio и др.) показал, что в Matlab в расширении Schwarz-Christoffel Toolbox задана реализация метода Driscoll T. A. [144] по формированию отображения точек канонической области на внутреннюю или внешнюю область Ω . Набор инструментов в пакете Schwarz-Christoffel Toolbox написан на языке скриптов Matlab, использует функции высокого уровня, интерактивную среду, инструменты визуализации и графические элементы пользовательского интерфейса. Следует отметить, что пакет Schwarz-Christoffel Toolbox подходит для использования как в качестве автономного инструмента, так и в качестве библиотеки для приложений, написанных на языках Matlab, Fortran или C [154]. Других реализаций алгоритмов конформного отображения канонической области на Ω не обнаружено. К методу последовательных конформных отображений, подробно изложенному в монографии Фильчакова П. Ф. [141], вернемся позднее.

Решение задачи обратного конформного отображения точек $z \in \Omega$ на $B' = \{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$ осуществляется с использованием указанных методов по прямому отображению (т. е. выполняется задание функции $t = f^{-1}(z)$ для определенного интеграла Кристоффеля–Шварца (3.1)) при дополнительном численном решении двух возможных задач: 1) решение нелинейного уравнения $z = f(t)$ по t относительно заданных z (приближенный результат может быть найден, к примеру итерационным методом Ньютона [181]); 2) с исполь-

зованием разностных схем численное решение дифференциального уравнения [143]: $\frac{dt}{dz} = \frac{1}{C_0} \prod_{j=1}^N \left(1 - \tau / P'_j\right)^{1-\alpha_j/\pi}$. Решение указанных задач возможно с использованием стандартных процедур, также реализованных в Matlab. Геометрическое представление постановки вышеизложенной задачи рассмотрено на примере пятиугольника (рис. 3.1).

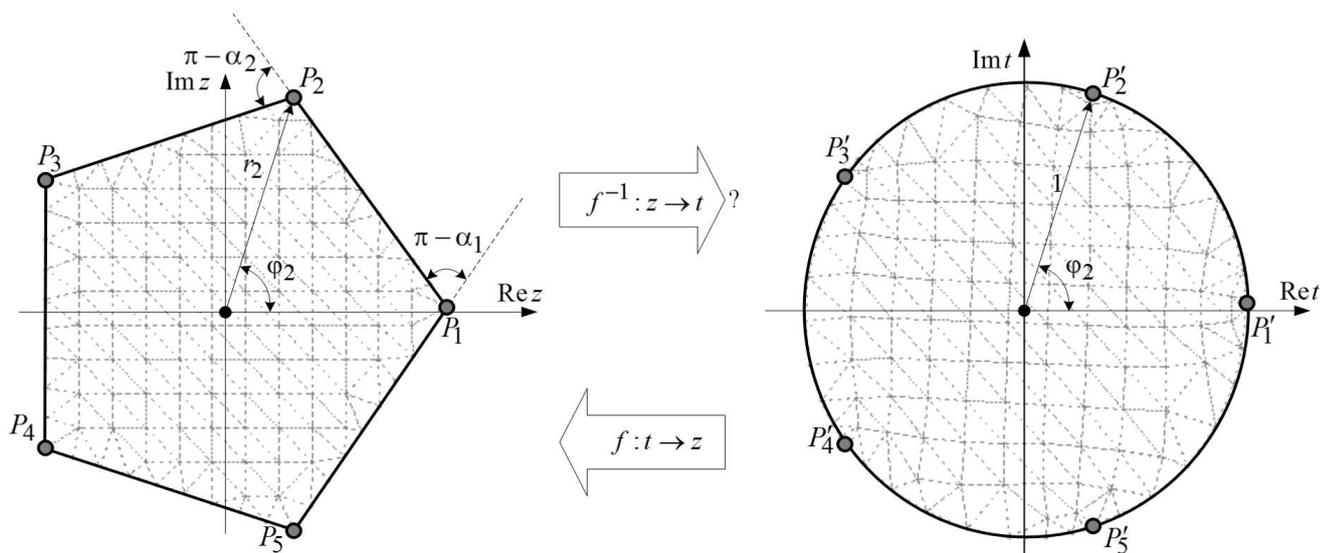


Рис. 3.1. Геометрическая постановка задачи конформного отображения наперед заданной многоугольной области

Несмотря на существование в современных САПР компьютерной алгебры выделенных реализаций процедур решения обратной задачи конформного отображения Ω на каноническую область, подобное применение вложенных друг в друга численных методов приводит к увеличению вычислительной сложности, накладывает ряд ограничений по чувствительности, устойчивости и вычислительной устойчивости.

Другим возможным вариантом определения правила обратного отображения области Ω на B' является следующее решение.

Известно [142], что прямое ($W : z \rightarrow \omega$) и обратное ($W^{-1} : \omega \rightarrow z$) преобразования Кэли:

$$\omega = (z - i) / (z + i) \text{ и } z = i(1 + \omega) / (1 - \omega), \quad (3.3)$$

переводят любую прямую в дугу единичной окружности и обратно.

Используя дробно-линейное преобразование

$$\zeta = i(R + z)/(R - z), \quad (3.4)$$

где R – минимальный радиус круга B_R , содержащего в себе все вершины P_j многоугольника, переведем многоугольную область $z \in \Omega$ на верхнюю полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ с вырезанными круговыми двуугольниками (круговые лунки) [142]. При этом вершины, расположенные на границе ∂B_R круга B_R , будут отображаться на действительную ось комплексной полуплоскости $\text{Im } \zeta = 0$ в точки $a_j = -\sin \varphi_j / (1 - \cos \varphi_j)$. Вершины P_j многоугольной области, расположенные внутри круга B_R , отображаются в точки a_j , отступающие от действительной оси на величину $\text{Im } a_j = (R^2 - |P_j|^2) / (|P_j|^2 + R^2 - 2|P_j| \cos \varphi_j)$, а от мнимой – $\text{Re } a_j = -2R|P_j| \sin \varphi_j / (|P_j|^2 + R^2 - 2|P_j| \cos \varphi_j)$. На рисунке 3.2 приведен пример отображения семиугольника на верхнюю полуплоскость дробно-линейным отображением (3.4).

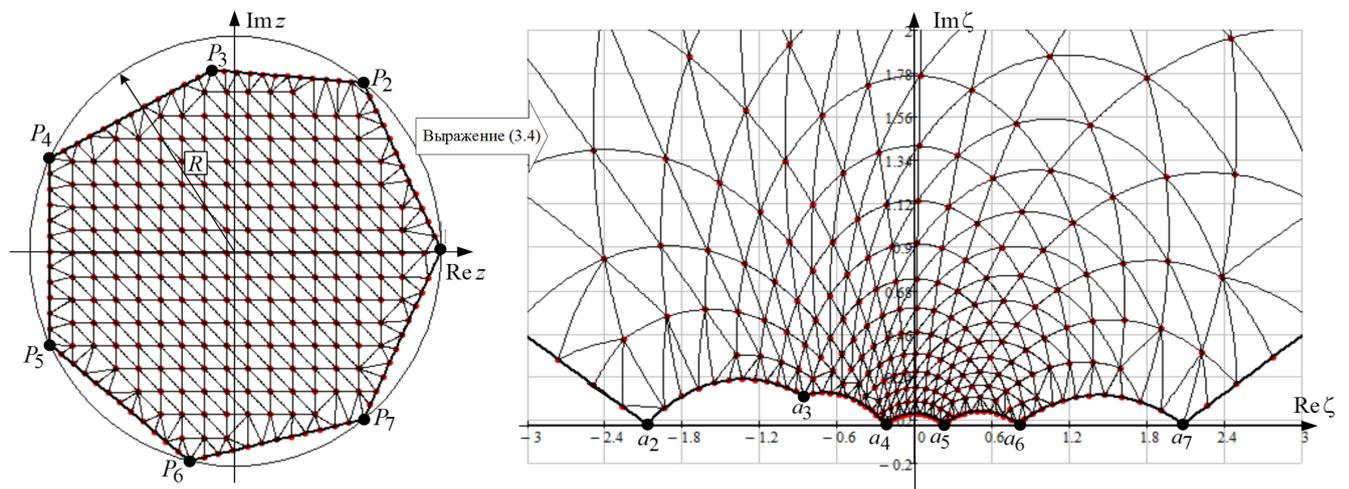


Рис. 3.2. Пример отображения семиугольника на верхнюю полуплоскость дробно-линейным отображением (3.4)

Задача по добавлению первого выброшенного сегмента на верхнюю полуплоскость в рассматриваемой постановке (см. рис. 3.2) является тривиальной и сводится к известной задаче построения отображения полуплоскости

с выброшенным сегментом круга на полуплоскость [141–143]. В ней указанное отображение производится для ребра $e_j = \{P_j, P_{j+1}\}$ исходного многоугольника, заданного парой соседних вершин P_j и P_{j+1} , расположенных на ∂B_R . Решение выполняется с применением обобщенной функцией Жуковского – последовательностью дробно-линейного преобразования, преобразования степенной функцией и обратного дробно-линейного преобразования. Параметры удаляемого j -го сегмента: радиус R_j и положение центра m_j координат круга определяются по трем точкам, принадлежащим ребру e_j , например $\zeta : \left(P_j, \frac{P_j+P_{j+1}}{2}, P_{j+1}\right) \rightarrow (h_1 = x_1 + iy_1, h_2 = x_2 + iy_2, h_3 = x_3 + iy_3)$ с учетом преобразования (3.4), по правилу:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} m_j &= 0,5 \left[(x_1^2 + y_1^2)(y_2 - y_3) + (x_2^2 + y_2^2)(y_3 - y_1) + (x_3^2 + y_3^2) \times \right. \\ &\quad \left. \times (y_1 - y_2) \right] [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]^{-1}; \\ \operatorname{Im} m_j &= 0,5 \left[(x_1^2 + y_1^2)(x_3 - x_2) + (x_2^2 + y_2^2)(x_1 - x_3) + (x_3^2 + y_3^2) \times \right. \\ &\quad \left. \times (x_2 - x_1) \right] [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]^{-1}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$R_j = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{2|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|} \times$$

$$\times \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}.$$

Добавление произвольного кругового сегмента на полуплоскость обобщенной функцией Жуковского приведет к изменению остальных круговых двуугольников. Для последующего отображения полученной области с $N - 1$ выброшенными сегментами на верхнюю полуплоскость применим метод последовательных конформных отображений (метод исчерпывания) [141]. Метод исчерпывания предложен в 1934 г. для решения гидромеханических задач Лаврентьевым М. А. и развит в работах Козлова В. С. [155]. Решение сводится к последовательному исчерпыванию на каждой k -й итерации выброшенных сегментов из верхней полуплоскости при помощи добавления полуэллипсов с заданными полуосями или добавления сегментов круга, заданного радиусом и положением центра. Определение параметров добавляемых стандартных сегментов в методе исчерпывания выполняется по трем фиксированным точкам.

Некоторые рекомендации по выбору на каждой k -й итерации этих трех точек сформулированы в [141], однако их явно недостаточно для формирования эффективных алгоритмов решения задачи обратного конформного отображения на ЭВМ. Для осуществления подобного конформного отображения с приемлемой точностью (погрешность в отображении границы области измеряется 1 – 3%) метод исчерпывания требует проведения процедур по элементарным отображениям, число которых измеряется несколькими сотнями [141].

Для увеличения эффективности обратного конформного отображения точек $z \in \Omega$ на единичный круг $B' = \{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$ предлагается модифицировать метод последовательных конформных отображений при определении решения следующей модельной задачи [156].

Теорема 8. *Конформное отображение $\text{Im } \zeta > 0$ с выброшенным сегментом, образованным пересечением полуплоскости с произвольной односвязной областью Ω с гладкой границей Γ , на $\text{Im } \zeta > 0$ при условии $\exists a(\varphi), b(\varphi)$ для $\forall \varphi \in [0; \pi]$ может быть осуществлено обобщенной функцией Жуковского вида $\varpi(\zeta) = S_3(S_2(S_1(\zeta)))$ при*

$$\begin{aligned} S_1(\zeta) &= [\zeta - a(\varphi)] [\zeta - b(\varphi)]^{-1}; \quad S_2(\zeta) = \zeta^{\gamma(\varphi)}; \\ S_3(\zeta) &= 0,5\gamma(\varphi) [a(\varphi) - b(\varphi)] (1 + \zeta) / (1 - \zeta), \\ &\text{и нормировке } \varpi'(\infty) = 1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\varphi = \arg(\zeta)$; $a(\varphi), b(\varphi)$ – точки пересечения действительной оси с соприкасающейся окружностью; $\gamma(\varphi) = \pi / (\pi - \beta(\varphi))$; $\beta(\varphi)$ – угол, образованный касательной к соприкасающейся окружности в точке ее пересечения $a(\varphi)$ с действительной осью (рис. 3.3).

При этом соприкасающаяся окружность формируется границей выброшенного из полуплоскости сегмента односвязной области в окрестности точки $\tau \in \Gamma$ при $\arg(\zeta) = \arg(\tau) = \varphi$.

Доказательство. Пусть граница Γ области Ω в верхней полуплоскости определена кривой, заданной уравнением $\tau(\varphi) = u(\varphi) + iv(\varphi)$ с параметриза-

цией по $0 \leq \varphi \leq \pi$. Далее в доказательстве для сокращения записи опустим зависимость соответствующих переменных от φ . Для произвольной точки кривой Γ определим соприкасающуюся окружность (см. рис. 3.3). Данная окружность имеет радиус ρ , соответствующий радиусу кривизны кривой в окрестности τ , и центр, расположенный в $z_0 = x_0 + iy_0$.

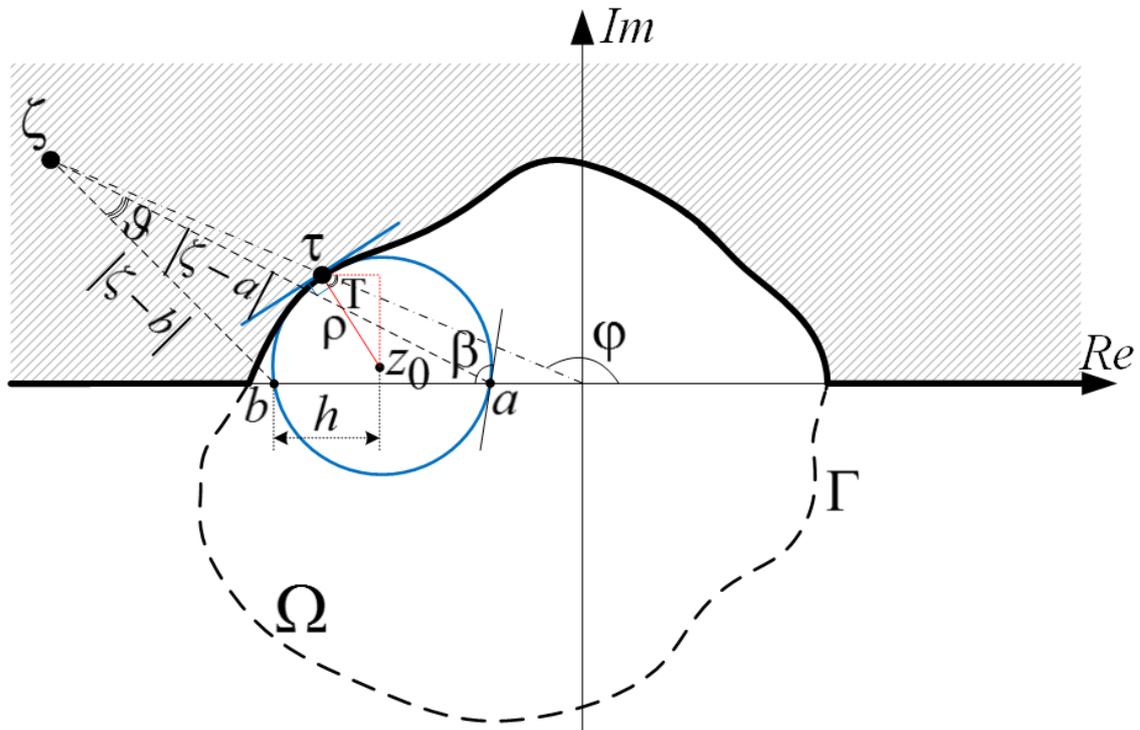


Рис. 3.3. Геометрическое представление задачи отображения полуплоскости с выброшенным сегментом

Введем обозначения

$$\mu(\zeta) = \varrho e^{i\vartheta} = \xi + i\eta = (\xi - a) / (\xi - b), \quad (3.7)$$

где $\vartheta = \arg [(\zeta - a) / (\zeta - b)]$ – угол, под которым из заданной точки ζ исходной верхней полуплоскости с выброшенным сегментом при $\arg(\zeta) = \varphi$ видны точки a и b ; $\varrho = |(\zeta - a) / (\zeta - b)|$ – отношение расстояний от точки ζ до точек a и b . Так как $\zeta = x + iy$, то преобразование (3.7) приведем к виду

$$\begin{aligned} \xi + i\eta = & \left(1 - (x - b)(a - b) / [(x - b)^2 + y^2] \right) + \\ & + i \left(y(a - b) / [(x - b)^2 + y^2] \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Учитывая выражение (3.8), параметры ϱ и ϑ могут быть определены через соответствующие выражения:

$$\begin{aligned}\varrho^2 &= 1 - (a - b)(2x - b - a) / \left[(x - b)^2 + y^2 \right]; \\ \operatorname{tg} \vartheta &= y(a - b) / \left[x^2 + y^2 - x(a + b) + ab \right].\end{aligned}\quad (3.9)$$

Предположим, что обобщенная функция $\varpi(\zeta)$ Жуковского вида (3.6) отображает кривую τ на действительную ось. Тогда для $\mu(\tau) = S_2(S_1(\tau))$ справедливо равенство

$$\operatorname{Im}(\mu(\tau)) = 0. \quad (3.10)$$

При подстановке выражения (3.7) в равенство (3.10) получим

$$\operatorname{Im}(\mu(\tau)) = \varrho^\gamma \sin \gamma \vartheta = 0 \text{ или } \sin(\pi \vartheta / (\pi - \beta)) = 0. \quad (3.11)$$

Условие (3.11) выполняется при равенстве аргумента под знаком синуса πk для $k = 0, 1, 2, \dots$, следовательно,

$$\vartheta = \pi - \beta. \quad (3.12)$$

Подставляя в равенство (3.12) определение угла ϑ из (3.9) и угла $\beta = \arctg((a - x_0) / |y_0|)$ (см. рис. 3.3), получим тождество

$$y_0 y (a - b) = (a - x_0) \left(x^2 + y^2 - x(a + b) + ab \right). \quad (3.13)$$

Принимая во внимание равенства

$$\begin{aligned}a &= x_0 + h; \quad b = x_0 - h; \quad h = \sqrt{\rho^2 - y_0^2}; \\ x - x_0 &= \rho \cos \Gamma; \quad y - y_0 = \rho \sin \Gamma,\end{aligned}\quad (3.14)$$

приведем тождество (3.13) преобразованиями

$$\begin{aligned}y_0 y 2h &= h \left(x^2 + y^2 - 2x x_0 + x_0^2 - h^2 \right); \\ 2y_0 y &= (x - x_0)^2 + y^2 - h^2; \\ 2y_0 y &= \rho^2 \cos^2 \Gamma + y^2 - \rho^2 + y_0^2\end{aligned}\quad (3.15)$$

к виду

$$(y - y_0)^2 = \rho^2 \sin^2 T, \quad (3.16)$$

которое соответствует соотношениям (3.14). Следовательно исходное предположение и равенство (3.10) верны.

Поскольку при отображении $\mu(\zeta)$ точка $\zeta = \infty$ переходит в точку $\mu(\infty) = 1$, то для выполнения условий нормировки (3.6) при конформном отображении на верхнюю полуплоскость \mathfrak{w} применим дополнительное преобразование

$$\begin{aligned} \mathfrak{w}(\zeta) &= k(1 + \mu(\zeta))(1 - \mu(\zeta))^{-1} \quad \text{или} \\ \mathfrak{w}(\zeta) &= k \frac{1 + (\zeta - a)^\gamma (\zeta - b)^{-\gamma}}{1 - (\zeta - a)^\gamma (\zeta - b)^{-\gamma}} = k \frac{(1 - b/\zeta)^\gamma + (1 - b/\zeta)^\gamma}{(1 - b/\zeta)^\gamma - (1 - b/\zeta)^\gamma}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где k – некоторая комплексная константа.

Найдя производную функции $\mathfrak{w}(\zeta)$

$$\frac{d\mathfrak{w}}{d\zeta} = 2k \frac{\left\{ \begin{aligned} &\gamma \left[a \left(1 - \frac{db}{d\zeta} \right) b \left(1 - \frac{da}{d\zeta} \right) - \zeta \left(\frac{da}{d\zeta} - \frac{db}{d\zeta} \right) \right] / \zeta^2 + \\ &+ \left(1 - \frac{a}{\zeta} \right)^\gamma \left(1 - \frac{b}{\zeta} \right)^\gamma \left[\ln \left(1 - \frac{a}{\zeta} \right) - \ln \left(1 - \frac{b}{\zeta} \right) \right] \frac{d\gamma}{d\zeta} \end{aligned} \right\}}{\left[(1 - a/\zeta)^\gamma - (1 - b/\zeta)^\gamma \right]^2 (1 - a/\zeta)^{1-\gamma} (1 - b/\zeta)^{1-\gamma}} \quad (3.18)$$

путем разложения в биномиальный ряд по степеням $(1 - a/\zeta)^\gamma$, $(1 - b/\zeta)^\gamma$ знаменателя, получим для больших $|\zeta|$ выражение

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{w}}{d\zeta} &= \frac{2k(1-a/\zeta)^{\gamma-1}(1-b/\zeta)^{\gamma-1}}{\gamma^2(a-b)^2} \left\{ \gamma \left[a \left(1 - \frac{db}{d\zeta} \right) b \left(1 - \frac{da}{d\zeta} \right) - \zeta \left(\frac{da}{d\zeta} - \frac{db}{d\zeta} \right) \right] \times \right. \\ &\times \zeta^{-2} + \left. \left(1 - \frac{a}{\zeta} \right)^\gamma \left(1 - \frac{b}{\zeta} \right)^\gamma \left[\ln \left(1 - \frac{a}{\zeta} \right) - \ln \left(1 - \frac{b}{\zeta} \right) \right] \frac{d\gamma}{d\zeta} \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Применив в выражении (3.19) к $da/d\zeta$, $db/d\zeta$ и $d\gamma/d\zeta$ правило дифференцирования параметрически заданных функций, учитывая, что $d\varphi/d\zeta = -\operatorname{Im}(\zeta) |\zeta|^{-2} = -\sin \varphi (\sin \varphi - i \cos \varphi) / r$, получим при $\zeta \rightarrow \infty$:

$$\mathfrak{w}'(\infty) = 2k(\gamma(a-b))^{-1} \quad \text{или} \quad k = 0,5\gamma(a-b). \quad (3.20)$$

Подставляя теперь константу k в выражение (3.17) получим искомое отображение (3.6). \square

Для сформированного решения модельной задачи по добавлению выброшенного сегмента с гладкой границей в $\text{Im } \zeta > 0$ модифицированный метод последовательных конформных отображений задается с учетом утверждений из [156] и допущений о том, что границы выброшенных сегментов, параметризованные кривой второго порядка (эллипс или гипербола), при добавлении j -го $j = \overline{1, N}$ сегмента в $\text{Im } \zeta > 0$ по правилу (3.6) не приводят к повышению порядка кривых, параметризующих границы остальных $N - 1$ выброшенных из $\text{Im } \zeta > 0$ сегментов.

Для введенных представлений определим зависимость переменных $\gamma(\varphi)$, $a(\varphi)$, $b(\varphi)$ в выражении (3.6) от угла φ в полуплоскости с эллиптической луночкой, заданной эллипсом с полуосями a_0 и b_0 , центром в $\tilde{z}_0 = \tilde{x}_0 + i\tilde{y}_0$ и углом α наклона к действительной оси (рис. 3.4).

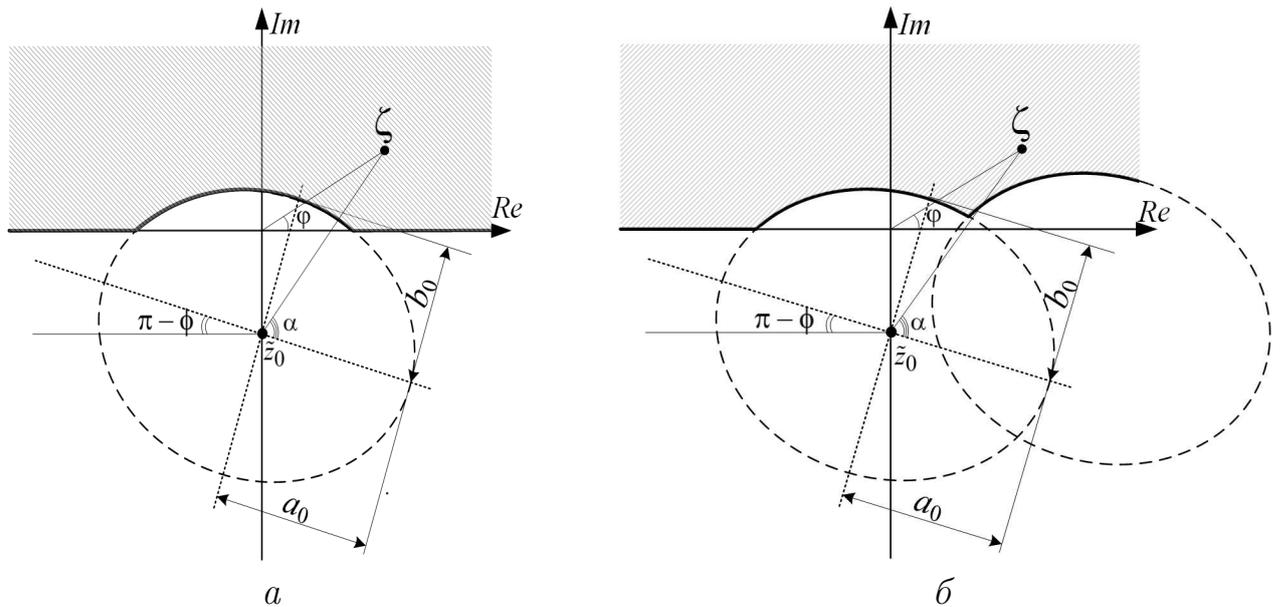


Рис. 3.4. Геометрическое представление задачи отображения эллиптической луночки на верхнюю полуплоскость

Зависимость угла $\beta = \arccos(|y_0|/\rho)$ для эллиптической луночки от φ определяется с помощью соотношений

$$y_0 = y - \rho \sin \Gamma; \quad \rho = \left(a_0^2 \sin^2 \alpha + b_0^2 \cos^2 \alpha \right)^{3/2} / a_0 b_0;$$

$$\Gamma = \pm 2 \arctg \left[\left(\sqrt{k_H^2 + 1} \mp 1 \right) / k_H^2 \right] \geq 0;$$

$$k_{\text{H}} = \frac{-a_0^2 \cos^2 \phi - b_0^2 \sin^2 \phi}{\cos \phi \sin \phi (a_0^2 - b_0^2) - \frac{(u-\tilde{x}_0)a_0b_0}{\sqrt{a_0^2 \cos^2 \phi + b_0^2 \sin^2 \phi - (u-\tilde{x}_0)^2}}};$$

$$\tau = u + iv = e^{i\phi} (a_0 \cos \alpha + b_0 \sin \alpha) + \tilde{z}_0;$$

$$\alpha = \begin{cases} \arccos \tilde{\alpha}_1 & \text{if } |\varphi - \phi| < 0, 5\pi; \\ \arccos \tilde{\alpha}_2 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\tilde{\alpha}_{1,2} = \frac{1}{D} \left(a_0 (\sin \phi - \operatorname{tg} \varphi \cos \phi) G \pm |b_0 (\cos \phi + \operatorname{tg} \varphi \sin \phi)| \sqrt{D - G^2} \right);$$

$$G = \tilde{x}_0 \operatorname{tg} \varphi - \tilde{y}_0;$$

$$D = a_0^2 (\sin \phi - \operatorname{tg} \varphi \cos \phi)^2 + b_0^2 (\cos \phi + \operatorname{tg} \varphi \sin \phi)^2.$$

Параметры отображения (3.6) $a(\varphi)$, $b(\varphi)$ находятся по соответствующим тождествам (3.14) с использованием соотношений (3.20).

Также в приближении теоремы 8 определим параметры для формирования конформного отображения полуплоскости с гиперболической луночкой на полуплоскость. Граница луночки задана ветвью гиперболы с полуосями a_0 и b_0 , центром в $\tilde{z}_0 = \tilde{x}_0 + i\tilde{y}_0$ и углом наклона ϕ к действительной оси. Зависимость угла $\beta = \arccos(|y_0|/\rho)$ для гиперболической луночки от φ и параметров $a(\varphi)$, $b(\varphi)$ задается с помощью соотношений

$$y_0 = y - \rho \sin T; \quad \rho = \frac{(a_0^2 \operatorname{sh}^2 \alpha + b_0^2 \operatorname{ch}^2 \alpha)^{3/2}}{a_0 b_0 |\operatorname{sh}^2 \alpha - \operatorname{ch}^2 \alpha|};$$

$$T = \pm 2 \operatorname{arctg} \left[\left(\sqrt{k_{\text{H}}^2 + 1} \mp 1 \right) / k_{\text{H}}^2 \right] \geq 0;$$

$$\tau = u + iv = e^{i\phi} (a_0 \operatorname{ch} \alpha + b_0 \operatorname{sh} \alpha) + \tilde{z}_0;$$

$$\alpha = \begin{cases} \operatorname{arsh} \tilde{\alpha}_1 & \text{if } |\phi + 0, 5\pi| \geq \varphi; \\ \operatorname{arsh} \tilde{\alpha}_2 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\tilde{\alpha}_{1,2} = \frac{1}{D} \left(b_0 (\cos \phi + \operatorname{tg} \varphi \sin \phi) G \pm |a_0 (\operatorname{tg} \varphi \cos \phi - \sin \phi)| \sqrt{D + G^2} \right);$$

$$G = \tilde{x}_0 \operatorname{tg} \varphi - \tilde{y}_0;$$

$$D = a_0^2 (\operatorname{tg} \varphi \cos \phi - \sin \phi)^2 - b_0^2 (\cos \phi + \operatorname{tg} \varphi \sin \phi)^2;$$

$$k_{\text{H}} = \left(-a_0^2 \cos^2 \phi + b_0^2 \sin^2 \phi \right) \left[\cos \phi \sin \phi \left(a_0^2 + b_0^2 \right) - \frac{(u - \tilde{x}_0) a_0^2 b_0^2}{\sqrt{b_0^2 \sin^2 \phi - a_0^2 \cos^2 \phi + a_0^2 b_0^2 (u - \tilde{x}_0)^2}} \right]^{-1}.$$

Параметры кривых второго порядка, соответствующие при обратном отображении ребрам $e_j = \{P_j, P_{j+1}\}$ исходного Ω , определяются по заданным пяти точкам $h_s^j = r_s^j e^{i\varphi_s^j}$ ($s = \overline{1, 5}$) с учетом известных правил [109]. Вид кривой второго порядка, описываемой известным уравнением $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = a_{33}$, определяется по ее инвариантам [109]:

$$\begin{aligned} I_1 &= a_{33}a_{12}^2 + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{22}a_{13}^2 - a_{11}a_{23}^2 - a_{11}a_{22}a_{33}; \\ I_2 &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2; \quad I_3 = a_{11} + a_{22}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

В случае, если сегмент, формирующий луночку в верхней полуплоскости, на границе содержит точки, для которых не существует $a(\varphi)$, $b(\varphi)$, то добавление выброшенного сегмента в полуплоскость выполняется последовательностью конформных отображений, удовлетворяющих условиям теоремы 8.

В целом, определенная модификация метода последовательных конформных отображений с учетом сформулированных в [156] рекомендаций позволяет разработать алгоритм решения обратной задачи конформного отображения Ω на B' , включающий следующие основные шаги.

Шаг 1. Задать пять точек $h_s^j = r_s^j e^{i\varphi_s^j}$ ($s = \overline{1, 5}$) на соответствующих j -х ребрах $e_j = \{P_j, P_{j+1}\}$ исходного Ω с условием равноудаленности h_s^j и h_{s+1}^j в пределах j -го ребра. Определить R – минимальный радиус круга B_R , содержащего в себе все вершины P_j многоугольника.

Шаг 2. Номер добавляемого сегмента $k = 1$. Повернуть Ω на угол ψ_k , так, чтобы точка h_3^k оказалась на отрицательной части действительной оси. Перевести полученный Ω по правилу (3.4) на верхнюю полуплоскость. По трем точкам h_1^k, h_3^k, h_5^k определить параметры кругового сегмента и с применением известных решений [141–143] выполнить добавление k -го кругового сегмента на $\text{Im } \zeta > 0$. Затем результат обратным преобразованием (3.4) перевести на

комплексную плоскость и полученный Ω^k повернуть в исходное положение – на угол $-\Psi_k$.

Шаг 3. $k = k + 1$. Аналогично шагу 2 повернуть Ω^{k-1} на угол Ψ_k и по правилу (3.4) перевести результат на $\text{Im } \zeta > 0$. По пяти точкам h_s^k ($s = \overline{1, 5}$) определить вид кривой второго порядка, параметризующей границу k -го сегмента, и ее соответствующие параметры $a_0^k, b_0^k, z_0^k, \phi^k$ по правилам из [109].

Шаг 4. Относительного положения точек h_s^j на $\text{Im } \zeta > 0$ применить заданное в теореме 8 решение модельной задачи по добавлению выброшенного k -го сегмента при определении по указанным выше правилам переменных $\gamma(\varphi), a(\varphi), b(\varphi)$ от $\varphi = \arg(h_s^k)$ в соответствии с видом кривой (эллипс или гипербола), ограничивающей k -й сегмент. Следует уточнить, что при таком отображении составляющие решение в теореме 8 функции задаются в виде $S_1(\zeta) = \frac{\zeta - z_0(\varphi) - a(\varphi)}{\zeta - z_0(\varphi) - b(\varphi)}$; $S_2(\zeta) = \zeta^{\gamma(\varphi)}$; $S_3(\zeta) = 0, 5\gamma(\varphi)[a(\varphi) - b(\varphi)] \frac{1+\zeta}{1-\zeta} + z_0(\varphi)$, где $z_0(\varphi)$ – центр соприкасающейся в точке τ с границей выброшенного сегмента окружности (см. рис. 3.3).

Шаг 5. Полученный результат на $\text{Im } \zeta > 0$ обратным преобразованием (3.4) перевести на комплексную плоскость. Затем Ω^k повернуть в исходное положение – на угол $-\Psi_k$.

Шаг 6. Если $k = N$, завершить работу алгоритма с предварительным конформным отображением по известным из [95] правилам полученного единичного круга на единичный круг таким образом, чтобы исходная координата центра Ω для B' также находилась в нуле. Если $k \neq N$ необходимо перейти к шагу 3.

Результатом работы алгоритма является составная аналитическая функция $F : \Omega \rightarrow B'$, применяемая в последующем решении задачи обратного конформного отображения Ω на B' при определении БК в \mathbb{R}^2 . Следует подчеркнуть, что в формулировках алгоритма под различными видами конформного отображения Ω^k понимается отображение точек h_s^j на k -й итерации. С применением разработанного алгоритма и его реализации в САПР компьютерной алгебры Mathcad проведена апостериорная оценка точности разработанного мо-

дифицированного метода последовательных конформных отображений на ряде тестовых задач. Точность решения оценена при определении выполнения условий Коши–Римана. Формирование тестовых задач для визуального сравнения результатов и апостериорной оценки точности выполнено при разбиении внутренней области Ω на M треугольников. Степень выполнения условий Коши–Римана оценена модулем средней ошибки отклонения Δ при численном вычислении по правилу [71] интеграла $\Delta = \int_{\Omega \setminus \partial\Omega} \left| \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right| d\Omega$. Примеры тестовых задач по отображению многоугольных областей на единичный круг представлены на рисунке 3.5.

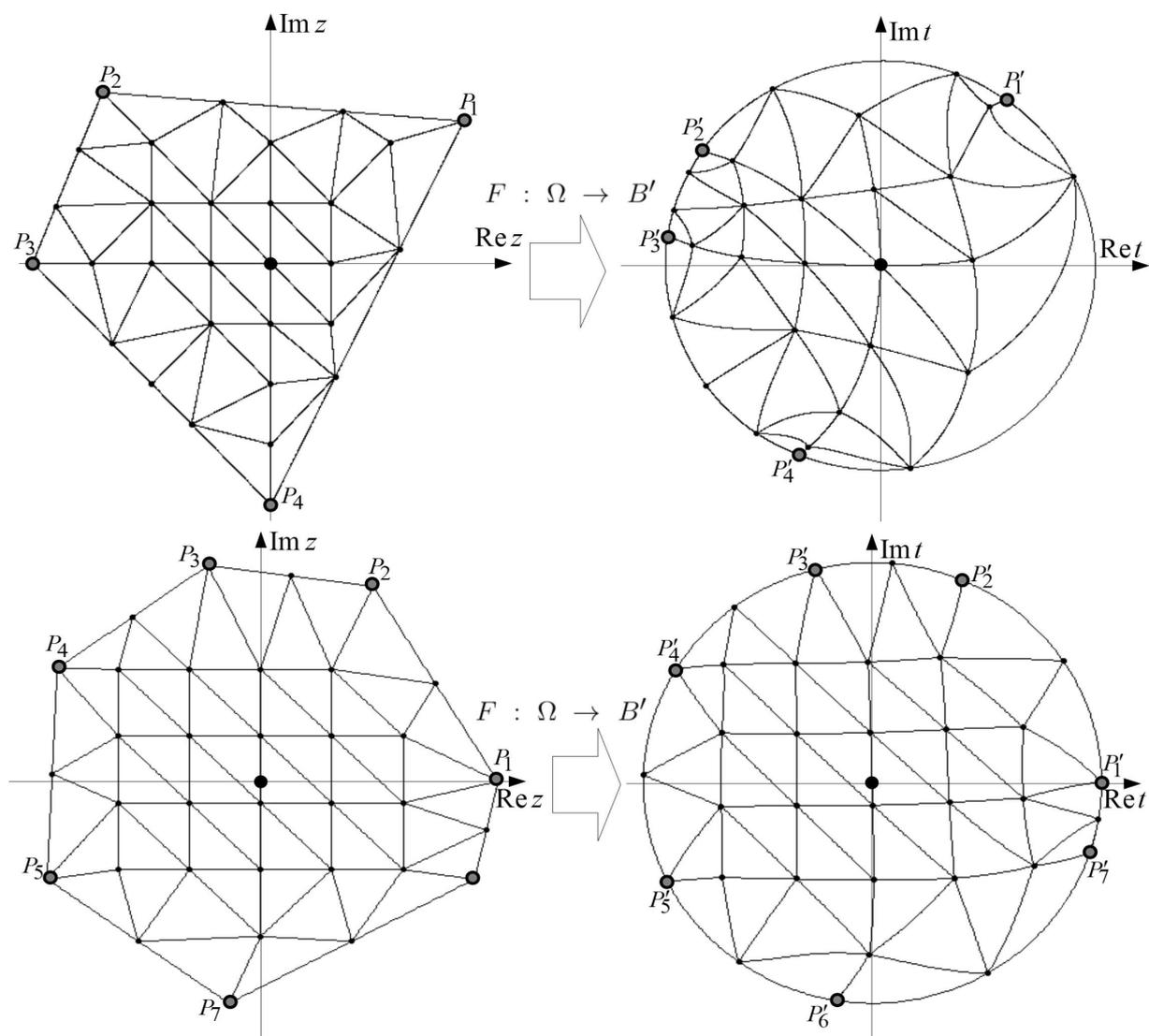


Рис. 3.5. Примеры обратного отображения наперед заданной четырехугольной и семиугольной областей на единичный круг

В результате проведенного моделирования решения задачи конформного отображения Ω для B' в Mathcad определено, что среднее значение $\Delta \approx 0,0034$. В целом, полученные результаты позволяют за конечное число элементарных конформных отображений кратных числу вершин N многоугольника (максимальное общее число отображений равно $5 \cdot N^2$) сформировать аналитическую функцию $F : \Omega \rightarrow B'$ для конформного отображения заданной односвязной многоугольной области на единичный круг с вычислительной ошибкой соизмеримой с десятками долей процентов.

3.2. Кватернионы и разложение кватернион-функций

Теория кватернионов, базирующаяся на обобщении условий Коши–Римана [145], позволяет использовать алгебру, удобную для описания изометрий в \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^4 . Однако, несмотря на длительный период формирования, проблема разложения регулярной кватернион-функции в обобщенные ряды Тейлора и Лорана является недостаточно проработанной. Последнее связано с тем, что ряд известных результатов, таких как [145, 157, 158], получен не на основе применения некоммутативной алгебры кватернионов или ее геометрической интерпретации (гиперсферическая [159] и прямоугольная [160] системы координат), а с использованием алгебры действительных чисел с компонентным разложением кватернионных переменных и функций. Вследствие этого возникают ошибочное истолкование получаемых решений и затруднения прикладного применения результатов. В этой связи для решения задач конформного отображения многогранников в \mathbb{R}^3 с применением алгебры кватернионов определим разложение регулярной кватернион-функции в обобщенные ряды Тейлора и Лорана [158, 159] с установлением взаимосвязи между представлениями этого разложения в алгебре кватернионов и гиперсферической системе координат.

Под \mathbb{H} будем понимать алгебру кватернионов Гамильтона [162], объектом которой является кватернион $q \in \mathbb{H}$, заданный линейной комбинацией $q = q_0 + i_1 q_1 + i_2 q_2 + i_3 q_3$ ($q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$; i_1, i_2, i_3 – мнимые единицы), со скалярными характеристиками и кватернионными операциями [146].

Под кватернион-функцией $F(q)$ в \mathbb{H} -алгебре будем понимать отображение $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, функциональная зависимость которого может быть представлена в виде линейной комбинации четырех действительных функций от $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R} : F(q) = F_0(q_0, \dots, q_3) + i_1 F_1(q_0, \dots, q_3) + i_2 F_2(q_0, \dots, q_3) + i_3 F_3(q_0, \dots, q_3)$.

Определение регулярной кватернион-функции $F(q)$ согласно [146] будем рассматривать через кватернионно праводифференцируемую $F'_r(q) = dF(q)(dq)^{-1}$ и леводифференцируемую $F'_l(q) = (dq)^{-1}dF(q)$ функции, несовпадающие в силу некоммутативности \mathbb{H} -алгебры. С учетом того, что теории кватернион-дифференцируемых слева и справа функций эквивалентны [146], под кватернион-дифференцируемой функцией будем понимать праводифференцируемую функцию, для которой предел $dF(q)(dq)^{-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\left(\frac{F(q+h \cdot dq) - F(q)}{h} \right) (dq)^{-1} \right]$ существует (производная Гато), где $q, dq \in \mathbb{H}; h \in \mathbb{R}$. Соответственно, под регулярной кватернион-функцией будем понимать определение из [146] для праворегулярной кватернион-функции $d(F dq \wedge dq) = -2F'_r(q) Dq$, где $Dq = dq_1 \wedge dq_2 \wedge dq_3 - j_1 dq_0 \wedge dq_2 \wedge dq_3 - j_2 dq_0 \wedge dq_3 \wedge dq_1 - j_3 dq_0 \wedge dq_1 \wedge dq_2$ – внешняя 3-форма при $1 \rfloor Dq = -\frac{1}{2} dq \wedge dq$.

Получение разложений регулярной кватернион-функции в обобщенные ряды Тейлора и Лорана позволяет определить аналитическое продолжение $F(q)$.

Теорема 9. Пусть границы областей $G_1, G_2 \in \mathbb{H}$ содержат общую сферическую поверхность γ , а функции F_1 и F_2 являются регулярными соответственно в G_1 и G_2 . Тогда функция F_1 допускает аналитическое продолжение F_2 через γ в G_2 , если существует регулярная функция F в области $G = G_1 \cup G_2 \subset \mathbb{H}$, такая, что

$$F(q) = \begin{cases} F_1(q), \forall q \in G_1; \\ F_2(q), \forall q \in G_2, \end{cases} \quad \text{при } F_1(q) = F_2(q), \forall q \in \gamma. \quad (3.22)$$

Доказательство. Обозначим через ∂G границу области G . Пусть внутри области G содержится гладкая замкнутая поверхность $\partial G'$, расположенная относительно ∂G на сколь угодно близком расстоянии. Тогда пересечение $\partial G'$ с γ образует гладкий замкнутый контур $\partial \gamma$. Согласно обобщенной интегральной

формуле Коши, в алгебре кватернионов [146] и с учетом введенных представлений имеем

$$F(q^0) = \frac{1}{2\pi^2} \oint_{\partial G'} F(q) DqM(q - q^0), \quad q^0 \in G, \quad (3.23)$$

где $M(q - q^0) = (q - q^0)^{-1} / \|q - q^0\|$ – ядро Коши. Обозначим через $\partial G'_1$ замкнутую поверхность, образованную частью $\partial \tilde{G}'_1$ контура $\partial G'$, содержащейся в G_1 , и сферической поверхностью $\gamma_1 \subset \gamma$, ограниченной гладким замкнутым контуром $\partial\gamma$. Аналогично через $\partial G'_2$ обозначим замкнутую поверхность, образованную частью $\partial \tilde{G}'_2$ контура $\partial G'$, содержащейся в G_2 , и $\gamma_1 \subset \gamma$. В силу (3.23) и обобщения теоремы Коши в алгебре кватернионов [157] для $\forall q^0 \in G$ получим соотношения

$$F(q^0) = F_1(q^0) + F_2(q^0);$$

$$F_1(q^0) = \frac{1}{2\pi^2} \oint_{\partial G'_1} F(q) DqM(q - q^0) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_{\partial \tilde{G}'_1} + \int_{\gamma_1} \right); \quad (3.24)$$

$$F_2(q^0) = \frac{1}{2\pi^2} \oint_{\partial G'_2} F(q) DqM(q - q^0) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_{\partial \tilde{G}'_2} - \int_{\gamma_1} \right) = 0,$$

задающие тождество $F(q) = F_1(q)$ для $\forall q \in G_1$. Аналогично (3.24) определяется тождество $F(q) = F_2(q)$ для $\forall q \in G_2$. \square

Теорема 10. *Всякая кватернион-функция $F(q)$, регулярная в некотором 4-мерном гипершаре $|q - q^0| < R$ с центром в точке q^0 , может быть представлена в этом гипершаре степенным рядом*

$$F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (q - q^0)^n \quad \text{при } c_n = F^{(n)}(q^0) / n!, \quad (3.25)$$

зде

$$\begin{aligned}
F^{(n)}(q^0) &= d^n F(q^0) (dq)^{-n} = \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi^2} \oint_{S_0} F(q') Dq' d^n M(q' - q^0) (dq)^{-n}; \tag{3.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^n M(q' - q^0) &= (-1)^{n-1} n! \frac{(q' - q^0)^{-1}}{\|q' - q^0\|} \left\{ \left[dq(q' - q^0)^{-1} \right]^n + \right. \\
&+ \sum_{m=1}^n \left(\left[dq(q' - q^0)^{-1} \right]^{n-m} \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \left[\frac{2^{m-2k} (m-k)!}{k! (m-2k)!} \times \right. \tag{3.27} \\
&\times \left. \left. \left(\operatorname{Re} \left((q' - q^0) \bar{dq} \right) \right)^{m-2k} \left(\|q' - q^0\|^{m-k} (-\|dq\|)^{-k} \right)^{-1} \right] \right) \left. \right\}
\end{aligned}$$

В выражениях (3.26), (3.27) $dq = q - q^0$; S_0 – 3-сфера с центром в точке q^0 и радиусом R ; $\lfloor m/2 \rfloor$ определяет целую часть от деления $m/2$.

Доказательство. Принимая во внимание, что $\|q' - q^0\| = R$, $\|q - q^0\| = r$, $r < R$, и используя разложение $(1 - q)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ [146] для $|q| < 1$, $\|q' - q\|^{-1} = \|(q' - q)^{-1}\|$, получим

$$\begin{aligned}
(q' - q)^{-1} &= (q' - q^0 - (q - q^0))^{-1} = (q' - q^0)^{-1} \left[1 - (q - q^0) \times \right. \\
&\times \left. (q' - q^0)^{-1} \right]^{-1} = (q' - q^0)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(q - q^0) (q' - q^0)^{-1} \right]^n; \\
\|q' - q\|^{-1} &= \|q' - q^0\|^{-1} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left[(q - q^0) (q' - q^0)^{-1} \right]^n \right\| = \tag{3.28} \\
&= \|q' - q^0\|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(q - q^0) (q' - q^0)^{-1} \right]^n \times \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\bar{q}' - \bar{q}^0)^{-1} (\bar{q} - \bar{q}^0) \right]^n.
\end{aligned}$$

Найденные разложения (3.28) удовлетворяют условиям абсолютной и равномерной сходимости. С учетом выражения (3.28) и свойств степенных рядов

определим ядро Коши $M(q' - q)$ в виде

$$\begin{aligned}
M(q' - q) &= \frac{(q' - q^0)^{-1}}{\|q' - q^0\|} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left[(q - q^0)(q' - q^0)^{-1} \right]^n \times \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} \left[(\bar{q}' - \bar{q}^0)^{-1} (\bar{q} - \bar{q}^0) \right]^k = (q' - q^0)^{-1} \|q' - q^0\|^{-1} \times \\
&\times \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \left((n_1 + 1) \left[(q - q^0)(q' - q^0)^{-1} \right]^{n_1} \left[(\bar{q}' - \bar{q}^0)^{-1} \times \right. \right. \\
&\left. \left. \times (\bar{q} - \bar{q}^0) \right]^{n_2} \right). \tag{3.29}
\end{aligned}$$

Используя свойства кратных рядов, приведем ядро Коши (3.29) к виду

$$\begin{aligned}
M(q' - q) &= \frac{(q' - q^0)^{-1}}{\|q' - q^0\|} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left((n+1-m) \left[(q - q^0) \times \right. \right. \right. \\
&\left. \left. \left. \times (q' - q^0)^{-1} \right]^{n-m} \left[(\bar{q}' - \bar{q}^0)^{-1} (\bar{q} - \bar{q}^0) \right]^m \right) \right\} = \frac{(q' - q^0)^{-1}}{\|q' - q^0\|} \times \\
&\times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left((q - q^0)(q' - q^0)^{-1} \right)^n + \sum_{m=1}^n \left(\left[(q - q^0)(q' - \right. \right. \right. \\
&\left. \left. \left. - q^0)^{-1} \right]^{n-m} \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \left[2^{m-2k} \frac{(m-k)! \left(\operatorname{Re} \left((q' - q^0)(\bar{q} - \bar{q}^0) \right) \right)^{m-2k}}{k!(m-2k)! (-\|q - q^0\|)^{-k} \|q' - q^0\|^{m-k}} \right] \right) \right] \right\}. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

С учетом определения $dq = q - q^0$ в (3.26), (3.27) приведем (3.30) к виду

$$\begin{aligned}
M(q' - q) &= \frac{(q' - q^0)^{-1}}{\|q' - q^0\|} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(dq (q' - q^0)^{-1} \right)^n + \sum_{m=1}^n \left(\left[dq (q' - \right. \right. \right. \\
&\left. \left. \left. - q^0)^{-1} \right]^{n-m} \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \left[\frac{2^{m-2k} (m-k)! \left(\operatorname{Re} \left((q' - q^0) \bar{dq} \right) \right)^{m-2k}}{k!(m-2k)! (-\|dq\|)^{-k} \|q' - q^0\|^{m-k}} \right] \right) \right] \right\}. \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Подставляя разложение (3.31) ядра Коши в интегральную формулу Коши $F(q) = \frac{1}{2\pi^2} \oint_{S_0} F(q') Dq' M(q' - q)$, с учетом (3.26), (3.27) при вынесении суммы по n за знак интеграла и домножении (3.31) справа на $(dq)^{-n}$ получим соотношение (3.25). \square

Зададим кватернионные переменные q' , q в гиперсферических координатах $q' = R(\cos \psi' + [(i_1 \cos \varphi' + i_2 \sin \varphi') \sin \theta' + i_3 \cos \theta'] \sin \psi')$, $q = r(\cos \psi + [(i_1 \cos \varphi + i_2 \sin \varphi) \sin \theta + i_3 \cos \theta] \times \sin \psi)$ при $q^0 = 0$ и введем в рассмотрение гармонические многочлены [163]:

$$\begin{aligned} Y_{n,m,k}^a(\varphi, \theta, \psi) &= Z_{n,m,k}(\theta, \psi) \cos(k\varphi); \\ Y_{n,m,k}^b(\varphi, \theta, \psi) &= Z_{n,m,k}(\theta, \psi) \sin(k\varphi), \end{aligned} \quad (3.32)$$

образующие ортогональный базис на единичной 3-сфере. В выражении (3.32) $n, m, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ – индексы, задаваемые при условии $n \geq m \geq k$; $Z_{n,m,k}(\theta, \psi)$ – вспомогательные функции, определяемые соотношением [163]:

$$Z_{n,m,k}(\theta, \psi) = C_{n-m}^{m+1}(\cos \psi) C_{m-k}^{k+0,5}(\cos \theta) \sin^m \psi \sin^k \theta, \quad (3.33)$$

где $C_n^\alpha(z)$ – многочлен Гегенбауэра.

Множитель, нормирующий функции (3.32) до ортонормированной системы $Y_{n,m,k}^{a,b}(\varphi, \theta, \psi)$, при $\delta_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}}, & \text{if } k = 0; \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{otherwise,} \end{cases}$ обозначим через

$$A_{n,m,k} = \delta_k 2^{m+k+0,5} m! \Gamma(k+0,5) \sqrt{\frac{(n+1)(m+0,5)(n-m)!(m-k)!}{(n+m+1)!(n+k)!}}.$$

С учетом введенных соотношений сформулируем следующее утверждение, определяющее иное представление n -х элементов $M^{(n)}(q' - q) = (-1)^{n-1} \times \frac{d^n M(q')}{n!}$ разложения ядра Коши (3.30) в ортонормированной системе гиперсферических функций.

Лемма 1. Пусть $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $\frac{|q|}{|q'|} < 1$, тогда

$$\begin{aligned} M^{(n)}(q' - q) &= \sum_{m=0}^{n+1} \sum_{k=0}^m \left[Y_{n+1,m,k}^{a}(\varphi', \theta', \psi') \lambda_{n+1,m,k}^a + \right. \\ &\quad \left. + Y_{n+1,m,k}^{b}(\varphi', \theta', \psi') \lambda_{n+1,m,k}^b \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{n,m,k}^{a,b} = & \frac{A_{n,m,k}}{2(n+1)R^3} \left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} \left[\frac{Y_{n-1,m,k}^{a,b}}{(n+m+1)^{-1}} + \frac{i_1}{m+0,5} \left(\frac{Y_{n-1,m+1,k+1}^{a,b}}{(m+1)^{-1}(k+0,5)^{-1}} + \right. \right. \\ & + \frac{Y_{n-1,m-1,k+1}^{a,b}(n+m+1)}{4m(k+0,5)^{-1}(n+m)^{-1}} - \frac{Y_{n-1,m+1,k-1}^{a,b}(m+1)(k-0,5)^{-1}}{4(m-k+1)^{-1}(m-k+2)^{-1}} - \\ & \left. \left. - \frac{Y_{n-1,m-1,k-1}^{a,b}(m+k-1)(m+k)}{16m(k-0,5)(n+m)^{-1}(n+m+1)^{-1}} \right) \pm \frac{i_2}{m+0,5} \left(\frac{Y_{n-1,m+1,k+1}^{b,a}}{(k+0,5)^{-1}} + \frac{(k+0,5)}{(n+m)^{-1}} \times \right. \right. \\ & \times \frac{Y_{n-1,m-1,k+1}^{b,a}}{4m(n+m+1)^{-1}} + \frac{Y_{n-1,m+1,k-1}^{b,a}(m+1)(k-0,5)^{-1}}{4(m-k+1)^{-1}(m-k+2)^{-1}} + \frac{Y_{n-1,m-1,k-1}^{b,a}}{(k-0,5)(n+m)^{-1}} \times \\ & \left. \left. \times \frac{(m+k-1)(m+k)}{16m(n+m+1)^{-1}} \right) + \frac{i_3}{m+0,5} \left(\frac{Y_{n-1,m+1,k}^{a,b}(m+1)}{(m-k+1)^{-1}} + \frac{Y_{n-1,m-1,k}^{a,b}(n+m+1)}{4m(n+m)^{-1}(m+k)^{-1}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

В выражении (3.35) для сокращения записи принято обозначение $Y_{n,m,k}^{a,b} = Y_{n,m,k}^{a,b}(\varphi, \theta, \psi)$.

Доказательство. Зададим разложение ядра Коши $M(q' - q)$ в системе гармонических многочленов:

$$\begin{aligned} M(q' - q) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m \left[Y_{n,m,k}^{a}(\varphi', \theta', \psi') \lambda_{n,m,k}^a + \right. \\ & \left. + Y_{n,m,k}^{b}(\varphi', \theta', \psi') \lambda_{n,m,k}^b \right], \end{aligned} \quad (3.36)$$

где $\lambda_{n,m,k}^{a,b}$ с учетом ортонормированности системы гиперсферических функций (3.32) определяется кратным интегралом по поверхности 3-сферы при задании $M(q' - q)$ в гиперсферической системе координат:

$$\lambda_{n,m,k}^{a,b} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(R\bar{\eta}' - r\bar{\eta}) Y_{n,m,k}^{a,b}(\varphi', \theta', \psi')}{[R^2 + r^2 - 2rR \operatorname{Re}(\eta'\bar{\eta})]^2} \varepsilon(\psi', \theta') d\psi' d\theta' d\varphi', \quad (3.37)$$

где $\eta = \frac{q}{r}$; $\eta' = \frac{q'}{R}$ – единичные вектора в \mathbb{R}^4 ; $\varepsilon(\psi', \theta') = \sin^2 \psi' \sin \theta'$.

Записав интеграл (3.37) в виде суммы двух интегралов, числители которых зависят от переменных η' и η соответственно, с учетом интеграла Пуассона для внутренней части 3-сферы, теоремы Функа–Гекке [169] для $R > r$ получим

представление второго слагаемого интеграла (3.37) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{r \bar{\eta} Y_{n,m,k}'^{a,b}(\varphi', \theta', \psi') \varepsilon(\psi', \theta')}{\left[R^2 + r^2 - 2rR \operatorname{Re}(\eta' \bar{\eta}) \right]^2} d\psi' d\theta' d\varphi' = \\ & = - \left(\frac{r}{R} \right)^{n-1} r^2 \bar{\eta} Y_{n,m,k}'^{a,b}(\varphi, \theta, \psi) \Big/ \left[R^3 (R^2 - r^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

С учетом выражений (3.32), (3.33), представления многочлена Гегенбауэра [163] и выражения вектора η' в гиперсферической системе координат преобразуем произведение $\bar{\eta}' Y_{n,m,k}'^{a,b}(\varphi', \theta', \psi')$ к виду

$$\begin{aligned} \bar{\eta}' Y_{n,m,k}'^{a,b} &= E_1 Y_{n+1,m,k}^{a,b} + E_2 Y_{n-1,m,k}^{a,b} + i_1 \left(I_1^1 Y_{n+1,m+1,k+1}^{a,b} + \right. \\ &+ I_1^2 Y_{n+1,m-1,k+1}^{a,b} + I_1^3 Y_{n+1,m+1,k-1}^{a,b} + I_1^4 Y_{n+1,m-1,k-1}^{a,b} + \\ &+ I_2^1 Y_{n-1,m+1,k+1}^{a,b} + I_2^2 Y_{n-1,m-1,k+1}^{a,b} + I_2^3 Y_{n-1,m+1,k-1}^{a,b} + \\ &+ I_2^4 Y_{n-1,m-1,k-1}^{a,b} \left. \right) + i_2 \left(J_1^1 Y_{n+1,m+1,k+1}^{b,a} + J_1^2 Y_{n+1,m-1,k+1}^{b,a} + \right. \\ &+ J_1^3 Y_{n+1,m+1,k-1}^{b,a} + J_1^4 Y_{n+1,m-1,k-1}^{b,a} + J_2^1 Y_{n-1,m+1,k+1}^{b,a} + \\ &+ J_2^2 Y_{n-1,m-1,k+1}^{b,a} + J_2^3 Y_{n-1,m+1,k-1}^{b,a} + J_2^4 Y_{n-1,m-1,k-1}^{b,a} \left. \right) + \\ &+ i_3 \left(K_1^1 Y_{n+1,m+1,k}^{a,b} + K_1^2 Y_{n+1,m-1,k}^{a,b} + K_2^1 Y_{n-1,m+1,k}^{a,b} + \right. \\ &+ \left. K_2^2 Y_{n-1,m-1,k}^{a,b} \right), \end{aligned} \quad (3.39)$$

где коэффициенты задаются соотношениями

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{n-m+1}{2(n+1)}; E_2 = \frac{n+m+1}{2(n+1)}; I_1^1 = -I_2^1 = J_1^1 = -J_2^1 = \frac{-(m+1)(k+0,5)}{2(n+1)(m+0,5)}; \\ I_1^2 &= J_1^2 = \frac{-(n-m+1)(n-m+2)(k+0,5)}{8m(n+1)(m+0,5)}; I_2^2 = J_2^2 = \frac{(n+m)(n+m+1)(k+0,5)}{8m(n+1)(m+0,5)}; \\ I_1^3 &= -I_2^3 = -J_1^3 = J_2^3 = \frac{(m+1)(m-k+1)(m-k+2)}{8(n+1)(m+0,5)(k-0,5)}; I_1^4 = -J_1^4 = \\ &= \frac{(n-m+2)(n-m+1)(m+k-1)}{32m(n+1)(m+0,5)(k-0,5)(m+k)^{-1}}; I_2^4 = -J_2^4 = \frac{(n+m)(n+m+1)}{32m(n+1)} \times \\ &\times \frac{-(m+k-1)(m+k)}{(m+0,5)(k-0,5)}; K_1^1 = K_2^1 = \frac{-(m-k+1)(m+1)}{2(n+1)(m+0,5)}; K_1^2 = \\ &= \frac{-(n+m)(n+m+1)(m+k)}{8m(n+1)(m+0,5)}; K_2^2 = \frac{(n-m+2)(n-m+1)(m+k)}{8m(n+1)(m+0,5)}. \end{aligned}$$

В выражении (3.39) для сокращения записи принято обозначение $Y_{n,m,k}^{a,b} = Y_{n,m,k}^{a,b}(\varphi', \theta', \psi')$.

С учетом выражения (3.39) и теоремы Функа–Гекке для $R > r$ преобразуем первое слагаемое интеграла (3.37) к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{R\bar{\eta}' Y_{n,m,k}^{\prime a,b}(\varphi', \theta', \psi') \varepsilon(\psi', \theta')}{\left[R^2 + r^2 - 2rR \operatorname{Re}(\eta'\bar{\eta}) \right]^2} d\psi' d\theta' d\varphi' = \\ & = \left(\frac{r}{R} \right)^{n-1} A_{n,m,k} W_{n,m,k}^{a,b}(\varphi, \theta, \psi) / \left[R^3 (R^2 - r^2) \right], \end{aligned} \quad (3.40)$$

где

$$\begin{aligned} W_{n,m,k}^{a,b}(\varphi, \theta, \psi) = & r^2 E_1 Y_{n+1,m,k}^{a,b} + R^2 E_2 Y_{n-1,m,k}^{a,b} + i_1 \left[r^2 \left(I_1^1 \times \right. \right. \\ & \times Y_{n+1,m+1,k+1}^{a,b} + I_1^2 Y_{n+1,m-1,k+1}^{a,b} + I_1^3 Y_{n+1,m+1,k-1}^{a,b} + I_1^4 \times \\ & \times Y_{n+1,m-1,k-1}^{a,b} \left. \right) + R^2 \left(I_2^1 Y_{n-1,m+1,k+1}^{a,b} + I_2^2 Y_{n-1,m-1,k+1}^{a,b} \right. \\ & \left. + I_2^3 Y_{n-1,m+1,k-1}^{a,b} + I_2^4 Y_{n-1,m-1,k-1}^{a,b} \right) \right] + i_2 \left[r^2 \left(J_1^1 Y_{n+1,m+1,k+1}^{b,a} \right. \right. \\ & \left. + J_1^2 Y_{n+1,m-1,k+1}^{b,a} + J_1^3 Y_{n+1,m+1,k-1}^{b,a} + J_1^4 Y_{n+1,m-1,k-1}^{b,a} \right) + R^2 \times \\ & \times \left(J_2^1 Y_{n-1,m+1,k+1}^{b,a} + J_2^2 Y_{n-1,m-1,k+1}^{b,a} + J_2^3 Y_{n-1,m+1,k-1}^{b,a} + J_2^4 \times \right. \\ & \left. \times Y_{n-1,m-1,k-1}^{b,a} \right) \right] + i_3 \left[r^2 \left(K_1^1 Y_{n+1,m+1,k}^{a,b} + K_1^2 Y_{n+1,m-1,k}^{a,b} \right) \right. \\ & \left. + R^2 \left(K_2^1 Y_{n-1,m+1,k}^{a,b} + K_2^2 Y_{n-1,m-1,k}^{a,b} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

В выражении (3.41) для сокращения записи принято обозначение $Y_{n,m,k}^{a,b} = Y_{n,m,k}^{a,b}(\varphi, \theta, \psi)$.

Объединяя теперь слагаемые (3.38), (3.40) и преобразуя произведение $\bar{\eta} \times Y_{n,m,k}^{\prime a,b}(\varphi, \theta, \psi)$ с учетом (3.39), находим $\lambda_{n,m,k}^{a,b}$ в виде (3.35).

Полученные результаты позволяют определить разложение ядра Коши в ортонормированной системе гармонических многочленов (3.32).

С другой стороны, определив n -е элементы разложения ядра Коши (3.30) в гиперсферической системе координат в виде

$$M^n (q' - q) = \frac{\bar{\eta}'}{R^3} \left(\frac{r}{R}\right)^n \left\{ (\eta\bar{\eta}')^n + \sum_{m=1}^n \left[(\eta\bar{\eta}')^{n-m} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \left(\frac{(-1)^k 2^{m-2k} (m-k)!}{k! (m-2k)! \operatorname{Re}(\eta\bar{\eta}')^{2k-m}} \right) \right] \right\}, \quad (3.42)$$

получим для малых значений n соотношение

$$M^0 (q' - q) = \frac{\bar{\eta}'}{R^3} = \frac{1}{R^3} (\cos \psi' - [(i_1 \cos \varphi' + i_2 \sin \varphi') \sin \theta' + \\ + i_3 \cos \theta'] \sin \psi') = \lambda_{1,0,0}^a Y_{1,0,0}'^a + \lambda_{1,0,0}^b Y_{1,0,0}'^b + \lambda_{1,1,0}^a Y_{1,1,0}'^a + \\ + \lambda_{1,1,0}^b Y_{1,1,0}'^b + \lambda_{1,1,1}^a Y_{1,1,1}'^a + \lambda_{1,1,1}^b Y_{1,1,1}'^b. \quad (3.43)$$

В выражении (3.43) для сокращения записи принято обозначение $Y_{n,m,k}'^{a,b} = Y_{n,m,k}'^{a,b}(\varphi', \theta', \psi')$.

Продолжив соотношение (3.43) для $n > 0$ при условии $\lambda_{0,0,0}^a Y_{0,0,0}'^a(\varphi', \theta', \psi') + \lambda_{0,0,0}^b Y_{0,0,0}'^b(\varphi', \theta', \psi') = 0$, получим (3.34). \square

Из доказательства леммы 1 следует разложение ядра Коши для $r > R$ в гиперсферической системе функций.

Лемма 2. Пусть $|q|/|q'| > 1$, тогда

$$M (q' - q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m \left[Y_{n,m,k}'^a(\varphi', \theta', \psi') \tilde{\lambda}_{n,m,k}^a + \right. \\ \left. + Y_{n,m,k}'^b(\varphi', \theta', \psi') \tilde{\lambda}_{n,m,k}^b \right], \quad (3.44)$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}_{n,m,k}^{a,b} = & \frac{A_{n,m,k}}{2(n+1)r^3} \left(\frac{R}{r}\right)^n \left[\frac{-Y_{n+1,m,k}^{a,b}}{(n-m+1)^{-1}} + \frac{i_1}{m+0,5} \left(\frac{Y_{n+1,m+1,k+1}^{a,b}}{(m+1)^{-1}(k+0,5)^{-1}} + \right. \right. \\
& + \frac{Y_{n+1,m-1,k+1}^{a,b}(n-m+2)}{4m(k+0,5)^{-1}(n-m+1)^{-1}} - \frac{Y_{n+1,m+1,k-1}^{a,b}(m+1)(m-k+1)}{4(k-0,5)(m-k+2)^{-1}} - \\
& \left. \left. - \frac{Y_{n+1,m-1,k-1}^{a,b}(m+k-1)(m+k)}{16m(k-0,5)(n-m+1)^{-1}(n-m+2)^{-1}} \right) \pm \frac{i_2}{m+0,5} \left(\frac{Y_{n+1,m+1,k+1}^{b,a}}{(m+1)^{-1}(k+0,5)^{-1}} + \right. \right. \\
& + \frac{Y_{n+1,m-1,k+1}^{b,a}(n-m+2)}{4m(n-m+1)^{-1}(k+0,5)^{-1}} + \frac{Y_{n+1,m+1,k-1}^{b,a}(m+1)(k-0,5)^{-1}}{4(m-k+1)^{-1}(m-k+2)^{-1}} + \\
& \left. \left. + \frac{Y_{n+1,m-1,k-1}^{b,a}(n-m+2)(m+k-1)}{16m(k-0,5)(n-m+1)^{-1}(m+k)^{-1}} \right) + \frac{i_3}{m+0,5} \left(\frac{Y_{n+1,m+1,k}^{a,b}(m+1)}{(m-k+1)^{-1}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{Y_{n+1,m-1,k}^{a,b}(n-m+2)}{4m(n-m+1)^{-1}(m+k)^{-1}} \right) \right]. \tag{3.45}
\end{aligned}$$

В выражении (3.45) для сокращения записи принято обозначение $Y_{n,m,k}^{a,b} = Y_{n,m,k}^{a,b}(\varphi, \theta, \psi)$.

Доказательство. Справедливость тождества (3.44) следует из разложения ядра Коши $M(q' - q)$ в системе гармонических многочленов аналогично (3.36) с определением значений $\tilde{\lambda}_{n,m,k}^{a,b}$ в виде интеграла (3.37). При этом слагаемые интеграла (3.37) при условии $r > R$ представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{-1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{r\bar{\eta} Y_{n,m,k}'^{a,b}(\varphi', \theta', \psi') \varepsilon(\psi', \theta')}{[R^2 + r^2 - 2rR \operatorname{Re}(\eta'\bar{\eta})]^2} d\psi' d\theta' d\varphi' = \\
& = \left(\frac{R}{r}\right)^n r^2 \bar{\eta} Y_{n,m,k}'^{a,b}(\varphi, \theta, \psi) / [r^3 (R^2 - r^2)]. \tag{3.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{R\bar{\eta}' Y_{n,m,k}'^{a,b}(\varphi', \theta', \psi') \varepsilon(\psi', \theta')}{[R^2 + r^2 - 2rR \operatorname{Re}(\eta'\bar{\eta})]^2} d\psi' d\theta' d\varphi' = \\
& = - \left(\frac{R}{r}\right)^n A_{n,m,k} \tilde{W}_{n,m,k}^{a,b}(\varphi, \theta, \psi) / [r^3 (R^2 - r^2)], \tag{3.47}
\end{aligned}$$

где гармоническая функция $\tilde{W}_{n,m,k}^{a,b}(\varphi, \theta, \psi)$ определяется аналогичным (3.41) выражением при замене местами соответствующих множителей r^2 и R^2 .

Объединив слагаемые (3.46), (3.47) и преобразуя произведение $\bar{\eta} \times Y_{n,m,k}^{a,b}$ (φ, θ, ψ) в выражении (3.46) с учетом соотношения (3.39), получим $\tilde{\lambda}_{n,m,k}^{a,b}$ в виде (3.45). Для заданных $\tilde{\lambda}_{n,m,k}^{a,b}$ при $|q|/|q'| > 1$ и услови ортонормированности гиперсферической системы функций (3.30) справедливо разложение ядра Коши $M(q' - q)$ в системе гармонических многочленов в виде (3.44). \square

Таким образом, полученные разложения ядра Коши в ортонормированной системе гармонических многочленов для случаев $|q|/|q'| < 1$ и $|q|/|q'| > 1$ позволяют определить кватернион-функцию $F(q)$ внутри шарового слоя.

Теорема 11. *Всякая кватернион-функция $F(q)$, регулярная внутри шарового слоя D , ограниченного 3-сферой S_0 радиуса $R = |\xi - q^0|$ и 3-сферой S_1 радиуса $r = |\sigma - q^0|$ с общим центром в точке q^0 , может быть представлена в каждой точке $q \in D$ при $r < |q - q^0| < R$ рядом*

$$F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (q - q^0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c'_n (q - q^0)^{-n}, \quad (3.48)$$

где c_n – коэффициенты ряда (3.23), а c'_n определяются соотношением

$$c'_n = \frac{1}{2\pi(n-1)!} \oint_{S_1} [F(\sigma) D\sigma d^{n-1}M(q - q^0)] (q - q^0)^n. \quad (3.49)$$

В выражении (3.49) n -й дифференциал ядра Коши определяется аналогично выражению (3.27) при равенстве $dq = \sigma - q^0$.

Доказательство. Пусть задана кватернион-функция $F(q)$, регулярная внутри шарового слоя D , который ограничен 3-сферами S_0 и S_1 с радиусами R и r соответственно ($0 < r < R$) и общим центром в точке q^0 . Зададим дополнительно две 3-сферы S'_0 и S'_1 с центром в точке q^0 и соответствующими радиусами R' и r' , удовлетворяющими неравенству $0 < r < r' < R' < R$ (рис. 3.6).

Поскольку кватернион-функция $F(q)$ регулярная в D , то по формуле (3.23) для двусвязной области, ограниченной S'_0 и S'_1 , имеем

$$F(q) = \frac{1}{2\pi^2} \oint_{S'_0} F(\xi) D\xi M(\xi - q) - \frac{1}{2\pi^2} \oint_{S'_1} F(\sigma) D\sigma M(\sigma - q), \quad (3.50)$$

где q – точка, находящаяся между сферами S'_0 и S'_1 .

Для первого интеграла (3.50) при $|\zeta - q^0| \rightarrow R$ и $|q - q^0| < R$ с учетом (3.29) справедливо тождество

$$\frac{1}{2\pi^2} \oint_{S'_0} F(\zeta) D\zeta M(\zeta - q) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (q - q^0)^n. \quad (3.51)$$

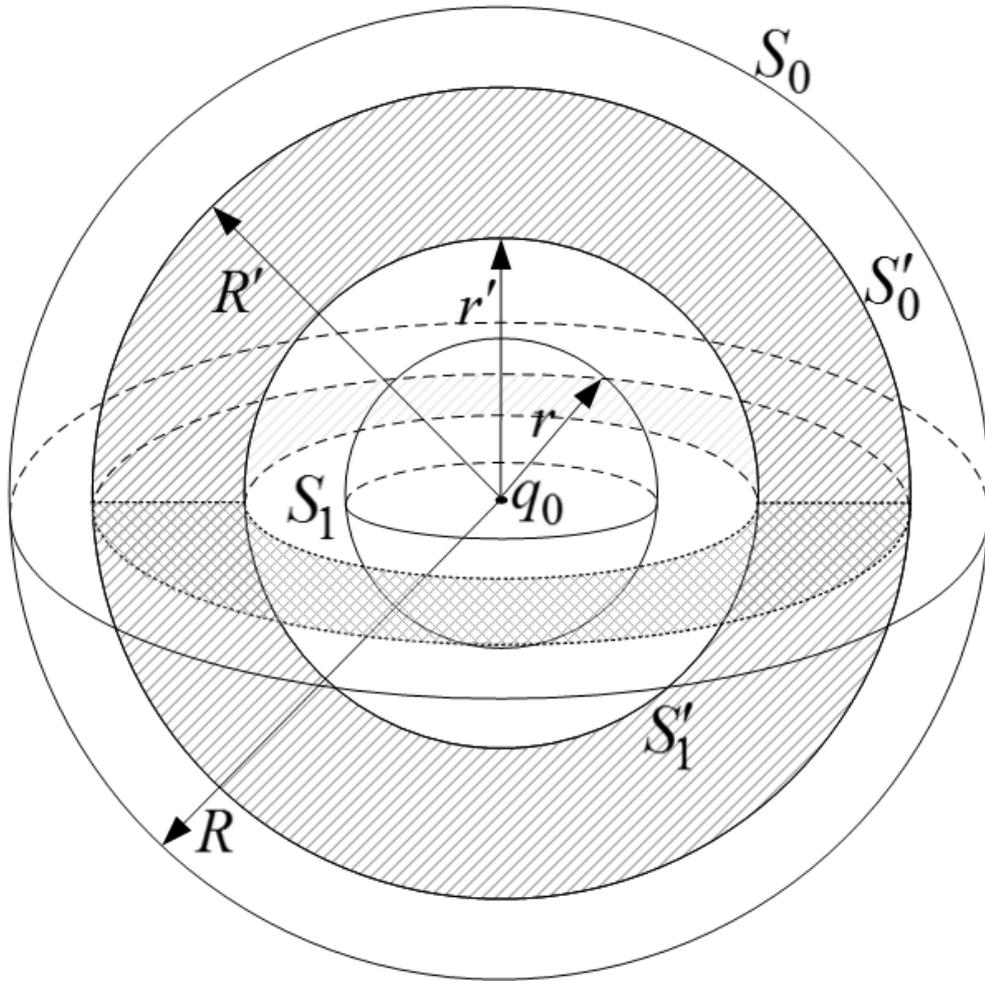


Рис. 3.6. Пример представления шарового слоя D в \mathbb{R}^3

Во втором интеграле (3.50) при $|\sigma - q^0| \rightarrow r$ и $|q - q^0| > r$, используя разложение $(1 - q)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ [146] для $|q| < 1$, $\|\sigma - q\|^{-1} = \|(\sigma - q)^{-1}\|$,

выражения $(\sigma - q)^{-1}$ и $\|\sigma - q\|$ приводятся к виду

$$\begin{aligned}
(\sigma - q)^{-1} &= (\sigma - q^0 - (q - q^0))^{-1} = \left[1 - (q - q^0) (\sigma - q^0)^{-1} \right]^{-1} \times \\
&\times (\sigma - q^0)^{-1} = - (q - q^0)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\sigma - q^0) (q - q^0)^{-1} \right]^n; \\
\|\sigma - q\|^{-1} &= \|q - q^0\|^{-1} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\sigma - q^0) (q - q^0)^{-1} \right]^n \right\| = \\
&= \|q - q^0\|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\sigma - q^0) (q - q^0)^{-1} \right]^n \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\bar{q} - \bar{q}^0)^{-1} (\bar{\sigma} - \bar{q}^0) \right]^n.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

С учетом (3.52) зададим разложение ядра Коши $M(\sigma - q)$ из (3.50) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
(\sigma - q)^{-1} / \|\sigma - q\| &= - \sum_{n=0}^{\infty} M^{(n)} (\sigma - q) = - \sum_{n=0}^{\infty} d^n M (q - q^0) / n! = \\
&= \frac{-(q - q^0)^{-1}}{\|q - q^0\|} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(dq (q - q^0)^{-1} \right)^n + \sum_{m=1}^n \left(\left[dq (q - \right. \right. \right. \\
&- q^0)^{-1} \right]^n \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \left[\left(\operatorname{Re} \left((q - q^0) \bar{dq} \right) \right)^{m-2k} \|q - q^0\|^{k-m} \times \right. \\
&\times \left. \left. \left. \frac{2^{m-2k} (m-k)! (-\|dq\|)^k}{k! (m-2k)!} \right) \right] \right] \right\},
\end{aligned} \tag{3.53}$$

при $dq = \sigma - q^0$.

Теперь, представив ядро Коши (3.53) в гиперсферической системе координат при $q^0 = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned}
\frac{(\sigma - q)^{-1}}{\|\sigma - q\|} &= - \sum_{n=0}^{\infty} M^{(n)} (\sigma - q) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\bar{\eta}}{r^3} \left(\frac{R}{r} \right)^n \times \right. \\
&\times \left. \left[(\eta' \bar{\eta})^n + \sum_{m=1}^n \left((\eta' \bar{\eta})^{n-m} \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \left[\frac{(-1)^k 2^{m-2k} (m-k)!}{k! (m-2k)! \operatorname{Re} (\eta' \bar{\eta})^{2k-m}} \right] \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Следовательно для малых значений n получим

$$M^{(0)}(\sigma - q) = \frac{\bar{\eta}}{r^3} = \frac{1}{r^3} (\cos \psi - [(i_1 \cos \varphi + i_2 \sin \varphi) \sin \theta + i_3 \cos \theta] \sin \psi) = \tilde{\lambda}_{0,0,0}^a Y_{0,0,0}^a(\varphi', \theta', \psi') + \tilde{\lambda}_{0,0,0}^b Y_{0,0,0}^b(\varphi', \theta', \psi'). \quad (3.55)$$

Продолжив соотношение (3.55) при $n > 0$, будем иметь тождество между разложением ядра Коши $M(\sigma - q)$ (3.53) и его разложением при $r > R$ в гиперсферической системе функций (3.44). Далее, умножив элементы $\frac{d^n M(q - q^0)}{n!}$ в (3.53) слева на $(q - q^0)^{n+1}$, приходим к равенству

$$\frac{1}{2\pi^2} \oint_{S'_1} F(\sigma) D\sigma M(\sigma - q) = - \sum_{n=1}^{\infty} c'_n (q - q^0)^{-n}. \quad (3.56)$$

Из равенств (3.51), (3.56) следует справедливость разложения (3.48). \square

В разложении (3.48) по аналогии [145] первое слагаемое ряда будем называть правильной частью, второе – главной частью.

Рассмотрим разложение (3.48) для случая, когда центр области D является единственной особой точкой q^0 регулярной кватернион-функции $F(q)$ в бесконечно малом шаре, ограниченном 3-сферой S_1 при $r \rightarrow 0$. Используя (3.53) и (3.49) определим вычет $\text{Res}_{q=q^0} F(q)$ регулярной кватернион-функции $F(q)$ относительно изолированной особой точки q^0 в виде

$$\text{Res}_{q=q^0} F(q) = \lim_{|q-q^0|=r \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \oint_{S_1} [F(q) Dq] \right\}. \quad (3.57)$$

Из заданных соотношений (3.44), (3.48), (3.49), (3.53) и представления 3-формы $Dq = (q - q^0) \varepsilon(\psi, \theta) d\psi d\theta d\varphi$ в гиперсферической системе координат следует, что вычет (3.57) будет определяться соотношением

$$\text{Res}_{q=q^0} F(q) = c'_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{r}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} F(r\eta + q^0) \eta \varepsilon(\psi, \theta) d\psi d\theta d\varphi \right\}. \quad (3.58)$$

Для получения аналога теоремы Миттаг-Леффлера [164] с учетом выражений (3.48), (3.49) и (3.58) введем обозначения: a_v – полюсы мероморфной кватернион-функции $F(q)$, нумерация ($v = 1, 2, \dots$) которых выполнена в порядке неубывающих модулей ($|a_v| \leq |a_{v+1}|$); $g_v(q) = \sum_{n=1}^{p_v} c'_n (q - a_v)^{-n}$ – главная часть разложения (3.48) $F(q)$; $P_v(q) = \sum_{n=0}^{m_n} g_v^{(n)}(0) q^n / n!$ – некоторый полином, определяемый отрезком ряда (3.25) в точке 0 при разложении $g_v(q)$.

Теорема 12. *Любую мероморфную кватернион-функцию $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ можно представить в виде равномерно сходящегося ряда*

$$F(q) = F_0(q) + \sum_{v=1}^{\infty} (g_v(q) - P_v(q)), \quad (3.59)$$

в котором $F_0(q)$ – целая кватернион-функция.

Доказательство теоремы 12 аналогично доказательству теоремы Миттаг-Леффлера [164] и следует из равномерной сходимости ряда $\sum_{v=1}^{\infty} (g_v(q) - P_v(q))$. При этом под равномерно сходящимся рядом из мероморфных кватернион-функций на некотором компакте K понимается ряд, у которого конечное число членов имеет полюсы на K и после их удаления ряд равномерно сходится на K . Приближение $P_v(q)$ функции $g_v(q)$, регулярной в 4-мерном гипершаре ($|q| < |a_v|$) с центром в 0, формируется на компакте $K_v = \{q : |q| < t|a_v|\}$ для $0 < t < 1$ отрезком ряда (3.25). Порядок m_n полинома $P_v(q)$ выбирается из условия [164]:

$$|g_v(q) - P_v(q)| < 1/2^v. \quad (3.60)$$

Коэффициенты c'_n при определении $g_v(q)$ задаются соотношением

$$c'_n = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{r^n}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} F(r\eta + q^0) \eta \varepsilon(\psi, \theta) \eta^{n-1} \left[1 + \operatorname{sgn}(|q^0|) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{r^{2m}}{\|r\eta + q^0\|^m} \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \left[(-1)^k \frac{2^{m-2k} (m-k)!}{k!} \right] \right) \right] d\psi d\theta d\varphi \right\}. \quad (3.61)$$

Таким образом, полученные результаты позволяют задать некоторый теоретический базис, используемый при разложении кватернион-функций $F(q)$ в обобщенные степенные ряды для последующего решения задач конформного отображения многогранников [166].

3.3. Простейшие конформные отображения областей с кусочно-линейной границей в \mathbb{R}^3

В $\text{Im } \mathbb{H}$ построим многогранник Ω , представляющий собой пересечение конечного числа замкнутых полупространств – односвязная область с кусочно-линейной границей в \mathbb{R}^3 . Геометрический центр Ω совпадает с началом координат $\text{Im } \mathbb{H}$. Многогранник Ω зададим последовательностью из N неповторяющихся точек (вершин) $P_1, P_2, \dots, P_N \in \text{Im } \mathbb{H}$; M ребер e_1, e_2, \dots, e_M , каждое m -е ($m = \overline{1, M}$) из которых представлено парой вершин $e_m = \{P_j, P_{j'}\}$ ($j, j' \in \overline{1, N}$; $j \neq j'$); K граней E_1, E_2, \dots, E_K , каждая k -я ($k = \overline{1, K}$) из которых задана множеством ребер $E_k = \{e_{m_1}^k, e_{m_2}^k, \dots, e_{m_k}^k\}$ ($e_l^k \in \{e_1, \dots, e_M\}$, $k = \overline{1, K}$, $l = \overline{1, m_k}$; $e_l^k \neq e_{l'}^k$, $k = \overline{1, K}$, $l \neq l' \in \overline{1, m_k}$) таких, что соседняя пара (e_l^k, e_{l+1}^k) , $l = \overline{1, m_k - 1}$, и пара $(e_{m_k}^k, e_1^k)$ содержат общую вершину. Зафиксируем $j \in \overline{1, N}$. Обозначим через \mathfrak{B}_j j -й многогранный угол, определенный для Ω набором ребер $\{P_j, P_{j_1}\}, \{P_j, P_{j_2}\}, \dots, \{P_j, P_{j_T}\}$, содержащих вершину P_j ($j_1, j_2, \dots, j_T \in \overline{1, N}$; $j_t \neq j_{t'}; \forall t, t' = \overline{1, T}$). Многоугольник Ψ_j , образованный вершинами $P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_T}$ многогранного угла \mathfrak{B}_j , будем называть основанием многогранного угла. Через γ_m ($m = \overline{1, M}$) обозначим m -й двухгранный угол многогранника Ω , заданный парой граней $E_{k_1}^m, E_{k_2}^m \in \{E_1, E_2, \dots, E_K\}$ с общим ребром e_m .

С учетом введенных обозначений найдем прямое и обратное конформные отображения: шара B_R на верхнее полупространство $\text{Im } \mathbb{H}^+ = \{(q_1, q_2, q_3); q_3 > 0\}$; верхнего полупространства с выброшенным сегментом шара (шаровая луночка) на двухгранный угол; двухгранного угла на $\text{Im } \mathbb{H}^+$; многогранного угла на $\text{Im } \mathbb{H}^+$.

По теореме Лиувилля [165] все конформные диффеоморфизмы любой области в пространстве (размерность больше 2) являются преобразованиями Мёбиуса. Преобразование Мёбиуса [165] $w = (w_0q + w_1)(w_2q + w_3)^{-1}$ реализует конформное отображение кватерниона q в w , где $w_0, \dots, w_3 \in \mathbb{H}$ – некоторые константы. Задание постоянных w_0, \dots, w_3 определяет конкретный вид конформного отображения и может производиться по трем точкам [165]. С учетом изложенного сформулируем утверждения для \mathbb{R}^3 [166, 168].

Теорема 13. *Функции $g_1 : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ и $g'_1 : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, заданные соотношениями*

$$g_1(q) = (i_1 - i_2q)(i_2 - i_1q)^{-1} \text{ и } g'_1(q) = (i_1q - i_2)^{-1}(i_2q - i_1), \quad (3.62)$$

реализуют конформное отображение верхнего полупространства $\text{Im } \mathbb{H}^+$ на единичный шар B_1 и обратно.

Доказательство теоремы 13 следует из того, что при отображении (3.62) точки $Q_1 = i_3; Q_2 = 0; Q_3 = \infty$ при $Q_1, Q_2, Q_3 \in \text{Im } \mathbb{H}^+$ переходят в соответствующие точки $W_1 = 0; W_2 = -i_3; W_3 = i_3$ при $W_1, W_2, W_3 \in B_1$. Обратное отображение точек $W_1, W_2, W_3 \in B_1$ в $Q_1, Q_2, Q_3 \in \text{Im } \mathbb{H}^+$ приводит к аналогичному результату.

Теорема 14. *Прямое и обратное конформные отображения шаровой луночки на двугранный угол реализуют функции $g_2 : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ и $g'_2 : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, заданные соотношениями*

$$g_2(q) = (i_1R_a - q)(i_1q - R_a)^{-1} \text{ и } g'_2(q) = (i_1q + 1)^{-1}(qR_a + i_1R_a), \quad (3.63)$$

где R_a – радиус основания вырезанного шарового сегмента из верхнего полупространства.

Доказательство теоремы 14 следует из того, что при отображении (3.63) точки $Q_1 = \infty; Q_2 = 0; Q_3 = i_1R_a$ верхнего полупространства с шаровой луночкой переходят в соответствующие точки $W_1 = i_1; W_2 = -i_1; W_3 = i_3$,

где $W_1, W_2, W_3 \in \text{Im } \mathbb{H}^+$. Величина двухгранного угла определяется аналогично [141] через двухгранный угол, образованный пересечением касательной плоскости к сфере (поверхность шаровой луночки) в точке $i_1 R_a$.

Теорема 15. Функция $g_3 : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, заданная соотношением

$$g_3(q) = 2 \left[i_1 c d e^{i_2 \phi \pi / \gamma} + i_2 R (r_1 - r_2) \sin \varphi \sin \theta \right] / h, \quad (3.64)$$

реализует конформное отображение двухгранного угла γ на $\text{Im } \mathbb{H}^+$.

В выражении (3.64) введены следующие обозначения: $r_1 = (R^2 + 1 + d)^{\pi / \gamma}$; $r_2 = (R^2 + 1 - d)^{\pi / \gamma}$; $c = \left(\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta} \times 2R \right)^{\pi / \gamma}$; $\phi = \text{arctg} (\text{ctg } \theta / \cos \varphi)$; $d = \left((R^2 - 1)^2 + 4R^2 \sin^2 \varphi \times \sin^2 \theta \right)^{1/2}$; $h = (r_1 + r_2)d - (r_1 - r_2)(R^2 - 1)$.

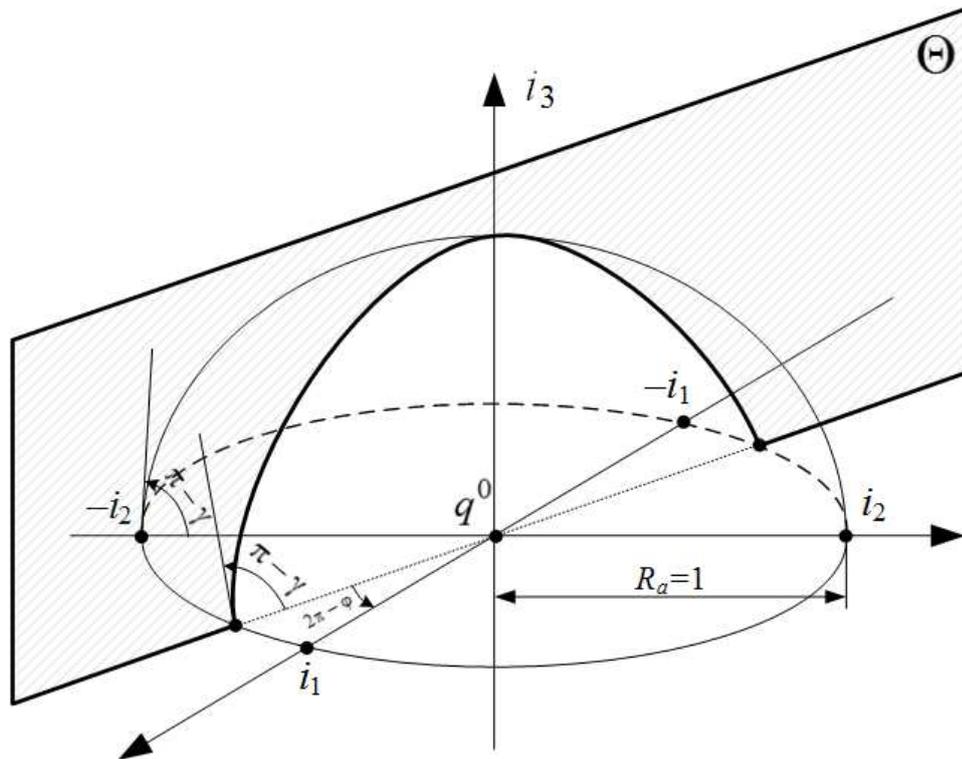


Рис. 3.7. Шаровая луночка в верхнем полупространстве

Доказательство. Пусть в $\text{Im } \mathbb{H}^+$ задана шаровая луночка, образованная сегментом шара, касательная плоскость к поверхности которого в точке i_1 проходит под углом $\pi - \gamma$. Рассмотрим комплексную полуплоскость $\xi = R \cdot e^{i(0,5\pi - \theta)}$

с выброшенной круговой луночкой, образованной сечением $\text{Im } \mathbb{H}^+$ плоскостью Θ путем поворота от плоскости $i_1 i_2$ на угол φ (рис. 3.7).

Известно, что отображение круговой луночки на верхнюю полуплоскость Θ реализует обобщенная функция Жуковского [141]:

$$\tilde{\kappa} = \frac{\pi}{\gamma} \cdot \frac{(\xi + 1)^{\pi/\gamma} + (\xi - 1)^{\pi/\gamma}}{(\xi + 1)^{\pi/\gamma} - (\xi - 1)^{\pi/\gamma}}. \quad (3.65)$$

Учитывая выражение (3.65), функция, отображающая заданную шаровую луночку на $\text{Im } \mathbb{H}^+$, будет иметь вид

$$\kappa(q) = \left| \tilde{\xi} \right| \cdot [(i_1 \cos \varphi + i_2 \sin \varphi) \cos \tilde{\theta} + i_3 \sin \tilde{\theta}]; \quad \tilde{\theta} = \arg(\tilde{\xi}). \quad (3.66)$$

Принимая во внимание выражение (3.66), функцию $g'_2(q)$ из (3.63), осуществляющую конформное отображение двухгранного угла на шаровую луночку, и функцию $\tilde{\kappa}(q) = (i_1 q - \pi/\gamma)^{-1} (i_1 \pi/\gamma - q)$, которая переводит точки верхнего полупространства $Q_1 = 0; Q_2 = i_1 \pi/\gamma; Q_3 = \infty$ в соответствующие точки $W_1 = -i_1; W_2 = 0; W_3 = i_1$, конформное отображение двухгранного угла γ на $\text{Im } \mathbb{H}^+$ будет определяться суперпозицией функций

$$g_3(q) = \tilde{\kappa}(\kappa(g'_2(q))). \quad (3.67)$$

Задавая представление кватерниона q в сферической системе координат $q = R[(i_1 \cos \varphi + i_2 \sin \varphi) \sin \theta + i_3 \cos \theta]$ для \mathbb{R}^3 и преобразуя суперпозицию (3.67) в соотношение для $\xi = R \cdot e^{i(0,5\pi - \theta)}$, получим выражение (3.64). \square

Особой точкой для функции $g_3(q)$ является точка $q^0 = 0$ (середина ребра двухгранного угла, см. рис. 3.7). Вычет функции $\text{Res}_{q=q^0} g_3(q)$ в точке q^0 равен $\gamma - 1$ [168].

Теорема 16. *Конформное отображение многогранного угла \mathfrak{V}_j на $\text{Im } \mathbb{H}^+$ реализует функция $\omega : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, представленная в виде $\omega(q) = \omega_3(\omega_2(\omega_1(q)))$,*

где

$$\begin{aligned}
\omega_1 : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \omega_1(q) &= 0,5 \left([\bar{Q}_x q_\Delta + \bar{q}_\Delta Q_x] + i [\bar{Q}_y q_\Delta + \bar{q}_\Delta Q_y] \right); \\
\omega_2 : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}; \\
\omega_3 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}, \quad \omega_3(\xi') &= \frac{R_2}{R_2^2 + |\xi'|^2} \left[i_1 (2R_2 \xi'_0) + \right. \\
&\left. + i_2 (2R_2 \xi'_1) + i_3 (2R_2^2 - |\xi'|^2) \right],
\end{aligned} \tag{3.68}$$

а $\omega_2(\xi)$ – функция, определяющая конформное отображение многоугольника $(\xi = \xi_0 + i\xi_1) \in \Psi'_j$ на круг $(\xi' = \xi'_0 + i\xi'_1) \in B_R^2$ радиуса R_2 .

Доказательство. В выражении (3.68) переменные кватернионы q_Δ, Q_x, Q_y и радиус R_2 задаются с учетом соотношений

$$\begin{aligned}
q_\Delta &= q - Q_j; \quad R_2 = |Q_s|; \quad Q_j = P_j + Q_H / R_2^2; \\
Q_H &= Q_h Q_s; \quad Q_h = 0,5 [(\bar{q} - \bar{P}_j) Q_s + \bar{Q}_s (q - P_j)]; \\
Q_s &= -0,5 \left\{ Q_v \left[(\bar{P}_j - \bar{P}_{j_2}) Q_v + \bar{Q}_v (P_j - P_{j_2}) \right] \right\}; \\
Q_x &= \left[(P_{j_1} - P_j) |Q_h| - Q_H \right] / \left| (P_{j_1} - P_j) |Q_h| - Q_H \right|; \\
Q_y &= 0,5 (Q_v \bar{Q}_x - \bar{Q}_x Q_v); \\
Q_v &= \frac{(P_{j_1} - P_{j_2}) (P_{j_3} - P_{j_2}) - (P_{j_3} - P_{j_2}) (P_{j_1} - P_{j_2})}{\left| (P_{j_1} - P_{j_2}) (P_{j_3} - P_{j_2}) - (P_{j_3} - P_{j_2}) (P_{j_1} - P_{j_2}) \right|}.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Функция $\omega_2(\xi)$ задается для $\Psi'_j \subset \mathbb{C}$ с использованием модифицированного метода последовательных конформных отображений наперед заданных многоугольных областей [156]. Многоугольник Ψ'_j определяется набором вершин $P'_{j_1}, P'_{j_2}, \dots, P'_{j_T}$ при $P'_{j_t} = \omega_1(P_j + (P_{j_t} - P_j) |Q_h| / R_2^2)$, где $t = \overline{1, T}$.

Функция $\omega_3(\xi')$ определяет стереографическую проекцию [167] точек $(\xi' = \xi'_0 + i\xi'_1) \in B_R^2$ круга радиуса R_2 на поверхность верхней части полусферы этого же радиуса.

Пусть многогранный угол \mathfrak{B}_j задан вершиной P_j и основанием Ψ_j с вершинами $P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_T}$ (рис. 3.8). Для многоугольника Ψ_j определим кватер-

нион Q_v , задающий в \mathbb{R}^3 орт вектора внутренней нормали к основанию многогранного угла \mathfrak{B}_j , по трем первым вершинам $P_{j_1}, P_{j_2}, P_{j_3}$ с использованием соответствующего соотношения (3.69). С учетом Q_v построим проекцию P'_j вершины P_j угла \mathfrak{B}_j на основание Ψ_j выражением $P'_j = P_j - 0,5(Q_v[(\bar{P}_j - \bar{P}_{j_2})Q_v + \bar{Q}_v(P_j - P_{j_2})])$.

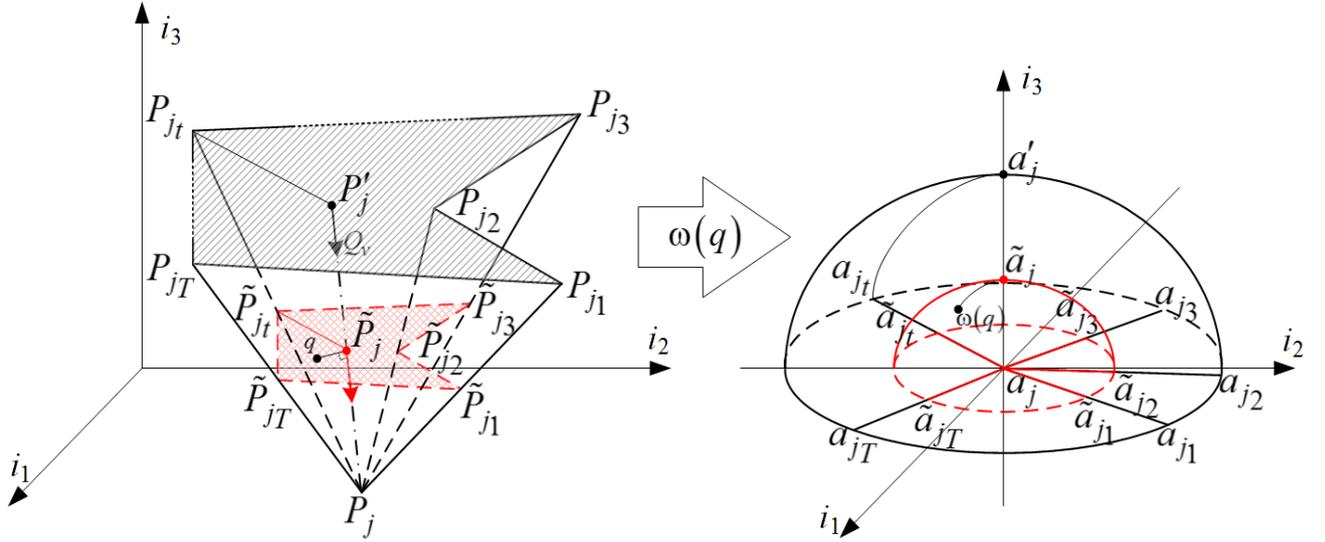


Рис. 3.8. Пример конформного отображения многогранного угла \mathfrak{B}_j на верхнее полупространство

При $Q_t = 0,5[(\bar{q} - \bar{P}_j)(P'_j - P_j) + (\bar{P}'_j - \bar{P}_j)(q - P_j)] / \|P'_j - P_j\|$ проецируем точку q на прямую, проходящую через P_j и P'_j (см. рис. 3.8), получим $\tilde{P}_j = P_j + Q_t(P'_j - P_j) = P_j + Q_H / R_2^2$. С учетом правила подобия треугольников $P_j P'_j P_{jt}$ и $P_j \tilde{P}_j P_{jt}$ зададим отображение $\tilde{P}_{j_1}, \tilde{P}_{j_2}, \dots, \tilde{P}_{j_T}$ вершин $P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_T}$ основания Ψ_j угла \mathfrak{B}_j соотношением

$$\tilde{P}_{jt} = P_j + (P_{jt} - P_j) |Q_h| / R_2^2, \quad (3.70)$$

задающим многоугольник Ψ'_j (проекция основания Ψ_j относительно точки q).

Определив кватернионы $Q_z = Q_v$; $Q_x = (\tilde{P}_{j_1} - P'_j) / |\tilde{P}_{j_1} - P'_j| = [(P_{j_1} - P_j)|Q_h| - Q_H] / |(P_{j_1} - P_j)|Q_h| - Q_H|$; $Q_y = 0,5(Q_v \bar{Q}_x - \bar{Q}_x Q_v)$, зададим

линейную проекцию точки q в точку $\xi \in \mathbb{C}$ соотношением

$$\xi = 0,5 \left(\begin{array}{l} [\bar{Q}_x (q - Q_j) + (\bar{q} - \bar{Q}_j) Q_x] + \\ + i [\bar{Q}_y (q - Q_j) + (\bar{q} - \bar{Q}_j) Q_y] \end{array} \right), \quad (3.71)$$

соответствующим функции $\omega_1 : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ из (3.68).

Функция $\omega_1(q)$ реализует линейную проекцию точки q в точку $\xi \in \mathbb{C}$, используя правила подобия, а отображения $\omega_2(\xi)$ и $\omega_3(\xi')$ являются конформными и учитывают линейное растяжение проекции \tilde{P}_j точки q . При указанном обеспечении постоянства искажения масштаба получим, что суперпозиция функций $\omega(q) = \omega_3(\omega_2(\omega_1(q)))$ определяет конформное отображение. \square

Следствие 4. Обратное отображение $\text{Im } \mathbb{H}^+$ на многогранный угол \mathfrak{B}_j реализует функция $\tilde{\omega}(q) = \tilde{\omega}_3(\tilde{\omega}_2(\tilde{\omega}_1(q)))$, где

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{C}, \quad \tilde{\omega}_1(q) = R_2(q_1 + iq_2)/(R_2 + q_3); \\ \tilde{\omega}_2 : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}; \\ \tilde{\omega}_2(\xi') &= C_0 \int_0^{\xi'/R_2} \left[\prod_{t=1}^T (1 - R_2\tau/a_{jt})^{\alpha_{jt}/\pi-1} \right] d\tau + C_1; \\ \tilde{\omega}_3 : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{H}, \quad \tilde{\omega}_3(\xi) = Q_x\xi_0 + Q_y\xi_1 + Q_j. \end{aligned} \quad (3.72)$$

При этом $\tilde{\omega}_1(q)$ – обратная стереографическая проекция; $\tilde{\omega}_2(\xi')$ – интеграл Кристоффеля–Шварца [144] для заданных проекций $a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jT}$ вершин $P'_{j1}, P'_{j2}, \dots, P'_{jT}$ на круг радиуса R_2 ; $\tilde{\omega}_3(\xi)$ – линейная проекция многоугольника Ψ'_j на многогранный угол (обратная функция к $\omega_1(q)$).

Следует отметить, что функции (3.68), (3.72) удовлетворяют необходимому условию – теореме Лиувилля [142], поскольку заданное конформное преобразование 3-пространства переводит сферы в сферы, понимая под сферической поверхностью также и плоскость.

Таким образом, полученные результаты позволяют перейти к непосредственному решению задач прямого и обратного конформного отображений многогранников (рис. 3.9).

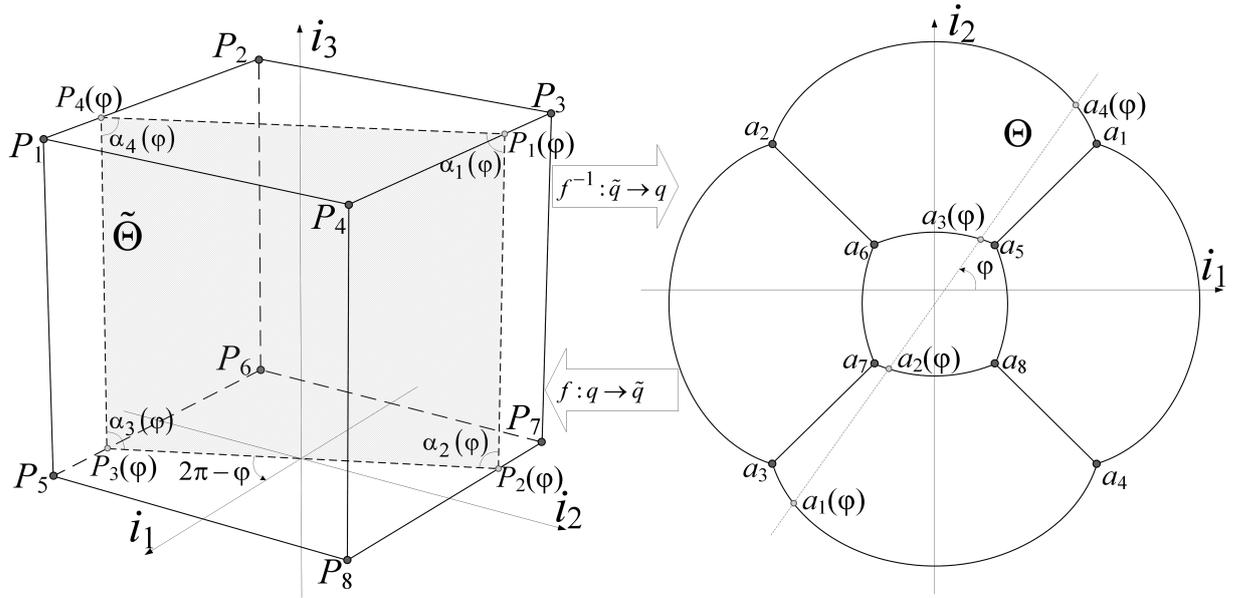


Рис. 3.9. Пример прямого и обратного конформных отображений куба

3.4. Прямая и обратная задачи конформного отображения многогранников в \mathbb{R}^3

Теорема 17. Если функция $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ реализует конформное отображение $\text{Im } \mathbb{H}^+$ на внутренность ограниченного многогранника Ω при известных ребрах \tilde{e}_m плоскости $i_1 i_2$ в $\text{Im } \mathbb{H}^+$, соответствующих ребрам e_m этого многогранника, то $f(q)$ для $q = R[(i_1 \cos \varphi + i_2 \sin \varphi) \sin \theta + i_3 \cos \theta]$ представляется соотношением

$$f(q) = \left| \tilde{\xi} \right| \left[(i_1 \cos \varphi + i_2 \sin \varphi) \cos \tilde{\theta} + i_3 \sin \tilde{\theta} \right], \text{ при } \tilde{\theta} = \arg(\tilde{\xi});$$

$$\tilde{\xi} = C_0 \int_0^{R \cdot e^{i(0,5\pi-\theta)}} \left[\prod_{j=1}^{N(\varphi)} (1 - a_j(\varphi)) \alpha_j(\varphi) / \pi - 1 \right] d\tau + C_1, \quad (3.73)$$

где C_0, C_1 – некоторые комплексные постоянные.

В выражении (3.73) $N(\varphi)$ – число точек $a_j(\varphi)$ пересечения ребер \tilde{e}_m с секущей плоскостью Θ , полученной путем поворота от плоскости $i_1 i_3$ на угол φ ; $a_j(\varphi)$ – точки действительной оси ($-\infty < a_1(\varphi) < a_2(\varphi) < \dots < a_{N(\varphi)}(\varphi) < \infty$) комплексной плоскости Θ , соответствующие вершинам $P_j(\varphi)$ много-

угольника $\Delta(\varphi)$, образованного сечением многогранника Ω плоскостью $\tilde{\Theta}$ (см. рис. 3.9); $\alpha_j(\varphi)$ – внутренние углы многоугольника $\Delta(\varphi)$ при вершинах $P_j(\varphi)$, равные по величине соответствующим двухгранным углам многогранника Ω .

Доказательство теоремы 17 основывается на результатах теоремы Кристоффеля–Шварца [142].

Применение выражения (3.73) при решении ряда прикладных задач связано с необходимостью подбора соответствия ребер \tilde{e}_m плоскости $i_1 i_2$ в $\text{Im } \mathbb{H}^+$ с ребрами e_m многогранника Ω . Такой подбор с учетом (3.62) связан с решением обратной задачи – конформного отображения многогранника Ω на единичный шар.

Решение обратной задачи выполняется по аналогии с решением в \mathbb{R}^2 с применением модифицированного метода последовательных конформных отображений [156].

Используя дробно-линейное преобразование $\zeta = g'_1(q/R)$ (R – минимальный радиус сферы, содержащей в себе все вершины P_j многогранника Ω), отобразим внутренность Ω на $\text{Im } \mathbb{H}^+$ с выброшенными шаровыми луночками. Для последующего отображения полученной области на $\text{Im } \mathbb{H}^+$ применим последовательность отображений, сводящихся к решению следующей модельной задачи.

Теорема 18. *Конформное отображение $\text{Im } \mathbb{H}^+$ с выброшенной областью, образованной пересечением полупространства с произвольной односвязной областью с гладкой поверхностью Γ , на $\text{Im } \mathbb{H}^+$ осуществляется для $q = R[(i_1 \times \cos \varphi + i_2 \sin \varphi) \sin \theta + i_3 \cos \theta]$ функцией*

$$\begin{aligned} \varpi(q) &= (a - b) \gamma \left| \tilde{\xi} \right| \left[(i_1 \cos \varphi + i_2 \sin \varphi) \cos \tilde{\theta} + i_3 \sin \tilde{\theta} \right], \\ \text{при } \tilde{\theta} &= \arg(\tilde{\xi}); \tilde{\xi} = S_3 \left(S_2 \left(S_1 \left(R \cdot e^{i(0,5\pi - \theta)} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.74)$$

и нормировке $\varpi(\infty) = \infty; \varpi'(\infty) = 1$,

где $S_1(\xi) = [\xi - a(\theta)] / [\xi - b(\theta)]; S_2(\xi) = \xi^{\gamma(\theta)}; S_3(\xi) = (1 + \xi) / (1 - \xi)$.

В выражении (3.74) $a(\theta)$, $b(\theta)$ – точки пересечения с действительной осью комплексной плоскости Θ , полученной путем поворота от плоскости $i_1 i_3$ на угол φ , с соприкасающейся с границей выброшенного из полуплоскости сегмента односвязной области в окрестности точки $\tau \in \Theta$ окружностью, где $\arg(\tau) = 0,5\pi - \theta$; $\gamma(\theta) = \pi/[\pi - \beta(\theta)]$; $\beta(\theta)$ – угол, образованный соприкасающейся окружностью в $a(\theta)$ (рис. 3.10).

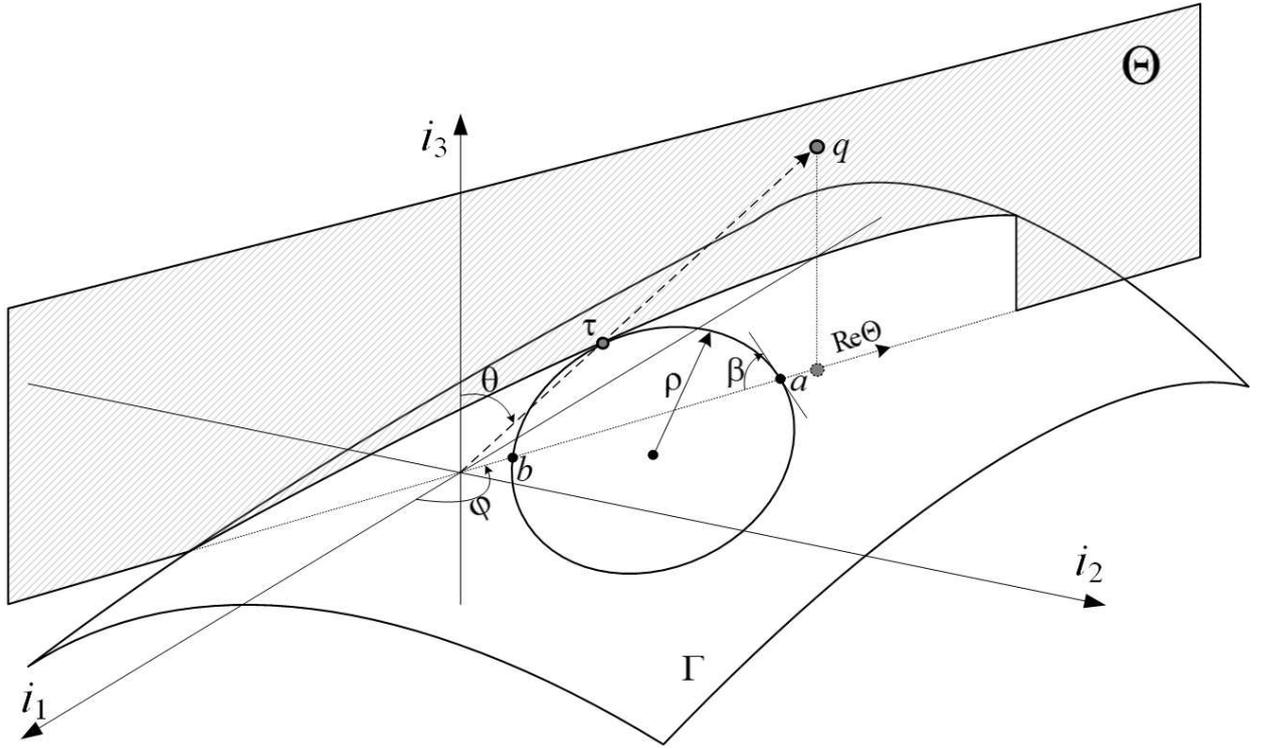


Рис. 3.10. Пример конформного отображения полупространства с выброшенной областью с гладкой поверхностью Γ

Доказательство теоремы 18 основано на результатах теоремы о конформном отображении верхней полуплоскости с выброшенным сегментом с гладкой границей на верхнюю полуплоскость [168].

Частным случаем (3.74) является задача на построение отображения $\text{Im } \mathbb{H}^+$ с выброшенным сегментом шара на $\text{Im } \mathbb{H}^+$. В ней указанное отображение производится для грани исходного многогранника, заданного набором вершин, которые расположены на границе описанной вокруг Ω окружности радиуса R . Пример задачи представлен на рисунке 3.7. Отображение с учетом (3.62)–(3.64) выполняется функцией $\varpi(q) = k_0 \cdot \tilde{\kappa}'(g_3(g_2(q)))$, где $k_0 = R_a \pi / \gamma$ – коэф-

фициент, соответствующий для $\mathfrak{w}(q)$ условиям нормировки $d\mathfrak{w}(i_1\infty)(dq)^{-1} = d\mathfrak{w}(i_2\infty)(dq)^{-1} = 1$, $d\mathfrak{w}(i_3\infty)(dq)^{-1} = 0$ для $dq = q$; $\tilde{\kappa}'(q) = (q + i_1)(i_1q + 1)^{-1}$ – функция, переводящая точки верхнего полупространства $Q_1 = -i_{1,2,3}$; $Q_2 = 0$; $Q_3 = i_1$ в соответствующие точки $W_1 = 0$; $W_2 = i_1$; $W_3 = \infty$.

Полученные результаты составляют совокупность методов, необходимых для решения задач конформного отображения многогранников в \mathbb{R}^3 при определении барицентрических координат Пуассона–Римана. Заданные конформные отображения получены с использованием алгебры кватернионов, теории функции комплексного переменного и геометрических представлений. Другим возможным вариантом получения соотношений, задающих прямое и обратное конформные отображения двухгранного угла на верхнее полупространство (3.64), многогранного угла на верхнее полупространство (3.68), верхнего полупространства на многогранник (3.73), является непосредственное использование алгебры кватернионов [146]. Однако возникающие при этом трудности, обусловленные некоммутативным характером \mathbb{H} алгебры, связаны с необходимостью вычисления большого числа постоянных при переходе от логарифмического вычета по производной мероморфной кватернион-функции, обобщающей конформное отображение (двухгранного угла, или многогранного угла, или многогранника) мероморфной кватернион-функции.

В целом полученные представления с учетом теоремы Лиувилля могут быть обобщены на задачи конформного отображения многогранников в многомерных Евклидовых пространствах \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) с применением алгебры Клиффорда, представлении элемента x этой алгебры в гиперсферической системе координат $x = R(\cos \theta + i_1 \sin \theta \sin \varphi_1 \cdot \dots \cdot \cos \varphi_n + i_2 \sin \theta \sin \varphi_1 \cdot \dots \cdot \sin \varphi_n + i_3 \sin \theta \sin \varphi_1 \times \dots \cdot \cos \varphi_{n-1} + i_4 \sin \theta \sin \varphi_1 \cdot \dots \cdot \sin \varphi_{n-1} + \dots)$ и последующим переходом к комплексной переменной $\xi = R \times e^{i(0,5\pi-\theta)}$ плоскости Θ , секущей пространство \mathbb{R}^n под углами $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Выводы по третьей главе

1. Разработан модифицированный метод последовательных конформных отображений, позволяющий с учетом теории функции комплексного переменного выполнить строгое решение задачи обратного конформного отображения произвольной многоугольной области на каноническую, которые заданы в \mathbb{R}^2 . На основе разработанного метода сформирован алгоритм, позволяющий за конечное число элементарных конформных отображений кратных числу вершин N многоугольника (максимальное общее число отображений равно $5 \cdot N^2$) задавать составную аналитическую функцию $F : \Omega \rightarrow B'$ с вычислительной ошибкой соизмеримой с десятными долями процентов.

2. Разработаны методы решения задач, связанных с разложением кватернион-функций в обобщенные степенные ряды. Необходимость решения последних по аналогии с теорией функции комплексного переменного связана с формированием простейших конформных отображений шара на верхнее полупространство, верхнего полупространства с выброшенным сегментом шара на двухгранный угол, двухгранного угла на верхнее полупространство, многогранного угла на верхнее полупространство.

3. С учетом теоремы Лиувилля и полученных решений по разложению кватернион-функций в обобщенные степенные ряды для последующего формирования методов прямого и обратного конформных отображений многогранников в \mathbb{R}^3 определены решения задач простейших конформных отображений шара на верхнее полупространство, верхнего полупространства с выброшенным сегментом шара на двухгранный угол, двухгранного угла на верхнее полупространство, многогранного угла на верхнее полупространство.

4. Разработаны методы прямого и обратного конформных отображений многогранника на каноническую область в \mathbb{R}^3 . Полученные решения являются обобщениями интегральной теоремы Кристоффеля–Шварца и модифицированного метода последовательных конформных отображений для изометрий в \mathbb{R}^3 , заданных с использованием алгебры кватернионов.

Глава 4. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СИНТЕЗА АДАПТИВНЫХ МНОГОЛУЧЕВЫХ ЗЕРКАЛЬНЫХ АНТЕНН

Математическое моделирование [170] АМЛЗА в условиях многосвязности излучающих и отражающих элементов предполагает задание математической зависимости между [171] варьируемыми входными структурными и параметрическими характеристиками и оцениваемым (оптимизируемым) выходным показателем во взаимосвязи решения внутренней и внешней задач электродинамики. В отношении определенной структуры и содержанием формируемой теории адаптивных многолучевых зеркальных антенн и разработанного для численного решения задач электродинамики I типа барицентрического метода такая постановка требует создания новых и модификации существующих методов анализа АС зеркального типа при решении задач электродинамики II типа и структурной параметризации отражающих элементов для последующего эффективного решения задач синтеза и управления. При этом с учетом сложной и отличающейся от свободного пространства интерференционной картины электромагнитного поля в раскрыве элементов АМЛЗА процедуры моделирования должны учитывать эффекты дифракции и переотражения [3, 132]. Последнее особенно важно при расчете электромагнитного поля в ближней зоне антенны в области полного телесного угла.

Решение вышеизложенных задач с учетом сформированной физико-математической модели управления АМЛЗА предполагает: модификацию аналитических методов анализа ЗА в направлении учета эффектов дифракции и переотражения; разработку новых методов решения систем сингулярных интегральных уравнений, формируемых в приближении электродинамической теории ЗА [3]; параметризации отражающей поверхности деформируемого рефлектора при управлении ее формой положением K деформирующих стержней. Затем для сформированных решений предполагается выполнить предварительное эмпирическое обоснования достоверности [225] и тестирования эффективности

по средствам имитационного моделирования с применением современных промышленных пакетов программ анализа антенн и СВЧ-устройств [38]. Вопросы, рассмотренные в настоящей главе, нашли отражение в [18, 20, 71, 176, 201, 217].

4.1. Модифицированный токовый метод расчета характеристик направленности адаптивных многолучевых зеркальных антенн

Увеличение точности решения задач анализа характеристик направленности антенных систем зеркального типа в области дальнего бокового излучения предполагает дополнение известных аналитических методов [41–43, 70, 173] более точными. С этой целью выполним модификацию токового метода расчета характеристик направленности ЗА, позволяющего учесть эффекты дифракции и взаимного влияния отражающих и излучающих элементов АС во взаимосвязи с поляризационными и частотными характеристиками ЭМП.

Модификацию токового метода, основанного на принципе Гюйгенса–Кирхгофа [41] и приближениях ФО [174], предполагается выполнить с учетом изложенных в [175] идей физической теории дифракции (ФТД), основанной на концепции элементарных краевых волн.

Метод краевых волн [175] сводится к определению плотности поверхностного тока \vec{J} , индуцируемого на отражателе S , в виде

$$\vec{J} = \vec{J}^{(0)} + \vec{J}^{(1)}, \quad (4.1)$$

где $\vec{J}^{(0)}$ – поверхностный ток или равномерная часть поверхностного тока \vec{J} ; $\vec{J}^{(1)}$ – поверхностная плотность дополнительного тока (неравномерная часть поверхностного тока \vec{J}), обусловленного искривлением поверхности зеркала (излом, выступ, отверстие и др.) [176]. При решении задач анализа и синтеза АМЛЗА ограничимся тем, что отражающая поверхность рефлектора является вогнутой (выпуклой) и гладкой, а ее размеры и радиус кривизны велики по сравнению с длиной волны λ . В этом случае будем считать [175], что ток $\vec{J}^{(1)}$ сосредоточен вблизи внешней границы рефлектора (кромки).

В разрабатываемой модификации токового метода в приближениях ФО и ФТД для дальней зоны в некоторой точке наблюдения Q ЭМП, создаваемое краевыми $\vec{J}^{(1)}$ и основными $\vec{J}^{(0)}$ токами, определяется

$$\begin{aligned}\vec{E}_Q &= \sum_{m=1}^M \left[\vec{E}_{m,Q}^{(0)} + \vec{E}_{m,Q}^{(1)} + \vec{E}_{m,Q}^{(o)} \right]; \\ \vec{H}_Q &= \sum_{m=1}^M \left[\vec{H}_{m,Q}^{(0)} + \vec{H}_{m,Q}^{(1)} + \vec{H}_{m,Q}^{(o)} \right],\end{aligned}\quad (4.2)$$

где $\vec{E}_{m,Q}^{(0)}$ и $\vec{H}_{m,Q}^{(0)}$ – напряженности электрического и магнитного полей, создаваемых равномерной частью токов отражающей поверхности от m -го излучателя; $\vec{E}_{m,Q}^{(1)}$ и $\vec{H}_{m,Q}^{(1)}$ – напряженности электрического и магнитного дифракционных полей, создаваемых краевыми токами кромкой отражающей поверхности от m -го излучателя; $\vec{E}_{m,Q}^{(o)}$ и $\vec{H}_{m,Q}^{(o)}$ – напряженности электрического и магнитного полей, реализуемых m -м излучателем в направлении на точку наблюдения Q с учетом эффектов переотражения. Указанные переменные для учета эффекта затенения [20, 176] вводятся в правую часть (4.2) в том случае, если для них существует эйконал в направлении на Q . С учетом применяемой симметризации [24, 177] системы уравнений Максвелла для сокращения математической записи при описании модифицированного токового метода далее будем рассматривать решение относительно напряженности электрического поля. Решение задачи определения ЭМП в Q известно из [177] при исследовании процессов излучения поля заданными токами и зарядами в некоторой однородной и изотропной области V , ограниченной системой отражающих поверхностей. При этом в отсутствии в V сторонних электрических токов и зарядов $\vec{E}_{m,Q}^{(0)}$ определяется интегрированием по поверхности S рефлектора [18, 20]

$$\begin{aligned}\vec{E}_{m,Q}^{(0)} &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-i\omega\mu_a \Psi \vec{n}_0 \times \vec{H}_{m,S} + \left(\vec{n}_0 \times \vec{E}_{m,S} \times \nabla \Psi \right) + \vec{n}_0 \vec{E}_{m,S} \nabla \Psi \right] dS,\end{aligned}\quad (4.3)$$

где $\vec{J}_m^{(0)} = \vec{n}_0 \times \vec{H}_{m,S}$; $\rho_m^{(0)} = \vec{n}_0 \cdot \vec{E}_{m,S}$; \vec{n}_0 – орт вектора нормали в точке интегрирования на поверхности S рефлектора; $\vec{E}_{m,S}$ и $\vec{H}_{m,S}$ векторы напряженности электрического и магнитного полей соответственно на S , формируемые m -м излучателем; $\Psi = \frac{e^{-i\kappa R}}{R}$ – фазовая функция источника (функция Грина); R – расстояние от точки наблюдения Q до текущей точки на S ; $\kappa = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ – волновое число; ϵ_a и μ_a – параметры однородной среды, определяющие магнитную и диэлектрическую проницаемость; $\omega = 2\pi/\lambda$ – круговая частота.

Корректность применения выражения (4.3) к решаемой внешней задаче расчета ЭМП АС зеркального типа связана с необходимостью задания распределения ЭМП на отражающей поверхности рефлектора S таким образом, чтобы разрыв тангенциальных составляющих на кромке рефлектора «... был бы связан с некоторым эквивалентным распределением токов и зарядов, удовлетворяющим уравнению непрерывности» [177] $\nabla \cdot \vec{J}_m^{(1)} + \frac{\rho_m^{(1)}}{\partial t} = 0$. Для этого в приближении дифракционного метода Кирхгофа–Котлера вводится дополнительная плотность зарядов $\rho_m^{(1)}$, распределенных по контуру S [176] от m -го излучателя. В такой постановке дифракционное поле $\vec{E}_{m,Q}^{(1)}$ определяется из интеграла по объему, вырождающегося при допущениях [18, 20, 177] в интеграл по замкнутому контуру:

$$\vec{E}_{m,Q}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\rho_m^{(1)}}{\epsilon_a} \nabla \Psi dV \rightarrow \frac{1}{4\pi i \omega \epsilon_a} \oint_{\partial S} \vec{\tau} \vec{H}_{m,S} \nabla \Psi dS, \quad (4.4)$$

где $\vec{\tau}$ – касательная к точке интегрирования на кромке рефлектора.

Согласно [20, 177] интеграл по замкнутому контуру ∂S в (4.4) на основе теоремы Стокса [178] и уравнений Максвелла [24] $\nabla \times \vec{H} = -i\omega \epsilon_a \vec{E}$; $\nabla \times \vec{E} = i\omega \mu_a \vec{H}$ представим в виде интеграла по S :

$$\vec{E}_{m,Q}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\vec{n}_0 \vec{E}_{m,S} \nabla \Psi + i\omega \epsilon_a \vec{n}_0 \times \vec{H}_{m,S} \nabla (\nabla \Psi) \right] dS. \quad (4.5)$$

В случае замены отражающей поверхности S (экрана) некоторым эквивалентным отверстием на бесконечной проводящей плоскости рассеянное поле

$\vec{E}_{m,Q}^{(1)}$ будет определяться соотношением [18, 20]:

$$\vec{E}_{m,Q}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-\vec{n}_0 \vec{E}_{m,S} \nabla \Psi - i\omega \varepsilon_a \vec{n}_0 \times \vec{H}_{m,S} \nabla (\nabla \Psi) \right] dS. \quad (4.6)$$

В выражениях (4.3),(4.5),(4.6) $\nabla \Psi$ и $\nabla (\nabla \Psi)$ определяют соответственно вектор градиента и матрицу Гессе \mathbf{J} функции Грина Ψ . Вектор градиента функции Ψ в прямоугольной системе координат задается соотношением [176]

$$\nabla \Psi = -\vec{A} \left(i\kappa + \frac{1}{R} \right) \frac{e^{-i\kappa R}}{R^2}, \quad (4.7)$$

где

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} x - xr_Q \cos \nu / r - rr_Q \partial \cos \nu / \partial x \\ y - yr_Q \cos \nu / r - rr_Q \partial \cos \nu / \partial y \\ z - zr_Q \cos \nu / r - rr_Q \partial \cos \nu / \partial z \end{pmatrix}; \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \partial \cos \nu / \partial x &= \cos \xi_Q \sin \theta_Q / r - x \cos \nu / r^2; \\ \partial \cos \nu / \partial y &= \sin \xi_Q \sin \theta_Q / r - y \cos \nu / r^2; \\ \partial \cos \nu / \partial z &= \cos \theta_Q / r - z \cos \nu / r^2. \end{aligned}$$

Элементы $J_{j_1 j_2}$ ($j_1, j_2 \in \{\overline{1, 3}\}$) матрицы Гессе \mathbf{J} функции Ψ определяются соотношениями [176]

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{e^{-i\kappa R}}{R^5} \left[A_1^2 \left(3i\kappa R + 3 - \kappa^2 R^2 \right) - \left(i\kappa R^3 + R^2 \right) \frac{\partial A_1}{\partial x} \right]; \\ J_{22} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{e^{-i\kappa R}}{R^5} \left[A_2^2 \left(3i\kappa R + 3 - \kappa^2 R^2 \right) - \left(i\kappa R^3 + R^2 \right) \frac{\partial A_2}{\partial y} \right]; \\ J_{33} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{e^{-i\kappa R}}{R^5} \left[A_3^2 \left(3i\kappa R + 3 - \kappa^2 R^2 \right) - \left(i\kappa R^3 + R^2 \right) \frac{\partial A_3}{\partial z} \right]; \\ J_{12} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{e^{-i\kappa R}}{R^5} \left[A_1 A_2 \left(3i\kappa R + 3 - \kappa^2 R^2 \right) - \left(i\kappa R^3 + R^2 \right) \frac{\partial A_1}{\partial y} \right]; \\ J_{13} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} = \frac{e^{-i\kappa R}}{R^5} \left[A_1 A_3 \left(3i\kappa R + 3 - \kappa^2 R^2 \right) - \left(i\kappa R^3 + R^2 \right) \frac{\partial A_1}{\partial z} \right]; \\ J_{23} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z} = \frac{e^{-i\kappa R}}{R^5} \left[A_2 A_3 \left(3i\kappa R + 3 - \kappa^2 R^2 \right) - \left(i\kappa R^3 + R^2 \right) \frac{\partial A_2}{\partial z} \right], \end{aligned} \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_1}{\partial x} &= 1 + r_Q \left\{ \frac{1}{r} \left[\cos \mathbf{v} \left(\frac{x^2}{r^2} - 1 \right) - 2x \frac{\partial \cos \mathbf{v}}{\partial x} \right] - r \frac{\partial^2 \cos \mathbf{v}}{\partial x^2} \right\}; \\
\frac{\partial A_2}{\partial y} &= 1 + r_Q \left\{ \frac{1}{r} \left[\cos \mathbf{v} \left(\frac{y^2}{r^2} - 1 \right) - 2y \frac{\partial \cos \mathbf{v}}{\partial y} \right] - r \frac{\partial^2 \cos \mathbf{v}}{\partial y^2} \right\}; \\
\frac{\partial A_3}{\partial z} &= 1 + r_Q \left\{ \frac{1}{r} \left[\cos \mathbf{v} \left(\frac{z^2}{r^2} - 1 \right) - 2z \frac{\partial \cos \mathbf{v}}{\partial z} \right] - r \frac{\partial^2 \cos \mathbf{v}}{\partial z^2} \right\};
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_1}{\partial y} &= r_Q \left[\frac{xy \cos \mathbf{v}}{r^3} - r \frac{\partial^2 \cos \mathbf{v}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r} \left(x \frac{\partial \cos \mathbf{v}}{\partial y} + y \frac{\partial \cos \mathbf{v}}{\partial x} \right) \right]; \\
\frac{\partial A_1}{\partial z} &= r_Q \left[\frac{xz \cos \mathbf{v}}{r^3} - r \frac{\partial^2 \cos \mathbf{v}}{\partial x \partial z} - \frac{1}{r} \left(x \frac{\partial \cos \mathbf{v}}{\partial z} + z \frac{\partial \cos \mathbf{v}}{\partial x} \right) \right]; \\
\frac{\partial A_2}{\partial z} &= r_Q \left[\frac{yz \cos \mathbf{v}}{r^3} - r \frac{\partial^2 \cos \mathbf{v}}{\partial y \partial z} - \frac{1}{r} \left(y \frac{\partial \cos \mathbf{v}}{\partial z} + z \frac{\partial \cos \mathbf{v}}{\partial y} \right) \right];
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \cos \mathbf{v}}{\partial x^2} &= \frac{2x^2 \cos \mathbf{v}}{r^4} - \frac{x \frac{\partial \cos \mathbf{v}}{\partial x} + \cos \mathbf{v}}{r^2} - \frac{x \sin \theta_Q \cos \xi_Q}{r^3}; \\
\frac{\partial^2 \cos \mathbf{v}}{\partial y^2} &= \frac{2y^2 \cos \mathbf{v}}{r^4} - \frac{y \frac{\partial \cos \mathbf{v}}{\partial y} + \cos \mathbf{v}}{r^2} - \frac{y \sin \theta_Q \sin \xi_Q}{r^3}; \\
\frac{\partial^2 \cos \mathbf{v}}{\partial z^2} &= \frac{2z^2 \cos \mathbf{v}}{r^4} - \frac{z \frac{\partial \cos \mathbf{v}}{\partial z} + \cos \mathbf{v}}{r^2} - \frac{z \cos \theta_Q}{r^3};
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \cos \mathbf{v}}{\partial x \partial y} &= \frac{2xy \cos \mathbf{v}}{r^4} - \frac{x \partial \cos \mathbf{v} / \partial y}{r^2} - \frac{y \sin \theta_Q \cos \xi_Q}{r^3}; \\
\frac{\partial^2 \cos \mathbf{v}}{\partial x \partial z} &= \frac{2xz \cos \mathbf{v}}{r^4} - \frac{x \partial \cos \mathbf{v} / \partial z}{r^2} - \frac{z \sin \theta_Q \cos \xi_Q}{r^3}; \\
\frac{\partial^2 \cos \mathbf{v}}{\partial y \partial z} &= \frac{2yz \cos \mathbf{v}}{r^4} - \frac{y \partial \cos \mathbf{v} / \partial z}{r^2} - \frac{z \cos \theta_Q}{r^3}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

В выражениях (4.7)–(4.13) приняты следующие обозначения [18]: x, y, z – прямоугольные координаты точки интегрирования по S ; $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, θ, ξ – сферические координаты точки интегрирования по S ; r_Q, θ_Q, ξ_Q – сферические координаты точки наблюдения Q ; \mathbf{v} – угол между ортами векторов

в направлении на точку интегрирования по S и в направлении на Q ; $\cos \nu = \frac{1}{r} (x \sin \theta_Q \cos \xi_Q + y \sin \theta_Q \sin \xi_Q + z \cos \theta_Q)$; $R = \sqrt{r_Q^2 + r^2 - 2r_Q r \cos \nu}$.

В выражениях (4.4), (4.5) ЭМП $\vec{E}_{m,S}$, $\vec{H}_{m,S}$ в раскрыве рефлектора от m -го излучателя определяется с учетом эффектов переотражения. Эффекты переотражения для излучателей (облучающей системы АМЛЗА) учитываются при решении следующих модельных задач: 1) облучающая система содержит взаимодействующие излучатель и рефлектор (рис. 4.1, а); 2) облучающая система содержит два взаимодействующих излучателя (рис. 4.1, б).

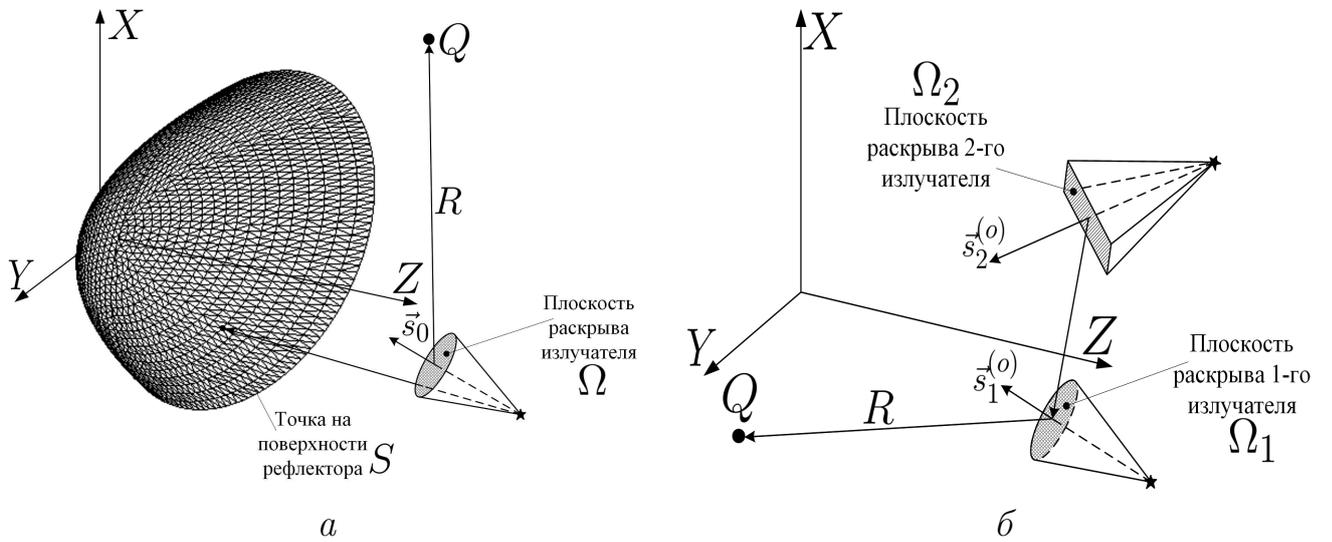


Рис. 4.1. Геометрическое представление модельных задач учета эффектов переотражения при влиянии на излучатель переотраженного ЭМП от рефлектора (а) и ЭМП другого излучателя (б)

Теорема 19. Если антенная система содержит один рефлектор и излучатель, то в приближении Кирхгофа–Котлера напряженность электромагнитного поля излучателя в направлении на произвольную точку наблюдения Q с учетом эффектов переотражения определяется соотношением

$$\vec{E}'_Q^{(o)} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \left[-i\omega\mu_a \Psi \vec{s}_0 \times \left(\vec{H}_{\text{и}} + h \sum_{n=1}^N \vec{H}_3^{(n)} \right) + \vec{s}_0 \times \left(\vec{E}_{\text{и}} - h \sum_{n=1}^N \vec{E}_3^{(n)} \right) \times \nabla \Psi + \vec{s}_0 \left(\vec{E}_{\text{и}} - h \sum_{n=1}^N \vec{E}_3^{(n)} \right) \nabla \Psi \right] d\Omega, \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (4.14)$$

В выражении (4.14) \vec{s}_0 – орт вектора нормали к плоскости Ω раскрыва излучателя; $\Psi = \frac{e^{-i\kappa R}}{R}$ – фазовая функция источника на передачу для точки наблюдения Q ; $\bar{\Psi} = \frac{e^{i\kappa R}}{R}$ – фазовая функция источника на прием для точки наблюдения Q ; $h = e^{2i\kappa R}$; $\vec{E}_и, \vec{H}_и$ – задают распределение ЭМП в Ω , определенное из решения задачи электродинамики I типа для излучателя; $\vec{E}_3^{(n)}, \vec{H}_3^{(n)}$ – переотраженное от рефлектора ЭМП на n -м акте:

$$\begin{aligned} \vec{E}_3^{(n)} &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-i\omega\mu_a \bar{\Psi}' \vec{n}_0 \times \vec{H}_о^{(n-1)} + 2\vec{n}_0 \vec{E}_о^{(n-1)} \nabla \bar{\Psi}' + \right. \\ &\left. + i\omega\varepsilon_a \vec{n}_0 \times \vec{H}_о^{(n-1)} \nabla (\nabla \bar{\Psi}') \right] dS; \\ \vec{H}_3^{(n)} &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\vec{n}_0 \times \vec{H}_о^{(n-1)} \times \nabla \bar{\Psi}' \right] dS, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где $\vec{E}_о^{(n-1)}, \vec{H}_о^{(n-1)}$ – ЭМП, формируемое излучателем на отражающей поверхности рефлектора с учетом $n - 1$ актов переотражения

$$\begin{aligned} \vec{E}_о^{(n-1)} &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \left[-i\omega\mu_a \Psi' \vec{s}_0 \times \left(\vec{H}_и + h \sum_{n'=1}^{n-1} \vec{H}_3^{(n')} \right) + \vec{s}_0 \times \left(\vec{E}_и - \right. \right. \\ &\left. \left. - h \sum_{n'=1}^{n-1} \vec{E}_3^{(n')} \right) \times \nabla \Psi' + \vec{s}_0 \left(\vec{E}_и - h \sum_{n'=1}^{n-1} \vec{E}_3^{(n')} \right) \nabla \Psi' \right] d\Omega; \\ \vec{H}_о^{(n-1)} &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \left[i\omega\varepsilon_a \Psi' \vec{s}_0 \times \left(\vec{E}_и + h \sum_{n'=1}^{n-1} \vec{E}_3^{(n')} \right) + \vec{s}_0 \times \left(\vec{H}_и - \right. \right. \\ &\left. \left. - h \sum_{n'=1}^{n-1} \vec{H}_3^{(n')} \right) \times \nabla \Psi' + \vec{s}_0 \left(\vec{H}_и - h \sum_{n'=1}^{n-1} \vec{H}_3^{(n')} \right) \nabla \Psi' \right] d\Omega; \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ψ' – фазовая функция источника на передачу для некоторой точки на рефлекторе S ; $\bar{\Psi}'$ – фазовая функция источника на прием для некоторой точки на рефлекторе S .

Доказательство. Известно, что энергия ЭМП, отраженная от рефлектора и попадающая в раскрыв излучателя [18, 20], «... создает в питающей линии излучателя такой же эффект, как и обычная отраженная волна, появля-

ющаяся в линии вследствие ее частичной рассогласованности с входным сопротивлением. . . » [43]. Тогда для первого акта переотражения ЭМП, формируемое излучателем в некоторой точке наблюдения Q при известном распределении ЭМП \vec{E}_n, \vec{H}_n в его раскрыве с учетом приближений Кирхгофа–Котлера и представлений (4.3), (4.5), будет определяться соотношением

$$\begin{aligned} \vec{E}_Q^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \left[-i\omega\mu_a\Psi\vec{s}_0 \times \vec{H}_n + \vec{s}_0 \times \vec{E}_n \times \nabla\Psi + \vec{s}_0\vec{E}_n\nabla\Psi - \right. \\ \left. -i\omega\mu_a\bar{\Psi}\vec{s}_0 \times \vec{H}_3^{(1)} + \vec{s}_0 \times \vec{E}_3^{(1)} \times \nabla\bar{\Psi} + \vec{s}_0\vec{E}_3^{(1)}\nabla\bar{\Psi} \right] d\Omega, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{E}_3^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-i\omega\mu_a\bar{\Psi}'\vec{n}_0 \times \vec{H}_o + \vec{n}_0 \times \vec{E}_o \times \nabla\bar{\Psi}' + 2\vec{n}_0\vec{E}_o\nabla\bar{\Psi}' + \right. \\ \left. +i\omega\varepsilon_a\vec{n}_0 \times \vec{H}_o\nabla(\nabla\bar{\Psi}') \right] dS; \\ \vec{H}_3^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[i\omega\varepsilon_a\bar{\Psi}'\vec{n}_0 \times \vec{E}_o + \vec{n}_0 \times \vec{H}_o \times \nabla\bar{\Psi}' + 2\vec{n}_0\vec{H}_o\nabla\bar{\Psi}' + \right. \\ \left. +i\omega\mu_a\vec{n}_0 \times \vec{E}_o\nabla(\nabla\bar{\Psi}') \right] dS; \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_o = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \left[-i\omega\mu_a\Psi'\vec{s}_0 \times \vec{H}_n + \vec{s}_0 \times \vec{E}_n \times \nabla\Psi' + \vec{s}_0\vec{E}_n\nabla\Psi' \right] d\Omega; \\ \vec{H}_o = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \left[i\omega\varepsilon_a\Psi'\vec{s}_0 \times \vec{E}_n + \vec{s}_0 \times \vec{H}_n \times \nabla\Psi' + \vec{s}_0\vec{H}_n\nabla\Psi' \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Используя свойства векторного произведения [178], равенства $\bar{\Psi} = h\Psi$, $\bar{\Psi}' = h\Psi'$, $\nabla\bar{\Psi} = -h\nabla\Psi$, $\nabla\bar{\Psi}' = -h\nabla\Psi'$, следующие из (4.7), и граничные условия [24] для идеально-проводящей поверхности S рефлектора $\vec{n}_0 \times \vec{E}_S = 0$, $\vec{n}_0\vec{H}_S = 0$ приведем выражения (4.17), (4.18) к виду:

$$\begin{aligned} \vec{E}_Q^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \left[-i\omega\mu_a\Psi\vec{s}_0 \times \left(\vec{H}_n + h\vec{H}_3^{(1)} \right) + \vec{s}_0 \times \left(\vec{E}_n - h\vec{E}_3^{(1)} \right) \times \right. \\ \left. \times \nabla\Psi + \vec{s}_0 \left(\vec{E}_n - h\vec{E}_3^{(1)} \right) \nabla\Psi \right] d\Omega; \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}_3^{(1)} &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-i\omega\mu_a \bar{\Psi}' \vec{n}_0 \times \vec{H}_o + 2\vec{n}_0 \vec{E}_o \nabla \bar{\Psi}' + \right. \\
&\quad \left. + i\omega\varepsilon_a \vec{n}_0 \times \vec{H}_o \nabla (\nabla \bar{\Psi}') \right] dS; \\
\vec{H}_3^{(1)} &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\vec{n}_0 \times \vec{H}_o \times \nabla \bar{\Psi}' \right] dS.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

С учетом заданных представлений (4.20), (4.21) ЭМП, формируемое излучателем в некоторой точке наблюдения Q , для первого и второго актов переотражения будет определяться в виде:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_Q^{(2)} &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \left[-i\omega\mu_a \Psi \vec{s}_0 \times \left(\vec{H}_{\text{и}} + h\vec{H}_3^{(1)} + h\vec{H}_3^{(2)} \right) + \vec{s}_0 \times \left(\vec{E}_{\text{и}} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - h\vec{E}_3^{(1)} - h\vec{E}_3^{(2)} \right) \times \nabla \Psi + \vec{s}_0 \left(\vec{E}_{\text{и}} - h\vec{E}_3^{(1)} - h\vec{E}_3^{(2)} \right) \nabla \Psi \right] d\Omega,
\end{aligned} \tag{4.22}$$

где

$$\begin{aligned}
\vec{E}_3^{(2)} &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-i\omega\mu_a \bar{\Psi}' \vec{n}_0 \times \vec{H}_o^{(1)} + i\omega\varepsilon_a \vec{n}_0 \times \vec{H}_o^{(1)} \nabla (\nabla \bar{\Psi}') + \right. \\
&\quad \left. + 2\vec{n}_0 \vec{E}_o^{(1)} \nabla \bar{\Psi}' \right] dS; \\
\vec{H}_3^{(2)} &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\vec{n}_0 \times \vec{H}_o^{(1)} \times \nabla \bar{\Psi}' \right] dS;
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}_o^{(1)} &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \left[-i\omega\mu_a \Psi' \vec{s}_0 \times \left(\vec{H}_{\text{и}} + h\vec{H}_3^{(1)} \right) + \vec{s}_0 \times \left(\vec{E}_{\text{и}} - h\vec{E}_3^{(1)} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \nabla \Psi' + \vec{s}_0 \left(\vec{E}_{\text{и}} - h\vec{E}_3^{(1)} \right) \nabla \Psi' \right] d\Omega; \\
\vec{H}_o^{(1)} &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \left[i\omega\varepsilon_a \Psi' \vec{s}_0 \times \left(\vec{E}_{\text{и}} + h\vec{E}_3^{(1)} \right) + \vec{s}_0 \times \left(\vec{H}_{\text{и}} - h\vec{H}_3^{(1)} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \nabla \Psi' + \vec{s}_0 \left(\vec{H}_{\text{и}} - h\vec{H}_3^{(1)} \right) \nabla \Psi' \right] d\Omega.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Продолжив определение ЭМП, формируемое излучателем в некоторой точке наблюдения Q , для $1, 2, \dots, N$ актов переотражения, получим выражение (4.14). \square

Из полученных соотношений следует, что учет n -го акта переотражения приводит к уточнению расчета на $\mathcal{O}\left(\frac{1}{R^{2n}}\right)$, где R задает среднее расстояние от рефлектора до излучателя. При этом применение приближения Кирхгофа–Котлера при оценке ЭМП в ближней зоне характеризуется порядком точности $\mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right)$, что следует из (4.7). Таким образом, при решении задач анализа для конструкций ЗА, в которых излучатель относительно направления основного излучения рефлектора не затенен, нет смысла учитывать эффект переотражения. В остальных случаях при решении задач анализа более сложных, нетиповых конструкций следует учитывать первый ($N = 1$) акт переотражения.

Теорема 20. *Если антенная система содержит два излучателя, то в приближении Кирхгофа–Котлера напряженность электромагнитного поля первого излучателя в направлении на произвольную точку наблюдения Q с учетом эффектов переотражения определяется соотношением*

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{1,Q} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega_1} \left[-i\omega\mu_a\Psi\vec{s}_1^{(o)} \times \left(\vec{H}_{1,и} + h \sum_{n=1}^N \vec{H}_{2,o}^{(n)} \right) + \vec{s}_1^{(o)} \times \left(\vec{E}_{1,и} - \right. \right. \\ \left. \left. - h \sum_{n=1}^N \vec{E}_{2,o}^{(n)} \right) \times \nabla\Psi + \vec{s}_1^{(o)} \left(\vec{E}_{1,и} - h \sum_{n=1}^N \vec{E}_{2,o}^{(n)} \right) \nabla\Psi \right] d\Omega, \text{ при } N \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.25)$$

В выражении (4.25) $\vec{E}_{1,и}$, $\vec{H}_{1,и}$ – задают распределение ЭМП в раскрыве первого излучателя Ω_1 ; $\vec{E}_{2,o}^{(n)}$, $\vec{H}_{2,o}^{(n)}$ – ЭМП, формируемое вторым излучателем в раскрыве первого с учетом n актов переотражения:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{2,o}^{(n)} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega_2} \left[-i\omega\varepsilon_a\Psi'\vec{s}_2^{(o)} \times \left(\vec{H}_{2,и} + h \sum_{n'=1}^{n-1} \vec{H}_{1,o}^{(n')} \right) + \vec{s}_2^{(o)} \times \left(\vec{E}_{2,и} - \right. \right. \\ \left. \left. - h \sum_{n'=1}^{n-1} \vec{E}_{1,o}^{(n')} \right) \times \nabla\Psi' + \vec{s}_2^{(o)} \left(\vec{E}_{2,и} - h \sum_{n'=1}^{n-1} \vec{E}_{1,o}^{(n')} \right) \nabla\Psi' \right] d\Omega; \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_{2,0}^{(n)} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega_2} & \left[i\omega\epsilon_a \Psi' \vec{s}_2^{(o)} \times \left(\vec{E}_{2,и} + h \sum_{n'=1}^{n-1} \vec{E}_{1,0}^{(n')} \right) + \vec{s}_2^{(o)} \times \left(\vec{H}_{2,и} - \right. \right. \\ & \left. \left. - h \sum_{n'=1}^{n-1} \vec{H}_{1,0}^{(n')} \right) \times \nabla \Psi' + \vec{s}_2^{(o)} \left(\vec{H}_{2,и} - h \sum_{n'=1}^{n-1} \vec{H}_{1,0}^{(n')} \right) \nabla \Psi' \right] d\Omega; \end{aligned} \quad (4.27)$$

Ψ' – фазовая функция источника на передачу для некоторой точки на раскрыве Ω_2 второго излучателя; $\bar{\Psi}'$ – фазовая функция источника на прием для некоторой точки на раскрыве Ω_2 второго излучателя; $\vec{E}_{1,0}^{(n)}, \vec{H}_{1,0}^{(n)}$ – ЭМП, формируемое первым излучателем в раскрыве второго с учетом $n - 1$ актов переотражения.

Доказательство теоремы 20 аналогично доказательству теоремы 19 и следует из соотношения (4.13), приближения Кирхгофа–Котлера, свойств векторного произведения, равенств $\bar{\Psi} = h\Psi$, $\bar{\Psi}' = h\Psi'$, $\nabla\bar{\Psi} = -h\nabla\Psi$, $\nabla\bar{\Psi}' = -h\nabla\Psi'$ и граничных условий [24] между двумя диэлектриками. При этом для второй модельной задачи учет n -го акта переотражения аналогичен уточнению, проводимом в решении первой модельной задачи, – $\mathcal{O}\left(\frac{1}{R^{2n}}\right)$, где R задает среднее расстояние от первого излучателя до второго. Применение приближения Кирхгофа–Котлера при оценке ЭМП излучателя в ближней зоне характеризуется порядком точности $\mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right)$, что следует из (4.7). Таким образом, при решении задач анализа в случае, если угол между орт-векторами $\vec{s}_1^{(o)}$ и $\vec{s}_2^{(o)}$ менее 80° , нет смысла учитывать эффект переотражения между излучателями. В остальных случаях при решении задач анализа более сложных, нетиповых конструкций следует учитывать первый ($N = 1$) акт переотражения.

В качестве примера проведем расчет ДН коэффициента усиления G однозеркальной однолучевой параболической ЗА с параметрами: $\lambda = 0,05$ м, $D = 20\lambda$, $f/D = 0,5$, излучатель рупорный с круглым раскрывом радиуса $0,522\lambda$ при ориентации \vec{s}_0 в геометрический центр рефлектора. Для сравнительной оценки расчет ДН (рис. 4.2) для заданной АС выполнен по предложенной модификации токового метода и существующими асимптотическими методами – апертурным, токовым и токовым с учетом геометрической теории дифракции.

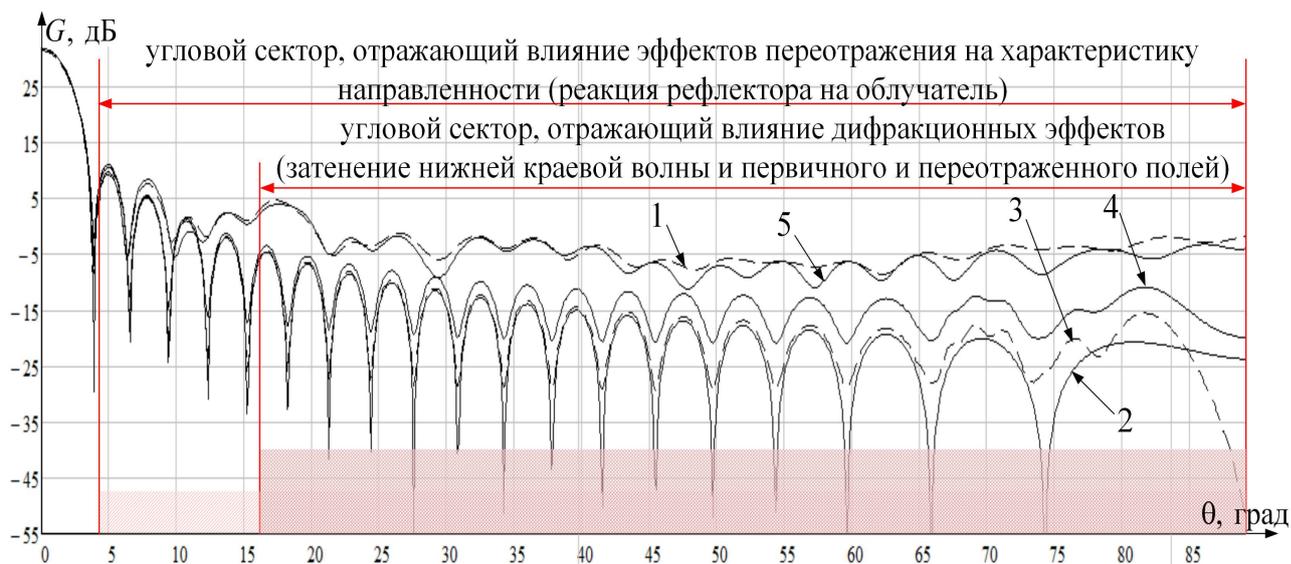


Рис. 4.2. Пример сравнения с 1 – эталонной ДН расчетов по методам:
 2 – апертурному; 3 – токовому; 4 – токовому с учетом ГТД;
 5 – модифицированному токовому

Полученный частный результат и исследования [20, 161, 176] определяют высокую степень точности и достоверности предложенной модификации токового метода особенно в области дальнего бокового излучения (см. рис. 4.2 для $\theta > 16^\circ$), порядок ошибки по мощности исчисляется единицами процентов: $0,017 \div 0,286$ в сравнении с известными аналитическими методами $0,036 \div 0,754$.

В целом, предложенная модификация токового метода позволяет учесть эффекты дифракции и переотражения. С учетом сформированных решений оценка эффектов переотражения хотя и производится асимптотически, но для подавляющего числа задач анализа ЭМП для однозеркальной однолучевой АС в худшем случае требует проведения 2-х процедур численного интегрирования по поверхности рефлектора и 2-х процедур численного интегрирования по раскрытию излучателя. Численное интегрирование предполагается проводить при разбиении области интегрирования на конечные элементы с последующим применением метода Гаусса–Кронрода [181] при интегрировании на треугольном элементе [183]. Реализация алгоритмов разбиения отражающей поверхности ЗА при построении триангуляции Делоне [182] и непосредственного интегрирования представлена в [71].

4.2. Барицентрический метод в решении сингулярных интегральных уравнений электродинамической теории адаптивных многолучевых зеркальных антенн

Разработанная модификация токового метода позволяет с требуемой точностью определить распределение мгновенных составляющих ЭМП в раскрыве Ω_m m -го излучателя в режиме приема в обобщенной постановке проблемы оптимального управления АМЛЗА (задает функцию $P_2^{(m)}$, см. пп. 1.4). Однако при решении ряда задач анализа многоэлементных АМЛЗА в условиях взаимного влияния облучающей и отражающей систем предложенные асимптотические решения (4.14), (4.25) даже при учете одного акта переотражения с последующим сшиванием ЭМП [72] по аналогии с теорией многополюсников [184] через матрицы взаимного влияния для прямого и переотраженного полей [20] приводят к росту вычислительных затрат. Потенциального снижения вычислительных затрат можно добиться за счет решения задач анализа многоэлементных АМЛЗА методом моментов [185], при использовании представлений из электродинамической теории зеркальных и полосковых антенн [3, 186]. Для увеличения эффективности метода моментов с учетом полученных во второй главе решений предполагается использовать векторные базисные функции вида (2.65), которые в сравнении с известными решениями при минимальном порядке аппроксимации обеспечивают требуемую адекватность решения.

С учетом вышеизложенного представим АМЛЗА системой, состоящей из M излучателей с раскрывами $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_M$ и M' рефлекторов с произвольной формой отражающих поверхностей $S_1, S_2, \dots, S_{M'}$ (рис. 4.4.3). В общей системе координат АМЛЗА $OXYZ$ положение раскрыва Ω_m m -го излучателя ($m = \overline{1, M}$) задано координатами $x_m^{(o)}, y_m^{(o)}, z_m^{(o)}$, а ориентация – орт-вектором нормали $\vec{s}_m^{(o)}$ плоскости Ω_m . Рефлектор в $OXYZ$ m' -й отражающей поверхности $S_{m'}$ ($m' = \overline{1, M'}$) характеризуется раскрывом $\Omega'_{m'}$ апертуры с центром в $x'_{m'}, y'_{m'}, z'_{m'}$ и функцией $Z_{m'}(x, y)$ формы, из которой по известным правилам [178] определяется орт вектора внешней нормали $\vec{n}_{m'}^0$. Раскрывы $\Omega'_{m'}$ и Ω_m задаются произвольными многоугольниками с соответствующим числом

$N'_{m'}$ и N_m вершин $P_1^{m'}, P_2^{m'}, \dots, P_{N'_{m'}}^{m'}$ и $P_1^m, P_2^m, \dots, P_{N_m}^m$. Относительно $\Omega'_{m'}$ и Ω_m в $OXYZ$ вводятся системы координат $O'_{m'}X'_{m'}Y'_{m'}Z'_{m'}$ и $O_mX_mY_mZ_m$ соответственно.

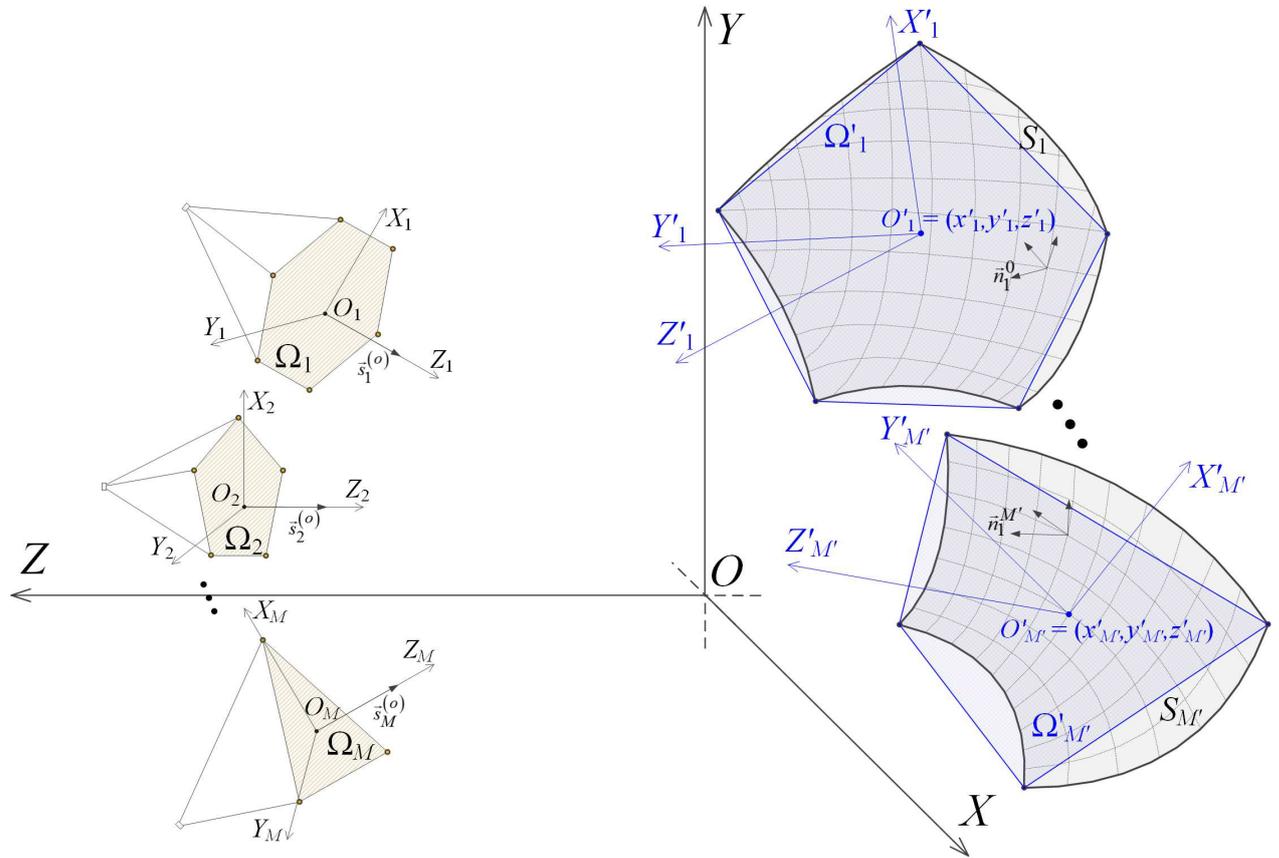


Рис. 4.3. Пример геометрического представления адаптивной многолучевой зеркальной антенны

По разработанным методам (см. пп. 2.1) [125] в плоскостях $O'_{m'}X'_{m'}Y'_{m'}$ и $O_mX_mY_m$ раскрытов $\Omega'_{m'}$ и Ω_m задаются соответствующие барицентрические системы координат $\xi_{n'}^{m'}$ и $\xi_{n_m}^m$, где $n'_{m'} = \overline{1, N'_{m'}}$ и $n_m = \overline{1, N_m}$.

Постановка задачи анализа АМЛЗА состоит в определении рассеянного монохроматического электромагнитного поля, удовлетворяющего однородным уравнениям Максвелла [24, 218]:

$$\begin{aligned} \text{для рефлектора: } \nabla \times \vec{H} &= -i\kappa\vec{E}; \quad \nabla \times \vec{E} = i\kappa\vec{H}; \\ \text{для излучателя: } \nabla \times \vec{H} &= -i\omega\epsilon_a\vec{E}; \quad \nabla \times \vec{E} = i\omega\mu_a\vec{H}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

С учетом известных из [26, 31, 79, 191, 218]: 1) граничных условий между рассеянным $\{\vec{E}, \vec{H}\}$ и наводимым $\{\vec{E}^{\text{ind}}, \vec{H}^{\text{ind}}\}$ полями на поверхностях

раздела (диэлектрика и идеального проводника: $\vec{E}_{\text{tan}}|_{S_{m'}} = -\vec{E}_{\text{tan}}^{\text{int}}|_{S_{m'}}$; двух диэлектриков: $[\vec{E}_{\text{tan}}^{\text{int}}]_{\Omega_m} = 0$; $[\vec{H}_{\text{tan}}]_{\Omega_m} = -[\vec{H}_{\text{tan}}^{\text{int}}]_{\Omega_m}$, где индекс tan обозначает тангенциальную составляющую поля; $[\cdot]$ обозначает разность предельных значений функции с внешней Ω_m^+ и внутренней Ω_m^- областей раскрыва излучателя [218]); 2) условиям на бесконечности [218]: $\vec{E}, \vec{H} = o(R^{-1})$, $R \rightarrow \infty$ при $\text{Im } \varkappa > 0$ для рефлектора и $\text{Im } \varepsilon_a > 0$ или $\text{Im } \mu_a > 0$ для излучателя; $\vec{H} \times \vec{e}_R - \vec{E} = o(R^{-1})$, $\vec{E} \times \vec{e}_R + \vec{H} = o(R^{-1})$, $\vec{E}, \vec{H} = \mathcal{O}(R^{-1})$, $R \rightarrow \infty$ для рефлектора при $\text{Im } \varkappa = 0$, $\varkappa \neq 0$ и $\vec{E} \times \vec{e}_R + (\mu_a/\varepsilon_a)^{-1} \vec{H} = o(R^{-1})$, $\vec{H} = \mathcal{O}(R^{-1})$, $R \rightarrow \infty$ для излучателя при $\text{Im } \varepsilon_a = 0$, $\text{Im } \mu_a = 0$, $\varepsilon_a \neq 0$, $\mu_a \neq 0$ ($R = |\vec{r}|$, $\vec{e}_R = \vec{r}/|\vec{r}|$); 3) условиям конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства [218] $\vec{E}, \vec{H} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$ («...рассеянное поле будет гладким всюду вне экрана и непрерывным вплоть до поверхности экрана с каждой стороны, исключая точки его границы» [276]) решение задач дифракции определим как квазиклассическое [218], сводящееся для рефлектора к интегральному уравнению на $S_{m'}$ относительно электрического поля (задача дифракции на ограниченном экране [218]):

$$4\pi i \varkappa \vec{E}_{\text{tan}}^{\text{ind}} = \nabla \iint_{S_{m'}} \Psi (\nabla \cdot \vec{J}_{m'}) dS + \iint_{S_{m'}} \varkappa^2 \vec{J}_{m'} \Psi dS, \quad (4.29)$$

для излучателя к интегральному уравнению на Ω_m относительно магнитного поля (задача дифракции на отверстии в плоском экране [218]):

$$-2\pi i \omega \vec{H}_{\text{tan}}^{\text{ind}} = \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\mu_a^j} \left(\nabla \iint_{\Omega_m} \Psi_j (\nabla \cdot \vec{J}_m^{\text{M}}) dS + \iint_{\Omega_m} \varkappa_j^2 \vec{J}_m^{\text{M}} \Psi_j dS \right), \quad (4.30)$$

где $\vec{J}_{m'}$, \vec{J}_m^{M} – плотности электрического и магнитного токов на соответствующей поверхности $S_{m'}, \Omega_m$; $\Psi(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-i\varkappa R}}{R}$ – функция Грина ($R = |\vec{r} - \vec{r}'|$; \vec{r} и \vec{r}' – радиус-векторы точек наблюдения и источника соответственно); $\Psi_j = \frac{e^{-i\varkappa_j R}}{R}$ ($j = \{1, 2\}$); $\varkappa = \varkappa_1$, $\varepsilon_a = \varepsilon_a^1$, $\mu_a = \mu_a^1$ в Ω_m^+ ; $\varkappa = \varkappa_2$, $\varepsilon_a = \varepsilon_a^2$, $\mu_a = \mu_a^2$ в Ω_m^- .

Принимая во внимание принцип симметризации [24, 177] системы уравнений Максвелла и волновых уравнений ЭМП и в соответствии с [218] для выражения (4.29) запишем интегральное уравнение на $S_{m'}$ относительно магнитного поля:

$$4\pi i \varkappa \vec{H}_{\text{tan}}^{\text{ind}} = \nabla \iint_{S_{m'}} \Psi \left(\nabla \cdot \vec{J}_{m'}^{\text{M}} \right) dS + \iint_{S_{m'}} \varkappa^2 \vec{J}_{m'}^{\text{M}} \Psi dS. \quad (4.31)$$

Объединяя соотношения (4.30), (4.31) для $S_{m'}$ и Ω_m в единое при определении $\vec{H}_{\text{tan}}^{\text{ind}}$ из \vec{H}^{ind} через орт вектора нормали к соответствующей поверхности с учетом содержательной постановки получим систему из $M' + M$ сингулярных интегральных уравнений магнитного поля (ИУМП), решение которой формализует задачу анализа АМЛЗА в частотной области,:

$$\begin{aligned} \vec{n}_{m'}^0 \times \sum_{k=1}^M \vec{H}_{km'}^{\text{ind}} &= \sum_{k=1}^{M'} \frac{1}{4\pi i \varkappa} \left[\nabla \iint_{S_k} \Psi \left(\nabla \cdot \vec{J}_k^{\text{M}} \right) dS + \iint_{S_k} \varkappa^2 \vec{J}_k^{\text{M}} \Psi dS \right] - \\ &- \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i \omega \mu_a^j} \left[\nabla \iint_{\Omega_k} \Psi_j \left(\nabla \cdot \vec{J}_k^{\text{M}} \right) d\Omega + \iint_{\Omega_k} \varkappa_j^2 \vec{J}_k^{\text{M}} \Psi_j d\Omega \right]; \\ \vec{s}_m^{(o)} \times \sum_{k=1}^M \vec{H}_{km}^{\text{ind}} &= \sum_{k=1}^{M'} \frac{1}{4\pi i \varkappa} \left[\nabla \iint_{S_k} \Psi \left(\nabla \cdot \vec{J}_k^{\text{M}} \right) dS + \iint_{S_k} \varkappa^2 \vec{J}_k^{\text{M}} \Psi dS \right] - \\ &- \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i \omega \mu_a^j} \left[\nabla \iint_{\Omega_k} \Psi_j \left(\nabla \cdot \vec{J}_k^{\text{M}} \right) d\Omega + \iint_{\Omega_k} \varkappa_j^2 \vec{J}_k^{\text{M}} \Psi_j d\Omega \right], \end{aligned} \quad (4.32)$$

где $\vec{H}_{km'}^{\text{ind}} - \vec{H}^{\text{ind}}$ (k -й излучатель, где $k = \overline{1, M'}$), наведенное на $S_{m'}$; $\vec{H}_{km}^{\text{ind}} - \vec{H}^{\text{ind}}$, наведенное на Ω_m .

Решение задачи (4.32) выполняется численно по аналогии с [190–195] при сведении в приближении вариационных методов В. Ритца, И.Г. Бубнова и Б.Г. Галёркина системы сингулярных интегральных уравнений (СИУ) к системе линейных уравнений. При этом аппроксимацию \vec{J}_k и \vec{J}_k^{M} для соответствующей k -й

поверхности \mathcal{S}_k (или S_k , или Ω_k) предполагается формировать в N_k -мерной барицентрической системе координат $\zeta_1^k, \zeta_2^k, \dots, \zeta_{N_k}^k$ следующим образом.

Теорема 21. *Функции $\vec{J}_k(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \tilde{J}_{kj} \vec{\gamma}_j^{(k)}(P)$ и $\vec{J}_k^M(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \tilde{J}_{kj}^M \times \vec{\chi}_j^{(k)}(P)$, задающие аппроксимацию порядка p ($p \in \mathbb{N}$) плотности поверхностных электрического \vec{J}_k и магнитного \vec{J}_k^M токов в интегральных уравнениях вида (4.32) при*

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_j^{(k)}(P) &= \vec{n}_k^0(P) \times \sum_{\substack{n=1 \\ jn > 0}}^{N_k} \left[\hat{\alpha}_{jn}^{(k)}(P) \vec{\Theta}_n^{(k)}(P) \right]; \\ \vec{\chi}_j^{(k)}(P) &= \vec{n}_k^0(P) \times \vec{\gamma}_j^{(k)}(P), \end{aligned} \quad (4.33)$$

являются аппроксимацией Рунца.

В заданных аппроксимациях \tilde{J}_{kj} и \tilde{J}_{kj}^M – коэффициенты в j -х узловых точках электрического \vec{J}_k и магнитного \vec{J}_k^M поверхностных токов на \mathcal{S}_k .

В выражении (4.33) $\vec{n}_k^0(P)$ – орт-вектор нормали в $P \in \mathcal{S}_k$; $\hat{\alpha}_{jn}^{(k)}$ – вспомогательный интерполяционный сдвинутый полином Сильвестра–Лагранжа (2.66) относительно n -й вершины многоугольника, задающего раскрыв \mathcal{S}_k ; $\vec{\Theta}_n^{(k)}(P)$ – краевые базисные векторные функции Неделека (2.67).

Доказательство. Из доказательства теоремы 7 известно, что функции $\vec{\beta}_j^{(k)}(P) = \sum_{\substack{n=1 \\ jn > 0}}^{N_k} \left[\hat{\alpha}_{jn}^{(k)}(P) \vec{\Theta}_n^{(k)}(P) \right]$ с учетом свойств гармонических БК ζ_n^k [118] ($n = \overline{1, N}$), интерполяционных форм $\alpha_{jn}^{(k)}(P)$ и $\hat{\alpha}_{jn}^{(k)}(P)$ являются расширением краевых базисных функций $\vec{\Theta}_n^{(k)}(P)$ и для n -го ребра $e_n^k = (P_n^k, P_{n+1}^k)$ раскрыва \mathcal{S}_k удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \frac{P_{n+1}^k - P_n^k}{|P_{n+1}^k - P_n^k|} \cdot \sum_{\substack{j \in \mathbb{M}_p \\ jn \neq 0}} \vec{\beta}_j^{(k)}(P) &= 1; \quad \nabla \cdot \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \frac{\vec{\beta}_j^{(k)}(P)}{G_j^k} = 0; \\ \nabla \times \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \frac{\vec{\beta}_j^{(k)}(P)}{G_j^k} &= \sum_{n=1}^{N_k} \left(\nabla_{\zeta_n^k}(P) \right) \times \left(\nabla_{\zeta_{n+1}^k}(P) \right) = \text{const}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

определяющих, что $\vec{\beta}_j^{(k)}(P)$ дивергентно-свободные и имеют постоянную тангенциальную компоненту на e_n^k , что обеспечивает отсутствие ложных решений [31] дифференциальных волновых уравнений вида (4.28).

В (4.34) приняты обозначения:

$$\vec{\beta}_j^{(k)}(P) = \sum_{\substack{n=1 \\ jn>0}}^{N_k} \hat{\alpha}_{jn}^{(k)}(P) \frac{\vec{\Theta}_n^{(k)}(P)}{|P_{n+1}^k - P_n^k|}; \quad G_j = \begin{cases} 1, & \text{if } \sum_{n=1}^{N_k} \frac{jn}{p} P_n^k \in \Gamma_k; \\ N_k, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (4.35)$$

где Γ_k – кусочно-линейная граница раскрыва \mathcal{S}_k .

Из (4.34) следует, что векторная базисная функция $\vec{\gamma}_j^{(k)}(P) = \vec{n}_k^0(P) \times \vec{\beta}_j^{(k)}(P)$ на ребре e_n^k при $|\vec{n}_k^0(P)| = 1$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \frac{P_{n+1}^k - P_n^k}{|P_{n+1}^k - P_n^k|} \cdot \sum_{\substack{j \in \mathbb{M}_p \\ jn \neq 0}} \vec{\gamma}_j^{(k)}(P) &= 1; \quad \nabla \times \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \frac{\vec{\gamma}_j^{(k)}(P)}{G_j^k} = 0; \\ \nabla \cdot \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \frac{\vec{\gamma}_j^{(k)}(P)}{G_j} &= \text{const,} \end{aligned} \quad (4.36)$$

где

$$\vec{\gamma}_j^{(k)}(P) = \sum_{\substack{n=1 \\ jn>0}}^{N_k} \hat{\alpha}_{jn}^k(P) \frac{\vec{n}_k^0(P) \times \vec{\Theta}_n^{(k)}(P)}{|P_{n+1}^k - P_n^k|}. \quad (4.37)$$

Свойства (4.36) определяют то, что при аппроксимации $\vec{J}_k(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \left[\tilde{J}_{kj} \times \vec{\gamma}_j^{(k)}(P) \right]$ на Γ_k нормальная составляющая плотности тока равна нулю, а функция $\vec{\gamma}_j^{(k)}(P)$ дивергентно-постоянная, что удовлетворяет уравнению непрерывности [177]. В целом из (4.36) следует, что $\vec{J}_k(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \tilde{J}_{kj} \vec{\gamma}_j^{(k)}(P)$ является для (4.32) аппроксимацией Ритца \vec{J}_k на \mathcal{S}_k и удовлетворяет уравнениям Максвелла [26], условию не протекания тока на Γ_k и условию сохранения полного тока в цепи. Из выделенных свойств векторной базисной функции $\vec{\gamma}_j^{(k)}(P)$,

аппроксимации $\vec{J}_k(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \tilde{J}_{kj} \vec{\gamma}_j^{(k)}(P)$, уравнений Максвелла [26], формализующих зависимость между векторами напряженностей электрического \vec{E}_k и магнитного \vec{H}_k полей, и определением \vec{J}_k и \vec{J}_k^M токов через векторное произведение \vec{H}_k и \vec{E}_k на \vec{n}_k^0 соответственно следует, что $\vec{J}_k^M(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \tilde{J}_{kj}^M \vec{\chi}_j^{(k)}(P)$ является для (4.32) аппроксимацией Ритца \vec{J}_k^M на k -й поверхности. \square

Аппроксимации $\vec{J}_k^M(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \tilde{J}_{kj}^M \vec{\chi}_j^{(k)}(P)$ позволяют свести исходную систему сингулярных ИУМП (4.32) к системе линейных уравнений вида:

$$\mathbf{B}^M \vec{J}^M = \vec{C}^M, \quad (4.38)$$

где \vec{J}^M и \vec{C}^M – блочные векторы, а \mathbf{B}^M – блочная матрица, включающие следующие компоненты:

$$\begin{aligned} \vec{J}^M &= \left(\begin{bmatrix} \vec{J}_1^{S_M} & \dots & \vec{J}_{M'}^{S_M} \\ \vec{J}_1^{\Omega_M} & \dots & \vec{J}_M^{\Omega_M} \end{bmatrix} \right)^T; \\ \vec{C}^M &= \left(\begin{bmatrix} \vec{C}_1^{S_M} & \dots & \vec{C}_{M'}^{S_M} \\ \vec{C}_1^{\Omega_M} & \dots & \vec{C}_M^{\Omega_M} \end{bmatrix} \right)^T; \\ \mathbf{B}^M &= \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^{S_M} & \dots & \mathbf{B}_{1M'}^{S_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{M'1}^{S_M} & \dots & \mathbf{B}_{M'M'}^{S_M} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^{\Omega_M} & \dots & \mathbf{B}_{1M}^{\Omega_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{M'1}^{\Omega_M} & \dots & \mathbf{B}_{M'M}^{\Omega_M} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{11}^{S_M} & \dots & \tilde{\mathbf{B}}_{1M'}^{S_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{B}}_{M1}^{S_M} & \dots & \tilde{\mathbf{B}}_{MM'}^{S_M} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{11}^{\Omega_M} & \dots & \tilde{\mathbf{B}}_{1M}^{\Omega_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{B}}_{M1}^{\Omega_M} & \dots & \tilde{\mathbf{B}}_{MM}^{\Omega_M} \end{bmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Блочная матрица \mathbf{B}^M включает подматрицы $\mathbf{B}_{m'_1 m'_2}^{S_M} = \left(b_{j_1 j_2}^{S_M, m'_1, m'_2} \right)_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}$; $\mathbf{B}_{m' m}^{\Omega_M} = \left(b_{j_1 j_2}^{\Omega_M, m', m} \right)_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}$; $\tilde{\mathbf{B}}_{m m'}^{S_M} = \left(\tilde{b}_{j_1 j_2}^{S_M, m, m'} \right)_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}$; $\tilde{\mathbf{B}}_{m_1 m_2}^{\Omega_M} = \left(\tilde{b}_{j_1 j_2}^{\Omega_M, m_1, m_2} \right)_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}$, где $m', m'_1, m'_2 \in$

$$\in \{1, M'\}; m, m_1, m_2 \in \{1, M\};$$

$$b_{j_1 j_2}^{S_M, m'_1, m'_2} = \frac{1}{4\pi i \varkappa} \iint_{S_{m'_1} S_{m'_2}} \left(\vec{\chi}_{j_1}^{\langle m'_1 \rangle} \vec{\chi}_{j_2}^{\langle m'_2 \rangle} \Psi + \right. \\ \left. + \varkappa^2 \left[\nabla \Psi \vec{\chi}_{j_1}^{\langle m'_1 \rangle} \right] \left[\nabla \cdot \vec{\chi}_{j_2}^{\langle m'_2 \rangle} \right] \right) dS_2 dS_1; \quad (4.39)$$

$$b_{j_1 j_2}^{\Omega_M, m', m} = - \iint_{S_{m'} \Omega_m} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i \mu_a^j} \left(\vec{\chi}_{j_1}^{\langle m' \rangle} \vec{\chi}_{j_2}^{\langle m \rangle} \Psi_j + \right. \\ \left. + \varkappa_j^2 \left[\nabla \Psi_j \vec{\chi}_{j_1}^{\langle m' \rangle} \right] \left[\nabla \cdot \vec{\chi}_{j_2}^{\langle m \rangle} \right] \right) d\Omega dS; \quad (4.40)$$

$$\tilde{b}_{j_1, j_2}^{S_M, m, m'} = \frac{1}{4\pi i \varkappa} \iint_{\Omega_m S_{m'}} \left(\vec{\chi}_{j_1}^{\langle m \rangle} \vec{\chi}_{j_2}^{\langle m' \rangle} \Psi + \varkappa^2 \left[\nabla \Psi \vec{\chi}_{j_1}^{\langle m \rangle} \right] \left[\nabla \cdot \vec{\chi}_{j_2}^{\langle m' \rangle} \right] \right) dS d\Omega; \quad (4.41)$$

$$\tilde{b}_{j_1 j_2}^{\Omega_M, m_1, m_2} = - \iint_{\Omega_{m_1} \Omega_{m_2}} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i \mu_a^j} \left(\vec{\chi}_{j_1}^{\langle m_1 \rangle} \vec{\chi}_{j_2}^{\langle m_2 \rangle} \Psi_j + \right. \\ \left. + \varkappa_j^2 \left[\nabla \Psi_j \vec{\chi}_{j_1}^{\langle m_1 \rangle} \right] \left[\nabla \cdot \vec{\chi}_{j_2}^{\langle m_2 \rangle} \right] \right) d\Omega_2 d\Omega_1; \quad (4.42)$$

Блочный вектор \vec{J}^M состоит из подвекторов: $\vec{J}_{m'}^{S_M} = \left(\tilde{J}_{m'j}^{S_M} \right)_{|\mathbb{M}_p|}$ в $\vec{J}_{m'}^M(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \tilde{J}_{m'j}^{S_M} \vec{\chi}_j^{m'}(P)$ при $P \in S_{m'}$; $\vec{J}_m^{\Omega_M} = \left(\tilde{J}_{mj}^{\Omega_M} \right)_{|\mathbb{M}_p|}$ в $\vec{J}_m^M(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \tilde{J}_{mj}^{\Omega_M} \vec{\chi}_j^m(P)$ при $P \in \Omega_m$.

Блочный вектор \vec{C}^M включает подвекторы $C_{m'}^{S_M} = \left(c_{m'j}^{S_M} \right)_{|\mathbb{M}_p|}$; $C_m^{\Omega_M} = \left(c_{mj}^{\Omega_M} \right)_{|\mathbb{M}_p|}$, где

$$c_{m'j}^{S_M} = \iint_{S_{m'}} \vec{\chi}_j^{\langle m' \rangle} \sum_{k=1}^M \vec{n}_{m'}^0 \times \vec{H}_{km'}^{\text{ind}} dS; \quad c_{mj}^{\Omega_M} = \iint_{\Omega_m} \vec{\chi}_j^{\langle m \rangle} \sum_{k=1}^M \vec{s}_m^{(o)} \times \vec{H}_{km}^{\text{ind}} d\Omega. \quad (4.43)$$

Применение процедур численного интегрирования [71] по $S_{m'}$ и Ω_m при вычислении элементов (4.39)–(4.43) позволяет определить искомый вектор коэффициентов $\vec{J}^M = (\mathbf{B}^M)^{-1} \vec{C}^M$ из (4.38), учитывая эффекты дифракции и переотражения. Следует отметить, что для корректного расчета элементов матрицы \mathbf{B}^M в виду сингулярности ядра $\Psi(\vec{r}, \vec{r}')$ для случаев $\vec{r} \rightarrow \vec{r}'$ используется асимптотика функции Грина [187] $\Psi(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} (R^{-1} - i\chi + \mathcal{O}(R))$ и [3] $\Psi(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} (R^{-1} - i\chi - 0,5\chi^2 R + \mathcal{O}(R))$ при представлении интегралов (4.39)–(4.43) в виде суммы от регулярной и сингулярной частей с последующим вычислением последней части с учетом метода дискретных вихрей [190, 192]. Дальнейшая процедура расчета характеристик излучения АМЛЗА по ММ является стандартной [27, 188]: 1) по определенным \vec{J}_k^M на \mathcal{S}_k вычисляется ЭМП АС на некоторой сфере, окружающей анализируемую АМЛЗА в дальней зоне; 2) для распределения напряженности электрического поля $\vec{E}_{\text{сф}}$ на сфере строится характеристика направленности АМЛЗА.

Отметим, что постановка задачи анализа АМЛЗА может быть сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений электрического поля (ИУЭП) при задании для выражения (4.31) интегрального уравнения на Ω_m относительно $\vec{E}_{\text{tan}}^{\text{ind}}$ с последующим расчетом элементов блочных матрицы \mathbf{B} и вектора \vec{C} по векторным базисным функциям $\vec{\gamma}_j^{(k)}$ при аппроксимации $\vec{J}_k(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \tilde{J}_{kj} \vec{\gamma}_j^{(k)}(P)$. Алгоритм расчета плотности тока на поверхности рефлектора АМЛЗА представлен в приложении А.

Для определенного в приближении БМ численного решения (4.38) задачи анализа АМЛЗА (4.32) в Matlab проведено математическое моделирование. При этом с целью сравнительной оценки предпочтительности применения предложенной аппроксимации функциями (4.33) аналогичное решение задачи анализа ЗА также выполнено разбиением проводящей поверхности при формировании векторных базисных функций вида [195]. Параметры моделирования выбраны следующими: $\lambda = 0,05$ м; $M' = 1$; Ω'_1 – прямоугольник с высотой 14λ и шириной 30λ ; $Z_1(x, y) = 0,25(x^2 + y^2)/f$ при $f = 16\lambda$; системы координат $OXYZ$ и $O'_1X'_1Y'_1Z'_1$ совпадают; $M = 3$; Ω_1, Ω_2 и Ω_3 – правильный треугольник, квадрат

и круг соответственно, радиус вписанной окружности для которых равен λ ; $\vec{s}_1^{(o)} = \vec{s}_2^{(o)} = \vec{s}_3^{(o)} = (0 \ 0 \ -1)^T$; $x_1^{(o)} = x_2^{(o)} = x_3^{(o)} = 0$, $y_1^{(o)} = -1,5\lambda$, $y_2^{(o)} = 0$, $y_3^{(o)} = 1,5\lambda$, $z_1^{(o)} = z_2^{(o)} = z_3^{(o)} = f$. На рисунке 4.4 представлены геометрия антенной системы и диаграмма направленности в H -плоскости ($\xi = 90^\circ$) анализируемой АМЛЗА.

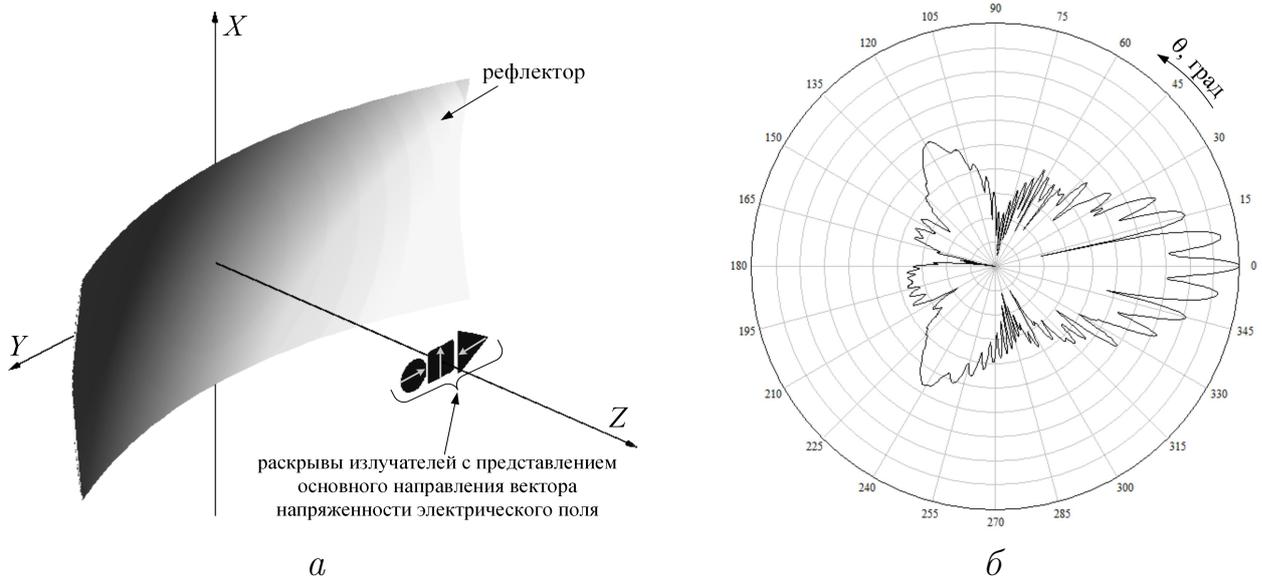


Рис. 4.4. Геометрия анализируемой АМЛЗА (а) и реализуемая диаграмма направленности (б)

На рисунке 4.5 представлена зависимость среднеквадратического отклонения $\Delta = \sqrt{\iint_{\Omega'_1} |\vec{J}(x, y) - \vec{J}_p(x, y)|^2 dx dy}$ между реальным распределением плотности электрического тока $\vec{J}_p(x, y)$ на поверхности рефлектора и его рассчитываемым значением $\vec{J}(x, y)$ для различного порядка аппроксимации p при сравнении разработанного решения в приближении БМ с известным [195]. Распределение $\vec{J}_p(x, y)$ (рис. 4.6, а) для заданной модели АМЛЗА рассчитано на вычислительном сервере (Intel(R) Xeon(R) E5-2640V4 Broadwell-EP, DIMM DDR4 64 Гб) с применением САПР Ansoft HHSS для следующих установок решений (driven solution setupe): максимальное число итераций адаптивного расчета (maximum number of passes) равно 50; максимальное изменение матриц рассеивания между двумя последовательными итерациями адаптивного вычисления (maximum delta S) равно 10^{-8} ; отношение длины волны к ребру треугольника, разбивающего область анализа (lambda target) равно 0,05.

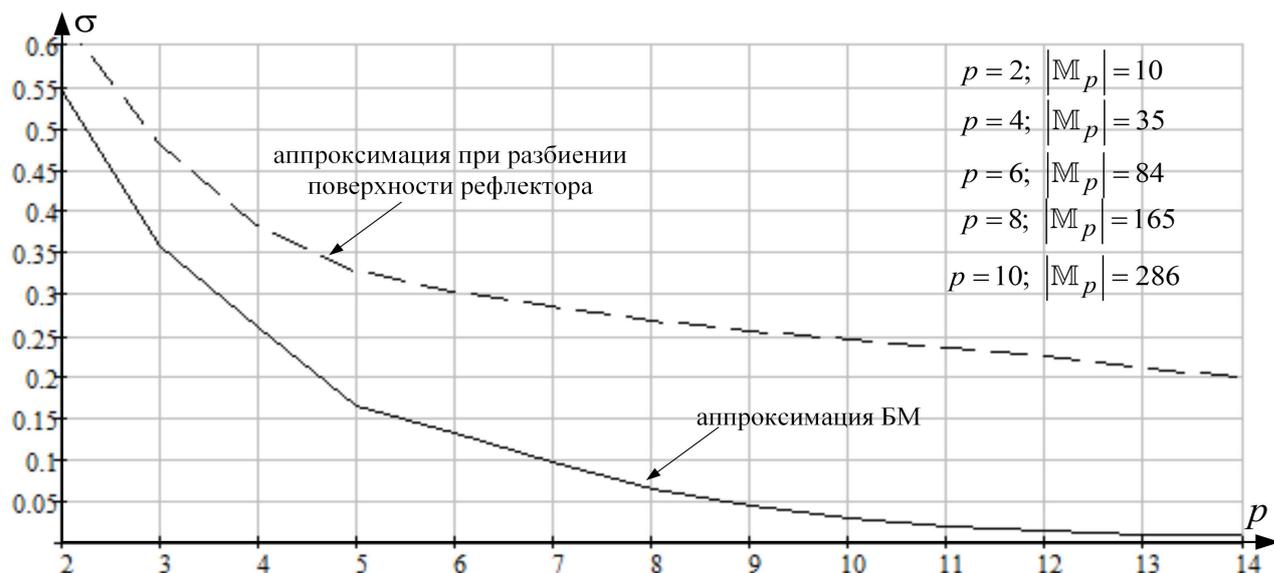


Рис. 4.5. Зависимость отклонения Δ рассчитываемого распределения плотности поверхностного тока от реального от порядка аппроксимации p

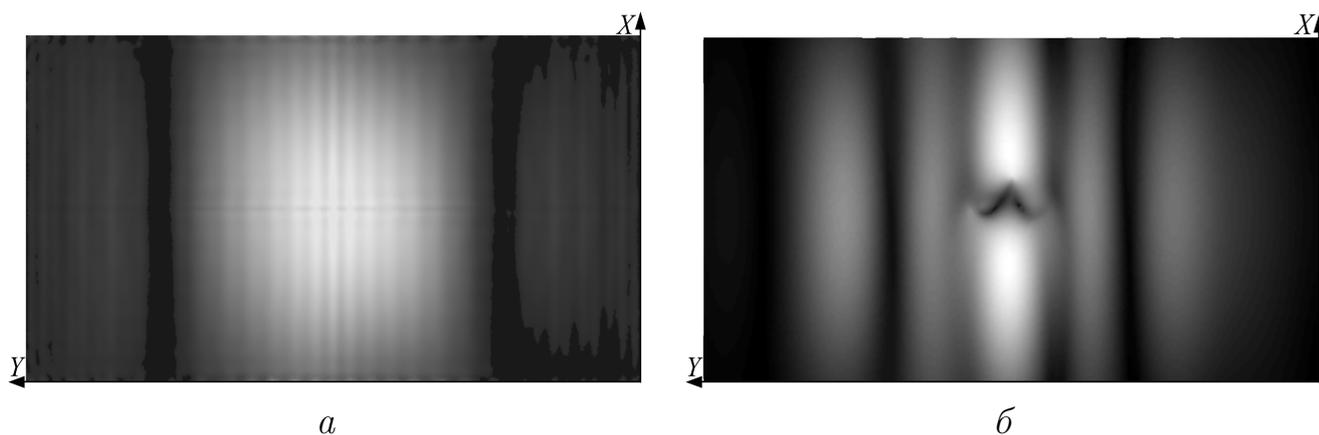


Рис. 4.6. Распределение $\vec{J}_p(x, y)$ (а) и рассчитанное $\vec{J}(x, y)$ (б) в приближении Гюйгенса–Кирхгофа на поверхности рефлектора анализируемой АМЛЗА

Для визуального сравнения результатов на рисунках 4.7 представлены распределения $\vec{J}(x, y)$ на поверхности рефлектора, рассчитанные с применением аппроксимаций по методу [195] и БМ для $p = 9$ ($|M_p| = 220$), а также с использованием приближения Гюйгенса–Кирхгофа (см. рис. 4.6, б).

Полученные результаты моделирования (рис. 4.5–4.7) определяют предпочтительность использования БМ при численном решении в приближении вариационных методов Галёркина и Ритца систем СИУ вида (4.32) при анализе антенных систем зеркального типа. Точность БМ в сравнении с существующими

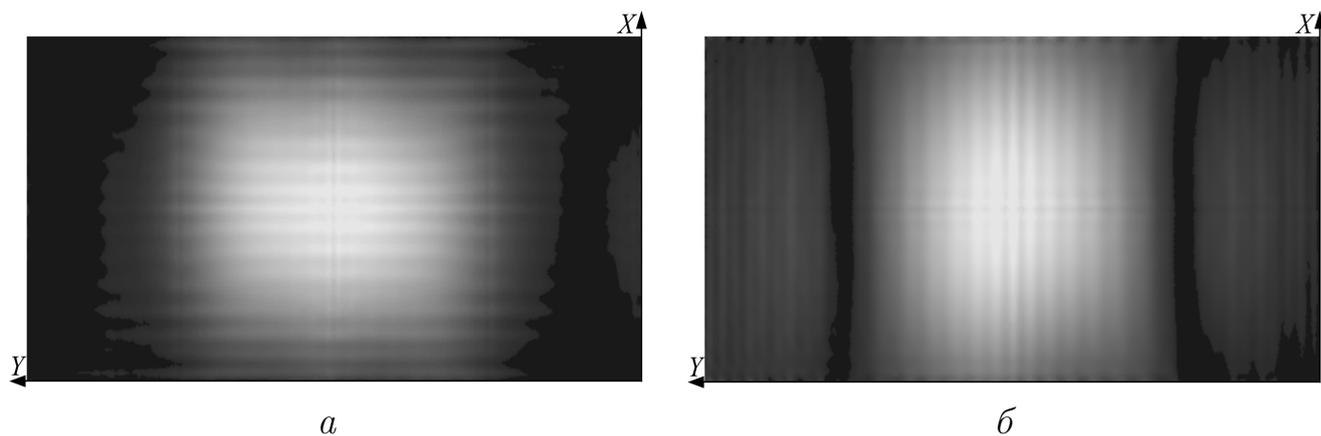


Рис. 4.7. Распределение $\vec{J}(x, y)$, рассчитанное на поверхности рефлектора анализируемой АМЛЗА с применением аппроксимаций по методу [195] (а) и в приближении БМ (б) для $p = 9$

щими методами существенно увеличивается при росте порядка аппроксимации p (рис. 4.5, 4.7) при условии соизмеримости вычислительных затрат. Более низкая точность метода [195] для выполненного решения (рис. 4.5) обусловлена тем, что разбиение раскрыва рефлектора малым числом элементарных подобластей приводит к значительным погрешностям на смежных границах между отдельными подобластями. Увеличение точности, сопоставимой с БМ, по методу [195] требует разбиения Ω'_1 на как можно большее число конечных элементов. Однако это при решении общей задачи (4.32) неизменно приводит к существенному росту вычислительных затрат в сравнении с разработанным решением в приближении БМ. Результаты (рис. 4.6, б) расчета $\vec{J}(x, y)$ в приближении Гюйгенса–Кирхгофа на наглядном примере показывают значительное отклонение от реального распределения тока, связанное с неспособностью учитывать классическим токовым методов математической теории ЗА [41, 44, 70] эффектов дифракции и самое главное – эффектов переотражения. Последние оказывают существенное влияние на реальное распределение тока на поверхности рефлектора с ростом числа облучателей. Для сравнительной визуальной оценки уменьшения отклонения распределения плотности поверхностного тока, рассчитанного при решении СИУ теории рассеивания и в приближении Гюйгенса–Кирхгофа, на рисунке 4.8 представлено распределение $\vec{J}(x, y)$ на

рефлекторе заданной модели АМЛЗА, включающей один облучатель с треугольным раскрывом.

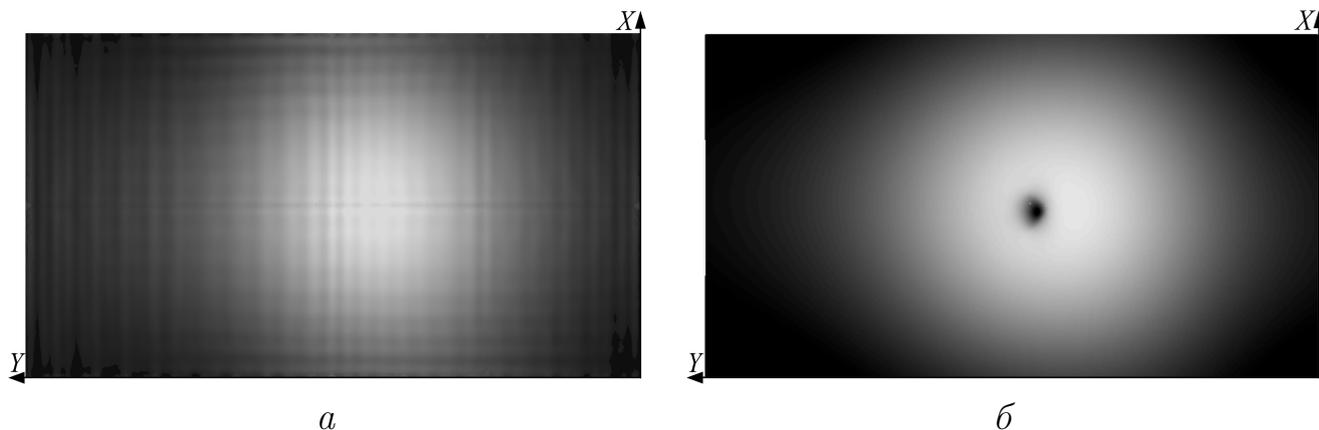


Рис. 4.8. Распределение $\vec{J}(x, y)$, рассчитанное на поверхности рефлектора АМЛЗА с одним треугольным облучателем численным решением СИУ (а) и в приближении Гюйгенса–Кирхгофа (б)

В целом заданные соотношения позволяют формировать эффективные алгоритмы численного решения задач, связанных с проектированием, оптимизацией и управлением АМЛЗА с произвольным числом излучающих и отражающих элементов. Порядок аппроксимаций базисными векторными функциями $\vec{\gamma}_j^{(k)}$ и $\vec{\chi}_j^{(k)}$ для поверхностей \mathcal{S}_k предлагается задавать различным p_k в зависимости от отношения длины волны λ к площади раскрыва апертуры \mathcal{S}_k при определении числа узловых точек аппроксимации, характеризуемого мощностью множества $|\mathbb{M}_{p_k}|$ мультииндексов (2.43). Предпочтительность применения барицентрического метода при решении систем СИУ вида (4.32) заключается в удобном задании аппроксимации Ритца плотности поверхностных электрического и магнитного токов для всей области анализа в целом при учете граничных условий, уравнений Максвелла и уравнения непрерывности.

4.3. Барицентрический метод в задаче управления формой отражающей поверхности адаптивной многолучевой зеркальной антенны

Разработанные методы решения задач электродинамики I и II типов в формируемой математической теории с учетом формализованной физико-мате-

матической моделью управления АМЛЗА определяют необходимость параметризации деформируемой отражающей поверхности при оптимальном управлении ее формой.

Известные решения, связанные с оптимальным управлением формой отражателя, реализованы в устройствах адаптивной оптики для различных областей применения (астрономия, медицина, оптическая связь, лазерные технологии обработки материалов и др.) [2, 5, 6]. Конструкция деформируемого рефлектора задается конечномерной системой приводов, воздействующих на упругую поверхность отражателя, геометрическая форма которого подлежит управлению [7].

С учетом геометрических размеров отражателей ЗА (исчисляются метрами) в качестве исходных логично использовать технические решения применяемые в радиотелескопах [5]. По результатам исследований, проведенных в [196–198], сделан вывод о том, что в подобных устройствах мембранное зеркало является предпочтительным при реализации деформируемого отражателя. Задача управления формой мембранного рефлектора при динамической оценке напряженно-деформируемого состояния сводится к краевой задаче механики деформируемого твердого тела. Показатель качества управления задается среднеквадратическим отклонением (СКО) фактической формы мембранного рефлектора от желаемой [5]. Минимум СКО для отражателя с произвольным раскрытием достигается за счет выбора наиболее эффективного метода решения формируемой краевой задачи при дополнительном определении числа управляющих воздействий и их расположении на управляемой поверхности. В практике решений подобных краевых задач широкое распространение получили разновидности вариационных методов численного расчета, основой для формирования которых служат положения, полученные В. Ритцем, И.Г. Бубновым и Б.Г. Галёркиным. В такой постановке с учетом выделенных положительных свойств БМ решение задачи оптимального управления формой отражающей поверхности АМЛЗА выполним в приближении разработанного БМ.

Раскрыв рефлектора определим односвязной областью Ω' с кусочно-линейной границей – многоугольником, ограниченным замкнутой ломаной Γ' . Многоугольник Ω' зададим последовательностью из N' неповторяющихся точек $P'_1, P'_2, \dots, P'_{N'}$, расположенных на плоскости OXY (рис. 4.9) и ребер $e'_1, e'_2, \dots, e'_{N'}$, где $e'_{n'} = \{P'_{n'}, P'_{n'+1}\} \in \Gamma'$ при $n' = \overline{1, N'}$.

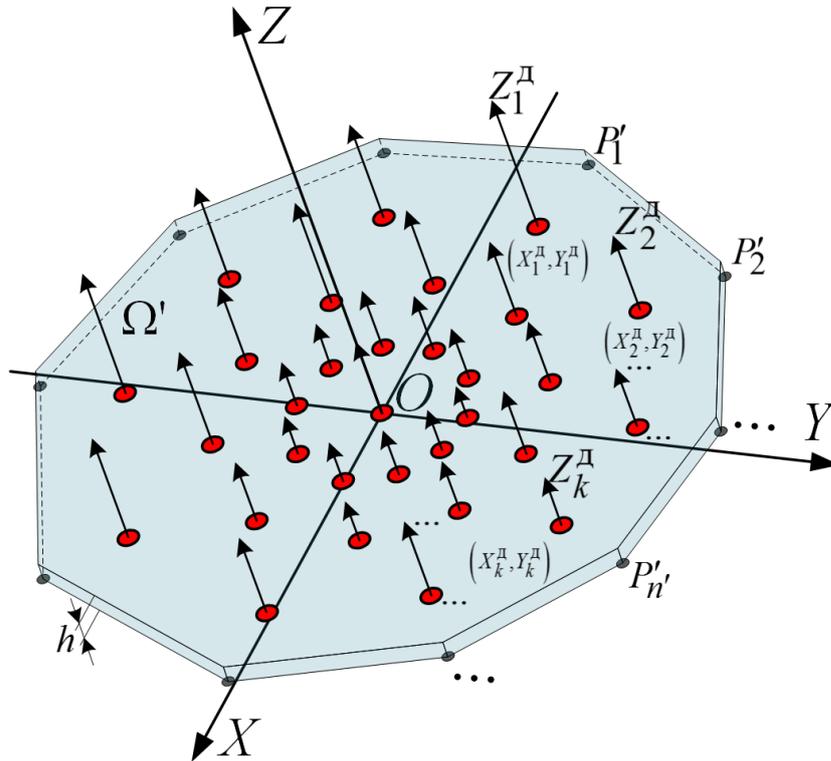


Рис. 4.9. Пример схемы деформируемого рефлектора

Пусть прогиб рефлектора описывается функцией $Z(x, y, t)$, а деформация задается с учетом теории изгиба пластин при помощи конечного числа управляющих воздействий K деформирующих стержней

$$g(x, y, t) = \sum_{k=1}^K Z_k^D(t) \delta(x - X_k^D) \delta(y - Y_k^D), \quad (4.44)$$

где $Z_k^D(t)$ – положение k -го деформирующего стержня относительно оси OZ в момент времени t ; $\delta(\cdot)$ – дельта-функция; $(X_k^D, Y_k^D) \in \Omega'$ – координаты k -го деформирующего стержня.

Тогда при вариации $Z_k^{\text{II}}(t)$ для ускоренного движения и вязкого трения форму рефлектора определим из решения бигармонического уравнения [199]

$$D_g \nabla^4 Z(x, y, t) + \lambda_d \frac{\partial Z(x, y, t)}{\partial t} + \varrho h \frac{\partial^2 Z(x, y, t)}{\partial t^2} = g(x, y, t), \quad (4.45)$$

с учетом заземленных краев мембранного рефлектора $Z|_{(x,y) \in \Gamma'} = 0$; $\partial Z / \partial x|_{(x,y) \in \Gamma'} = 0$; $\partial Z / \partial y|_{(x,y) \in \Gamma'} = 0$.

В выражении (4.45) $D_g = E_{\nu} h^3 / [12(1 - \nu_0^2)]$ – цилиндрическая жесткость; h – высота мембранного рефлектора; E_{ν} – модуль Юнга; ν_0 – коэффициент Пуассона; ϱ – плотность материала; λ_d – коэффициент вязкости; $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ – бигармонический оператор.

Решение задачи (4.45) предполагается выполнять численно в приближении метода Галёркина. При этом аппроксимация Ритца функции прогиба $Z(x, y, t) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} Z_j^0(t) \alpha_j(x, y)$ задается с учетом БМ (см. главу 2) при формировании аппроксимирующего полинома в N' -мерной барицентрической системе координат $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_{N'}$ для Ω' . В заданной аппроксимации $Z_j^0(t)$ – величина прогиба в j -х узловых точках в момент времени t ; j – мультииндекс из множества \mathbb{M}_p (2.43); $\alpha_j(x, y)$ – аппроксимирующий полином (2.42).

Для заданной аппроксимации $Z(x, y, t) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} Z_j^0(t) \alpha_j(x, y)$ в БМ сведем (4.45) с учетом (4.44) к решению системы дифференциальных уравнений (ДУ), представленной в матричном виде [201]:

$$\mathbf{M} \ddot{\vec{Z}}^0(t) + \mathbf{B} \dot{\vec{Z}}^0(t) + \mathbf{K} \vec{Z}^0(t) - \mathbf{A} \vec{Z}^{\text{II}}(t) = 0, \quad (4.46)$$

где $\mathbf{M} = (\tilde{M}_{jj'})_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}$ – матрица масс $\tilde{M}_{jj'} = \varrho h \iint_{\Omega'} \alpha_j(x, y) \alpha_{j'}(x, y) dx dy$;

$\mathbf{B} = (\tilde{B}_{jj'})_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}$ – матрица вязкости $\tilde{B}_{jj'} = \lambda_d \iint_{\Omega'} \alpha_j(x, y) \alpha_{j'}(x, y) dx dy$;

$\mathbf{K} = (\tilde{K}_{jj'})_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}$ – матрица жесткости $\tilde{K}_{jj'} = D_g \iint_{\Omega'} \alpha_j(x, y) \nabla^4 \alpha_{j'}(x, y) dx dy$;

$\mathbf{A} = (\tilde{A}_{jk})_{|\mathbb{M}_p| \times K}$ – матрица управляющих воздействий $\tilde{A}_{jk} = \varrho h \times$

$\times \iint_{\Omega'} \alpha_j(x, y) \delta(x - X_k^{\text{П}}) \delta(y - Y_k^{\text{П}}) dx dy = \alpha_i(X_k^{\text{П}}, Y_k^{\text{П}}); \vec{Z}^0(t) = \left(\frac{\partial^2 Z_j^0(t)}{\partial t^2} \right)_{|\mathbb{M}_p|};$
 $\vec{Z}^0(t) = \left(\frac{\partial Z_j^0(t)}{\partial t} \right)_{|\mathbb{M}_p|}; \bar{Z}^0(t) = (Z_j^0(t))_{|\mathbb{M}_p|}; \bar{Z}^{\text{П}} = (Z_k^{\text{П}}(t))_K; t \in [t_0, t_1];$
 $[t_0, t_1]$ – нефиксированный отрезок времени управления.

Сведем полученную систему (4.46) к системе ДУ первого порядка, введя дополнительные переменные: $\vec{Y}(t) = \vec{Z}^0(t); \dot{\vec{Y}}(t) = \dot{\vec{Z}}^0(t)$.

Для заданных соотношений определим задачу управления в виде

$$\begin{aligned}
 t_1 - t_0 \rightarrow \min; \quad \dot{\vec{Y}}(t) &= \mathbf{M}^{-1} \left[\mathbf{A} \bar{Z}^{\text{П}}(t) - \mathbf{K} \vec{Z}^0(t) - \mathbf{B} \vec{Y}(t) \right]; \\
 \vec{Y}(t) &= \vec{Z}^0(t); \quad \vec{Z}^0(t_0) = 0; \quad \dot{\vec{Z}}^0(t_0) = 0; \quad \vec{Z}^0(t_1) = \vec{Z}^0,
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

где $\vec{Z}^0 = (\hat{Z}_j^0)_{|\mathbb{M}_p|}$ – коэффициенты аппроксимации БМ формы рефлектора удовлетворяющие тождеству $Z_{\text{ТР}}(x, y) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \hat{Z}_j^0 \alpha_j(x, y)$, где $Z_{\text{ТР}}(x, y)$ – требуемая форма поверхности рефлектора.

Вектор коэффициентов \vec{Z}^0 для заданной аппроксимации Ритца в БМ определим из решения задачи $\iint_{\Omega'} |g(x, y, t_1) - g_{\text{ТР}}(x, y, t_1)|^2 dx dy$ с учетом критерия минимума потенциальной энергии [200]:

$$\begin{aligned}
 \Pi = \frac{Dg}{2} \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \sum_{j' \in \mathbb{M}_p} Z_{j'}^0 Z_j^0 \iint_{\Omega'} \left[\frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \alpha_{j'}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \alpha_{j'}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \alpha_{j'}}{\partial y^2} + 2(1 - \right. \\
 \left. - \nu_0) \left(\frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \alpha_{j'}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \alpha_{j'}}{\partial y^2} \right) \right] dx dy - \sum_{j \in \mathbb{M}_p} Z_j^0 \iint_{\Omega'} g \alpha_j dx dy \rightarrow \min_{\vec{Z}^0}.
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Для заданных представлений вектор \vec{Z}^0 определим соотношением

$$\vec{Z}^0 = \mathbf{A} \left(\mathbf{R}^{-1} \vec{H} \right), \tag{4.49}$$

где $\vec{H} = (\tilde{H}_k)_K$ при $\tilde{H}_k = Z_{\text{ТР}}(X_k^{\text{П}}, Y_k^{\text{П}})$; $\mathbf{R} = (R_{kk'})_{K \times K}$ при $R_{kk'} = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \tilde{A}_{jk'} \sum_{i \in \mathbb{M}_p} \mathbf{S}_{ij} \alpha_i(X_k^{\text{П}}, Y_k^{\text{П}})$ и $\mathbf{S} = \mathbf{K}^{-1}$.

Решение задачи (4.49) выполним с учетом принципа максимума Понтрягина [103]. Функцию Гамильтона определим в виде:

$$H(\vec{Y}, \vec{u}, \vec{\psi}) = \vec{\psi}(t) \left[\mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{A}\vec{Z}^d(t) - \mathbf{K}\vec{Z}^0(t) - \mathbf{B}\vec{Y}(t) \right) \right], \quad (4.50)$$

где $\vec{\psi}(t) = (\psi_j(t))_{|\mathbb{M}_p|}$ – вспомогательный вектор импульсов управления.

С учетом (4.50) при $H(\vec{Y}, \vec{u}, \vec{\psi}) \rightarrow \min$ итоговая задача управления формой рефлектора сводится к решению системы ОДУ:

$$\begin{aligned} \vec{Y}(t) &= \mathbf{M}^{-1} \left[\mathbf{A}\vec{Z}^d(t) - \mathbf{K}\vec{Z}^0(t) - \mathbf{B}\vec{Y}(t) \right] + \vec{\lambda}(t) \otimes \left(\vec{Z}^0 - \vec{Z}^0(t) \right); \\ \vec{Y}(t) &= \vec{Z}^0(t); \quad \vec{\psi}(t) = \left(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \right)^T \vec{\psi}(t), \end{aligned} \quad (4.51)$$

для заданных начальных условий $\vec{Z}^0(t_0) = 0$; $\vec{Z}^0(t_0) = 0$.

В выражении (4.51) \otimes – оператор поэлементного произведения векторов; $\vec{\psi}(t) = \left(\frac{\partial \psi_j(t)}{\partial t} \right)_{|\mathbb{M}_p|}$; $\vec{\lambda}(t) = (\lambda_j(t))_{|\mathbb{M}_p|}$ – вектор множителей Лагранжа.

Решение сформированной задачи (4.51) предполагается выполнять численно с использованием формул Рунге–Кутты 4-го и 5-го порядков.

Для заданных решений в САПР Mathcad проведено математическое моделирование при решении задачи оптимального управления формой рефлектора предложенным БМ в сравнении с МКЭ. Отметим, что для сведения задачи (4.45) к аналогичной системе ДУ (4.46) МКЭ первого порядка не подходит, поскольку для его кусочно-линейной аппроксимации четвертая производная будет всегда равна нулю, т. е. $\nabla^4 Z(x, y, t) = 0$. Более того, для сведения задачи (4.45) к аналогичной системе ДУ (4.46) в постановке МКЭ высоких порядков, по той же причине необходимости определения четвертой производной требуется, чтобы в формируемой кусочно-полиномиальной аппроксимации порядок был $p \geq 4$.

При моделировании граница раскрыва рефлектора выбрана правильным пятиугольником с радиусом описанной окружности 2 м. Функция $Z_{\text{тр}}$ задана параболой с фокусом $f = 4$ м. Для формирования между решениями задачи управления в приближении БМ и МКЭ соизмеримых вычислительных затрат

(характеризуется размерностью матриц \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{K} , \mathbf{A} в задаче (4.46) и зависит от числа узловых точек аппроксимации Рунге) разбиение в МКЭ раскрыва рефлектора (правильный пятиугольник) задано тремя одинаковыми треугольниками. На рисунке 4.10,а представлена зависимость $\Delta(t) = \left[\iint_{\Omega'} (Z(x, y, t) - Z_{\text{ТР}}(x, y))^2 dx dy \right]^{0,5}$ – отклонения реализуемой формы рефлектора от требуемой на интервале времени управления при фиксированном значении порядка аппроксимации $p = 4$ для БМ и МКЭ. На рисунке 4.10,б представлена зависимость СКО $\Delta(t_1)$ от порядка аппроксимации p для БМ и МКЭ.

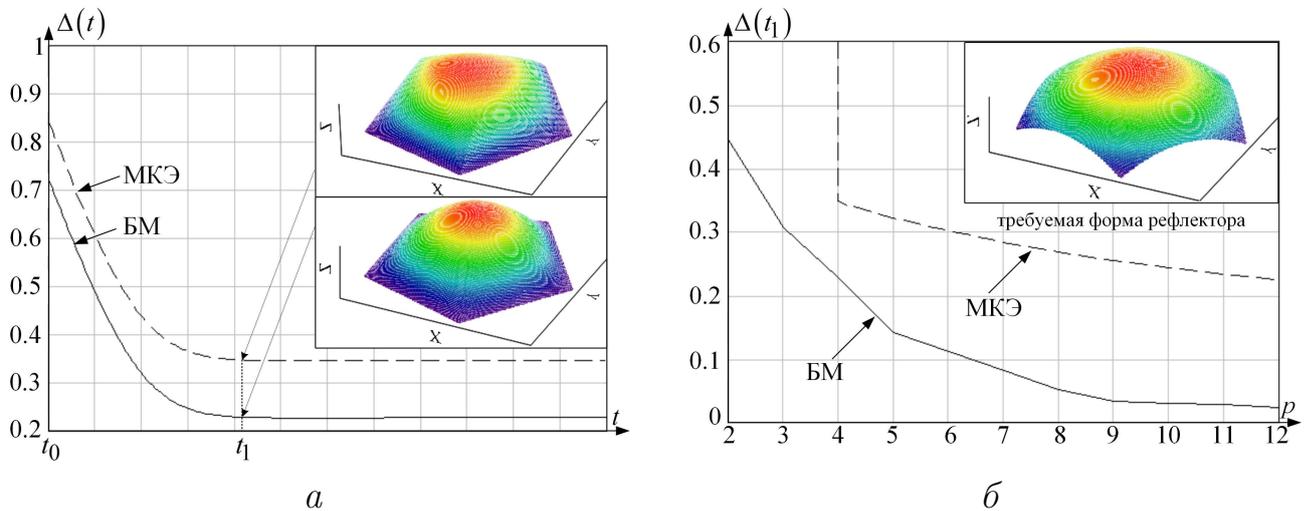


Рис. 4.10. Отклонение реализуемой формы рефлектора от требуемой: a – на интервале времени управления для $p = 4$; b – $\Delta(t_1)$ от p

Полученные результаты (рис. 4.10) моделирования определяют предпочтительность использования БМ для решения задачи управления формой отражающей поверхности. Хотя для обоих методов длина интервала управления $[t_0, t_1]$ остается неизменной (рис. 4.10,а), БМ позволяет с соизмеримыми вычислительными затратами получить наиболее точное (рис. 4.10,а) решение краевой задачи (4.45). При этом точность БМ в сравнении с МКЭ существенно увеличивается при росте p (рис. 4.10,б). Более низкая точность МКЭ для выполненного решения (рис. 4.10) обусловлена тем, что разбиение Ω' малым числом треугольных элементов приводит к значительным ошибкам вычисления (при оценке прогиба рефлектора МКЭ визуально видно разделение отра-

жателя на элементы, см. рис. 4.10,а) на смежных ребрах между отдельными треугольниками, расположенными внутри анализируемой области. Увеличение точности МКЭ требует разбиения Ω' на как можно большее число треугольных элементов. Последнее для решения задачи (4.45) при заданном условии $p \geq 4$ приводит к существенному росту вычислительных затрат МКЭ в сравнении с барицентрическим методом.

Таким образом, заданные соотношения позволяют формировать численное решение задачи управления отражающей поверхности рефлектора ЗА с произвольным раскрывом для всей области анализа Ω' в целом без ее разбиения на конечные элементы. Повышение точности решения достигается увеличением порядка аппроксимации p . Предпочтительность применения барицентрического подхода заключается в удобном задании аппроксимации Ритца, для всей области анализа в целом с учетом граничных условий. Применение барицентрического метода для заданного порядка аппроксимации p и формируемого множества (2.43) мультииндексов j также позволяет удобно определять положение деформирующих стержней по правилу $(X_j^d, Y_j^d) = \sum_{n'=1}^{N'} \frac{j_{n'} P'_{n'}}{p}$.

4.4. Обоснование достоверности получаемых результатов на основе разработанных методов математического моделирования адаптивных многолучевых зеркальных антенн

С учетом указанных ранее предложений (см. пп. 4.2) по: 1) заданию различных значений порядка аппроксимации для соответствующих размеров раскрывов отражающих и излучающих элементов; 2) предпочтительности использования метода СИУ в приближении БМ при анализе АМЛЗА с большим числом элементов с точки зрения вычислительных затрат, особый интерес вызывает проведение экспериментальных исследований с целью подтверждения соответствующих гипотез. На рисунке 4.11 представлена зависимость средне-

квадратического отклонения $\Delta = \sqrt{\iint_{\Omega'_1} |\vec{J}(x, y) - \vec{J}_p(x, y)|^2 dx dy}$ между реальным распределением плотности электрического тока $\vec{J}_p(x, y)$ на поверхности

рефлектора и его рассчитываемым значением $\vec{J}(x, y)$ БМ при решении СИУ электродинамической теории АМЛЗА от отношения диаметра раскрыва апертуры отражателя D , выраженного в длинах волн λ , к числу узловых точек $|\mathbb{M}_p|$ аппроксимации.

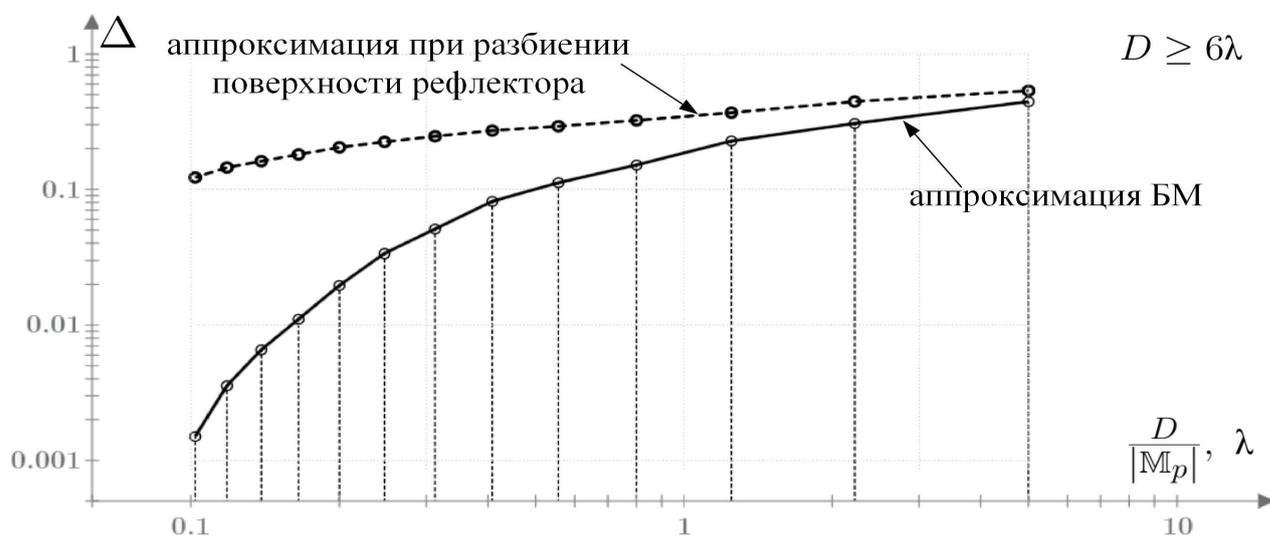


Рис. 4.11. Зависимость отклонения Δ между $\vec{J}_p(x, y)$ и $\vec{J}(x, y)$ от $\frac{D}{|\mathbb{M}_p|}$, выраженного в λ

На рисунке 4.12 представлена зависимость относительных вычислительных затрат от числа M' отражающих и M облучающих элементов АМЛЗА при решении внешней задачи электродинамики разработанными: 1) модифицированным токовым методом; 2) барицентрическим методом при решении системы СИУ. При расчетах диаметр раскрывов Ω' рефлекторов задан 10λ , излучателей $\Omega - 1, 25\lambda$. Следует отметить, что анализ АМЛЗА модифицированным токовым методом выполнен на наихудший случай – при обязательной необходимости учета взаимных влияний между всеми элементами АС.

Из полученных результатов (рис. 4.11, 4.12) следует, что: 1) разработанный БМ позволяет достигнуть приемлемой точности решения в приближении электродинамической теории АМЛЗА при $\frac{D}{|\mathbb{M}_p|} \leq \lambda$, в то время как известные методы [27, 190–195] требуют разбиения области анализа Ω на подобласти простой формы, размер которых должен быть $\leq 0, 1\lambda$ [217]; 2) модифицированный токовый метод характеризуется экспоненциальной вычислительной слож-

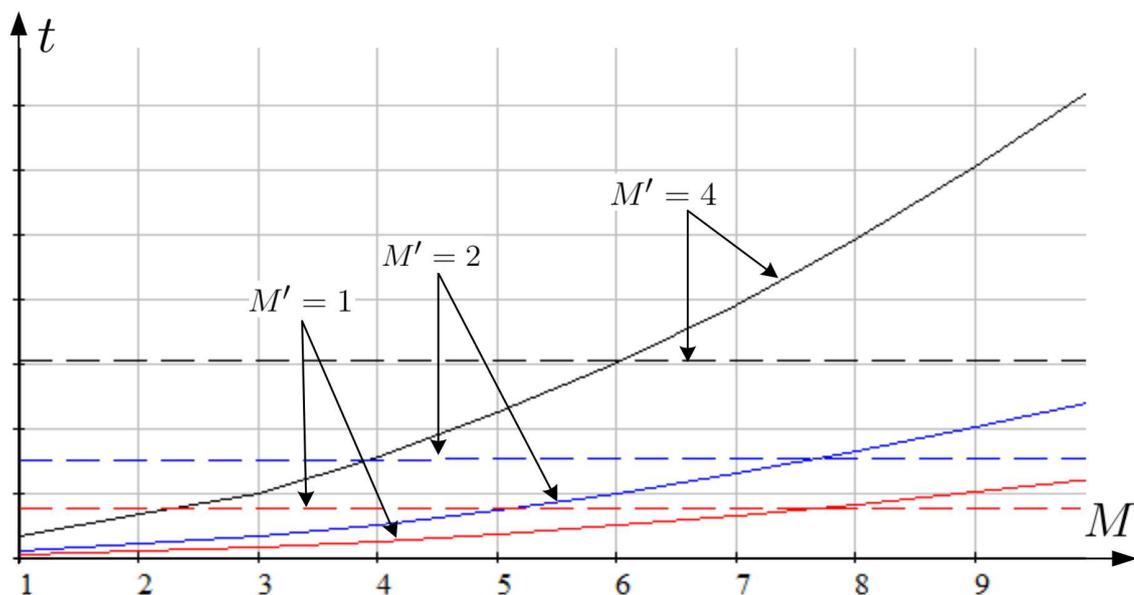


Рис. 4.12. Зависимость относительных вычислительных затрат от M' и M при решении задачи анализа АМЛЗА модифицированным токовым методом (сплошная линия) и БМ при решении системы СИУ (пунктирная линия)

ностью при росте элементов АМЛЗА, а БМ при решении СИУ – линейной; 3) с позиции вычислительных затрат применение модифицированного токового метода (см. пп. 4.1) является предпочтительным при анализе однозеркальных и двухзеркальных АМЛЗА с числом излучателей $M \leq 10$ в сравнении с БМ при решении СИУ (см. пп. 4.2).

Обоснование достоверности получаемых результатов на основе разработанных методов математического моделирования: 1) барицентрического метода для решения задачи электродинамики I типа (см. главу 2); 2) модифицированного токового метода (см. пп. 4.1); 3) барицентрического метода для решения СИУ электродинамической теории адаптивных многолучевых зеркальных антенн (см. пп. 4.2) произведем с учетом сформированного электродинамического представления в физико-математической модели управления АМЛЗА (см. пп. 1.4). Достоверность получаемых результатов будем характеризовать оценкой погрешности между вычисляемым и реальным значением (обозначается

нижнем индексом «р»): 1) $\Delta_1 = \sqrt{\oint_L [(\vec{E} - \vec{E}_p) d\vec{l}]^2}$ распределения напряженности электрического поля \vec{E} , наводимого в режиме приема на замкну-

том контуре L внутри излучателя, при решении в приближении разработанного барицентрического метода внутренней задачи электродинамики; 2) $\Delta_2 = \sqrt{\iint_{\Omega} [\mathcal{J} - \mathcal{J}_p]^2 d\Omega}$ распределения плотности потока энергии \mathcal{J} , формируемого рефлектором в раскрыве облучателя при приеме из дальней зоны с направления (θ, ξ) ЭМВ с плоским фазовым фронтом; 3) $\Delta_3 = \left(\int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\eta_{\text{КПД}}(\theta, \xi) - \eta_p(\theta, \xi)]^2 d\theta d\xi \right)^{0,5}$ диаграммы направленности АМЛЗА по КПД (1.11) в полном секторе телесного угла. Следует отметить, что при решении задач второго (Δ_2) и третьего (Δ_3) типов использовались одновременно модифицированный токовый метод (см. пп. 4.1) и БМ при решении системы СИУ (см. пп. 4.2). При этом выбор конкретного метода выполнялся с учетом ранее сформулированных рекомендаций при $\frac{D}{|M_p|} = \lambda$.

В связи с отсутствием возможности проведения натурального эксперимента, обусловленной необходимыми внешними условиями (относительно большая безэховая камера отсутствует, а измерения на открытом полигоне не позволяют получить требуемую точность, особенно при оценке дальнего бокового излучения) при проведении измерений ДН и распределения ЭМП в раскрывах элементов адаптивной многолучевой зеркальной антенны, верификация [225] выполнена при сравнении значений \vec{E} , $\mathcal{J} \in \Omega$ и $\eta_{\text{КПД}}(\theta, \xi)$ с результатами решения тестовых задач. Разработка тестовых задач произведена посредством имитационного моделирования с использованием сертифицированных программных средств анализа СВЧ-устройств – САПР Ansoft HFSS. Примеры соответствующих моделей для оценки погрешностей Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 представлены на рисунке 4.13.

При оценки погрешности Δ_1 проведено моделирование различных рупорных облучателей (см. пример рис. 4.13,а) с раскрывами, задаваемыми правильными многоугольниками с числом N вершин от 3 до 10 с изменяющимся радиусом вписанной окружности от $0,4\lambda$ до 2λ с шагом $0,1\lambda$, и высотой рупора от $0,25\lambda$ до $2,5\lambda$ с шагом $0,25\lambda$. В раскрыве моделируемых облучателей формировалось поле, соответствующее основной волне TM -типа [24]. Общее число моделей равно $K_1^{\Delta} = 5984$.

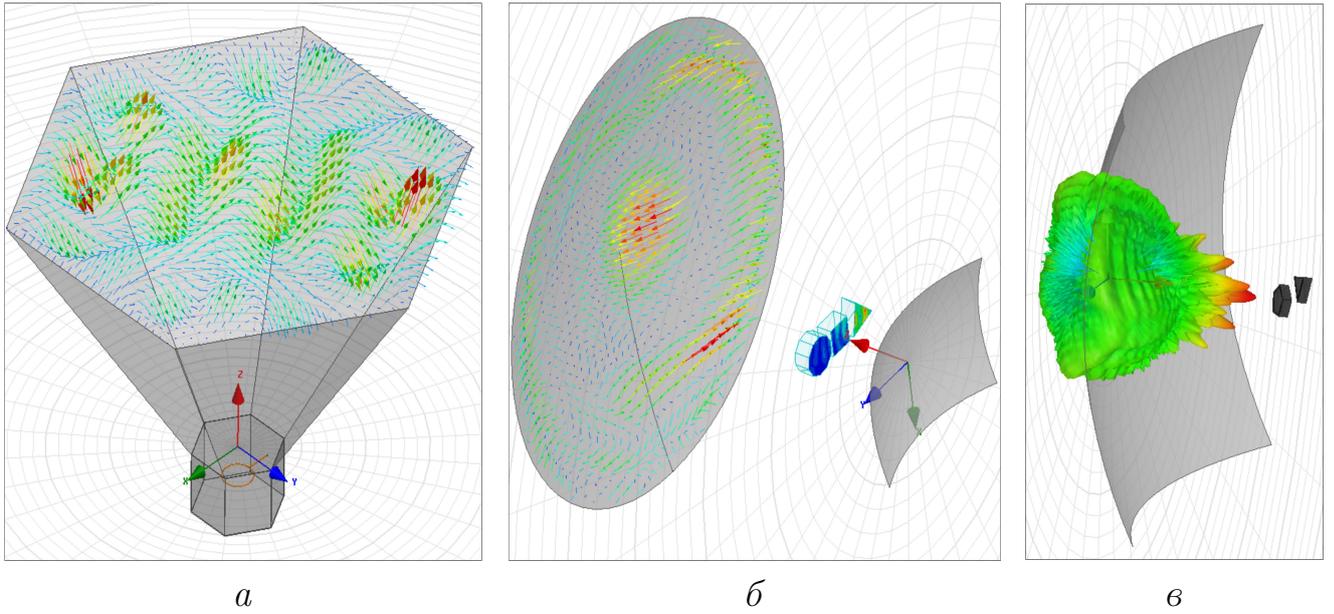


Рис. 4.13. Примеры моделей в Ansoft HFSS при оценки погрешностей:
 $a - \Delta_1$; $b - \Delta_2$; $v - \Delta_3$

Оценка погрешности Δ_2 проведена при моделировании различных антенных систем зеркального типа (см. пример рис. 4.13,б) с числом отражающих поверхностей M' от 1 до 4, излучателей M от 1 до 40 (раскрыты Ω заданы круглыми и правильными многоугольниками с числом вершин 3, 4 и 10). Направление прихода ЭМВ с плоским фазовым фронтом выбрано для $\theta = 0^\circ$, $\xi = 0^\circ$. Общее число моделей равно $K_2^\Delta = 1000$.

Погрешность Δ_3 определена для $K_3^\Delta = 2000$ моделей антенных систем зеркального типа (см. пример рис. 4.13,в) с числом отражающих поверхностей M' от 1 до 3, излучателей M от 1 до 60 (раскрыты Ω заданы правильными многоугольниками с числом вершин 3 и 5). В Ω задавалось поле, соответствующее основной волне TE -типа [24].

Средние выборочные Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 для проведенных вычислительных экспериментов K_1^Δ , K_2^Δ и K_3^Δ составили значения $3,87 \cdot 10^{-3}$, $0,1856$ и $2,51 \cdot 10^{-2}$ соответственно.

На основе полученных данных также выполнена оценка точности результатов прямых равноточных измерений для разработанных методов математического моделирования АМЛЗА при определении средневыборочных интеграль-

ных [224]: 1) средней относительной ошибки $\Delta_{S_1} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left\{ \iint_{\mathcal{S}} \left| \frac{\mathcal{G}^k - \mathcal{G}_p^k}{\mathcal{G}_p^k} \right| d\mathcal{S} \right\}$;

2) средней квадратичной ошибки $\Delta_{S_2} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left\{ \sqrt{\iint_{\mathcal{S}} \left[\frac{\mathcal{G}^k - \mathcal{G}_p^k}{\mathcal{G}_p^k} \right]^2 d\mathcal{S}} \right\}$; 3) ко-

эффициента несовпадения Тейла $\Delta_{S_3} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{\sqrt{\iint_{\mathcal{S}} (\mathcal{G}^k - \mathcal{G}_p^k)^2 d\mathcal{S}}}{\sqrt{\iint_{\mathcal{S}} (\mathcal{G}^k)^2 d\mathcal{S}} + \sqrt{\iint_{\mathcal{S}} (\mathcal{G}_p^k)^2 d\mathcal{S}}} \right\}$. В

указанных соотношениях для Δ_{S_1} , Δ_{S_2} , Δ_{S_3} приняты следующие обозначения относительно конкретного типа эксперимента (рис. 4.13): K – число моделей, \mathcal{S} – область интегрирования, \mathcal{G}^k и \mathcal{G}_p^k – оцениваемое и реальное значения параметра для k -й модели ($k = \overline{1, K}$). Следует отметить, что для удобства вычисления Δ_{S_1} , Δ_{S_2} , Δ_{S_3} в первом типе эксперимента (рис. 4.13,а) интеграл по замкнутому контуру L с учетом формулы Кельвина–Стокса и уравнений Максвелла приведен к интегралу по поверхности Ω_L , ограниченную данным контуром.

Результаты оценок количественной адекватности относительно соответствующих вычислительных экспериментов при выборе порядка аппроксимации по правилу $\frac{D}{|M_p|} = \lambda$ составили: $K_1^\Delta - \Delta_{S_1}^1 = 0,637$, $\Delta_{S_2}^1 = 0,0788$, $\Delta_{S_3}^1 = 0,1694$; $K_2^\Delta - \Delta_{S_1}^2 = 2,956 \cdot 10^{-2}$, $\Delta_{S_2}^2 = 4,0738 \cdot 10^{-3}$, $\Delta_{S_3}^2 = 1,2923 \cdot 10^{-2}$; $K_3^\Delta - \Delta_{S_1}^3 = 8,74 \cdot 10^{-2}$, $\Delta_{S_2}^3 = 9,82 \cdot 10^{-3}$, $\Delta_{S_3}^3 = 1,67 \cdot 10^{-2}$.

Полученные результаты свидетельствуют о высокой степени достоверности получаемых на основе разработанных методов математического моделирования АМЛЗА результатов порядка точности $10^{-2} \div 10^{-1}$ для второго и третьего типов вычислительных экспериментов при $\frac{D}{|M_p|} = \lambda$. Для достижения аналогичной точности при решении БМ внутренней задачи электродинамики для оценки ЭДС (первый тип вычислительного эксперимента) необходимо выбирать порядок аппроксимации по отношению к геометрическому размеру анализируемой области соизмеримым с $0,5\lambda$. Указанное требование по увеличению порядка аппроксимации с учетом заданной формализации проблемы оптимального управления (см. пп. 1.4) и разработанного БМ (см. главу 2) не влияет на вычислительные затраты общих алгоритмов синтеза и адаптации.

В целом результаты имитационного моделирования свидетельствуют о высокой точности сформированных методов математического моделирования АМЛЗА при их способности с наименьшими вычислительными затратами определять адекватное решение задачи анализа. Также результаты имитационного моделирования задают рекомендации по определению M_p для областей анализа с различным геометрическим размером по отношению к λ и применения соответствующего метода анализа АМЛЗА в зависимости от числа элементов в АС. Вышеизложенное позволяет перейти к непосредственной разработке алгоритмов структурно-параметрического синтеза и адаптации АМЛЗА и формированию на их основе проблемно-ориентированного программного комплекса для проведения вычислительных экспериментов.

Выводы по четвертой главе

1. Выполнена модификация токового метода, которая в отличие от известных асимптотических решений позволяет учесть эффекты дифракции и переотражения для различных поляризационных составляющих электромагнитного поля при расчете характеристик направленности антенных систем зеркального типа. Модификация основана на приближениях дифракционного метода Кирхгофа–Котлера при введении дополнительных зарядов на контуре апертуры рефлектора и решении модельных задач влияния на излучатель переотраженного от рефлектора электромагнитного поля и электромагнитного поля другого излучателя.

2. В приближении барицентрического метода определено вариационное решение сингулярных интегральных уравнений электрического и магнитного полей в теории адаптивных многолучевых зеркальных антенн. Разработанное решение с учетом выявленных ранее положительных свойств барицентрического метода в отличие от известных позволяет повысить адекватность результатов анализа сложных многоэлементных антенных систем зеркального типа при соизмеримых вычислительных затратах.

3. С целью параметризации деформируемой отражающей поверхности адаптивной многолучевой зеркальной антенны с применением барицентрического метода и принципа максимума Понтрягина задана постановка задачи оптимального управления формой рефлектора. Предпочтительность применения барицентрического метода для решения сформированной задачи управления определена при его сравнительной оценке с известными методами и заключается в повышении точности вариационного решения краевой задачи (4.45) при соизмеримых вычислительных затратах. Также выделены дополнительные положительные свойства барицентрического метода относительно определения числа управляющих воздействий и их расположении на управляемой поверхности.

4. Из результатов оценки достоверности разработанных методов математического моделирования АМЛЗА определено, что: 1) барицентрический метод позволяет достигнуть приемлемой точности решения внутренних и внешних задач в приближении электродинамической теории АМЛЗА при $\frac{D}{|M_p|} \leq \lambda$; 2) применение модифицированного токового метода (см. пп. 4.1) является предпочтительным с позиции вычислительных затрат по отношению к БМ при решении СИУ (см. пп. 4.2) при анализе однозеркальных и двухзеркальных АМЛЗА с числом излучателей $M \leq 10$; 3) для порядка точности $10^{-2} \div 10^{-1}$ (погрешность модели измеряется единицами процентов) требуется, чтобы интерполяция раскрывов излучающих и отражающих элементов АС с применением БМ при решении СИУ была задана с учетом правила $\frac{D}{|M_p|} \leq \lambda$, а для БМ при решении внутренней задачи электродинамики – $\frac{D}{|M_p|} \leq 0,5\lambda$.

Глава 5. ОБОСНОВАНИЕ И ТЕСТИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ СФОРМИРОВАННЫХ РЕШЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЭВМ ПРИ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ В ВИДЕ ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА

Разработанная математическая теория позволяет перейти к непосредственной реализации сформированных аналитических и численных методов математического моделирования адаптивных многолучевых зеркальных антенн в виде проблемно-ориентированного программного комплекса для проведения вычислительных экспериментов и автоматизированной интеллектуальной поддержки при проектировании, оптимизации и управлении адаптивными антенными системами зеркального типа. Поскольку общая задача синтеза адаптивной многолучевой зеркальной антенны при поиске оптимальных структурных и параметрических характеристик, удовлетворяющих заданному критерию [18, 172], в общем случае предполагает поиск глобального экстремума многомерной многоэкстремальной функции, содержащей точки разрыва первого и второго рода, для эффективного решения задач синтеза в настоящей главе также предполагается разработка эффективного численного метода глобальной оптимизации.

С учетом формализованной постановки проблемы оптимального управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной функциональную основу разрабатываемого проблемно-ориентированного программного комплекса должны составлять алгоритм структурно-параметрического синтеза и алгоритм адаптации АМЛЗА. При этом требования соответствия решений по алгоритмической и далее программной реализации заданным техническим условиям [221, 222] определяют необходимость оценки выполнения требований, предъявляемых к алгоритмам синтеза и адаптации как к вычислительным процессам при исследовании их эффективности [238, 241, 242]. В ходе решения указанных задач в качестве исходного эмпирического знания использованы результаты работ [161, 172, 223, 226–237, 243] для формирования [63, 105, 197, 219, 220, 252–262, 264, 265].

5.1. Гибридный генетический метод с градиентным обучением и прогнозированием для решения задач глобальной оптимизации многоэкстремальных функций

Полученные на этапе математического моделирования результаты позволяют перейти к непосредственному решению задачи структурно-параметрического синтеза АМЛЗА с применением современных численных методов [87–90, 202–209]. Результаты исследования типовых критериев синтеза МЛЗА [161], определяющих постановку оптимизационной задачи в виде поиска глобального экстремума многомерной многоэкстремальной функции, содержащей точки разрыва первого и второго рода, обуславливают необходимость разработки дополнительных методов, обеспечивающих формирование эффективного численного решения задачи структурно-параметрического синтеза АМЛЗА.

В общем случае решение задач по нахождению глобального оптимума многоэкстремальных многомерных целевых функций, содержащих точки разрыва первого и второго рода, предполагает использование специальных многоэкстремальных оптимизационных методов, определяющих некоторое правило перебора решений на равномерной/неравномерной сетке по детерминированному или случайному закону. В практике научных решений большое распространение получили алгоритмы глобальной оптимизации, основанные на эволюционных методах – генетические алгоритмы. Для увеличения эффективности последних, особенно для решения многомерных задач, в ряде публикаций [210–213] предложена комбинация генетического алгоритма и некоторого классического градиентного метода локальной оптимизации. В рассматриваемой постановке гибридная генетическая оптимизация предполагает совместную работу генетического и градиентного методов с постоянным сравнением на каждой v -й итерации лучшего решения с последующей передачей последнего (лидера и вектора лидеров из полученной популяции) на $v+1$ -й итерации градиентному методу.

С учетом предложенных решений [211–213] и результатов их работы, особый интерес вызывают вопросы, связанные с непосредственным объединением

генетических методов с известными методами локального поиска [87–90, 202–209], а также методов статистического анализа [214] на этапе селекции новой популяции для увеличения эффективности численного решения в целом.

Для этого рассмотрим решение произвольной задачи нахождения глобального оптимума многомерной функции

$$f(\vec{X}) \rightarrow \min_{\vec{X} \in \mathbb{R}^M}; \quad \vec{X} = (x_m)_M, \quad (5.1)$$

где M определяет число переменных.

В общей постановке функция (5.1) может быть не дифференцируема в некоторых точках, иметь точки разрыва первого и второго рода (определена не для всех точек $x_m \in (-\infty, \infty)$). В этой связи на существенное улучшение сходимости генетического метода при использовании только градиентного обучения особи-лидера популяции при случайном выборе начального приближения (первое поколение), очевидно, не всегда можно рассчитывать. Для увеличения скорости сходимости решения предлагается по выбранному методу локальной оптимизации [87–90, 202–209] использовать градиентное обучение всех особей-лидеров с дополнительным применением моделей прогнозирования авторегрессии-скользящего среднего [214] (ARMA) выбранного порядка на этапе мутации популяции и скрещивания с использованием метода параболической интерполяции [202].

Для решения задачи (5.1) рассмотрим следующий генетический алгоритм в вещественных кодах [215] – RGA (real-coded genetic algorithms определяет представление генов особи в популяции в виде вещественного числа) с градиентным обучением и прогнозированием. Предпочтительность использования RGA-кодирования заключается в простоте (с позиции минимизации вычислительных затрат) реализации процедуры кодирования/декодирования фенотипа особи в ее эквивалентный генотип, по сути определяющий перевод вещественного зна-

чения аргумента $\Psi_m : x_m \rightarrow y_m$ к безразмерному $y_m \in [0, 1]$ по правилу [215]

$$\begin{aligned}\Psi_m : y_m &= \left(x_m - x_m^{\min} \right) / \left(x_m^{\max} - x_m^{\min} \right); \\ \Psi_m^{-1} : x_m &= x_m^{\min} + y_m \left(x_m^{\max} - x_m^{\min} \right),\end{aligned}\tag{5.2}$$

где $\left[x_m^{\min}, x_m^{\max} \right]$ – границы области поиска глобального оптимума функции (5.1) по переменной x_m .

Последовательность предлагаемого решения заключается в выполнении следующих действий [105].

Шаг 1. Задание настраиваемых параметров алгоритма: n_{Π} – размер популяции; α_k – параметр кроссовера; n_L – количество привилегированных особей в популяции (особи-лидеры); $\left[x_m^{\min}, x_m^{\max} \right]$ – границы области поиска глобального оптимума функции (5.1) по переменной x_m ; p' и q' – параметры, определяющие порядок модели ARMA(p', q'); $v = 1$ – номер итерации алгоритма; K_{\max} – предельно-допустимое число итераций алгоритма; $\vec{X}_1^v, \vec{X}_2^v, \dots, \vec{X}_{n_{\Pi}}^v = \mathbf{X}^v = \left(x_{mj}^v \right)_{M \times n_{\Pi}}$ – первое ($v = 1$) поколение, определяющее начальное приближение итерационного алгоритма оптимизации функции (5.1).

Шаг 2. Вычисление значений f_j целевой функции (5.1) для j -х ($j = \overline{1, n_{\Pi}}$) особей из полученной v -й итерации популяции.

Шаг 3. Выбор лучших особей из v -й популяции при сортировке значений f_j по возрастанию.

Шаг 4. Генерация фенотипов $\mathbf{X}' = \left(x'_{mj} \right)_{M \times n_{\Pi}}$ и $\mathbf{X}'' = \left(x''_{mj} \right)_{M \times n_{\Pi}}$ пары популяции родителей по правилу:

$$\begin{aligned}a_{mj} &= \begin{cases} x_{mj}^v, & \text{if } v \leq \max(p', q') + 1; \\ \varepsilon_{mj}^v + \sum_{r=1}^{p'} \gamma_r x_{mj}^{v-r+1} + \sum_{r=1}^{q'} \beta_r x_{mj}^{v-r+1} & \text{otherwise;} \end{cases} \\ x'_{mj} &= \begin{cases} a_{mj}, & \text{if } a_{mj} \in \left[x_m^{\min}, x_m^{\max} \right]; \\ x_m^{\min}, & \text{if } a_{mj} \leq x_m^{\min}; \\ x_m^{\max}, & \text{if } a_{mj} \geq x_m^{\max}; \end{cases} \quad x''_{mj} = \Psi_m^{-1} \left(\tilde{\varepsilon}_{mj}^v \right),\end{aligned}\tag{5.3}$$

где ε_{mj}^v – белый шум (случайная величина, распределенная по равномерному закону на интервале $[x_m^{\min}, x_m^{\max}]$); $\tilde{\varepsilon}_{mj}^v$ – случайная величина, распределенная по равномерному закону на интервале $[0, 1]$; $\gamma_1, \dots, \gamma_{p'}$ и $\beta_1, \dots, \beta_{q'}$ – коэффициенты модели ARMA (авторегрессионные коэффициенты и коэффициенты скользящего среднего соответственно), определяемые по правилам, представленным в [214].

Шаг 5. Скрещивание полученных пар популяций родителей с использованием метода параболической интерполяции [106, 202]. В такой постановке фенотипы потомков $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}_{mj})_{M \times n_{\Pi}}$ с учетом [215] задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \hat{x}_{mj} &= \Psi_m^{-1}(\hat{y}_{mj}); \quad y'_{mj} = \Psi_m(x'_{mj}); \quad y''_{mj} = \Psi_m(x''_{mj}); \\ \hat{y}_{mj} &= \frac{[y''_{mj} - y'''_{mj}] f'_j + [y'''_{mj} - y'^2_{mj}] f''_j + [y'^2_{mj} - y''_{mj}] f'''_j}{2 \left([y''_{mj} - y'''_{mj}] f'_j + [y'''_{mj} - y'^2_{mj}] f''_j + [y'^2_{mj} - y''_{mj}] f'''_j \right)}; \\ y'''_{mj} &= C_{mj}^{\min} - \alpha_k \left(C_{mj}^{\max} - C_{mj}^{\min} \right) + \tilde{\varepsilon}_{mj} \left(C_{mj}^{\max} - C_{mj}^{\min} \right) (1 - 2\alpha_k); \\ C_{mj}^{\min} &= \begin{cases} x'_{mj}, & \text{if } f(x'_{1j}, \dots, x'_{Mj}) < f(x''_{1j}, \dots, x''_{Mj}); \\ x''_{mj}, & \text{otherwise;} \end{cases} \\ C_{mj}^{\max} &= \begin{cases} x'_{mj}, & \text{if } f(x'_{1j}, \dots, x'_{Mj}) > f(x''_{1j}, \dots, x''_{Mj}); \\ x''_{mj}, & \text{otherwise,} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4)$$

где f'_j, f''_j, f'''_j – значение целевой функции (5.1) для j -х особей, заданных соответствующими фенотипами популяций $x'_{mj}, x''_{mj}, x'''_{mj}$.

Шаг 6. Градиентное обучение по выбранному оптимизационному алгоритму n_{Π} особей-лидеров из сформированной на предыдущем шаге популяции потомков $\hat{\mathbf{X}}$.

Например, в случае градиентного обучения \mathbf{X}^v по алгоритму Дэвидона–Флетчера–Пауэлла значения $(\mathbf{X}^v)^*$ определяются по правилу [87, 208]

$$\left([\mathbf{X}^v]^{(j)} \right)^* = [\mathbf{X}^v]^{(j)} - h \cdot \mathbf{D}_j^v \cdot \nabla f \left([\mathbf{X}^v]^{(j)} \right), \quad (5.5)$$

где $\langle \cdot \rangle$ определяет вектор-столбец матрицы; \mathbf{D}_j^v – матрица, аппроксимирующая матрицу направлений размера $M \times M$ для j -й особи на v -й итерации алгоритма

(обратную матрицу Гессе), которая определяется в [87] как

$$\mathbf{D}_j^v = \mathbf{D}_j^{v-1} + \frac{\Delta [\mathbf{X}^v]^{(j)} \left(\Delta [\mathbf{X}^v]^{(j)} \right)^T}{\left(\Delta [\mathbf{X}^v]^{(j)} \right)^T \Delta \mathbf{G}_j^v} - \frac{\mathbf{D}_j^{v-1} \Delta \mathbf{G}_j^v \left(\Delta \mathbf{G}_j^v \right)^T \mathbf{D}_j^{v-1}}{\left(\Delta \mathbf{G}_j^v \right)^T \mathbf{D}_j^{v-1} \Delta \mathbf{G}_j^v}, \quad (5.6)$$

где $\mathbf{D}_j^1 = \mathbf{E}$; $\Delta [\mathbf{X}^v]^{(j)} = [\mathbf{X}^v]^{(j)} - [\mathbf{X}^{v-1}]^{(j)}$; $\Delta \mathbf{G}_j^v = \nabla f \left([\mathbf{X}^v]^{(j)} \right) - \nabla f \left([\mathbf{X}^{v-1}]^{(j)} \right)$; \mathbf{E} – единичная матрица; $\nabla f \left([\mathbf{X}^v]^{(j)} \right)$ – вектор градиента целевой функции (5.1).

Величина h в выражении (5.5) на каждом шаге задается из условия:

$$\vartheta(h) = f \left\{ [\mathbf{X}^v]^{(j)} - h \cdot \mathbf{D}_j^v \cdot \nabla f \left([\mathbf{X}^v]^{(j)} \right) \right\}. \quad (5.7)$$

Решение задачи (5.7) осуществляется численно гибридным методом одномерной безусловной оптимизации, пример реализации которого подробно рассмотрен в [106].

Из полученных значений $(\mathbf{X}^v)^*$ и $\hat{\mathbf{X}}^*$ с выхода градиентного алгоритма формируется $v + 1$ -е поколение $\vec{X}_1^{v+1}, \vec{X}_2^{v+1}, \dots, \vec{X}_{n_{\Pi}}^{v+1} = \mathbf{X}^{v+1} = \left(x_{mj}^{v+1} \right)_{M \times n_{\Pi}}$. Счетчик итерации увеличивается на единицу $v = v + 1$.

Шаг 7. Проверка выполнения условия остановки итерационного алгоритма. Например, наряду с очевидным условием $v > K_{\max}$ остановка алгоритма может быть осуществлена в случае невыполнения неравенств

$$\sum_{j=1}^{n_{\Pi}} \left| \nabla f \left([\mathbf{X}^v]^{(j)} \right) \right| \leq \Delta, \text{ и/или } \sum_{j=1}^{n_{\Pi}} \left| \Delta [\mathbf{X}^v]^{(j)} \right| \leq \Delta, \quad (5.8)$$

где Δ – малая величина, определяющая погрешность работы алгоритма.

Шаг 8. В случае выполнения условия остановки алгоритм завершает работу, а результат решения задачи (5.1) определяет первый лидер из сформированной v -й популяции \vec{X}_1^v . В противном случае необходимо перейти к шагу 2 алгоритма.

Исследование эффективности предложенной модификации генетического метода выполнено путем проведения ряда вычислительных экспериментов по

определению глобального оптимума следующих тестовых функций [105]:

$$f_1(\vec{X}) = - \sum_{m=1}^M \left[\cos x_m^2 + \cos x_{m+1}^2 - \frac{1}{2^{\cos(5x_m x_{m+1})^5}} \right], \quad (5.9)$$

где $x_m \in [-2, 2]$ (график функции при $M = 2$ представлен на рис. 5.1,а);

$$f_2(\vec{X}) = - \sum_{m=1}^M \left[\sin^2 x_m \cos x_{m+1} e^{\frac{x_m}{9}} + e^{\frac{x_{m+1}}{9}} \right], \quad (5.10)$$

где $x_m \in [-6, 6]$ (график функции при $M = 2$ представлен на рис. 5.1,б);

$$f_3(\vec{X}) = - \sum_{m=1}^M \left[\left(\cos(2x_m^2) - 1, 1 \right)^2 + \left(\sin \frac{x_m}{2} - 1, 2 \right)^2 - \right. \\ \left. - \left(\cos(2x_{m+1}^2) - 1, 1 \right)^2 + \left(\sin \frac{x_{m+1}}{2} - 1, 2 \right)^2 \right], \quad (5.11)$$

где $x_m \in [-5, 5]$ (график функции при $M = 2$ представлен на рис. 5.1,в);

$$f_4(\vec{X}) = \sum_{m=1}^M \sqrt{\left| \sin \left[\sin \left(\sqrt{|\sin(x_m - 1)|} + \sqrt{|\sin(x_{m+1} + 2)|} \right) \right] \right|}, \quad (5.12)$$

где $x_m \in [-5, 5]$ (график функции при $M = 2$ представлен на рис. 5.1,г).

При определении глобального минимума функций (5.9)–(5.12), их размерности принимались $M = 2$, $M = 50$ с заданной популяцией в 20 особей ($n_{\Pi} = 20$), для которой определено 5 особей-лидеров ($n_{Л} = 5$). Результаты расчетов фиксировались по 10^6 запускам алгоритма с последующим усреднением итогового выходного значения. Оценка скорости сходимости предложенной модификации алгоритма с градиентным обучением особей из формируемой популяции методами [87]: наискорейшего спуска, Полака–Райбера, Флетчера–Ривса, Дэвидона–Флетчера–Пауэлла, Ньютона–Рафсона производилась в сравнении с: 1) гибридным генетическим алгоритмом (ГГА) с градиентным обучением лидера [211] (ГОЛ); 2) ГГА с градиентным обучением особей-лидеров в популяции (ГООЛ); 3) ГГА с градиентным обучением всех особей в популяции (ГООП). На рисунках 5.2 представлены результаты зависимости ошибки определения глобального минимума соответствующих целевых функций (5.9)–(5.12) при $N = 2$ методами ГГА с ГОЛ, ГООЛ и ГООП от числа итераций K .

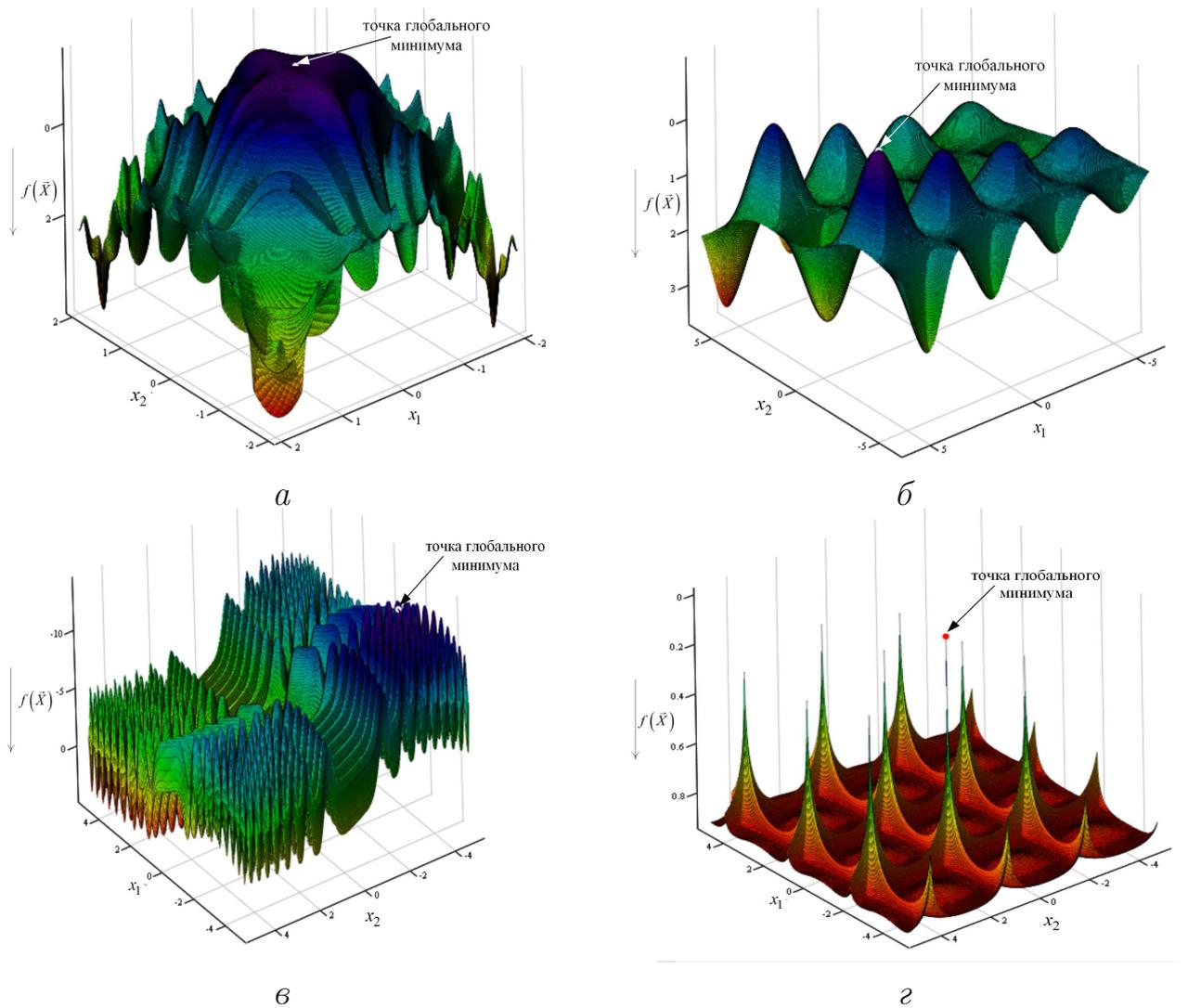


Рис. 5.1. Графики многоэкстремальных тестовых функций: *а* – двумерная функция (5.9); *б* – двумерная функция (5.10); *в* – двумерная функция (5.11); *г* – двумерная функция (5.12).

С позиции увеличения скорости сходимости полученные результаты (рис. 5.2) свидетельствуют о предпочтительности использования градиентного обучения всех особей из формируемой популяции. Выигрыш в сходимости увеличивается с ростом числа локальных экстремумов (рис. 5.2, *а* и 5.2, *б*) дифференцируемой целевой функции. При этом не всегда скорость сходимости самого градиентного метода влияет на скорость сходимости итогового ГГА (ГГА с ГООП методом наискорейшего спуска сходится быстрее, чем ГГА с ГООП методом Ньютона-Рафсона для функции (5.9)). Также увеличение числа локальных экстремумов (рис. 5.2, *в*), а тем более появление у целевой функции «изолированных» экстре-

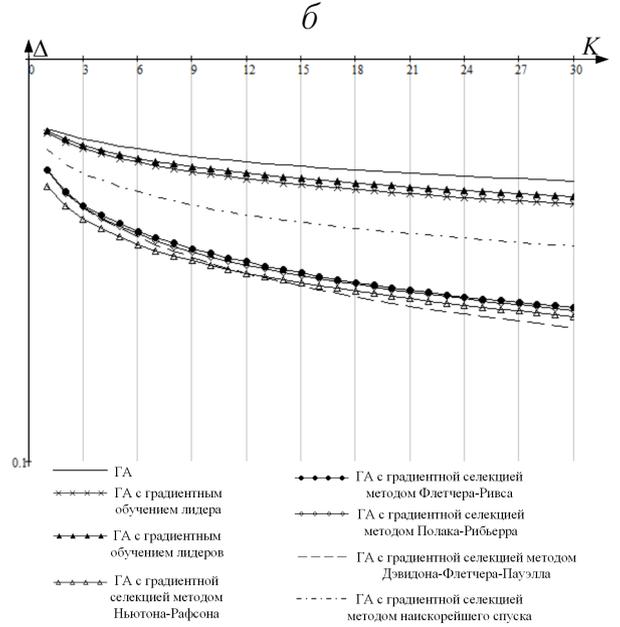
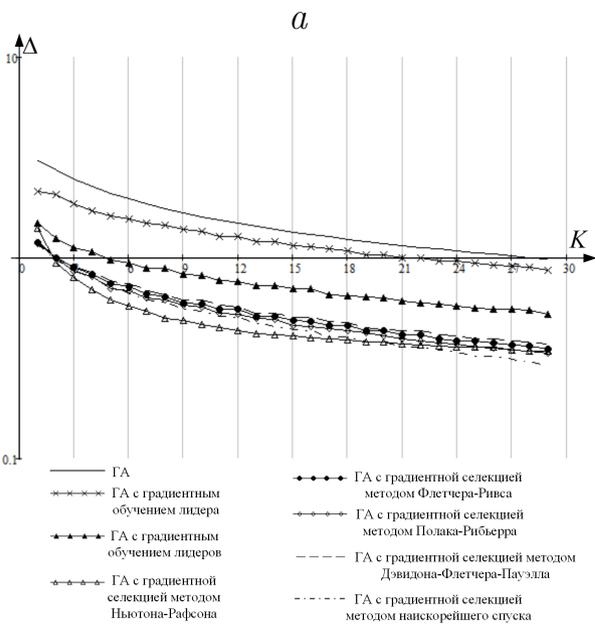
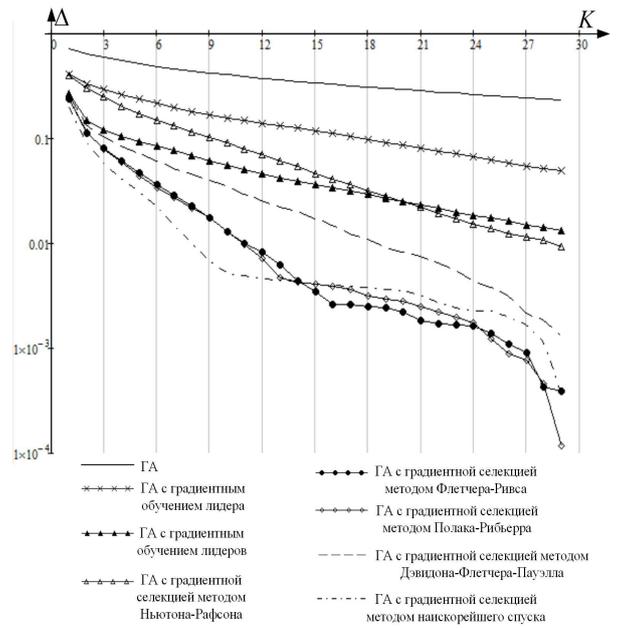
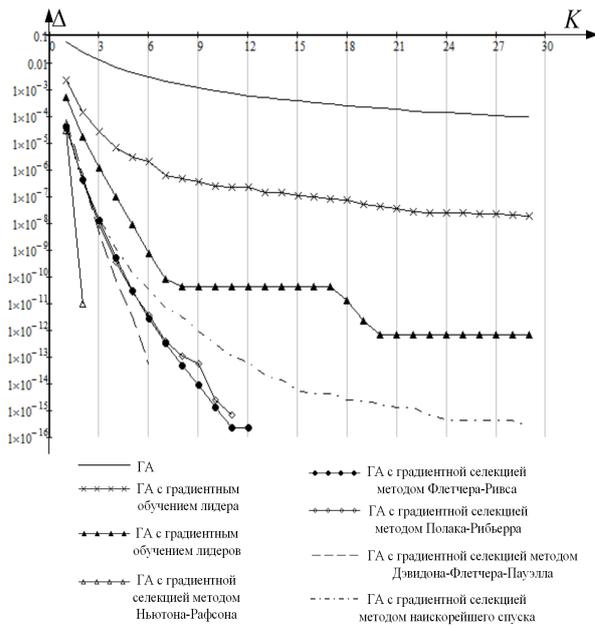


Рис. 5.2. Графики зависимости ошибки определения глобального минимума функций: *а* – двумерная функция (5.9); *б* – двумерная функция (5.10); *в* – двумерная функция (5.11); *г* – двумерная функция (5.12).

мумов (рис. 5.2, *г*), приводит к существенному ухудшению скорости сходимости ГГА.

На рисунках 5.3 представлены результаты зависимости ошибки определения глобального минимума соответствующих целевых функций (5.9)–(5.12) при $M = 2$ от числа итераций K методами ГГА с ГООП и ГА с предложенной модификацией с прогнозированием по модели ARMA(1, 1). Градиентное

обучение в обоих случаях выполнено методом наискорейшего спуска. Из полученных результатов следует более высокая скорость сходимости предложенной модификации при меньших вычислительных затратах алгоритма в сравнении с решением по ГГА с ГООП на единичной итерации.

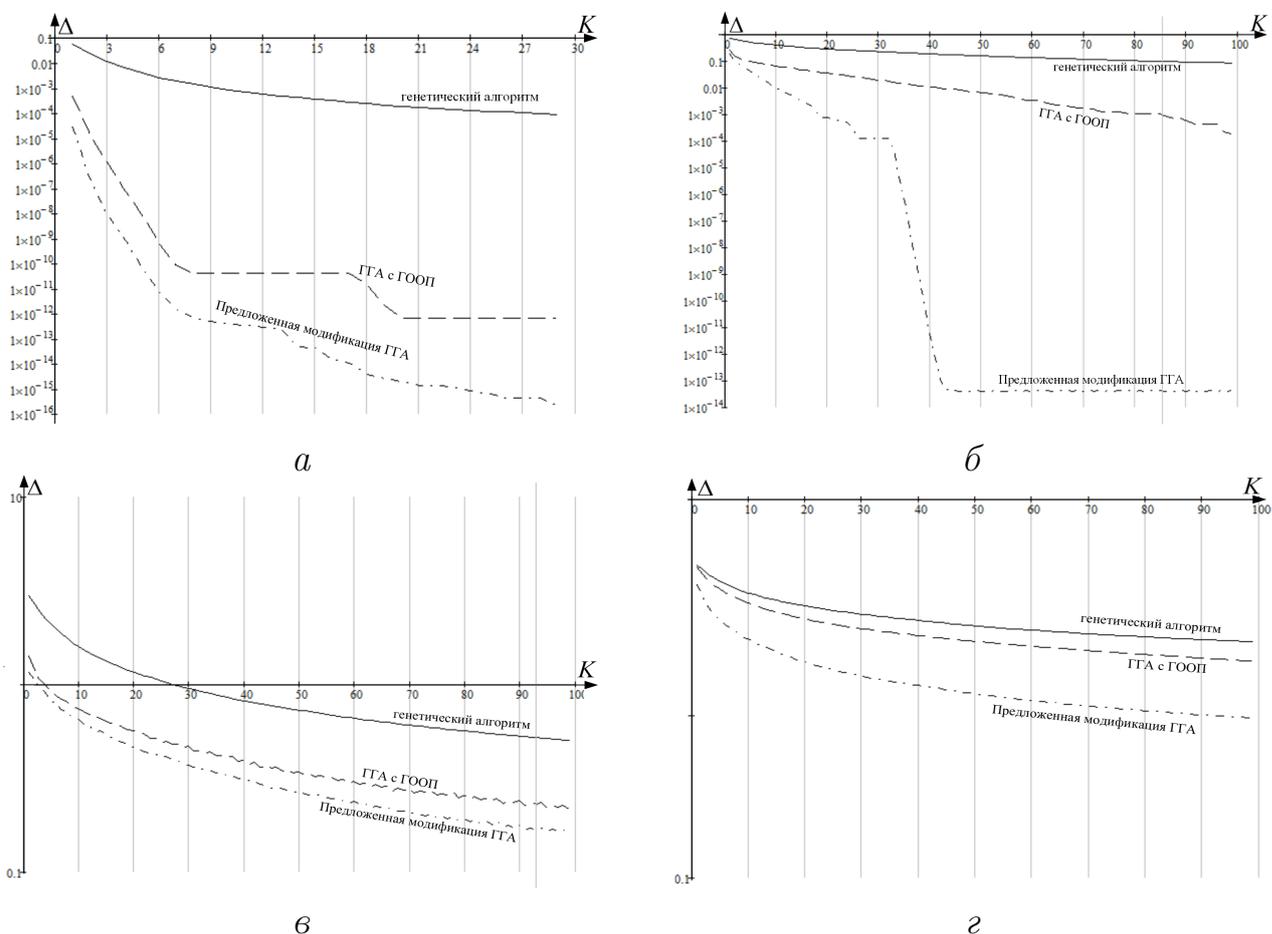


Рис. 5.3. Графики зависимости ошибки определения глобального минимума функций: *a* – двумерная функция (5.9); *б* – двумерная функция (5.10); *в* – двумерная функция (5.11); *г* – двумерная функция (5.12).

В целом, увеличение скорости сходимости алгоритма не может определить однозначную оценку предпочтительности использования предложенной модификации ГГА. Для окончательной оценки эффективности (вычислительная сложность и скорость сходимости) предложенной модификации ГГА для представленных тестовых функций выполнен следующий итоговый вычислительный эксперимент. Время работы алгоритма при реализации в САПР Mathcad ограничено 2 мин. (120 сек) для ЭВМ с параметрами: Intel(R) Core(TM) i7-3612QM CPU 2.10 GHz, ОЗУ 8Гб (досрочная остановка алгоритма осуществ-

ляется при выполнении условий (5.8) при $\Delta = 10^{-5}$). Выходные данные: средние выборочные значения числа итераций алгоритма $N_{\text{ср}}$, средняя выборочная ошибка определения экстремума целевой функции $\Delta_{\text{ср}}$, среднее время работы алгоритма $t_{\text{ср}}$. Результаты указанного эксперимента для размерности целевых функций (5.9)–(5.12) $M = 50$ представлены в приложении Б. Наиболее удачные (с точки зрения точности оценки) реализации алгоритмов по минимизации тестовых функций выделены курсивом. Решения, соответствующие наибольшему быстродействию, выделены полужирным шрифтом.

Из полученных результатов следует, что применение предложенной модификации генетического алгоритма – градиентное обучение особей-лидеров с прогнозированием для многомерных произвольных функций в сравнении с известными решениями обладает наибольшей предпочтительностью как с позиции максимизации скорости сходимости, так и с позиции минимизации вычислительных затрат. Среднее время, соответствующее нахождению глобального оптимума четвертой тестовой функции по предложенной модификации генетического метода, составляет 16 минут 39,907 секунд, в то время как ГА с ГООЛ определяет глобальный оптимум в среднем за 21 минуту 53,481 сек.

Из полученных результатов можно заключить, что реализация алгоритмов глобальной оптимизации по предложенной модификации генетического метода в направлении объединения с известными методами локального поиска и статистического анализа позволяет повысить эффективность численного решения многомерных многоэкстремальных задач, в особенности связанных с оптимизацией, проектированием и управлением АМЛЗА. При этом допускается содержание в целевой функции точек разрыва первого и второго рода. В рамках проведенных вычислительных экспериментов с позиции вычислительной сложности определена предпочтительность предварительного прогнозирования фенотипов родителей популяции с последующим скрещиванием по методу параболической интерполяции и градиентному обучению особей-лидеров в сформированной популяции. Разработанная модификация позволяет перейти к реализации процедур численного решения задач синтеза и управления АМЛЗА.

5.2. Алгоритм структурно-параметрического синтеза адаптивной многолучевой зеркальной антенны

Алгоритм решения задачи структурно-параметрического синтеза антенной системы зеркального типа рассмотрен в [18, 161, 172]. С учетом [161], исследования критериев и показателей эффективности (см. пп. 1.2) и выполненной формализации проблемы оптимального управления АМЛЗА (см. пп. 1.4) при $\eta_{\text{КПД}}(\theta, \xi) \rightarrow \max$ для фиксированных (θ, ξ) сведем задачу синтеза к формированию тождества (рис. 5.4) между падающим от рефлектора S ЭМП в раскрыв Ω_m m -го излучателя ($m = \overline{1, M}$) с комплексно сопряженным полем соответствующего излучателя в режиме передачи [72]:

$$\begin{aligned}
 E_{\text{прм}}^{x''m} &= \iint_{\Omega_m} \left[(H_y^e + H_y^h) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - (H_x^e + H_x^h) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right] d\Omega + \\
 &+ \iint_{\Omega_m} \left\{ i\omega \epsilon_a \left[2E_z^e \frac{\partial \Psi}{\partial x} + (E_x^e + E_x^h) \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right] - (H_y^e + H_y^h) \kappa^2 \Psi \right\} d\Omega; \\
 E_{\text{прм}}^{y''m} &= \iint_{\Omega_m} \left[(H_y^e + H_y^h) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - (H_x^e + H_x^h) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right] d\Omega + \\
 &+ \iint_{\Omega_m} \left\{ i\omega \epsilon_a \left[(E_y^e + E_y^h) \frac{\partial \Psi}{\partial z} - 2E_z^e \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right] - (H_x^e + H_x^h) \kappa^2 \Psi \right\} d\Omega; \\
 E_{\text{прм}}^{z''m} &= - \iint_{\Omega_m} \left\{ i\omega \epsilon_a \left[(E_x^e + E_x^h) \frac{\partial \Psi}{\partial x} - 2E_z^e \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right] + \right. \\
 &\left. + (H_y^e + H_y^h) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} - (H_x^e + H_x^h) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z} \right\} d\Omega,
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

при представлении ЭМП в Ω_m в виде суперпозиции $\vec{E}_m^{(o)} = \vec{E}_m^h + \vec{E}_m^e$ ТМ- и ТЕ-волн [24].

В выражении (5.13) Ψ – функция Грина, удовлетворяющая условиям Дирихле и Неймана [179] в плоскости раскрыва Ω_m m -го излучателя; $E_{\text{прм}}^{x''m}$, $E_{\text{прм}}^{y''m}$, $E_{\text{прм}}^{z''m}$ – составляющие напряженности электрического поля в Ω_m , формируемые

рефлектором в режиме приема с направления (θ, ξ) в раскрыве m -го излучателя. Составляющие $E_{\text{прм}}^{x''m}$, $E_{\text{прм}}^{y''m}$, $E_{\text{прм}}^{z''m}$ определяются в соответствующей системе координат $O_m X_m Y_m Z_m$ m -го излучателя (задаются точкой $x_m^{(o)}$, $y_m^{(o)}$, $z_m^{(o)}$ и ортами векторов \vec{T}_{1m} , \vec{T}_{2m} , \vec{T}_{3m} , см. рис. 5.4).

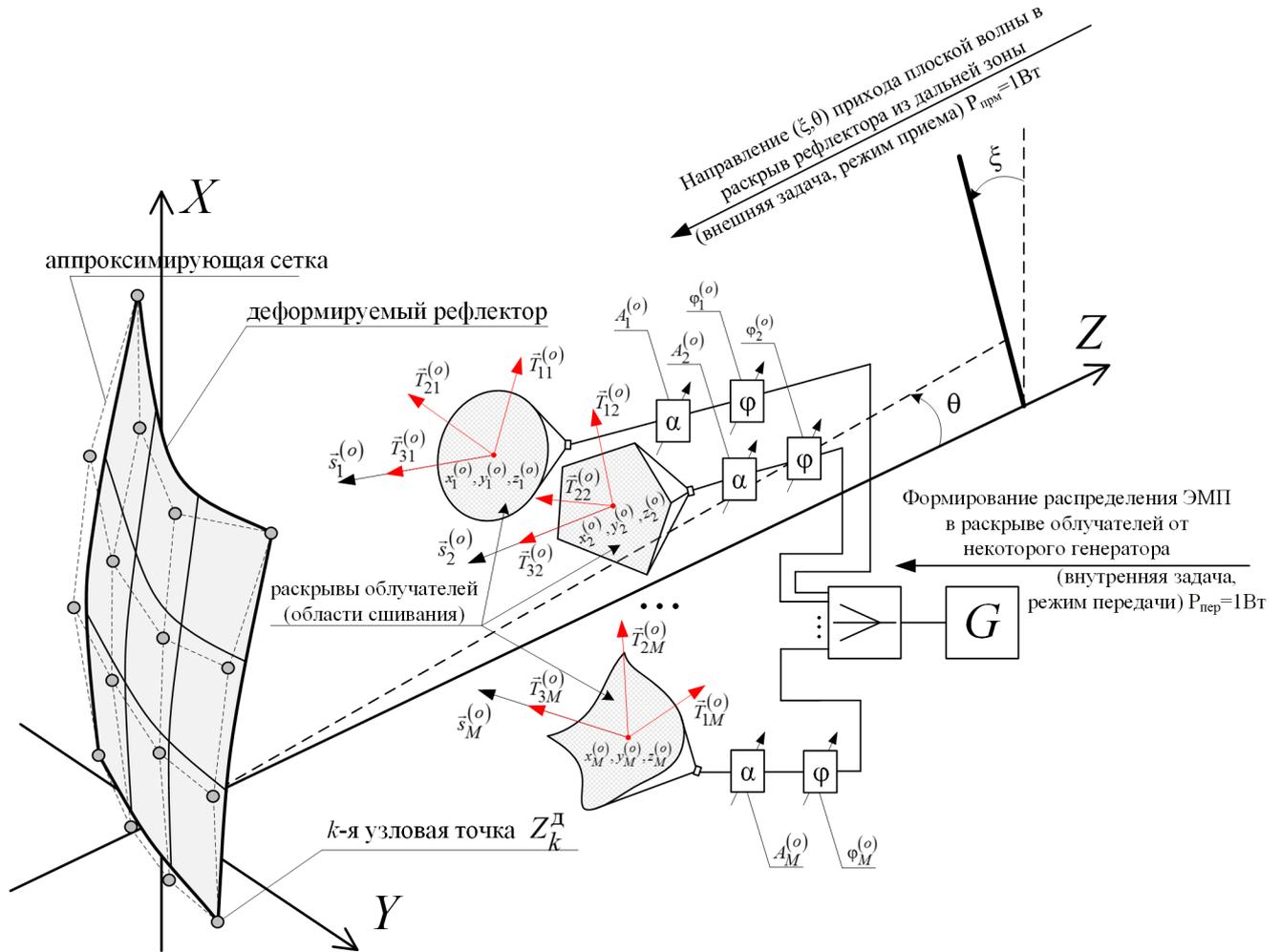


Рис. 5.4. Пример геометрического представления постановки задачи синтеза адаптивной многолучевой зеркальной антенны

Для заданных представлений (рис. 5.4) структурно-параметрический синтез АМЛЗА заключается в обеспечении тождества (5.13) при вариации структурными и параметрическими характеристиками антенны, определяемых через вектор управляющих воздействий \vec{u} (см. пп. 1.4): амплитуда $A_m^{(o)}$ и фаза $\varphi_m^{(o)}$ тока возбуждения m -го излучателя; угол $\nu_m^{(o)}$ поворота плоскости раскрыва Ω_m m -го излучателя в системе координат рефлектора; координаты центра раскры-

ва m -го излучателя – $x_m^{(o)}, y_m^{(o)}, z_m^{(o)}$; орт нормали $\vec{s}_m^{(o)}$ к плоскости Ω_m , характеризующий ориентацию m -го излучателя; форма отражающей поверхности, формируемая K -мерной системой приводов, которые воздействуют на упругую поверхность рефлектора при параметризации переменной Z_k^D положения k -го деформирующего стержня относительно оси OZ , где $k = \overline{1, K}$ (см. пп. 4.3). Для дальнейшего удобства записи введем обозначения $\vec{u}^0 = \{A_1^{(o)}, \dots, A_M^{(o)}, \varphi_1^{(o)}, \dots, \varphi_M^{(o)}\}$; $\vec{u}^1 = \{\mathbf{v}_1^{(o)}, \dots, \mathbf{v}_M^{(o)}\}$; $\vec{u}^2 = \{x_1^{(o)}, y_1^{(o)}, z_1^{(o)}, \dots, x_M^{(o)}, y_M^{(o)}, z_M^{(o)}, \vec{s}_1^{(o)}, \dots, \vec{s}_M^{(o)}\}$; $\vec{u}^3 = \vec{Z}^D$ при $\vec{u} = \{\vec{u}^0, \vec{u}^1, \vec{u}^2, \vec{u}^3\}$.

Таким образом обобщенную постановку задачи структурно-параметрического синтеза АМЛЗА с учетом [18, 161, 172] и введенных обозначений сведем к последовательному поиску решений систем нелинейных уравнений вида:

$$\begin{cases} \vec{F}_1^{\text{прм}}(\vec{u}^1, \vec{u}^2, \vec{u}^3) - \vec{F}_1^{\text{пер}}(\vec{u}^0, \vec{u}^1, \vec{u}^2) = 0; \\ \dots \\ \vec{F}_M^{\text{прм}}(\vec{u}^1, \vec{u}^2, \vec{u}^3) - \vec{F}_M^{\text{пер}}(\vec{u}^0, \vec{u}^1, \vec{u}^2) = 0, \end{cases} \quad (5.14)$$

с учетом ограничений на невозможность пересечения проекций на плоскость OXY общей системы координат АС областей раскрывов излучателей $\tilde{\Omega}_{m_1} \cap \tilde{\Omega}_{m_2} = \emptyset$ при $m_1, m_2 \in \{\overline{1, M}\}$, $m_1 \neq m_2$, задаваемых функцией $g(\vec{u}^1, \vec{u}^2)$ по правилам из [161, 172].

В выражении (5.14) m -е функции $\vec{F}_m^{\text{прм}}(\vec{u}^1, \vec{u}^2, \vec{u}^3)$ определяют правую часть системы (5.13), $\vec{F}_1^{\text{пер}}(\vec{u}^0, \vec{u}^1, \vec{u}^2)$ – левую.

Сведем задачу структурно-параметрического синтеза (5.14) с учетом ограничений к задаче нахождения последовательности глобальных экстремумов n -гомерной многоэкстремальной функции в постановке метода штрафных функций [87] при увеличивающемся на каждой v -й итерации параметре штрафа \mathcal{R}_v :

$$\left| \vec{F}(\mathcal{R}_v, \vec{u}) \right| \rightarrow \min_{\vec{u}}, \quad (5.15)$$

где $\vec{F}(\mathcal{R}_v, \vec{u}) = (F_m(\mathcal{R}_v, \vec{u}))_M$ при $F_m(\mathcal{R}_v, \vec{u}) = \vec{F}_m^{\text{прм}}(\vec{u}^1, \vec{u}^2, \vec{u}^3) - \vec{F}_m^{\text{пер}}(\vec{u}^0, \vec{u}^1, \vec{u}^2) + \mathcal{R}_v g(\vec{u}^1, \vec{u}^2)$.

На каждой v -й итерации гибридным генетическим методом [105] с градиентным обучением (стратегия градиентного обучения особей-лидеров основывается на градиентном методе с переменной метрикой Дэвидона–Флэтчера–Пауэлла [87]) и прогнозированием по модели $ARMA(1, 1)$ осуществляется поиск вектора \vec{u}^v , удовлетворяющего решению задачи (5.15) при заданном параметре штрафа \mathcal{R}_v . Условиями останковки алгоритма являются [161]:

$$v > K_{\max} \vee \sum_{j=1}^{n_{\text{л}}} |\vec{u}_j^v| \leq \Delta_1 \vee \sum_{j=1}^{n_{\text{л}}} \vec{F}(\mathcal{R}_v, \vec{u}_j^v) \leq \Delta_2, \quad (5.16)$$

где K_{\max} – максимально-допустимое число итерация решения задачи (5.15); \vec{u}_j^v – значения вектора \vec{u} переменных для j -й особи и v -й итерации; Δ_1 и Δ_2 – малые положительные числа, определяющие точность вычисления.

Способы выбора начального значения параметра штрафа \mathcal{R}_1 и правила его увеличения рассмотрены в [223] с учетом решений из [273].

Исходная популяция (начальное приближение) формируется с учетом возможной декомпозиции [204] общей задачи синтеза и проведенного в [161] исследования уравнений вида (5.13), определяющего вычислительную сложность решения задачи структурно-параметрического синтеза, первоначального выбора типовой конструкции и задания предъявляемых требований к формируемой излучающей системе. Выбор начального приближения предлагается осуществить по следующим этапам: 1) параметрический синтез группового облучателя, состоящего из M излучателей, сориентированных в геометрический центр заданной отражающей поверхности, при вариации \vec{u}^0, \vec{u}^1 ; 2) для найденного набора амплитуд и фаз токов возбуждения и поляризационных углов решить задачу структурного синтеза группового облучателя, определяющего задание положения и ориентации излучающих элементов при вариации \vec{u}^2 ; 3) решить итоговую задачу структурно-параметрического синтеза группового облучателя при вариации \vec{u}^0, \vec{u}^1 и \vec{u}^2 ; 4) с учетом найденных структурных и параметрических характеристик группового облучателя выполнить решение задачи синтеза отражающей поверхности АМЛЗА при вариации \vec{u}^3 . Реализация частных алгоритмов поиска начальных приближений представлена в [161]. Блок-схема

итогового алгоритма структурно-параметрического синтеза АМЛЗА отражена на рисунке 5.5.

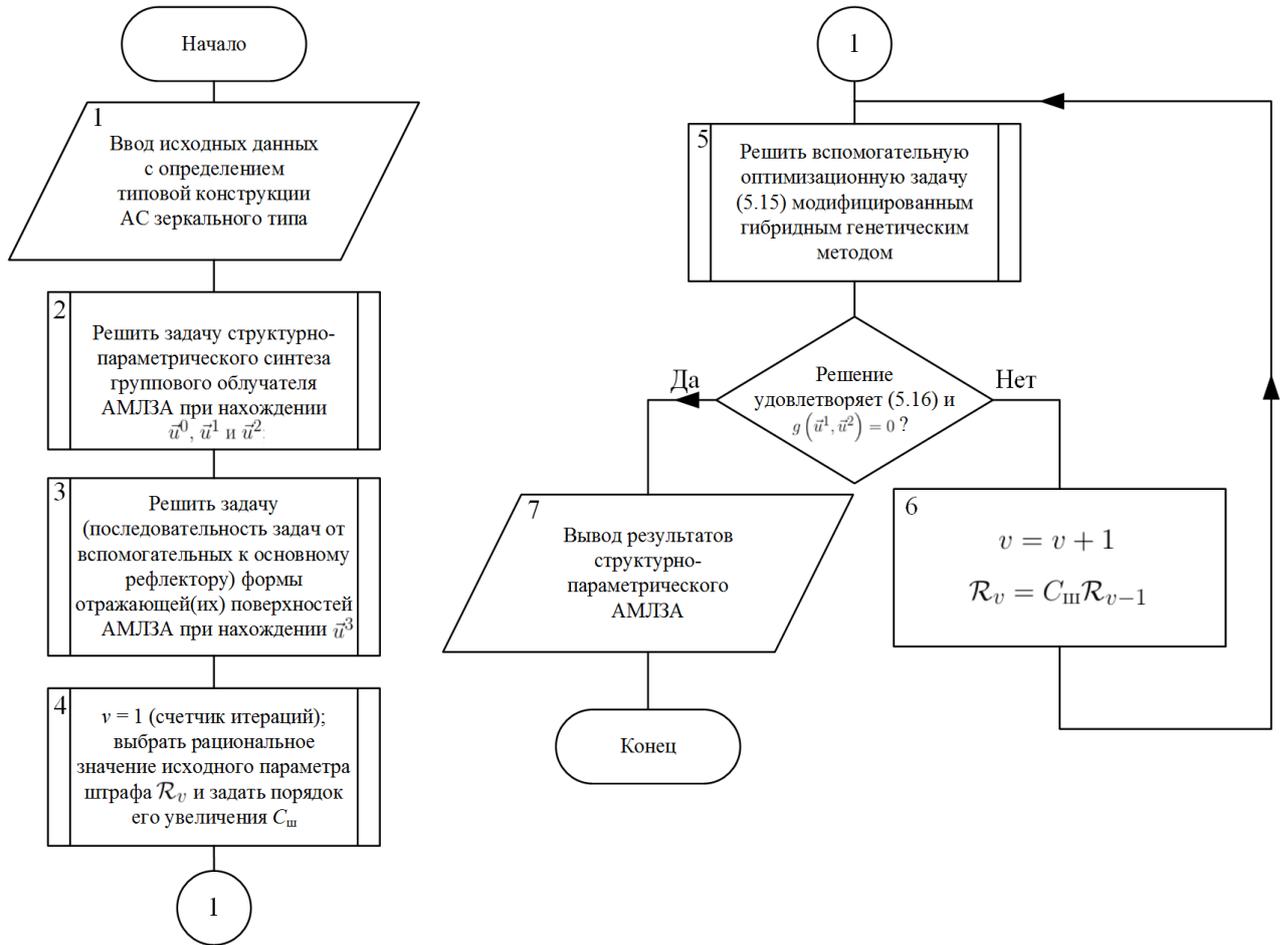


Рис. 5.5. Блок-схема алгоритма структурно-параметрического синтеза адаптивной многолучевой зеркальной антенны

В качестве примера работы разработанного алгоритма (рис. 5.5) рассмотрим решение задачи структурно-параметрического синтеза АМЛЗА, заданной следующими исходными параметрами: $\lambda = 0,2$ м; $M' = 1$; Ω'_1 – шестиугольник, координатами вершин которого являются $P'_1 = (0; 16\lambda)$, $P'_2 = (14\lambda; 6\lambda)$, $P'_3 = (14\lambda; -6\lambda)$, $P'_4 = (0; -16\lambda)$, $P'_5 = (-13\lambda; -10\lambda)$, $P'_6 = (-13\lambda; 10\lambda)$; исходная поверхность – параболоид $Z_1(x, y) = 0,25(x^2 + y^2)/f$ при $f = 10\lambda$; системы координат $OXYZ$ и $O'_1X'_1Y'_1Z'_1$ совпадают; $M = 4$; $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ и Ω_4 – правильные многоугольники с числом вершин $N_1 = 3, N_2 = 5, N_3 = 6$ и $N_4 = 4$ соответственно, радиус вписанной окружности для которых равен $0,9\lambda$; $x_m^{(o)} = 0, y_1^{(o)} = 3,25\lambda, y_2^{(o)} = 1,25\lambda, y_3^{(o)} = -1,25\lambda, y_4^{(o)} = -3,25\lambda, z_m^{(o)} = f$; орт-

векторы $\vec{s}_m^{(o)}$ выбраны по ориентации раскрывов соответствующих m -х излучателей в центр системы координат рефлектора; $A_m^{(o)} = 1$, $\varphi_m^{(o)} = 0^\circ$ и $\nu_1^{(o)} = 0^\circ$, $\nu_2^{(o)} = 45^\circ$, $\nu_3^{(o)} = \nu_4^{(o)} = -135^\circ$. В приложении В представлены распределения ЭМП, заданных в раскрывах излучателей. При решении задачи синтеза требуется максимизировать КПД АМЛЗА в направлениях приема/передачи сигналов в H -плоскости ($\xi = 0^\circ$) для углов отклонения $\theta = -5^\circ, 5^\circ$. На рисунке 5.6 отражены геометрия синтезируемой антенной системы и реализуемая исходная ДН по мощности электрического поля.

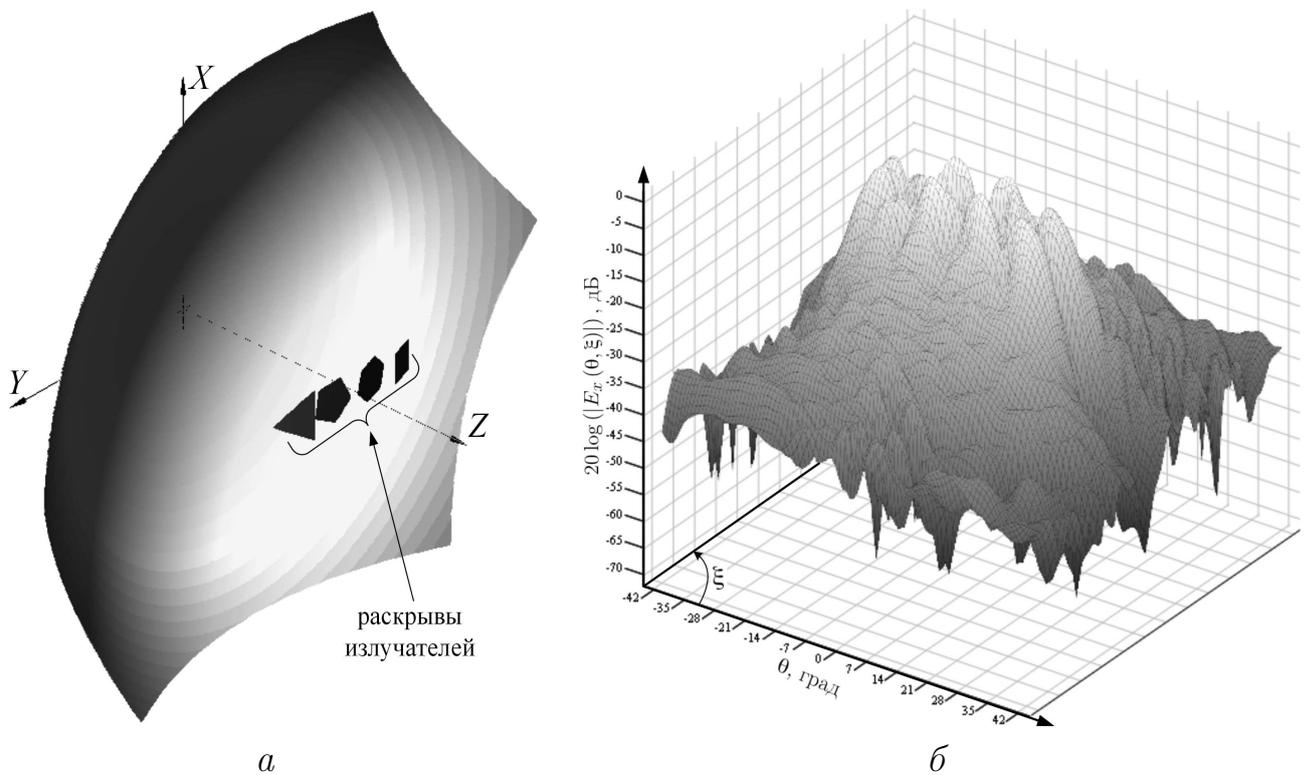


Рис. 5.6. Исходная геометрия синтезируемой антенной системы (а) и реализуемая диаграмма направленности (б)

На рисунках 5.7, 5.8 представлены срезы в H -плоскости ДН по мощности электрического поля, реализуемые АС зеркального типа после завершения этапов синтеза при поиске начального приближения и структурно-параметрического синтеза АМЛЗА. На рисунке 5.9 отражены геометрия антенной системы и реализуемая итоговая ДН по мощности электрического поля после решения задачи структурно-параметрического синтеза АМЛЗА.

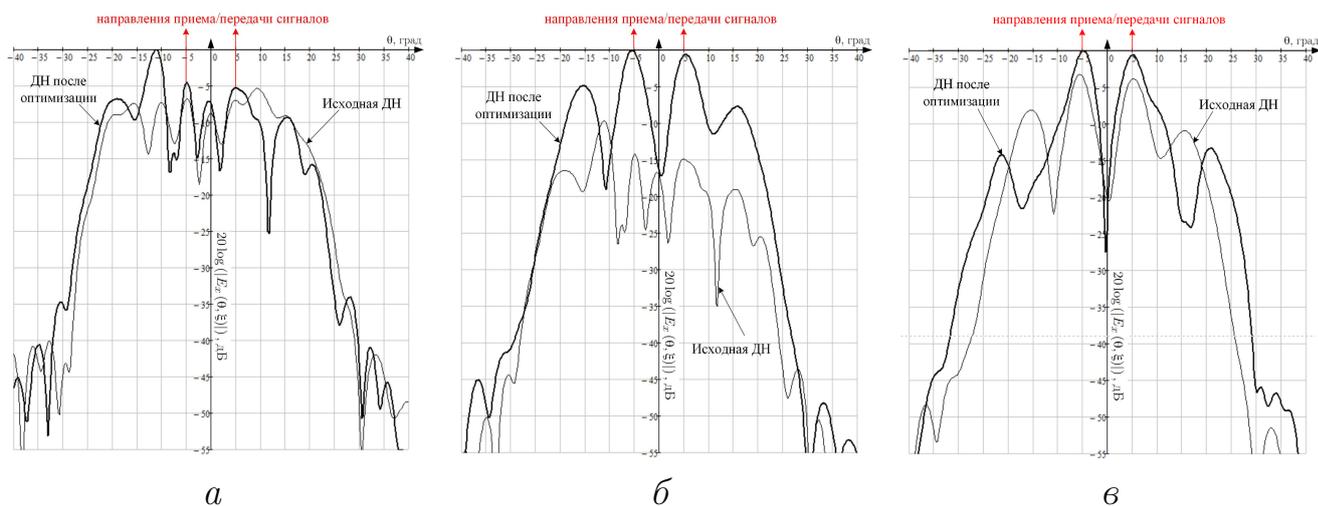


Рис. 5.7. Реализуемые ДН АМЛЗА в H -плоскости после последовательного решения задач синтеза группового облучателя: a – параметрического; b – структурного; v – структурно-параметрического

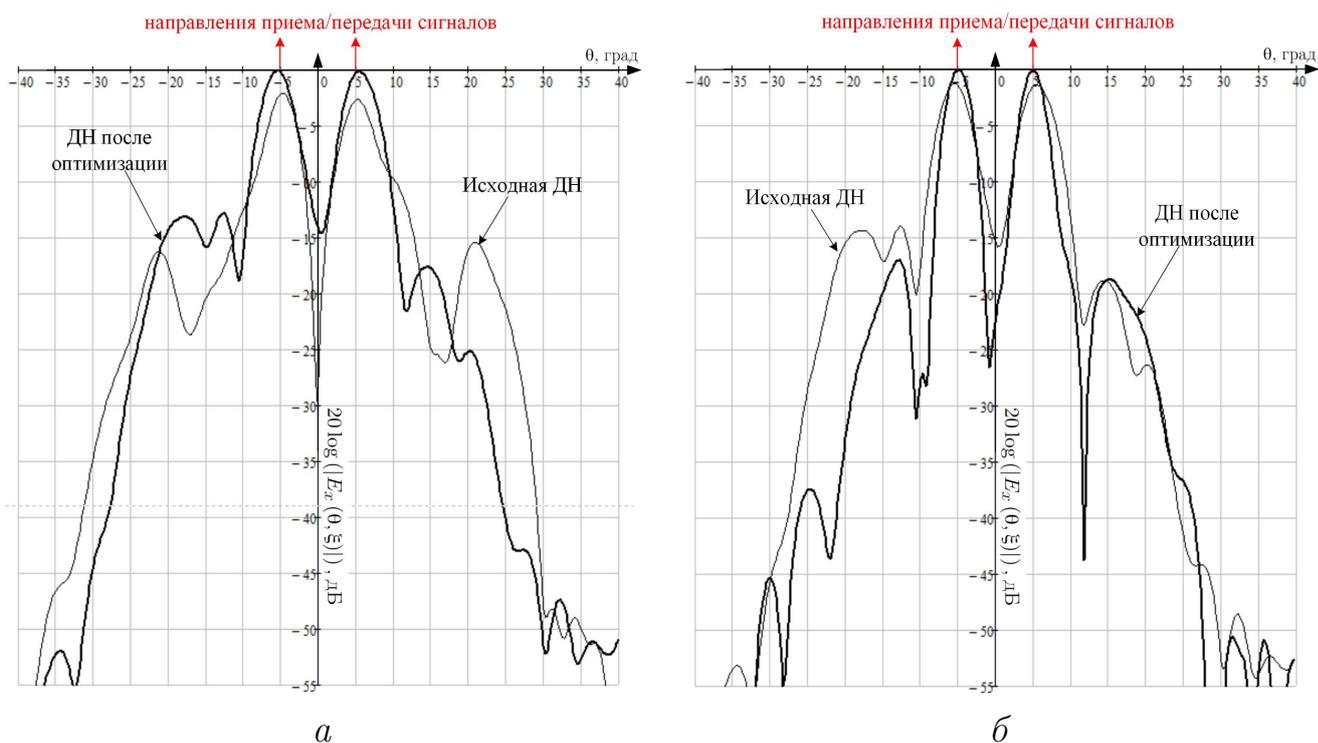


Рис. 5.8. Реализуемые ДН АМЛЗА в H -плоскости после решения задач синтеза: a – отражающей поверхности; $б$ – структурно-параметрического

Из полученных результатов (см. рис. 5.7–5.9) следует, что разработанный алгоритм структурно-параметрического синтеза АМЛЗА с учетом результатов моделирования, проведенных в [161], позволяет в среднем повысить КУ в на-

правлении приема/передачи сигналов на величину 3, 125 дБ, при этом КПД АС увеличивается в 2, 15 раза.

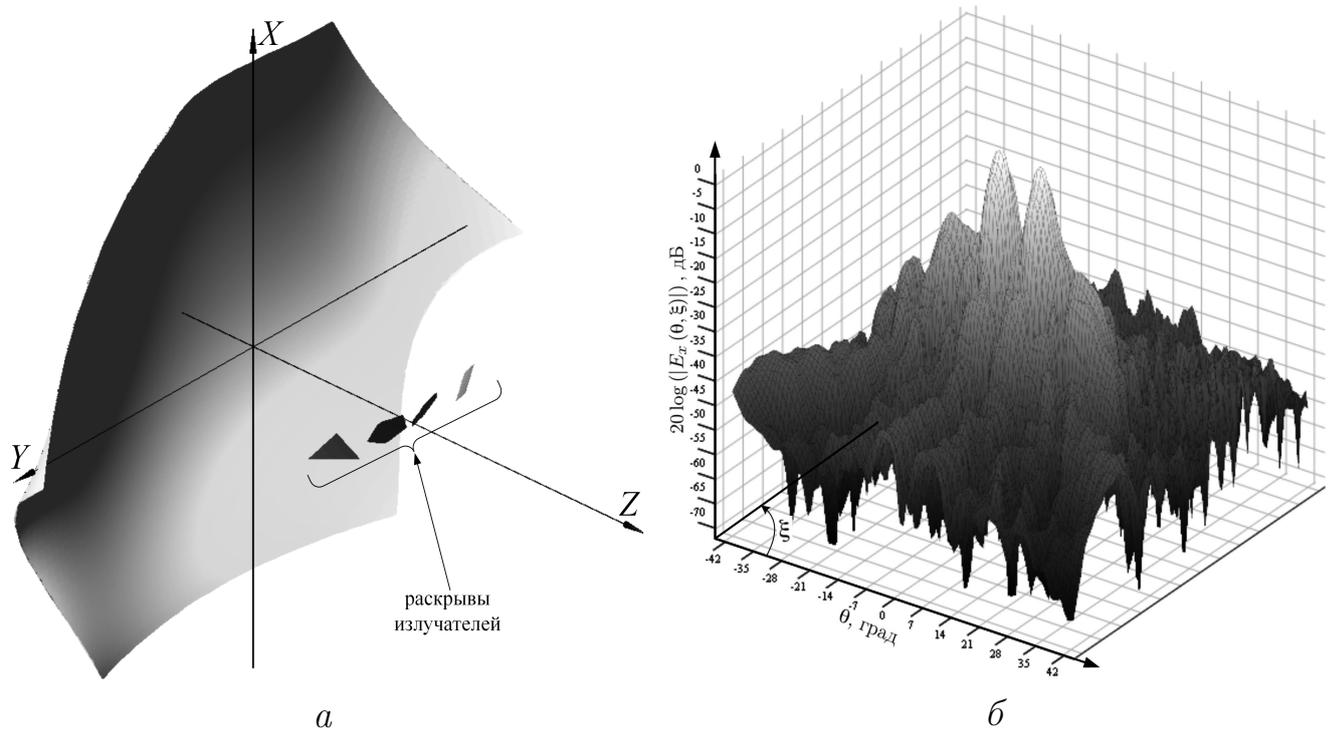


Рис. 5.9. Итоговая геометрия синтезируемой антенной системы (а) и реализуемая диаграмма направленности (б)

Решение задачи структурно-параметрического синтеза АМЛЗА с учетом заданной формализации проблемы оптимального управления (см. пп. 1.4) рассмотрено при вариации \vec{u} . Следует отметить, что для ряда задач, возникающих на этапе эскизного проектирования АМЛЗА, число варьируемых параметров может быть увеличено при изменении числа M излучателей и M' отражающих поверхностей, входящих в АС зеркального типа, с учетом конструктивно-технологического ограничения на максимально допустимую стоимость синтезируемой конструкции. Обобщенная постановка и принцип решения указанной задачи рассмотрены в [18, 20]. При этом в вектор \vec{u} добавляются дополнительные булевы переменные, определяющие задействование в облучающей и зеркальной системах соответствующие элементы [18]. Алгоритм решения аналогичен разработанному (рис. 5.5) при том, что исходная задача с булевыми переменными сводится к нелинейной при введении дополнительных ограничений из [223, 229–234, 243].

В целом сформированная совокупность методов и алгоритмов математического моделирования и синтеза АМЛЗА с учетом выполненной формализации проблемы исследования (см. пп. 1.4) позволяет перейти к непосредственной разработке основного прикладного результата настоящего исследования – алгоритму адаптации многолучевой зеркальной антенны.

5.3. Алгоритм адаптации многолучевой зеркальной антенны

Сформированная математическая теория АМЛЗА с учетом исследований [14, 17, 244–246] предполагают построение алгоритма адаптации по рекуррентно-итерационной модели управления нелинейной динамической сосредоточенной системой [247–249]. Для заданной физико-математической модели управления АМЛЗА (см. пп. 1.4) основой адаптации структуры и параметров АС при наблюдении (1.14) служит решение задач:

$$\sum_{m=1}^M \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \left\{ \frac{\partial I_{p,j}^{(m)}(\vec{u}, t)}{\partial \vec{u}} \left(I_j^{(m)}(t) - I_{p,j}^{(m)}(\vec{u}, t) \right) + \psi_j^{(m)}(t) \sum_{j' \in \mathbb{M}_p} \frac{\partial Q_{jj'}^{(m)}(\vec{u})}{\partial \vec{u}} I_{j'}^{(m)}(t) \right\} = 0; \quad (5.17)$$

$$\vec{I}^{(m)}(\vec{u}, t) = \mathbf{Q}_m(\vec{u}) \vec{I}^{(m)}(t); \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial \psi_j^{(m)}(t)}{\partial t} = \sum_{m=1}^M \left\{ \left(I_j^{(m)}(t) - I_{p,j}^{(m)}(\vec{u}, t) \right) - \sum_{j' \in \mathbb{M}_p} \psi_{j'}^{(m)}(t) Q_{j'j}^{(m)}(\vec{u}) \right\}, \quad (5.19)$$

где $m = \overline{1, M}$; $j \in \mathbb{M}_p$; $t \in [t_0, t_1]$; векторные функции $\vec{I}_p^{(m)}(\vec{u}, t)$, $\vec{I}^{(m)}(t)$, $\vec{I}^{(m)}(\vec{u}, t)$, $\vec{\psi}^{(m)}(t)$, $\vec{\Psi}^{(m)}(t)$ и матрица $\mathbf{Q}_m(\vec{u})$ определяются в соответствии с (1.21), (1.25), (1.28)–(1.30).

Решение задач (5.17)–(5.19) предполагается выполнять с учетом заданных ранее ограничений (см. пп. 5.2) на этапе разработки алгоритма структурно-параметрического синтеза АМЛЗА и начальных условий $\vec{I}^{(m)}(t_0) = \vec{I}_0^{(m)}$; $\vec{\psi}^{(m)}(t_0) = \vec{\Psi}_0^{(m)}$; $\vec{I}^{(m)}(t_0) = 0$; $\vec{\Psi}^{(m)}(t_0) = 0$. Алгоритм формируется для

следующих обозначений и условий: $\tau \in [t_0, t_1]$; непрерывные значения элементов вектора наблюдения (1.14) оцифровываются на интервале управления (N отсчетов, $n = \overline{0, N-1}$) с учетом теоремы Котельникова при $\Delta = (\tau_{n+1} - \tau_n) \leq \frac{1}{2f_c}$, где f_c – ширина полосы принимаемого сигнала; каждый интервал $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ дискретизируется отсчетами $v = 0, 1, 2, \dots$, (число отсчетов определяет степень точности численного решения). Основные этапы работы алгоритма решения задачи адаптации (5.17)–(5.19):

1) максимально-правдоподобная оценка плотности потока энергии $\bar{I}^{\langle m \rangle}(\tau_{n+1})$ в раскрывах излучателей в дискретный момент времени τ_{n+1} :

- в дискретные моменты времени $\tau_v^n \in [\tau_n, \tau_{n+1}]$ измерение $\vec{\xi}_{\tau_v^n}$ (1.14);
- для принятых значений отсчетов ($v = 0, 1, 2, \dots$) вектора сигналов $\vec{\xi}_{\tau_v^n}$ вычислить элементы, составляющие $\bar{G}^{\langle 1 \rangle}(\vec{\xi}, \vec{u}_n, \tau)$ и $\mathbf{G}^{\langle 2 \rangle}(\vec{\xi}, \vec{u}_n, \tau)$ ($\vec{u}_n = \vec{u}(\tau_n)$) в (1.15) относительно вектора сноса и матрицы диффузии соответственно с учетом правил из [236, 237];

- в анализируемый момент времени τ_{n+1} функциями по разработанным методам математического моделирования АМЛЗА (см. главы 2, 4) рассчитать элементы матрицы $\mathbf{Q}_m(\vec{u}_n)$;

- вычислить приближенные значения $\bar{I}^{\langle m \rangle}(\tau_{n+1})$ и $\vec{\psi}^{\langle m \rangle}(\tau_{n+1})$ при решении уравнений (5.18), (5.19) для момента времени τ_{n+1} с использованием схем Рунге–Кутты [104] с учетом выбранного числа отсчетов $v = 0, 1, 2, \dots$, на интервале $[\tau_n, \tau_{n+1}]$;

2) вычисление вектора управляющих воздействий \vec{u}_{n+1} для момента времени τ_{n+1} ($n = 0, 1, 2, \dots$) при решении уравнения (5.17) для $m = \overline{1, M}$ модифицированным гибридным генетическим методом с учетом заданной оценки $\bar{I}^{\langle m \rangle}(\tau_{n+1})$, $\vec{\psi}^{\langle m \rangle}(\tau_{n+1})$ на $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ и ограничений, формализованных на этапе решения задачи структурно-параметрического синтеза АМЛЗА.

Для улучшения точности оценки матрицы диффузий на ограниченной по объему выборке отсчетов ($v = \overline{1, V}$) вектора сигналов $\vec{\xi}_{\tau_v^n}$ предполагается использовать следующее утверждение [236] по оценке дисперсионно-ковариационной матрицы (ДКМ).

Теорема 22. Пусть $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_v, \dots, \vec{\xi}_V \in \mathbb{C}$ есть конечная последовательность векторов размерности M случайных величин, распределенных по многомерному нормальному закону. Тогда максимально правдоподобная оценка ДКМ $\hat{\mathbf{D}}$ полученной выборки объема V определяется отношением

$$\hat{\mathbf{D}} = \frac{2}{V(V-1)} \sum_{v=1}^V \left\{ (V+1-v) \left[\vec{\xi}_v - \vec{\xi} \right] \cdot \left[\vec{\xi}_v - \vec{\xi} \right]^T \right\}. \quad (5.20)$$

В выражении (5.20) $\vec{\xi} = \frac{1}{V} \sum_{v=1}^V \vec{\xi}_v$ – вектор средневывборочных значений наблюдаемого вектора случайных величин $\vec{\xi}$.

Доказательство. Известно [268], что функция плотности распределения наблюдаемой ДКМ \mathbf{D} определяется выражением (функция распределения плотности вероятности Уишарта [272])

$$W(v, \mathbf{D}) = \frac{|\mathbf{A}_v|^{(v-M)/2} \cdot e^{-0,5tr(\mathbf{A}_v \mathbf{D}^{-1})}}{2^{(v-1)M/2} \cdot \pi^{M(M-1)/4} \cdot |\mathbf{D}|^{(v-1)/2} \cdot \prod_{m=1}^M \Gamma\left(\frac{v-m}{2}\right)}, \quad (5.21)$$

где $tr(\cdot)$ – оператор, определяющий след матрицы [269]; $\mathbf{A}_v = \sum_{n=1}^v \left\{ \left[\vec{\xi}_n - \vec{\xi} \right] \times \left[\vec{\xi}_n - \vec{\xi} \right]^T \right\}$ – наблюдаемая на выборке размера v ДКМ [270].

Для заданного соотношения (5.21) функция максимально правдоподобной оценки ДКМ $\hat{\mathbf{D}}$ будет определяться в виде:

$$f(\mathbf{D}) = \sum_{v=1}^V \ln [W(v, \mathbf{D})] \rightarrow \max_{\mathbf{D}}. \quad (5.22)$$

Сведем решение задачи (5.22) к системе уравнений при определении аналитического дифференциала скалярной функции $f(\mathbf{D})$ по матричному аргументу \mathbf{D} , в соответствии с правилами, представленными в [271],:

$$\frac{df(\mathbf{D})}{d\mathbf{D}} = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^V \left[\mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}_v \mathbf{D}^{-1} - (v-1) \mathbf{D}^{-1} \right]. \quad (5.23)$$

Приравняв полученную систему (5.23) к нулю, определим решение по \mathbf{D} , удовлетворяющее условию:

$$\mathbf{D}^{-1} \sum_{v=1}^V [\mathbf{A}_v] \mathbf{D}^{-1} - \sum_{v=1}^V [(v-1)] \mathbf{D}^{-1} = 0. \quad (5.24)$$

С учетом равенства $\sum_{v=1}^V [(v-1)] = \frac{1}{2}V(V-1)$ сведем выражение (5.24) к следующему виду

$$\mathbf{D}^{-1} \sum_{v=1}^V [\mathbf{A}_v] \mathbf{D}^{-1} - \frac{1}{2}V(V-1) \mathbf{D}^{-1} = 0. \quad (5.25)$$

Умножив слева обе части равенства (5.25) на \mathbf{D} получим:

$$\sum_{v=1}^V [\mathbf{A}_v] \mathbf{D}^{-1} - \frac{1}{2}V(V-1) \mathbf{E} = 0, \quad (5.26)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица размерности $M \times M$.

Выразив \mathbf{D} из (5.26), получим

$$\mathbf{D} = \frac{2}{V(V-1)} \sum_{v=1}^V [\mathbf{A}_v], \quad (5.27)$$

Подставив в (5.27) определение \mathbf{A}_v получим искомое выражение (5.20) максимально правдоподобной оценки ДКМ $\hat{\mathbf{D}}$. \square

Из результатов исследований, проведенных в [236, 237], следует, что сформированное решение (5.20) позволяет на выборках малого объема получить наиболее точную оценку ДКМ в сравнении с известными решениями.

С учетом выделенных основных этапов процедуры решения задачи адаптации формируется алгоритм адаптации многолучевой зеркальной антенны. Блок-схема алгоритма представлена на рисунке 5.10.

В качестве примера в Matlab проведем математическое моделирование алгоритма адаптации АМЛЗА, состоящей из трех рупорных облучателей с треугольным, прямоугольным и круглым раскрытиями. Поверхность деформируемого рефлектора исходно задана параболическим цилиндром. Параметры син-

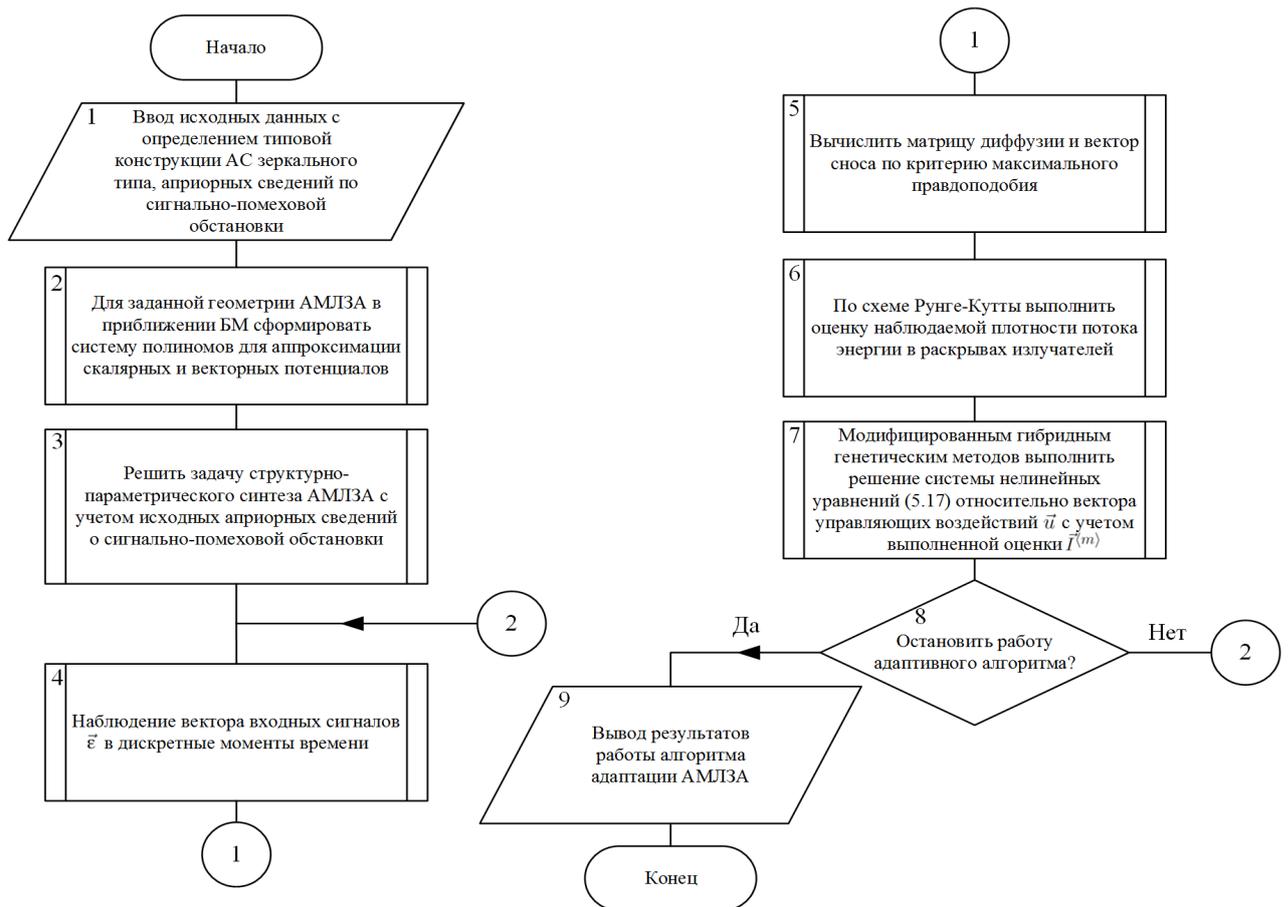


Рис. 5.10. Блок-схема алгоритма адаптации многолучевой зеркальной антенны

тезируемой антенной системы следующие: средняя длина волны $\lambda = 0,05$ м из спектра принимаемого сигнала, радиус вписанной в раскрывы излучателей окружности $1,25\lambda$ (раскрывы заданы правильными многоугольниками), ширина раскрыва рефлектора по оси OX 20λ , длина раскрыва рефлектора по оси OY 30λ , фокусное расстояние $f=40\lambda$, исходная поверхность деформируемого рефлектора $Z(x, y) = 0,25(x^2 + y^2)/f$, направление приема сигнала $\varsigma(t)$ выбрано в H -плоскости для угла отклонения $\theta = 0^\circ$. Адаптивная антенна принимает сигнал $\varsigma(t)$ с информационной скоростью 512 кБит/с и модуляцией QPSK при воздействии в H -плоскости трех некоррелированных помеховых сигналов $\tilde{\eta}_1(t)$, $\tilde{\eta}_2(t)$, $\tilde{\eta}_3(t)$ в соответствующих углах отклонения $\theta_1 = -10^\circ$, $\theta_2 = -5^\circ$, $\theta_3 = 8^\circ$. Предполагается, что облучатели подключены к прямоугольным волноводам с шириной $0,7\lambda$ и высотой $0,4\lambda$ (для моделируемой задачи граница раскрыва волновода – L_m). Число деформирующих стержней K вы-

брано равным 25 при определении положения их воздействия на отражающую поверхность рефлектора. На рисунке 5.11 представлены геометрии АМЛЗА: исходная и реализованная после решения задачи адаптивного приема.

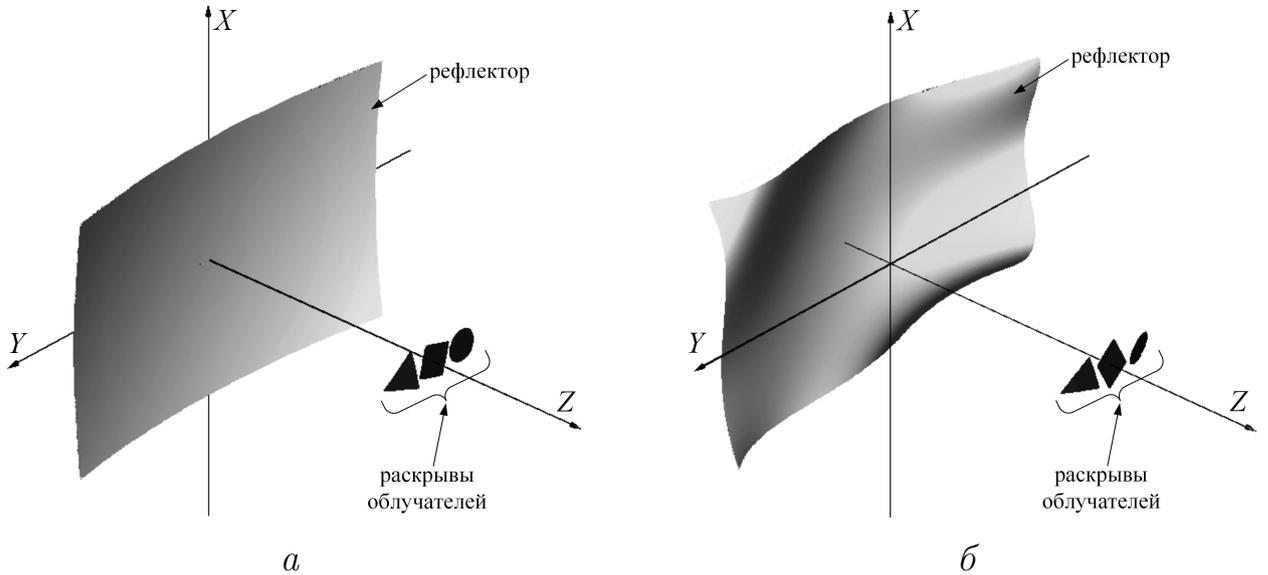


Рис. 5.11. Геометрия АМЛЗА до (а) и после (б) адаптации

На рисунке 5.12 отражены реализуемая средняя ДН [250] при адаптивном приеме и временная зависимость отношения сигнал/(шум плюс помеха) SNR при адаптации. Для определения предпочтительности применения АМЛЗА график временной зависимости SNR (рис. 5.12,б) построен в сравнении с ААР, состоящей из 3-х элементов и формирующей в направлении приема сигнала $\zeta(t)$ аналогичный АМЛЗА коэффициент усиления. Адаптивный прием сигнала ААР (рис. 5.12,б) реализован рекурсивным алгоритмом адаптации [251] при оценке ковариационной матрицы по средством калмановской фильтрации по критерию максимума SNR [17].

Для заданной конструкции АМЛЗА оптимальное соотношение SNR формируется на 157 такте работы алгоритма ($t = 1,21 \cdot 10^{-4}$ с, см. рис. 5.12,б), реализуя в направлениях $\theta_1 = -10^\circ$, $\theta_2 = -5^\circ$, $\theta_3 = 8^\circ$ прихода помех $\tilde{\eta}_1(t)$, $\tilde{\eta}_2(t)$, $\tilde{\eta}_3(t)$ нули ДН (рис. 5.12,а). В случае включения в адаптивную модель дополнительных двух некоррелированных помеховых сигналов $\tilde{\eta}_4(t)$, $\tilde{\eta}_5(t)$ в соответствующих углах отклонения $\theta_4 = 13^\circ$, $\theta_5 = 19^\circ$ геометрия АМЛЗА

после адаптации и реализуемая средняя ДН примут вид, представленный на рисунке 5.13.

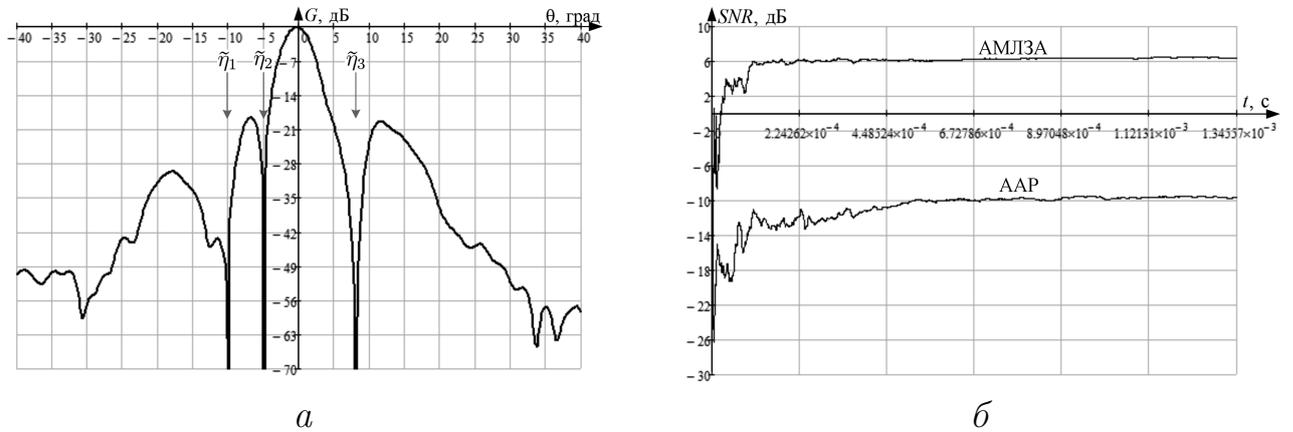


Рис. 5.12. ДН АМЛЗА после адаптации (а) и временная зависимость SNR (б)

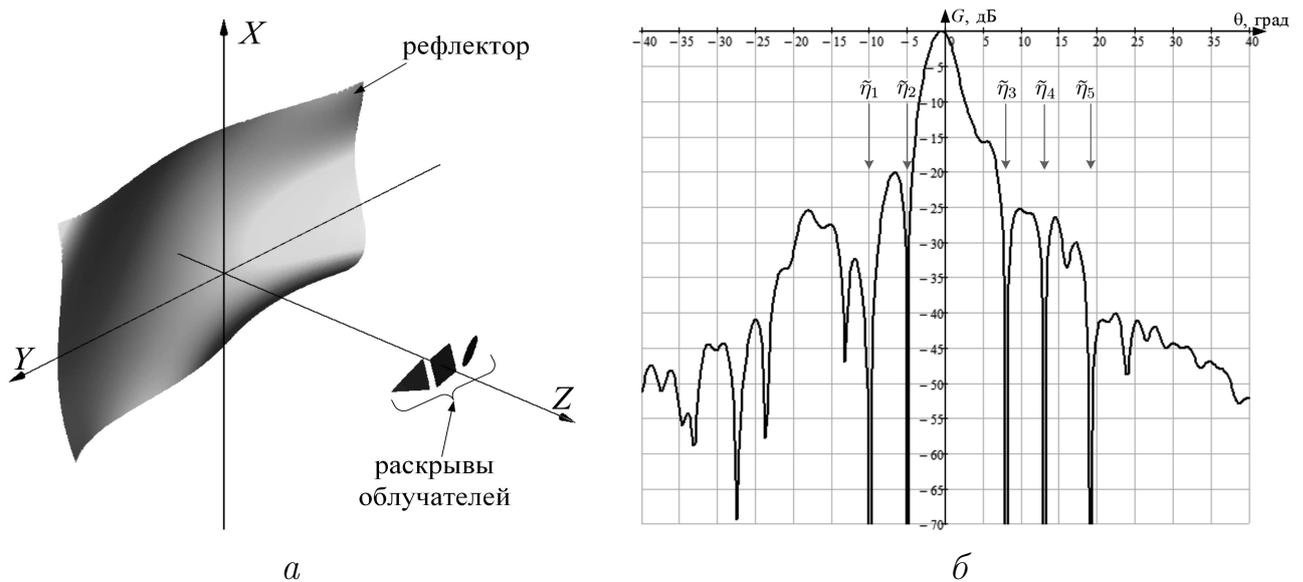


Рис. 5.13. Геометрия АМЛЗА (а) и реализуемая средняя ДН (б) после адаптации

Полученные результаты моделирования (рис. 5.11, 5.12, 5.13) на наглядном примере определяют предпочтительность использования АМЛЗА в сравнении с ААР по потенциальной возможности адаптации к условиям сигнально-помеховой обстановки при исходной эквивалентности интегральных характеристик направленности сравниваемых антенн.

В целом разработанные методы математического моделирования, алгоритмы синтеза и управления позволяют перейти к непосредственной разработке

проблемно-ориентированного программного комплекса для последующего проведения вычислительных экспериментов при оценке эффективности разработанных решений.

5.4. Реализация разработанных методов и алгоритмов в виде проблемно-ориентированного программного комплекса

На основе сформированных в работе алгоритмов структурно-параметрического синтеза и управления АМЛЗА, а также частных алгоритмов синтеза из [18, 161, 223] разработан проблемно-ориентированный программный комплекс (ПК) для решения задач моделирования, анализа, синтеза и управления АМЛЗА. Проблемно-ориентированный ПК сформирован на базе частных программных продуктов и авторских свидетельств, зарегистрированных в Российском агентстве по патентам и товарным знакам: [63, 197, 243, 252–262, 264, 265]. В основу, разработанного программного обеспечения, положен ПК, сформированный в [206] с использованием реализаций программного интерфейса из [262]. Интерфейс проблемно-ориентированного ПК представлен на рисунке 5.14.

В основу разработанного ПК положены принципы модульности, многопоточности и резервирования. Принцип модульности подразумевает реализацию вычислительных процедур, процедур визуализации и вывода результатов как отдельных независимых единиц байтового кода, что позволяет осуществлять простое взаимодействие элементов и реконфигурирование ПК. Принцип многопоточности позволяет значительно повысить скорость выполнения вычислений при использовании возможностей аппаратных средств. В зависимости от спецификации аппаратных средств многопоточность (параллельные вычисления) реализована на CPU и GPU. Принцип резервирования реализуется посредством эффективной работы вычислительных модулей при различных конфигурациях аппаратной части.

Структурная схема разработанного ПК для решения задач моделирования, анализа и структурно-параметрического синтеза МЛЗА представлена на рисунке 5.15.

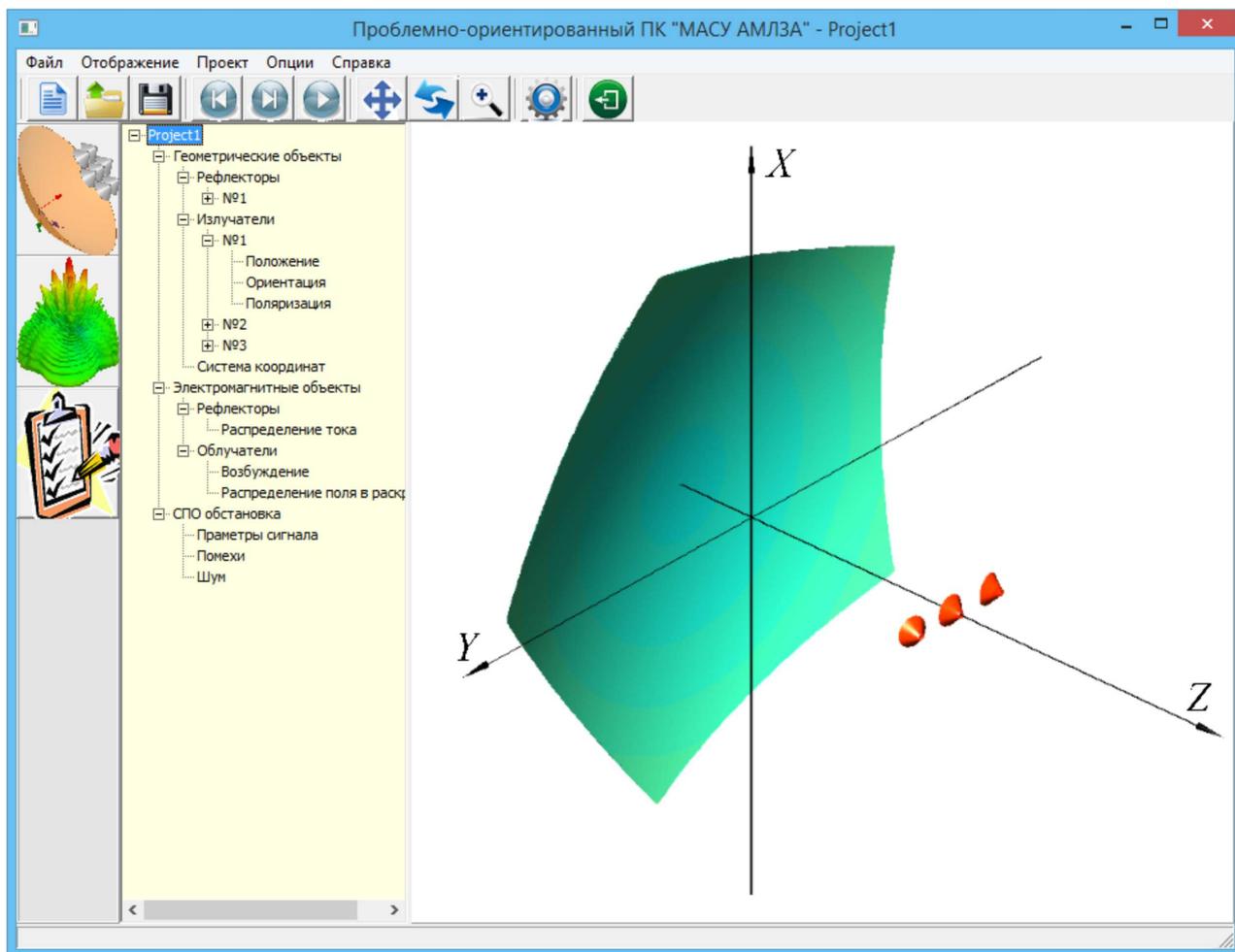


Рис. 5.14. Интерфейс проблемно-ориентированного программного комплекса

В состав созданного на языке C++ в интегрированной среде разработки программного обеспечения Microsoft Visual Studio 2015 ПК входят следующие программные модули:

- 1) модуль визуализации и формирования результатов (реализован в Embarcadero RAD Studio XE6 в C++ Builder с использованием библиотек DirectX для отображения геометрии АМЛЗА и формируемых АС ДН в 3D);
- 2) модуль управления АМЛЗА (реализует алгоритм пп. 5.3);
- 3) модуль структурно-параметрического синтеза (реализует алгоритм пп. 5.2), который, в свою очередь, включает в себя на разных уровнях вложенности классы [172, 206]:

- синтеза облучающего элемента;
- синтеза АФР группового облучателя;

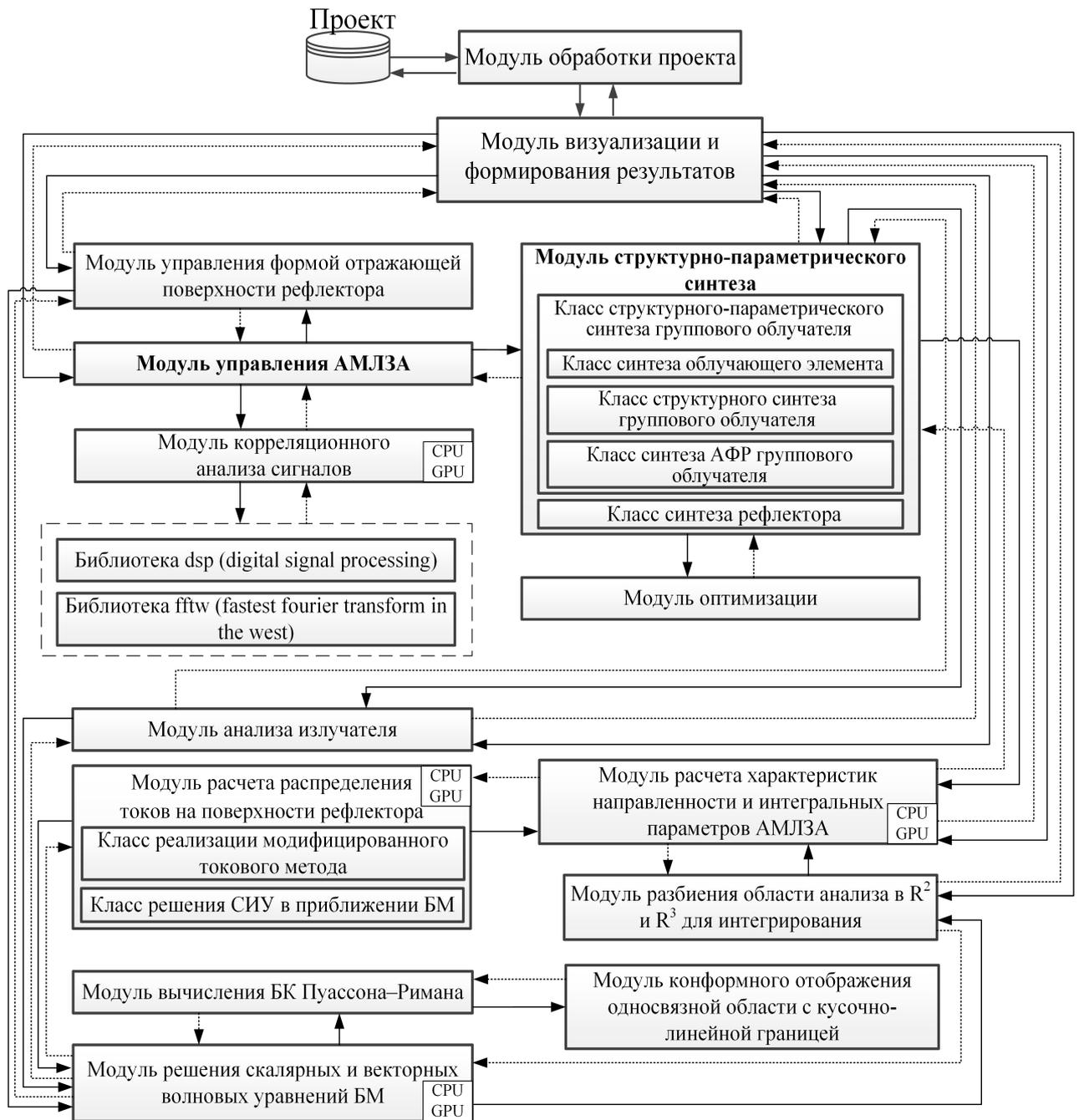


Рис. 5.15. Структурная схема программного комплекса для решения задач моделирования, анализа, синтеза и управления АМЛЗА

- структурного синтеза группового облучателя;
 - структурно-параметрического синтеза группового облучателя;
 - синтеза рефлектора;
- 4) модуль корреляционного анализа (определяет решение (5.20) и алгоритмы цифровой обработки сигналов);

5) модуль управления формой отражающей поверхности (сформирован с учетом решения из пп. 4.3 и [8, 18, 20, 197, 201]);

6) модуль оптимизации (реализует метод пп. 4.4 [105] и известные алгоритмы локальной оптимизации нулевого, первого и второго порядков [87, 88, 90, 91, 93, 106, 202–209]);

7) модуль расчета характеристик направленности и интегральных параметров АМЛЗА (определяет ЭМП в заданной точке наблюдения Q при оценке параметров АС из пп. 1.2 по заданному распределению токов на отражающих поверхностях АМЛЗА и полей в раскрывах излучателей);

8) модуль анализа излучателя (определяет распределение ЭМП \vec{E}_m, \vec{H}_m в раскрыве Ω_m m -го излучателя и величину ЭДС с выхода этого излучателя по правилам из пп. 1.4 с использованием БМ, см. главу 2);

9) модуль расчета распределения токов на поверхности рефлектора, который, в свою очередь, включает в себя на разных уровнях вложенности классы [20, 176, 217] (задействование соответствующих классов выполняется с учетом рекомендаций из пп. 5.1):

- реализации модифицированного токового метода (см. пп. 4.1);
- решения СИУ в приближении БМ (см. пп. 4.2);

10) модуль решения скалярных и векторных волновых уравнений БМ (реализует методы из главы 2 и пп. 4.2, 4.3) [24];

11) модуль вычисления БК Пуассона–Римана (основан на решении из пп. 2.1) [118, 119, 125];

12) модуль конформного отображения односвязной области с кусочно-линейной границей в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 (основан на методах решения прямых и обратных задач конформного отображения, см. главу 3);

13) модуль разбиения области анализа в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 для интегрирования (задает алгоритмы [18, 20, 71, 182] построения триангуляции Делоне при разбиении области анализа на треугольники и тетраэдры для реализации процедур интегрирования по поверхности отражателя и раскрывам отражателя и излучателя, также используется при отображении модели АС и результатов расчета в 3D);

14) модуль обработки проекта.

Дополнительно проблемно-ориентированный ПК включает следующие библиотеки:

– цифровой обработки сигналов (библиотека `dsp`, разработанная С. В. Харченко при реализации: формирующих фильтров; коррелятора; интерполятора; процедур генерации сигналов, шума и помех);

– быстрого преобразования Фурье (библиотека `fftw`, используется для прямого и обратного преобразования сигнала и ЭМП в частотную и временную области).

При разработке проблемно-ориентированного ПК активно применялись технологии, связанные с многопроцессорными системами (реализованные с помощью C/C++, OpenCL и библиотеки `boost`), что позволило значительно ускорить выполнение разработанных и реализованных в программных модулях комплекса алгоритмов анализа, синтеза и управления АМЛЗА. Существенное ускорение достигается путем распараллеливания вычислительных процессов при реализации процедур численного интегрирования по поверхности рефлекторов и раскрывам рефлекторов и излучателей, а также при получении корреляционных оценок (см. рис. 5.15, модули с меткой CPU GPU). Указанные процедуры сводятся к вычислению суммы элементов массива, заданного вектором (размерность 1), матрицей (размерность 2) и т. д. до размерности 4 (вычисление элементов матриц при решении СИУ (4.32), см. пп. 4.2). При этом пользователю предоставляется выбор по определению архитектуры параллельных вычислений: 1) реализация на CPU (потоки распределяются по ядрам центрального процессора(ов)); 2) реализация на GPU (потоки распределяются по ядрам процессора(ов) видеокарты); 3) гибридная реализация на CPU и GPU (потоки гибридного генетического алгоритма распределяются по ядрам центрального процессора(ов), а потоки интегрирования – по ядрам процессора(ов) видеокарты). Примеры схем реализации процедур численного интегрирования (суммирования элементов массива) на CPU (реализация с использованием биб-

лиотеки boost) и GPU (реализация с использованием OpenCL) представлены на рисунках 5.16 и 5.17 соответственно.

Также при разработке ПК (особенно для эффективной работы модулей оптимизации и корреляционного анализа сигналов) использовалась библиотека armadillo с применением dll BLAS и LAPACK.

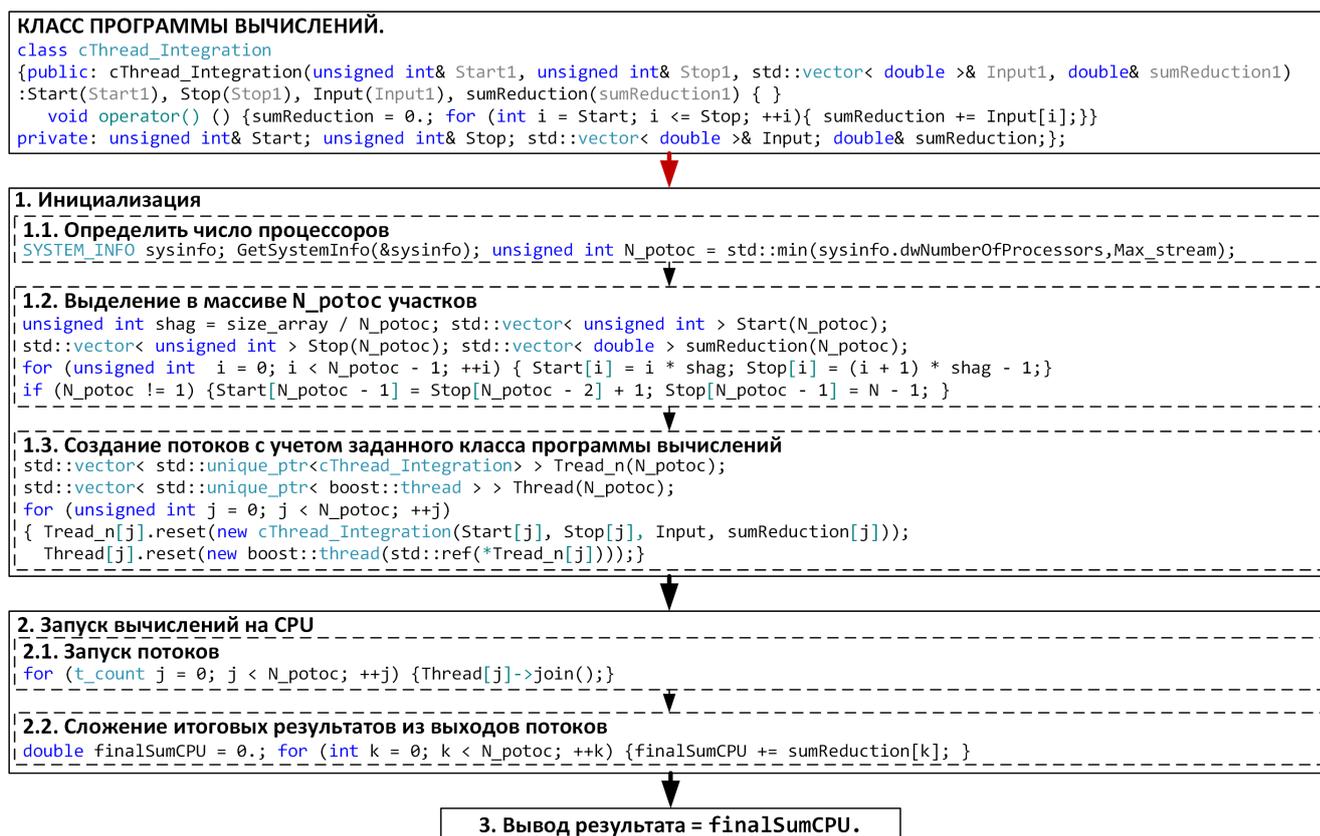


Рис. 5.16. Схема суммирования при реализации на CPU

При реализации параллельных вычислений на CPU используется крупноблочное распараллеливание, в котором число потоков `N_potoc` ставится в соответствие числу логических ядер процессора. Для CPU общий массив `Input` разбивается на `N_potoc` равных блоков для их последующего параллельного суммирования на различных ядрах CPU. Результаты записываются в элементы массива `sumReduction` размерности `N_potoc`. Затем элементы этого массива складываются в итоговый результат `finalSumCPU` (см. рис. 5.16).

При реализации параллельных вычислений на GPU используется метод сдваивания. Общий массив `Input` размера `size_array` разбивается на логиче-

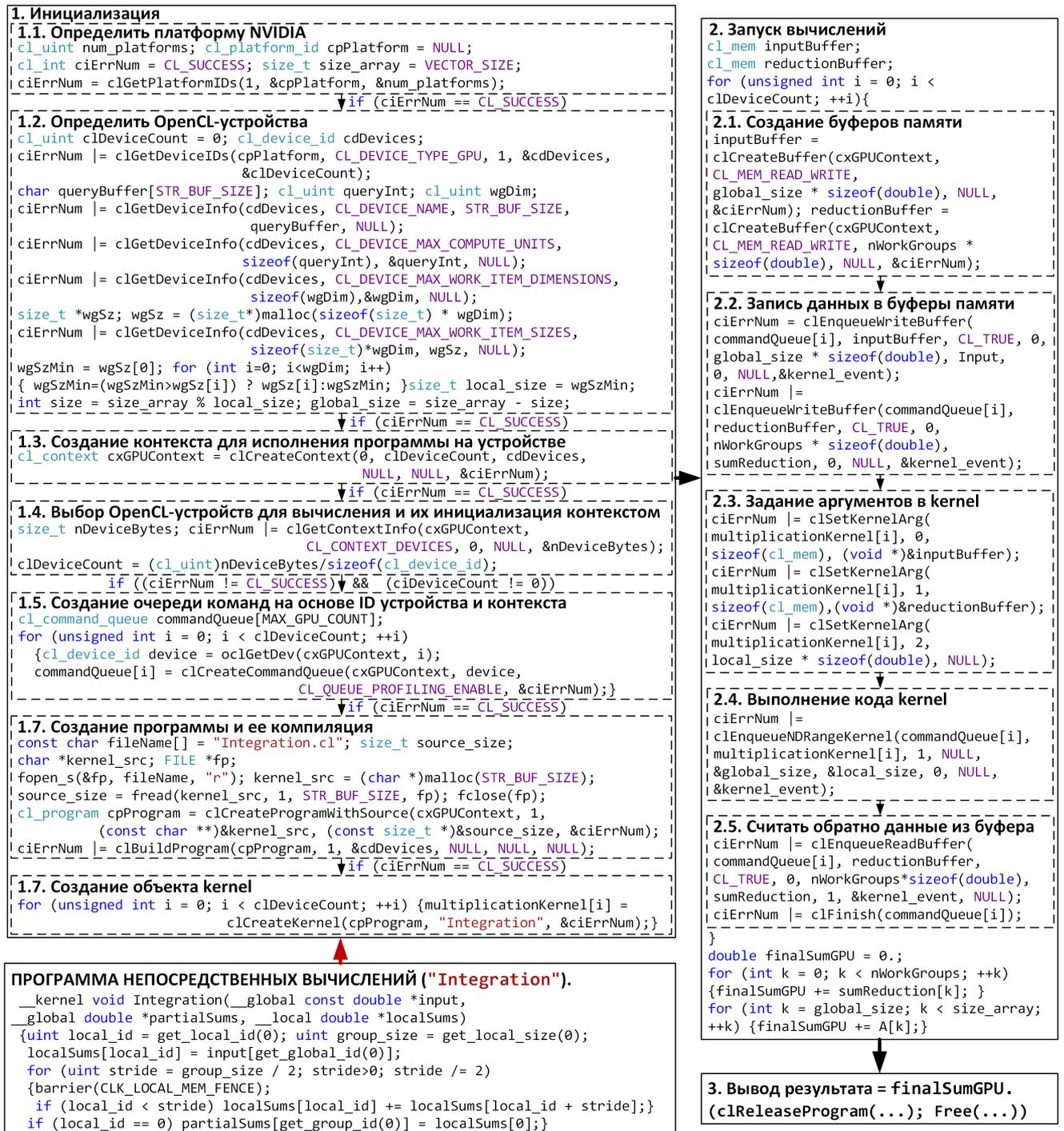


Рис. 5.17. Схема суммирования при реализации на GPU

ские блоки с учетом числа устройств `clDeviceCount` и рабочих групп `nWorkGroups` GPU таким образом, чтобы для `size = size_array mod nWorkGroups` выполнялось равенство `size = 0` (разбиваемый объем был кратен `nWorkGroups`). Если `size ≠ 0`, то на вход параллельного вычислителя GPU подается `size_array – size` первых элементов `Input`. Синхронизация задается между потоками

внутри каждой рабочей группы с использованием инструкции `barrier(CLK_LOCAL_MEM_FENCE)`. Внутри рабочей группы суммирование выполняется с использованием локальной памяти. Результаты записываются в элементы массива `sumReduction` размерности `nWorkGroups`. Затем элементы этого массива и оставшиеся `size` последних элементов `Input` складываются на CPU в итоговый результат (см. рис. 5.17).

Отметим, что выбор предпочтительного использования архитектуры параллельных вычислений зависит от соответствующей конфигурации вычислительного оборудования. Для наглядности предпочтительности выбора архитектуры параллельных вычислений на рисунке 5.18 представлен пример, отражающий зависимость времени расчета от числа узловых точек `size_array` при реализации процедуры численного интегрирования на многопроцессорных системах CPU и GPU. Вычисления выполнены для рефлектора с прямоугольным раскрытием $50\lambda \times 50\lambda$ на ноутбуке Lenovo IdeaPad Z500 с центральным процессором Intel(R) Core i7-3612QM и видеокартой NVIDIA GeForce GT 740M. Численное интегрирование выполнялось при разбиении области анализа на треугольные элементы и задании по 36 узловых точек (заданы через нули многочлена Лежандра) внутри каждого треугольного элемента. На заданном графике (рис. 5.18) в отношении $\frac{S_{\Delta}}{\lambda^2}$ за S_{Δ} обозначена средняя площадь треугольника из набора треугольных элементов, на которые разбивается область анализа при численном интегрировании.

Для оценки эргономичности пользовательского интерфейса ПК применена методика из [266, 267]. На ее основе произведено исследование применимости и контроля выполнения общих эргономических требований к интерфейсу, составленных при анализе перечня общих эргономических требований к интерфейсу проблемно-ориентированного ПК [ГОСТ РВ 29.05.007–96 «Система стандартов эргономических требований и эргономического обеспечения. Интерфейс человеко-машинный. Общие эргономические требования»], [ГОСТ РВ 0029–08.012–2011 «Система стандартов эргономических требований и эргономического обеспечения. Интерфейс человеко-машинный: методика эргономической

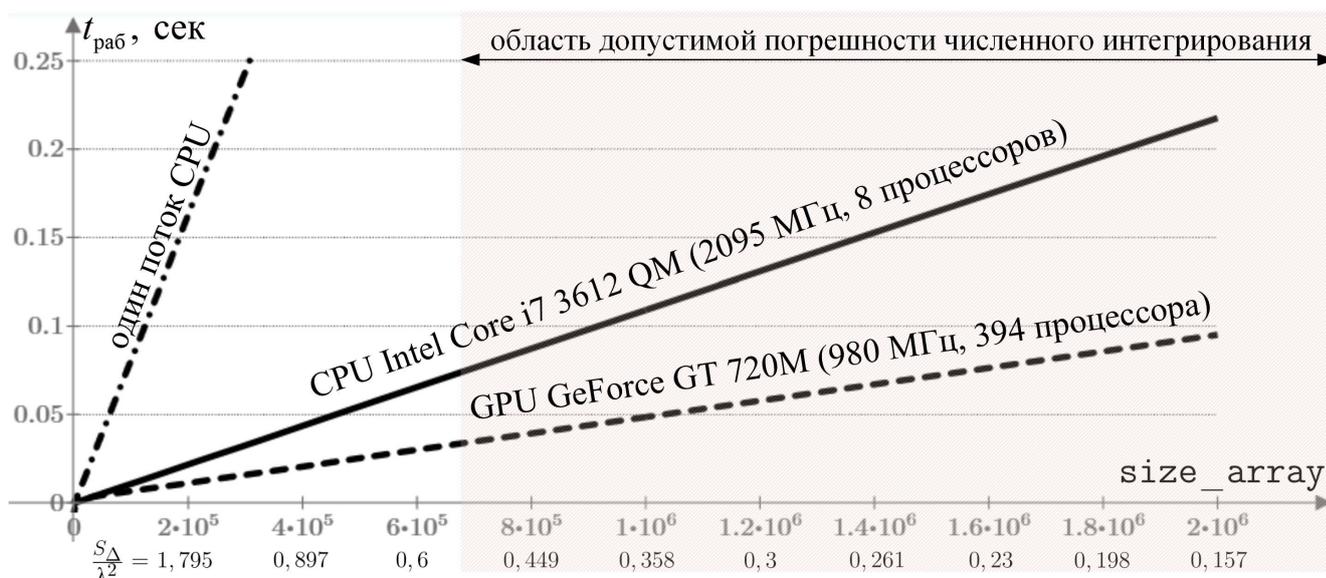


Рис. 5.18. Зависимость времени расчета от числа узловых точек при реализации процедуры численного интегрирования на многопроцессорных системах CPU и GPU

экспертизы»]. Полученные данные занесены в аналогичную [223] таблицу при выполнении 37 пунктов (1–17, 21–29, 31–41) из 41. Для расчета степени выполнения эргономических требований, применимых к рассматриваемому интерфейсу, используется простое отношение $\hat{N} = \hat{n}_1 / \hat{n}_2$, где \hat{n}_1 – количество выполненных требований; \hat{n}_2 – количество требований, применимых к рассматриваемому интерфейсу. В итоге степень выполнения эргономических требований к рассматриваемому интерфейсу составила $\approx 0,9$, что удовлетворяет требованиям ГОСТ.

Разработанный ПК предполагает функционирование под управлением 64-х разрядных операционных систем Windows 7/8/8.1/10, на ЭВМ с производительностью не ниже: процессор Intel Core i7, объем ОЗУ 4 Гбайт, видеокарта NVIDIA GeForce GT 740M, объем жесткого диска 8 Гбайт и выше. Для реализации процедур управления АМЛЗА в режиме времени близкому к реальному рекомендуется использовать вычислительные серверы с большим числом процессоров (от 2-х и больше) по производительности не хуже чем Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2620 v3. Рекомендуемым процессором является CPU по производительности не хуже чем Intel(R) Xeon(R) E5-2640V4 Broadwell-EP.

В целом полученные результаты позволяют перейти к проведению вычислительных экспериментов при оценке эффективности разработанных в рамках исследования алгоритмов синтеза и адаптации АМЛЗА.

5.5. Оценка эффективности разработанных алгоритмов и порядок настройки входных параметров

Анализ приведенных на рисунках 5.5 и 5.10 блок-схем разработанных алгоритмов синтеза и адаптации, а также результаты исследования [161], позволяют сделать вывод о выполнении основных требований, предъявляемых к алгоритмам как к вычислительным процессам [238]: 1) понятность; 2) определенность; 3) дискретность; 4) элементарность шага; 5) массовость; 6) конечность и результативность.

Согласно [238, 240], алгоритм корректен, если для каждого ввода результатом его работы является корректный вывод. Исходя из этого, алгоритм является корректным, если выполняются следующие условия: 1) алгоритм позволяет после выполнения конечного числа элементарных операций преобразовать любые входные данные в результат; 2) результат устойчив по отношению к малым возмущениям входных данных; 3) результат обладает вычислительной устойчивостью.

Из анализа блок-схем разработанных алгоритмов (рис. 5.5, 5.10) следует отсутствие бесконечных циклов – первое условие выполняется. Выход из циклов алгоритмов синтеза и адаптации АМЛЗА при решении оптимизационных задач гибридным генетическим методом производится по правилу (5.16).

Подробное исследование корректности алгоритма структурно-параметрического синтеза АС зеркального типа выполнено в [161]. Из результатов исследования сделаны следующие выводы [161]: 1) алгоритм устойчив для границы возмущения входных данных (n_s -е положения точек ($n_s = \overline{1, N_s}$) наблюдения, задаваемые векторами угловых координат $(\theta_{n_s}, \xi_{n_s})$, в направлении которых осуществляется прием и передача сигналов, и n_p -е направления ($n_p = \overline{1, N_p}$) прихода помех $(\theta_{n_p}, \xi_{n_p})$) $\tilde{\epsilon}_{\text{тр}} = 0,0083$ (соответствует погрешности $1^\circ \div 1,5^\circ$

суммарно для всех направлений); 2) величину погрешности вычисления переменных Δ для задачи структурно-параметрического синтеза группового облучателя следует выбирать в пределах $10^{-5} \div 10^{-4}$, а для общей задачи структурно-параметрического синтеза – $10^{-8} \div 10^{-7}$ (указанные интервалы позволяют наиболее точно определить искомый глобальный оптимум с учетом определенной достоверности разработанных методов, см. пп. 4.1).

Поскольку алгоритм структурно-параметрического синтеза составляет основу алгоритма управления АМЛЗА (см. рис. 5.10 блоки 3, 7) справедливо утверждать, что указанные выше результаты в том числе характеризуют корректность алгоритма управления.

В результате оценки эффективности алгоритма структурно-параметрического синтеза АС зеркального типа по показателям качества исхода операции целенаправленного процесса [241] в [172] сделан вывод о том, что: 1) применение разработанного алгоритма, обеспечивающего совместное решение задач структурно-параметрического синтеза АМЛЗА во взаимосвязи решения внутренней и внешней задач электродинамики с учетом эффектов дифракции и переотражения, позволяет повысить КУ в среднем в 1,178 раза и КПД на 30,87%; 2) алгоритм обладает высокой (квадратичной) скоростью сходимости и полиномиальной вычислительной сложностью $\mathcal{O}(\tilde{M}^5 \log_2(\tilde{M}))$ в зависимости от числа входных переменных \tilde{M} – излучателей M и рефлекторов M' .

Оценку эффективности рекуррентно-итерационного алгоритма управления АМЛЗА выполним с учетом выделенных в пп. 1.2 критериев и показателей эффективности управления, а также определенной способности к подавлению помех (см. пп. 1.5) АМЛЗА. Для этого рассмотрим: 1) зависимость SNR различных конструкций АМЛЗА и сигнально-помеховых обстановок; 2) зависимость коэффициента выигрыша адаптации K_c и времени адаптации t_a (см. пп. 1.2) от числа N помеховых сигналов $\tilde{\eta}_n(t)$ ($n = \overline{1, N}$) для различных мощностей множества управляемых параметров, характеризующих число степеней свободы АМЛЗА.

Исходные данные для проведения вычислительных экспериментов выбраны следующими:

1) параметры, характеризующие сигнально-помеховую обстановку (принимаемый сигнал $\varsigma(t)$, помеховые сигналы $\tilde{\eta}_n(t)$ и шум): информационная скорость $\varsigma(t)$ 1024 кБит/с; модуляция $\varsigma(t)$ QPSK; средняя длина волны $\lambda = 0,0215$ м; направление приема $\varsigma(t)$ $\theta = 0^\circ$, $\xi = 0^\circ$; мощность сигнала на входе АС -58 дБм; аддитивный белый гауссовский шум с мощностью на входе АС -62 дБм; мощность n -го помехового сигнала $\tilde{\eta}_n(t)$ на входе АС -49 дБм; число помех N изменяется при определении направлений прихода n -го помехового сигнала $\tilde{\eta}_n(t)$ ($n = \overline{1, N}$) соответствующими углами $\theta_n = (-1)^n 2^\circ \cdot \lceil n/2 \rceil$, $\xi_n = 0^\circ$;

2) параметры, характеризующие геометрию АМЛЗА: один деформируемый рефлектор ($M' = 1$) с раскрывом в виде правильного пятиугольника с радиусом описанной окружности 40λ ; исходная поверхность деформируемого рефлектора задана параболоидом $Z(x, y) = 0,25(x^2 + y^2)/f$ с фокусным расстоянием $f = 20\lambda$; число деформирующих рефлектор стержней K изменяется от 5 до 126 (для БМ соответствует вариации порядка аппроксимации p от 1 до 5); число излучателей M изменяется от 1 до 7 при исходном размещении их раскрывов Ω_m на фокальной плоскости с центром в точке $(0, 0, f)$ и ориентацией $(1, -1, -1)$ по гексагональной схеме; раскрывы Ω_m m -х излучателей заданы правильными пятиугольниками с радиусом описанной окружности $1,5\lambda$; излучатели рупорные с высотой 4λ подключены к прямоугольным волноводам с шириной $0,7\lambda$ и высотой $0,4\lambda$.

На рисунке 5.19 представлен пример исходной, синтезированной по критерию (5.13) и адаптированной АМЛЗА для $N = 3$, $K = 15$ и $M = 5$.

На рисунке 5.20 представлены зависимости SNR АМЛЗА от числа N помеховых сигналов, M излучателей адаптивной АС и K деформирующих стержней.

На рисунке 5.21 представлены зависимости коэффициента выигрыша адаптации K_c и времени адаптации t_a от числа N помеховых сигналов.

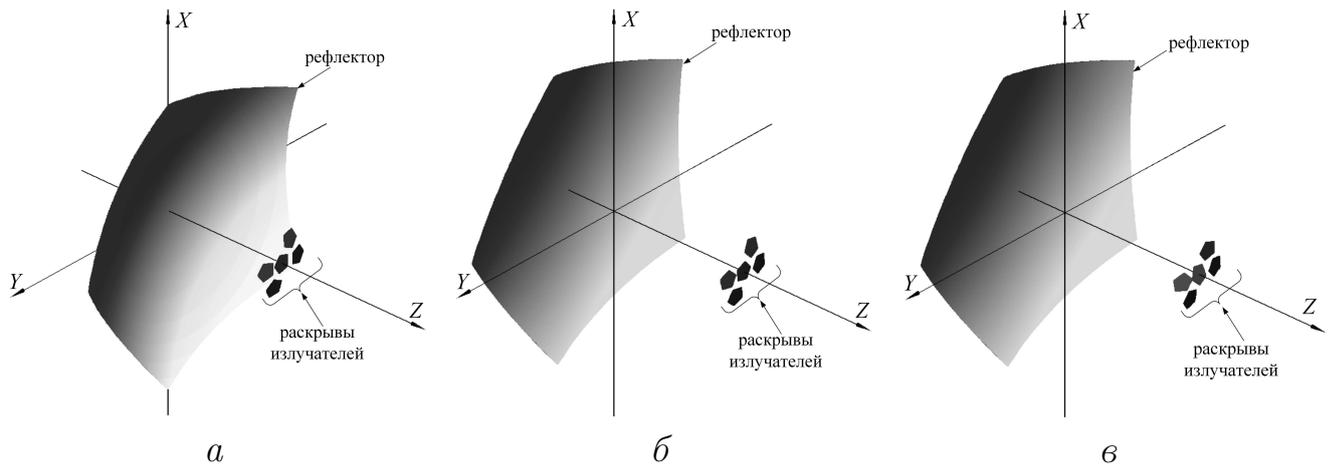


Рис. 5.19. Геометрии АМЛЗА: *a* – исходная; *б* – синтезированная по критерию (5.13); *в* – адаптированная к сигнально-помеховой обстановки при $N = 3$, $K = 15$ и $M = 5$

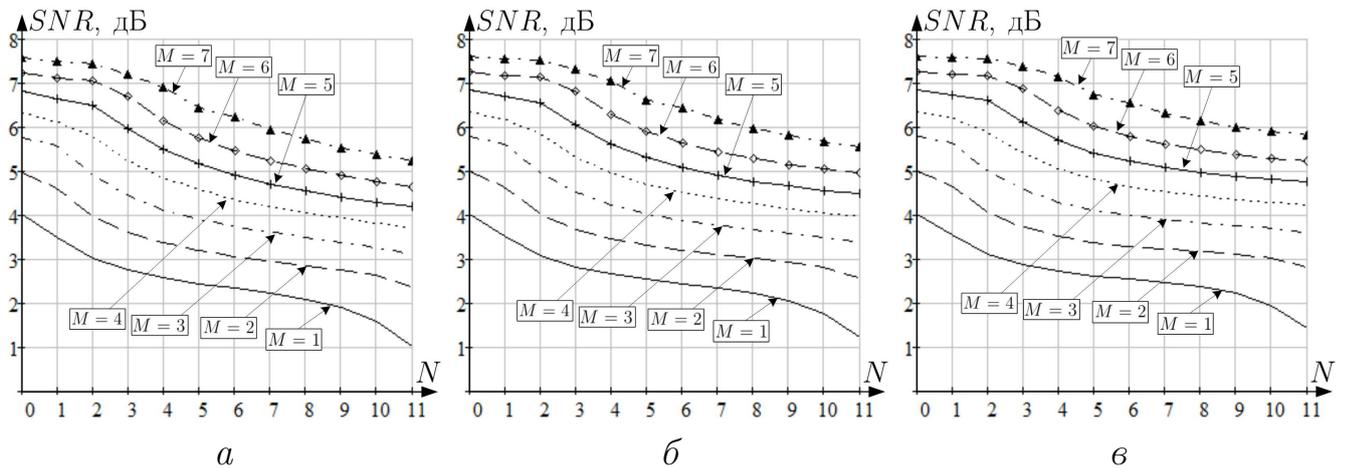


Рис. 5.20. Зависимость SNR от M и N при $K = 15$ (*a*), $K = 35$ (*б*) и $K = 126$ (*в*)

Из полученных результатов (рис. 5.20, 5.21) следует, что АМЛЗА позволяет эффективно фильтровать сигналы пространственным способом, формируя максимумы средней ДН в направлениях полезного сигнала, исключая при этом, все остальные, ведущие к замираниям сигналы, даже в случаях, когда число M излучателей превалирует над числом N помех ($M < N$). Следует отметить, что ситуация $M \ll N$ приводит к снижению такого интегрального параметра АС как коэффициент использования поверхности. В результате происходит снижение ОСПШ и коэффициента выигрыша (см. рис. 5.20, 5.21, *a*), однако работоспособность АС по приему полезного сигнала сохраняется (ОСПШ для

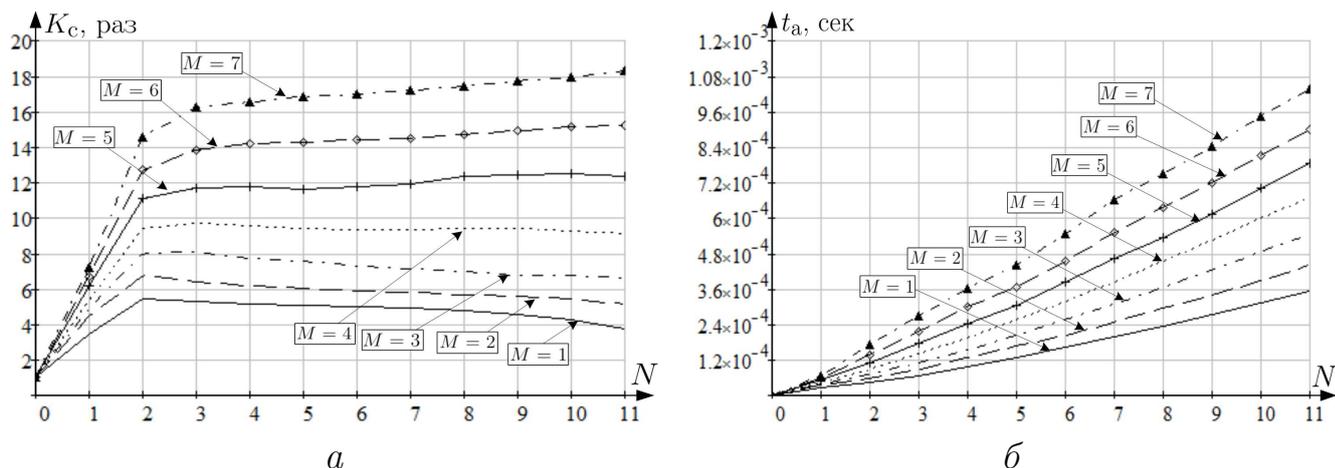


Рис. 5.21. Зависимость K_c (а) и t_a (б) от M и N при $K = 15$

однолучевой однозеркальной АС при большом числе помех снижается всего на 3 дБ), что в свою очередь подтверждает выдвинутую в пп. 1.3 общую гипотезу. Рост показателей качества адаптации осуществляется увеличением M , что неизменно приводит к усложнению конструкции адаптивной антенны и увеличению времени адаптации (см. рис. 5.21, б). Указанное противоречие определяет необходимость подбора компромиссного решения по выбору конкретных конструктивных особенностей АМЛЗА при реализации робастного алгоритма адаптации в зависимости от параметров приема/передачи сигналов.

В целом разработанные алгоритмы структурно-параметрического синтеза и рекурсивно-итерационный алгоритм управления АМЛЗА, позволяют обеспечить инвариантность адаптивной АС зеркального типа к воздействию помех при их пространственной режекции.

Выводы по пятой главе

1. С целью наиболее эффективного определения оптимума формируемых задач проектирования, оптимизации и управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной, решение которых основывается на поиске глобального оптимума многомерной многоэкстремальной функции, в общем случае содержащей точки разрыва первого и второго рода, разработан модифицированный генетический метод. Предложенная модификация основана на объединении ге-

нетических методов, работающих в вещественных кодах, с современными методами локального поиска и статистического анализа (прогнозирования) и в сравнении с известными решениями позволяет сократить вычислительные затраты при решении задачи глобальной оптимизации в среднем в 1,3 раза.

2. Разработан алгоритм структурно-параметрического синтеза АМЛЗА, позволяющий в отличие от известных в среднем повысить КУ в направлении приема/передачи сигналов на величину 3,125 дБ, при этом КПД АС увеличивается в 2,15 раза.

3. На основе сформированных методов математического моделирования и синтеза разработан рекурсивно-итерационный алгоритм управления АМЛЗА, позволяющий обеспечить инвариантность адаптивной АС зеркального типа к воздействию помех при их пространственной режекции.

4. В ходе разработки предложений по программной реализации сформирован проблемно-ориентированный программный комплекс, функционирующий на основе разработанных аналитических и численных методов и алгоритмов моделирования, анализа, синтеза и управления АМЛЗА. Приоритетность решений подтверждена свидетельствами о регистрации программ для ЭВМ и авторскими свидетельствами (патентами), зарегистрированными в Роспатенте.

5. Выполнена оценка эффективности разработанных алгоритмов синтеза и управления АМЛЗА, в результате которой определено, что алгоритмы корректны, удовлетворяют требованиям, предъявляемым к алгоритмам, имеют квадратичную скорость сходимости, полиномиальную вычислительную сложность $O\left(\tilde{M}^5 \log_2(\tilde{M})\right)$ в зависимости от числа входных переменных \tilde{M} – излучателей M и рефлекторов M' . Также результаты экспериментальной проверки эффективности разработанного алгоритма управления АМЛЗА определили рекомендации по практической реализации сформированных в диссертационной работе решений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе в рамках фундаментальных основ и применения математического моделирования, численных методов и комплексов программ для решения научной проблемы при формировании оригинальных результатов одновременно в трех областях: математического моделирования, численных методов и комплексов программ – разработана математическая теория адаптивных многолучевых зеркальных антенн, представляющая собой систему взаимоувязанных утверждений и доказательств, которые составляют основу разработанных методов моделирования, анализа, синтеза и управления АМЛЗА.

Основные результаты диссертационной работы:

1. Задана формализованная постановка проблемы управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной (1.28)–(1.30) при взаимоувязанном решении внешней и внутренней задач электродинамики теории антенн и сведении стохастического дифференциального уравнения состояния в смысле Ито к краевой задаче в раскрывах излучателей (1.23) по распределению нормированного значения плотности потока энергии.

2. Выполнена оценка числа степеней свободы \mathcal{M} и максимально возможного числа подавляемых помех \mathcal{N} адаптивной многолучевой зеркальной антенной. С учетом закона необходимого разнообразия определена потенциальная возможность существования инвариантной к воздействию помех конструкции адаптивной многолучевой зеркальной антенны, реализация которой при условии разработки эффективных методов анализа и синтеза адаптивных многолучевых зеркальных антенн, численных методов оптимизации требует решения задачи по параметризации отражающей поверхности рефлектора положением деформирующих стержней.

3. Разработаны методы определения барицентрических координат Пуассона–Римана для односвязной области Ω с кусочно-линейной границей, которые в отличие от известных позволяют формировать строгие решения при нахождении гармонических барицентрических координат для Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^2 \vee \Omega \subset \mathbb{R}^3$).

Методы основаны на решении уравнения Лапласа, полученным Пуассоном для шара, и теоремы Римана о взаимно-однозначности конформного отображения.

4. Разработан барицентрический метод анализа электромагнитного поля в частотной и временной областях для односвязной области Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^2 \vee \Omega \subset \mathbb{R}^3$) с кусочно-линейной границей, позволяющий при соизмеримых вычислительных затратах повысить точность численного решения уравнений Максвелла или соответствующих им волновых уравнений в 2,6 раза в сравнении с известными методами и сформировать аппроксимирующие полиномы для решения задач синтеза и управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной. Основу метода составляет этап формирования аппроксимирующих скалярных и векторных полиномов (2.42) и (2.65) соответственно в N -мерной барицентрической системе координат.

5. Разработан модифицированный метод последовательных конформных отображений, позволяющий с учетом теории функции комплексного переменного выполнить строгое решение задачи обратного конформного отображения произвольной многоугольной области на каноническую, которые заданы в \mathbb{R}^2 . Средняя вычислительная ошибка метода соизмерима с десятками долей процентов относительно выполнения условий Коши–Римана.

6. Разработаны методы решения задач, связанных с разложением кватернион-функций в обобщенные степенные ряды. Необходимость решения последних по аналогии с теорией функции комплексного переменного связана с формированием простейших конформных отображений шара на верхнее полупространство, верхнего полупространства с выброшенным сегментом шара на двухгранный угол, двухгранного угла на верхнее полупространство, многогранного угла на верхнее полупространство.

7. С учетом теоремы Лиувилля и полученных решений по разложению кватернион-функций в обобщенные степенные ряды для последующего формирования методов прямого и обратного конформных отображений многогранников в \mathbb{R}^3 определены решения задач простейших конформных отображений шара на верхнее полупространство, верхнего полупространства с выброшенным

сегментом шара на двухгранный угол, двухгранного угла на верхнее полупространство, многогранного угла на верхнее полупространство.

8. Разработаны методы строгого решения прямой и обратной задач конформного отображений многогранника на каноническую область с определением простейших конформных отображений шара, верхнего полупространства, двухгранного и многогранного углов в \mathbb{R}^3 и обобщением интегральной формулы Кристоффеля–Шварца с использованием алгебры кватернионов.

9. Предложена модификация токового метода расчета характеристик направленности адаптивных многолучевых зеркальных антенн, которая дает возможность для различных составляющих электромагнитного поля учесть эффекты дифракции и переотражения в приближениях Кирхгофа–Котлера и методов физической оптики, что позволило снизить среднюю относительную ошибку оценки дальнего бокового излучения в 2,38 раза в сравнении с известными аналитическими методами.

10. Сформированы решения сингулярных интегральных уравнений электродинамической теории зеркальных антенн и задачи управления формой отражающей поверхности адаптивной многолучевой зеркальной антенны в приближении барицентрического метода, которые позволяют повысить точность вариационного решения краевой задачи в среднем в 3,32 раза в сравнении с известными при соизмеримых вычислительных затратах.

11. С целью наиболее эффективного численного решения задач глобальной оптимизации многомерных многоэкстремальных функций на основе объединения эволюционных методов, работающих в вещественных кодах, с современными методами локального поиска и статистического анализа разработан модифицированный генетический метод, который в сравнении с известными решениями позволяет сократить вычислительные затраты при решении задачи глобальной оптимизации в среднем в 1,3 раза.

12. Разработаны алгоритм структурно-параметрического синтеза АМЛЗА и рекурсивно-итерационный алгоритм управления АМЛЗА, позволяющие в от-

личие от известных обеспечить инвариантность адаптивной АС зеркального типа к воздействию помех при их пространственной режекции.

13. Для разработанных алгоритмов синтеза и управления определен порядок настройки входных параметров, по существу, обеспечивающий наименьшие вычислительные затраты работы при реализации на ЭВМ. Выполнена оценка эффективности, в результате которой определено, что алгоритмы корректны, удовлетворяют требованиям, предъявляемым к алгоритмам, имеют квадратичную скорость сходимости, полиномиальную вычислительную сложность $\mathcal{O}\left(\tilde{M}^5 \log_2(\tilde{M})\right)$ в зависимости от числа входных переменных \tilde{M} – излучателей M и рефлекторов M' .

14. В ходе разработки предложений по программной реализации сформирован проблемно-ориентированный программный комплекс, функционирующий на основе разработанных аналитических и численных методов и алгоритмов моделирования, анализа, синтеза и управления АМЛЗА. Приоритетность разработанных решений подтверждена свидетельствами о регистрации программ для ЭВМ и авторскими свидетельствами (патентами), зарегистрированными в Роспатенте.

В заключение хочу выразить слова признательности и благодарности своему научному консультанту доценту, д.ф.-м.н. Мисюрину Сергею Юрьевичу за многолетнюю и плодотворную работу, за всестороннюю помощь и поддержку при подготовке настоящей диссертации. От чистого сердца выражаю признательность своему руководителю по написанию кандидатской диссертации доценту, д.т.н. Архипову Николаю Сергеевичу за ценные советы при планировании настоящего исследования и рекомендации по формулировке предшествующих написанию настоящей работы научных результатов. Благодарю профессора, д.т.н. Сомова Анатолия Михайловича за всестороннюю помощь, поддержку и плодотворное сотрудничество, оказанное при разработке и модификации асимптотических методов анализа антенных систем зеркального типа, внедрению результатов диссертационного исследования. Слова особой признательности и благодарности хочу выразить профессору, д.т.н. Радыгину Владимиру Михайловичу за плодотворную совместную работу в области решения задач конформных отображений замкнутых односвязных областей с кусочно-линейной границей в \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 и многократные обсуждения результатов диссертационного исследования относительно разработанного барицентрического метода. Также благодарю всех товарищей и коллег по работе за помощь и поддержку на различных этапах выполнения диссертации и, конечно, я безгранично благодарен своей любимой жене, которая поддерживала меня на протяжении всего времени работы над рукописью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Метелев, С. А. Адаптивная пространственно-временная компенсация помех в каналах радиосвязи : диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук : 01.04.03 / Метелев Сергей Александрович. – Нижний Новгород, 2004. – 249 с.
2. Madec P-Y. Overview of deformable mirror technologies for adaptive optics and astronomy // Adaptive Optics Systems III, Ellerbroek, Marchetti, Veran Eds, Proc. SPIE. – 2012. – Vol. 8447. – 5 p.
3. Клюев, Д. С. Электродинамическая теория зеркальных и полосковых антенн : диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук : 01.04.03 / Клюев Дмитрий Сергеевич. – Самара, 2012. – 253 с.
4. Шаланов, Н. В. Системный анализ. Кибернетика. Синергетика: математические методы и модели. Экономические аспекты / Н. В. Шаланов – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2008. – 288 с.
5. Белянский, П. В. Управление формой корректоров фазового фронта больших радиотелескопов / П. В. Белянский, М. И. Мустафаев // Автоматика и телемеханика. – 1985. – № 8. – С. 5–14.
6. Белянский, П. В. Модальное управление формой пространственно-распределенных объектов / П. В. Белянский, М. И. Мустафаев // Автоматика и телемеханика. – 1988. – № 8. – С. 37–46.
7. Polyanskii, I. S. An algorithm for generating the cluster groups of hybrid mirror antenna radiators / N. S. Arkhipov, A. S. Velikikh, A. V. Karpov, I. S. Polyanskii // Telecommunications and Radio Engineering. – 2013. – № 72(2). – 147–160 pp.
8. Полянский, И. С. Синтез отражающих поверхностей антенной системы зеркального типа с использованием барицентрического подхода при параметризации рефлектора / А. М. Сомов, И. С. Полянский, Д. Е. Степанов // Антенны. – 2015. – № 8. – С. 11–19.
9. Архипов, Н. С. Представление гибридных зеркальных антенн в виде пространственных и угловых фильтров / Н. С. Архипов, И. С. Захаров, И. А. Чаплыгин // Телекоммуникации. – 2000. – № 3. – С. 29–37.
10. Полянский, И. С. Выбор оптимального места размещения приемного/передающего световода в мультиплексорах и демультимплексорах / И. С. Полянский, С. Н. Архипов, А. В. Карпов // III Международная интернет-конференция молодых ученых, аспирантов и студентов «Инновационные технологии: теория, инструменты, практика» (InnoTech 2011). – Пермь, 2011.
11. Кучмент, П. А. Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных / П. А. Кучмент // Успехи математических наук. – 1982. – Т. 37. – № 4(226). – С. 3–52.
12. Сосулин, Ю. Г. Оценочно-корреляционно-компенсационная обработка сигналов на фоне помех / Ю. Г. Сосулин, В. В. Костров // Радиотехника. – 2006. – № 9(51). – С. 1027–1065.

13. Сосулин, Ю. Г. Оценочно-корреляционная обработка сигналов и компенсация помех / Ю. Г. Сосулин, В. В. Костров., Ю. Н. Паршин. – Москва : Радиотехника, 2014. – 632 с.
14. Щесняк, С. С. Адаптивные антенны / С. С. Щесняк, М. П. Попов. – Санкт-Петербург : Изд-во ВКИКА им. А.Ф. Можайского, 1995. – 611 с.
15. Weiner, M. M. Adaptive antennas and receivers / M. M. Weiner. – Boca Raton; London : CRC Taylor & Francis, 2006. – 1204 p.
16. Poon, A. Degrees of Freedom in Multiple-Antenna Channels: A Signal Space Approach / Ada Poon, Robert W. Brodersen, David Tse // IEEE Transactions on Information Theory. March 2005. – Vol. 51(2). – 523–536 pp.
17. Пистолькорс, А. А. Введение в теорию адаптивных антенн / А. А. Пистолькорс, О. С. Литвинов. – Москва : Наука, 1991. – 200 с.
18. Полянский, И. С. Методы анализа и структурно-параметрический синтез зеркальных антенн / Н. С. Архипов, И. С. Полянский. – Орёл : Академия ФСО России, 2014. – 269 с.
19. Проблемы антенной техники / под ред. Л. Д. Бахраха, Д. И. Воскресенского. – Москва : Радио и связь, 1989. – 368 с.
20. Полянский, И. С. Анализ и структурно-параметрический синтез зеркальных антенн: под ред. А. М. Сомова / Н. С. Архипов, И. С. Полянский, А. М. Сомов. – Москва : Горячая линия – Телеком, 2017. – 226 с.
21. Архипов, Н. С. Гибридные зеркальные антенны / Н. С. Архипов, М. В. Гряник, В. И. Ломан, И. К. Нестеренко // Зарубежная радиоэлектроника. – Москва : Радио и связь. – 1987. – № 12. – С. 62–78.
22. Клэррикоутс, П. Дж. Б. Высокоэффективные зеркальные СВЧ-антенны / П. Дж. Б. Клэррикоутс, Дж. Т. Поултон // ТИИЭР. – 1977. – Т. 65. – № 10. – С. 57–97.
23. Архипов, Н. С. Антенно-фидерные системы средств космической связи диапазонов СВЧ-КВЧ / Н. С. Архипов, Л. В. Бондарь, А. Г. Витовцев [и др.] // Известия вузов МВ и ССО СССР. Радиоэлектроника. – 1986. – Т. 29. – № 2. – С. 4–15.
24. Полянский, И. С. Барицентрический метод в вычислительной электродинамике. – Орёл : Академия ФСО России, 2017. – 148 с.
25. Ильинский А. С. Вариационная формулировка задач дифракции / А. С. Ильинский, О. М. Масловская // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1990. – Т. 30. – № 6. – С. 910–919.
26. Справочник по антенной технике. В 5 т. Т. 1 / Л. Д. Бахрах, Л. С. Бенинсон, Е. Г. Зелкин [и др.] / под ред. Я. Н. Фельда, Е. Г. Зелкина. – Москва : ИПРЖР, 1997. – 256 с.
27. Gibson, W. C. The Method of Moments in Electromagnetics, Second Edition / Walton C. Gibson. – N.-Y. : Chapman and Hall/CRC, 2014. – 450 p.
28. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – Москва : Наука, 1964. – 368 с.
29. Боровиковский, В. А. Геометрическая теория дифракции / В. А. Боровиковский, Б. Е. Кинбер. – Москва : Связь, 1978. – 248 с.

30. Уфимцев П. Я. Теория дифракции краевых волн в электродинамике. Введение в физическую теорию дифракции / П. Я. Уфимцев. – Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. – 372 с.
31. Григорьев, А. Д. Методы вычислительной электродинамики / А. Д. Григорьев. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 432 с.
32. Russer, P. Electromagnetics, microwave circuit and antenna design for communications engineering / P. Russer ed. by C. F. Balanis. – N.-Y. : Morgan and Claypool, 2006. – 123 p.
33. Сильвестр, П. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков : пер. с англ. / П. Сильвестр, Р. Феррари. – Москва : Мир, 1986. – 229 с.
34. Ильинский А. С. Применение метода конечных элементов к задаче о распространении волн в нерегулярном волноводе / А. С. Ильинский, А. Ф. Кадомцева // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1988. –Т. 28. – № 8. – С. 1202–1209.
35. Christopoulos, C. The Transmission-Line Modeling Method / C. Christopoulos. – Oxford : Morgan and Claypool, 2006. – 124 p.
36. Сестрорецкий, Б. В. Возможности прямого численного решения краевых задач на основе метода импедансного аналога электромагнитного пространства (ИАЭП) / В. Б. Сестрорецкий // Вопросы Радиоэлектроники, серия Общетеχνическая. – 1976. – Вып. 2.
37. Иванов, С. А. Метод импедансного аналога электромагнитного пространства для решения начально-краевых задач электродинамики / С. А. Иванов, В. Б. Сестрорецкий, А. Н. Боголюбов // Вычислительные методы и приложения – 2008. – Т. 9. Вып. 3. – С. 274–304.
38. Григорьев, А. Д. Современные программные средства моделирования высокочастотных электромагнитных полей / А. Д. Григорьев // Труды Всероссийской научной конференции «Проблемы СВЧ электроники». – Москва. 24-25 октября 2013. – С. 11–15.
39. Банков, С. Е. Электродинамика и техника СВЧ для пользователей САПР / С. Е. Банков, А. А. Курушин // Москва : Солон-Пресс, 2008. – 276 с.
40. Фейнман, Р. Фейнмановские лекции по физике. Том 3: Излучение. Волны. Кванты. Перевод с английского (издание 4) / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – Эдиториал УРСС. – ISBN 5-354-00701-1.
41. Бахрах, Л. Д. Зеркальные сканирующие антенны: Теория и методы расчета / Л. Д. Бахрах, Г. К. Галимов. – Москва : Наука, 1981. – 302 с.
42. Драбкин, А. Л. Антенно-фидерные устройства / А. Л. Драбкин, В. Л. Зуненко, А. Г. Кислов. – Изд. 2-е. – Москва : Сов. радио, 1974. – 535 с.
43. Айзенберг, Г. З. Антенны УКВ / под ред. Г. З. Айзенберга. В 2 ч. Ч. 1. – Москва : Связь, 1977. – 381 с.
44. Гряник, М. В. Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа / М. В. Гряник, В. И. Ломан. – Москва : Радио и связь, 1987. – 72 с.
45. Гостев, В. И. Многофункциональные зеркальные антенны / В. И. Гостев, М. В. Гряник, Д. А. Худолин. – Киев : Радиоматор, 1999. – 317 с.

46. Воробьев, Ю. В. Метод моментов в прикладной математике / Ю. В. Воробьев – Москва : Физматгиз, 1958. – 186 с.
47. Канторович, Л. В. Приближенные методы высшего анализа. – 5-е изд. – Москва : Физматгиз, 1962. – 708 с.
48. Полянский, И. С. Алгоритм формирования характеристики излучения многолучевой гибридной зеркальной антенны / Н. С. Архипов, И. С. Полянский, В. Д. Сахончик // Труды НИИР. – 2012. – С. 68–78.
49. Полянский, И. С. Алгоритм формирования кластерных групп облучателей гибридных зеркальных антенн / И. С. Полянский, Н. С. Архипов, А. С. Великих [и др.] // Телекоммуникации. – 2010. – № 10. – С. 25–32.
50. Першин, А. С. Методы пространственной фильтрации помех / А. С. Першин // Доклады ТУСУР. – 2013. – № 3(29). – С. 43 – 46.
51. Тяпкин, В. Н. Алгоритмы адаптации многолучевых антенн, построенных на базе гибридно-зеркальных антенн / В. Н. Тяпкин, Д. Д. Дмитриев, А. С. Першин // Журнал Сибирского федерального университета. Техника и технологии. – 2013. – № 6(7). – С. 835–844.
52. Серенков, В. И. Метод синтеза амплитудно-фазового распределения гибридно-зеркальной антенны / В. И. Серенков, И. Н. Карцан, Д. Д. Дмитриев // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева. – 2015. – Т.6. – № 3. – С. 664–669.
53. Полянский, И. С. Математическая модель многолучевого векторного канала системы спутниковой связи, использующей пространственно-поляризационную развязку зон обслуживания с повторным использованием частот / И. С. Полянский, В. Д. Сахончик, Г. А. Ермишин // III Международная интернет-конференция молодых ученых, аспирантов и студентов «Инновационные технологии: теория, инструменты, практика» (InnoTech 2011). – Пермь, 2011.
54. Полянский, И. С. Задача поляризационного разделения зон обслуживания систем спутниковой связи с многолучевыми гибридными зеркальными антеннами на бортовом ретрансляторе / И. С. Полянский // Перспективы развития информационных технологий. – 2011. – № 6. – С. 188–194.
55. Полянский, И. С. Алгоритм и результаты решения задачи по исследованию степени развязки в многолучевых гибридных зеркальных антеннах. Часть 1 // Н. С. Архипов, И. С. Полянский // Телекоммуникации. – 2012. – № 8. – С. 23–28.
56. Полянский, И. С. Алгоритм и результаты решения задачи по исследованию степени развязки в многолучевых гибридных зеркальных антеннах. Часть 2 // Н. С. Архипов, И. С. Полянский // Телекоммуникации. – 2013. – № 9. – С. 2–10.
57. Кинбер, Б. Е. Обратные задачи теории зеркальных антенн – приближение геометрической оптики / Б. Е. Кинбер. – Москва : Препринт ИРЭ АН СССР. –1984. – № 38(410). – 48 с.

58. Архипов, Н. С. Алгоритм синтеза зеркальных систем многофункциональных антенн / Н. С. Архипов // Телекоммуникации. – 2003. – № 9. – С. 35–44.
59. Архипов, Н. С. Синтез отражающей поверхности по заданному распределению плотности потока мощности в зеркальных системах / Н. С. Архипов, Д. Е. Степанов // Вестник СОНИИР. – 2006. – № 4(14). – С. 30–45.
60. Полянский, И. С. Синтез корректирующего рефлектора двухзеркальных антенн зонтичного типа, построенных по схеме со смещенной образующей (схема АДЭ) / Н. С. Архипов, И. С. Полянский, Г. А. Ермишин // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. – 2013. – № 4. – С. 48–56.
61. Архипов, Н. С. Метод геометрии масс в задачах проектирования многофункциональных антенных систем зеркального типа / Н. С. Архипов // Математическое и программное обеспечение проектирования систем: научно-технический сборник / под ред. В. К. Погребного. – Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2002. – Вып. 2. – С. 56–62.
62. Архипов, Н. С. Использование метода геометрии масс для определения местоположения облучателя при широкоугольном сканировании / Н. С. Архипов, М. В. Гряник, В. И. Ломан // Тезисы докладов 1-й Всесоюзной НТК «Математические методы анализа и оптимизации зеркальных антенн различного назначения». – Свердловск : Академия наук СССР, 1989. – С. 13–14.
63. Пат. № 2461929 Российской Федерации, МПК H01Q19/10, H01Q19/17. Способ оптимального размещения и ориентации приемного/передающего излучателя в виде коаксиально расположенных диэлектриков цилиндрической формы в фокальной области используемых коллимирующих поверхностей / Н. С. Архипов, С. Н. Архипов, И. С. Полянский, Г. А. Ермишин; заявитель и патентообладатель Государственное казенное военное образовательное учреждение высшего профессионального образования Академия ФСО России. – № 2011115901; заявл. 21.04.2011; опубл. 20.09.2012.
64. Реутов, А. С. Особенности поэтапного синтеза зеркальных антенн с контурными диаграммами направленности при использовании сплайнового представления поверхности зеркала / А. С. Реутов, А. В. Шишлов // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2003. – № 2. – С. 4–14.
65. Архипов, Н. С. Решение внутренней задачи оптимизации электродинамических систем / Н. С. Архипов // Известия ВУЗОВ. Кибернетика и ВУЗ. – 1992. – № 27. – С. 32–37.
66. Шишлов, А. В. Применение двумерного интерполяционного ряда Котельникова для синтеза антенн с контурными диаграммами направленности / А. В. Шишлов, А. М. Шитиков // Радиофизические методы обработки сигналов: Междуведомственный сборник научных трудов. – Москва : МФТИ, 1996. – С. 112–128.

67. Архипов, Н. С. Синтез амплитудно-фазового распределения антенных систем зеркального типа при пространственной обработке сигналов / Н. С. Архипов, А. В. Карпов // Вестник СОНИИР. – 2007. – № 2(16). – С. 15–24.
68. Зелкин, Е. Г. Методы синтеза антенн: Фазированные антенные решетки и антенны с непрерывным раскрытием / Е. Г. Зелкин, В. Г. Соколов. – Москва : Сов. радио, 1980. – 296 с.
69. Архипов, Н. С. Способ согласования внутреннего и внешнего полей фокальной области антенных устройств радиотехнических систем / Н. С. Архипов // Математическое и программное обеспечение САПР: Научно-технический сборник / под ред. В. К. Погребного. – Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 1997. – Вып. 1. – С. 216–219.
70. Вуд, П. Анализ и проектирование зеркальных антенн: пер. с англ. / П. Вуд. – Москва : Радио и связь, 1984. – 208 с.
71. Полянский, И. С. Представление отражающих поверхностей антенной системы в задачах анализа и синтеза зеркальных антенн методами физической оптики / Н. С. Архипов, И. С. Полянский, Д. Е. Степанов // Телекоммуникации. – 2014. – № 7. – С. 15–21.
72. Полянский, И. С. Сшивание электромагнитных полей группового облучателя и рефлектора многолучевой гибридной зеркальной антенны / И. С. Полянский, Д. Е. Степанов // XIV Международная НПК «Научное образование физико-математических и технических наук в XXI веке». – Москва : 27-28.02.2015. – С. 61–67.
73. Guenad, V. Multibeam antennas array pattern synthesis using a variational method / Boumediene Guenad, Sidi Mohamed Meriah, Fethi Tarik Bendimerad // Radioengineering, june 2007. – Vol. 16. – No. 2. – 28–33 pp.
74. Полянский, И. С. Векторная математическая модель системы спутниковой связи с многолучевыми антеннами зеркального типа / Н. С. Архипов, И. С. Полянский, А. В. Карпов // Телекоммуникации. – 2014. – № 12. – С. 15–20.
75. Полянский, И. С. Оценка пропускной способности системы спутниковой связи, обеспечивающей пространственное и частотное разделение зон обслуживания / Н. С. Архипов, И. С. Полянский, А. И. Ветров // Телекоммуникации. – 2015. – № 2. – С. 24–30.
76. Полянский, И. С. Распределение частотно-поляризационного ресурса многолучевой спутниковой системы / Н. С. Архипов, И. С. Полянский, А. В. Карпов // Телекоммуникации. – 2015. – № 5. – С. 20–26.
77. Данилов, В. А. Теория когерентных фокусаторов / В. А. Данилов, Б. Е. Кинбер, А. В. Шишлов // Компьютерная оптика. – 1987. – № 1. – С. 40–52.
78. Виленко, И. Л. Гибридные зеркальные антенны с облучающими активными фазированными решетками / И. Л. Виленко, Ю. В. Кривошеев, А. В. Шишлов // Антенны. – 2011. – № 10. – С. 22–42.
79. Хенл, Х. Теория дифракции / Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. – Москва : Мир, 1964.

80. Еремин, Ю. А. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции / Ю. А. Еремин, А. Г. Свешников. – Москва : Изд-во МГУ, 1992. – 182 с.
81. Апельцин, В. Ф. Метод вспомогательных источников. Вычисление полей вне граничных поверхностей / В. Ф. Апельцин и др. // Материалы IX Всесоюзной школы по дифракции и распространению волн. Казань : Изд-во Казанского авиационного института, 1988.
82. Анютин, А. П. Модифицированный метод дискретных источников / А. П. Анютин, А. Г. Кюркчан, С. А. Минаев // Радиотехника и электроника, № 8, Т. 47, 2002. – С. 955–960.
83. Кюркчан, А. Г. Решение задач дифракции электромагнитного поля на телах вращения при помощи модифицированного метода дискретных источников // Радиотехника и электроника, № 11, 2006. – С. 1285–1293.
84. Thomas, B. MacA. Theoretical performance of prime-focus paraboloids using cylindrical hybrid-mode feeds, Proc. Inst. Elec. Eng., 1971. – Vol. 118. – 1539–1549 pp.
85. Пространственно-временная теория радиосистем: Учебное пособие для вузов. – Москва : Радио и связь, 1987. – 320 с.
86. Архипов, Н. С. Фильтрация сигналов в ГЗА / Н. С. Архипов, В. С. Кочетков // Сб. научных трудов ВИПС. – Орел : ВИПС. – 2000. – Вып. 10. – С. 40–53.
87. Васильев, Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. – Москва : Наука, 1980. – 520 с.
88. Сеа, Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы / Ж. Сеа. Пер. с франц. Л. Г. Гуриной под. ред. А. Ф. Кононенко, Н. Н. Моисеева. – Москва : Мир, 1973. – 244 с.
89. Химмельблау, Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – Москва : изд.«МИР», 1975. – 536 с.
90. Пшеничный, Б. Н. Численные методы в экстремальных задачах / Б. Н. Пшеничный, Ю. М. Данилин. – Москва : Наука. – 1975. – 319 с.
91. Балк, М. Б. Геометрия масс / М. Б. Балк, В. Г. Болтянский. – Москва : Наука: гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 160 с.
92. Зелкин, Е. Г. Синтез антенн на основе атомарных функций. Кн.2 / Е. Г. Зелкин, В. Ф. Кравченко. – Москва : ИПРЖР, 2003. – 72 с.
93. Раскин, Л. Г. Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления / Л. Г. Раскин. – Москва : Сов. радио, 1976. – 344 с.
94. Natarajan, Sundararajan. Enriched finite element methods: advances & applications. PhD Thesis, Cardiff University, 2011. – 197 p.
95. Лаврентьев, М. А. Конформное отображение с приложениями к некоторым вопросам механики / М. А. Лаврентьев. – Москва : ОГИЗ, 1946. – 159 с.
96. Пантелеев, А. В. Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации / А. В. Пантелеев, К. А. Рыбаков. – Москва : Изд-во МАИ, 2012. – 160 с.

97. Кузнецов, Д. Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. 4-е изд., испр. и доп. / Д. Ф. Кузнецов. – Санкт-Петербург : Изд.-во Политехн. Ун-та, 2010. – 816 с.
98. Тихонов, В. И. Марковские процессы / В. И. Тихонов, М. А. Миронов. – Москва : «Сов. радио», 1977. – 488 с.
99. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике. – 2-е изд. / С. Г. Михлин. – М.-Л. – 1970. – 512 с.
100. Бенерджи, П. Метод граничных элементов в прикладных науках: Пер. с англ. / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – Москва : Мир, 1984. – 494 с.
101. Кацикаделис, Дж. Т. Граничные элементы: Теория и приложения. Пер. с англ. / Т. Дж. Кацикаделис. – Москва : Изд-во АСВ, 2007. – 348 с.
102. Родионов, В. И. О применении специальных многомерных сплайнов произвольной степени в числовом анализе / В. И. Родионов // Вестник удмуртского университета. Матем. Мех. Компьют. науки. – 2010. – № 4. – С. 146–153.
103. Понтрягин, Л. С. Принцип максимума / Л. С. Понтрягин. – Москва : Фонд математического образования и просвещения, 1998. – 70 с.
104. Olemskoy, I. V. Embedded methods of order six for special systems of ordinary differential equations / I. V. Olemskoy, A. S. Eremin, N. A. Kovrizhnykh // Appl. Math. Sci. 2017. – Vol. 11. – No. 1. – 31–38 pp.
105. Полянский, И. С. Гибридный генетический метод с градиентным обучением и прогнозированием для решения задач глобальной оптимизации многоэкстремальных функций / И. С. Полянский, Д. Е. Степанов, М. М. Фролов // Вестник БГТУ. – 2014. – № 3(43). – С. 138–146.
106. Полянский, И. С. Метод одномерной безусловной оптимизации в задаче оценки развязки парциальных лучей многолучевой антенны зеркального типа / И. С. Полянский // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 4; URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=6880>
107. Colton, D. Integral equation methods in scattering theory / D. Colton, R. Kress. – Philadelphia: SIAM, 2013. – 286 p.
108. Полянский, И. С. Барицентрический метод в задачах анализа поля в регулярном волноводе с произвольным поперечным сечением / И. С. Архипов, И. С. Полянский, Д. Е. Степанов // Антенны. – 2015. – № 1(212). – С. 32–40.
109. Голованов, Н. Н. Геометрическое моделирование / Н. Н. Голованов. – Москва : Изд-во физ.-мат. лит., 2002. – 472 с.
110. Wachspress, E. L. A Rational Finite Element Basis. – New York : Academic Press, 1975. – 331 p.
111. Floater, M. S. Mean value coordinates / Michael S. Floater. Computer Aided Geometric Design. – 2003. – № 1(20). – 19–27 pp.
112. Belyaev, A. On Transfinite Barycentric Coordinates / A. Belyaev. Proc. Fourth Eurographics Symp. Geometry Processing (SGP '06), 2006. – 89–99 pp.
113. Gordon, W. J. Pseudo-Harmonic Interpolation on Convex Domains / W. J. Gordon, J. A. Wixom. SIAM J. Numerical Analysis. – 1974. – Vol. 11, № 5. – 909–933 pp.
114. Manson, J. Positive Gordon-Wixom Coordinates / J. Manson, K. Li, S. Schaefer. Computer Aided Design. – 2011. – Vol. 43. – № 11. – 1422–1426 pp.

115. Hormann, K. Maximum Entropy Coordinates for Arbitrary Polytopes / K. Hormann, N. Sukumar. *Computer Graphics Forum*. – 2008. – Vol. 27, № 5. – 1513–1520 pp.
116. Manson, J. Moving Least Squares Coordinates / J. Manson, S. Schaefer. *Proc. Symp. Geometry Processing*. – 2010. – 1517–1524 pp.
117. Xian-Ying, Li. Poisson Coordinates / Xian-Ying Li, Shi-Min Hu. *IEEE Transactions on visualization and computer graphics*. – 2013. – Vol. 19, № 2. – 344–352 pp.
118. Полянский, И. С. Барицентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области (Часть 1) / И. С. Полянский // *Вестник СГТУ*. – 2015. – № 1(78). – С. 30–36.
119. Полянский, И. С. Барицентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области (Часть 2) / И. С. Полянский // *Вестник СГТУ*. – 2015. – № 1(78). – С. 36–42.
120. Sukumar, N. Recent Advances in the Construction of Polygonal Finite Element Interpolants / N. Sukumar, E. A. Malsch. *Arch. Comput. Meth. Engng.* – 2006. – Vol. 13. – № 1. – 129–163 pp.
121. Lipman, Y. GPU-assisted Positive Mean Value Coordinates for Mesh Deformations / Yaron Lipman, Johannes Kopf, Daniel Cohen-Or, David Levin. In A. Belyaev and M. Garland editors. *Geometry Processing, Eurographics Symposium Proceedings*. Barcelona, Spain. – 2007. – 117–123 pp.
122. Meyer, M. Generalized Barycentric Coordinates on Irregular Polygons / Mark Meyer, Haeyoung Lee, Alan Barr, Mathieu Desbrun // *Journal of Graphics Tools*. – 2002. – No. 7(1). – 13–22 pp.
123. Chan, Renjie. On pseudo-harmonic barycentric coordinates / Renjie Chan, Craig Gotsman // *Computer Aided Geometric Design*. – May 2016. – Vol. 44. – 15–35 pp.
124. Floter, M. S. A general construction of barycentric coordinates over convex polygons / M. S. Floter, K. Hormann, G. Kos // *Advances in Computational Mathematics*. – Jan. 2006. – Vol. 24. – 311–331 pp.
125. Полянский, И. С. Барицентрические координаты Пуассона–Римана / И. С. Полянский // *Труды СПИИРАН*. – 2016. – № 6(49). – С. 32–48.
126. Ju, T. A general geometric construction of coordinates in a convex simplicial polytope / Tao Ju, Peter Liepa, Joe Warren. *Computer Aided Geometric Design*. – 2007. – № 3(24). – 161–178 pp.
127. Chan, R. Complex transfinite barycentric mappings with similarity kernels / Renjie Chan, Craig Gotsman // *Eurographics Symposium on Geometry Processing*. – 2016. – Vol. 35. – № 19.
128. Ahammad, M. U. A comparative study between two interpolation functions: Lagrange and trigonometric interpolation / M. U. Ahammad, Hoque Mollah Md. Shirazul // *International Journal of Scientific Engineering and Applied Science (IJSEAS)*. Issue-6, June 2016. – Vol. 2. – 51–54 pp.

129. Амосов, А. А. Вычислительные методы для инженеров / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. – Москва : Высшая школа, 1994. – 544 с.
130. Silvester, P. High-order polynomial triangular finite elements for potential problems, *International Journal of Engineering Science*. – 1969. – № 7. – 849–861 pp.
131. Фельдштейн, Л. Р. Справочник по элементам волноводной техники / Л. Р. Фельдштейн, Л. Р. Явич, В. П. Смирнов. – Москва : Гос. энергетические из-во, 1963. – 359 с.
132. Галишникова, Т. Н. Численные методы в задачах дифракции / Т. Н. Галишникова, А. С. Ильинский. – Москва : Изд-во МГУ, 1987. – 208 с.
133. Полянский, И. С. Векторный барицентрический метод в вычислительной электродинамике / И. С. Полянский // Труды СПИИРАН. – 2017. – № 2(51). – С. 206–222.
134. Graglia, R. D. Higher order interpolatory vector bases for computational electromagnetics / Roberto D. Graglia, Donald R. Wilton, Andrew F. Peterson // *IEEE transactions on antennas and propagation*. – 1997. – Vol. 45. – No. 3. – 329–342 pp.
135. Whitney, H. *Geometric Integration theory* / H. Whitney. – Princeton, NJ.: Princeton University Press, 1957. – 387 p.
136. Koshiba, M. A. Vector finite element method with the high-order mixed interpolationtype triangular elements for optical waveguiding problems / M. Koshiba, S. Maruyama, K. A. Hirayama // *J. Lightwave Techn.* –1994. – Vol. 12. – № 3. – 495–502 pp.
137. Nedelec, J. C. Mixed finite elements in R^3 / C. J. Nedelec. – *Numer. meth.* – 1980. – Vol. 35. – 315–341 pp.
138. Graglia, R. D. Singular higher order complete vector bases for finite methods / Roberto D. Graglia, Duido Lombardi // *IEEE transactions on antennas and propagation*/. – 2004. – Vol. 52. – № 7. – 1672–1685 pp.
139. Graglia, R. D. Higher-order techniques in computational electromagnetics / Roberto D. Graglia, Andrew F. Peterson. Mario Boella Series on Electromagnetism in Information and Communication. Published by SciTech Publishing, an imprint of the IET, 2016. – 392 p.
140. Davidson, D. B. High-order (LT/QN) vector finite elements for waveguide analysis / David B. Davidson // *Aces Journal*. – 2002. – Vol. 17. – № 1. – 1–10 pp.
141. Фильчаков, П. Ф. Приближенные методы конформных отображений. Справочное руководство / П. Ф. Фильчаков. – Киев : Наукова думка, 1964. – 536 с.
142. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного. Издание 4-е испр. / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – Москва : Наука, 1973. – 736 с.
143. Trefethen, L. N. Numerical computation of the Schwarz–Christoffel transformation / Lloed N. Trefethen // *SIAM J. SCI. STAT. COMPUT.* – 1980. – Vol. 1. – № 1. 82–102 pp.
144. Driscoll, T. A. Schwarz–Christoffel mapping / T. A. Driscoll, L. N. Trefethen. – Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2002. – 132 p.

145. Бицадзе, А. В. Основы теории функции комплексного переменного / А. В. Бицадзе. – Москва : Наука, 1969. – 240 с.
146. Sudbery, A. Quaternionic Analyses. Dep. of Math. University of York, Heslington. Aug. – 1977.
147. Смирнов, В. И. Курс высшей математики. Том 3. Часть 2. Изд. 9 / В. И. Смирнов. – Москва : Наука, 1974. – 672 с.
148. Иванов, В. И. Конформные отображения и их приложения. Под ред. А. Г. Свешникова / В. И. Иванов, П. В. Попов. – Москва : Едиториал УРСС, 2002. – 324 с.
149. Фильчаков, П. Ф. Конформные отображения областей специального типа / П. Ф. Фильчаков. – Киев : Наукова думка, 1972. – 252 с.
150. Куфарев, П. П. Об одном методе определения параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца // ДАН СССР, 1947. – Т. 57. – С. 535–537.
151. Хара, И. С. Об одном методе приближенного конформного отображения многоугольных областей на единичный круг / И. С. Хара // ДАН УССР, 1953. – №. 4. – С. 289–293.
152. Коппенфельс, В. Практика конформных отображений / В. Коппенфельс, Ф. Штальман. – Москва : Иностр. лит., 1963. – 406 с.
153. Накипов, Н. Н. Параметрический метод нахождения акцессорных параметров в обобщенных интегралах Кристоффеля–Шварца / Н. Н. Накипов, С. Р. Насыров // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки, 2016. – Т. 158, кн 2. – С. 202–220.
154. Driscoll T. A. Algorithm 756: A MATLAB toolbox for Schwarz–Christoffel mapping // AMC Transactions on Mathematical Software. – June 1996. – Vol. 22, N. 2. – P. 168–186.
155. Козлов В. С. Гидромеханический расчет флютбетов / В. С. Козлов. – Москва; Ленинград : Гос. энергет. изд., 1941. – 278 с.
156. Полянский, И. С. Модифицированный метод последовательных конформных отображений наперед заданных многоугольных областей / В. М. Радыгин, И. С. Полянский // Вестник ТГУ. Математика и механика. – 2016. – № 1(39). – С. 25–35.
157. Gentili, G. Quaternionic regular maps and ∂ -type operators / Graziano Gentili, Carlo Mariconda, Massimo Tarallo // A Quaterly Jornal of Pure and Applied Mathematics. – 1993. – Vol. 67. – № 3–4. – 333–359 pp.
158. Fokas, A. S. Quaternions, Evaluation of Integrals and Boundary Value Problems / Athanassios S. Fokas, Dimitrios A. Pinotsis // Computational Methods and Function Theory. – 2007. – Vol. 7. № 2. – 443–476 pp.
159. P. Van Lancker. Taylor and Laurent series on the sphere. Complex Variables, Theory and Application: An International Journal. – 1999. – 38:4. – 321–365 pp.
160. Янушаускас, А. И. Трехмерные аналоги конформных отображений / А. И. Янушаускас. – Новосибирск : Наука, 1982. – 176 с.
161. Лаврентьев М. А. Теория квазиконформных отображений. – Труды 3-го Всесоюз. матем. съезда. – Москва : Изд-во АН СССР. – 1958. – Т. 3. – С. 198–208.

162. Гамильтон, У. Р. Избранные труды: Оптика. Динамика. Кватернионы. – Москва : Наука, 1994. – 560 с.
163. Виленкин, Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. – Москва : Наука, 1991.
164. Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ / В. Б. Шабат. В 2-х томах. – Москва : Наука, 1976. – 720 с.
165. Альфорс, Л. Преобразование Мёбиуса в многомерном пространстве: Пер. с англ. – Москва : Мир, 1986. – 112 с.
166. Полянский, И. С. Прямое и обратное конформные отображения дискретных областей в евклидовых пространствах / В. М. Радыгин, И. С. Полянский // X Всероссийская межведомственная научная конференция: материалы и доклады (Орёл, 7–8 февраля 2017 года). В 12 ч. Ч. 6 / под. общ. ред. В. В. Мизерова. – Орёл : Академия ФСО России, 2017. – 196 с.
167. Норден, А. П. Теория поверхностей / А. П. Норден. – Москва : Гос. изд-во технико-теоретической лит. – 1956. – 260 с.
168. Полянский, И. С. Методы конформных отображений многогранников в \mathbb{R}^3 / В. М. Радыгин, И. С. Полянский // Вестник удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2017. – Т. 27. – № 1. – С. 60–68.
169. Штепина, Т. В. Обобщение теоремы Функа–Гекке на случай гиперболического пространства, Изв. РАН. Сер. матем. / Т. В. Штепина. 2004. – Т. 68. – № 5. – С. 213–224.
170. Раскин Л. Г. Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления / Р. Г. Раскин. – Москва : Сов. радио, 1976. – 344 с.
171. Бусленко, Н. П. Моделирование сложных систем / Н. П. Бусленко. – Москва : Наука, 1968. – 354 с.
172. Степанов, Д. Е. Структурно-параметрический синтез многолучевой зеркальной антенны / Д. Е. Степанов // Антенны. – 2016. – № 2. – С. 11–19.
173. Сомов, А. М. Метод фрагментации для расчета шумовой температуры антенны / А. М. Сомов. – Москва : Горячая линия – Телеком, 2008. – 208 с.
174. Дитчберн, Р. Физическая оптика / Р. Дитчберн: пер. с англ. Л. А. Вайнштейна, О. А. Шустина / под ред. И. А. Яковлева. – Москва : Наука, 1965. – 631 с.
175. Уфимцев, П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции / П. Я. Уфимцев. – Москва : Советское радио, 1962. – 243 с.
176. Полянский, И. С. Расчет диаграммы направленности зеркальных антенн в приближении методов физической оптики и физической теории дифракции / А. М. Сомов, Н. С. Архипов, И. С. Полянский, Д. Е. Степанов // Труды НИИР. – 2015. – № 2. – С. 68–78.
177. Семёнов, А. А. Теория электромагнитных волн / А. А. Семёнов. – Москва : МГУ, 1968. – 316 с.
178. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, К. Корн. – Москва : Наука, 1970. – 720 с.
179. Колтон, Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния: пер. с англ. / Д. Колтон, Р. Кресс. – Москва : Мир, 1987. – 311 с.

180. Панасюк, В. В. метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, З. Т. Назарчук. – Киев : Наук. думка, 1984. – 344 с.
181. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – Москва : Наука, 1978. – 512 с.
182. Скворцов, А. В. Триангуляция Делоне / А. В. Скворцов. – Томск: Изд-во Том. Ун-та, 2002. – 128 с.
183. Математика и САПР: В 2-х кн. Кн. 1. Пер. с франц. / Шенен П., Коснар М., Гардан И. и др. – Москва : Мир, 1988. – 204 с.
184. Сазонов, Д. М. Антенны и устройства СВЧ: Учеб. для радиотехнич. спец. ву-зов. – Москва : Высш. шк., 1988. – 432 с.
185. Gibson, W. C. The method of moments in electromagnetics. – N.-Y. : Chapman and Hall/CRC, 2008. – 272 p.
186. Клюев, Д. С. Электродинамический анализ зеркальных антенн самосогласованным методом / Д. С. Клюев, Ю. В. Соколова // Журнал технической физики. – 2014. – Т. 84. – № 9. – С. 155–158.
187. Яковлев, С. Л. Об особенности функции Грина оператора Шрёдингера с потенциалами, сингулярными в начале координат / С. Л. Яковлев, В. А. Градусов // Вестник РУДН. – 2014. – № 1. – С. 153–157.
188. Неганов, В. А. Метод сингулярных интегральных уравнений в теории зеркальных антенн / В. А. Неганов, Д. С. Клюев, В. С. Якунин // Вестник СГАУ. – 2010. – № 2. – С. 212–218.
189. Бутов, Е. Обзор возможностей Ansys HFSS для трехмерного моделирования СВЧ-устройств произвольной геометрии / Е. Бутов, А. Ларионов // САПР и графика. – 2012. – № 1(183). – С. 62–65.
190. Лифанов, И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент / И. К. Лифанов. – Москва : ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
191. Jung, V. H. Time and Frequency Domain Solutions of EM Problems Using Integral Equations and a Hybrid Methodology / V. H. Jung, T. K. Sakar, Y. Zhang, etc. – New York : IEEE Press, 2010.
192. Вайникко, Г. М. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г. М. Вайникко, И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский. Москва : Янус-К, 2001. – 508 с.
193. Sabariego, R. V. The fast multipole method for electromagnetic field computation in numerical and physical hybrid systems, Ph.D. thesis, University of Lige, 2004.
194. Cai, W. Singularity treatment and high-order RWG basis functions for integral equations of electromagnetic scattering / W. Cai, Y. Yu, X. C. Yu // Int. J. Numerical Methods Eng. – 2002. – Vol. 53. – 31–47 pp.
195. Chobanyan, E. Double-higher-order large-domain volume/surface integral equation method for analysis of composite wire-plate-dielectric antennas and scatterers / E. Chobanyan, M. Ilie, B. Notaros // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 2013. – Vol. 61. – № 12. – 6051–6063 pp.

196. Гроссо Р. Мембранное зеркало как элемент адаптивной оптической системы / Р. Гроссо, М. Еллин. – В кн. : Адаптивная оптика. – Москва : Мир, 1980. – С. 428–447.
197. Пат. № 2576493 Российской Федерации, МПК H01Q3/01. Способ синтеза формы отражающей поверхности антенной системы зеркального типа / И. С. Полянский, Д. Е. Степанов; заявитель и патентообладатель Государственное казенное военное образовательное учреждение высшего профессионального образования Академия ФСО России. – № 2014124657; заявл. 17.06.2014; опубл. 05.02.2016. – 11 с.
198. Bayanna, A. R. Membrane based Deformable Mirror: Intrinsic aberrations and alignment issues / A. Raja Bayanna, Rohan E. Louis, S. Chatterjee, Shibu K. Mathew, P. Venkatakrishnan // Applied Optics. –2015. – Vol. 54(7). – 1727–1736 pp.
199. Авдонин, А. С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. – Москва : Машиностроение, 1969. – 402 с.
200. Reza, E. M. Finite elements methods in mechanics / Eslami M. Reza. – Cham, Switzerland : Springer, 2014. – 370 pp.
201. Полянский, И. С. Барицентрический метод в задаче оптимального управления формой отражающей поверхности зеркальной антенны // Математическое моделирование. – 2017. – Т. 29. – №11. – С. 140–150.
202. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – Москва : Бином, 2003. – 630 с.
203. Полак, Э. Численные методы оптимизации. Единый подход / Э. Полак; пер. с английского Ф. И. Ерешко; под ред. И. А. Вателя. – Москва : Мир, 1974. – 376 с.
204. Лэсдон, Л. Оптимизация больших систем / Л. Лэсдон. – Москва : Наука, 1975. – 432 с.
205. Гилл, Ф. Практическая оптимизация / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт. – Москва : Мир, 1985. – 509 с.
206. Таха, Хэмди А. Введение в исследование операций. – Москва : Изд. дом «Вильямс», 2001. – 912 с
207. Жилинскас, А. Поиск оптимума: компьютер расширяет возможности / А. Жилинскас, В. Шалтинис. – Москва : Наука, 1989. – 128 с.
208. Хаусхолдер, А. С. Основы численного анализа / А. С. Хаусхолдер. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 1956. – 320 с.
209. Савинов, Г. В. Метод сопряженных градиентов для решения системы нелинейных уравнений / Г. В. Савинов // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1977. – № 70. – С. 178–183.
210. Kim, D. H. A hybrid genetic algorithm and bacterial foraging approach for global optimization / Dong Hwa Kim, Ajith Abraham, Jae Hoon Cho // Information Sciences, 177 (2007). – 3918–3937 pp.
211. Тененев, В. А. Гибридный генетический алгоритм с дополнительным обучением лидера / В. А. Тененев, Н. Б. Паклин // Интеллектуальные системы в производстве. – 2003. – № 2. – С. 181–206.

212. Дмитриев, С. В. Применение прямых методов оптимизации в гибридном генетическом алгоритме / С. В. Дмитриев, В. А. Тененев // Интеллектуальные системы в производстве. – 2005. – № 2. – С. 11–22.
213. Дмитриев, С. В. Оптимизация многоэкстремальных функций с помощью гибридных генетических алгоритмов / С. В. Дмитриев, В. А. Тененев // Известия Института математики и информатики. Ижевск. – 2006. – № 2(36). – С. 163–166.
214. Андерсон, Т. Статистический анализ временных рядов / Т. Андерсон. Пер. с англ. И. Г. Журбенко, В. П. Носко, под ред. Ю. К. Беляева. – Москва : Мир, 1976. – 755 с.
215. Herrera, F. Tackling real-coded genetic algorithms: operators and tools for the behaviour analysis / F. Herrera, M. Lozano, J. L. Verdegay // Artificial Intelligence Review. – 1998. – Vol. 12, № 4. – 265–319 pp.
216. Уайт, Д. Электромагнитная совместимость радиоэлектронных средств и непреднамеренные помехи. Выпуск 1. Общие вопросы ЭМС. Межсистемные помехи. Сокращенный перевод с английского под редакцией А. И. Сапгира. Послесловие и комментарии А. Д. Князева. – Москва : Советское радио, 1987. – 347 с.
217. Полянский, И. С. Бариецентрический метод в решении сингулярных интегральных уравнений электродинамической теории зеркальных антенн / И. С. Полянский, Ю. С. Пехов // Труды СПИИРАН. – 2017. – № 5(54). – С. 244–262.
218. Ильинский, А. С. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах / А. С. Ильинский, Ю. Г. Смирнов. – Москва : ИПРЖР, 1996. – 176 с.
219. Полянский, И. С. Алгоритм аппроксимации функции многих переменных на основе решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода (часть I) / И. С. Полянский, Н. С. Архипов // Телекоммуникации. – 2012. – № 1. – С. 2–8.
220. Полянский, И. С. Алгоритм аппроксимации функции многих переменных на основе решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода (часть II) / И. С. Полянский, Н. С. Архипов // Телекоммуникации. – 2012. – № 3. – С. 11–15.
221. Малышев, Н. Г. Нечеткие модели для экспертных систем САПР / Н. Г. Малышев, Л. С. Берштейн, А. В. Боженюк. – Москва : Энергоатомиздат, 1991. – 136 с.
222. Липатов, В. В. Тестирование программ. – Москва : Радио и связь, 1986. – 296 с.
223. Беседин, И. И. Математическое моделирование и синтез комплекса инженерно-технических средств системы физической защиты промышленного объекта : диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук : 05.13.18 / Беседин Иван Игоревич. – Брянск, 2013. – 155 с.

224. Кобзарь, А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А. И. Кобзарь. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.
225. Самарский, А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – 2-е изд., испр. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 320 с.
226. Полянский, И. С. Алгоритм распределения однородных непрерывных ограниченных ресурсов на основе решения задачи условной оптимизации по критерию минимума моментов инерции / И. С. Полянский, Н. С. Архипов, В. А. Хомаза // Телекоммуникации. – 2011. – № 11. – С. 8–12.
227. Полянский, И. С. Алгоритм оптимизации бюджета PON-сети / С. Н. Архипов, И. С. Полянский // Телекоммуникации. – 2012. – № 13. – С. 3–9.
228. Полянский, И. С. Распределение однородного непрерывного ограниченного ресурса в иерархических системах транспортного типа с древовидной структурой / И. С. Полянский, И. В. Логинова, И. И. Беседин, М. М. Фролов // Информационные системы и технологии, № 2 (76) март-апрель 2013 г. – С. 99–106.
229. Полянский, И. С. Алгоритм распределения неоднородных дискретных ограниченных ресурсов в системе физической защиты / И. С. Полянский, И. И. Беседин // Информационные системы и технологии, № 4 (78) июль-август 2013 г. – С. 10–18.
230. Полянский, И. С. Задача распределения неоднородных дискретных ограниченных ресурсов / И. С. Полянский, И. И. Беседин // VI Всероссийская научно-практическая конференция «Территориально распределенные системы охраны» – ФГКОУ ВПО «Калининградский пограничный институт ФСБ России», г. Калининград, 2-4 апреля 2013 г. – С. 153–157.
231. Полянский, И. С. Математическая модель комплекса инженерно-технических средств системы физической защиты объекта охраны / И. С. Полянский, И. И. Беседин, Б. Л. Панин // Фундаментальные исследования № 6 (часть 6) 2013 г. – С. 1359–1365.
232. Полянский, И. С. Задача структурно-топологического синтеза системы иерархического типа с древовидной структурой / И. С. Полянский, И. И. Беседин // XVIII Всероссийская научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Научная сессия ТУСУР – 2013», г. Томск, 15-17 мая 2013 г. – С. 62–66.
233. Полянский, И. С. Синтез локально-оптимальной структуры классификатора информационных ресурсов по критерию минимума средней длины процедуры поиска / А. А. Батенков, И. С. Полянский, К. А. Батенков, М. А. Сазонов, В. Т. Еременко // Вестник компьютерных и информационных технологий, № 7(109) 2013 г. – С. 3–8.
234. Полянский, И. С. Методологические аспекты синтеза оптимальной древовидной структуры в системах сбора и обработки информации / В. Т. Ере-

менко, И. С. Полянский, И. И. Беседин // Вестник компьютерных и информационных технологий, № 11(113) 2013 г. – С. 15–21.

235. Полянский, И. С. Методика оценки вероятности ошибочного приема кодового слова с учетом разбиения на блоки и локализации участков / А. Н. Шкердин, И. С. Полянский // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 4.; URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=9789>

236. Полянский, И. С. Максимально правдоподобная оценка дисперсионно-ковариационной матрицы / И. С. Полянский, Д. Ю. Патронов // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 1.; URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=8516>

237. Полянский, И. С. Оценка корреляционной матрицы сигналов на входе адаптивной антенной решетки в комплексах радиосвязи с подвижными объектами / Д. Ю. Патронов, И. С. Полянский // Техника радиосвязи. – 2014. – № 3(23). – С. 61–69.

238. Кормен, Т. Алгоритмы: построение и анализ. 2-е издание. / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн : пер. с англ. И. В. Красикова, В. Н. Романова, Н. А. Ореховой / Под ред. И. В. Красикова. – Москва : Издательский дом «Вильямс», 2005. – 1296 с.

239. Гордеев, Э. Н. Устойчивость в задачах на узкие места / Э. Н. Гордеев, В. К. Леонтьев // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1980. – Т. 20. – № 4. – С. 1071–1075.

240. Крутько, П. Д. Алгоритмы и программы проектирования автоматических систем / П. Д. Крутько, А. И. Максимов, Л. М. Скворцов; под. ред. П. Д. Крутько. – Москва : Радио и связь, 1988. – 306 с.

241. Петухов, Г. Б. Методологические основы внешнего проектирования целенаправленных процессов и целеустремлённых систем / Г. Б. Петухов, В. И. Якунин. – Москва : АСТ, 2006. – 504 с.

242. Ахо, А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман; пер. с английского А. О. Слисенко; под ред. Ю. В. Матиясевича. – Москва : Мир, 1979. – 536 с.

243. Пат. № 2547627 Российской Федерации, МПК H04W84/18. Способ структурно-функционального синтеза защищенной иерархической сети связи / Н. С. Архипов, И. С. Полянский, М. М. Фролов, И. И. Беседин, В. Т. Еременко; заявитель и патентообладатель Государственное казенное военное образовательное учреждение высшего профессионального образования Академия ФСО России. – № 2013128819/08; заявл. 24.06.2013; опубл. 27.12.2014. – 19 с.

244. Бурков, В. Н. Теория активных систем: состояние и перспективы / В. Н. Бурков, Д. А. Новиков. – Москва : Синтег, 1999. – 128 с.

245. Бурков, В. Н. Адаптивные механизмы функционирования активных систем / В. Н. Бурков, В. В. Цыганов // Автоматика и Телемеханика. – 1985. – № 9. – С. 35–41.

246. Цыганов, В. В. Адаптивные механизмы в отраслевом управлении / В. В. Цыганов. – Москва : Наука, 1991. – 166 с.

247. Блюмин, С. Л. Рекуррентно-итерационные алгоритмы адаптивной идентификации нелинейных динамических сосредоточенных систем / С. Л. Блюмин, А. К. Погодаев // Автоматика и Телемеханика. – 2003. – № 10. – С. 80–86.

248. Цыпкин, Я. З. Адаптация, обучение и самообучение в автоматических системах / Я. З. Цыпкин // Автоматика и Телемеханика. – 1966. – № 1. – С. 23–61.

249. Льюнг, Л. Идентификация систем. Теория для пользователя / Л. Льюнг. – Москва : Наука, 1991. – 432 с.

250. Шифрин, Я. С. Вопросы статистической теории антенн / Я. С. Шифрин. – Москва : Сов. радио, 1970. – 384 с.

251. Джиган, В. И. Адаптивная фильтрация сигналов: теория и алгоритмы / В. И. Джиган. – Москва : Техносфера, 2013. – 512 с.

252. Поиск оптимального положения облучающей антенной решетки для решения задачи расчета характеристики поля коллинеарных поверхностей оптического и радио диапазонах / С. Н. Архипов, И. С. Полянский // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011610621 от 11.01.2011.

253. Расчет поля дальнего бокового излучения антенн зеркального типа / С. Н. Архипов, И. С. Полянский, М. В. Безручко, В. Д. Сахончик // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011610620 от 11.01.2011.

254. Расчет поля многолучевых зеркальных антенн в дальней зоне / С. Н. Архипов, И. С. Полянский, М. В. Безручко, А. В. Карпов, А. С. Великих // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011610149 от 11.01.2011.

255. Расчет поля фокальной области коллинеарных поверхностей оптического и радио диапазонах / С. Н. Архипов, И. С. Полянский, М. В. Безручко, А. В. Карпов, А. С. Великих, Г. А. Ермишин // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011610623 от 11.01.2011.

256. Поиск оптимальных значений весовых коэффициентов элементов облучающей системы для решения задачи расчета характеристики поля в оптическом и радио диапазоне / С. Н. Архипов, И. С. Полянский, М. В. Безручко, А. С. Великих // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011610619 от 11.01.2011.

257. Анализ величины развязки характеристики излучения многолучевой гибридной зеркальной антенны с кластерными излучателями произвольной формы / С. Н. Архипов, И. С. Полянский, А. В. Карпов, Г. А. Ермишин, М. М. Фролов // Федеральная служба по интеллектуальной собственности,

патентам и товарным знакам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011616903 от 06.09.2011.

258. Анализ информационных потоков каналов спутниковой связи стандарта DVB в ОС Windows / В. А. Хомаза, И. С. Полянский, А. В. Свиридов, Г. А. Ермишин, М. М. Фролов // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011615638 от 21.10.2011.

259. Анализ информационных потоков магистральных линий связи с пакетной коммутацией / В. А. Хомаза, И. С. Полянский, А. В. Свиридов, Г. А. Ермишин, М. М. Фролов // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011615639 от 21.10.2011.

260. Программа для реализации алгоритма структурного синтеза иерархической системы / И. С. Полянский, И. И. Беседин, Т. В. Босых, А. А. Полшведкин // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013615091 от 28.05.2013.

261. Программа для реализации алгоритма распределения разнородного дискретного ограниченного ресурса в иерархической системе / И. С. Полянский, И. И. Беседин, Т. В. Босых, А. А. Полшведкин // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013616337 от 03.07.2013.

262. Система проектирования комплекса инженерно-технических средств системы физической защиты «Рубеж» / И. С. Полянский, И. И. Беседин, В. Г. Сосунов, Д. М. Кривоносов, Р. Ю. Салихов // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013615673 от 18.06.2013.

263. Программа для реализации алгоритма синтеза отражающих поверхностей антенных систем зеркального типа: свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2014619647 Российской Федерации / И. С. Полянский, Д. Е. Степанов, А. И. Ветров; заявл. 29.06.2014; зарег. 18.09.2014.

264. Программа анализа характеристик излучения зеркальных антенных систем в приближении методов физической оптики и физической теории дифракции: свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2014617058 Российской Федерации / И. С. Полянский, Д. Е. Степанов; заявл. 20.05.2014; зарег. 10.07.2014.

265. Анализ дальнего бокового излучения зеркальных параболических антенн в приближении методов физической оптики и физической теории дифракции: свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2015619651 Российской Федерации / А. М. Сомов, Н. С. Архипов, И. С. Полянский, Д. Е. Степанов; заявл. 18.03.2015; зарег. 09.09.2015.

266. ГОСТ РВ 0029–08.012–2011. Система стандартов эргономических требований и эргономического обеспечения. Интерфейс человеко-машинный : методика эргономической экспертизы. – Москва : Стандартинформ, 2012 (Калуга : Калужская типография стандартов). – 34 с.
267. ГОСТ РВ 29.05.007–96. Система стандартов эргономических требований и эргономического обеспечения. Интерфейс человеко-машинный. Общие эргономические требования. – Москва : Стандартинформ, 1996. – 16 с.
268. Wishart, John. The generalized product moment distribution in samples from a normal multivariate population / *Biometrika* 20A. – 1928. – 32–52 pp.
269. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц. – 4-е изд. – Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 552 с.
270. Андерсон, Т. Введение в многомерный статистический анализ. Пер. с английского Ю. Ф. Кичатова, Е. С. Кочеткова, Н. С. Райбмана / Под ред. Б. В. Гнеденко. – Москва : Гос. изд-во физико-математической литературы, 1963. – 500 с.
271. Амосов, А. А. Скалярно-матричное дифференцирование и его применение к конструктивным задачам теории связи / А. А. Амосов, В. В. Колпаков // Проблемы передачи информации – 1972. – С. 3–15.
272. Полянский, И. С. Определение вероятности ошибки системы охранной сигнализации объекта / И. С. Полянский, И. И. Беседин, С. В. Шабанов, Т. В. Босых // VII Международная научно-практическая конференция «Актуальные вопросы науки», г. Москва, 25 октября 2012 г. – С. 56–66.
273. Fiacco, A. V. Extensions of SUMT for nonlinear programming: equality constraints and extrapolation / A. V. Fiacco, G. P. McCormick, *Man. Sc.*, 12, 1966. – P. 816–828.
274. Полянский, И. С. Методы анализа волноводных линий передачи: под ред. А. М. Сомова / Н. С. Архипов, С. Н. Архипов, И. С. Полянский, А. М. Сомов. – Москва : Горячая линия – Телеком, 2017. – 114 с.
275. Табаков, Д. П. Сингулярные интегральные представления электромагнитного поля излучающих и переизлучающих структур специальной формы : диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук : 01.04.03 / Табаков Дмитрий Петрович. – Самара, 2016. – 301 с.
276. Смирнов, Ю. Г. Математические методы исследования задач электродинамики / Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Информационно-издательский центр ПензГУ, 2009. – 268 с.
277. Медведик, М. Ю. Параллельный алгоритм расчета поверхностных токов в электромагнитной задаче дифракции на экране / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, С. И. Соболев // Выч. мет. программирование. – 2005. – Том 6. Выпуск 1. – С. 99–108.
278. Никольский, С. М. Квадратурные формулы, изд. 2-е / С. М. Никольский. – Москва : Глав. ред. физ.-мат. лит. «Наука». – 1974. – 224 с.

Приложение А

Алгоритм расчета плотности тока на поверхности рефлектора АМЛЗА при решении ИУЭП рассмотрим на примере анализа ЗА, включающей один источник электромагнитного поля (облучатель) и рефлектор (рис. 6.1).

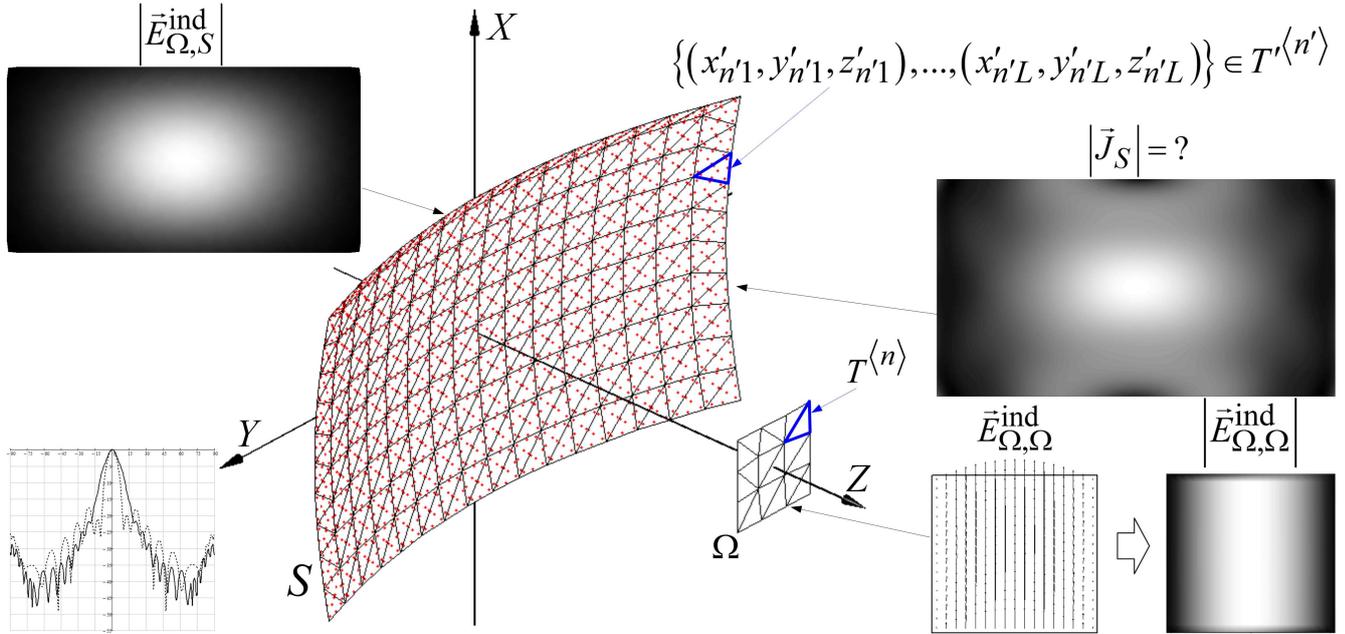


Рис. 6.1. Пример геометрического представления зеркальной антенны

Решение задачи выполняется при предположении о том, что среда является однородной и изотропной, а векторы электромагнитного поля меняются во времени по гармоническому закону с круговой частотой ω . Для описания среды используются следующие параметры [275]: 1) $\mu_c = \mu_a - i\sigma^M / \omega$ – комплексная магнитная проницаемость, $\mu_a = \mu_0 \mu$ – абсолютная магнитная проницаемость, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (Гн/м) – магнитная проницаемость вакуума, μ – относительная магнитная проницаемость среды, σ^M – удельная магнитная проводимость среды; 2) $\epsilon_c = \epsilon_a - i\sigma / \omega$ – комплексная диэлектрическая проницаемость, $\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon$ – абсолютная диэлектрическая проницаемость, $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$ (Ф/м) – диэлектрическая проницаемость вакуума, ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость среды, σ – удельная электрическая проводимость среды, $c = 299792458$ (м/с) – скорость света в вакууме; 3) $\kappa = \omega \sqrt{\mu_c \epsilon_c}$ – волновое

число. Вычисление интегралов (4.39)–(4.43), формируемых из системы (4.32), выполняется с учетом известных из [27, 218, 275, 276] определений дифференциальных операторов: 1) градиент дивергенции векторного потенциала [218, 276]:
$$\iint_{S_k} \Psi \left(\nabla \left(\nabla \cdot \vec{J}_k \right) \right) d\Omega = \nabla \left(\nabla \cdot \iint_{S_k} \Psi \vec{J}_k d\Omega \right) = \iint_{S_k} \nabla \Psi \left(\nabla \cdot \vec{J}_k \right) d\Omega;$$
 2) градиент функции Грина $\Psi(\vec{r}, \vec{r}')$ [275, 276]: $\nabla \Psi = -(\vec{r} - \vec{r}') \left(R^{-1} + i\kappa \right) \frac{\Psi}{R}$. Основу работы алгоритма расчета плотности тока на поверхности рефлектора АМЛЗА составляют следующие шаги.

Шаг 1. Для реализации процедур численного интегрирования разбиение раскрытов Ω' и Ω областей анализа (рефлектор S и облучатель Ω) на N' и N треугольных элементов $T'^{\langle n' \rangle}$ и $T^{\langle n \rangle}$ соответственно ($n' = \overline{1, N'}$, $n = \overline{1, N}$). Разбиение производится при построении триангуляции Делоне и условия того, что размер треугольной области $\leq \lambda$ [71]. Затем в n', n -х треугольных областях выбирается положение узловых точек интегрирования $(x'_{n'l}, y'_{n'l}, z'_{n'l}) \in T'^{\langle n' \rangle}$, $(x_{nl}, y_{nl}, z_{nl}) \in T^{\langle n \rangle}$ ($l = \overline{1, L}$, где L – число точек интегрирования) при определении для l -х точек соответствующих весов a_l [109].

Шаг 2. По заданному распределению поля в раскрыве облучателя $\vec{E}_{\Omega, \Omega}^{\text{ind}}$ (поле источника) в точках интегрирования $(x'_{n'l}, y'_{n'l}, z'_{n'l})$ определить напряженность электрического поля в раскрыве рефлектора S , наведенного Ω , $-\vec{E}_{n'l}^{\text{ind}} = \vec{E}_{\Omega, S}^{\text{ind}}(x'_{n'l}, y'_{n'l}, z'_{n'l})$. Решение выполняется с учетом приближений метода дискретных источников [80] и заданного разбиения области Ω при $\vec{E}_{nl}^{\text{ind}} = \vec{E}_{\Omega, \Omega}^{\text{ind}}(x_{nl}, y_{nl}, z_{nl})$: $\vec{E}_{n'l}^{\text{ind}} = \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^L \left(\left| \vec{E}_{nl}^{\text{ind}} \right| \vec{E}_{nln'l'}^0 \Psi_{nln'l'} a_l \left| T^{\langle n \rangle} \right| \right)$, где $\left| T^{\langle n \rangle} \right|$ – удвоенная площадь n -го треугольника области Ω ; $\Psi_{nln'l'}$ – функция Грина, вычисленная относительно положения точек $(x'_{n'l}, y'_{n'l}, z'_{n'l})$ и (x_{nl}, y_{nl}, z_{nl}) при $l' = \overline{1, L}$; $\vec{E}_{nln'l'}^0 = \vec{E}_{nln'l'} / \left| \vec{E}_{nln'l'} \right|$ при $\vec{E}_{nln'l'} = \vec{H}_{nln'l'}^0 \times \vec{\Pi}_{nln'l'}^0$, $\vec{H}_{nln'l'}^0 = \vec{H}_{nln'l'} / \left| \vec{H}_{nln'l'} \right|$, $\vec{\Pi}_{nln'l'}^0 = \vec{\Pi}_{nln'l'} / \left| \vec{\Pi}_{nln'l'} \right|$, $\vec{\Pi}_{nln'l'} = \begin{pmatrix} x'_{n'l} & y'_{n'l} & z'_{n'l} \end{pmatrix}^T - (x_{nl} \ y_{nl} \ z_{nl})^T$, $\vec{H}_{nln'l'} = \vec{\Pi}_{nln'l'}^0 \times \vec{E}_{nl}^{\text{ind}}$, $\vec{E}_{nl}^{\text{ind}} = \vec{E}_{nl}^{\text{ind}} / \left| \vec{E}_{nl}^{\text{ind}} \right|$.

Шаг 3. Определить для заданного положения точек интегрирования $(x'_{n'l}, y'_{n'l}, z'_{n'l}) \in T'^{\langle n' \rangle}$, $(x_{nl}, y_{nl}, z_{nl}) \in T^{\langle n \rangle}$ в раскрывах S и Ω значения аппроксимационных функций $\vec{\gamma}_j^{\langle S \rangle}$, $\vec{\gamma}_j^{\langle \Omega \rangle}$, задаваемых по правилу (4.33), и дивер-

генций $\nabla \cdot \vec{\gamma}_j^{(S)}$, $\nabla \cdot \vec{\gamma}_j^{(\Omega)}$ (для ИУМП – $\vec{\chi}_j^{(S)}$, $\vec{\chi}_j^{(\Omega)}$ и $\nabla \cdot \vec{\chi}_j^{(S)}$, $\nabla \cdot \vec{\chi}_j^{(\Omega)}$). Затем вычислить значения функции Грина Ψ и ее градиента $\nabla\Psi$ относительно положения точек $(x'_{n'l}, y'_{n'l}, z'_{n'l})$, (x_{nl}, y_{nl}, z_{nl}) и различных сочетаний областей (S и Ω , Ω и Ω). При вычислении значений $\Psi(\vec{r}, \vec{r}')$ и $\nabla\Psi(\vec{r}, \vec{r}')$ в пределах одного и того же треугольного элемента при $\vec{r} \rightarrow \vec{r}'$ может возникнуть ситуация деления на нуль. Чтобы этого избежать по аналогии с [277] предлагается разносить внутренние точки численного интегрирования, определяя их в пределах треугольника для различных ортогональных многочленов (Лежандра, Гегенбауэра, Чебышева и пр.) с последующим использованием при численном интегрировании соответствующих квадратурных формул [278].

Шаг 4. Для определенных значений $\vec{E}_{\Omega,\Omega}^{ind}$, $\vec{E}_{\Omega,S}^{ind}$, $\vec{\gamma}_j^{(S)}$, $\vec{\gamma}_j^{(\Omega)}$, $\nabla \cdot \vec{\gamma}_j^{(S)}$, $\nabla \cdot \vec{\gamma}_j^{(\Omega)}$ (для ИУМП – $\vec{H}_{\Omega,\Omega}^{ind}$, $\vec{H}_{\Omega,S}^{ind}$, $\vec{\chi}_j^{(S)}$, $\vec{\chi}_j^{(\Omega)}$, $\nabla \cdot \vec{\chi}_j^{(S)}$, $\nabla \cdot \vec{\chi}_j^{(\Omega)}$), Ψ , $\nabla\Psi$ в соответствующих точках интегрирования с использованием выбранных квадратурных формул [109, 278] и $|T^{(n')}|$, $|T^{(n)}|$, a_l вычислить элементы блочной матрицы \mathbf{B} и блочного вектора \vec{C} (для ИУМП – \mathbf{B}^M и \vec{C}^M с учетом соотношений (4.39)–(4.43)).

Шаг 5. По правилу $\vec{J} = \mathbf{B}^{-1}\vec{C}$ (для ИУМП – $\vec{J}^M = (\mathbf{B}^M)^{-1}\vec{C}^M$) вычислить искомый вектор коэффициентов из (4.38).

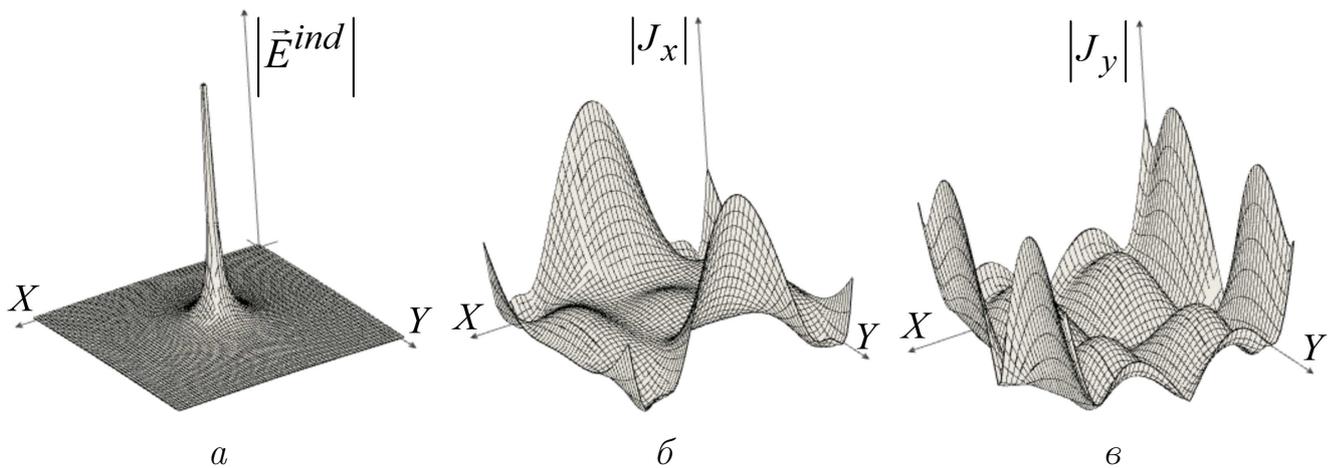


Рис. 6.2. Поверхностные токи $|J_x|$ (б) и $|J_y|$ (в), рассчитанные БМ по наведенному полю $|\vec{E}^{ind}|$ (а)

На рисунке 6.2 представлен пример расчета поверхностного тока на плоском бесконечно тонком и идеально проводящем прямоугольном экране размера $\lambda \times \lambda$ по разработанному алгоритму для $p = 4$ ($|M_p| = 35$) при разбиении для численного интегрирования отражающей поверхности на 8 треугольных элементов при $L = 5$ и задания положения источника ЭМП (электрический диполь) в непосредственной близости с экраном. Среднее время расчета в САПР Mathcad указанной задачи на типовой персональной ЭВМ составило < 1 сек.

Справка. Материалы приложения отражают суть решения задачи анализа АМЛЗА при вариационном решении СИУ электродинамической теории ЗА в приближении барицентрического метода относительно основного этапа – определение распределения плотности поверхностных электрического и магнитного токов (см. стр. 166, пп. 4.2).

Приложение Б

Таблица 1 – Результаты минимизации функций (5.9)–(5.12) при $M = 50$.

Метод	Функция	N_{cp}	Δ_{cp}	∂_{cp}	t_{cp}
ГА	$f_1(\vec{X})$	27100	21,9024514	29,79925361	120
	$f_2(\vec{X})$	22324	38,39757873	192,4039257	120
	$f_3(\vec{X})$	24591	152,74652793	36,69114908	120
	$f_4(\vec{X})$	29340	1,69988279	4,220515207	120
ГА с ГООЛ методом наискорейшего спуска	$f_1(\vec{X})$	32	0,00000071	$9,6587654 \cdot 10^{-7}$	2,715
	$f_2(\vec{X})$	1708	1,658898064	8,312464238	120
	$f_3(\vec{X})$	1874	16,634969162	3,995875662	119,229
	$f_4(\vec{X})$	2446	1,4588600205	3,622097313	120
ГА с ГООП методом наискорейшего спуска	$f_1(\vec{X})$	32	0,000000741	$1,00838 \cdot 10^{-6}$	6,544
	$f_2(\vec{X})$	423	1,496438447	7,498405925	120
	$f_3(\vec{X})$	483	13,448065409	3,230351481	119,229
	$f_4(\vec{X})$	661	1,60094434	3,974868135	120
ГА с ГООЛ методом наискорейшего спуска	$f_1(\vec{X})$	32	0,00000071	$9,65877 \cdot 10^{-7}$	2,715
	$f_2(\vec{X})$	1708	1,658898064	8,312464238	120
	$f_3(\vec{X})$	1874	16,634969162	3,995875662	119,229
	$f_4(\vec{X})$	2446	1,45886002	3,622097313	120
ГА с ГООП методом Д–Ф–П	$f_1(\vec{X})$	33	0,00005623	$7,6502 \cdot 10^{-5}$	7,082
	$f_2(\vec{X})$	408	1,551314273	7,773379626	120
	$f_3(\vec{X})$	459	14,12920303	3,393967127	119,229
	$f_4(\vec{X})$	587	1,63677566	4,063831095	120
ГА с ГООП методом наискорейшего спуска и прогноз. по ARMA(1, 1)	$f_1(\vec{X})$	25	0,000000712	$9,68368 \cdot 10^{-7}$	5,783
	$f_2(\vec{X})$	272	0,955943834	4,790076681	102,2
	$f_3(\vec{X})$	347	16,2700305	3,908213983	115,332
	$f_4(\vec{X})$	316	<i>1,375057467</i>	<i>3,414030055</i>	<i>120</i>
ГА с ГООП методом Д–Ф–П и прогнозированием по ARMA(1, 1)	$f_1(\vec{X})$	29	<i>0,000000523</i>	$7,1203118 \cdot 10^{-7}$	<i>7,197</i>
	$f_2(\vec{X})$	284	1,084864015	5,436074416	104,818
	$f_3(\vec{X})$	293	21,9837128	5,280694057	116,908
	$f_4(\vec{X})$	271	1,425581655	3,539472882	120
ГА с ГООЛ методом наискорейшего	$\mathbf{f}_1(\vec{X})$	26	0,00000075	$1,0210843 \cdot 10^{-6}$	1,638
	$f_2(\vec{X})$	<i>561</i>	<i>0,562101235</i>	<i>2,816596461</i>	100,695

Продолжение таблицы 1.

Метод	Функция	$N_{\text{ср}}$	$\Delta_{\text{ср}}$	$\partial_{\text{ср}}$	$t_{\text{ср}}$
го спуска и про-	$f_3(\vec{X})$	399	2,25598961	0,5419098698	113,452
гноз. по ARMA(1, 1)	$f_4(\vec{X})$	604	1,397845228	3,470608127	120

Справка. Материалы приложения по результатам вычислительного эксперимента на заданном наборе тестовых функций определяют эффективность нахождения глобального оптимума многоэкстремальной многомерной функции, в общем случае содержащей точки размыва первого и второго рода, по предложенной модификации генетического метода (см. стр. 195, пп. 5.1).

Приложение В

На рисунках 6.3 представлены нетиповые распределения ЭМП, заданные в раскрывах излучающих элементов при решении задачи структурно-параметрического синтеза АМЛЗА.

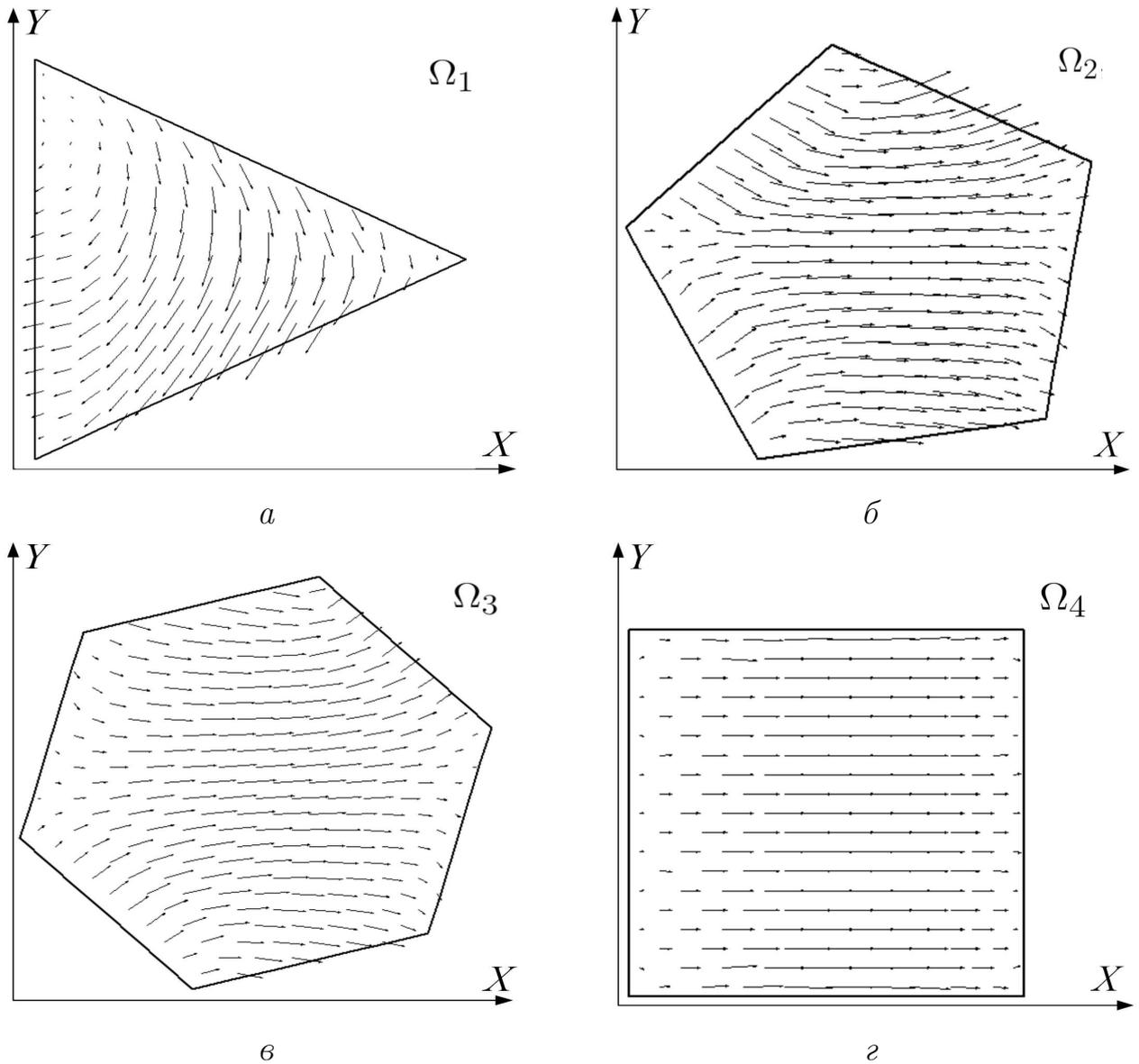


Рис. 6.3. Распределение поля в раскрыве излучателя:
a – с треугольным раскрывом; *б* – пятиугольным раскрывом;
в – шестиугольным раскрывом; *г* – прямоугольным раскрывом

Справка. Материалы приложения представляют распределение напряженности электрического поля \vec{E} в Ω_m излучающих элементов антенной системы при решении задач параметрического, структурного и структурно-параметрического синтеза АМЛЗА (см. стр. 201, пп. 5.2).