

На правах рукописи

ПОПОВ ИГОРЬ ВИКТОРОВИЧ

**МЕТОД АДАПТИВНОЙ ИСКУССТВЕННОЙ ВЯЗКОСТИ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ**

1.1.6 – Вычислительная математика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение	2
Глава 1. Регуляризация неустойчивых разностных схем для линейного уравнения переноса	29
1.1. Классические разностные схемы для линейного уравнения переноса	30
1.1.1. Анализ противопотоковой схемы на порядок аппроксимации, устойчивость и сходимость	31
1.1.2. Анализ центрально-разностной схемы на порядок аппроксимации, устойчивость, сходимость и монотонность,	32
1.1.3. Анализ схемы с разностью вперед по потоку на монотонность, порядок аппроксимации, устойчивость, сходимость и монотонность	39
1.1.4. Этапы расчетов по разностным схемам с регуляризацией	46
1.1.5. Результаты численных экспериментов	48
1.2. Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для нелинейного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости	55
1.3. Разностная схема для решения многомерного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости	77
1.3.1. Введение	77
1.3.2. Постановка задачи	79
1.3.3. Построение разностной схемы	79
1.3.4. Аппроксимация потоков	82

1.3.5. Монотонизация разностной схемы	87
1.3.6. Этапы расчёта	92
1.3.7. Результаты расчётов	93
Глава 2. Метод адаптивной искусственной вязкости. Одномерные задачи	107
2.1. Постановка задачи	108
2.2. Поправки Лакса-Вендроффа	108
2.3. Аппроксимация	110
2.4. Искусственная вязкость	113
2.5. Число Куранта	117
2.6. Область введения искусственной вязкости	119
2.7. Метод адаптивной искусственной вязкости для решения одномерных задач газовой динамики	125
2.8. Численные эксперименты	128
2.9. Разностная схема и балансные соотношения. Сеточная аппроксимация уравнений для внутренней энергии	133
2.10. Решение тестовых задач методом адаптивной искусственной вязкости	138
2.11. Метод АИВ в цилиндрических и сферических координатах	154
2.12. Сравнение методов адаптивной искусственной вязкости и WENO5	161
Глава 3. Метод адаптивной искусственной вязкости для решения уравнений газовой динамики на неструктурированных	165

3.1. Постановка задачи	166
3.2. Сетки и обозначения	167
3.3. Аппроксимация по времени	171
3.4. Аппроксимации дивергенции и градиента	173
3.5. Сеточные преобразования и аппроксимация исходных уравнений (без учёта поправок Лакса-Вендроффа)	180
3.6. Аппроксимация поправок Лакса-Вендроффа и потоков	184
3.6.1 Аппроксимация потоков массы	184
3.6.2 Аппроксимация потоков импульса и градиента давления	185
3.6.3 Аппроксимация потоков полной энергии	187
3.6.4 Итоговые формулы для потоков	187
3.6.5 Аппроксимация уравнения для внутренней энергии	188
3.7. Аппроксимация граничных условий и постановка сеточных задач для определения «предикторного» решения	190
3.8. Искусственная вязкость	192
3.9. Определение областей УВ(ВС), ВР, КР, ОСЦ. Метод адаптивной искусственной вязкости	194
3.10. Численные эксперименты	197
Глава 4. Метод адаптивной искусственной вязкости для решения системы уравнений Навье-Стокса	208
4.1. Постановка задачи	208
4.2. Аппроксимация системы уравнений	209
4.3. Искусственная вязкость	211
4.4. Области введения искусственной вязкости	212

4.5. Этапы решения задачи	214
4.6. Численные эксперименты	214
Глава 5. Численные эксперименты с использованием метода адаптивной искусственной вязкости	227
5.1. Задача двухфазной фильтрации	228
5.1.1. Постановка задачи	228
5.1.2. Вывод уравнения пьезопроводности	231
5.1.3. Этапы решения задачи фильтрации	231
5.1.4. Построение разностных схем	232
5.1.5. Численный эксперимент	235
5.2. Численное моделирование неустойчивости Рихтмайера-Мешкова	238
5.3. Отражение ударной волны от оси симметрии в неравномерном потоке с образованием циркуляционной зоны	242
5.3.1. Теоретическая постановка исследуемого физического явления	242
5.3.2. Математическая постановка задачи и методы расчета	246
5.3.3. Отражение ударной волны от приосевой зоны с дефицитом скоростного напора	248
5.3.4. Отражение ударной волны от оси в течении типа источника. Постановка модельной задачи	253
Заключение	267
Список литературы	268
Список работ по теме диссертации	280

Введение

Актуальность темы. Степень её разработанности.

Для численного решения уравнений и систем гиперболического типа в 50-е - 60-е годы прошлого века было предложено большое количество разнообразных методов. Первоначально численные методы для решения уравнений и систем этого типа строились под практические задачи. Так появился метод характеристик [1, 2]. Он позволяет находить решение, как в аналитическом виде, так и в численном.

Численные методы разрабатывались для неподвижных расчетных областей. Но вскоре возник большой интерес к решению задач с учетом движения поверхностей. В результате появились два подхода, использующие неподвижные (стационарные) сетки и сетки, изменяющиеся динамически путем перехода из координат Эйлера в координаты Лагранжа.

Хорошо известны работы по решению гиперболических уравнений в лагранжевых координатах [3, 4, 5]. Основные особенности лагранжевого подхода заключаются в том, что при использовании этих схем контактный разрыв не размывается. Расчетные ячейки движутся совместно со средой (жидкостью или газом), а скорость движения элементов сетки определяется скоростью течения среды. Такой подход наиболее оправдан для относительно медленных и гладких течений (в приближении малых деформаций ячеек). Чаще всего лагранжевы методы используются для задач со свободной поверхностью и контактными границами.

Схемы в эйлеровых координатах [6, 7, 8] применяются при конечных и больших деформациях рассчитываемого объекта, а также при решении многомерных задач в случае наличия тангенциальных разрывов плотности и скорости среды [6]. Минусом эйлерова подхода является невозможность построения сетки, адаптированной к решению задачи, в условиях отсутствия априорной информации об этом решении. Результатом применения эйлеровых схем в случае сложного поведения решения является

неоправданное измельчение сетки во всей расчетной области, что частично компенсируется построением неравномерных сеток.

На основе этих двух подходов были разработаны схемы в эйлерово-лагранжевых координатах [9, 10, 11], методы на подвижной эйлеровой сетке [12], метод частиц [13, 14] и т.д.

Для решения задач газовой динамики на основе смешанных эйлерово-лагранжевых и квазилагранжевых сеток появились численные методы, основанные на адаптивных сетках. Например, метод решения уравнений газовой динамики с использованием адаптивных сеток, динамически связанных с решением [15], однородный алгоритм расчета разрывных решений на адаптивных сетках [16], численное моделирование двумерных газодинамических течений на сетке переменной структуры [17] и многие другие.

Параллельно исследователи развивали различного рода численные схемы для процессов нестационарной газовой динамики. Выделяются следующие классы схем: конечно-разностные, конечно-объемные и конечно-элементные по типу дискретизации пространства, явные и неявные по типу дискретизации во времени.

Основоположниками развития схем вычислительной гидродинамики стали Д. фон Нейман, Р. Рихтмайер, П. Лакс, Б. Вендрофф, Ф. Х. Харлоу, К. Флетчер, А. Хартен, Э. Торе, [18].

Данной проблематикой занимались также академики А.А. Самарский, С.К. Годунов, Н.С. Бахвалов, О.М. Белоцерковский, Н.Н. Яненко, Ю.И. Шокин, Б.Н. Четверушкин, А.С. Холодов, В.А. Левин, член-корреспонденты А.В. Забродин, В.Ф. Тишкин, Ю.П. Попов, профессора А.П. Фаворский, Б.Л. Рождественский, В.С. Рябенький, В.П. Колган [19], Т.Г. Елизарова, И.Б. Петров, В. В. Остапенко, В.М. Головизнин [20, 21] и представители их научных школ. Перечислить всех ученых, внесших вклад в развитие современных численных методов решения задач вычислительной гидродинамики, достаточно сложная задача.

Разработанные к настоящему времени высокоэффективные численные методы позволяют получать результаты высокой точности для многих нестационарных пространственных задач механики сплошных сред. При этом численные методы именно в газодинамике превратились в необходимый и широко используемый в современной инженерной практике инструмент создания конкретных технических изделий.

Тем не менее, даже при таком многообразии методов для решения задач механики сплошной среды, универсального метода создать пока не удалось, поэтому численные методы продолжают развиваться и создаются новые, учитывающие конкретные постановки задач и требования по точности решения.

На основе опыта вышеперечисленных научных школ возникла идея создания метода, активно реагирующего на различные виды неустойчивости, связанной как с физическими явлениями, так и с численными, построения алгоритмов выявления неустойчивости в процессе решения задач, которые были бы просты и эффективны в применении. Эта идея реализована в методе адаптивной искусственной вязкости (метод АИВ), которому посвящена данная работа.

Перейдем к рассмотрению подходов и методов численного решения уравнений гиперболического типа, основанных на явных разностных схемах.

Перечислим явные разностные схемы, получившие наиболее широкое практическое применение для решения простого уравнения переноса, наиболее сложного в реализации численными методами.

1. Явная схема с направленной разностью, которая имеет первый порядок аппроксимации по времени и пространству [22, 23].
2. Схема Лакса-Вендроффа (центрально-разностная схема) со вторым порядком аппроксимации по времени и пространству [22, 23].
3. Гибридные схемы Р.П. Федоренко. Это класс разностных схем, в которых в соответствие линейному дифференциальному оператору ставится некий

нелинейный оператор, а коэффициенты схемы даже для простейшего линейного уравнения переноса становятся зависящими от решения. [24, 25].

4. Схема К.И. Бабенко с нелинейными коэффициентами, имеющая второй порядок аппроксимации по времени и пространству, абсолютно устойчивая. [26]

5. Схема второго порядка «Парабола» со вторым порядком аппроксимации по времени и пространству [27, 28].

6. Схема «Кабаре» [29], основанная на схеме Арие Изерлиса "Чехарда" [30], а также ее модификация - схема "Кабаре" с монотонизаторами [31, 32].

Более подробное описание разностных схем для уравнения переноса представлено в книгах [33, 34].

Схему Федоренко можно выделить из перечисленных выше, как одну из первых схем с искусственной вязкостью, которая монотонизирует¹ численное решение. В остальных схемах для монотонизации чаще всего добавляются регуляризаторы (ограничители) искомых функций или потоков.

Описанные схемы являются либо абсолютно устойчивыми, либо условно устойчивыми.

В предлагаемой же работе рассматриваются неустойчивые разностные схемы, которые при помощи метода адаптивной искусственной вязкости (метод АИВ) становятся устойчивыми и позволяют проводить на их основе численные эксперименты.

Особый интерес исследователей вызывают системы уравнений гиперболического типа, в частности, системы уравнений газовой динамики, так как на их основе численно решаются многие прикладные задачи. Первопроходцами в этом направлении были Джон фон Нейман (John von Neumann) и Роберт Дэвис Рихтмайер (Robert D. Richtmyer). Они решали эти системы способом введения искусственной линейной и нелинейной вязкости

¹ Под монотонными разностными схемами в диссертации понимается выполнение принципа максимума

[3, 35]. Разработанная ими разностная схема, получившая название "схема Неймана-Рихтмайера", имеет тем не менее ряд недостатков. Во-первых, она не является консервативной для системы уравнений Эйлера, так как уравнение энергии аппроксимируется в недивергентной форме. Вторым недостатком схемы является потеря точности и размывание начального профиля из-за введения искусственной вязкости во всей области решения.

Новый подход, который предлагается в настоящей диссертации, позволяет выбирать искусственную вязкость в зависимости от особенностей поведения решения и тем самым устранить недостаток с размыванием как начального профиля, так и разрывов.

Дальнейшее развитие численных методов решения задач газовой динамики было предложено академиком С.К. Годуновым в работах [36, 37], ставших классическими, а также учениками, предложившими различные модификации его метода в схемах, которые носят название "схемы годуновского типа", и зарубежными авторами, в частности, П. Роу [38], С. Ошером [39, 40], Б. Энфилдтом [41], А. Хартенем, П. Лаксом, Б. Ван Лиром [42].

Активное развитие процесса создания новых численных (сеточных) методов связано с поиском новых и наиболее эффективных методов решения уравнений гидродинамики, поскольку задачи современной индустрии требуют высокой точности решения наряду с простотой и быстротой его поиска.

Современные численные методы решения газодинамических задач можно разделить на две группы.

I. Разностные схемы годуновского типа (явные консервативные или потоковые схемы):

1) WAF (Weighted average flux (WAF) schemes модификации WAFT и WAFC) - схема средневзвешенного потока, [43, 44] в которой используется комбинация метода Годунова и алгоритм вычисления потока методом П. Л. Роу (P. L. Roe) [45, 46].

а) В модифицированном коде WAFT используется решатель задачи Римана о распаде произвольного разрыва.² [47].

б) Схема WAFС аналогична схеме WAFT, но с модификациями Эйнфельдта. [48]

2) WENO5 и CWENO3(Weighted essentially nonoscillatory schemes.) - взвешенные принципиально не осциллирующие схемы [49], которые являются усовершенствованными схемами ENO со схемой А. Хартена (A. Harten) и С. Ошера (S. Osher) в основе. [50]. Эти схемы имеют высокий порядок аппроксимации на гладких решениях и понижают порядок на ударных волнах. Метод WENO5 имеет пятый порядок точности на гладких решениях, а CWENO3 - третий порядок.

3) CLAW (Clawpack wave propagation scheme) - целый пакет программ, использующих законы сохранения массы, импульса и энергии, (Clawpack - conservation-laws package), разработанный Рэндаллом Левеком (Randall LeVeque). [51, 52, 53]

Все перечисленные схемы хорошо отслеживают разрывы решений. На ряде тестов к ним близок кусочно-параболический метод PPM (Piecewise parabolic – PPM) разработчики П. Колелла (P. Colella) и П.Р. Вудвард (P.R. Woodward) [54, 55]. Он относится к классу схем годуновского типа более высокого порядка точности и использует кусочно-параболическую реконструкцию с применением решателя задачи Римана и метода расщепления по пространственным переменным.

Характерным недостатком всех вышеназванных схем (методов) является проявление немонотонности в виде длинных волн с малой амплитудой на константных частях решения (между разрывами). Например, в тесте Noh [56], где изучается столкновение двух гиперзвуковых потоков

² Задача Римана о распаде произвольного разрыва - это задача о вычислении потока через разрыв. Для вычисления потоков таким способом требуется решать нелинейные алгебраические уравнения в каждой ячейке разностной сетки путем огромного количества арифметических операций, особенно при решении многомерных задач. Для простоты чаще всего используется приближенное решение задачи Римана

холодного плотного газа, которое приводит к образованию двух расходящихся сильных ударных волн, между которыми остается неподвижный газ с постоянными плотностью и давлением.

II. Схемы, использующие искусственную вязкость.

1) LL - положительная схема. Этот метод, разработанный Сюй-Донг Лю (Xu-Dong Liu) и Питером Лаксом (Peter Lax) (LL) [57, 58], основан на теореме Фридрихса³ [59]. Этот метод похож на предикторно-корректорный метод с линейной коррекцией потоков.

2) CFLF – комбинированный метод. Это метод первого порядка, который применялся как на эйлеровых, так и на лагранжевых сетках, а также на структурированных и треугольных сетках. Он состоит из n слоев по времени, $n - 1$ шагов по схеме Лакса-Вендроффа и одного шага по схеме Лакса-Фридрихса [60 - 66].

3) CFLFh – гибридный метод, основанный на комбинированном методе CFLF с поправками потока для членов переноса, взятых из работы Хартона [67].

Формально метод имеет второй порядок аппроксимации.

4) JT – центральная схема с ограничителями (лимиторами и регуляризаторами). Это двумерный метод, разработанный Гуан-Шань Цзян (Guang-Shan Jiang) и Эйтаном Тадмором (Eitan Tadmor) [68]. Его предшественником является одномерный метод, ранее разработанный Хаимом Нессяху (Haim Nessyahu) и Эйтаном Тадмором [69], основой которого являются явные центрально-разностные схемы без расщепления по пространственным переменным с решателем задачи Римана. Оба метода просты в реализации и экономичны с точки зрения вычислительных затрат.

³ В области $G_1 \subseteq G$, где функция f имеет интегрируемые с квадратом обобщенные производные до порядка p включительно, всякое обобщенное решение уравнения $Lu = f$ обладает интегрируемыми с квадратом обобщенными производными до порядка $2m + p$ включительно. Иными словами, если f принадлежит $W^p(G_1)$, то обобщенное решение u уравнения $Lu = f$ принадлежит $W^{p+2m}(G_1)$.

Подводя итог проведенному краткому анализу характерных свойств второй группы методов, следует отметить, что они приводят к размыванию ударных волн и сильному размыванию контактных разрывов.

Краткое описание разностных схем первой и второй групп, а также сравнение результатов расчётов тестовых задач приведены в работах [71-72]. Там же отмечены достоинства и недостатки перечисленных методов при решении задач различной степени сложности.

Подобные сравнения метода АИВ с некоторыми из перечисленных методов проводятся в данной работе.

Заслуживают упоминания также явные разностные схемы для кинетически-согласованных, квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений, которые представлены в работах [73-74].

Этими ссылками ограничимся, так как работ по перечисленным направлениям и их усовершенствованию огромное количество.

Перейдем к рассмотрению различных механизмов введения искусственной вязкости в разностные схемы. Как отмечалось выше, впервые ввели искусственную вязкость в разностные уравнения Д. фон Нейман и Р. Рихтмайер.

В 1961 году в журнале "Вычислительная математика и математическая физика" была опубликована статья А.А. Самарского и В.Я. Арсенина, где авторы впервые определили условия, накладываемые на искусственную вязкость, для уравнения плоского одномерного изэнтропического движения газа в переменных Лагранжа. Приведем их дословно:

«1) система обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой свелась наша задача, должна иметь непрерывное решение»;⁴

⁴ Для этого вводится автомодельная переменная, которая исходную систему уравнений газовой динамики для описания плоского одномерного изэнтропического движения газа в переменных Лагранжа переводит в систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Из решения полученной системы ОДУ находится интеграл движения и на его основе определяется искусственная вязкость.

2) действие $q(s)$ должно быть пренебрежимо малым вне ударного слоя и в области волны разрежения;⁵

3) когда размеры области движения велики по сравнению с толщиной ударного слоя, должны выполняться условия Гюгонио» [75].

Также для дифференциально-разностных и разностных уравнений газовой динамики сформулированы еще два требования, опубликованные в работе [76]:

«1) Искусственная вязкость не должна нарушать консервативность динамических уравнений.

2) Искусственная вязкость должна обеспечивать монотонность фронта «модельной» ударной волны, и размывать его на наименьшее возможное количество ячеек.»

Эти требования справедливы и на сегодняшний момент времени, и не только в переменных Лагранжа, и были учтены автором при создании метода АИВ. В работе [75] дается ссылка на работу Гарольда Л. Броуда [77], где автор применил подход с искусственной вязкостью для численного решения сферических ударных волн, а полученные результаты были успешно использованы на практике. Аналогичные подходы используются в РФЯЦ-ВНИИЭФ (г. Саров), в частности, в работах А.В. Родионова [78].

Уравнения, содержащие искусственную вязкость, рассматривались и в работах Б.Л. Рождественского, Н.Н. Яненко. Обобщением их исследований стала монография [79].

Применение искусственной вязкости рассматривалось также в работах [80, 22, 81]

В Институте математического моделирования РАН, а затем и в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша, вопросами применения искусственной вязкости занимались Б.Н. Четверушкин и Т.Г. Елизарова, что нашло отражение в монографиях [73,74, 82].

⁵ В статье $q(s)$ - некоторая функция искусственной вязкости см. J. Neumann, M. Richtmyer. A method for the numerical calculations of gidrodinamical shocks. J. Appl. Phys., 1950, 21, № 1, 232.

Метод АИВ относится к сеточным конечно-разностным схемам. В диссертации используются явные, полностью консервативные, монотонные разностные схемы второго порядка аппроксимации относительно шагов равномерной ортогональной пространственной сетки узлов и шагов по времени в области гладкости решения, а также создан аналог на неструктурированных многоугольных и многогранных выпуклых ячейках. Второй порядок аппроксимации по времени достигается использованием известных поправок Лакса-Вендроффа.

Однако, аппроксимации, содержащие лишь указанные поправки, не обеспечивают монотонности разностной схемы, что быстро приводит к потере точности сеточного решения. Чтобы добиться монотонности разностной схемы, в нее вводятся диссипативные слагаемые с искусственной вязкостью, имеющей порядок шага пространственной сетки. Вместе с тем введение подобной вязкости приводит к быстрому размыванию контактных разрывов и вновь к потере точности сеточного решения.

Для преодоления этих противоречий, а именно немонотонности решения разностной схемы с поправками Лакса-Вендроффа и сильного размывания контактных разрывов искусственной диссипацией, в диссертации предлагается новый приём введения адаптивной искусственной вязкости, как для решения уравнений газовой динамики, так и для уравнений Навье-Стокса.

Введение адаптивной искусственной вязкости необходимо лишь в точках и областях решения, где возникает численная неустойчивость.

Для уравнений Навье-Стокса была получена искусственная вязкость, вводимая в разностную схему, отличная от вязкости для уравнений Эйлера, которая была сконструирована таким образом, чтобы она отсутствовала в пограничном слое, где присутствует динамическая вязкость. Для уравнений Эйлера был получен интервал возможных значений искусственной вязкости.

Конкретные цели и задачи диссертации.

Основной целью данной работы было создание простого и эффективного адаптивного численного метода для моделирования задач гидродинамики, как на персональных компьютерах, так и на современных многопроцессорных вычислительных системах [83].

В рамках достижения указанной цели в диссертации рассматривались следующие задачи:

- на основе предварительного анализа методов и подходов к решению задач газовой динамики разработать или выбрать наиболее адекватный численный метод;
- разработать и дать теоретическое обоснование предлагаемого численного метода - метода АИВ;
- реализовать численный метод АИВ в виде комплексов программ;
- провести детальную верификацию метода АИВ на множестве известных тестовых задач;
- провести численные эксперименты с помощью метода АИВ для ряда сложных практических задач.
- предложить конструкцию адаптивной искусственной вязкости, учитывающей линейную и нелинейную вязкость в зависимости от решения задачи.

Методы исследования.

В основу диссертационной работы легли численные методы, используемые в задачах газовой динамики.

При построении пространственно-временных аппроксимаций дифференциальных уравнений в частных производных использовались методы конечных разностей и конечных объёмов. Для повышения временной аппроксимации использовались поправки Лакса-Вендроффа, а для повышения по пространственным переменным - центрально-разностные аппроксимации. Для обеспечения монотонности получаемых разностных схем вводились диссипативные слагаемые. Для численного метода,

реализованного на неструктурированных сетках, использовался разработанный автором оригинальный алгоритм построения треугольных сеток с использованием критерия Делоне [84].

Проводился анализ аппроксимации, устойчивости, сходимости и выполнения достаточного условия принципа максимума разностных схем для линейного и нелинейного уравнений переноса. Эти исследования проводились с использованием принципа максимума, критерия Фридрихса и/или спектрального метода.

Для верификации полученных численных результатов осуществлялось их сравнение с известными тестовыми задачами, экспериментальными и расчетными данными других исследователей.

Более подробно результаты проведенных исследований можно описать следующим образом.

Разработан численный метод адаптивной искусственной вязкости решения уравнений линейного и нелинейного переноса, газовой динамики на ортогональных, треугольных и тетраэдральных сетках в случае двумерных и трехмерных задач. Вычислительный код реализован для двумерных задач в декартовых и цилиндрических переменных. Неструктурированные треугольные сетки выбраны согласованными с границами области с заданной точностью. Искомые сеточные функции определялись в центрах описанных около треугольников окружностей, если эти центры лежат внутри треугольников, в противном случае - в центрах тяжести треугольников.

Исходные уравнения газовой динамики аппроксимировались с поправками Лакса-Вендроффа методом баланса массы, импульса, полной энергии, и по явной схеме, в отсутствие искусственной вязкости, находилось на новом временном слое «предикторное» решение задачи (первый этап). Далее около каждой расчетной ячейки рассматривались соседние с ней ячейки. По «предикторному» решению находилось его линейное восполнение на рассматриваемых ячейках и по нему все производные в центре рассматриваемой ячейки. По этим производным определялись

области (ячейки), занятые волнами сжатия (ВС), волнами разрежения (ВР), ударными волнами (УВ), контактными разрывами (КР) и осцилляциями сеточной природы (ОСЦ). При их определении проверялись известные неравенства.

Исходя из принципа «замороженных коэффициентов» и условий принципа максимума, находились выражения для искусственной вязкости, монотонизирующие сеточные уравнения в пределах $\mu_{\min} \leq \mu \leq \mu_{\max}$. Интервал искусственной вязкости μ учитывал поправки Лакса-Вендроффа. В области УВ и ВС использовалась минимальная вязкость μ_{\min} , в области ОСЦ максимальная вязкость μ_{\max} , в областях ВР и КР вязкость полагалась $\mu = 0$. В итоге диссипативные слагаемые содержали разрывную вязкость и оказывались отличными от нуля вблизи разрывов, дополнительно не размывая КР и ВР.

На третьем этапе производился пересчет решения на новом временном слое с учетом диссипативных слагаемых и находилось скорректированное решение, которое оказывалось практически монотонным и размывало КР, УВ на 3-5 интервалов.

Таким образом, метод удовлетворяет требованиям дивергентности (консервативности), допускает простое распараллеливание вычислений.

Проведено большое количество расчетов одномерных, двумерных и трехмерных задач, например

- Сравнение расчетов задачи о распаде разрыва в одномерной и соответствующей задачи в двумерной постановке на треугольных сетках.

- Расчет задачи о распаде разрыва с образованием четырех контактных разрывов на ортогональных сетках в декартовых переменных и на треугольной сетке. Результаты хорошо совпадают.

- Просчитана на треугольной сетке задача о течении газа внутри трубы.

В 2014 году издана книга «Метод адаптивной искусственной вязкости решения уравнений газовой динамики» (276 страниц), обобщившая 11 научных работ, ранее опубликованных в журнале «Математическое

моделирование». Первая публикация научных изысканий по методу АИВ относится к 2007 году.

Далее метод АИВ на треугольных сетках был распространен на решение уравнений Навье-Стокса для сжимаемой жидкости. Решалась задача об обтекании цилиндра потоком набегающего газа. Были получены решения при наличии симметричных вихрей (при небольших Re), течений с отрывом вихрей – дорожки Кармана. При малом числе Маха была рассчитана задача для практически несжимаемой жидкости (задача о течении жидкости в квадратной камере с подвижной верхней крышкой).

Основные результаты работы можно сформулировать следующим образом.

1. На примере уравнения переноса теоретически доказана устойчивость, аппроксимация и достаточное условие принципа максимума разностных схем для метода АИВ. Доказана сходимость представленного метода для нелинейного уравнения переноса.
2. Разработан метод АИВ для задач газовой динамики, получены оценки для искусственной вязкости и разработан алгоритм применения искусственной вязкости для различных типов разрывов и при появлении численной неустойчивости.
3. Проведена верификация метода АИВ на известных тестовых задачах, выполнено сравнение метода АИВ с другими известными численными методами.
4. Разработан метод АИВ для уравнений Навье-Стокса, получены оценки на искусственную вязкость.
5. Созданы комплексы программ для моделирования задач газовой динамики и уравнений Навье-Стокса.
6. С помощью разработанного вычислительного метода и комплексов программ получены новые результаты в исследовании процесса отражения ударной волны от оси симметрии в неравномерном потоке с образованием циркуляционной зоны.

Научная новизна полученных результатов состоит в следующем.

1. Разработан новый численный метод решения задач на основе введения в локальных областях расчета искусственной вязкости для явных разностных схем.

2. Разработан оригинальный численный метод в одномерных и многомерных постановках, на структурированных и неструктурированных сетках. Особое внимание уделено созданию численного метода АИВ на неструктурированных сетках.

3. В процессе работы над диссертацией автором созданы новые комплексы программ, реализующие разработанный численный метод для решения задач двухфазной фильтрации, задач системы уравнений Эйлера и системы уравнений Навье-Стокса.

4. К числу неоспоримых достоинств разработанного численного метода необходимо отнести и тот факт, что он имеет единственный параметр настройки - число Куранта, все остальные параметры формируются автоматически в процессе расчета.

Теоретическая и практическая ценность результатов диссертации.

- Разработан новый численный метод решения задач математической физики, конкурентноспособный с современными численными методами, такими как TVD-схемы, ENO, WENO и другими.
- Предложенный численный метод активно используется другими научными коллективами.
- На основе проведенных научных исследований в рамках издательского проекта РФФИ в 2014 году издана книга в соавторстве с И.В. Фрязиновым «Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики», которая вызвала живой интерес научного сообщества.
- Разработаны комплексы программ для численного исследования задач газовой динамики на основе системы уравнений Навье-Стокса.
-

Личный вклад соискателя.

В диссертационной работе представлены результаты, полученные при решающем вкладе соискателя. Основные результаты исследований получены лично соискателем, за исключением предложений о применении в разработанном методе АИВ поправок Лакса-Вендроффа и неравенств для определения областей, занятых ударной волной, контактными разрывом и волной разряжения для задач газовой динамики, внесенных И.В. Фрязиновым, который фактически являлся консультантом при проведении научных изысканий.

Достоверность и обоснованность полученных в диссертации результатов определяется их теоретическим и численным анализом (предложенные численные методы исследованы на устойчивость и сходимость либо теоретически, либо численно) и верификацией при разнообразном тестировании, включающем сравнение с точными решениями (при их наличии), сравнением с результатами экспериментов и расчетами по другим методам, ясным физическим смыслом полученных результатов и согласованностью с современными представлениями о предмете исследования.

Апробация работы.

Результаты исследований, приведенных в диссертационной работе, были представлены и обсуждались на 16 всероссийских и международных конференциях.

1. Попов И.В., Фрязинов И.В. Сеточный метод решения уравнений газовой динамики с введением искусственной вязкости. Материалы Седьмого Всероссийского семинара (Казань, 21-24 сентября 2007 г.), с. 223-230
2. I. V. Popov, I.V. Fryazinov Finite difference method for two-dimensional equations of gas dynamics using artificial viscosity. 4th International conference. Numerical analysis and its applications, Lozenetz, Bulgaria, June 16-20, 2008 Revised selected papers. Springer LNCS 5434. P.469-475

3. Попов И.В., Фрязинов И.В. Реализация метода адаптивной искусственной вязкости на неструктурированных сетках. Материалы Девятой Всероссийской конференции «Сеточные методы для краевых задач и приложения», Казань, 2012, с. 298-306
4. I. V. Popov, I.V. Fryazinov. Метод адаптивной искусственной вязкости (АИВ3D) для решения трехмерных уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных в декартовой системе координат. 7th International Seminar on Mathematical Models & Modeling in Laser-Plasma Processes (LPpM3 - VII), 26 – 30 января 2010, Москва, Россия
5. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости. Международная конференция по прикладной математике и информатике, посвященная 100-летию со дня рождения академика А.А. Дородницына, Москва, 7-11 декабря 2010.
6. Попов И.В., Фрязинов И.В. Конечно-разностный метод решения задач газовой динамики с введением адаптивной искусственной вязкости на неструктурированных сетках. Конференция "Тихоновские чтения 2011", 14 июня 2011.
7. I. V. Popov, I.V. Fryazinov. Method of adaptive artificial viscosity. 9th International Seminar on Mathematical Models & Modeling in Laser-Plasma Processes (LPpM3 - VII), May 28 – June 4, 2011, Petrovac, Montenegro.
8. Попов И.В., Фрязинов И.В. Реализация метода адаптивной искусственной вязкости на неструктурированных сетках. Труды Девятой Всероссийской конференции "Сеточные методы для краевых задач и приложения", Казань 2012.
9. I.V. Popov, I.V. Fryazinov Method of artificial viscosity on unstructured grids. Mathematical Modeling and Computational Physics. Dubna, Russia, July 8 - July 12, 2013.
10. I.V. Popov, I. V. Fryazinov Method of artificial viscosity on unstructured grids. 11th International Seminar on Mathematical Models & Modeling in Laser-Plasma Processes (LPpM3 - XI), September 14 – 21, 2013, Budva, Montenegro

11. . О.Б Бочарова, М.Г. Лебедев, И.В. Попов, В.В. Ситник, И.В. Фрязинов И.В. Течение в струях и каналах с образованием циркуляционной зоны. Девятая Международная конференция по неравновесным процессам в соплах и струях. 25 - 31 мая 2012 года, г. Алушта (NPNJ'2012).
12. Попов И.В., Фрязинов И.В. Конечно-разностный метод решения уравнений Навье–Стокса с адаптивной искусственной вязкостью. // Сборник докладов Десятой Международной конференции «Сеточные методы для краевых задач и приложения», (24-29 сентября 2014 г., г. Казань) - Казань: Казанский университет, 2014. С. 503-509.
13. Попов И.В., Фрязинов И.В. Численный расчёт движения вязкой сжимаемой жидкости для уравнений Навье-Стокса. Международная научная конференции «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященная памяти академика А.А. Самарского в связи с 95-летием со дня его рождения. Москва, 16-17 июня 2014 г.
14. Попов И.В., Фрязинов Развитие метода адаптивной искусственной вязкости для решения системы уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа. Пятая юбилейная Всероссийская и международная конференция «Вычислительный эксперимент в аэроакустике» 22-27 сентября 2014 года, г. Светлогорск, Калининградская область.
15. Попов И.В. Об одном семействе схем для уравнения переноса. Третья международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (СКТеММ'16). Москва. 27 июня – 1 июля 2016 года. Тезисы докладов. 58 с.
16. Numerical Analysis and Its Applications. 6th International Conference, NAA 2016, Lozenetz, Bulgaria, June 15-22, 2016, Revised Selected Papers. Springer Popov I.V. (2017) Finite-Difference Method for Solution of Advection Equation by Unstable Schemes. In: Dimov I., Faragó I., Vulkov L. (eds) Numerical Analysis and Its Applications. NAA 2016. Lecture Notes in Computer Science, vol 10187. Springer, Cham. 559-567 p.

Реализация и внедрение результатов работы.

Работа выполнена в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН и подводит итог многолетним исследованиям соискателя по созданию метода АИВ и применению этого метода к задачам гидродинамики, а также разработке комплексов программ для моделирования задач газовой динамики и системы уравнений Навье-Стокса.

Исследования проводились в рамках научных планов Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, проектов Программ фундаментальных исследований Президиума и Отделения математических наук РАН, проектов Российского фонда фундаментальных исследований.

Научные положения диссертации и разработанные на их основе методы, алгоритмы и программные комплексы использовались для совместных исследований с факультетом ВМиК и механико-математическим факультетом МГУ им. М. В. Ломоносова.

Результаты работ, посвященных задачам газовой динамики, нашли отражение в монографии.

Основные публикации.

По теме диссертации опубликовано 25 работ, из них 23 – статьи в ведущих отечественных и зарубежных рецензируемых журналах, в том числе 21 – статьи в российских рецензируемых журналах из списка ВАК. Основные публикации:

1. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости. Письма в ЭЧАЯ. 2011, Т.8, №5(168) С. 817-822 (Компьютерные технологии в физике).
2. Попов И.В., Фрязинов И.В. Конечно-разностные методы решения уравнений газовой динамики с введением искусственной вязкости. Математическое моделирование, 2008, 20(8), с. 48-60. I. V. Popov, I.V. Fryazinov. Finite-Difference Method for Solving Gas Dynamics Equations Using Adaptive Artificial Viscosity. Mathematical Models and Computer Simulations, 2009, V1, № 4, pp. 493-502.

3. Попов И.В., Фрязинов И.В. Адаптивная искусственная вязкость для многомерной газовой динамики в эйлеровых переменных в декартовых координатах. Математическое моделирование, 2010, 22(1), с. 32-45.
4. Попов И.В., Фрязинов И.В. Адаптивная искусственная вязкость для многомерной газовой динамики в эйлеровых переменных в декартовых координатах. Математическое моделирование, 2010, 22(1), с. 32-45.
5. I. V. Popov, I.V. Fryazinov. Finite Difference Method for Two-dimensional Equations of Gas Dynamics Using Artificial Viscosity. Numerical Analysis and Its Applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009, pp.469-475.
6. Попов И.В., Фрязинов И.В. Расчеты двумерных тестовых задач методом адаптивной искусственной вязкости. Математическое моделирование, 2010, 22(5), 57-66.
7. Попов И.В., Фрязинов И.В. О методе адаптивной искусственной вязкости. Математическое моделирование, 2010, 22(7), 121-128.
8. Попов И.В., Фрязинов И.В. О новом выборе адаптивной искусственной вязкости. Математическое моделирование, 2010, 22(12), 23-32.
9. Попов И.В., Фрязинов И.В. Конечно-разностный метод решения трехмерных уравнений газовой динамики с введением адаптивной искусственной вязкости. Математическое моделирование, 2011, 23(3), 89-100.
10. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости для уравнений газовой динамики на треугольных и тетраэдральных сетках. Математическое моделирование. 2012, 24(6), 109-127.
11. О.Б Бочарова, М.Г. Лебедев, И.В. Попов, В.В. Ситник, И.В. Фрязинов Отражение ударной волны от оси симметрии в неравномерном потоке с образованием циркуляционной зоны. // Математическое моделирование. 2013, 25(8), 33-127.
12. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости на неструктурированных сетках. // Вестник российского университета дружбы народов. Серия: Математика, Информатика, Физика. 2014, №2, 230-233.

13. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. // М., «КРАСАНД», 2014. – 288 с., 18 п.л.
14. И. В. Попов, И. В. Фрязинов, Метод адаптивной искусственной вязкости для решения системы уравнений Навье–Стокса, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **55**:8 (2015), с. 1356–1362; I. V. Popov, I. V. Fryazinov, Method of adaptive artificial viscosity for solving the Navier–Stokes equations, Comput. Math. Math. Phys., **55**:8 (2015), 1324–1329.
15. И.В. Попов, Ю.Е. Тимофеева, Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2015, 039, 25 стр.
16. И.В. Попов, Ю.Е. Тимофеева, Многомерные разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2015, 042, 28 стр.
17. И.В. Попов, Численный метод с адаптивной искусственной вязкостью решения уравнений Навье–Стокса, Матем. моделирование, **28**:12 (2016), 122–132. I.V. Popov, Numerical methods with adaptive artificial viscosity for solving of the Navier–Stokes equations, Math. Models Comput. Simul., **9**:4 (2017), 489–497
18. И.В. Попов, Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для нелинейного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2017, 068, 21 стр.
19. И.В. Попов, Ю.А. Повещенко, С.В. Поляков, П.И. Рагимли, Об одном подходе к построению консервативной разностной схемы для задачи двухфазной фильтрации, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2017, 069, 12 стр.

20. И.В. Попов Конечно-разностный метод стабилизации решения уравнения переноса для неустойчивой схемы. Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 7. С. 990. Popov I.V Finite-difference method for the stabilization of the solution of the transport equation for an unstable difference scheme. Differential Equations. 2016. Т. 52. № 7. С. 951-961.
21. Попов И.В., Поляков С.В. Построение адаптивных нерегулярных треугольных сеток для двумерных многосвязных невыпуклых областей. Математическое моделирование. 2002. Т. 14. № 6. С. 25.
22. Тишкин В.Ф., Никишин В.В., Попов И.В. Разностные схемы трехмерной газовой динамики для задач о развитии неустойчивости Рихтмайера - Мешкова. Математическое моделирование. 1995. Т. 7. С. 1525.
23. Popov I., Sukov S. Modified method of adaptive artificial viscosity for solution of gas dynamics problems on parallel computer systems. В сборнике: EPJ Web of Conferences 9. Сер. "Mathematical Modeling and Computational Physics 2017, MMCP 2017" 2018. С. 03020.
24. Попов И.В. Разностная схема для решения многомерного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости. Mathematica Montisnigri. Vol XXXIV (2015) с. 60-85
25. Попов И.В., Метод адаптивной искусственной вязкости для численного решения гиперболических уравнений и систем, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2020, 034, 18 стр.

Благодарности.

Автор выражает глубокую признательность руководителю Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН Б.Н. Четверушкину, создавшим поистине творческую атмосферу в ИПМ РАН. Отдельно хочется поблагодарить С.К. Годунова и А.П. Фаворского за их постоянное внимание и поддержку работы по данной тематике. Искреннюю благодарность автор выражает ближайшим соратникам И.В. Фрязинову, Ю.Н. Карамзину и С.В. Полякову за проявленный интерес к работе и ценные советы. Автор благодарен своим коллегам И.В. Абалакину, Е.Н., П.Н. Вабищевичу, Т.Г.

Елизаровой, М.П. Галанину, В.Т. Жукову, С.Г. Кобелькову, Т.К. Козубской, О.Ю. Милюковой, Ю.А. Повещенко, С.А. Сукову, Ю.Е. Тимофеевой, Е.В. Шильникову, М.В. Якобовскому за плодотворное сотрудничество в процессе многочисленных обсуждений широкого спектра проблем вычислительной математики, математического моделирования, параллельных вычислений и программирования, затронутых в диссертации. Сердечно благодарю мою семью за долготерпение, помощь и активную поддержку при подготовке диссертации.

Глава 1.

Регуляризация неустойчивых разностных схем для линейного уравнения переноса.

В этой главе проводится анализ явных двухслойных разностных схем для одномерного однородного линейного уравнения переноса:

- первая разностная схема - это противопотоковая схема (UPWIND evolution scheme);
- вторая разностная схема имеет центрально-разностную аппроксимацию конвективного члена с монотонизирующим слагаемым (Forward Time Central Space evolution scheme);
- третья разностная схема представляет собой разность вперед по потоку с регуляризационным слагаемым (Regularized Downwin evolution scheme);

Проводится исследование этих разностных схем на достаточный признак максимума и устойчивость. Приводятся соответствующие утверждения и теоремы.

Далее в этой главе рассматривается разностный метод решения нелинейного уравнения переноса имеющего второй порядок точности по пространству и времени. Для его монотонизации применен метод адаптивной искусственной вязкости (метод АИВ). Предложенный метод тестировался на автомобильном решении, представляющем собой аналог волны разряжения и задачи градиентной катастрофы.

В конце главы представлена разностная схема для решения многомерного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости.

Значительное внимание в этой главе уделяется вопросу повышения устойчивости рассматриваемых разностных схем.

1.1. Классические разностные схемы для линейного уравнения переноса.

Рассмотрим одномерное однородное линейное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.1)$$

в области $0 \leq x \leq L$, $0 \leq t \leq T$. Для определённости положим $a > 0$, так как при отрицательных значениях можно сделать замену a на $-a$, тогда все дальнейшие построения будут аналогичны. Для корректной постановки задачи Коши необходимо задать начальное условие и граничное условие на левой границе рассматриваемой области:

$$u(0, x) = u^0(x), \quad u(t, 0) = u_1(t). \quad (1.2)$$

Решением задачи Коши (1.1), (1.2) в произвольной точке (t, x) будет бегущая направо волна

$$u(t, x) = f(x - at), \quad u(0, x) = f(x). \quad (1.3)$$

Исследуем задачу (1.1), (1.2) численно, для чего построим три базовые разностные схемы, исследуем и проведём их сравнение.

1.1.1. Анализ противопотоковой схемы на порядок аппроксимации, устойчивость, сходимость

Рассмотрим противопотоковую схему (UPWIN evolution scheme).

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + a \frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{h} = 0. \quad (1.4)$$

или

$$u_k^{n+1} = \frac{a\tau}{h} u_{k-1}^n + \left(1 - \frac{a\tau}{h}\right) u_k^n. \quad (1.5)$$

Как известно, эта схема монотонна и устойчива при выполнении условия Куранта $0 < \frac{a\tau}{h} = \gamma \leq 1$ и коэффициенты при функциях u_k^n и u_{k-1}^n должны быть положительны. Исходя из положительности коэффициентов,

противопотоковая схема не требует регуляризации. Эта схема имеет первый порядок по времени и по пространству.

Определим для этой схемы величину численной диссипации, для этого построим дифференциальное приближение для предложенной разностной схемы. Разложим все неизвестные функции, входящие в (1.4) в окрестности u_k^n , получим

$$u_k^{n+1} = u_k^n + \tau \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^n + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^n + \frac{\tau^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^n + O(\tau^4),$$

$$u_{k-1}^n = u_k^n - h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^n - \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)^n + O(h^6),$$

тогда разностные производные можно записать следующим образом

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^n + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^n + \frac{\tau^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^n + O(\tau^3),$$

$$a \frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{h} = a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n - a \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^n + a \frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)^n + O(h^3)$$

Подставим полученные выражения в (1.4), получим приближение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^n + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^n + O(\tau^2) + a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n - a \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^n + O(h^2) = 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^n + a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n = a \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^n + O(\tau + h^2)$$

Выражение в правой части и есть численная диссипация. Слагаемое в правой части вносит дополнительную диссипацию в решение, что, как известно, улучшает устойчивость схемы.

1.1.2. Анализ центрально-разностной схемы на порядок аппроксимации, устойчивость, сходимость и монотонность

Рассмотрим разностную схему, имеющую центрально-разностную аппроксимацию конвективного члена (Forward Time Central Space evolution scheme), а именно, схему вида

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + a \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} = 0 \quad (1.6)$$

или

$$u_k^{n+1} = \frac{a\tau}{h} u_{k-1}^n + u_k^n - \frac{a\tau}{h} u_{k+1}^n \quad (1.7)$$

Эта схема неустойчива и немонотонна, имеет первый порядок по времени и второй порядок по пространству. Немонотонность этой схемы заключается в том, что коэффициент при функции u_{k+1}^n является отрицательным и поэтому немонотонность приводит и к неустойчивости. Регуляризируем эту схему так, чтобы она стала монотонной, для чего добавим в правую часть выражение вида $\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$, где $\mu(t, x, u)$ - искусственная вязкость (некоторая функция). Подберем величину искусственной вязкости, которая обеспечивала бы положительность всех коэффициентов.

Разностная схема примет вид

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + a \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} = \frac{1}{h} \left(\mu_{k+\frac{1}{2}} \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{h} - \mu_{k-\frac{1}{2}} \frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{h} \right) \quad (1.8)$$

или в трехточечном виде

$$u_k^{n+1} = \left(\frac{a\tau}{h} + \frac{\mu\tau}{h^2} \right) u_{k-1}^n + \left(1 - 2 \frac{\mu\tau}{h^2} \right) u_k^n + \left(-\frac{a\tau}{h} + \frac{\mu\tau}{h^2} \right) u_{k+1}^n. \quad (1.9)$$

Утверждение 1. Разностная схема (1.8) будет монотонна при выполнении двух условий:

$$1) \mu_{\min} = ah \leq \mu \leq \frac{ah}{2} \frac{1}{\gamma} = \mu_{\max}$$

$$2) \gamma \leq \frac{1}{2}.$$

Доказательство:

Критерии монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа собраны и опубликованы в работе [85]. Воспользуемся критерием

монотонности по Фридрихсу [86] или признаком монотонности из учебника [87].

Критерий Фридрихса. Явная двухслойная схема

$$u_k^{n+1} = \sum_i \alpha_i(\tau, h) u_{k+i}^n, \quad i = 0, \pm 1, \dots \quad (1.10)$$

монотонна по Фридрихсу, если все коэффициенты в (1.10) неотрицательны:

$$\alpha_i(\tau, h) \geq 0 \quad (1.11)$$

Признак монотонности. Явная двухслойная линейная однородная схема (1.10) монотонна тогда и только тогда, когда выполняется условие (1.11) для всех коэффициентов.

Потребуем, чтобы в разностной схеме (1.9) все её коэффициенты были неотрицательными.

Коэффициент $\frac{a\tau}{h} + \frac{\mu\tau}{h^2}$ при функции u_{k-1}^n положителен в силу положительности величин в него входящих. Рассмотрим коэффициенты при функциях u_k^n и u_{k+1}^n соответственно:

$$1 - 2\frac{\mu\tau}{h^2} \geq 0 \quad \text{и} \quad -\frac{a\tau}{h} + \frac{\mu\tau}{h^2} \geq 0$$

Разрешим эти неравенства относительно искусственной вязкости μ

$$\mu \leq \frac{1}{2} \frac{h^2}{\tau} = \frac{1}{2} \frac{ah^2}{a\tau} = \frac{1}{2} \frac{ah}{\gamma} = \mu_{\max} \quad \text{и} \quad \mu_{\min} = ah \leq \mu.$$

Проверим, при каких условиях справедливо неравенство $\mu_{\min} \leq \mu_{\max}$. Получим

$$ah \leq \frac{1}{2} \frac{ah}{\gamma}, \quad \text{следовательно} \quad \gamma \leq \frac{1}{2}.$$

Таким образом, при выполнении условий, сформулированных в утверждении 1, разностная схема (1.8) будет монотонна.

Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. Разностная схема (1.8) будет устойчива при выполнении условий:

$$A_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\gamma^2(1 - \cos^2 \varphi)}}{2(1 - \cos \varphi)} \leq \mu \leq A_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\gamma^2(1 - \cos^2 \varphi)}}{2(1 - \cos \varphi)},$$

где $\varphi = \omega h$.

Доказательство.

Проведем доказательство этого утверждения, используя метод разделения переменных [87, 88] или эквивалентное название - метод гармоник (спектральный метод) [89]. Подставим в разностное уравнение (1.9) частное решение

$$u_k^n = u_0 \lambda^n \exp(ik\varphi),$$

получим

$$u_0 \lambda^{n+1} \exp(ik\varphi) = \left[\frac{a\tau}{h} + \frac{\mu\tau}{h^2} \right] u_0 \lambda^n \exp(i(k-1)\varphi) + \left[1 - 2\frac{\mu\tau}{h^2} \right] u_0 \lambda^n \exp(ik\varphi) + \left[-\frac{a\tau}{h} + \frac{\mu\tau}{h^2} \right] u_0 \lambda^n \exp(i(k+1)\varphi)$$

Упростим уравнение

$$\lambda = \left[\frac{a\tau}{h} + \frac{\mu\tau}{h^2} \right] \exp(-i\varphi) + \left[1 - 2\frac{\mu\tau}{h^2} \right] + \left[-\frac{a\tau}{h} + \frac{\mu\tau}{h^2} \right] \exp(i\varphi)$$

или

$$\lambda = \frac{a\tau}{h} (\exp(-i\varphi) - \exp(i\varphi)) + \frac{\mu\tau}{h^2} (\exp(-i\varphi) + \exp(i\varphi)) + \left[1 - 2\frac{\mu\tau}{h^2} \right]$$

$$\lambda = \frac{a\tau}{h} (\cos \varphi - i \sin \varphi - \cos \varphi - i \sin \varphi) + \frac{\mu\tau}{h^2} (\cos \varphi - i \sin \varphi + \cos \varphi + i \sin \varphi) + \left[1 - 2\frac{\mu\tau}{h^2} \right]$$

$$\lambda = 2\frac{\mu\tau}{h^2} \cos \varphi + \left(1 - 2\frac{\mu\tau}{h^2} \right) + i \left(-2\frac{a\tau}{h} \sin \varphi \right).$$

В полученном выражении для λ первые два слагаемых есть его действительная часть $\operatorname{Re} \lambda = 2 \frac{\mu\tau}{h^2} \cos \varphi + \left(1 - 2 \frac{\mu\tau}{h^2}\right) = 2 \frac{\mu\tau}{h^2} (\cos \varphi - 1) + 1$, а третье слагаемое - мнимая часть $\operatorname{Im} \lambda = -2 \frac{a\tau}{h} \sin \varphi$.

Необходимое условие устойчивости разностной схемы будет выполнено, если $|\lambda| \leq 1$

$$|\lambda|^2 = (\operatorname{Re} \lambda)^2 + (\operatorname{Im} \lambda)^2 = \left[2 \frac{\mu\tau}{h^2} (\cos \varphi - 1) + 1\right]^2 + \left(-2 \frac{a\tau}{h} \sin \varphi\right)^2 \leq 1$$

Из полученного неравенства найдем условие для искусственной вязкости, при котором это неравенство будет справедливо для любых гармоник. Кроме того, это будет ещё и достаточное условие устойчивости разностной схемы.

После алгебраических преобразований получим

$$\left(\frac{\tau}{h^2}\right)^2 \mu^2 (1 - \cos \varphi)^2 - \frac{\tau}{h^2} \mu (1 - \cos \varphi) + \gamma^2 (1 - \cos^2 \varphi) \leq 0$$

$$D = \left(\frac{\tau}{h^2}\right)^2 (1 - \cos \varphi)^2 - 4 \left(\frac{\tau}{h^2}\right)^2 (1 - \cos \varphi)^2 \gamma^2 (1 - \cos^2 \varphi)$$

$$D = \left(\frac{\tau}{h^2}\right)^2 (1 - \cos \varphi)^2 (1 - 4\gamma^2 (1 - \cos^2 \varphi))$$

Дискриминант будет положительным, если $0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2}$. Тогда получим два различных положительных корня.

$$A_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\gamma^2 (1 - \cos^2 \varphi)}}{2 \left(\frac{\tau}{h^2}\right) (1 - \cos \varphi)} \quad \text{и} \quad A_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\gamma^2 (1 - \cos^2 \varphi)}}{2 \left(\frac{\tau}{h^2}\right) (1 - \cos \varphi)}$$

Утверждение доказано.

Теорема 1. Разностная схема (1.8) будет монотонна и устойчива при выполнении условия для искусственной вязкости

$$\mu_{\min} = ah \leq \mu \leq \frac{ah}{2} \frac{1}{\gamma} = \mu_{\max} \quad \text{и} \quad \gamma \leq \frac{1}{2}.$$

Доказательство.

$$A_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\gamma^2(1 - \cos^2 \varphi)}}{2(1 - \cos \varphi)} \leq \mu_{\min} = ah$$

$$A_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\gamma^2(1 - \cos^2 \varphi)}}{2(1 - \cos \varphi)} \geq \frac{ah}{2\gamma} = \mu_{\max}$$

Следовательно, при выполнении условия $\gamma \leq \frac{1}{2}$, будут выполнены условия

$$\mu_{\min} = ah \leq \mu \leq \frac{ah}{2\gamma} = \mu_{\max}.$$

Таким образом, разностная схема будет монотонна и устойчива.

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим вопрос порядка аппроксимации разностной схемы

(1.8). Разложим функции в ряд Тейлора:

$$u_k^{n+1} = u_k^n + \tau \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^n + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^n + \frac{\tau^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^n + O(\tau^4),$$

$$u_{k+1}^n = u_k^n + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^n + \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)^n + \frac{h^4}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)^n + \frac{h^5}{120} \left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right)^n + O(h^6)$$

$$u_{k-1}^n = u_k^n - h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^n - \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)^n + \frac{h^4}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)^n - \frac{h^5}{120} \left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right)^n + O(h^6)$$

$$u_{k+1}^n - u_{k-1}^n = 2h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n + \frac{h^3}{3} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)^n + \frac{h^5}{60} \left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right)^n + O(h^6)$$

Тогда

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^n + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^n + \frac{\tau^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^n + O(\tau^3),$$

$$\frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n + \frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)^n + \frac{h^5}{120} \left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right)^n + O(h^6)$$

Если $\mu = const$, то

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left(\mu_{k+1/2} \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{h} - \mu_{k-1/2} \frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{h} \right) = \frac{\mu}{h} \left(\frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{h} \right) = \\ & = \mu \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^n + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)^n + O(h^4) \right) \end{aligned}$$

Следствия из уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

В итоге

$$\begin{aligned} \psi_k^n &= \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + a \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} - \frac{\mu}{h} \left(\frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{h} \right) = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^n + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^n + \frac{\tau^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^n + O(\tau^3) \right] + \\ & + a \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n + \frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)^n + \frac{h^4}{120} \left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right)^n + O(h^5) \right] - \mu \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^n + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)^n + O(h^4) \right] = \\ & = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^n + a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n \right] + \frac{1}{2} \left[\tau \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^n - 2\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^n \right] + \\ & + \frac{\tau^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^n + O(\tau^3) + a \left(\frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)^n + \frac{h^4}{120} \left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right)^n + O(h^5) \right) - \mu \left(\frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)^n + O(h^4) \right) = \\ & = 0 + \frac{a}{2} \left[\tau a - \frac{2\mu}{a} \right] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^n + \frac{\tau^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^n + O(\tau^3) + a \left(\frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)^n + \frac{h^4}{120} \left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right)^n + O(h^5) \right) - \\ & - \mu \left(\frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)^n + O(h^4) \right) \end{aligned}$$

Если выполнено условие $\tau a - \frac{2\mu}{a} = 0$, то $\psi_k^n = O(\tau^2 + h^2) \Rightarrow \|\psi^n\| \leq C(\tau^2 + h^2)$.

Если это условие не выполнено, то при $\mu \sim h$ получим $\psi_k^n = O(\tau + h) \Rightarrow \|\psi^n\| \leq C(\tau + h)$.

Задача для погрешности

$$\frac{z_k^{n+1} - z_k^n}{\tau} + a \frac{z_{k+1}^n - z_{k-1}^n}{2h} - \frac{\mu}{h} \left(\frac{z_{k+1}^n - 2z_k^n + z_{k-1}^n}{h} \right) = -\psi_k^n, \quad z_k^0 = 0, \quad k = 0, \dots, N.$$

Оценим погрешность с помощью принципа максимума:

$$z_k^{n+1} = \left(\frac{a\tau}{h} + \frac{\mu\tau}{h^2} \right) z_{k-1}^n + \left(1 - 2\frac{\mu\tau}{h^2} \right) z_k^n + \left(-\frac{a\tau}{h} + \frac{\mu\tau}{h^2} \right) z_{k+1}^n - \tau\psi_k^n,$$

$$|z_k^{n+1}| \leq \left(\frac{a\tau}{h} + \frac{\mu\tau}{h^2} \right) |z_{k-1}^n| + \left(1 - 2\frac{\mu\tau}{h^2} \right) |z_k^n| + \left(-\frac{a\tau}{h} + \frac{\mu\tau}{h^2} \right) |z_{k+1}^n| + \tau |\psi_k^n|,$$

$$|z_k^{n+1}| \leq \left(1 - \frac{2\tau\mu}{h^2} + \frac{\tau a}{h} + \frac{\tau\mu}{h^2} - \frac{\tau a}{h} + \frac{\tau\mu}{h^2} \right) \|z^n\|_C + \tau \|\psi^n\|_C = \|z^n\|_C + \tau \|\psi^n\|_C,$$

$$\|z^{n+1}\|_C \leq \|z^n\|_C + \tau \|\psi^n\|_C.$$

Для выполнения оценок достаточно

$$1 - \frac{2\tau\mu}{h^2} > 0, \quad \frac{\tau\mu}{h^2} - \frac{\tau a}{h} > 0; \quad \text{или} \quad \mu_{\min} = ah \leq \mu \leq \frac{ah}{2} \frac{1}{\gamma} = \mu_{\max}.$$

Желаемое μ найдется, если $\gamma < 0.4$. Можно взять, например, $\mu = \alpha ah$. Тогда

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) > \alpha > 1. \quad (*)$$

1.1.3. Анализ схемы с разностью вперед по потоку на порядок аппроксимации, устойчивость, сходимость и монотонность

Рассмотрим третью разностную схему для уравнения (1.1), схема с разностью вперед по потоку с регуляризатором (**Regularized Downwin evolution scheme**).

Эта схема будет иметь вид:

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + a \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{h} = 0. \quad (1.12)$$

или

$$u_k^{n+1} = \left(1 - \frac{a\tau}{h} \right) u_k^n + \frac{a\tau}{h} u_{k+1}^n. \quad (1.13)$$

Известно, что схема (1.12), когда $a > 0$, абсолютно неустойчива при любом выборе τ и h [88].

Повысим устойчивость схемы, для этого введем искусственную вязкость, описанную в пункте 1.1.2. Запишем разностную схему с искусственной вязкостью

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + a \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{h} = \frac{1}{h} \left(\mu_{k+\frac{1}{2}} \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{h} - \mu_{k-\frac{1}{2}} \frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{h} \right) \quad (1.14)$$

или в трехточечном виде

$$u_k^{n+1} = \frac{\mu\tau}{h^2} u_{k-1}^n + \left(1 + \frac{a\tau}{h} - 2\frac{\mu\tau}{h^2}\right) u_k^n + \left(-\frac{a\tau}{h} + \frac{\mu\tau}{h^2}\right) u_{k+1}^n. \quad (1.15)$$

Для определения условия монотонности для схемы (1.14), сформулируем следующую лемму.

Лемма 1. Разностная схема (1.15) будет монотонна при выполнении условия для искусственной вязкости

$$\mu_{\min} = \frac{h^2}{\tau} \gamma \leq \mu \leq \frac{h^2}{2\tau} (1 + \gamma) = \mu_{\max}$$

Доказательство.

Рассмотрим разностную схему (1.15) и потребуем, чтобы все коэффициенты, согласно принципу максимума, были положительными.

Для функции u_{k-1}^n коэффициент положителен, так как входящие в коэффициент множители положительны. Найдем условия на коэффициенты для функций u_k^n и u_{k+1}^n .

Для функции u_k^n получим $1 + \frac{a\tau}{h} - 2\frac{\mu\tau}{h^2} \geq 0$, $\mu \leq \frac{1}{2} \frac{h^2}{\tau} \left(1 + a\frac{\tau}{h}\right) = \frac{1}{2} \frac{h^2}{\tau} (1 + \gamma)$.

Для функции u_{k+1}^n получим $-\frac{a\tau}{h} + \frac{\mu\tau}{h^2} \geq 0$, $\mu \geq \frac{h^2}{\tau} a\frac{\tau}{h} = \frac{h^2}{\tau} \gamma$. Совмещая оба неравенства, получим требуемое условие положительности коэффициентов

$$\mu_{\min} = \frac{h^2}{\tau} \gamma \leq \mu \leq \frac{h^2}{2\tau} (1 + \gamma) = \mu_{\max}.$$

Лемма доказана.

На следующем шаге найдем условия для искусственной вязкости, при которых схема (1.15) будет устойчива.

Лемма 2. Разностная схема (1.15) будет устойчива при выполнении следующего условия

$$\frac{h^2 (1 + \gamma(1 - \cos \varphi))(1 - \cos \varphi) - \sqrt{1 - \gamma^2(1 - \cos^2 \varphi)}}{\tau 4(1 - \cos \varphi)^2} \leq \mu \leq \frac{h^2 (1 + \gamma(1 - \cos \varphi))(1 - \cos \varphi) + \sqrt{1 - \gamma^2(1 - \cos^2 \varphi)}}{\tau 4(1 - \cos \varphi)^2},$$

где $\varphi = \omega h$.

Доказательство.

Докажем эту лемму, используя метод разделения переменных [87].

Будем искать решение разностной схемы в виде

$u_k^n = \lambda^n \exp(ik\varphi)$, где $\varphi = \omega h$, i - мнимая единица.

$u_k^{n+1} = \lambda^{n+1} \exp(ik\varphi)$, $u_{k+1}^n = \lambda^n \exp(i(k+1)\varphi)$, $u_{k-1}^n = \lambda^n \exp(i(k-1)\varphi)$

Подставим представленные решения в (5) и учитывая, что $\exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$, получим

$$\lambda = 1 - \frac{a\tau}{h}(\cos \varphi + i \sin \varphi - 1) + \frac{2\mu\tau}{h^2}(\cos \varphi - 1)$$

Обозначим $\frac{2\mu\tau}{h^2} = A$, а $\frac{a\tau}{h} = \gamma$. Учитывая, что $\operatorname{Re} \lambda = 1 - (\gamma - A)(\cos \varphi - 1)$,

$\operatorname{Im} \lambda = -\gamma \sin \varphi$, получим

$$|\lambda|^2 = (\operatorname{Re} \lambda)^2 + (\operatorname{Im} \lambda)^2 = [1 - (\gamma - A)(\cos \varphi - 1)]^2 + \gamma^2 \sin^2 \varphi$$

Найдем условие для искусственной вязкости μ , при котором будет выполнено неравенство $|\lambda|^2 < 1$

$$|\lambda|^2 = [(1 - \cos \varphi)A - (1 + \gamma(1 - \cos \varphi))]^2 + \gamma^2(1 - \cos^2 \varphi) \leq 1$$

Решая квадратное уравнение относительно переменной A , находим корни. Если число Куранта положить $\gamma \leq 1$, то значения корней уравнения будут действительными вида

$$A_1 = \frac{2(1 + \gamma(1 - \cos \varphi))(1 - \cos \varphi) - \sqrt{1 - \gamma^2(1 - \cos^2 \varphi)}}{2(1 - \cos \varphi)^2} \text{ и}$$

$$A_2 = \frac{2(1 + \gamma(1 - \cos \varphi))(1 - \cos \varphi) + \sqrt{1 - \gamma^2(1 - \cos^2 \varphi)}}{2(1 - \cos \varphi)^2}$$

Для того, чтобы рассматриваемая разностная схема была устойчива, необходимо условие устойчивости, чтобы

$$\frac{h^2}{2\tau} A_1 \leq \mu \leq \frac{h^2}{2\tau} A_2$$

Лемма доказана.

Теорема. Разностная схема (1.15) будет монотонна и устойчива при выполнении условия на искусственную вязкость

$$\mu_{\min} \leq \mu \leq \mu_{\max},$$

где $\varphi = \omega h$, $\mu_{\min} = \frac{h^2}{\tau} \gamma$, $\mu_{\max} = \frac{h^2}{2\tau} A_2 = \frac{h^2}{\tau} \frac{(1 + \gamma(1 - \cos \varphi))(1 - \cos \varphi) + \sqrt{1 - \gamma^2(1 - \cos^2 \varphi)}}{4(1 - \cos \varphi)^2}$

Доказательство.

Совместим оценки, полученные в лемме 1 и 2.

Получим неравенства для монотонности разностной схемы

$$\mu_{\min} = \frac{h^2}{\tau} \gamma \leq \mu \leq \frac{h^2}{2\tau} (1 + \gamma) = \mu_{\max}$$

и неравенства на устойчивость

$$\frac{h^2}{2\tau} A_1 \leq \mu \leq \frac{h^2}{2\tau} A_2.$$

После сравнения величин, входящих в неравенства, получим оценки

$$\frac{h^2}{2\tau} A_1 \leq \mu_{\min} \leq \mu \leq \frac{h^2}{2\tau} A_2 \leq \mu_{\max}$$

Тогда для того, чтобы разностная схема была устойчивой и монотонной, достаточно выполнения неравенства

$$\mu_{\min} = \frac{h^2}{\tau} \gamma \leq \mu \leq \frac{h^2}{2\tau} A_2 = \frac{h^2}{\tau} \frac{(1 + \gamma(1 - \cos \varphi))(1 - \cos \varphi) + \sqrt{1 - \gamma^2(1 - \cos^2 \varphi)}}{4(1 - \cos \varphi)^2} = \mu_{\max}$$

Данная оценка подтверждается численным экспериментом.

Рассмотрим вопрос аппроксимации для схемы (1.15).

Лемма 3. Разностная схема (1.15) будет иметь второй порядок аппроксимации по времени и пространству при условии $\tau a + h - \frac{2\mu}{a} = 0$ и первый порядок при выполнении условия $\mu \sim h$.

Доказательство.

Для обеспечения монотонности и повышения устойчивости разностной схемы добавим слагаемое с искусственной вязкостью в правую часть, для чего

воспользуемся методом адаптивной искусственной вязкости, описанным в работе [90]. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

где μ - искусственная вязкость.

Запишем модифицированное уравнение переноса в разностном виде (явная схема)

$$\begin{aligned} \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + a \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{h} = & \frac{2a^2\tau}{3} \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{h^2} - \frac{a^2\tau}{6} \frac{u_{k+1}^{n-1} - 2u_k^{n-1} + u_{k-1}^{n-1}}{h^2} + \\ & + \frac{1}{h} \left(\mu_{k+\frac{1}{2}} \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{h} - \mu_{k-\frac{1}{2}} \frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{h} \right) \end{aligned}$$

Для определения величины искусственной вязкости потребуем выполнения условий принципа максимума, который обеспечивает отсутствие осцилляций сеточной природы. Для анализа воспользуемся методом «замороженных» коэффициентов из работы [91].

Положим искусственную вязкость одинаковой во всех узлах сетки $\mu_{i+\frac{1}{2}} = \mu_{i-\frac{1}{2}} = \mu$ и запишем уравнения для схемы в трёхточечном виде для n -ого слоя, получим

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} = & \left(\frac{2}{3} \frac{a^2\tau^2}{h^2} + \mu \frac{\tau}{h^2} \right) u_{k-1}^n + \left(1 + \frac{a\tau}{h} - \frac{4}{3} \frac{a^2\tau^2}{h^2} - \mu \frac{2\tau}{h^2} \right) u_k^n + \left(-\frac{a\tau}{h} + \frac{2}{3} \frac{a^2\tau^2}{h^2} + \mu \frac{\tau}{h^2} \right) u_{k+1}^n - \\ & - \frac{a^2\tau}{6} \frac{u_{k+1}^{n-1} - 2u_k^{n-1} + u_{k-1}^{n-1}}{h^2} \end{aligned}$$

Для обеспечения монотонности по критерию Фридрикса [35] воспользуемся принципом максимума, для выполнения которого коэффициенты для функций u_{k-1}^n , u_k^n , u_{k+1}^n должны быть положительными. Для коэффициента при функции u_{k-1}^n запишем неравенство.

$$\frac{2}{3} \frac{a^2\tau^2}{h^2} + \mu \frac{\tau}{h^2} > 0.$$

Это неравенство выполняется автоматически, так как все величины, входящие в неравенство, являются положительными.

Из неравенства для коэффициента при функции u_{k+1}^n получим ограничение снизу на величину искусственной вязкости μ :

$$-\frac{a\tau}{h} + \frac{2}{3} \frac{a^2\tau^2}{h^2} + \mu \frac{\tau}{h^2} > 0$$

$$\mu > ah \left(1 - \frac{2}{3} \frac{a\tau}{h} \right)$$

$$\mu_{\min} = ah \left(1 - \frac{2}{3} \frac{a\tau}{h} \right)$$

Из неравенства для коэффициента при функции u_k^n получим верхнее ограничение на величину искусственной вязкости μ :

$$1 + \frac{a\tau}{h} - \frac{4}{3} \frac{a^2\tau^2}{h^2} - \mu \frac{2\tau}{h^2} > 0$$

$$\mu < ah \left(\frac{1}{2} \frac{h}{a\tau} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \frac{a\tau}{h} \right)$$

$$\mu_{\max} = ah \left(\frac{1}{2} \frac{h}{a\tau} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \frac{a\tau}{h} \right)$$

Отсюда же получим ограничение на число Куранта $\gamma = \frac{a \cdot \tau}{h}$. Воспользуемся неравенствами для минимальной и максимальной вязкости:

$$\begin{cases} 1 - \frac{2}{3} \gamma > 0 \\ \frac{1}{\gamma} + 1 - \frac{4}{3} \gamma > 0 \end{cases}$$

Решая эту систему, и учитывая, что $\gamma > 0$, получим ограничение на число Куранта

$$0 < \gamma < \frac{3 + \sqrt{57}}{8} \approx 1,3187.$$

Эти условия справедливы при «замороженных» коэффициентах, в реальных расчётах следует использовать $\gamma < 1$ для обеспечения устойчивости разностной схемы.

Представим наглядно искусственную вязкость для предложенной схемы при $a=1$ и $h=1$ (рис. 1). По оси абсцисс отложим число Куранта, а по оси ординат искусственную вязкость, построим графики μ_{\max} (серая пунктирная линия) и μ_{\min} (черная сплошная линия).

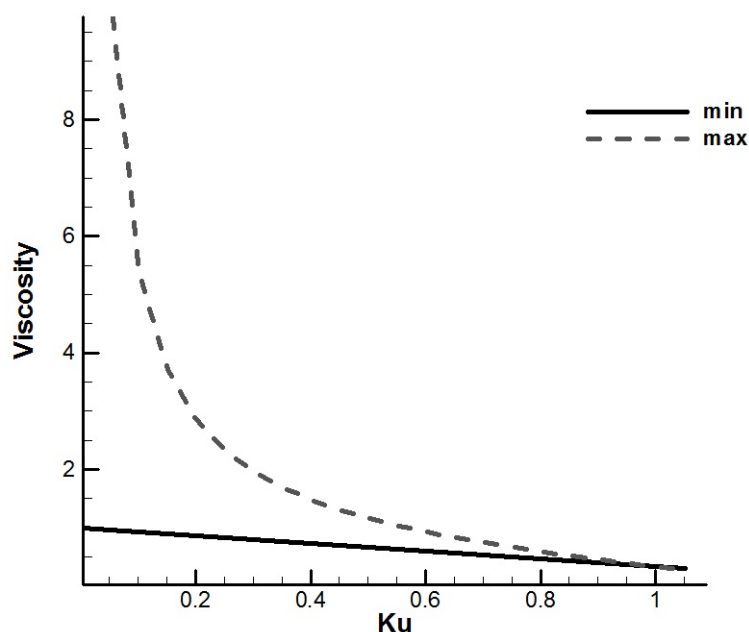


Рис. 1 Максимальное и минимальное значения искусственной вязкости

Для определения оптимального числа Куранта построим также разность $\mu_{\max} - \mu_{\min}$ (рис. 2). Координата пересечения разности вязкостей и графика минимальной вязкости даст искомое значение числа Куранта при заданных значениях скорости и шага.

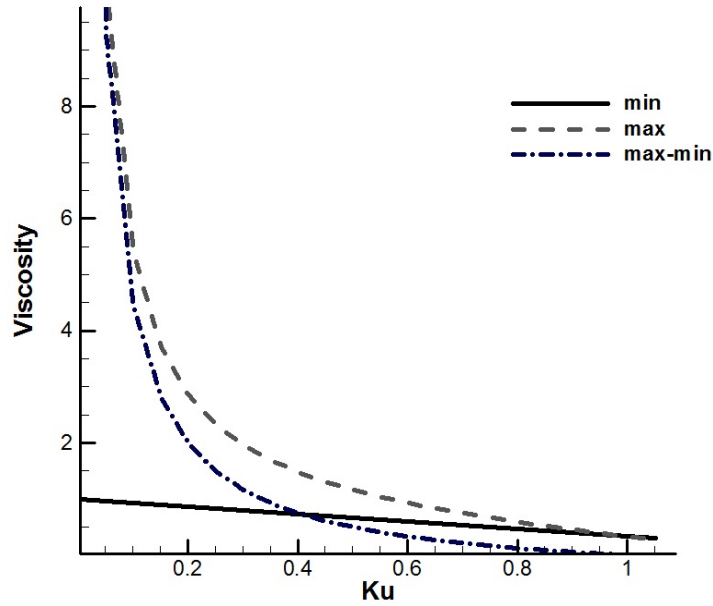


Рис. 2. Нахождение оптимального числа Куранта

1.1.4 Этапы расчетов по разностным схемам с регуляризацией

На первом этапе находим решение исходного уравнения переноса

$$\frac{\tilde{u}_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n = 0,$$

где \tilde{u}_k^{n+1} - «предикторное» решение, полученное на $(n+1)$ -ом слое по времени.

На следующем этапе по найденным значениям определяем, на каких интервалах возникают осцилляции решения, то есть когда выполняется неравенство

$$(\tilde{u}_k^{n+1} - \tilde{u}_{k-1}^{n+1})(\tilde{u}_{k+1}^{n+1} - \tilde{u}_k^{n+1}) < 0.$$

Обнаруженные немонотонности необходимо подавить. Для этого в правую

часть уравнения добавим слагаемое с искусственной вязкостью $\frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial u}{\partial x} \right)$,

величина искусственной вязкости равна $\tilde{\mu} = \mu_{\min}$ на участках немонотонности и

$\tilde{\mu} = 0$ при

$$(\tilde{u}_k^{n+1} - \tilde{u}_{k-1}^{n+1})(\tilde{u}_{k+1}^{n+1} - \tilde{u}_k^{n+1}) > 0.$$

Третьим этапом является решение модифицированного уравнения

$$\frac{\tilde{u}_k^{n+1} - \tilde{u}_k^{n+1}}{\tau} + a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial u}{\partial x} \right)^n$$

Таким образом, находим монотонизированное решение \tilde{u}_k^{n+1} .

Так как введённая вязкость имела минимальное значение, на четвёртом этапе необходимо повторно проверить наличие немонотонности решения с помощью условия

$$(\tilde{u}_k^{n+1} - \tilde{u}_{k-1}^{n+1})(\tilde{u}_{k+1}^{n+1} - \tilde{u}_k^{n+1}) < 0.$$

Если это условие выполняется, то величину искусственной вязкости возьмем равной $\tilde{\mu} = \mu_{\max} - \mu_{\min}$, если $(\tilde{u}_k^{n+1} - \tilde{u}_{k-1}^{n+1})(\tilde{u}_{k+1}^{n+1} - \tilde{u}_k^{n+1}) > 0$, то $\tilde{\mu} = 0$.

На пятом этапе решаем уравнение

$$u_k^{n+1} = \tilde{u}_k^{n+1} + \tau \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial u}{\partial x} \right)^n.$$

Решением, является искомая функция на следующем временном слое.

Таким образом, если минимальной вязкости не хватило для подавления немонотонности, то на отрезке вводится максимальная вязкость, которая обеспечивает монотонность решения.

Можно сократить число этапов вычисления, вводя искусственную вязкость один раз, полагая, например, $\mu = \frac{1}{2}(\mu_{\max} + \mu_{\min})$. Однако, подобранная вязкость может оказаться недостаточной или избыточной для конкретного начального профиля.

Запишем кратко все этапы решения для разностных уравнений:

- 1) Нахождение "предикторного" решения в отсутствие искусственной вязкости

$$\tilde{u}_k^{n+1} = \frac{2}{3} \frac{a^2 \tau^2}{h^2} u_{k-1}^n + \left(1 + \frac{a\tau}{h} - \frac{4}{3} \frac{a^2 \tau^2}{h^2} \right) u_k^n + \left(-\frac{a\tau}{h} + \frac{2}{3} \frac{a^2 \tau^2}{h^2} \right) u_{k+1}^n - \frac{a^2 \tau}{6h^2} (u_{k+1}^{n-1} - 2u_k^{n-1} + u_{k-1}^{n-1})$$

- 2) Проверка полученного на новом временном слое решения на монотонность.

Если выполняется неравенство $(\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1})(\tilde{u}_{k+1} - \tilde{u}_k) < 0$, то на отрезках $[u_{k-1}, u_k]$ и $[u_k, u_{k+1}]$ вводится искусственная вязкость $\mu = \mu_{\min}$. Там, где решение монотонно, искусственная вязкость полагается равной нулю.

- 3) Нахождение "корректорного" решения по явной схеме с включёнными в неё диссипативными слагаемыми

$$u_k^{n+1} = \tilde{u}_k^n + \mu \frac{\tau}{h^2} u_{k-1}^n - \mu \frac{2\tau}{h^2} u_k^n + \mu \frac{\tau}{h^2} u_{k+1}^n$$

- 4) Проверка полученного решения на монотонность. Аналогично п.2, на отрезках немонотонности вводится искусственная вязкость

$$\mu = \mu_{\max} - \mu_{\min}$$

- 5) Пересчёт решения по формуле из п. 3.

1.1.5. Результаты численных экспериментов

Для экспериментального исследования схемы использовались тесты, предложенные в [92]. Начальное условие имеет вид

$$u(0, x) = 0, \text{ при } x \in (-\infty, l_1) \cup (l_2, +\infty),$$

$$u(0, x) = \begin{cases} \frac{x-l_1}{l_2-l_1} \\ \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi(x-l_1)}{l_2-l_1} \right) \right) \\ \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2(x-l_1)}{3(l_{11}-l_1)} + 1, x \in [l_1, l_{11}) \\ \frac{1}{3}, x \in (l_{11}, l_{22}) \\ \frac{2(x-l_2)}{3(l_2-l_{22})} + 1, x \in (l_{22}, l_2] \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2(x-l_1)}{3(l_{12}-l_1)} + 1, x \in [l_1, l_{12}) \\ \frac{2(x-l_2)}{3(l_2-l_{12})} + 1, x \in [l_{12}, l_2] \end{array} \right. \\ \frac{l_2-x}{l_2-l_1} \end{cases}$$

при $x \in [l_1, l_2]$.

Результаты расчётов задачи Коши для всех шести форм получены при следующих значениях параметров: $L = 520$, $l_1 = 10$, $l_2 = 30$, $T = 400$, $h = 1$, $a = 1$ и числе Куранта $Ku = 0.4$. Для определения точности использовались нормы C , L_1 , L_2 разности точного и численного решений. Ошибка рассчитывалась интегрально (по всему промежутку $0 \leq t \leq T$) и локально (на последнем временном слое $t = T$).

Ниже приведены таблицы норм разности точного и численного решений (таблицы 1 и 2).

Интегрально ($0 \leq t \leq T$)

Таблица 1

норма	левый треугольник	прямоуго льник	косинус	зуб	«М»	правый треуголь ник
C	0.589763	0.630752	0.370238	0.622347	0.588488	0.527556

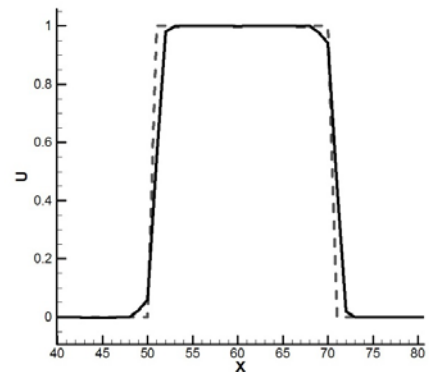
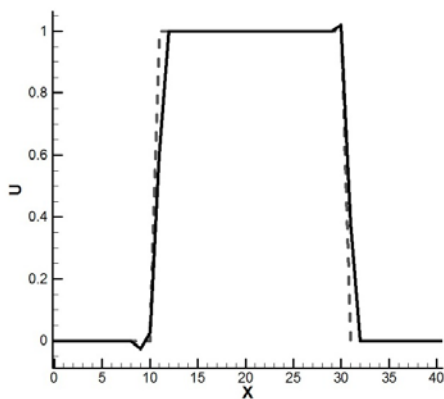
норма	левый треугольник	прямоуго льник	косинус	зуб	«М»	правый треуголь ник
L_1	837.084	375.524	1144.4	1295.26	1060.98	661.861
L_2	12.0344	10.5937	15.9565	18.155	14.3308	9.70588

Локально ($t = T$):

Таблица 2

норма	левый треугольник	прямоуго льник	косинус	зуб	«М»	правый треуголь ник
C	0.261266	0.116481	0.350057	0.479697	0.3517	0.230223
L_1	2.7175	0.512808	3.14647	4.25066	3.21061	1.78745
L_2	0.685417	0.210325	0.864189	1.04764	0.761747	0.44397

Профили численного (чёрная сплошная линия) и точного (серая штриховая линия) решений в разные моменты времени:



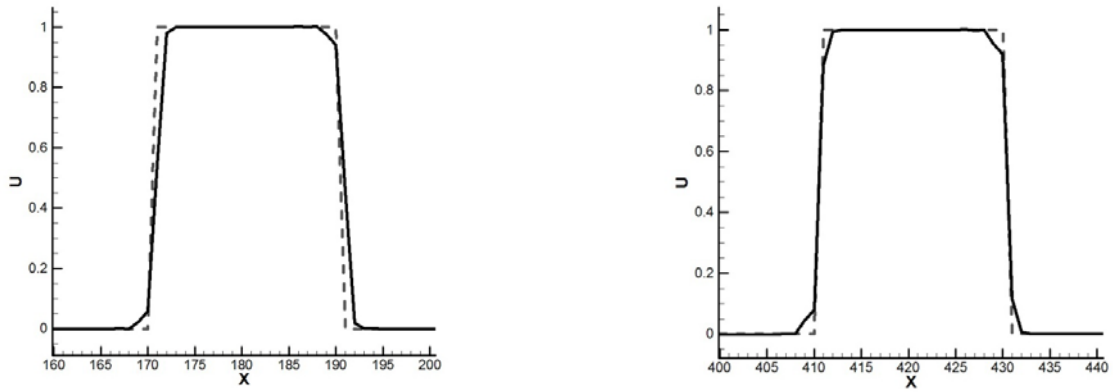


Рис. 4. Профиль «прямоугольник» в моменты времени $T = 0.4; 40; 160; 400$

Профили точного (серая штриховая линия) и численного решения (черная сплошная линия) при $T = 400$:

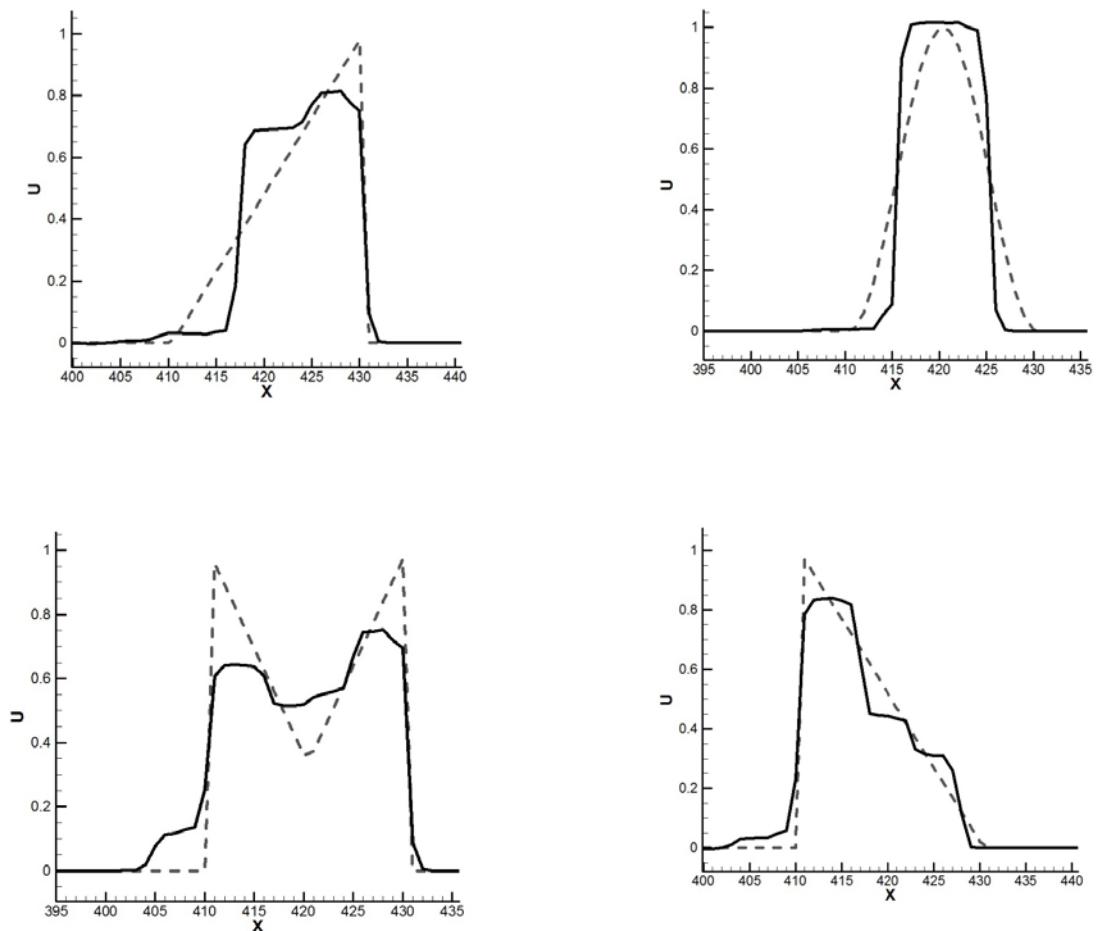


Рис. 5. Профили «левый треугольник», «косинус», «М», «правый треугольник» в момент времени $T = 400$

Используем нормы ошибок для сравнения со схемами без «лимитеров», описанными в [27]. Проведём сравнение построенной схемы (обозначим «АИВ») со схемами Р.П. Федоренко («Ф»), схемой К.И. Бабенко («Б»), схемой со сглаживанием («С»), которая построена путём монотонизации схемы К.И. Бабенко, и схемой второго порядка «парабола» («П») при числе Куранта, равном 0.25. Построим таблицу схем, состоящую из шести столбцов, соответствующих различным формам начального условия, и трёх строк, соответствующих разным нормам. Элементом таблицы 3 и 4 является схема, дающая минимальную норму ошибки для данного начального условия.

Интегрально ($0 \leq t \leq T$):

Таблица 3

норма	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	«М»	правый треугольник
C	П	П	С	АИВ	П	Б
L_1	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	П
L_2	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ

Локально ($t = T$):

Таблица 4

норма	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	«М»	правый треугольник
C	Б	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ
L_1	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ
L_2	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ	АИВ

Приведём также таблицы 5 и 6, аналогичные представленным выше, с числовыми значениями норм. В ячейке указана норма разности для схемы с минимальной ошибкой, а в скобках – норма разности для построенной схемы.

Интегрально ($0 \leq t \leq T$):

Таблица 5

норма	левый треугольн ик	прямоугольн ик	косину с	зуб	«М»	правый треугольн ик
C	0.7157, П (0.797296)	0.7174, П (0.948985)	0.4141, С (0.4337)	0.7041 1, АИВ	0.7203, П (0.77658 б)	0.6844, Б (0.748784)
L_1	1118.13, АИВ	551.303, АИВ	980.449, АИВ	1745.5 4, АИВ	1703.11, АИВ	271.514, П (930.692)
L_2	18.0832, АИВ	14.8535, АИВ	13.6644 8, АИВ	23.666 5, АИВ	22.8179, АИВ	13.7436, АИВ

Локально ($t = T$):

Таблица 6

н о р м а	левый треугольн ик	прямоуголь ник	косинус	зуб	«М»	правый треугольн ик
C	0.5843,Б (0.636617)	0.422903, АИВ	0.326024, АИВ	0.564235, АИВ	0.527367 АИВ	0.296273, АИВ
L_1	3.28388, АИВ	1.52873, АИВ	2.59611, АИВ	5.02801, АИВ	5.26241, АИВ	2.73669, АИВ
L_2	0.960744, АИВ	0.593281, АИВ	0.685194, АИВ	1.25018, АИВ	1.22855, АИВ	0.62265, АИВ

Построенная схема даёт наилучшие значения в нормах L_1 и L_2 для интегральных расчётов. Локально же построенная схема лидирует среди

остальных для большинства начальных профилей. Малая ошибка при $t=T$ говорит о сходимости точного и численного решений.

Схема может применяться для расчётов на длительные времена.

Расширим расчётную область и увеличим длительность расчёта. Параметры имеют следующие значения: $L=1040$, $l_1=10$, $l_2=30$, $T=800$, $h=1$, $a=1$ и $Ku=0.4$. Результаты приведены в таблицах 7 и 8.

Интегрально ($0 \leq t \leq T$):

Таблица 7

норма	левый треугольник	прямоуг ольник	косинус	зуб	«М»	правый треугольник
C	0.589763	0.639752	0.370238	0.645912	0.628412	0.531151
L_1	2149.61	778.396	2294.3	3262.14	2749.55	1564.22
L_2	20.6531	15.8524	22.5573	29.7709	24.3768	15.155

Локально ($t = T$):

Таблица 8

норма	левый треугольник	прямоуг ольник	косинус	зуб	«М»	правый треугольник
C	0.318621	0.116469	0.347666	0.553709	0.418502	0.246479
L_1	3.41168	0.517342	3.12018	4.95541	4.50981	2.55588
L_2	0.843815	0.210316	0.856639	1.17204	0.971467	0.591978

Проведем численные эксперименты с разностными схемами и сравним их между собой.

В качестве первого теста рассмотрим функцию с начальным профилем

$$u(0, x) = \begin{cases} 1, & x \in [l_1, l_2] \\ 0, & x \in (-\infty, l_1) \cup (l_2, +\infty) \end{cases}$$

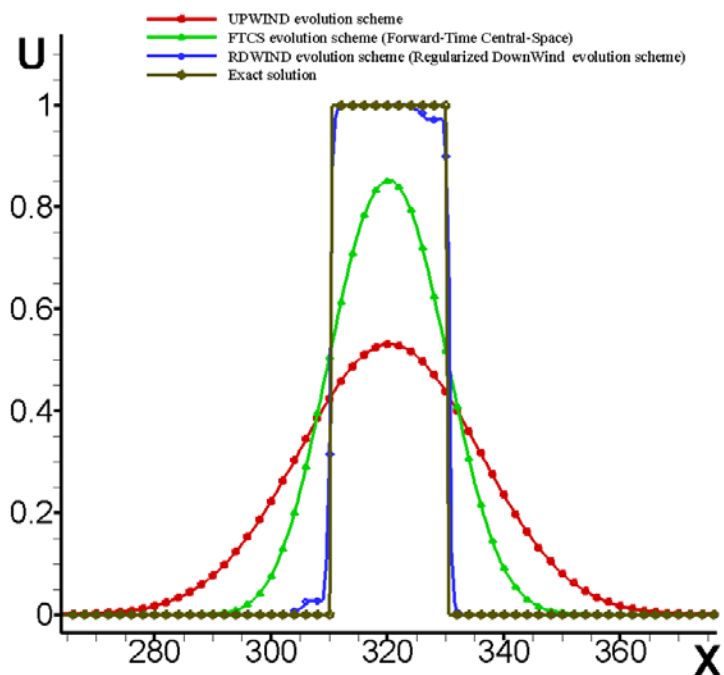
Второй тест проведем с непрерывным начальным профилем «косинус»

$$u(0, x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi(x-l_1)}{l_2-l_1} \right), & x \in [l_1, l_2] \\ 0, & x \in (-\infty, l_1) \cup (l_2, +\infty) \end{cases}$$

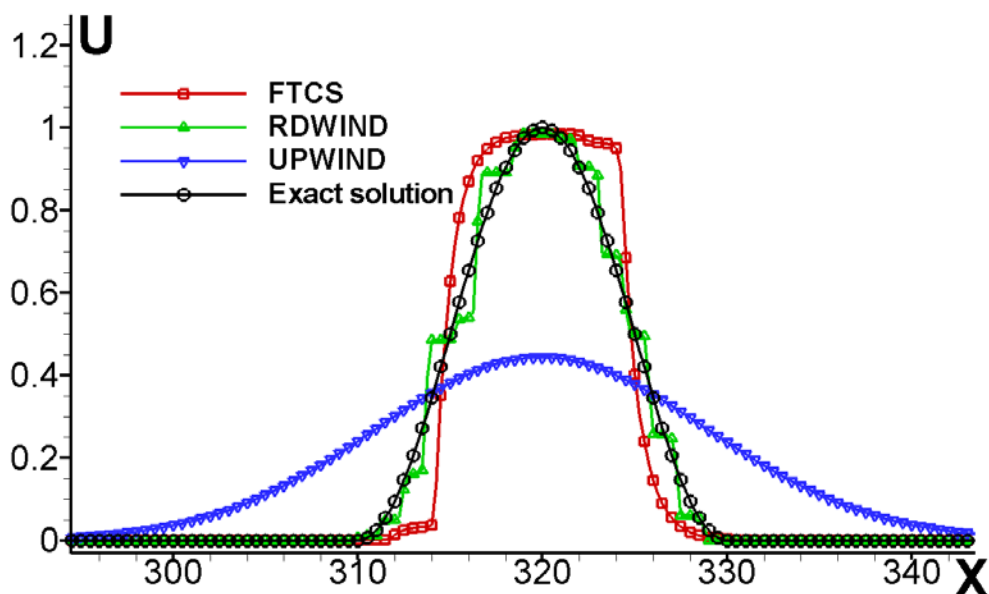
где $L = 400$, $l_1 = 10$, $l_2 = 30$, $T = 300$, $a = 1$ и число Куранта $Ku = 0.3$.

Во всех расчётах адаптивная искусственная вязкость берется равной величине

$$\mu = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \frac{h^2}{\tau} (1 + \nu) + ha \right].$$



На рисунке 1 представлены результаты численного решения переноса прямоугольника по трем предложенным разностным схемам и по точному решению.



На рисунке 2 представлены результаты численного решения переноса непрерывной функции «косинус» по трем предложенным разностным схемам и по точному решению.

1.2. Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для нелинейного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости

1.2.1 Постановка задачи

Рассмотрим нелинейное одномерное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f = f(u), \quad (x, t) \in \Omega. \quad (1)$$

Начальные и граничные условия имеют вид

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, L]; \quad (2)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Здесь функция $f(u)$ является достаточно гладкой в области значений своего аргумента; $\psi(x)$, $\varphi(t)$ – в общем случае непрерывные кусочно-гладкие функции, удовлетворяющие условию согласования $\psi(0) = \varphi(0)$; $\Omega = \{0 \leq x \leq L; 0 \leq t \leq T\}$ – область интегрирования уравнения (1).

Будем считать, что задача (1)-(3) имеет в области Ω классическое или обобщенное решение, обладающее достаточной гладкостью (в последнем случае вне точек разрыва). Более точная формулировка будет дана в п. 1.2.4.

1.2.2. Построение разностной схемы

По пространственной переменной x введём равномерную сетку $\bar{\omega}_x$ с шагом $h = \frac{L}{N_x}$ и узлами $x_k = h \cdot k$, $k = 0, \dots, N_x$, N_x – число узлов. По времени также введём равномерную сетку $\bar{\omega}_t$ с шагом $\tau = \frac{T}{N_t}$ и узлами $t_n = n\tau$, $n = 0, \dots, N_t$,

N_t – число шагов. При этом подразумевается, что шаги h и τ удовлетворяют условиям устойчивости (п. 1.2.3) и сходимости (п. 1.2.4) схемы.

Обозначим далее функции, относящиеся к моментам времени t_n и t_{n+1} , верхними индексами $u^n = u(t_n)$, $u^{n+1} = u(t_{n+1})$, и перейдем к построению разностной схемы. Для этого воспользуемся подходом Лакса-Вендроффа [28], обеспечивающего второй порядок аппроксимации схемы по времени.

Запишем следующее разложение в ряд Тейлора

$$u^{n+1} = u^n + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n \tau + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n \tau^2 + O(\tau^3).$$

Выразим производные по времени через пространственные производные, используя исходное уравнение. В результате получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Подставим пространственные производные вместо временных производных в разложение функции u^{n+1} :

$$u^{n+1} = u^n - \tau \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^n + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)^n + O(\tau^3),$$

или

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^n - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)^n = O(\tau^2). \quad (4)$$

Выделим поток в левой части выражения (4)

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x} \left[f^n - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x}\right)^n \right] = O(\tau^2)$$

и перепишем дифференциально-разностное уравнение в потоковой форме

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \frac{\partial W^n}{\partial x} = O(\tau^2).$$

Здесь

$$W^n = f^n - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x} \right)^n = f^n - \frac{\tau}{2} \left(\left[\frac{\partial f}{\partial u} \right]^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)^n = f^n - \frac{\tau}{2} \left(g(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right)^n,$$

$$g(u) = \left[\frac{\partial f}{\partial u} \right]^2.$$

Для обеспечения второго порядка аппроксимации по пространству воспользуемся центрально-разностной аппроксимацией. В итоге в потоковой форме получим следующую разностную схему

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{\tau}{h} \left[W_{k+1/2}^n - W_{k-1/2}^n \right], \quad k = 1, \dots, N_x - 1, \quad n = 0, \dots, N_t - 1; \quad (5)$$

$$W_{k\pm 1/2}^n = f(u_{k\pm 1/2}^n) - \frac{\tau}{2} g(u_{k\pm 1/2}^n) \nabla_h^\pm u_k^n, \quad u_{k\pm 1/2}^n = \frac{1}{2} (u_{k\pm 1}^n + u_k^n), \quad (6)$$

$$\nabla_h^+ u_k^n = \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{h}, \quad \nabla_h^- u_k^n = \frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{h}.$$

Схему (5), (6) замыкают следующие начальные и граничные условия:

$$u_k^0 = \psi(x_k), \quad k = 0, \dots, N_x; \quad (7)$$

$$u_0^n = \varphi(t_n), \quad n = 0, \dots, N_t; \quad u_{N_x}^n = u_{N_x-1}^n, \quad n = 0, \dots, N_t. \quad (8)$$

Заметим, что в линейном случае, когда $f(u) = au$, схема (5)-(8) переходит в разностную схему Лакса-Вендрофа

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \tau a \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} + \frac{\tau^2 a^2}{2} \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{h^2}.$$

1.2.3. Анализ устойчивости разностной схемы

Исследуем сначала исходную построенную схему (5)-(8) на устойчивость, используя принцип максимума [34, 35]. Для этого предположим непрерывность функции $f(u)$ и ее первых производных на всей числовой оси, а также их ограниченность на любом конечном интервале.

Далее введем во всех точках сетки, а также в полужелтых точках, аналог скорости переноса, положив

$$a_k^n = \frac{\partial f}{\partial u}(u_k^n), \quad a_{k\pm 1/2}^n = \frac{\partial f}{\partial u}(u_{k\pm 1/2}^n),$$

$$\text{и число Куранта } \gamma = \frac{\tau a}{h}, \text{ где } a = \max \left(\max_{0 \leq k \leq N_x, 0 \leq n \leq N_t} |a_k^n|, \max_{0 \leq k \leq N_x-1, 0 \leq n \leq N_t} |a_{k+1/2}^n| \right).$$

Уравнение (5) с учетом (6) и введенных величин, перепишем в виде

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} = & u_k^n - \frac{\gamma}{2} p_k^n (u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) + \\ & + \frac{\gamma^2}{2} \left\{ \left[p_{k+1/2}^n \right]^2 (u_{k+1}^n - u_k^n) - \left[p_{k-1/2}^n \right]^2 (u_k^n - u_{k-1}^n) \right\}, \quad k = 1, \dots, N_x - 1; \end{aligned} \quad (9)$$

$$p_k^n = \begin{cases} 0, & u_{k+1/2}^n = u_{k-1/2}^n; \\ \frac{1}{a} \frac{f(u_{k+1/2}^n) - f(u_{k-1/2}^n)}{u_{k+1/2}^n - u_{k-1/2}^n}, & u_{k+1/2}^n \neq u_{k-1/2}^n; \end{cases} \quad p_{k\pm 1/2}^n = \frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial u}(u_{k\pm 1/2}^n).$$

Соотношения (9) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} = & \frac{\gamma}{2} (\gamma p_{k-1/2}^2 + p_k) u_{k-1}^n + \left(1 - \frac{\gamma^2}{2} (p_{k+1/2}^2 + p_{k-1/2}^2) \right) u_k^n + \\ & + \frac{\gamma}{2} (\gamma p_{k+1/2}^2 - p_k) u_{k+1}^n \equiv A_k u_{k-1}^n + C_k u_k^n + B_k u_{k+1}^n, \quad k = 1, \dots, N_x - 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь и далее для удобства анализа временной индекс u параметров p_k^n и $p_{k\pm 1/2}^n$ опущен.

Из условия неотрицательности коэффициентов A_k , B_k и C_k в правой части (10) вытекают неравенства

$$\gamma > 0, \quad 1 - \frac{\gamma^2}{2} \left(p_{k+1/2}^2 + p_{k-1/2}^2 \right) \geq 0, \quad \gamma p_{k\pm 1/2}^2 \mp p_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, N_x - 1. \quad (11)$$

В силу предположения об ограниченности производной $\frac{\partial f}{\partial u}$ на любом конечном интервале следует ограниченность сверху величин p_k и $p_{k+1/2}$ по модулю единицей. Отсюда и из (11) вытекают неравенства

$$0 < \gamma \leq 1, \quad \gamma p_{k\pm 1/2}^2 \geq \pm p_k. \quad (12)$$

Первое из условий (12) совпадает с результатом линейной теории, второе условие является противоречивым и не может быть выполнено в общем случае. Поэтому в данной ситуации, при условии $0 < \gamma \leq 1$, переходим к оценке нормы решения через модули коэффициентов

$$|u_k^{n+1}| \leq (|A_k| + C_k + |B_k|) \|u^n\|_{C(\bar{\omega}_x)}, \quad k = 1, \dots, N_x - 1;$$

$$|u_k^{n+1}| \leq (1 + \gamma |p_k|) \|u^n\|_{C(\bar{\omega}_x)} \leq (1 + \gamma) \|u^n\|_{C(\bar{\omega}_x)}, \quad k = 1, \dots, N_x - 1;$$

$$\|u^{n+1}\|_{C(\bar{\omega}_x)} \leq (1 + \gamma) \|u^n\|_{C(\bar{\omega}_x)}.$$

В итоге схема (5)-(8) условно устойчива в том смысле, что норма получаемого по ней решения не может расти быстрее, чем $e^{\gamma n}$. Этот факт можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Утверждение 1. При условии ограниченности производной $\frac{\partial f}{\partial u}$ на любом конечном интервале изменения u и выполнении условия $0 < \gamma \leq 1$ решение разностной схемы (5)-(8) для любого $n \geq 0$ удовлетворяет априорной оценке

$$\|u^{n+1}\|_{C(\bar{\omega}_x)} \leq (1 + \gamma) \|u^n\|_{C(\bar{\omega}_x)}. \quad (13)$$

Данный факт побуждает нас изменить схему (5)-(8). Для этого добавим в уравнения (5) оператор, содержащий искусственную вязкость:

$$M_h[\mu_k^n, u_k^n] = \frac{1}{h} \left[\mu_{k+1/2}^n \nabla_h^+ u_k^n - \mu_{k-1/2}^n \nabla_h^- u_k^n \right]. \quad (14)$$

Тогда уравнения (5) примут вид

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{\tau}{h} \left[W_{k+1/2}^n - W_{k-1/2}^n \right] + \frac{\tau}{2} M_h[\mu_k^n, u_k^n]. \quad (5')$$

При этом следует отметить, что оператор искусственной вязкости вводится в конкретной точке k ($k = 1, \dots, N_x - 1$) лишь тогда, когда $u_{k+1/2}^n \neq u_{k-1/2}^n$. В этом смысле, введенная искусственная вязкость является адаптивной.

Исследуем теперь измененную схему на устойчивость. По аналогии с предыдущим из уравнений (5') с учетом (14) получим выражения вида (10):

$$u_k^{n+1} = A_k u_{k-1}^n + C_k u_k^n + B_k u_{k+1}^n, \quad (10')$$

где

$$A_k = \frac{\gamma}{2} \left(\gamma p_{k-1/2}^2 + p_k + q_{k-1/2} \right), \quad B_k = \frac{\gamma}{2} \left(\gamma p_{k+1/2}^2 - p_k + q_{k+1/2} \right),$$

$$C_k = \left(1 - \frac{\gamma^2}{2} \left(p_{k+1/2}^2 + p_{k-1/2}^2 \right) - \frac{\gamma}{2} \left(q_{k-1/2} + q_{k+1/2} \right) \right), \quad q_{k\pm 1/2} \equiv \frac{\mu_{k\pm 1/2}^n}{ah}.$$

Рассмотрим случай, когда $q_{k\pm 1/2}^n = const = q \equiv \frac{\mu}{ah} > 0$. Тогда требование неотрицательности A_k , B_k и C_k приводит нас к неравенствам

$$\gamma p^2 \pm p + q \geq 0, \quad 1 - \gamma^2 p^2 - \gamma q \geq 0,$$

в которых использована близость величин p_k и $p_{k\pm 1/2}$ и введен общий параметр p . Если предположить, что $0 < \gamma \leq 1$ (как и в линейной теории), и учесть, что параметр p по модулю не превосходит единицу, то несложно показать, что на число Куранта и параметр q (пропорциональный величине искусственной вязкости) необходимо наложить следующие достаточные условия (12'):

$$0 < \gamma \leq \gamma_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{4\gamma} \leq q \leq \frac{1 - \gamma^2}{\gamma}. \quad (12')$$

В итоге в силу того, что $A_k + C_k + B_k = 1$, несложно доказать следующее утверждение.

Утверждение 2. При условии ограниченности производной $\frac{\partial f}{\partial u}$ на любом конечном интервале изменения u и выполнении условия (12') решение разностной схемы (5'), (6)-(8), (14) с постоянной искусственной вязкостью для любого $n \geq 0$ удовлетворяет априорной оценке

$$\|u^{n+1}\|_{C(\bar{\omega}_x)} \leq \|u^n\|_{C(\bar{\omega}_x)}. \quad (13)$$

С помощью утверждения 2 нетрудно доказать устойчивость схемы (5'), (6)-(8), (14) по входным данным.

Утверждение 3. При условии ограниченности производной $\frac{\partial f}{\partial u}$ на любом конечном интервале изменения u и выполнении условий (12') разностная схема (5'), (6)-(8), (14) с постоянной адаптивной искусственной вязкостью будет устойчивой по начальным и граничным данным.

Отметим далее, что если нормировать начальные и граничные данные на максимальную величину $M = \max\left(\|\varphi\|_{C(\bar{\omega}_t)}, \|\psi\|_{C(\bar{\omega}_x)}\right)$, то по аналогии с дифференциальным случаем для разностного решения будет справедлива оценка $\|u\|_{C(\bar{\omega}_x \times \bar{\omega}_t)} \leq 1$.

В дальнейшем понадобится оценка для градиента решения схемы с адаптивной искусственной вязкостью. Получим ее при условии однородного граничного условия $\varphi(t) = \varphi_0 = \text{const} \geq 0$.

Из (5') с учетом равенств $u_0^{n+1} = u_0^n = \varphi_0$ при $n = 0, \dots, N_t - 1$ получаем

$$\begin{aligned} \nabla_h^- u_k^{n+1} &= \nabla_h^- u_k^n - \frac{\tau}{h^2} \left[f_{k+1/2}^n - f_{k-1/2}^n \right] + \\ &+ \frac{\tau^2}{2h^2} \left[g_{k+1/2}^n \nabla_h^+ u_k^n - g_{k-1/2}^n \nabla_h^- u_k^n \right] + \frac{\tau}{2h^2} \left[\mu_{k+1/2}^n \nabla_h^+ u_k^n - \mu_{k-1/2}^n \nabla_h^- u_k^n \right], \quad k = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_h^- u_k^{n+1} &= \nabla_h^- u_k^n - \frac{\tau}{h^2} \left[f_{k+1/2}^n - 2f_{k-1/2}^n + f_{k-3/2}^n \right] + \\ &+ \frac{\tau^2}{2h^2} \left[g_{k+1/2}^n \nabla_h^+ u_k^n - 2g_{k-1/2}^n \nabla_h^- u_k^n + g_{k-3/2}^n \nabla_h^- u_{k-1}^n \right] + \\ &+ \frac{\tau}{2h^2} \left[\mu_{k+1/2}^n \nabla_h^+ u_k^n - 2\mu_{k-1/2}^n \nabla_h^- u_k^n + \mu_{k-3/2}^n \nabla_h^- u_{k-1}^n \right], \quad k = 2, \dots, N_x - 1. \end{aligned}$$

В полученных соотношениях учтем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left[f_{k+1/2}^n - f_{k-1/2}^n \right] &= \frac{\partial f}{\partial u}(\xi_k^*) \frac{1}{2} \left[\nabla_h^+ u_k^n + \nabla_h^- u_k^n \right], \\ \frac{1}{h} \left[f_{k+1/2}^n - 2f_{k-1/2}^n + f_{k-3/2}^n \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial u}(\xi_k^*) \left[\nabla_h^+ u_k^n + \nabla_h^- u_k^n \right] - \frac{\partial f}{\partial u}(\xi_{k-1}^*) \left[\nabla_h^+ u_{k-1}^n + \nabla_h^- u_{k-1}^n \right] \right], \end{aligned}$$

с некоторыми величинами $\xi_k^* = \alpha_k^* u_{k+1/2}^n + (1 - \alpha_k^*) u_{k-1/2}^n$.

Теперь несложно получить следующие выражения для производных

$$\nabla_h^- u_k^{n+1} = \left(1 - \frac{\gamma}{2} \left[p_k + \gamma p_{k-1/2}^2 + q_{k-1/2} \right]\right) \nabla_h^- u_k^n + \\ + \frac{\gamma}{2} \left(-p_k + \gamma p_{k+1/2}^2 + q_{k+1/2}\right) \nabla_h^+ u_k^n, \quad k=1;$$

$$\nabla_h^- u_k^{n+1} = \left(1 - \frac{\gamma}{2} \left[p_k - p_{k-1} + 2\gamma p_{k-1/2}^2 + 2q_{k-1/2} \right]\right) \nabla_h^- u_k^n + \\ + \frac{\gamma}{2} \left(-p_k + \gamma p_{k+1/2}^2 + q_{k+1/2}\right) \nabla_h^+ u_k^n + \frac{\gamma}{2} \left(p_{k-1} + \gamma p_{k-3/2}^2 + q_{k-3/2}\right) \nabla_h^- u_{k-1}^n, \\ k=2, \dots, N_x - 1.$$

Здесь введены обозначения $p_k = \frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial u}(\xi_k^*)$, $p_{k-1/2}^2 = \frac{g_{k-1/2}^n}{a^2}$, $q_{k-1/2} = \frac{\mu_{k-1/2}^n}{ah}$.

Отсюда и из принципа максимума следует оценка

$$\left| \nabla_h^- u_k^{n+1} \right| \leq S_k^n \left\| \nabla_h^- u_k^n \right\|_{C(\bar{\omega}_x)}, \quad k=1, \dots, N_x - 1, \quad n=0, \dots, N_t - 1;$$

$$S_k^n = 1 - \gamma p_k + \frac{\gamma^2}{2} \left(p_{k+1/2}^2 - p_{k-1/2}^2 \right) + \frac{\gamma}{2} \left(q_{k+1/2} - q_{k-1/2} \right), \quad k=1;$$

$$S_k^n = 1 - \gamma (p_k - p_{k-1}) + \frac{\gamma^2}{2} \left[p_{k+1/2}^2 - 2p_{k-1/2}^2 + p_{k-3/2}^2 \right] + \\ + \frac{\gamma}{2} \left[q_{k+1/2} - 2q_{k-1/2} + q_{k-3/2} \right], \quad k=2, \dots, N_x - 1.$$

Для этого должны выполняться условия

$$1 - \frac{\gamma}{2} \left[p_k + \gamma p_{k-1/2}^2 + q_{k-1/2} \right] > 0, \quad -p_k + \gamma p_{k+1/2}^2 + q_{k+1/2} \geq 0, \quad k=1; \\ 1 - \frac{\gamma}{2} \left[p_k - p_{k-1} + 2\gamma p_{k-1/2}^2 + 2q_{k-1/2} \right] > 0, \\ -p_k + \gamma p_{k+1/2}^2 + q_{k+1/2} \geq 0, \quad p_{k-1} + \gamma p_{k-3/2}^2 + q_{k-3/2} \geq 0, \quad k=2, \dots, N_x - 1; \\ \gamma > 0, \quad q_{k-1/2} \geq 0, \quad k=1, \dots, N_x, \tag{15}$$

которые можно опять свести к достаточным условиям

$$1 - \gamma(p + \gamma p^2 + q) > 0, \quad \pm p + \gamma p^2 + q \geq 0, \quad \gamma > 0, \quad q \geq 0. \quad (15')$$

Условия (15') будут выполнены, если

$$0 < \gamma \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4\gamma} \leq q \leq \frac{1 - \gamma - \gamma^2}{\gamma}. \quad (12'')$$

Очевидно, что данные условия более жесткие, чем (12').

Получим теперь оценки для величин S_k^n :

$$S_k^n \leq 1 + \gamma |p_k| + \gamma^2 \frac{1}{2} (p_{k+1/2}^2 + p_{k-1/2}^2) + \frac{\gamma}{2} (q_{k+1/2} - q_{k-1/2}), \quad k = 1;$$

$$S_k^n \leq 1 + \gamma (|p_k| + |p_{k-1}|) + \frac{\gamma^2}{2} [p_{k+1/2}^2 + 2p_{k-1/2}^2 + p_{k-3/2}^2] +$$

$$+ \frac{\gamma}{2} [q_{k+1/2} - 2q_{k-1/2} + q_{k-3/2}], \quad k = 2, \dots, N_x - 1.$$

Отсюда, с учетом ограниченности производной $\frac{\partial f}{\partial u}$ на любом конечном

интервале изменения u , получим, что величины S_k^n ограничены сверху

$$S_k^n \leq S_0 = 1 + 2\gamma + 2\gamma^2 + \frac{\gamma}{ah} h^2 \mu_{x\bar{x},k}, \quad k = 1, \dots, N_x - 1, \quad n = 0, \dots, N_t - 1. \quad (16)$$

Здесь $\mu_{x\bar{x},k}$ – оператор второй разностной производной от искусственной вязкости. Заметим, что если выбирать вязкость так, чтобы этот оператор был равен нулю, то оценка градиента не будет зависеть от величины искусственной вязкости.

В итоге, при условиях (12''), оказывается ограниченным не только разностное решение, полученное по схеме (5'), (6)-(8), (14), но и его градиент

$$\left\| \nabla_h^- u_k^{n+1} \right\|_{C(\bar{\omega}_x)} \leq S_0^{n+1} \left\| \nabla_h^- u_k^n \right\|_{C(\bar{\omega}_x)}, \quad n = 0, \dots, N_t - 1. \quad (17)$$

Заметим, что оценки (16), (17) можно улучшить, убрав экспоненциальный рост, однако это потребует более высокой гладкости начальных данных и функции $f(u)$.

1.2.4. Исследование аппроксимации и сходимости схемы

Определим сначала погрешность аппроксимации модифицированной схемы (5'), (6)-(8), (14) на точном решении v_k^n задачи (1)-(3), взятом в узлах сетки (x_k, t_n) . По определению данная величина в точке (x_k, t_n) равна

$$\psi(x_k, t_n) \equiv \psi_k^n = \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\tau} + \frac{1}{h} \left[W_{k+1/2}^n[v] - W_{k-1/2}^n[v] \right] - \frac{1}{2} M_h[\mu_k, v_k^n], \quad (18)$$

$$\text{где } W_{k\pm 1/2}^n[v] = f\left(v_{k\pm 1/2}^n\right) - \frac{\tau}{2} g\left(v_{k\pm 1/2}^n\right) \nabla_h^\pm v_k^n.$$

Разложим значения точного решения v_k^{n+1} , v_{k+1}^n , v_{k-1}^n в ряды Тейлора в точке (x_k, t_n) до четвертого порядка по времени и пространству

$$v_k^{n+1} = v_k^n + \tau \frac{\partial v}{\partial t}(x_k, t_n) + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x_k, t_n) + \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3}(x_k, t_n) + O(\tau^4),$$

$$v_{k\pm 1}^n = v_k^n \pm h \frac{\partial v}{\partial x}(x_k, t_n) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_k, t_n) \pm \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x_k, t_n) + O(h^4)$$

и выпишем некоторые их комбинации

$$\frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\tau} = \frac{\partial v}{\partial t}(x_k, t_n) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x_k, t_n) + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3}(x_k, t_n) + O(\tau^3);$$

$$\frac{1}{2}(v_{k\pm 1}^n - v_k^n) = \pm \frac{h}{2} \frac{\partial v}{\partial x}(x_k, t_n) + \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_k, t_n) \pm \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x_k, t_n) + O(h^4),$$

$$\nabla_h^- v_k^n = \frac{\partial v}{\partial x}(x_k, t_n) - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_k, t_n) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x_k, t_n) - \frac{h^3}{24} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(x_k, t_n) + O(h^4),$$

$$\nabla_h^+ v_k^n = \frac{\partial v}{\partial x}(x_k, t_n) + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_k, t_n) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x_k, t_n) + \frac{h^3}{24} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(x_k, t_n) + O(h^4),$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left[\mu_{k+1/2} \nabla_h^+ v_k^n - \mu_{k-1/2} \nabla_h^- v_k^n \right] &= \frac{\mu_{k+1/2}^+ + \mu_{k-1/2}^-}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_k, t_n) + \frac{h^2}{24} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(x_k, t_n) \right) + \\ &+ \frac{\mu_{k+1/2}^- - \mu_{k-1/2}^+}{h} \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_k, t_n) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x_k, t_n) \right) + O(h^3). \end{aligned}$$

Далее, на примере $f(v)$, разложим в ряды выражения $f\left(v_{k\pm 1/2}^n\right)$ и $g\left(v_{k\pm 1/2}^n\right)$

$$\begin{aligned} f\left(v_{k\pm 1/2}^n\right) &= f\left(\frac{1}{2}v_{k\pm 1}^n + \frac{1}{2}v_k^n\right) = f\left(v_k^n + \frac{1}{2}(v_{k\pm 1}^n - v_k^n)\right) = f(v_k^n) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial v}(v_k^n) \frac{v_{k\pm 1}^n - v_k^n}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(v_k^n) \frac{1}{2} \left[\frac{v_{k\pm 1}^n - v_k^n}{2} \right]^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial v^3}(v_k^n) \frac{1}{6} \left[\frac{v_{k\pm 1}^n - v_k^n}{2} \right]^3 + \dots = \\ &= f(v_k^n) + \frac{\partial f}{\partial v}(v_k^n) \left[\pm \frac{h}{2} \frac{\partial v}{\partial x}(x_k, t_n) + \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_k, t_n) \pm \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x_k, t_n) \right] + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(v_k^n) \frac{1}{2} \left[\pm \frac{h}{2} \frac{\partial v}{\partial x}(x_k, t_n) + \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_k, t_n) \right]^2 + \\ &+ \frac{\partial^3 f}{\partial v^3}(v_k^n) \frac{1}{6} \left[\pm \frac{h}{2} \frac{\partial v}{\partial x}(x_k, t_n) \right]^3 + O(h^4). \end{aligned}$$

(19)

Учитывая приведенные разложения, и опуская зависимости функции v и ее производных от (x_k, t_n) и функций f , g и их производных от v_k^n , можно переписать погрешность аппроксимации в точке (x_k, t_n) в следующем виде

$$\begin{aligned} \psi_k^n &= \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\tau}{2} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - g \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial g}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial v} \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{h^2}{4} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial v^3} \frac{h^2}{24} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^3 - \frac{\mu_{k+1/2}^+ + \mu_{k-1/2}^-}{4} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{h^2}{24} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) - \\ &- \frac{\mu_{k+1/2}^- - \mu_{k-1/2}^+}{2h} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) + O(\tau^3 + h^3 + \tau h^2). \end{aligned}$$

В полученном выражении учтем, что v – точное решение задачи, и выполняется следующее равенство

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial g}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + g \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Тогда выражение в обеих квадратных скобках равны нулю, а выражение для погрешности аппроксимации принимает следующий окончательный вид

$$\begin{aligned} \psi_k^n = & \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{12} \frac{\partial^3 f}{\partial v^3} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^3 \right) - \\ & - \frac{\mu_{k+1/2}^+ + \mu_{k-1/2}^-}{4} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{h^2}{24} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) - \frac{\mu_{k+1/2}^- - \mu_{k-1/2}^+}{2h} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) + \\ & + O(\tau^3 + h^3 + \tau h^2). \end{aligned} \quad (20)$$

Проанализируем выражение (20). Очевидно, что при отсутствии искусственной вязкости погрешность аппроксимации схемы (5)-(8) имеет второй порядок по h и τ .

При наличии искусственной вязкости погрешность аппроксимации определяется величинами $\mu_{k\pm 1/2}$. В частности, если положить $\mu_{k\pm 1/2} \equiv \alpha ah^p$, $p \geq 1$, получается схема, аппроксимирующая уравнение (1) с порядком $O(\tau^2 + h^q)$, где $q = \min(p, 2)$. При этом положительная константа α выбирается из второго условия (12")

$$\frac{1}{4\gamma} \leq \alpha h^{p-1} \leq \frac{1-\gamma-\gamma^2}{\gamma}. \quad (12^*)$$

Анализ условия (12*) показывает, что в случае $p=1$ погрешность аппроксимации схемы будет иметь первый порядок, а параметр α будет определяться лишь числом Куранта γ . Если же $p=2$, то погрешность аппроксимации схемы будет иметь второй порядок, а параметр α будет существенно зависеть от h и γ .

Рассмотрим теперь сходимость схемы (5'), (6)-(8), (14) в одном специальном частном случае. Предположим, что граничная функция является неотрицательной и постоянной, а начальная функция обращается в ноль на правом конце отрезка $[0, L]$:

$$\varphi(t) \equiv \varphi_0 \geq 0, \quad t > 0; \quad \psi(L) = 0. \quad (21)$$

Тогда, следуя обзору [76], можно утверждать, что любое решение (классическое или обобщенное) рассматриваемой задачи будет локализовано на отрезке $[0, L]$ для любого момента времени. Асимптотика обобщенного решения описывается так называемой N-волной, а норма обобщенного решения удовлетворяет оценке

$$\|u(x, t) - M_u\|_C \leq C_u t^{-1/(n-1)}, \quad x \in [0, L], \quad t > 0. \quad (22)$$

Здесь подразумевается, что функция $u(x, t)$ имеет конечное число точек разрыва, которое определяется числом точек перегиба функции $f(u)$ и числом точек разрыва начального профиля $\psi(x)$. При этом функция $f(u)$ должна принадлежать классу $C^n[-M_u - \delta, +M_u + \delta]$, где $n \geq 2$, $\delta > 0$ малое число. Константа $M_u > 0$ совпадает по модулю со значением функции $u(x, t)$ вблизи одной из точек разрыва, где модуль $u(x, t)$ максимален. Константа $C_u > 0$ зависит от свойств нелинейности $f(u)$ и начального профиля $\psi(x)$.

Пространственная производная обобщенного решения $\frac{\partial u}{\partial x}$ вне точек разрыва удовлетворяет следующей задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= 0, \quad (x, t) \in \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) &= \frac{d\psi}{dx}(x), \quad x \in [0, L]; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Для пространственной производной обобщенного решения $\frac{\partial u}{\partial x}$ справедлива оценка, аналогичная (22)

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - M_{\nabla u} \right\|_C \leq C_{\nabla u} t^{-1/(m-1)}, \quad x \neq x_*, \quad t \neq t_*. \quad (24)$$

Здесь x_* – точка разрыва или точка градиентной катастрофы [34], t_* – момент градиентной катастрофы.

В итоге можно сказать (см. [76]), что для достаточно гладкой $f(u)$, имеющей только изолированные нули, и кусочно-непрерывной и кусочно-гладкой $\psi(x)$ искомая функция $u(x, t)$ ограничена во всех точках, включая точки разрыва, и во все моменты времени, в том числе в моменты градиентной катастрофы. Производная $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ в любой фиксированный момент времени, не совпадающий с моментом градиентной катастрофы, существует и ограничена во всех точках области за исключением точек разрыва.

Перейдем теперь к анализу вопроса сходимости предложенной схемы (5'), (6)-(8), (14) в случае отсутствия точек разрыва у начального профиля $\psi(x)$. В этой ситуации главной проблемой остается только градиентная катастрофа, которая возникает в точках перегиба $f(u)$. Будем считать, что величина временного отрезка $[0, T]$ выбрана так, что решение не доходит до момента градиентной катастрофы ни в одной точке отрезка $[0, L]$. При этих

предположениях существует классическое решение исходной задачи $u(x, t)$, которое ограничено вместе со своей частной производной $\frac{\partial u}{\partial x}$.

При рассмотрении сходимости схемы (5'), (6)-(8), (14) введем погрешность $z(x_k, t_n) = z_k^n = u_k^n - v_k^n$ численного решения в каждой точке сетки (x_k, t_n) и выпишем задачу для погрешности. Для этого соотношения (18) домножим на -1 и заменим величины v_k^n на величины $u_k^n - z_k^n$. Тогда получим

$$\frac{z_k^{n+1} - z_k^n}{\tau} - \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} - \frac{1}{h} \left[W_{k+1/2}^n [u - z] - W_{k-1/2}^n [u - z] \right] + \frac{1}{2} M_h [\mu_k, u_k^n - z_k^n] = -\psi_k^n.$$

Если к последнему равенству прибавить разностное уравнение

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + \frac{1}{h} \left[W_{k+1/2}^n [u] - W_{k-1/2}^n [u] \right] - \frac{1}{2} M_h [\mu_k, u_k^n] = 0,$$

эквивалентное уравнению (5'), то в результате несложных преобразований получим итоговое уравнение для погрешности

$$\begin{aligned} & \frac{z_k^{n+1} - z_k^n}{\tau} + \frac{1}{h} \left[W_{k+1/2}^n [u] - W_{k+1/2}^n [u - z] - \left(W_{k-1/2}^n [u] - W_{k-1/2}^n [u - z] \right) \right] + \\ & - \frac{1}{2} M_h [\mu_k, z_k^n] = -\psi_k^n, \quad k = 1, \dots, N_x - 1, \quad n = 0, \dots, N_x - 1; \end{aligned} \quad (25)$$

$$W_{k\pm 1/2}^n [u] = f \left(u_{k\pm 1/2}^n \right) - \frac{\tau}{2} g \left(u_{k\pm 1/2}^n \right) \nabla_h^\pm u_k^n,$$

$$W_{k\pm 1/2}^n [u - z] = f \left(u_{k\pm 1/2}^n - z_{k\pm 1/2}^n \right) - \frac{\tau}{2} g \left(u_{k\pm 1/2}^n - z_{k\pm 1/2}^n \right) \nabla_h^\pm (u_k^n - z_k^n), \quad (26)$$

$$M_h [\mu_k, z_k^n] = \frac{1}{h} \left[\mu_{k+1/2} \nabla_h^+ z_k^n - \mu_{k-1/2} \nabla_h^- z_k^n \right].$$

Начальные и граничные условия дифференциальной задачи в разностном варианте задаются точно. Поэтому их аналоги для погрешности принимают вид

$$z_k^0 = 0, \quad k = 0, \dots, N_x; \quad (7')$$

$$z_0^n = 0, \quad n = 0, \dots, N_t; \quad z_{N_x}^n = z_{N_x-1}^n, \quad n = 0, \dots, N_t. \quad (8')$$

Получим теперь оценку для погрешности. Для этого перепишем (25) в виде

$$\begin{aligned} z_k^{n+1} = z_k^n - \frac{\tau}{h} & \left[W_{k+1/2}^n[u] - W_{k+1/2}^n[u-z] - \left(W_{k-1/2}^n[u] - W_{k-1/2}^n[u-z] \right) \right] + \\ & + \frac{\tau}{2} M_h[\mu_k, z_k^n] - \tau \psi_k^n, \quad k = 1, \dots, N_x - 1. \end{aligned} \quad (25')$$

Учитывая непрерывность и ограниченность первых и вторых производных функций $f(u)$ и $g(u)$ на конечном интервале, а также ограниченность разностного (в силу выполнения условий устойчивости) и дифференциального (в силу сделанных предположений) решений, для $W_{k\pm 1/2}^n[u] - W_{k\pm 1/2}^n[u-z]$

можем записать

$$\begin{aligned} W_{k\pm 1/2}^n[u] - W_{k\pm 1/2}^n[u-z] &= \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(w_{k\pm 1/2}^n) z_{k\pm 1/2}^n - \frac{\tau}{2} \left[\frac{\partial g}{\partial u}(\bar{w}_{k\pm 1/2}^n) z_{k\pm 1/2}^n \nabla_h^\pm u_k^n + g(v_{k\pm 1/2}^n) \nabla_h^\pm z_k^n \right] = \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial u}(w_{k\pm 1/2}^n) - \frac{\tau}{2} \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{w}_{k\pm 1/2}^n) \nabla_h^\pm u_k^n \right] z_{k\pm 1/2}^n - \frac{\tau}{2} g(v_{k\pm 1/2}^n) \nabla_h^\pm z_k^n, \end{aligned}$$

$$\text{где } w_{k\pm 1/2}^n = \left(1 - \theta_{k\pm 1/2}^n\right) u_{k\pm 1/2}^n + \theta_{k\pm 1/2}^n v_{k\pm 1/2}^n, \quad \bar{w}_{k\pm 1/2}^n = \left(1 - \bar{\theta}_{k\pm 1/2}^n\right) u_{k\pm 1/2}^n + \bar{\theta}_{k\pm 1/2}^n v_{k\pm 1/2}^n,$$

$\theta_{k\pm 1/2}^n, \bar{\theta}_{k\pm 1/2}^n$ – числовые параметры из интервала $(0,1)$. Тогда

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h} \left[W_{k+1/2}^n [u] - W_{k+1/2}^n [u-z] - \left(W_{k-1/2}^n [u] - W_{k-1/2}^n [u-z] \right) \right] = \\
& = \frac{1}{h} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial u} \left(w_{k+1/2}^n \right) - \frac{\tau}{2} \frac{\partial g}{\partial u} \left(\bar{w}_{k+1/2}^n \right) \nabla_h^+ u_k^n \right] z_{k+1/2}^n - \right. \\
& \left. - \left[\frac{\partial f}{\partial u} \left(w_{k-1/2}^n \right) - \frac{\tau}{2} \frac{\partial g}{\partial u} \left(\bar{w}_{k-1/2}^n \right) \nabla_h^- u_k^n \right] z_{k-1/2}^n \right\} - \\
& - \frac{\tau}{2h} \left[g \left(v_{k+1/2}^n \right) \nabla_h^+ z_k^n - g \left(v_{k-1/2}^n \right) \nabla_h^- z_k^n \right].
\end{aligned} \tag{26}$$

Далее из (25') и (26) можем записать

$$\begin{aligned}
z_k^{n+1} &= z_k^n - \frac{\tau}{h} \left[F_{k+1/2}^n - F_{k-1/2}^n \right] z_k^n - \frac{\tau h}{2} \left[F_{k+1/2}^n \nabla_h^+ z_k^n + F_{k-1/2}^n \nabla_h^- z_k^n \right] + \\
& + \frac{\tau}{h} \left[G_{k+1/2}^n \nabla_h^+ z_k^n - G_{k-1/2}^n \nabla_h^- z_{k-1}^n \right] - \tau \psi_k^n,
\end{aligned} \tag{27}$$

$$F_{k\pm 1/2}^n = \frac{\partial f}{\partial u} \left(w_{k\pm 1/2}^n \right) - \frac{\tau}{2} \frac{\partial g}{\partial u} \left(\bar{w}_{k\pm 1/2}^n \right) \nabla_h^\pm u_k^n,$$

$$G_{k\pm 1/2}^n = \frac{\tau}{2} g \left(v_{k\pm 1/2}^n \right) + \mu_{k\pm 1/2}.$$

В соотношениях (27) можем выделить в явном виде число Куранта

$$\begin{aligned}
z_k^{n+1} &= z_k^n - \gamma h \nabla_h \bar{F}_k^n z_k^n - \gamma \frac{h^2}{2} \left[\bar{F}_{k+1/2}^n \nabla_h^+ z_k^n + \bar{F}_{k-1/2}^n \nabla_h^- z_k^n \right] + \\
& + \gamma h \left[G_{k+1/2}^n \nabla_h^+ z_k^n - G_{k-1/2}^n \nabla_h^- z_{k-1}^n \right] - \tau \psi_k^n,
\end{aligned} \tag{27'}$$

$$\bar{F}_{k\pm 1/2}^n = \frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial u} \left(w_{k\pm 1/2}^n \right) - \gamma \frac{h}{2a^2} \frac{\partial g}{\partial u} \left(\bar{w}_{k\pm 1/2}^n \right) \nabla_h^\pm u_k^n,$$

$$\nabla_h \bar{F}_k^n = \frac{1}{h} \left[\bar{F}_{k+1/2}^n - \bar{F}_{k-1/2}^n \right], \quad \bar{G}_{k\pm 1/2}^n = \gamma \frac{1}{2a^2} g \left(v_{k\pm 1/2}^n \right) + \frac{\mu_{k\pm 1/2}}{2ah}.$$

Приведем далее (27') к трехточечному виду в правой части

$$z_k^{n+1} = \left(1 - \gamma h \left(1 - \frac{h}{2}\right) \nabla_h \bar{F}_k^n - \gamma \left(\bar{G}_{k+1/2}^n + \bar{G}_{k-1/2}^n\right)\right) z_k^n + \\ + \gamma \left(\frac{h}{2} \bar{F}_{k-1/2}^n + \bar{G}_{k-1/2}^n\right) z_{k-1}^n + \gamma \left(-\frac{h}{2} \bar{F}_{k+1/2}^n + \bar{G}_{k+1/2}^n\right) z_{k+1}^n - \tau \psi_k^n.$$

(27''')

Пользуясь опять оценками принципа максимума из (27'''), получим неравенство для норм

$$\|z^{n+1}\|_{C(\bar{\omega}_x)} \leq (1 + \gamma C_0) \|z^n\|_{C(\bar{\omega}_x)} + \tau \|\psi^n\|_{C(\bar{\omega}_x)}, \\ C_0 = h \|\nabla_h \bar{F}^n\|_{C(\bar{\omega}_x)} + 2h \|\bar{F}^n\|_{C(\bar{\omega}_x)} + 2 \|\bar{G}^n\|_{C(\bar{\omega}_x)}.$$

(28)

При этом должны выполняться условия (12'), а также дополнительные условия

$$1 - \gamma h \left(1 - \frac{h}{2}\right) \nabla_h \bar{F}_k^n - \gamma \left(\bar{G}_{k+1/2}^n + \bar{G}_{k-1/2}^n\right) > 0, \quad k = 1, \dots, N_x - 1. \quad (29)$$

Условия (29) будут выполнены, если будут равномерно ограничены величины $\bar{F}_{k\pm 1/2}^n$ и $\bar{G}_{k\pm 1/2}^n$. Очевидно, что последнее обеспечивается, если будут

ограничены производные $\frac{\partial f}{\partial u}$ и $\frac{\partial g}{\partial u}$ на любом конечном интервале изменения

u , искусственная вязкость будет взята в виде $\mu = \alpha ah^p$, а шаги по пространству и времени будут удовлетворять неравенствам

$$0 < h \leq h_0 < 0.5, \quad 0 < \gamma \leq \gamma_0 < C_0^{-1}.$$

(30)

Из оценки (28) при условиях (12''), (12*), (30) следует равномерная сходимость предложенной схемы. Сформулируем этот результат в виде следующего утверждения.

Утверждение 4. При условии ограниченности производных $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial g}{\partial u}$ на любом конечном интервале изменения u и выполнении условий (12''), (12*), (30) разностная схема (5'), (6)-(8), (14) с постоянной искусственной вязкостью $\mu = \alpha ah^p$, $p \geq 1$, будет сходиться в сеточной норме $C(\bar{\omega}_x) \times C(\bar{\omega}_t)$ к точному решению задачи (1)-(3) с порядком $O(\tau^2 + h^q)$, где $q = \min(p, 2)$.

В заключение данного пункта заметим, что если вязкость будет адаптивной (то есть будет вводиться локально в точках потенциальной неустойчивости разностного решения), то и в этом случае результат Утверждения 4 сохранится.

1.2.5. Некоторые численные результаты

Для иллюстрации свойств сходимости построенной разностной схемы ниже приводится таблица 9 сравнения численного решения с точным на примере автомодельной функции $u(x, t) = \frac{x}{t}$, $L = 1$, $\gamma = 0.5$, $\tau = \frac{\gamma h}{a}$. Как видно из результатов, представленных в таблице 9, порядок аппроксимации построенной разностной схемы равен 2. Однако при недостаточном сеточном разрешении на решениях простого вида (ступенька и т.д.) порядок точности может быть и выше ввиду монотонности разностного решения вблизи точек разрыва или градиентной катастрофы. Такая ситуация типична для разностных схем с искусственной вязкостью, аппроксимирующих уравнения нелинейного переноса.

Таблица 9 Сходимость по сетке

Номер р сетки k	Число узлов сетки N_x	Ошибка $\Delta_k \equiv \ z_h\ _C$	Оценка аппроксимации $p_k = \log_2 \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}$	порядка схемы
1	101	$2.2587 \cdot 10^{-5}$	-	

2	201	$4.64986 \cdot 10^{-9}$	5.6
3	401	$3.31885 \cdot 10^{-9}$	3.8
4	801	$8.27448 \cdot 10^{-9}$	2.0
5	1601	$1.5115 \cdot 10^{-9}$	2.5
6	3201	$3.77609 \cdot 10^{-9}$	2.0
7	6401	$8.72779 \cdot 10^{-9}$	2.1
8	12801	$2.09799 \cdot 10^{-9}$	2.0

Для исследования свойств схемы в случае расчета решения вблизи точек градиентной катастрофы был выбран начальный импульс вида $u(0, x) = \sin(\pi x)$, заданный на отрезке $[0, 1]$. Вне этой области значение функции было равно нулю. Расчеты проводились на отрезке $[0, 2]$ с числом Куранта равным 0.5. Полученное численное решение представлено на Рис. 3 и 4. Расчеты приведены с шагом 50 по времени. Из расчетов видно, что с наступлением градиентной катастрофы без использования искусственной вязкости решение осциллирует. При использовании искусственной вязкости численное решение "перешагивает" момент градиентной катастрофы и переходит на новую ветвь.

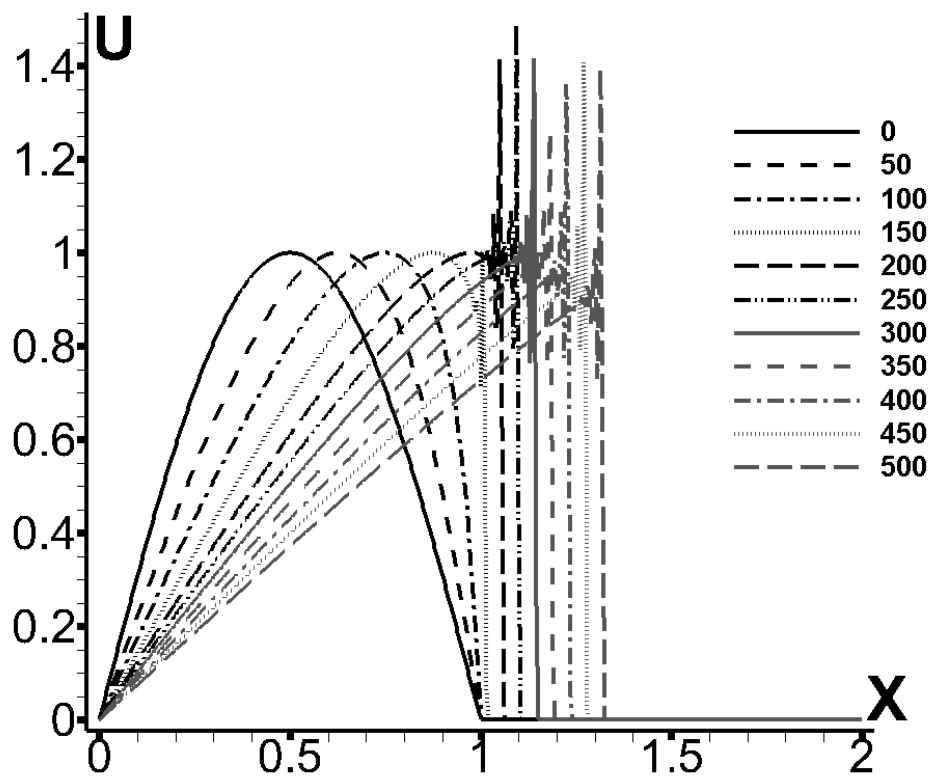


Рис. 3. Расчет без искусственной вязкости.

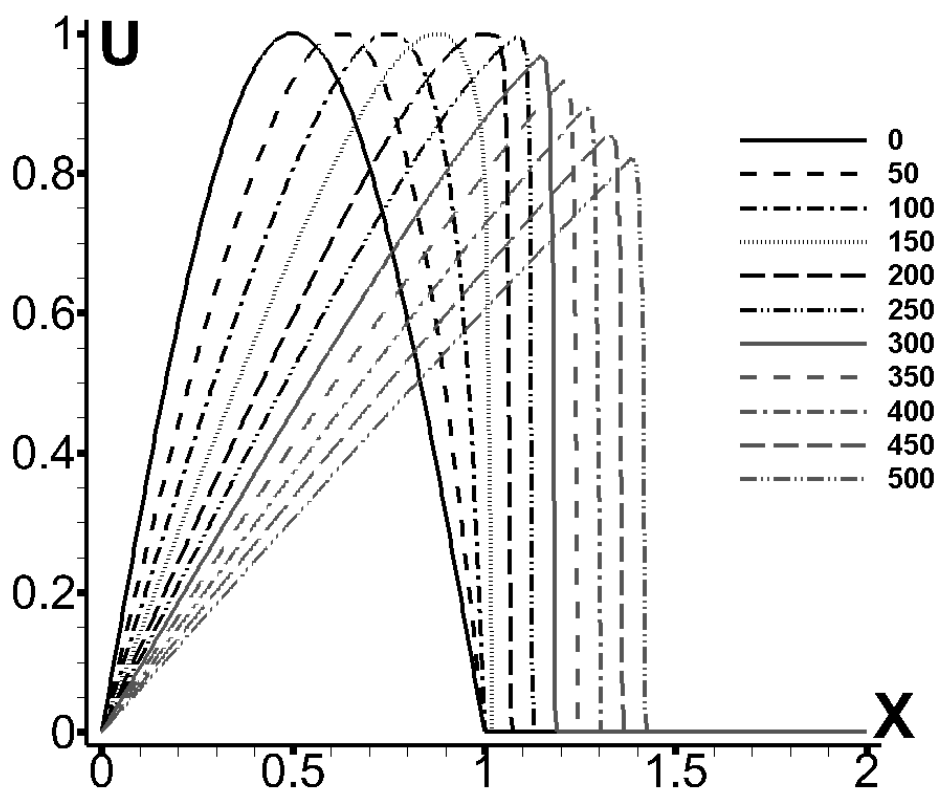


Рис. 4. Расчет с искусственной вязкостью.

1.3. Разностная схема для решения многомерного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости

1.3.1. Введение

Уравнение переноса является основным гиперболическим уравнением, которое используется для разработки и тестирования новых численных методов, моделирующих процессы тепломассопереноса. В настоящее время построено большое количество конечно-разностных схем решения задачи Коши для уравнения переноса. Все они в той или иной степени искажают точное решение по прошествии некоторого промежутка времени. При использовании устойчивых разностных схем первого порядка аппроксимации численное решение, как правило, «размывается» со временем по пространству. Схемы повышенного порядка аппроксимации также могут приводить к существенным качественным искажениям решения. Некоторые из используемых схем сложно обобщить на неструктурированные сетки. В этой связи представляет интерес разработка численного метода, дающего монотонные решения с практически приемлемой точностью, который допускает обобщения на различные типы сеток.

Приведём наиболее известные разностные схемы, аппроксимирующие многомерное уравнение переноса.

1. Схема с направленными разностями

$$\begin{aligned}
 u_{ij}^{n+1} = & u_{ij}^n - \frac{\tau}{h_x} \left(\tilde{a}_{1ij}^n u_{ij}^n - \tilde{a}_{1i-1j}^n u_{i-1j}^n \right) - \frac{\tau}{h_x} \left(\tilde{a}_{1i+1j}^n u_{i+1j}^n - \tilde{a}_{1ij}^n u_{ij}^n \right) - \\
 & - \frac{\tau}{h_y} \left(\tilde{a}_{2ij}^n u_{ij}^n - \tilde{a}_{2ij-1}^n u_{ij-1}^n \right) - \frac{\tau}{h_y} \left(\tilde{a}_{2ij+1}^n u_{ij+1}^n - \tilde{a}_{2ij}^n u_{ij}^n \right) \\
 \tilde{a}_{1ij}^n = & \frac{1}{2} \left(a_{1ij}^n + \left| a_{1ij}^n \right| \right), \quad \tilde{a}_{1ij}^n = \frac{1}{2} \left(a_{1ij}^n - \left| a_{1ij}^n \right| \right), \quad \tilde{a}_{2ij}^n = \frac{1}{2} \left(a_{2ij}^n + \left| a_{2ij}^n \right| \right), \\
 \tilde{a}_{2ij}^n = & \frac{1}{2} \left(a_{2ij}^n - \left| a_{2ij}^n \right| \right).
 \end{aligned}$$

2. Схема Лакса.

Применяется расщепление по координатам, по каждому направлению решается одномерная задача.

$$u_{ij}^{n+1} = \tilde{u}_{ij}^n - \frac{\tau}{2h_x} \left(a_{i+1j}^n u_{i+1j}^n - a_{i-1j}^n u_{i-1j}^n \right) - \frac{\tau}{2h_y} \left(a_{ij+1}^n u_{ij+1}^n - a_{ij-1}^n u_{ij-1}^n \right)$$

$$\tilde{u}_{ij}^n = \frac{1}{4} \left(u_{i+1j}^n + u_{i-1j}^n u_{ij+1}^n + u_{ij-1}^n \right)$$

2. Схема с «лимитерами».

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n - \frac{\tau}{h_x} \left(h_{i+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2}} \right) +$$

$$+ 0.5 \frac{\tau}{h_x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^- \left(h_{i+\frac{1}{2}} - f(u_i) \right) - \alpha_{i-\frac{1}{2}}^- \left(h_{i-\frac{1}{2}} - f(u_{i-1}) \right) \right) -$$

$$- 0.5 \frac{\tau}{h_x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^+ \left(f(u_{i+1}) - h_{i+\frac{1}{2}} \right) - \alpha_{i-\frac{1}{2}}^+ \left(f(u_i) - h_{i-\frac{1}{2}} \right) \right)$$

$$h_{i+\frac{1}{2}} = h(u_i, u_{i+1}) = \begin{cases} \min_{u_i \leq u \leq u_{i+1}} f(u), & \text{при } u_i < u_{i+1} \\ \max_{u_{i+1} \leq u \leq u_i} f(u), & \text{при } u_i \geq u_{i+1} \end{cases}$$

$$\alpha_{i\pm\frac{1}{2}}^{\mp} = \alpha(R_{i\pm\frac{1}{2}}^{\mp})$$

$$R_{i-\frac{1}{2}}^- = \frac{h_{i+\frac{1}{2}} - f(u_i)}{h_{i-\frac{1}{2}} - f(u_{i-1})}, \quad R_{i+\frac{1}{2}}^+ = \frac{f(u_i) - h_{i-\frac{1}{2}}}{f(u_{i+1}) - h_{i+\frac{1}{2}}}$$

$$\alpha = \begin{cases} 0, & R \leq 0 \\ \frac{(a+b(1-\delta))R}{(a+b)(1-\delta)}, & 0 < R < 1-\delta \\ \frac{a+bR}{a+b}, & |R-1| \leq \delta, a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3} \\ \frac{(a+b(1-\delta))R - 2a\delta}{(a+b)(1-\delta)}, & 1+\delta < R < 2 \\ 2, & R \geq 2 \end{cases}$$

1.3.2. Постановка задачи

Зададим прямоугольную область $\Omega = \{0 \leq x \leq L_1, 0 \leq y \leq L_2\}$ с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 - участок границы, ортогональный оси Oy , Γ_2 - участок границы, ортогональный оси Ox . В данной области рассматриваем линейное многомерное уравнение переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(\vec{a}u) = 0,$$

где \vec{a} - вектор скорости с компонентами (a_1, a_2) , $u = u(x, y, t)$ - скалярная величина.

По свойству оператора дивергенции:

$$\text{div}(\vec{a}u) = u \text{div}(\vec{a}) + \vec{a} \text{grad}(u) = u \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} \right) + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y}$$

Будем считать, что $a_1 = \text{const} > 0$, $a_2 = \text{const} > 0$, тогда $\text{div}(\vec{a}) = 0$ и уравнение переноса в координатах примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

1.3.3. Построение разностной схемы

По каждому координатному направлению введем для простоты равномерную сетку узлов: по оси Ox с шагом $h_x = \frac{L_1}{N_x - 1}$, где N_x - число

узлов: $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N_x-1} = L_1$; по оси Oy с шагом $h_y = \frac{L_2}{N_y-1}$, где N_y – число узлов: $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{N_y-1} = L_2$. Потоки будем определять в точках $\bar{x}_{i+\frac{1}{2}} = 0.5(x_i + x_{i+1})$, $\bar{y}_{j+\frac{1}{2}} = 0.5(y_j + y_{j+1})$, $0 \leq i \leq N_x - 2$, $0 \leq j \leq N_y - 2$. Введём также сетку по времени $t_n = n\tau, n = 0, 1 \dots$. Шаг сетки τ определяется по формуле $\tau = \frac{Ku \cdot h}{a}$, где $Ku = \min(Ku_x, Ku_y)$ - число Куранта. Индекс момента времени n будем писать сверху: $u^n = u(t_n)$, $u^{n+1} = u(t_{n+1})$.

Для построения разностной схемы используем такой же подход, как в одномерном случае [32]. Выразим временные производные (до третьей включительно) из уравнения переноса и подставим полученные выражения в разложение искомой функции в ряд Тейлора

$$u^{n+1} = u^n + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n \tau + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n \frac{\tau^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^n \frac{\tau^3}{6} + O(\tau^4)$$

Временные производные, выраженные через пространственные координаты, имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y}\right) = a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_1 a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \frac{\partial}{\partial t} \left(a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_1 a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Подставим найденные выражения для временных производных в разложение:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + a_1 \frac{\partial u^n}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u^n}{\partial y} - \frac{2\tau}{3} \left(a_1^2 \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + 2a_1 a_2 \frac{\partial^2 u^n}{\partial x \partial y} + a_2^2 \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2}\right) =$$

$$= -\frac{\tau}{6} \left(a_1^2 \frac{\partial^2 u^{n-1}}{\partial x^2} + 2a_1 a_2 \frac{\partial^2 u^{n-1}}{\partial x \partial y} + a_2^2 \frac{\partial^2 u^{n-1}}{\partial y^2} \right)$$

Выделим потоки:

$$\begin{aligned} & \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x} \left[a_1 \left(u^n - \frac{2\tau}{3} \left(a_1 \frac{\partial u^n}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u^n}{\partial y} \right) \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[a_2 \left(u^n - \frac{2\tau}{3} \left(a_1 \frac{\partial u^n}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u^n}{\partial y} \right) \right) \right] = \\ & = -\frac{\tau}{6} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(a_1 \left(a_1 \frac{\partial u^{n-1}}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u^{n-1}}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a_2 \left(a_1 \frac{\partial u^{n-1}}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u^{n-1}}{\partial y} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$W_x^n = a_1 \left(u^n - \frac{2\tau}{3} \left(a_1 \frac{\partial u^n}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u^n}{\partial y} \right) \right)$$

$$W_y^n = a_2 \left(u^n - \frac{2\tau}{3} \left(a_1 \frac{\partial u^n}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u^n}{\partial y} \right) \right)$$

$$W_x^{n-1} = a_1 \left(a_1 \frac{\partial u^{n-1}}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u^{n-1}}{\partial y} \right)$$

$$W_y^{n-1} = a_2 \left(a_1 \frac{\partial u^{n-1}}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u^{n-1}}{\partial y} \right)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x} [W_x^n] + \frac{\partial}{\partial y} [W_y^n] = -\frac{\tau}{6} \left[\frac{\partial}{\partial x} (W_x^{n-1}) + \frac{\partial}{\partial y} (W_y^{n-1}) \right]$$

Перепишем уравнение в операторном виде:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \operatorname{div}(W^n) = -\frac{\tau}{6} \operatorname{div}(W^{n-1})$$

Выберем контрольный объём в виде прямоугольника вокруг узла ij , со сторонами, равными h_x и h_y и площадью $S_{ij} = h_x h_y$.

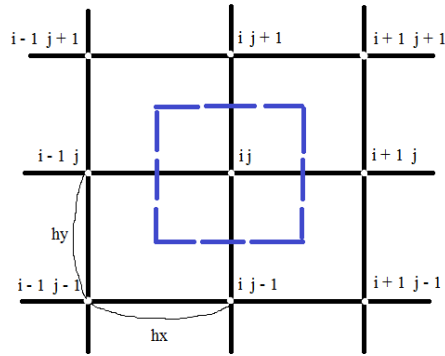


Рис. 1 Контрольный объём для узла ij

Проинтегрируем уравнение по выбранному контрольному объёму:

$$\iint_{S_{ij}} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} dS + \iint_{S_{ij}} \operatorname{div}(W^n) dS = -\frac{\tau}{6} \iint_{S_{ij}} \operatorname{div}(W^{n-1}) dS$$

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\tau} S_{ij} + \oint_{l_{ij}} (\vec{n}, W^n) dl = -\frac{\tau}{6} \oint_{l_{ij}} (\vec{n}, W^{n-1}) dl$$

где l_{ij} – контур, ограничивающий контрольный объём, \vec{n} – вектор нормали к стороне контура.

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n - \frac{\tau}{S_{ij}} \sum_{k=1}^4 (n_k, W_k^n) l_k - \frac{\tau^2}{6S_{ij}} \sum_{k=1}^4 (n_k, W_k^{n-1}) l_k$$

1.3.4. Аппроксимация потоков

Определим компоненты потоков в четырех точках – серединах расстояний между соседними узлами (отмечены красным цветом на рис. 2).

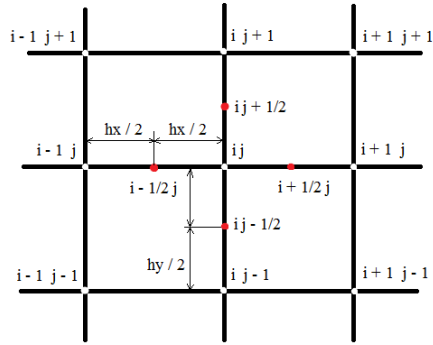


Рис. 2 Точки, в которых определяются потоки

Для аппроксимации потока выберем контрольный объём в виде ромба, диагонали которого равны h_x и h_y . Для компоненты $W_{i+\frac{1}{2}j}^n$ и $W_{i+\frac{1}{2}j}^{n-1}$ контрольный объём представлен на рис. 3.

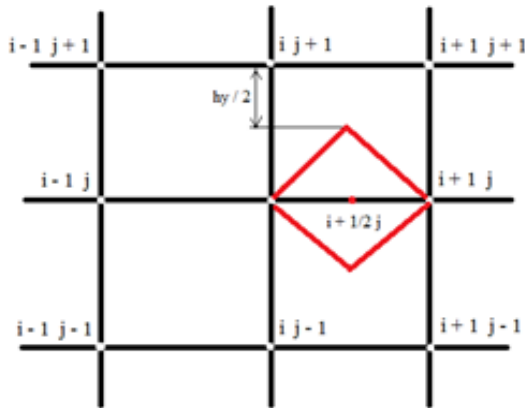


Рис. 3 Контрольный объём для аппроксимации потока в точке $i + \frac{1}{2}j$

$$\iint_{S_{i+\frac{1}{2}j}} W_{i+\frac{1}{2}j}^n dS = \iint_{S_{i+\frac{1}{2}j}} (a_1 u^n - \frac{2\tau}{3} a_1 \operatorname{div}(\vec{a}u^n)) dS$$

$$W_{i+\frac{1}{2}j}^n S_{i+\frac{1}{2}j} = a_1 u_{i+1j}^n S_{i+\frac{1}{2}j} - \frac{2\tau}{3} a_1 \oint_{l_{i+\frac{1}{2}j}} (\vec{n}, \vec{a}u^n) dl$$

$$S_{i+\frac{1}{2}j} = \frac{1}{2} h_x h_y$$

Будем использовать усреднения:

$$\bar{u}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{4} (u_{ij}^n + u_{i+1j}^n + u_{i+1j+1}^n + u_{ij+1}^n)$$

$$\bar{u}_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{4} (u_{ij}^n + u_{i+1j}^n + u_{i+1j-1}^n + u_{ij-1}^n)$$

$$\begin{aligned} \oint_{l_{i+\frac{1}{2}j}} (\vec{n}, \vec{a}u^n) dl &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a_1 \frac{\left(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^n + u_{i+1j}^n \right)}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} a_2 \frac{\left(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^n + u_{i+1j}^n \right)}{2} \right) \frac{1}{2} \sqrt{h_x^2 + h_y^2} + \\ &+ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} a_1 \frac{\left(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^n + u_{ij}^n \right)}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} a_2 \frac{\left(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^n + u_{ij}^n \right)}{2} \right) \frac{1}{2} \sqrt{h_x^2 + h_y^2} + \\ &+ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} a_1 \frac{\left(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}^n + u_{ij}^n \right)}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} a_2 \frac{\left(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}^n + u_{ij}^n \right)}{2} \right) \frac{1}{2} \sqrt{h_x^2 + h_y^2} + \\ &+ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a_1 \frac{\left(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}^n + u_{i+1j}^n \right)}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} a_2 \frac{\left(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}^n + u_{i+1j}^n \right)}{2} \right) \frac{1}{2} \sqrt{h_x^2 + h_y^2} \end{aligned}$$

Если $h_x = h_y = h$, получаем

$$\oint_{l_{i+\frac{1}{2}j}} (\vec{n}, \vec{a}u^n) dl = \frac{h}{4} \left(2a_1 (u_{i+1j}^n - u_{ij}^n) + 2a_2 \left(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^n - \bar{u}_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}^n \right) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= a_1 \frac{h}{2} (u_{i+1j}^n - u_{ij}^n) + \frac{a_2 h}{2} \left(\frac{u_{i+1j+1}^n + u_{ij+1}^n}{2} - \frac{u_{i+1j-1}^n + u_{ij-1}^n}{2} \right) \\
W_{i+\frac{1}{2}j}^n &= a_1 u_{i+1j}^n - \frac{2\tau a_1}{3S_{i+\frac{1}{2}j}} \left(a_1 \frac{h}{2} (u_{i+1j}^n - u_{ij}^n) + \right. \\
&\left. + \frac{a_2 h}{2} \left(\frac{u_{i+1j+1}^n + u_{ij+1}^n}{2} - \frac{u_{i+1j-1}^n + u_{ij-1}^n}{2} \right) \right) = \\
&= a_1 u_{i+1j}^n - \frac{2\tau a_1}{3h} \left(a_1 (u_{i+1j}^n - u_{ij}^n) + \right. \\
&\left. + \frac{a_2}{2} \left(\frac{u_{i+1j+1}^n + u_{ij+1}^n}{2} - \frac{u_{i+1j-1}^n + u_{ij-1}^n}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

Для $n - 1$ слоя аппроксимация потока

$$W_{i+\frac{1}{2}j}^{n-1} = \frac{a_1}{S_{i+\frac{1}{2}j}} \oint_{l_{i+\frac{1}{2}j}} (\vec{n}, \vec{a}u^n) dl$$

$$W_{i+\frac{1}{2}j}^{n-1} = \frac{a_1}{h} \left(a_1 (u_{i+1j}^n - u_{ij}^n) + \frac{a_2}{2} \left(\frac{u_{i+1j+1}^n + u_{ij+1}^n}{2} - \frac{u_{i+1j-1}^n + u_{ij-1}^n}{2} \right) \right)$$

Повторим выкладки для потока $W_{ij+\frac{1}{2}}^n$.

$$\iint_{S_{ij+\frac{1}{2}}} W_{ij+\frac{1}{2}}^n dS = \iint_{S_{ij+\frac{1}{2}}} \left(a_2 u^n - \frac{2\tau}{3} a_2 \operatorname{div}(\vec{a}u^n) \right) dS$$

$$W_{ij+\frac{1}{2}}^n S_{ij+\frac{1}{2}} = a_2 u_{ij+1}^n S_{ij+\frac{1}{2}} - \frac{2\tau}{3} a_2 \oint_{l_{ij+\frac{1}{2}}} (\vec{n}, \vec{a}u^n) dl$$

Контрольный объем выбираем аналогичным образом, $S_{ij+\frac{1}{2}} = \frac{h_x h_y}{2}$,

используем усреднения

$$\bar{u}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{4} (u_{ij}^n + u_{i+1j}^n + u_{i+1j+1}^n + u_{ij+1}^n)$$

$$\bar{u}_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{4} (u_{ij}^n + u_{ij+1}^n + u_{i-1j+1}^n + u_{i-1j}^n)$$

$$\begin{aligned} \oint_{i_{j+\frac{1}{2}}} (\vec{n}, \vec{a}u^n) dl &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a_1 \frac{\bar{u}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^n + u_{ij+1}^n}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} a_2 \frac{\bar{u}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^n + u_{ij+1}^n}{2} \right) \frac{1}{2} \sqrt{h_x^2 + h_y^2} + \\ &+ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} a_1 \frac{\bar{u}_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^n + u_{ij+1}^n}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} a_2 \frac{\bar{u}_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^n + u_{ij+1}^n}{2} \right) \frac{1}{2} \sqrt{h_x^2 + h_y^2} + \\ &+ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} a_1 \frac{\bar{u}_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^n + u_{ij}^n}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} a_2 \frac{\bar{u}_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^n + u_{ij}^n}{2} \right) \frac{1}{2} \sqrt{h_x^2 + h_y^2} + \\ &+ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a_1 \frac{\bar{u}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^n + u_{ij}^n}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} a_2 \frac{\bar{u}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^n + u_{ij}^n}{2} \right) \frac{1}{2} \sqrt{h_x^2 + h_y^2} \end{aligned}$$

При $h_x = h_y = h$ получаем

$$\oint_{i_{j+\frac{1}{2}}} (\vec{n}, \vec{a}u^n) dl = \frac{h}{2} \left(\frac{a_1}{2} \left(\frac{u_{i+1j}^n + u_{i+1j+1}^n}{2} - \frac{u_{i-1j+1}^n + u_{i-1j}^n}{2} \right) + a_2 (u_{ij+1}^n - u_{ij}^n) \right)$$

$$W_{ij+\frac{1}{2}}^n = a_2 u_{ij+1}^n - \frac{2\tau}{3h} a_2 \left(\frac{a_1}{2} \left(\frac{u_{i+1j}^n + u_{i+1j+1}^n}{2} - \frac{u_{i-1j+1}^n + u_{i-1j}^n}{2} \right) + a_2 (u_{ij+1}^n - u_{ij}^n) \right)$$

Для слоя $n-1$

$$W_{ij+\frac{1}{2}}^{n-1} = \frac{a_2}{h} \left(\frac{a_1}{2} \left(\frac{u_{i+1j}^n + u_{i+1j+1}^n}{2} - \frac{u_{i-1j+1}^n + u_{i-1j}^n}{2} \right) + a_2 (u_{ij+1}^n - u_{ij}^n) \right)$$

Полученная аппроксимация двумерного уравнения переноса:

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n - \frac{\tau}{h_x} (W_{x_{i+\frac{1}{2}j}}^n - W_{x_{i-\frac{1}{2}j}}^n) - \frac{\tau}{h_y} (W_{y_{ij+\frac{1}{2}}}^n - W_{y_{ij-\frac{1}{2}}}^n) -$$

$$-\frac{\tau^2}{6} \left[\frac{W_{x_{i+\frac{1}{2}j}}^{n-1} - W_{x_{i-\frac{1}{2}j}}^{n-1}}{h_x} + \frac{W_{y_{ij+\frac{1}{2}}}^{n-1} - W_{y_{ij-\frac{1}{2}}}^{n-1}}{h_y} \right]$$

При аппроксимации потоков на n – ом слое вместо направленной разности вперёд можно использовать центральную разность, тогда выражения будут иметь вид:

$$W_{i+\frac{1}{2}j}^n = a_1 \left(\frac{u_{i+1j}^n + u_{ij}^n}{2} \right) - \frac{2\tau a_1}{3h} (a_1 (u_{i+1j}^n - u_{ij}^n) + \\ + \frac{a_2}{2} \left(\frac{u_{i+1j+1}^n + u_{ij+1}^n}{2} - \frac{u_{i+1j-1}^n + u_{ij-1}^n}{2} \right))$$

1.3.5. Монотонизация разностной схемы

Для повышения устойчивости разностной схемы используется подход, разработанный в работе [93]. По полученной разностной схеме находится предикторное решение. Затем проверяются условия немонотонности решения отдельно по направлению x

$$(u_{i+1j}^n - u_{ij}^n)(u_{ij}^n - u_{i-1j}^n) < 0$$

и по направлению y

$$(u_{ij+1}^n - u_{ij}^n)(u_{ij}^n - u_{ij-1}^n) < 0.$$

На тех отрезках, для которых условия выполняются, исходное уравнение заменяется на (считаем $h_x = h_y = h$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(\vec{a}u) = \text{div}(\mu \text{grad}(u))$$

$$\iint_{S_{ij}} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} dS + \iint_{S_{ij}} \text{div}(W^n) dS =$$

$$= -\frac{\tau}{6} \iint_{S_{ij}} \operatorname{div}(W^{n-1}) dS + \iint_{S_{ij}} \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad}(u)) dS$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_{ij}} \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad}(u)) dS &= \oint_{l_{ij}} \mu(\vec{n}, \operatorname{grad}(u)) dl = \oint_{l_{ij}} \mu \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dl = \\ &= \mu_{i+\frac{1}{2}j} \frac{u_{i+1j}^n - u_{ij}^n}{h} h + \mu_{ij+\frac{1}{2}} \frac{u_{ij+1}^n - u_{ij}^n}{h} h - \\ &\quad - \mu_{i-\frac{1}{2}j} \frac{u_{ij}^n - u_{i-1j}^n}{h} h - \mu_{ij-\frac{1}{2}} \frac{u_{ij}^n - u_{ij-1}^n}{h} h \end{aligned}$$

Величина μ , как и в одномерном случае, является искусственной вязкостью.

Разностная схема для нахождения корректорного решения принимает вид:

$$\begin{aligned} u_{ij}^{n+1} &= u_{ij}^n - \frac{\tau}{h} \left(W_{i+\frac{1}{2}j}^n + W_{ij+\frac{1}{2}}^n - W_{i-\frac{1}{2}j}^n - W_{ij-\frac{1}{2}}^n \right) - \\ &\quad - \frac{\tau}{6h} \left(W_{i+\frac{1}{2}j}^{n-1} + W_{ij+\frac{1}{2}}^{n-1} - W_{i-\frac{1}{2}j}^{n-1} - W_{ij-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \\ &\quad + \frac{\tau}{h^2} \left(\mu_{i+\frac{1}{2}j} (u_{i+1j}^n - u_{ij}^n) + \mu_{ij+\frac{1}{2}} (u_{ij+1}^n - u_{ij}^n) \right) - \\ &\quad - \frac{\tau}{h^2} \left(\mu_{i-\frac{1}{2}j} (u_{ij}^n - u_{i-1j}^n) + \mu_{ij-\frac{1}{2}} (u_{ij}^n - u_{ij-1}^n) \right) \end{aligned}$$

Для определения величины искусственной вязкости воспользуемся методом «замороженных коэффициентов» аналогично одномерному случаю, положим $\mu_{i+\frac{1}{2}j} = \mu_{i-\frac{1}{2}j} = \mu_x$, $\mu_{ij+\frac{1}{2}} = \mu_{ij-\frac{1}{2}} = \mu_y$. Считаем, что решение на $(n-1)$ -ом слое монотонно и будем рассматривать только слагаемые со слоя n . Для обеспечения монотонности по критерию Фридрикса коэффициенты при $u_{i+1j}^n, u_{ij+1}^n, u_{ij}^n, u_{i-1j}^n, u_{ij-1}^n$ должны быть положительными.

Рассмотрим вариант аппроксимации потоков с использованием разности вперёд. При u_{ij}^n имеем

$$1 + \frac{a_1\tau}{h} - \frac{4\tau^2 a_1^2}{3h^2} + \frac{a_2\tau}{h} - \frac{4\tau^2 a_2^2}{3h^2} - \frac{2\tau}{h^2}(\mu_x + \mu_y) > 0$$

$$1 + \frac{\tau}{h}(a_1 + a_2) - \frac{4\tau^2}{3h^2}(a_1^2 + a_2^2) - \frac{2\tau}{h^2}(\mu_x + \mu_y) > 0$$

$$\mu_x + \mu_y < \frac{h^2}{2\tau} + \frac{h}{2}(a_1 + a_2) - \frac{2\tau}{3}(a_1^2 + a_2^2)$$

$$\mu_x < \frac{h^2}{4\tau} + \frac{h}{2}a_1 - \frac{2\tau}{3}a_1^2$$

$$\mu_y < \frac{h^2}{4\tau} + \frac{h}{2}a_2 - \frac{2\tau}{3}a_2^2$$

Перепишем через число Куранта $Ku_x = \frac{a_1\tau}{h}$ (для $Ku_y = \frac{a_2\tau}{h}$ аналогично)

$$\mu_x < a_1 h \left(\frac{1}{4Ku_x} + \frac{1}{2} - \frac{2Ku_x}{3} \right)$$

$$\frac{1}{4Ku_x} + \frac{1}{2} - \frac{2Ku_x}{3} > 0$$

$$-4(Ku_x + 0.34)(Ku_x - 1.09) > 0$$

Согласно теоретическому исследованию, число Куранта лежит в пределах $0 < Ku_x < 1.09$ при «замороженных» коэффициентах, однако в реальных расчётах следует использовать $Ku_x < 1$ для обеспечения устойчивости (для Ku_y значения аналогичны).

При u_{i+1j}^n имеем:

$$-\frac{a_1\tau}{h} + \frac{2\tau^2 a_1^2}{3h^2} + \frac{\tau}{h^2}\mu_x > 0$$

$$\mu_x > a_1 h - \frac{2\tau a_1^2}{3}$$

$$\mu_x > a_1 h \left(1 - \frac{2Ku_x}{3}\right)$$

$$1 - \frac{2Ku_x}{3} > 0$$

$$Ku_x < \frac{3}{2}$$

Из неравенств при u_{ij+1}^n получаем аналогичные значения для вязкости μ_y :

$$\mu_y > a_2 h - \frac{2\tau a_2^2}{3}$$

$$Ku_y < \frac{3}{2}$$

При удовлетворении заданных выше условий неравенства при u_{i-1j}^n, u_{ij-1}^n выполняются автоматически.

Итак, полученные ограничения на величину искусственной вязкости:

$$\mu_{x \min} = a_1 h - \frac{2\tau a_1^2}{3}$$

$$\mu_{y \min} = a_2 h - \frac{2\tau a_2^2}{3}$$

$$\mu_{x \max} = \frac{h^2}{4\tau} + \frac{h}{2} a_1 - \frac{2\tau}{3} a_1^2$$

$$\mu_{y \max} = \frac{h^2}{4\tau} + \frac{h}{2} a_2 - \frac{2\tau}{3} a_2^2$$

Если при аппроксимации потоков использовать центральную разность, то при u_{ij}^n

$$1 - \frac{4\tau^2 a_1^2}{3h^2} - \frac{4\tau^2 a_2^2}{3h^2} - \frac{2\tau}{h^2} (\mu_x + \mu_y) > 0$$

$$\mu_x + \mu_y < \frac{h^2}{2\tau} - \frac{2\tau}{3} (a_1^2 + a_2^2)$$

$$\mu_x < \frac{h^2}{4\tau} - \frac{2\tau}{3} a_1^2$$

$$\mu_y < \frac{h^2}{4\tau} - \frac{2\tau}{3} a_2^2$$

Получим также ограничения на число Куранта

$$\mu_x < a_1 h \left(\frac{1}{4Ku_x} - \frac{2}{3} Ku_x \right)$$

$$\frac{1}{4Ku_x} - \frac{2}{3} Ku_x > 0$$

$$0 < Ku_x < 0.612$$

Для Ku_y ограничение будет аналогичным.

При u_{i+1j}^n коэффициент имеет вид:

$$-\frac{a_1\tau}{2h} + \frac{2\tau^2 a_1^2}{3h^2} + \frac{\tau}{h^2} \mu_x > 0$$

$$\mu_x > \frac{a_1 h}{2} - \frac{2\tau a_1^2}{3}$$

Через число Куранта

$$\mu_x > a_1 h \left(\frac{1}{2} - \frac{2Ku_x}{3} \right)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{2Ku_x}{3} > 0$$

$$Ku_x < 0.75$$

Из неравенства для коэффициента при u_{ij+1}^n получаем

$$\mu_y > \frac{a_2 h}{2} - \frac{2\tau a_2^2}{3}$$

$$Ku_y < 0.75$$

Для схемы с центральной разностью ограничения на величину искусственной вязкости имеют вид:

$$\mu_{x\max} = \frac{h^2}{4\tau} - \frac{2\tau}{3} a_1^2$$

$$\mu_{y\max} = \frac{h^2}{4\tau} - \frac{2\tau}{3} a_2^2$$

$$\mu_{x\min} = \frac{a_1 h}{2} - \frac{2\tau a_1^2}{3}$$

$$\mu_{y\min} = \frac{a_2 h}{2} - \frac{2\tau a_2^2}{3}$$

1.3.6. Этапы расчёта

На первом этапе находится предикторное решение по формуле

$$\hat{u}_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n - \frac{\tau}{h_x} (W_{x_{i+\frac{1}{2}j}}^n - W_{x_{i-\frac{1}{2}j}}^n) - \frac{\tau}{h_y} (W_{y_{ij+\frac{1}{2}}}^n - W_{y_{ij-\frac{1}{2}}}^n) -$$

$$- \frac{\tau^2}{6} \left[\frac{W_{x_{i+\frac{1}{2}j}}^{n-1} - W_{x_{i-\frac{1}{2}j}}^{n-1}}{h_x} + \frac{W_{y_{ij+\frac{1}{2}}}^{n-1} - W_{y_{ij-\frac{1}{2}}}^{n-1}}{h_y} \right]$$

Далее по найденному решению \hat{u}^{n+1} определяются участки введения искусственной вязкости. Проверяются условия немонотонности решения отдельно по направлению x

$$(\hat{u}_{i+1j}^n - \hat{u}_{ij}^n)(\hat{u}_{ij}^n - \hat{u}_{i-1j}^n) < 0$$

и по направлению y

$$(\hat{u}_{ij+1}^n - \hat{u}_{ij}^n)(\hat{u}_{ij}^n - \hat{u}_{ij-1}^n) < 0.$$

На тех отрезках, для которых условия выполняются, исходное уравнение заменяется на

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{a}u) = \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad}(u))$$

На остальных интервалах полагаем $\mu_{i+\frac{1}{2}j} = \mu_{i-\frac{1}{2}j} = 0$, $\mu_{ij+\frac{1}{2}} = \mu_{ij-\frac{1}{2}} = 0$.

Далее расчёт ведётся по формуле

$$u_{ij}^{n+1} = \hat{u}_{ij}^{n+1} + \tau \mu_{i+\frac{1}{2}j} \frac{u_{i+1j}^n - u_{ij}^n}{h_x^2} - \tau \mu_{i-\frac{1}{2}j} \frac{u_{ij}^n - u_{i-1j}^n}{h_x^2} + \\ + \tau \mu_{ij+\frac{1}{2}} \frac{u_{ij+1}^n - u_{ij}^n}{h_y^2} - \tau \mu_{ij-\frac{1}{2}} \frac{u_{ij}^n - u_{ij-1}^n}{h_y^2}$$

Для искусственной вязкости используются следующие значения ($0 \leq \alpha \leq 1$):

$$\mu_{i+\frac{1}{2}j} = \mu_{i-\frac{1}{2}j} = \alpha \mu_{x \max} + (1 - \alpha) \mu_{x \min}$$

$$\mu_{ij+\frac{1}{2}} = \mu_{ij-\frac{1}{2}} = \alpha \mu_{y \max} + (1 - \alpha) \mu_{y \min}$$

1.3.7. Результаты расчётов

Пусть в задаче Коши для линейного двумерного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

где $u = u(x, y, t)$

с финитным начальным условием

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) = \begin{cases} R(r, \varphi), & 0 \leq r \leq r_0 \\ 0, & r_0 < r \end{cases},$$

где
$$r = \sqrt{(x - x_{00})^2 + (y - y_{00})^2},$$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x - x_{00}}{r}\right), & y \geq y_{00} \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x - x_{00}}{r}\right), & y < y_{00} \end{cases},$$

$r_0 = \text{const} > 0$, скорости a_1 и a_2 задаются следующим образом:

$$a_1 = \begin{cases} \frac{dx_0(t)}{dt}, & 0 \leq r \leq r_1 \\ 0, & r > r_1 \end{cases},$$

$$a_2 = \begin{cases} \frac{dy_0(t)}{dt}, & 0 \leq r \leq r_1 \\ 0, & r > r_1 \end{cases},$$

где $x_0(0) = x_{00}, y_0(0) = y_{00}, r_1 \geq r_0$.

Функции $x = x_0(t), y = y_0(t)$ определяют траекторию движения центра решения (x_0, y_0) в плоскости (x, y) : $x_0(t) = x_{00} + u_{00}t, y_0(t) = y_{00} + v_{00}t$, $u_{00}, v_{00} - \text{const}$.

Для тестирования и сравнительного анализа использовались четыре типа функций $R(r, \varphi)$, три из них (2 – 4) описаны также в работе [27]. Ниже представлены виды точных решений, на левом рисунке показаны линии уровня, на правом – видовая проекция.

1. Прямоугольный параллелепипед

$$R(r, \varphi) = \begin{cases} 1, & -\frac{r_0}{2} \leq x \leq \frac{r_0}{2}, -\frac{r_0}{2} \leq y \leq \frac{r_0}{2} \\ 0, & |x| > \frac{r_0}{2}, |y| > \frac{r_0}{2} \end{cases}$$

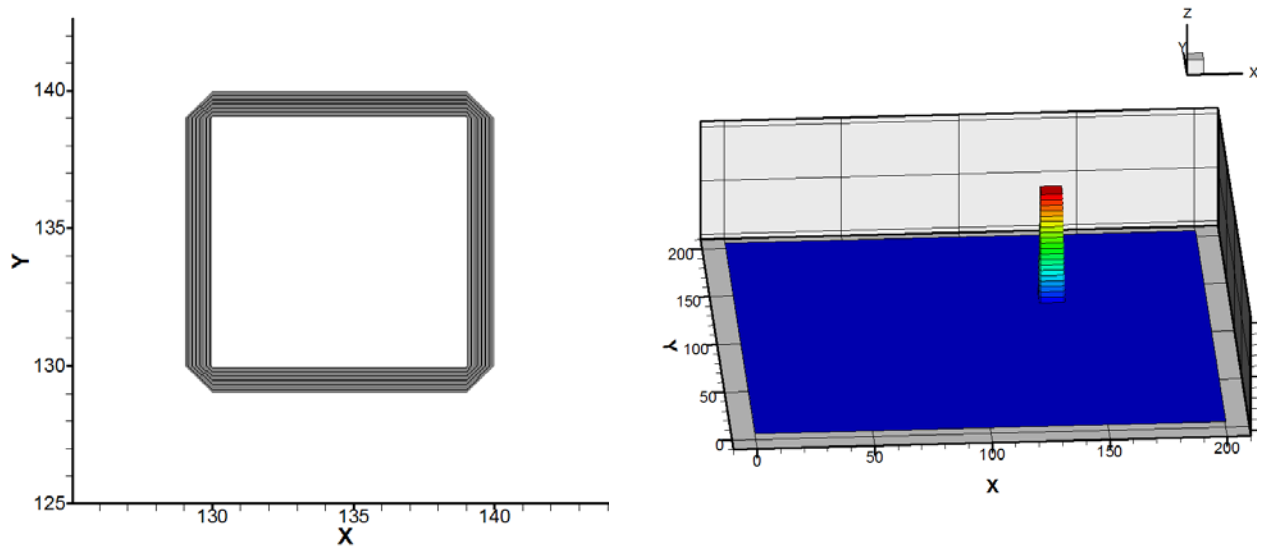


Рис. 4 Начальный профиль «прямоугольный параллелепипед»

2. Конус

$$R(r, \varphi) = \begin{cases} 1 - \frac{r}{r_0}, & 0 \leq r \leq r_0 \\ 0, & r > r_0 \end{cases}$$

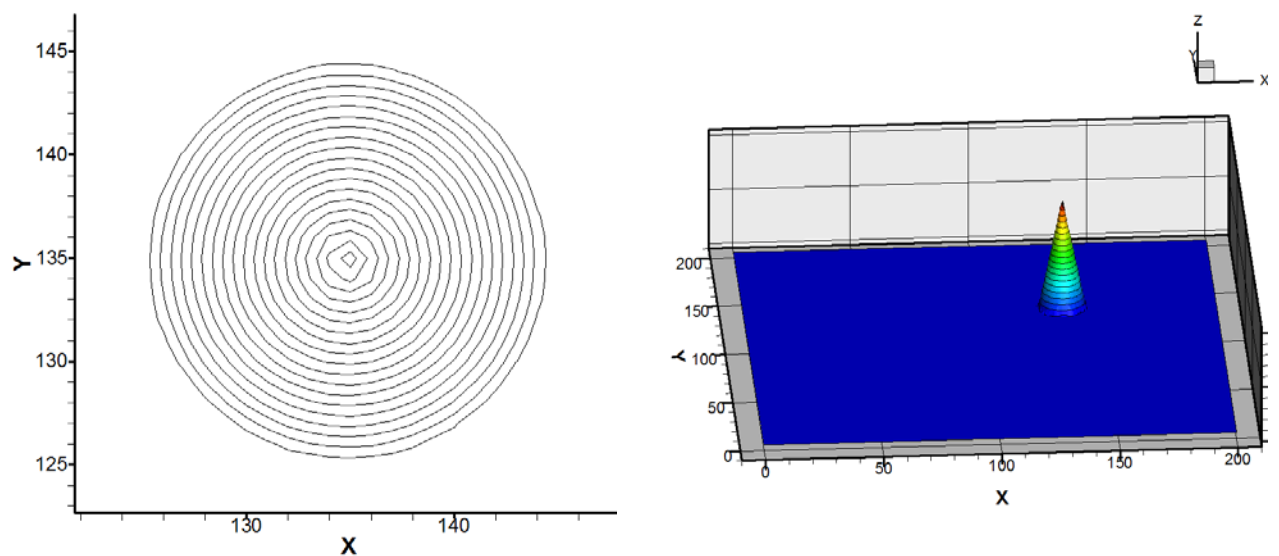


Рис. 5 Начальный профиль «конус»

3. Конус без сектора

$$R(r, \varphi) = \begin{cases} 1 - \frac{r}{r_0}, & \varphi \notin [\varphi_1, \varphi_2], 0 \leq r \leq r_0, 0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq 2\pi \\ 0, & \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2) \end{cases}$$

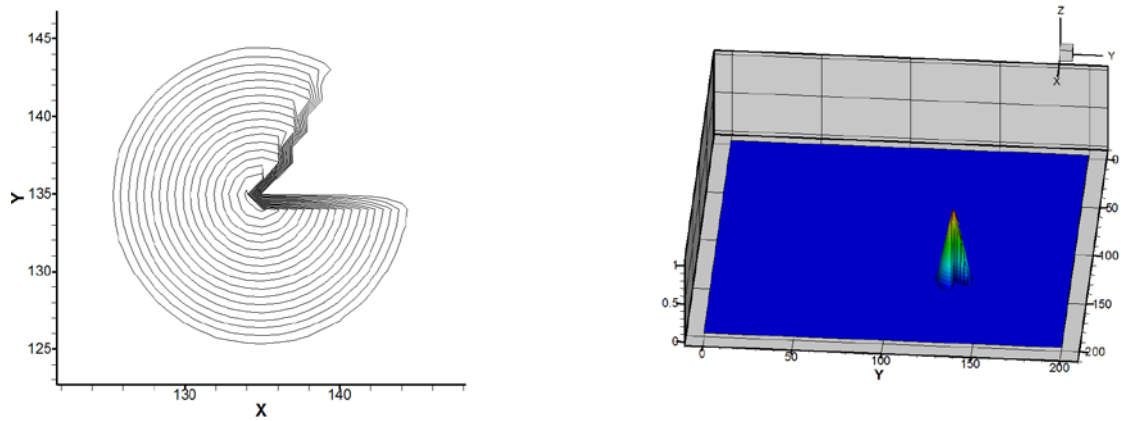


Рис.6 Начальный профиль «конус без сектора»

4. Буква М

$$R(r, \varphi) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in M \\ 0, & (x, y) \notin M \end{cases}$$

$$M = \{(x, y): (x, y) \in P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4\}$$

$$P_1 = \{(x, y): x_1 \leq x \leq x_2; y_1 \leq y \leq y_5\}$$

$$P_2 = \left\{ (x, y): x_2 \leq x \leq x_3; y_3 - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} (x - x_2) \leq y \leq y_5 - \frac{y_5 - y_4}{x_3 - x_2} (x - x_2) \right\}$$

$$P_3 = \left\{ (x, y): x_3 \leq x \leq x_4; y_2 + \frac{y_3 - y_2}{x_4 - x_3} (x - x_3) \leq y \leq y_4 + \frac{y_5 - y_4}{x_4 - x_3} (x - x_3) \right\}$$

$$P_4 = \{(x, y): x_4 \leq x \leq x_5; y_1 \leq y \leq y_5\}$$

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5; y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < y_5$$

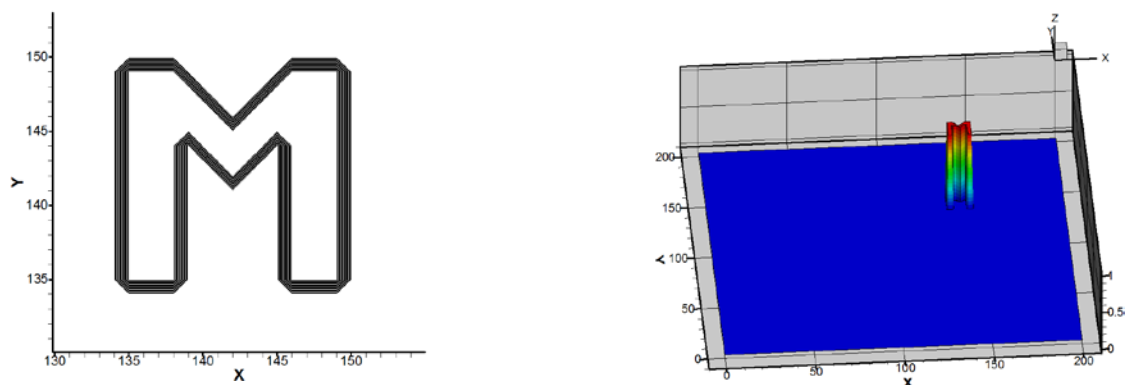


Рис.7 Начальный профиль «буква М»

Зададим следующие значения параметров:

$$x_{00} = 10, y_{00} = 10, r_0 = r_1 = 10, u_{00} = v_{00} = 1$$

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{\pi}{3}, x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 7, x_4 = 11, x_5 = 14$$

$$y_1 = 0, y_2 = 7, y_3 = 10, y_4 = 10, y_5 = 14$$

1.3.7.1. Тест «прямоугольный параллелепипед»

Проведём вычисления по описанному методу в области, содержащей 200x200 узлов, пространственные шаги выберем единичными. Зададим начальный профиль в виде прямоугольного параллелепипеда, число Куранта равным 0.1, положим $\alpha = 0$ (используется минимальная вязкость).

Табл. 1 содержит нормы точного решения.

Таблица 1. Значения норм разности точного и численного решения для начального профиля «прямоугольный параллелепипед» на момент времени $t_{\text{fin}} = 120$ при минимальной вязкости.

Норма	C	L_1	L_2
Интегральная	1	12000	109.545
Локальная	1	100	10

Используем вариант аппроксимации потоков с разностью вперёд.

На рис. 8 представлен вид профиля на моменты времени 50, 100 и 120:

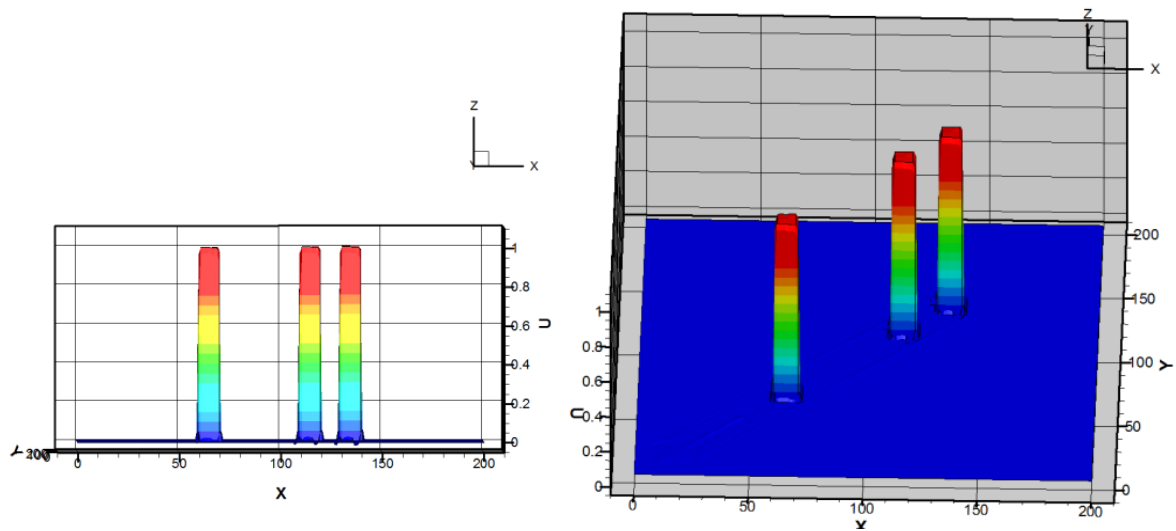


Рис. 8 Профиль «прямоугольный параллелепипед» в моменты времени 50, 100, 120

На рис. 9 представлена вертикальная проекция начального профиля на момент времени $t_{fin} = 120$.

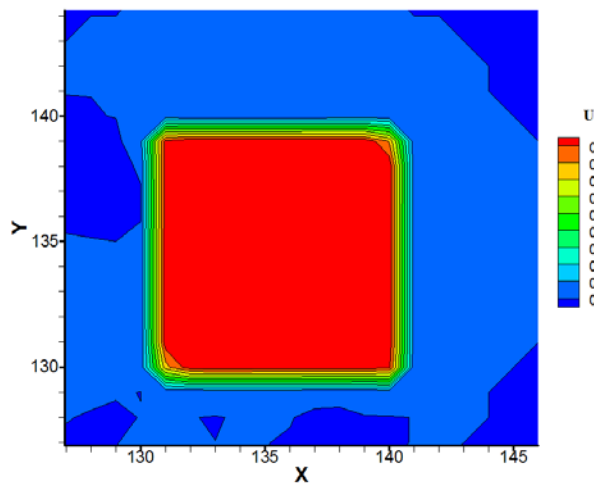


Рис. 9 Профиль «прямоугольный параллелепипед» в момент времени $t_{fin} = 120$

Профиль сохраняет первоначальную форму.

Табл. 2 содержит значения норм разности между точным и численным решением на момент времени $t_{fin} = 120$:

Таблица 2. Значения норм разности точного и численного решения для начального профиля «прямоугольный параллелепипед» на момент времени $t_{fin} = 120$.

Норма	C	L_1	L_2
Интегральная	1.02703	2536.26	38.9357
Локальная	1.00511	23.1132	4.3522

Для сравнительного анализа будем использовать начальные профили «конус», «конус без сектора» и «буква М». Результат будем сравнивать в нормах C, L_1, L_2 интегрально и локально со схемами П. Лакса, схемой с «лимитерами» и схемой с направленными разностями (описание данных схем представлено в приложении 1).

При расчётах величину искусственной вязкости будем регулировать с помощью параметра α , задавая его значение для линейной комбинации $\alpha\mu_{max} + (1 - \alpha)\mu_{min}$. Число Куранта ($\gamma = \min(\frac{a_1\tau}{h_x}, \frac{a_2\tau}{h_y})$) ограничивается сверху величиной $\gamma_{max} = 0.25$ ($\gamma \leq \gamma_{max}$).

1.3.7.2. Тест «конус»

Табл. 3 содержит значения норм разностей точного и численного решения, полученного по методу АИВ, для начального профиля «конус» на момент времени $t_{fin} = 120$ число Куранта равно 0.15, параметр $\alpha = 0.2$.

Таблица 3. Значения норм разностей точного и численного решения для начального профиля «конус»

Норма	C	L_1	L_2
Интегральная	0.492662	5956.67	29.8267
Локальная	0.420144	61.5856	3.10825

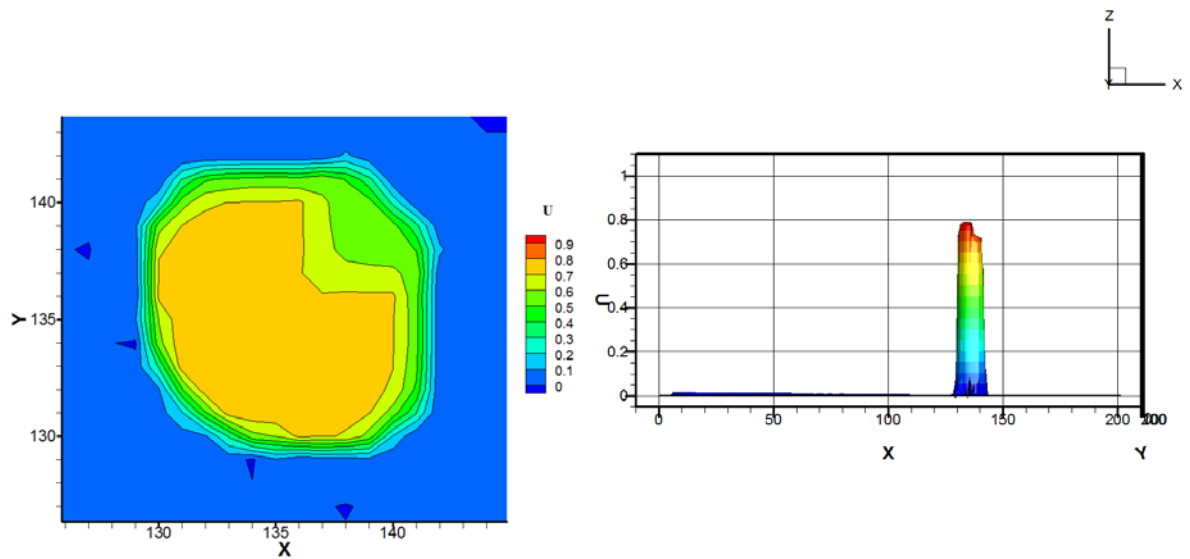


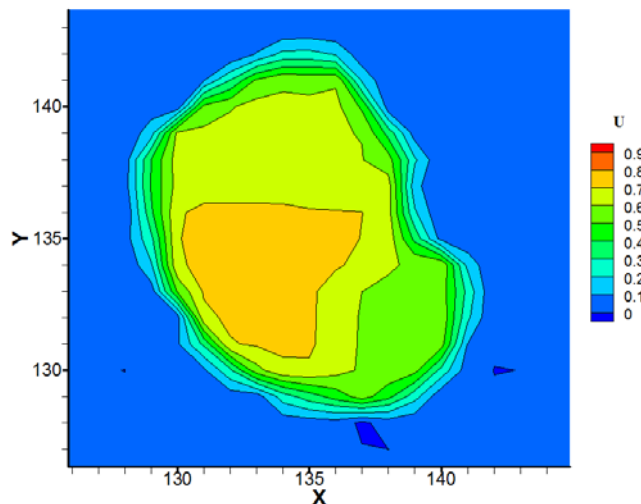
Рис. 10 Тест «конус» на момент времени $t_{fin} = 120$

1.3.7.3. Тест «конус без сектора»

Полученные значения норм разности точного и численного решений для начального профиля «конус без сектора» представлены в табл. 4.

Таблица 4. Значения норм разностей точного и численного решения для начального профиля «конус без сектора».

Норма	C	L_1	L_2
Интегральная	0.874428	5760.59	32.8994
Локальная	0.719869	54.781	3.34619



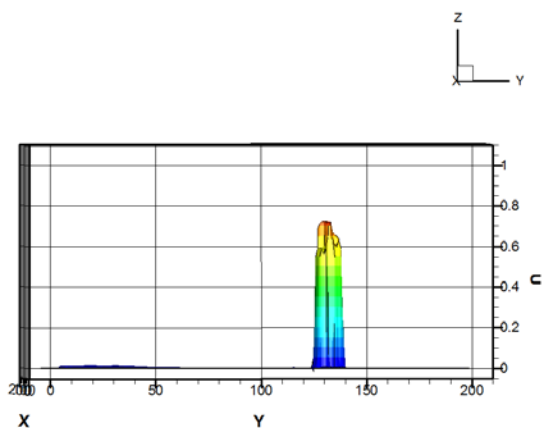


Рис. 11 Тест «конус без сектора» на момент времени $t_{fin} = 120$

1.3.7.4. Тест «Буква М»

В табл. 5 представлены значения норм разностей точного и численного решения, полученного по методу АИВ, для начального профиля «буква М» на момент времени $t_{fin} = 120$, число Куранта равно 0.15, параметр $\alpha = 0.2$.

Таблица 5. Значения норм разностей точного и численного решения для начального профиля «буква М»

Норма	C	L_1	L_2
Интегральная	0.993475	10522.4	69.5198
Локальная	0.776929	105.247	6.81835

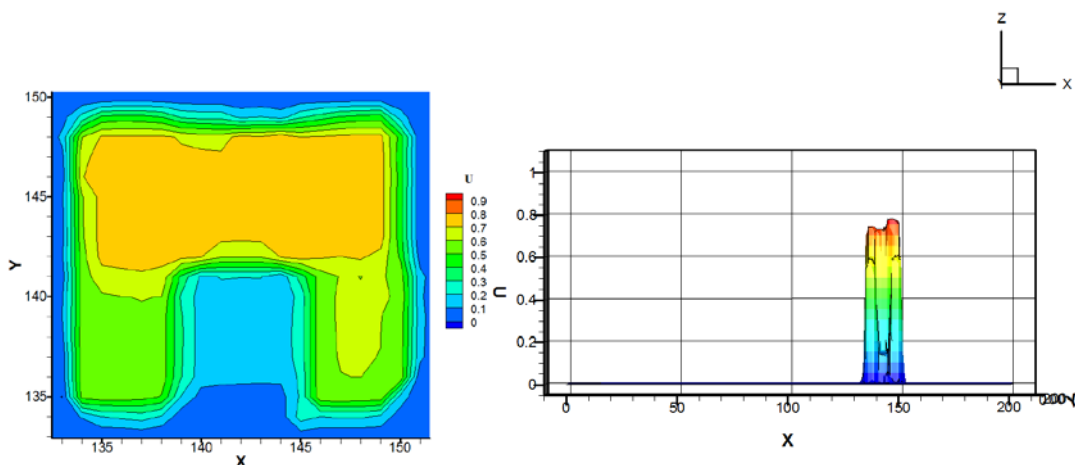


Рис. 12 Тест «буква М» на момент времени $t_{fin} = 120$

1.3.8. Тесты для схемы с центральными разностями

Будем при аппроксимации потоков использовать центральную разность, проведём аналогичные расчёты.

1.3.8.1. Тест «Конус»

Для «конуса» получаем следующие значения норм (значения параметра α и числа Куранта прежние):

Таблица 6. Значения норм для начального профиля «конус»

Норма	C	L_1	L_2
Интегральная	0.40745	2336.52	13.442
Локальная	0.389485	31.3716	1.79619

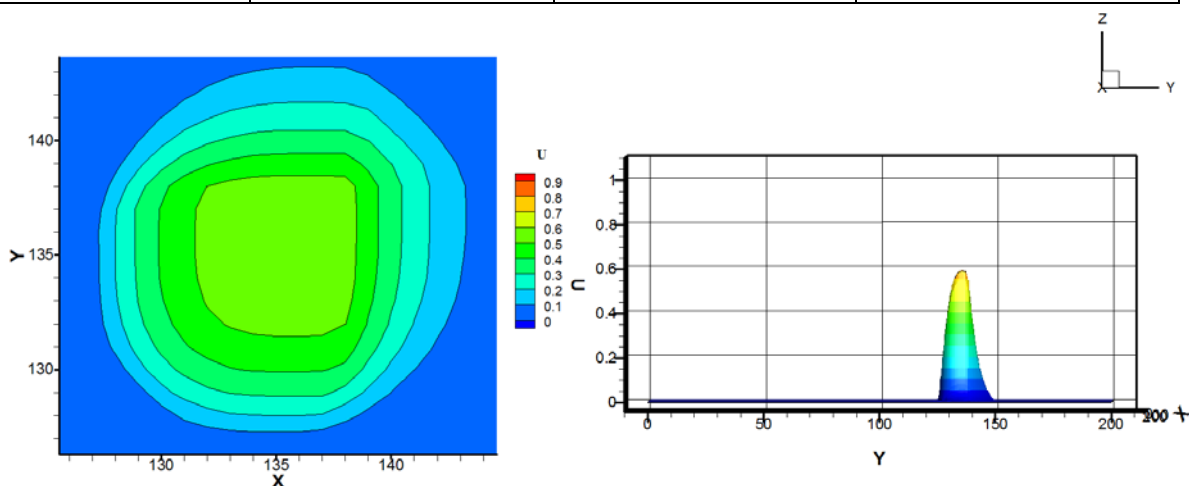


Рис. 13 Тест «конус» на момент времени $t_{fin} = 120$

На рис. 13 видно, что в процессе расчёта происходит диссипация решения.

1.3.8.2. Тест «Конус без сектора»

Для «конуса без сектора» также наблюдается сильное падение амплитуды, начальный профиль «размывается».

Таблица 7. Значения норм для начального профиля «конус без сектора»

Норма	C	L_1	L_2
Интегральная	0.8562	3664.9	24.9678
Локальная	0.511313	43.6331	2.76011

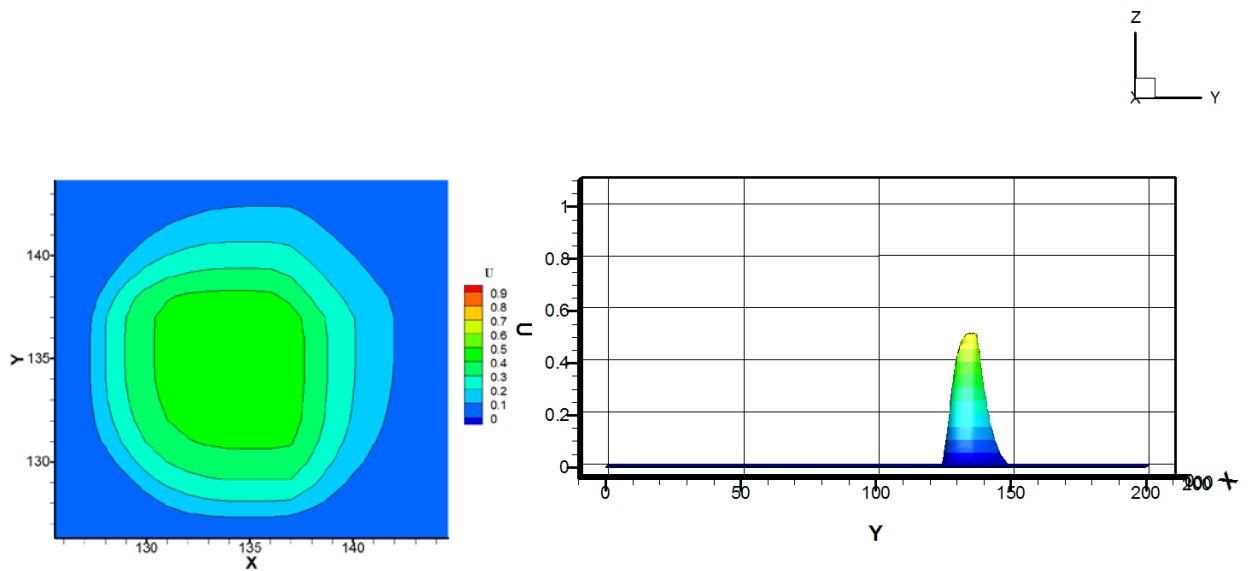


Рис. 14 Тест «конус без сектора» на момент времени $t_{fin} = 120$

1.3.8.3. Тест «Буква М»

При начальном профиле «М» наблюдается сильное «размазывание» решения, значительное уменьшение амплитуды.

Таблица 8. Значения норм для начального профиля «буква М»

Норма	C	L_1	L_2
Интегральная	0.994375	16663.9	80.0625
Локальная	0.832268	162.598	7.89453

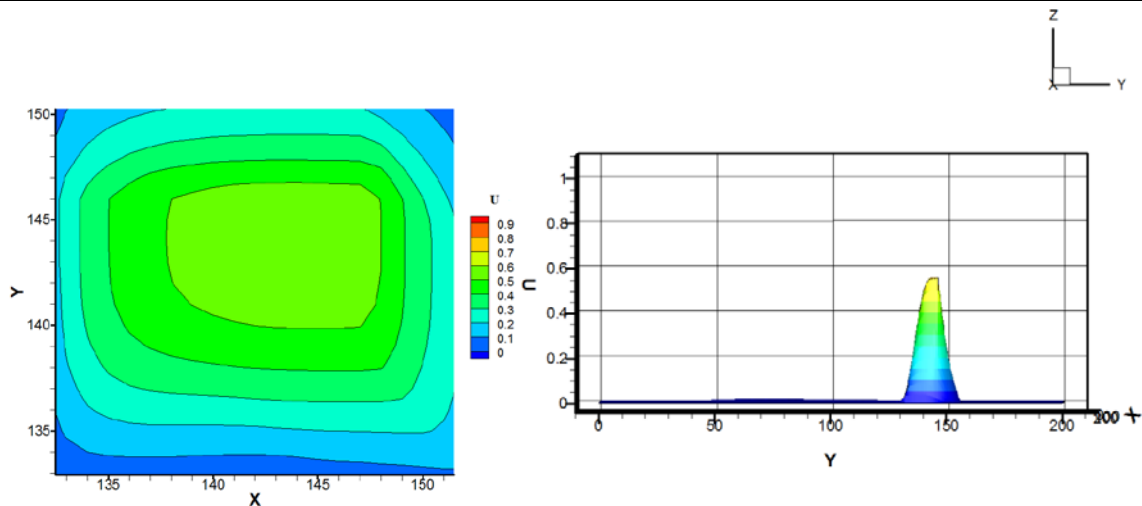


Рис. 15 Тест «буква М» на момент времени $t_{fin} = 120$

При использовании варианта аппроксимации потоков с центральной разностью начальный профиль становится колоколообразным, амплитуда сильно уменьшается. При аппроксимации потоков с использованием разности вперёд начальные профили сохраняют форму, амплитуда понижается слабее.

Сравним полученные результаты с вышеперечисленными схемами из работы [92]. При использовании схемы с направленными разностями и схемы П. Лакса для любых форм поверхности начального условия наблюдается «размазывание» численного решения на достаточно большое число интервалов разностной сетки и уменьшение его амплитуды. Результаты, полученные в данной работе для схемы с вариантом аппроксимации потоков с использованием разности вперёд, близки к результатам схемы с «лимитерами». Ниже приведём значения норм. Табл. 9 содержит значения для начального профиля «конус», результаты для профилей «конус без сектора» и «буква М» представлены в табл. 10 и табл. 11 соответственно.

Таблица 9. Значения норм для начального профиля «конус»

Норма	C		L_1		L_2	
	АИВ	«лимитеры»	АИВ	«лимитеры»	АИВ	«лимитеры»
Интегральная	0.492662	0.45	5956.67	5704.77	29.8267	35.73
Локальная	0.420144	0.43	61.5856	54.47	3.10825	3.67

Таблица 10. Значения норм для начального профиля «конус без сектора»

Норма	C		L_1		L_2	
	АИВ	«лимитеры»	АИВ	«лимитеры»	АИВ	«лимитеры»
Интегральная	0.874428	0.87	5760.59	4719.94	32.8994	33.28
Локальная	0.719869	0.85	54.781	48.29	3.34619	3.67

Таблица 11. Значения норм для начального профиля «конус без сектора»

Норма	С		L_1		L_2	
	АИВ	«лимитеры»	АИВ	«лимитеры»	АИВ	«лимитеры»
Интегральная	0.993475	0.96	10522.4	7914.47	69.5198	56.87
Локальная	0.776929	0.91	105.247	72.48	6.81835	5.35

Заключение по 1 главе

1. Построены разностные схемы для линейного и нелинейного уравнения переноса с центрально-разностной аппроксимацией конвективного члена и разность вперед по потоку с регуляризационным слагаемым.

2. Получены условия устойчивости разностных схем при невыполнении условия Куранта.

Результаты главы 1 опубликованы в работах:

1. Попов И.В., Тимофеева Ю.Е.. Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2015, № 39, 24 с, URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-39>

2. Попов И.В., Тимофеева Ю.Е., Многомерные разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости, Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2015, 042, 28 стр.

3. Попов И.В., Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для нелинейного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2017, 068, 21 стр.

4. Попов И.В.. Конечно-разностный метод стабилизации решения уравнения переноса для неустойчивой схемы. Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 7. С. 990. Popov I.V Finite-difference method for the stabilization

of the solution of the transport equation for an unstable difference scheme. *Differential Equations*. 2016. Т. 52. № 7. С. 951-961.

5. Попов И.В.. Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для нелинейного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2017, 068, 21 стр.

Глава 2.

Метод адаптивной искусственной вязкости. Одномерные задачи.

В этой главе рассматривается явная, однородная, монотонная разностная схема для одномерных задач газовой динамики на трехточечных шаблонах, слабо размывающая контактные разрывы и ударные волны. Предложенная схема на волнах разряжения имеет аппроксимацию $O(\tau^2 + h^2)$, где τ - шаг по времени и h - шаг по пространственной переменной.

В предлагаемой разностной схеме, наряду с поправками Лакса–Вендроффа, вводится повышающая устойчивость схемы искусственная вязкость. Искусственная вязкость вводится в области немонотонности решения, вне контактного разрыва и волн разряжения. Вязкость находится из условий принципа максимума для схем с «замороженными» коэффициентами. Решение задачи на каждом временном слое вычисляется в два этапа.

На первом этапе ("предиктор") находится решение сеточных уравнений с искусственной вязкостью, равной нулю, во всей области решения задачи.

На втором этапе ("корректор") анализируется решение, полученное на первом этапе. В областях немонотонности в разностную схему вводится дополнительная искусственная вязкость, монотонизирующая решения в этих областях, тем самым разностная схема адаптируется к решению задачи.

Работоспособность метода АИВ проверялась на тестовых задачах и сравнивалась с другими методами, такими как TVD-схемы, методы ENO, WENO и другими.

В конце главы приводятся схемы и расчеты по методу АИВ в цилиндрических и сферических координатах.

2.1 Постановка задачи.

Рассмотрим одномерные задачи газовой динамики в эйлеровых переменных в декартовой системе координат. Система уравнений Эйлера имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Iu + p) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((E + p)u) = 0 \end{cases} \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

Здесь ρ - плотность, u - скорость, $I = \rho u$ - импульс, $E = \rho \varepsilon + \rho \frac{u^2}{2}$ - полная энергия, ε - внутренняя энергия. Система уравнений замыкается уравнением состояния идеального газа $p = (\gamma - 1)\rho \varepsilon$, где γ - показатель адиабаты Пуассона.

Уравнения рассматриваются на отрезке $0 < x < l$. В начальный момент задаются величины ρ , u , I , E . Давление p вычисляется по энергии, скорости и плотности. Если концы $x=0$ и $x=l$ - жесткие стенки, то на этих концах ставится условие $u=0$. Тем самым окажутся равными нулю плотности потоков (далее просто потоки) массы, полной энергии. Иногда на концах отрезка l будем задавать те же значения функций, что и в начальный момент времени. Решение в этом случае будет рассматриваться на конечном интервале времени, пока возмущения не достигнут границ.

2.2. Поправки Лакса-Вендроффа

Хорошо известен метод построения явных разностных схем со вторым порядком аппроксимации относительно шага по времени τ в областях гладкости решения. Введем сетку по времени $t_n = n \cdot \tau$, $n = 0, 1, \dots$. В случае переменного шага по времени $t_0 = 0$, $t_{n+1} = t_n + \tau_n$, $n = 0, 1, \dots$. Функции, относящиеся к моментам времени t_n и t_{n+1} будем отмечать верхними

индексами n и $n+1$: $q^n = q(t_n)$, $q^{n+1} = q(t_{n+1})$, $q = \rho, u, I, E, p$. Введем обозначение

$$q_t^n = \frac{q^{n+1} - q^n}{\tau_n}.$$

Опишем способ построения аппроксимаций с поправками Лакса-Вендроффа на примере уравнения неразрывности, которые понадобятся нам в дальнейшем. Используем разложение плотности в ряд Тейлора по степеням шага по времени. В разложении ограничимся слагаемыми $O(\tau^2)$:

$$\rho^{n+1} = \rho^n + \tau_n \frac{\partial \rho^n}{\partial t} + \frac{\tau_n^2}{2} \frac{\partial^2 \rho^n}{\partial t^2} + \dots$$

Выразим первую производную $\frac{\partial \rho^n}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{t=t_n}$ из уравнения неразрывности

$\frac{\partial \rho^n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)^n$. Вторую производную по времени от функции ρ получим, дифференцируя уравнение неразрывности по t и используя уравнение для импульса. Имеем

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho u^2 + p)$$

В результате получаем уравнение

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\tau_n} + \frac{\partial W_\rho^n}{\partial x} = 0, \quad W_\rho^n = (\rho u)^n - \frac{\tau_n}{2} LW_\rho^n,$$

где W_ρ^n - поток массы, $\frac{\tau_n}{2} LW_\rho^n$ - поправка Лакса-Вендроффа

$$LW_\rho^n = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p)^n$$

Аналогично находятся поправки Лакса-Вендроффа для уравнений импульса и полной энергии. Все уравнения можно записать в виде

$$\frac{q^{n+1} - q^n}{\tau_n} + \frac{\partial W_q^n}{\partial x} = 0, \quad q = \rho, I, E$$

$W_I^n = (Iu + p)^n - \frac{\tau_n}{2} LW_I^n$, $W_E^n = ((E + p)u)^n - \frac{\tau_n}{2} LW_E^n$ - поправки Лакса-Вендроффа.

Поправки Лакса-Вендроффа LW_I и LW_E можно записать, например, в виде

$$LW_I^n = \left(\frac{\partial}{\partial x} (Iu^2) + 3u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} \right)^n$$

$$LW_E^n = \left(\frac{\partial}{\partial x} ((E+p)u^2) + \left(\frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{3}{2}u^2 \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma pu \frac{\partial u}{\partial x} \right)^n.$$

Далее индекс n будем опускать.

Поправки Лакса-Вендроффа далее потребуются в специальном виде

$$LW_\rho = (u^2 + c^2) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u^2}{\partial x} + \varphi,$$

$$LW_I = (u^2 + 3c^2) \frac{\partial I}{\partial x} + 2\rho(u^2 - c^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 3u\varphi$$

$$LW_E = (u^2 + \zeta_m c^2) \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{\gamma-1} \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} m^2 - \frac{(\gamma-1)^2 m}{1 + \frac{\gamma-1}{2} m^2} \right] \rho \frac{\partial u^2}{\partial x} + \zeta_m \frac{u^2}{2} \varphi$$

где $\varphi = \frac{\partial p}{\partial x} - c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \frac{\partial S}{\partial x}$ при $p = p(\rho, S)$, S - энтропия, $c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$ - скорость

звука, $\zeta_m = \frac{1 + \frac{5}{2}(\gamma-1)m^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)m^2}$, $m = \frac{u}{c}$, $1 \leq \zeta_m \leq 5$.

Считая постоянными, «замораживая» скорость, энтропию и скорость звука, получим

$$LW_\rho = (u^2 + c^2) \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad LW_I = (u^2 + 3c^2) \frac{\partial I}{\partial x}, \quad LW_E = (u^2 + \zeta_m c^2) \frac{\partial E}{\partial x}.$$

Последние соотношения понадобятся при получении формул для искусственной вязкости.

2.3. Аппроксимация

Введем неравномерную сетку $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$ узлов по пространственной переменной x : $x_1 = 0 < x_2 < \dots < x_N = l$, а также сетку $\bar{\Omega}'_h = \Omega'_h \cup \Gamma'_h$ потоковых узлов $\bar{x}_{1/2} \equiv 0$, $\bar{x}_{i+1/2} = 0.5(x_i + x_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, $\bar{x}_{N+1/2} \equiv l$.

Граничные узлы $x_1, x_N \in \Gamma_h$, $\bar{x}_{1/2}, \bar{x}_{N+1/2} \in \Gamma'_h$. Введем шаги сеток $\bar{\Omega}_h$ и $\bar{\Omega}'_h$:

$h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, и $\bar{h}_i = \bar{x}_{i+1/2} - \bar{x}_{i-1/2}$, $i = 1, 2, \dots, N$ соответственно.

Здесь $h_1 = 0.5h_{3/2}$, $h_i = 0.5(h_{i+1/2} + h_{i-1/2})$, $i = 2, 3, \dots, N-1$, $h_N = 0.5h_{N-1/2}$. К узлам исходной сетки x_i будем относить искомые функции ρ_i , u_i , $I_i = \rho_i u_i$, E_i , p_i . К узлам потоковой сетки $\bar{x}_{i+1/2}$ отнесём разностные отношения

$$\rho_{x_{i+1/2}} = \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{h_{i+1/2}}, \quad u_{x_{i+1/2}} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} \text{ и т.д.},$$

а также средние величины

$$\bar{\rho}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\rho_{i+1} + \rho_i), \quad \bar{u}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(u_{i+1} + u_i) \text{ и т.д.}$$

На границе области положим

$$\bar{\rho}_{1/2} \equiv \rho_1, \quad \bar{u}_{1/2} = u_1, \quad \bar{\rho}_{N+1/2} \equiv \rho_N, \quad \bar{u}_{N+1/2} = u_N \text{ и т.д.}$$

К потоковым узлам будем относить сеточные аналоги потоков $W_{qi+1/2}$, $i = \overline{0, N}$, $q = \rho, I, E$.

Приведём на рисунке 1 введённые выше шаги, узлы основной и потоковой сеток на отрезке $0 \leq x \leq L$.

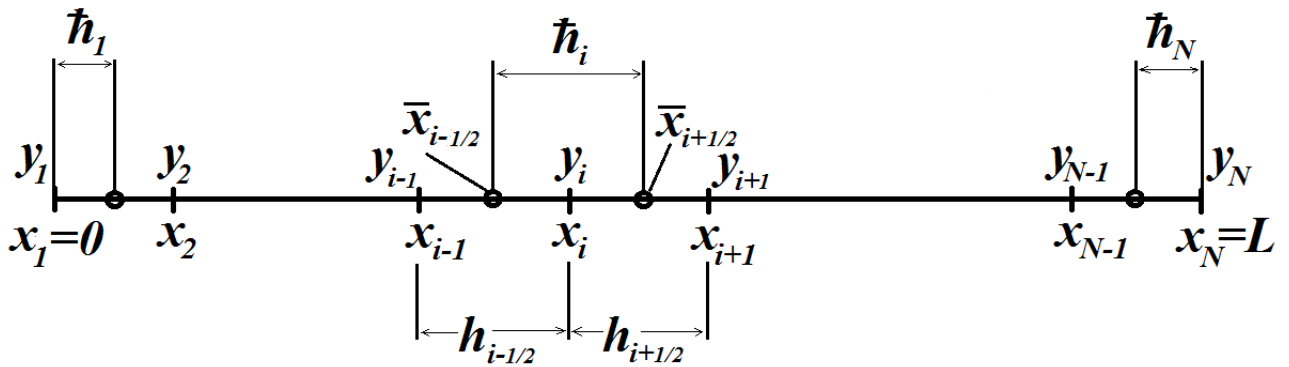


Рис. 1

Разностные отношения величин, задаваемых в потоковых узлах, определяются следующим образом

$$W_{q\hat{x}_i} = \frac{W_{qi+1/2} - W_{qi-1/2}}{h_i}, \quad i = \overline{0, N}, \quad q = \rho, I, E.$$

Потоки аппроксимируем в индексной форме следующими выражениями

$$W_{\rho i+1/2} = (\overline{\rho u})_{i+1/2} - \frac{\tau}{2}(LW_\rho)_{i+1/2}, \quad W_{u i+1/2} = (\overline{\rho u})_{i+1/2} \bar{u}_{i+1/2} + \bar{p}_{i+1/2} - \frac{\tau}{2}(LW_I)_{i+1/2},$$

$$(LW_\rho)_{i+\frac{1}{2}} = (\rho u^2 + p)_{xi+\frac{1}{2}}, \quad (LW_I)_{i+\frac{1}{2}} = (Iu^2)_{xi+\frac{1}{2}} + 3\bar{u}_{i+\frac{1}{2}} p_{xi+\frac{1}{2}} + \gamma \bar{p}_{i+\frac{1}{2}} \bar{u}_{xi+\frac{1}{2}},$$

$$W_{Ei+\frac{1}{2}} = (\overline{\rho u})_{i+\frac{1}{2}} \left\langle \frac{u^2}{2} \right\rangle_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \bar{p}_{i+\frac{1}{2}} \bar{u}_{i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} (LW_E)_{i+\frac{1}{2}},$$

$$(LW_E)_{i+\frac{1}{2}} = ((E+p)u^2)_{xi+\frac{1}{2}} + \left(\frac{\bar{c}_{i+\frac{1}{2}}^2}{\gamma-1} + \frac{3}{2} (\bar{u}_{i+\frac{1}{2}})^2 \right) p_{xi+\frac{1}{2}} + \gamma \bar{p}_{i+\frac{1}{2}} \bar{u}_{i+\frac{1}{2}} u_{xi+\frac{1}{2}}.$$

Здесь $\left\langle \frac{u^2}{2} \right\rangle_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1}u_i}{2}$, величину $\bar{c}_{i+\frac{1}{2}}^2$ определим по формуле $\bar{c}_{i+\frac{1}{2}}^2 \equiv \gamma \left| \frac{\bar{p}_{i+\frac{1}{2}}}{\bar{\rho}_{i+\frac{1}{2}}} \right|$.

Введение модуля $\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}$ связано с тем, что в некоторых задачах это отношение может быть близко к машинному нулю и отрицательно. В граничных узлах $\bar{x}_{\frac{1}{2}} = 0$ и $\bar{x}_{N+\frac{1}{2}} = l$ поправки Лакса-Вендроффа положим равными нулю,

$$LW_{q\frac{1}{2}} = LW_{qN+\frac{1}{2}} = 0, \quad q = \rho, I, E,$$

чтобы обеспечить дивергентность разностной схемы.

Разностную аппроксимацию уравнений запишем в компактном виде:

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau_n} + \frac{W_{qi+\frac{1}{2}}^n - W_{qi-\frac{1}{2}}^n}{\bar{h}_i} = 0, \quad q = \rho, I, E.$$

Коротко последнее уравнение можно записать так

$$q_{ii}^n + W_{q\hat{x}i}^n = 0.$$

Если возмущения не достигли границ области, то в граничных узлах, как описано выше, будем ставить те же значения искомым функций, что и в начальный момент времени, на стоке положим $q_{x\frac{3}{2}} = q_{xN-\frac{1}{2}} = 0$, $q = \rho, I, E$. На жестких стенках полагаем равной нулю скорость u и потоки W_ρ, W_E . В граничных узлах $\bar{x}_{\frac{1}{2}} \equiv 0$ и $\bar{x}_{N+\frac{1}{2}} \equiv l$ в области втекания газа считаем потоки заданными потоки $W_{q\frac{1}{2}}$ и $W_{qN+\frac{1}{2}}$, $q = \rho, I, E$.

Из условия $u = 0$ в граничных точках $x = 0$ и $x = l$ следует, что $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ и

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 0.$$

2.4. Искусственная вязкость

Хорошо известно из численного эксперимента и оценок [37], что контактный разрыв (КР), рассчитываемый по описанной выше разностной схеме, со временем размывается. Как показано в [37], величина размывания порядка \sqrt{t} .

С другой стороны, получающееся решение оказывается немонотонным (см. [37]). Вдоль координаты x возникают осцилляции, имеющие сеточную природу. Это означает, что схемная вязкость, содержащаяся также и в поправках Лакса-Вендроффа, недостаточна для монотонности решения. Чтобы избавиться от осцилляций, в разностную схему вводят дополнительные диссипативные слагаемые с искусственной вязкостью, монотонизирующие сеточное решение на каждом временном слое. Вязкость нужно ввести так, чтобы она не увеличивала уже имеющееся размывание КР и подавляла осцилляции.

Отметим, что осцилляции возникают в областях постоянства решения между разрывами решения и его производных. В правую часть уравнений добавим диссипативные слагаемые следующего вида:

$$L(\mu)q = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial q}{\partial x} \right), \quad q = \rho, I, E,$$

где μ - искусственная вязкость. Диссипативные слагаемые малы в областях, где $q = const$. В разностном виде диссипативное слагаемое запишем в виде

$$(L_h(\mu)q)_i = \frac{1}{h_i} \left[\mu_{i+1/2} \frac{q_{i+1} - q_i}{h_{i+1/2}} - \mu_{i-1/2} \frac{q_i - q_{i-1}}{h_{i-1/2}} \right] = (\mu q_x)_{xi}, \quad q = \rho, I, E.$$

Положим $u = u_0$ и $p = p_0$ (u_0, p_0 - постоянные), тогда уравнения для импульса I и полной энергии E превращаются в уравнение неразрывности, умноженные соответственно на u_0 и $\frac{u_0^2}{2}$. Чтобы это имеет место и для уравнений с диссипативными слагаемыми, искусственную вязкость μ выберем одной и той же для всех уравнений (для ρ, I и E).

Замечание. Аппроксимация диссипативных слагаемых $(L_n(\mu)q)_i = (\mu q_x)_{\hat{x}_i}$ удобна при монотонизации сеточного аналога конвективных слагаемых $\frac{\partial}{\partial x}(uq)$, $q = \rho, I$. Однако ситуация в уравнении полной энергии иная. В уравнении для полной энергии конвективные слагаемые имеют вид $\frac{\partial}{\partial x}(u(E+p))$. В связи с этим можно ввести сеточную диссипацию в виде $(L_n(\mu)E)_i = (\mu(E+p)_x)_{\hat{x}_i}$, монотонизируя величину $E+p$. Эта аппроксимация используется при расчётах задач 2 и Noh [94] (приведённых ниже). В задаче 2, используя эту аппроксимацию удалось приблизиться к точному решению, выбрав $Ku = 0.1$ (рис. 11), а в задаче Noh уменьшить провал плотности в центре расчётной области (рис. 12а,б,в). В остальных задачах можно использовать любую аппроксимацию.

Найдем искусственную вязкость μ .

Осцилляции сеточной природы будут отсутствовать, если разностная схема удовлетворяла условиям принципа максимума, для чего наложить соответствующие условия на коэффициенты разностной схемы. Сделать это аккуратно для системы квазилинейных уравнений сложно. Поэтому проведем монотонизацию приближенно, используя принцип «замороженных коэффициентов».

Проведём эту процедуру для уравнения неразрывности

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\tau_n} + \frac{(W_\rho)_{i+\frac{1}{2}}^n - (W_\rho)_{i-\frac{1}{2}}^n}{\hat{h}_i} = (L_n(\mu^{n+1})\rho^n)_i$$

В этом уравнении «заморозим» шаг сетки, скорость, скорость звука, искусственную вязкость и энтропию, полагая во всех узлах $h = \hat{h}_{i_0}$, $u = u_{i_0}$, $c = c_{i_0}$, $\mu = \mu_{i_0}$ и $S = S_{i_0}$, где x_{i_0} любой из узлов сетки. Зададимся также постоянным шагом по времени $\tau = \tau_n$. Поправки Лакса-Вендроффа можно преобразовать, как это было сделано выше для дифференциального случая, к виду

$$(LW_\rho)_{i+\frac{1}{2}} = (u^2 + c^2) \rho_{xi+\frac{1}{2}}.$$

Тогда для сеточной функции ρ_i получим уравнение:

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\tau} + u \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n}{2h} = \left(\frac{\tau}{2} (u^2 + c^2) + \mu \right) \frac{\rho_{i+1}^n - 2\rho_i^n + \rho_{i-1}^n}{h^2}$$

Запишем это уравнение в трехточечном виде

$$\rho_i^{n+1} = A\rho_{i+1}^n + B\rho_i^n + C\rho_{i-1}^n,$$

где

$$A = -\frac{\tau}{2h}u + \frac{\tau^2}{2h^2}(u^2 + c^2) + \frac{\tau}{h^2}\mu, \quad C = \frac{\tau}{2h}u + \frac{\tau^2}{2h^2}(u^2 + c^2) + \frac{\tau}{h^2}\mu, \quad B = 1 - (A + C),$$

т.е. $A + B + C = 1$.

Чтобы имел место принцип максимума, коэффициенты A , B , C должны быть положительными и $A + B + C \leq 1$, тогда

$$\max_i |\rho_i^{n+1}| \leq \max_i |\rho_i^n|.$$

Условия $A > 0$ и $C > 0$ будут выполнены, если

$$-\frac{\tau}{2h}|u| + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{h} \sqrt{u^2 + c^2} \right)^2 + \frac{\tau}{h^2} \mu > 0$$

или

$$\mu > M_{\min}^{(\rho)} = \frac{h}{2}|u| - \frac{\tau}{2}(u^2 + c^2).$$

Заменим $u^2 + c^2$ меньшей величиной $|u|\sqrt{u^2 + c^2}$ и потребуем выполнения более сильного условия

$$\mu \geq \mu_{\min}^{(\rho)} = \frac{h}{2}|u| \left(1 - \frac{\tau}{h} \sqrt{u^2 + c^2} \right) > M_{\min}^{(\rho)}$$

Требование $B > 0$ приводит к неравенству

$$\mu < M_{\max}^{(\rho)} = \frac{h^2}{2\tau} \left(1 - \left(\frac{\tau}{h} \sqrt{u^2 + c^2} \right)^2 \right).$$

Введём число Куранта - параметр Ku , и шаг по времени будем находить из соотношения

$$Ku = \frac{\tau}{h} \sqrt{u^2 + c^2}.$$

Искусственная вязкость будет положительной ($\mu > 0$) при выполнении естественного неравенства $Ku \leq 1$. Тогда

$$\frac{h}{\tau} > \sqrt{u^2 + c^2}.$$

Используем последнее неравенство и заменим в первом множителе $M_{\max}^{(\rho)}$ величину $\frac{h}{\tau}$ на меньшую $\sqrt{u^2 + c^2}$.

Потребуем, чтобы

$$\mu \leq \mu_{\max}^{(\rho)} = \frac{h}{2} \sqrt{u^2 + c^2} \left(1 - \left(\frac{\tau}{h} \sqrt{u^2 + c^2} \right)^2 \right) < M_{\max}^{(\rho)}.$$

Итак, для приближенного выполнения принципа максимума, должны быть выполнены неравенства

$$\mu_{\min}^{(\rho)} \leq \mu \leq \mu_{\max}^{(\rho)}.$$

Обе вязкости $\mu_{\min} = \mu_{\min}^{(\rho)}$ и $\mu_{\max} = \mu_{\max}^{(\rho)}$ будут использоваться ниже.

«Разморозим» выражения для вязкости, возвращаясь к индексной форме, получим:

$$\begin{aligned} (\mu_{\min})_{i+1/2}^n &= \frac{h_{i+1/2}}{2} \left| \bar{u}_{i+1/2}^n \right| \left(1 - \frac{\tau_n}{h_{i+1/2}} \sqrt{\left(\bar{u}_{i+1/2}^n \right)^2 + \left(\bar{c}_{i+1/2}^n \right)^2} \right), \\ (\mu_{\max})_{i+1/2}^n &= \frac{h_{i+1/2}}{2} \sqrt{\left(\bar{u}_{i+1/2}^n \right)^2 + \left(\bar{c}_{i+1/2}^n \right)^2} \left(1 - \left(\frac{\tau_n}{h_{i+1/2}} \sqrt{\left(\bar{u}_{i+1/2}^n \right)^2 + \left(\bar{c}_{i+1/2}^n \right)^2} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

На границе полагаем $(\mu_{\max})_{i+1/2}^n = (\mu_{\min})_{i+1/2}^n = 0$, $i = 0, N$.

Шаг по времени при переходе к индексной форме записи определяем из равенства:

$$Ku = \tau_n \max_i \left(\frac{1}{h_{i+1/2}} \sqrt{\left(\bar{u}_{i+1/2}^n \right)^2 + \left(\bar{c}_{i+1/2}^n \right)^2} \right).$$

2.5. Число Куранта

При введении искусственной вязкости $\mu_{\min}^{(\rho)}$, $\mu_{\max}^{(\rho)}$ использовалось уравнение неразрывности. Найдём выражения для искусственной вязкости, используя уравнения для импульса и полной энергии. Поправки Лакса-Вендроффа в потоках массы, импульса и полной энергии при фиксированных («замороженных») коэффициентах: шаге сетки h , скорости u , скорости звука c , искусственной вязкости μ и энтропии S ($\partial p / \partial x = c^2 \partial \rho / \partial x$) можно записать в виде

$$LW_{\rho} = (u^2 + c^2) \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad LW_I = (u^2 + 3c^2) \frac{\partial I}{\partial x}, \quad LW_E = (u^2 + \zeta c^2) \frac{\partial E}{\partial x},$$

где $\zeta = \zeta_m = \frac{1 + \frac{5}{2}(\gamma - 1)m^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)m^2}$, $m = \frac{u}{c}$.

Введём величины

$$x_{\rho} = \frac{\tau}{h} \sqrt{u^2 + c^2}, \quad x_I = \frac{\tau}{h} \sqrt{u^2 + 3c^2}, \quad x_E = \frac{\tau}{h} \sqrt{u^2 + \zeta c^2}.$$

Выражения для вязкостей $\mu_{\min}^{(q)}$, $\mu_{\max}^{(q)}$, $q = I, E$ можно найти, повторяя предыдущие рассуждения. Лишь в уравнении для импульса величину $\bar{p}_{\hat{x}_i}^n$ нужно отнести к правой части уравнения и не использовать при вычислении $\mu_{\min}^{(I)}$, $\mu_{\max}^{(I)}$. Выражения для вязкости $\mu_{\min}^{(q)}$, $\mu_{\max}^{(q)}$, $q = I, E$ можно сразу получить, заменяя в $\mu_{\min}^{(\rho)}$ и $\mu_{\max}^{(\rho)}$ величину x_{ρ} на x_q , $q = I, E$. Имеем

$$\mu_{\min}^{(q)} = \frac{h}{2} |u| (1 - x_q), \quad \mu_{\max}^{(q)} = \frac{h^2}{2\tau} x_q (1 - x_q^2), \quad q = \rho, I, E.$$

Положительность $\mu_{\min}^{(q)}$, $\mu_{\max}^{(q)}$ имеет место при

$$x_q < 1, \quad q = \rho, I, E.$$

Как описано выше, по заданному числу Куранта, параметру Ku , шаг по времени τ будем определять из условия

$$Ku = \frac{\tau}{h} \sqrt{u^2 + c^2}.$$

Поскольку $Ku = x_{\rho}$, то при $x_{\rho} < 1$ имеем первое ограничение на число Ku :

$$Ku < 1.$$

Умножим и разделим неравенства $x_q < 1$, $q = I, E$ на $\sqrt{u^2 + c^2}$. В результате чего получим ещё два ограничения на число Ku :

$$Ku \leq \sqrt{\frac{m^2 + 1}{m^2 + 3}} \quad (q = I), \quad Ku \leq \sqrt{\frac{m^2 + 1}{m^2 + \zeta_m}} \quad (q = E), \quad \text{где } m = \frac{u}{c}.$$

Потребуем, чтобы эти неравенства выполнялись при всех m . Соответственно, получим

$$Ku \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (q = I), \quad Ku \leq 1 / \sqrt{1 + \left(2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)^2} \quad (q = E).$$

Наиболее сильное из приведенных трех условий при $\gamma < 5.87$ - $Ku \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.58$.

Наибольшие значения для минимальной и максимальной вязкости достигаются при одних и тех же значениях $x_q = 0$ и $x_q = 1/\sqrt{3}$. Они равны

$$\mu_{\min}^{(q)} = \frac{h}{2}|u|, \quad \mu_{\max}^{(q)} \cong 0.17h\sqrt{u^2 + c^2}.$$

При $Ku \cong 0.58$

$$\mu_{\min}^{(\rho)} \cong 0.21h|u|, \quad \mu_{\max}^{(\rho)} \cong 0.33h\sqrt{u^2 + c^2}.$$

Приведённые выше оценки дают представления о величинах вязкости и числе Ku . Тестовые одномерные задачи предлагаемым методом удалось просчитать при $Ku = 0.6$ и вязкости $\mu_{\min}^n = \left(\mu_{\min}^{(\rho)}\right)^n$, $\mu_{\max}^n = \left(\mu_{\max}^{(\rho)}\right)^n$. При $Ku = 0.7$ сеточное решение становилось неустойчивым.

Если выбирать искусственную вязкость μ близкой к $M_{\min}^{(\rho)}$ или $M_{\max}^{(\rho)}$, то можно попасть в область немонотонности сеточного решения. Это связано с тем, что величины $M_{\min}^{(\rho)}$ и $M_{\max}^{(\rho)}$ найдены приближённо для «замороженных» коэффициентов схемы. В связи с этим искусственная вязкость выбиралась следующим образом: $M_{\min}^{(\rho)} < \mu_{\min}^{(\rho)} < \mu$ и $\mu < \mu_{\max}^{(\rho)} < M_{\max}^{(\rho)}$.

Также отметим, что можно ещё несколько увеличить вязкость $\mu_{\min}^{(\rho)}$, полагая

$$\hat{\mu}_{\min} = \frac{h}{2} \max(|u|, |c|) \left(1 - \frac{\tau}{h} \sqrt{u^2 + c^2} \right) > M_{\min}^{(\rho)} \quad \text{или} \quad \hat{\mu}_{\min} = \frac{h}{2} \sqrt{u^2 + c^2} \left(1 - \frac{\tau}{h} \sqrt{u^2 + c^2} \right) > M_{\min}^{(\rho)}.$$

Можно $\mu_{\min}^{(\rho)}$ определять как сумму предыдущих вязкостей с весами (сумма весов равна единице). Рассматривать вязкости, зависящие от весов – параметров, не будем.

В начальный момент найти число Ku_{\max} проще всего с помощью численного эксперимента. Нужно задать подходящее число Ku ($Ku = 0.5$) и провести временной счет по излагаемому ниже методу. Шаг τ_n , как сказано выше, определяется из условия

$$Ku = \tau_n \max_i \left(\frac{1}{h_{i+1/2}} \sqrt{\left(\bar{u}_{i+1/2}^n \right)^2 + \left(\bar{c}_{i+1/2}^n \right)^2} \right).$$

Если число Ku выбрано слишком большим, то, как показывает опыт, решение быстро становится неустойчивым (быстро возрастает, теряет устойчивость и временной шаг τ_n также быстро стремится к нулю). В этом случае нужно уменьшить число Ku и повторить расчет. Если решение устойчиво, то число Ku можно соответственно увеличить и т.д.

Если решение находить по явной разностной схеме

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau_n} + (W_q^n)_{\hat{x}_i} = (\mu^n q_x^n)_{\hat{x}_i},$$

То, поскольку любая из искусственных вязкостей μ_{\max} и μ_{\min} порядка h , быстро произойдет сильное размывание контактного разрыва (КР), что плохо. Пути решения этой проблемы излагаются в следующем параграфе.

2.6. Область введения искусственной вязкости.

Введение диссипативных слагаемых приводит к сильному размыванию КР. Решение этой проблемы состоит в следующем – не нужно вводить искусственную вязкость в области КР. Также нет необходимости вводить искусственную вязкость в области волны разряжения (ВР). С другой

стороны, искусственную вязкость нужно вводить в области ударной волны (УВ) и волны сжатия (ВС). Это обеспечивает монотонность решения на УВ. Также необходимо вводить искусственную вязкость в области осциллирующих решения, чтобы их подавить. Естественно, на УВ следует вводить минимальную вязкость μ_{\min} , чтобы не сильно размывать УВ, а в области осциллирующих (ОС) - максимальную вязкость μ_{\max} , чтобы избавиться от них. В остальных частях расчетной области нужно положить $\mu = 0$.

Чтобы реализовать эту идею, нужно определить сеточные области, занятые КР, ВР, УВ и ОС. Как их найти?

На каждом временном шаге τ_n решение будем находить в два этапа, первый который назовем «предиктором» и второй – «корректором». В дальнейшем будем говорить о предикторном и корректорном решении, опуская кавычки.

Пусть в момент времени t_n заданы функции

$$q_i^n = \rho_i^n, I_i^n = (\rho u)_i^n, E_i^n, p_i^n.$$

С их помощью по заданному числу Ku находим τ_n и $t_{n+1} = t_n + \tau_n$. Затем находим предиктор – предикторное решение при $t = t_{n+1}$. На этапе предиктор искусственную вязкость вводить не будем. Решение находится по описанной выше явной разностной схеме с поправками Лакса-Вендроффа. Предикторное решение будем отмечать значком тильда. Итак по q^n находится

$$\tilde{q}_i^{n+1} = \tilde{\rho}_i^{n+1}, \tilde{I}_i^{n+1} = \tilde{u}_i^{n+1} \tilde{\rho}_i^{n+1}, \tilde{E}_i^{n+1}, \tilde{p}_i^{n+1}.$$

Затем на втором этапе – корректоре, предикторное решение исправляется с помощью введения в уравнение диссипативных слагаемых с искусственной вязкостью, монотонизирующих решение – сглаживающих осцилляции, приводящих к исчезновению выброса за УВ и провала за КР или его значительному уменьшению. Получаемое корректорное решение

$$q_i^{n+1} = \rho_i^{n+1}, I_i^{n+1} = u_i^{n+1} \rho_i^{n+1}, E_i^{n+1}, p_i^{n+1}$$

и есть решение на временном слое t_{n+1} .

Между этими двумя этапами, и это главное в предлагаемом методе, проводится анализ предикторного решения и находятся области – интервалы $h_{i+1/2}$, занятые ВР, УВ, КР, ОС, и строится искусственная вязкость

$$\mu_{i+1/2}^{n+1} = \begin{cases} (\mu_{\max}^n)_{i+1/2}, & h_{i+1/2} \subset OC \\ (\mu_{\min}^n)_{i+1/2}, & h_{i+1/2} \subset UB \text{ (BC – волна сжатия)} \\ 0, & h_{i+1/2} \subset KP, BP \end{cases}$$

Итак, займемся анализом предикторного решения. Продифференцируем уравнение состояния $\tilde{p} = (\gamma - 1) \tilde{\rho} \tilde{\varepsilon}$:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = (\gamma - 1) \left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x} \tilde{\rho} + \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} \tilde{\varepsilon} \right).$$

На размытом сеточной вязкостью КР производная $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$ конечна, производные

$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x}$ и $\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}$ велики. Чтобы равенство было выполнено, производные $\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x}$ и $\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}$

должны иметь противоположные знаки. Заменяем $\tilde{\varepsilon}$ на $\frac{\tilde{p}}{(\gamma - 1) \tilde{\rho}}$, тогда на КР

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \right) \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} < 0, \quad x \in KP.$$

На УВ и ВР неравенство имеет противоположные знаки. На ударной волне справедливо неравенство

$$\frac{\partial u}{\partial x} < 0, \quad x \in UB \text{ (} x \in BC \text{ – волне сжатия)}.$$

На ВР последнее неравенство имеет противоположный знак.[33,34]

Пусть $\tilde{\rho}_i^{n+1}, \tilde{I}_i^{n+1} = (\tilde{\rho} \tilde{u})_i^{n+1}, \tilde{E}_i^{n+1}, \tilde{p}_i^{n+1}$ - предикторное решение.

Если $\frac{\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}\right)_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}\right)_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} \frac{\tilde{\rho}_{i+1}^{n+1} - \tilde{\rho}_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} < 0$, то $h_{i+1/2} \in KP$, а если $\frac{\tilde{u}_{i+1}^{n+1} - \tilde{u}_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} < 0$, то

$h_{i+1/2} \notin ВР, h_{i+1/2} \in УВ.$

Найдя предикторное решение, можно проверить выполнение сначала первого, а затем второго условия. Если оба условия будут выполнены, то $h_{i+\frac{1}{2}} \in \text{УВ (ВС)}$ и надо положить

$$\mu_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = (\mu_{\min})_{i+\frac{1}{2}}^n, h_{i+\frac{1}{2}} \in \text{УВ (ВС)}.$$

Если хотя бы одно из условий не выполнено, то

$$\mu_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = 0, h_{i+\frac{1}{2}} \in \text{КР} \text{ или } h_{i+\frac{1}{2}} \in \text{ВР}.$$

Проводились проверки других дополнительных условий, но они оказались ненужными. Приведенные выше неравенства можно записать иначе. Введем единичный вектор (градиент) от функции $\tilde{\rho}$

$$\vec{\ell} = \frac{\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}}{\left| \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} \right|}.$$

Тогда первое и второе условие запишутся в виде

$$\frac{\partial}{\partial \vec{\ell}} \left(\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}} \right) > 0, x \notin \text{КР}, \quad \frac{\partial \tilde{u}_\ell}{\partial \vec{\ell}} < 0, x \notin \text{ВР}, x \in \text{УВ}.$$

Здесь \tilde{u}_ℓ - проекция скорости \tilde{u} на направление $\vec{\ell}$. Последние условия понадобятся при рассмотрении задач в случае двух ($d=2$) и трех ($d=3$) измерений.

Теперь о введении вязкости в области осциллирующего решения. Будем считать, что решение осциллирует, если выполнено неравенство

$$\frac{\tilde{\rho}_{i+1}^{n+1} - \tilde{\rho}_i^{n+1}}{h_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\tilde{\rho}_i^{n+1} - \tilde{\rho}_{i-1}^{n+1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} < 0, \text{ то } x_i \in \text{ОС},$$

Разности $\tilde{\rho}_{xi+\frac{1}{2}}^{n+1}$ и $\tilde{\rho}_{xi-\frac{1}{2}}^{n+1}$ имеют противоположные знаки. В этом случае на обоих отрезках $h_{i+\frac{1}{2}}$ и $h_{i-\frac{1}{2}}$ введем в диссипативных слагаемых вязкости

$$\mu_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = (\mu_{\max})_{i+\frac{1}{2}}^n, \mu_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} = (\mu_{\max})_{i-\frac{1}{2}}^n$$

На рис.2 показано, как вводится искусственная вязкость на корректорном решении задачи о распаде разрыва, часто используемой при тестировании качества разностной схемы. Все параметры задачи (правые и левые значения

функции на разрыве в начальный момент времени, шаг сетки, число Ku , время и т.д.) приведены на рис.2. Вся область $0 \leq x \leq 300$ оказалась разбитой

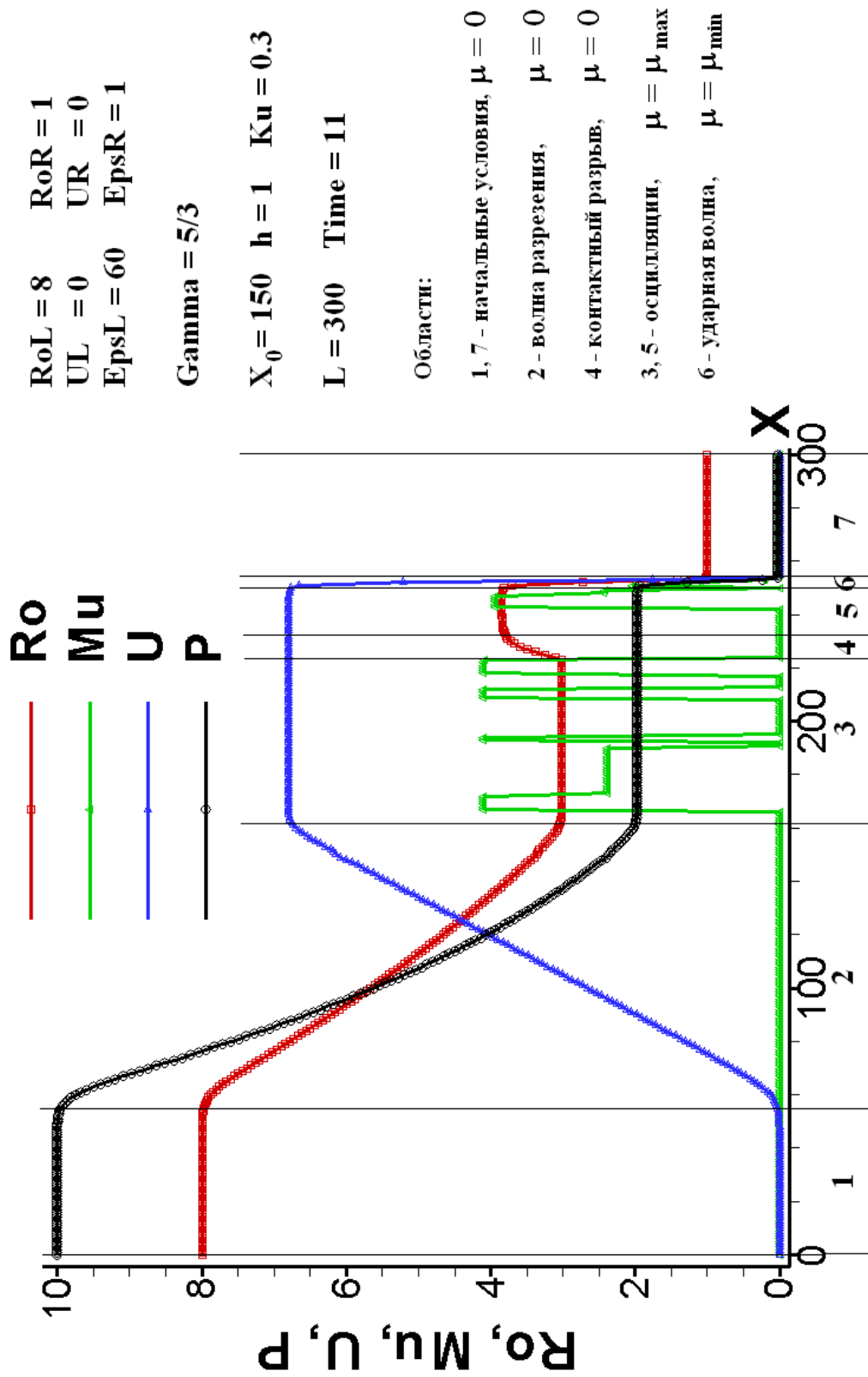


Рис.2

на 7 подобластей. Области 1 и 7 – начальные данные ($\mu = 0$), область 2 занята ВР ($\tilde{u}_x > 0$) ($\mu = 0$). Области 3 и 5 константной части решения содержат малые осцилляции ($\tilde{\rho}_x \tilde{\rho}_x < 0$), не видимые на рисунке ($\mu = \mu_{\max}$). Область 4 – КР ($\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}\right)_x \tilde{\rho}_x < 0$) ($\mu = 0$), область 6 – УВ ($\tilde{u}_x < 0$) ($\mu = \mu_{\min}$).

Расстановку искусственной вязкости можно описать двумя циклами

do $i = 1, N - 1$

$$\mu_{i+1/2}^{n+1} = 0$$

if $\left(\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \right)_{xi+1/2}^{n+1} \tilde{\rho}_{xi+1/2}^{n+1} > 0 \right)$ *then*

if $\left(\tilde{u}_{xi+1/2}^{n+1} < 0 \right)$ *then*

$$\mu_{i+1/2}^{n+1} = (\mu_{\min})_{i+1/2}^n$$

endif

endif

enddo

do $i = 2, N - 1$

if $\left(\tilde{\rho}_{xi+1/2}^{n+1} \tilde{\rho}_{xi-1/2}^{n+1} < 0 \right)$ *then*

$$\mu_{i+1/2}^{n+1} = (\mu_{\max})_{i+1/2}^n$$

$$\mu_{i-1/2}^{n+1} = (\mu_{\max})_{i-1/2}^n$$

endif

enddo

В этих же циклах можно вычислять вязкие потоки, предварительно положив их нулями,

$$W_{\mu q i+1/2}^n = \mu_{i+1/2}^{n+1} q_{xi+1/2}^n, \quad q^n = \rho^n, I^n, E^n.$$

Затем вычисляются диссипативные слагаемые

$$\left(L_h(\mu^{n+1}) q^n \right)_i = \frac{1}{h_i} \left(W_{\mu q i+1/2}^n - W_{\mu q i-1/2}^n \right), \quad q^n = \rho^n, I^n, E^n$$

Вязкость вычисляется по значениям функции на слое $t = t_n$, $q = q^n$.

Уместны два замечания:

1. Имеются задачи, при решении которых надо проявлять осторожность с введением искусственной вязкости. При больших перепадах давления в задачах о распаде разрывов, искусственной вязкости для монотонизации схемы может не хватить в окрестности точки x_i выброса за УВ. В этом случае можно ввести максимальную вязкость

$\mu = \mu_{\max}$ не только в узлах $x_{i\pm\frac{1}{2}}$ соседних с x_i , но и дополнительно в узлах $x_{i\pm\frac{3}{2}}$, принадлежащих Ω'_h .

2. Если в задаче в узле x_i скорость u_i и скорость звука c_i близки к нулю, то и искусственная вязкость будет малой. В этом случае также нужно ввести максимальную искусственную вязкость в потоковых узлах $x_{i\pm\frac{1}{2}}$.

2.7. Метод адаптивной искусственной вязкости для решения одномерных задач газовой динамики.

Фактически метод АИВ уже описан выше. Вначале (на первом этапе) по значениям функций $q_i^n = \rho_i^n, I_i^n = (\rho u)_i^n, E_i^n, p_i^n$ при $t = t_n$ и выбранном вначале расчета числу Куранта Ku находится шаг по времени τ_n , $t_{n+1} = t_n + \tau_n$ и предикторное решение $\tilde{q}_i^{n+1} = \tilde{\rho}_i^{n+1}, \tilde{I}_i^{n+1} = (\tilde{\rho}\tilde{u})_i^{n+1}, \tilde{E}_i^{n+1}, \tilde{p}_i^{n+1}$ по разностной схеме без искусственной вязкости ($\mu = 0$)

$$\frac{\tilde{q}_i^{n+1} - q_i^n}{\tau_n} + \frac{(W_q)_{i+\frac{1}{2}}^n - (W_q)_{i-\frac{1}{2}}^n}{h_i} = 0, \quad q = \rho, I, E$$

$$\tilde{p}_i^{n+1} = (\gamma - 1) \left(\tilde{E}_i^{n+1} - \tilde{\rho}_i^{n+1} \frac{(\tilde{u}_i^{n+1})^2}{2} \right)$$

На этом этапе добавляются естественным образом граничные условия.

Затем по $\tilde{\rho}_i^{n+1}$, $\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}\right)_i^{n+1}$ и $\tilde{u}_i^{n+1} = \frac{\tilde{I}_i^{n+1}}{\tilde{\rho}_i^{n+1}}$ определяются интервалы $h_{i+\frac{1}{2}}$, на которых должно рассчитывать $\mu_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}$ по одной из формул $\mu_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = (\mu_{\min})_{i+\frac{1}{2}}^n$ при выполнении условий $\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{n+1} \tilde{\rho}_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{n+1} > 0$ и $\tilde{u}_x^{n+1} < 0$, либо $\mu_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = (\mu_{\max})_{i+\frac{1}{2}}^n$ и $\mu_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} = (\mu_{\max})_{i-\frac{1}{2}}^n$ при выполнении условия $\tilde{\rho}_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{n+1} \tilde{\rho}_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{n+1} < 0$. На остальных

интервалах $h_{i+\frac{1}{2}}$ полагается $\mu_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = 0$. Формулы для вычисления $(\mu_{\max})_{i+\frac{1}{2}}^n$ и $(\mu_{\min})_{i+\frac{1}{2}}^n$ приведены выше.

Затем на втором этапе расчета находится корректорное решение $q_i^{n+1} = \rho_i^{n+1}, I_i^{n+1} = (\rho u)_i^{n+1}, E_i^{n+1}, p_i^{n+1}$ - значения функций на новом временном слое t_{n+1} :

$$\frac{q_i^{n+1} - \tilde{q}_i^{n+1}}{\tau_n} = (L_n(\mu^{n+1})q^n)_i, \quad q = \rho, I, E,$$

$$p_i^{n+1} = (\gamma - 1) \left(E_i^{n+1} - \rho_i^{n+1} \frac{(u_i^{n+1})^2}{2} \right).$$

Переход от временного слоя t_n к слою t_{n+1} завершен.

При сложении предикторного и корректорного уравнения, предикторные величины исчезают и получается явная разностная схема

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau_n} + (W_q^n)_{\hat{x}_i} = (\mu^{n+1} q_x^n)_{\hat{x}_i}, \quad q = \rho, I, E,$$

для монотонизации которой была введена искусственная вязкость. Искусственная вязкость вычисляется по значениям функций с предыдущего временного слоя, а области её введения определяются по предикторным значениям функций с верхнего временного слоя.

При этом в областях КР и ВР диссипативные слагаемые отсутствуют, что не дает дополнительного размывания КР, а на ВР достигается аппроксимация порядка $\tau^2 + h^2$ (на равномерной сетке).

Осцилляции решения возникают, как правило, в областях постоянства решения между точками разрыва решения и его производных. Функции на предыдущем временном слое были уже сглажены подобной же процедурой. В области, где решение близко к постоянному, разностные отношения $q_{x_{i+\frac{1}{2}}} \approx 0$, $q = \rho, I, E$ и диссипативные слагаемые оказываются малыми, хотя искусственные вязкости μ_{\min}, μ_{\max} порядка h и, вообще говоря, не малы. Диссипативные слагаемые существенны в окрестностях сильных и слабых

разрывов, где разрывна искусственная вязкость. Искусственная вязкость $\mu = \mu_{\min}$ влияет на решение фактически лишь в области УВ и перемещается вместе с ударной волной. Полученное решение, как показали расчёты, после двух этапов не требует дополнительного уточнения в определении областей КР, ВР и УВ.

Решение задачи со временем меняется. Перемещаются УВ, КР, изменяется область, занятая ВР. Соответственно изменяются и области введения искусственной вязкости. Искусственная вязкость будет монотонизировать решение и адаптировать разностную схему к решению задачи, полученной на этапе предиктора. Эта особенность определила название метода – метод «АИВ» - адаптивной искусственной вязкости (AAV – Adaptive Artificial Viscosity). Адаптивной искусственной вязкостью является и неймановская вязкость [3], применяемая при решении уравнений газовой динамики в лагранжевых переменных.

Ранее адаптация сеточного решения к дифференциальному осуществлялась за счет перестройки сетки узлов. Сетка измельчалась в области резкого изменения решения – в области КР и УВ. В предлагаемом методе АИВ также можно к адаптации разностной схемы с помощью искусственной вязкости добавить адаптацию, основанную на измельчении или перестройки сетки. Выше было показано, как с помощью предикторного решения найти интервалы $h_{i+1/2}$, принадлежащие КР и УВ. Лишь эти интервалы нужно измельчать, уменьшая во столько же раз шаг τ_n . Далее можно снова провести расчет, но уже лишь в выделенной области, выходя на $t = t_{n+1}$ слой. На этом завершим рассмотрение вопроса адаптации сетки к решению задачи.

Приведем примеры расчетов по предложенному методу Адаптивной Искусственной Вязкости.

2.8. Численные эксперименты

Теперь, опираясь на результаты численных экспериментов; посмотрим, насколько хорошо предложенный метод АИВ передает движение фронтов УВ, КР, отражение УВ от жесткой стенки, распад разрыва при больших и малых скачках функций в начальный момент времени.

1. Задача о стоячей ударной волне. На рис.3 представлено решение газодинамической задачи в виде стоячей, практически неподвижной УВ, возникающей при задании начального разрыва в точке x_0 ($x_0 = 50$). Величины ρ , u , p , ε (Ерс-внутренняя энергия) справа и слева от разрыва приведены на рис.3. Расчет велся с $h=1$ на отрезке длины $L=100$ до $t=100$ при $\gamma=1.4$ и при числе $Ku=0.6$. В большинстве задач при числе $Ku=0.7$ решение становилось неустойчивым и немонотонным. Большая часть приводимых ниже расчетов велась при числе Ku от 0.3 до 0.6. На рис. 3 видно, что УВ оказалась размытой на 4-5 счетных интервалах, искусственная вязкость μ приводится под названием Mu , а диссипативное слагаемое под названием Lh_Ro . Вязкость достаточно велика в константной области решения ($\mu = \mu_{\max}$), где возникли осцилляции, но диссипативные слагаемые близки к нулю в силу постоянства решения. Эти осцилляции малы и не видны на рис. 3. Диссипативные слагаемые $(L_h(\mu^{n+1})q^n)_i$, вычисляемые по значениям функций, уже сглаженным на предыдущем временном слое, велики лишь в окрестности УВ, являющейся источником осцилляций, где сильно меняется искусственная вязкость.

2. Задача отражения УВ от жесткой стенки. На рис. 4 приведены ρ , u , и p в последовательные 6 моментов времени падения и отражения ударной волны от жесткой стенки, при $x_N = L = 100$. На жесткой стенке задавались $(W_\rho)_N = 0$, $(W_E)_N = 0$ и $u_N = 0$. За фронтом отраженной ударной волны скорость оказалась равной нулю. На нескольких интервалах h у жесткой стенки остался выброс плотности, не видимый на рисунке.

3. Задача о движении двух КР. На рис. 5 показано движение двух КР. Плотность между разрывами $\rho = 4$, вне $\rho = 1$. В начальный момент разрывы находились в точках $x_1 = 20$ и $x_2 = 60$. В начальный момент и во всё время в граничных узлах отрезка $u = 1$, $p = 0.1$. На рисунке показаны эти же разрывы, прошедшие 100 и 400 интервалов h ($h = 1$, $L = 500$). Скорость и давление при движении не изменились в расчёте. Размывание δ разрывов оказалось равным $\delta = \sqrt{h\Delta}$ при $u = 1$, где Δ - пройденный разрывом путь. Тогда

$$\delta \approx \sqrt{|uh|} \sqrt{t}$$

(см. [34]).

4. Задача о распаде разрыва при большом скачке плотности и давления. На рис. 2 представлено корректорное решение – величины ρ, μ, u, p задачи о распаде разрыва при большом скачке давления от 320 до $\frac{2}{3}$ и плотности от 8 до 1 на момент времени $t = 11$ ($L = 300$, $h = 1$, $x_0 = 150$, $\gamma = \frac{5}{3}$). На рис. 6 решение этой же задачи приводится на более ранний момент времени $t = 4.5$. На рис. 6(2) представлено предикторное решение с малой, невидимой глазу, амплитудой осцилляций. Оно имеет и малый выброс за УВ. Искусственная вязкость приведена на рис. 6(3), а диссипативные слагаемые гасящие осцилляции, на рис. 6(4). Они существенны лишь в окрестностях КР и УВ. На рис. 6(5) приведено корректорное решение. Оно не имеет выброса за УВ и формально мало отличается от предикторного решения. Казалось бы вводить искусственную вязкость не нужно. Но на рис. 6(1) приведено решение задачи по явной разностной схеме с поправками Лакса-Вендроффа, но без введения искусственной вязкости, на котором видны сильные осцилляции численного решения. Очевидно, что без введения искусственной вязкости хорошего результата не получить. Искусственная вязкость **необходима**.

5. Задача о распаде разрыва при малом скачке плотности и давления. На рис. 7 показан расчет задачи о распаде разрыва ($h=1$, $L=1500$, $x_0=750$, $\gamma=\frac{5}{3}$) при малом скачке функций на разрыве: плотность и давление изменяются в 10 раз, $u=0$. Расчет велся при $Ku=0.3$. На момент времени $t=286$ на рис.7 справа налево видны УВ, КР, и ВР. УВ размыта на 2-3 интервала h .

Из приведенных расчетов видно, что метод АИВ дает хорошие результаты для различных задач газовой динамики.

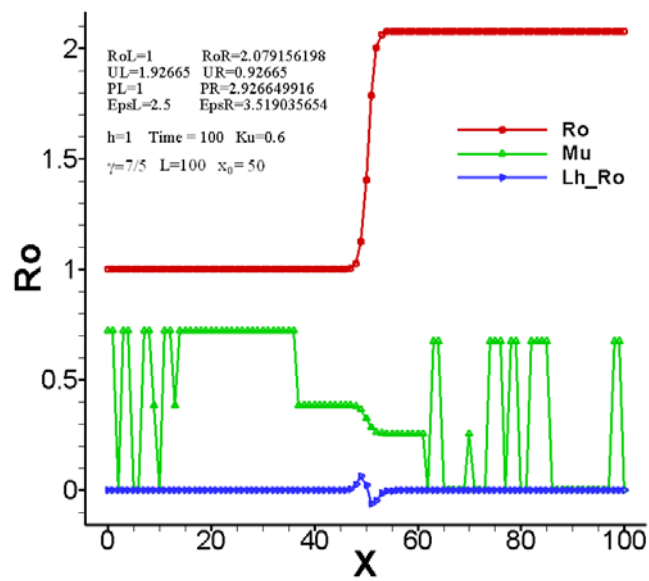


Рис. 3

$RoL = 1$ $RoR = 0.3813996$
 $UL = 1$ $UR = 0$
 $PL = 0.8$ $PR = 0.1834475$
 $\Gamma = 7/5$

$h = 1$ $L = 100$ $X_0 = 75$ $Ku = 0.3$

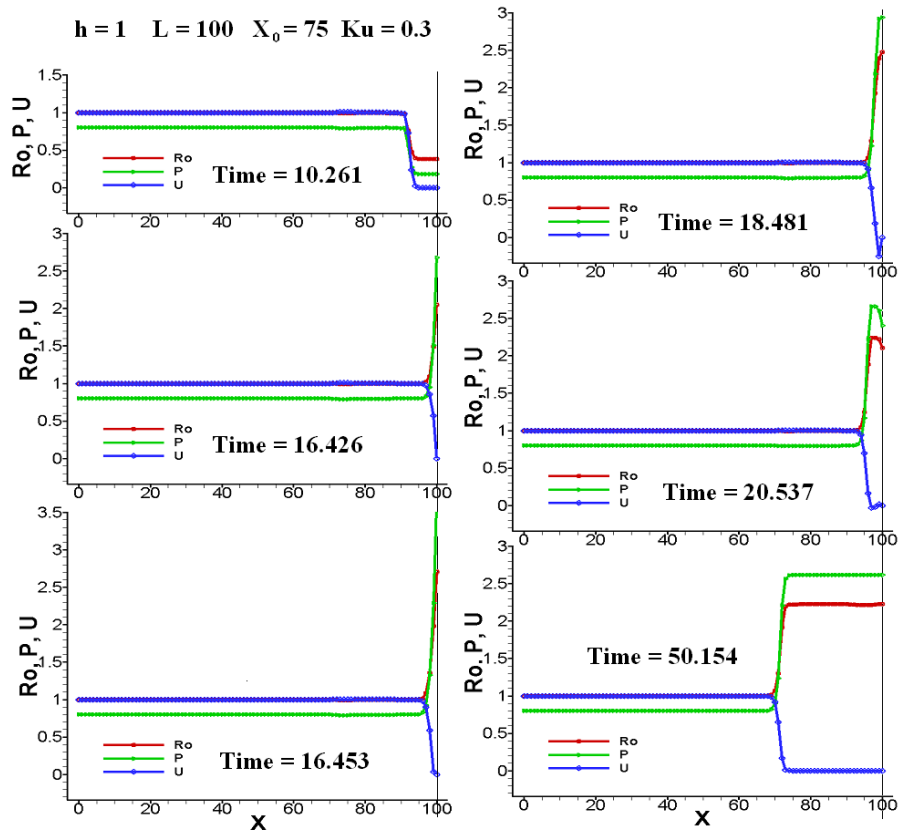


Рис.4

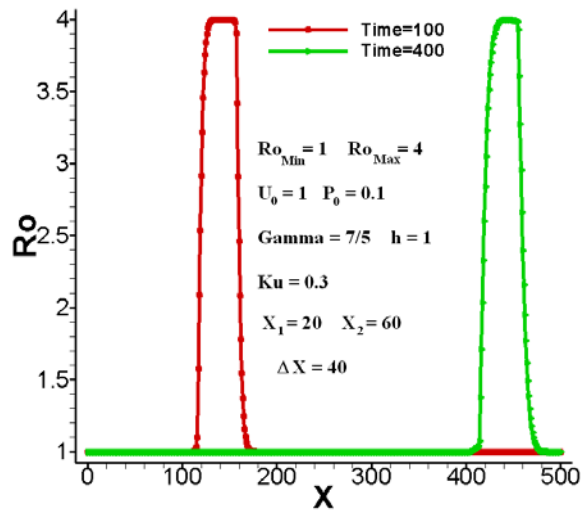


Рис.5

$RoL = 8$ $RoR = 1$ $X_0 = 50$ $h = 1$ $Ku = 0.3$
 $UL = 0$ $UR = 0$ $L = 100$ $Time = 4.5$
 $EpsL = 60$ $EpsR = 1$
 $\Gamma = 5/3$

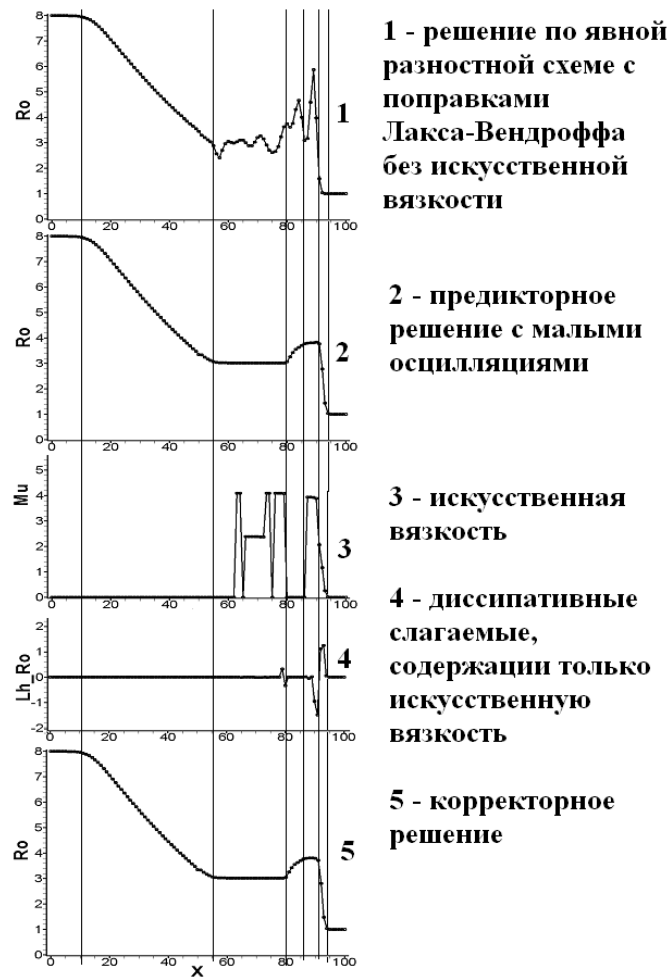


Рис.6

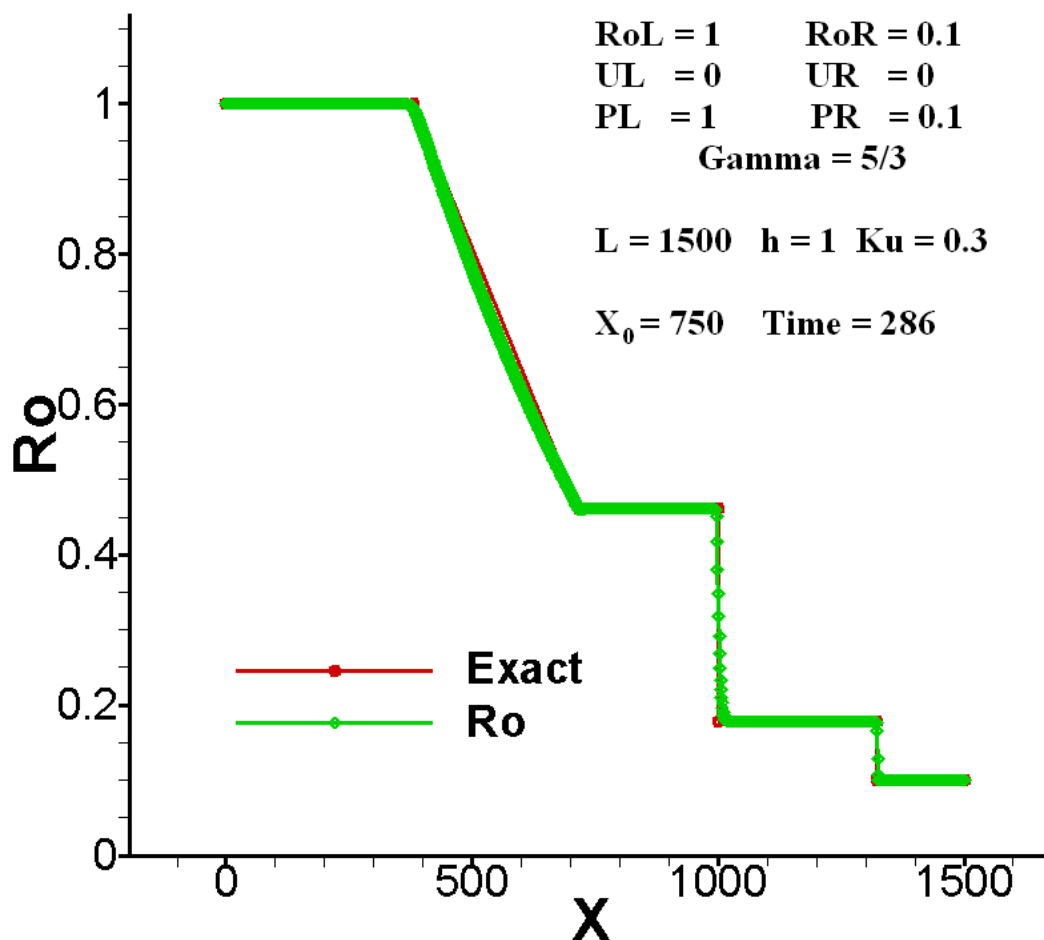


Рис.7

2.9. Разностная схема и балансные соотношения. Сеточная аппроксимация уравнений для внутренней энергии.

Сеточная аппроксимация исходной системы уравнений обладает следующими свойствами.

1. Сеточные уравнения записаны в дивергентном виде. Уравнения, умноженные на h_i и просуммированные по любой сеточной области, определяют изменение в ней массы, импульса и полной энергии в зависимости от потоков этих величин через ее границы.
2. Разностная схема монотонна (квазимонотонна) за счет введения искусственной вязкости в диссипативные слагаемые. К дополнительному размыванию КР и ВР диссипативные слагаемые не приводят, размывание УВ слабое (3÷5 интервала). Диссипативные слагаемые не вносят искажения в сеточное решение.

3. Сеточные уравнения аппроксимируют исходные дифференциальные уравнения в областях гладкости решения с порядком $\tau^2 + h^2$ (на равномерных сетках). Потоки и на неравномерных сетках в потоковых узлах аппроксимируются с порядком h^2 .
4. Решение сеточной задачи, как показали численные эксперименты, при $h \rightarrow 0$ приближается к решению исходной задачи и в областях разрыва функций. На рис. 8 приведены расчеты задачи о распаде разрыва (данные о задаче см. на рис.2), проведенные на сетках с шагами $h=1$, $h=\frac{1}{2}$ и $h=\frac{1}{4}$, а также точное решение. Видна сходимость сеточного решения к точному при $h \rightarrow 0$.

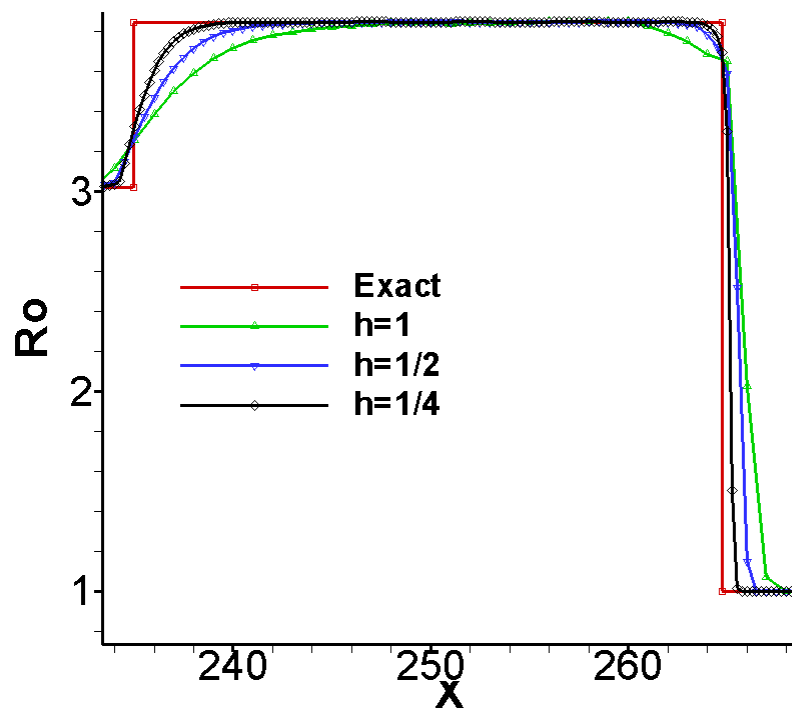


Рис.8

5. Консервативность разностной схемы. Для простоты изложения отбросим вначале в уравнениях поправки Лакса-Вендроффа и диссипативные слагаемые. Тогда уравнения примут вид:

$$\rho_{ii}^n + (\overline{\rho u})_{\hat{x}i}^n = 0$$

$$(\rho u)_{ii}^n + (\overline{\rho u} \cdot \bar{u} + \bar{p})_{\hat{x}i}^n = 0$$

$$E_{ii}^n + \left(\overline{\rho u} \frac{\langle u^2 \rangle}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \bar{p} \bar{u} \right)_{\hat{x}i}^n = 0.$$

Здесь $\langle u^2 \rangle_{i+\frac{1}{2}} = u_i u_{i+1}$. Так как $W_E = \left(\rho \frac{u^2}{2} + \rho \varepsilon + p \right) u$, а $p = (\gamma-1) \rho \varepsilon$, то

$$W_E = \left(\rho \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p \right) u. \text{ Это выражение аппроксимировалось выше.}$$

Введём обозначение

$$\langle\langle g \rangle\rangle_i = 0.5 \frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{h_i} g_{i+\frac{1}{2}} + 0.5 \frac{h_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} g_{i-\frac{1}{2}}.$$

Далее будем пользоваться равенствами

$$u_i^n (\rho u)_{ii}^n = \left(\rho \frac{u^2}{2} \right)_{ii}^n + \frac{(u_i^n)^2}{2} \rho_{ii}^n - \tau_n \rho_i^{n+1} (u_{ii}^n)^2$$

$$u_i^n (\overline{\rho u} \cdot \bar{u} + \bar{p})_{\hat{x}i}^n = \left(\overline{\rho u} \frac{\langle u^2 \rangle}{2} + \bar{p} \bar{u} \right)_{\hat{x}i}^n + \frac{(u_i^n)^2}{2} (\overline{\rho u})_{\hat{x}i}^n - \langle\langle \bar{p} u_x \rangle\rangle_i^n.$$

Последнее слагаемое в правой части первого равенства имеет сеточную природу и возникает при получении энергетических оценок для чисто явных и неявных разностных схем. Равенства можно проверить, раскрывая введённые обозначения и сравнивая получающиеся правые и левые части. Складывая последние два равенства и учитывая сеточные уравнения для массы и импульса, получим

$$\left(\rho \frac{u^2}{2} \right)_{ii}^n + \left(\overline{\rho u} \frac{\langle u^2 \rangle}{2} + \bar{p} \bar{u} \right)_{\hat{x}i}^n - \langle\langle \bar{p} u_x \rangle\rangle_i^n - \frac{\tau_n}{2} \rho_i^{n+1} (u_{ii}^n)^2 = 0.$$

Так строится сеточное уравнение для кинетической энергии.

Уравнение для внутренней энергии ε имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \varepsilon u) + p \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Аппроксимируем это уравнение следующим сеточным аналогом

$$(\rho\varepsilon)_{ii}^n + (\overline{\rho u \cdot \varepsilon})_{\hat{x}i}^n + \langle \langle \overline{p} u_x \rangle \rangle_i^n + \frac{\tau_n}{2} \rho_i^{n+1} (u_{ii}^n)^2 = 0$$

Чтобы уравнение для полной энергии E_i не имело паразитического слагаемого сеточной природы, в левую часть уравнения для $\rho\varepsilon$ добавлено последнее слагаемое. Конвективное слагаемое в уравнениях для импульса I и внутренней энергии ε записаны в дивергентном виде. Их можно преобразовать к алгебраически эквивалентному недивергентному виду в силу тождеств

$$(\rho q)_{ii}^n + (\overline{\rho u \cdot q})_{\hat{x}i}^n = \rho_i^{n+1} q_{ii}^n + \langle \langle \overline{\rho u \cdot q} \rangle \rangle_i^n, \quad q = I, \varepsilon.$$

Складывая сеточные уравнения для кинетической и внутренней энергии, получаем уравнение для полной энергии (без поправок Лакса-Вендроффа):

$$E_{ti}^n + W_{E\hat{x}i}^n = 0,$$

где

$$E_i = \rho_i \left(\frac{u_i^2}{2} + \varepsilon_i \right), \quad W_{Ei+\frac{1}{2}} = \overline{\rho u}_{i+\frac{1}{2}} \left(\left\langle \frac{u^2}{2} \right\rangle_{i+\frac{1}{2}} + \overline{\varepsilon}_{i+\frac{1}{2}} \right) + \overline{p}_{i+\frac{1}{2}} \overline{u}_{i+\frac{1}{2}}$$

Используя равенства

$$\overline{p}_{i+\frac{1}{2}} = (\gamma - 1) \overline{\rho \varepsilon}_{i+\frac{1}{2}}, \quad \overline{\varepsilon}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{p}{\rho} \right)_{i+\frac{1}{2}},$$

из E_i и $W_{Ei+\frac{1}{2}}$ можно исключить \overline{p} или $\overline{\varepsilon}$. Полагая приближённо

$$\overline{\rho u}_{i+\frac{1}{2}} \overline{\varepsilon}_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{\overline{u}_{i+\frac{1}{2}} \overline{p}_{i+\frac{1}{2}}}{\gamma - 1},$$

и добавляя в равенство поправки Лакса-Вендроффа, поток полной энергии можно записать в виде:

$$W_{Ei+\frac{1}{2}} = (\overline{\rho u})_{i+\frac{1}{2}} \frac{\langle u^2 \rangle_{i+\frac{1}{2}}}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \overline{p}_{i+\frac{1}{2}} \overline{u}_{i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} L W_{Ei+\frac{1}{2}}.$$

Именно это выражение для потока W_E использовалось в приводимых ниже расчётах.

Чтобы найти поправки Лакса-Вендроффа для уравнения внутренней энергии, продифференцируем это уравнение по времени и выразим все производные по времени через производные по пространственной переменной, используя исходные уравнения. В результате получим

$$\frac{\partial^2 \rho \varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho \varepsilon u^2) + c^2 \frac{\partial}{\partial x} (\rho \varepsilon) + (\gamma - 1) \rho \varepsilon \frac{\partial u^2}{\partial x} \right] + \left[\gamma p \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \right]$$

При вычислении искусственной вязкости последнее слагаемое отнесём к правой части сеточного уравнения. Тогда при «замороженных» коэффициентах для вязкостей μ_{\min} и μ_{\max} получим те же выражения, что были получены для уравнения неразрывности.

Диссипативные слагаемые запишем в виде:

$$L(\mu) \rho \varepsilon = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial}{\partial x} (\rho \varepsilon) \right)$$

Теперь от производных по пространственной переменной можно перейти к сеточной аппроксимации

$$(\rho \varepsilon)_{ii}^n + W_{\varepsilon \hat{x}i}^n + \left\langle \left\langle \bar{p} u_x \left(1 - \frac{\tau_n}{2} \gamma u_x \right) + \frac{\tau_n}{2} \frac{(p_x)^2}{\rho} \right\rangle \right\rangle_i^n + \frac{\tau_n}{2} \rho_i^{n+1} (u_{ii}^n)^2 = (\mu^{n+1} (\rho \varepsilon)_{\hat{x}i})^n$$

где

$$W_{\varepsilon i+\frac{1}{2}} = \overline{\rho u}_{i+\frac{1}{2}} \bar{\varepsilon}_{i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} L W_{\varepsilon i+\frac{1}{2}}, \quad L W_{\varepsilon i+\frac{1}{2}} = (\rho \varepsilon u^2)_{xi+\frac{1}{2}} + \bar{c}_{i+\frac{1}{2}}^2 (\rho \varepsilon)_{xi+\frac{1}{2}} + (\gamma - 1) \overline{\rho \varepsilon}_{i+\frac{1}{2}} (u^2)_{xi+\frac{1}{2}}$$

Вместо уравнений для функций ρ , $I = \rho u$, E можно рассматривать как систему уравнений для функций ρ , $I = \rho u$, ε и расчёта p и E по приведённым выше формулам.

Переход к расчёту внутренней энергии и давления существенен в задачах для смеси газов.

2.10. Решение тестовых задач методом адаптивной искусственной вязкости

Рассматриваемые ниже тестовые задачи решались на интервале $x \in (0,1)$, разделенном в начальный момент времени на две подобласти точкой x_0 со следующими начальными и совпадающими с ними граничными данными, приведёнными в таблице №1.

Таблица №1. Расчётные параметры задач.

Задача	ρ_L	u_L	p_L	ρ_R	u_R	p_R	x_0	Число точек	Интервал по времени
1	1	0.75	1	0.125	0	0.1	0.3	100	0.2
2	1	-2	0.4	1	2	0.4	0.5	100	0.15
Noh	1	1	10^{-6}	1	-1	10^{-6}	0.5	100	1
3a	1	-19.59745	10^3	1	-19.59745	0.01	0.8	200	0.012
4	5.99924	19.5975	460.894	5.99242	-6.19633	46.095	0.4	100	0.035
5	1.4	0	1	1	0	1	0.5	100	2
6	1.4	0.1	1	1	0.1	1	0.5	100	2
peak	0.1261192	8.9047029	782.92899	6.591493	2.2654207	3.1544874	0.5	800	0.0039

Тестовая задача blast wave также рассматривалась на интервале $x \in (0,1)$, который разбивался на три подобласти двумя точками $x_1 = 0.1$ и $x_2 = 0.9$. Начальные и граничные значения в первой подобласти при $x \leq x_1$ $\rho_1 = 1$, $u_1 = 0$, $p_1 = 1000$, во второй подобласти при $x_1 < x \leq x_2$ $\rho_2 = 1$, $u_2 = 0$, $p_2 = 0.01$ и в третьей подобласти при $x_2 < x \leq 1$ $\rho_3 = 1$, $u_3 = 0$, $p_3 = 100$. Число расчётных точек бралось равным 400 и 2000. Показатель адиабаты Пуассона был равен $\gamma = 1.4$, как и во всех задачах, за исключением задачи Noh, где $\gamma = 5/3$. Расчёт для задачи blast wave проводился до момента времени $T = 0.038$.

Проведем сравнение метода АИВ с другими современными численными методами решения уравнений газовой динамики. В работах [70, 71, 95], проведено сравнение известных методов: CFLF, CFLFh, WAFT, WAFC, CLAW, PPM, WENO5, CWENO3, LL, JT на одномерных и двумерных [70, 71] и трехмерных задачах – тестах [95]. В случае 1D и 2D сравнение проводится на 10 задачах, в случае 3D на 4-х задачах. Все эти задачи в случае 1D и 2D были просчитаны методом АИВ. Ниже будет проведено сравнение результатов расчетов. Сравнение проводится без

учета трудоёмкости решения систем сеточных уравнений. Трудоёмкость метода также представляет собой важный элемент при использовании разностной схемы.

Метод АИВ имеет лишь один управляющий параметр – число Ku , определяющий устойчивость и, отчасти, монотонность разностного метода. Все разностные схемы, рассматриваемые в [70,71], по результатам расчетов можно разбить на две группы. Одни из схем (группа I): WAFT, CLAW, WAFC хорошо отслеживают разрывы решений, чем подкупают пользователя. На ряде тестов к этим схемам близок метод PPM. Однако на константных частях решения (между разрывами) первая группа схем проявляет свою немонотонность в виде длинных волн с малой амплитудой, например, в тесте Noh.

Остальные схемы (группа II) приводят к размыванию УВ и КР. Контактные разрывы размываются более сильно. К этой же группе схем принадлежит и метод АИВ, хотя УВ он размывает также, как и методы группы I. Число интервалов размывания УВ ($\Delta_{УВ} = n$) и КР ($\Delta_{КР} = m$) видно на приведенных ниже графиках. Точное решение отмечено на всех рисунках подписью Exact. Приведём результаты расчётов по методу АИВ и сравним их с точным решением.

Тест 1. Расчет распада разрыва с образованием УВ, КР и ВР. Размывание УВ в методе АИВ то же, что и в методах группы I ($\Delta_{УВ} = 3 \div 4$). По размыванию КР метод АИВ по числу интервалов ($\Delta_{КР} = 7$) уступает методам I-ой группы и ближе к методам LL ($\Delta_{КР} = 7$) и методу точности $O(h^5)$ WENO5 ($\Delta_{КР} = 6$). Схемы CFLF и CWENO3 сильнее, чем АИВ размывают КР. В методах WAFC и JT возникают небольшие провалы у ВР. Метод АИВ в тесте 1 ближе всего к WENO5 и LL. Расчеты теста 1 методом АИВ приведен на сетке из [70] с числом узлов $N = 100$ при числе $Ku = 0.5$ (см. рис.9).

Тест 1-tvj. Двумерная задача. В направлении координаты x всё так же, как и в тесте 1. В направлении y имеются противоположно направленные течения с $v_L = 1$ и $v_R = -5$. Немонотонность сеточного решения в этом тесте возникает из-за наличия этих трансверсальных скоростей. Все методы, в том числе АИВ на сетке 100×100 интервалов считают эту задачу плохо. Метод АИВ дает результаты не хуже WENO5 и JT. Чтобы решить эту задачу с хорошим результатом, нужно увеличить число интервалов в направлении x . При $N_x = 2000$, $N_y = 100$ метод АИВ близок к точному решению ($\Delta UB = 5$, $\Delta KP = 13$). На рис. 10 приведён фрагмент расчёта, в котором искусственная вязкость бралась максимальной, как на ОС, так и на УВ. Однако перед КР возник небольшой провал. Если на УВ ввести минимальную вязкость, то число интервалов на УВ уменьшается до 3, но появляется небольшой выброс за УВ. Этот выброс можно подавить, если в окрестности узлов $x_i \in OC$ вводить $\mu_{\max i \pm 1/2}$ и $\mu_{\max i \pm 3/2}$, но тогда УВ размывается на один интервал больше и увеличивается провал перед КР.

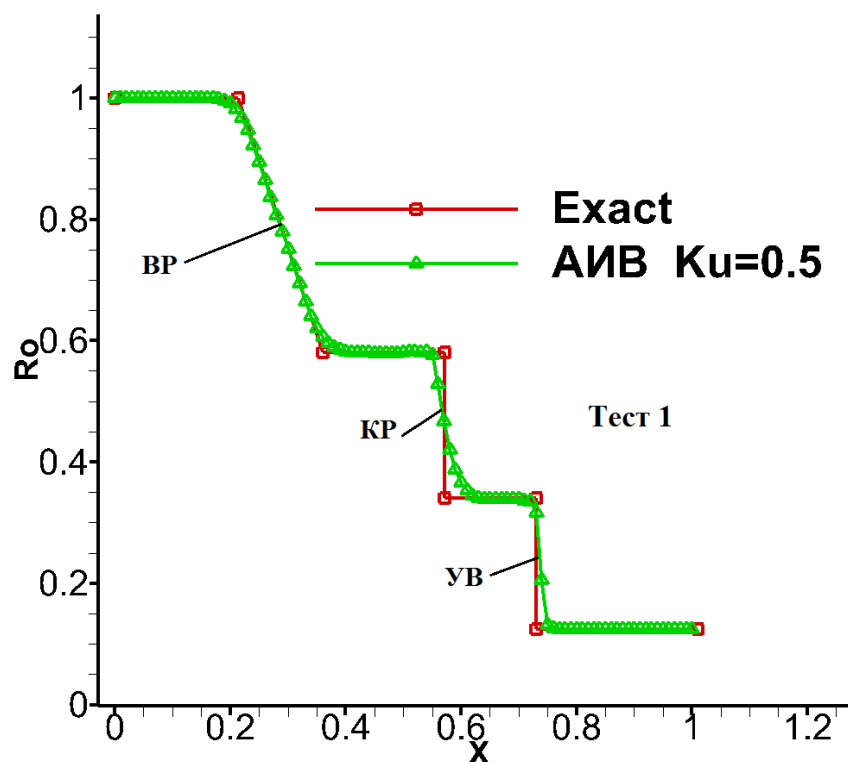


Рис.9

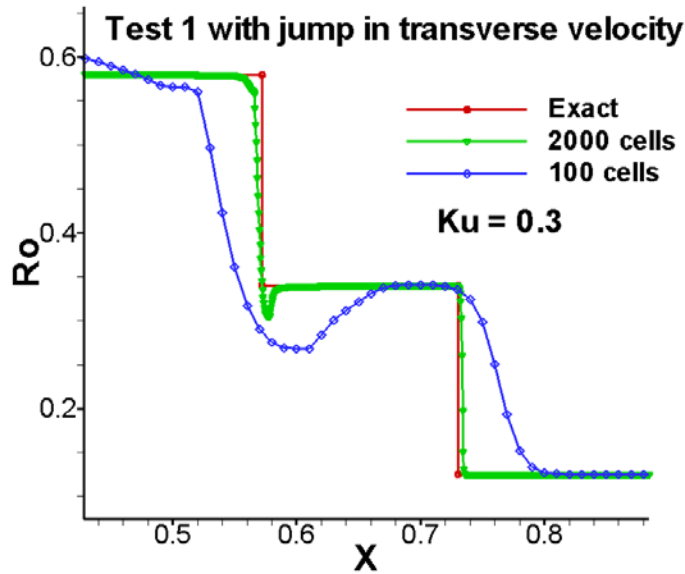


Рис.10

Тест 2. В тесте 2 давление p и плотность ρ близки к нулю (вакуум). В этом тесте исследовалась внутренняя энергия $\varepsilon = \frac{P}{(\gamma-1)\rho}$. Во всех расчетах результаты плохи, как и в методе АИВ. Однако замечено, что при больших числах $Ku > 0.15$ кривая имеет выброс вверх, а при малых $Ku < 0.05$ - выброс вниз. При $Ku = 0.1$ решение близко к точному (см. рис.11). Диссипативные слагаемые были взяты в виде $(\mu(E+p)_{,x})_{,xi}$.

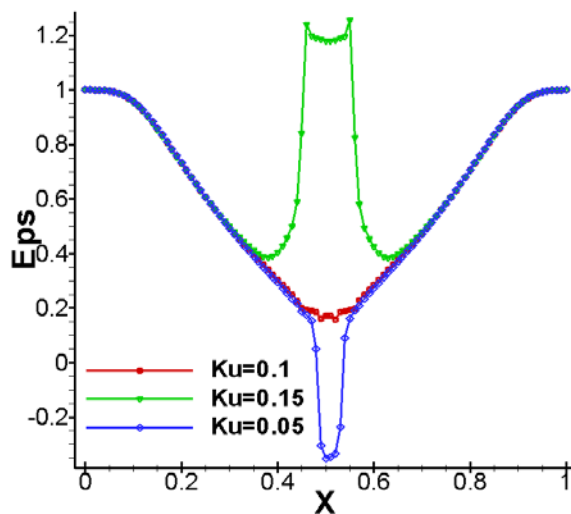


Рис.11

Тест Noh. Решение представляет собой две расходящиеся в разные стороны УВ, между которыми имеется небольшой провал счетной природы у всех без исключения методов. Наименьший провал демонстрирует схема CFLF, впрочем это единственный лучший результат у этой схемы. Все схемы I группы дают слабое пилообразное решение, так называемую пилообразную немонотонность. Остальные схемы дают либо неглубокий но широкий провал, либо провал узкий, но более глубокий. Результат метода АИВ ближе всего к схемам WENO5 и LL (см. рис. 12а, фрагмент на рис.12б). На этих рисунках приведён расчёт с вязкостью на УВ

$$\hat{\mu}_{\min i+\frac{1}{2}} = \max(|\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}|, |\bar{c}_{i+\frac{1}{2}}|) \frac{h}{2} \left(1 - \frac{\tau}{h} \sqrt{(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}})^2 + (\bar{c}_{i+\frac{1}{2}})^2} \right).$$

Если на УВ ввести минимальную вязкость

$$\mu_{\min i+\frac{1}{2}} = |\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}| \frac{h}{2} \left(1 - \frac{\tau}{h} \sqrt{(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}})^2 + (\bar{c}_{i+\frac{1}{2}})^2} \right),$$

но добавить в окрестности узлов $x_i \in OC$ ввести $\mu_{\max i\pm\frac{1}{2}}$ и $\mu_{\max i\pm\frac{3}{2}}$, то выбросы за УВ исчезают, а провалы при разных числах Ku становятся близкими (см. рис. 12в).

Замечание. На рисунках 12а и 12б приведены расчёты с диссипативным слагаемым вида $(\mu(E+p))_{x_{\hat{x}i}}$, а на рисунке 12в $(\mu E_x)_{\hat{x}i}$.

Тест За. Распад разрыва с образованием ВР, КР и УВ. Решение имеет максимальную плотность $\rho = 6$ между КР и УВ, которая достигается в схемах группы I, а также в схемах WENO5, LL, JT, PPM. Значения $\rho = 5.5$ достигают схемы CFLF, CFLFh. У схемы CWENO3 максимальное значение плотности равно $\rho = 5.25$. Метод АИВ близок к результату CWENO3. Хотя метод АИВ и размывает КР меньше, чем CWENO3, CFLF, CFLFh, однако ему не хватает сеточных интервалов в узком зазоре между

КР и УВ ($\Delta x = 0.05$). При увеличении числа узлов в 2 раза в методе АИВ была достигнута высота $\rho = 6$ (см. рис.13).

Тест 4. Распад разрыва с образованием УВ, КР и УВ. Максимум ρ у всех схем и АИВ достигает значения $\rho = 30$. Размывание КР меньше, чем у группы I. Но расчеты группы I имеют слаборазличимые длинноволновые колебания в областях константных решений. Схемы WENO5, LL, JT размывают КР соответственно на $\Delta KP = 9 \div 10$, $\Delta KP = 10$, $\Delta KP = 8$. В методе АИВ $\Delta KP = 11 \div 12$. Это лучше, чем у CWENO3, CFLF, CFLFh. (см. рис. 14).

Замечание к тесту 4. Для этого теста были проведены четыре расчёта с различными вязкостями на УВ.

1. При вязкости $\mu_{\min i+\frac{1}{2}} = |\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}| \frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{2} \left(1 - \frac{\tau}{h_{i+\frac{1}{2}}} \sqrt{(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}})^2 + (\bar{c}_{i+\frac{1}{2}})^2} \right)$ с $Ku = 0.3$ и

$Ku = 0.6$ наблюдался выброс на правой УВ, а за КР небольшой провал (рис. 14).

2. При вязкости $\hat{\mu}_{\min i+\frac{1}{2}} = \max(|\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}|, \bar{c}_{i+\frac{1}{2}}) \frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{2} \left(1 - \frac{\tau}{h_{i+\frac{1}{2}}} \sqrt{(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}})^2 + (\bar{c}_{i+\frac{1}{2}})^2} \right)$ с $Ku = 0.3$

наблюдался выброс на правой УВ и за КР небольшой провал. При $Ku = 0.6$ расчёт давал наилучший результат, без выброса и провала и хорошим выходом на константные решения (рис 14а). Ударная волна размывалась на три интервала.

3. При вязкости $\hat{\mu}_{\min i+\frac{1}{2}} = \sqrt{(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}})^2 + (\bar{c}_{i+\frac{1}{2}})^2} \frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{2} \left(1 - \frac{\tau}{h_{i+\frac{1}{2}}} \sqrt{(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}})^2 + (\bar{c}_{i+\frac{1}{2}})^2} \right)$ с

$Ku = 0.3$ наблюдался выброс на правой УВ и за КР небольшой провал. При $Ku = 0.6$ в расчёте выброса не было, но количество интервалов на УВ увеличилось на четыре.

4. При максимальной вязкости

$\mu_{\max i+\frac{1}{2}} = \sqrt{(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}})^2 + (\bar{c}_{i+\frac{1}{2}})^2} \frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{2} \left(1 - \left(\frac{\tau}{h_{i+\frac{1}{2}}} \sqrt{(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}})^2 + (\bar{c}_{i+\frac{1}{2}})^2} \right)^2 \right)$ с $Ku = 0.3$ и $Ku = 0.6$

в расчёте выброса не было, но количество интервалов на УВ увеличилось до пяти.

Если около узла $x_i \in OC$ ввести $\mu_{\max i \pm \frac{1}{2}}$ и $\mu_{\max i \pm \frac{3}{2}}$, то решение также станет монотонным. Однако УВ будет размыта не на три или четыре интервала, а на пять интервалов.

В этом тесте отношение перепадов давлений было наибольшим и равнялось 37.

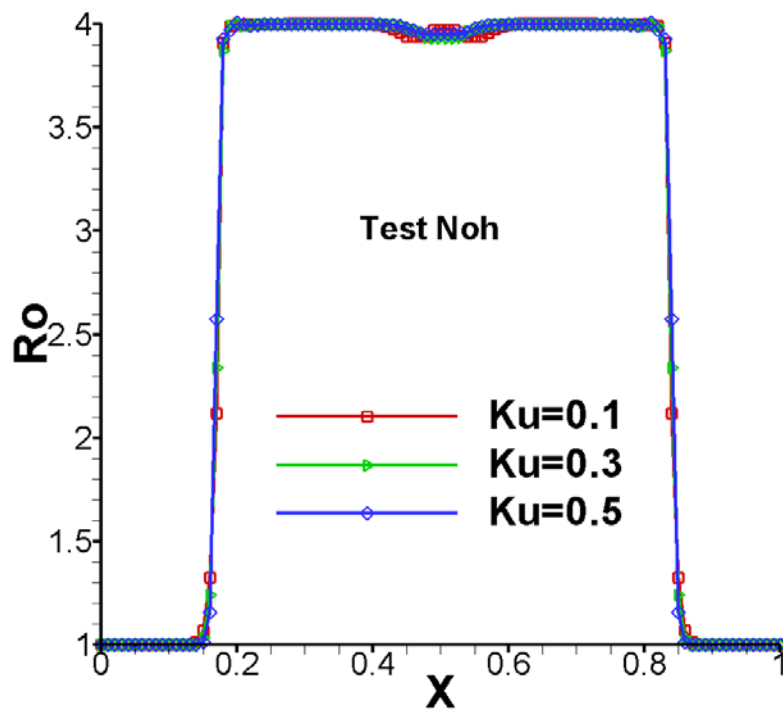


Рис. 12а

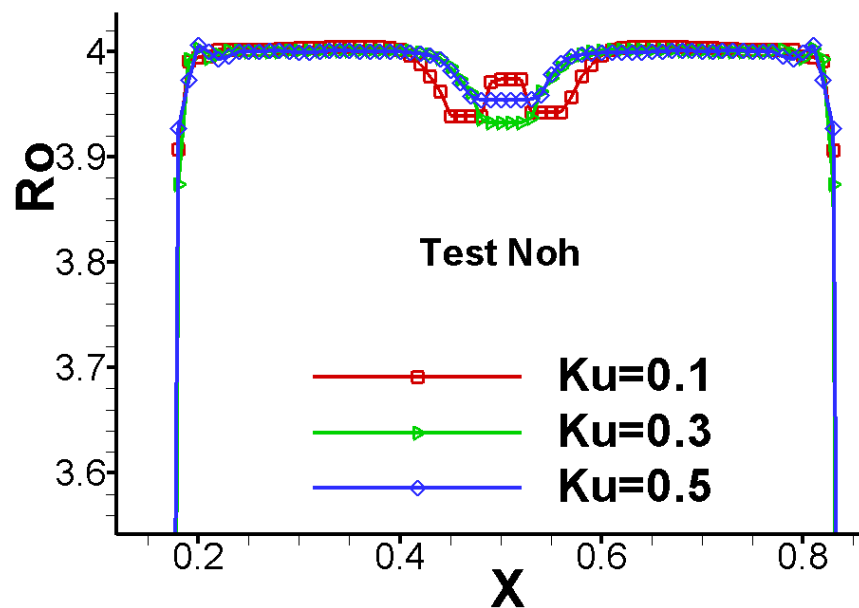


Рис. 12б

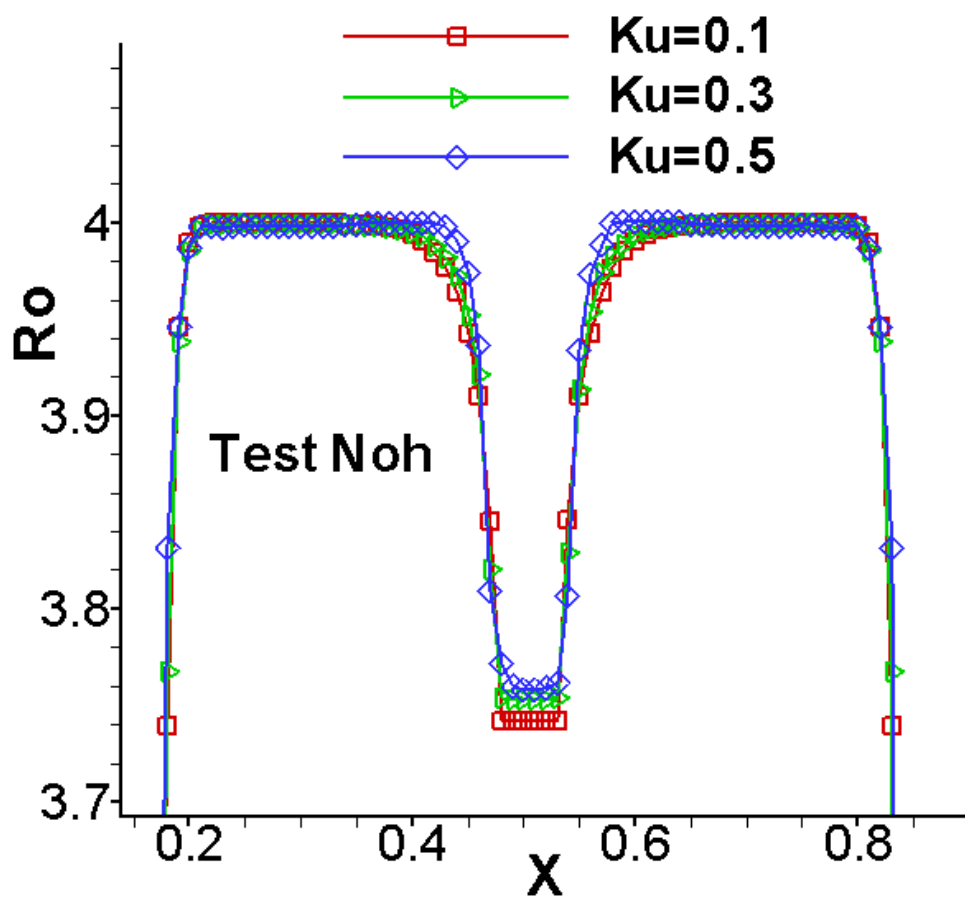


Рис. 12в

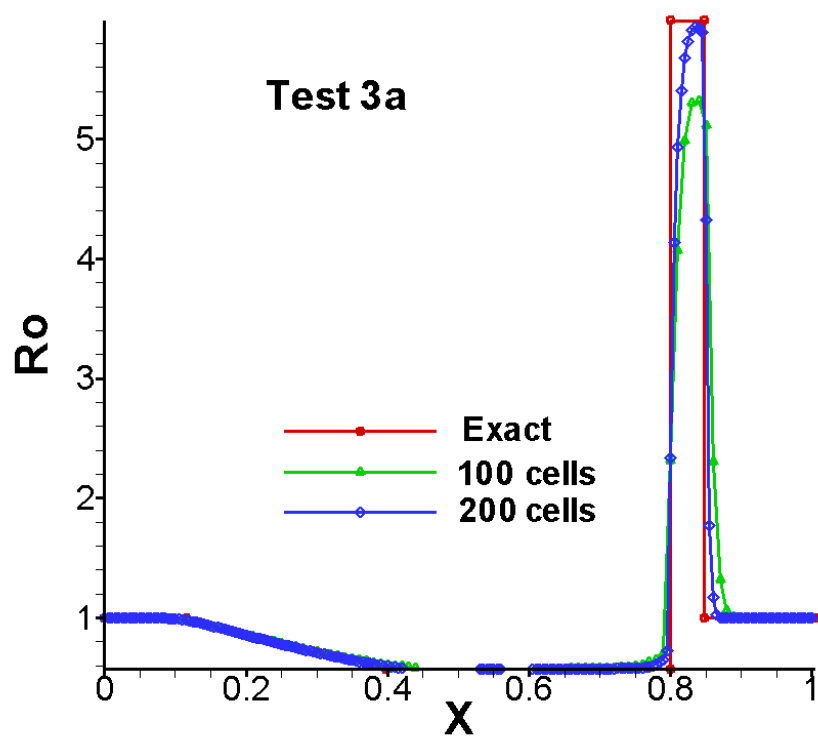


Рис. 13

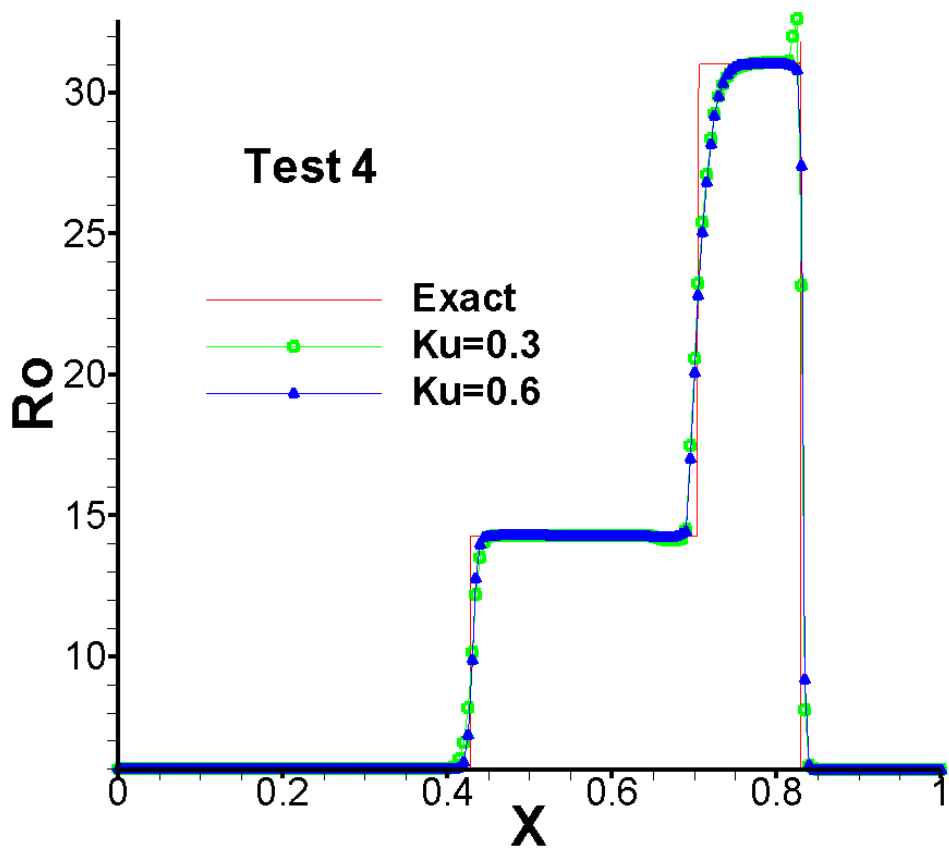


Рис.14

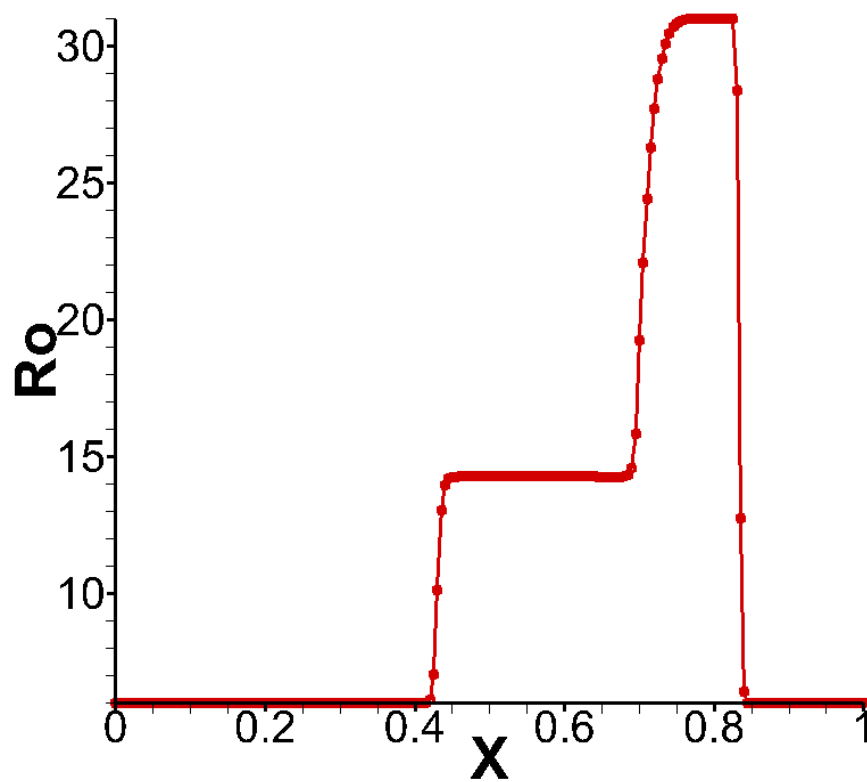


Рис. 14а

Тест 5. Расчет неподвижного КР. Здесь метод АИВ дает те же результаты, что и схемы I-ой группы и WENO5, и лучше остальных (см. рис.15).

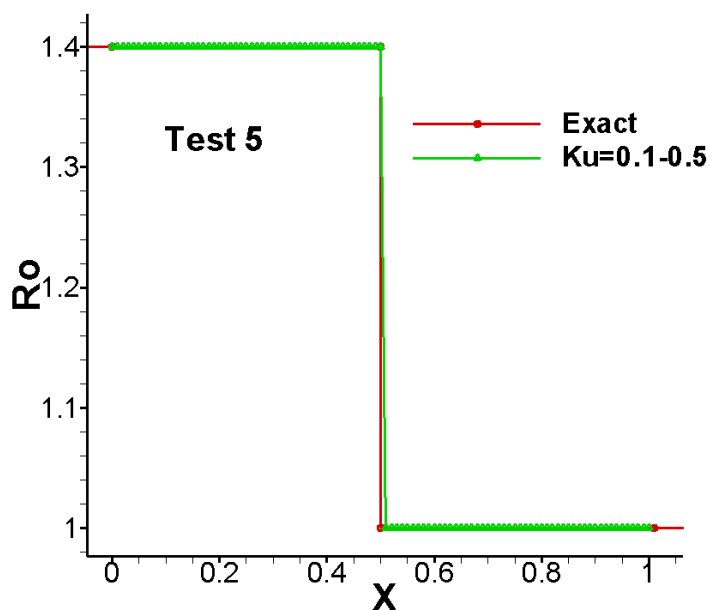


Рис.15

Тест 6. Движущийся КР. Наилучшие результаты у схем I-ой группы. Размывание КР в методе АИВ ($\Delta KP = 9 \div 10$) несколько хуже, чем в методе WENO5 ($\Delta KP \cong 8$) и близко к размыванию в методах LL ($\Delta KP \cong 11$) и JT ($\Delta KP \cong 9$). Метод АИВ точнее остальных методов группы II (см. рис.16).

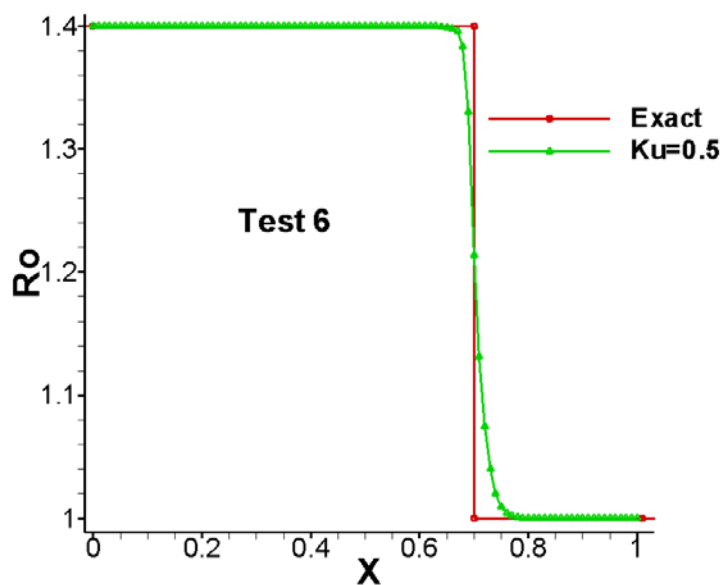


Рис.16

Тест «Peak». Между КР и УВ возникает узкий $\Delta x = 0.08$ и высокий $\rho = 39$ прямоугольник («пик»). Его сложно отслеживать. В схемах WAFT, WAFC, PPM, WENO5, LL и JT значения плотности $\rho = 39$. В методе АИВ значение плотности $\rho \cong 30$. Это больше, чем значение ρ в методах CWENO3, CFLF и CFLFh. Даже при удвоении числа узлов метод АИВ вместо $\rho \cong 39$ даёт значение плотности $\rho \cong 35$. (см. рис.17а и фрагмент рисунка 17б). Практически все схемы (групп I и II) дают немонотонные профили скорости. Для метода АИВ профиль скорости приведён на рис.18.

В этой задаче имеется узкая область, в которой велика плотность. Налево от этой области уходит КР, направо – УВ. Размывание КР понижает величину «пика». В задачах такого типа нужно наряду с адаптацией вязкости вести и адаптацию сетки.

Между образующейся ВР и КР возникает провал, а за УВ возникают небольшие осцилляции скорости, в отсутствие осцилляции плотности. Осцилляции скорости и плотности можно подавить, вводя вязкость при выполнении условия

$$\text{if } ((\rho_{i+1} - \rho_i)(\rho_i - \rho_{i-1}) < 0 \text{ or } (u_{i+1} - u_i)(u_i - u_{i-1}) < 0) \text{ then } \mu_{i\pm\frac{1}{2}}^{n+1} = \mu_{\max i\pm\frac{1}{2}}^n.$$

Расчёты для этой задачи проводились именно при выполнении приведённого выше условия.

Тест «Blast wave» (400 ячеек). Два газовых образования двигаются навстречу друг другу, происходит соударение двух ударных волн с последующей трансформацией течения. Наилучшие результаты у схем WAFT и WAFC. Метод АИВ точнее CFLF, CFLFh, CWENO3 и близок к LL и JT (см. рис.19а).

Тест «Blast wave» (2000 ячеек). Метод АИВ даёт ту же точность, что и все методы (WAFT, WAFC, CLAW, PPM, WENO5, LL, JT) и лучше, чем CFLF, CFLFh (см. рис.19б).

Проведем теперь анализ по результатам всех тестов. Отбросим тесты 1-tvj и 2. В тесте 1, Noh и 4 метод АИВ ближе всего к методам WENO5 и LL. В тестах 5 и 6 АИВ того же уровня, что и WENO5. В тесте «Peak» и «Blast wave» (400 ячеек) метод АИВ ближе всего по результату к методу LL. В тесте «Blast wave» (2000 ячеек) метод АИВ не хуже, чем WENO5 и LL. В тесте 3а метод АИВ близок к CWENO3. Суммируя результаты, можно сказать, что метод АИВ ближе всего к методам LL и WENO5. Методу АИВ не хватает точности в связи с размыванием КР, что обусловливается вязкостью, скрытой в аппроксимации конвективных слагаемых.

Приведенный анализ неполон, так как он не учитывает сложности реализации, содержащейся в прочих методах. Так, метод WENO5 порядка точности $O(h^5)$ строится на семиточечном шаблоне.

В то же время метод АИВ чрезвычайно прост в реализации.

Приведем расчет еще одной модной тестовой задачи **Shu-Osher**. Ударная волна встречается с акустической волной. За УВ возникает система пиков и провалов. При числе интервалов 400 на весь расчетный интервал $-5 < x < 5$ метод АИВ теряет часть пиков и провалов за УВ, размывая их. При числе интервалов 2000 все пики и провалы метод АИВ отслеживает (см. рис.20).

Дополнение

Разностные схемы первого порядка аппроксимации по времени τ_n . Можно повторить все предыдущие построения, рассматривая разностные схемы с аппроксимацией $O(\tau_n)$. Для этого нужно лишь отбросить поправки Лакса-Вендроффа. После «замораживания» в сеточном уравнении неразрывности скорости, а также h , μ и τ , получим уравнение

$$\rho_i^{n+1} = A\rho_{i+1}^n + B\rho_i^n + C\rho_{i-1}^n$$

где $A = \mu \frac{\tau}{h^2} - \frac{u \tau}{2h}$, $C = \mu \frac{\tau}{h^2} + \frac{u \tau}{2h}$, $B = 1 - (A + C)$.

Требование $A > 0$ и $C > 0$ приводит к ограничению $\frac{|u|}{2}h < \mu$, требование $B > 0$ приводит к ограничению $\mu \leq \frac{h^2}{2\tau}$. Из неравенства $\frac{|u|}{2}h < \frac{h^2}{2\tau}$ следует ограничение на число $Ku = |u|\frac{\tau}{h} < 1$. Это может быть и не единственное ограничение. Используя это условие, получим $|u| < \frac{h}{\tau}$. Уменьшим верхнюю границу для μ , заменяя $\frac{h}{\tau}$ на меньшую величину $|u|$. В результате получим единственное значение вязкости $\mu = \frac{h}{2}|u|$. «Размораживая» коэффициенты, получим в индексном виде выражение для искусственной вязкости $\mu_{i+1/2} = \frac{h_{i+1/2}}{2}|\bar{u}_{i+1/2}|$. Далее метод АИВ строится аналогично вышеприведенному алгоритму.

По схеме АИВ первого порядка по времени был проведен расчет теста 1 с шагом пространственной сетки $h = 0.01$ и различными числами Ku . При тех же числах Ku , что и для схем второго порядка, по времени решение оказывается сильно осциллирующим. Лишь при уменьшении числа Ku до 0.05 удается получить решение, более или менее близкое к точному решению, но немонокотное. Результаты расчетов представлены на рис. 21.

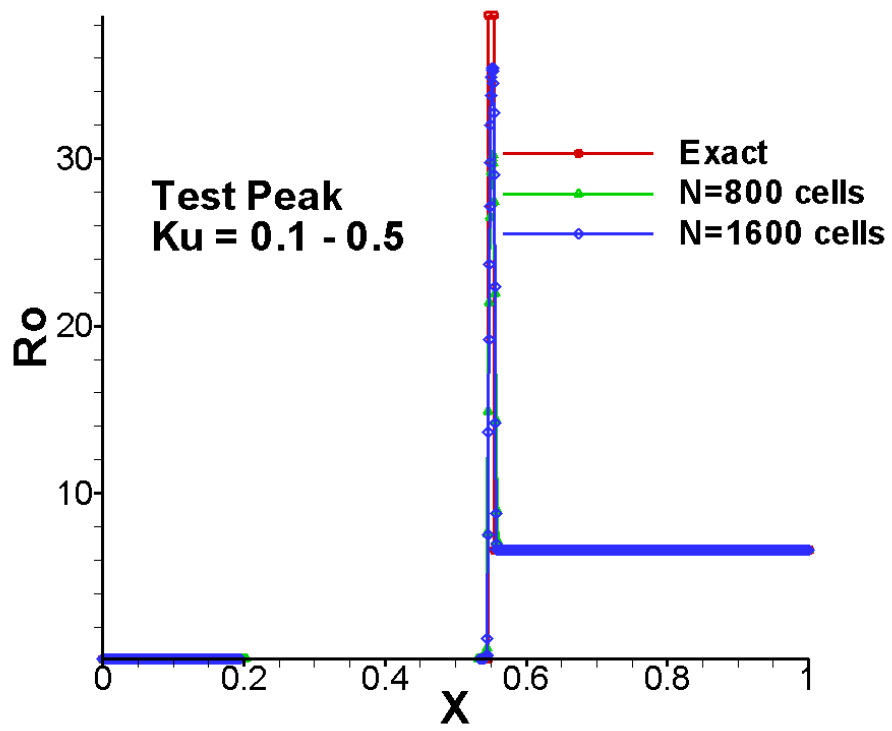


Рис.17а

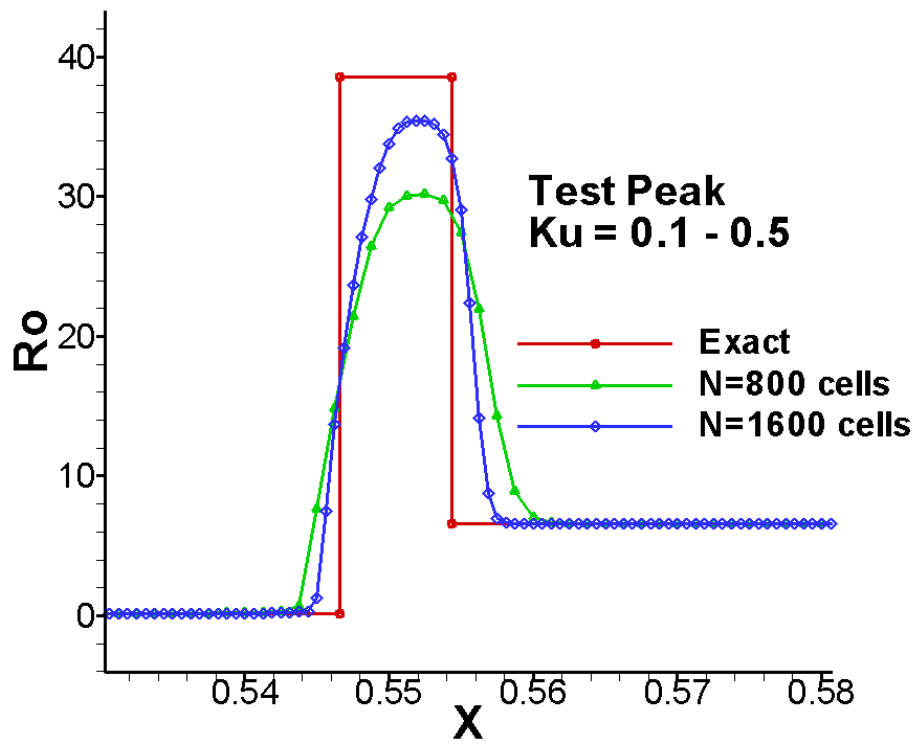


Рис.17б

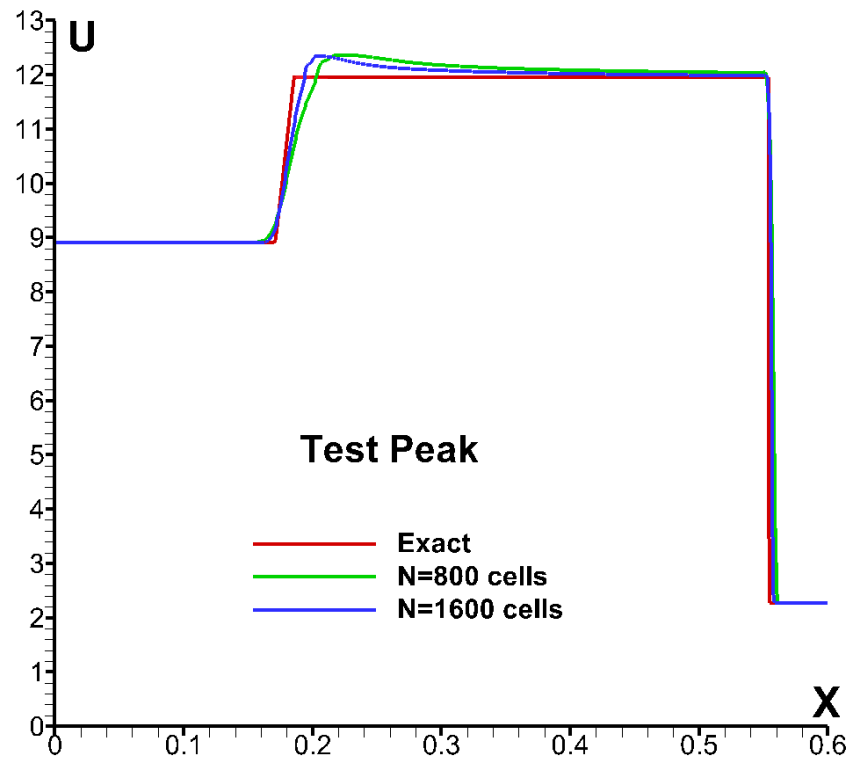


Рис.18

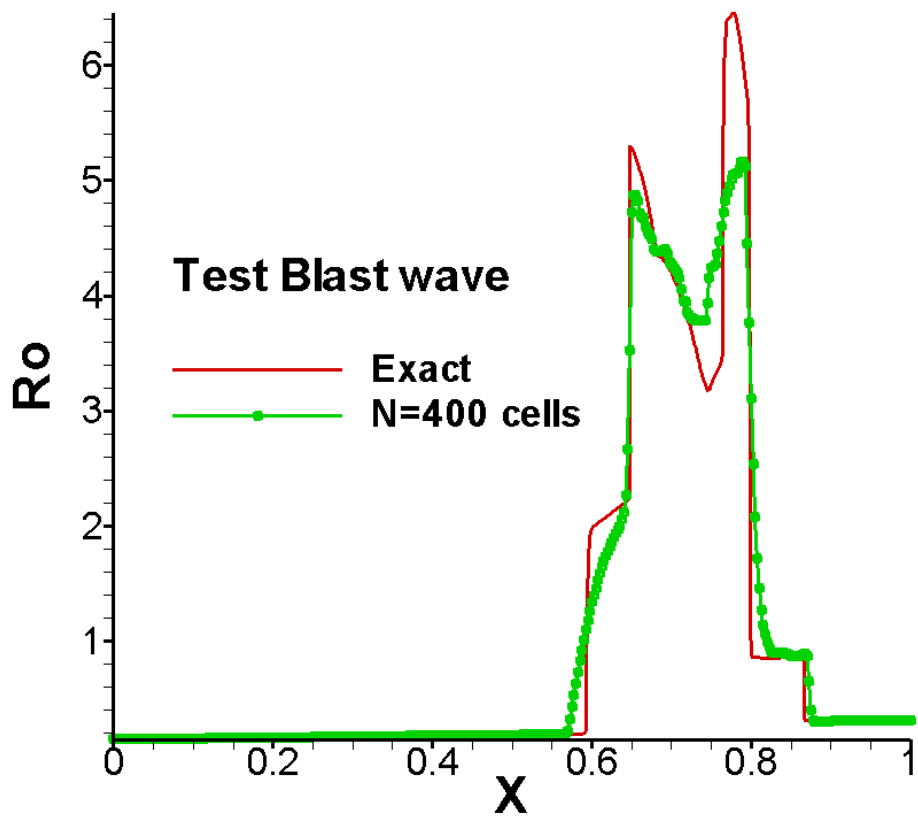


Рис.19a

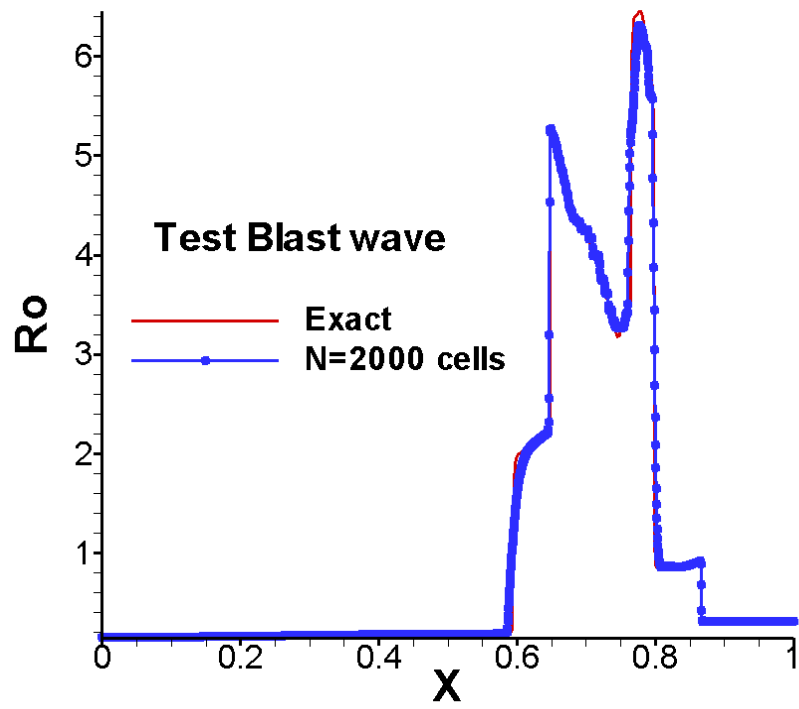


Рис19б

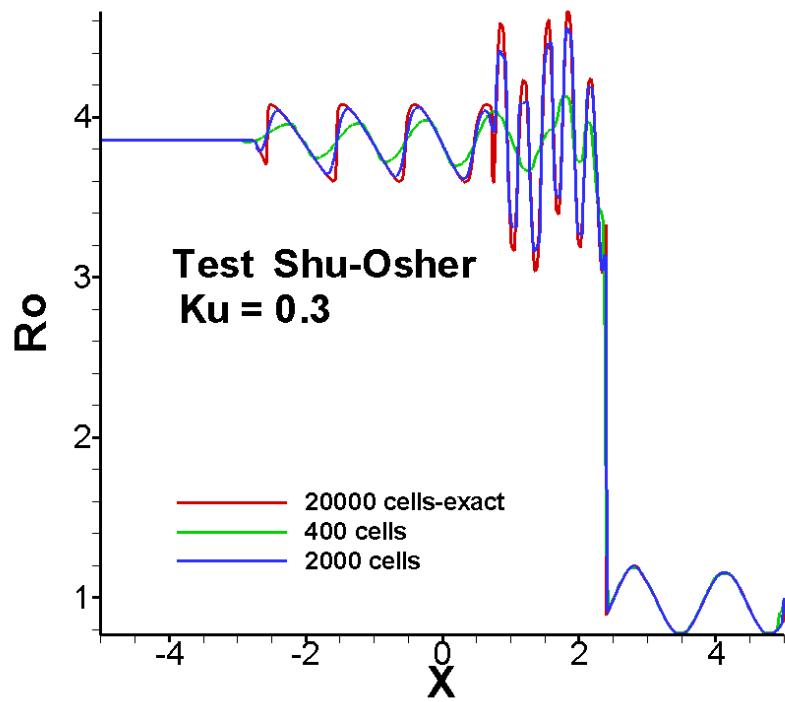


Рис.20

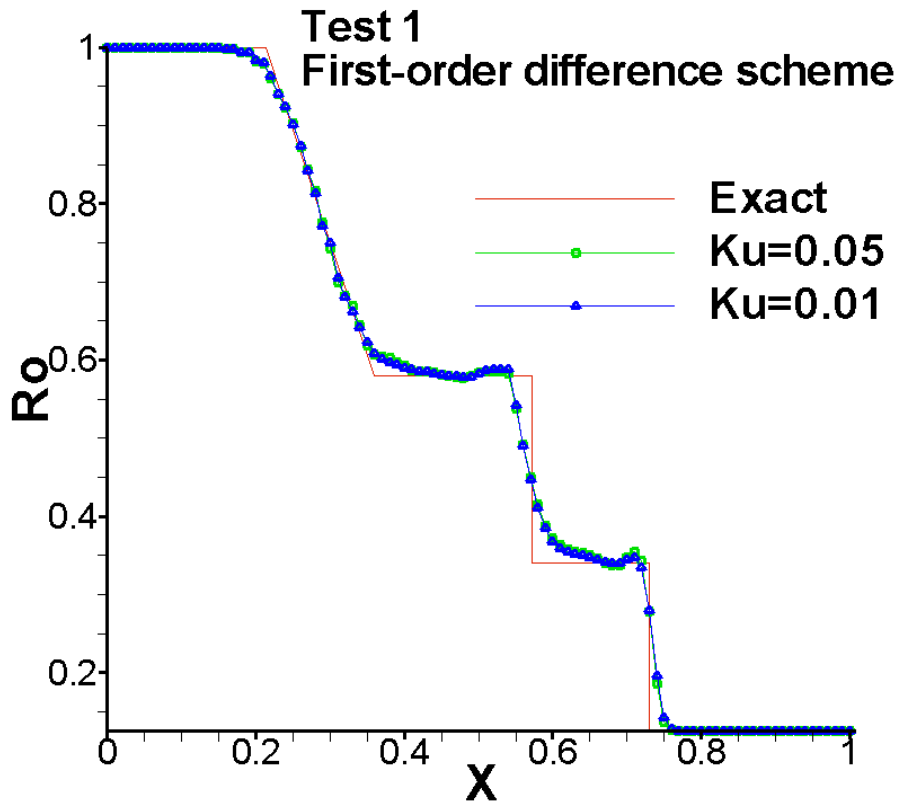


Рис.21

2.11. Метод АИВ в цилиндрических и сферических координатах.

Уравнения газовой динамики в цилиндрических ($m=1$) и сферических ($m=2$) координатах имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} (r^m \rho u) = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} (r^m I u) + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} (r^m (E + p) u) = 0 \end{cases}$$

Оператор $\frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} (r^m \dots)$ - оператор дивергенции. Вместо уравнения для полной энергии E можно рассматривать уравнение для давления p :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} (r^m p u) + (\gamma - 1) p \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} (r^m u) = 0.$$

Учитывая уравнение состояния $p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon$, из последнего уравнения получаем уравнение для внутренней энергии ε .

Уравнения газовой динамики будем решать на отрезке $0 < r < R$. Выберем сетку узлов $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_N = R$. Первый узел r_1 сдвинем относительно оси $r=0$ ($m=1$) или центра $r=0$ ($m=2$). Если шаг сетки постоянный h , то положим $r_1 = \frac{h}{2}$, $r_i = (i - \frac{1}{2})h$, $i = \overline{1, N-1}$, $(N - \frac{1}{2})h = R$. Введем, как и выше, потоковые узлы $\bar{r}_{1/2} = 0$, $\bar{r}_{i+1/2} = 0.5(r_i + r_{i+1})$, $i = \overline{1, N-1}$, $\bar{r}_{N+1/2} = r_N = R$. Расстояния между узлами сеток обозначим через $h_{i+1/2} = r_{i+1} - r_i$ и $\bar{h}_i = \bar{r}_{i+1/2} - \bar{r}_{i-1/2}$, $i = \overline{1, N}$. Введем также разностные отношения, как и ранее:

$$y_{r_{i+1/2}} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1/2}} \quad \text{и} \quad W_{\bar{r}_i} = \frac{W_{i+1/2} - W_{i-1/2}}{\bar{h}_i}, \quad \text{а также средние величины} \quad \bar{y}_{1/2} = 0,$$

$$\bar{y}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(y_{i+1} + y_i), \quad \bar{y}_{N+1/2} = y_N \quad \text{и т.д.}$$

На рис. 22 показан сдвиг узла r_1 относительно оси и центра, соответственно для цилиндрической и сферической системы координат.

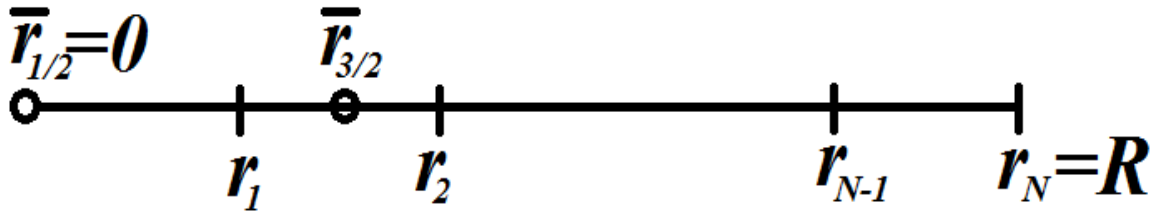


Рис. 22

Как и ранее разложим функции ρ^{n+1} , I^{n+1} , E^{n+1} и p^{n+1} в ряд Тейлора по степеням τ_n . Для построения разностной схемы, как и ранее, требуются вторые производные по времени для всех функций для вычисления поправок Лакса-Вендроффа. Приведем их

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r^m \rho u^2) + r^m \frac{\partial p}{\partial r} \right)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^m I u^2) + 2ur^m \frac{\partial p}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[u \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\gamma p}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} (r^m u) \right]$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^m (E+p) u^2) + \left(\frac{3}{2} u^2 + \frac{c^2}{\gamma-1} \right) r^m \frac{\partial p}{\partial r} + \gamma p u \frac{\partial}{\partial r} (r^m u) \right]$$

и вторые производные для давления

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = & \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^m p u^2) + c^2 r^m \frac{\partial p}{\partial r} + (\gamma-1) p \frac{\partial}{\partial r} (r^m u^2) \right] + \\ & + (\gamma-1) \left(\frac{m}{r} u^2 \frac{\partial p}{\partial r} + p \gamma \left(\frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} (r^m u) \right)^2 - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Заменяя в разложении по τ_n выражения для $\frac{\partial q}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$, $q = \rho, I, E, p$ приведенными выше выражениями, и аппроксимируя производные по пространственным переменным разностными отношениями, приходим к следующей разностной схеме:

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau_n} + \frac{1}{r_i^m} (\bar{r}^m W_q^n)_{\hat{r}_i} + \delta_{qI} \Pi_{\hat{r}_i}^n + \delta_{qp} Q_i^n = 0, \quad q = \rho, I, E \text{ (или } p \text{)}.$$

Здесь δ_{qI} и δ_{qp} - символы Кронекера, а потоки $W_{q_{i+1/2}}$, градиент $\Pi_{\hat{r}_i}$ и источник Q_i определим по следующим формулам

$$W_{\rho_{i+1/2}}^n = \overline{\rho u}_{i+1/2}^n - \frac{\tau_n}{2} \left[\frac{1}{\bar{r}_{i+1/2}^m} (r^m \rho u^2)_{r_{i+1/2}}^n + p_{r_{i+1/2}}^n \right]$$

$$W_{I_{i+1/2}}^n = \overline{\rho u}_{i+1/2}^n \bar{u}_{i+1/2}^n - \frac{\tau_n}{2} \left[\frac{1}{\bar{r}_{i+1/2}^m} (r^m I u^2)_{r_{i+1/2}}^n + 2 \bar{u}_{i+1/2}^n p_{r_{i+1/2}}^n \right]$$

$$\begin{aligned} W_{E_{i+1/2}}^n = & \overline{\rho u}_{i+1/2}^n \left\langle \frac{u^2}{2} \right\rangle_{i+1/2}^n + \frac{\gamma}{\gamma-1} \bar{u}_{i+1/2}^n \bar{p}_{i+1/2}^n - \frac{\tau_n}{2} \left[\frac{1}{\bar{r}_{i+1/2}^m} (r^m (E+p) u^2)_{r_{i+1/2}}^n + \right. \\ & \left. + \left(\frac{3}{2} \langle u^2 \rangle_{i+1/2}^n + \frac{(\bar{c}_{i+1/2}^n)^2}{\gamma-1} \right) p_{r_{i+1/2}}^n + \gamma (\bar{p} \bar{u})_{i+1/2}^n \frac{1}{\bar{r}_{i+1/2}^m} (r^m u)_{r_{i+1/2}}^n \right] \end{aligned}$$

$$\Pi_{i+1/2}^n = \bar{p}_{i+1/2}^n - \frac{\tau_n}{2} \left[\bar{u}_{i+1/2}^n p_{r_{i+1/2}}^n + \gamma \bar{p}_{i+1/2}^n \frac{1}{\bar{r}_{i+1/2}^m} (r^m u)_{r_{i+1/2}}^n \right], \quad i > 0$$

$$\Pi_{1/2}^n = p_1^n \left(1 - \frac{\tau_n}{2} \frac{1}{r_1} \gamma (m+1) u_1 \right).$$

Если использовать уравнение для давления, то

$$W_{pi+1/2}^n = \bar{p}_{i+1/2}^n \bar{u}_{i+1/2}^n - \frac{\tau_n}{2} \left[\frac{1}{\bar{r}_{i+1/2}^m} (r^m p u^2)_{ri+1/2}^n + \left(\bar{c}_{i+1/2}^n \right)^2 p_{ri+1/2}^n + (\gamma - 1) \bar{p}_{i+1/2}^n \frac{1}{\bar{r}_{i+1/2}^m} (r^m u^2)_{ri+1/2}^n \right]$$

$$Q_i^n = \frac{\tau_n}{2} (\gamma - 1) \left\langle \left\langle -\frac{1}{\bar{r}} m (\bar{u}^n)^2 p_r^n + \frac{(p_r^n)^2}{\bar{\rho}^n} - \gamma \bar{p}^n \frac{1}{\bar{r}^m} (r^m u)_r \right\rangle \right\rangle_i$$

Вместо давления p можно ввести внутреннюю энергию ε , полагая $p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon$.

На границе в узле $r_N = R$ задавались те же значения функций, что и в начальный момент времени. Поиск решение велся до момента времени, когда возмущения приходили на границу, либо на границе $r_N = R$ ставилось условие жесткой стенки $u = 0$. Все потоки массы, импульса, энергии на границе обращались в ноль. На оси $\bar{r}_{1/2} = 0$ и $\bar{r}_{1/2}^m W_{q1/2}^n = 0$, $q = \rho, I, E, p$.

По описанной выше разностной схеме определялось предикторное решение

$$\frac{\tilde{q}_i^{n+1} - q_i^n}{\tau_n} + \frac{1}{r_i^m} (\bar{r}^m W_q^n)_{\hat{r}_i} + \delta_{qI} \Pi_{\hat{r}_i}^n + \delta_{qp} Q_i^n = 0, \quad q = \rho, I, E \text{ (или } p \text{)}.$$

Искусственная вязкость находилась при «замороженных» коэффициентах. Здесь «замораживаем» еще и r^m . Тогда оказывается, что μ не зависит от m и совпадает с искусственной вязкостью, полученной в декартовом случае (см. выше μ_{\min} и μ_{\max}). В качестве диссипативных слагаемых выбиралось выражение

$$\left(L_h (\mu^{n+1}) q^n \right)_i = \frac{1}{r_i^m} (\bar{r}^m \mu^{n+1} q_r^n)_{\hat{r}_i}, \quad q = \rho, I, E \text{ (или } p \text{)}.$$

На границе полагались $\mu_{1/2}^{n+1} = \mu_{N+1/2}^{n+1} = 0$.

После вычисления предикторного решения, как и всегда, проводился анализ. Определялись области КР, где $\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \right)_{ri+1/2}^{n+1} \tilde{\rho}_{ri+1/2}^{n+1} < 0$ и $\mu_{i+1/2}^{n+1} = 0$, область

ВР, где $\tilde{u}_{r_{i+1/2}}^{n+1} > 0$ и $\mu_{i+1/2}^{n+1} = 0$, область УВ (ВС), где $\tilde{u}_{r_{i+1/2}}^{n+1} < 0$ и $\mu_{i+1/2}^{n+1} = (\mu_{\min})_{i+1/2}^n$, а также область осцилляций (ОС), где $\tilde{\rho}_{r_{i+1/2}}^{n+1} \tilde{\rho}_{r_{i-1/2}}^{n+1} < 0$ и $\mu_{i+1/2}^{n+1} = (\mu_{\max})_{i+1/2}^n$, $\mu_{i-1/2}^{n+1} = (\mu_{\max})_{i-1/2}^n$. Затем находилось корректорное решение – функции на слое t_{n+1} :

$$\frac{q_i^{n+1} - \tilde{q}_i^{n+1}}{\tau_n} = (L_n(\mu^{n+1})q^n)_i, \quad q = \rho, I, E \text{ (или } p).$$

Решалась задача о многократном отражении УВ от оси ($m=1$) и центра ($m=2$) с $r=0$ и жесткой стенки при $r_N = R$. УВ размывалась на три интервала. Решалась также задача из [96] о распаде разрыва. В начальный момент при $0 < r < r_0 = 0.4$ задавались функции $\rho=1$, $u=0$, $p=1$, а при $r_0 = 0.4 < r < 1$ задавались $\rho=0.125$, $u=0$, $p=0.1$. На рис. 23а и 24а приведены результаты расчета на момент времени $t=0.25$. На рис. 23б и рис. 24б представлены фрагменты зоны разрывов решений. Имеется хорошее совпадение с результатами расчетов из [96]. Кроме этого, подобные расчеты использовались при решении тестовой задачи «Explosion» из [70].

Использование других искусственных вязкостей, учитывающих изменения радиуса r^m , не привело к заметным изменениям решения. Вязкость оказывалась зависящей от $\frac{1}{2} h_{i+1/2} \frac{m}{r_{i+1/2}}$ и за счет этого несколько увеличивалась вблизи $r=0$. Величина τ_n и число Куранта выбирались, как и в декартовом случае.

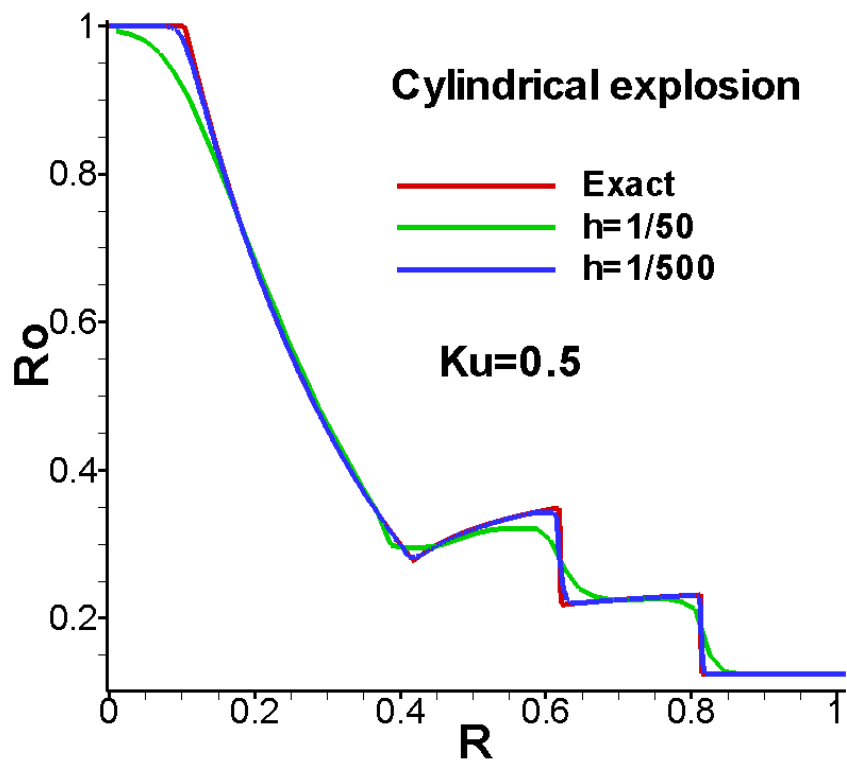


Рис.23а

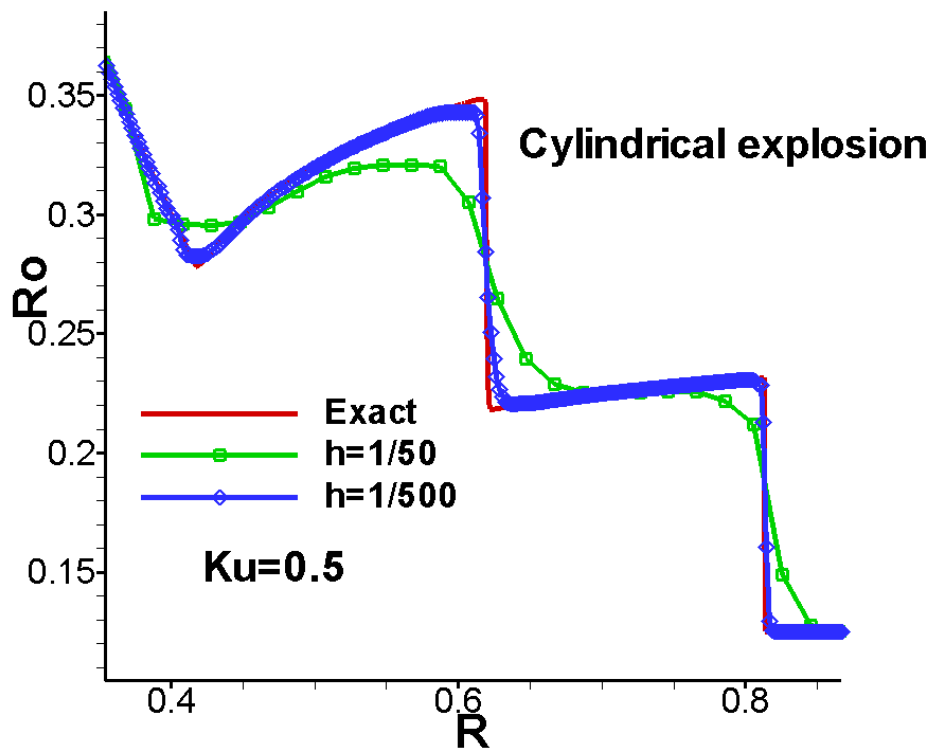


Рис.23б

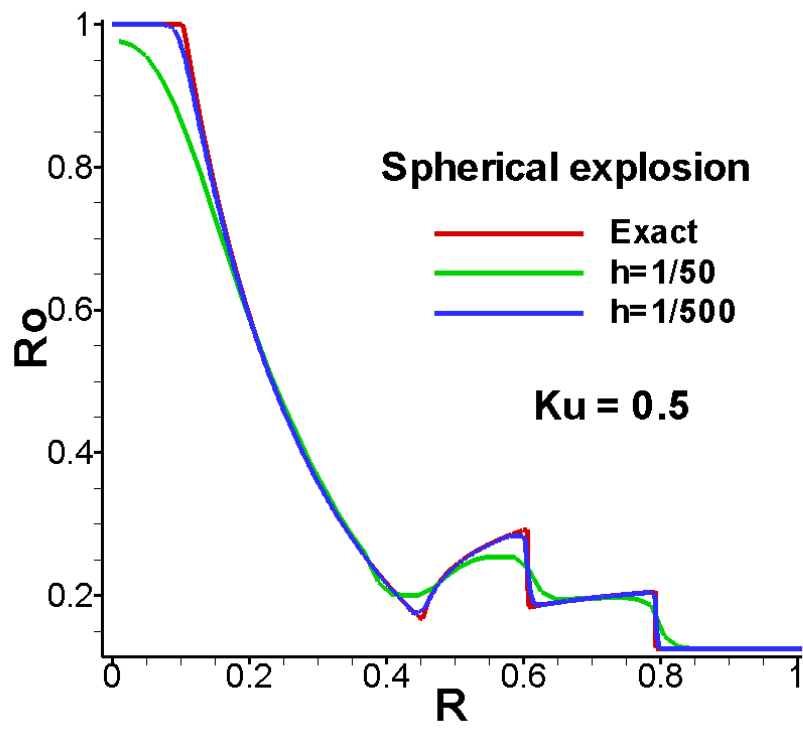
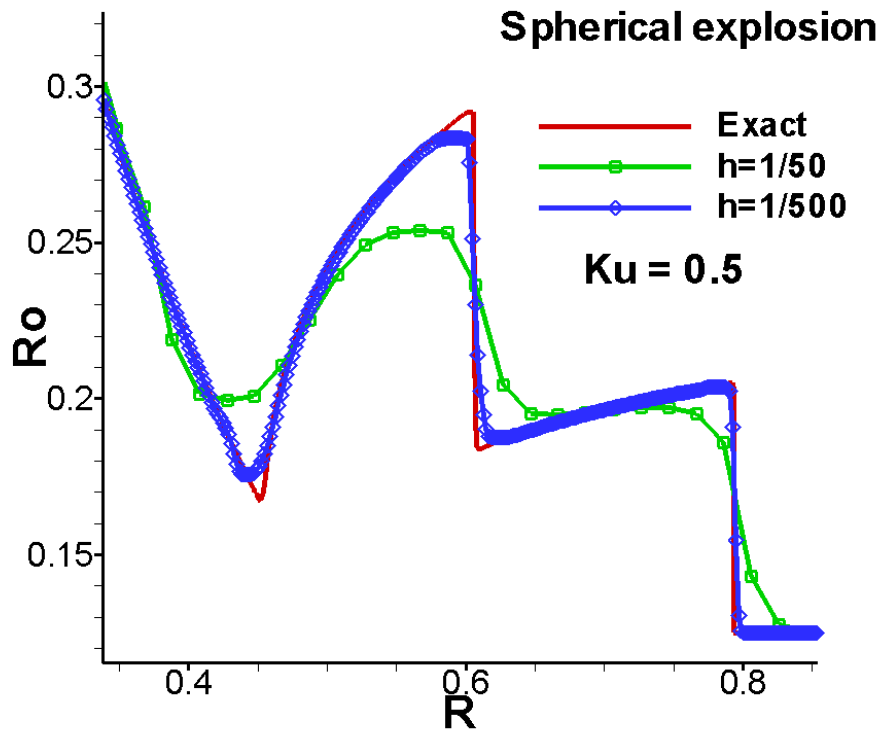
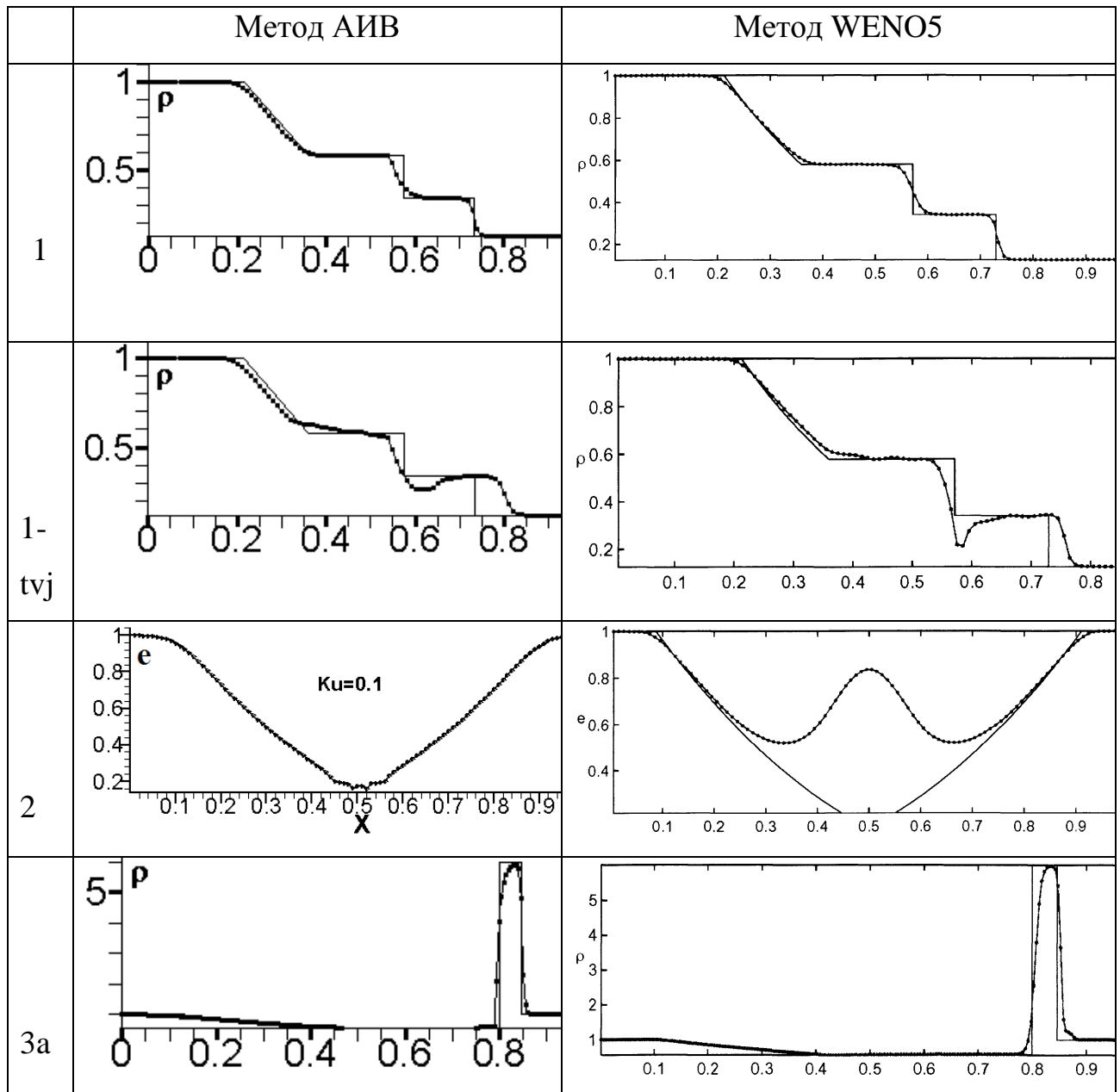


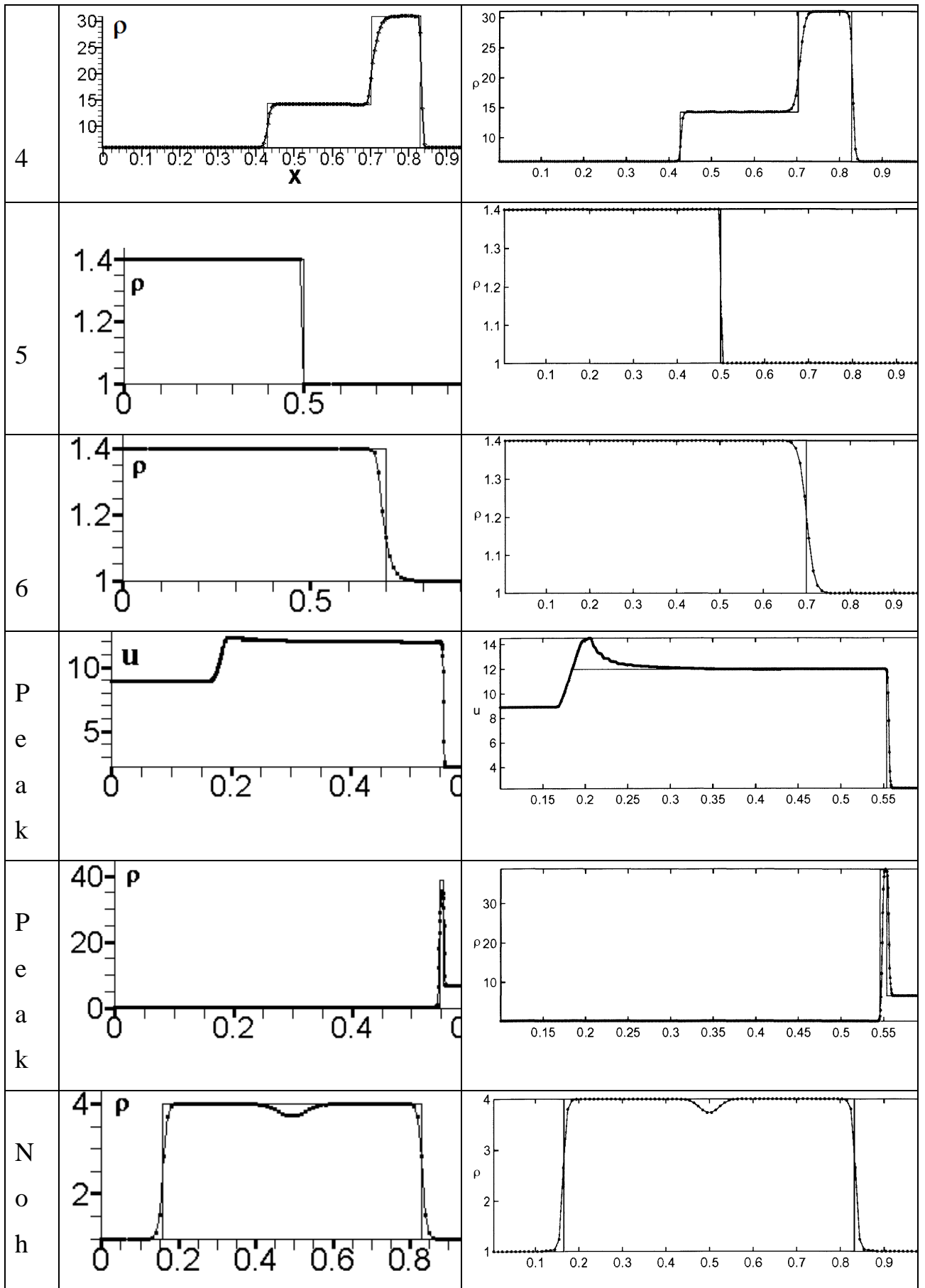
Рис.24а



2.12. Сравнение метода АИВ и WENO5

Сравнение расчётов тестовых задач с десятью известными методами из [70, 71] и расчётов по методу АИВ показывают, что метод АИВ даёт весьма пригодные для практического использования результаты. Ближе всего метод АИВ по совокупности всех тестов к методу LL и WENO5. Метод WENO5 строится на семиточечном шаблоне и на гладких решениях даёт аппроксимацию порядка h^5 . На рисунке приводятся результаты расчётов тестовых задач методом АИВ и WENO5.





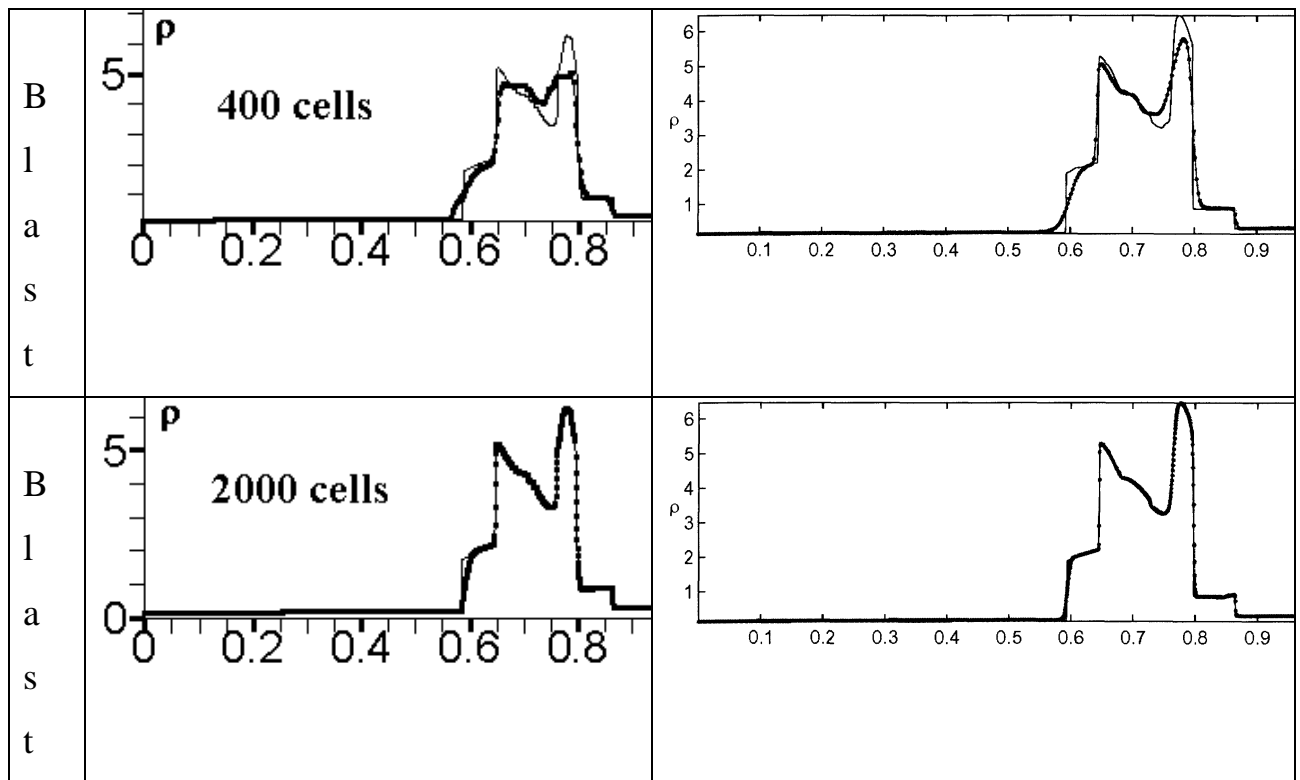


Рис. 29

Заключение по главе 2

1. Разработан метод АИВ для численного решения задач газовой динамики, получен диапазон изменения коэффициента искусственной вязкости, разработан алгоритм метода АИВ в задачах с различными типами разрывов.
2. Разработан метод АИВ для численного решения уравнений Эйлера в одномерном случае, получена оценка коэффициента искусственной вязкости.
3. Проведена верификация метода АИВ на известных тестовых задачах и выполнено сравнение метода АИВ с другими известными численными методами.

Результаты главы 2 опубликованы в работах:

1. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости. Письма в ЭЧАЯ. 2011, Т.8, №5(168) С. 817-822 (Компьютерные технологии в физике).

2. Попов И.В., Фрязинов И.В. Конечно-разностные методы решения уравнений газовой динамики с введением искусственной вязкости. Математическое моделирование, 2008, 20(8), с. 48-60. I.V. Popov, I.V. Fryazinov. Finite-Difference Method for Solving Gas Dynamics Equations Using Adaptive Artificial Viscosity. Mathematical Models and Computer Simulations, 2009, V1, № 4, pp. 493-502
3. Попов И.В., Фрязинов И.В. О методе адаптивной искусственной вязкости. Математическое моделирование, 2010, 22(7), 121-128.
4. Попов И.В., Фрязинов И.В. О новом выборе адаптивной искусственной вязкости. Математическое моделирование, 2010, 22(12), 23-32.
5. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. // М., «КРАСАНД», 2014. – 288 с., 18 п.л.

Глава 3.

Метод адаптивной искусственной вязкости для решения уравнений газовой динамики на неструктурированных сетках

В этой главе рассматривается многомерный метод адаптивной искусственной вязкости (метод АИВ) на неструктурированных сетках.

Метод адаптивной искусственной вязкости решения уравнений газовой динамики состоит из трех этапов. На первом этапе по явной разностной схеме, в которой учтены поправки Лакса-Вендроффа, но отсутствуют диссипативные слагаемые с искусственной математической вязкостью, на временном слое $t_{n+1} = t_n + \tau_n$, (τ_n - шаг сетки по времени) находится «предикторное» решение. Заметим, что на ортогональной сетке и в областях гладкости решения поправки Лакса-Вендроффа приводят к разностным схемам с аппроксимацией по времени τ_n^2 . Разностная схема строится методом баланса. Искомые функции относятся к центрам ячеек – треугольников или тетраэдров. При построении схем используется метод опорных операторов [97]¹. При построении аппроксимаций используются приемы, разработанные при построении полностью консервативных разностных схем [88].

Далее, на втором этапе, в разностную схему вводятся диссипативные слагаемые с одинаковой для всех уравнений искусственной вязкостью. Искусственная вязкость находится из требования условия принципа максимума при замороженных коэффициентах схемы, обеспечивающего монотонность сеточного решения. Искусственная вязкость вводится адаптивно к решению полученному на предикторном этапе: $\mu^{n+1} = \mu_{\min}^n$ на ударной волне (УВ) и волне сжатия (ВС), $\mu^{n+1} = \mu_{\max}^n$ в области осцилляций решения (ОСЦ), $\mu^{n+1} = 0$ на контактном разрыве (КР) и волне разрежения (ВР). Области занятые УВ (ВС), ОСЦ, КР и ВР определяются проверкой известных неравенств [79], [98] для производных «предикторного» решения. Производные находятся по линейному восполнению предикторного решения.

¹ сеточный оператор grad^h строится по сеточному оператору div^h

На третьем этапе предикторное решение сглаживается введением в разностную схему диссипативных слагаемых. Отсутствие искусственной вязкости на КР и малой искусственной вязкости на УВ (ВС) не приводит к сильному их размыванию: КР размывается лишь внутренней вязкостью разностной схемы [79], УВ размывается на 3-4 сеточных интервала.. Диссипативные слагаемые заметны лишь в окрестности разрывов.

В работе приводятся численные расчеты тестовых двумерных задач на ортогональных сетках из [70, 71], которые сравниваются с расчётами на треугольных сетках, полученными в данной работе. Результаты расчетов близки.

3.1. Постановка задачи.

Рассмотрим уравнения газовой динамики в случае двух ($D=2$) и трех ($D=3$) измерений, в области Ω общего вида с границей Γ . В двумерном случае задачи будем рассматривать в декартовых ($x_1 = x, x_2 = y$) и цилиндрических переменных ($x_1 = r, x_2 = z$), в трехмерном случае лишь в декартовых переменных ($x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$). В цилиндрических координатах ($D=2$) операторы дивергенции и градиента принимают вид:

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{1}{r} \sum_{\alpha=1}^D \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (r u_{\alpha}), \quad \operatorname{grad}_{\alpha} p = \frac{\partial p}{\partial x_{\alpha}}, \quad \alpha = \overline{1, D}, \quad D = 2, 3$$

где u_{α} - компонента вектора скорости \bar{v} .

При переходе к декартовым переменным радиус r следует заменить на единицу. Уравнения газовой динамики и уравнение состояния были приведены выше в терминах div и grad . Повторять их здесь не будем. Будем считать, что граница Γ области Ω представляет собой кусочно-гладкую кривую ($D=2$) или поверхность ($D=3$), не имеющую двугранных или, соответственно, телесных нулевых углов. Будем считать границу, состоящей из частей: Γ_w - жесткая стенка, на которой равна нулю нормальная компонента скорости $v_n = 0$ и потоки массы, компонент импульса, полной и

внутренней энергии. Также и на оси Γ_a при $r=0$ в цилиндрических координатах $u_r = -v_n = 0$, как и все потоки, а также $\frac{\partial p}{\partial \bar{n}} = 0$, здесь \bar{n} - внешняя нормаль к границе области Ω . На входной границе Γ_{in} , через которую в область Ω втекает газ, будем задавать значения всех функций ρ , $I_\alpha = \rho u_\alpha$, $\alpha = \overline{1, D}$, E (или ε), $p = (\gamma - 1) \left(E - \rho \frac{\bar{v}^2}{2} \right)$. На части границы Γ_0 , вдали от области возмущения начального течения, будем задавать начальные значения всех функций. На границе Γ_{out} , где происходит истечение газа из области (сток), считаем равными нулю производные от всех функций по нормали к Γ_{out} . Все функции в начальный момент времени должны быть заданы.

3.2. Сетки и обозначения

В двумерном случае ($D=2$) заменим границу Γ области Ω ломаной Γ_h^2 . В трехмерном случае ($D=3$) проведём триангуляцию поверхности Γ и получим поверхность Γ_h из треугольников, вершины которых лежат на границе Γ . Область Ω_h , ограниченную Γ_h , покроем системой треугольников ($D=2$) или тетраэдров ($D=3$), которые будем называть ячейками сетки (при $D=2$, см. рис. 3.1). Ячейки сетки строятся согласованно с разбиением границы на отрезки или треугольники.

Для каждого треугольника ($D=2$) и тетраэдра ($D=3$) найдём, соответственно, центр описанной окружности или сферы. Если этот центр лежит строго внутри ячейки, то назовём его центром ячейки. Иначе центром ячейки назовём её центр тяжести. Множество центров x_0 ячеек ω_0 назовём основной сеткой и обозначим Ω_{h_0} . К узлам x_0 ячейки ω_0 будем относить искомые сеточные функции ρ_0 , $I_{\alpha 0} = \rho_0 u_{\alpha 0}$, $\alpha = \overline{1, D}$, E_0 (или ε_0), p_0 .

Граница γ_0 ячейки ω_0 состоит из $D+1$ элементов (трех отрезков при $D=2$, четырёх граней при $D=3$). Отрезки и их длины, фигуры и их площади,

² ломаными для многосвязной области

тела и их объёмы будем обозначать одними и теми же буквами. Стороны треугольников ($D=2$) и грани тетраэдров ($D=3$) будем обозначать буквой S . Пусть ω_0 и ω_i соседние ячейки с общей границей S_i и

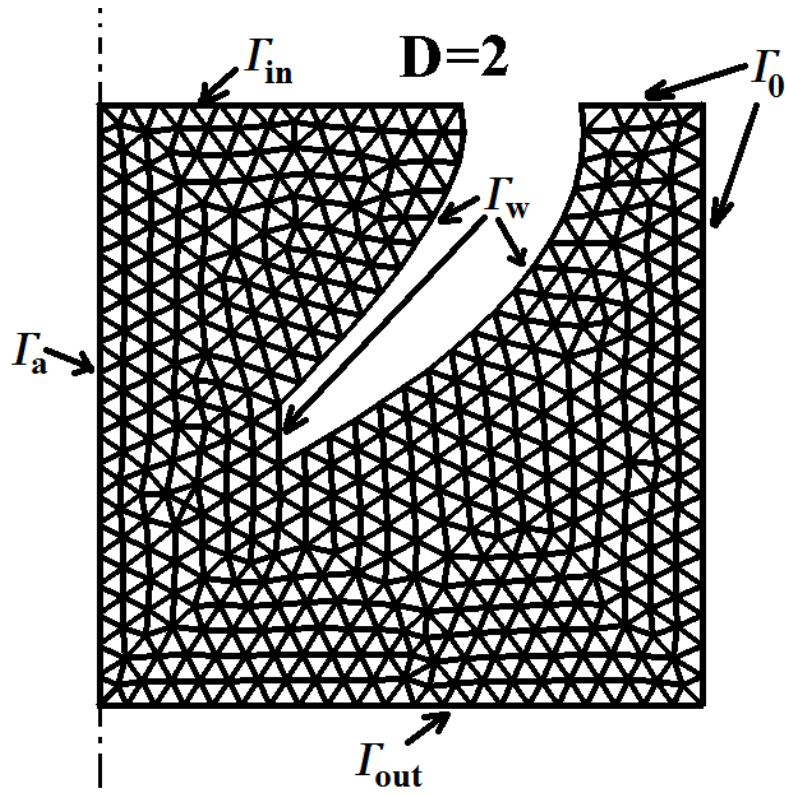


Рис. 3.1

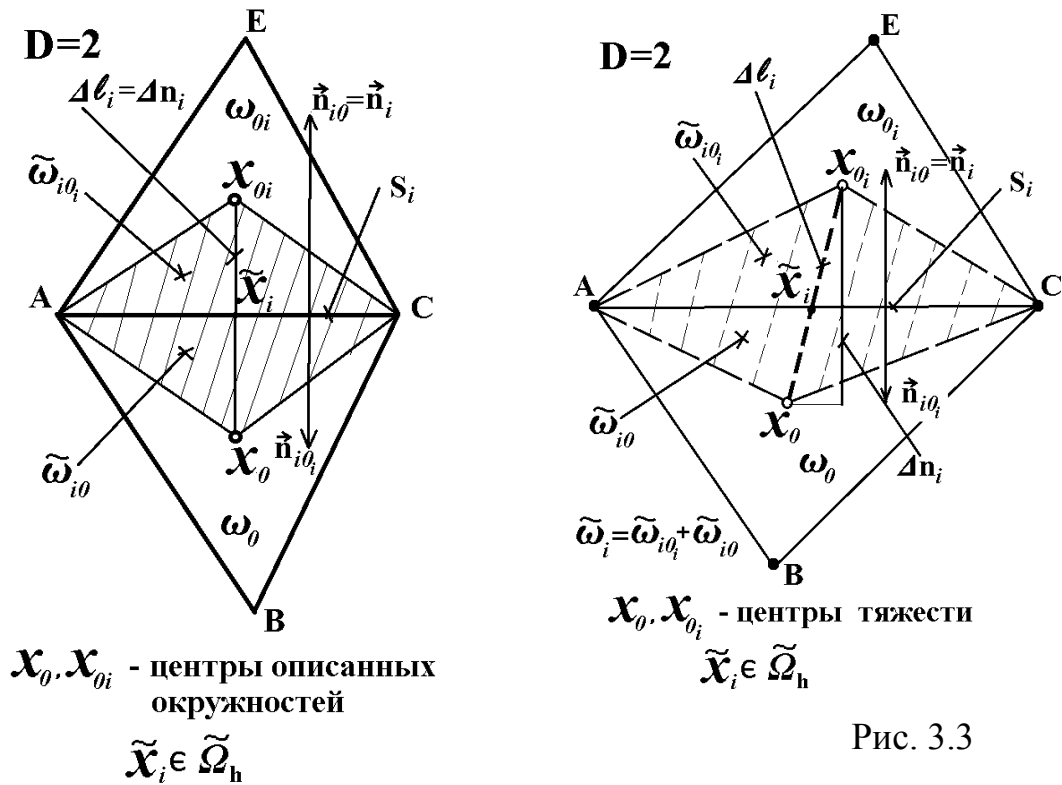
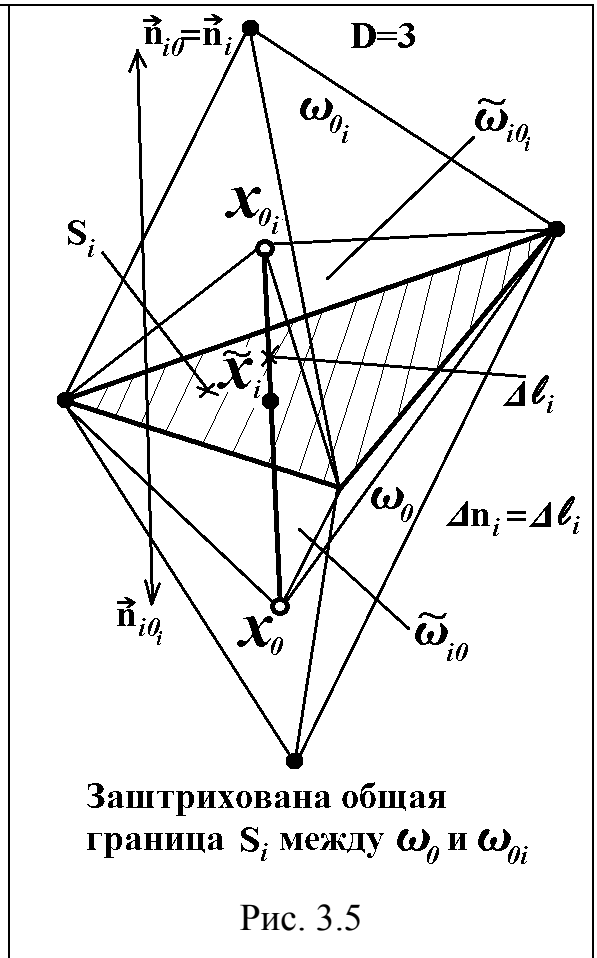
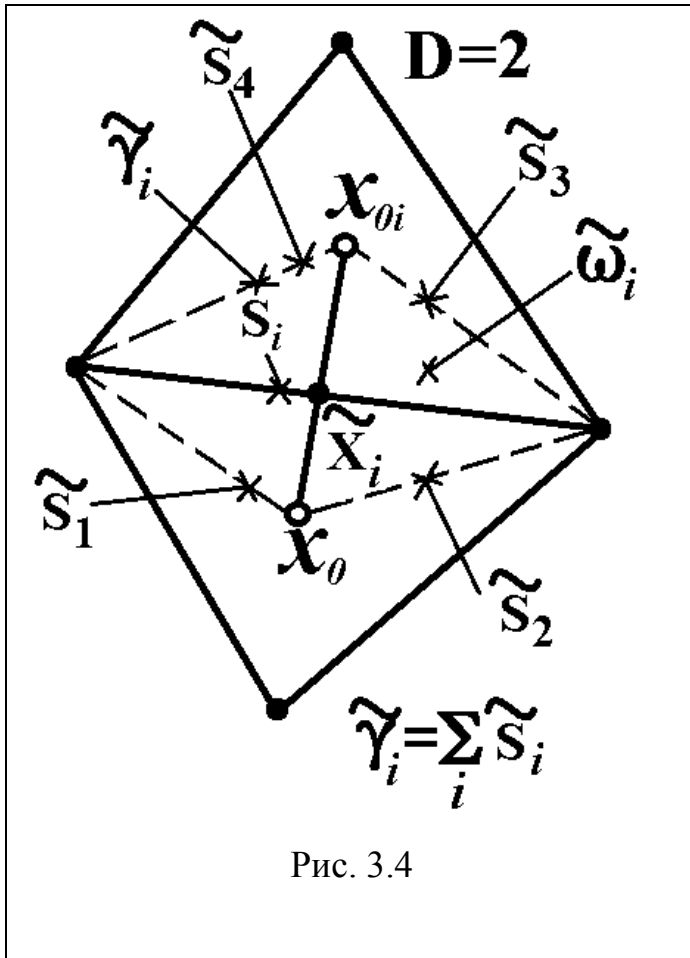


Рис. 3.3

Рис. 3.2

центрами x_0 и x_{0_i} (см. рис. 3.2 и рис.3.3). Соединим соседние узлы x_0 и x_{0_i} отрезком Δl_i . Обозначим через \tilde{x}_i точку пересечения Δl_i и S_i (или продолжения S_i), сопоставим её с S_i и эту точку назовём потоковым узлом. Если граница ячейки $S_i \in \Gamma_h$, то сопоставим ей потоковый узел \tilde{x}_i , являющийся серединой отрезка S_i ($D=2$), либо, как и выше, центром описанной окружности или центром тяжести треугольника S_i ($D=3$). Множество внутренних и граничных узлов \tilde{x}_i обозначим, соответственно, через $\tilde{\Omega}_h$ и $\tilde{\Gamma}_h$ и $\tilde{\Gamma}_h$ представим в виде суммы множеств $\tilde{\Gamma}_{hw}$, $\tilde{\Gamma}_{ha}$ и т.д., соответствующих Γ_{hw} , Γ_{ha} и т.д. Пусть \vec{n}_{i0} и \vec{n}_{i0_i} - внешние нормали к границе S_i ячеек ω_0 и ω_{0_i} соответственно. Разностную схему будем строить в узле $x_0 \in \Omega_{h0}$ на шаблоне, включающем, кроме центра x_0 , ячейки ω_0 , соседние с ним центры x_{0_i} ячеек ω_{0_i} . В связи с этим введём внешние нормали $\vec{n}_i = \vec{n}_{i0}$ к границам S_i ячейки ω_0 . Пусть $\Delta n_i = \Delta n_{i0} + \Delta n_{i0_i}$, где Δn_{i0} и Δn_{i0_i} - длины проекций отрезков $\Delta l_i = \Delta l_{i0} + \Delta l_{i0_i}$, где $\Delta l_{i0} \subset \omega_0$, $\Delta l_{i0_i} \subset \omega_{0_i}$ на направление нормали \vec{n}_i .

Соединим центры x_0 и x_{0_i} соседних ячеек с концами общего для ω_0 и ω_{0_i} отрезка S_i в случае $D=2$, а при $D=3$ с границей общей грани S_i . В результате около S_i возникают два треугольника ($D=2$), либо два тетраэдра ($D=3$) (см. рис. 3.4 – 3.5): $\tilde{\omega}_{i0} \subset \omega_0$ и $\tilde{\omega}_{i0_i} \subset \omega_{0_i}$. Внутреннему узлу \tilde{x}_i сопоставим ячейку $\tilde{\omega}_i = \tilde{\omega}_{i0} \cup \tilde{\omega}_{i0_i}$. Если $\tilde{x}_i \in \tilde{\Gamma}_h$, то ячейка $\tilde{\omega}_i$ состоит лишь из одного треугольника или тетраэдра $\tilde{\omega}_i = \tilde{\omega}_{i0} \subset \omega_0$.



В цилиндрическом случае расстояния от центра x_0 ячейки ω_0 , центра тяжести \bar{x}_0 , потоковых узлов \tilde{x}_i до оси ($r=0$) обозначим, соответственно, через r_0 , \bar{r}_0 , \tilde{r}_i . Если $\tilde{x}_i \in \tilde{\Gamma}_{ha}$, то положим $\tilde{r}_i = r_0/2$.

Введём сетку по времени $t_{n+1} = t_n + \tau_n$, где τ_n - переменный шаг по времени. Временные индекс n , $n+1$ будем писать вверху

$$q_0^{n+1} = q(t_{n+1}, x_0), \quad q_0^n = q(t_n, x_0),$$

где q - любая из функций ρ , $I_\alpha = \rho u_\alpha$, $\alpha = \overline{1, D}$, $E(\varepsilon)$, p .

При построении разностных схем будет использоваться метод баланса или метод контрольных объёмов [79, 97]. Исходные уравнения будут интегрироваться по ячейкам ω_0 . В результате возникнут интегралы по границам S_i от потоков. В потоках учтём поправки Лакса-Вендроффа. Если $D=2$ и треугольники остроугольные, то отрезки $\Delta l_i = \Delta n_i$ перпендикулярны отрезкам S_i и делят последние пополам. При использовании линейной

интерполяции потоки массы в узле \tilde{x}_i аппроксимируются с погрешностью $\Delta n_i^2 + S_i^2$. Если $\Delta n_i \sim S_i$, то уравнение неразрывности будет аппроксимироваться с порядком $\tau_n + \Delta n$, $\tau_n + S$, где $\Delta n = \max_i \Delta n_i$ и $S = \max_i S_i$ в норме C . В случае $D = 3$ повышение аппроксимации уравнения неразрывности справедливо для правильных тетраэдров. В остальных случаях потоки аппроксимируются с первым порядком. Выше было показано с помощью расчёта модельной задачи, что для повышения точности нужно использовать в разностной схеме поправки Лакса-Вендроффа, что существенно. Нужно строить сетки с малым числом «плохих» (тупоугольных) элементов.

3.3. Аппроксимация по времени

Исходные уравнения газовой динамики запишем в виде:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \text{div}(\vec{v} B_A) + C_A = 0,$$

где $A = (\rho, I_\alpha = \rho u_\alpha, \alpha = \overline{1, D}, E)$, $B_A = (\rho, I_\alpha = \rho u_\alpha, \alpha = \overline{1, D}, E + p)$,

$$C_A = (0, \partial p / \partial x_\alpha, \alpha = \overline{1, D}, 0).$$

Разностные схемы будем строить со вторым порядком по времени (по τ_n) в областях гладкости решения. Используя формулу Тейлора, запишем

$$\frac{\partial A^n}{\partial t} = \frac{A^{n+1} - A^n}{\tau_n} - \frac{\tau_n}{2} \frac{\partial^2 A^n}{\partial t^2} + \dots$$

Ограничимся в правой части лишь указанными членами разложения, $\frac{\partial A^n}{\partial t}$ заменим из уравнения на $-(\text{div}(\vec{v} B_A) + C_A)$, а вторые производные по времени выразим через производные по пространственным переменным. Приведём поправки Лакса-Вендроффа для \vec{Q}_A и Φ_A в равенстве

$$\frac{\partial^2 A^n}{\partial t^2} = \text{div} \vec{Q}_A + \Phi_A.$$

Здесь $\vec{Q}_A = \left\{ Q_{A\beta} = \operatorname{div}(\vec{v} \rho u_\beta R_A) + R_A \frac{\partial p}{\partial x_\beta} + u_\beta G_A, \beta = \overline{1, D} \right\}$, где $Q_{A\beta}, \beta = \overline{1, D}$ -

компоненты вектора \vec{Q}_A . Заменим B_A величиной

$$R_A = B_A / \rho = (1, u_\alpha, \alpha = \overline{1, D}, (E + p) / \rho),$$

$$G_A = \left(0, \frac{\partial p}{\partial x_\alpha}, \alpha = \overline{1, D}, g \right), \Phi_A = \left(0, \frac{\partial g}{\partial x_\alpha}, \alpha = \overline{1, D}, 0 \right), g = \gamma p \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \operatorname{grad} p.$$

Уравнение для давления $p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon$ (или $\rho \varepsilon = p / (\gamma - 1)$) имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -g.$$

Аналогично предыдущему

$$\frac{\partial p^n}{\partial t} = \frac{p^{n+1} - p^n}{\tau_n} - \frac{\tau_n}{2} \frac{\partial^2 p^n}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 p^n}{\partial t^2} = \operatorname{div} \vec{Q}_p + \Phi_p$$

Здесь

$$\vec{Q}_p = \left\{ Q_{p\beta} = \operatorname{div}(\vec{v} u_\beta p) + c^2 \frac{\partial p}{\partial x_\beta} + (\gamma - 1) p u_\beta \operatorname{div} \vec{v}, \beta = \overline{1, D} \right\},$$

$$\Phi_p = (\gamma - 1) \left[g \operatorname{div} \vec{v} + p \operatorname{div} \vec{F} - \frac{(\operatorname{grad} p)^2}{\rho} \right], \vec{F} = \{ F_\beta = (\vec{v}, \nabla u_\beta) = \operatorname{div}(u_\beta \vec{v}) - u_\beta \operatorname{div} \vec{v}, \beta = \overline{1, D} \},$$

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}.$$

Объединяя предыдущие выражения, находим

$$\frac{A^{n+1} - A^n}{\tau_n} + \operatorname{div}(\vec{v} \rho R_A)^n + C_A^n - \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} \vec{Q}_A^n + \Phi_A^n) = 0,$$

где $A = (\rho, I_\alpha = \rho u_\alpha, \alpha = \overline{1, D}, E)$, $\frac{\tau_n}{2} \operatorname{div} \vec{Q}_A^n$ - поправка Лакса-Вендроффа к потоку

$\vec{v} \rho R_A$, $\frac{\tau_n}{2} \Phi_A^n$ - поправка к C_A (градиенту давления). Также

$$\frac{p^{n+1} - p^n}{\tau_n} + g^n - \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} \vec{Q}_p^n + \Phi_p^n) = 0.$$

Здесь можно заменить p на $(\gamma - 1) \rho \varepsilon$ и получить уравнение для внутренней энергии ε и соответствующие поправки Лакса-Вендроффа.

Теперь необходимо аппроксимировать на треугольных и тетраэдральных сетках приведённые выше выражения, содержащие дивергенцию векторов и градиенты. В соответствии с методом опорных операторов [97] выберем аппроксимацию дивергенции в узле x_0 и по ней найдём аппроксимацию градиента в узле x_0 и дивергенцию в узле \tilde{x}_i .

3.4. Аппроксимации дивергенции и градиента

Пусть \vec{W}_{qi} - вектор потока величины $q = (\rho, I_\alpha = \rho u_\alpha, \alpha = \overline{1, D}, E)$ в узле \tilde{x}_i , а $(W_q)_i \equiv (W_{qn_i})_i$ - компонента этого вектора в направлении нормали \vec{n}_i к границе S_i . Дивергенцию этого вектора аппроксимируем естественным образом.

$$\operatorname{div}_0 \vec{W}_q = \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i (\tilde{r} W_q)_i S_i.$$

Здесь и ниже в декартовых координатах надо положить \bar{r}_0, \tilde{r}_i равными единице. В цилиндрических координатах \bar{r}_0 - расстояние от центра тяжести ячейки до оси, поскольку

$$\int_{\omega_0} r d\omega_0 \equiv \bar{r}_0 \omega_0.$$

В выражении для $\operatorname{div}_0 \vec{W}_q$ суммирование ведётся по всем границам S_i (по всем i) ячейки ω_0 .

Выберем в качестве $\vec{W}_{q0} = \vec{v}_0$ вектор скорости. В узле \tilde{x}_i скорость, умноженную на r_i , определим с помощью линейной интерполяции

$$\langle r \vec{v} \rangle_i = \begin{cases} \frac{(r \vec{v})_0 \Delta n_{i0_i} + (r \vec{v})_{0_i} \Delta n_{i0}}{\Delta n_i}, & \tilde{x}_i \in \tilde{\Omega}_h, \\ (r \vec{v})_i, & \tilde{x}_i \in \tilde{\Gamma}_{hw} \cup \tilde{\Gamma}_{ha} \end{cases}$$

А нормальную компоненту $r \vec{v}$ на \vec{n}_i запишем в виде

$$\langle r v_{n_i} \rangle_i = \begin{cases} \frac{(r v_{n_i})_0 \Delta n_{i0_i} + (r v_{n_i})_{0_i} \Delta n_{i0}}{\Delta n_i}, & \tilde{x}_i \in \tilde{\Omega}_h \\ 0, & \tilde{x}_i \in \tilde{\Gamma}_{hw} \cup \tilde{\Gamma}_{ha} \end{cases}$$

Таким образом,

$$\operatorname{div}_0^h \bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i \langle r \mathbf{v}_{n_i} \rangle_i S_i, \quad \sum_{\Omega_{h0}} \bar{r}_0 \omega_0 \operatorname{div}_0^h \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad \text{при } \tilde{\Gamma}_h = \tilde{\Gamma}_{hw} \cup \tilde{\Gamma}_{ha}.$$

Второе равенство означает дивергентность аппроксимации, то есть выполнение законов сохранения массы, при однородных краевых условиях.

Рассмотрим равенство

$$J = \int_{\Omega} p(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}) r d\Omega = - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{v}} \cdot (\operatorname{grad} p) r d\Omega$$

и соответствующий сеточный аналог

$$J^h = \sum_{\Omega_{h0}} (p_0 \operatorname{div}_0^h \bar{\mathbf{v}}) \bar{r}_0 \omega_0 = - \sum_{\Omega_{h0}} \left(\sum_{\alpha=1}^D u_{\alpha 0} \operatorname{grad}_{\alpha 0}^h p \right) \bar{r}_0 \omega_0.$$

Преобразуем левую часть последнего равенства и получим выражение для градиента.

Запишем

$$\operatorname{div}_0^h \bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_{i \neq i'} \frac{(r \mathbf{v}_{n_i})_{0_i} \Delta n_{i0} + (r \mathbf{v}_{n_i})_0 \Delta n_{i0_i}}{\Delta n_i} S_i.$$

Здесь $\langle r \mathbf{v}_{n_r} \rangle_{i'} \equiv 0$, при $\tilde{x}_{i'} \in \tilde{\Gamma}_{hw} \cup \tilde{\Gamma}_{ha}$, штрих над индексом i означает принадлежность величины граничным узлам.

Поскольку $\Delta n_i = \Delta n_{i0} + \Delta n_{i0_i}$, то

$$\frac{(r \mathbf{v}_{n_i})_{0_i} \Delta n_{i0} + (r \mathbf{v}_{n_i})_0 \Delta n_{i0_i}}{\Delta n_i} = \frac{\left((r \mathbf{v}_{n_i})_{0_i} - (r \mathbf{v}_{n_i})_0 \right) \Delta n_{i0} + (r \mathbf{v}_{n_i})_0 \Delta n_i}{\Delta n_i}.$$

Далее

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_0^h \bar{\mathbf{v}} &= \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \left(\sum_{i \neq i'} S_i \left[(r \mathbf{v}_{n_i})_{0_i} - (r \mathbf{v}_{n_i})_0 \right] \frac{\Delta n_{i0}}{\Delta n_i} + \sum_{i \neq i'} S_i (r \mathbf{v}_{n_i})_0 \right) = \\ &= \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \left[\sum_{i \neq i'} S_i \left[(r \mathbf{v}_{n_i})_{0_i} - (r \mathbf{v}_{n_i})_0 \right] \frac{\Delta n_{i0}}{\Delta n_i} - \sum_{i'} S_{i'} (r \mathbf{v}_{n_r})_0 \right] \end{aligned}$$

Здесь использовались равенства

$$\sum_i S_i (r \mathbf{v}_{n_i})_0 = 0 \quad \text{и} \quad \sum_i S_i (r \mathbf{v}_{n_i})_0 = \sum_{i \neq i'} S_i (r \mathbf{v}_{n_i})_0 + \sum_{i'} S_{i'} (r \mathbf{v}_{n_r})_0,$$

$$\text{тогда} \quad \sum_{i \neq i'} S_i (r \mathbf{v}_{n_i})_0 = - \sum_{i'} S_{i'} (r \mathbf{v}_{n_r})_0$$

Для левой части выражения J^h получим следующей вид:

$$J^h = \sum_{\Omega_{h0}} \left[\sum_{i \neq i'} S_i \frac{\Delta n_{i0}}{\Delta n_i} \left((r v_{n_i})_{0_i} - (r v_{n_i})_0 \right) p_0 - \sum_{i'} S_{i'} (r v_{n_{i'}})_0 p_0 \right].$$

В первой сумме последнего равенства выделим пару слагаемых, относящихся к общей границе S_i соседних ячеек ω_0 и ω_{0_i} , обозначим их J_i^h .

Запишем эту пару в виде

$$J_i^h = S_i \left[\frac{\Delta n_{i0}}{\Delta n_i} p_0 \left((r v_{n_i})_{0_i} - (r v_{n_i})_0 \right) + \frac{\Delta n_{i0_i}}{\Delta n_i} p_{0_i} \left(- (r v_{n_i})_0 + (r v_{n_i})_{0_i} \right) \right].$$

Эту сумму можно переписать так

$$J_i^h = -S_i \bar{p}_i \left(- (r v_{n_i})_{0_i} + (r v_{n_i})_0 \right), \quad \bar{p}_i = \frac{\Delta n_{i0} p_0 + \Delta n_{i0_i} p_{0_i}}{\Delta n_i}.$$

Соберём слагаемые от всех J_i^h , относящиеся к узлам x_0 и просуммируем их по всем индексом $i \neq i'$

$$\sum_{\Omega_{h0}} \left(\sum_{i \neq i'} J_i^h \right) = - \sum_{\Omega_{h0}} \left(\sum_{i \neq i'} S_i \bar{p}_i (r v_{n_i})_0 \right).$$

Теперь вспомним о второй сумме по $i = i'$. Добавим её к предыдущему равенству, полагая на границе $S_{i'}$ ячейки ω_0 значение $\bar{p}_{i'} \equiv p_0$. В результате получим

$$J^h = - \sum_{\Omega_{h0}} \sum_i S_i \bar{p}_i (r v_{n_i})_0.$$

Заменим $(r v_{n_i})_0$ на $\sum_{\alpha=1}^D (r u_{\alpha})_0 \cos(\widehat{n_i, x_{\alpha}})$ и найдём, что

$$J^h = - \sum_{\Omega_{h0}} \bar{r}_0 \omega_0 \sum_{\alpha=1}^D (u_{\alpha})_0 \left(\frac{r_0}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i \bar{p}_i \cos(\widehat{n_i, x_{\alpha}}) \right).$$

Сравнивая это выражение с

$$J^h = - \sum_{\Omega_{h0}} \bar{r}_0 \omega_0 \sum_{\alpha=1}^D u_{\alpha 0} \text{grad}_{\alpha 0}^h p,$$

находим аппроксимацию компонент градиента

$$\text{grad}_{\alpha 0}^h p = \frac{r_0}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i \bar{p}_i \cos(\widehat{n_i, x_{\alpha}}), \quad \alpha = \overline{1, D},$$

$$\text{где } \bar{p}_i = \begin{cases} \frac{p_0 \Delta n_{i0} + p_{0i} \Delta n_{i0i}}{\Delta n_i}, & \tilde{x}_i \in \tilde{\Omega}_h \\ p_0, & \tilde{x}_i \in \tilde{\Gamma}_{hw} \cup \tilde{\Gamma}_{ha} \end{cases}.$$

Операторы div_0^h и $-\text{grad}_0^h = -\{\text{grad}_{\alpha 0}^h, \alpha = \overline{1, D}\}$ взаимно сопряжены.

Теперь займемся аппроксимацией операторов div_i^h и $\text{grad}_{\alpha i}^h$ в потоковых узлах. Проинтегрируем $\text{div } \vec{v}$ по ячейке $\tilde{\omega}_i$

$$\int_{\tilde{\omega}_i} \text{div } \vec{v} \, rd \tilde{\omega}_i \approx \text{div}_i^h \vec{v} \cdot \tilde{r}_i \tilde{\omega}_i$$

с другой стороны

$$\int_{\tilde{\omega}_i} \text{div } \vec{v} \, rd \tilde{\omega}_i = \int_{\tilde{\gamma}_i} \mathbf{v}_{\tilde{n}_i} \cdot rd \tilde{\gamma}_i.$$

Преобразуем правую часть последнего равенства, представляя интегрирование по $\tilde{\gamma}_i$ в виде суммы интегралов по \tilde{S}_{ik} (см. рис. 3.6 – 3.7)

$$(\text{div } \vec{v})_i \approx \frac{1}{\tilde{r}_i \tilde{\omega}_i} \left[\sum_{\tilde{S}_{ik} \in \tilde{\omega}_{i0}} \int_{\tilde{S}_{ik}} \mathbf{v}_{\tilde{n}_{ik}} \, rd \tilde{S}_{ik} + \sum_{\tilde{S}_{ik} \in \tilde{\omega}_{i0}} \int_{\tilde{S}_{ik}} \mathbf{v}_{\tilde{n}_{ik}} \, rd \tilde{S}_{ik} \right]$$

Заменим интегралы по \tilde{S}_{ik} приближённо величинами $(r \mathbf{v}_{\tilde{n}_{ik}})_0 \tilde{S}_{ik}$ и $(r \mathbf{v}_{\tilde{n}_{ik}})_{0i} \tilde{S}_{ik}$ и введём аппроксимацию дивергенции в потоковых узлах (ниже запишем её в более простом виде)

$$\text{div}_i^h \vec{v} = \frac{1}{\tilde{r}_i \tilde{\omega}_i} \left[\sum_{\tilde{S}_{ik} \in \omega_{i0}} \tilde{S}_{ik} (r \mathbf{v}_{\tilde{n}_{ik}})_0 + \sum_{\tilde{S}_{ik} \in \omega_{i0}} \tilde{S}_{ik} (r \mathbf{v}_{\tilde{n}_{ik}})_{0i} \right], \tilde{x}_i \in \tilde{\Omega}_h \text{ (см. рис. 3.6).}$$

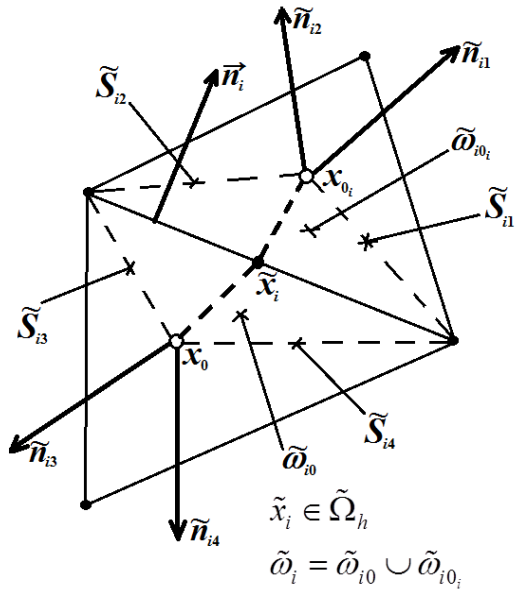


Рис. 3.6

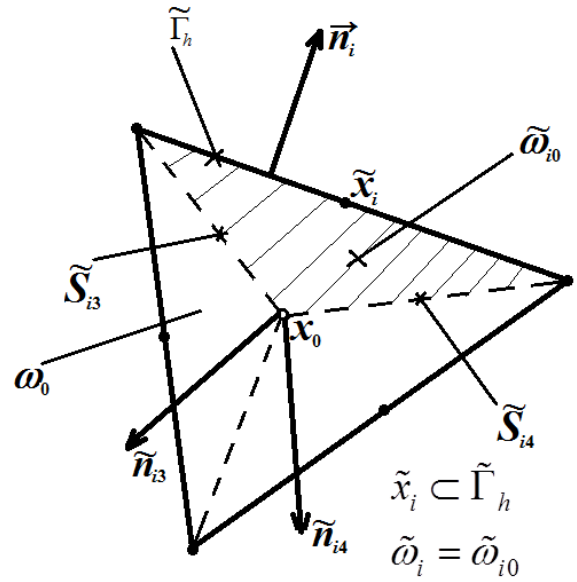


Рис. 3.7

Если $\tilde{x}_i \in \tilde{\Gamma}_h = \tilde{\Gamma}_{hw} \cup \tilde{\Gamma}_{ha}$, то $v_{n_i}|_{\tilde{\Gamma}_h} = 0$ и $\operatorname{div}_i^h \vec{v} = \frac{1}{\tilde{r}_i \tilde{\omega}_i} \sum_{\tilde{S}_{ik} \in \tilde{\omega}_{i0}} \tilde{S}_{ik} (r v_{\tilde{n}_{ik}})_0$ (см. рис. 3.7).

Поскольку интегралы по границе $\tilde{\Gamma}_h = \tilde{\Gamma}_{hw} \cup \tilde{\Gamma}_{ha}$ исчезают, так как $v_{n_i} = 0$, нормали к границам \tilde{S}_{ik} внутри каждой ячейки направлены в противоположные стороны, а функции вычисляются в одном и том же узле, то

$$\sum_{\tilde{\Omega}_h} \tilde{r}_i \tilde{\omega}_i \operatorname{div}_i^h \vec{v} = 0, \text{ при } \tilde{\Gamma}_h = \tilde{\Gamma}_{hw} \cup \tilde{\Gamma}_{ha}.$$

Таким образом, аппроксимация дивергентна.

Теперь упростим запись формулы для выражения $\operatorname{div}_i^h \vec{v}$.

Заметим, что

$$\sum_{\tilde{S}_{ik} \in \tilde{\omega}_{i0}} \tilde{S}_{ik} (r v_{\tilde{n}_{ik}})_0 - S_i (r v_{n_i})_0 = 0$$

$$\sum_{\tilde{S}_{ik} \in \tilde{\omega}_{i0}} \tilde{S}_{ik} (r v_{\tilde{n}_{ik}})_{0_i} + S_i (r v_{n_i})_{0_i} = 0$$

Используя эти равенства, преобразуем выражение для $\operatorname{div}_i^h \vec{v}$.

$$\operatorname{div}_i^h \vec{v} = \begin{cases} \frac{S_i \left((r \mathbf{v}_{n_i})_{0_i} - (r \mathbf{v}_{n_i})_0 \right)}{\tilde{r}_i \tilde{\omega}_i} = \frac{(r \mathbf{v}_{n_i})_{0_i} - (r \mathbf{v}_{n_i})_0}{\tilde{r}_i \Delta n_i / D}, & \tilde{x}_i \in \tilde{\Omega}_h \\ \frac{S_i \left(0 - (r \mathbf{v}_{n_i})_0 \right)}{\tilde{r}_i \tilde{\omega}_i} = \frac{-(r \mathbf{v}_{n_i})_0}{\tilde{r}_i \Delta n_i / D}, & \tilde{x}_i \in \tilde{\Gamma}_h \equiv \tilde{\Gamma}_{hw} \cup \tilde{\Gamma}_{ha} \end{cases}$$

Нормаль \vec{n}_i направлена от узла x_0 в сторону узла x_{0_i} .

При аппроксимации $\operatorname{div} \vec{v}$ в узле x_0 было найдено, что эта дивергенция может быть записана в виде

$$\operatorname{div}_0^h \vec{v} = \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \left[\sum_{\tilde{\Omega}_h} S_i \frac{\Delta n_{i0}}{\Delta n_i} \left((r \mathbf{v}_{n_i})_{0_i} - (r \mathbf{v}_{n_i})_0 \right) + \sum_{\tilde{\Gamma}_h} S_i \left(- (r \mathbf{v}_{n_i})_0 \right) \right]$$

Отсюда, принимая во внимание формулы для выражения $\operatorname{div}_i^h \vec{v}$, находим, что

$$\operatorname{div}_0^h \vec{v} = \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i \tilde{r}_i \tilde{\omega}_{i0} \operatorname{div}_i^h \vec{v}.$$

Дивергенция в узле основной сетки $x_0 \in \omega_0$ оказалась средней величиной от дивергенций в узлах $\tilde{x}_i \in \gamma_0$.

Теперь найдём аппроксимацию градиента в потоковых узлах $\tilde{x}_i \in \tilde{\Omega}_h \cup \tilde{\Gamma}_h$. Определять $\operatorname{grad}_{\alpha i}^h$ и $\bar{u}_{\alpha i}$, $\alpha = \overline{1, D}$ будем из равенства

$$\tilde{J} = \sum_{\tilde{\Omega}_h \cup \tilde{\Gamma}_h} \tilde{r}_i \tilde{\omega}_i \bar{p}_i \operatorname{div}_i^h \vec{v} = - \sum_{\tilde{\Omega}_h \cup \tilde{\Gamma}_h} \tilde{r}_i \tilde{\omega}_i \sum_{\alpha=1}^D \bar{u}_{\alpha i} \operatorname{grad}_{\alpha i}^h p$$

Преобразуем левую часть последнего равенства. Запишем

$$\tilde{r}_i \tilde{\omega}_i \bar{p}_i \operatorname{div}_i^h \vec{v} = \begin{cases} S_i \frac{p_{0_i} \Delta n_{i0_i} + p_0 \Delta n_{i0}}{\Delta n_i} \left((r \mathbf{v}_{n_i})_{0_i} - (r \mathbf{v}_{n_i})_0 \right), & \tilde{x}_i \in \tilde{\Omega}_h \\ -S_i p_0 (r \mathbf{v}_{n_i})_0, & \tilde{x}_i \in \tilde{\Gamma}_h \end{cases}$$

Далее получим

$$\begin{aligned} \frac{p_{0_i} \Delta n_{i0_i} + p_0 \Delta n_{i0}}{\Delta n_i} \left((r \mathbf{v}_{n_i})_{0_i} - (r \mathbf{v}_{n_i})_0 \right) &\equiv - (p_{0_i} - p_0) \frac{(r \mathbf{v}_{n_i})_{0_i} \Delta n_{i0} + (r \mathbf{v}_{n_i})_0 \Delta n_{i0_i}}{\Delta n_i} + p_{0_i} (r \mathbf{v}_{n_i})_{0_i} - p_0 (r \mathbf{v}_{n_i})_0 = \\ &= - (p_{0_i} - p_0) \langle r \mathbf{v}_{n_i} \rangle_i + p_{0_i} (r \mathbf{v}_{n_i})_{0_i} - p_0 (r \mathbf{v}_{n_i})_0 \end{aligned}$$

Соберём все слагаемые вида $-p_0 (r \mathbf{v}_{n_i})_0 S_i$, с учётом слагаемых на границе $\tilde{\Gamma}_h$, соответствующие узлу x_0 , получим

$$\sum_{\Omega_{h0}} p_0 \sum_i (r v_{n_i})_0 S_i = 0$$

Сумма по индексу i обращается в ноль. Оставшиеся в \tilde{J} слагаемые можно записать в виде:

$$\tilde{J}^h = - \sum_{\tilde{\Omega}_h} \tilde{r}_i \tilde{\omega}_i \left(\frac{P_{0_i} - P_0}{\Delta n_i / D} \frac{\langle r v_{n_i} \rangle_i}{\tilde{r}_i} \right), \text{ где } \tilde{\omega}_i = \frac{S_i \Delta n_i}{D}.$$

Используя равенство

$$(v_{n_i})_0 = \sum_{\alpha=1}^D u_{\alpha 0} \cos(\widehat{n_i, x_\alpha}),$$

получаем ($\tilde{\Omega}_h$ содержит лишь внутренние узлы \tilde{x}_i)

$$\tilde{J}^h = - \sum_{\tilde{\Omega}_h} \tilde{r}_i \tilde{\omega}_i \sum_{\alpha=1}^D \frac{\langle r u_\alpha \rangle_i}{\tilde{r}_i} \frac{P_{0_i} - P_0}{\Delta n_i / D} \cos(\widehat{n_i, x_\alpha}).$$

Сравнивая полученное выражение с исходным тождеством, находим выражения для скорости и градиента давления в потоковой точке

$$\bar{u}_{\alpha i} = \frac{\langle r u_\alpha \rangle_i}{\tilde{r}_i} \text{ и } \text{grad}_{\alpha i}^h p = \begin{cases} \frac{P_{0_i} - P_0}{\Delta n_i / D} \cos(\widehat{n_i, x_\alpha}), & \tilde{x}_i \in \tilde{\Omega}_h \\ 0, & \tilde{x}_i \in \tilde{\Gamma}_h = \tilde{\Gamma}_{hw} \cup \tilde{\Gamma}_{ha} \end{cases}$$

Здесь приближённо учтено, что $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$, где \vec{n} - нормаль к жёсткой стенке и оси.

Замечание: В заключение сделаем одно замечание. Выше была выбрана

аппроксимация $\text{div}_0^h \vec{v} = \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i \langle r v_{n_i} \rangle_i$ и по ней были найдены величины

$\text{grad}_{\alpha 0}^h p$, $\text{div}_i^h \vec{v}$, $\text{grad}_{\alpha i}^h p$.

Можно выбрать $\text{div}_0^h \vec{v}$ иначе. Например, положить

$$\text{div}_0^h \vec{v} = \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i (\overline{r v_{n_i}})_i, \text{ где } (\overline{r v_{n_i}})_i = \frac{(r v_{n_i})_{0_i} \Delta n_{i0_i} + (r v_{n_i})_0 \Delta n_{i0}}{\Delta n_i}.$$

Тогда окажется, что

$$\text{grad}_{\alpha 0}^h p = \frac{r_0}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i \langle p_i \rangle \cos(\widehat{n_i, x_\alpha}), \text{ где } \langle p_i \rangle = \begin{cases} \frac{P_{0_i} \Delta n_{i0} + P_0 \Delta n_{i0_i}}{\Delta n_i}, & \tilde{x}_i \in \tilde{\Omega}_h \\ P_0, & \tilde{x}_i \in \tilde{\Gamma}_h \end{cases}.$$

Можно, соответственно, изменять аппроксимации и дальше. Однако не будем перебирать все возможные варианты аппроксимаций, а ограничимся выбранными изначально.

3.5. Сеточные преобразования и аппроксимация исходных уравнений (без учёта поправок Лакса-Вендроффа)

Исходные дифференциальные уравнения можно решать в переменных ρ , $I_\alpha = \rho u_\alpha$, $\alpha = \overline{1, D}$, E или в переменных ρ , $I_\alpha = \rho u_\alpha$, $\alpha = \overline{1, D}$, ε (или p). Если умножить уравнения для импульса I_α на u_α , просуммировать по всем $\alpha = \overline{1, D}$, а также вычесть полученный результат из уравнения для полной энергии E , можно получить уравнение для внутренней энергии ε (или p). Можно поступить и наоборот. Хорошо бы, чтобы подобные преобразования имели место и для сеточных уравнений.

Сеточное уравнение неразрывности запишем в виде:

$$\frac{\rho_0^{n+1} - \rho_0^n}{\tau_n} + \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i \langle r \rho v_{n_i} \rangle_i^n = 0,$$

где $\langle r \rho v_{n_i} \rangle_i^n = 0$ при $\tilde{x}_i \in \tilde{\Gamma}_h = \tilde{\Gamma}_{hw} \cup \tilde{\Gamma}_{ha}$. Сеточное уравнение для импульса I_α определим следующим образом,

$$\frac{I_{\alpha 0}^{n+1} - I_{\alpha 0}^n}{\tau_n} + \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i \langle r \rho v_{n_i} \rangle_i^n \frac{u_{\alpha 0_i}^n + u_{\alpha 0}^n}{2} + \text{grad}_{\alpha 0}^h p^n = 0,$$

где $I_\alpha = \rho u_\alpha$, а выражение для величины $\text{grad}_{\alpha 0}^h p^n$ определено выше.

Умножим уравнение для импульса на $u_{\alpha 0}^n$. Первое слагаемое преобразуем к виду:

$$u_{\alpha 0}^n \frac{(\rho_0 u_{\alpha 0})^{n+1} - (\rho_0 u_{\alpha 0})^n}{\tau_n} \equiv \frac{0.5(\rho_0 u_{\alpha 0}^2)^{n+1} - 0.5(\rho_0 u_{\alpha 0}^2)^n}{\tau_n} + \frac{(u_{\alpha 0}^n)^2}{2} \frac{\rho_0^{n+1} - \rho_0^n}{\tau_n} - 0.5 \tau_n \rho_0^n \left(\frac{u_{\alpha 0}^{n+1} - u_{\alpha 0}^n}{\tau_n} \right)^2$$

Последнее слагаемое в правой части имеет сеточную природу.

Справедливость последнего равенства можно проверить простым сравнением правой и левой частей. Запишем

$$u_{\alpha 0}^n \frac{(\rho_0 u_{\alpha 0})^{n+1} - (\rho_0 u_{\alpha 0})^n}{\tau_n} = \frac{2\rho_0^{n+1} u_{\alpha 0}^{n+1} u_{\alpha 0}^n - 2\rho_0^{n+1} (u_{\alpha 0}^n)^2}{2\tau_n}.$$

Вычитая и прибавляя к первому слагаемому правой части величину

$$\rho_0^{n+1} \frac{(u_{\alpha 0}^{n+1})^2 + (u_{\alpha 0}^n)^2}{2\tau_n},$$

получаем искомое тождество. При умножении второго

слагаемого в уравнении для импульса получим

$$u_{\alpha 0}^n \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i \langle r \rho v_{n_i} \rangle_i^n \frac{u_{\alpha 0_i}^n + u_{\alpha 0}^n}{2} = \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i \langle r \rho v_{n_i} \rangle_i^n \frac{u_{\alpha 0_i}^n u_{\alpha 0}^n}{2} + \frac{(u_{\alpha 0}^n)^2}{2} \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i \langle r \rho v_{n_i} \rangle_i^n.$$

Складывая полученные выражения, имеем

$$u_{\alpha 0}^n \left[\frac{(\rho_0 u_{\alpha 0})^{n+1} - (\rho_0 u_{\alpha 0})^n}{\tau_n} + \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i \langle r \rho v_{n_i} \rangle_i^n \frac{u_{\alpha 0_i}^n + u_{\alpha 0}^n}{2} \right] = \frac{K_{\alpha 0}^{n+1} - K_{\alpha 0}^n}{\tau_n} + \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i \langle r \rho v_{n_i} \rangle_i^n \frac{u_{\alpha 0_i}^n u_{\alpha 0}^n}{2} - \frac{\tau_n}{2} \rho_0^{n+1} \left(\frac{u_{\alpha 0}^{n+1} - u_{\alpha 0}^n}{\tau_n} \right)^2.$$

При сложении было учтено уравнение неразрывности. В уравнении для импульса нужно использовать ту же аппроксимацию для выражения $r \rho v_n$, что и в уравнении неразрывности. В последнем равенстве в правой части первое слагаемое есть изменение кинетической энергии $K_{\alpha 0} = \frac{1}{2} \rho_0 (u_{\alpha 0})^2$ (в направлении оси Ox_α) за время τ . Второе слагаемое описывает перенос кинетической энергии $K_{\alpha 0}$. Введём полную кинетическую энергию

$$K_0 = \sum_{\alpha=1}^D \frac{1}{2} \rho_0 (u_{\alpha 0})^2.$$

Теперь результат умножения всего уравнения для импульса и суммирования по всем $\alpha = \overline{1, D}$ приводит к равенству

$$\frac{K_0^{n+1} - K_0^n}{\tau_n} + \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i \langle r \rho v_{n_i} \rangle_i^n \sum_{\alpha=1}^D \frac{u_{\alpha 0_i}^n u_{\alpha 0}^n}{2} - \frac{\tau_n}{2} \rho_0^{n+1} \sum_{\alpha=1}^D \left(\frac{u_{\alpha 0}^{n+1} - u_{\alpha 0}^n}{\tau_n} \right)^2 + \sum_{\alpha=1}^D u_{\alpha 0}^n \text{grad}_{\alpha 0}^h p^n = 0$$

Преобразуем выражение

$$J_0^h = \sum_{\alpha=1}^D u_{\alpha 0} \text{grad}_{\alpha 0}^h p.$$

Используя выражение для величины $\text{grad}_{\alpha 0}^h p$, найдём, что

$$J_0^h = \sum_{\alpha=1}^D u_{\alpha 0} \frac{r_0}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i \bar{p}_i \cos(\widehat{n_i, x_\alpha}) = \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i \bar{p}_i (r v_{n_i})_0$$

Выделим в J_0^h слагаемые, относящиеся к граничным узлам $\tilde{x}_i \in \tilde{\Gamma}_h = \tilde{\Gamma}_{hv} \cup \tilde{\Gamma}_{ha}$ и сопоставим им индекс i' . Преобразуем J_0^h , записывая его в виде

$$J_0^h = -\frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \left\{ \sum_{i \neq i'} S_i \bar{p}_i \left[\frac{\Delta n_{i0} + \Delta n_{i0_i}}{2} \frac{(r v_{n_i})_{0_i} - (r v_{n_i})_0}{\Delta n_i} - \frac{\Delta n_{i0} + \Delta n_{i0_i}}{\Delta n_i} \frac{(r v_{n_i})_{0_i} + (r v_{n_i})_0}{2} \right] - \sum_{i'} S_i \bar{p}_i (r v_{n_i})_0 \right\}$$

Первый множитель $\frac{\Delta n_{i0} + \Delta n_{i0_i}}{2}$ в сумме по $i \neq i'$ представим в виде

$\Delta n_{i0} + \frac{\Delta n_{i0_i} - \Delta n_{i0}}{2}$. В сумме по $i \neq i'$ выделим слагаемые с множителем Δn_{i0} и

добавим к ним суммы по индексу i' . Получим

$$J_0^h = -\frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \left\{ \sum_{i \neq i'} S_i \bar{p}_i \Delta n_{i0} \frac{(r v_{n_i})_{0_i} - (r v_{n_i})_0}{\Delta n_i} + \sum_{i'} S_i \bar{p}_i \Delta n_{i0} \frac{0 - (r v_{n_i})_0}{\Delta n_i} + \sum_{i \neq i'} S_i \bar{p}_i \left[\frac{\Delta n_{i0_i} - \Delta n_{i0}}{2} \frac{(r v_{n_i})_{0_i} - (r v_{n_i})_0}{\Delta n_i} - \frac{\Delta n_{i0_i} + \Delta n_{i0}}{\Delta n_i} \frac{(r v_{n_i})_{0_i} + (r v_{n_i})_0}{2} \right] \right\}.$$

Умножим и разделим слагаемые первых двух сумм на $\frac{\tilde{r}_i}{D}$ и воспользуемся выражением для величины $\text{div}_i^h \vec{v}$. Находим, что первые две суммы дают умноженную на (-1) величину

$$\langle \langle \bar{p}_i \text{div}_i^h \vec{v} \rangle \rangle_0 = \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i \tilde{r}_i \tilde{\omega}_{i0} (\bar{p}_i \text{div}_i^h \vec{v})$$

Далее для любой сеточной функции q_i будем пользоваться обозначением

$$\langle \langle q_i \rangle \rangle_0 = \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i \tilde{r}_i \tilde{\omega}_{i0} q_i$$

Наконец, слагаемые в квадратных скобках свертываются в $\langle r v_{n_i} \rangle_i$. Таким образом,

$$J_0^h = -\langle \langle \bar{p}_i \text{div}_i^h \vec{v} \rangle \rangle_0 + \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i \bar{p}_i \langle r v_{n_i} \rangle_i.$$

В результате уравнение для импульса, умноженное на компоненту скорости $u_{\alpha 0}^n$ и суммированное по индексу $\alpha = \overline{1, D}$, приводит к равенству

$$\frac{K_0^{n+1} - K_0^n}{\tau_n} + \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i \left[\langle r \rho v_{n_i} \rangle_i^n \sum_{\alpha=1}^D \frac{u_{\alpha 0}^n u_{\alpha 0}^n}{2} + \bar{p}_i^n \langle r v_{n_i} \rangle_i^n \right] - \langle \langle \bar{p}_i \operatorname{div}_i^h \bar{v} \rangle \rangle_0^n - \frac{\tau_n}{2} \sum_{\alpha=1}^D \rho_0^{n+1} \left(\frac{u_{\alpha 0}^{n+1} - u_{\alpha 0}^n}{\tau_n} \right)^2 = 0$$

Теперь надо найти аппроксимацию уравнения для внутренней энергии. Выше было записано уравнение для давления p :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(p \bar{v}) + (\gamma - 1) p \operatorname{div} \bar{v} = 0$$

Учитывая, что $p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon$, получаем уравнение для внутренней энергии ε :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \operatorname{div}(\rho \varepsilon \bar{v}) + p \operatorname{div} \bar{v} = 0$$

Производную по времени аппроксимируем разностью вида $\frac{(\rho \varepsilon)_0^{n+1} - (\rho \varepsilon)_0^n}{\tau_n}$.

Конвективное слагаемое с целью повышения аппроксимации запишем в следующем сеточном виде

$$\operatorname{div}(\rho \varepsilon \bar{v})^n \approx \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i \langle r \rho v_{n_i} \rangle_i^n \langle \varepsilon \rangle_i^n.$$

Последнее слагаемое заменим на $\langle \langle \bar{p}_i \operatorname{div}_i^h \bar{v} \rangle \rangle_0^n$. Таким образом, получаем

$$\frac{(\rho \varepsilon)_0^{n+1} - (\rho \varepsilon)_0^n}{\tau_n} + \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i (r W_\varepsilon^n)_i + \langle \langle \bar{p}_i \operatorname{div}_i^h \bar{v} \rangle \rangle_0^n = 0,$$

где $(r W_\varepsilon^n)_i = \langle r \rho v_{n_i} \rangle_i^n \langle \varepsilon \rangle_i^n$.

Складывая сеточные уравнения для кинетической и внутренней энергии, получаем уравнение для полной энергии:

$$\frac{E_0^{n+1} - E_0^n}{\tau_n} + \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i (r W_E^n)_i = 0,$$

где $E_0 = \rho_0 \left(\sum_{\alpha=1}^D \frac{u_{\alpha 0}^2}{2} + \varepsilon_0 \right)$, $(r W_E^n)_i = \langle r \rho v_{n_i} \rangle_i^n \left(\sum_{\alpha=1}^D \frac{u_{\alpha 0}^n u_{\alpha 0}^n}{2} + \langle \varepsilon \rangle_i^n \right) + \bar{p}_i^n \langle r v_{n_i} \rangle_i^n$.

При получении уравнения для полной энергии E_0 слагаемые $\langle \langle \bar{p}_i \operatorname{div}_i^h \bar{v} \rangle \rangle_0^n$

взаимно сократились, а слагаемое сеточной природы $\frac{\tau_n}{2} \sum_{\alpha=1}^D \rho_0^{n+1} \left(\frac{u_{\alpha 0}^{n+1} - u_{\alpha 0}^n}{\tau_n} \right)^2$

было отброшено.

К приведённому выше сеточному уравнению для полной энергии E или сеточному уравнению для внутренней энергии ε

$$\frac{(\rho\varepsilon)_0^{n+1} - (\rho\varepsilon)_0^n}{\tau_n} + \frac{1}{\bar{r}_0\omega_0} \sum_i S_i (rW_\varepsilon^n)_i + \left\langle \left\langle \bar{p}_i \operatorname{div}_i^h \bar{\mathbf{v}} \right\rangle \right\rangle_0^n = 0, \quad (rW_\varepsilon^n)_i = \left\langle r\rho \mathbf{v}_{n_i} \right\rangle_i \left\langle \varepsilon \right\rangle_i^n$$

надо добавить уравнения для плотности (уравнение неразрывности) ρ и уравнение для импульса I_α , $\alpha = \overline{1, D}$, полученные выше.

Итак, все формулы выведены, согласованы друг с другом и приведены выше. В них можно упростить запись аппроксимации потока $(rW_E)_i$, заменяя приближенно

$$\left\langle r\rho \mathbf{v}_{n_i} \right\rangle_i \left\langle \varepsilon \right\rangle_i + \bar{p}_i \left\langle r \mathbf{v}_{n_i} \right\rangle_i = \frac{1}{\gamma - 1} \left\langle r\rho \mathbf{v}_{n_i} \right\rangle_i \left\langle \frac{p}{\rho} \right\rangle_i + \bar{p}_i \left\langle r \mathbf{v}_{n_i} \right\rangle_i$$

В первом слагаемом правой части можно приближенно сократить величины плотности ρ , а давление p заменить на среднее давление \bar{p}_i .

Тогда

$$\left\langle rW_E \right\rangle_i = \left\langle r\rho \mathbf{v}_{n_i} \right\rangle_i \sum_{\alpha=1}^D \frac{u_{\alpha 0} u_{\alpha 0_i}}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \bar{p}_i \left\langle r \mathbf{v}_{n_i} \right\rangle_i,$$

где γ - показатель адиабаты Пуассона.

3.6. Аппроксимация поправок Лакса-Вендроффа и потоков

Поправки Лакса-Вендроффа, обеспечивающие второй порядок аппроксимации по времени, имеют малый множитель $(-\tau_n/2)$ и добавляются

к левой части сеточных уравнений в виде $\frac{-\tau_n}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{Q}}_q$, где

$q = \rho, I_\alpha = \rho u_\alpha, \alpha = \overline{1, D}, E$, и к градиенту давления в виде $\frac{-\tau_n}{2} \operatorname{grad} g$, $\alpha = \overline{1, D}$.

3.6.1 Аппроксимация потоков массы

В уравнении неразрывности входят лишь поправки $\frac{-\tau_n}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{Q}}_\rho$, где

компоненты вектора $\bar{\mathbf{Q}}_\rho$ имеют вид $Q_{\rho\beta} = \operatorname{div}(\rho u_\beta \bar{\mathbf{v}}) + \frac{\partial p}{\partial x_\beta}$, $\beta = \overline{1, D}$.

Проинтегрируем поправки по ω_0 с множителем r и учтём, что граница γ_0 представляет собой сумму S_i . Поэтому

$$J_0 = \int_{\omega_0} \operatorname{div} \bar{Q}_\rho \cdot r d\omega_0 = \sum_i \tilde{r}_i S_i \sum_\beta Q_{\rho\beta} \cos(\widehat{n_i, x_\beta}).$$

Подставим $Q_{\rho\beta}$ и суммируем по β , получим

$$\operatorname{div}_0 \bar{Q}_\rho \approx \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i \tilde{r}_i S_i \left[\operatorname{div}_i^h (\rho v_{n_i} \vec{v}) + \frac{\partial p}{\partial n_i} \right]$$

Используем аппроксимации, полученные для выражения $\operatorname{div}_i^h \vec{v}$ и аппроксимацию $\frac{\partial p}{\partial n_i}$ в виде $\frac{\partial p}{\partial n_i} = \sum_\beta \frac{\partial p}{\partial x_\beta} \cos(\widehat{n_i, x_\beta}) = \frac{P_{0i} - P_0}{\Delta n_i / D} \sum_\beta \cos^2(\widehat{n_i, x_\beta}) = \frac{P_{0i} - P_0}{\Delta n_i / D}$.

Собирая все выражения, получим, что

$$\operatorname{div}_0 \bar{Q}_\rho \approx \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i \tilde{r}_i S_i \left[\frac{(r\rho v_{n_i}^2)_{0i} - (r\rho v_{n_i}^2)_0}{\tilde{r}_i \Delta n_i / D} + \frac{P_{0i} - P_0}{\Delta n_i / D} \right]$$

Тогда полный поток массы с учётом поправок Лакса-Вендроффа будет иметь вид

$$(rW_\rho)_i = \langle r\rho v_{n_i} \rangle_i^n - \frac{\tau_n}{2} \left[\frac{(r\rho v_{n_i}^2)_{0i}^n - (r\rho v_{n_i}^2)_0^n}{\Delta n_i / D} + \tilde{r}_i \frac{P_{0i}^n - P_0^n}{\Delta n_i / D} \right], \quad \tilde{x}_i \in \tilde{\Omega}_h.$$

3.6.2 Аппроксимация потоков импульса и градиента давления

Поправка в уравнении для импульса $I_\alpha = \rho u_\alpha$, $\alpha = \overline{1, D}$ содержит дивергенцию от вектора \bar{Q}_{I_α} и градиента от величины g , умноженных на величину $(-\tau_n/2)$. Компоненты вектора \bar{Q}_{I_α} имеют вид:

$$Q_{I_\alpha\beta} = \operatorname{div}(\vec{v} u_\beta \rho u_\alpha) + u_\alpha \frac{\partial p}{\partial x_\beta} + u_\beta \operatorname{grad}_\alpha p, \quad \text{где } \beta = \overline{1, D}.$$

Как и выше

$$\int_{\omega_0} \operatorname{div} \bar{Q}_{I_\alpha} \cdot r d\omega_0 = \sum_i \int_{S_i} J_i dS_i,$$

$$\text{где } J_i = r \left[\operatorname{div}(\vec{v}_{n_i} \rho u_\alpha \vec{v}) + u_\alpha \frac{\partial p}{\partial n_i} + v_{n_i} \operatorname{grad}_\alpha p \right].$$

Заменяем величину J_i сеточным аналогом

$$J_i^h = \tilde{r}_i \operatorname{div}_i^h (\mathbf{v}_{n_i} I_\alpha \bar{\mathbf{v}}) + \tilde{r}_i \left(\langle u_\alpha \rangle_i \left(\frac{\partial p}{\partial n_i} \right)_i^h + \langle \mathbf{v}_{n_i} \rangle_i \operatorname{grad}_{\alpha i}^h p \right)$$

или

$$J_i^h = \tilde{r}_i \operatorname{div}_i^h (\mathbf{v}_{n_i} I_\alpha \bar{\mathbf{v}}) + \tilde{r}_i \left(\langle u_\alpha \rangle_i + \langle \mathbf{v}_{n_i} \rangle_i \cos(\widehat{n_i, x_\alpha}) \right) \left(\frac{\partial p}{\partial n_i} \right)_i^h,$$

где $\left(\frac{\partial p}{\partial n_i} \right)_i^h = \frac{p_{0i} - p_0}{\Delta n_i / D}$.

Добавим эти поправки к исходному потоку импульса и запишем

$$(rW_{I_\alpha})_i^n = \langle r\rho \mathbf{v}_{n_i} \rangle_i^n \frac{u_{\alpha 0_i}^n + u_{\alpha 0}^n}{2} - \frac{\tau_n}{2} \left[\frac{(r \mathbf{v}_{n_i} I_\alpha)_{0_i}^n - (r \mathbf{v}_{n_i} I_\alpha)_0^n}{\Delta n_i / D} + \tilde{r}_i \left(\langle u_\alpha \rangle_i^n + \langle \mathbf{v}_{n_i} \rangle_i^n \cos(\widehat{n_i, x_\alpha}) \right) \frac{p_{0i}^n - p_0^n}{\Delta n_i / D} \right]$$

при $\tilde{x}_i \in \tilde{\Omega}_h$.

Поправка Лакса-Вендроффа к $\operatorname{grad}_{\alpha 0}^h p$ имеет вид $\left(-\frac{\tau_n}{2} \operatorname{grad}_{\alpha 0}^h g \right)$. Запишем

выражение для величины g ,

$$g = (\gamma - 1) p \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} + \operatorname{div} (p \bar{\mathbf{v}}) = \gamma p \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} + \sum_{\alpha=1}^D u_\alpha \operatorname{grad}_\alpha p.$$

Заменяем приближённо дивергенцию и градиент сеточным аналогом в узле \tilde{x}_i .

Получим

$$g_i^h = \gamma \bar{p}_i \operatorname{div}_i^h \bar{\mathbf{v}} + \sum_{\alpha=1}^D \langle u_\alpha \rangle_i \operatorname{grad}_{\alpha i}^h p.$$

Раскроем величину g_i^h ,

$$g_i^h = \gamma \bar{p}_i^n \frac{(r \mathbf{v}_{n_i})_{0_i}^n - (r \mathbf{v}_{n_i})_0^n}{\tilde{r}_i \Delta n_i / D} + \langle \mathbf{v}_{n_i} \rangle_i^n \frac{p_{0i}^n - p_0^n}{\Delta n_i / D}, \quad \tilde{x}_i \in \tilde{\Omega}_h.$$

Введём величину

$$\Pi_i = \bar{p}_i - \frac{\tau_n}{2} g_i^h.$$

В уравнении для импульса I_α теперь градиент давления $\operatorname{grad}_{\alpha 0}^h \Pi$ должен будет вычисляться от величины Π_i .

3.6.3 Аппроксимация потоков полной энергии

Теперь выпишем потоки и поправки Лакса-Вендроффа для полной энергии.

Для полной энергии поправка имеет вид $\left(-\frac{\tau_n}{2}\right) \cdot \operatorname{div} \bar{Q}_E$, где компоненты вектора \bar{Q}_E

$$Q_{E\beta} = \operatorname{div}(\bar{v} u_\beta (E + p)) + \frac{E + p}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_\beta} + u_\beta g.$$

Как и выше

$$\int_{\omega_0} \operatorname{div} \bar{Q}_E \cdot r d\omega_0 = \sum_i \int_{S_i} \left\{ \operatorname{div}(\bar{v} v_{n_i} (E + p)) + \frac{E + p}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n_i} + v_{n_i} g \right\} r dS_i.$$

Приближённо подынтегральное выражение заменим на

$$J_i^h = \tilde{r}_i \operatorname{div}_i^h(v_{n_i} (E + p) \bar{v}) + \tilde{r}_i \left\langle \frac{E + p}{\rho} \right\rangle_i \left(\frac{\partial p}{\partial n_i} \right)_i^h + \tilde{r}_i \langle v_{n_i} \rangle_i g_i^h.$$

Поток полной энергии

$$(rW_E)_i^n = \langle r\rho v_{n_i} \rangle_i^n \left(\sum_{\alpha=1}^D \frac{u_{\alpha 0_i}^n u_{\alpha 0}^n}{2} + \langle \varepsilon^n \rangle_i \right) + \langle r v_{n_i} \rangle_i \bar{p}_i^n - \frac{\tau_n}{2} \tilde{J}_i^h,$$

где $\langle \varepsilon \rangle_i^n = \frac{1}{\gamma - 1} \left\langle \frac{p}{\rho} \right\rangle_i^n$, а выражение для поправки \tilde{J}_i^h имеет вид:

$$\tilde{J}_i^h = \frac{(r v_{n_i}^2 (E + p))_{0_i}^n - (r v_{n_i}^2 (E + p))_0^n}{\Delta n_i / D} + \gamma \bar{p}_i^n \langle v_{n_i} \rangle_i^n \frac{(r v_{n_i})_{0_i}^n - (r v_{n_i})_0^n}{\Delta n_i / D} + \left(\left\langle \frac{E + p}{\rho} \right\rangle_i^n + \langle v_{n_i}^n \rangle_i^2 \right) \tilde{r}_i \frac{p_{0_i}^n - p_0^n}{\Delta n_i / D}$$

, при $\tilde{x}_i \in \tilde{\Omega}_h$

В последней формуле $\langle v_{n_i} \rangle_i = 0.5(v_{n_i})_0$, при $\tilde{x}_i \in \tilde{\Gamma}_h$.

3.6.4 Итоговые формулы для потоков

Теперь объединим все выражения для потоков, записывая их в виде одной формулы.

Для $q = \rho, I_\alpha, \alpha = \overline{1, D}, E$ введём величины

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & q = \rho \\ 0.5(u_{\alpha 0_i} + u_{\alpha 0}), & q = I_\alpha, \alpha = \overline{1, D}, \quad \tilde{x}_i \in \tilde{\Omega}_h, \text{ где } \langle \varepsilon \rangle_i = \frac{1}{\gamma - 1} \left\langle \frac{p}{\rho} \right\rangle_i \\ \sum_{\alpha=1}^D \frac{u_{\alpha 0_i} u_{\alpha 0}}{2} + \langle \varepsilon \rangle_i, & q = E \end{cases}$$

$$\eta_i = \begin{cases} 1, & q = \rho \\ \langle u_\alpha \rangle_i + \langle v_{n_i} \rangle_i \cos(\widehat{n_i, x_\alpha}), & q = I_\alpha, \alpha = \overline{1, D}, \quad \tilde{x}_i \in \tilde{\Omega}_h, \\ \left\langle \frac{E+p}{\rho} \right\rangle_i + \langle v_{n_i} \rangle_i^2, & q = E \end{cases}$$

$$\zeta_0 = \begin{cases} \rho_0, & q = \rho \\ I_{\alpha 0} = \rho_0 u_{\alpha 0}, & q = I_\alpha, \alpha = \overline{1, D}, \quad \tilde{x}_0 \in \Omega_{h0}, \\ E_0 + p_0, & q = E \end{cases}$$

В узлах $\tilde{x}_i \in \tilde{\Omega}_h$

$$(rW_q)_i = \langle r\rho v_{n_i} \rangle_i \xi_i - \frac{\tau_n}{2} \left[\tilde{r}_i \frac{p_{0_i} - p_0}{\Delta n_i / D} \eta_i + \frac{(r v_{n_i}^2 \zeta)_{0_i} - (r v_{n_i}^2 \zeta)_0}{\Delta n_i / D} \right] + \\ + \delta_{qE} \left[\bar{p}_i \langle r v_{n_i} \rangle_i - \frac{\tau_n}{2} \left[\gamma \bar{p}_i \langle v_{n_i} \rangle_i \frac{(r v_{n_i})_{0_i} - (r v_{n_i})_0}{\Delta n_i / D} \right] \right]$$

Итак, найдены аппроксимации уравнений

$$\frac{q_0^{n+1} - q_0^n}{\tau_n} + \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i (rW_q)_i S_i + \delta_{qI_\alpha} \text{grad}_{\alpha 0}^h \Pi^n = 0, \text{ где } q = \rho, I_\alpha = \rho u_\alpha, \alpha = \overline{1, D}, E.$$

В выражении для η_i , при $q = E$ величину $\left\langle \frac{E+p}{\rho} \right\rangle_i$ можно заменить на

$$\sum_{\alpha=1}^D \frac{u_{\alpha 0_i} u_{\alpha 0}}{2} + \langle \varepsilon \rangle_i + \left\langle \frac{p}{\rho} \right\rangle_i = \sum_{\alpha=1}^D \frac{u_{\alpha 0_i} u_{\alpha 0}}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left\langle \frac{p}{\rho} \right\rangle_i.$$

3.6.5 Аппроксимация уравнения для внутренней энергии

Рассмотрим теперь аппроксимацию уравнения для внутренней энергии. Выше было записано уравнение для давления. Учитывая, что $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$, получим уравнение для величины $\rho\varepsilon$. С учётом поправок Лакса-Вендроффа

$$\frac{(\rho\varepsilon)_0^{n+1} - (\rho\varepsilon)_0^n}{\tau_n} + \operatorname{div}(\rho\varepsilon \vec{v})^n + p \operatorname{div} \vec{v} - \frac{\tau_n}{2} [\operatorname{div} \vec{Q}_\varepsilon + \Phi_\varepsilon] = 0,$$

где компоненты вектора \vec{Q}_ε и правая часть Φ_ε записываются в виде:

$$Q_{\varepsilon\beta} = \operatorname{div}(u_\beta \vec{v} \rho\varepsilon) + \gamma\varepsilon \frac{\partial p}{\partial x_\beta} + pu_\beta \operatorname{div} \vec{v}, \quad \beta = \overline{1, D},$$

$$\Phi_\varepsilon = g \operatorname{div} \vec{v} + p \operatorname{div} \vec{F} - (\operatorname{grad} p)^2 / \rho, \quad F_\beta = (\vec{v}, \operatorname{grad} u_\beta) = \operatorname{div}(u_\beta \vec{v}) - u_\beta \operatorname{div} \vec{v}.$$

Аппроксимацию $p \operatorname{div} \vec{v}$ и $\left(-\frac{\tau_n}{2}\right)g \operatorname{div} \vec{v}$ объединим и запишем в виде

$\langle\langle \Pi_i \operatorname{div}_i^h \vec{v} \rangle\rangle_0$. Как и ранее запишем соотношение

$$\frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \int_{\omega_0} \operatorname{div} \vec{Q}_\varepsilon r d\omega_0 = \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i \int_{S_i} Q_{\varepsilon n_i} r dS_i \approx \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i \left[\tilde{r}_i \operatorname{div}_i^h (\vec{v} v_{n_i} \rho\varepsilon) + \gamma \tilde{r}_i \langle \varepsilon \rangle_i \left(\frac{\partial p}{\partial n_i} \right)_i + \tilde{r}_i \bar{p}_i \langle v_{n_i} \rangle_i \operatorname{div}_i^h \vec{v} \right]$$

Теперь можно выразить поток внутренней энергии через S_i

$$(rW_\varepsilon)_i = \langle r \rho v_{n_i} \rangle_i \langle \varepsilon \rangle_i - \frac{\tau_n}{2} \tilde{r}_i \left[\operatorname{div}_i^h (\vec{v} v_{n_i} \rho\varepsilon) + \gamma \langle \varepsilon \rangle_i \left(\frac{\partial p}{\partial n_i} \right)_i + \bar{p}_i \langle v_{n_i} \rangle_i \operatorname{div}_i^h \vec{v} \right].$$

Раскроем это выражение

$$(rW_\varepsilon)_i = \langle r \rho v_{n_i} \rangle_i^n \langle \varepsilon \rangle_i^n - \frac{\tau_n}{2} \left[\frac{(r v_{n_i}^2 \rho\varepsilon)_{0_i}^n - (r v_{n_i}^2 \rho\varepsilon)_0^n}{\Delta n_i / D} + \gamma \langle \varepsilon \rangle_i^n \tilde{r}_i \frac{p_{0_i}^n - p_0^n}{\Delta n_i / D} + \bar{p}_i^n \langle v_{n_i} \rangle_i^n \frac{(r v_{n_i})_{0_i}^n - (r v_{n_i})_0^n}{\Delta n_i / D} \right]$$

, $\tilde{x}_i \in \tilde{\Omega}_h$

Осталось аппроксимировать $\frac{\tau_n}{2} \left(\frac{(\operatorname{grad} p)^2}{\rho} - p \operatorname{div} \vec{F} \right)$. Первое слагаемое

можно заменить простейшим сеточным выражением $\frac{\tau_n}{2} \sum_{\alpha=1}^D \frac{1}{\rho_0} (\operatorname{grad}_{\alpha 0}^h p)^2$, а

второе слагаемое аппроксимируем выражением

$$\frac{\tau_n}{2} \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \int_{\omega_0} p \operatorname{div} \bar{F} r d\omega_0 \approx \frac{\tau_n}{2} \frac{p_0}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_{S_i} \int_{S_i} F_{n_i} r dS_i,$$

где $F_{n_i} = \operatorname{div}(\bar{v} v_{n_i}) - v_{n_i} \operatorname{div} \bar{v} = \bar{v} \operatorname{grad} v_{n_i}$.

Заменим $\operatorname{grad}_\alpha v_{n_i}$ сеточным аналогом в узле \tilde{x}_i . Получим

$$(\bar{v} \operatorname{grad} v_{n_i})_i \cong \sum_{\alpha=1}^D u_\alpha \frac{(v_{n_i})_{0_i} - (v_{n_i})_0}{\Delta n_i / D} \cos(\widehat{n_i, x_\alpha}) = v_{n_i} \frac{(v_{n_i})_{0_i} - (v_{n_i})_0}{\Delta n_i / D}.$$

В последнем интеграле по границе S_i заменим $r v_{n_i} \frac{(v_{n_i})_{0_i} - (v_{n_i})_0}{\Delta n_i / D}$ на

$$\tilde{r}_i \langle v_{n_i} \rangle_i \frac{(v_{n_i})_{0_i} - (v_{n_i})_0}{\Delta n_i / D}$$

$$\frac{(\rho \varepsilon)_0^{n+1} - (\rho \varepsilon)_0^n}{\tau_n} + \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i (r W_\varepsilon)_i^n + \langle \langle \Pi_i^n \operatorname{div}_i^h \bar{v}^n \rangle \rangle_0 + F_{\varepsilon 0}^n = 0$$

$$\text{где } F_{\varepsilon 0}^n = \frac{\tau_n}{2} \left[\frac{(\operatorname{grad}_0^h p)^2}{\rho_0} - \frac{p_0}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i \tilde{r}_i \langle v_{n_i} \rangle_i \frac{(v_{n_i})_{0_i} - (v_{n_i})_0}{\Delta n_i / D} \right], \text{ при } \tilde{x}_i \in \tilde{\Omega}_h.$$

Все аппроксимации исходных уравнений получены. В поправках Лакса-Вендроффа их можно упростить, заменяя линейные интерполяции в узел \tilde{x}_i простой полусуммой значений функции в соседних узлах x_0 и x_{0_i} .

3.7. Аппроксимация граничных условий и постановка сеточных задач для определения «предикторного» решения

В узлах $x_0 \in \Omega_{h_0}$, вблизи границ $\tilde{\Gamma}_{hw}, \tilde{\Gamma}_{ha}$ разностные схемы записываются также, как и во внутренних узлах. Лишь потоки $(r W_g)_i$ в граничных узлах $\tilde{x}_i \in \tilde{\Gamma}_h = \tilde{\Gamma}_{hw} \cup \tilde{\Gamma}_{ha}$ тождественно равны нулю.

Сетки будем строить так, чтобы у приграничных ячеек ω_0 лишь одна из сторон принадлежала границе области $\tilde{\Gamma}_h$.

Рассмотрим ячейки ω_0 , через одну из границ S_i которых газ втекает в область Ω , то есть $S_i \in \tilde{\Gamma}_{hin}$. В таких ячейках будем задавать параметры втекающего газа: $\rho_0, I_{\alpha 0} = \rho_0 u_{\alpha 0}, \alpha = \overline{1, D}, E_0$ (или ε_0) и согласованные с ними

значения давления p_0 . Далее рассмотрим приграничные ячейки, одна из сторон которых $S_i \in \tilde{\Gamma}_{h_0}$ и находится в области фоновых значений течения. В таких ячейках задаём начальные (фоновые) значения всех функций, которые сохраняем на протяжении всего времени расчёта.

Рассмотрим теперь части границы $S_i \in \tilde{\Gamma}_{h_{out}}$ области Ω , через которые газ вытекает из области. Пристроим к S_i ячейку $\omega_0 \notin \Omega$ с центром x_0 , симметричную ячейке ω_0 и узлу x_0 . В узле x_0 запишем разностную схему, как и в прочих внутренних узлах, включив в шаблон и фиктивный узел x_{0_i} . В полученной схеме в узле x_{0_i} положим значения всех функций, включая и r , равными их значениям в узле x_0 . В результате этой процедуры поток $(rW_q)_i$ через рассматриваемый участок $S_i \in \tilde{\Gamma}_{h_{out}}$ выразится через значения в узле x_0 , соседнем с границей $\tilde{\Gamma}_{h_{out}}$. В этом потоке исчезнут все поправки Лакса-Вендроффа. Потоки можно записать в виде

$$\begin{aligned} (rW_\rho)_i &= (r\rho v_{n_i})_0, \quad (rW_{I_\alpha})_i = (r\rho v_{n_i})_0 u_{\alpha 0}, \\ (rW_E)_i &= (r v_{n_i})_0 \left(\rho_0 \frac{\bar{v}_0^2}{2} + p_0 \frac{\gamma}{\gamma-1} \right), \quad p_0 = \rho_0 \varepsilon_0 (\gamma-1), \\ (rW_\varepsilon)_i &= (r\rho v_{n_i})_0 \varepsilon_0 \end{aligned}$$

В уравнении для внутренней энергии ε_0 в узлах $\tilde{x}_i \in \tilde{\Gamma}_{h_{out}}$ в правой части F_ε положим давление $\bar{p}_i = p_0$ и нормальную компоненту скорость $(v_{n_i})_{0_i} = (v_{n_i})_0$.

Рассмотрим только внутренние узлы $x_0 \in \Omega_{h_0}$ и в них запишем явные разностные схемы с учётом граничных значений

$$\begin{aligned} \frac{q_0^{n+1} - q_0^n}{\tau_n} + (L_{hq}(\rho^n, \bar{I}^n, E^n))_0 &= 0, \quad q = \rho, I_\alpha = \rho u_\alpha, \alpha = \overline{1, D, E} \\ p_0^{n+1} &= (\gamma-1) \left(E_0^{n+1} - \left(\rho_0 \frac{\bar{v}^2}{2} \right)^{n+1} \right), \quad \varepsilon_0^{n+1} = \frac{P_0^{n+1}}{(\gamma-1)\rho_0^{n+1}}, \quad x_0 \in \Omega_{h_0}, \end{aligned}$$

Найденные по этим формулам величины на временном слое $t_{n+1} = t_n + \tau_n$ далее будем называть «предикторным» решением и снабжать знаком тильда

$$\tilde{q}_0^{n+1} = q_0^{n+1}, \quad q = \rho, I_\alpha = \rho u_\alpha, \alpha = \overline{1, D}, \quad E \text{ (или } \varepsilon \text{)}.$$

Приведённая выше разностная схема не является монотонной. В следующем параграфе проведём её монотонизацию.

3.8. Искусственная вязкость

Как и выше, при «замороженных», то есть фиксированных во всей области, значениях давления p , скорости \bar{v} , радиуса r , вязкости μ , одной и той же для всех уравнений, размеров ячеек, энтропии s и квадрата скорости звука c^2 уравнение для импульса, $I_\alpha = \rho u_\alpha, \alpha = \overline{1, D}$, для полной энергии E превратится в уравнение неразрывности для плотности ρ , умноженное соответственно, на $u_\alpha, \alpha = \overline{1, D}$ и $\frac{\bar{v}^2}{2}$. Чтобы сохранить это свойство, во все уравнения нужно вводить диссипативные слагаемые в виде:

$$\Lambda_h(\mu)q = \frac{1}{\bar{r}_0 \omega_0} \sum_i S_i \mu_i \frac{q_{0_i} - q_0}{\Delta n_i / D}, \quad q = \rho, I_\alpha = \rho u_\alpha, \alpha = \overline{1, D}, E,$$

Заменим в поправках Лакса-Вендроффа $\frac{p_{0_i} - p_0}{\Delta n_i / D}$ на $\frac{c^2(\rho_{0_i} - \rho_0)}{\Delta n_i / D}$.

Получим

$$\frac{\rho_0^{n+1} - \rho_0^n}{\tau} + \frac{1}{\omega} \sum_i S \frac{v_{n_i}^n (\rho_{0_i}^n + \rho_0^n)}{2} - \frac{\tau}{2\omega} \sum_i S \left[v_{n_i}^2 \frac{\rho_{0_i}^n - \rho_0^n}{\Delta n / D} + c^2 \frac{\rho_{0_i}^n - \rho_0^n}{\Delta n / D} \right] = \frac{1}{\omega} \sum_i S \mu \frac{\rho_{0_i}^n - \rho_0^n}{\Delta n / D}$$

или

$$\rho_0^{n+1} = A_0 \rho_0^n + \sum_i B_{0_i} \rho_{0_i}^n$$

$$\text{где } A_0 = 1 - \sum_i \left(v_{n_i} + \tau \frac{v_{n_i}^2 + c^2}{\Delta n / D} + 2 \frac{\mu}{\Delta n / D} \right) \frac{\tau S}{2\omega}, \quad B_{0_i} = \left(-v_{n_i} + \tau \frac{v_{n_i}^2 + c^2}{\Delta n / D} + 2 \frac{\mu}{\Delta n / D} \right) \frac{\tau S}{2\omega}.$$

При условии $A_0 = 1 - \sum_i B_{0_i} > 0$ и $B_{0_i} > 0$ и в силу $\sum_i v_{n_i} S = 0$ будем иметь

$$|\rho_0^{n+1}| \leq \max_{\Omega_{h_0}} |\rho_0^n| \left(A + \sum_i B_{0_i} \right) = \max_{\Omega_{h_0}} |\rho_0^n|,$$

$$\max_{x_0 \in \Omega_{h_0}} |\rho_0^{n+1}| \leq \max_{x_0 \in \Omega_{h_0}} |\rho_0^n|.$$

Из принципа максимума и последних соотношений будет следовать монотонность и устойчивость разностной схемы [99]. Но, конечно, приближённо, поскольку все рассуждения проводились при «замороженных» коэффициентах и хорошо структурированных сетках. Однако, результаты численных экспериментов оказались хорошими.

Потребуем, чтобы $B_0 > 0$. Эта оценка будет иметь место при выполнении условия

$$-|v_{n_i}| + \frac{\tau}{\Delta n/D} \left((v_{n_i})^2 + c^2 \right) + \frac{2\mu}{\Delta n/D} > 0.$$

Последнее неравенство будет выполнено при

$$\mu > \frac{1}{2} \frac{\Delta n}{D} |v_{n_i}| \left[1 - D \frac{\tau}{\Delta n} \sqrt{v_{n_i}^2 + c^2} \right].$$

Вернёмся к индексной записи и введём величину $h_i = \frac{\Delta n_i}{D}$, тогда получим неравенство, обеспечивающее положительность коэффициента B_0 ,

$$\mu_i > \mu_{\min i} \equiv \frac{h_i}{2} \left| (\hat{v}_{n_i})_i \right| \left[1 - \frac{\tau}{h_i} \sqrt{(\hat{v}_{n_i})_i^2 + c_i^2} \right],$$

где $(\hat{v}_{n_i})_i = \frac{(v_{n_i})_{0_i} + (v_{n_i})_0}{2}$, $c_i^2 = \gamma \left| \frac{p_{0_i} + p_0}{\rho_{0_i} + \rho_0} \right|$.

В выражении A_0 заменим единицу на $\frac{1}{2\omega} \sum_i \frac{S \Delta n}{D}$ и учтем условие $\sum_i v_{n_i} S = 0$, получим выражение для коэффициента A_0 :

$$A_0 = \sum_i \left[\frac{\Delta n}{D} - \frac{\tau^2 (v_{n_i}^2 + c^2)}{\Delta n/D} - \frac{2\tau\mu}{\Delta n/D} \right] \frac{S}{2\omega}.$$

Потребуем, чтобы слагаемое в квадратных скобках было положительным при каждом i (каждом $(v_{n_i})_i$). То есть

$$\frac{\Delta n}{D} - \frac{\tau^2 (v_{n_i}^2 + c^2)}{\Delta n/D} - \frac{2\tau\mu}{\Delta n/D} > 0$$

Отсюда следует при введении величины $h_i = \frac{\Delta n_i}{D}$, что

$$\mu < \frac{h^2}{2\tau} \left(1 - \left(\frac{\tau}{h} \sqrt{v_{n_i}^2 + c^2} \right)^2 \right).$$

Поскольку величина в скобках положительна, что определяется выбором шага τ (выбор шага будет определён ниже), то

$$\sqrt{v_{n_i}^2 + c^2} < \frac{h}{\tau}$$

И ограничение на вязкость μ будет выполнено при

$$\mu < \frac{h}{2} \sqrt{v_{n_i}^2 + c^2} \left(1 - \left(\frac{\tau}{h} \sqrt{v_{n_i}^2 + c^2} \right)^2 \right).$$

Возвращаясь к индексной записи, получим

$$\mu_{\max i} = \frac{h_i}{2} \sqrt{(\hat{v}_{n_i})_i^2 + c_i^2} \left(1 - \left(\frac{\tau}{h_i} \sqrt{(\hat{v}_{n_i})_i^2 + c_i^2} \right)^2 \right).$$

Таким образом, разностная схема будет приближённо монотонной, если

$$\mu_{\min i} \leq \mu_i \leq \mu_{\max i}.$$

Использование во всех узлах $\tilde{x}_i \in \tilde{\Omega}_h$ одной из этих вязкостей приводит к сильному размыванию КР. В связи с этим, как и на ортогональных сетках необходимо находить области КР и ВР. В этих областях надо положить при соответствующих \tilde{x}_i вязкость $\mu_i = 0$.

На УВ (и ВС) будем полагать $\mu_i = \mu_{\min i}$, а в областях осцилляции решения $\mu_i = \mu_{\max i}$. Проверку принадлежности ячейки к указанным областям осуществим, как и выше, по «предикторному» решению. Сделать это можно различными способами.

3.9. Определение областей УВ(ВС), ВР, КР, ОСЦ. Метод адаптивной искусственной вязкости (Метод АИВ)

Как и в предыдущих главах, по явным разностным схемам с учётом поправок Лакса-Вендроффа вычислим в каждом внутреннем узле $x_0 \in \Omega_{h_0}$

предикторные значения $\tilde{q}_0^{n+1} = \tilde{\rho}_0^{n+1}$, $\tilde{I}_{\alpha 0}^{n+1} = \tilde{\rho}_0^{n+1} \tilde{u}_{\alpha 0}^{n+1}$, $\alpha = \overline{1, D}$, \tilde{E}_0^{n+1} , а также давление

$$\tilde{p}_0^{n+1} = (\gamma - 1) \left(\tilde{E}_0^{n+1} - \tilde{\rho}_0^{n+1} \frac{(\tilde{v}_0^{n+1})^2}{2} \right), \text{ используя уравнения Эйлера:}$$

$$\frac{\tilde{q}_0^{n+1} - q_0^n}{\tau_n} + \left(L_{nq}(\rho^n, \bar{I}^n, E^n) \right)_0 = 0, \quad x_0 \in \Omega_{h0},$$

$$\text{где } q_0^n = \rho_0^n, \quad I_{\alpha 0}^n = \rho_0^n u_{\alpha 0}^n, \quad \alpha = \overline{1, D}, \quad E_0^n \text{ и } p_0^n = (\gamma - 1) \left(E_0^n - \rho_0^n \frac{(\bar{v}_0^n)^2}{2} \right).$$

Шаг τ_n находим по выбранному в начале расчёта числу Куранта (обозначим его через Ku), при котором разностная схема является устойчивой при расчёте по методу АИВ:

$$\tau_n \cdot \max_{\tilde{x}_i \in \tilde{\Omega}_h} \left(\frac{1}{h_i} \sqrt{(\hat{v}_{n_i}^n)^2 + (c^n)_i^2} \right) = Ku.$$

Далее, согласно общей схеме метода АИВ (см. выше) проведём анализ предикторного решения в узлах $x_0 \in \Omega_{h0}$ и определение положения областей УВ (ВС), ВР, КР, и ОСЦ.

Каждому внутреннему узлу x_0 сопоставим узлы соседних ячеек. Количество таких ячеек для строго внутренних узлов равно $D+1$. Если узел x_0 приграничный, то добавим к соседним D узлам граничный потоковый узел \tilde{x}_i , в котором зададим значения функций равными значениям в узле x_0 .

По значениям функций в $D+1$ узлах, окружающих рассматриваемый узел x_0 , построим линейное восполнение функций $\tilde{\rho}^{n+1}$, $\tilde{p}^{n+1} / \tilde{\rho}^{n+1}$, \tilde{u}_{α}^{n+1} , $\alpha = \overline{1, D}$

и найдём по этим функциям производные $\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \right)^{n+1}$, $\frac{\partial \tilde{\rho}^{n+1}}{\partial x_{\alpha}}$, $\frac{\partial \tilde{u}_{\beta}^{n+1}}{\partial x_{\alpha}}$, $\alpha, \beta = \overline{1, D}$.

Далее, по полученным значениям находим производные в направлении

вектора $\bar{\ell} = \frac{\text{grad } \tilde{\rho}^{n+1}}{|\text{grad } \tilde{\rho}^{n+1}|}$ от функций $\left(\frac{\tilde{p}^{n+1}}{\tilde{\rho}^{n+1}} \right)_0$ и $\tilde{u}_{\ell 0}^{n+1}$ в узле x_0 . Введём

величины (соответствующие узлу x_0 и ячейке ω_0):

$$J_{KP0}^{n+1} \approx \sum_{\alpha=1}^D \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \right)^{n+1} \frac{\partial \tilde{\rho}^{n+1}}{\partial x_\alpha} \right)_0 \quad \text{и} \quad J_{B0}^{n+1} \approx \sum_{\alpha=1}^D \left(\frac{\partial \tilde{u}_\beta^{n+1}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \tilde{\rho}^{n+1}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \tilde{\rho}^{n+1}}{\partial x_\beta} \right)_0.$$

Эти величины с точностью до положительного множителя совпадают с $\frac{\partial}{\partial \tilde{l}} \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \right)^{n+1}$ и $\frac{\partial}{\partial \tilde{l}} (\tilde{u}_l)^{n+1}$. Знаки этих величин определяют наличие в ячейке ω_0 КР (при $J_{KP0}^{n+1} < 0$), ВР (при $J_{B0}^{n+1} > 0$) и УВ (ВС) (при $J_{B0}^{n+1} < 0$).

Всем узлам $x_0 \in \Omega_{h0}$ сопоставим метку $\text{Marker}_0 = 0$. Затем проверим условия. Если $J_{KP0}^{n+1} > 0$, то $x_0 \notin KP$ и проверяем второе условие, $J_{B0}^{n+1} < 0$ (в ω_0 УВ (ВС)). Если второе условие выполнено, то узлу x_0 сопоставим метку $\text{Marker}_0 = 1$ ($x_0 \in UB, BC$). Далее по соседним с x_0 узлам находим $\max_{0_i \neq 0} \tilde{\rho}_{0_i}^{n+1}$ и $\min_{0_i \neq 0} \tilde{\rho}_{0_i}^{n+1}$. Если

$$\max_{0_i \neq 0} \tilde{\rho}_{0_i}^{n+1} < \tilde{\rho}_0^{n+1} \quad \text{или} \quad \min_{0_i \neq 0} \tilde{\rho}_{0_i}^{n+1} > \tilde{\rho}_0^{n+1},$$

то узлу x_0 сопоставим метку $\text{Marker}_0 = 2$. В этом случае в узле x_0 функция $\tilde{\rho}_0^{n+1}$ достигает максимума или минимума, что можно трактовать как наличие немонотонности решения (наличие осцилляции).

Если узлу x_0 сопоставлена метка $\text{Marker}_0 = 1$, то в узлах $\tilde{x}_i \notin \tilde{\Gamma}_h$ на границе ячейки ω_0 вводится вязкость $\mu_i^{n+1} = \mu_{\min i}^n$. Если узлу сопоставлена метка $\text{Marker}_0 = 2$, то во всех узлах $\tilde{x}_i \notin \tilde{\Gamma}_h$ на границе ячейки ω_0 вводится вязкость $\mu_i^{n+1} = \mu_{\max i}^n$. При таком введении искусственной вязкости удается подавить осцилляции.

После введения вязкости в узлах $\tilde{x}_i \in \tilde{\Omega}_h$ определяется корректорное решение

$$\frac{q_0^{n+1} - \tilde{q}_0^{n+1}}{\tau_n} = \left(\Lambda_h (\mu^{n+1}) q^n \right)_0,$$

где $q_0^{n+1} = \rho_0^{n+1}$, $I_{\alpha 0}^{n+1} = \rho_0^{n+1} u_{\alpha 0}^{n+1}$, $\alpha = \overline{1, D}$, E_0^{n+1} и $p_0^{n+1} = (\gamma - 1) \left(E_0^{n+1} - \rho_0^{n+1} \frac{(\tilde{v}_0^{n+1})^2}{2} \right)$.

Далее определяется шаг τ_{n+1} в соответствии с заданным числом Ku . Число Ku в расчётах бралось $0.3 \div 0.6$. Иногда расчёты можно было провести и при большем числе Ku ($Ku = 0.9$).

3.10. Численные эксперименты

Приведём примеры расчётов тестовых газодинамических задач на неструктурированных треугольных сетках и, для сравнения, расчёты этих же задач на ортогональной сетке. В качестве первого теста рассмотрим одномерную задачу о распаде разрыва из работы [70, 71, 100] (тест №1). Цель расчёта этой задачи – показать сохранение одномерности решения на неструктурированных треугольных сетках. Начальные данные приводятся в таблице №1.

Таблица №1

Тест №	Номер области	ρ	u	v	p	T
3	1	0.5323	1.206	0.0	0.3	0.3
	2	1.5	0.0	0.0	1.5	
	3	0.138	1.206	1.206	0.029	
	4	0.5323	0.0	1.206	0.3	
4	1	0.5065	0.8939	0.0	0.35	0.25
	2	1.1	0.0	0.0	1.1	
	3	1.1	0.8939	0.8939	1.1	
	4	0.5065	0.0	0.8939	0.35	
6	1	2.0	0.75	0.5	1.0	0.3
	2	1.0	0.75	-0.5	1.0	
	3	1.0	-0.75	0.5	1.0	
	4	3.0	-0.75	-0.5	1.0	
12	1	1.0	0.7276	0.0	1.0	0.25
	2	0.5313	0.0	0.0	0.4	
	3	0.8	0.0	0.0	1.0	
	4	1.0	0.0	0.7276	1.0	
15	1	0.5197	-0.6259	-0.3	0.4	0.2
	2	1.0	0.1	-0.3	1.0	
	3	0.8	0.1	-0.3	0.4	
	4	0.5313	0.1	0.4276	0.4	
17	1	2.0	0.0	-0.3	1.0	0.3
	2	1.0	0.0	-0.4	1.0	
	3	1.0625	0.0	0.2145	0.4	
	4	0.5197	0.0	-1.1259	0.4	

Расчётная область представляла единичный квадрат (см. рис. 3.8а).

$\rho_1 \quad \vec{v}_1$ $P_1 \quad E_1$	$\rho_2 \quad \vec{v}_2$ $P_2 \quad E_2$
$\rho_3 \quad \vec{v}_3$ $P_3 \quad E_3$	$\rho_4 \quad \vec{v}_4$ $P_4 \quad E_4$

Рис. 3.8 а

Число расчётных треугольников в этом тесте было равно 146 826. Результаты приводятся на рис. 3.8 и 3.9, где цветом показано давление, а изолиниями плотность. Одномерность решения сохранилась.

Следующая тестовая задача - тест № 3 из [70, 71,100]. В этой задаче взаимодействуют четыре ударных волны, параметры которых приведены в таблице №1. Результаты расчёта этого теста приведены на рис. 3.10 и 3.11. На обоих рисунках цветом приводятся значения давления, линиями изолинии - плотности. На рис. 3.10 приводятся линиями уровней плотности, а на рис. 3.11 стрелками показаны направления скорости течения газа.

Далее на треугольных сетках решалась задача – тест №6 из [70, 71,100]. Начальные данные для этого теста также приведены в таблице № 1. Расчёты этого теста проведены как на треугольной сетке, так и на ортогональной с большим количеством расчётных узлов. Это связано с тем, что в процессе расчёта на треугольной сетке появилась неустойчивость вдоль контактных разрывов. Эта неустойчивость - неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, когда компоненты скорости вдоль разрыва по разные стороны его имеют противоположные направления. Контактные разрывы вращаются по часовой стрелке вокруг центра квадрата. На рис. 3.12 и 3.13 приведены расчеты теста № 6 на ортогональных сетках с числом расчётных узлов соответственно

160000 и 640000, на рис. 3.14 и 3.15 приведены расчёты на треугольных сетках с числом расчётных узлов соответственно 176316 и 589612. На треугольных сетках неустойчивость контактного разрыва проявляется сильнее. Чтобы выяснить, от чего возникает эта неустойчивость, связано ли её возникновение с неструктурированностью сетки, был проведён расчёт на подробной ортогональной сетке с числом узлов 16000000. Этот расчёт приведён на рис. 3.16. Он свидетельствует о неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Такая же гофрировочная неустойчивость наблюдается в подобных ситуациях на ударных волнах. Наличие неустойчивости вдоль разрывов описано в книге Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [101].

Последний четвёртый тест, который был взят из [70, 71,100] - тест №15. Начальные данные для этого теста см. таблицу №1. В этом тесте наблюдаются два контактных разрыва, одна ударная волна и волна разряжения. На рис. 3.17 и 3.18б, так же, как и на предыдущих рисунках, давление - цвет, а линии - линии уровней плотности и линии со стрелками - направления движения вещества. Для этого теста приведен также рисунок, на котором показано введение меток «0» - КР, ВР, «1» - УВ и «2» - ОСЦ (см. рис 3.19).

В заключение этого параграфа приведём расчёт задачи о сверхзвуковом течении в канале с уступом (см. рис. 3.20). Эта задача интересна тем, что в процессе течения, помимо косых стационарных ударных волн, образуется также контактный разрыв, который возникает и с течением времени распадается. Размеры области и параметры этой задачи следующие: длина канала в нормированных переменных равна 3, ширина равна 1, ступенька располагалась на расстоянии 0.6 от входа в канал и имела выступ 0.2. Газ имел плотность $\rho = 1$, давление $p = 1/\gamma$, где $\gamma = 1.4$. Скорость на входе $u = 3$ и $v = 0$. В начальный момент времени газ в канале был в состоянии покоя. На выходе задавались условия свободной границы - производные по нормали к границе от всех искомым функций равны нулю. Результаты расчёта

приведены на рис. 3.20 на моменты времени $t = 0.5, 1, 2, 4, 7, 10$. Количество расчётных треугольников было равно 1 434 286, а число Куранта $Ku = 0.8$.

Замечание. Проведённые расчёты на треугольных сетках дают количественные результаты с той же точностью, что и на ортогональных сетках. В задаче о сверхзвуковом течении в канале с уступом косые ударные волны размываются меньше на треугольных сетках, чем на ортогональных сетках.

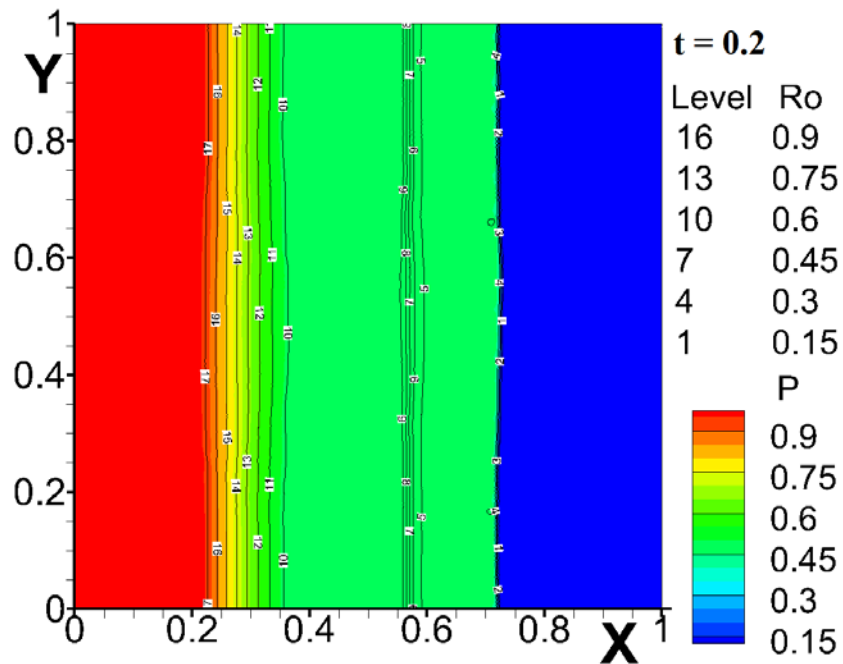


Рис. 3.86

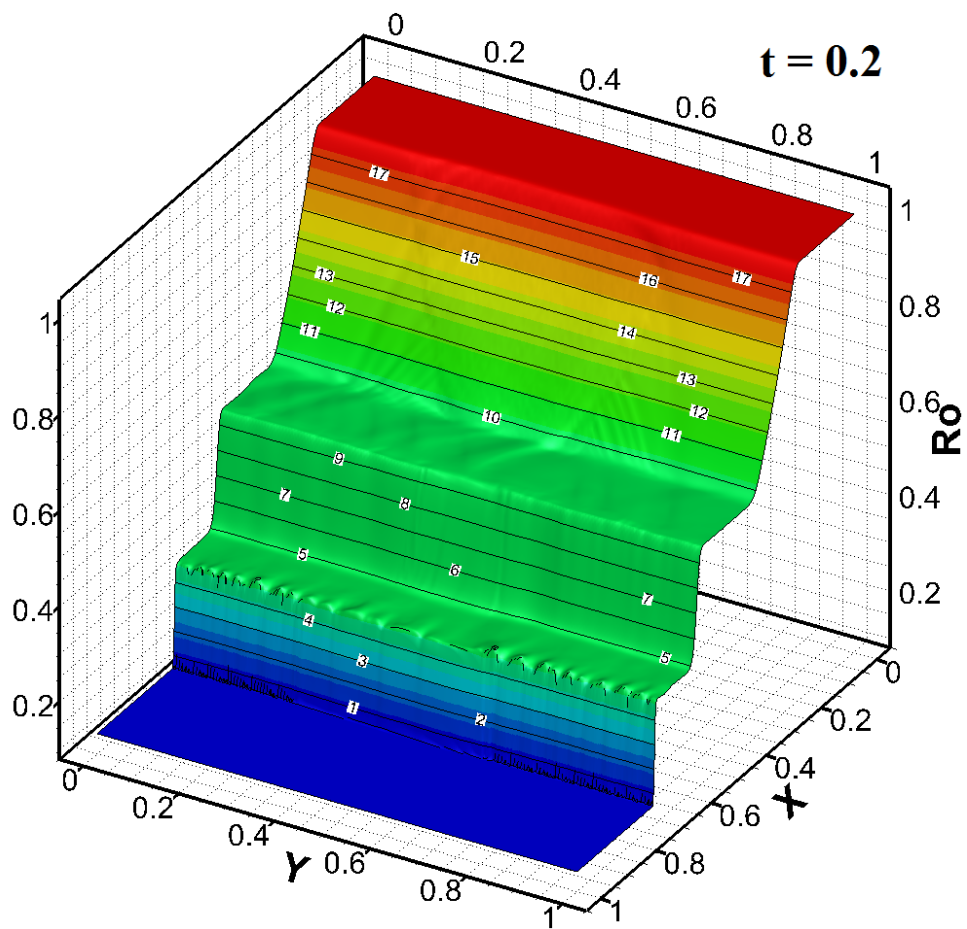


Рис. 3.9

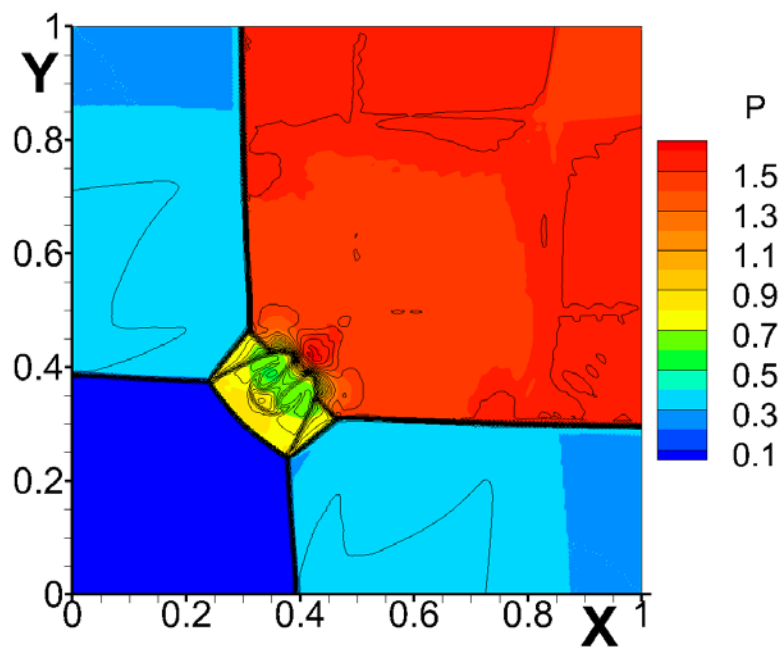


Рис. 3.10

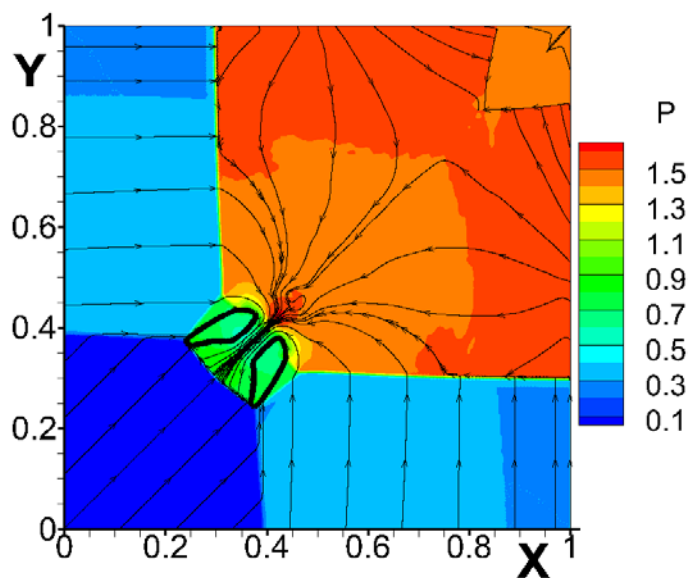


Рис. 3.11

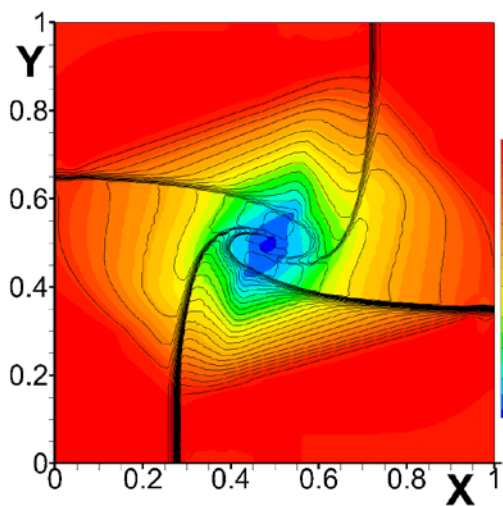


Рис. 3.12

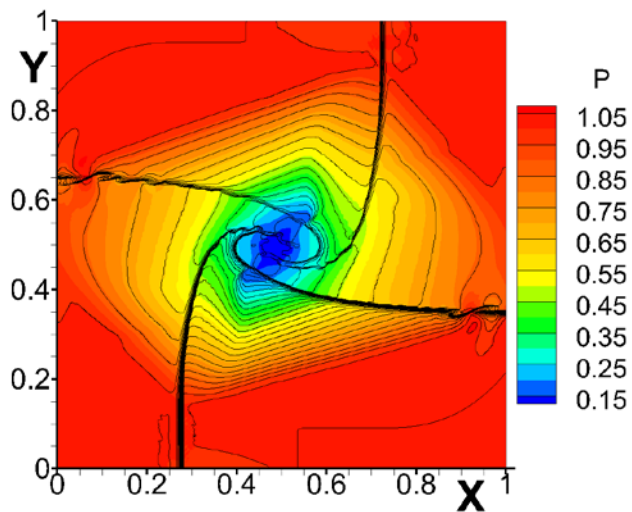


Рис. 3.13

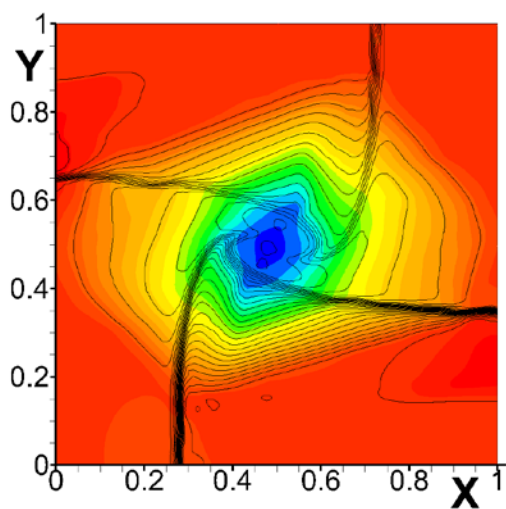


Рис. 3.14

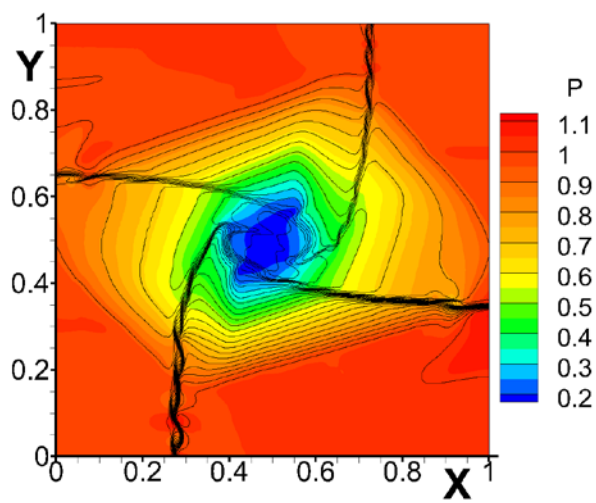


Рис. 3.15

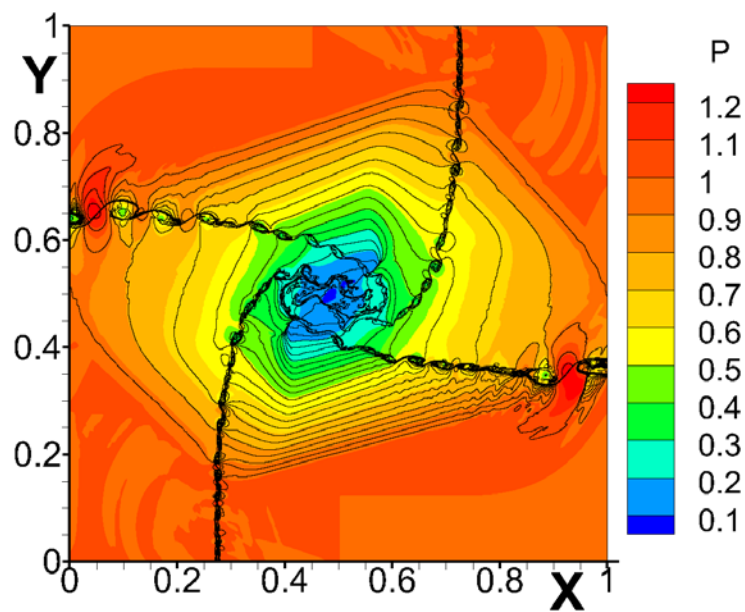


Рис. 3.16

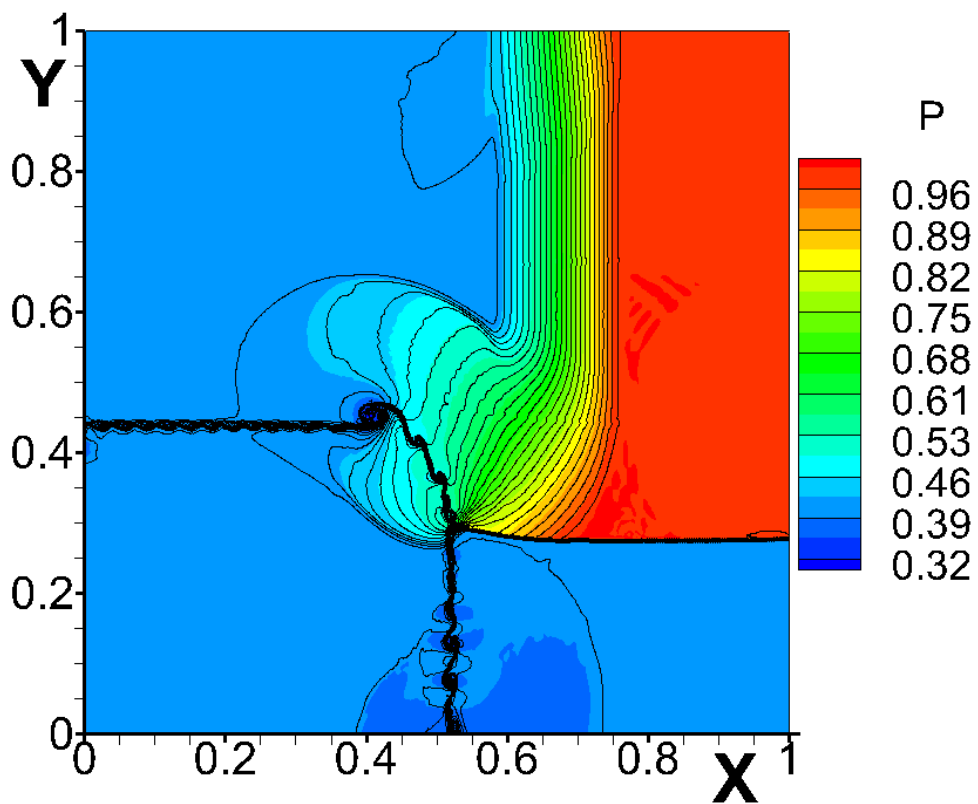


Рис. 3.17

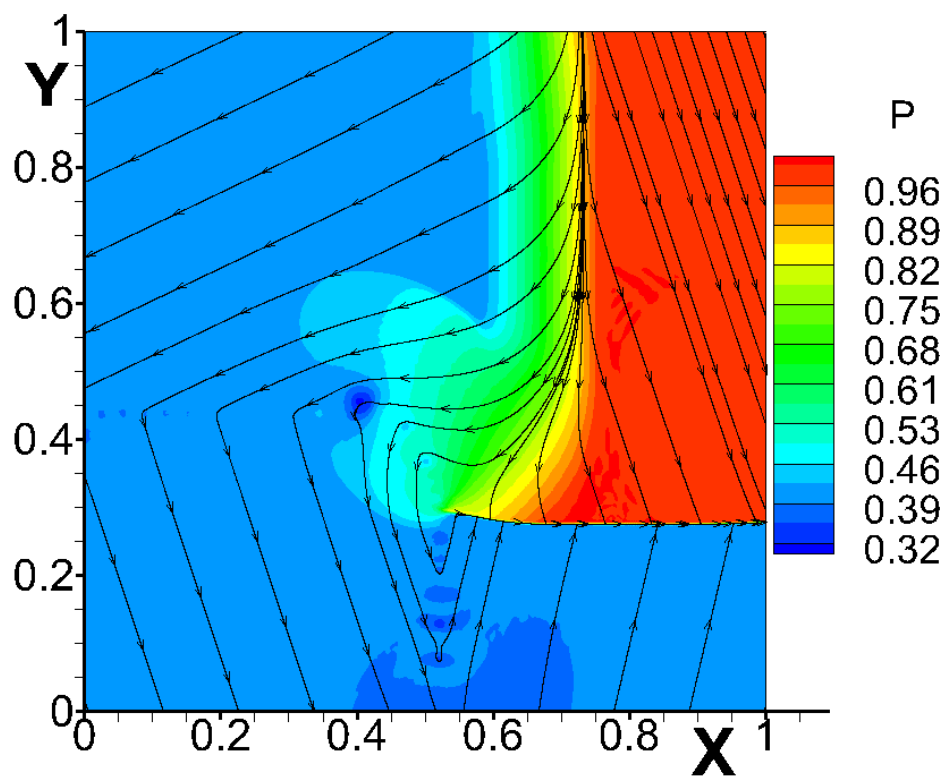


Рис. 3.18

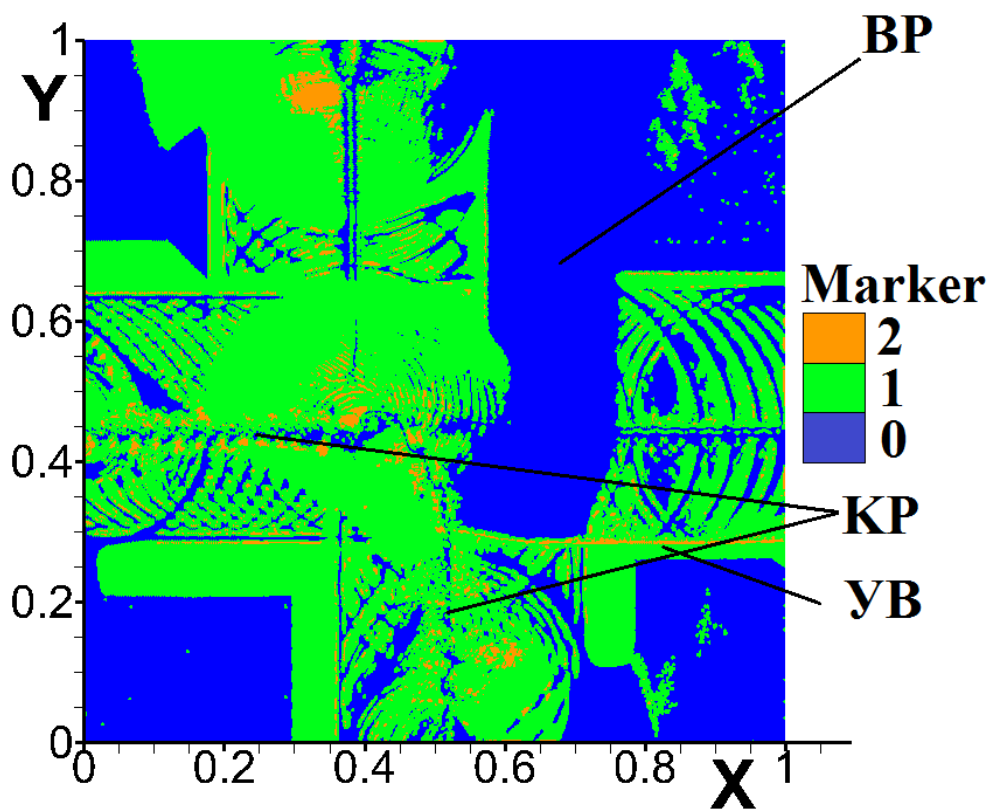
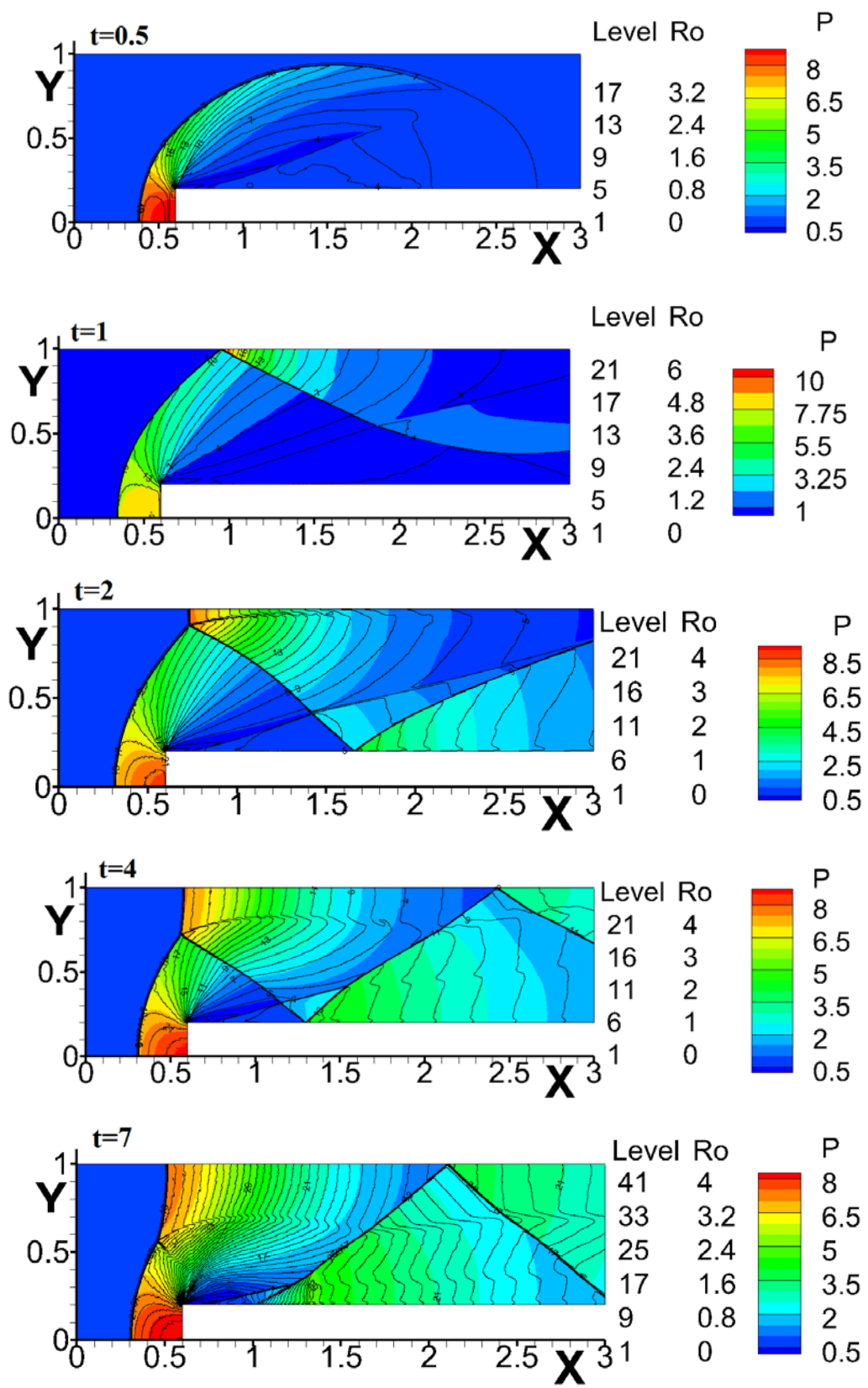


Рис. 3.19.



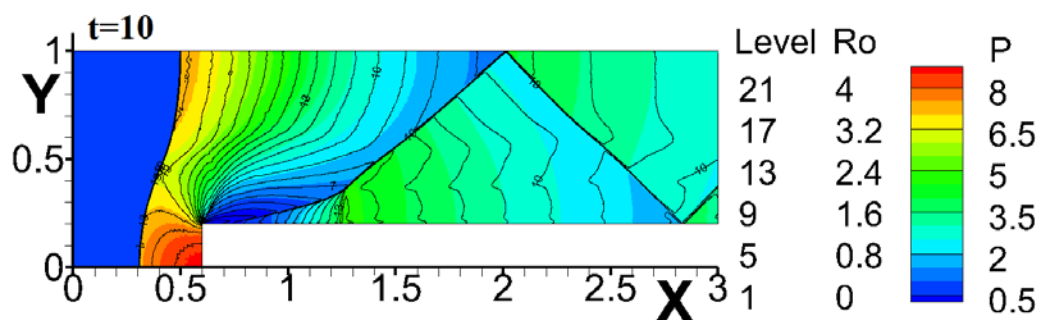


Рис. 3.20

Заключение по главе 3

1. Разработан метод АИВ для численного решения уравнений Эйлера на неструктурированных сетках, получены оценки коэффициента искусственной вязкости.
2. Проведена верификация метода АИВ на известных тестовых задачах и выполнено сравнение метода АИВ с другими известными численными методами.

Результаты главы 3 опубликованы в работах:

1. Попов И.В., Фрязинов И.В. Расчеты двумерных тестовых задач методом адаптивной искусственной вязкости. Математическое моделирование, 2010, 22(5), 57-66
2. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости для уравнений газовой динамики на треугольных и тетраэдральных сетках. Математическое моделирование. 2012, 24(6), 109-127.
3. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости на неструктурированных сетках. // Вестник российского университета дружбы народов. Серия: Математика, Информатика, Физика. 2014, №2, 230-233.
4. Попов И.В., Фрязинов И.В. Расчеты двумерных тестовых задач методом адаптивной искусственной вязкости. Математическое моделирование, 2010, 22(5), 57-66

5. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. // М., «КРАСАНД», 2014. – 288 с., 18 п.л.

Глава 4.

Метод адаптивной искусственной вязкости для решения системы уравнений Навье-Стокса

Представлен численный метод решения двумерных задач вязкого сжимаемого газа на основе уравнений Навье-Стокса с введением адаптивной искусственной вязкости. Предложенный метод реализован для областей общего вида на треугольных сетках. За основу численного метода взят метод адаптивной искусственной вязкости, который обеспечивает монотонность решения, даже в случае наличия ударных волн. Искусственная вязкость, вводимая в разностную схему, сконструирована таким образом, чтобы она отсутствовала в пограничном слое, где действует динамическая вязкость. Искусственная вязкость находится из условий выполнения принципа максимума. Приводится серия расчётов внешнего обтекания цилиндра для различных чисел Рейнольдса и Маха, течение газа в плоском канале и др.

4.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений Навье-Стокса в декартовой системе координат в операторном виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v} \rho) = 0 \\ \frac{\partial \rho v_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v} \rho v_\alpha - \mu \vec{\tau}_\alpha) + \operatorname{grad}_\alpha p = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}(E + p) - \mu(\vec{v}, \vec{\tau}) - \lambda \operatorname{grad} T) = 0 \end{cases}$$

где ρ – плотность, p – давление, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ – скорость, ρv_α – компоненты

импульса $\alpha = 1, 2$, $E = \rho \varepsilon + \rho \frac{u^2 + v^2}{2}$ – полная энергия, ε – внутренняя энергия.

Вектор $\vec{\tau}_\alpha$ содержит компоненты $\tau_{\alpha\beta}$, $\beta = \overline{1, D}$, D – размерность пространства.

Также

$$\tau_{\alpha\beta} = 2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \vec{v} \right)$$

можно трактовать как компоненты тензора вязких напряжений $\alpha = 1, 2$, $\beta = 1, 2$, μ - динамическая вязкость, $\lambda = \mu \frac{\gamma R}{(\gamma - 1) \text{Pr}}$ - коэффициент теплопроводности, $T = \frac{\varepsilon}{C_v} = \frac{p}{(\gamma - 1) C_v \rho}$ - температура, Pr - число Прандтля. Эти уравнения решаются в области общего вида Ω , $t > 0$. Система уравнений замыкается уравнением состояния идеального газа $p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon$ или давление задается из экспериментальных таблиц, γ - показатель адиабаты Пуассона.

На границе области Ω и в начальный момент времени $t = 0$ задаются значения функций ρ , \vec{v} и E (или p).

4.2. Аппроксимация системы уравнений

Исходную область Ω покроем произвольной треугольной сеткой, назовём треугольники ячейками расчётной сетки Ω_h . Для построенных треугольников найдём центры описанных окружностей. Если центр лежит строго внутри ячеек, то назовём его центром ячейки и обозначим точкой x_0 (см. рис. 4.1). Если же центр описанной окружности лежит на границе или вне треугольника, то центром ячейки назовём её центр тяжести. К центру ячейки отнесём все искомые значения сеточных функций ρ_0 , \vec{v}_0 , E_0 , p_0 . В рассмотрение введём также потоковые узлы \tilde{x}_i , получаемые как пересечение отрезка, соединяющего центры соседних ячеек и общего ребра или грани ячеек.

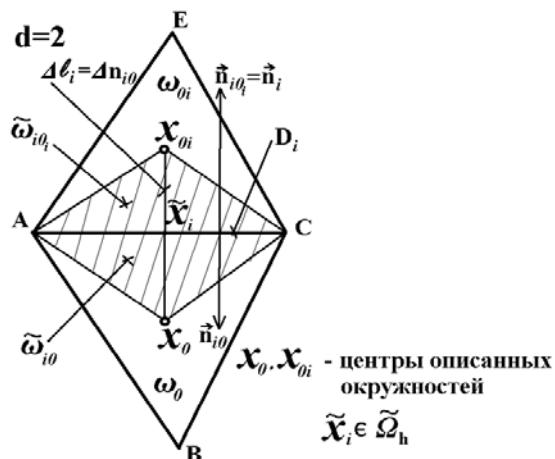


Рис. 4.1

Рассмотрим аппроксимацию уравнения неразрывности. Для построения разностной схемы применим метод конечных объёмов. Проинтегрируем дифференциальное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{v} \rho) = 0$$

по площади ω_0 , получим

$$\int_{\omega_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{v} \rho) \right) d\omega = 0, \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_0 \omega_0 + \int_{\omega_0} \operatorname{div}(\bar{v} \rho) d\omega = 0,$$

$$\int_{\omega_0} \operatorname{div}(\bar{v} \rho) d\omega = \oint_{\ell_0} (\bar{n}, \bar{v} \rho) d\ell = \sum_i \frac{(\rho v_{n_i})_0 + (\rho v_{n_i})_{0_i} \ell_i}{2}$$

После дискретизации по времени получим:

$$\rho_0^{n+1} = \rho_0^n - \frac{\tau}{\omega} \sum_i \frac{(\rho v_{n_i})_0 + (\rho v_{n_i})_{0_i} \ell_i}{2}$$

Остальные уравнения аппроксимируются аналогично. Запишем окончательный результат

- уравнение импульса:

$$\begin{aligned} (\rho v_\alpha)_0^{n+1} = (\rho v_\alpha)_0^n - \frac{\tau}{\omega} \sum_i \left[\frac{(\rho v_{n_i})_0 + (\rho v_{n_i})_{0_i}}{2} \frac{(v_\alpha)_0 + (v_\alpha)_{0_i}}{2} - \right. \\ \left. - \frac{\mu_0 + \mu_{0_i}}{2} \left(\frac{1}{3} \frac{(v_{n_i})_{0_i} - (v_{n_i})_0}{\Delta n_i / D} \cos(n_i, x_\alpha) + \frac{(v_\alpha)_{0_i} - (v_\alpha)_0}{\Delta n_i} \right) + \frac{p_{0_i} + p_0}{2} \cos(n_i, x_\alpha) \right] \ell_i \end{aligned}$$

- уравнение полной энергии

$$E_0^{n+1} = E_0^n - \frac{\tau}{\omega} \sum_i \left\{ \frac{(v_{n_i} \rho)_0 + (v_{n_i} \rho)_{0_i}}{2} \left(\frac{u_0 u_{0_i} + v_0 v_{0_i}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p_{0_i}}{\rho_{0_i}} + \frac{p_0}{\rho_0} \right) \right) \right\} -$$

$$-\frac{\mu_0 + \mu_0}{2} \left[\frac{1}{6} \frac{(v_{n_i})_{0_i}^2 - (v_{n_i})_0^2}{\Delta n_i / D} + \frac{1}{2} \frac{(u_{0_i}^2 - u_0^2) + (v_{0_i}^2 - v_0^2)}{\Delta n_i} \right] - \frac{\lambda_0 + \lambda_{0_i}}{2} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} \frac{(p/\rho)_{0_i} - (p/\rho)_0}{\Delta n_i} \left. \right\} \ell_i$$

где ℓ_i - длина i -ой стороны треугольника, Δn_i - длина вектора $\overrightarrow{x_0 x_{0_i}}$ на нормальный вектор \vec{n}_i для i -ой стороны треугольника, Re - число Рейнольдса. Здесь предполагается, что физическая вязкость $\mu = \frac{1}{\text{Re}}$, D - размерность пространства, в данном случае $D = 2$.

Предложенная разностная схема имеет малую диссипацию и если в решаемой задаче есть разрывы решения, например, присутствует ударная волна, то требуется введение дополнительной искусственной вязкости.

4.3. Искусственная вязкость

Введём искусственную вязкость η в систему уравнений Навье-Стокса аналогично тому, как это было сделано для уравнений Эйлера [28], получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{v} \rho) = \text{div}(\eta \text{grad} \rho) \\ \frac{\partial \rho v_\alpha}{\partial t} + \text{div}(\vec{v} \rho v_\alpha - \mu \vec{\tau}_\alpha) + \text{grad}_\alpha p = \text{div}(\eta \text{grad} \rho v_\alpha) \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \text{div}(\vec{v}(E + p) - \mu(\vec{v}, \vec{\tau}_\alpha) - \lambda \text{grad} T) = \text{div}(\eta \text{grad} E) \end{array} \right.$$

В разностном виде диссипативный оператор с искусственной вязкостью η

записывается в виде: $(\Lambda_h(\eta) q^n)_0 = \frac{1}{\omega_0} \sum_i \eta_i^n \frac{q_{0_i}^n - q_0^n}{\Delta n_i} \ell_i$, где $q = \rho, \rho v_\alpha, E$, $\alpha = 1, 2$.

Найдём выражение для искусственной вязкости η , для чего воспользуемся принципом максимума. Запишем разностное уравнение неразрывности в виде

$$\rho_0^{n+1} = \rho_0^n \underbrace{\left[1 - \frac{\tau}{\omega} \sum_i \frac{(v_{n_i})_{0_i}}{2} \ell_i - \frac{\tau}{\omega} \sum_i \frac{\eta_i}{\Delta n_i} \ell_i \right]}_{=A_0} + \frac{\tau}{\omega} \sum_i \underbrace{\left[\frac{\eta_i}{\Delta n_i} - \frac{(v_{n_i})_{0_i}}{2} \right]}_{=B_{0_i}} \rho_{0_i}^n \ell_i.$$

Для того, чтобы принцип максимума был выполнен, необходима

положительность коэффициентов

$$A_0 = 1 - \frac{\tau}{\omega} \sum_i \frac{(v_{n_i})_0}{2} \ell_i - \frac{\tau}{\omega} \sum_i \frac{\eta_i}{\Delta n_i} \ell_i > 0 \text{ и } B_{0_i} = \frac{\eta_i}{\Delta n_i} - \frac{(v_{n_i})_{0_i}}{2} > 0.$$

Разрешая эти неравенства относительно искусственной вязкости, для первого неравенства имеем $\eta_i < \frac{\Delta n_i}{D} |(v_n)_i|$, а для второго $\eta_i > \frac{\Delta n_i}{D} |(v_n)_i|$, следовательно

$$\eta_i = \frac{\Delta n_i}{D} |(v_n)_i|.$$

Полученная искусственная вязкость используется и для остальных уравнений.

4.4. Области введения искусственной вязкости

Если всюду вводить предложенную выше искусственную вязкость, то это приведёт к сильному размыванию численного решения, поэтому будем вводить вязкость только на ударной волне (волне сжатия) и на осцилляциях численного решения. На области, занятой ударной волной (УВ), должно выполняться равенство:

$$\frac{\partial v_{\vec{\ell}}}{\partial \vec{\ell}} < 0,$$

где $\vec{\ell} = \frac{\nabla \rho}{|\nabla \rho|}$ – единичный вектор по направлению градиента плотности, а $v_{\vec{\ell}}$ –

проекция вектора скорости на направление вектора $\vec{\ell}$. Другая область введения вязкости – это область осцилляции численного решения (ОСЦ), когда значения функции плотности ρ_0 больше или меньше значений плотностей, примыкающих к данной ячейке ω_0 , то есть проверяются два условия:

$$\rho_0 > \max_{0_i \neq 0, i=1,3} (\rho_{0_i}) \text{ или } \rho_0 < \min_{0_i \neq 0, i=1,3} (\rho_{0_i}).$$

Для уменьшения искусственной вязкости на ударной волне бралась минимальная искусственная вязкость, которая была получена для уравнений

Эйлера с адаптивной искусственной вязкостью в правых частях уравнений [90]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{v} \rho) = \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} \rho) \\ \frac{\partial \rho v_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{v} \rho v_\alpha) + \operatorname{grad}_\alpha p = \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} \rho v_\alpha) \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{v}(E + p)) = \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} E), \end{array} \right.$$

так как в области вне пограничного слоя физической вязкости недостаточно для монотонизации решения, а именно физическая вязкость стремится к нулю и уравнения импульса и полной энергии переходят в уравнения Эйлера.

В разностном виде с учетом поправок Лакса-Вендроффа уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\rho_0^{n+1} - \rho_0^n}{\tau} + \frac{1}{\omega} \sum_i S \frac{v_{n_i}^n (\rho_{0_i}^n + \rho_0^n)}{2} - \frac{\tau}{2\omega} \sum_i S \left[v_{n_i}^2 \frac{\rho_{0_i}^n - \rho_0^n}{\Delta n_i / D} + c^2 \frac{\rho_{0_i}^n - \rho_0^n}{\Delta n_i / D} \right] = \frac{1}{\omega} \sum_i S \eta \frac{\rho_{0_i}^n - \rho_0^n}{\Delta n_i}$$

Перепишем это уравнение в виде:

$$\rho_{i_\alpha}^{n+1} = \sum_\alpha (A_\alpha \rho_{i_\alpha+1}^n + C_\alpha \rho_{i_\alpha-1}^n) + \rho_{i_\alpha}^n \left(1 - \sum_\alpha B_\alpha \right) + \tau F_{i_\alpha}^n,$$

где $A_\alpha = -\frac{\tau}{2h_\alpha} (v_n)_i + \frac{\tau^2}{2h_\alpha^2} \left((v_n)_i^2 + c^2 \right) + \frac{\tau}{h_\alpha^2} \bar{\eta}_\alpha,$

$$C_\alpha = \frac{\tau}{2h_\alpha} (v_n)_i + \frac{\tau^2}{2h_\alpha^2} \left((v_n)_i^2 + c^2 \right) + \frac{\tau}{h_\alpha^2} \bar{\eta}_\alpha, \quad B_\alpha = \frac{\tau^2}{h_\alpha^2} \left((v_n)_i^2 + c^2 \right) + 2 \frac{\tau}{h_\alpha^2} \bar{\eta}_\alpha = A_\alpha + C_\alpha.$$

Накладывая условие положительности на коэффициенты, получим неравенства для адаптивной искусственной вязкости:

$$\mu_{\min i} = \frac{h_i}{2} |(v_n)_i| \left[1 - \frac{\tau}{h_i} \sqrt{(v_n)_i^2 + c_i^2} \right] \leq \mu_i \leq \frac{h_i}{2} \sqrt{(v_n)_i^2 + c_i^2} \left(1 - \left(\frac{\tau}{h_i} \sqrt{(v_n)_i^2 + c_i^2} \right)^2 \right) = \mu_{\max i},$$

где $h_i = \frac{\Delta n_i}{\sqrt{D}},$ c - скорость звука.

Таким образом, искусственная вязкость по областям имеет вид:

$$\eta = \begin{cases} \eta_i = h_i \sqrt{D} |(v_n)_i|, & x_0 \in ОСЦ \\ \eta_i = 0.5 h_i \sqrt{D} |(v_n)_i| \left(1 - \frac{\tau}{h_i} \sqrt{(\sqrt{D} (v_n)_i)^2 + c^2} \right), & x_0 \in УВ. \\ 0, & x_0 \notin УВ \cup ОСЦ \end{cases}$$

4.5. Этапы решения задачи

На первом этапе (этап предиктор) по значениям $q^n = \{\rho^n, (\rho v_\alpha)^n, \alpha = 1, 2, E^n, p^n\}$ в момент времени $t = t_n$, в отсутствие искусственной вязкости $\eta \equiv 0$, по явной разностной схеме находим предикторное решение $\tilde{q}^{n+1} = \{\tilde{\rho}^{n+1}, (\tilde{\rho} \tilde{v}_\alpha)^{n+1}, \alpha = 1, 2, \tilde{E}^{n+1}, \tilde{p}^{n+1}\}$.

На втором этапе, по полученным предикторным значениям \tilde{q}^{n+1} , определяются ячейки и потоковые узлы, в которые следует ввести искусственную вязкость и для найденных ячеек по значениям q^n найти искусственную вязкость $\eta^{n+1} = \eta(q^n)$. Области введения искусственной вязкости описаны выше.

На третьем этапе («этап корректор») по значениям \tilde{q}^{n+1} и искусственной вязкости η^{n+1} находим значения $q^{n+1} = \{\rho^{n+1}, (\rho v_\alpha)^{n+1}, \alpha = 1, 2, E^{n+1}, p^{n+1}\}$ на момент времени $t = t_{n+1}$.

4.6. Численные эксперименты

Приводимые ниже эксперименты проводились для тестирования предложенного метода для уравнений Навье-Стокса.

В качестве первого численного эксперимента рассматривается обтекание бесконечного кругового цилиндра потоком сжимаемого вязкого газа. При ламинарном течении задача является двумерной. Перед проведением численных расчётов переменные обезразмеривались, в качестве базовых переменных были взяты радиус цилиндра - R_0 , плотность - ρ_0 и

скорость набегающего потока - u_0 . Остальные переменные определялись следующим образом $t_0 = \frac{R_0}{u_0}$, $p_0 = \rho_0 u_0^2$, $\varepsilon_0 = u_0^2$, $T_0 = \frac{u_0^2}{R_0}$, $\mu_0 = \mu(T_0)$. Таким образом, обезразмеривание было проведено аналогично тому, как это было сделано в работе [102], чтобы можно было сравниться с результатами, полученными по явной разностной схеме, основанной на квазигазодинамической (КГД) системе уравнений [103, 104].

Первый расчет проводился в прямоугольной области на неструктурированной треугольной сетке с числом расчётных элементов (треугольников) 325884, сетка адаптировалась к поверхности цилиндра. Расчёт был проведен в случае сверхзвукового обтекания, когда число Маха в набегающем потоке $Ma_\infty = 2$, число Рейнольдса $Re = 10000$ и $u = 1$, $v = 0$, а плотность и давление в набегающем потоке и в начальной момент времени равнялись, соответственно, $\rho = 1$ и $p = p_\infty = \frac{1}{\gamma Ma_\infty^2}$. На всех остальных границах расчётной области ставилось условие сноса см. [102].

В таблице № 1 приведены результаты сравнения параметров течения газа - это давление p_s и плотность ρ_s в точке торможения, то есть в точке с координатами (-1, 0), а также положение головной ударной волны и значения давления p_2 , плотности ρ_2 и скорости u_2 за ударной волной. Сравнения проводились по результатам, полученным в работах [102, 105], и по результатам, полученным по методу, предложенному в данной работе.

Таблица № 1

	p_s	ρ_s	L	p_2	ρ_2	u_2
Данные из [43]	1.007	3.134	1.331	0.8036	2.667	0.375
Данные из [40]	0.995	3.066	1.22	0.79	2.614	0.364
Расчёт по предложенному методу	1.017	3.143	1.24761	0.8074	2.667	0.358

Из приведённых в таблице № 1 данных видно, что полученные в этой работе результаты достаточно хорошо согласуются с результатами из работ [102] и

[105].

На рисунке 2 цветом представлено распределение давления в газе, а линиями со стрелками линии тока. На рисунке 3 изображены цветом распределения плотности газа в установившемся течении.

Следует отметить, что на рис. 3 за цилиндром, где дозвуковая скорость, видна вихревая дорожка Кармана. Этот факт указывает на то, что в предложенном методе минимальная схемная вязкость. Для доказательства этого факта на рис. 4а приведены распределения плотности газа в установившемся течении, где в процессе решения была введена постоянная вязкость, равная вязкости на ударной волне. На рис. 4б приведены распределения плотности газа в установившемся течении, расчет был проведен по явной разностной схеме, основанной на квазигазодинамической системе уравнений [82]. Из этих рисунков видно, что схемная вязкость размывает вихревую дорожку, а для метода АИВ этого не происходит.

Второй расчёт был проведен для дозвукового обтекания $Ma_\infty = 0.2$, $Re = 50$. При числах Рейнольдса $Re > 40$ течение газа становится периодическим и образуется вихревая дорожка Кармана. На рисунке 5 цветом представлено распределение плотности в газе, а линиями со стрелками линии тока. На рисунке 6 представлена зависимость от времени вертикальной компоненты скорости в точке, находящейся на оси в точке с координатами (6.4, 0). На этом рисунке хорошо видно, что предложенный метод АИВ не имеет долгого периода накопления ошибки, как например в [102], а сразу выходит на колебательный режим, который устанавливается на момент времени $t \approx 150$.

Также рассматривалась задача о течении в плоском канале. Это течение для несжимаемой жидкости имеет название плоское течение Пуазейля. В данной работе при моделировании этого течения для приближения к модели несжимаемости использовалась формула для давления вида $p_\infty = \frac{1}{\gamma Ma_\infty^2}$, где $\gamma = 1.4$ и $Ma_\infty = 0.01$, что обеспечивало практически несжимаемость газа. Эта

задача была взята для того, чтобы оценить точность предложенного метода, так как на установившемся участке канала данное течение имеет точное аналитическое решение.

В этой задаче для перехода к безразмерным величинам в качестве базовых величин были выбраны следующие масштабы: длина h - полуширина канала, скорость u_0 - среднерасходная скорость в канале $u_0 = \frac{Q}{h}$, плотность ρ_0 - плотность на входе в канал и в начальный момент времени $\rho_0 = 1$, давление p_0 - скоростной напор $p_0 = \rho_0 u_0^2$.

Размеры канала: длина - $L = 10$, ширина - $2h$, где $h = \pm 0.5$.

Начальные данные: скорости $u = 1$ и $v = 0$, плотность $\rho = 1$, давление задавалось, как линейная функция $p = -Cx + p_0$, где $p_0 = p_\infty$, C - константа, определяемая по формуле $u_{\max} = C \operatorname{Re}(h^2 - y^2)$, u_{\max} - максимальная скорость в установившемся течении на оси абсцисс.

Граничные условия на входе канала: скорости $u = 1$ и $v = 0$, плотность $\rho = 1$, давление $p = p_\infty$, на выходе из канала производные по нормали к выходной границе от всех расчётных функций равны нулю. На стенках канала ставилось условие $u = 0$ и $v = 0$.

Расчет проводился до момента установления течения в канале, когда $\max_i |u_i^{n+1} - u_i^n| \leq \varepsilon$. На этот момент давление в канале имеет вдоль оси Ox линейный профиль, а профиль скорости вдоль оси Oy становится параболическим, в аналитическом случае функция скорости от переменной y имеет вид $u(y) = \frac{C}{2\mu}(h^2 - y^2)$ [45].

Расчёты проводились на неструктурированной треугольной сетке. Число расчётных элементов составляло 224100 треугольников.

Используя результаты расчетов задачи о течении в плоском канале из работы [106] и точного решения из [101], были построены расчетные профили в различных поперечных сечениях канала на момент установления

течения. В ходе численного эксперимента было построено пять сечений $X = 0.93$, $X = 1.24$, $X = 2.17$, $X = 3.1$ и $X = 4.65$ для сравнения с расчетами из [101]. По контрольным значениям на оси абсцисс для предложенного численного метода в данной работе и значениям на прямой $Y = 0.5$ из работы [101] проведены сравнения. По результатам сравнения можно сделать вывод, что получено хорошее совпадение. При этом хотелось бы отметить, что результаты расчетов в работе [101] получены для уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости. Сравнения с точным решением проводились в сечении $X = 5$ в точке пересечения оси абсцисс и функции горизонтальной скорости. В этой точке значение скорости в точном решении равно $U_{\max}^0 = 1.5$, а в расчёте имеем $U_{\max} = 1.479$, таким образом, ошибка составляет 1.4% от точного решения.

На рисунке 7 представлено расчётное распределение горизонтальной скорости для установившегося течения в различных сечениях плоского канала.

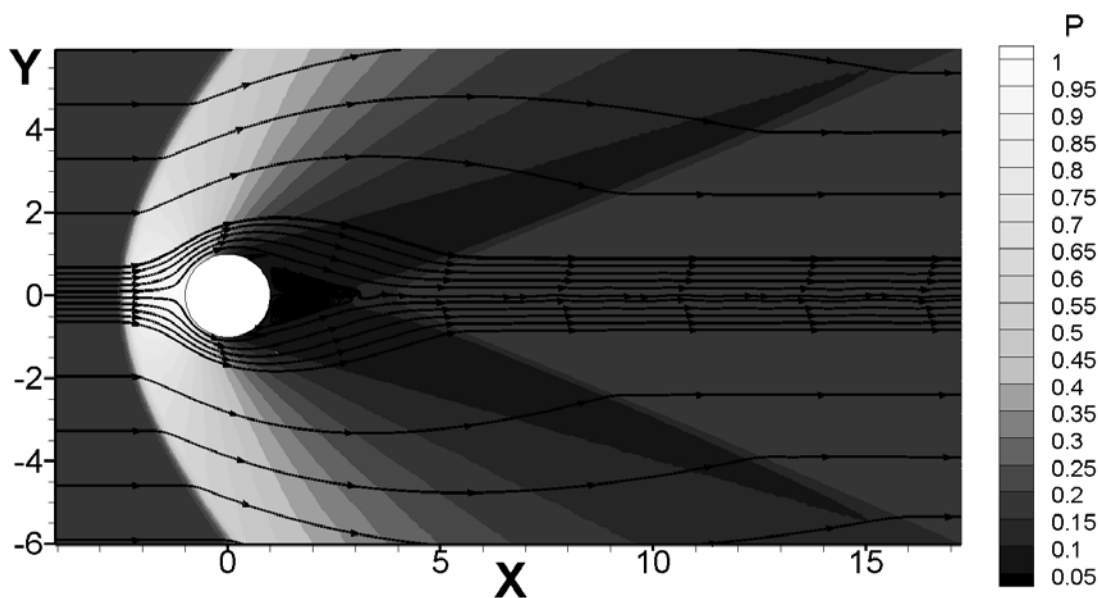


Рис. 2

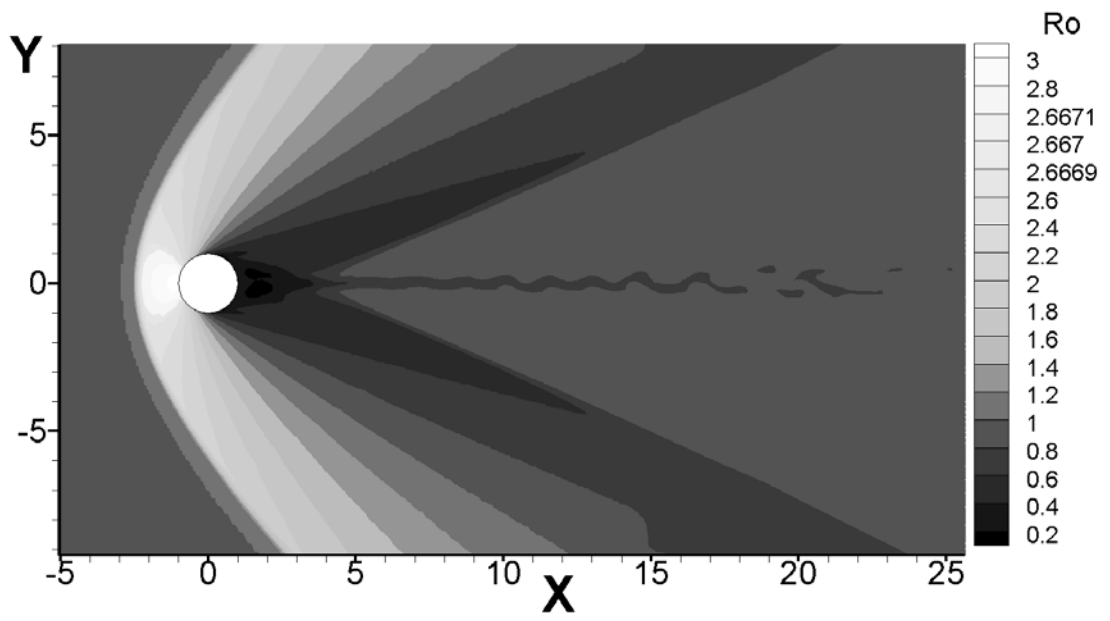


Рис. 3

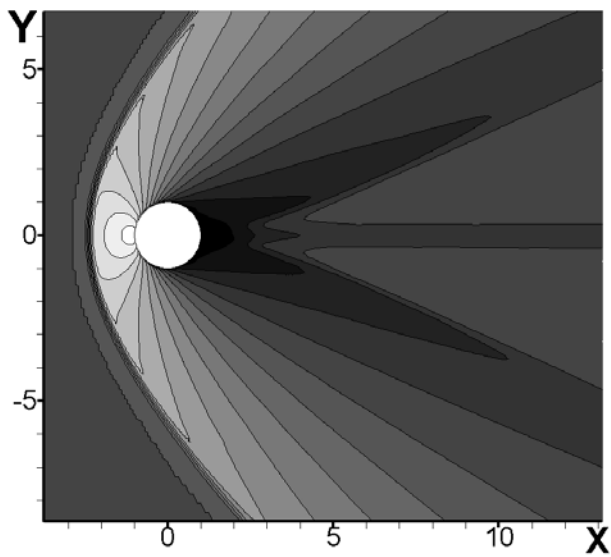


Рис. 4 а

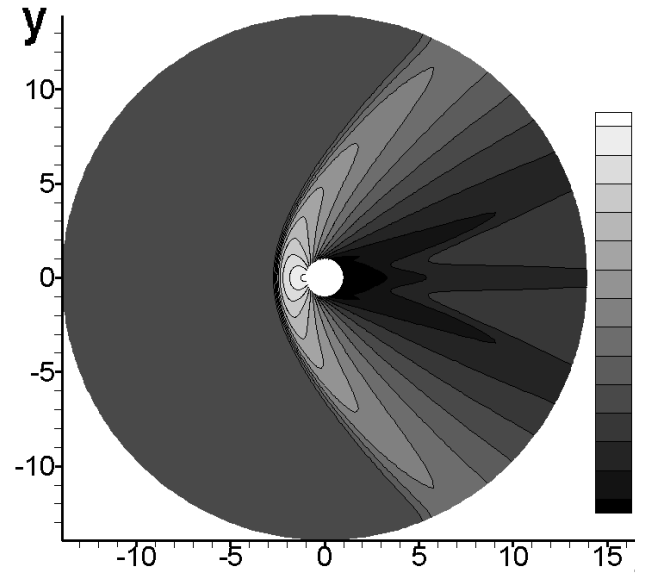


Рис. 4 б

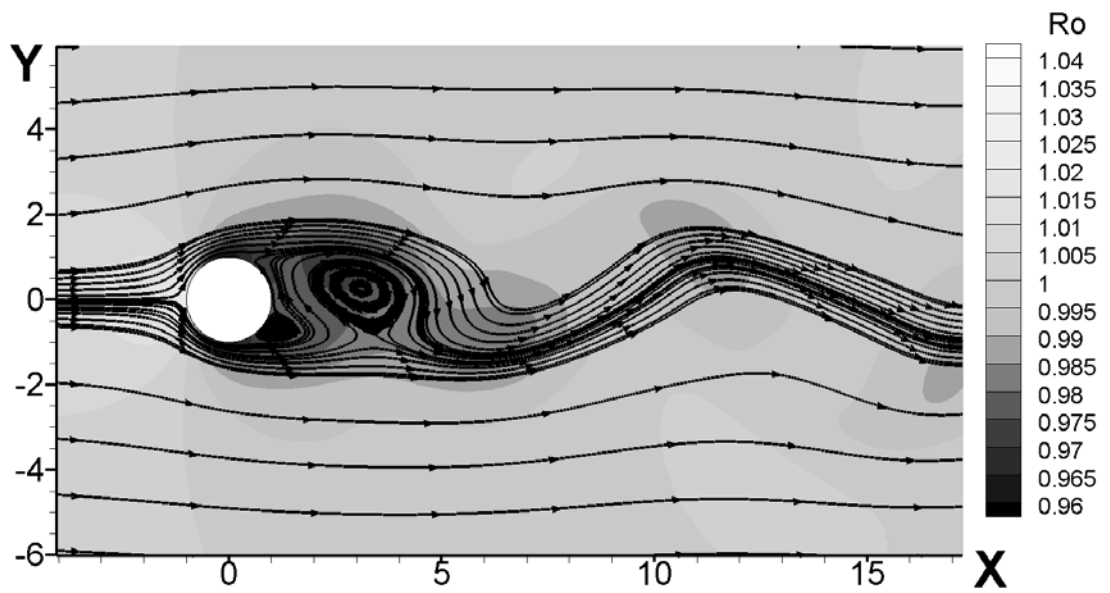


Рис. 5

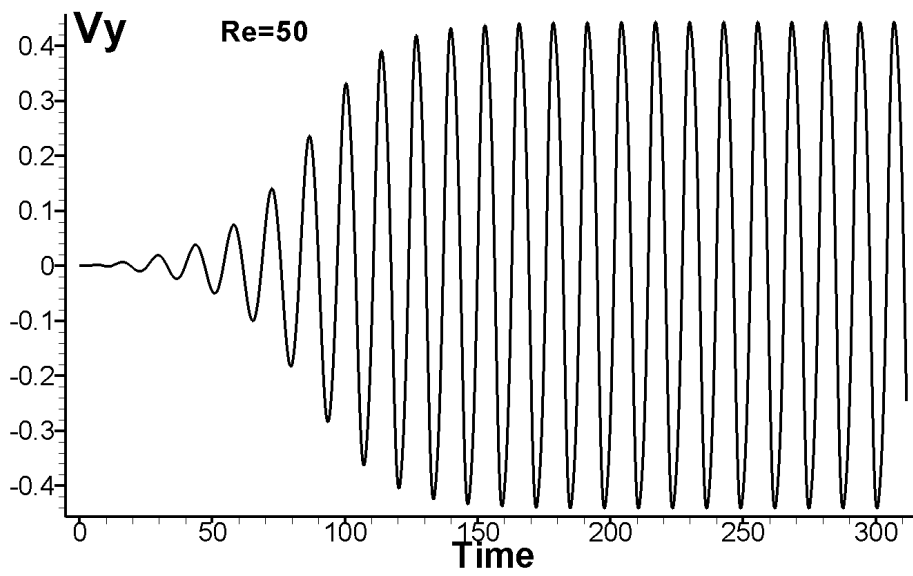


Рис. 6

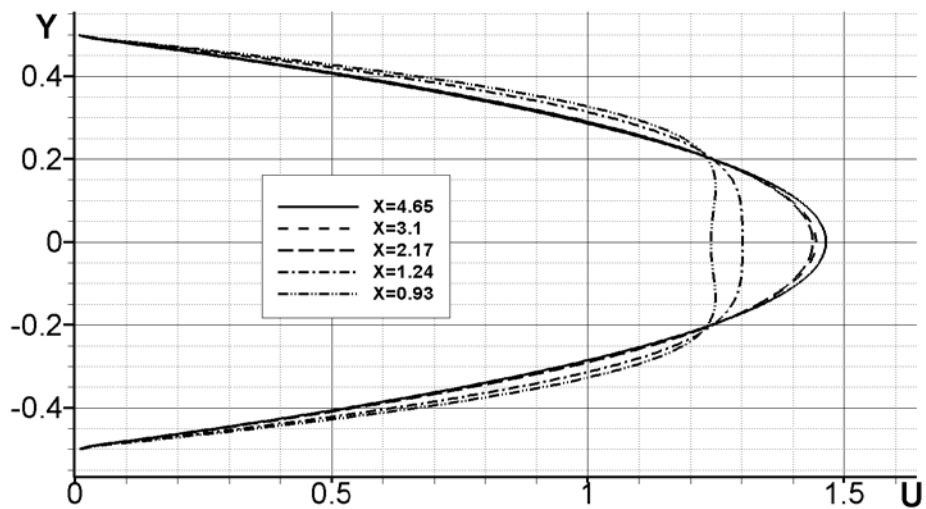


Рис. 7

Проведено численное моделирование отрывного течения несжимаемой вязкой жидкости в квадратной камере с подвижной границей при различных числах Рейнольдса. В приводимом расчёте число Рейнольдса $Re = 400$, число Прандтля $Pr = 0.7$. В начальный момент времени плотность $\rho = 1$, все компоненты скорости равнялись нулю, давление вычислялось по формуле $p = \frac{1}{\gamma M^2}$, $\gamma = \frac{7}{5}$, число Маха $M = 10^{-2}$ (при таком числе Маха среда становится практически несжимаемой). Расчет проводился до момента времени $T = 25.8$. Все приведённые величины безразмерные.

На рисунке 8 приведен расчёт из работы [107] на ортогональной сетке 257×257 , а на рисунке 9 по предложенному методу на 183296 расчётных элементах (треугольниках).

RE = 400, UNIFORM GRID (257x257)

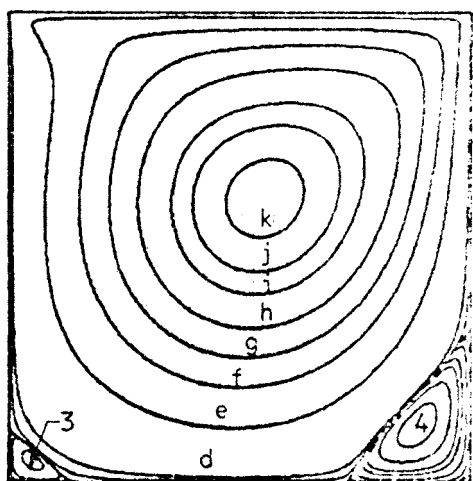


Рис. 8

Time = 25.8, Re=400, Points= 93 489, Elem=183296

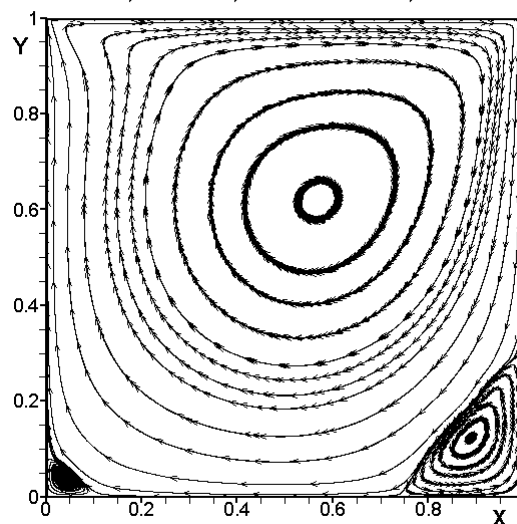


Рис. 9

Четвертый расчёт - обтекание сверхзвуковым потоком цилиндра единичного радиуса. В этом расчёте брались значения функций, как и в первом расчёте, за исключением числа Маха $M = 2$ и числа Рейнольдса $Re = 10^4$.

На рисунке 10 линии - это линии тока, а цвет - распределение давления в газе. На рисунке 11 белым цветом изображены области введения искусственной вязкости. Расчёт проводился на 325884 элементах

(треугольниках).

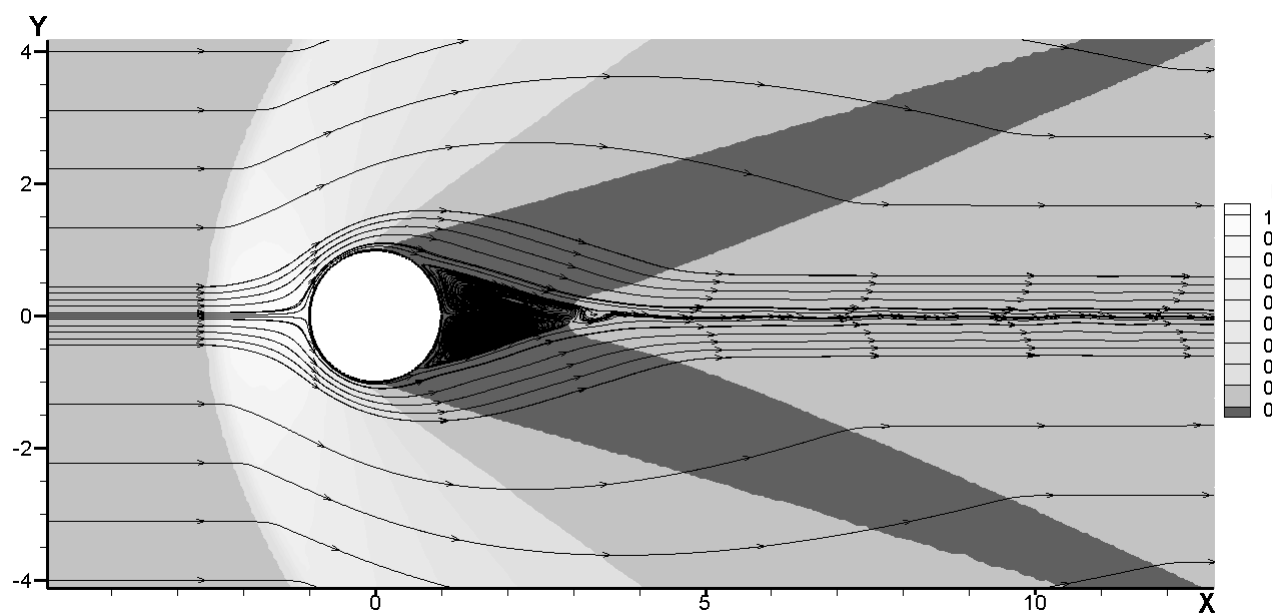


Рис. 10

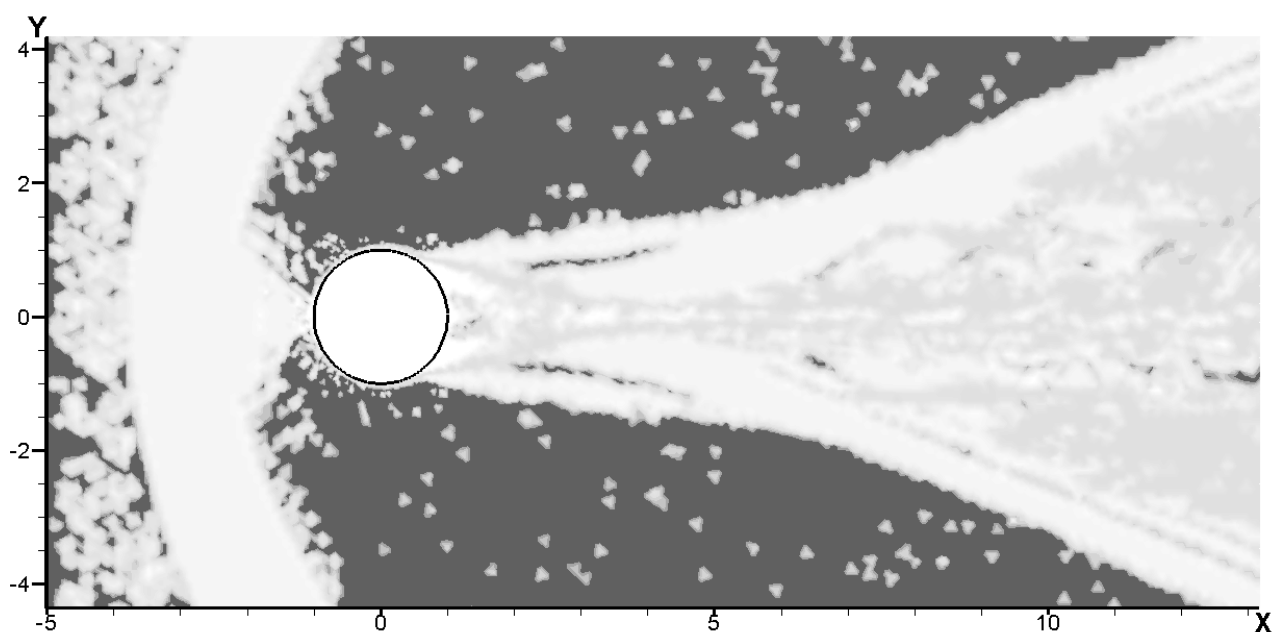


Рис. 11

Также рассматривался численный эксперимент обтекание вязким потоком газа кругового цилиндра при различных значениях числа Рейнольдса. Тем самым исследуется вопрос, как предложенная методика работает при различных режимах течения. Для всех приведенных расчётов была взята неструктурированная треугольная сетка с числом узлов 151840 и числом расчётных элементов (треугольников) 301530. Сетка была адаптирована к

поверхности цилиндра, радиус цилиндра равен единице. В начальный момент времени плотность $\rho = 1$, горизонтальная компонента скорости во всей области $v_x = 1$, а вертикальная равнялась нулю. Давление рассчитывалось по формуле $p = \frac{1}{\gamma M^2}$, $\gamma = \frac{7}{5}$, число Маха $M = 0.2$, число Прандтля $Pr = 0.7$. Все приведённые здесь величины являются безразмерными. Число Куранта бралось таким, чтобы обеспечить условие устойчивости. Расчёты проводились при следующих значениях числа Рейнольдса:

1) $Re = 20$ - первая стадия неустойчивости $1 < Re < 40$.

а) $Re = 50$ и б) $Re = 100$ - вторая стадия неустойчивости $Re > 40$, когда течение газа становится периодическим и образуется вихревая дорожка Кармана.

2) $Re > 10^3$ – диапазон, в котором развивается турбулентное течение;

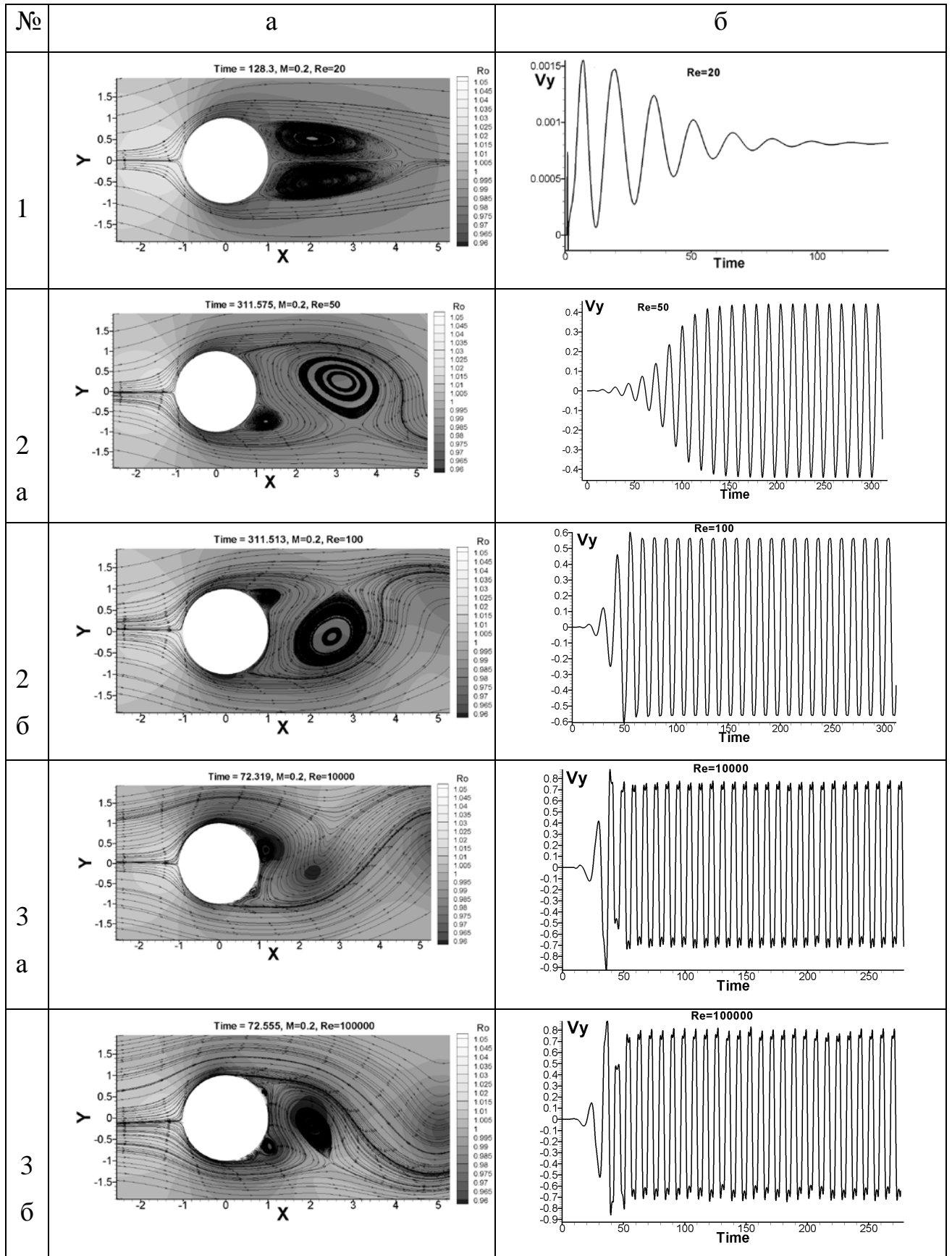
а) $Re = 10^4$ - течение газа становится нерегулярным;

б) $Re = 10^5$ - турбулентная область достигает поверхности цилиндра;

в) $Re = 10^6$ - стохастические значения плотности и скорости вокруг всего цилиндра.

Ламинарный режим $Re < 1$ пока исследовать не удалось, это будет сделано в дальнейшем.

Результаты расчётов приведены на рис. 12 для соответствующих значений числа Рейнольдса. На рисунках «а» серым цветом изображается плотность, а линиями со стрелками - линии течения потока газа. На рисунках «б» приводится амплитуда изменения вертикальной компоненты скорости (перпендикулярной начальному потоку газа) в зависимости от времени. Точка, в которой рассчитывалась вертикальная компонента скорости, находилась вблизи оси симметрии цилиндра с координатами (6.4, 0). Из численного эксперимента видно, что предложенная методика качественно передает различные стадии течения потока вязкого газа при различных числах Рейнольдса. Предполагается, что при расчетах в трехмерном случае представленный метод также даст хорошие результаты.



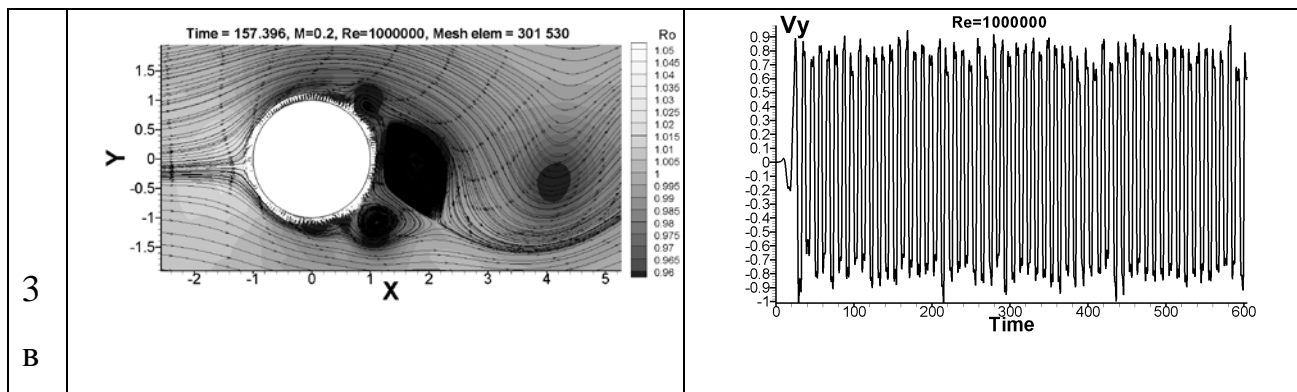


Рис. 12 В столбце «а» оттенками серого цвета изображена плотность газа, а линиями со стрелками- линии тока. В столбце «б» приводится амплитуда изменения вертикальной компоненты скорости в зависимости от времени.

Заключение по главе 4.

1. Разработан метод АИВ для численного решения уравнений Навье-Стокса на структурированных и неструктурированных сетках, получена оценка коэффициента искусственной вязкости.
2. Проведена верификация метода АИВ на известных тестовых задачах.
3. Созданы комплексы программ для решения задач вычислительной гидродинамики на основе уравнений Навье-Стокса.
4. Метод может быть легко адаптирован под многопроцессорные вычислительные комплексы, как с общей, так и с распределённой памятью.
5. Предложенный численный метод имеет компактный сеточный шаблон на неструктурированных сетках, в связи с чем может найти широкое применение для расчёта сложных инженерных задач.

Результаты главы 4 опубликованы в работах:

1. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости для решения системы уравнений Навье–Стокса, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **55**:8 (2015), с. 1356–1362; I. V. Popov, I. V. Fryazinov, Method of adaptive artificial viscosity for solving the Navier–Stokes equations, Comput. Math. Math. Phys., **55**:8 (2015), 1324–1329

2. Попов И.В. Численный метод с адаптивной искусственной вязкостью решения уравнений Навье–Стокса, Матем. моделирование, **28**:12 (2016), 122–132; I. V. Popov, Numerical methods with adaptive artificial viscosity for solving of the Navier–Stokes equations, Math. Models Comput. Simul., **9**:4 (2017), 489–497.

Глава 5. Численные эксперименты с использованием метода адаптивной искусственной вязкости

В главе рассматривается три практических задачи.

Первая задача связана с двухфазной фильтрацией. Представленные расчеты по данной методике лучше передают адаптивные свойства решения вблизи скважин с резкой депрессией решения по сравнению со схемами первого порядка точности.

Вторая рассмотренная задача - это численное моделирование неустойчивости Рихтмайера-Мешкова. Рассматриваемая задача решалась на неструктурированных треугольных сетках, где начальная контактная граница двух сред моделировалась ломаной линией. Неустойчивость Рихтмайера - Мешкова (НРМ) возникает при падении ударной волны на контактную границу между газами, в профиль которой внесено возмущение. Имеется ряд работ [108-110], в которых приведены результаты экспериментального исследования развития НРМ. В экспериментах использовалась ударная труба, заполненная двумя различными газами: легким (Аг или Не) и тяжелым (Хе). В начальный момент времени из легкого газа в тяжелый начинала двигаться ударная волна (число Маха $УВ$ в разных вариантах менялось в пределах $2.5 < M < 3.5$). Использование метода АИВ позволило не использовать уравнение концентрации газов, так как контактный разрыв размазывался за все время расчета максимум на три ячейки. Результаты расчетов, полученные по методу АИВ, хорошо согласуются с экспериментами и другими численными методиками.

Третья задача посвящена исследованию отражения ударной волны от оси симметрии в неравномерном потоке с образованием циркуляционной зоны. В этой задачи метод АИВ сравнивался с методом Годунова в его классической форме (первого порядка точности) и методом Бабенко–Русанова, а также с экспериментальными данными. Расчеты, полученные по методу АИВ, хорошо согласуются с экспериментальными данными не только качественно, но и

количественно (это касается таких параметров, как величина углового сектора, в котором наблюдается излучение, и угол наклона излученных волн к поверхности струи).

Комплекс программ, написанных на основе метода АИВ для всех задач, приведенных в этой главе, показал свою работоспособность, простоту использования, автономность и высокую точность получаемых численных результатов.

5.1. Задача двухфазной фильтрации

5.1.1. Постановка задачи

Сделаем следующие предположения.

Будем считать, что первой фазой является несжимаемая вода. Обозначим доли объема порового пространства воды через S_1 . Второй фазой является сжимаемый идеальный газ. Процесс рассматривается в изотермическом приближении [111, 112].

Обозначим долю объема порового пространства газа через S_2 , тогда для рассматриваемых фаз должно быть выполнено условие нормировки

$$S_1 + S_2 = 1.$$

Уравнение неразрывности для фаз имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_i S_i) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i) = q_i$$

где m - объемная пористость пласта будем считать постоянной, то есть скелет недеформируемый, ρ_i - плотность i -го флюида, i - компонента вода $i = 1$ или газ $i = 2$, u_i - скорость фильтрации i -го флюида, q_i - объемный расход i -го

флюида, для данной модели будем считать, что отбирается только газ $q_2 \neq 0$, а вода остается в пласте $q_1 = 0$.

Скорость фильтрации определяется из уравнения движения по закону Дарси для каждой из фаз, имеем

$$u_i = -K \frac{K_i}{\eta_i} \text{grad } p_i,$$

где K - коэффициент проницаемости, $K_i = K_i(S_1)$ - относительная фазовая проницаемость i -го флюида, η_i - динамическая вязкость i -го флюида, p_i - давление i -го флюида. В дальнейшем будем считать, что $p_1 = p_2 = p$, то есть капиллярный скачок давления отсутствует, как в модели Баклея-Левретта, но в отличие от этой модели $\rho_1 = \text{const}$, а $\rho_2 \neq \text{const}$. Также в модели отсутствует сила тяжести.

С учетом сделанных предположений получим систему уравнений

$$m \frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0$$

$$m \frac{\partial}{\partial t}(\rho_2 S_2) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_2 u_2) = q_2$$

$$u_i = -K \frac{K_i}{\eta_i} \text{grad } p_i, \quad i = 1, 2.$$

Систему уравнений замыкает уравнение состояния газа, которое имеет вид

$$\rho_2 = \frac{pM}{z(p, T)RT},$$

где M - молярная масса газа, $z(p, T)$ - коэффициент сверхсжимаемости (для идеального газа $z = 1$), R - газовая постоянная, T - абсолютная температура для данной модели $T = const$. Далее обозначим через $C_2 = \frac{M}{z(p, T)RT}$, тогда уравнение состояния для газа (в приближении изотермии) имеет вид $\rho_2 = C_2 p$.

Объемный источник q_2 будем моделировать пропорциональным разности давлений в пласте p и атмосферного $p_{атм}$, т.е. задаваемый модельный источник отбора газовой фазы имеет вид

$$q_2 = \alpha (p - p_{атм}),$$

где α - параметр.

В модели также учитывается, что при предельной насыщенности $S_1^* = S^*$ и $S_2^* = 1 - S^*$, ниже которых соответственно первая или вторая фазы не образуют связной системы и поэтому неподвижны:

$$K_1(S) = 0, \text{ при } S \leq S_1^* = S^*,$$

$$K_2(S) = 0, \text{ при } S \geq S_2^* = 1 - S^* \text{ и } S_1^* = S^*.$$

При достижении предельной насыщенности и выше отбор газа прекращается и $\alpha = 0$.

Предложенная модель рассматривается с заданными начальными и граничными условиями, которые будут определены ниже. Модель решается в области $\Omega = \{0 \leq t_0 \leq t \leq T; 0 \leq x \leq L\}$. Таким образом, неизвестными величинами в данной задаче, подлежащими определению, являются давление p и влагонасыщенность S .

5.1.2. Вывод уравнения пьезопроводности

Получим уравнение пьезопроводности для предложенной модели фильтрации. Для этого продифференцируем уравнения неразрывности по времени для обоих компонент, получим

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0$$

$$\frac{S_2}{\rho_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial S_2}{\partial t} + \frac{1}{m \rho_2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_2 u_2) = \frac{q_2}{m \rho_2}$$

Сложим уравнения и учтем условие $S_1 + S_2 = 1$, тогда будем иметь уравнение вида

$$m S_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_2 u_2) + \rho_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} = q_2$$

Подставляя уравнения движения в одномерном виде и учитывая уравнение состояния, получим уравнение пьезопроводности

$$m S_2 C_2 \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(- \rho_2 K \frac{K_2}{\eta_2} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \rho_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(- K \frac{K_1}{\eta_1} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + q_2$$

Уравнение пьезопроводности в таком виде есть уравнение параболического типа за счет сжимаемости второй фазы (газа). Если обе фазы были бы несжимаемыми, то получено было бы уравнение эллиптического типа подобное, как в модели Баклея-Левверетта.

5.1.3. Этапы решения задачи фильтрации

На первом этапе решается уравнение пьезопроводности, по неявной разностной схеме определения давления на $(n+1)$ - ом временном слое. Схема берется неявной, чтобы избежать жесткого ограничения на число Куранта, так как

уравнение пьезопроводности является уравнением параболического типа. Источник (сток) в правой части уравнения берется также в неявном виде

$$q_2 = \alpha \left(p^{n+1} - p_{атм} \right).$$

Неявное задание источника позволяет повысить устойчивость схемы за счет увеличения диагонального преобладания в матрице коэффициентов.

На втором этапе решается уравнение неразрывности для доли объема порового пространства воды, так как для этой фазы отсутствует источник в правой части, хотя можно брать уравнение неразрывности и для газа. Уравнение неразрывности является уравнением гиперболического типа. Целесообразно решать это уравнение по явной разностной схемой со вторым порядком аппроксимации по времени и пространству. Следует также отметить, что уравнение неразрывности для задач фильтрации является нелинейным уравнением переноса. Способ построения разностной схемы для нелинейного уравнения переноса подробно описан в препринте [113], поэтому в этой работе будет выписана только разностная схема.

После второго этапа, когда найдено давление и доля объема порового пространства воды, определяются все оставшиеся неизвестные, после чего переходим к расчету нового временного слоя.

Временной шаг для расчета слоев по времени определяется по уравнению неразрывности для фаз.

5.1.4. Построение разностных схем

По пространственной переменной x для простоты введём равномерную сетку

узлов с шагом $h = \frac{L}{N}$, где N - число узлов: $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = L$.

Введём сетку по времени $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots$. Шаг сетки τ определяется по

$$\text{формуле } \tau = \frac{\gamma \cdot h}{\max_{0 \leq k \leq N} u_k}, \quad \gamma - \text{число Куранта.}$$

Построим разностную схему для уравнения пьезопроводности

$$\begin{aligned} (mS_2C_2)_k^n \frac{p_k^{n+1} - p_k^n}{\tau} &= \frac{1}{h} \left[\left(\rho_2 K \frac{K_2}{\eta_2} \right)_{k+1/2}^n \frac{p_{k+1}^{n+1} - p_k^{n+1}}{h} - \left(\rho_2 K \frac{K_2}{\eta_2} \right)_{k-1/2}^n \frac{p_k^{n+1} - p_{k-1}^{n+1}}{h} \right] + \\ &+ \frac{(\rho_2)_k^n}{h} \left[\left(K \frac{K_1}{\eta_1} \right)_{k+1/2}^n \frac{p_{k+1}^{n+1} - p_k^{n+1}}{h} - \left(K \frac{K_1}{\eta_1} \right)_{k-1/2}^n \frac{p_k^{n+1} - p_{k-1}^{n+1}}{h} \right] + \alpha (p_k^{n+1} - p_{амм}) \end{aligned}$$

Перепишем полученное разностное уравнение в трехточечном виде

$$A_k p_{k-1}^{n+1} - C_k p_k^{n+1} + B_k p_{k+1}^{n+1} = -F_k^n$$

где

$$A_k = \frac{\tau}{h^2} \frac{1}{(mS_2C_2)_k^n} \left(\rho_2 K \frac{K_2}{\eta_2} \right)_{k-1/2}^n + \frac{\tau}{h^2} \left(\frac{\rho_2}{mS_2C_2} \right)_k^n \left(K \frac{K_1}{\eta_1} \right)_{k-1/2}^n$$

$$B_k = \frac{\tau}{h^2} \frac{1}{(mS_2C_2)_k^n} \left(\rho_2 K \frac{K_2}{\eta_2} \right)_{k+1/2}^n + \frac{\tau}{h^2} \left(\frac{\rho_2}{mS_2C_2} \right)_k^n \left(K \frac{K_1}{\eta_1} \right)_{k+1/2}^n$$

$$C_k = -(1 + A_k + B_k)$$

$$F_k^n = -p_k^n$$

В точки, где производится отбор газа

$$C_k = - \left(1 + A_k + B_k - \frac{\tau \cdot \alpha}{(mS_2C_2)_k^n} \right)$$

$$F_k^n = -P_k^n + \frac{\tau \cdot \alpha}{(mS_2C_2)_k^n} P_{атм}$$

Трёхдиагональная система линейных уравнений решается методом прогонки [34], после чего становится известно давление на $(n + 1)$ - ом временном слое.

Предложенная разностная схема для уравнения пьезопроводности хорошо известна [34]. Отметим, что разностная схема для этого уравнения устойчива при любом числе Куранта.

Выпишем разностную схему для уравнения неразрывности для первой фазы (воды), в потоковой форме:

$$\frac{(S_1)_k^{n+1} - (S_1)_k^n}{\tau} + \frac{K}{m\eta_1} \frac{1}{h} [W_{k+1/2}^n - W_{k+1/2}^n] = 0,$$

где $W_{k+1/2}^n = -\frac{P_{k+1}^{n+1} - P_k^{n+1}}{h} K_1 \left((S_1)_{k+1/2}^n \right) -$

$$-\frac{\tau}{2} \left[\left(\frac{\partial K_1 \left((S_1)_{k+1/2}^n \right)}{\partial S_1} \right)^2 \left(\frac{P_{k+1}^{n+1} - P_k^{n+1}}{h} \right)^2 \frac{(S_1)_{k+1}^n - (S_1)_k^n}{h} \right] - \mu_{k+1/2}^n \frac{(S_1)_{k+1}^n - (S_1)_k^n}{h}.$$

Здесь $\mu_{k+1/2}^n$ - адаптивная искусственная вязкость, которая используется для обеспечения монотонности и повышения устойчивости разностной схемы

Перечислим основные свойства для предложенной разностной схемы:

1. Данная схема имеет второй порядок по времени, так как в схеме учтены вторые временные производные, а также имеет второй порядок по пространственной переменной, так как производная по пространственной переменной аппроксимируется центрально-разностной производной.

2. Схема монотонна и устойчива при выполнении условий:

$$0 < \gamma < 0.5\sqrt{2}, \quad \max[0, 0.5 - \gamma] \leq \frac{\mu}{h \max_{0 \leq k \leq N} u_k} < 0.5 - \gamma^2.$$

Временной шаг для расчета одного слоя по времени определяется по уравнению неразрывности.

Следует отметить, что уравнение пьезопроводности можно решать и по явной схеме, но в этом случае временные шаги для расчета слоев по времени будут определяться из уравнения пьезопроводности.

5.1.5. Численный эксперимент

Для предложенной модели фильтрации были взяты следующие данные: объемная пористость пласта равна $m = 0.1$, температура в пласте $T = 320 K$, начальное давление в пласте $p = 7 \cdot 10^6 Pa$, давление в точке отбора

$p_{атм} = 1 \cdot 10^5 Pa$, плотность газа $\rho_2 \approx 42.118 \frac{кг}{м^3}$, коэффициент

проницаемости $K = 0.2 \text{ Дарси} = 2 \cdot 10^{-13} м^2$, относительная фазовая проницаемость соответственно воды и газа:

$$K_1 = K_1(S_1) = \begin{cases} 0, & S_1 \leq 0.2 \\ 2.78 \cdot (S_1 - 0.2)^2, & 0.2 < S_1 < 0.8, \\ 1.0008, & S_1 \geq 0.8 \end{cases}$$

$$K_2 = K_2(S_2) = \begin{cases} 0.798, & S_1 \geq 0.2 \\ 1.33 \cdot (0.8 - S_1)^2, & 0.2 < S_2 < 0.8 \\ 0, & S_1 \geq 0.8 \end{cases}$$

$\eta_1 = 0.4 \cdot 10^{-2}$ Пуаз $= 0.4 \cdot 10^{-3} \frac{H \cdot c}{m^2}$ - динамическая вязкость 1-го флюида

(вода), $\eta_2 = 0.0155 \cdot 10^{-2}$ Пуаз $= 1.55 \cdot 10^{-4} \frac{H \cdot c}{m^2}$ - динамическая вязкость 2-го

флюида (газ), начальные доли объема порового пространства для воды $S_1 = 0.6$, соответственно для газа $S_2 = 0.4$. Размер расчетной области $L = 4$ км, точка отбора располагается посередине расчетной области $\ell = 2$ км.

На рисунках 5.1 и 5.2 представлены результаты соответственно на моменты времени 100 и 296 часов с начала отбора газа.

На этих рисунках представлены распределения: давления (а), плотности газа (б), влаго- и газонасыщенности (в, г), а также скорости воды (д) и газа (е) соответственно.

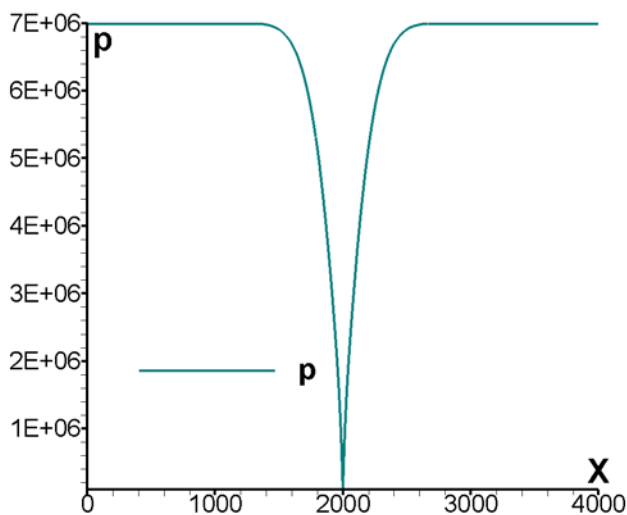


Рис. 5.1а

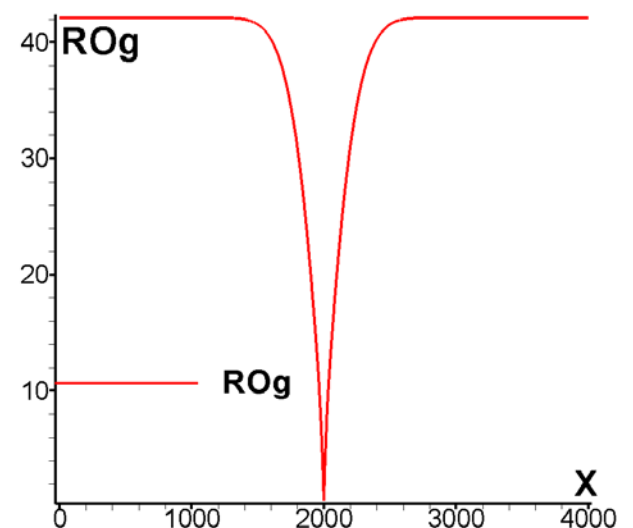


Рис. 5.1б

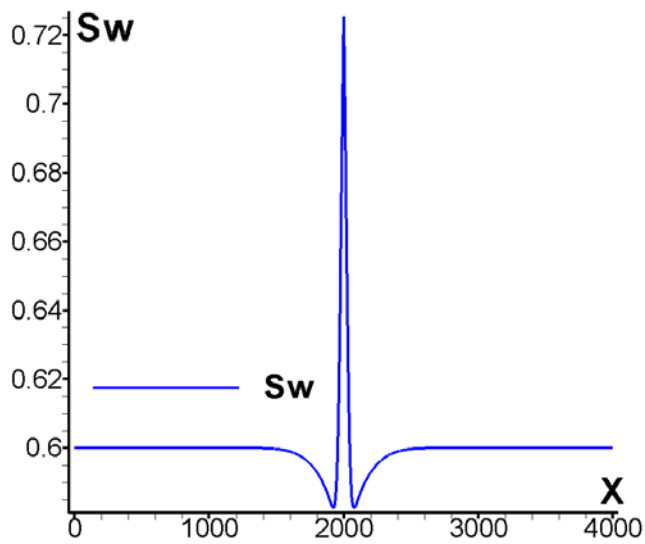


Рис. 5.1в

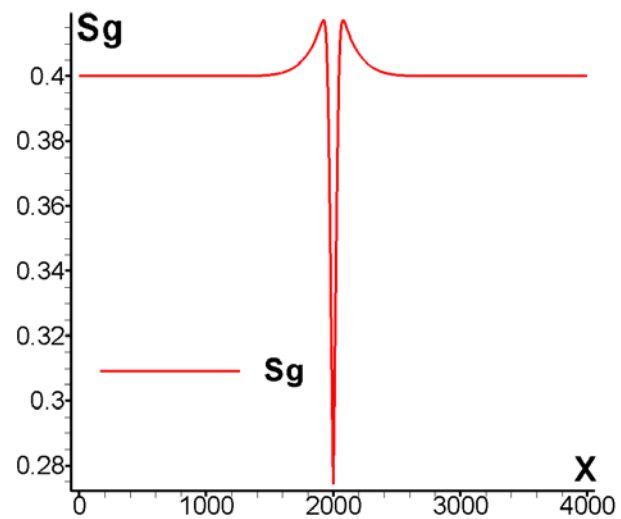


Рис. 5.1г

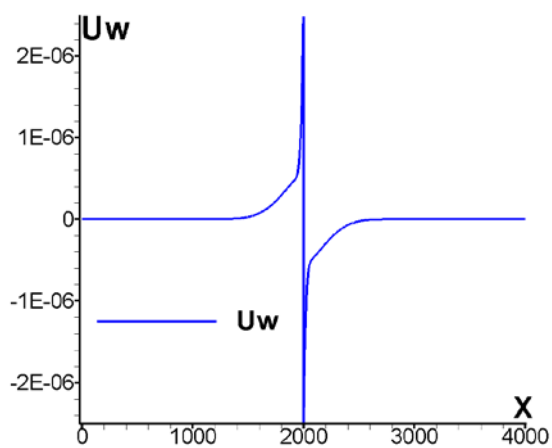


Рис. 5.1д

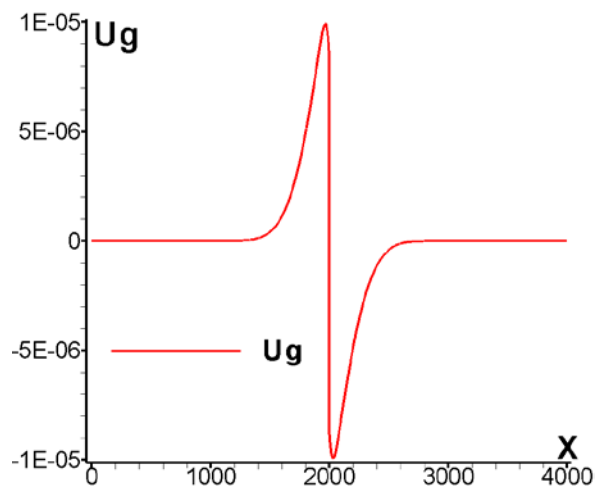


Рис. 5.1е

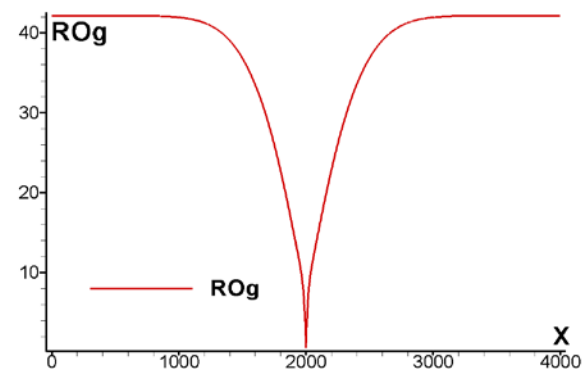
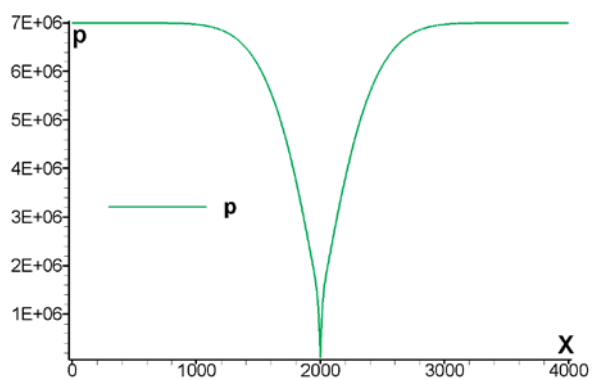


Рис. 5.2а

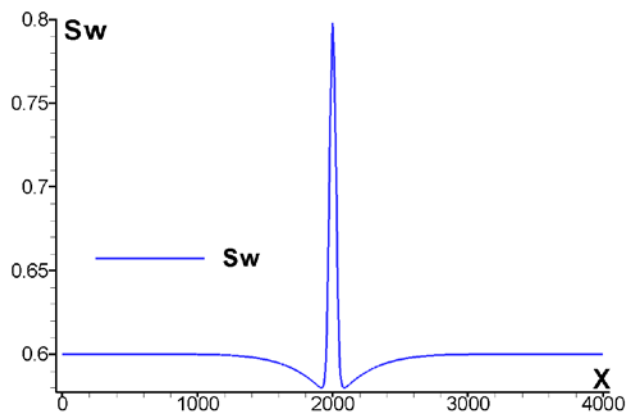


Рис. 5.2б

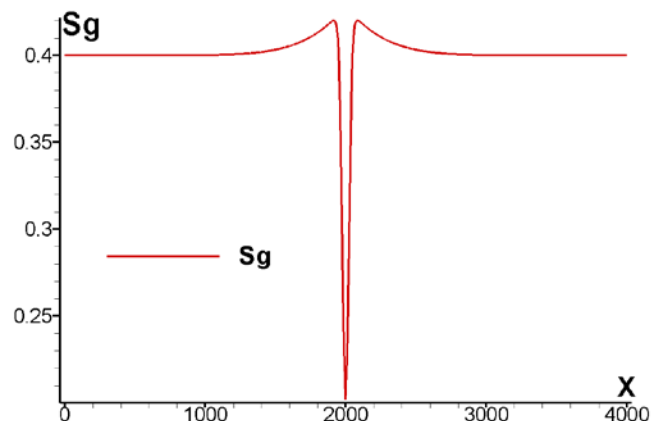


Рис. 5.2в

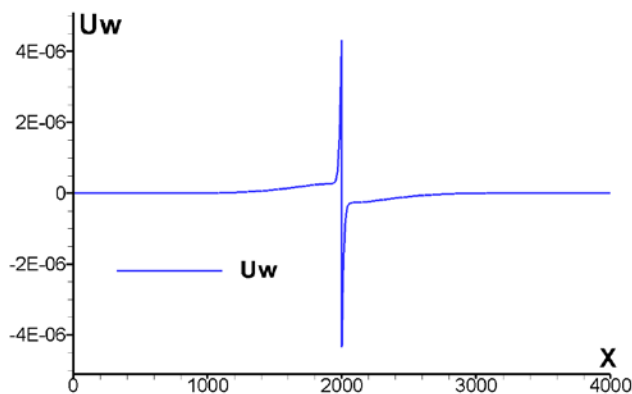


Рис. 5.2г

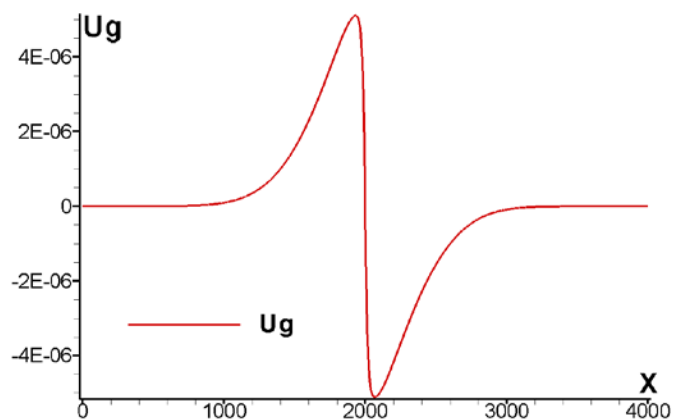


Рис. 5.2д

Рис. 5.2е

5.2. Численное моделирование неустойчивости Рихтмайера-Мешкова

Цель численного моделирования неустойчивости Рихтмайера-Мешкова — изучить «размывание» контактной границы после прохождения через неё ударной волны. Физическое исследование этого явления можно найти в [114], а численное моделирование другим методом на ортогональной сетке в [115]. Численное моделирование неустойчивости Рихтмайера-Мешкова методом АИВ на неструктурированной сетке с треугольными ячейками, как рассматривалось выше.

В численном эксперименте рассматривались два газа, разделённых контактной границей (контактным разрывом) в прямоугольной области $0 < x < l = 1.2 \text{ cm}$, $-20 \text{ cm} < y < 20 \text{ cm}$. Контактная граница задавалась в виде: $y = 0.5 \cos \frac{\pi}{l} x$, $0 < x < l = 1.2 \text{ cm}$ (см. рис. 5.3)

Над контактной границей находился лёгкий газ аргон с плотностью $\rho_{Ar} = 8.289 \cdot 10^{-4} \text{ г/см}^3$, под контактной границей, находится тяжёлый газ ксенон с плотностью $\rho_{Xe} = 2.737 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$. Задавалось начальное давление $p_0 = 0.5 \text{ атм}$. Газы были неподвижными. В качестве уравнения состояния использовалось уравнение идеального газа с постоянной адиабатой Пуассона $\gamma = 5/3$.

От верхнего торца области вниз по невозмущённому аргону распространялась ударная волна с числом Маха $M = 3.5$. На верхнем торце области в течение всего времени расчёта задавались условия, возникающие за ударной волной. На нижнем торце задавались равными нулю производные по y от всех функций. При $x = 0$ и $x = l$ задавались условия непротекания.

В натуральных экспериментах [114] ударная труба располагалась горизонтально относительно поверхности Земли, чтобы не учитывать силу притяжения Земли, а отсчёт времени ($t = 0$) начинался от момента, когда ударная волна подходила к контактному разрыву $y = 5 \text{ см}$ при $x = 0$.

Расчётная сетка была неструктурированная, состояла из 651696 треугольников и 328369 вершин треугольников. Контактная граница в начальный момент состояла из 152 узлов – контактная граница задавалась точно. На момент времени $t = 100 \text{ мкс}$ толщина ударной волны составляла три расчётных ячейки, а контактного разрыва – 6 ячеек (см. рис.5.4а). На рис. 5.4б представлен результат расчёта на момент времени $t = 200 \text{ мкс}$. При расчёте этой задачи на ортогональных сетках толщина разрывов имеет то же количество интервалов [115] (см. рис.5.5). На рис.5.5 приведены результаты расчётов по монотонной разностной схеме повышенного порядка аппроксимации, типа

TVD схем и на рис.5.6 представлен результат натурального эксперимента. Полученные результаты по методу АИВ хорошо согласуются с экспериментом. В эксперименте и расчёте на ножке гриба есть небольшие уширения.

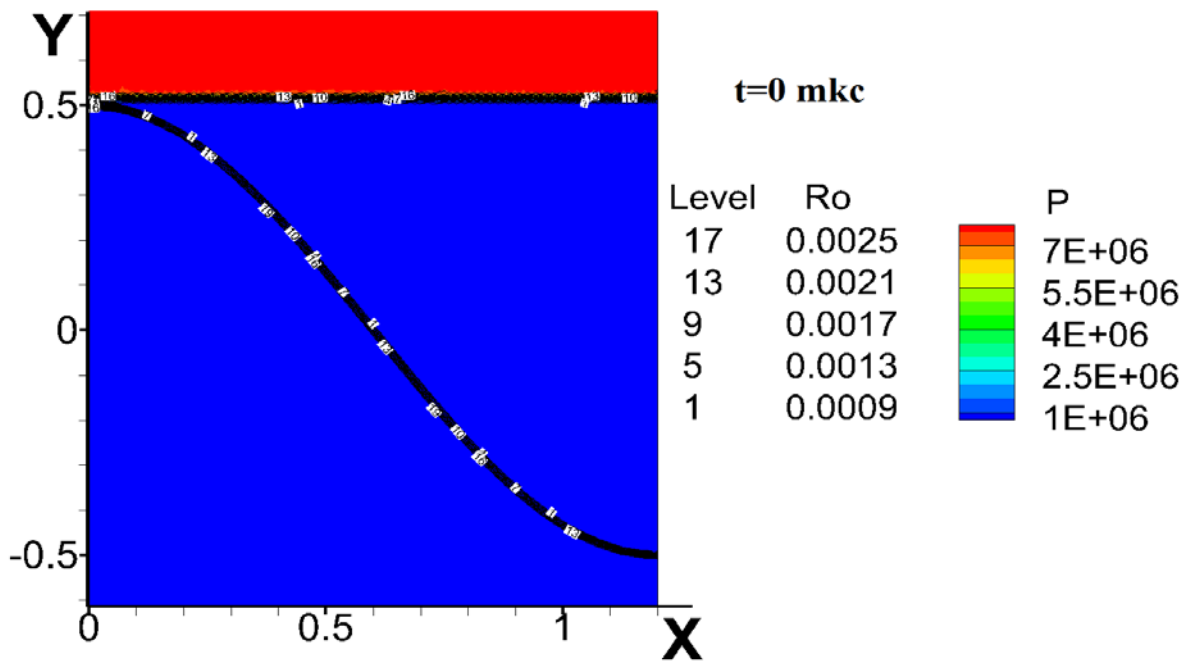


Рис. 4.1

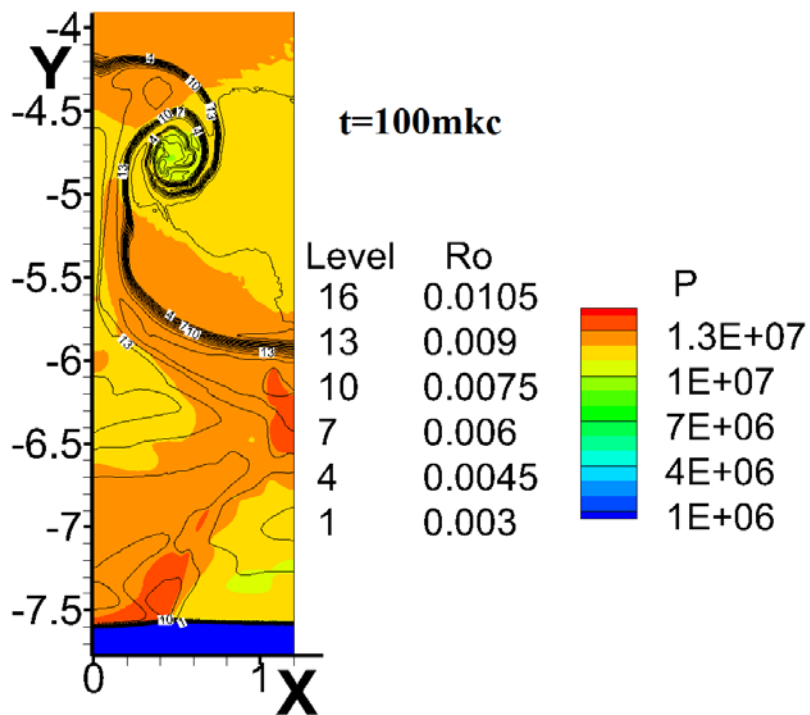


Рис. 5.4a

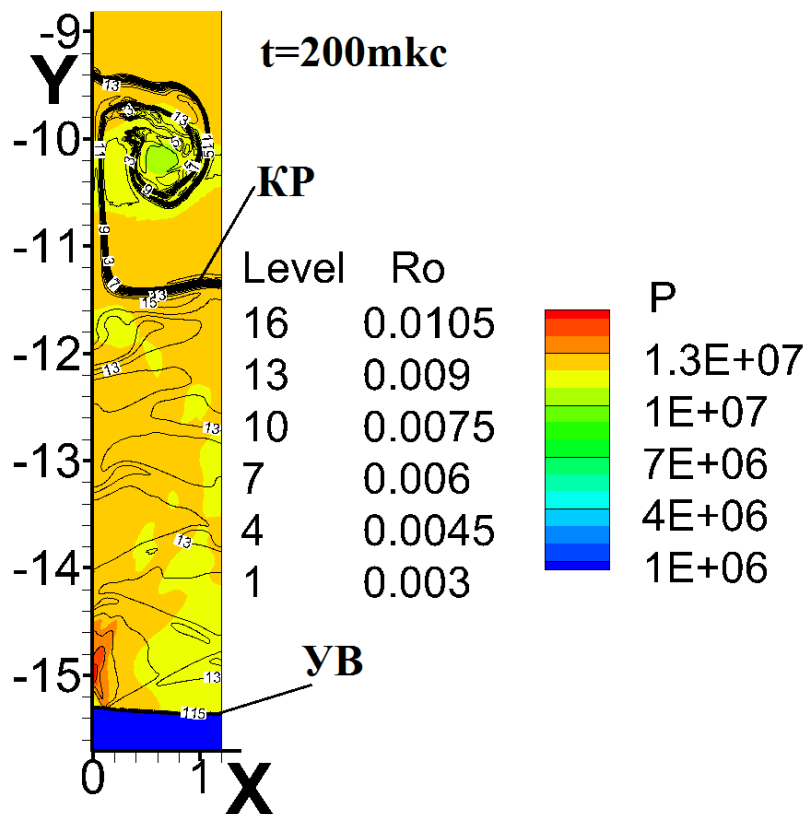


Рис. 5.46

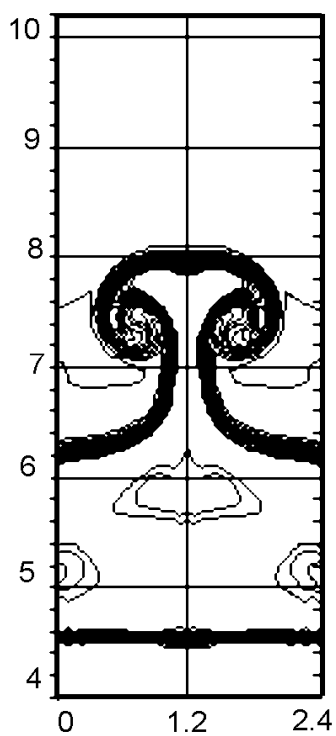


Рис. 5.5

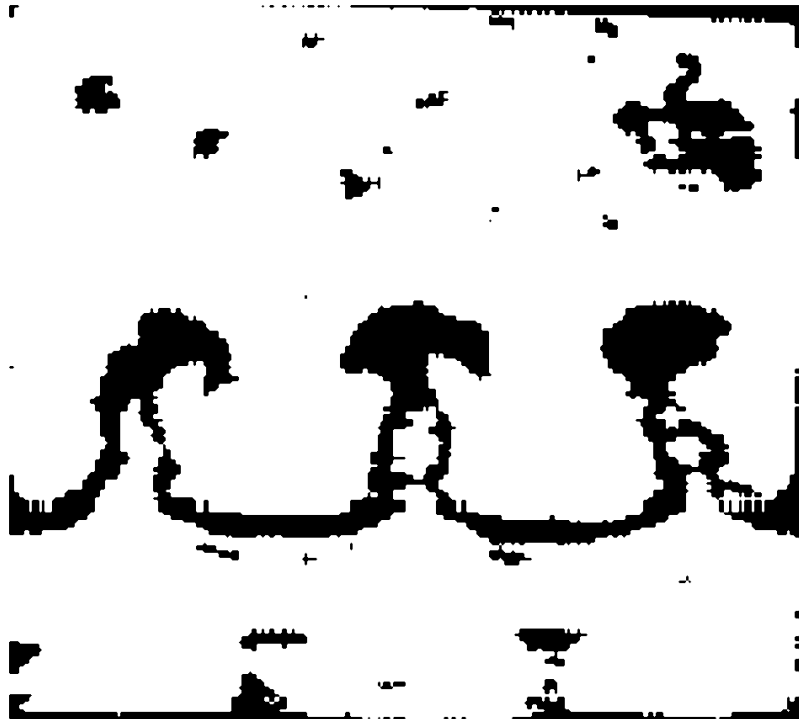


Рис.5.6

5.3. Отражение ударной волны от оси симметрии в неравномерном потоке с образованием циркуляционной зоны.

5.3.1. Теоретическая постановка исследуемого физического явления

В газовой динамике, как в теории, так и в практических приложениях, широко известны два типа неравномерных течений – следа и источника. В течении типа следа (в дальнейшем всюду говорится об осесимметричных сверхзвуковых течениях) линии тока близки к параллельным прямым, а само течение обладает дефицитом скорости (скоростного напора) в некоторой приосевой области. Течение типа источника близко к радиальному разлету газа, причем удельный расход ρW убывает с удалением от источника пропорционально квадрату расстояния.

Результаты физических и численных экспериментов для этих двух течений показывают, что отражение ударной волны, падающей на ось симметрии, может происходить совсем иным образом, чем в случае равномерного потока. Действительно, в последнем случае хорошо известны два типа отражения

ударной волны от оси симметрии: регулярное (рис.5.7а) и маховское (рис.5.7б).

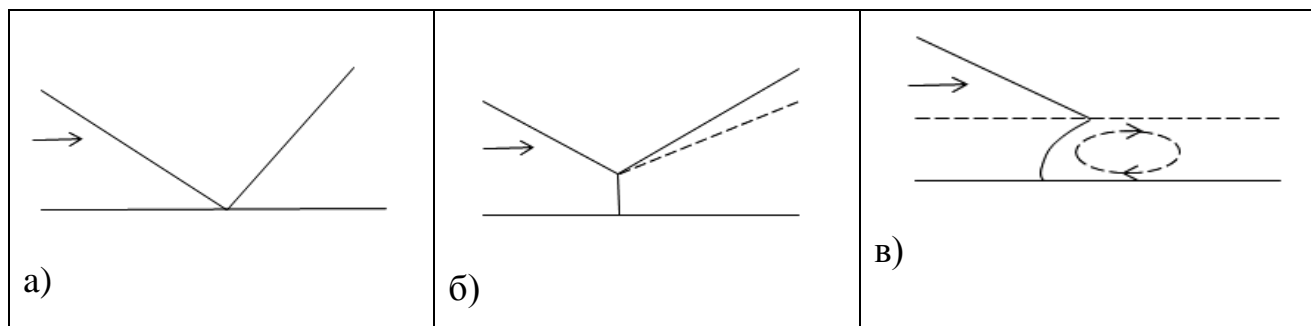


Рис. 5.7. Различные типы отражения ударной волны от оси симметрии: регулярное (а), маховское (б) и с образованием зоны возвратного течения (в).

Для строгости изложения следует заметить, что, как показывает теоретический анализ [116], подкрепленный данными физического [117] и численного [118] эксперимента, в осесимметричном случае можно говорить лишь о квазирегулярном отражении, когда диск Маха существует, но оказывается исчезающе малым. Анализ этой ситуации остается, однако, за рамками настоящей работы, поэтому в дальнейшем термин «регулярное отражение» применяется для осесимметричного случая.

Результаты ряда физических экспериментов показывают, что в случае неравномерного потока возможен более сложный тип отражения ударных волн от оси симметрии, сопровождаемый, в частности, возникновением циркуляционных зон (называемых также зонами возвратного или реверсного течения, рис.5.7в). Для течений типа следа такая ситуация была впервые обнаружена, по-видимому, в работе [119], где было рассмотрено взаимодействие ударной волны со сверхзвуковой перерасширенной струей, идущей от кромки сопла к оси симметрии, с тепловым следом от горения, распространяющимся вдоль оси данной струи. Взаимодействие падающей волны с приосевой областью низконапорного течения приводило к образованию зоны циркуляционного течения ниже по потоку от места прихода ударной волны на ось.

Аналогичная структура течения была реализована в экспериментах [119]. В этой работе недорасширенная струя вытекала из кольцевого звукового сопла в атмосферу, а по оси симметрии текла тонкая звуковая низконапорная струйка. Соударение висячей ударной волны в основной струе с приосевой низконапорной струйкой опять-таки приводило к образованию области возвратного течения за областью взаимодействия.

Эксперименты [119] были повторены в [120], где, помимо вдува низконапорной струйки в приосевую область, был также рассмотрен случай, когда по оси недорасширенной струи помещался тонкий стержень, несколько выступавший за пределы сопла. В этом случае роль приосевого низконапорного потока играл газодинамический след за стержнем, и взаимодействие падающей на ось висячей ударной волны со следом вновь приводило к образованию циркуляционной зоны. Результаты экспериментального исследования были подкреплены в [120] данными численного моделирования на основе уравнений Эйлера и Рейнольдса, в которых была обнаружена структура течения, сходная с экспериментально наблюдаемой.

Модельная задача о взаимодействии конической ударной волны, падающей на ось симметрии, с приосевым низконапорным потоком типа следа была решена в [120] на основе уравнений Рейнольдса. Было показано, что зона возвратного течения за областью падения ударной волны на ось (типа изображенной на рис.5.7в) образуется при достаточном дефиците скорости приосевого течения.

Таким образом, вышеупомянутые экспериментальные и расчетные результаты свидетельствуют о возможности образования циркуляционных зон в области отражения ударной волны от оси симметрии при наличии дефицита скоростного напора в приосевом течении. Этот эффект проявляется с особенной интенсивностью, если приосевое течение оказывается закрученным. Об этом свидетельствуют, например, результаты экспериментальных и расчетных работ [122–124].

В случае течения типа источника аналогичные явления были обнаружены лишь при численном моделировании, но до настоящего времени не имеют соответствующего экспериментального подтверждения (или, в лучшем случае, лишь косвенное подтверждение). По-видимому, впервые такой результат был получен в численном исследовании [118], где истечение струи из сопла с числом Маха на выходе, равным 3, рассматривалось при различных перепадах давления в камере и атмосфере на основе уравнений Навье–Стокса (для ламинарного течения). При некоторых значениях перепада давления отражение висячей ударной волны в струе от оси симметрии происходило с образованием циркуляционной зоны.

Аналогичный результат был получен в диссертации [125] при численном моделировании истечения сверхзвуковой перерасширенной струи из параболического сопла на основе уравнений для турбулентного течения (с замыканием по k - ε модели). И в этом случае в зависимости от перепада давления в сопле отражение внутренней ударной волны от оси симметрии происходило с образованием либо маховской структуры, либо специфической структуры, за которой возникала зона возвратного течения. Интересно, что существование этой ударно-волновой структуры (названной в [125] “Карпенmuster”, т.е. “имеющей вид колпака”) подтверждается данными фотосъемки, хотя измерения полей скоростей в эксперименте не проводились.

Обширное численное моделирование на основе уравнений Эйлера [126, 127] также позволило обнаружить существование зон обратного потока в сверхзвуковых струях, как недорасширенных, так и перерасширенных при падении ударной волны, идущей с кромки сопла, на ось симметрии. Установлен диапазон параметров (число Маха струи и нерасчетность), в котором имеет место рассматриваемый феномен. Авторы [126, 127] сообщают, что ими проведены комплексные исследования на вычислительных областях различных размеров, с различными сетками и с различными комбинациями начальных и граничных условий, что, по их мнению, исключает возможное влияние

вычислительных факторов. Впоследствии аналогичные зоны противотока были обнаружены в расчетах струйных течений, выполненных на основе уравнений Эйлера и Рейнольдса [128].

В [129] была решена модельная задача об обтекании гиперзвукового сферически-симметричного источника сверхзвуковым равномерным потоком газа. Возникающее при этом течение характеризуется наличием двух ударных волн, в которых тормозятся сталкивающиеся сверхзвуковые потоки, и контактной поверхности, разделяющей области, занимаемые двумя газами. Течение в лобовой области взаимодействия рассчитывалось методом Бабенко–Русанова [130] с выделением поверхностей разрыва в явном виде, тогда как течение в хвостовой области рассчитывалось методом Годунова [37] со стыковкой между двумя численными решениями. Течение в хвостовой области близко по своей структуре к течениям в нерасчетных струях и в нем также было обнаружено образование зон возвратного течения при падении внутренней ударной волны на ось симметрии.

Приведенный краткий обзор свидетельствует, что существует целый класс (или несколько классов) течений, характеризуемых феноменом образования реверсных зон при отражении ударной волны от оси симметрии в сверхзвуковом неравномерном потоке газа.

Целью настоящей работы является исследование указанного феномена на основе различных численных методов для одного течения типа следа, для которого существуют экспериментальные данные, и для течения типа источника на примере одной модельной задачи.

5.3.2. Математическая постановка задачи и методы расчета

Одним из численных методов, использованных в расчетах настоящей работы, был метод С.К. Годунова в его классической форме (первого порядка точности). Этот метод повсеместно известен, и здесь достаточно будет ограничиться ссылкой на монографию [37].

Другим численным методом, использованным в расчетах, был метод

адаптивной искусственной вязкости (АИВ) [131, 132].

Решаются уравнения Эйлера

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_\alpha) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} v_\alpha) + \operatorname{grad}_\alpha p = 0, & \alpha = r, z, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}(E + p)) = 0, \end{cases}$$

где ρ – плотность, $\mathbf{v} = (v_r, v_z)$ – вектор скорости, $E = \rho(\mathbf{v}^2/2) + \rho\varepsilon$ – полная энергия, ε – внутренняя энергии, связанная с давлением уравнением состояния $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$, γ – показатель адиабаты Пуассона.

В цилиндрических координатах дивергенция и градиент имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r q_r) + \frac{\partial q_z}{\partial z}, \quad \mathbf{q} = (q_r, q_z), \quad \operatorname{grad}_\alpha p = \left(\frac{\partial p}{\partial r}, \frac{\partial p}{\partial z} \right).$$

В методе АИВ расчетная область покрывается треугольной сеткой, согласованной с границей области (см. ниже рис.5.9). Функции ρ, v_r, v_z, E и p относим к центрам окружностей, описанных вокруг треугольников, либо к центрам масс треугольников, если один из углов больше или равен $\pi/2$. Далее записываются балансы массы, импульса и полной энергии для каждого треугольника и потоки через границы треугольника. В этих потоках учитываются поправки Лакса-Вендроффа, обеспечивающие второй порядок аппроксимации исходных уравнений по времени в области гладкости решения. Строятся явные разностные схемы, по которым определяются решения на новом временном слое. Это решение назовем предикторным, его нахождение является первым шагом в методе АИВ. Полученное решение может быть немонотонным. Для его монотонизации необходимо в уравнения ввести диссипативные слагаемые с искусственной вязкостью. Искусственная вязкость определяется таким образом, чтобы разностная схема с диссипативными слагаемыми удовлетворяла бы условиям принципа максимума. Введение

искусственной вязкости во всех узлах разностной схемы приводит к размыванию контактных разрывов (КР). Поэтому искусственная вязкость вводится не всюду. Вязкость вводится на ударной волне (УВ) и на осцилляциях (ОС), обусловленных сеточной природой, и равна нулю в областях КР и волн разрежения (ВР). Все эти области определяются по выполнению некоторых неравенств предикторного решения [131, 132] (второй этап метода АИВ).

На третьем этапе находится корректорное (монотонное) решение на новом временном слое с учетом диссипации.

Заметим, что точность некоторых численных решений, полученных двумя вышеназванными методами, в областях их гладкости контролировались сравнением с решениями, рассчитанными методом Бабенко–Русанова [130], имеющим второй порядок точности и предусматривающим выделение поверхностей разрывов в явном виде.

5.3.3. Отражение ударной волны от приосевой зоны с дефицитом скоростного напора

Рассматривается течение в недорасширенной струе воздуха ($\gamma=1.4$), истекающей из звукового сопла ($M=1$) в атмосферу при нерасчетности $n = 2.9$, при наличии центральной низконапорной струйки с тем же числом Маха $M=1$ и с отношением полных давлений в центральной струйке и основной струе, равным 0.27. Трубка радиуса $0.13r_a$, из которой вытекает центральная струйка, выдвинута на расстояние $1.2r_a$ относительно среза основного сопла радиуса r_a (в дальнейшем все линейные размеры нормированы на величину r_a). В эксперименте [119], проведенном в указанных условиях, обнаружено существование развитой приосевой циркуляционной зоны.

Численное решение задачи было получено методом АИВ в расчетной области $r \leq 10$, $-5 \leq z \leq 10$, представленной на рис.5.8а (плоскость $z = 0$ совпадает с плоскостью среза большого сопла).

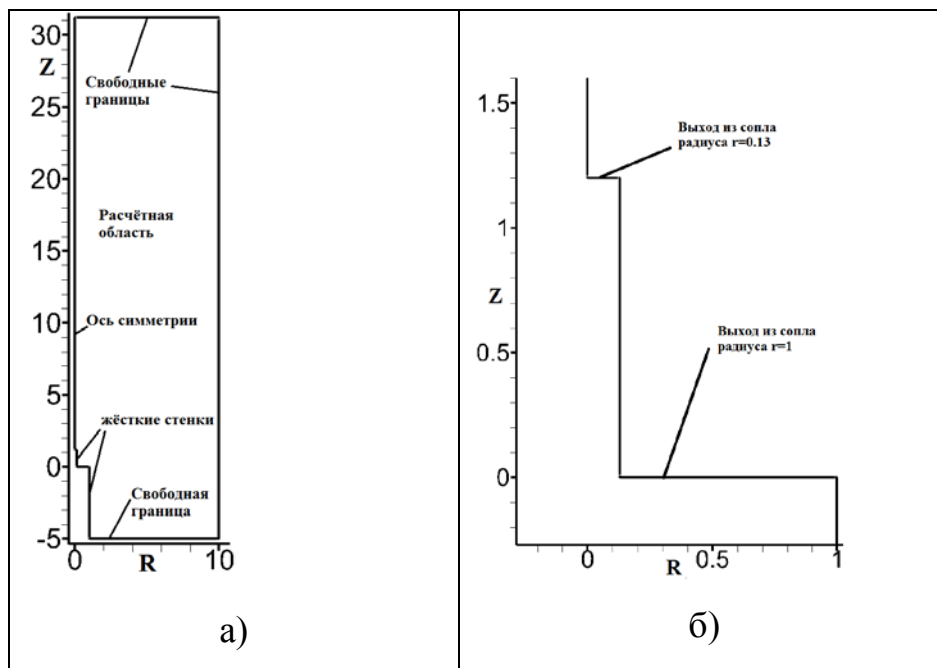


Рис. 5.8. Расчетная область в задаче об истечении струи из двух соосных сопел.

Размеры этой конечной области были подобраны так, чтобы возмущения от ее границ за время выхода на стационарное решение $t \approx 250$ не влияли на течение в области вблизи выходных сечений двух сопел. На внешней границе области ставились условия:

$$\frac{\partial q}{\partial n} = 0, \quad q = \rho, v_r, v_z, E,$$

где n – внешняя нормаль к границе. На границах труб $r=0.13$ и $r=1$, а также на оси симметрии $r=0$ ставились условия непротекания.

Часть расчетной области, примыкающая к плоскостям выходных сечений двух сопел и оси симметрии, в увеличенном масштабе представлена на рис. 5.8б.

Относя скорости к скорости потока V_a в выходном сечении большого сопла, плотности к плотности в том же сечении ρ_a , а давления к величине $\rho_a V_a^2$, полагая плотности в выходных сечениях двух сопел равными, считая потоки газа в этих сечениях равномерными и горизонтально направленными и

учитывая приведенные выше значения некоторых параметров течения, получим граничные условия в выходных сечениях:

$$(z = 0, 0.13 \leq r \leq 1): v_z = 1, v_r = 0, p = 1/\gamma, \rho = 1;$$

$$(z = 1.2, 0 \leq r \leq 0.13): v_z = \sqrt{0.27}, v_r = 0, p = 0.27/\gamma, \rho = 1.$$

Постановку задачи замыкают начальные условия. В начальный момент времени внутри области компоненты скорости равны нулю, давление $p = 1/(2.9\gamma)$, плотность $\rho = 1$, полная энергия рассчитывается по вышеуказанным значениям.

На рис.5.9 представлена расчетная сетка, на которой решалась задача. Она насчитывает 410996 ячеек, размеры которых увеличиваются с удалением от оси симметрии. Так, в окрестности оси сторона треугольной ячейки составляет 0.01, из-за чего отдельные ячейки неразличимы на рисунке, а максимальный размер ячейки (у границы расчетной области) достигает 0.1.

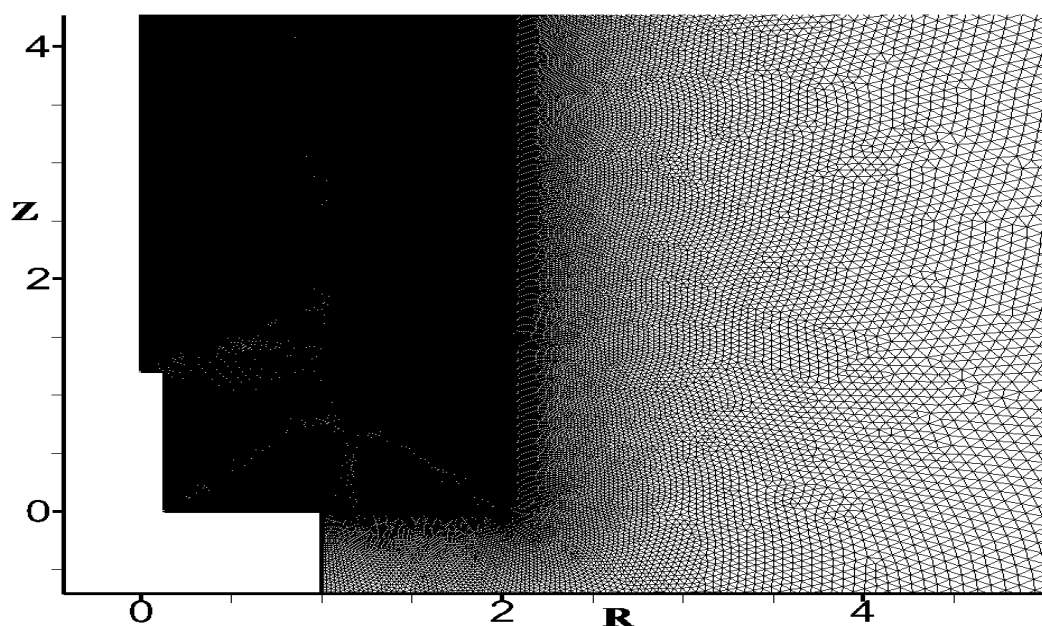


Рис. 5.9. Расчетная сетка в задаче об истечении струи из двух соосных сопел.

Результаты расчета представлены на рис.5.10 (линии тока в струе (а) и поля плотности в струе и во внешней среде (б)). Они наглядно свидетельствуют

об образовании в струе зоны возвратного течения. Протяженность этой зоны по координате z от 4 до 6.5, а ее вершина находится в точке с координатами $z \approx 4.5, r \approx 1$; центр вихря расположен примерно под вершиной данной области с $r \approx 0.75$. Зона возвратного течения обтекается потоком струи как твердое тело; хорошо видна головная ударная волна перед этим телом. Она претерпевает излом на границе между двумя струями (контактной поверхности). Заметим, что положение вершины этой волны совпадает с тем, которое наблюдалось в эксперименте [119]. На фотографии ударная волна перед зоной возвратного течения не имеет резкого излома, как на рис.5.10а; по-видимому, это обусловлено тем фактом, что в реальном течении нет четко выраженной контактной поверхности между двумя потоками, а есть слой смешения, который на рассматриваемом расстоянии вполне мог развиться даже до такой степени, чтобы поглотить всю узкую внутреннюю струю. Ударная волна перед жидким препятствием взаимодействует с ударной волной, идущей с кромки сопла во внешней недорасширенной струе, с образованием мостообразного скачка уплотнения (своего рода аналога маховского диска).

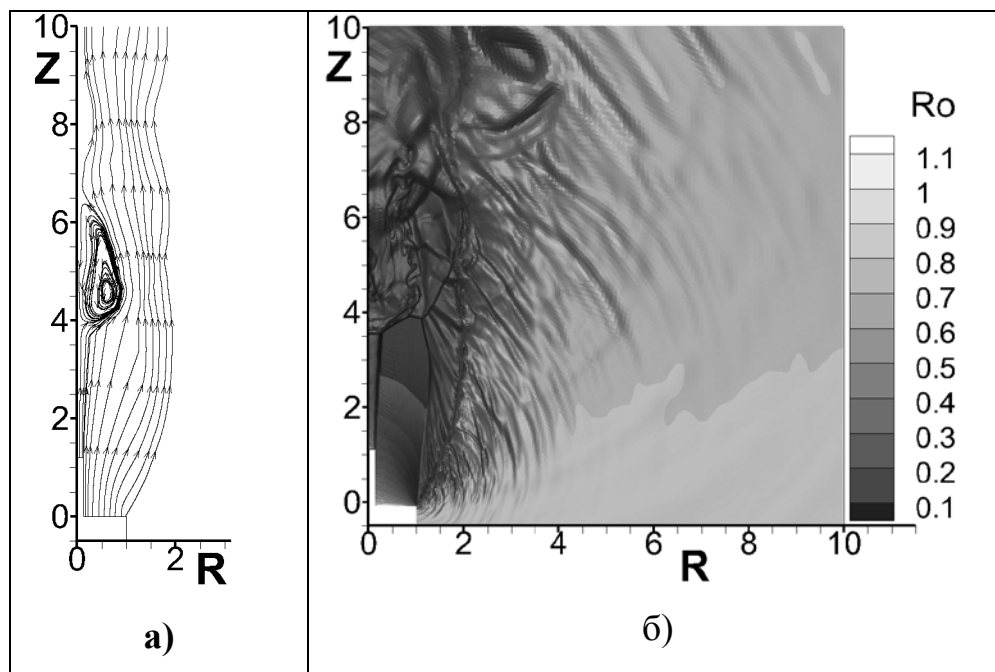


Рис.5.10. Течение в струе, вытекающей из двух соосных сопел (линии тока (а) и поле плотности (б)).

Таким образом, структура течения, полученная в численном эксперименте, в целом совпадает – качественно и количественно – со структурой, полученной в физическом эксперименте и включающей область приосевого циркуляционного течения. Важно отметить, что численный эксперимент проведен в рамках модели невязкого течения (уравнения Эйлера). Это дает основание заключить, что полученный эффект определяется гидродинамическими, а не диссипативными факторами.

Заметим попутно, что рассчитанная картина поля плотности в пространстве, окружающем струю (рис. 5.10б), весьма похожа на картину направленного акустического излучения, характерного для сверхзвуковых струй, истекающих в атмосферу (см., например, рис.5.11 [133]). Сходство этих картин не только качественное, но и количественное (это касается таких параметров, как величина углового сектора, в котором наблюдается излучение, и угол наклона излученных волн к поверхности струи). Эти параметры можно визуально сравнить с экспериментальной картиной, представленной на рис. 5.11.

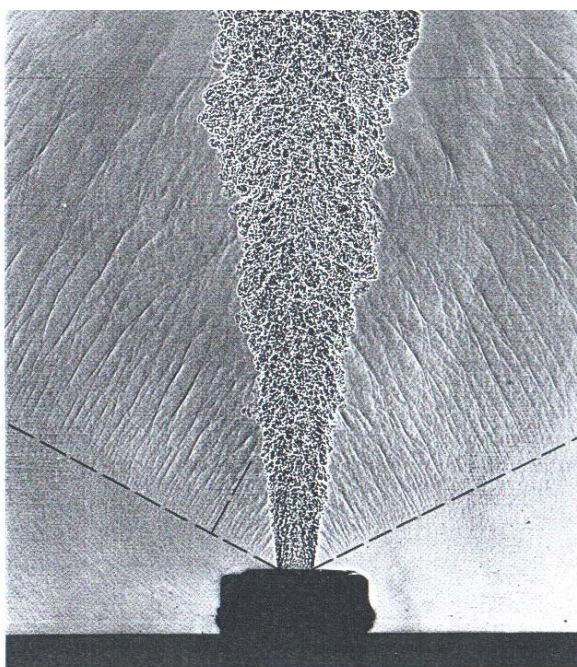


Рис.5.11 Течение в струе, вытекающей из двух соосных сопел в эксперименте.

5.3.4. Отражение ударной волны от оси в течении типа источника.

Постановка модельной задачи

Рассматривается течение в цилиндрическом канале радиуса r_0 , созданное сферически-симметричным сверхзвуковым источником, находящимся в точке O на оси канала (рис.5.12).

Данное течение описывается уравнением

$$\rho WR^2 = \rho_* a_* R_*^2, \quad (1)$$

где R – радиальное расстояние от точки O ; W и ρ – абсолютная величина скорости и плотность на расстоянии R ; R_* – радиус предельной сферической поверхности радиального течения, на которой скорость равна скорости звука a_* и плотность равна соответствующей плотности ρ_* . Решая это уравнение совместно с уравнением Бернулли и условием постоянства энтропии, можно найти зависимость параметров течения от радиальной координаты R (см., например, [134]). Ограничимся случаем больших расстояний от источника, считая, что $R \gg R_*$; тогда течение становится гиперзвуковым и его параметры описываются простыми формулами

$$W = W_{\text{lim}} = a_* \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}, \quad \rho = \rho_* R_*^2 \frac{1}{R^2} \frac{a_*}{W_{\text{lim}}}, \quad p = 0, \quad M = \infty, \quad (2)$$

где p – давление и M – число Маха. Предполагая, что на расстояниях порядка радиуса канала r_0 течение гиперзвуковое (т.е. $r_0 \gg R_*$), примем за масштаб скорости величину критической скорости звука a_* , за масштаб плотности – величину $\rho_*(R_*/r_0)^2$ и за линейный масштаб радиус канала r_0 . Тогда всюду внутри канала, за исключением малой окрестности точки O , невозмущенное течение от сферического источника описывается следующим образом:

$$W = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}, \quad \rho = \frac{1}{WR^2}, \quad p = 0. \quad (3)$$

При соударении течения, заданного формулами (3), со стенками канала образуется ударно-волновая структура, схематически изображенная на рис.5.12 (показана лишь в четверти области течения). Отошедшая ударная волна EF перед стенкой имеет минимальный отход от поверхности на оси r ; течение за скачком дозвуковое в окрестности оси r и сверхзвуковое вниз по потоку. Отклоняясь в сторону оси симметрии z , ударная волна должна рано или поздно пересечь ось симметрии; течение в этой области и образующиеся там структуры представляют для нас наибольший интерес. Именно в этой области возможно образование зон циркуляционного течения, о которых говорилось во Введении.

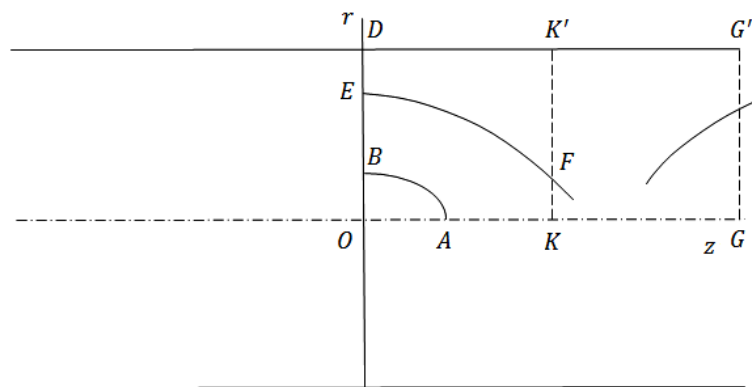


Рис. 5.12 Схематическая картина течения от сферического источника внутри цилиндрического канала.

В рамках невязкой постановки рассматриваемая задача сводится к решению уравнений Эйлера в области $ABDG'GA$ с граничными условиями симметрии на интервале AG оси симметрии Oz и отрезке BD линии симметрии Or , условиями непротекания на стенке канала DG' , а также условиями (3) на некоторой поверхности AB , находящейся внутри области EOF , границей которой является ударная волна. В проведенных расчетах размеры и форма этой поверхности варьировались в достаточно широких пределах и, как и

следовало ожидать, не оказывали никакого влияния на полученное численное решение. К указанным условиям следует добавить «выходные» условия на некоторой границе $G'G$, находящейся вниз по потоку от области пересечения отошедшей ударной волны с осью симметрии, такой, что течение всюду на этой границе сверхзвуковое. В качестве такого «мягкого» условия в расчетах бралось условие $\partial f / \partial z = 0$, где f – любой из параметров течения.

Решение нестационарной задачи требует также задания начальных условий. В работе рассматривались три вида условий.

1) «Забирание источника в канал». В этом случае в начальный момент времени $t = 0$ поле течения во всей области $ODG'GO$ задавалось формулами (3), а при $t > 0$ включались граничные условия на стенках канала. Течение, забранное в канал, взаимодействовало с его стенками, образуя ударно-волновую структуру, схематически изображенную на рис.5.12.

2) «Запуск источника». В этом случае условия (3) при $t = 0$ ставились на поверхности AB , а во всей расчетной области $ABDG'GA$ имело место состояние покоя ($W = 0$) с некоторым заданным радиальным распределением плотности $\rho = \rho(R) = 1 / (W_{\text{lim}} R^2)$ и нулевым давлением ($p = 0$).

3) Поле течения, рассчитанное для одного варианта течения, принималось за начальные данные при расчете какого-либо другого варианта.

Таким образом, в проведенных расчетах варьировались:

- 1) методы расчета, в соответствии со сказанным в п. 5.3.2;
- 2) структура расчетной области: в большинстве случаев расчеты проводились в области $ABDGG'A$ (рис.5.12), представляющей собой одну четверть канала; вместе с тем были проведены отдельные расчеты в половине канала (область $ABDGG'A$ и ее зеркальное отражение относительно оси r) и, наконец, во всем канале целиком;
- 3) положение поверхности AB , на которой задавались граничные условия, соответствующие невозмущенному течению от источника;
- 4) начальные условия задачи в соответствии со сказанным выше;

5) размеры расчетной области по координате z , что позволило исследовать влияние «мягких» граничных условий, поставленных на выходной границе области GG' ;

б) структура разностной сетки и количество ячеек в ней.

Перейдем к описанию результатов расчетов. На рис.5.13 приведена картина установления стационарного течения в цилиндрическом канале при начальных условиях типа «запуск источника» (см. выше) и $\gamma=1.4$. Расчеты проведены методом АИВ в области $0 \leq r \leq 1, -5 \leq z \leq 5$ на сетке, содержащей 224416 ячеек (на рис.5.13 приведена половина расчетной области).

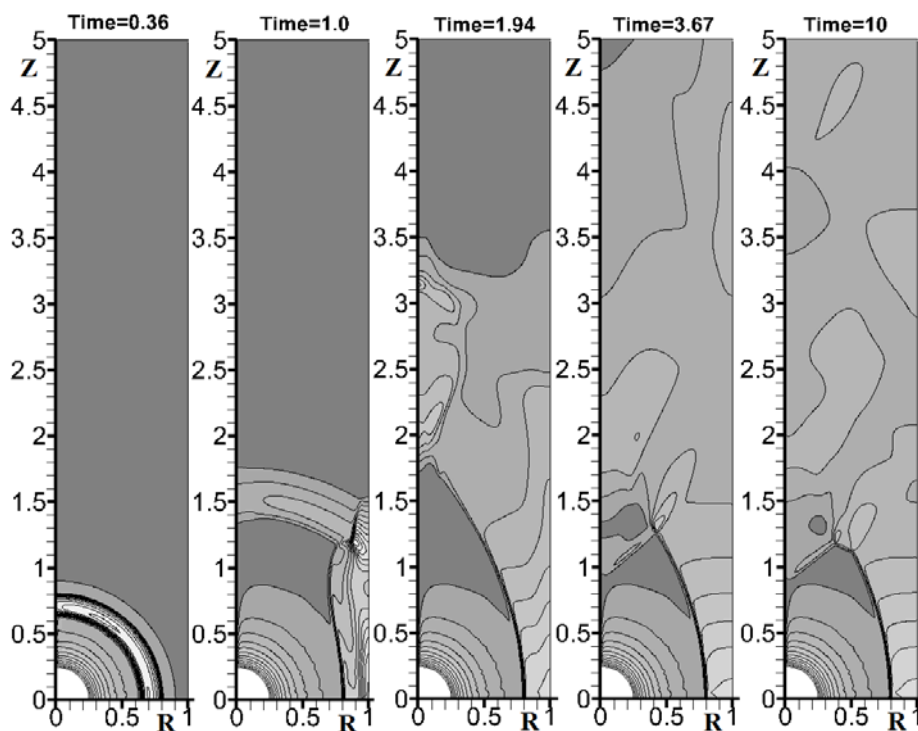


Рис. 5.13 Поля плотности при установлении течения в цилиндрическом канале ($\gamma=1.4$).

Построены поля плотности в различные моменты времени. При малом значении времени $t=0.36$ стенка канала еще не оказывает воздействия на расширяющееся течение, которое сохраняет сферически-симметричный характер. Хорошо видны три поверхности разрыва: внутренняя и внешняя ударные волны (интенсивность последней невелика и она быстро вырождается в волну Маха) и контактная поверхность, разделяющая два газа. При

$t=1.0$ указанная ударно-волновая структура уже испытала соударение со стенкой, отразилась от нее и начала движение в сторону оси симметрии. При $t=1.94$ отраженная ударная волна (первоначально внутренняя ударная волна) подошла к оси симметрии; с этого момента начинается «запирание» приосевого потока, распространяющегося в направлении оси z . Запертый газ образует протяженную приосевую зону циркуляционного течения, которую газ, поступающий от источника, обтекает, как твердое тело. Это тело имеет оживальную форму, и отход головной ударной волны, образующейся перед ним, крайне невелик. Полученная картина течения оказывается сходной с картиной, обнаруженной в предыдущем разделе для случая истечения соосных струй. Эта картина хорошо видна при $t=3.67$; при $t=10$ формирование установившегося течения в области $z \leq 3$ уже завершено.

Окончательная картина течения (поле плотности и линии тока) представлена на рис.5.14.

Как и в случае соосных струй, сопряжение головной ударной волны перед жидким препятствием и ударной волны перед стенкой канала происходит через мостообразный скачок. Каждая из двух крайних точек этого скачка представляет собой тройную точку. Вниз по потоку от циркуляционной зоны, где течение практически параллельно оси z , линии тока, выходящие из этих точек, образуют границы некоторой внутренней струйки, хорошо видной на картине линий тока на рис.5.14. Интересно, что аналогичная картина течения возникает и в хвостовой области взаимодействия равномерного и сферически-симметричного потоков [129].

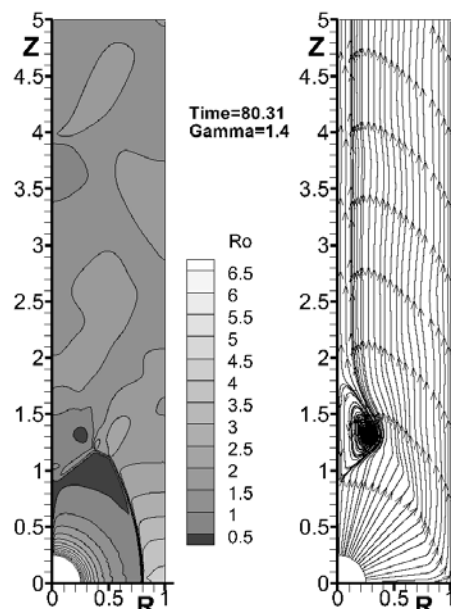


Рис. 5.14 Установившаяся картина течения при истечении от сферического источника ($\gamma = 1.4$) внутри цилиндрического канала (поле плотности и картина линий тока). Расчет методом АИВ.

Заметим, что при начальных условиях типа «забирания в канал» (см. выше) эволюция течения происходит, естественно, иным образом, однако, окончательное установившееся течение в обоих случаях одно и то же.

Сравнение результатов расчетов, выполненных тремя численными методами, а также общая картина течения для случая $\gamma = 1.4$ приведены на рис.5.15.

При $z \leq 1.0$ ударные волны перед стенкой канала, рассчитанные тремя методами, практически совпадают (расчет методом [130] проводился в работе [135] лишь для $z \leq 1.0$; крайняя точка на ударной волне, рассчитанная этим методом, указана на рис.5.15 крестиком). Расхождение в звуковых линиях, которое характеризует и отличие в полях течений, для методов [130] и [37] не превышает нескольких процентов (напомним, что решение методом [130] в этой области можно рассматривать как эталонное). Незначительные количественные расхождения между результатами расчетов методами [37] и [131, 132] имеют место при $z > 1.0$, но они никак не влияют на качественную структуру рассчитанного течения, которая остается одной и той же в обоих

расчетах (оживальное жидкое тело, головная ударная волна перед ним, мостообразный скачок). Заметим, что расчеты методом Годунова [135] проводились на сетках с шагами $h_r=h_z=0.01, 0.05$ и 0.025 , причем уменьшение шага вчетверо не сказывалось на количественных (тем более качественных) характеристиках решения. Изменение положения выходной границы расчетной области в пределах от $z=5$ до $z=30$ также не влияло на полученные результаты (разумеется, во всех этих случаях течение на выходной границе было сверхзвуковым).

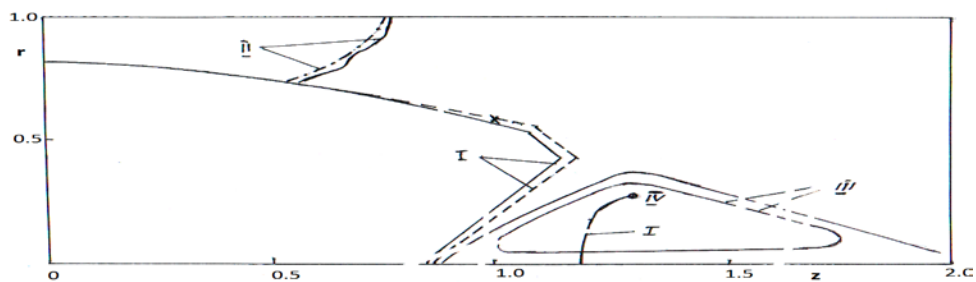


Рис. 5.15 Сравнение результатов расчетов, полученных различными методами при $\gamma=1.4$; — — метод Годунова [37], - - - - метод АИВ [131, 132], - · - · - · - метод Бабенко–Русанова [130]; I – ударные волны, II – звуковые линии, III – линии тока, IV – центр вихря.

Интересно отметить, что в циркуляционной зоне приосевой поток, направленный в сторону источника, достигает сверхзвуковых скоростей и тормозится в ударной волне, нормальной к оси симметрии (она также изображена на рис.5.15)

В рассматриваемой задаче единственным определяющим параметром является показатель адиабаты γ . С использованием всех трех численных методов были проведены параметрические расчеты в диапазоне $1.05 \leq \gamma \leq 5/3$. Результаты расчетов показали, что почти во всем исследованном диапазоне осуществляется течение с циркуляционной зоной. Однако с уменьшением γ размеры этой зоны сокращаются и при некотором критическом значении γ_* она

перестает существовать. Возможно, это объясняется сужением ударного слоя перед стенкой канала с уменьшением γ и его распространением на большую длину вдоль поверхности; при этом воздействие высоконапорного течения в ударном слое на низконапорное приосевое течение ослабевает. При $\gamma < \gamma_*$ отражение ударной волны, падающей на ось, регулярное. Согласно расчетам методом АИВ $\gamma_* \approx 1.05$, а в расчетах методом Годунова $\gamma_* \approx 1.08$, т.е. различие составляет менее 3%. Здесь следует отметить, что точность расчетов последним методом при малых γ падает, в частности, появляется зависимость решения от шага разностной сетки, которой нет ни при $\gamma=1.4$ (см. выше) ни, например, при $\gamma=1.2$. Очевидно, это связано с многократным увеличением градиентов некоторых параметров течения: так, если при $\gamma=1.4$ перепад плотности в ударной волне в гиперзвуковом набегающем потоке имеет значение $(\gamma+1)/(\gamma-1)=6$, то при $\gamma=1.05$ он приобретает значение 41. Однако возникающие погрешности носят лишь количественный характер и не касаются качественных особенностей течения.

Установившаяся картина течения изображена на рис.15.16 и 15.17 для $\gamma=1.1$ и 1.05 соответственно. В первом случае зона возвратного течения еще существует, хотя ее размеры (как продольный, так и поперечный) существенно сократились по сравнению со случаем $\gamma=1.4$. Ударная волна перед преградой и головная ударная волна перед зоной возвратного течения сопрягаются уже не через мостообразный скачок, а регулярным образом (переход от одного типа сопряжения к другому имеет место при $\gamma=1.2$).

При $\gamma=1.05$ циркуляционная зона исчезает, отражение ударной волны от оси симметрии регулярное.

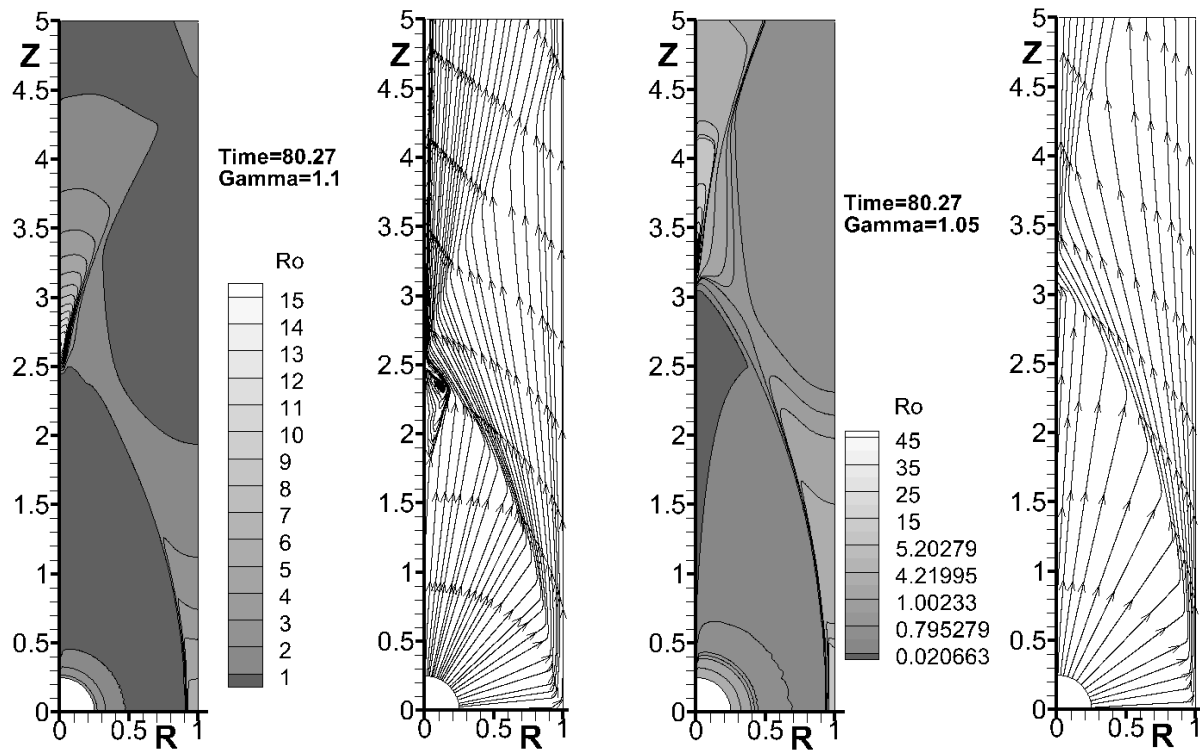


Рис. 5.16 Установившаяся картина течения при истечении от сферического источника ($\gamma=1.1$) внутри цилиндрического канала (поле плотности и картина линий тока). Расчет методом АИВ

Рис.5.17 Установившаяся картина течения при истечении от сферического источника ($\gamma=1.05$) внутри цилиндрического канала (поле плотности и картина линий тока). Расчет методом АИВ.

На рис.5.18 построены распределения продольной компоненты скорости V_z вдоль оси канала при трех значениях γ . При $\gamma=1.4$ и 1.1 эти распределения содержат области отрицательных значений V_z , соответствующие возвратному течению. Числа Маха, соответствующие максимальным по абсолютной величине отрицательным значениям скорости, соответственно, равны 1.06 и 1.16 . При $\gamma=1.05$ скорость всюду положительна; после отражения ударной волны от оси симметрии число Маха приобретает значение около 1.18 .

Вниз по потоку от области первого отражения ударной волны от оси симметрии, независимо от типа отражения, ударная волна многократно отражается (регулярным образом) от стенки канала и оси симметрии, теряя при

этом интенсивность. Картины линий тока, построенные на рис.5.14, 15.16, 15.17, показывают, что на достаточном расстоянии от источника устанавливается течение, близкое к плоско-параллельному, причем оно устанавливается тем быстрее, чем больше γ . Как и должно быть в таком течении, давление поперек потока остается почти постоянным, что подтверждает рис.5.19, на котором построены распределения давления поперек канала в сечении $z = 4.5$; это сечение можно считать достаточно удаленным от источника при $\gamma=1.4$, но не в случае $\gamma=1.05$.

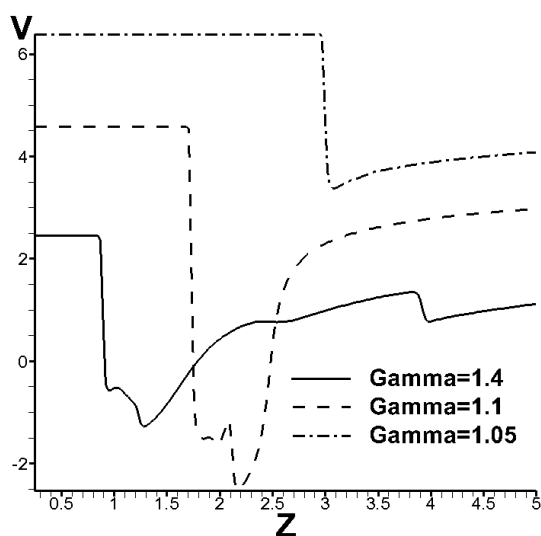


Рис. 5.18 Распределения продольной компоненты скорости вдоль оси канала.

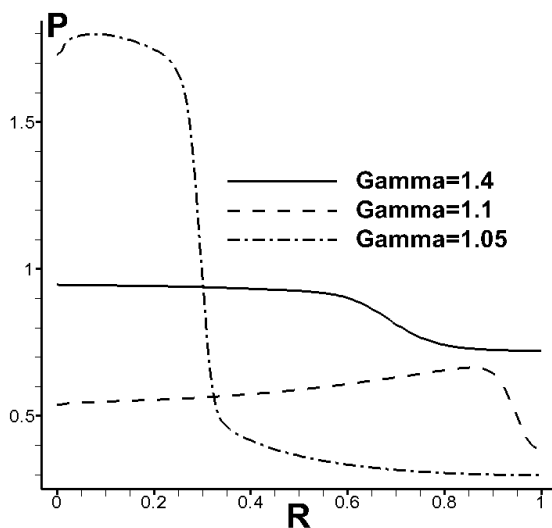


Рис. 5.19. Поперечное распределение давления в сечении $z = 4.5$.

Наконец, общая картина течения, рассчитанного при $\gamma=1.05$ тремя методами, изображена на рис.13.

Заметим, что расчет методом Бабенко–Русанова [130] в работе [135] удалось довести практически до пересечения ударной волны с осью симметрии; полученное этим методом положение точки пересечения можно, по-видимому, принять за точное. Положение ударной волны и точки ее пересечения с осью в методе АИВ практически совпадает с точным, тогда как метод Годунова дает расхождение около 5%. При этом качественные картины течения во всех случаях одинаковы: зона возвратного течения исчезла, а отражение ударной волны от оси симметрии регулярное (квазирегулярное).

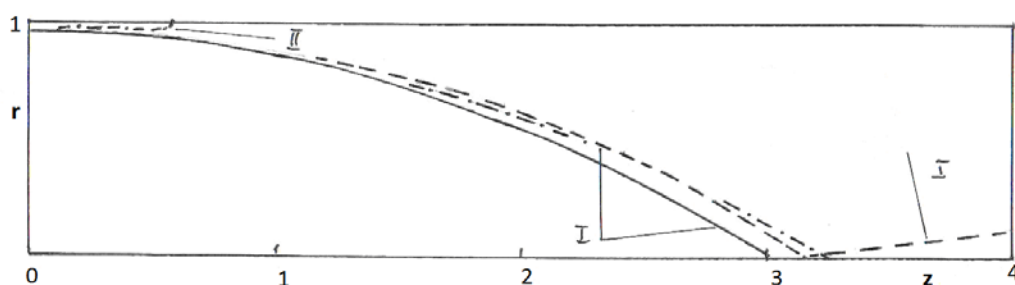


Рис.5.20. Сравнение результатов расчетов, полученных различными методами при $\gamma = 1.05$; — — метод Годунова [37], - - - - метод АИВ [131, 132], - · - · - · - метод Бабенко–Русанова [130]; I, ударные волны, II, звуковые линии.

Была также предпринята серия расчетов (методом Годунова), в которых численное решение, полученное при $\gamma = 1.05$, было взято в качестве исходного, а затем от этого решения, как от начальных данных, рассчитывались течения при $\gamma = 1.1$ и $\gamma = 1.2$. При этом характер течения менялся: уже на начальной стадии установления возникала приосевая возвратная зона и установившееся течение имело ту же структуру (как качественно, так и количественно), что и течения, рассчитанные от «физических» начальных данных.

Таким образом, проведенные численные исследования показывают, что, как и в течении типа следа, в течении типа источника возможно образование

зон циркуляционного течения при падении ударной волны на ось симметрии течения. Возникновение этого феномена, видимо, следует приписать не диссипативным, а гидродинамическим факторам (запирание относительно низконапорного приосевого течения относительно высоконапорным течением в ударном слое). В пользу такого предположения говорят два следующих проведенных численных эксперимента (они также проведены методом Годунова). В первом из них интенсивность источника менялась в зависимости от азимутального угла θ , отсчитываемого от оси z , так что скорость в невозмущенном потоке от источника была на оси z на 10% больше чем на оси r (это может быть сделано лишь в случае гиперзвукового течения от источника, когда давление $p=0$; именно этот случай рассмотрен в работе). В качестве начальных данных было взято установившееся течение при $\gamma=1.1$, характеризующееся наличием циркуляционной зоны. При включении угловой неравномерности, когда приосевое течение становилось более интенсивным, эта зона быстро исчезала и в установившемся течении отражение ударной волны от оси было регулярным.

Второй численный эксперимент состоял в расчете соответствующего плоского течения (течение от цилиндрического источника, расположенного посередине между двумя плоскими пластинами). В этом случае ни при одном значении γ циркуляционные зоны не были обнаружены. Это легко объяснить тем, что в плоском случае отношение массы газа, текущего в окрестности оси симметрии, к массе газа, прошедшего ударную волну, больше, чем в осесимметричном.

Заключение по главе 5.

1. Для рассмотренной модели фильтрации построена разностная схема, для уравнения неразрывности имеющая второй порядок аппроксимации по времени и пространству. Показано, что разностная схема обладает монотонностью, консервативностью и хорошо отслеживает разрывы решения

в виде сингулярных особенностей в депрессионной воронке вблизи зоны отбора газа. Предложенный численный метод может быть использован для моделирования и прогноза состояния газонасыщенных пластов, а также может быть эффективно применен для многопроцессорных вычислительных комплексов.

2. При численном решении задачи неустойчивости Рихтмайера-Мешкова показано, что метод АИВ дает хорошее совпадение со схемой повышенного порядка аппроксимации типа TVD схем и экспериментальными данными. При этом расчет по методу АИВ проводился на неструктурированной треугольной сетке с одинаковым числом расчетных узлов.
3. Выполнено численное моделирование двух сверхзвуковых осесимметричных течений, в которых падение ударной волны на ось симметрии приводит к образованию зон возвратного (циркуляционного) течения. Первое из этих течений имеет тип следа с дефицитом скоростного напора в окрестности оси симметрии. Полученные численные результаты находятся в качественном и количественном соответствии с экспериментальными данными [119]. Второе из этих течений образовано гиперзвуковым сферически-симметричным источником, расположенным на оси цилиндрического канала. Сходная с предыдущим случаем структура течения образуется при отражении от оси симметрии ударной волны перед стенкой канала. Анализ полученных решений, а также их сопоставление с известными в литературе данными дают основание утверждать, что образование упомянутых циркуляционных зон имеет физическую природу, а не является чисто вычислительным эффектом. Есть также основание полагать, что природа рассмотренного феномена гидродинамическая, а не диссипативная. Следующим шагом в исследовании должен быть тщательный анализ полученных численных результатов и, возможно, проведение дополнительных численных исследований с целью установления конкретного механизма явления и вывода критериальных соотношений, указывающих, в каких условиях это

явление имеет место. Заметим еще, что в то время как для случая течения типа следа имеются надежные экспериментальные данные, подтверждающие существование рассмотренного феномена, для течений типа источника (например, в нерасчетных струях) таких данных пока нет и их получение могло бы быть важным шагом в исследовании.

Результаты главы 5 опубликованы в работах:

1. Попов И.В., Повещенко Ю.А., Поляков С.В., Рагимли П.И. Об одном подходе к построению консервативной разностной схемы для задачи двухфазной фильтрации, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2017, 069, 12 стр.
2. Попов И.В. Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для нелинейного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2017, 068, 21 стр.
3. Тишкин В.Ф., Никишин В.В., Попов И.В. Разностные схемы трехмерной газовой динамики для задач о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова. Математическое моделирование. 1995. Т. 7. С. 1525.
4. Бочарова О.Б., Лебедев М.Г., Попов И.В., Ситник В.В., Фрязинов И.В. Отражение ударной волны от оси симметрии в неравномерном потоке с образованием циркуляционной зоны. // Математическое моделирование. 2013, 25(8), 33-127.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение сформулируем положения диссертации, которые выносятся на защиту:

1. На примере линейного и нелинейного уравнений переноса теоретически исследована аппроксимация и доказана устойчивость разностных схем для метода АИВ.
2. Разработан метод АИВ для численного решения задач газовой динамики, найден диапазон изменения коэффициента искусственной вязкости. Разработан алгоритм введения адаптивной искусственной вязкости в задачах с различными типами разрывов.
3. Разработан метод АИВ для численного решения уравнений Навье-Стокса на структурированных и неструктурированных сетках, получена величина коэффициента искусственной вязкости.
4. Проведена верификация метода АИВ на известных тестовых задачах и выполнено сравнение метода АИВ с другими известными численными методами. Он прост в реализации, экономичен с вычислительной точки зрения, не требует решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва и показал хорошее совпадение с результатами других методов.
5. Результаты, полученные по методу АИВ, подтвердили хорошее совпадение с результатами других современных методов.
6. Созданы комплексы программ для решения задач вычислительной гидродинамики на основе уравнений Эйлера и уравнений Навье-Стокса с использованием метода АИВ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуков А.И., “Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики”, *Тр. МИАН СССР*, **58** (1960), 3–150 с.
2. Ричардсон Д. Дж. Метод характеристик для решения уравнений гидродинамики двумерных неустановившихся течений. Вычислительные методы в гидродинамике. Под. ред. Олдера Б. Фернбах С.и Ротенберг М. М.: Мир 1967.
3. Neumann J. von, Richtmyer R.D. // *J. Appl. Phys.* 1950. Vol. 21. P. 232.
4. Самарский А.А., Арсенин В.Я., О численном решении уравнений газодинамики с различными типами вязкости, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **1:2** (1961), 357–360
5. Шульц У. Д. Двумерные конечно-разностные гидродинамические уравнения в переменных Лагранжа. Вычислительные методы в гидродинамике. Под. ред. Олдера Б. Фернбах С.и Ротенберг М. М.: Мир 1967.
6. Русанова В.В. // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1961. Т. 1, № 2. С. 267- 279.
7. Годунов С.К. Разностный метод расчета ударных волн”, *УМН*,**12:1(73)** (1957), 176–177
8. Lax P.D. *Comm. on pure and appl. Math.* Fer. 7, № 1 (1954), 159 — 193.
9. Нох В.Ф. СЭЛ – Совместный эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач. Вычислительные методы в гидродинамике. Под. ред. Олдера Б. Фернбах С.и Ротенберг М. М.: Мир 1967.
10. Франк Р.М., Лазарус Р.Б. Смешанный метод, использующий переменные Эйлера и Лагранжа. // *Вычислительные методы в гидродинамике.* Под. ред. Олдера Б. Фернбах С.и Ротенберг М. М.: Мир 1967.
11. Яненко Н.Н., Фролов В.Ф., Неуважаев В.Е. // *Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.* 1967. № 8, вып. 2.

12. Годунов С.К., Забродин А.В., Прокопов Г.П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т.1, №6, с.1020-1050.
13. Дьяченко В.Ф. Об одном новом методе численного решения нестационарных задач газовой динамики с двумя пространственными переменными. Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1965. Г. 5, № 4. С. 680-688
13. Харлоу Ф.Н. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики // Вычислительные методы в гидродинамике. Под. ред. Олдера Б. Фернбах С.и Ротенберг — М.: Мир, 1967, 460 с.
15. Н. А. Дарьин, В. И. Мажукин, А. А. Самарский, Конечноразностный метод решения уравнений газовой динамики с использованием адаптивных сеток, динамически связанных с решением, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1988, том 28, номер 8, 1210–1225
16. Похилко В.И., Тишкин В.Ф. Однородный алгоритм расчета разрывных решений на адаптивных сетках. *Матем. моделирование*, 6:11 (1994), 25–40 с.
17. Михайлова Н.В., Тишкин В.Ф., Тюрина Н.Н., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Численное моделирование двумерных газодинамических течений на сетке переменной структуры, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 26:9 (1986), 1392–1406 с.
18. Harten A., Hyman J. M., Lax P. D. On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 29, 1976, 297–322.
19. Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики. Ученые записки ЦАГИ Т.3, №6 1972, с. 68-77

20. Остапенко В.В. “О построении разностных схем повышенной точности для сквозного расчета нестационарных ударных волн”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **40**:12 (2000), с. 1857–1874
21. Остапенко В.В. “Симметричные компактные схемы с искусственными вязкостями повышенного порядка дивергентности”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **42**:7 (2002), с. 1019–1038
22. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. Москва, Физматлит, 2001.
23. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. Изд. 7-е, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2009
24. Федоренко Р.П. Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений. // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1962, том 2, номер 6, страницы 1122–1128.
25. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.:Изд-во МФТИ, 1994. 528 с.
26. Бабенко К.И., Воскресенский Г.П. Численный метод расчета пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. // *ЖВМиМФ*, 1961, т. 1, № 6, с. 1051 - 1060.
27. Галанин М.П., Еленина Т.Г. Сравнительный анализ разностных схем для линейного уравнения переноса // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 1998. № 52.
28. Галанин М.П., Еленина Т.Г. Нелинейная монотонизация разностных схем для линейного уравнения переноса. // *Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН*, 1999, № 44, 30 с.
29. Головизнин В.М., Самарский А.А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной. *Матем. моделирование*, **10**:1 (1998), с. 86–100
30. Arieh Iserles, Generalized Leapfrog Methods. *IMA J. Numer. Anal.* 6 (4), p. 381–392 (1986) (А. Изерлес, "Обобщенные методы чехарды")

31. Зюзина Н.А., Остапенко В.В. Модификация схемы Кабаре, обеспечивающая её повышенную точность на локальных экстремумах. *Матем. моделирование*, **27**:10 (2015), с. 21–31
32. Остапенко В.В. “О сильной монотонности двухслойной по времени схемы КАБАРЕ”, *Матем. моделирование*, **30**:5 (2018), с. 5–18
33. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 523 с.
34. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
35. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач, Мир, М., 1972
36. Годунов С.К. Разностный метод численного расчёта разрывных решений уравнений гидродинамики // *Матем. Сб.* 1959. Т. 47(89). №3. С. 271-306.
37. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Прокопов Г.П. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
38. Roe P.L. Characteristic!based schemes for the Euler equations // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1986. V. 18. P. 337–365.
39. Osher S., Solomon F. Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservations laws // *Math. Comput.* 1982. V. 38. P. 339–374.
40. Chakravarthy S., Osher S. A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws // *AIAA Pap.* 1985. № 85!0363. P. 1–11.
41. Einfeldt B. On Godunov-type methods for gas dynamics // *SIAM J. Numer. Anal.* 1988. V. 25. P. 294–318.
42. Harten A., Lax P.D., Van Leer B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // *SIAM Rev.* 1983. V. 25. P. 35–61
43. Quirk J.J. personal communication. 2001.
44. Quirk J.J. An Adaptive Grid Algorithm for Computational Shock Hydrodynamics. PhD thesis, College of Aeronautics, Cranfield Institute of Technology, 1991. http://www.galcit.caltech.edu/~jjq/doc/amr_sol/thesis.

45. Roe P. L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes, *J. Comput. Phys.*, 53 (1981), pp. 357-372
46. Roe P.L. Characteristic-based schemes for the Euler equations. – *Ann. Rev. Fluid Mech.*, v.18, p.337, 1986.
47. Osher S., Solomon F. Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws. – *Math. Comput.*, v.38, p.339, 1982.
48. Einfeldt B. On Godunov-type methods for gas dynamics. – *SIAM J. Numer. Anal.*, v.25, p.294, 1988.
49. Guan-Shan Jiang and Chi-Wang Shu. Efficient implementation of weighted eno schemes. *J. Comp. Phys.*, 126:202–228, 1996.
50. Harten A., Osher S. Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 24:279–309, 1987.
51. LeVeque R.J. Wave propagation algorithms for multi-dimensional hyperbolic systems. *J. Comp. Phys.*, 131:327–353, 1997.
52. LeVeque R.J. High-resolution conservative algorithms for advection in incompressible flow. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33:627–665, 1996.
53. LeVeque R.J. Clawpack version 4.0 user's guide. Technical report, University of Washington, Seattle, 1999. <http://www.amath.washington.edu/~claw/>.
54. Woodward P., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional uid ow with strong shocks. *J. Comp. Phys.*, 54:115-173, 1984.
55. Woodward P.R., Edgar B., Anderson S.E. An introduction to the piecewise parabolic method (ppm) library. Technical report, University of Minnesota, Minneapolis.
56. Noh W. F. Errors for calculations of strong shocks using an artificial viscosity and artificial heat flux. *J. Comput. Phys.* 1987. Vol. 72, No. 1. Pp. 78–120
57. Liu X.D., Lax P.D. Positive schemes for solving multi-dimensional hyperbolic systems of conservation laws. *CFD Journal*, 5(1):1 - 24, 1996. <http://www.math.ucsb.edu/~xliu/publication/paper/positive1.pdf>.

58. Lax P.D., Liu X.D. Solution of two dimensional Riemann problem of gas dynamics by positive schemes. *SIAM J. on Scientific Comp.*, 19(2):319{340, 1998.
59. Friedrichs K.O. The identity of weak and strong extensions of differential operators (АНГЛ.) // *Transactions of the American Mathematical Society*. — 1944. — January (vol. 55, iss. 1). —P. 132–151.
60. Liska R., Wendro B. Composite schemes for conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35(6):2250-2271, 1998.
61. Liska R., B. Wendro B. Analysis and computation with stratified fluid models. *J. Comp. Phys.*, 137:212{244, 1997.
62. Liska R., B. Wendro B. Composite centered schemes for multidimensional conservation laws. In M. Fey and R. Jeltsch, editors, *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications, Seventh International Conference in Zurich, February 1998, Vol. II*, pages 661-670, Basel, 1999. Birkhauser, ISNM Vol.130.
63. Liska R., B. Wendro B. Two-dimensional shallow water equations by composite schemes. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 30:461-479, 1999.
64. Liska R., B. Wendro B. Shallow water conservation laws on a sphere. In *Eighth International Conference on Hyperbolic Problems Theory, Numerics, Applications (HYP2000)*, Magdeburg, 2000. (accepted).
65. Shashkov M., Wendro B. A composite scheme for gas dynamics in lagrangian coordinates. *J. Comp. Phys.*, 150:502-517, 1999.
66. Kozel K., Janda M., Liska R. Composite schemes on triangular meshes. In *Eighth International Conference on Hyperbolic Problems Theory, Numerics, Applications (HYP2000)*, Magdeburg, 2000. (accepted).
67. Harten A. The artificial compression method for computation of shocks and contact discontinuities: III self-adjusting hybrid schemes. *Mathematics of Computation*, 32: 1978, p. 363-389,.
68. Jiang G.S., Tadmor E. Non-oscillatory central schemes for multidimensional hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 19:1892-1917, 1998.

69. Nessyahu H., Tadmor E. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws. *J. Comp. Phys.*, 87(2): 1990, p. 408 - 463.
70. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for Euler equations // *Techn. Rept. LA-UR-01-6225*, LANL. Los Alamos, 2001. <http://www.math.ntnu.no/conservation>
71. Liska R., Wendroff B. Wendroff. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for Euler equations // *SIAM J. Sci. Comput.* 2003. V. 25. №3. P. 995-1017.
72. Kucharik M., Liska R., Steinberg S., Wendroff B. Optimally-stable second-order accurate difference schemes for non-linear conservation laws in 3D // *Applied Numerical Mathematics*, 2006, v.56, p. 589-607.
73. Четверушкин Б.Н. Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике: новая модель вязкого газа, алгоритмы, параллельная реализация, приложения. М.: Изд-во МГУ, 1999. – 232 с.
74. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчёта вязких течений. М.: Научный мир. 2007. 351 с.
75. Самарский А.А., Арсенин В.Я. О численном решении уравнений газовой динамики с различными типами вязкости. *ЖВМ и МФ*, т. 1, №2, 1961 с.357-360
76. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. Об искусственной вязкости и устойчивости дифференциально-разностных и разностных уравнений газовой динамики. Препринт №70, 1976, М.: ИПМ АН СССР
77. Harold L. Brode Numerical Solutions of Spherical Blast Waves *Journal of Applied Physics* 26, 766 (1955); <https://doi.org/10.1063/1.1722085>
78. Родионов А.В. ВАНТ, сер. Математическое моделирование физических процессов. 2018. Вып. 3 УДК 519.6+533.6 Искусственная вязкость для подавления численной неустойчивости "КАРБУНКУЛ" в расчетах трехмерных задач (ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

79. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. Издание второе. М.:Наука. 1978. 688 с.
80. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х т. — М.: Мир, 1990. — / Пер. с англ
81. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1970.
82. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. — М.: Макс Пресс, 2004.
83. I. Popov, S. Sukov. Modified method of adaptive artificial viscosity for solution of gas dynamics problems on parallel computer systems. В сборнике: EPJ Web of Conferences 9. Сер. "Mathematical Modeling and Computational Physics 2017, ММСР 2017" 2018. С. 03020.
84. Попов И.В., Поляков С.В. Построение адаптивных нерегулярных треугольных сеток для двумерных многосвязных невыпуклых областей/ Математическое моделирование , 2002. Т. 14, № 6, 25–35 с.
85. Холодов А.С., Холодов Я.А. О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа, Ж.вычисл. матем. и матем. физ., 2006, Т. 46, №9, с. 1638-1667.
86. Friedrichs K.O., Hyers D.H. Symmetric hyperbolic linear differential equations // *Communs Pure and Appl. Math.* 1954. V. 7, №2, p. 345-392.
87. Калиткин Н.Н. Численные методы: учеб. пособие. – 2-е изд., исправленное. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.: ил. – (Учебная литература для вузов)
88. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – Изд. 2-е перераб и доп. – М.: Наука. 1980.
89. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 591 с.
90. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики // М., Красанд, 2015
91. Бахвалов Н.С., Кобельков Г.М., Жидков Н.П. Численные методы // М., Наука, 1987. – с.521-524

92. Галанин М.П., Еленина Т.Г. Тестирование разностных схем для линейного уравнения переноса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1999, 40 с.
93. Попов И.В., Тимофеева Ю.Е. Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости // Препринты ИПМ им.М.В. Келдыша, 2015, № 39, 24 с, URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-39>
94. Liska R., Wendroff B. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for Euler equations // SIAM J. Sci. Comput. 2003. V. 25. №3. P. 995-1017.
95. Kucharik M., Liska R., Steinberg S., Wendroff B. Optimally-stable second-order accurate difference schemes for non-linear conservation laws in 3D // Applied Numerical Mathematics, 2006, v.56, p. 589-607.
96. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Springer. 1999. 624 pp.
97. Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск, 1996, РАН, Институт математического моделирования, 273 с.
98. Попов И.В., Фрязинов И.В. О новом выборе адаптивной искусственной вязкости. // Математическое моделирование. 2010, 22(12), 23-32.
99. Попов И.В., Фрязинов И.В. Конечно-разностный метод решения уравнений газовой динамики с введением адаптивной искусственной вязкости. // Математическое моделирование, 2008, 20(8), с. 48-60.
100. Попов И.В., Фрязинов И.В. Адаптивная искусственная вязкость для многомерной газовой динамики в эйлеровых переменных в декартовых координатах. // Математическое моделирование. 2010, 22(1), 32-45.
101. Ландау Л.Д., Лифшиц В.М. Гидродинамика. Издание четвёртое. Москва.: Наука. 1988. 733с.

102. Шильников Е.В. Моделирование течений вязкого газа на основе КГД системы уравнений на неортогональных индексных сетках // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 33, 2014 г., 20 с.
103. Шеретов Ю.В. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. – Тверь, Тверской Гос. Ун-т, 2000 г., 400 с.
104. Широков И.А., Елизарова Т.Г. Прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в слое вязкого сжимаемого газа // Прикладная математика и информатика. № 42, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2013 г., с. 30-53.
105. Любимов А.Н., Русанов В.В. Течение газа около тупых тел. Ч. II. Таблицы газодинамических функций. - М.: Наука. 1970. 379 с.
106. Бруяцкий Е.В., Костин А.Г., Никифорович Е.И., Розумнюк Н.В. Метод численного решения уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление. // Прикладная гидромеханика, 2008, т.10, №2, с. 13-23.
107. Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method // Journal of Computational Physics, 1982, v.48, p. 387-411.
108. Розанов В.Б., Лето И.Г., Зайцев С.Г. и др. Экспериментальное исследование гравитационной неустойчивости и турбулентного перемешивания стратифицированных потоков в поле ускорения в связи с задачами инерциального термоядерного синтеза. - М.: ФИАН РАН, 1990, Препринт. №56, с. 12-31.
109. Мешков Е.Е. Некоторые результаты экспериментальных исследований гравитационной неустойчивости границ раздела сред разной плотности. - М., 1981, сб. ИПМ РАН.
110. Лето И.Г., Тишкин В.Ф. Исследование гидродинамической неустойчивости в задачах лазерного термоядерного синтеза методами математического моделирования. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 304 с.
111. Сивухин Д.В. Общий курс физики. т. 2. – М.: Наука, 1979. – 552 с.
112. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Самарская Е.А., Тишкин В.Ф. Методы

математического моделирования окружающей среды. - М.:Наука, 2000, 254 с.

113. Попов И.В., Повещенко Ю.А., Поляков С. В., Рагимли П.И. “Об одном подходе к построению консервативной разностной схемы для задачи двухфазной фильтрации”, Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017, 069, 12 стр.
114. Розанов В.Б., Лего И.Г., Зайцев С.Г. и др. Экспериментальное исследование гравитационной неустойчивости и турбулентного перемешивания стратифицированных потоков в поле ускорения в связи с задачами инерциального термоядерного синтеза. - М.: ФИАН РАН, 1990, Препринт. №56, с. 12-31.
115. Тишкин В.Ф., Никишин В.В., Попов И.В., Фаворский А.П. Разностные схемы трехмерной газовой динамики для задачи о развитии неустойчивости Рихтмайера–Мешкова // Мат. моделирование. 1995. Т. 7. № 5. С. 15—25.
116. Рылов А.И. К вопросу о невозможности регулярного отражения стационарной ударной волны от оси симметрии // Прикладная математики и механика, 1990, т.54, вып.2, с.245–249.
117. Molder S., Gulamhussein A., Timofeev E.V., Voinovich P.A. Focusing of conical shocks at the center-line of symmetry / 21st International Symposium on Shock Waves, Univ. of Queensland, Queensland, Australia, 1997, paper 5601.
118. Gribben B.J., Badcock K.J., Richards B.E. Numerical study of shock-reflection hysteresis in an underexpanded jet // AIAA Journal, 2000, v.38, № 2, p.275–283.
119. Глотов Г.Ф. Локальные дозвуковые зоны в сверхзвуковых струйных течениях // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 1998, № 1, с.143–150.
120. Гурылева Н.В., Соколов Е.И., Федосенко Н.Б. Исследование стационарных циркуляционных зон в недорасширенных сверхзвуковых струях, истекающих в затопленное пространство и спутный сверхзвуковой поток // Модели и методы аэродинамики. Материалы Восьмой международной школы-семинара. Евпатория, 4–16 июня 2008. – М.:

- МНЦМО, 2008, с.45–46.
121. L.F.F. da Silva, V. Sabel'nikov, B. Deshaies. Stabilization of supersonic combustion by a free recirculating bubble: a numerical study // АИА Journal, 1997, v.35, № 11, p.1782–1784.
122. Затолока В.В., Иванюшкин А.К., Николаев А.В. Интерференция вихрей со скачками уплотнения в воздухозаборнике. Разрушение вихрей // Учен.зап. ЦАГИ, 1975, т.6, №2, с.134–138.
123. Metwally O., Settles G. An experimental study of shock wave/vortex interaction // AIAA Paper No. 0082, 1989, 12 p.
124. Nedungadi A., Lewis M.J. Computational study of the flowfields associated with oblique shock/ vortex interactions // AIAA Journal, 1996, v.34, № 12, p.2545–2553.
125. Frey M. Behandlung von Strömungsproblem in Raketendüsen bei Überexpansion // Inst. für Aerodynamik und Gasdynamik, Univ. Stuttgart. Dr.-Ing. Diss. 2001. http://elib.uni-stuttgart.de/opus/volltexte/2001/800/pdf/diss_frey.pdf
126. Горяйнов В.А., Молчанов А.Ю. Нарращивание пространственной сетки в задачах термо-газодинамики при фиксированных вычислительных ресурсах // Мат. моделирование, 2001, т.13, № 8, с.3–8.
127. Горяйнов В.А. О возможности реверса течения в свободных сверхзвуковых струях // Мат. моделирование, 2003, т.15, № 7, с.86–92.
128. Бочарова О.Б., Лебедев М.Г., Савин А.В., Соколов Е.И. Стационарные циркуляционные зоны в сверхзвуковых неравномерных потоках // XXI Научно-техническая конференция по аэродинамике. Тезисы докладов. – М.: Изд. ЦАГИ, 2010, с.35–36.
129. Батчиков П.С., Бочарова О.Б., Лебедев М.Г. Течение в области хвостового взаимодействия сферически-симметричного и равномерного потоков газа // Прикладная математика и информатика, 2010. – М.: МАКС-Пресс, № 36, с.5–26.

130. Бабенко К.И., Русанов В.В. Разностные методы решения пространственных задач газовой динамики // Труды II Всесоюзного съезда по механике. Обзорные доклады. Вып.2. – М.: Наука, 1965, с.247–262.
131. Попов И.В., Фрязинов И.В. Расчеты двумерных тестовых задач методом адаптивной искусственной вязкости. // Мат. моделирование, 2010, т.22, № 5, с.57–66.
132. Попов И.В., И.В. Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости для уравнений газовой динамики на треугольных и тетраэдральных сетках // Мат. моделирование, 2012, т.24. №6, с.109–127.
133. Tam C.K.W. Directional acoustic radiation from a supersonic jet generated by shear layer instability // J. Fluid Mech., 1971, v.46, №4, p.757–769.
134. Зауэр Р. Введение в газовую динамику. – М.: Гостехиздат, 1947, 228 с.
135. Лебедев М.Г., Савинов К.Г. К расчету течений невязкого газа одним конечно-разностным методом // Математические модели и методы. – М.: Изд-во МГУ, 1987, с.228–246.
136. Кружков С.Н., Петросян Н.С. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для нелинейных уравнений первого порядка // УМН. 1987. Т. 42. Вып. 5(257). С. 3-40.

СПИСОК РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости. Письма в ЭЧАЯ. 2011, Т.8, №5(168) С. 817-822 (Компьютерные технологии в физике)
2. Попов И.В., Фрязинов И.В. Конечно-разностные методы решения уравнений газовой динамики с введением искусственной вязкости. Математическое моделирование, 2008, 20(8), с. 48-60. I. V. Popov, I.V. Fryazinov. Finite-Difference Method for Solving Gas Dynamics Equations Using Adaptive Artificial Viscosity. Mathematical Models and Computer Simulations, 2009, V1, № 4, pp. 493-502

3. Попов И.В., Фрязинов И.В. Адаптивная искусственная вязкость для многомерной газовой динамики в эйлеровых переменных в декартовых координатах. Математическое моделирование, 2010, 22(1), с. 32-45.
4. Попов И.В., Фрязинов И.В. Адаптивная искусственная вязкость для многомерной газовой динамики в эйлеровых переменных в декартовых координатах. Математическое моделирование, 2010, 22(1), с. 32-45.
5. Popov I. V., Fryazinov I. V. Finite Difference Method for Two-dimensional Equations of Gas Dynamics Using Artificial Viscosity. Numerical Analysis and Its Applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009, pp.469-475
6. Попов И.В., Фрязинов И.В. Расчеты двумерных тестовых задач методом адаптивной искусственной вязкости. Математическое моделирование, 2010, 22(5), 57-66
7. Попов И.В., Фрязинов И.В. О методе адаптивной искусственной вязкости. Математическое моделирование, 2010, 22(7), 121-128.
8. Попов И.В., Фрязинов И.В. О новом выборе адаптивной искусственной вязкости. Математическое моделирование, 2010, 22(12), 23-32.
9. Попов И.В., Фрязинов И.В. Конечно-разностный метод решения трехмерных уравнений газовой динамики с введением адаптивной искусственной вязкости. Математическое моделирование, 2011, 23(3), 89-100.
10. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости для уравнений газовой динамики на треугольных и тетраэдральных сетках. Математическое моделирование. 2012, 24(6), 109-127.
11. Бочарова О.Б, Лебедев М.Г., Попов И.В., Ситник В.В., Фрязинов И.В. Отражение ударной волны от оси симметрии в неравномерном потоке с образованием циркуляционной зоны. // Математическое моделирование. 2013, 25(8), 33-127.
12. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости на неструктурированных сетках. // Вестник российского университета

- дружбы народов. Серия: Математика, Информатика, Физика. 2014, №2, 230-233.
13. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. // М., «КРАСАНД», 2014. – 288 с., 18 п.л.
 14. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости для решения системы уравнений Навье–Стокса, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **55**:8 (2015), с. 1356–1362; I. V. Popov, I. V. Fryazinov, Method of adaptive artificial viscosity for solving the Navier–Stokes equations, Comput. Math. Math. Phys., **55**:8 (2015), 1324–1329
 15. Попов И.В., Тимофеева Ю.Е. Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2015, 039, 25 стр.
 16. Попов И.В., Тимофеева Ю.Е. Многомерные разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2015, 042, 28 стр.
 17. Попов И.В. Численный метод с адаптивной искусственной вязкостью решения уравнений Навье–Стокса, Матем. моделирование, **28**:12 (2016), 122–132; I. V. Popov, Numerical methods with adaptive artificial viscosity for solving of the Navier–Stokes equations, Math. Models Comput. Simul., **9**:4 (2017), 489–497
 18. Попов И.В. Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для нелинейного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2017, 068, 21 стр.
 19. Попов И.В., Повещенко Ю.А., Поляков С. В., Рагимли П.И. Об одном подходе к построению консервативной разностной схемы для задачи

- двухфазной фильтрации, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2017, 069, 12 стр.
20. Попов И.В. Конечно-разностный метод стабилизации решения уравнения переноса для неустойчивой схемы. Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 7. С. 990. Popov I.V Finite-difference method for the stabilization of the solution of the transport equation for an unstable difference scheme. Differential Equations. 2016. Т. 52. № 7. С. 951-961.
21. Попов И.В., Поляков С.В. Построение адаптивных нерегулярных треугольных сеток для двумерных многосвязных невыпуклых областей. Математическое моделирование. 2002. Т. 14. № 6. С. 25.
22. Тишкин В.Ф., Никишин В.В., Попов И.В. Разностные схемы трехмерной газовой динамики для задач о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова. Математическое моделирование. 1995. Т. 7. С. 1525.
23. Popov I., Sukov S. Modified method of adaptive artificial viscosity for solution of gas dynamics problems on parallel computer systems. В сборнике: EPJ Web of Conferences 9. Сер. "Mathematical Modeling and Computational Physics 2017, ММСР 2017" 2018. С. 03020.
24. Попов И.В. Разностная схема для решения многомерного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости. *Mathematica Montisnigri*. Vol XXXIV (2015) с. 60-85
25. Попов И.В., “Метод адаптивной искусственной вязкости для численного решения гиперболических уравнений и систем”, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2020, 034, 18 стр.