

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ИНСТИТУТ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

На правах рукописи

Рождественская Татьяна Ивановна

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ НЕОДНОРОДНЫХ  
ЖИДКОСТЕЙ ПРИ ОБТЕКАНИИ ИМИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

Специальность: 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы.

ДИССЕРТАЦИЯ

На соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., проф. Гущин В.А.

МОСКВА – 2013

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.

ГЛАВА 1. Постановка задачи и методика расчета обтекания цилиндра неоднородной жидкостью.

1.1. Общая характеристика течений стратифицированной жидкости.

1.2. Краткий обзор литературы.

1.3. Постановка задачи, уравнения, начальные и граничные условия.

1.4. Метод решения задачи.

ГЛАВА 2. Тестовые расчёты двумерных течений с различными значениями параметров  $Re$  и  $Fr$  для сравнения с экспериментальными данными.

2.1. Подбор расчётных параметров. Результаты сравнения с экспериментальными данными.

2.2. Выводы.

ГЛАВА 3. Сравнительное исследование двумерных течений для жидкостей с различными периодами плавучести. в одном и том же диапазоне чисел  $Re$ . Явления, наблюдаемые в этих течениях.

3.1. Результаты расчётов течений с периодом плавучести  $T_b=25.2c$  – мгновенные линии тока и линии равной солёности.

3.2. Результаты расчётов течений с периодом плавучести  $T_b=6.28c$  – мгновенные линии тока и линии равной солёности.

3.3. Исследование длины застойной зоны за задней критической точкой цилиндра.

4.4. Исследование формы линий равной солёности.

ГЛАВА 4. Особенности и сравнительная характеристика трёхмерных течений.

4.1. Сравнительное исследования течений с периодами плавучести  $T_b=6.28c$  и  $T_b=15c$ .

4.2. Расчёт углов отрыва этих течений.

4.3. Подтверждение достоверности результатов.

Выводы.

Заключение.

Список литературы.

## ВВЕДЕНИЕ

Актуальность изучения стратифицированной жидкости, в данном случае – жидкости, стратифицированной по плотности, конкретно – морской воды – имеет очень большое значение для науки и техники. Результаты таких исследований могут применяться при изучении обтекания морской водой подводных судов и частей судов, погружённых в воду, при изучении морских течений за островами, и следовательно, безопасности мореплавания и многих других вопросов.

Стратифицированная жидкость характеризуется следующими параметрами: масштабом стратификации (плавучести), периодом плавучести, частотой Вайсъяля-Брента (частотой, с которой элементарный объём жидкости, смещённый в направлении силы тяжести из положения равновесия, колеблется около него под действием силы Архимеда) .

Одним из часто встречающихся в природе видов стратификации является экспоненциальная. Если стратификация слабая, её можно считать линейной. В данной работе в качестве стратифицированной жидкости рассматривается вода, в которой растворена соль NaCl. Это наиболее распространённая в природе жидкость (вода в морях и океанах). Течение стратифицированной жидкости имеет особенности, не свойственные течению однородной жидкости. При исследовании структуры течения вокруг препятствия были обнаружены такие явления, как опережающее возмущение – блокировка жидкости перед препятствием и присоединённые внутренние волны. При более подробном рассмотрении тонкой структуры течения удалось выявить

и другие особенности. В данной работе в качестве препятствия рассматривалось тело вращения - круглый цилиндр –классический объект в механике сплошной среды. Все особенности моделировались численно.

Рассматривается обтекание кругового цилиндра линейно стратифицированной по плотности жидкостью. Исследовались различные режимы течения для трёх жидкостей с разной концентрацией соли: с периодом плавучести  $T_b=25.2$  с.,  $T_b=6.28$  с. и  $T_b=15$ с. в достаточно широком диапазоне чисел  $Re$  и  $Fr$ . Подробно исследована структура течений, выявлены особенности двумерных и трёхмерных течений, в том числе такие, которые не обнаруживались ранее ни теоретически, ни экспериментально.

Для математического моделирования таких сложных течений, как течения неоднородной жидкости, требуются специальные методы решения уравнений, описывающих эти течения, а именно: конечно-разностные схемы, реализующие эти методы, должны иметь порядок аппроксимации не ниже второго, минимальную схемную вязкость, монотонность и применимость в широких областях параметров, характеризующих течения.

**АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ.** Поскольку течения неоднородной жидкости очень часто встречаются в природе и в технике, необходимо их тщательное изучение, для которого одних экспериментальных методов недостаточно. Поэтому для более глубокого их исследования необходимо создание численных методов, и, в частности, методов визуализации структуры и особенностей таких течений. В данной работе численно обнаружены и исследованы новые особенности течений неоднородной жидкости.

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ** состоит в исследовании двумерных и трёхмерных течений неоднородной жидкости около круглого цилиндра с помощью созданного автором комплекса программ, и визуализации результатов. Данный вычислительный комплекс был разработан для машин с параллельной архитектурой.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА РАБОТЫ. Метод Белоцерковского-Гущина-Коньшина (метод расщепления по физическим факторам для несжимаемой жидкости с явной гибридной конечно-разностной схемой (Белоцерковский и др., 1975; Белоцерковский и др., 1987; Гущин, 1990) был модифицирован автором диссертации для расчётов течений неоднородной жидкости. Для программной реализации этого метода был создан эффективный механизм параллельного счёта. При расчётах двумерных течений впервые были численно выявлены слои повышенной плотности за телом, возникающие при обтекании его неоднородной жидкостью. Ранее они были обнаружены только экспериментально. Другие особенности течений неоднородной жидкости (застойная зона - блокировка жидкости перед препятствием) и возникновение внутренних волн тяжести), не свойственные течениям однородной жидкости, так же были промоделированы. Результаты численных расчётов находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными. Кроме того, было обнаружено два явления, не отмеченные ранее в других исследованиях: необычное распределение возмущения солёности в форме “гребня” в течении перед цилиндром и существование застойных зон в следе за цилиндром для течений жидкости с малыми периодами плавучести при числах Рейнольдса меньших 60.

В расчётах трёхмерных течений, произведённых в широком диапазоне чисел Рейнольдса и Фруда исследован размер области, занятой присоединёнными волнами в верхнем течении далеко перед критической точкой цилиндра. Кроме того, рассчитаны углы отрыва во всём рассматриваемом диапазоне течений. Подобные исследования также произведены впервые.

Обнаруженное при исследовании трёхмерных течений явление – огромная величина области, занятой внутренними волнами в верхнем течении перед критической точкой цилиндра по сравнению с препятствием, их вызывающим, может иметь большое практическое значение: обнаружение

движущихся в солёной (морской) воде объектов **на больших расстояниях вверх по течению** от них.

НАУЧНАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ работы состоит в том, что с помощью созданного автором комплекса программ для вычислительных машин с параллельной архитектурой выявлены и исследованы новые, до этого неизвестные особенности течений неоднородной жидкости в широком диапазоне их параметров. Указана возможность практического применения результатов исследований.

Работа состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка цитированной литературы.

Во введении кратко изложено содержание работы по главам, указаны её актуальность, новизна и практическая ценность.

В первой главе приводится общая характеристика течений стратифицированной жидкости около препятствий, обзор литературы по исследованию таких течений, и методика расчёта обтекания цилиндра неоднородной жидкостью.

Во второй главе проводилось тестирование метода путём сравнения результатов расчёта с данными эксперимента для различных режимов течения на примере жидкости с периодом плавучести  $T_B = 25.2$  сек.

Из результатов сравнения видно, что совпадение результатов расчёта с данными экспериментов, проводимых в лаборатории механики жидкости ИПМех РАН, очень хорошее. Более того, в вычислительном эксперименте впервые обнаружены прослойки плотности в следе за цилиндром,- явление, ранее обнаруженное только в эксперименте, и определён диапазон параметров течения – чисел  $Re$  и  $Fr$ , при которых они возникают. Показано, что выбор размера сетки  $180*180$  для двумерной задачи позволяет разрешить особенности тонкой структуры течений неоднородной жидкости.

В третьей главе исследовались различные режимы двумерных течений для двух жидкостей с различными степенями солёности: с периодами плавучести  $T_B = 25.2$  сек. и  $T_B = 6.28$  сек. с различными значениями чисел  $Re$  и  $Fr$ . Произведён сравнительный анализ особенностей этих течений. При визуализации линий равной солёности во всех исследованных в данной работе течениях жидкостей обнаружено необычное, в виде “гребня”, распределение возмущения солёности в опережающем возмущении перед цилиндром. В течениях с периодом плавучести  $T_B = 6.28$  с. обнаружены застойные зоны в следе за цилиндром при числах  $Re$ , меньших 60. Для течений с числами  $Re$ , превышающими 60, застойные зоны не наблюдаются.

Ранее ни в каких исследованиях это явление не было обнаружено.

В четвёртой главе подробно рассмотрены трёхмерные течения. Эффекты трёхмерности появляются, как следует из эксперимента, при  $Re > 250$ . В результате проведённых исследований определена зависимость размера области, занимаемой присоединёнными волнами, от скорости набегающего потока. Рассчитаны максимальные углы отрыва для всех рассматриваемых течений. Полученные результаты могут иметь практическое применение.

В заключении перечислены основные результаты работы.

Результаты исследований, выполненных в процессе работы над данной диссертацией, докладывались на XI международной конференции “Потоки и структуры в жидкостях” (Москва, 2001г.), на международном русско – японском семинаре по турбулентности и неустойчивостям в жидкостях (Москва, 2004г.), на приглашённом докладе в ИПМ РАН (2005г.), на семинарах в ИАП РАН (в июле 2010г. и в апреле 2012г.). Окончательные результаты работы были доложены на семинаре в ИПМ им. М.В. Келдыша 6 июня 2013г.

По результатам работы имеется несколько публикаций: [15], [16], [17], [18], [19], [21],[22], [23], [28]. .

ГЛАВА 1. Постановка задачи и методика расчета обтекания цилиндра неоднородной жидкостью.

### 1.1 Общая характеристика течений стратифицированной жидкости.

Исследование пространственно-временных характеристик течений непрерывно стратифицированной жидкости около препятствий, представляет общенаучный и практический интерес, поскольку в природных условиях и технологических аппаратах жидкости являются стратифицированными вследствие неоднородности распределения температуры, концентрации растворенного или взвешенного вещества.

При теоретическом анализе течений стратифицированной жидкости учет стратификации добавляет в систему уравнений гидродинамики силу плавучести и уравнение диффузии стратифицирующей компоненты. Стратификация добавляет к традиционным элементам течения (пограничный слой, след за препятствием, вихревая дорожка) новые – внутренние волны и опережающее возмущение. Следует отметить, что стратифицированная жидкость является неравновесной средой, в которой даже в отсутствие внешних дестабилизирующих факторов на непроницаемых поверхностях вследствие прерывания потока стратифицирующей компоненты формируются пограничные течения, с собственными масштабами изменчивости скорости и плотности [1]. При этом решение задачи существенно усложняется вследствие появления новых малых и больших параметров, обусловленных слабостью стратификации и малостью диффузионных факторов.

Наибольшее распространение получили две модели стратификации – двухслойная жидкость, когда расчеты проводятся по аналогии с поверхностными волнами, и экспоненциально стратифицированная. Вследствие слабой стратификации в постановке задачи уравнения Навье-Стокса записаны в приближении Буссинеска, когда изменения плотности



считаются пренебрежимо малыми везде, за исключением члена с силой тяжести, описывающего влияние плавучести.

1.2. Экспериментальному исследованию течения линейно стратифицированной жидкости (экспоненциальное и линейное распределения плотности не различимы в пределах точности опытов в случае слабой стратификации) около горизонтального цилиндра посвящено большое число работ. В большинстве из них оптическими методами визуализирована структура течения и определены геометрические характеристики волн, вихрей и следов. Феноменологическая классификация режимов течения [2] расширена и дополнена в [3] с учетом расположения высокоградиентных прослоек в следах. Новые типы неустойчивости ламинарного течения за цилиндром при малых числах Фруда отмечены в [4]. При аналитических расчетах опережающего возмущения используются предположения об идеальности жидкости и затухании всех возмущений на больших расстояниях перед препятствием [5]. Границы применимости такого подхода, позволяющего описать ключевые элементы течения около цилиндра – заблокированную жидкость перед препятствием, присоединенные внутренние волны, висячие вихревые системы («роторы» по терминологии авторов), проанализированы в работе [6]. Хотя формально метод [5] применим для расчета течений при больших числах Фруда  $Fr > 0.5$  (определяемых скоростью  $U$  и диаметром  $D$  цилиндра и частотой плавучести  $N$ ,  $Fr=U/ND$ ), он дает удовлетворительные результаты и при меньших значениях числа Фруда.

Для численного моделирования стратифицированных течений используется метод расщепления, первоначально предложенный для расчета течений однородной жидкости [7]. Его подробное описание и различные примеры использования для расчета двух- и трехмерных нестационарных течений стратифицированной жидкости, включая течения со свободной

поверхностью, приведены в [8,9]. Согласие расчетов и данных экспериментального исследования присоединенных внутренних волн за цилиндром достаточно хорошее [10]. Хотя потенциальные возможности метода расщепления по физическим факторам достаточно большие, ранее он фактически использовался только для расчета крупномасштабных элементов течений и присоединенных внутренних волн. Тонкоструктурные элементы стратифицированных течений, составляющие основу феноменологической классификации режимов течений, ранее численно не анализировались. Появление новых компьютеров позволяет более полно реализовать возможности вычислительных подходов и детально рассчитывать картины течений.

### 1.3. Постановка задачи, уравнения, граничные и начальные условия.

Рассматривается поперечное обтекание горизонтального цилиндра диаметра  $D$  потоком линейно стратифицированной жидкости, плотность которой  $\rho(y) = \rho_0(1 - \frac{y}{\Lambda} + s)$ , линейно связанная с солёностью, убывает с высотой  $y$  вследствие изменения солёности. Здесь  $\rho_0 = \rho(0) = 1$ ,  $\Lambda$  - масштаб стратификации,  $s$  - возмущение солёности, отклонение от состояния её гидростатического равновесия. Это явление описывается системой уравнений, состоящей из уравнения Навье-Стокса записанного в приближении Буссинеска, которое применимо вследствие слабой стратификации; уравнения несжимаемости жидкости и уравнения диффузии соли:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} s$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)s = \kappa_s \nabla^2 s + \frac{1}{\Lambda} \mathbf{v} \cdot \mathbf{y},$$

где  $\mathbf{v}$  – вектор скорости,  $p$  – давление,  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения,  $s$  – возмущение солёности,  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости,  $\kappa_s$  – коэффициент диффузии соли. Стратификация характеризуется линейным

масштабом  $\Lambda = \left| d(\ln \rho) / dy \right|^{-1}$  и периодом плавучести

$$T_b = 2\pi / N = 2\pi \sqrt{\frac{\Lambda}{g}}; \quad N - \text{частота Вьсяйля – Брента [11].}$$

Скорость потока на бесконечности равна  $U$ . В качестве граничных условий

используются: условия невозмущенного потока на достаточно удаленном от центра контуре  $G$ : ; условия прилипания для скорости  $\mathbf{v}|_{\Gamma} = 0$  и отсутствия

нормальной компоненты потока солёности  $\left. \frac{\partial s}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0$  на поверхности

цилиндра  $\Gamma$  ( $u, v$  – компоненты вектора скорости вдоль осей полярной системы координат  $(r, \vartheta)$ ).

В качестве начальных условий для скорости задается невозмущенный плоскопараллельный поток  $u = U \cos \vartheta, v = -U \sin \vartheta$  с учетом граничных условий на поверхности цилиндра. Начальное условие для возмущения

давления во всей расчётной области –  $p = 0$ . Основными масштабами задачи

(кроме внешних – размера тела и масштаба плавучести) являются размеры структурных элементов течения: длина присоединенной внутренней волны

$$\lambda = UT_b = 2\pi U / N, \text{ толщина скоростного пограничного слоя } \delta_u = \nu / U \text{ и}$$

толщина плотностного пограничного слоя  $\delta_\rho = \kappa_s / U$ . Масштаб

обусловленного стратификацией внутреннего пограничного течения

составляет  $\delta_N = \sqrt{\nu/N}$ , а масштаб соответствующей плотностной неоднородности  $\delta_s = \sqrt{\kappa_s/N}$  [2].

Отношения базовых масштабов образуют основные безразмерные параметры: число Рейнольдса  $Re = D/\delta_u = UD/\nu$ , число Пекле  $Pe = D/\delta_\rho = UD/\kappa_s$  (или число Шмидта  $Sc = Pe/Re$ ), внутреннее число Фруда –  $Fr = \lambda/2\pi D = U/ND$ ; отношение масштабов  $C = \Lambda/D$ . Поскольку стратификация является слабой, а кинетические коэффициенты достаточно малы, значения базовых масштабов существенно различаются между собой ( $\Lambda \gg D \gg \delta_u \gg \delta_\rho$ ;  $\lambda \gg \delta_\nu \gg \delta_s$ ). Техника лабораторного эксперимента и вычислительные подходы разрабатывались с учетом необходимости выделения структурных элементов с различными масштабами.

Выбирая в качестве масштаба скорости скорость потока  $U$ , масштаба длины – диаметр цилиндра  $D$ , систему (1) запишем в безразмерных переменных:

$$(Fr_g = \frac{U^2}{gD} = Fr^2 \cdot \frac{D}{\Lambda}).$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\mathbf{g}s}{Fr_g}$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)s = \frac{1}{Pe} \nabla^2 s + \frac{D v_y}{\Lambda}$$

Расчетная область, показанная на рис. 1, заключена между двумя концентрическими окружностями – границей цилиндра  $\Gamma$  и внешней –

условной границей  $G$ , за которой находится невозмущенная область. Поток жидкости со скоростью  $U$  направлен слева направо вдоль оси  $OX$ . В расчетах используется полярная система координат  $(r, \theta)$  с началом в центре цилиндра.

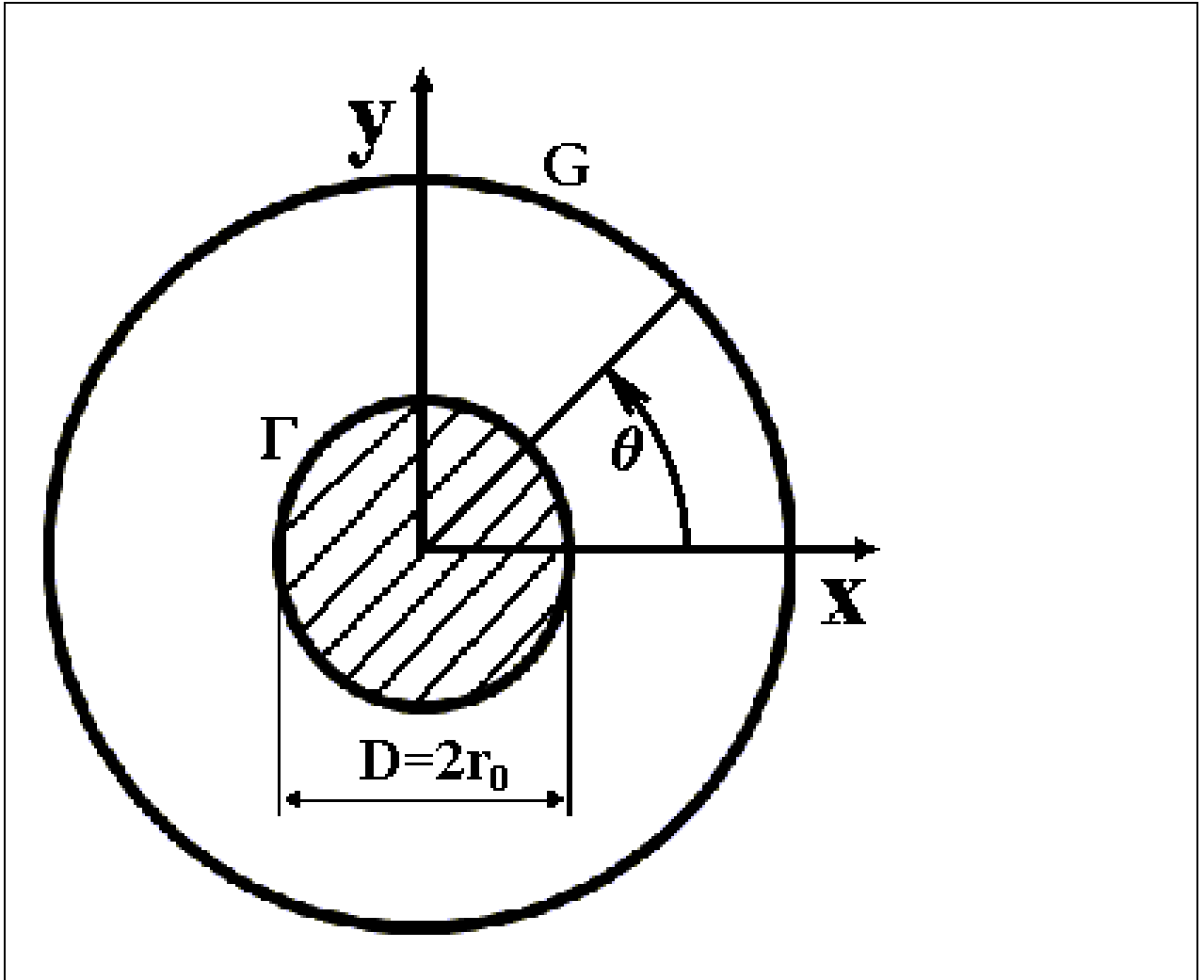


Рис. 1. Расчетная область течения.

1.4. Методика расчета. Для удобства вычислений расчетная область преобразуется в прямоугольную со сторонами, расположенными:  $z$  – в горизонтальном направлении и  $\theta$  – в вертикальном, с помощью замены  $r = R(z)$ , где  $R(z) = 1 + \alpha z + z^3$ ; коэффициент преобразования  $\alpha = 0.2\sqrt{2/\text{Re}}$ . Новая ортогональная система координат  $(z, \theta)$ ;  $z \in [0, \infty]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , связана с декартовой системой преобразованием :

$x = R(z) \cos \theta$ ;  $y = R(z) \sin \theta$ . Расчетная сетка в координатах  $z, \theta$  является равномерной и более удобной для использования конечно-разностных методов, чем полярная. В то же время эта сетка позволяет лучше разрешать особенности течения вблизи цилиндра.

Для решения системы уравнений (2) используется метод расщепления по физическим переменным с явной гибридной конечно-разностной схемой второго порядка аппроксимации по пространственным переменным. Она характеризуется монотонностью, минимальными схемной вязкостью и дисперсией, что дает возможность проводить расчеты в широком диапазоне чисел Рейнольдса и Фруда [7]. При использовании метода расщепления решение задачи (2) разделяется на 3 этапа. Пусть в некоторый момент времени  $\tau_n = n\Delta\tau$  ( $\Delta\tau$  - шаг по времени,  $n$  - число шагов) известно поле скорости  $\vec{v}^n$ . Тогда схему определения неизвестных функций в момент времени  $\tau_{n+1} = (n+1)\Delta\tau$  можно представить следующим образом:

На первом этапе определяется вспомогательная сеточная функция  $\tilde{v}$ , учитывающая только конвективные и вязкие члены, а также силы плавучести, но не удовлетворяющая условию  $\text{div } \vec{v} = 0$ :

$$\frac{\tilde{v} - v^n}{\Delta\tau} = -(v^n \nabla) v^n + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v^n + \frac{\vec{g}s}{\text{Fr}_g},$$

На втором этапе из решения уравнения Пуассона находится поле давления с учетом условия  $\nabla v^{n+1} = 0$ :

$$\nabla^2 p = \frac{\nabla \tilde{v}^n}{\Delta\tau}$$

На третьем этапе вычисляется поле скоростей на  $n+1$  слое по времени:

$$v^{n+1} = \tilde{v} - \nabla p \Delta\tau,$$

после чего, учитывая найденное значение  $v^{n+1}$ , решается уравнение для возмущения солёности:

$$s^{n+1} = s^n - \Delta\tau(v^{n+1}\nabla)s - \frac{\Delta\tau\Delta s}{Pe} + \frac{\Delta\tau \cdot D \cdot (u \cdot \sin\vartheta + v \cdot \cos\vartheta)}{\Lambda}$$

При решении этого уравнения в создании разностной схемы для  $(v^{n+1}\nabla)s$  был использован тот же принцип, что и для  $(v^n\nabla)v^n$  в уравнении Навье-Стокса. То есть результирующая схема представляет собой гибридную конечно-разностную схему, основанную на комбинации модифицированных схем с центральными и ориентированными разностями; условие переключения с одной схемы на другую зависит от знаков скорости, а так же первой и второй производной переносимой функции в рассматриваемой точке течения.

Уравнение Пуассона для расчёта давления решается методом точечной верхней релаксации (ТВР) [12], применённого для цилиндрической системы координат. Для расчётной реализации методики, изложенной выше, автором диссертации был создан комплекс программ на языке программирования FORTRAN-77, который затем был распараллелен в направлении оси  $z$  вдоль радиуса цилиндра. Распараллеливание осуществлялось с помощью технологии MPI [13]. После чего параллельный алгоритм был оптимизирован для увеличения скорости обмена данными между процессорами.

Для двумерной задачи расчётная сетка содержит 180 точек по  $z$  и 180 точек по  $\theta$  (первая ячейка  $-0.07\text{см} \times 0.044\text{см}$ , что достаточно для разрешения элементов тонкой структуры). Удаление внешней границы от поверхности цилиндра  $Z_{\max}=4.5$ , что составляет примерно 45 диаметров цилиндра. Затем делались пробы подбора различной густоты сеток одновременно с изменением расстояния удаления внешней границы так, чтобы шаг по пространственной координате оставался неизменным (т.е., чтобы значения вычисляемых параметров были всегда в одних и тех же точках). Пробы делались на варианте течения:  $T_b=25.2$  сек.;  $Re=25.$ ,  $Fr=0.16$ . Сначала испытывался вариант сетки  $(240*240)$  при удалении внешней границы  $Z_{\max}=6$ . Результаты в виде полного подобия картинок мгновенных

линий тока и линий равной солёности совпадали с первоначально выбранным вариантом. Затем бралась сетка (160\*160) при удалении внешней границы  $Z_{\max}=4$ . Результаты в общем совпадали с первоначальным видом выбора сетки и удаления внешней границы, но были несколько менее информативны, изображение было менее чётким.. В конечном итоге все расчёты делались с первоначальным выбором сетки и положения внешней границы, поскольку сетка (180\*180) обладает лучшей разрешающей способностью. Шаг по времени выбирается автоматически из условия Куранта. С учетом условия сопоставимости с экспериментом продолжительность расчетной реализации составляет  $10 T_b$ . Расчеты выполнены на суперкомпьютерах PARAM – 10000 (Ultra Spark II, 400 MHz), MVS-1000 (Intel Xeon, 1.7GHz) ИАП РАН и MVS-100 МСЦ РАН.

Все численные данные, представленные для сравнения с экспериментом, пересчитаны в декартову систему координат, в которой цилиндр движется относительно неподвижной жидкости .

ГЛАВА 2. Тестовые расчёты двумерных течений с различными значениями параметров  $Re$  и  $Fr$  для сравнения с экспериментальными данными .

2.1. Результаты сравнения с экспериментальными данными.

Для сравнения с экспериментом, который проводился в водном растворе поваренной соли (NaCl), в расчетах принимались следующие значения коэффициентов: кинематической вязкости –  $\nu = 0.01 \text{ см}^2 / \text{с}$ , диффузии соли  $\kappa_s = 1.41 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2 / \text{с}$ . Период плавучести –  $T_b = 25.2 \text{ с}$ , скорость цилиндра  $U$  изменялась в пределах  $0.1 - 0.4 \text{ см/с}$ , диаметр цилиндра  $D=2.5 \text{ см}$ . Экспериментальные данные предоставлены Лабораторией механики жидкости ИПМех. РАН. На рис. 2 изображена картина течения



стратифицированной жидкости около цилиндра ( $D=2.5$  см;  $U=0.1$  см/с;  $T_B=25.2$  с;  $Fr=0.16$ ;  $Re=25$ ).

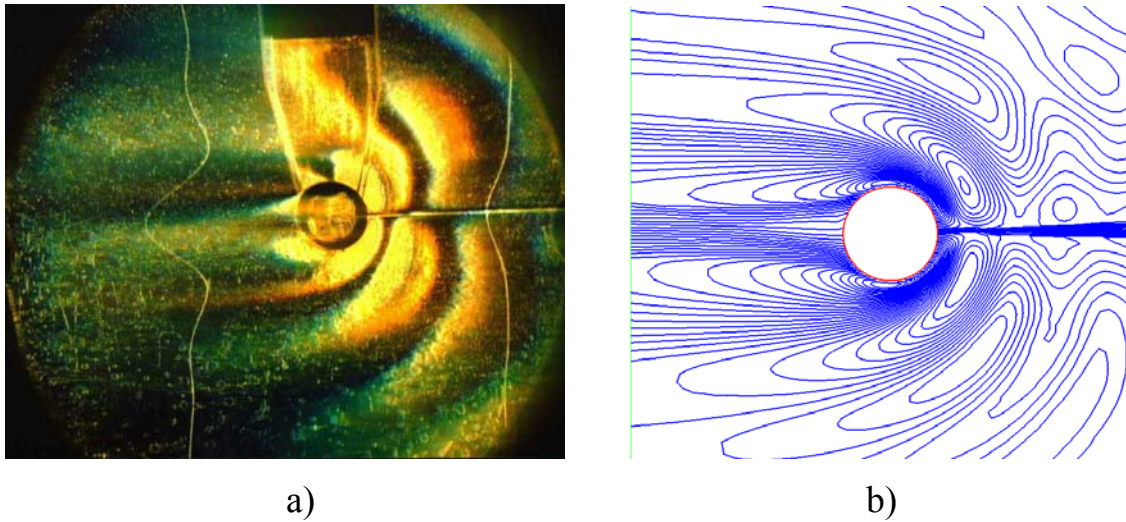


Рис. 2. Картина стратифицированного течения около цилиндра: а) – теневая фотография, б) – картина рассчитанных изолиний солености ( $D=2,5$  см;  $U=0,1$  см/с;  $T_b=25,2$  с;  $Fr=0,16$ ;  $Re=25$ ).

Типичная теневая картина ламинарного стратифицированного течения около цилиндра и рассчитанная карта изолиний солености в системе координат, связанной с цилиндром, приведены для сравнения на рис. 2 (цилиндр движется справа налево). Теневое изображение на рис. 2 а, полученное методом "вертикальные щель-нить в фокусе", иллюстрирует структуру поля модуля градиента солености. Метки визуализируют профили скорости в опережающем возмущении и в следе позади цилиндра. Картина изолиний на рис. 2 б представляет поле возмущений солености.

На рис. 2 также видны общие элементы наблюдаемой и рассчитанной картин течения – опережающее возмущение, скоростной и плотностной следы позади цилиндра, поле внутренних волн. Опережающее возмущение состоит из заблокированной жидкости непосредственно перед телом и нестационарных внутренних волн, плавно переходящих в присоединенные внутренние волны позади цилиндра. Как в теневой картине, так и в расчете

видны клиновидные границы области полной блокировки перед цилиндром.

Искаженные полуокружности позади цилиндра на рис. 2 а визуализируют фазовые поверхности присоединенных внутренних волн. Гребням соответствуют темные линии, а впадинам –серые. Гребни и впадины присоединенных волн отчетливо видны и в картине изолиний солёности на рис. 2 б. В обоих случаях визуализированы три волны, длина которых соответствует расчетной по линейной теории  $\lambda = U_0 \cdot T_b$  [5]. Однако рассчитанная картина является более информативной, поскольку показывает не только форму гребней и впадин волн, но и величину возмущений солёности, а, следовательно, смещения частиц в волне и положение областей максимальных амплитуд (центры замкнутых изолиний).

Как в расчетах, так и в эксперименте фазовые поверхности присоединенных внутренних волн отклоняются от полуокружностей в окрестности плотностного следа, где они увлекаются средним течением.

Наиболее сильные возмущения плотности наблюдаются вблизи оси движения в опережающем возмущении и непосредственно за цилиндром. В целом экспериментально наблюдаемая и рассчитанная картина течения являются структурно подобными.

Более детальные результаты экспериментального исследования параметров заблокированной жидкости перед двумерным препятствием приведены в [14].

Иную структуру имеет поле возмущений солёности. Семейство почти параллельных изолиний перед цилиндром отражает эффект блокировки (проталкивание жидкости перед телом). Наклонные линии, плавно переходящие в концентрические окружности, визуализируют нестационарные опережающие внутренние волны (которым соответствуют наклонные лучи на рис. 2а), плавно переходящие в присоединенные позади

тела. Однако вблизи оси течения в следе за телом монотонность изменения плотности нарушается. К препятствию примыкает центральная высокоградиентная оболочка (сгущение изолиний на рис. 2b), которая визуализируется как темная линия позади тела на рис. 2a. Ранее высокоградиентные элементы структуры спутного следа наблюдались в эксперименте, но не визуализировались в численных расчетах.

Появление прослойки в спутном следе обусловлено общей перестройкой стратификации движущимся цилиндром. Вследствие эффекта блокировки – торможения и захвата жидкости – перед двумерным цилиндром накапливается более однородная жидкость, собранная с траектории движения тела. Увлеченная жидкость замещается новой с ранее разнесенных по вертикали слоев жидкости, погружающейся под действием сил плавучести. при малых числах Фруда. Общая картина течения стратифицированной жидкости около 2D кругового цилиндра была ранее воспроизведена в [15], [16]. Высокоградиентные прослойки, которые в эксперименте наблюдаются при обтекании препятствий, в численных расчётах ранее практически не обнаруживались [18].

Результаты исследования тонкой структуры течений неоднородной жидкости приведены в [16,17].

Последовательность профилей возмущений плотности за цилиндром, рассчитанных на различных расстояниях от его задней критической точки, приведена на рис. 3. На этом рисунке на дополнительной вертикальной оси, изображенной на первом профиле, отложены возмущения солёности, умноженные, вследствие их малости, на  $10^4$  и находящиеся на соответствующем вертикальном горизонте  $Y$ . Точка 0 соответствует центру двумерного цилиндра. На оси движения в каждом сечении выделяется тонкий слой, градиент плотности в котором в несколько раз превосходит фоновый. В ближайшем к цилиндру сечении формируется скачок плотности

вследствие смыкания слоев, разнесенных по вертикали в невозмущенной среде.

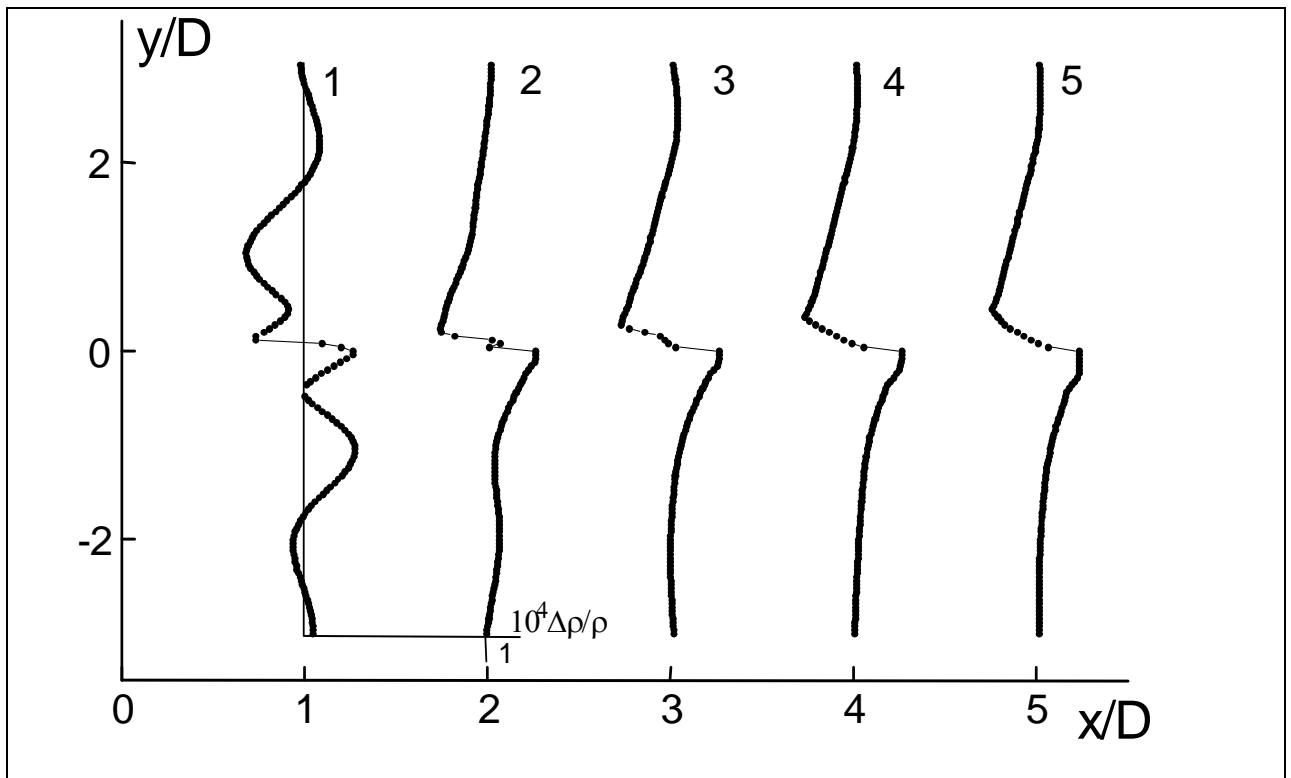


Рис .3. Профили плотности в следе за цилиндром на различных расстояниях от задней кромки: 1-5) –  $x/D = 1; 2; 3; 4; 5$ ;  $D = 2,5$  см;  $U = 0,1$  см/с;  $T_b = 25,2$  с;  $Fr = 0,16$ ;  $Re = 25$ ).

Волновые возмущения в приведенных распределениях плотности выражены только в ближайшем к телу сечении, на расстоянии длины волны от задней критической точки цилиндра, что свидетельствует о влиянии ближайших к цилиндру волн на рис. 2 а,б. По мере удаления от цилиндра скачок плотности постепенно сглаживается за счет диффузии.

Результаты измерений, численных и аналитических расчетов профилей скорости перед цилиндром представлены на рис. 4. На этом рисунке, подобно тому, как это было сделано на рис.3, на дополнительной вертикальной оси отложены значения скоростей на соответствующем вертикальном горизонте

У. Для аналитических вычислений возмущения горизонтальной компоненты скорости  $u$  использованы результаты работы [5].

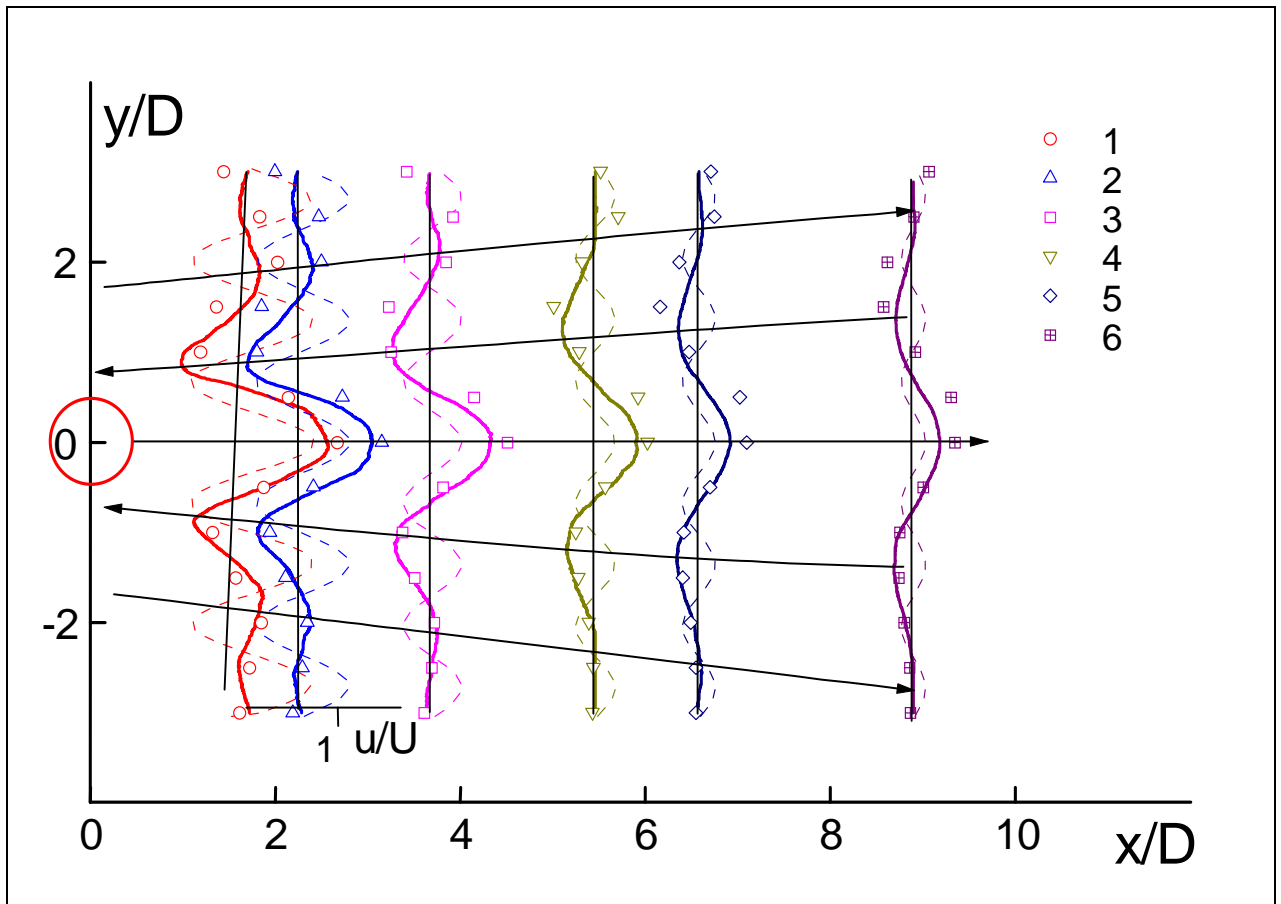


Рис. 4. Профили скорости перед цилиндром в различных вертикальных сечениях ( $T_b = 25.2$  с;  $D = 2.5$  см;  $U = 0.135$  см/с;  $Fr = 0.22$ ;  $Re = 33.8$ ; 1 – 6:  $x/D = 1.75$ ; 2.3; 3.7; 5.5; 6.6; 8.9), измеренные в экспериментах (сплошные линии) и полученные из аналитического расчёта по формуле, приведённой в [5] (пунктирные линии). Точками представлены результаты численного расчета. Масштаб скорости, одинаковый для всех графиков, приведен на первом профиле.

Численный расчет с высокой точностью предсказывает фазовую структуру поля скорости перед цилиндром, положения линий минимумов и максимумов, рассчитанные и измеренные значения скорости практически совпадают (рис. 4). Некоторое различие значений скорости в

расчетах и измерениях на периферийных струях связано с малостью возмущений скорости в этой области, вследствие чего возрастает погрешность измерений.

Результаты расчетов и измерений распределений скорости на оси движения перед цилиндром в зависимости от расстояния до передней критической точки цилиндра приведены на рис. 5. Как в численных расчетах, так и в экспериментах величина возмущения скорости монотонно убывает по мере удаления от тела. В непосредственной близости к цилиндру для самых медленных режимов выделяется область блокировки. Наблюдается хорошее соответствие между измеренными и рассчитанными значениями возмущений скорости. Немонотонность и осцилляции скорости в опережающем возмущении при малых скоростях движения цилиндра обусловлены влиянием отражения течения в экспериментах от торцевой стенки бассейна. В численных расчетах осцилляции являются следствием используемого граничного условия на внешнем контуре расчетной области.

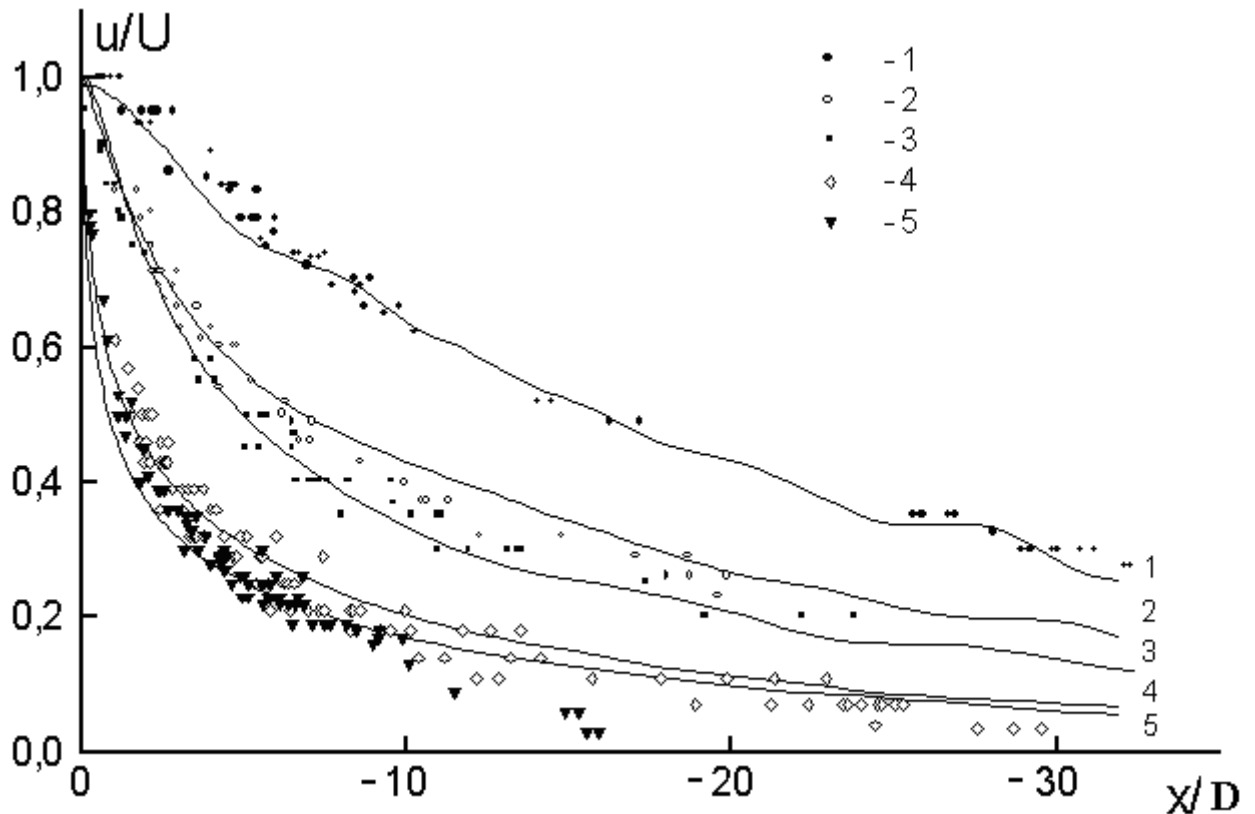


Рис. 5. Рассчитанные (сплошные линии) и измеренные распределения возмущений скорости на оси движения перед цилиндром ( $D = 2.5$  см;  $T_b = 25.2$  с); кривые 1-5) –  $U = 0.1$  см/с,  $Fr = 0.16$ ,  $Re = 25; 0.17, 0.27, 43; 0.21, 0.34, 53; 0.28, 0.46, 71; 0.4, 0.64, 101$ .

## 2.2 Выводы.

Тестирование предложенной к рассмотрению расчётной модели путём сопоставления результатов расчёта с результатами эксперимента для различных режимов течения хорошо согласуются с результатами численных расчётов. В вычислительном и лабораторном экспериментах заблокированная жидкость перед цилиндром окружена полем нестационарных волн, фазовые поверхности которых располагаются на наклонных лучах. Высокоградиентные прослойки в следе позади цилиндра, которые наблюдаются в эксперименте, в вычислительном эксперименте выявлены впервые.

### ГЛАВА 3. Сравнительное исследование двумерных течений жидкостей с различными периодами плавучести .

В данном исследовании везде диаметр обтекаемого цилиндра принимается равным 2.5 см для упрощения расчётов; вследствие этого число Рейнольдса характеризует только скорость течения. Рассматриваются течения в диапазоне чисел  $Re$  от 25. до 113.5, как и в гл 2. Представлены рисунки мгновенных линий тока и линий равной солёности. На рисунках поток движется слева направо в горизонтальном направлении; сила тяжести и, соответственно, градиент стратификации , направлен сверху вниз. Все приведённые результаты относятся к моменту времени  $10T_b$ ; течение к этому моменту времени уже устанавливается. В качестве результатов исследования приводятся мгновенные линии тока а) и линии равной солёности в).

3.1. Результаты расчётов течений с периодом плавучести  $T_b=25.2c$  – мгновенные линии тока и линии равной солёности.

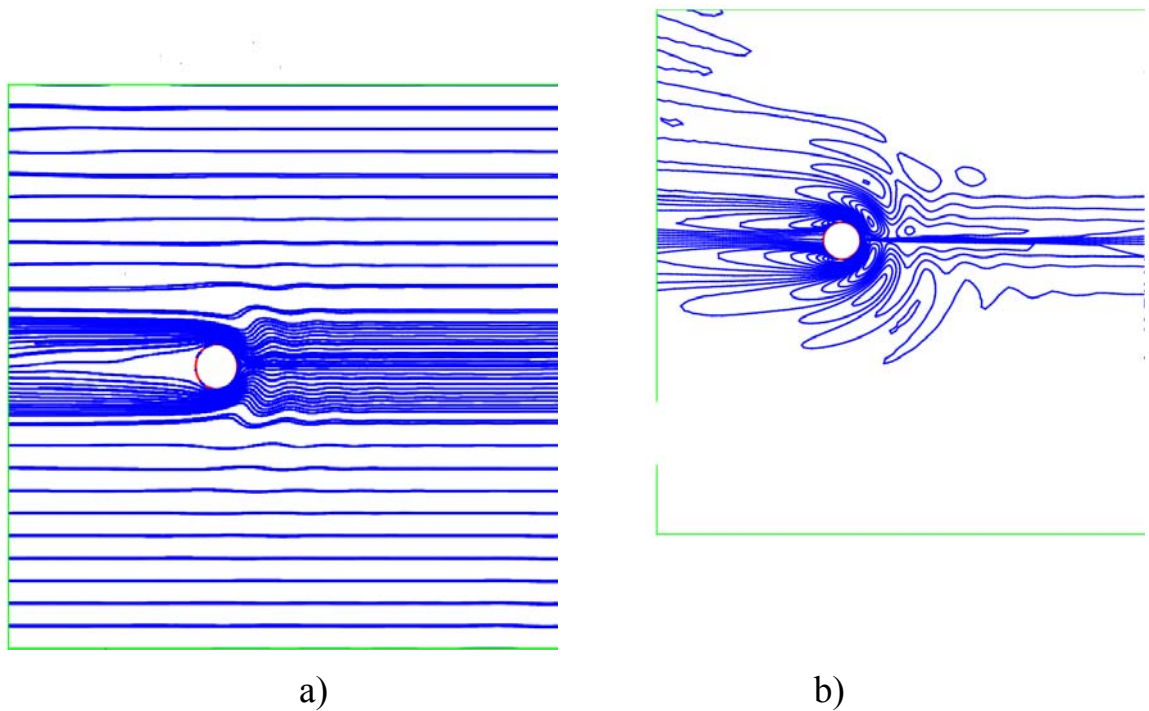
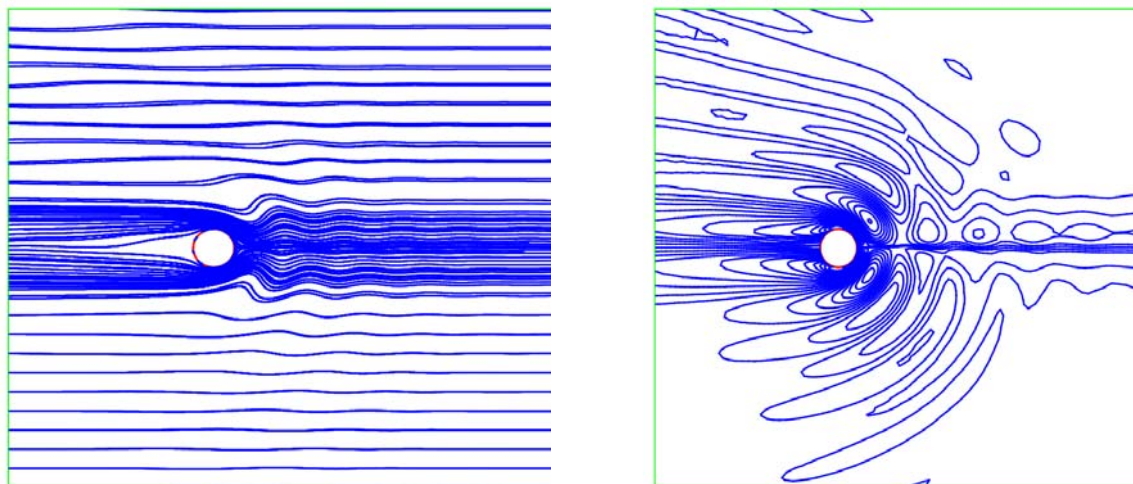


Рис.6. Течение с параметрами  $Re=25.$  ; $Fr=0.16$

а) – мгновенные линии тока ; б) – линии равной солёности



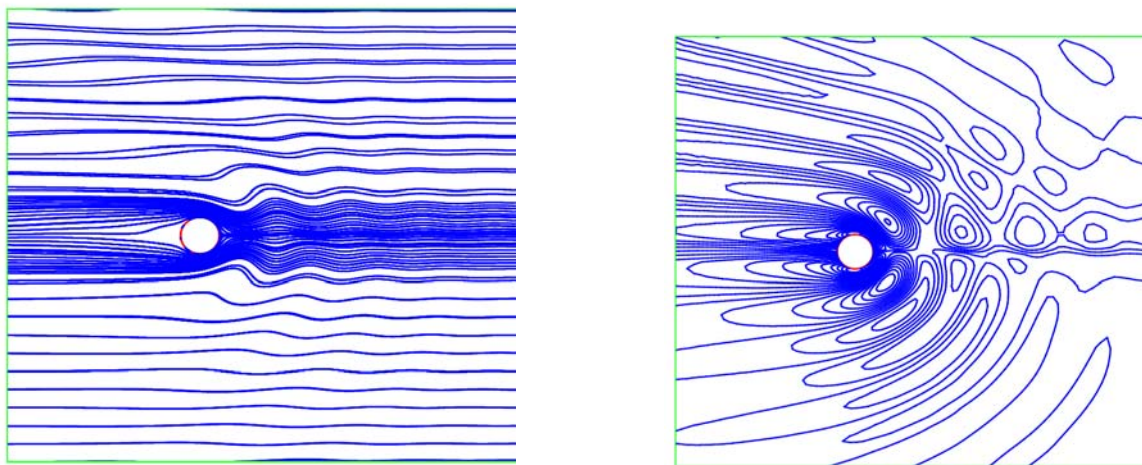


a)

b)

Рис.7. Течение с параметрами  $Re=33.75$  ;  $Fr=0.22$

a) – мгновенные линии тока, b) линии равной солёности

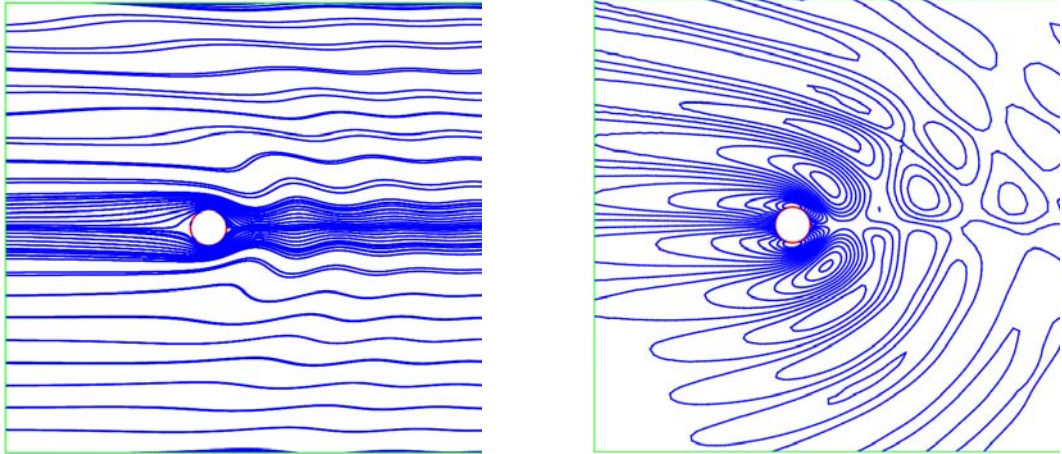


a)

b)

Рис.8. Течение с параметрами  $Re=42.75$  ;  $Fr=0.27$

a) - мгновенные линии тока, b) – линии равной солёности.

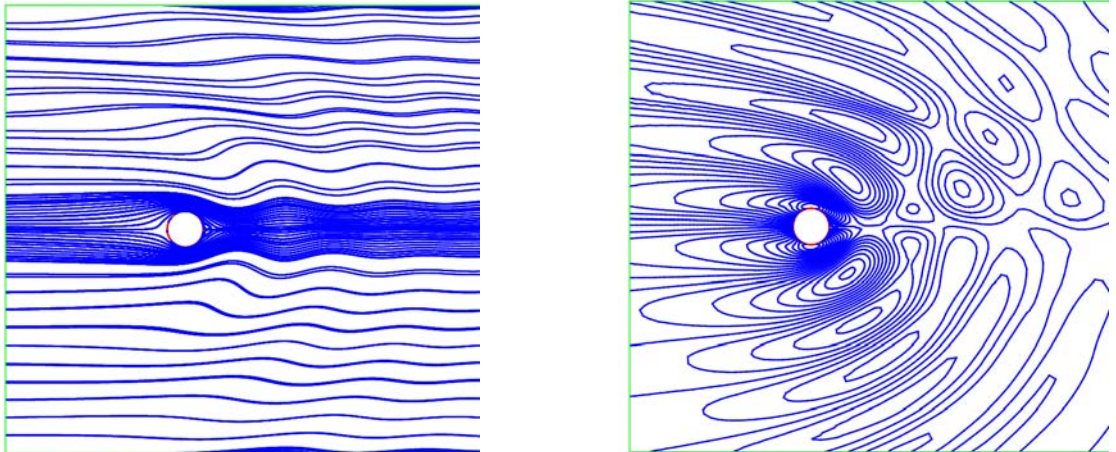


a)

b)

Рис.9 .Течение с параметрами  $Re=52.5$ ;  $Fr=0.34$ 

a) – мгновенные линии тока ; b) – линии равной солёности



a)

b)

Рис. 10 . Течение с параметрами  $Re=60.$ ;  $Fr=0.39$ 

a) – мгновенные линии тока; b) – линии равной солёности

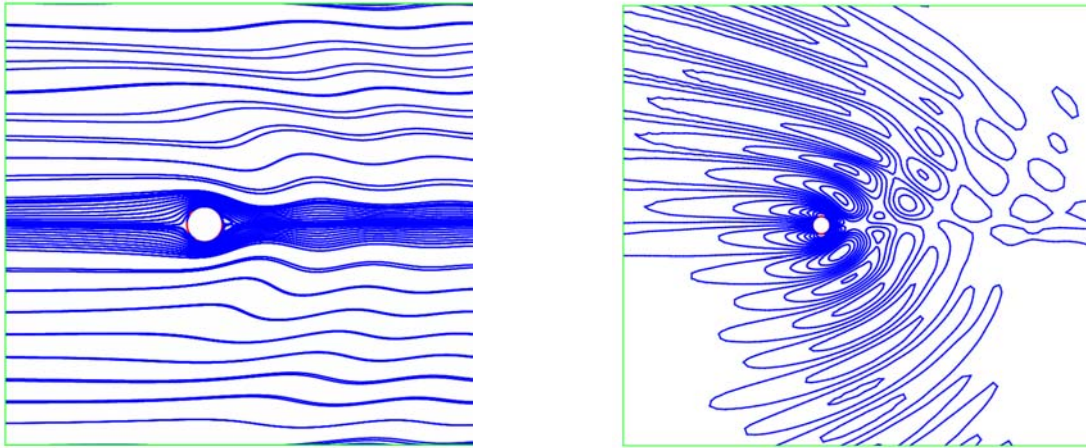
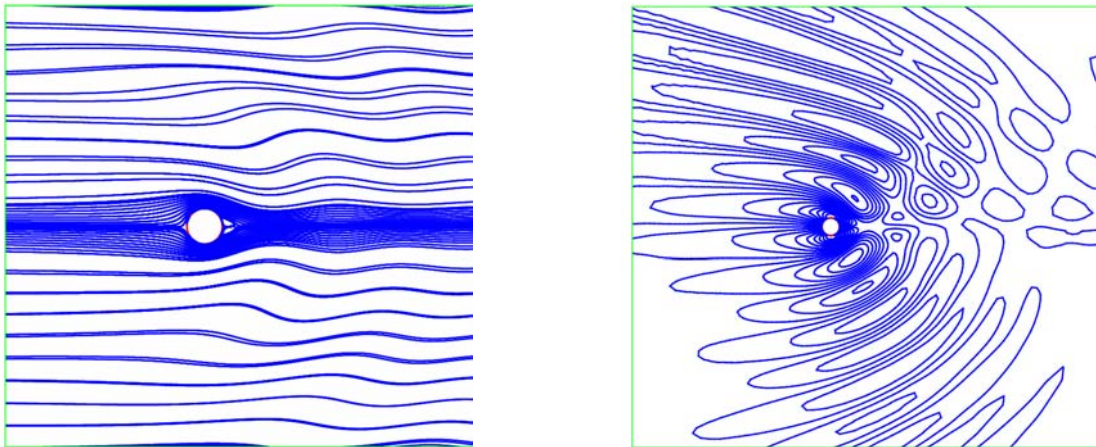


Рис.11. Течение с параметрами  $Re=71.$  ;  $Fr=0.46$

а) – мгновенные линии тока; б) – линии равной солёности



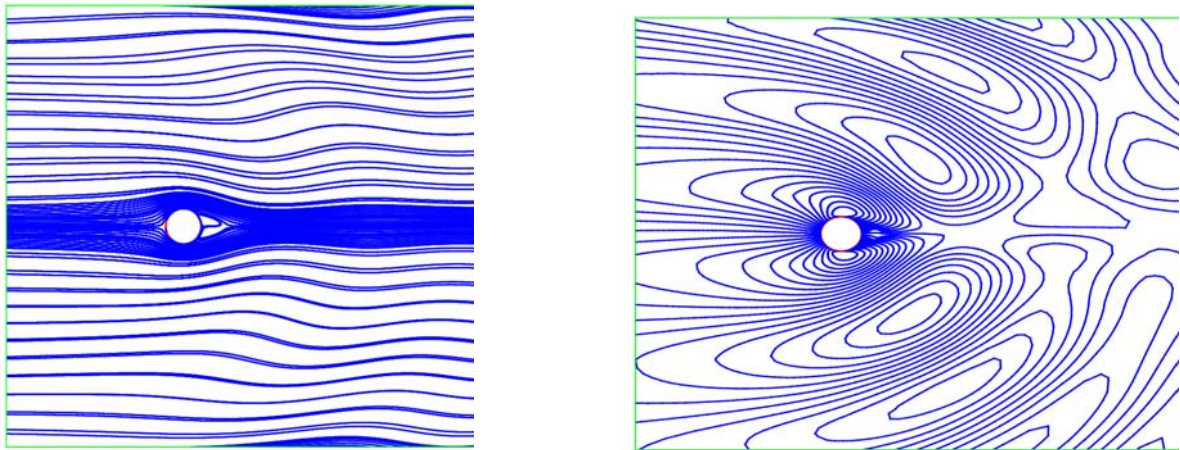
а)

б)

Рис. 12. Течение с параметрами  $Re=82.5$  ;  $Fr=0.53$

а) – мгновенные линии тока ; б) – линии равной солёности





a)

b)

Рис. 13. Течение с параметрами  $Re=113.5$  ;  $Fr=0.73$

a) – мгновенные линии тока : b) – линии равной солёности

Из рисунков мгновенных линий тока (рис.6.a – 13a) видно, что область блокировки течения перед цилиндром уменьшается с увеличением числа  $Re$  (скорости течения; диаметр цилиндра во всём исследовании принят постоянным и равным 2.5см.). Для  $Re =82.5$  она исчезает совсем. Внутренние волны с ростом числа  $Re$  всё дальше отстоят от цилиндра; след за цилиндром постепенно сужается и уплотняется. Начиная с  $Re=82.5$ , за цилиндром появляются две маленькие симметричные зоны возвратно-циркуляционного течения (два вихря), постепенно увеличивающиеся.

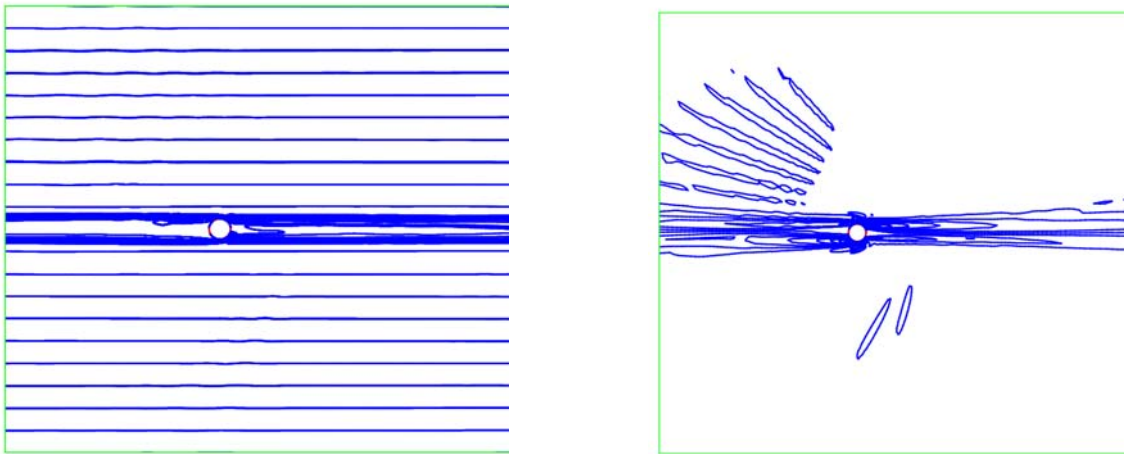
В рисунках линий равной солёности (рис.6b – 13b) , начиная с  $Re=25.$ , отчётливо видна прослойка плотности, которая с ростом числа  $Re$  постепенно размывается, и в течении с параметрами  $Re=52.5$ ,  $Fr=0.34$  исчезает совсем. Вид линий равной солёности также постепенно изменяется.

3.2 Результаты расчётов течений с периодом плавучести  $T_b=6.28c$  – мгновенные линии тока и линии равной солёности .

Далее следуют рисунки для течений с теми же значениями числа Рейнольдса, но для жидкости более тяжёлой ( с более сильной

стратификацией), период плавучести которой равен  $2\pi$ , примерно 6.28 сек. На этих рисунках диаметр цилиндра уменьшен специально, чтобы показать размеры блокировки перед цилиндром и застойной зоны сзади цилиндра-области с очень мелким возвратным течением- явления, ранее не отмеченного. (В расчётах, конечно, диаметр цилиндра остаётся тем же самым – 2.5 см.) Соответствующие числа Фруда будут меньше для более тяжёлой жидкости.

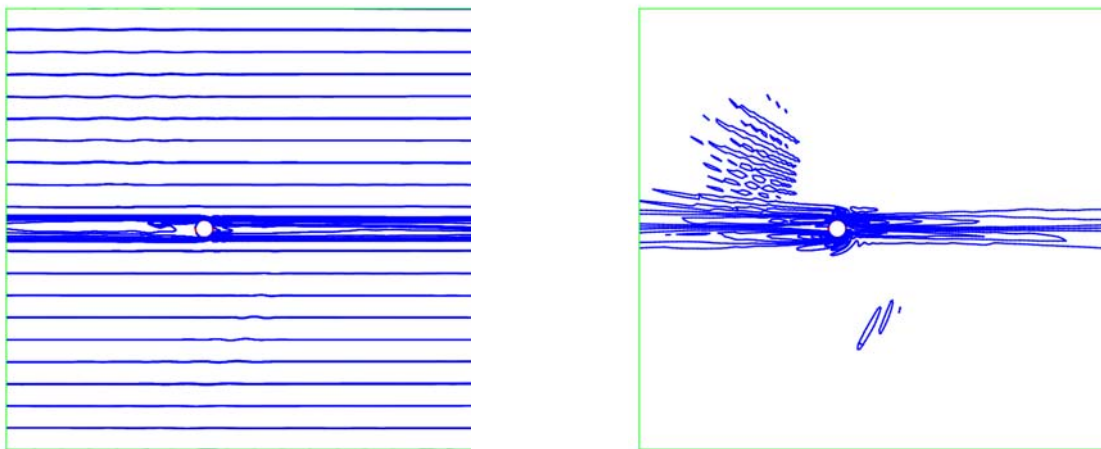
Из сравнения рисунков (рис.14а-20а), изображающих линии мгновенного тока для течений с периодом плавучести  $T_b=6.28$  сек., приведённых далее, видно, что по мере увеличения скорости течения (числа Рейнольдса) область блокировки перед цилиндром не исчезает совсем, как в случае течений с  $T_b=25.2$  сек., но так же значительно уменьшается с увеличением числа Рейнольдса. Сама область блокировки при одинаковых значениях чисел Рейнольдса значительно больше, чем для течений с периодом плавучести  $T_b=25.2$  сек. Кроме того, в следе за цилиндром в течениях с числами Рейнольдса  $Re=25.-52.5$  (рис. 14а – 17а) видна застойная зона, ширина которой с ростом числа Рейнольдса уменьшается.



a)

b)

Рис. 14 . Течение с параметрами  $Re = 25$  ;  $Fr = 0.04$   
 a) – мгновенные линии тока; b) – линии равной солёности.

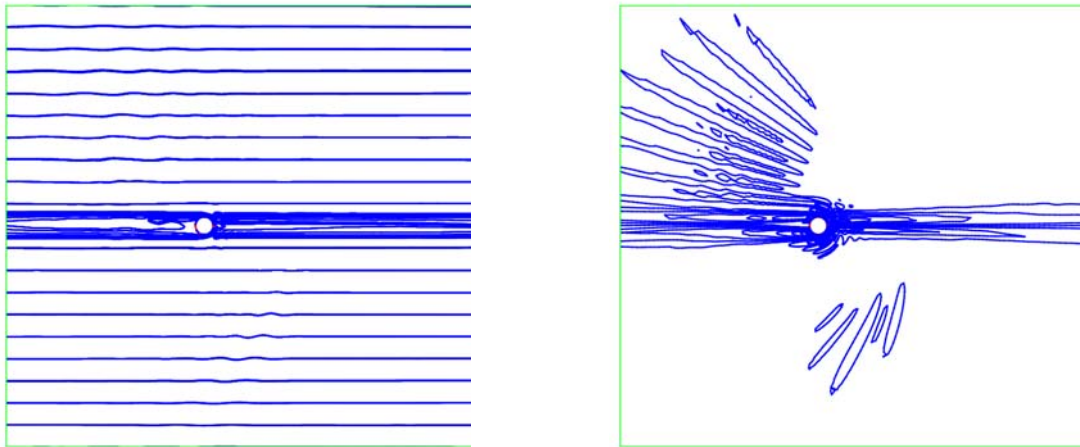


a)

b)

Рис. 15. Течение с параметрами  $Re = 33.75$ ;  $Fr = 0.054$

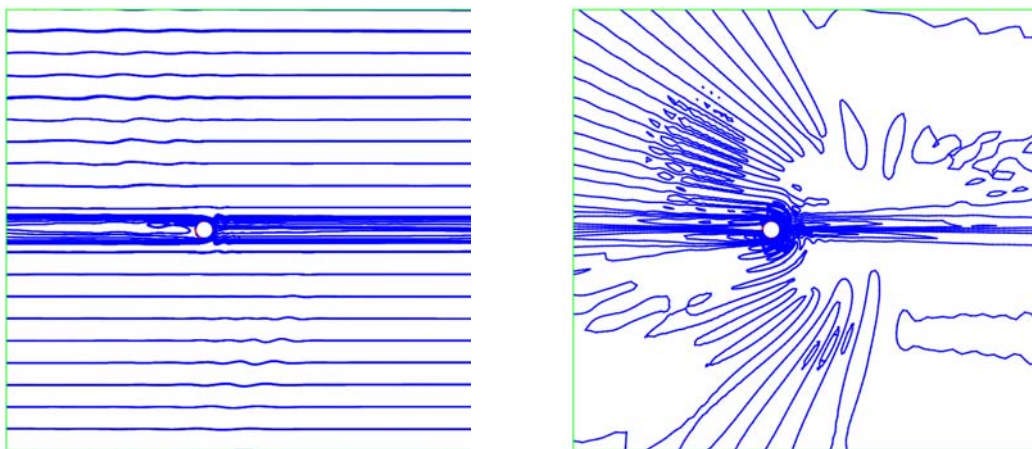
a) – мгновенные линии тока, b) – линии равной солёности



a)

b)

Рис. 16. Течение с параметрами  $Re=42.75$  ;  $Fr=0.0684$   
 a) – мгновенные линии тока; b) – линии равной солёности. -



a)

b)

Рис. 17. Течение с параметрами  $Re=52.5$ ;  $Fr=0.084$   
 a) - мгновенные линии тока; b) – линии равной солёности

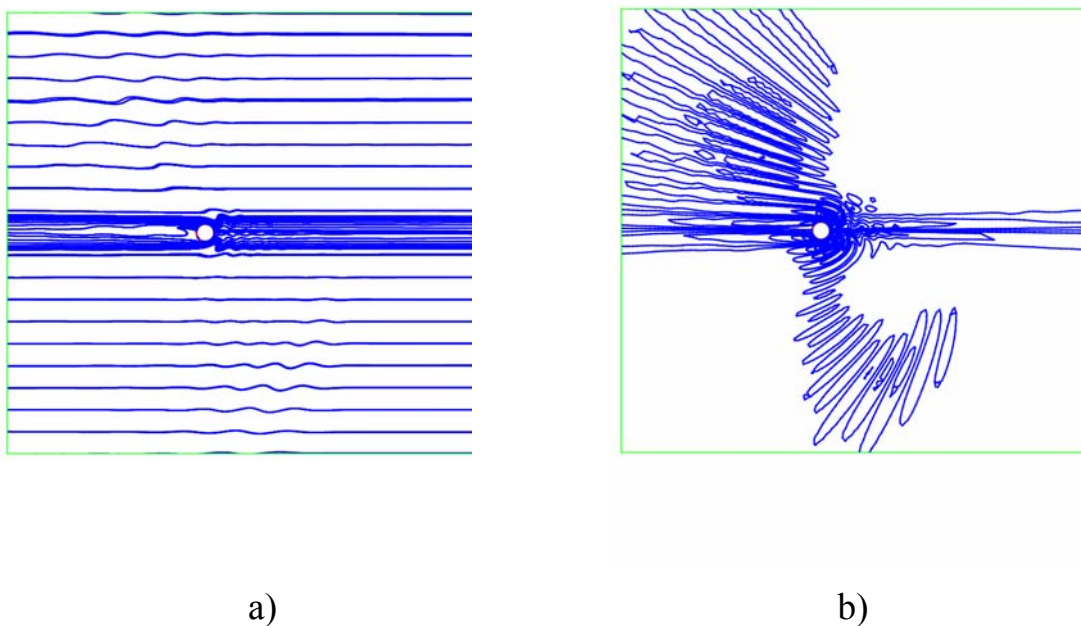


Рис. 18. Течение с параметрами  $Re=71$ . ;  $Fr=0.1136$

a) – мгновенные линии тока; b) – линии равной солёности

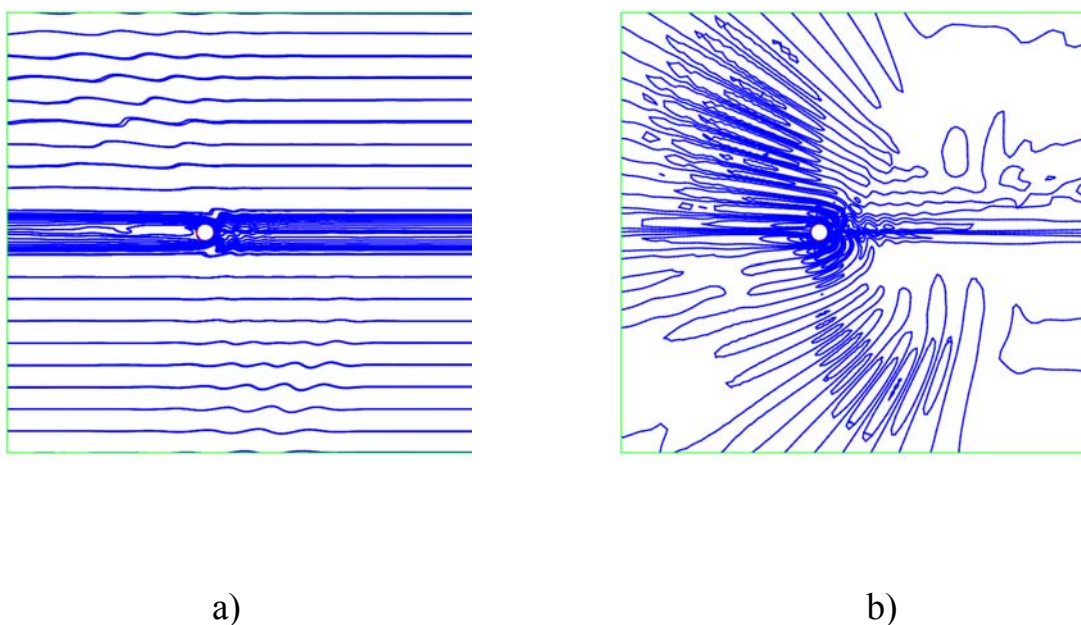
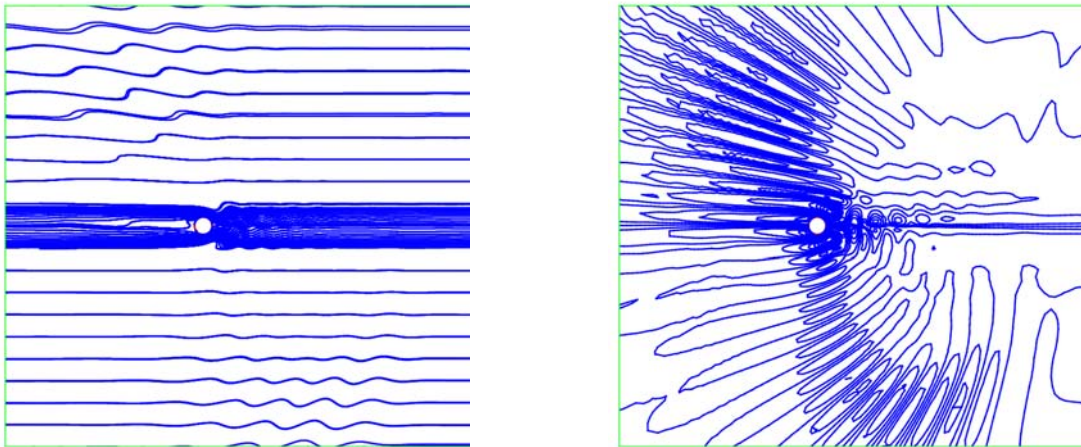


Рис. 19. Течение с параметрами  $Re=82.5$  ;  $Fr=0.132$

a) – мгновенные линии тока; b) – линии равной солёности





a)

b)

Рис. 20. Течение с параметрами  $Re=113.5$  ;  $Fr=0.1816$

a) – мгновенные линии тока; b) – линии равной солёности

Размер застойной зоны в следе за цилиндром, как видно из рис. 14a – 17a, постепенно уменьшается, и для течения с  $Re=52.5$  почти исчезает. В линиях равной солёности прослойка плотности в следе за цилиндром наблюдается во всех приведённых течениях (рис.14b – 20b) в отличие от течений жидкости с  $T_b=25.2$  сек., где прослойка исчезает уже при  $Re=52.5$

### 3.3 Исследование длины застойной зоны за задней критической точкой цилиндра.

Застойная зона, или область с обратным течением очень маленькой скорости, возникает в следе за цилиндром при небольших числах Рейнольдса и Фруда в жидкости с небольшим периодом плавучести.

Далее приводятся более подробные рисунки мгновенных линий тока для течений с периодом плавучести  $T_b=6.28$ с. ,изображающие застойные зоны в течениях за цилиндром при малых значениях чисел Фруда.

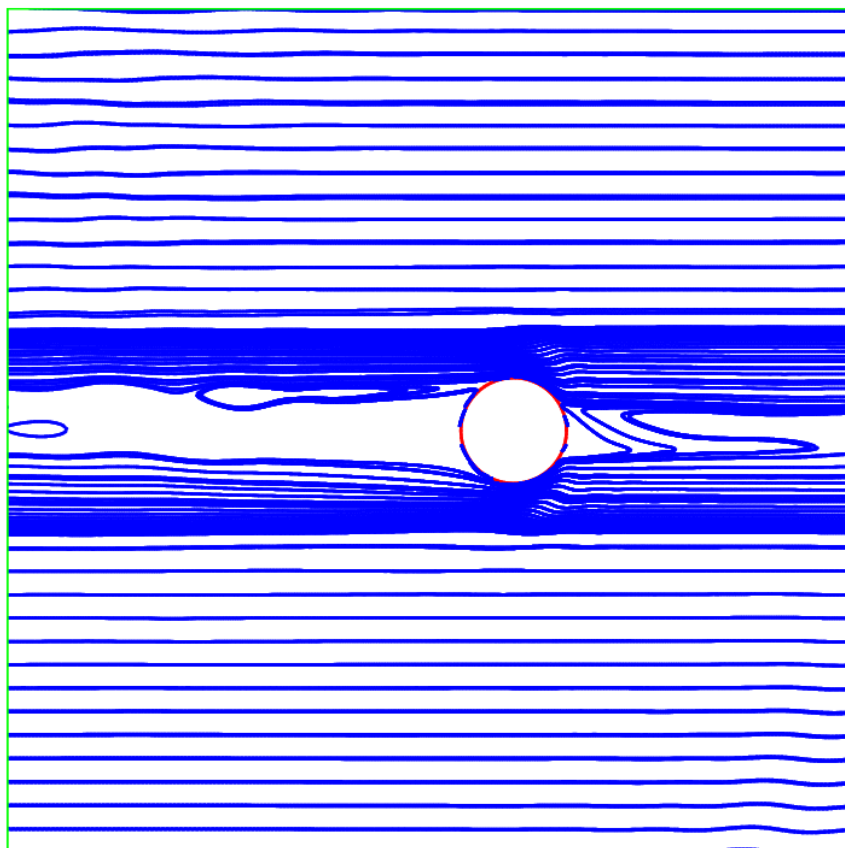


Рис 21 . Мгновенные линии тока течения с параметрами  $Re=25.2$  с.,  $Fr=0.04$ .

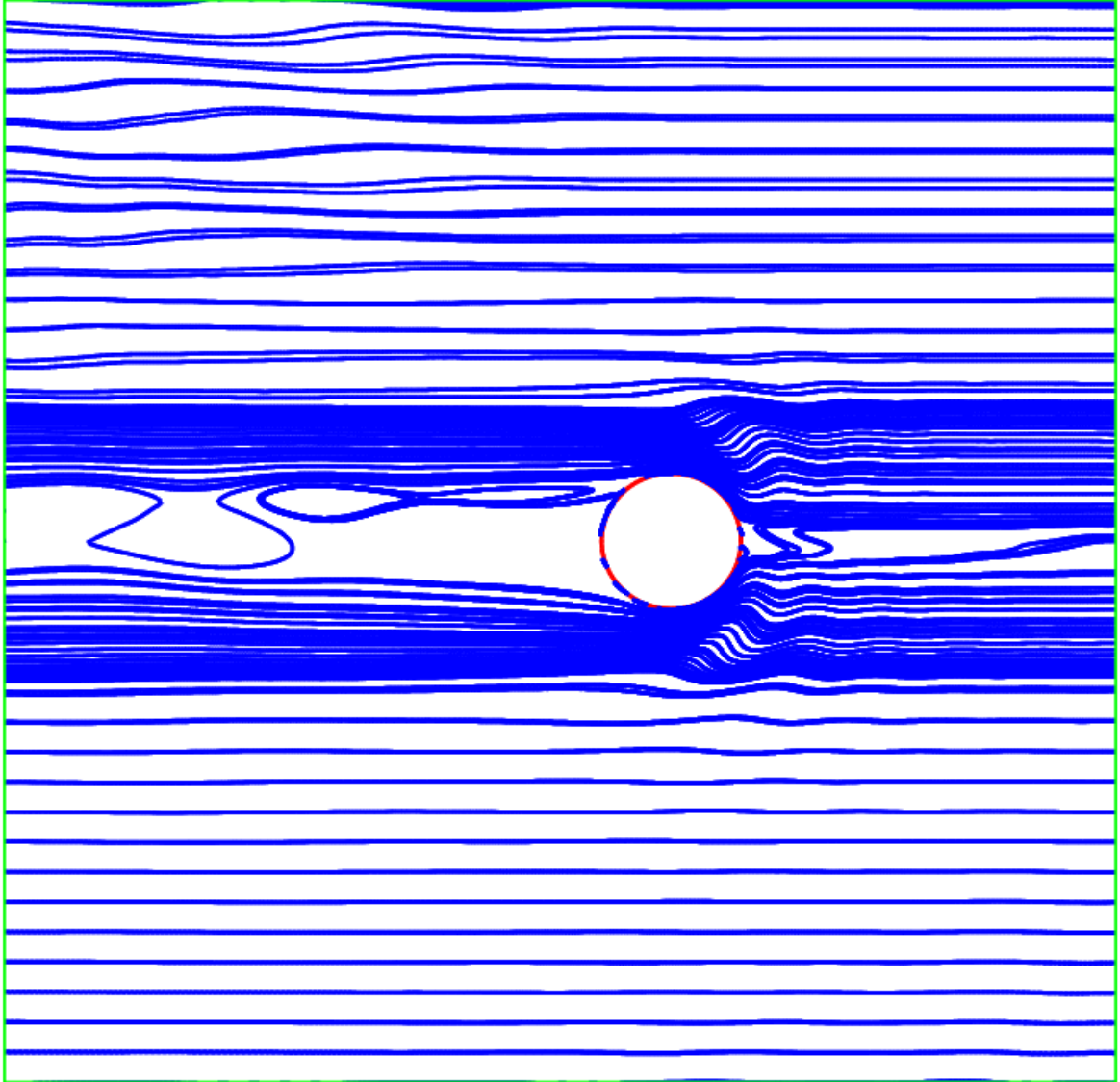


Рис 22 . Мгновенные линии тока течения с параметрами  $Re=42.75$ ,  $Fr=0.0684$ .

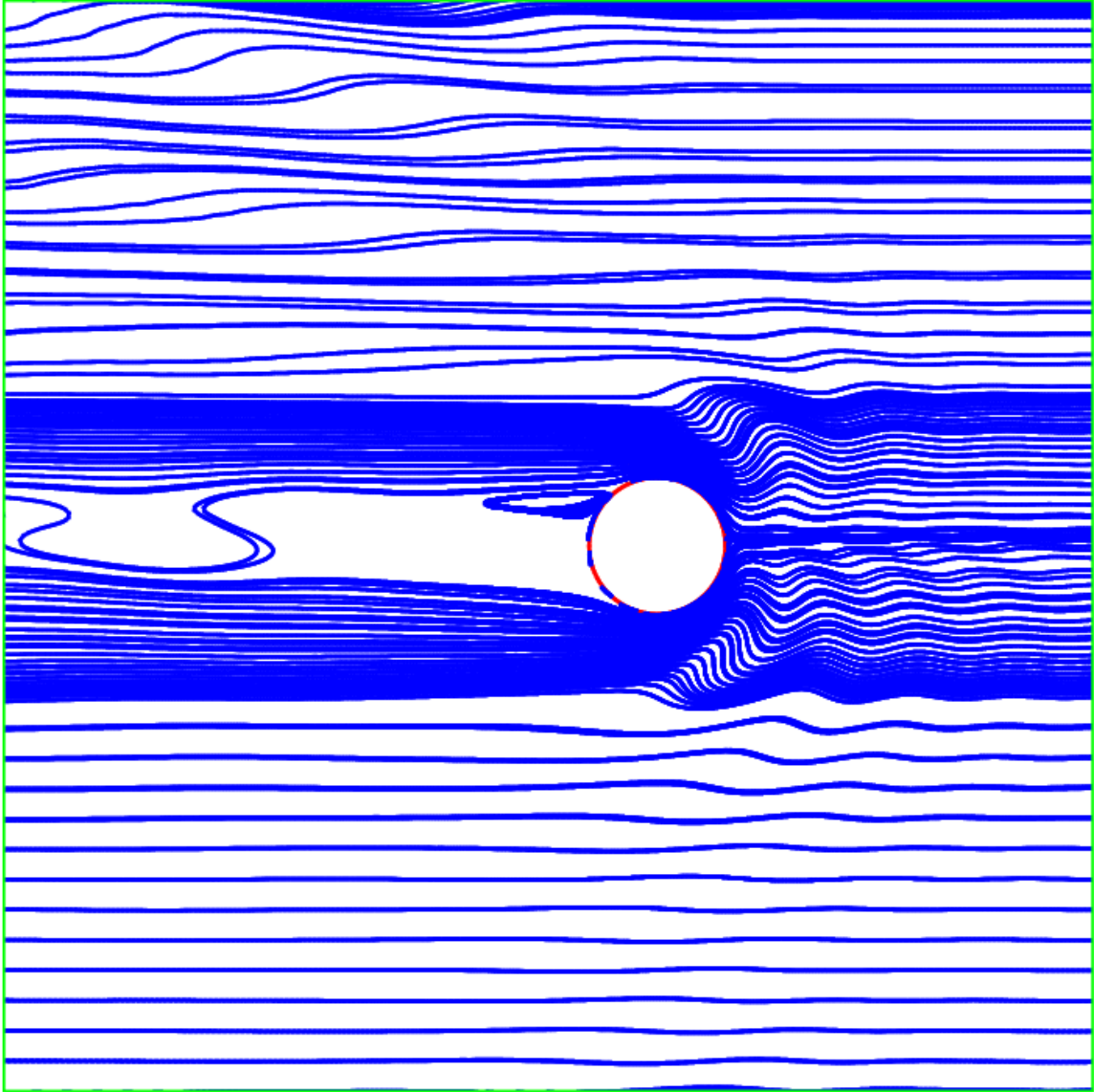


Рис 23 . Мгновенные линии тока течения с параметрами  $Re=60.$ ,  $Fr=0.096.$

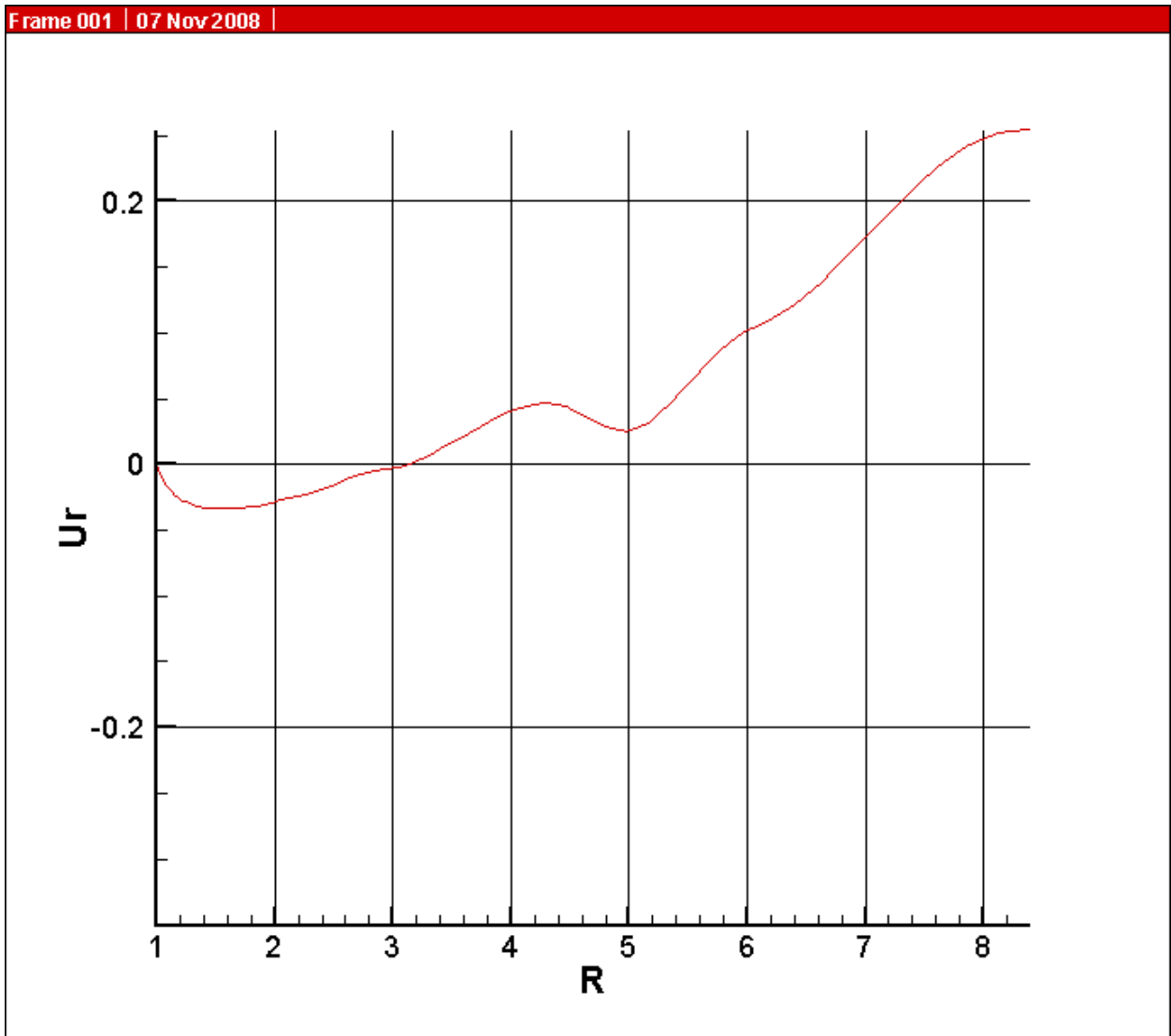


Рис.24. . Определение длины застойной зоны для течения с параметрами  $Re=25.$ ,  $Fr=0.04$ .  $U_r$  – скорость на оси течения в следе за цилиндром. Длина измерена в радиусах цилиндра.

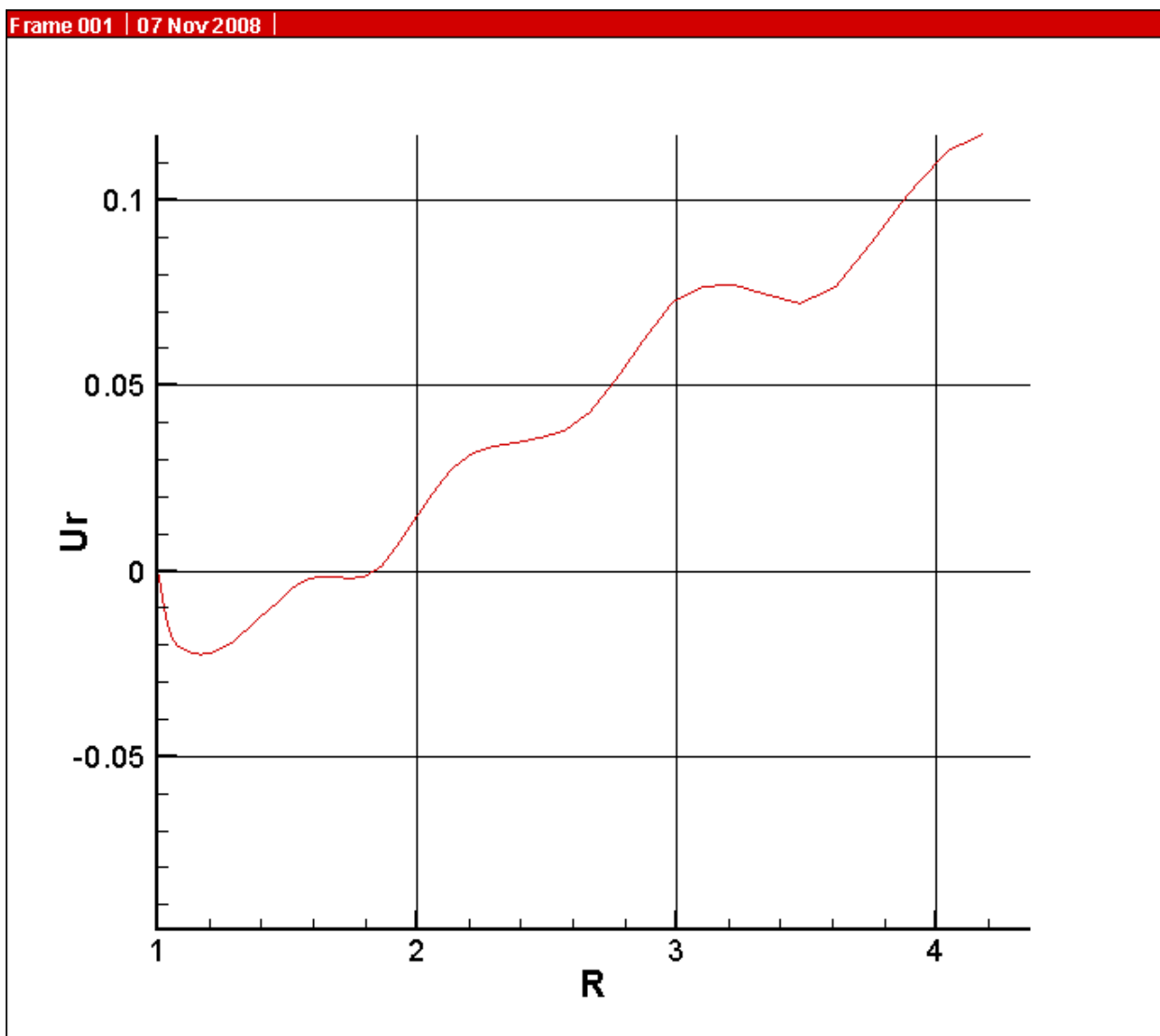


Рис.25. Определение длины застойной зоны для течения с параметрами  $Re=42.75.$ ,  $Fr=0.0684.$   $U_r$  – скорость на оси течения в следе за цилиндром. Длина – в радиусах цилиндра.

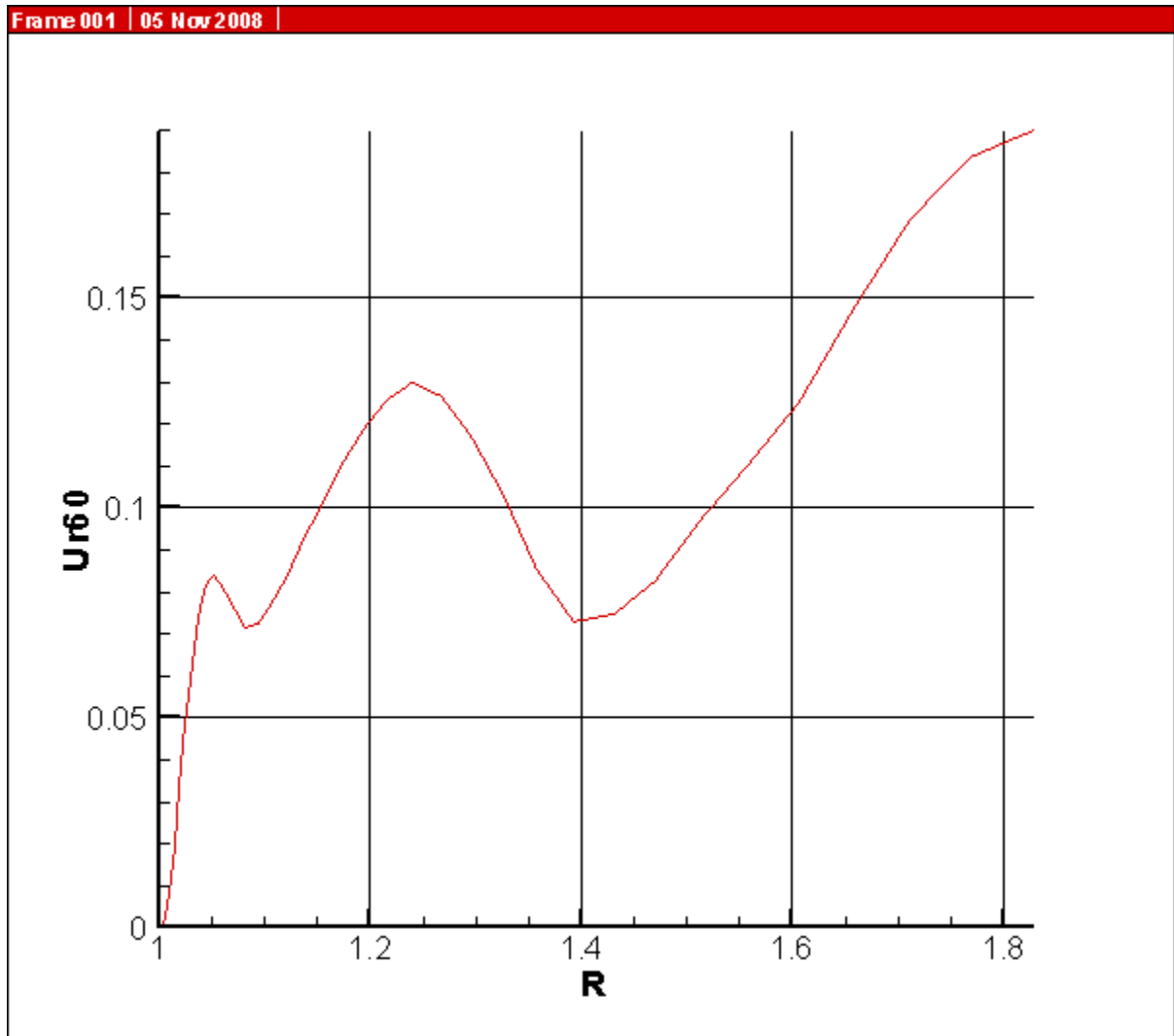


Рис 26. Скорость на оси течения в следе за цилиндром. Отсутствие застойной зоны для течения с параметрами  $Re=60.$ ,  $Fr=0.096$ .

Возникновение таких зон может быть объяснено тем, что в жидкости с периодом плавучести  $T_b=6.28c$ . среднее значение солёности и, следовательно линейно связанной с ней плотности в прослойке на порядок больше, чем для жидкости с периодом плавучести  $T_b=25.2c$ . Более плотная прослойка тормозит движение жидкости. С увеличением числа Рейнольдса прослойка размывается, становится менее плотной, и застойная зона исчезает.

#### 3.4. Исследование формы линий равной солёности.

Форма линий равной солёности, напоминающая полукруглый ‘гребень’, впервые исследована автором диссертации. Края полукруглого “гребня” с

увеличением числа  $Fr$  всё более приближаются к оси течения, причём возмущение в нижней части течения опережает возмущения в верхней части. По мере увеличения числа  $Fr$  и, соответственно,  $Re$  (т.е. скорости течения) возмущения сдвигаются вниз по потоку. Крупномасштабный элемент, – “гребень” – имеет мелкомасштабную структуру, что находится в полном соответствии с результатами многочисленных экспериментальных и теоретических исследований, которые показывают: крупномасштабные элементы структуры стратифицированных течений всегда сочетаются с мелкомасштабными [20].

Форма линий равной солёности была тщательно исследована на примере течений жидкости с периодами плавучести  $T_b=25.2c$  и  $T_b=6.28c$ . Для этого в поле солёности в месте расположения “гребня”, слева от передней критической точки цилиндра было проведено шесть вертикальных линий (сечений поля солёности), перпендикулярных оси течения на равном расстоянии одна от другой ( $x=1,2,\dots,6$ ). На каждой из линий были нанесены значения солёности, пересчитанные в декартову ( лабораторную) систему координат. На рис. 28. и 29. приведены профили возмущения солёности в среднем сечении ( $x=3$ ) для течений жидкости с  $T_b=25c$  для чисел  $Re=25$  и  $113.5$  соответственно. Вид профилей поля солёности в других сечениях будет похожим, но значения солёности в максимумах и минимумах графиков будут различными. По мере удаления от передней критической точки значения максимумов уменьшаются, а минимумов увеличиваются, т.е. возмущения становятся меньше. Для течения с  $T_b=6.28c$  вид профилей солёности практически аналогичный. Анализ графиков показывает, что каждый из них имеет резко выраженный максимум и минимум, симметрично расположенные от точки  $Y/D=0$ , находящейся на оси течения. По-видимому, это и объясняет форму возмущения линий равной солёности.



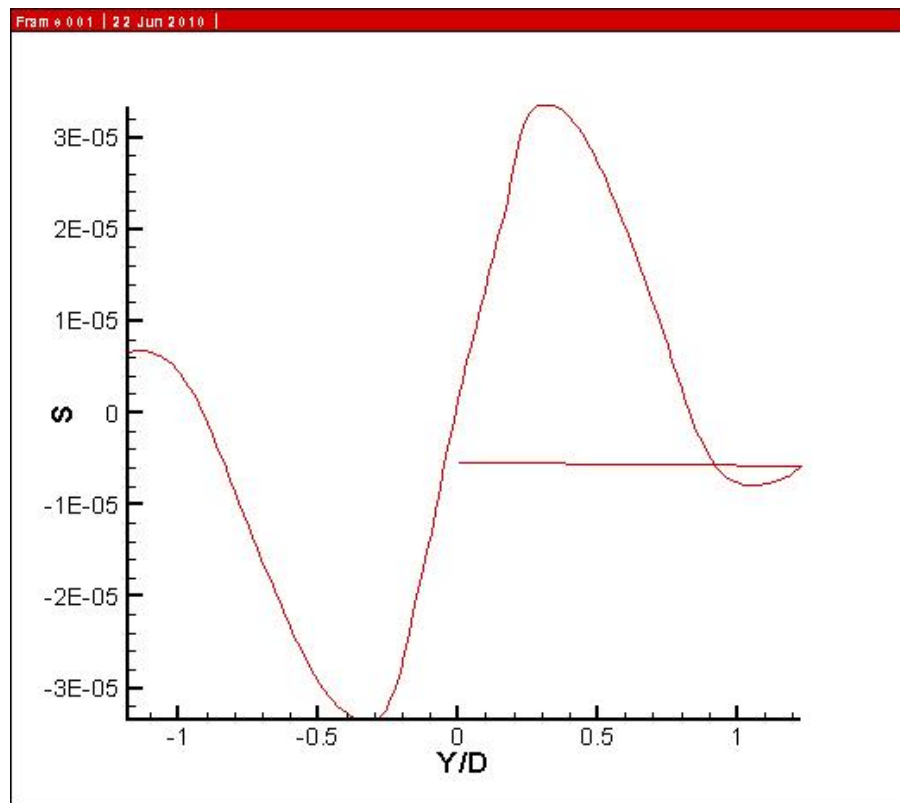


Рис.27. Профиль солёности на расстоянии  $x/D=3$  от передней критической точки цилиндра для течения жидкости с параметрами  $T_b=25.2$ с.;  $Re=25.2$ ,  $Fr=0.16$ .

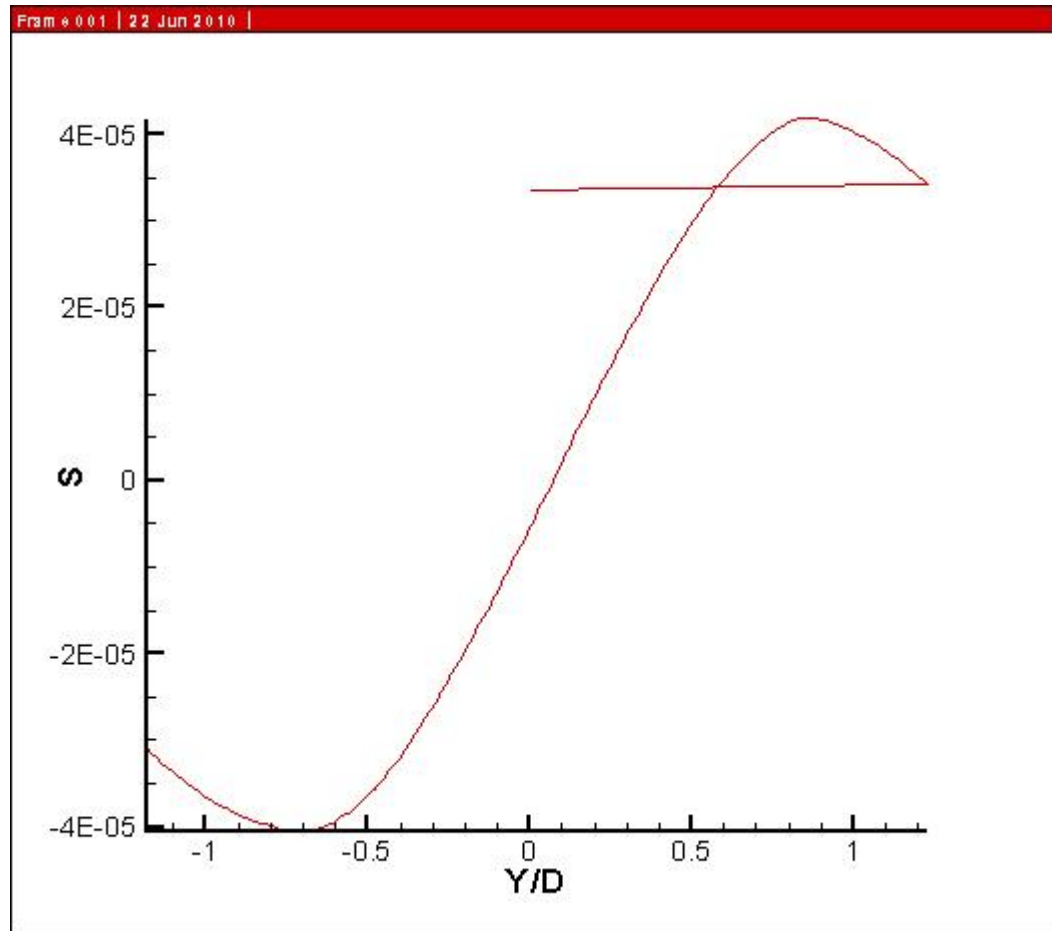


Рис.28. Профиль солёности на расстоянии  $x/D=3$  от передней критической точки цилиндра для течения жидкости с параметрами  $T_b=25.2c.$ ;  $Re=113.5$ ,  $Fr=0.73$ .

Вид профиля солёности объясняет симметричную относительно оси течения форму «гребня».

Основные результаты исследования двумерных течений изложены в работах [21], [22].

#### ГЛАВА 4. Трёхмерные течения неоднородной жидкости около кругового цилиндра.

Как и раньше, рассматриваются течения двух жидкостей с различными периодами плавучести: более солёной, тяжёлой, (т.е. с большей концентрацией соли) с периодом плавучести  $T_b = 6.28\text{с}$  и  $T_b = 15\text{с}$  - менее солёной, более лёгкой, т.е. с разной степенью стратификации. Диаметр цилиндра  $d$  во всех расчетах, как и в предыдущих указанных работах, берётся постоянным, равным  $2.5\text{см.}$ , так что число Рейнольдса  $Re = \frac{Ud}{\nu}$ , где  $U$  – скорость набегающего потока, а  $\nu$  -вязкость, характеризует только скорость течения. Течения каждой из жидкостей рассматривались при одинаковом наборе чисел Рейнольдса:  $Re = 300, 450, 600, \text{ и } 1000$ . Они моделировались, как и в предыдущих работах, уравнением Навье-Стокса для неоднородной жидкости, решаемым методом [7] при помощи разностной схемы, применённой и описанной в [19], с теми же начальными и граничными условиями, дополненными для трёхмерных течений условиями периодичности на обоих концах цилиндра[24]. В трёхмерном варианте ( $u, v, w$  – компоненты вектора скорости вдоль осей цилиндрической системы координат.

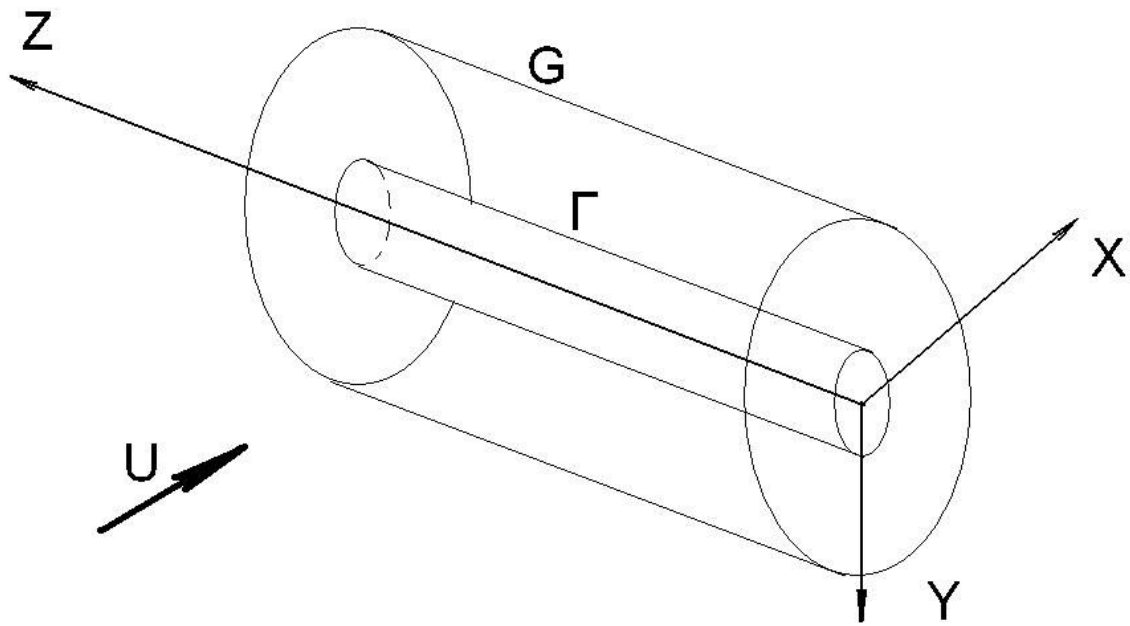


Рис.29. Расчётная область задачи.

(Для того, чтобы система координат была правой, ось  $y$  повернута вниз, и в данном изображении солёность убывает снизу вверх).

В качестве начальных условий для скорости задается невозмущенный плоскопараллельный поток  $u=U\cos\vartheta$ ,  $v=-U\sin\vartheta$ ,  $w=0$ .

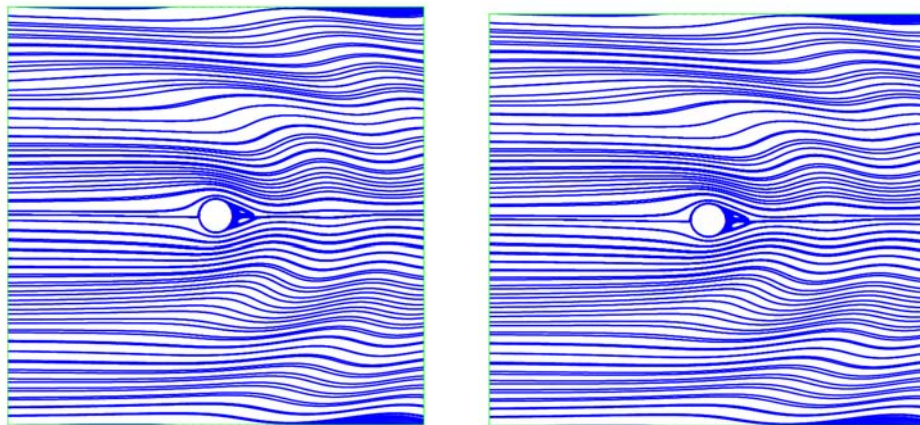
Расчётная длина цилиндра бралась равной семи его радиусам;  $L=7r$  в соответствии с [24]; шаг сетки по образующей  $-0.2$  радиуса; всего по образующей 36 точек. Применялась модифицированная цилиндрическая система координат, число точек по окружности бралось, как и раньше, равным 180, а в направлении радиуса – в зависимости от длины расчётной области  $z_{\max}$  – от 180 до 280, что даёт возможность сохранить примерно постоянную длину ячейки по радиусу и, таким образом, разрешающую способность сетки.

Из эксперимента [26] известно, что эффект трёхмерности в течениях стратифицированной жидкости проявляется с числа Рейнольдса, примерно равному 300., поэтому выбран такой диапазон рассматриваемых течений. Для выявления эффекта трёхмерности приведены рисунки мгновенных

линий тока и линий равной солёности в первом ( $k=1$ ) и среднем ( $k=18$ ) сечениях цилиндра. Расчёты всех течений проводились, как и в работах [17], [19], до времени  $10 T_b$ , к этому времени течение уже устанавливается, и картинки относятся к этому времени. Во всех картинках набегающий поток направлен слева направо.

4.1\_Сравнительное исследования течений с периодами плавучести  $T_b=6.28$ с и  $T_b=15$ с.

I. Течения с периодом плавучести  $T_b=6.28$ с.



$k=1$

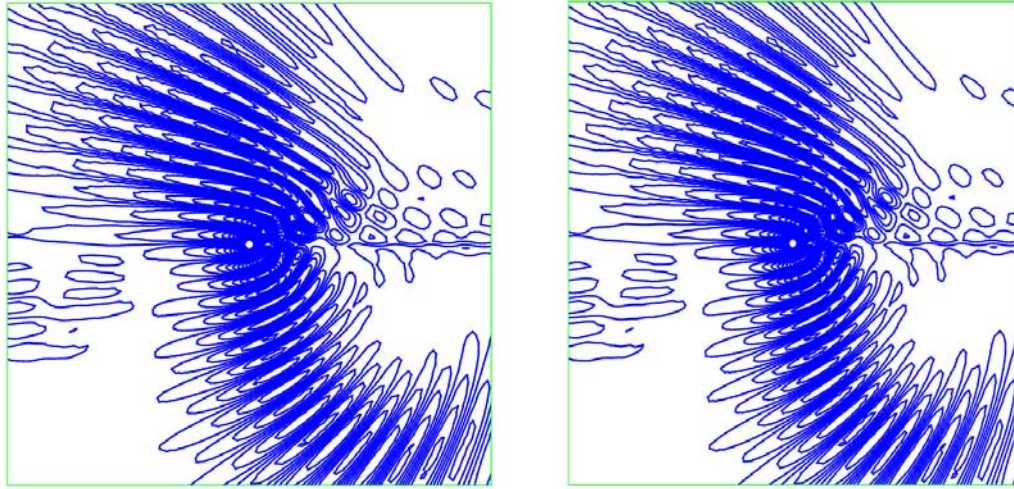
$k=18$

Рис.30.

Мгновенные линии тока для течения с параметрами:  $Re=300$ ,  $Fr=0.48$ ,  $z_{max}=4.5$ , число точек по радиусу  $M=180$ , по образующей цилиндра – везде 36.

Внутренние волны за задней критической точкой цилиндра разрешаются очень хорошо, отчётливо видны две волны. Сразу за задней критической точкой наблюдается небольшая вихревая область (возвратно-циркуляционное течение).

Далее приводятся изображения линий равной солёности в тех же сечениях.



k=1

k=18

Рис.31. Линии равной солёности для этого течения.

Линии равной солёности, как и в двумерном случае, представляют собой «гребни». Из их вида, как и из вида мгновенных линий тока в сечениях  $k=1$  и  $k=18$ , видна их полная идентичность в обоих сечениях, что говорит об отсутствии эффекта трёхмерности при данных параметрах течения. (В не приведённых здесь изображениях сечений с  $k=6$  и  $k=12$  так же наблюдается полная идентичность).

Для течения с параметрами  $Re=450.$ ;  $Fr=0.72$ ;  $z_{max}$  и  $M$  – те же, что и в предыдущем течении. В мгновенных линиях тока размер вихревой области сзади цилиндра немного увеличен по сравнению с течением с  $Re=300.$ , но, как и в предыдущем случае, рисунки при  $k=1$  и  $k=18$  идентичны, что опять указывает на отсутствие эффекта трёхмерности и в этом течении. Далее на рисунках представлено течение с параметрами  $Re=600.$ ,  $Fr=0.96$ . Начиная с этих значений параметров, вверх по течению от передней критической точки цилиндра появляется искажение

мгновенных линий тока, наблюдаемое в виде «ряби», и ось течения искривляется.

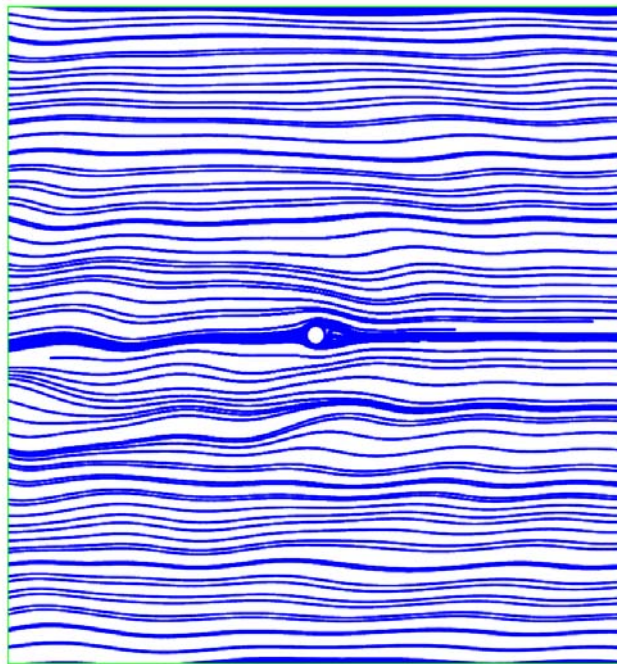


Рис.32. Искривление мгновенных линий тока и оси течения.

Предположено, что причиной этого может быть то, что в этом случае область, занимаемая внутренними волнами вверх по течению перед передней критической точкой цилиндра, имеет большую, чем в предыдущих случаях, длину, которая «режется» слишком близко поставленной расчётной воображаемой границей поля течения, или происходит отражение волн от границы  $z_{\max}=4.5$ . Для подтверждения этого предположения была взята граница внешней области  $z_{\max}=6.5$ ; соответственно увеличено число точек сетки по радиусу:  $M=220$  для сохранения примерно одинаковой длины ячейки сетки по радиусу. В этом



случае «рябь» не наблюдается. Следовательно, выбранная граница  $z_{\max}$  и будет примерно границей области, занятой внутренними волнами вверх по течению от передней критической точки цилиндра. Для подтверждения отсутствия «ряби» были нарисованы мелкомасштабные виды мгновенных линий тока как всегда при  $k=1$  и  $k=18$ , чтобы отобразить как можно большую часть поля течения.

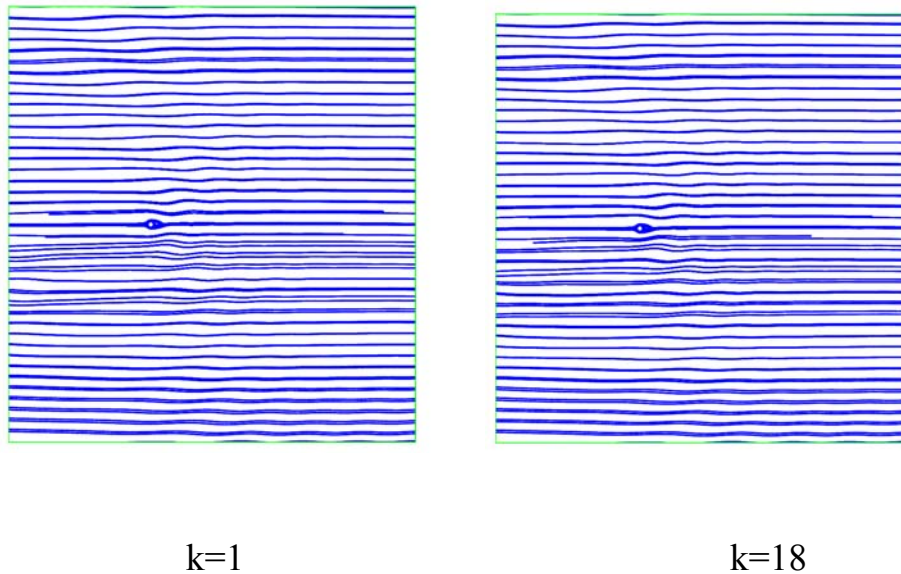


Рис.33. Вид мгновенных линий тока при большей длине расчётной области для течения с параметрами  $Re=600$ ,  $Fr=0.96$ .



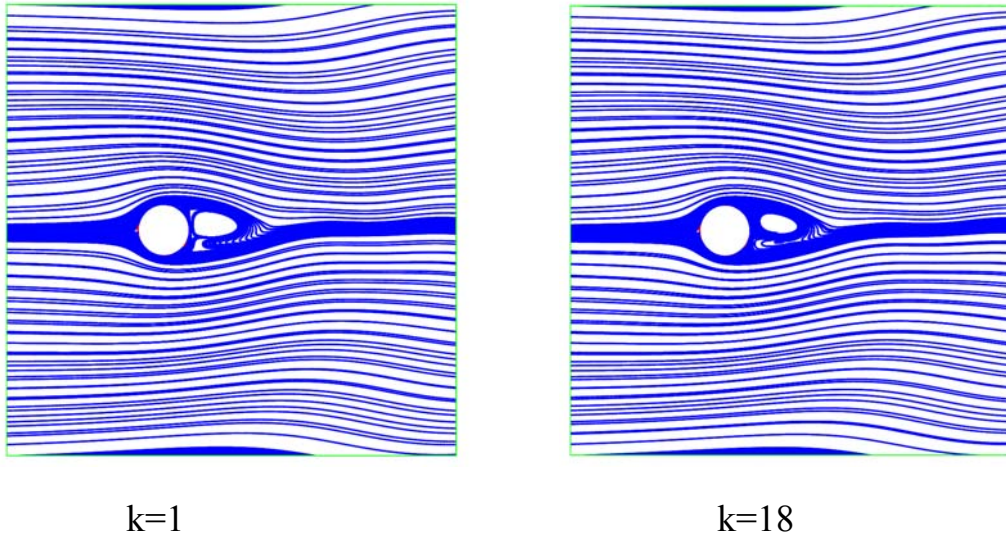


Рис.34. Крупномасштабные виды течения с параметрами  $Re=600$ ,  $Fr=0.96$ .

«Ряби» нет.

В крупномасштабных видах мгновенных линий тока разница заметна. Так что эффект трёхмерности наблюдается. В видах линий равной солёности, которые здесь не приводятся, эффект заметен гораздо менее. Следовательно, эффект трёхмерности начинает слабо проявляться, начиная с течения с  $Re=600$ .

В течении с параметрами  $Re=800$ .;  $Fr=1.28$ . ( $z_{max}=6.5$ ,  $M=220$ ) эффект трёхмерности ещё более отчетливо выражен. Далее рассмотрено течение с параметрами  $Re=1000$ .;  $Fr=1.6$ . Поскольку в мелкомасштабном изображении мгновенных линий тока этого течения появляется рябь, решено было взять  $z_{max}=7.5$ , т.е. отдалить внешнюю границу расчётной области. Соответственно, и число точек по радиусу увеличивается,  $M=240$ .

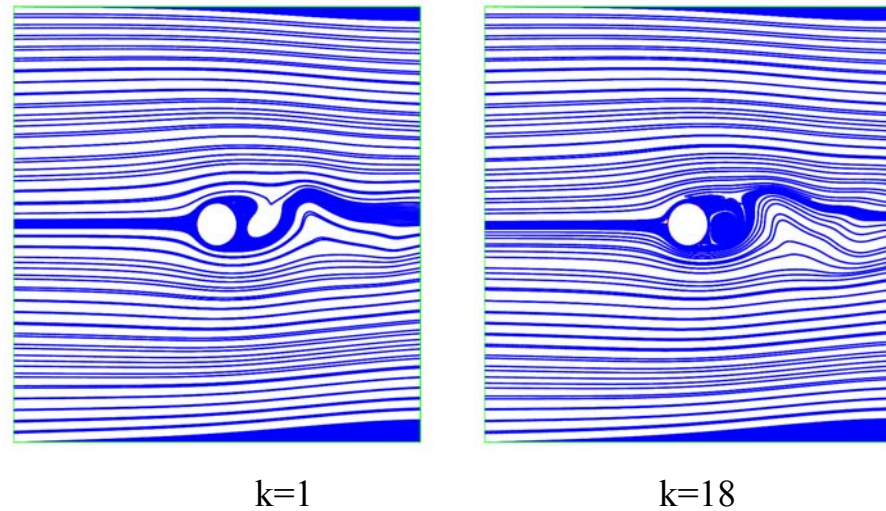


Рис.35. Крупномасштабные виды мгновенных линий тока течения с параметрами  $Re=1000$ ,  $Fr=1.6$ .

Заметно сильное различие между первым и средним сечениями, что показывает наличие всё усиливающегося по мере роста числа  $Re$  эффекта трёхмерности. Течение становится существенно трёхмерным. Кроме того, в мелкомасштабном виде мгновенных линий тока в среднем сечении цилиндра ( $k=18$ ), не приводимым здесь для экономии места, наблюдается небольшая «рябь» в нижней части рисунка, что указывает на то, что положение границы расчётной области должно быть ещё дальше, чем  $z_{max}=7.5$ .

Из анализа приведённых данных можно сделать вывод, что положение внешней границы расчётной области может характеризовать величину области, занятой присоединёнными волнами и простирающейся в область набегающего потока, которая увеличивается с увеличением числа  $Re$ . Так же увеличивается вихревая активность за цилиндром.

Таблица 1. Выбор  $z_{\max}$  и  $M$  в зависимости от числа  $Re$  для жидкости с периодом плавучести  $T_b=6.28c$ . (область, занятая внутренними волнами, представлена также и в радиусах цилиндра  $r$ )

№ задачи	$Re$	$z_{\max}$	$r$	$M$
1	300	4.5	91.25	180
2	450	4.5	91.25	180
3	600	6.5	274.6	220
4	800	6.5	274.6	220
5	1000	>7.5	>421.9	240

## II. Течения жидкости с периодом плавучести $T_b=15c$ .

Поскольку при изображении мгновенных линий тока во всех течениях жидкости с  $T_b=15c$  на левой границе рисунка появлялась «рябь», была сначала выбрана граница расчётной области  $z_{\max}=7.5$ , и число точек по радиусу  $M=240$ .

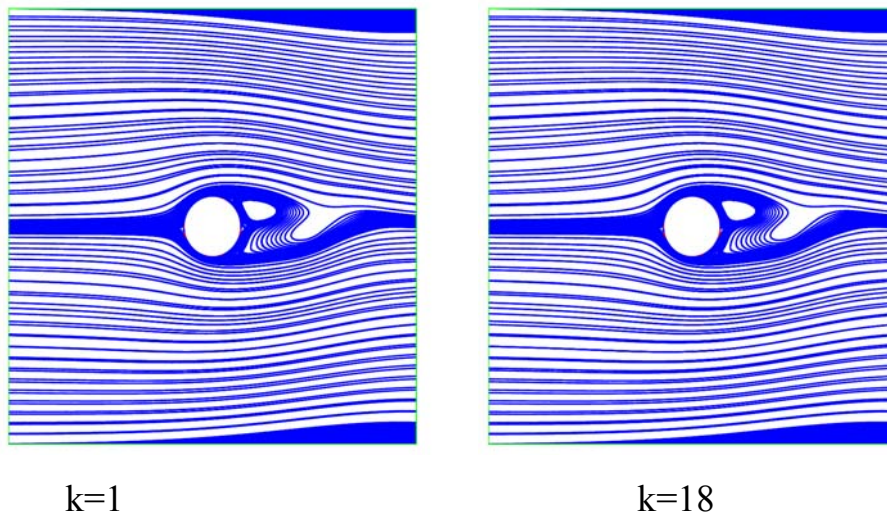


Рис.36. Мгновенные линии тока течения с параметрами  $Re=300.$ ;  $Fr=1.146$ . Видно, что различия в видах  $k=1$  и  $k=18$  нет. Следовательно, в этом течении тоже эффект трёхмерности отсутствует, как и в случае течения с периодом плавучести  $T_b=6.28c$ .

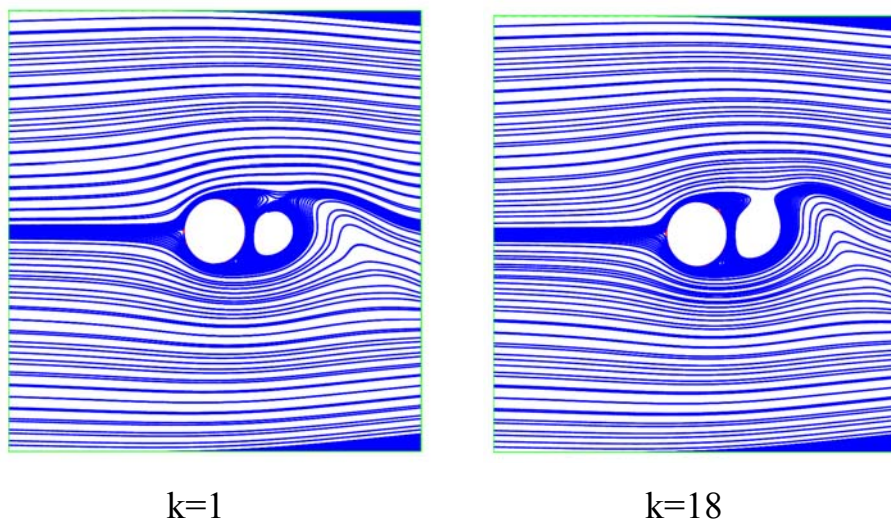


Рис.37. Мгновенные линии тока течения  $Re=450.$ ;  $Fr=1.719$  ( $z_{max}$  и  $M$  – те же, что и в предыдущем случае).

В видах обоих сечений мгновенных линий тока есть заметное отличие .

В этом течении эффект трёхмерности начал проявляться.

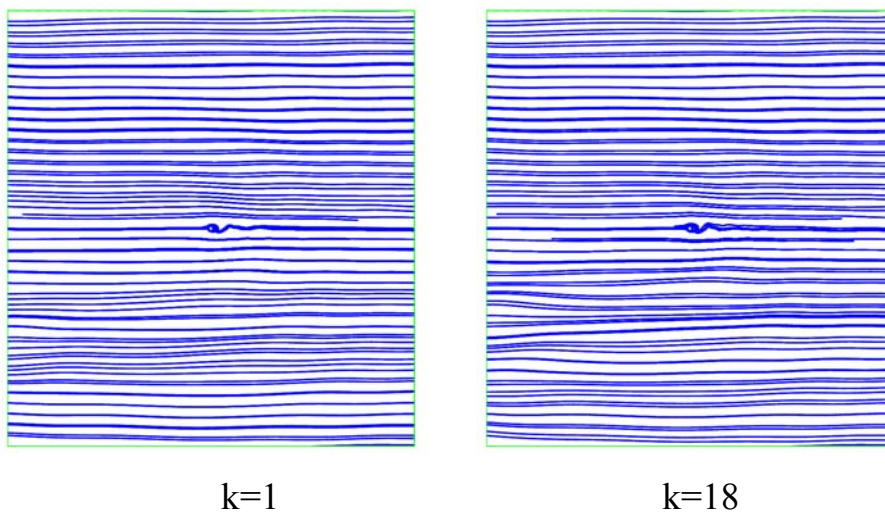




Рис 38. Мелкомасштабные виды мгновенных линий тока для течения с параметрами  $Re=600$ ,  $Fr=2.292$ ,  $z_{max}$  и  $M$  – те же).

В этих видах есть небольшое отличие: наблюдается небольшое искривление мгновенных линий тока в нижней части сечения  $k=18$ . Ось течения сзади цилиндра искривлена. Об этом факте упоминается в [24]. Внутренние волны разрешаются очень слабо, но «ряби» нет.

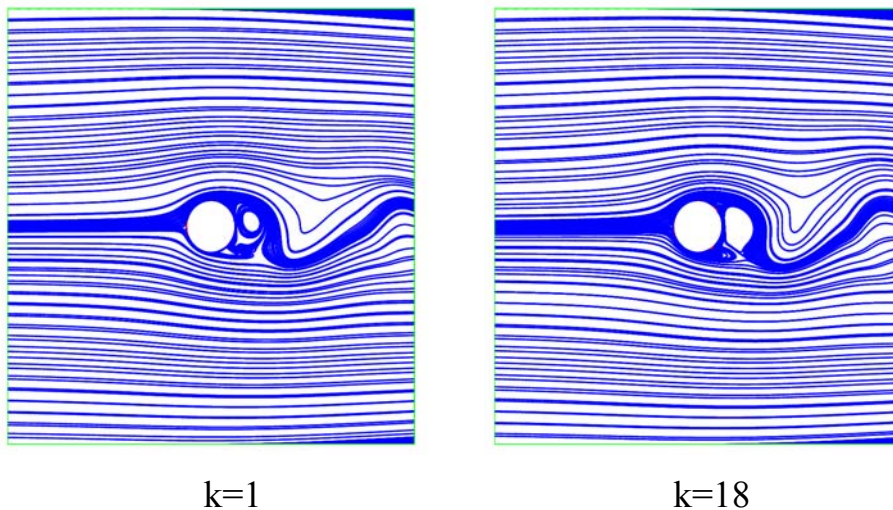


Рис.39. Крупномасштабные виды.

Здесь различие уже более значительное, чем в течении с  $Re=450$ .

Заметно также усиление вихревой активности за цилиндром. Безусловно, для этого течения уже полностью проявляется трёхмерность течения.

Далее приводятся изображения течения с параметрами  $Re=800$ .;  $Fr=3.056$ ;  $z_{max}=9.5$ ;  $M=280$ .

Поскольку в мелкомасштабных видах предыдущего течения намечается некоторая «рябь», решено было отдалить условную границу расчётной области и, соответственно, увеличить количество точек схемы вдоль радиуса.

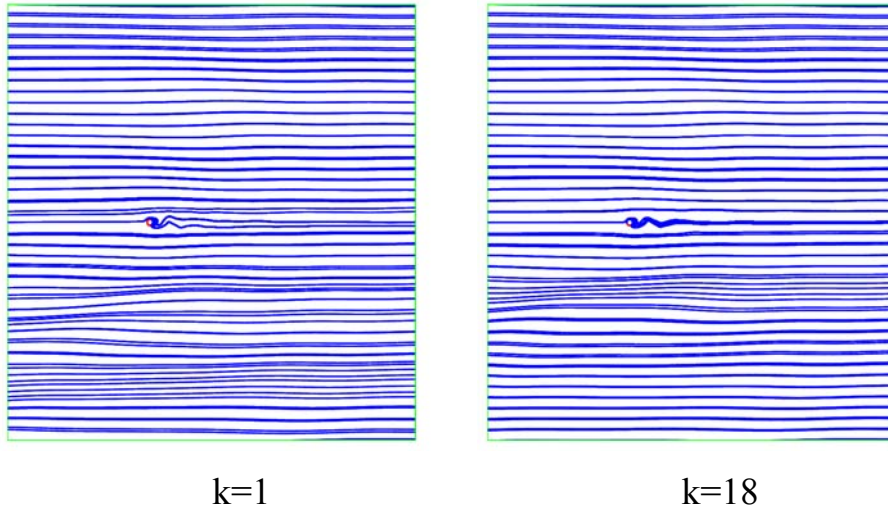


Рис.40. Мелкомасштабные виды мгновенных линий тока

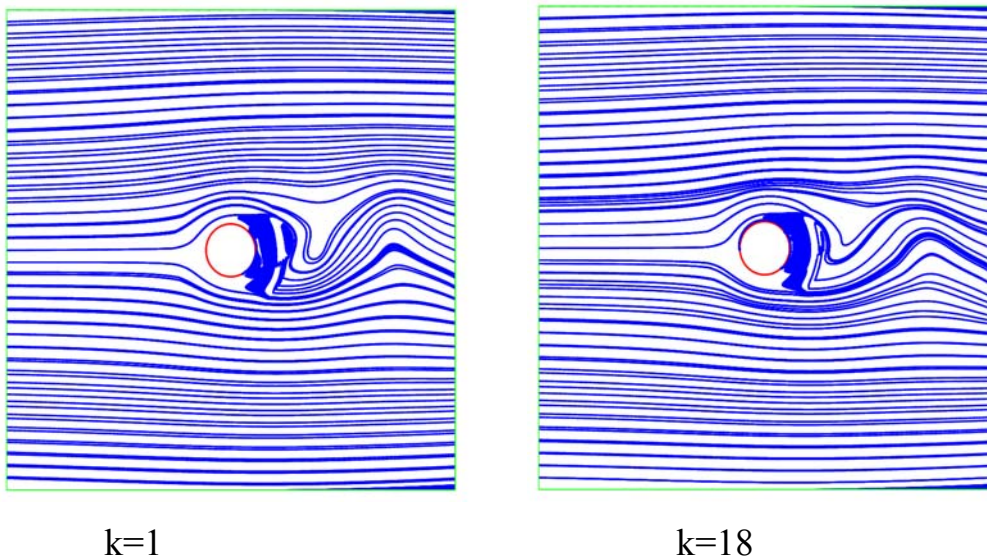


Рис.41. Крупномасштабные виды мгновенных линий тока.

Для этого течения уже полностью. проявляется эффект трёхмерности.

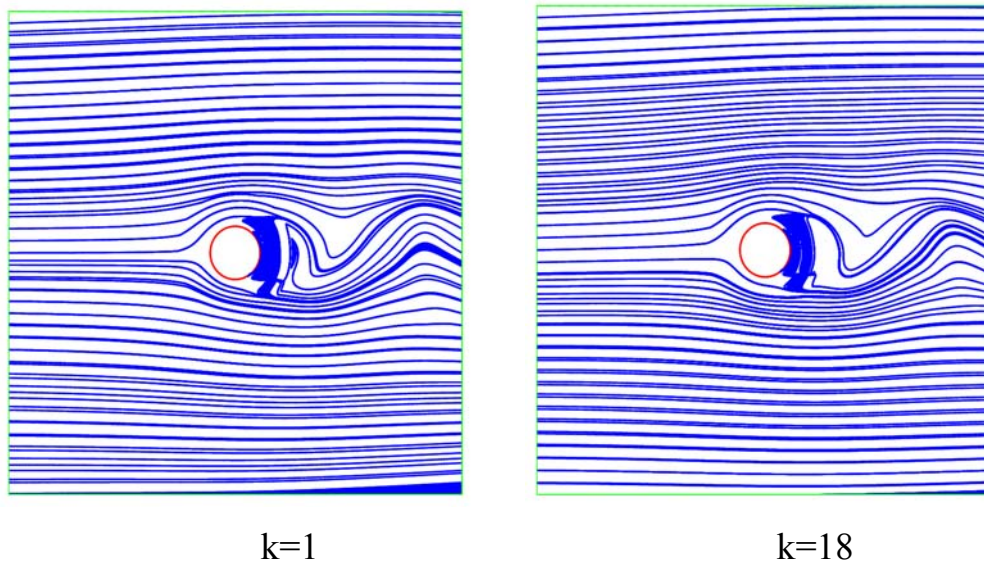


Рис.42. Мгновенные линии тока течения  $Re=1000$ .;  $Fr=3.82$ .  $z_{max}=9.5$ ,  $M=280$

Трёхмерность течения очевидна.

Для жидкости с периодом плавучести  $T_b=15c$  эффект трёхмерности наступает раньше, чем для жидкости с периодом плавучести  $T_b=6.28c$  и область, занятая присоединёнными волнами, гораздо больше вследствие большей лёгкости этой жидкости (в неё легче внести большее возмущение).

Таблица 2. Выбор  $z_{max}$  и  $M$  в зависимости от числа  $Re$  для жидкости с периодом плавучести  $T_b=15c$ . (область, занятая внутренними волнами, представлена также и в радиусах цилиндра  $r$ )

№ задачи	$Re$	$z_{max}$	$r$	$M$
1	300	7.5	421.9	240
2	450	7.5	421.9	240
3	600	7.5	421.9	240
4	800	9.5	857.4	280
5	1000	>9.5	>857.4	280

#### 4.2. Исследование углов отрыва

Исследуется зависимость углов отрыва течения от расположения точки сетки (сечения) на цилиндре.

Рассматриваются течения с периодом плавучести  $T_b=6.28c$  и  $T_b=15c$ . при  $Re=300$ . и  $1000$ . Для обеих жидкостей при  $Re=300$ . было выявлено постоянство углов отрыва по всей длине цилиндра во всех сечениях. Для жидкости с периодом плавучести  $T_b=6.28c$  угол отрыва равен  $48^0$ , а для жидкости с  $T_b=15c$  – угол отрыва равен  $60^0$ , что указывает на отсутствие трёхмерного эффекта для обеих жидкостей при  $Re=300$ . При течении же с  $Re=1000$ . для обеих жидкостей был выявлен трёхмерный эффект, как показывают рисунки (43) и(44). На них показана зависимость угла отрыва от номера сечения по всей длине цилиндра; рисунок (43) показывает эту зависимость для течения жидкости с  $T_b=6.28c$ ., а рисунок (44) – для течения жидкости с  $T_b=15c$ . В последнем проявляется некоторое подобие периодичности, как и для однородной жидкости (поскольку жидкость с  $T_b=15c$  более лёгкая, то её течение более напоминает течение однородной жидкости [24].

Таблица 3. Углы отрыва течения двух жидкостей при разных числах  $Re$ .

№	Re	dangl. for $T_b=6.28c$	dangl. for $T_b=15c$
		in grad	in grad.
1	300	48	66
2	450	62	74
3	600	70	74
4	800	80	76
5	1000	82	84



В приведённой таблице имеется в виду максимальный угол отрыва из всех имеющихся по всей длине цилиндра (на 35-ти точках).

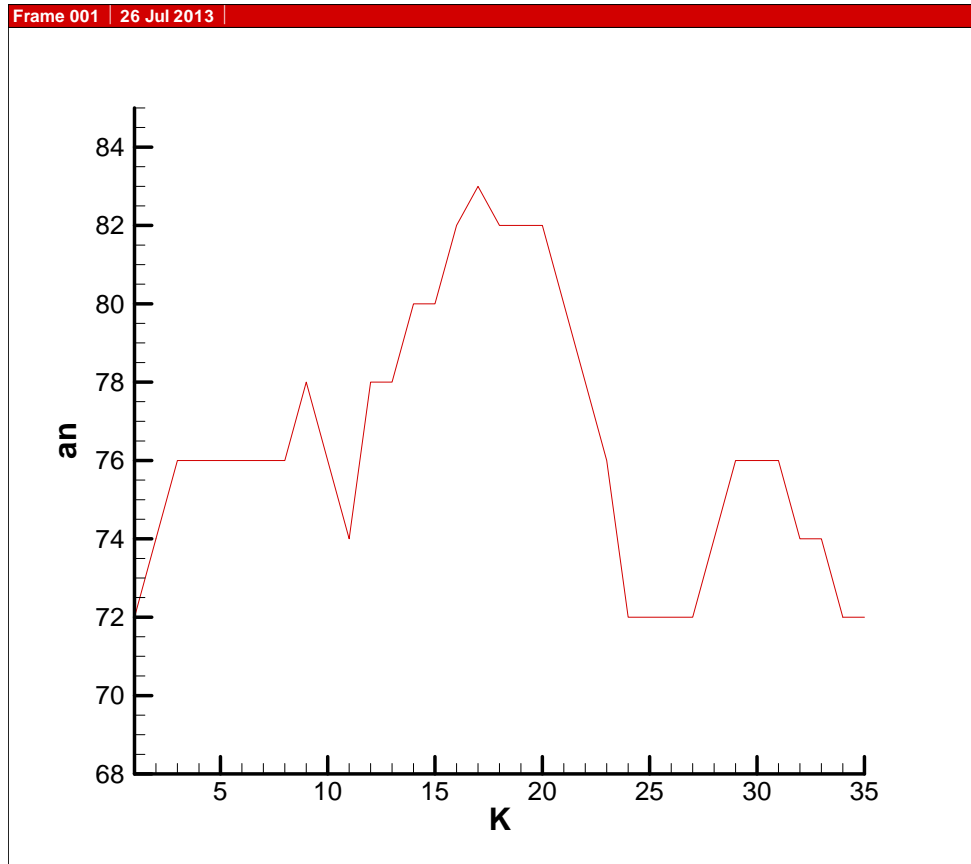


Рис.43. Зависимость угла отрыва течения жидкости с периодом плавучести  $T_b=6.28c$  при  $Re=1000$  от положения точки на образующей цилиндра.

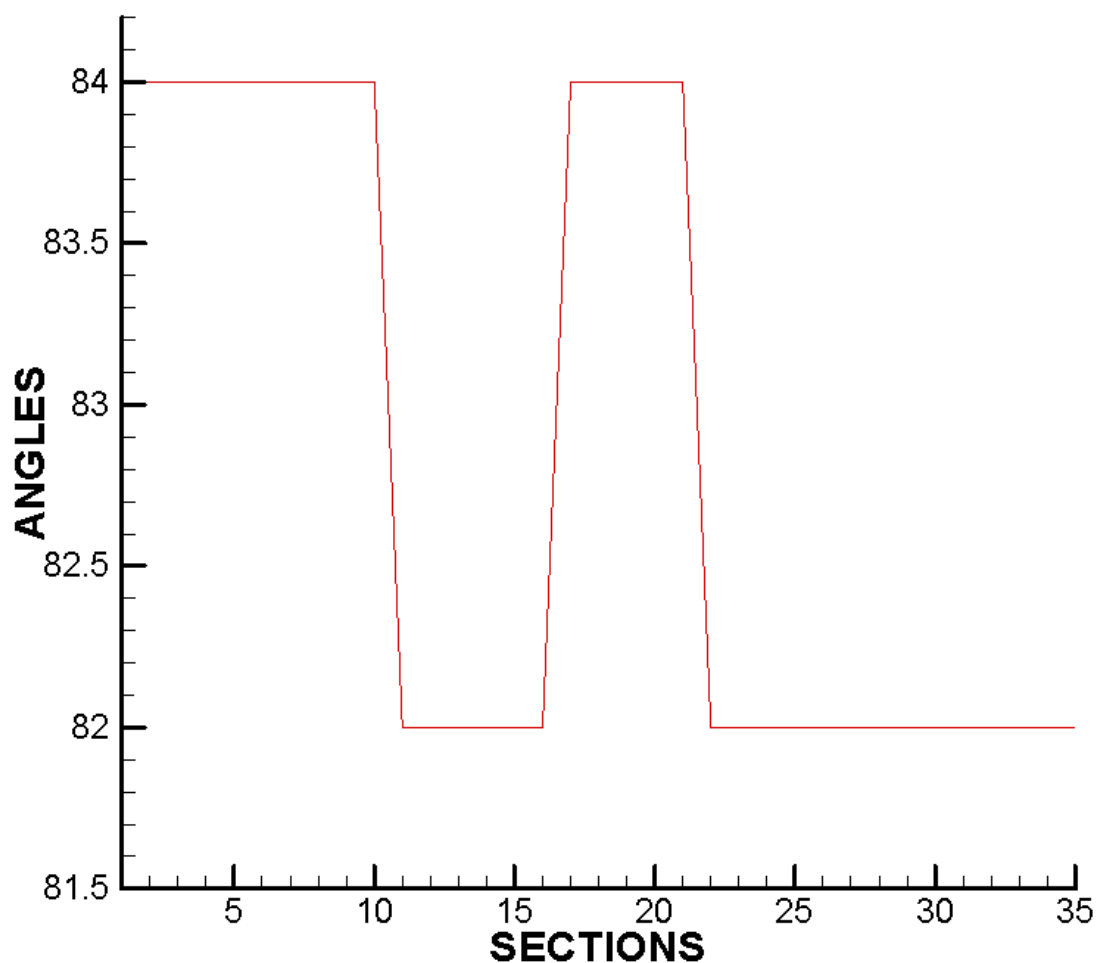
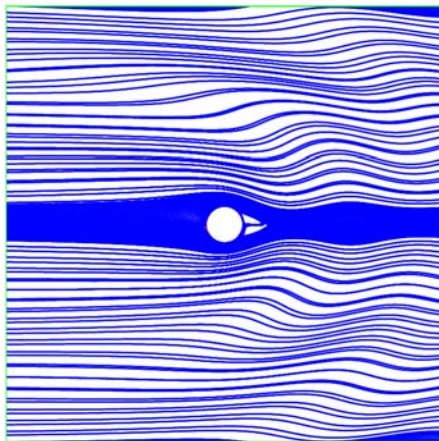


Рис.44. Зависимость угла отрыва течения жидкости с периодом плавучести  $T_b=15$ с при  $Re=1000$  от положения точки на образующей цилиндра.

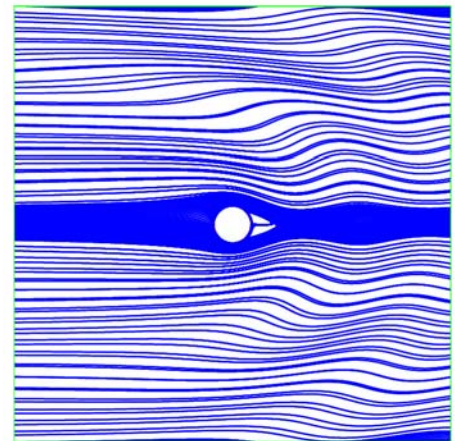
#### 4.3. Подтверждение достоверности результатов

Ввиду отсутствия опубликованных результатов других авторов по трёхмерному обтеканию цилиндра неоднородной жидкостью (в работе [26] только приблизительно и примерно указана возможность возникновения

трёхмерности течения, начиная с указанных чисел  $Re$ ) и , следовательно, сравнения результатов данного исследования с ними, приводится сравнение с достоверными результатами (очень хорошо совпадающими с экспериментом) для двумерного обтекания цилиндра с тем же диаметром жидкостями для течения  $Re=300$ . для обеих жидкостей с периодом плавучести  $T_b=6.28c$  и  $T_b=15c$ ., причём результаты 3D задачи берутся результаты первого сечения  $k=1$ ., относящиеся к тому же периоду времени  $10 T_b$ . Кроме того, приводятся сравнительные графики на оси течения за задней критической точкой цилиндра для двумерного и трёхмерного течений для обоих периодов плавучести при режимах течений с параметрами  $T_b=6.28c$  и  $T_b=15c$ .



Двумерное течение



Трёхмерное течение

Рис.45. Течение жидкости с периодом плавучести  $T_b=6.28c$  с параметрами  $Re=300$ .;  $Fr=0.48$  . , мгновенные линии тока.

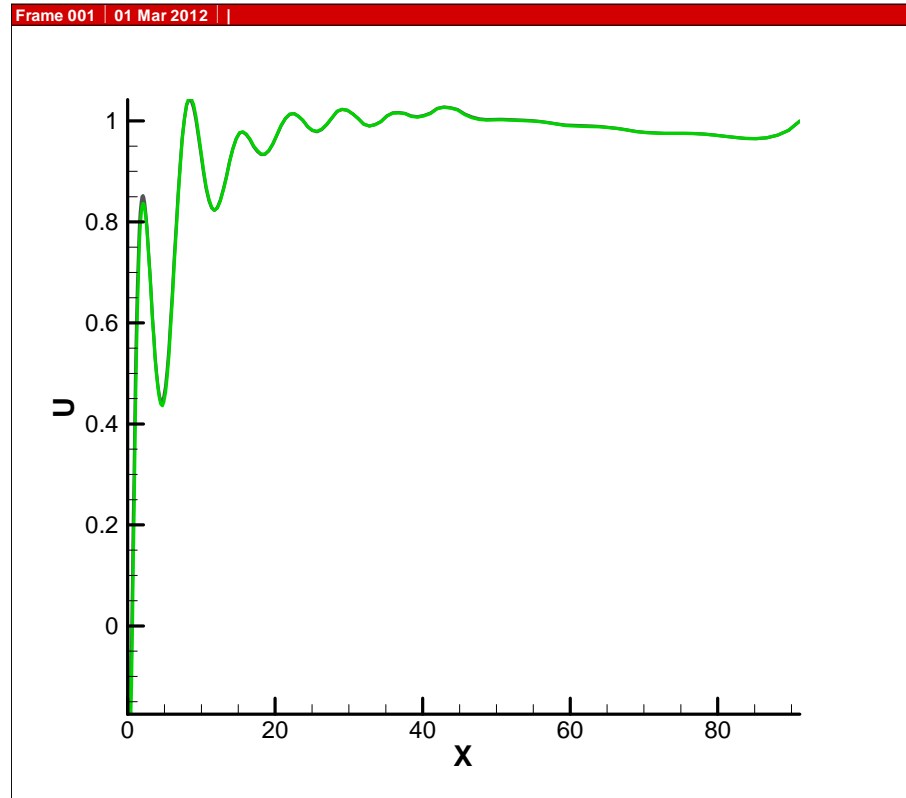
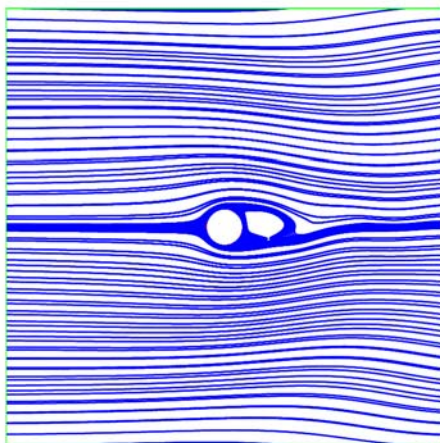
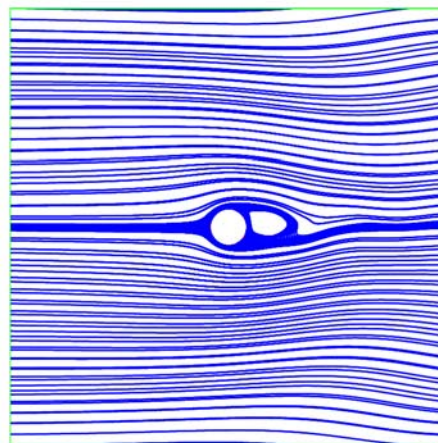


Рис.46. Сравнение радиальной составляющей скорости на оси течения в двумерном и трёхмерном случаях для течения жидкости с  $T_b=6.28$ с и  $Re=300$ . Полное совпадение.



Двумерное течение



Трёхмерное течение

Рис.47. Течение жидкости с периодом плавучести  $T_b=15$ с с параметрами  $Re=300$ ,  $Fr=1.146$ .

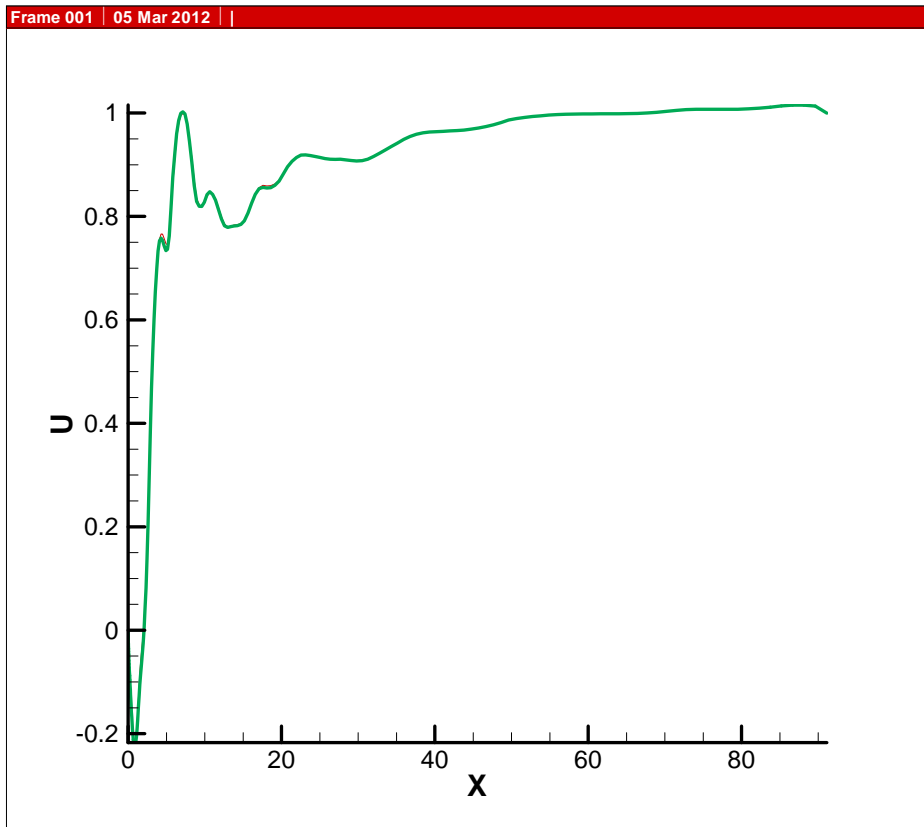


Рис.48. Сравнительная скорость течения на оси течения в двумерном и трёхмерном случаях для течения жидкости с  $T_b=15c$  и  $Re=300$ . Практически полное совпадение.

Из приведённых рисунков видно, что для жидкостей с  $T_b=6.28c$  и  $T_b=15c$  для течения с параметрами  $Re=300$ ;  $Fr=0.48$  в мгновенных линиях тока – полное совпадение в 2D и 3D вариантах.

Кроме этого, были проведены расчёты усреднённых по всем сечениям углов отрыва течения с параметрами:  $T_b=6.28c$ ,  $Re=600$ ,  $Fr=0.96$  для цилиндров длины  $L=3.5R$ ,  $L=14R$ ,  $L=28R$ ; с длиной ячейки сетки вдоль образующей цилиндра  $dk=0.1$ ,  $0.4$  и  $0.8$  соответственно при сохранении постоянного количества точек по цилиндру: 36 точек.

Средний угол отрыва для стандартного цилиндра длиной  $L=7R$  составил  $70.1714$ , для цилиндра длиной  $L=14R$  –  $68.8$ , для цилиндра длиной  $L=3.5R$  –  $70.86$ , для цилиндра длиной  $L=28R$  –  $69.94$ . В результате угол

отрыва, усреднённый по всем сечениям и по всем длинам цилиндра, составил 69.94.

**(Все значения углов выражены в градусах).**

При этом отклонение от этого значения для цилиндра длиной  $L=7R$  составило 0.33%, для цилиндра длиной  $L=14R$  составило 0.984%, для цилиндра длиной  $L=3.5R$  составило 1.01%, и для цилиндра длиной  $L=28R$  составило 0%. С учётом того, что шаг вдоль образующей цилиндра был разной длины, т.е. сетки были разные и поэтому значения скоростей вычислялись в разных местах для каждого цилиндра, такая точность по углу отрыва ещё раз подтверждает правильность расчётов и достоверность результатов.

Основные результаты расчёта трёхмерных течений изложены в работе [28].

## **Выводы.**

### Для двумерных течений:

Из приведённых расчётов следует, что:

- 1) Блокировка жидкости перед цилиндром наблюдается во всех приведённых течениях жидкости с  $T_b=6.28$  сек., а для жидкости с  $T_b=25.2$  сек. – только для течений с числами Фруда, меньшими 0.27. Примерная оценка длины области заблокированной жидкости приводится в работе [2].
- 2) Прослойки плотности наблюдаются в жидкостях с  $T_b=6.28$  сек. во всех приведённых течениях, а в более лёгкой – только до чисел  $Fr$ , равных или меньших 0.27. Следовательно, прослойки плотности образуются только при малых числах  $Fr$ .
- 3) На рисунках мгновенных линий тока жидкости с периодом плавучести  $T_b=6.28$  сек. в следе за цилиндром появляются длинные застойные зоны при  $Re=42.75$  и меньших. При больших числах  $Re$  они не обнаруживаются. Для течений с периодом плавучести  $T_b=25.2$  сек. в мгновенных линиях тока обнаруживаются два симметрично расположенных небольших вихря в следе

непосредственно за цилиндром при  $Re=71$ . и больше. Для течений с меньшими числами  $Re$  (более медленных течений) это явление не обнаруживается.

4) Для течений с обоими рассмотренными плавучести:  $T_b=6.28c$  и  $T_b=25.2c$  линии равной солёности имеют вид “гребня”, всё более ярко выраженный по мере увеличения  $Re$ . “Гребень” постепенно немного эволюционирует с развитием течения.

Для трёхмерных течений:

1) Для жидкости с периодом плавучести  $T_b=15c$  эффект трёхмерности наступает раньше, чем для жидкости с периодом плавучести  $T_b=6.28c$  и область, занятая присоединёнными волнами, гораздо больше вследствие большей лёгкости этой жидкости (в неё легче внести большее возмущение).

2) Величина области, занятой присоединёнными волнами вверх по течению от передней критической точки цилиндра, зависит от числа Рейнольдса набегающего потока : увеличивается с ростом этого числа и примерно на три порядка превышает диаметр цилиндра.

3) Это явление может быть использовано для раннего обнаружения объектов, движущихся с большой скоростью в морской воде.

Заключение.

В результате расчётов с помощью созданного автором данной работы комплекса программ по обтеканию кругового цилиндра неоднородной жидкостью численно обнаружено несколько новых явлений, возникающих в стратифицированной жидкости, а именно:

В двумерном обтекании цилиндра -

1) прослойки повышенной плотности в следе за цилиндром при малых числах Фруда, ранее обнаруженные в эксперименте; наличие их подтверждено численно.

2) длинные застойные зоны так же в следе за цилиндром в жидкости с небольшим периодом плавучести (более плотной) при малых числах Фруда.

3) Форма линий равной солёности имеет вид «гребня» во всех исследуемых двумерных и трёхмерных течениях.

В трёхмерном обтекании цилиндра обнаружена зависимость размера области вверх по течению перед передней критической точкой цилиндра, занятой присоединёнными волнами, от скорости набегающего потока. Указано на возможное практическое применение этого явления.

Рассчитаны максимальные углы отрыва течения по всей длине цилиндра для течений с периодами плавучести  $T_b=6.28c$  и  $T_b=15c$



## ЛИТЕРАТУРА

1. **Байдулов В.Г., Чашечкин Ю.Д.** Влияние диффузионных эффектов на пограничные течения в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. АН. ФАО. 1993. Т. 29. № 5. С. 666-672.
2. **Boyer D.L., Davies P.A., Fernando H.J.S., Zhang X.** Linearly stratified flow past a horizontal circular cylinder // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1989. V. 328. P. 501–528.
3. **Чашечкин Ю.Д., Воейков И.В.** Вихревые системы за цилиндром в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29, № 6. С. 821–830.
4. **Миткин В.В., Чашечкин Ю.Д.** Структура стратифицированного течения около цилиндра при малых значениях внутреннего числа Фруда // Прикладная механика и техническая физика (ПМТФ). 1999. Т. 40. № 1. С. 80-88.
5. **Long R.R.** Some aspects of the flow of stratified fluids. I – A theoretical investigation // Tellus. 1953. V. 5. N 1. P. 42-58.
6. **Аксенов А.В., Городцов В.А., Стурова И.В.** Моделирование обтекания цилиндра стратифицированной идеальной несжимаемой жидкостью. Препринт №282. М.: ИПМ АН СССР, 1986. 59 с.
7. **Гущин В.А.** Метод расщепления для задач динамики неоднородной вязкой несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1981.Т.21. №4. С. 1003–1017.
8. **Белоцерковский О.М.** Численное моделирование в механике сплошных сред . – М.: “Наука”. 1984. 529.
9. **Белоцерковский О.М., Гущин В.А., Коньшин В.Н.** Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1987. Т. 27. № 4. С . 594-609

10. **Белоцерковский О.М., Белоцерковский С.О., Гушин В.А. и др.** Численное и экспериментальное моделирование гравитационных внутренних волн при движении тела в стратифицированной жидкости./ Докл.АН СССР. 1984. Т. 279, №3. С. 562-566.
11. **Байдулов В.Г., Чашечкин Ю.Д.** Формирование течения при начале движения горизонтального цилиндра в непрерывно стратифицированной жидкости// Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1999.Т. 35,№6. С.821-828.
12. **Самарский А.А., Николаев Е.С.** Методы решения сеточных уравнений.- М.: Наука, 1978.
13. **Антонов А.С.** Параллельное программирование с использованием технологии MPI ( методическое пособие). Издательство Московского университета, 2004 .
14. **Миткин В.В.** Экспериментальное исследование поля скорости перед двумерным препятствием в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Физика Атмосферы и океана. 2001. Т. 37, №1. С. 85-92.
15. **Rozhdestvenskaya T.I., Gushchin V.A.,** Numerical simulation of Non homogeneous Viscous Fluid Flows around 2D circular cylinder, 11-th International Conference “FLUXES AND STRUCTURES IN FLUIDS”, Abstracts, Moscow, June 20-22, 2001, p.177.
16. **Gushchin V.A., Kostomarov A.V., Matyushin P.V., Pavlykova E.R., Rozhdestvenskaya T.I.,** Matemathical Modelling of Separated Homogeneous and Stratified Fluid Flows, Abstracts of the Russian-Japan International Workshop on Actual Problems of Computational Mechanics, St Peterburg, Russia, August 5-10,2002.
17. **Гушин В.А. , Рождественская Т.И.** Численное моделирование течений неоднородной вязкой жидкости около 2D кругового цилиндра. Избранные тексты докладов международной конференции “Потоки и структуры в жидкостях” (Москва, 20-22 июня 2001 г.), Институт проблем

механики РАН, 177.

18. **Rozhdestvenskaya T.I.** Computation investigation of stratified fluid flows around circular cylinder fine structure. International workshop on Turbulence and Instabilities (21-25 September, 2004, Moscow, Russia). Abstracts, 2004.

19. **Гущин В.А., Миткин В.В., Рождественская Т.И., Чашечкин Ю.Д.** Численное и экспериментальное исследование тонкой структуры течения стратифицированной жидкости вблизи кругового цилиндра.// ПМТФ. 2007. Т 48, №1. С.43-54.

20. **Ю.В. Кистович, Ю.Д Чашечкин.** Внутренние волны, вязкие пограничные слои и внутренние пограничные течения в непрерывно стратифицированной жидкости. Препринт ИПМех РАН №674, Москва, 2001.

21. **В.А.Гущин, Т.И. Рождественская.** Численное исследование явлений, возникающих вблизи кругового цилиндра в течениях стратифицированных жидкостей с небольшими периодами плавучести.// ПМТФ, 2011, №6, т.52, с.69-76.

22. **Gushchin V.A. and Rozhdestvenskaya T.I.** Numerical Study of the Effects occurring near a circular cylinder in Stratified Fluid Flows with short buoyancy period.//J. of Applied Mechanics. 2011. Vol.52. No.6. p. 905-911.

23. **Гущин В.А., Матюшин П.В., Рождественская Т.И.** Прямое численное моделирование пространственных течений жидкости./ Сб. статей «Фрагменты истории и достижения ИАП РАН 1986-2011. М.: ISBN 978-5-8196-0037-5. с 119-159.

24. **Koenig, M. and Eckelman, H.,** On the Transition of the Cylinder Wake, J. Phys. Fluids, 7-4 (1995), 779-794.

25. **Gushchin, V.A., Kostomarov, A.V., Matyushin, P.V.** 3D Visualisation of the Separated Fluid Flows. Journal of Visualisation, Vol.7, No.2 (2004) 143-150.

26. **Mitkin.V.,Chashechkin. Yu.** Sourcing interfaces, vortices and vortex system inside the internal waves wake past the horizontally moving cylinder in a continuously stratified fluid., *Journal of Visualization* 9 (3);301-308.2006.
27. **C.H.K. Williamson,** “Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers,” *J. Fluid Mech.* 206, 579 (1989).
28. **Т. И. Рождественская.** Численное исследование течений неоднородной жидкости около кругового цилиндра. (В печати).