

На правах рукописи

Сабурин Дмитрий Сергеевич

**ПРИМЕНЕНИЕ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ
УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ
ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ
ПОВЕРХНОСТЬЮ В ПРИБЛИЖЕНИИ
МЕЛКОЙ ВОДЫ**

Специальность 05.13.18 —

«Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Елизарова Татьяна Геннадиевна

Официальные оппоненты: **Ибраев Рашит Ахметзиевич**,
доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент РАН,
ИВМ РАН,
главный научный сотрудник

Софронов Иван Львович,
доктор физико-математических наук,
Московский Исследовательский Центр Шлюмберже,
ведущий научный сотрудник

Ведущая организация: Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
РАН

Защита состоится «14» июня 2018 года в «11» час. «00» мин. на заседании диссертационного совета Д.002.024.03 на базе ИПМ им. М.В.Келдыша РАН по адресу: 125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке в библиотеке Института прикладной математики имени М.В.Келдыша РАН и на сайте www.keldysh.ru.

Автореферат разослан

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.002.024.03, кандидат физико-математических наук

Корнилина М.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена построению математических моделей, разработке численных алгоритмов и численному решению практических задач течения несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести в приближении мелкой воды. Уравнения мелкой воды (УМВ) выводятся из полных уравнений Навье-Стокса для изотермической несжимаемой жидкости путем их интегрирования по глубине при условиях, что горизонтальный масштаб много больше вертикального и вертикальные скорости в жидкости и градиенты давления малы. Применение УМВ позволяет существенным образом упростить алгоритм и сократить необходимые вычислительные ресурсы и машинное время, что является очень важным при решении практических задач.

Малость вертикального масштаба по отношению к горизонтальному встречается при моделировании течений в неглубоких водоемах, в том числе в реках, озерах, водохранилищах, вблизи побережья морей и океанов. Спектр данных задач включает в себя моделирование природных явлений, которые представляют реальную или потенциальную опасность для жизни людей и экономики региона, таких, как сейши, цунами, ветровые нагоны, волны-убийцы и множество других задач, связанных с проблемами океанологии. Также УМВ используются для моделирования крупномасштабных атмосферных течений, где существенно ускорение Кориолиса и его широтные вариации. При соблюдении условия малости вертикального масштаба УМВ могут применяться для задач вынужденных колебаний жидкости в замкнутых резервуарах (слошинга).

Многообразие задач, связанных с исследованием течений жидкости со свободной поверхностью, породило значительное количество численных методик, учитывающих особенности той или иной рассматриваемой проблемы. Среди них можно выделить такие методы, как метод конечных разностей, метод частиц, метод конечных элементов, метод конечного объема и других, более специфических, основанных, например, на дроблении шагов, методе Годунова и др.

Используемые подходы нельзя считать совершенными. Основные сложности при построении численной аппроксимации УМВ связаны с получением устойчивого разностного решения задачи. Неустойчивость в решении

возникает как при решении задач с разрывным, сложным профилем подстилающей поверхности, который приводит к возникновению сложных разрывных решений, так и при образовании областей сухого дна, когда высота уровня жидкости становится малой, в результате чего образуются движения с большими числами Фруда.

Другие трудности возникают при аппроксимации слагаемых, зависящих от геоцентрической широты, например, силы Кориолиса. Для ее аппроксимации используются, например, методы расщепления по физическим процессам, а также методы, которые интерпретируют силу Кориолиса как некоторую фиктивную подстилающую поверхность. Все это приводит к усложнению разностных алгоритмов и зачастую лишает их однородности. С другой стороны, в алгоритмах должна быть предусмотрена возможность распараллеливания на большое число процессоров для ускорения счета.

В работах Т.Г. Елизаровой и О.В. Булатова был предложен и оттестирован новый численный метод решения УМВ, основанный на сглаживании классических уравнений по некоторому малому интервалу времени. Данная процедура приводит к возникновению регуляризирующих добавок, которые обеспечивают устойчивость численного решения задачи в широком диапазоне чисел Фруда. Это позволяет использовать неразнесенную сеточную аппроксимацию и применять потоковый вид уравнений без линеаризации исходных уравнений, что обеспечивает строгое соблюдение законов сохранения массы и импульса в отсутствие внешних сил. Данный алгоритм является универсальным для решения широкого класса задач, он позволяет рассчитывать течения с подвижными областями сухого дна. Кроме того, его легко распараллелить и обобщить на неструктурированные сетки. Полученные таким образом уравнения называются регуляризованными УМВ (РУМВ).

Теоретическое развитие метода проводилось, в частности, А.А. Злотником, Ю.В. Шеретовым, Т.Г. Елизаровой и О.В. Булатовым. Для РУМВ было выведено уравнения баланса полной механической энергии и доказан факт ее невозрастания. Было показано, что если функции h , u_x и u_y являются решением стационарных уравнений мелкой воды, то они также являются решением стационарных РУМВ. Также на примере задач распада разрыва был проведен ряд тестов, показывавших эффективность данного алгоритма по сравнению с существующими численными методами.

Однако для решения практических задач такой алгоритм применялся мало, его эффективность могла быть оценена только исходя из теоретических результатов. Поэтому для дальнейшего развития подхода и привлечения к нему внимания специалистов необходима дальнейшая модификация алгоритма и применение его для решения различных прикладных задач.

В связи с перечисленным выше задачи усовершенствования и разработки эффективных алгоритмов на основе РУМВ для математического моделирования нестационарных течений жидкости со свободной поверхностью в приближении мелкой воды являются актуальными.

Исследования, вошедшие в диссертацию, были поддержаны грантами РФФИ 10-01-00136, 13-01-00703-а, 16-01-00048.

Целью данной работы является разработка и применение численных алгоритмов на основе регуляризованных уравнений мелкой воды для решения прикладных задач циркуляции жидкости в морских акваториях и колебаний жидкости в замкнутых сосудах.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработка математических моделей для решения задач циркуляции жидкости в морских акваториях и колебаний жидкости в замкнутых сосудах
2. Разработка численного алгоритма с учетом адаптации внешних данных, необходимых для решения соответствующих прикладных задач
3. Создание универсального программного комплекса для расчета численного решения поставленных в пункте 1 задач, визуализация и интерпретация полученных результатов в соответствии с теорией описываемого явления

Научная новизна. Впервые в рамках полных двумерных уравнений мелкой воды были разработаны математические модели и произведены численные расчеты в задачах о колебаниях топлива в танкерах газовозов и генерации волн Фарадея в рамках неинерциальной системы координат. Впервые с использованием РУМВ была разработана математическая постановка и проведено численное моделирование циркуляции жидкости в неглубоких водоемах.

Практическая значимость. Разработаны новые оригинальные методы решения описанных выше задач. Применение РУМВ позволяет значительно сократить необходимые вычислительные ресурсы и машинное время, что дает преимущество при использовании для решения новых практических задач. Созданные программные решения можно применять, например, для быстрой оценки максимальных нагрузок на стенки грузовых емкостей при различных условиях эксплуатации судов, или для расчета прогноза течений и уровня моря в зависимости от ветрового волнения в режиме реального времени.

Достоверность полученных результатов обеспечивается сравнением с экспериментальными данными и с уже существующими расчетами задач. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- Применение регуляризованных уравнений для математического моделирования нестационарных течений жидкости со свободной поверхностью в приближении мелкой воды (по материалам кандидатской диссертации), Семинар ИПМ им. М.В.Келдыша РАН «Математическое моделирование», ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, Москва, 27 февраля 2018;
- Применение регуляризованных уравнений для математического моделирования течений жидкости со свободной поверхностью в приближении мелкой воды (по материалам кандидатской диссертации), Семинар кафедры математики Физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, 6 декабря 2017;
- Регуляризованные уравнения мелкой воды и численное моделирование нагонов и цунами, Семинар лаборатории Цунами им. академика С.Л. Соловьёва, ИО РАН, Москва, 22 декабря 2017;
- Численное моделирование природных явлений в неглубоких водоемах на основе сглаженных уравнений мелкой воды, Семинар института Океанологии имени П.П. Ширшова, Институт океанологии имени П.П.Ширшова, Москва, 6 октября 2017;

- Численное моделирование сейшевых колебаний с использованием сглаженных уравнений гидродинамики, Научная конференция «Мировой океан: модели, данные и оперативная океанология», Севастополь, Россия, 26-30 сентября 2016;
- Tank sloshing simulations in shallow-water approximation, MARINE 2015 Computational Methods in Marine Engineering VI, Rome, 15-17 июня 2015;
- Численное моделирование волн Фарадея на основе уравнений мелкой воды, XXII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2015», Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова, Москва, 13-17 апреля 2015;
- Regularized shallow water equations in numerical modeling of tank sloshing and tsunami propagation, Japan-Russia workshop on supercomputer modeling, instability and turbulence in fluid dynamics, Keldysh Institute for Applied Mathematics RAS, Москва, 4-6 марта 2015;
- Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости. Конвективные течения и течения в приближении мелкой воды, Математические методы в естественных науках, научный семинар под руководством А.Н.Боголюбова. Москва, МГУ, Москва, Россия, 2014;
- Numerical modeling of fuel tanks sloshing, 4-ая международная научная школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах», Москва, ИПМех РАН, 2013;
- Численное моделирование колебания топлива в танках ледоколов с использованием регуляризованных уравнений мелкой воды, XX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов-2013», Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова, Москва, 2013;
- Численное моделирование колебаний жидкости в топливных баках, Семинар Санкт-Петербургского государственного морского технического университета, Санкт-Петербург, Россия, 30 января 2013;

- Численное моделирование колебаний жидкости в топливных баках современных ледоколов, XIX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов-2012», Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова, Москва, 2012.

Личный вклад. Личный вклад соискателя состоит в непосредственной разработке математических моделей для задач циркуляции жидкости в морских акваториях и колебаний жидкости в замкнутых сосудах, внедрения внешних источников данных, модификации численного алгоритма, создании на его основе комплекса программ, проведении расчетов, интерпретации и оформлении всех полученных результатов, в том числе оформление рукописи диссертации и основных публикаций по выполненной работе.

Список публикаций по теме диссертации Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных изданиях [1—7], 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 133 страницы с 43 рисунками и 5 таблицами. Список литературы содержит 98 наименований.

Содержание работы

Во **введении** приводится общая характеристика работы: обосновывается актуальность темы исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, ставятся основные цели и задачи работы, обосновывается научная новизна и практическая значимость, формулируются основные положения, выносимые на защиту, аргументируется достоверность полученных результатов, приводятся апробация работы, структура диссертации, личный вклад и список публикаций по теме диссертации.

В **первой главе** выписывается система УМВ, которая используется для постановки практических задач, приводится вывод системы РУМВ, которая используется как основа численного метода решения, и её разностная аппроксимация, обсуждаются наиболее важные для решения прикладных задач спецификации численного алгоритма. Для постановки задач в данной работе использовались двумерные УМВ в консервативной форме:

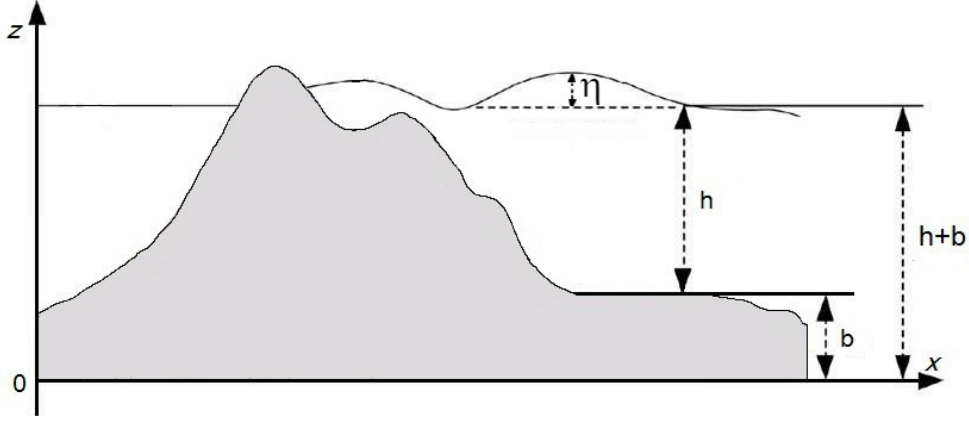


Рис. 1 — Переменные уравнений МВ

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u_x h}{\partial x} + \frac{\partial u_y h}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u_x h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h u_x^2 + \frac{1}{2} g h^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (h u_x u_y) &= h f_{v,x} + f_{s,x} - g h \frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h u_y^2 + \frac{1}{2} g h^2 \right) &= h f_{v,y} + f_{s,y} - g h \frac{\partial b}{\partial y} \end{aligned} \quad (1)$$

Основными неизвестными являются величины $h(x,y,t)$ – высота жидкости над подстилающей поверхностью, $u_x(x,y,t)$ и $u_y(x,y,t)$ – компоненты скорости течения (рис. 1). Символами $f_{v,x}(x,y,t)$ и $f_{v,y}(x,y,t)$ обозначены составляющие объемной внешней силы, действующей на всю толщу слоя, например, силы Кориолиса или силы Эйлера, символами $f_{s,x}(x,y,t)$ и $f_{s,y}(x,y,t)$ – составляющие поверхностной внешней силы, например, силы трения о дно или силы трения ветра о свободную поверхность, $b(x,y)$ – топография дна, g – ускорение силы тяжести. Также для визуализации результатов используется величина $\eta = h_0 - h(x,t)$ – отклонение уровня жидкости от равновесного значения h_0 .

Система РУМВ выводится из исходной системы путем осреднения уравнений по некоторому малому промежутку времени. В результате возникают дополнительные слагаемые первого порядка малости $O(\tau)$, которые имеют вид вторых пространственных производных. Они вносят дополнительную диссипацию в систему, которая сглаживает численную неустойчивость и позволяет использовать простые и эффективные численные алгоритмы.

Регуляризованные уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial j_{my}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial hu_x}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx}u_x}{\partial x} + \frac{\partial j_{my}u_x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh^2}{2} \right) &= h^* \left(f_{v,x} - g \frac{\partial b}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial y} + f_{s,x} \\ \frac{\partial hu_y}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx}u_y}{\partial x} + \frac{\partial j_{my}u_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{gh^2}{2} \right) &= h^* \left(f_{v,y} - g \frac{\partial b}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yy}}{\partial y} + f_{s,x} \end{aligned} \quad (2)$$

Величины j_{mx} и j_{my} имеют физический смысл компонент регуляризованной плотности потока жидкости и выражаются в виде:

$$j_{mx} = h(u_x - w_x), \quad j_{my} = h(u_y - w_y), \quad (3)$$

где hu_i - есть плотность потока жидкости в рамках приближения мелкой воды, а w_i - регуляризирующая поправка к скорости:

$$w_x = \frac{\tau}{h} \left(\frac{\partial(hu_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(hu_xu_y)}{\partial y} + gh \frac{\partial(h+b)}{\partial x} \right) \quad (4)$$

$$w_y = \frac{\tau}{h} \left(\frac{\partial(hu_xu_y)}{\partial x} + \frac{\partial(hu_y^2)}{\partial y} + gh \frac{\partial(h+b)}{\partial y} \right) \quad (5)$$

Компоненты $\Pi_{i,j}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Pi_{xx} &= u_x w_x^* + R^*, & \Pi_{yx} &= u_y w_x^* \\ \Pi_{xy} &= u_x w_y^*, & \Pi_{yy} &= u_y w_y^* + R^*, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} w_x^* &= \tau h \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + g \frac{\partial(h+b)}{\partial x} \right) \\ w_y^* &= \tau h \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + g \frac{\partial(h+b)}{\partial y} \right) \\ R^* &= g\tau h \left(\frac{\partial hu_x}{\partial x} + \frac{\partial hu_y}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Для аппроксимации РУМВ в данной работе применялась явная по времени разностная схема, в которой использовался интегро-интерполяционный метод с аппроксимацией пространственных производных центральными разностями. Для расчетов применялись равномерные неразнесенные пространственные сетки. Устойчивость разностной схемы определялась слагаемыми с коэффициентами τ , которые были связаны с шагами пространственной сетки соотношением:

$$\tau = \alpha \frac{\Delta x + \Delta y}{2c}, \quad c = \sqrt{gh(x,y,t)}, \quad (8)$$

где c - скорость длинных гравитационных волн, рассчитанная в приближении модели мелкой воды, $0 < \alpha < 1$ - численный коэффициент, выбираемый из условий точности и устойчивости счета. Шаг по времени определялся условием устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви по отношению фазовой скорости длинных гравитационных волн.

Полученная таким образом разностная схема удовлетворяла условию хорошей балансировки (well-balanced), т.е. в отсутствие внешних сил для изначально покоящейся жидкости в численном решении не появлялись нефизические возмущения, обусловленные разностной аппроксимацией неровностей дна. Для задач, связанных, например, с численным моделированием разливов рек и наводнений, в разностную схему был имплементирован алгоритм обработки области осушки/обводнения, в рамках которого предполагается, что в области сухого дна жидкость покоится, т.е. скорости течений, а также регуляризирующие добавки, связанные с τ , равны нулю. Граница области определялась параметром отсечения $\varepsilon_{i,j}$, который рассчитывался для каждой точки разностной схемы и был связан с градиентом $b(x,y)$ в соседних точках шаблона. В конце главы приводится краткое описание разработанного программного модуля для расчета описанного алгоритма.

Вторая глава посвящена исследованию нестационарных движений жидкости в грузовых емкостях судов, движущихся с существенным изменением скорости при столкновении с ледовым препятствием и при качке на волнах. Постановка задачи осуществлялась совместно с Санкт-Петербургским государственным морским техническим университетом. Рассматривался ре-

альный профиль дна бака призматической формы. Поперечное сечение бака приведено на рис. 2(а).

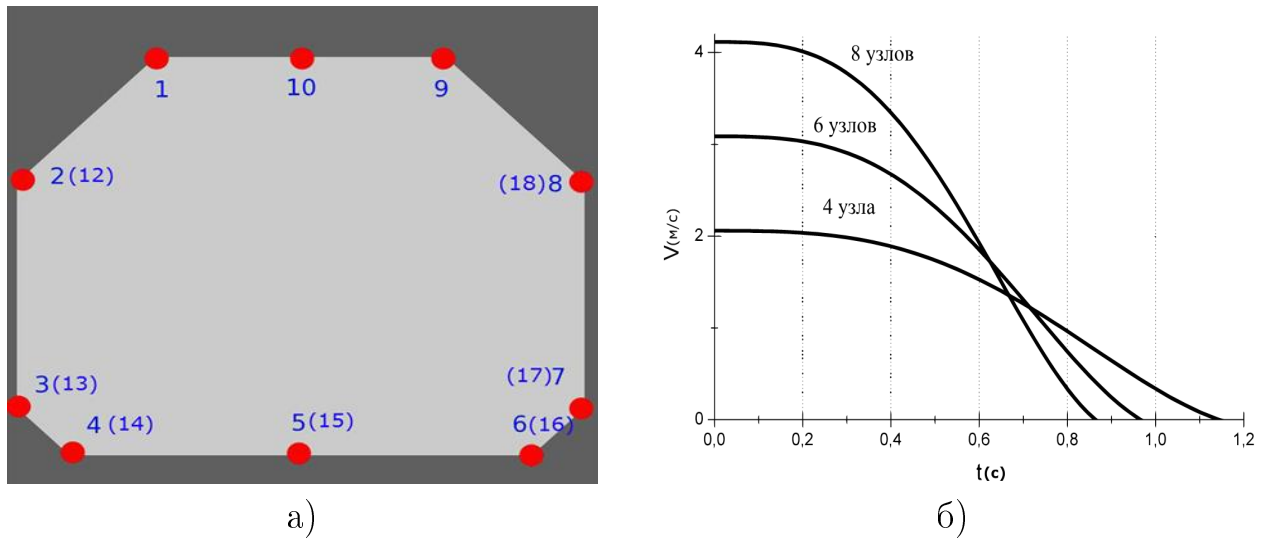


Рис. 2 — К постановке задачи о колебании топлива: а) вертикальное сечение танка и обозначение реперных точек, б) графики эволюции скорости судна при его остановке.

Задача решалась в неинерциальной системе отсчета, связанной с баком, в которой ось X направлена вдоль движения судна. При столкновении на топливо в баке действует сила инерции, связанная с неравномерным движением судна. Законы изменения скорости движения судна-газовоза при его соударении с ледовым препятствием описываются полиномами шестой степени и приведены на рис. 2(б).

Из графиков наглядно видно, что для всех трех вариантов остановка судна происходит за время порядка 1 сек. Сила инерции определяется законом изменения скорости судна от времени $V(\vec{t})$:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (9)$$

С практической точки зрения интерес представляла величина нагрузки на стенки бака при остановке судна. Давление в баке P вычислялось как

$$P(x,t) = P_{atm} + gh(x,t)\rho, \quad (10)$$

где $\rho = 700 \text{ кг/м}^3$ – плотность сжиженного газа, $P_{atm} = 101 \text{ кПа}$ – атмосферное давление, включая давление паров жидкости.

Задача решалась как в двумерной, так и в одномерной постановке, когда столкновение происходит вдоль оси симметрии судна. Были исследованы общие характеристики решения, профили уровня жидкости и скорости, эволюция численного решения в затухающие гармонические колебания, зависимости разностного решения от параметров схемы, в частности, от параметров α и β , где β - число Куранта.

Общая картина течения и его особенности отражены на рис. 3. Черными линиями со стрелками нарисованы линии тока на последовательные моменты времени, цветом обозначены линии уровня жидкости $H(x,y) = h(x,y) + b(x,y)$.

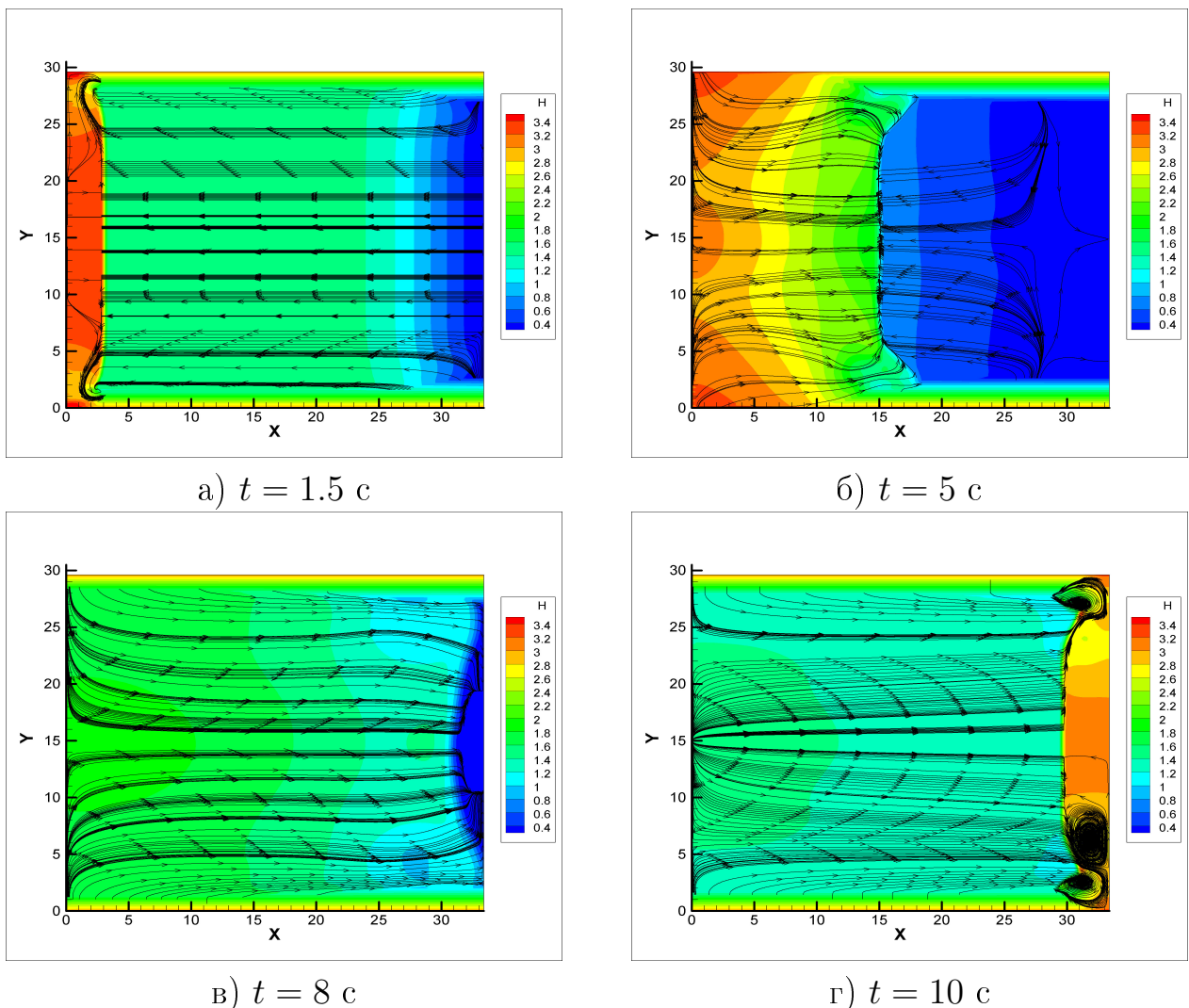
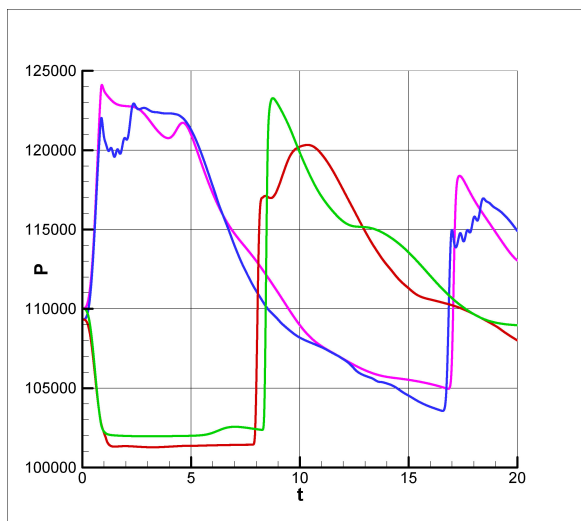


Рис. 3 — Линии тока и изолинии уровня поверхности при столкновении вдоль оси OX для различных моментов времени t .

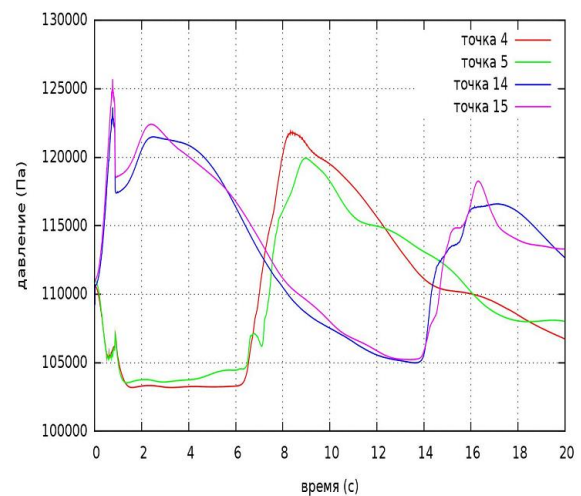
Графики показывают характерный заброс жидкости вверх по передней стенке бака и постепенное понижение этого максимума с течением вре-

мени. Виден также существенно двумерный характер течения вне плоскости симметрии, формирование и эволюция вихревых зон и линий растекания. Эти вихревые зоны образуются в результате жёсткого торможения судна, а также из-за наличия сложной геометрии стенок бака и не плоского профиля его дна. С течением времени амплитуда колебаний жидкости в баке уменьшается, колебания приобретают гармонический вид, который соответствует распространению гравитационных волн в жидкости. На больших временах колебания полностью затухают.

Схожая топология движения свободной поверхности жидкости для этого варианта течения была получена в рамках использования осреднённых уравнений Навье-Стокса (модель URANS), когда дополнительно учитывалась вихревая динамика фракций газа, образующихся над поверхностью жидкости. Графики для величин нагрузок на стенки танка для характерных реперных точек, расположенных в плоскости симметрии, приведены на рис. 4(а) для двумерных уравнений мелкой воды, на рис. 4(б) для трёхмерных осреднённых уравнений Навье-Стокса.



а) РУМВ



б) НС

Рис. 4 — Сравнение расчетов по уравнениям МВ и НС. Зависимость давления на переднюю и заднюю стенки резервуара от времени, фрагмент 0 – 20 сек, Скорость 8 узлов, высота уровня $h_0 = 1.46$ м.

Из графиков видно, что решения, рассчитанные в трёх указанных постановках, в плоскости симметрии (рис. 2(а), точки 5 и 15) очень близко совпадают между собой не только по значению максимального пика давления, но и по времени его появления, а также по времени появления второго

Скорость	8 узлов	6 узлов	4 узла
URANS модель	125 кПа	121 кПа	117 кПа
1D РУМВ	125.8 кПа	121.5 кПа	116.6 кПа
2D РУМВ	124.2 кПа	120.0 кПа	116.2 кПа

Таблица 1 — Максимальные нагрузки на переднюю стенку бака.

и третьего пиков, и их высоты. Сравнение решения задач в рамках двумерных УМВ и трёхмерных уравнений Навье-Стокса вне плоскости симметрии (точки 4 и 14) также показывает, что полученные течения практически идентичны. В таблице 1 приведены максимальные значения давлений на стенку бака, полученные с помощью трёх указанных подходов для трёх значений начальной скорости судна. Наглядно видно, что все полученные значения пиковых нагрузок на стенки бака оказались близки друг к другу. Применение УМВ в данной задаче позволило в десятки раз сократить время расчетов, которые занимали порядка 7-10 часов на вычислительном кластере по модели URANS, в то время как по УМВ такие расчеты занимали порядка 10-15 минут по двумерной модели и порядка одной минуты по одномерной модели.

Третья глава посвящена математическому моделированию волн Фарадея в лабораторном эксперименте. Волнами Фарадея называют стоячие волны, возбуждаемые в сосуде с жидкостью, который совершает периодические колебания в направлении силы тяжести. Малые колебания идеальной жидкости в случае гармонического движения сосуда описываются уравнением Матье, согласно которому начальное возмущение свободной поверхности остается ограниченным по величине или экспоненциально возрастает до бесконечности, если выполняется условие

$$\omega_n = \frac{2\pi c}{\lambda} \sim \frac{m\Omega}{2}, \quad (11)$$

где ω_n — одна из собственных частот колебаний свободной поверхности жидкости; $k = \frac{\pi n}{\lambda}$ — волновое число; Ω — частота колебаний сосуда, $c = \sqrt{gh}$.

Исследовалась специально созданная экспериментальная установка, позволяющая сообщать сосуду с жидкостью гармонические колебания в вертикальном направлении с заданной частотой Ω и амплитудой s (рис. 5). Движение жидкости предполагалось одномерным. Закон смещения сосуда от времени имел вид $s(t) = s \cos(\Omega t)$. В неинерциальной системе координат, жестко связанной с сосудом, вертикальное ускорение g , действующее на жидкость,

вычислялось как

$$g(t) = g_0 \left(1 + \frac{s\Omega^2}{g} \cos(\Omega t) \right), \quad (12)$$

где $g_0 = 980 \text{ см/сек}^2$ – ускорение силы тяжести. Таким образом, моделирование волн Фарадея было проведено в рамках одномерных УМВ при отсутствии массовых сил $f_{i,v} = 0$ и при переменном ускорении свободного падения $g(t)$ (ф-ла 12). На границах расчетной области ставились условия непротекания для скорости и отражения для высоты слоя жидкости, начальное возмущение задавалось в виде первой моды стоячих волн.

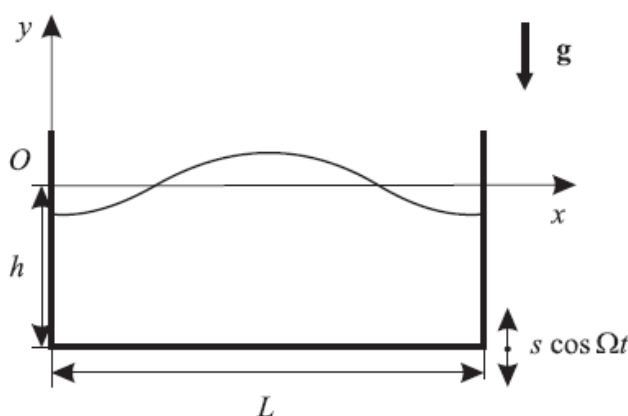
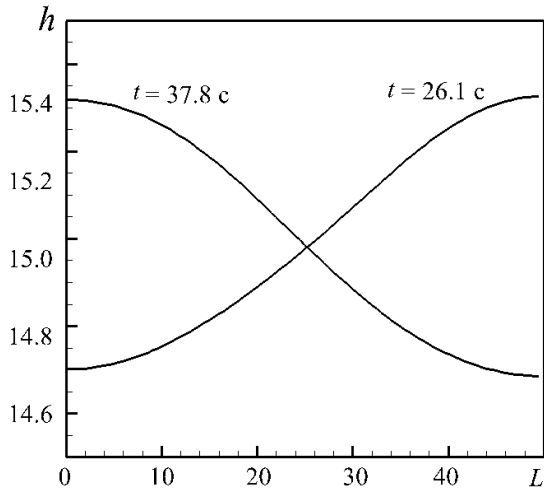


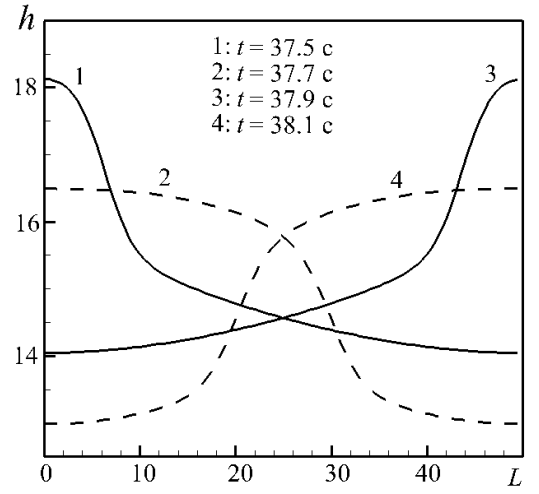
Рис. 5 — Иллюстрация к постановке задачи о формировании волн Фарадея.

Были произведены расчеты для трех начальных значений h_0 уровня заполнения жидкостью прямоугольного сосуда длины $L = 50 \text{ см}$: $h_0 = 15, 30$ и 50 см в диапазоне частот возмущения Ω от 10 до 60 рад/с с шагом $\Delta\Omega = 0.5 \text{ рад/с}$ и с различными величинами амплитуды колебаний сосуда s , которые варьировались в пределах от 0.01 до 5 см с шагом 0.1 см .

Были получены первая и вторая моды волн Фарадея в фиксированных частотных диапазонах, соответствующих приближению МВ (ф-ла 11), при этом частота колебаний была в два раза меньше частоты возмущения. В зависимости от величины перегрузки $R = \frac{s\Omega^2}{g}$ наблюдались регулярные, нерегулярные и разрушающиеся волны (рис. 6). Были получены частотные диапазоны возмущений и соответствующие амплитуды стационарных волн (рис. 7), которые оказались выше значений в реальном эксперименте. Улучшение согласия данных расчета и эксперимента может быть достигнуто при использовании более полной вычислительной модели, включающей в себя учет двумерности течения и более адекватное описание эффектов трения о стенки.



а)



б)

Рис. 6 — Поверхности жидкости для первой моды волн Фарадея при $h_0 = 15$ см для (а) $\Omega = 15.635$ рад/с, $s = 0.4$ см, $R = 0.1$ (регулярная волна) и (б) $\Omega = 15.70$ рад/с, $s = 1.6$ см, $R = 0.4$ (нерегулярная волна)

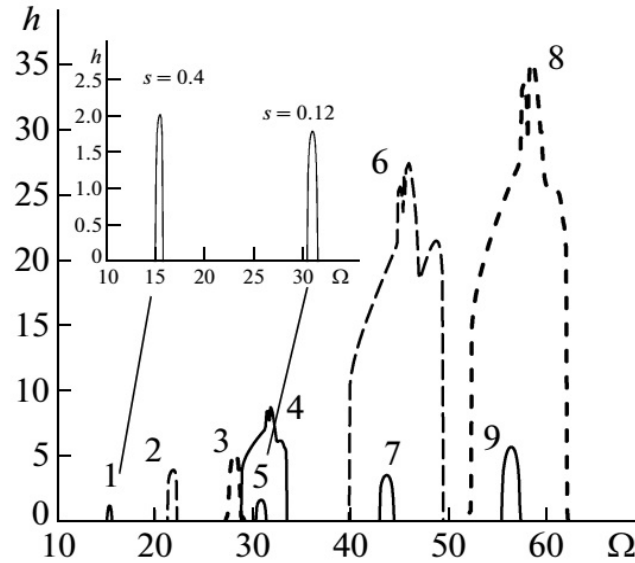


Рис. 7 — Полученные в численном эксперименте частотные диапазоны возмущений и соответствующие амплитуды стационарных волн: линии 1, 4 соответствуют первой и второй модам при $h_0 = 15$ см, $s = 0.4$ см; линии 2, 6 — первой и второй модам при $h_0 = 30$ см, $s = 0.2$ см; линии 3, 8 — первой и второй модам при $h_0 = 50$ см, $s = 0.1$ см; линия 5 — $s_0 = 15$ см, $s = 0.12$ см; линия 7 — $h_0 = 30$ см, $s = 0.06$ см; линия 9 — $h_0 = 50$ см, $s = 0.035$ см.

Четвертая глава посвящена численному моделированию сейш и сгонно-нагонных явлений в Азовском море. Сейшами называются стоячие волны, возникающие в замкнутых или частично замкнутых водоемах под действием перепада атмосферного давления, ветра или штормовых нагонов из соседних акваторий.

Задача была поставлена совместно с Государственным океанографическим институтом имени Н.Н.Зубова. Область решения задачи представляла собой акваторию Азовского моря, Керченский пролив и прилегающую к нему часть акватории Черного моря (рис 8). Она была расположена в пределах от $34^{\circ}45'6''$ в.д. до $39^{\circ}29'38''$ в.д. и от $44^{\circ}48'4''$ с.ш. до $47^{\circ}16'12''$ с.ш. соответственно. Топология дна была задана на сетке с шагами $8''$, что соответствует шагу по пространству 250 м.

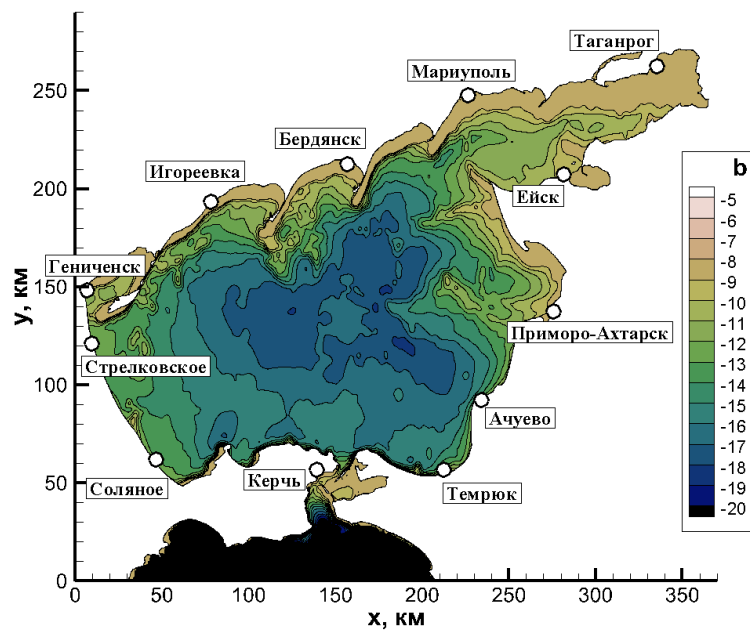


Рис. 8 — Топография дна Азовского моря

В силу относительно небольших линейных размеров акваторий по отношению к радиусу Земли задача рассматривалась в декартовой системе координат. Начальные условия описывали невозмущенную поверхность моря, т.е. уровень моря был равен равновесному $h = h_0$, скорости течений принимались равными $u_x = u_y = 0$ м/с. Для описания граничных условий вдоль береговой границы использовались условия сухого дна. В области Черного моря (рис. 8 — нижний край), где граница ставится вдоль линии сетки, при-

менялись условия сноса или свободные граничные условия в нормальном к границе направлении.

Уравнения мелкой воды для задачи сейшевых колебаний и экстремальных нагонов в Азовском море включают топографию дна, реальный ветровой форсинг, силу Кориолиса и донное трение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u_x h}{\partial x} + \frac{\partial u_y h}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u_x h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu_x^2 + \frac{1}{2}gh^2) + \frac{\partial}{\partial y}(hu_x u_y) &= hf^c u_y - gh \frac{\partial b}{\partial x} + \tau^{x,w} - \tau^{x,b} \\ \frac{\partial u_y h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu_x u_y) + \frac{\partial}{\partial y}(hu_y^2 + \frac{1}{2}gh^2) &= -hf^c u_x - gh \frac{\partial b}{\partial y} + \tau^{y,w} - \tau^{y,b} \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $f^{cor} = 2\Omega \sin\phi$ – параметр Кориолиса, где $\Omega = 7.2921 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$ – угловая скорость вращения Земли, ϕ – географическая широта, $\tau^{i,w}(x,y,t) = \gamma|W|W_i$ – компоненты силы трения ветра на поверхности воды, где $W_i(x,y,t)$ – компонента скорости ветра (м/с), $|W| = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}$ – модуль скорости ветра, γ – коэффициент трения ветра о свободную поверхность воды, $\tau^{i,b}(x,y,t) = \mu|u|u_i$ – проекции силы трения о дно водоема, где μ – коэффициент трения, $|u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ – модуль скорости потока. Индексом i обозначены компоненты x и y .

В работе изучались сейши, возникающие при продолжительном действии ветра в одну сторону. В начальный момент времени задавался постоянный ветер со скоростью 15 м/с, который дует в одном направлении в течении 10 часов, после чего он выключался.

Эволюция сейши после выключения ветра показана на рис. 9. Шесть последовательных графиков соответствуют положениям сейши на моменты времени $t = 10 - 35$ часов. Цветом обозначены повышения (красным, до +0,2 метра) и понижения (синим, до -0,2 метра) уровня относительно равновесного. С течением времени наблюдается вращение сейшы против часовой стрелки. При $t=24-25$ часов сейша совершает полный оборот. При этом ее амплитуда уменьшается более чем в 10 раз.

Графики изменения уровня моря относительно равновесного вблизи крупных населенных пунктов показаны на рис. 10. По оси X указано время в часах, по оси Y – отклонение уровня моря от равновесного значения η .

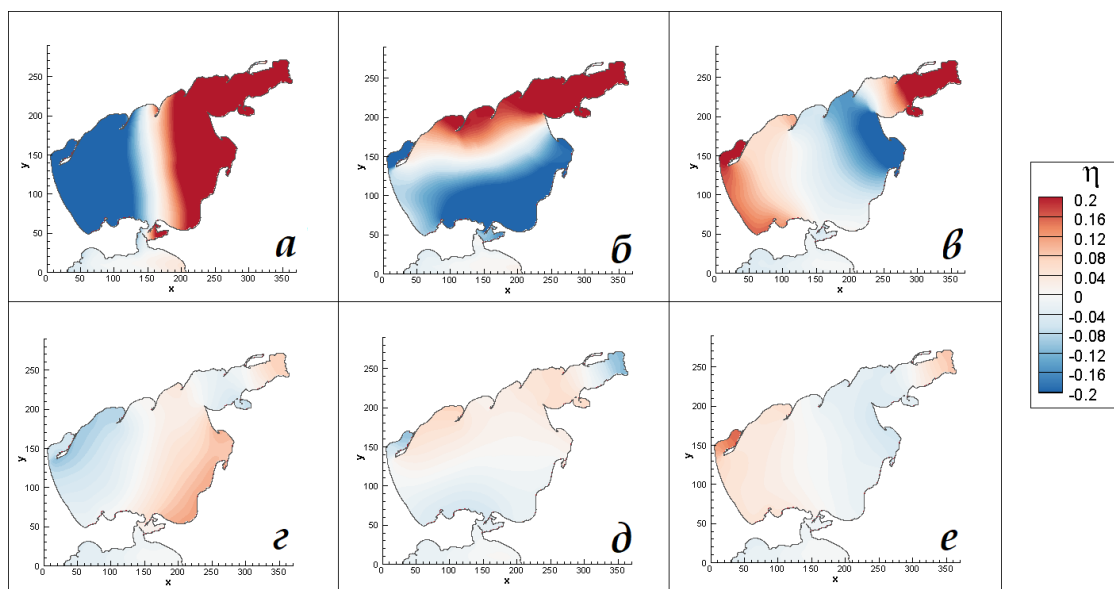


Рис. 9 — Основные положения сейши после выключения ветра: $t = 10$ (а),
15 (б), 20 (в), 25 (г), 30 (д), 35 (е) ч.

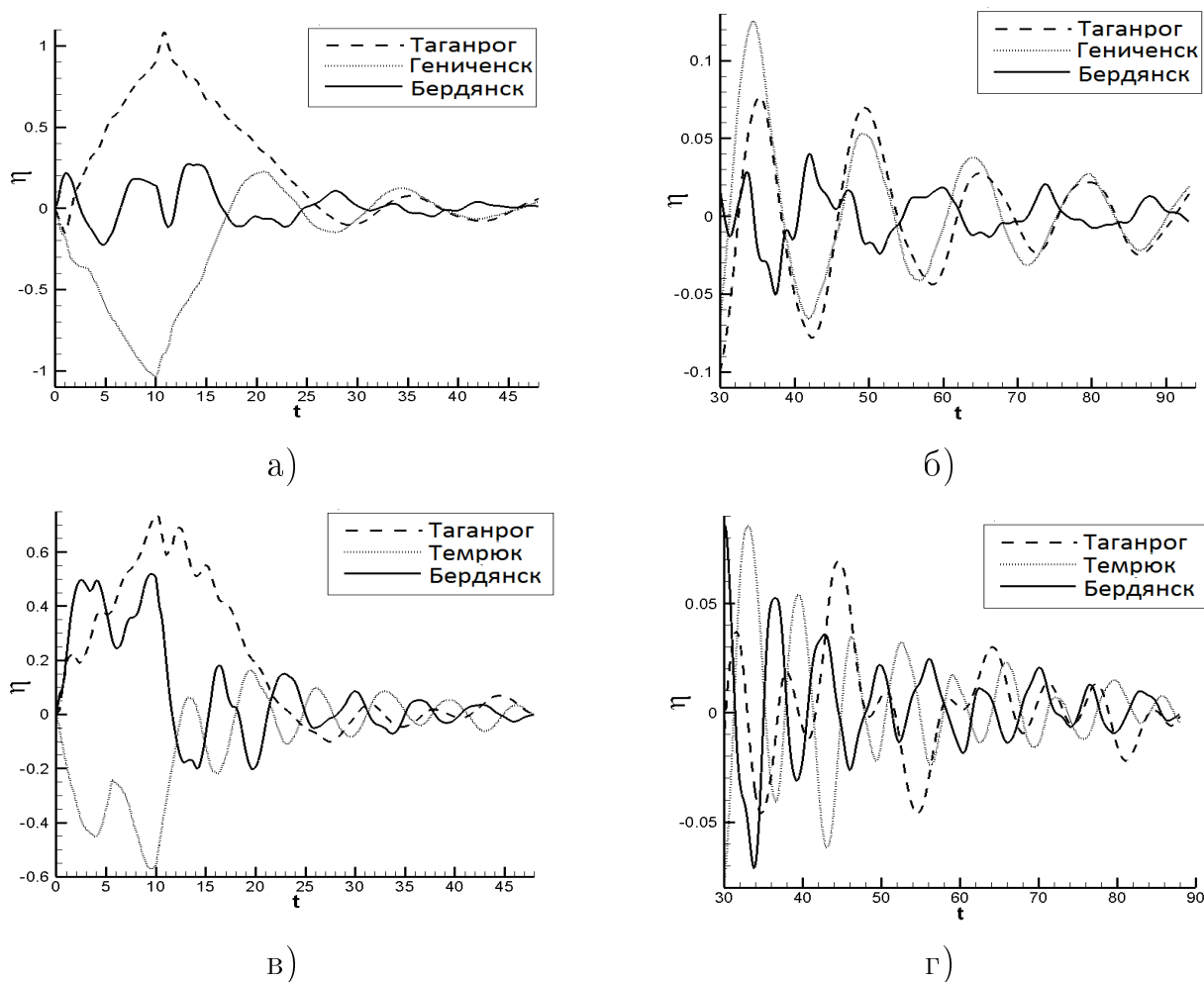


Рис. 10 — Величины повышения и понижения уровня моря в крупных населенных пунктах при западном ветре (а) при $0 < t < 45$ ч, (б) $30 < t < 90$ ч (б); при южном ветре (в) при $0 < t < 45$, (г) $30 < t < 90$ ч. На графиках по оси X указано время в часах, по оси Y — отклонение η в метрах.

Аналогичным образом были произведены расчеты без учета силы трения. Было подробно изучено влияние силы трения на амплитуду и период сейш. В частности, было показано, что собственное затухание системы существенно меньше диссипации силы трения.

В рамках моделирования экстремальных нагонов в Азовском море изучались экстремальные нагоны в марте 2013 г. и сентябре 2014 г. Были рассмотрены основные этапы формирования нагонов и динамика уровня моря в крупных населенных пунктах. Результаты были получены при различных коэффициентах донного трения μ .

Характерные циркуляции и распределения уровня моря приведены на рис. 11 для экстремального нагона 2014 г. На рисунках цветом указан уровень моря относительно равновесного, стрелками – линии тока. Для каждого рисунка в левом верхнем углу нарисованы основные линии тока для ветра. Все характеристики соответствуют конкретному моменту времени, указанному в подписи к рисунку.

На рис. 12 изображен штормовой нагон 21-25 сентября 2014 года для городов Ейск и Таганрог. По оси X отложено время t в днях, начиная с 21 сентября 2014 года, по оси Y – высота над равновесным уровнем моря в метрах. Красными квадратиками указаны данные наблюдений метеорологических станций в этих городах. Они имеют шаг 6 часов по времени. Непрерывными линиями показаны расчеты отклонения высоты уровня от равновесного для различных μ . Шаг по времени для этих графиков составляет 4 секунды. Зеленая линия соответствует $\mu = 0.0026$ - значение, которое часто указывается в литературе. Синяя линия соответствует $\mu = 0$ - расчет без силы донного трения, черная линия – $\mu = 0.00078$ - коэффициент, при котором наиболее точно воспроизводится максимальная высота нагона в городе Таганрог.

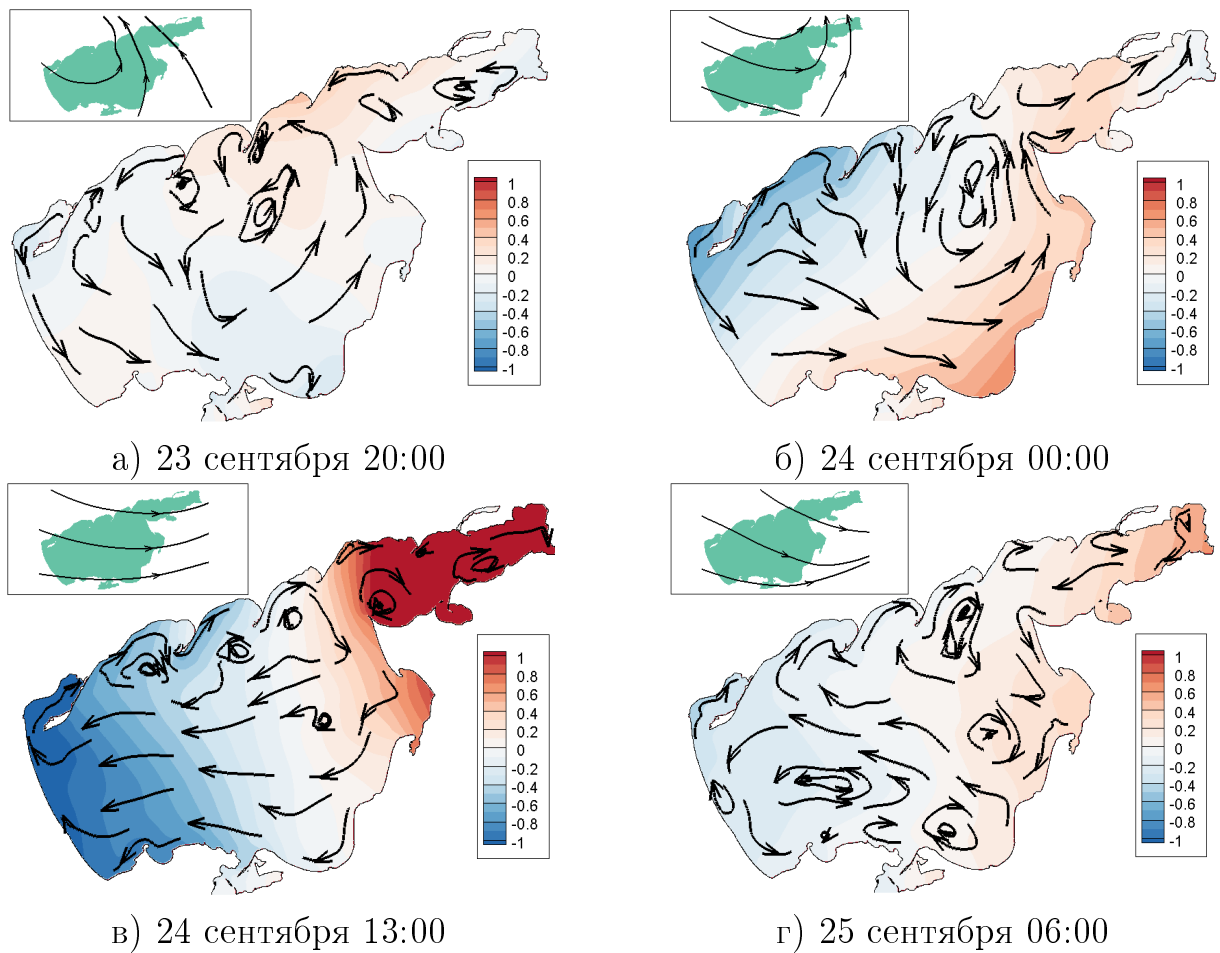


Рис. 11 — Отклонение η уровня поверхности от равновесного значения в бассейне Азовского моря при штормовом нагоне 21-25 сентября 2014 года.

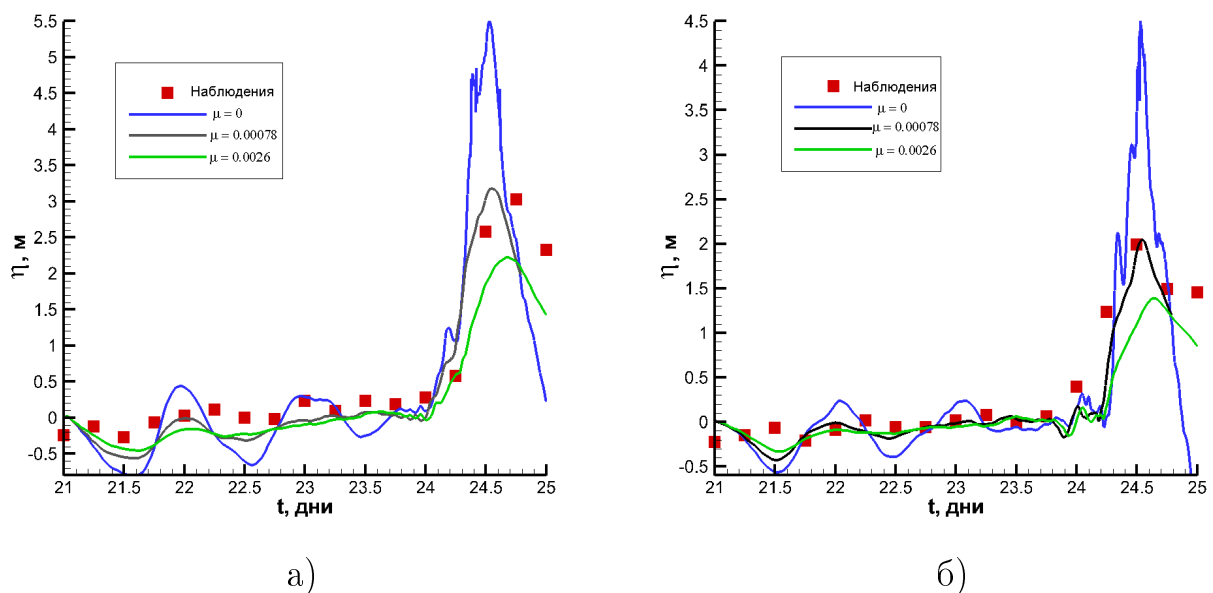


Рис. 12 — Экстремальный нагон 2014 года при различных коэффициентах донного трения в городах (а) Таганрог, (б) Ейск. По оси X отложено время t в днях, начиная с 21 сентября, по оси Y — отклонение η в метрах. Красными квадратиками указаны данные наблюдений метеорологических станций.

В **заключении** кратко сформулированы основные результаты, полученные в диссертационной работе, рассмотрены дальнейшие шаги для развития метода РУМВ для решения прикладных задач.

В **приложениях** приведены результаты расчетов циркуляции Черного моря по модели РУМВ аналогичной описанной ранее для Азовского моря, а также подробное описание программной реализации расчетов и тексты основной части программы. В частности, проведенные автором расчеты воспроизводят структуру основных течений в Черном море – Основное Черноморское течение, антициклонические круговороты у Анатолийского и Кавказского берегов, Батумский антициклонический вихрь. Однако в силу глубоководности Черного моря, стратификацией его скоростей, солености и температуры, модель МВ не позволяет получить количественное совпадение скоростей течений с данными натуральных измерений на поверхности моря.

Основные результаты диссертационной работы:

1. На основе регуляризованных уравнений мелкой воды разработаны математические модели для решения широкого класса задач в приближении уравнений мелкой воды, среди которых задачи колебаний топлива в емкостях сложной формы, описание генерации волн Фарадея и ветровых явлений в акватории мелководных морей. Разработаны численные алгоритмы, аппроксимирующие соответствующие системы дифференциальных уравнений и данные внешних источников. На основе языка C++ создан комплекс программ для параллельных расчетов и визуализации с помощью внешнего программного обеспечения. Все полученные результаты соответствуют известным экспериментальным и теоретическим данным.
2. Впервые в рамках уравнений мелкой воды проведено математическое моделирование колебаний топлива в реальных баках газозовозов при заполнении емкостей не более 15%. Рассчитаны распределения давления на стенки емкостей при различных вариантах эксплуатации судна, соответствующим реальным условиям плавания. Используемые модели и программы позволяют в десятки раз сократить время решения задач указанного вида по сравнению с используемыми в настоящее время программами на основе полных уравнений Навье-Стокса.

3. Впервые в рамках уравнений мелкой воды проведено математическое моделирование генерации волн Фарадея в замкнутом сосуде при непрерывном изменении амплитуды и частоты возбуждения колебаний. В численном эксперименте с использованием параметров экспериментальной установки получены частотные диапазоны возбуждения первой и второй моды колебаний.
4. Впервые на основе регуляризованных уравнений мелкой воды проведено математическое моделирование штормовых нагонов и сейшевых колебаний в Азовском море. В частности, рассчитаны основные периоды сейшевых колебаний, а также максимальные высоты и времена экстремальных нагонов в прибрежных городах Азовского моря в марте 2013 г. и сентябре 2014 г. при реальном распределении ветровой нагрузки.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Елизарова Т. Г., Сабурин Д. С.* Численное моделирование колебаний жидкости в топливных баках // Математическое моделирование. — 2013. — Т. 25, № 3. — С. 75—88.
2. *Елизарова Т. Г., Сабурин Д. С.* Математическое моделирование и визуализация течений жидкости в грузовой емкости газовева при его соударении с ледовым препятствием // Научная визуализация. — 2013. — Т. 5, № 4. — С. 118—135.
3. *Елизарова Т. Г., Сабурин Д. С., Ткаченко И. В., Тряскин Н. В.* Численное моделирование колебаний жидкости в танках газовевов // Морские интеллектуальные технологии. — 2014. — Т. 2, № 4(26). — С. 74—83.
4. *Елизарова Т. Г., Сабурин Д. С.* Численное моделирование волн Фарадея на основе уравнений гидродинамики в приближении мелкой воды // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2015. — Т. 1. — С. 3—8.
5. *Елизарова Т. Г., Сабурин Д. С.* Применение регуляризованных уравнений мелкой воды к моделированию сейшевых колебаний уровня Азовского

моря // Математическое моделирование. — 2017. — Т. 29, № 1. — С. 45—62.

6. *Елизарова Т. Г., Сабурин Д. С.* Численное моделирование сейшевых колебаний в Азовском море с использованием сглаженных уравнений гидродинамики // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон моря. — 2017. — Т. 2. — С. 74—81.
7. *Saburin D. S.* Tank sloshing simulations in shallow-water approximation // Computational Methods in Marine Engineering. — 2015. — Vol. VI, no. 4. — P. 1039–1050.