

На правах рукописи

**Рагимли Парвин Ильгар кызы**

**Математическое моделирование связанных процессов фильтрации в талой зоне и в пьезопроводной среде с газогидратными включениями**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном учреждении «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук»

Научный руководитель: **Повещенко Юрий Андреевич**  
доктор физико-математических наук,  
профессор, ведущий научный сотрудник  
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Официальные оппоненты: **Суетнова Елена Ивановна**  
доктор физико-математических наук,  
ведущий научный сотрудник лаборатории  
теоретической геофизики отделения  
планетарной геофизики и геодинамики  
Института физики Земли им. О.Ю. Шмидта  
РАН

**Семенов Илья Витальевич**  
кандидат физико-математических наук,  
ведущий научный сотрудник отдела  
вычислительных методов и турбулентности  
ИАП РАН

Ведущая организация: БУ ВО «Сургутский государственный университет»

Защита диссертации состоится «\_\_» декабря 2018 г. в «\_\_» час. «\_\_» мин. на заседании диссертационного совета Д002.024.03, созданного на базе ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, расположенного по адресу: 125047, г. Москва, Миусская пл., д.4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН и на сайте [www.keldysh.ru](http://www.keldysh.ru)

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д002.024.03  
кандидат физико-математических наук

Корнилина М.А.

## Общая характеристика работы

**Актуальность проблемы.** При транспортировке и переработке углеводородных газов наличие паров воды в них приводит к образованию конденсата водяных паров и формированию ледяных пробок, что в значительной степени осложняет эксплуатацию газопроводов. Ледяные пробки состоят из газогидратов, которые формируются на внутренних стенках труб при повышенном давлении и пониженной температуре. Значительная часть затрат нефтегазовых компаний на освоение и разработку месторождений и транспортировку газа уходит на предупреждение и борьбу с образованием газогидратных пробок. Было показано, что под землей тоже образуются подобные гидраты, причем в очень больших объемах. Запасы газа в таких залежах значительно превосходят известные традиционные запасы природного газа.

Газогидраты относятся к метастабильным образованиям и существуют в природе в условиях, близких к границе их фазовой устойчивости. Незначительные изменения температуры и давления способны вызвать необратимый процесс их разложения, связанный с освобождением в окружающую среду огромного количества метана и воды. Это, в свою очередь, приводит к возникновению оползней и обвалов, а также к превращению прочно сцементированных газогидрат-содержащих пород в разжиженную массу и освобождению огромных количеств газа, делающего данный процесс необратимым.

Разложение газогидратов подвергает опасности разрушения основания прибрежных геологических структур и сооружений, построенных человеком. Неоднородность геологического строения месторождений приводит к неоднородности их физических свойств и существованию изменений характеристик коллекторов от скважины к скважине. Определение свойств коллекторов, в том числе, путем моделирования, является важной частью мероприятий по увеличению эффективности разработки залежей, включающих газогидраты.

Если говорить о техногенных последствиях разработок залежей с газогидратными включениями, то для изучения и предотвращения катастрофических выбросов необходимы специальные методы исследования. Таким образом, проблема изучения миграции углеводородов в осадочных бассейнах, содержащих газогидраты, имеет общий характер.

В настоящий момент не существует математических алгоритмов и комплексов программ, реализующих в полной мере и во всех фазово-термодинамических состояниях модели эволюции и разработки углеводородных залежей при наличии газогидратов.

Таким образом, разработка методов прогнозирования образования и разложения газовых гидратов и исследования условий и факторов, влияющих на эти процессы, является **актуальной** задачей для эффективной эксплуатации

газопроводов и рационального промышленного освоения углеводородных месторождений.

**Цель работы.** Разработка и реализация численного метода для моделирования совместной фильтрации флюидов в среде с газогидратными включениями в талой и гидратной зонах. Работа заключается в развитии математической модели, разработке разностных схем и вычислительных алгоритмов для решения уравнений модели, написании программного комплекса для проведения численных экспериментов и решении ряда модельных и прикладных задач.

**Основные задачи исследования.** Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие основные задачи:

1. Расширение известной флюидодинамической модели двухфазной фильтрации несмешивающихся компонент на случай наличия твердой газогидратной фазы в коллекторе с целью построения эффективного разностного метода решения задачи.

2. Построение как в талой зоне, так и в среде с газогидратными включениями совместного семейства двухслойных полностью консервативных разностных схем с профилированными по пространству временными весами в соответствии с предлагаемым алгоритмом расщепления равновесной модели по физическим процессам.

3. Реализация предложенных численных схем и математических моделей в виде робастных алгоритмов и программного комплекса для вычислительных систем.

4. Исследование и апробация реализованных численных схем на модельных задачах.

5. Исследование с помощью созданного программного комплекса задач фильтрационной флюидодинамики с твердофазными включениями, представляющих интерес для научных и технических применений.

**Методы решения поставленных задач.** Для исследования поставленных задач в процессе выполнения работы были использованы методы вычислительной математики. Проводилось математическое моделирование ряда модельных и реальных задач с использованием разработанного программного комплекса.

**Научная новизна работы** заключается в следующем:

1. Разработан численный метод решения задач в рамках многофазной модели фильтрации с учетом диссоциации газовых гидратов, основанный на расщеплении по физическим процессам.

2. Применительно к задачам фильтрационной флюидодинамики с газогидратными включениями, в частности, с разрывными свойствами пласта и сложной разномасштабной структурой коллекторной зоны разработан новый класс операторно-согласованных разностных схем решения начально-краевых задач для уравнений параболического типа на пространственных неструктурированных сетках общего вида.

3. В пространственно-одномерном случае осуществлена программная реализация разработанного метода в виде робастного программного комплекса.

**Достоверность** полученных результатов основывается на использовании строгого математического аппарата – классических законах подземной гидромеханики, термодинамики и теории фильтрации. Обеспечивается верификацией разностных схем в численных экспериментах на модельных задачах и близостью к результатам других исследований.

**Практическая значимость.** В практическом отношении созданные программные средства обеспечивают возможность пространственно-одномерного моделирования полной задачи диссоциации газовых гидратов в подземных пористых средах. Также разработанное программное обеспечение может быть использовано при исследовании и прогнозировании процессов намерзания и растаивания (растепления) гидратов в газопроводах и добывающих скважинах.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Самосогласованная модель совместной фильтрации в гидратизированной флюидодинамической среде с твердофазными включениями и талой зоне.

2. Семейство двухслойных полностью консервативных разностных схем с профилированными по пространству временными весами для расчета процессов в талой зоне и пьезопроводной среде с газогидратными включениями.

3. Разработанный программный комплекс, реализующий предложенный численный метод, разностные схемы и вычислительные алгоритмы.

4. Результаты численного исследования процессов, происходящих в газогидратных пластах, в частности, при гидродинамическом моделировании газогидратного Мессояхского месторождения.

**Апробация результатов:**

- 58-я Научная конференция МФТИ, Метод опорных операторов для трехмерного моделирования процессов флюидодинамики на высокопроизводительных системах, г. Долгопрудный, Россия, 23-28 ноября, 2015.

- XVIII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, Расщепление по физическим процессам в некоторых задачах флюидодинамики с гидратосодержащими пористыми средами, г. Иркутск, 21-25 августа, 2017.

- Seventh Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications, About free-volumetric approximation of a piezoconductive medium with gas hydrate inclusions, Lozenetz, Bulgaria, 2018.

- Seventh Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications, Completely conservative difference schemes for simultaneous

calculations of thawed hydrated zone and piezoconductive medium with gas hydrate inclusions, Lozenetz, Bulgaria, 11-16 June, 2018.

- Seventh Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications, Modeling of fluidodynamic processes in a porous medium with gashydrate deposits, Lozenetz, Bulgaria, 11-16 June, 2018.

**Личный вклад автора.** Все основные результаты получены соискателем самостоятельно. На совместный материал в работе даны ссылки. С научным руководителем Повещенко Юрием Андреевичем обсуждены постановки задач, выполнен анализ системы уравнений и проведено обсуждение результатов вычислительных экспериментов.

**Публикации.** По результатам диссертации опубликовано 9 работ в научных журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией для опубликования основных научных результатов диссертаций, или входящих в одну из международных баз данных и систем цитирования Scopus, Web of Science.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, 5 глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 139 страниц, включая 26 рисунков и 8 таблиц. Список литературы включает 134 наименования.

### **Благодарности**

Хочу выразить глубокую признательность д.ф.-м.н., проф. В.А. Гасилову и моему научному руководителю д.ф.-м.н. Ю.А. Повещенко за доброжелательное отношение, ценные обсуждения и помощь в работе.

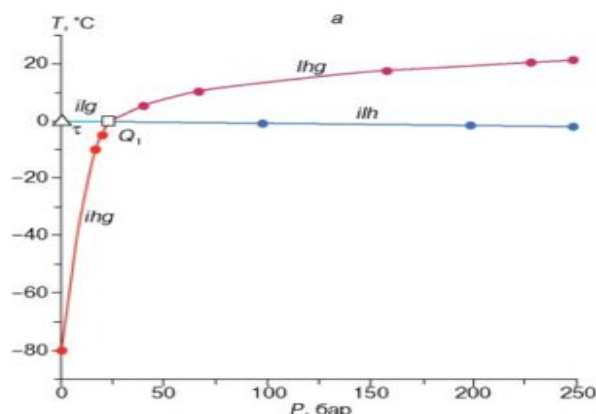
### **Содержание работы**

**Во введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

**Первая глава** посвящена, в основном, литературному обзору по газогидратной тематике с момента ее зарождения и до настоящего времени. Приводятся основные сведения о газовых гидратах и справочные данные, которые используются при решении поставленных в работе задач. Представленный в главе анализ актуальных работ в области математического моделирования газогидратной флюидодинамики в пористой среде показывает, что проводимые в данной работе исследования соответствуют основным направлениям развития данной области науки и находятся на уровне не ниже мирового.

**Во второй главе** рассматриваются физическая и математическая модели фильтрации флюидов в пористых средах при наличии газовых гидратов. Определяется исходная система уравнений, проводится ее расщепление на функциональные блоки для дальнейшего применения эффективных алгоритмов решения. Исследуются свойства уравнений, дается метод их решения.

Добыча газа из гидратонасыщенных залежей происходит за счет фазового перехода гидрата – его диссоциации на жидкость и газ (так называемое, растепление гидрата). Такой фазовый переход сопровождается рядом сложных физико-химических процессов. Диссоциация газового гидрата происходит вследствие повышения температуры, снижения давления, закачки ингибиторов, а также с помощью других механизмов и их комбинаций.



**Рис. 1.**  $P, T$ - фазовая диаграмма системы метан – вода<sup>1</sup>.  $Q_1$  – четырехфазное невариантное равновесие ( $ilh$ ), где  $i$  – лед,  $l$  – жидкая водная фаза,  $h$ - гидратная фаза,  $g$  – газовая фаза,  $ihg, lhg, ilh$ - **трехфазные** моновариантные равновесия

На рис. 1 изображена  $P, T$ -фазовая диаграмма системы метан – вода. Как видно, гидрат, образующийся при небольших значениях давления, оказывается устойчивым, если термобарические условия расположены справа снизу от линий трехфазных моновариантных равновесий ( $ihg, lhg, ilh$ ). Таким образом, если созданы условия, отвечающие такой области устойчивости, то гидрат рано или поздно образуется (при достаточном количестве газа и воды).

В настоящей работе рассмотрены области **трехфазная зона**  $lhg$  (где есть гидрат, свободная вода и газ) и **талая зона**, выше этой области (где есть свободная вода и газ), в случае, когда температура положительная.

В основе математического описания процессов диссоциации газовых гидратов в пористой среде лежат уравнения механики сплошной среды, выражающие законы сохранения массы, импульса и энергии, дополненные фазовыми равновесными соотношениями<sup>2,3,4</sup>.

<sup>1</sup>Дядин Ю.А., Гуцин А.Л. Газовые гидраты. Соросовский образовательный журнал, 1998, № 3, с. 55-64.

<sup>2</sup>Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993, 416 с.

<sup>3</sup>Басниев К.С. Трехмерная математическая модель разложения гидратов метанов в пористой среде под действием тепла / К.С. Басниев, А.В. Нифантов // Наука и техника в газовой промышленности. – М., 2004. – № 1-2. – С. 61- 67.

<sup>4</sup>Цыпкин Г.Г. Течения с фазовыми переходами в пористых средах. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2009.- 232 с.

Для **трехфазной** зоны исходные уравнения неразрывности (уравнения баланса массы флюидов, - воды и газа в свободном и связанном состояниях) могут быть записаны в следующей дивергентной форме (для воды и газа, соответственно):

$$\frac{\partial}{\partial t} \{m(S_v S_w \rho_w + (1-S_v) \rho_v \beta_w)\} + \text{div}[\rho_w \mathbf{V}_w] + q_w = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{m(S_v (1-S_w) \rho_g + (1-S_v) \rho_v (1-\beta_w))\} + \text{div}[\rho_g \mathbf{V}_g] + q_g = 0. \quad (2)$$

Уравнение баланса энергии имеет следующий дивергентный вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{m(S_v (S_w \rho_w \varepsilon_w) + (1-S_w) \rho_g \varepsilon_g)\} + (1-S_v) \rho_v \varepsilon_v + (1-m) \rho_s \varepsilon_s + \\ + \text{div} \{ \rho_w \varepsilon_w \mathbf{V}_w + \rho_g \varepsilon_g \mathbf{V}_g + P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g) \} + \text{div} \vec{W} + q_s = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\vec{W} = -\left(m(S_v (S_w \lambda_w + (1-S_w) \lambda_g) + (1-S_v) \lambda_v) + (1-m) \lambda_s\right) \nabla T$ , индексы  $g, w, v, s$  относятся к газу, воде, гидрату, скелету пористой среды;  $P$  – давление,  $T$  – температура,  $t$  – время,  $m = m(r, P)$  – пористость,  $r$  – радиус-вектор,  $S_w$  – водонасыщенность,  $S_g = 1 - S_w$  – газонасыщенность,  $v$  – гидратонасыщенность,  $S_v = 1 - v$  – растепленность,  $\beta_w$  – массовая доля воды в гидрате,  $\rho_l = \rho_l(P, T)$ ,  $\varepsilon_l = \varepsilon_l(P, T)$ ,  $\lambda_l = \lambda_l(P, T)$  – плотности, внутренние энергии, коэффициенты теплопроводности компонент ( $l = g, w, v, s$ ),  $\mathbf{V}_\alpha, q_\alpha$  – скорость фильтрации и плотность источников фазы  $\alpha = w, g$ .

Для скорости фильтрации жидкой и газовой фаз в пористой среде используется известный закон Дарси<sup>5</sup>, являющийся традиционным для подобного класса задач поровой подземной гидродинамики. Согласно этому закону скорости фильтрации воды и газа равны (приведен закон Дарси с учетом гравитации, но без учета капиллярных сил вода–газ):

$$\mathbf{V}_\alpha = -\frac{k \cdot k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} (\nabla P - \mathbf{g} \rho_\alpha), \quad \alpha = w, g, \quad (4)$$

где  $\mathbf{g}$  – вектор ускорения свободного падения,  $k = k(r, S_v, P)$  – абсолютная проницаемость (вообще говоря, это тензорная величина, в 3D пространстве),  $k_{r\alpha} = k_{r\alpha}(S_w)$  – относительные фазовые проницаемости,  $\mu_\alpha = \mu_\alpha(P, T)$  – вязкости воды и газа.

Уравнение состояния фазового равновесия (термодинамического равновесия) дается в виде:

$$T = T_{dis}(P) = A \ln P + B, \quad (5)$$

где  $A$  и  $B$  – эмпирические константы.

<sup>5</sup>Азиз. Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 416 стр.



Внутренняя энергия гидрата выражается через энергии составляющих его газа и воды следующим образом:

$$\beta_w i_w + (1 - \beta_w) i_g = i_v + h, \quad (6)$$

где  $h$  – скрытая теплота фазового перехода единицы массы гидрата,  $i_l = \varepsilon_l + P/\rho_l$  – энтальпия,  $\varepsilon_l(P, T)$  – внутренняя энергия фаз, индекс  $l \equiv g | w | v | s$  указывает фазу.

Отсюда получается выражение для внутренней энергии гидрата:

$$\varepsilon_v = \beta_w \varepsilon_w + (1 - \beta_w) \varepsilon_g + P \left( \frac{\beta_w}{\rho_w} + \frac{1 - \beta_w}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_v} \right) - h, \quad (7)$$

Для газовой фазы уравнение состояния имеет вид:

$$\rho_g = \frac{P}{z_g RT} \quad (8)$$

с коэффициентом сверхсжимаемости  $z_g$  в изучаемых процессах неизотермической фильтрации,  $R$  – газовая постоянная.

Для талой области, в которой нет гидратов, полагая растепленность  $S_v = 1$ , получим двухфазное уравнение в талой зоне. Уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m S_w \rho_w) + \text{div} [\rho_w \mathbf{V}_w] + q_w = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m(1 - S_w) \rho_g) + \text{div} [\rho_g \mathbf{V}_g] + q_g = 0. \quad (10)$$

Уравнение баланса энергии для талой области записывается в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ m(S_w \rho_w \varepsilon_w + (1 - S_w) \rho_g \varepsilon_g) + (1 - m) \rho_s \varepsilon_s \right\} + \\ & + \text{div} \left\{ \rho_w \varepsilon_w \mathbf{V}_w + \rho_g \varepsilon_g \mathbf{V}_g + P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g) \right\} + \text{div} \mathbf{W} + q_\varepsilon = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\mathbf{W} = -\left( m(S_w \lambda_w + (1 - S_w) \lambda_g) + (1 - m) \lambda_s \right) \nabla T$ .

Система уравнений (1)–(5) полностью описывает фильтрационные процессы в пористой среде с жестким скелетом, насыщенной газовыми гидратами, как при распаде, так и при образовании гидратов, **в трехфазной зоне**. Аналогично, система уравнений (9)–(11) описывает фильтрационные процессы для **талой зоны**. Поставленная в работе задача (1)–(5) и (9)–(11) является сложной квазилинейной системой уравнений математической физики смешанного типа. Численное решение подобной системы уравнений не является тривиальной задачей. Непосредственная аппроксимация исходной дивергентной совокупности балансов масс и энергий флюидов и каркаса пористой среды, насыщенной гидратом, явной по времени разностной схемой приводит к измельчающимся в процессе расчетов, неоправданно мелким шагам по времени.

В рассматриваемой задаче проводилось расщепление<sup>5</sup>. Для **трехфазной зоны** получившаяся система состоит из функционального блока, отвечающего за перенос процессов насыщения (1), (2) (в математическом плане – это гиперболичность в независимых переменных  $S_v, S_w$  на фоне фиксированных давлений  $P$ ), и блока (12), описывающего диссипативные пьезопроводные процессы с учетом твердофазных включений.

$$\begin{aligned}
& m\delta_\varepsilon \left\{ S_v \left[ S_w \frac{(\rho_w)_t}{\rho_w} + (1-S_w) \frac{(\rho_g)_t}{\rho_g} \right] + (1-S_v) \frac{(\rho_v)_t}{\rho_v} + \frac{(m)_t}{m} \right\} + \\
& + \frac{\Psi}{m\rho_v} \left\{ m \left\{ S_v \left[ S_w \rho_w (\varepsilon_w)_t + (1-S_w) \rho_g (\varepsilon_g)_t \right] + (1-S_v) \rho_v (\varepsilon_v)_t \right\} + [(1-m) \rho_s \varepsilon_s]_t \right\} + \\
& + \delta_\varepsilon DIG + \frac{\Psi}{m\rho_v} DIG_\varepsilon = 0,
\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$DIG = \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div}(\rho_w \vec{V}_w) + \frac{1}{\rho_g} \operatorname{div}(\rho_g \vec{V}_g) + \left( \frac{q_w}{\rho_w} + \frac{q_g}{\rho_g} \right), \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
DIG_\varepsilon &= \left[ \operatorname{div}(\rho_w \varepsilon_w \vec{V}_w) - \varepsilon_w \operatorname{div}(\rho_w \vec{V}_w) \right] + \left[ \operatorname{div}(\rho_g \varepsilon_g \vec{V}_g) - \varepsilon_g \operatorname{div}(\rho_g \vec{V}_g) \right] + \\
& + \operatorname{div} \left[ P(\vec{V}_w + \vec{V}_g) \right] + \operatorname{div} \vec{W} + (q_s - \varepsilon_w q_w - \varepsilon_g q_g) = \\
& = \rho_w \vec{V}_w \nabla \varepsilon_w + \rho_g \vec{V}_g \nabla \varepsilon_g + \operatorname{div} \left[ P(\vec{V}_w + \vec{V}_g) \right] + \operatorname{div} \vec{W} + (q_s - \varepsilon_w q_w - \varepsilon_g q_g).
\end{aligned} \tag{14}$$

При получении уравнения (12) при фазовом переходе были введены следующие неотрицательные множители:

– скачок удельного объема (на единицу массы)

$$\frac{\Psi}{m\rho_v} = \left( \varphi - \frac{1}{\rho_v} \right) \geq 0, \quad \varphi = \frac{\beta_w}{\rho_w} + \frac{(1-\beta_w)}{\rho_g}; \tag{15}$$

– скачок удельной внутренней энергии (на единицу массы)

$$\delta_\varepsilon = \beta_w \varepsilon_w + (1-\beta_w) \varepsilon_g - \varepsilon_v \geq 0. \tag{16}$$

Выражение (12) есть основное пьезопроводно-диссипативное уравнение теории гидратов для определения давления  $P$ . Вводя коэффициент бароемкости гидратной системы:

$$\begin{aligned}
D_p &= m\delta_\varepsilon \left\{ S_v \left[ S_w \frac{(\rho_w)_p}{\rho_w} + (1-S_w) \frac{(\rho_g)_p}{\rho_g} \right] + (1-S_v) \frac{(\rho_v)_p}{\rho_v} + \frac{(m)_p}{m} \right\} + \\
& + \frac{\Psi}{m\rho_v} \left\{ m \left\{ S_v \left[ S_w \rho_w (\varepsilon_w)_p + (1-S_w) \rho_g (\varepsilon_g)_p \right] + (1-S_v) \rho_v (\varepsilon_v)_t \right\} + \right. \\
& \left. + [(1-m) \rho_s \varepsilon_s]_p \right\},
\end{aligned} \tag{17}$$

перепишем уравнение (12) в компактной форме:

$$D_p \frac{\partial P}{\partial t} + \delta_\varepsilon DIG + \frac{\Psi}{m\rho_v} DIG_\varepsilon = 0. \quad (18)$$

Для талой (безгидратной) области из уравнений (9)-(11), исключая функцию  $S_w$  из-под знака производной по времени, получаем уравнения, определяющие неизотермический процесс пьезопроводности в талой зоне. Из уравнений массовых флюидобалансов (9), (10) следует:

$$\frac{S_w}{\rho_w} \frac{\partial}{\partial t} (m\rho_w) + \frac{1-S_w}{\rho_g} \frac{\partial}{\partial t} (m\rho_g) + DIG = 0, \quad (19)$$

Из уравнения баланса внутренней энергии системы (11) с учетом (9), (10) следует:

$$m[S_w\rho_w \frac{\partial \varepsilon_w}{\partial t} + (1-S_w)\rho_g \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t}] + \frac{\partial}{\partial t} [(1-m)\rho_s \varepsilon_s] + DIG_\varepsilon = 0. \quad (20)$$

В уравнениях (19), (20) влагонасыщенность  $S_w$  уже не содержится под знаком дифференцирования по времени. Получившаяся система состоит из сатурационного (9) и диссипативного блоков (19), (20).

Таким образом, было произведено полное расщепление задачи для трехфазной и талой зон по физическим процессам для последующего численного решения связанной задачи. При численном решении системы, состоящей из сатурационного блока (1), (2) (или (9)) и диссипативного уравнения (18) (или (19), (20)), используются методы для решения систем гиперболического типа при решении сатурационного блока, а также методы решения параболических уравнений для диссипативного уравнения.

Приведем подробно алгоритм решения связанной задачи. Для этого строится разностная сетка по времени и пространству. При этом шаги по времени:  $\tau = \tau_k$ , где  $k$  – номер шага по времени; сетка по пространству:  $\omega_h = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N; x_0 = 0, x_N = L\}$ , где  $x_i$  – координаты центров ячеек, в них будем определять сеточные величины (давление и насыщенности). Под  $i$ -ой ячейкой сетки  $\Omega_i$  будем понимать отрезок  $(x_{i-0.5}, x_{i+0.5})$ , где границы ячеек равны:  $x_{i+0.5} = (x_i + x_{i+1})/2$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ ;  $x_{-0.5} = x_0$ ,  $x_{N+0.5} = x_N$ . Дифференциальные уравнения, граничные и начальные условия заменяются (аппроксимируются) их сеточными аналогами.

На первом этапе решается диссипативный блок (18) для трехфазной области, (19), (20) для талой зоны с фиксированными значениями сатураций (на  $s$  итерации). Соответствующие разностные уравнения представляют собой систему нелинейных алгебраических уравнений, которая после применения итерационного метода хорд в индексной форме сводится к трехточечным уравнениям. Для трехфазной области они имеют вид:

$$A_i^s \delta P_{i-1} - C_i^s \delta P_i + B_i^s \delta P_{i+1} = -F_i^s, i = \overline{1, N}, \quad (21)$$

для талой зоны:

$$A_{i1}^s \delta P_{i-1} - C_{i1}^s \delta P_i + B_{i1}^s \delta P_{i+1} + D_{i1}^s \delta T_i = -F_{i1}^s, i = \overline{1, N}, \quad (22)$$

$$A_{i2}^s \delta P_{i-1} - C_{i2}^s \delta P_i + B_{i2}^s \delta P_{i+1} + D_{i2}^s \delta T_i = -F_{i2}^s, i = \overline{1, N}, \quad (23)$$

где  $s$  – номер итерации,  $\delta P_i = P_i^{s+1} - P_i^s$ ,  $\delta T_i = T_i^{s+1} - T_i^s$  – приращение давления и температуры на  $s + 1$  итерации.

Уравнение (21) и система уравнений (22), (23) на каждом временном слое решается методом прогонки. Далее, располагая значениями давления  $P$  и температуры  $T$ , можно совершить переход ко второму этапу. Вычисляется сатурационный блок, а именно, считаются  $S_v$  и  $S_w$  для трехфазной области,  $S_w$  для талой области на каждой итерации метода хорд. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность по давлению, температуре, водонасыщенности и растепленности:

$$\begin{aligned} |\delta P_i| < \varepsilon_1 |P_i^s| + \varepsilon_2, \quad |\delta T_i| < \varepsilon_1 |T_i^s| + \varepsilon_2, \\ |\delta S_{wi}| < \varepsilon_1 |S_{wi}^s| + \varepsilon_2, \quad |\delta S_{vi}| < \varepsilon_1 |S_{vi}^s| + \varepsilon_2, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – малые величины. Процедура повторяется до заданного времени расчета.

В данной главе предлагаются некоторые методы регуляризации эволюционных трансфазных расчетов задач совместной фильтрации в пьезопроводной среде с газогидратными включениями и в талой безгидратной зоне. Поставим в соответствие узловому балансному домену сетки  $d(\omega)$  фиксированный единичный объем и всю массу молекул воды  $M_w$ , массу молекул метана  $M_g$  и полную внутреннюю энергию системы  $E$ , включая скелет, находящиеся в этом объеме. Тогда по этим параметрам  $\{1, M_w, M_g, E\}$  локальное термодинамически равновесное состояние среды определяется однозначно. Будем также считать, что диапазон изменения балансных параметров  $\{M_w, M_g, E\}$  таков, что возникает либо талая зона, либо трехфазная гидратосодержащая среда. Т.е. существует обязательная альтернатива: либо решение  $\{S_v, S_w, P, T\}$  в трехфазном гидратосодержащем термодинамически равновесном состоянии, либо решение  $\{S_w, P, T\}$ , соответствующее термодинамически равновесной двухфазной талой зоне.

*Метод двойной каркасности.* Переход из трехфазной среды с газогидратными включениями в двухфазную талую безгидратную зону методом двойной каркасности на данном шаге по времени используется как один из возможных видов регуляризации трансфазных расчетов. В узле разностной сетки близкая к единице растепленность фиксируется как параметр. В физическом смысле это означает, что в балансном домене сетки производится гидратное капсулирование, т.е. считается, что новый твердый каркас системы состоит из двух частей: старый скелет и капсулированный гидрат. Таким образом,  $mS_v$  интерпретируется как капсулированная пористость

двухфазной системы. В дальнейшем, на последующих временных шагах двойная каркасность переводится в простой скелет, если энергии в узловом балансном домене  $d(\omega)$  системе хватает, чтобы оставаться двухфазной. Т.е. выполняется условие  $T \geq T_{dis}$ . Или система находит свое термодинамическое равновесие как трехфазная гидратосодержащая среда, если ее температура оказывается ниже температуры диссоциации  $T_{dis}$ .

*Метод перегретого растепления.* Перегретое растепление с балансным переходом в двухфазную талую зону с простым скелетом осуществляется следующим образом. Если в узловом балансном домене происходил расчет трехфазной среды с газогидратными включениями и растепленность превысила единичное значение ( $S_v \geq 1$ ), то это означает что трехфазного термодинамического равновесия не существует. По этим же параметрам определяется решение  $\{S_w, P, T\}$ , соответствующее термодинамически равновесной двухфазной талой зоне. Дальнейший расчет в данном узле на последующих шагах по времени происходит уже в двухфазной талой зоне с простым скелетом.

*Метод переохлажденной талой зоны.* Пусть в узловом балансном домене происходил расчет двухфазной талой зоны (с простым скелетом или двойным каркасом) и на данном шаге по времени в узле температура оказалась ниже температуры диссоциации (т.е.  $T < T_{dis} = f(P)$ ). Тогда по известным значениям  $\{M_w, M_g$  и  $E\}$  в талой зоне вычисляются  $\{S_v, S_w, P$  и  $T\}$  для трехфазного гидратосодержащего состояния. Дальнейший расчет в данном узле на последующих шагах по времени происходит в трехфазной гидратосодержащей зоне.

В настоящей работе используется метод двойной каркасности. Для наглядности представим блок схему предложенного в данной работе алгоритма расчетов (рис. 2).

Для верификации предложенной в работе модели было произведено сравнение с методом решения аналогичных задач, предложенным Бондаревым Э.А., который дает возможность получить численное, а не аналитическое решение. Сравнение показало, что основное диссипативное уравнение теории гидратов, использованное в данной работе, эквивалентно уравнению в работах Бондарева Э.А. и его коллег. Однако, недорасщепленность системы уравнений в этих работах влечет за собой ряд трудностей при расчетах: большое количество матричных переменных, счет разномасштабных процессов и, как следствие, отсутствие таких важных свойств матрицы, как самосопряженность и знакоопределенность соответствующих ее пьезопроводной части. Представленный в работе метод, основанный на полном расщеплении системы уравнений по физическим процессам, позволяет производить эффективные расчеты связанной задачи.

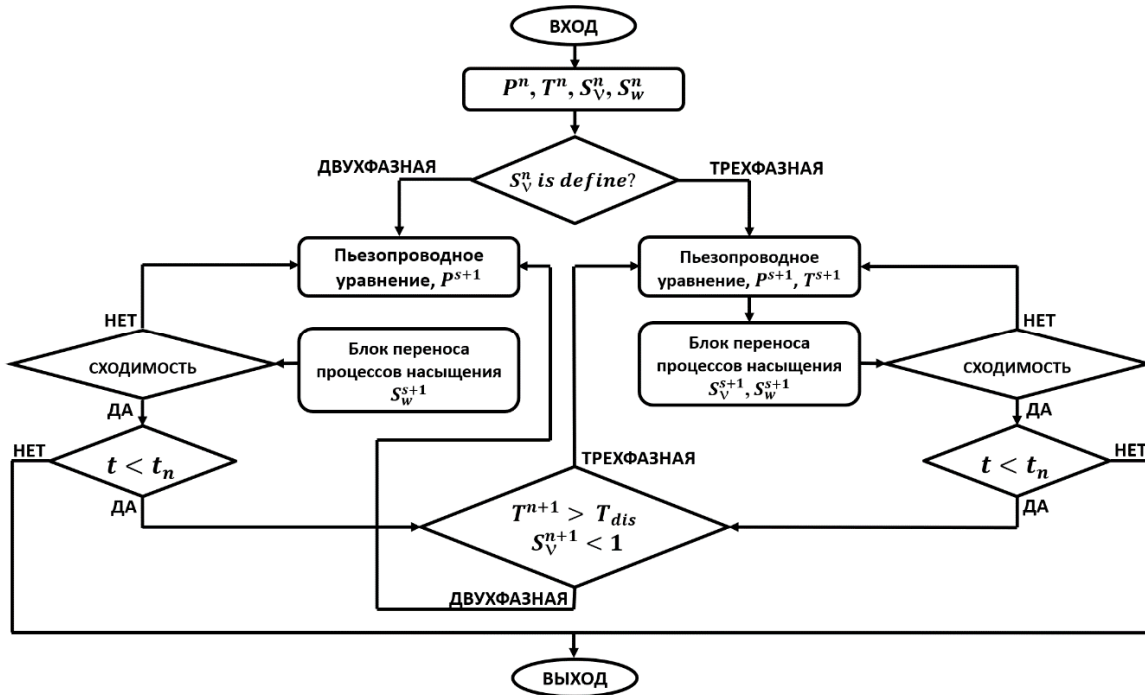


Рис. 2. Блок схема для решения связанной задачи

В третьей главе описывается предложенная разностная схема для решения полной задачи в рамках двухблочной математической модели фильтрации флюидов в пористых средах с газогидратными включениями. Также на метрических сетках теории метода опорных операторов построено семейство дискретных алгоритмов со свободно-объемной аппроксимацией уравнения пьезопроводности, расщепленных по физическим процессам. Важно, что полученная таким образом расщепленная модель разностно эквивалентна дискретным первым балансным принципам системы, записанным в дивергентной форме. Такой подход создания полностью консервативных схем в изучаемой флюидо-гидратной среде потребовал введения специальной свободно-объемной нелинейной аппроксимации сеточных функций по времени, которая зависит от доли объема в порах, занятом флюидами, и является простой в реализации.

На временных слоях  $t$  и  $\hat{t} = t + \tau$  ( $\tau > 0$  – шаг по времени) введем разностные производные по времени и пространственно-точечные (т.е. в узлах сетки  $\omega$ ) временные интерполяции  $a_t = (\hat{a} - a) / \tau$ ,  $a^{(\delta)} = \delta \hat{a} + (1 - \delta)a$ . Здесь интерполяционный вес  $\delta$  может зависеть от узла пространственной сетки  $\omega$ . Например, под величиной

$$\delta_v = \sqrt{(\overline{mS_v})^\wedge} / \left( \sqrt{(\overline{mS_v})^\wedge} + \sqrt{(\overline{mS_v})} \right), \quad 0 < S_v < 1 \quad (25)$$

будем понимать свободно-объемную временную аппроксимацию заданных в узлах  $\omega$  сеточных функций, т.е. интерполяционный вес  $\delta_v$  определяется долей

объема пор, предназначенного для свободного движения жидкости и газа. Выбор такой аппроксимации позволит нам в дальнейшем производить дискретные преобразования уравнений, связанные с их расщеплением по физическим процессам, близкие к континуальным. Другие произвольные интерполяции по времени будем обозначать как  $[ ]^{\sim}$ . Они могут относиться не только к узлам сетки  $\omega$ , но и к другим ее элементам (базисам  $\varphi$  и т.п.).

Понимая под индексом  $S$  в операциях векторного анализа  $DIN_s$  и  $GRAD_s$  монотонизирующий перенос по сатурациям  $S_w$  и  $S_v$ , запишем аппроксимацию уравнений (1), (2) и (3) в следующем виде. Уравнения неразрывности, представляющие собой баланс массы водной и газовой компонент

$$\left\{ \bar{m} [S_v S_w \rho_w + (1 - S_v) \rho_v \beta_w] \right\}_t + DIN_s(\rho_w \mathbf{V}_w)^{\sim} + q_w^{\sim} = 0, \quad (26)$$

$$\left\{ \bar{m} [S_v (1 - S_w) \rho_g + (1 - S_v) \rho_v (1 - \beta_w)] \right\}_t + DIN_s(\rho_g \mathbf{V}_g)^{\sim} + q_g^{\sim} = 0. \quad (27)$$

С помощью оператора  $GRAD_s$  потоки воды и газа  $(\rho_\alpha \mathbf{V}_\alpha)^{\sim}, \alpha = w, g$  аппроксимируются в базисах сетки  $\varphi$  с учетом дискретизации закона Дарси (4), например, на неявном слое по времени любым из стандартных способов<sup>6,7</sup>.

$$(\rho_\alpha \mathbf{V}_\alpha)_\varphi^{p^{\sim}} = - \left( \rho_\alpha \frac{kk_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \right)_{\Delta\varphi}^{\sim} GRAD_s p^{\sim} + \left( \rho_\alpha^2 \frac{kk_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \right)_{\Delta\varphi}^{\sim} \mathbf{g} \mathbf{k}, \quad (28)$$

Здесь под  $( )_{\Delta\varphi}^{\sim}$  понимаются аппроксимации соответствующих выражений в базисах сетки  $\varphi$  с некоторой интерполяцией по времени.

Однако при наличии термобарической зависимости вида (5) для сохранения континуальных свойств знакоопределенности квадратичных форм градиентов термодинамических величин вида  $\int \varepsilon \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) dV$  (см. также (36) ниже) более предпочтительна форма закона Дарси в энергетической формулировке. Получим ее из следующих соображений. С учетом термобарической зависимости (5) в зоне трехфазного равновесия гидрат-вода-газ можно написать  $d\varepsilon_\alpha = \varepsilon'_{\alpha p} dP$ , где  $\varepsilon'_{\alpha p}$  – полные производные от внутренней энергии по давлению с учетом (5).

Тогда закон Дарси (4) в базисах сетки  $\varphi$  (образованных узлами, в которых выполнено термобарическое соотношение (5)) представим в энергетической форме:

$$(\rho_\alpha \mathbf{V}_\alpha)_\varphi^{\varepsilon^{\sim}} = - \left( \rho_\alpha \frac{kk_{r\alpha}}{\mu_\alpha \varepsilon'_{\alpha p}} \right)_{\Delta\varphi}^{\sim} GRAD_s \varepsilon_\alpha^{(\delta_v)} + \left( \rho_\alpha^2 \frac{kk_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \right)_{\Delta\varphi}^{\sim} \mathbf{g} \mathbf{k}, \quad (29)$$

<sup>6</sup>Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Гасилова И.В., Дорофеева Е.Ю. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости // Математическое моделирование, 2012, т. 24, №12, с. 86–96.

<sup>7</sup>Кузнецов Ф.А., Истомина В.А., Родионова Т.В. Газовые гидраты: исторический экскурс, современное состояние, перспективы исследований // Российский химический журнал, т. 48, № 3, 2003, с. 518.

Таким образом  $(\rho_\alpha \mathbf{V}_\alpha)_\varphi^\sim = \{(\rho_\alpha \mathbf{V}_\alpha)_\varphi^{p\sim} | (\rho_\alpha \mathbf{V}_\alpha)_\varphi^{\varepsilon\sim}\}$ .

Уравнение баланса внутренней энергии, аппроксимирующее (3), имеет вид:

$$\begin{aligned} & \left\{ \overline{m} \left[ S_v (S_w \rho_w \varepsilon_w + (1-S_w) \rho_g \varepsilon_g) + (1-S_v) \rho_v \varepsilon_v \right] + \overline{(1-m)} \rho_s \varepsilon_s \right\}_t + \\ & + DIN_s \left[ \left( \varepsilon_w^{(\delta_v)} \right)_{up} (\rho_w \mathbf{V}_w)^\sim \right] + DIN_s \left[ \left( \varepsilon_g^{(\delta_v)} \right)_{up} (\rho_g \mathbf{V}_g)^\sim \right] + \\ & + DIN \left\{ \left[ P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g) \right]^\sim \right\} + DIN \mathbf{W}^\sim + q_\varepsilon^\sim = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Индекс  $up$  в выражении для энергии воды  $(\varepsilon_w^{(\delta_v)})_{up}$  обозначает, что соответствующие величины берутся вверх (upwind) по водному потоку  $(\rho_w \mathbf{V}_w)^\sim$  в определенной ранее сатурационной дивергенции  $DIN_s(\rho_w \mathbf{V}_w)^\sim$ . Аналогично индекс  $up$  понимается в выражении для энергии газа  $(\varepsilon_g^{(\delta_v)})_{up}$ . Работа сил давления  $[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g)]^\sim$  и полный поток тепла  $\mathbf{W}^\sim$  в среде аппроксимируются в базисах сетки  $\varphi$ , например, на неявном слое по времени стандартным образом<sup>6,7</sup>:

$$[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g)]_\varphi^\sim = \left( \frac{p}{\rho_w} \right)_\varphi^\sim (\rho_w \mathbf{V}_w)_\varphi^{p\sim} + \left( \frac{p}{\rho_g} \right)_\varphi^\sim (\rho_g \mathbf{V}_g)_\varphi^{p\sim} \quad (31)$$

Далее, дискретный аналог пьезопроводно-диссипативного уравнения (12)–(14), физически расщепленного с сатурационным блоком (26), (27), но разностно эквивалентный системе первых принципов модели (26), (27), (30), имеет вид:

$$\begin{aligned} & \delta_\varepsilon^{(\delta_v)} \left\{ [(\overline{m} S_v) S_w]^{(1-\delta_v)} \frac{(\rho_w)_t}{(\rho_w)^{(\delta_v)}} + [(\overline{m} S_v) (1-S_w)]^{(1-\delta_v)} \frac{(\rho_g)_t}{(\rho_g)^{(\delta_v)}} + \right. \\ & \left. + [\overline{m} (1-S_v)]^{(1-\delta_v)} \frac{(\rho_v)_t}{(\rho_v)^{(\delta_v)}} + (\overline{m})_t \right\} + \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & + [\psi / (m \rho_v)]^\sim \left\{ [(\overline{m} S_v) S_w \rho_w]^{(1-\delta_v)} (\varepsilon_w)_t + [(\overline{m} S_v) (1-S_w) \rho_g]^{(1-\delta_v)} (\varepsilon_g)_t + \right. \\ & \left. + [\overline{m} (1-S_v) \rho_v]^{(1-\delta_v)} (\varepsilon_v)_t + \left[ \overline{(1-m)} \rho_s \varepsilon_s \right]_t \right\} + \delta_\varepsilon^{(\delta_v)} DIG^\sim + [\psi / (m \rho_v)]^\sim DIG_\varepsilon^\sim = 0, \\ & \delta_\varepsilon = [\beta_w \varepsilon_w + (1-\beta_w) \varepsilon_g] - \varepsilon_v, \end{aligned} \quad (33)$$

$$[\psi / (m \rho_v)]^\sim = \left[ \beta_w / (\rho_w)^{(\delta_v)} + (1-\beta_w) / (\rho_g)^{(\delta_v)} \right] - 1 / (\rho_v)^{(\delta_v)}, \quad (34)$$

$$DIG^\sim = \frac{1}{(\rho_w)^{(\delta_v)}} DIN_s (\rho_w \mathbf{V}_w)^\sim + \frac{1}{(\rho_g)^{(\delta_v)}} DIN_s (\rho_g \mathbf{V}_g)^\sim + \frac{q_w^\sim}{(\rho_w)^{(\delta_v)}} + \frac{q_g^\sim}{(\rho_g)^{(\delta_v)}}, \quad (35)$$



$$\begin{aligned}
DIG_{\varepsilon}^{\sim} = & \left[ DIN_s \left\{ (\varepsilon_w^{(\delta_v)})_{up} (\rho_w \mathbf{V}_w)^{\sim} \right\} - (\varepsilon_w)^{(\delta_v)} DIN_s (\rho_w \mathbf{V}_w)^{\sim} \right] + \\
& + \left[ DIN_s \left\{ (\varepsilon_g^{(\delta_v)})_{up} (\rho_g \mathbf{V}_g)^{\sim} \right\} - (\varepsilon_g)^{(\delta_v)} DIN_s (\rho_g \mathbf{V}_g)^{\sim} \right] + \\
& + DIN \left\{ \left[ P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g) \right]^{\sim} \right\} + DIN \mathbf{W}^{\sim} + \left( q_{\varepsilon}^{\sim} - \varepsilon_w^{(\delta_v)} q_w^{\sim} - \varepsilon_g^{(\delta_v)} q_g^{\sim} \right)
\end{aligned} \tag{36}$$

В выражении  $DIG_{\varepsilon}^{\sim}$ , входящем в (32), имеет место монотонная (вверх по потоку) энергетическая аппроксимация для  $\varepsilon_w^{(\delta_v)}$  и  $\varepsilon_g^{(\delta_v)}$  в соответствующих комбинациях дивергентных выражений, содержащих эти величины.

Аналогично, полагая сеточную функцию  $S_v = 1$  в узлах  $\omega$ , получим двухфазное семейство полностью консервативных разностных схем в талой зоне. Вместо интерполяционного веса  $\delta_v$  здесь соответственно вводится

$$\text{вес: } \delta_1 = \sqrt{\overline{(m)}^{\wedge}} / \left( \sqrt{\overline{(m)}^{\wedge}} + \sqrt{\overline{(m)}} \right) \text{ в узлах сетки } \omega.$$

**Четвертая глава** содержит описание алгоритмов и структуры созданного на их основе кода, предназначенного для моделирования течений в пористой среде, содержащей соединения низкомолекулярных природных газов (метан и др.) с водой, существующие при определенных термобарических условиях в твердой фазе. Программа HYDRAT1D позволяет решать уравнения флюидодинамики в талой зоне и пьезопроводной среде с газогидратными включениями, в плоской и цилиндрической геометриях с учетом различных физических эффектов. Прикладной код «HYDRAT1D» разработан на основе вычислительной архитектуры «Клиент-сервер»<sup>8</sup>. Пользовательская часть (клиент) написана на языках JS, HyperText Markup Language (HTML) и на формальном языке Cascading Style Sheets (CSS), описывающем внешний вид интерфейса<sup>9</sup>. Язык для создания программных интерфейсов JavaScript (JS) встроен практически во все веб-браузеры, и потому доступен без особых ограничений на тип компьютера<sup>9</sup>. Часть, отвечающая за вычисления (сервер), написана на NodeJS<sup>10</sup>. Программная платформа Node.js, основанная на интерпретаторе («движке» V8), превращает этот узкоспециализированный язык в язык общего назначения. У языка появляются новые возможности, такие как взаимодействие с устройствами ввода-вывода через свой модуль, написанный на C++, возможность подключать другие библиотеки, написанные на иных языках, возможность разрабатывать оконные приложения для Linux, Windows и macOS.

Блок схема работы кода в технологии “клиент сервер” представлена на рис 3.

<sup>8</sup><https://www.intuit.ru/studies/courses/508/364/lecture/8643?page=2>

<sup>9</sup>Дженнифер Н. Роббинс. HTML5, CSS3 и JavaScript. Исчерпывающее руководство = Learning Web Design, 4th Edition. — М.: Эксмо, 2014. — 528 с. — ISBN 978-5-699-67603-3.

<sup>10</sup>Долгов А. Н., Нуруллин Р. Ю., Программная платформа Node.js, Достижения науки и образования, 2016, № 12, С.17-18.

Вычислительную часть демонстрирует блок-схема (рис. 2) взаимодействия функциональных компонент кода.



Рис 3. Архитектура программного комплекса.

В пятой главе реализованный комплекс программ использован для компьютерного моделирования трансфазной задачи. Расчеты проводились на персональном компьютере с тактовой частотой 2.7 GHz и процессором Intel Core i5. Типичный расчет на сетке из 100 ячеек занимал несколько минут.

Рассматривается процесс, в начальный момент времени которого давление распределено по линейному закону:  $P(x,0) = 20 \text{ МПа}$ , а водонасыщенность и растепленность однородны по пространству:  $S_w(x,0) = S_w^*$ ,  $S_v(x,0) = S_v^*$ , где  $0 < S_w^* < 1$ ,  $0 < S_v^* < 1$  – постоянные величины,  $x \in [0, L]$ ,  $L$  – длина расчетной области. Ускорение свободного падения не учитывается ( $g = 0$ ). Газ считается идеальным. Границы расчетной области предполагаются непроницаемыми твердыми «стенками», т.е. поток через них нулевой:  $V_w|_{x=0} = 0$ ,  $V_g|_{x=0} = 0$ ,  $V_w|_{x=L} = 0$ ,  $V_g|_{x=L} = 0$ ,  $t > 0$ . Вид источников массы воды и газа в среде коллектора:

$$q_w = \begin{cases} \alpha(P - P^*), & X_1 < x < X_2 \\ 0, & otherwise \end{cases}, \quad q_g = \begin{cases} \beta(P - P^*), & X_1 < x < X_2 \\ 0, & otherwise \end{cases}, \quad (37)$$

где  $P^*$  – постоянная величина,  $\alpha$  и  $\beta$  – постоянные параметры, отвечающие некоему источнику (стоку) в призабойной зоне, обусловленному перепадом

давления между стволом скважины и пластом.  $X_1, X_2$  – координаты «резкого» включения источников. Были выбраны следующие значения параметров, характерные для Мессояхского метан-гидратного месторождения:

$$\rho_w = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho_v = 910 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho_s = 2800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad A = 7.28 \text{ К}, \quad B = 169.7 \text{ К}, \quad \beta_w = 0.9,$$

$$\mu_w = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad \mu_g = 0.014 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad c_w = 4165 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \quad c_g = 2500 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}},$$

$$c_s = 873 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \quad M = M_{\text{CH}_4} = 16 \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}}, \quad S_w^* = 0.6, \quad R = \frac{8.31}{M} \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}},$$

$$h_{tr} = 514810 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}, \quad m = 0.35,$$

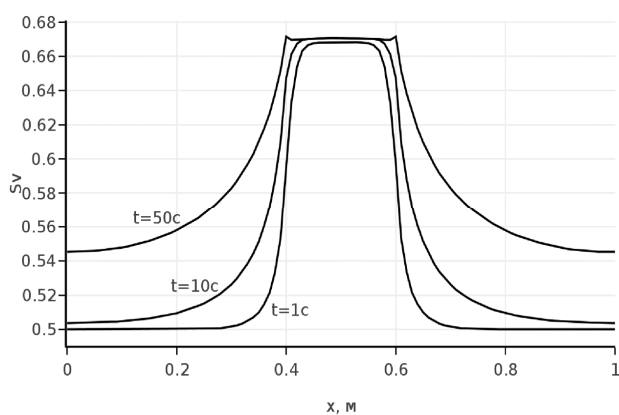
$$k(S_v) = k_0 S_v^3, \quad k_0 = 10 \text{ мД} = 10^{-14} \text{ м}^2, \quad S_{w,\min} = 0.55, \quad S_{w,\max} = 0.9,$$

$$k_{rw}(S_w) = \begin{cases} 0, & S_w < S_{w,\min} \\ 1.477 S_w^5 - 1.587 S_w^6 + 1.11 S_w^7 - 0.0473, & S_{w,\min} < S_w < S_{w,\max} \\ k_{rw}(S_{w,\max}), & S_w > S_{w,\max} \end{cases},$$

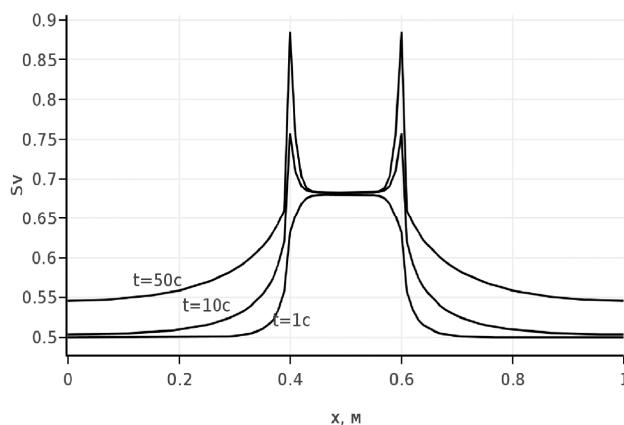
$$k_{rg}(S_w) = \begin{cases} k_{rg}(S_{w,\min}), & S_w < S_{w,\min} \\ 1.044 - 1.7 S_w + 0.6 S_w^2, & S_{w,\min} < S_w < S_{w,\max} \\ 0, & S_w > S_{w,\max} \end{cases}.$$

Длина модельной пространственной области  $L = 1$  м, шаг по пространственной координате  $h = 0.01$  м. Параметры источников:  $\alpha = 0, \beta = 10^{-5} \frac{\text{кг}}{\text{Па} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^3}, P^* = 2$  МПа,  $X_1 = 0.4, X_2 = 0.6$ .

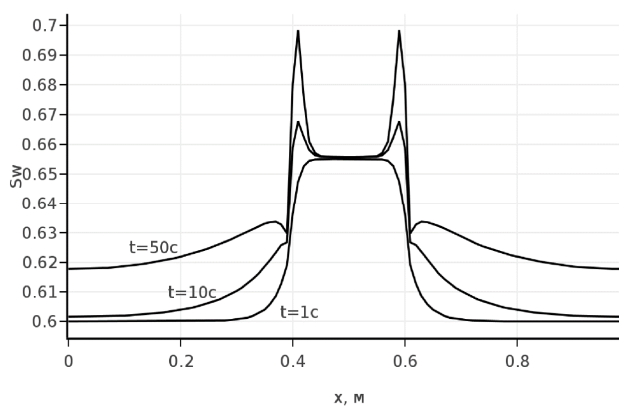
Выдача результатов расчетов производится для моментов времени  $t = 1, 10, 50$  с. Для растепленности берется как  $S_v^* = 0.5$ . Рассматриваются два варианта для источников энергии: без учета адиабатического расширения газа  $q_\varepsilon = \varepsilon_w q_w + \varepsilon_g q_g$  и с учетом адиабатического расширения газа  $q_\varepsilon = q_w \varepsilon_w + q_g (\varepsilon_g + P / \rho_g)$ . На рис. 4 представлено пространственное распределение растепленности с учетом адиабатического расширения газа для моментов времени  $t = 1, 10, 50$  с соответственно. На рис. 5 представлено распределение растепленности для случая, когда адиабатическое расширение газа не учитывается. В первом случае, при учете адиабатического расширения газа, не происходит дополнительное растепление гидратизированной среды на границах области действия источников ( $x = 0.4$  и  $x = 0.6$ ).



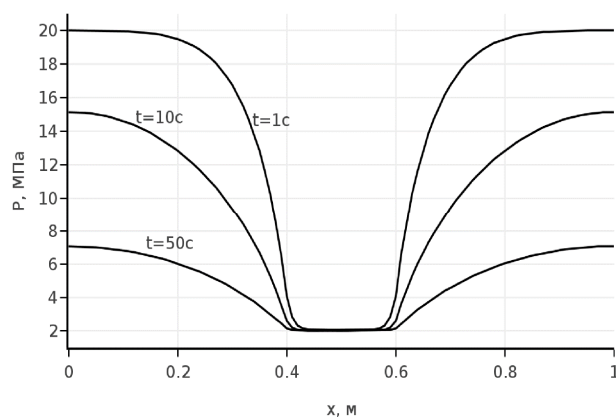
**Рис. 4.** Распределение растепленности для моментов времени 1, 10, 50 с; вариант с учетом адиабатического расширения газа.



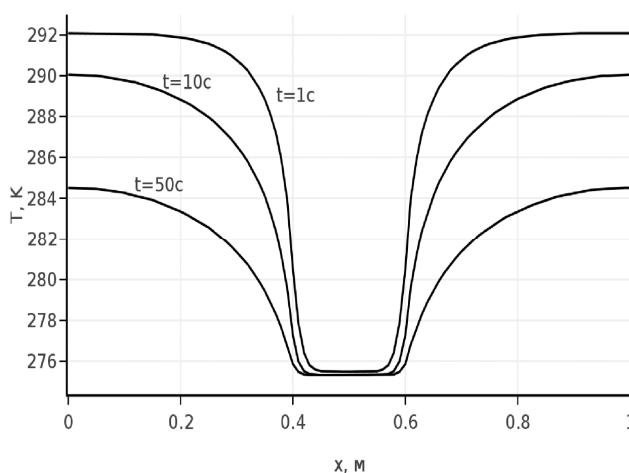
**Рис. 5.** Распределение растепленности для моментов времени 1, 10, 50 с; вариант без учета адиабатического расширения газа



**Рис. 6.** Распределение водонасыщенности для моментов времени 1, 10, 50 с; вариант с учетом адиабатического расширения газа



**Рис. 7.** Распределение давления для моментов времени 1, 10, 50 с; вариант с учетом адиабатического расширения газа



**Рис. 8.** Распределение температуры для моментов времени 1, 10, 50 с; вариант с учетом адиабатического расширения газа

Другие параметры ( $S_w$ ,  $P$ ,  $T$ ) в обоих случаях ведут себя подобным образом. Их пространственные распределения на те же моменты времени

представлены на рис. 6–8 соответственно. Для случая отсутствия адиабатического расширения газа были проведены дополнительные анализ и тестирование механизмов возникновения пиков растепленности на границах области действия источников ( $x=0.4$  и  $x=0.6$ ), в которых происходит «резкое» включение источников. Их возникновение связано с тем, что в силу задания отбора с  $\alpha=0$  вода, образующаяся при разложении гидрата, несжимаема, не отбирается и накапливается на границах зоны стока, что и приводит к соответствующим пикам растепленности при продолжающемся отборе газа на границах области действия зоны стока. Результаты расчетов с разными фазовыми проницаемостями показали, что нелинейность относительных фазовых проницаемостей по воде и газу, а также абсолютной проницаемости не влияет на возникновение пиков. Если отключить отбор после первой секунды, то пики не появляются.

Для оценки практической точности вычислений проводилась серия расчетов с измельчением сетки по времени и по пространству от «грубой» сетки ( $\tau = 0.01$  с и  $h=0.01$  м) до сетки в 16 раз более мелкой ( $\tau = 0.000625$  с и  $h=0.000625$  м). Результаты расчетов на самой мелкой сетке брались как эталонные (предполагалось, что они близки к точному решению) и использовались для оценки реальной погрешности и порядка скорости сходимости к «точному» решению. Погрешность оценивалась в норме «С» как максимум модуля разницы сеточных функций, отвечающих решениям на грубой и мелкой сетках. Скорость сходимости оценивалась через логарифм отношения погрешностей, полученных на двух грубых сетках с шагами, отличающимися в 2 раза.

Таким образом, для  $t = 1$  и  $10$  с проводились следующие расчеты:

- «эталонный» расчет:  $\tau^0 = 0.000625$ ,  $h^0 = 0.000625$ ;
- расчет  $n=1$ :  $\tau^1 = 0.01$ ,  $h^1 = 0.01$ ;
- расчет  $n=2$ :  $\tau^2 = 0.005$ ,  $h^2 = 0.005$ .

В таблицах 1 и 2 ниже приводятся полученные результаты погрешностей аппроксимации и порядка скорости сходимости ( $P_0 = 10$  МПа).

Таблица 1.  $t = 1$  с

Шаги	Погрешность		Порядок сходимости
	$n = 1$	$n=2$	$n=1,2$
$S_w$	0.0000011	0.0000005	1.14
$S_v$	0.0000016	0.0000007	1.16
$P/P_0$	0.120839	0.064643	0.90

Таблица 2.  $t = 10с$ 

Шаги	Погрешность		Порядок сходимости
	$n = 1$	$n=2$	$n=1,2$
$S_w$	0.020223	0.013281	0.61
$S_v$	0.030380	0.015489	0.97
$P/P_0$	0.062255	0.031878	0.97

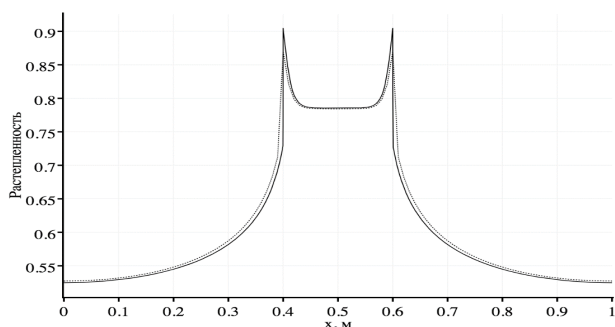
Заметим, что в силу разрывной правой части (источники в виде ступенчатой функции) имеются симметричные зоны сингулярности, отвечающие участкам резкого «включения» источников (при  $x=0.4$  и  $x=0.6$ ). В этих зонах наблюдается заметная разница между решениями на мелкой и грубой сетках, нарастающая с ростом  $t$ .

Для сравнения схем со свободно-объемной аппроксимацией (26), (27), (32) с неполностью консервативными разностными схемами, аппроксимирующими пьезопроводную среду с газогидратными включениями, рассмотрим вычислительный эксперимент, приводимый в данном разделе. В качестве примера схемы с неполностью консервативной аппроксимацией, т.е. не сводящейся к дивергентному разностному аналогу уравнений (1)-(7), выберем известный IMPIS метод<sup>5</sup>. Это схемы неявные по давлению и по насыщенностям. Построение и тестирование расщепленной по физическим процессам неявной по термодинамике (давление, температура) и явной по сатурациям (влагонасыщенность, растепленность) IMPES-схемы применительно к моделированию флюидодинамических процессов с гидратными включениями подробно изложено в [4]. Аппроксимация по времени в схеме со свободно-объемной аппроксимацией ((26), (27), (32)) членов, не связанных с нелинейной интерполяцией с весом  $\delta_v$  (см. (25)), в данном тесте выбирается такой же, как и в IMPIS методе, адаптированном к расчетам процессов с гидратными включениями, т.е. неявной по сатурациям ( $S_w, S_v$ ) и по термодинамическим переменным ( $P, T$ ). Эти члены в схеме со свободно-объемной аппроксимацией помечаются “волной”.

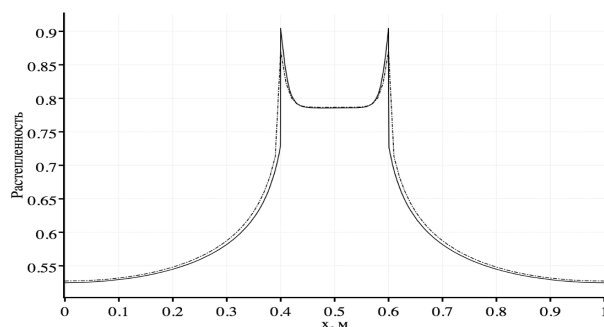
В приводимом тесте эффект адиабатического охлаждения, связанный с отбором газа из коллекторной зоны отсутствует. В этом приближении на границах зоны действия источника (отбора газа, пропорционального перепаду давлений) возникают пики насыщенностей, связанные со скин-эффектом диссипацией давления на этих границах внутрь области отбора газа. Именно эти сингулярные особенности решения (пики растепленности и водонасыщенности) на внутренних границах зоны резкой депрессии в коллекторе мы и выберем для сравнения схемы со свободно-объемной

аппроксимацией и IMPIS-схемы. Расчеты приводятся для моментов времени  $t = 1, 10, 30$  с. Для растеplенности берется как  $S_v^* = 0.5$ .

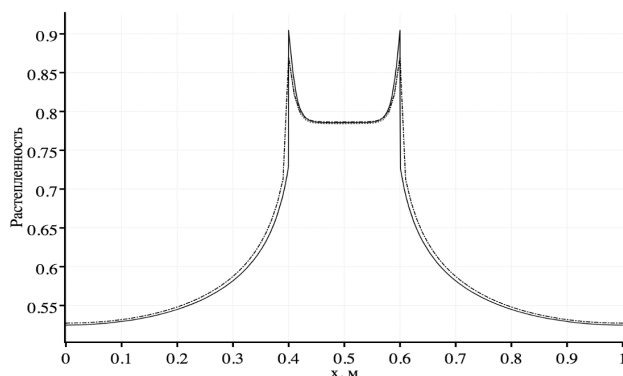
Решения для растеplенности, полученные различными методами (IMPIS-схема и свободно-объемная аппроксимация  $\alpha = 0, \beta = 0.00001$  при  $x \in [0.4; 0.6]$ ) на одинаковой расчетной сетке ( $h = 0.01$  м) с одинаковым шагом по времени ( $dt = 0.00753$  с) сравнивались с точным решением. В качестве точного решения использовано предельное (при уменьшении шага сетки до  $h = 1/16000$  м) решение, взятое как полусумма расчетов по IMPIS-схеме и методом свободно-объемной аппроксимации. На момент времени  $t = 10$  с отличие расчетов со свободно-объемной аппроксимацией от точного решения в L2-норме составило 0.00006234, расчетов по IMPIS-схеме от точного решения - 0.00005998 соответственно. Расчеты пространственных распределений растеplенности на этот момент времени по IMPIS-схеме и по схеме со свободно-объемной аппроксимацией вместе с точным решением представлены на рис. 11. Относительная точность итерационной сходимости в экспериментах составляла 1%.



**Рис. 9.** Распределение растеplенности на момент времени 10 с. Свободно-объемная аппроксимация - точечный пунктир, точное решение - сплошная линия  $\alpha = 0, \beta = 0.00001$  при  $x \in [0.4; 0.6]$ .



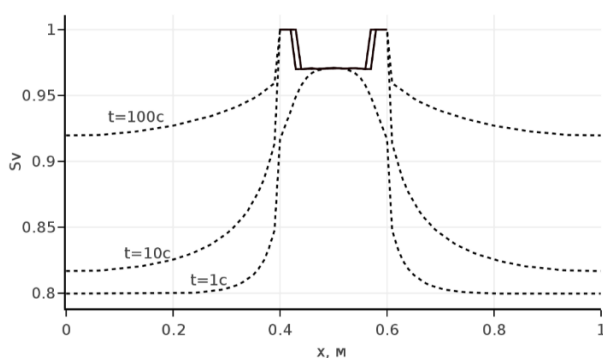
**Рис. 10.** Распределение растеplенности на момент времени 10 с. IMPIS схема - штрихпунктир, точное решение - сплошная линия  $\alpha = 0, \beta = 0.00001$  при  $x \in [0.4; 0.6]$ .



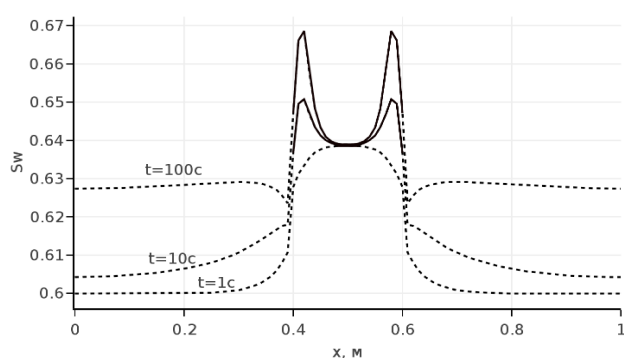
**Рис. 11.** Распределение растеplенности на момент времени 10 с. Свободно-объемная аппроксимация - точечный пунктир, IMPIS схема - штрихпунктир, точное решение - сплошная линия  $\alpha = 0, \beta = 0.00001$  при  $x \in [0.4; 0.6]$ .

На рис. 9, 10 также представлено отдельно сравнение точного решения с каждым из методов. Водонасыщенности, давление и температура при расчетах по схеме со свободно-объемной аппроксимацией и IMPIS-схемой практически не отличаются. Видно, что решения, полученные по обоим методам, незначительно отличаются между собой. Заметно их отличие от точного решения в зонах сингулярности. При этом на решении, полученном свободно-объемным методом, точно выполнено уравнение баланса внутренней энергии в виде (30). Заметим также, что интерполяция с весом  $\delta_v$  (см. (25)), там, где она вводится, имеет второй порядок по времени.

Далее приведены результаты трансфазных расчетов метода двойной каркасности. Расчеты приводятся для моментов времени  $t = 1, 10, 100$  с. На рис. 12-15 представлены результаты расчетов по схеме со свободно-объемной аппроксимацией. Здесь растепленность берется как  $Sv^* = 0.8$ . В расчетах реализуется совместный трансфазный пространственно расширяющийся внутри области действия отбора газа  $[0.4; 0.6]$  процесс депрессии давления в возникающей талой зоне и в остальной пьезопроводной среде коллектора с газогидратными включениями. Такой трансфазный расчет проводится впервые. Пики температуры на рис. 15 на границах области отбора газа ( $x = 0.4$  м и  $x = 0.6$  м) связаны с отсутствием термобарической зависимости  $T_{dis} = T(P)$  в возникшей здесь и продолжающей пространственно расширяться талой зоне. Сюда прибывает более горячий газ из областей, где отбор газа отсутствует, энергия которого не тратится на растепление гидратов, уже отсутствующих в талой зоне.

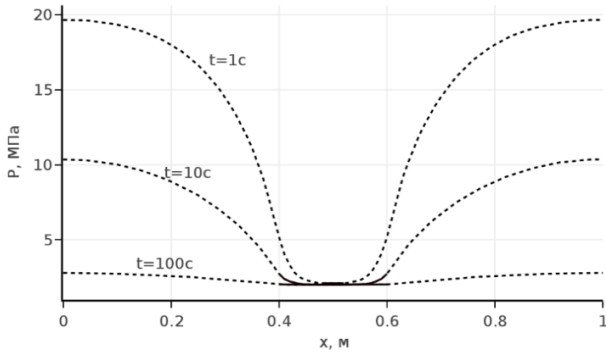


**Рис. 12.** Распределение растепленности для моментов времени 1, 10, 100 с. Трехфазная зона – штрих-пунктир, талая зона – сплошная линия.

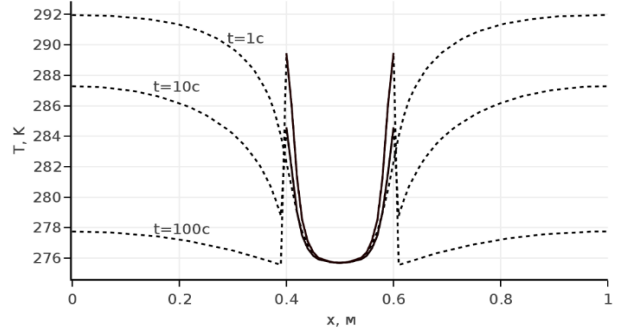


**Рис. 13.** Распределение водонасыщенности для моментов времени 1, 10, 100 с. Трехфазная зона – штрих-пунктир, талая зона – сплошная линия.

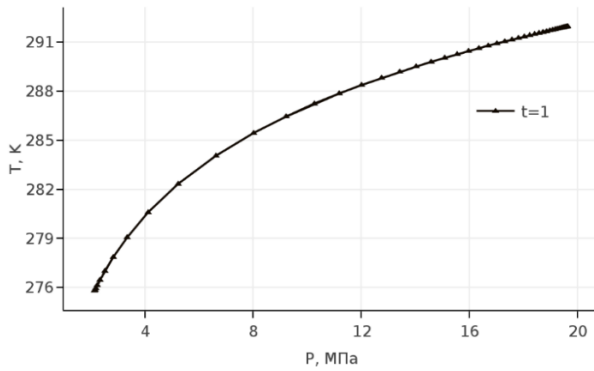




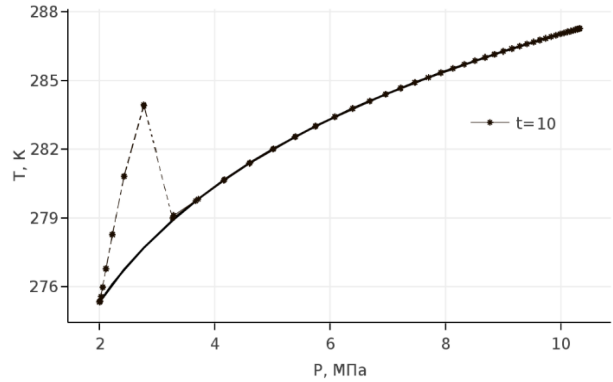
**Рис. 14.** Распределение давления для моментов времени 1, 10, 100 с. Трехфазная зона – штрих-пунктир, талая зона – сплошная линия.



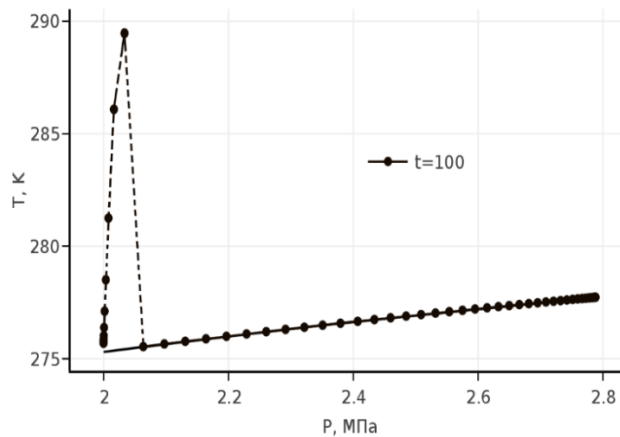
**Рис. 15.** Распределение температуры для моментов времени 1, 10, 100 с. Трехфазная зона – штрих-пунктир, талая зона – сплошная линия.



**Рис. 16.** Зависимость температуры от давления во всей плоскости для момента времени 1 с. Термобарическое равновесие  $T=f(P)$  – сплошная линия.



**Рис. 17.** Зависимость температуры от давления во всей плоскости для момента времени 10 с. Термобарическое равновесие  $T=f(P)$  – сплошная линия.



**Рис. 18.** Зависимость температуры от давления во всей плоскости для момента времени 100 с. Термобарическое равновесие  $T=f(P)$  – сплошная линия.

На рис. 16-18 представлены зависимости температуры от давления, полученные в расчетах для моментов времени 1, 10, 100 с. Расчетные данные помечены маркерами в отличие от кривой термобарического равновесия  $T_{dis} = T(P)$ , изображенной сплошной линией. Также видно, что в процессе расчета происходит перемещение области трехфазного течения в целом в зону пониженного давления вдоль кривой термобарического равновесия. При этом часть области флюидодинамического течения вблизи границ области отбора газа ( $x = 0.4$  м и  $x = 0.6$  м), соответствующая возникающей двухфазной талой зоне, «соскальзывает» с кривой равновесия в область более высоких температур.

### Основные результаты

1. Самосогласованная модель совместной фильтрации в гидратизированной флюидодинамической среде с твердофазными включениями и талой зоне.

2. Семейство двухслойных полностью консервативных разностных схем с профилированными по пространству временными весами для расчета процессов в талой зоне и пьезопроводной среде с газогидратными включениями. Применительно к задачам фильтрационной флюидодинамики с газогидратными включениями, в частности, с разрывными свойствами пласта и сложной разномасштабной структурой коллекторной зоны разработан новый класс операторно-согласованных разностных схем решения начально-краевых задач для уравнений параболического типа на пространственных неструктурированных сетках общего вида.

3. В пространственно-одномерном случае осуществлена программная реализация разработанного метода в виде робастного программного комплекса.

4. Получены результаты численного исследования процессов, происходящих в газогидратных пластах, в частности, при гидродинамическом моделировании газогидратного Мессояхского месторождения. Исследованы задачи фильтрационной флюидодинамики с твердофазными включениями. Проведены расчеты трансфазных динамически возникающих процессов совместной фильтрации в талой зоне и в среде, содержащей твердофазные газогидратные включения.

**Список публикаций**

1. Дмитриевский А.Н., Каракин А.В., Повещенко Ю.А., Казакевич Г.И., Рагимли П.И. Гидродинамическое моделирование гидратного месторождения. Журнал Геология, геофизика и разработка нефтяных и газовых месторождений. 2017, № 2. С. 30-35.
2. Рагимли П.И., Повещенко Ю.А., Казакевич Г.И., Бойков Д.С., Гасилова И.В. Модель флюидодинамики в пористой среде, содержащей газогидраты. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2016, № 119, 17 с.
3. Попов И.В., Повещенко Ю.А., Поляков С.В., Рагимли П.И. Об одном подходе к построению консервативной разностной схемы для задачи двухфазной фильтрации. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2017, № 69, 12 с.
4. Рагимли П.И., Повещенко Ю.А., Рагимли О.Р., Подрыга В.О., Казакевич Г.И., Гасилова И.В. Использование расщепления по физическим процессам для численного моделирования диссоциации газовых гидратов. Математическое моделирование. 2017, том 29, №7, с. 133-144.  
Перевод: Rahimly P.I., Poveshchenko Yu.A., Rahimly O.R., Podryga V.O., Kazakevich G.I., Gasilova I.V. The use of splitting with respect to physical processes for modeling the dissociation of gas hydrates. Mathematical Models and Computer Simulations. 2018, v. 10, № 1, p. 69-78.
5. Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Рагимли П.И. Об одном подходе свободно-объемной аппроксимации пьезопроводной среды с газогидратными включениями. Mathematica Montisnigri. 2017, т. 40, с. 68–89.
6. Рагимли П.И., Шарова Ю.С., Рагимли О.Р., Подрыга В.О., Гасилова И.В., Попов С.Б., Повещенко Ю.А. Моделирование некоторых задач флюидодинамики с газогидратными включениями на основе расщепления по физическим процессам. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018, № 39. 27 с.
7. Рагимли П.И., Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Рагимли О.Р., Попов С.Б. Моделирование процессов совместной фильтрации в талой зоне и пьезопроводной среде с газогидратными включениями. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018, № 40. 32 с.
8. Poveshchenko Yu.A., Podryga V.O., Rahimly P.I., Sharova Yu.S. About one discrete model of splitting by the physical processes of a piezoconductive medium with gas hydrate inclusions. Journal of Physics: Conference Series (JPCS). 2018, v.946, p.012077.
9. Рагимли П.И. Комплекс программ для моделирования многофазных течений в коллекторах с газогидратными включениями // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 103. 20 с. doi:10.20948/prepr-2018-103 URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-103>.