

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Сабурин Дмитрий Сергеевич

**ПРИМЕНЕНИЕ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ  
ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ  
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ СО  
СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ПРИБЛИЖЕНИИ  
МЕЛКОЙ ВОДЫ**

Специальность 05.13.18 —

«Математическое моделирование численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
проф., доктор физико-математических наук  
Елизарова Татьяна Геннадиевна

Москва — 2018

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>Глава 1. Уравнения мелкой воды и их регуляризованный вариант</b>	<b>13</b>
1.1 Уравнения мелкой воды . . . . .	13
1.2 Регуляризованные уравнения мелкой воды как основа нового численного метода решения уравнений мелкой воды . . . . .	15
1.3 Разностная аппроксимация регуляризованных уравнений мелкой воды . . . . .	20
1.4 Специфические особенности численного алгоритма . . . . .	23
1.4.1 Устойчивость численного алгоритма . . . . .	23
1.4.2 Реализация условия well-balanced . . . . .	24
1.4.3 Условия сухого дна . . . . .	25
1.4.4 Реализация численного алгоритма . . . . .	26
<b>Глава 2. Численное моделирование колебаний жидкости в         баках газозовов</b> . . . . .	<b>28</b>
2.1 Введение . . . . .	28
2.2 Постановка задачи . . . . .	30
2.3 Моделирование колебаний топлива в рамках одномерной модели .	33
2.3.1 Общая картина течения . . . . .	33
2.3.2 Зависимость разностного решения от параметров схемы . .	36
2.3.3 Сравнение результатов моделирования с расчетами по уравнениям Навье-Стокса . . . . .	38
2.3.4 Образование областей сухого дна . . . . .	41
2.3.5 Расчет колебаний топлива при качке на волнах . . . . .	43
2.4 Моделирование колебаний топлива в рамках двумерной модели .	45
2.4.1 Колебания топлива при лобовом столкновении . . . . .	45
2.4.2 Колебания топлива при столкновении под углом к направлению движения судна . . . . .	48
2.5 Заключение . . . . .	51

<b>Глава 3. Численное моделирование волн Фарадея . . . . .</b>	<b>53</b>
3.1 Введение . . . . .	53
3.2 Постановка задачи . . . . .	56
3.3 Результаты численного моделирования . . . . .	58
3.4 Заключение . . . . .	64
<b>Глава 4. Численное моделирование сейшевых колебаний и     экстремальных ветровых нагонов в Азовском море . . .</b>	<b>66</b>
4.1 Введение . . . . .	66
4.2 Постановка задачи . . . . .	68
4.3 Моделирование сейшевых колебаний . . . . .	71
4.3.1 Общая картина течения . . . . .	71
4.3.2 Изучение сейшевых колебаний в крупных населенных пунктах . . . . .	72
4.3.3 Влияние силы трения о дно на амплитуду сейшевых колебаний вблизи крупных городов . . . . .	74
4.4 Моделирование экстремальных нагонов 2013-2014 г.г. . . . .	78
4.4.1 Общая картина формирования нагонов . . . . .	78
4.4.2 Изучение экстремальных нагонов в крупных населенных пунктах . . . . .	81
4.5 Заключение . . . . .	83
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>86</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>89</b>
<b>Приложение А. Моделирование циркуляции Черного моря в     рамках РУМВ . . . . .</b>	<b>99</b>
А.1 Постановка задачи . . . . .	99
А.2 Расчеты в масштабах Черного моря без учета рельефа дна . . . . .	100
А.3 Реальная циркуляция Черного моря . . . . .	103
А.4 Заключение . . . . .	105
<b>Приложение Б. Програмная реализация расчетов по     двумерным РУМВ . . . . .</b>	<b>107</b>
Б.1 Краткое описание алгоритма . . . . .	107

Б.2 Листинги программы . . . . .	108
----------------------------------	-----



## Введение

Диссертационная работа посвящена построению математических моделей, разработке численных алгоритмов и численному решению различных практических задач течения несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести в приближении мелкой воды. Эта математическая модель довольно часто применяется при моделировании различных природных явлений. Уравнения мелкой воды (УМВ) выводятся из полных уравнений Навье-Стокса, описывающих пространственные нестационарные течения вязкого сжимаемого газа, путем их интегрирования по глубине при условиях, что горизонтальный масштаб много больше вертикального и вертикальные скорости в жидкости и градиенты давления малы.

Малость вертикального масштаба по отношению к горизонтальному встречается при моделировании течений в неглубоких водоемах, в том числе в реках, озерах, водохранилищах, вблизи побережья морей и океанов. Спектр данных задач включает в себя моделирование природных явлений, которые представляют реальную или потенциальную опасность для жизни людей и экономики региона, таких, как сейши, цунами, ветровые нагоны, волны-убийцы и множество других задач, связанных с проблемами океанологии.

Другим важным применением уравнений мелкой воды являются моделирование атмосферных течений, где существенную роль играют массовые силы, в частности, сила Кориолиса. Эти решения используются для задач прогноза погоды.

При соблюдении условия малости вертикального масштаба уравнения мелкой воды применяются в задачах вынужденных колебаний жидкости в замкнутых резервуарах (слошинга). Если сосуд с жидкостью находится в неравномерном или непрямолинейном движении, на жидкость, кроме сил тяжести, действуют силы инерции. В этом случае свободная поверхность жидкости может принимать самые разнообразные формы. Например, если жидкость находится в сосуде, равномерно вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , формой поверхности будет параболоид вращения. Применение УМВ позволяет существенным образом упростить алгоритм и сократить необходимые вычислительные ресурсы и машинное время, что является очень

важным при решении практических задач и разработки программных комплексов для прогнозирования.

Таким образом, приближение мелкой воды имеет большое теоретическое и практическое значение. В связи с нерегулярностью границ областей, характерной для исследуемых процессов, аналитическое решение практически невозможно, поэтому решения практических задач находятся с использованием численных методов. Применение УМВ к решению различных практическим задач имеет богатую историю. Многообразие задач, связанных с исследованием течений жидкости со свободной поверхностью, породило значительное количество численных методик, учитывающих особенности той или иной рассматриваемой проблемы. Среди них можно выделить такие методы, как метод конечных разностей, метод частиц, метод конечных элементов, метод конечного объема и других, более специфических, основанных, например, на дроблении шагов, методе Годунова и др.

Используемые подходы нельзя считать совершенными. Основные сложности при построении численной аппроксимации УМВ связаны с получением устойчивого разностного решения задачи. Неустойчивость в решении возникает как при решении задач с разрывным, очень сложным профилем подстилающей поверхности, который не описывается аналитической функцией и который приводит к возникновению сложных разрывных решений, так и при образовании областей сухого дна, когда высота уровня жидкости становится малой, в результате чего образуются движения с большими числами Фруде.

Другие трудности возникают при аппроксимации слагаемых, зависящих от геоцентрической широты, например, силы Кориолиса. Для ее аппроксимации используются, например, методы расщепления по физическим процессам, а также методы, которые интерпретируют силу Кориолиса как некоторую фиктивную подстилающую поверхность. Все это приводит к сильному усложнению разностных алгоритмов и зачастую лишает их однородности.

Кроме того, современные практические задачи требуют адаптации алгоритма к сложным неструктурированным расчетным сеткам, которые необходимы для описания течений в сложных пространственных областях, или к сгущению сеток, например, вблизи береговой линии. Также в алгоритме должна быть предусмотрена возможность распараллеливания на большое число процессоров для ускорения счета. Таким образом, задача усовершенствования и разработ-

ки эффективных алгоритмов для математического моделирования течений в приближении МВ является актуальной.

В работах Т.Г. Елизаровой и О.В. Булатова был предложен и оттестирован новый численный метод решения УМВ, основанный на сглаживании классических уравнений по некоторому малому интервалу времени. Данная процедура приводит к возникновению регуляризирующих добавок, которые обеспечивают устойчивость численного решения задачи в широком диапазоне чисел Фруда. Это позволяет использовать неразнесенную сеточную аппроксимацию и применять потоковый вид уравнений без линеаризации исходных уравнений, что обеспечивает строгое соблюдение законов сохранения массы и импульса в отсутствие внешних сил. Данный алгоритм является универсальным для решения широкого класса задач, он позволяет рассчитывать течения с подвижными областями сухого дна. Кроме того, его легко распараллелить и обобщить на неструктурированные сетки. Полученные таким образом уравнения называются регуляризованными уравнениями мелкой воды (РУМВ).

Теоретическое развитие метода проводилось, в частности, А.А. Злотником, Ю.В. Шеретовым, Т.Г. Елизаровой и О.В. Булатовым. Для РУМВ было выведено уравнения баланса полной механической энергии и доказан факт ее невозрастания. Было показано, что если функции  $h$ ,  $u_x$  и  $u_y$  являются решением стационарных уравнений мелкой воды, то они также являются решением стационарных регуляризованных уравнений МВ. Также на примере задач распада разрыва был проведен ряд тестов, показывших эффективность данного алгоритма по сравнению с существующими численными методами.

Однако для решения практических задач такой алгоритм применялся мало, его эффективность могла быть оценена только исходя из теоретических результатов. Поэтому для дальнейшего развития подхода и привлечения к нему внимания научного сообщества необходима дальнейшая модификация алгоритма и применение его для решения различных прикладных задач.

В связи с перечисленным выше задачи усовершенствования и разработки эффективных алгоритмов на основе регуляризованных уравнений мелкой воды для математического моделирования нестационарных течений жидкости со свободной поверхностью в приближении мелкой воды является актуальной.

Исследования, вошедшие в диссертацию, были поддержаны грантами РФФИ 10-01-00136, 13-01-00703-а, 16-01-00048.

**Целью** данной работы является разработка и применение численных алгоритмов на основе регуляризованных уравнений мелкой воды для решения прикладных задач циркуляции жидкости в морских акваториях и колебаний жидкости в замкнутых сосудах.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработка математических моделей для решения задач циркуляции жидкости в морских акваториях и колебаний жидкости в замкнутых сосудах
2. Разработка численного алгоритма с учетом адаптации внешних данных, необходимых для решения соответствующих прикладных задач
3. Создание универсального программного комплекса для расчета численного решения поставленных в пункте 1 задач, визуализация и интерпретация полученных результатов в соответствии с теорией описываемого явления

**Научная новизна:** Впервые в рамках полных двумерных уравнений мелкой воды были разработаны математические модели и произведены численные расчеты в задачах о колебаний топлива в танкерах газозовов и генерации волн Фарадея в рамках неинерциальной системы координат. Впервые с использованием РУМВ была разработана математическая постановка и произведено численное моделирование циркуляции жидкости в неглубоких водоемах.

**Научная и практическая значимость:** Разработаны новые оригинальные методы решения описанных выше задач. Применение РУМВ позволяет значительно сократить необходимые вычислительные ресурсы и машинное время, что дает предпочтение для его использование при решении новых практических задач. Созданные программные решения можно использовать, например, для быстрой оценки максимальных нагрузок на стенки грузовых емкостей для различных условий эксплуатации судов, или для расчета прогноза течений и уровня моря в зависимости от ветрового волнения в режиме реального времени.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. На основе регуляризованных уравнений мелкой воды разработаны математические модели для решения широкого класса задач в приближении уравнений мелкой воды, среди которых задачи колебаний топлива

- в емкостях сложной формы, описание генерации волн Фарадея и ветровых явлений в акватории мелководных морей. Разработаны численные алгоритмы, аппроксимирующие соответствующие системы дифференциальных уравнений и данные внешних источников. На основе языка C++ создан комплекс программ для параллельных расчетов и визуализации с помощью внешнего программного обеспечения. Все полученные результаты соответствуют известным экспериментальным и теоретическим данным.
2. Впервые в рамках уравнений мелкой воды проведено математическое моделирование колебаний топлива в реальных баках газозовозов при заполнении емкостей не более 15%. Рассчитаны распределения давления на стенки емкостей при различных вариантах эксплуатации судна, соответствующим реальным условиям плавания. Используемые модели и программы позволяют в десятки раз сократить время решения задач указанного вида по сравнению с использующимися в настоящее время программами на основе полных уравнений Навье-Стокса.
  3. Впервые в рамках уравнений мелкой воды проведено математическое моделирование генерации волн Фарадея в замкнутом сосуде при непрерывном изменении амплитуды и частоты возбуждения колебаний. В численном эксперименте с использованием параметров экспериментальной установки получены частотные диапазоны возбуждения первой и второй моды колебаний, построены диаграммы резонанса и устойчивости колебаний.
  4. Впервые на основе регуляризованных уравнений мелкой воды проведено математическое моделирование штормовых нагонов и сейшिवых колебаний в Азовском море. В частности, рассчитаны основные периоды сейшевых колебаний, а также максимальные высоты и времена экстремальных нагонов в прибрежных городах Азовского моря в марте 2013 г. и сентябре 2014 г. при реальном распределении ветровой нагрузки.

**Степень достоверности** полученных результатов обеспечивается сравнением с экспериментальными данными и с уже существующими расчетами задач. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- Применение регуляризованных уравнений для математического моделирования нестационарных течений жидкости со свободной поверхностью в приближении мелкой воды (по материалам кандидатской диссертации), Семинар ИПМ им. М.В.Келдыша РАН «Математическое моделирование», ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, Москва, 27 февраля 2018;
- Применение регуляризованных уравнений для математического моделирования течений жидкости со свободной поверхностью в приближении мелкой воды (по материалам кандидатской диссертации), Семинар кафедры математики Физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, 6 декабря 2017;
- Регуляризованные уравнения мелкой воды и численное моделирование нагонов и цунами, Семинар лаборатории Цунами им. академика С.Л. Соловьёва, ИО РАН, Москва, 22 декабря 2017;
- Численное моделирование природных явлений в неглубоких водоемах на основе сглаженных уравнений мелкой воды, Семинар института Океанологии имени П.П. Ширшова, Институт океанологии имени П.П.Ширшова, Москва, 6 октября 2017;
- Численное моделирование сейшевых колебаний с использованием сглаженных уравнений гидродинамики, Научная конференция «Мировой океан: модели, данные и оперативная океанология», Севастополь, Россия, 26-30 сентября 2016;
- Tank sloshing simulations in shallow-water approximation, MARINE 2015 Computational Methods in Marine Engineering VI, Rome, 15-17 июня 2015;
- Численное моделирование волн Фарадея на основе уравнений мелкой воды, XXII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2015», Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова, Москва, 13-17 апреля 2015;
- Regularized shallow water equations in numerical modeling of tank sloshing and tsunami propagation, Japan-Russia workshop on supercomputer modeling, instabillity and turbulence in fluid dynamics, Keldysh Institute for Applied Mathematics RAS, Москва, 4-6 марта 2015;

- Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости. Конвективные течения и течения в приближении мелкой воды, Математические методы в естественных науках, научный семинар под руководством А.Н.Боголюбова. Москва, МГУ, Москва, Россия, 2014;
- Numerical modeling of fuel tanks sloshing, 4-ая международная научная школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах», Москва, ИПМех РАН, 2013;
- Численное моделирование колебания топлива в танках ледоколов с использованием регуляризованных уравнений мелкой воды, XX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов-2013», Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова, Москва, 2013;
- Численное моделирование колебаний жидкости в топливных баках, Семинар Санкт-Петербургского государственного морского технического университета, Санкт-Петербург, Россия, 30 января 2013;
- Численное моделирование колебаний жидкости в топливных баках современных ледоколов, XIX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов-2012», Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова, Москва, 2012.

**Личный вклад.** Личный вклад соискателя состоит в непосредственной разработке математических моделей для задач циркуляции жидкости в морских акваториях и колебаний жидкости в замкнутых сосудах, внедрения внешних источников данных, модификации численного алгоритм, создании на его основе комплекса программ, интерпретации и оформлении всех полученных результатов, в том числе оформление рукописи диссертации и основных публикаций по выполненной работе.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных изданиях [1–7], 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК. Еще одна статья [8] принята к публикации в журнал из списка ВАК и выходит в 3 номере 2018 г.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет

133 страницы с 43 рисунками и 5 таблицами. Список литературы содержит 98 наименований.



## Глава 1. Уравнения мелкой воды и их регуляризованный вариант

### 1.1 Уравнения мелкой воды

Приближением мелкой воды для несжимаемой жидкости называются условия малости вертикального масштаба по сравнению с горизонтальным, а также малости вертикальных скоростей в жидкости и градиентов давления. Это приближение довольно часто встречается при моделировании практических задач и различных природных явлений [1–3]. При выполнении этих условий интегрирование по глубине уравнений Навье-Стокса дает новую систему уравнений для описания динамики несжимаемой жидкости, называемую системой уравнений мелкой воды (далее – УМВ). При этом вертикальные компоненты скоростей уходят из уравнений, происходит их осреднение по всей толще жидкости. Применение УМВ к практическим задачам позволяет существенным образом упростить алгоритм и сократить необходимые вычислительные ресурсы и машинное время, что является очень важным при решении практических задач и разработки программных комплексов для прогнозирования.

УМВ впервые были получены Сен-Венаном [4] для течений в каналах без учета неровностей дна. Вывод УМВ также можно найти в книгах [1; 5–7] где уравнения получаются на основе вывода из законов сохранения массы жидкости и импульса. В книге [8] уравнения мелкой воды для ровного дна получаются методом возмущений в первом приближении, когда рассматривается задача о течении идеальной, несжимаемой жидкости в канале малой глубины.

Существует множество модификаций УМВ, например, с более детальным учетом вязкости и диссипативных сил (см., например, [9] и [2]), или, набирающие всю большую популярность, трехмерные УМВ [2; 10]. Эти уравнения отличаются сложностью и разнообразием. Однако, для широкого круга задач модели мелкой воды с членами, отвечающими за вязкость, не используются. Для моделирования ветровых течений в неглубоких акваториях часто применяется так называемый метод Вольцингера [3; 11], который основан на использовании линеаризованных уравнений мелкой воды, когда изменение глубины акватории считается малой величиной по сравнению с полной глубиной аква-

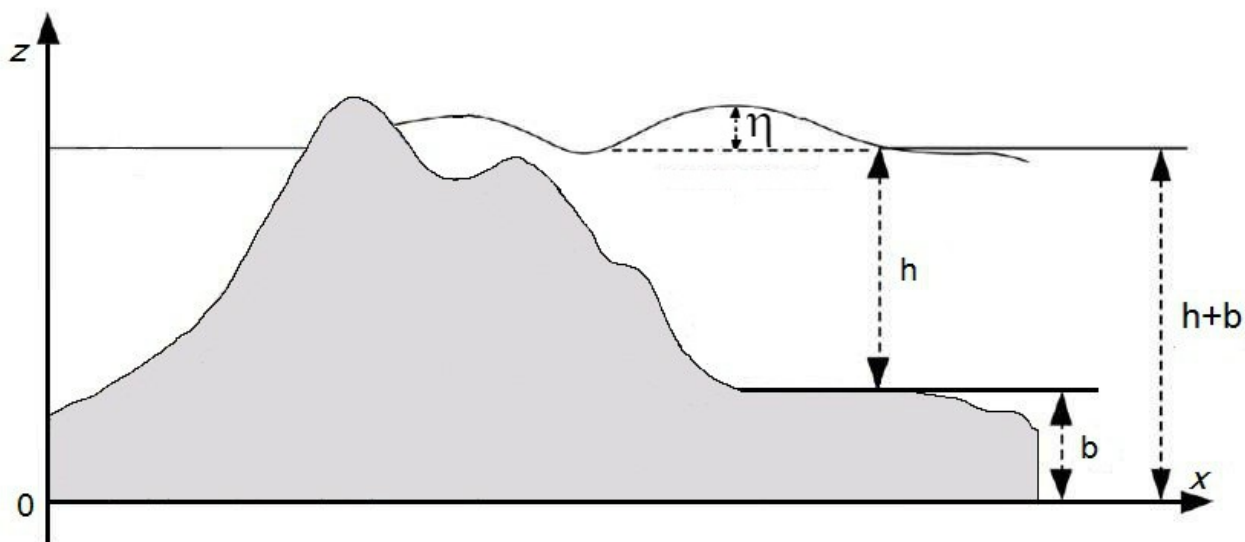


Рисунок 1.1 — Переменные уравнений МВ

тории в невозмущенном состоянии. Для описания течений расслаивающейся, например, по причине разной солености, жидкости используются двухслойные и многослойные УМВ (см., например, [12–14]).

УМВ посвящен ряд монографий, среди которых, в первую очередь, можно выделить [2], в которой рассматриваются основные формы записей УМВ, постановки задач, свойства уравнений, законы сохранения и основные численные методы решения, [15], посвященная гиперболическим системам законов сохранения и их приложениям к теории мелкой воды, а также монографии [12; 16], в которой разбираются точные решения уравнений МВ над наклонной плоскостью.

В данной работе для решения практических задач использовались двумерные уравнения мелкой воды в консервативной форме. Основными неизвестными уравнений МВ являются величины  $h(x,y,t)$  - высота жидкости над подстилающей поверхностью,  $u_x(x,y,t)$  и  $u_y(x,y,t)$  - компоненты скорости течения (рис. 1.1). Также для описания явлений используется величина  $\eta = h_0 - h(x,t)$  - отклонение уровня жидкости от равновесного значения  $h_0$ .

В общем виде УМВ записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u_x h}{\partial x} + \frac{\partial u_y h}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u_x h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu_x^2 + \frac{1}{2}gh^2) + \frac{\partial}{\partial y}(hu_x u_y) &= hf_{v,x} + f_{s,x} - gh \frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu_x u_y) + \frac{\partial}{\partial y}(hu_y^2 + \frac{1}{2}gh^2) &= hf_{v,y} + f_{s,y} - gh \frac{\partial b}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $f_{v,x}(x,y,t)$  и  $f_{v,y}(x,y,t)$  – составляющие объемной внешней силы, действующей на всю толщу слоя, например, силы Кориолиса или силы Эйлера,  $f_{s,x}(x,y,t)$  и  $f_{s,y}(x,y,t)$  – составляющие поверхностной внешней силы, например, силы трения о дно или силы трения ветра о свободную поверхность,  $b(x,y)$  – рельеф дна,  $g$  – ускорение силы тяжести.

## 1.2 Регуляризованные уравнения мелкой воды как основа нового численного метода решения уравнений мелкой воды

Под термином регуляризация подразумевается осреднение уравнений по некоторому малому промежутку времени. Впервые этот алгоритм применялся для газодинамических уравнений Эйлера и в ходе исследований группы сотрудников Института прикладной математики АН СССР им. М.В. Келдыша под руководством профессора Б.Н. Четверушкина, и в восьмидесятих годах двадцатого века были получены квазигазодинамические уравнения [17; 18], которые отличались от классических уравнений динамики газа дополнительными слагаемыми, имеющими вид вторых пространственных производных. Новые модели сразу позволили построить эффективные численные алгоритмы решения уравнений Эйлера, а впоследствии и уравнений Навье–Стокса. Позднее в работах Ю.В. Шеретова была предложена процедура пространственно-временного осреднения основных газодинамических величин, им была построена родственная этим уравнениям квазигидродинамическая система [19; 20]. Основные результаты опубликованы в монографиях [21–25].

В 2010-2011 годах в работах [26; 27] данный алгоритм был применен к УМВ. Полученная система была названа системой регуляризованных уравне-

ний мелкой воды (далее - РУМВ). Она отличается от исходной системы УМВ наличием дополнительных слагаемых первого порядка малости  $O(\tau)$ , которые имеют вид первых пространственных производных. Они вносят дополнительную диссипацию в систему, которая сглаживает численную неустойчивость и позволяет использовать простые и эффективные численные алгоритмы.

Процедура регуляризации состоит из четырех последовательных шагов. На первом шаге исходные переменные УМВ осредняют по некоторому малому промежутку времени  $\Delta t$ .

$$\langle f(x,y,t) \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(x,y,t') dt' \quad (1.2)$$

Промежуток  $\Delta t$  должен быть настолько малым, что для интервала усреднения  $(t, t + \Delta t)$  в качестве средних значений можно взять величины с одного временного слоя, отвечающего моменту времени  $t^*$ :  $(t < t^* < t + \Delta t)$ . Тогда на втором шаге исходные величины можно разложить в ряд Тэйлора по первому порядку малости. В результате получаются слагаемые, имеющие вид первых пространственных производных по времени.

$$f(x,y,t + \tau) = f(x,y,t) + \tau \frac{\partial f(x,y,t)}{\partial t} \quad (1.3)$$

На третьем шаге мы выражаем из исходных уравнений МВ получившиеся на втором шаге слагаемые, и, подставляя это на четвертом шаге в исходные УМВ, мы получаем систему РУМВ.

Приведем вывод РУМВ согласно [27]. Проинтегрируем исходную систему (1.1) по малому конечному объему  $\Delta V$  с границей  $\Sigma$  и представим производные по времени в виде их разностного аналога на конечном шаге  $\Delta t$ :

$$\int_V \frac{\hat{h} - h}{\Delta t} dV + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Sigma} \frac{\partial h^* u_i^*}{\partial x} d\sigma_i = 0 \quad (1.4)$$

$$\int_V \frac{\hat{h} \hat{u}_i - h u_i}{\Delta t} dV + \int_{\Sigma} \Lambda_{i,j}^* d\sigma_i = \int_V h^* (f_{i,v} - g \frac{\partial b}{\partial x_i}) dV \quad (1.5)$$

Здесь

$$\Lambda_{xx} = h u_x^2 + \frac{1}{2} g h^2, \quad \Lambda_{xy} = \Lambda_{yx} = h u_x u_y, \quad \Lambda_{yy} = h u_y^2 + \frac{1}{2} g h^2, \quad (1.6)$$

а величины  $h^*$ ,  $\Lambda_{i,j}^*$ ,  $u_i^*$  в общем случае берутся на промежуточном временном слое  $t < t^* < t + \Delta t$ . Отметим, что  $f_{i,s}$  не участвует в регуляризации. Предполагая, что за время  $\Delta t$  величины  $h$  и  $u$  успевают измениться, и это изменение ограничено, и при условии достаточной гладкости первых производных мы можем разложить величины  $h^*$ ,  $u^*$  в ряд и выразить через значения на временном слое  $t$ . Тогда для величин на временном слое  $t^*$  получим:

$$h^* = h + \tau \frac{\partial h}{\partial t}, \quad u_i^* = u_i + \tau \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (1.7)$$

Пользуясь этим разложением и ограничиваясь членами только первого порядка, для (1.4) получим:

$$\begin{aligned} h^* u_x^* &= (h + \tau \frac{\partial h}{\partial t})(u_x + \tau \frac{\partial u_x}{\partial t}) = hu_x + \tau(h \frac{\partial u_x}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial t}) + O(\tau^2) = \\ &= hu_x + \tau \frac{\partial hu_x}{\partial t} + O(\tau^2) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Выражаем  $\tau \frac{\partial hu_x}{\partial t}$  из уравнения (1.1), получается выражение для х-компоненты потока массы:

$$h^* u_x^* = j_{mx} + O(\tau^2) = h(u_x + w_x) \quad (1.9)$$

где

$$w_x = \frac{\tau}{h} \left( \frac{\partial}{\partial x} (hu_x^2 + \frac{1}{2}gh^2) + \frac{\partial}{\partial y} (hu_x u_y) - hf_{x,v} + gh \frac{\partial b}{\partial x} \right) \quad (1.10)$$

Аналогично для у-компоненты получаем:

$$h^* u_y^* = j_{my} + O(\tau^2) = h(u_y + w_y) \quad (1.11)$$

где

$$w_y = \frac{\tau}{h} \left( \frac{\partial}{\partial x} (hu_y^2 + \frac{1}{2}gh^2) + \frac{\partial}{\partial x} (hu_x u_y) - hf_{y,v} + gh \frac{\partial b}{\partial y} \right) \quad (1.12)$$

Рассмотрим теперь компоненты тензора  $\Lambda_{i,j}^*$ :

$$\begin{aligned}
\Lambda_{xx}^* &= h^*(u_x^*)^2 + \frac{1}{2}g(h^*)^2 = (h + \tau \frac{\partial h}{\partial t})(u_x + \tau \frac{\partial u_x}{\partial t})^2 + \frac{1}{2}g(h + \tau \frac{\partial h}{\partial t})^2 = \\
&= hu_x^2 + 2hu_x\tau \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x^2\tau \frac{\partial h}{\partial t} + O(\tau^2) + \frac{1}{2}g(h^2 + 2h\tau \frac{\partial h}{\partial t}) + O(\tau^2) = \quad (1.13) \\
&= u_x j_{mx} + \frac{1}{2}gh^2 + \tau u_x \frac{\partial hu_x}{\partial t} + \tau h(g \frac{\partial h}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial t}) + O(\tau^2)
\end{aligned}$$

Объединяем слагаемые с  $\tau$  в одну переменную. В результате получим:

$$\Lambda_{xx}^* = h^*(u_x^*)^2 + \frac{1}{2}g(h^*)^2 = u_x j_{mx} + \frac{1}{2}gh^2 - \Pi_{xx} + O(\tau^2) \quad (1.14)$$

Аналогично для других компонент тензора  $\Lambda_{i,j}^*$ :

$$\begin{aligned}
\Lambda_{xy}^* &= h^*u_x^*u_y^* = u_y j_{mx} - \Pi_{xy} + O(\tau^2) \\
\Lambda_{yx}^* &= h^*u_y^*u_x^* = u_x j_{my} - \Pi_{yx} + O(\tau^2) \\
\Lambda_{yy}^* &= h^*(u_y^*)^2 + \frac{1}{2}g(h^*)^2 = u_y j_{my} + \frac{1}{2}gh^2 - \Pi_{yy} + O(\tau^2)
\end{aligned} \quad (1.15)$$

Выражая в компонентах  $\Pi_{i,j}$  производные по времени из ур-я (1.1), приведем аналитические выражения для них в удобной форме:

$$\begin{aligned}
\Pi_{xx} &= u_x w_x^* + R^*, & \Pi_{yx} &= u_y w_x^* \\
\Pi_{xy} &= u_x w_y^*, & \Pi_{yy} &= u_y w_y^* + R^*,
\end{aligned} \quad (1.16)$$

где

$$\begin{aligned}
w_x^* &= \tau h \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + g \frac{\partial(h+b)}{\partial x} \right) \\
w_y^* &= \tau h \left( u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + g \frac{\partial(h+b)}{\partial y} \right) \\
R^* &= g\tau h \left( \frac{\partial hu_x}{\partial x} + \frac{\partial hu_y}{\partial y} \right)
\end{aligned} \quad (1.17)$$

Возвращаясь к интегральной форме уравнений (1.4-1.5), отбрасывая слагаемые порядка  $O(\tau^2)$  и вновь заменяя разностную производную по времени ее

дифференциальным аналогом, приходим к системе дифференциальных уравнений РУМВ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial j_{my}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial h u_x}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx} u_x}{\partial x} + \frac{\partial j_{my} u_x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gh^2}{2} \right) &= h^* \left( f_{x,v} - g \frac{\partial b}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial y} - f_{x,s} \\ \frac{\partial h u_y}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx} u_y}{\partial x} + \frac{\partial j_{my} u_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{gh^2}{2} \right) &= h^* \left( f_{y,v} - g \frac{\partial b}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yy}}{\partial y} - f_{y,s} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Здесь величина  $h^*$  имеет вид

$$h^* = h - \tau \left( \frac{\partial h u_x}{\partial x} + \frac{\partial h u_y}{\partial y} \right). \quad (1.19)$$

Система уравнений (1.18) тесно связана с исходной системой уравнений МВ и при  $\tau = 0$  переходит в систему (1.1). Вид слагаемых с коэффициентом  $\tau$  (1.10, 1.12, 1.16, 1.17, 1.19) определяется видом исходных уравнений, поэтому стационарные решения исходной системы (1.1) также являются стационарными решениями системы (1.18). Одним из таких решений является решение задачи о неподвижном водоеме с неровным дном в отсутствии внешних сил и начального возмущения (задача о "покоящемся озере"). При  $\tau > 0$  малые добавки сглаживают решение, обеспечивают его устойчивость в широком диапазоне чисел Фруда.

Для сглаживания численного решения используются также компоненты тензора вязких напряжений Навье-Стокса, в которых коэффициент вязкости связывается с параметром  $\tau$ . Эти компоненты добавляются в величину  $\Pi_{i,j}$  (1.16) и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Pi_{NSxx} &= \tau \frac{gh^2}{2} 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \Pi_{NSxy} &= \Pi_{NSyx} = \tau \frac{gh^2}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \Pi_{NSyy} &= \tau \frac{gh^2}{2} 2 \frac{\partial u_y}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Регуляризованные УМВ достаточно детально изучены теоретически. Для них выведено уравнение баланса полной механической энергии и доказан факт ее невозрастания. Тем самым было показано, что добавки носят диссипативный характер [28], [29]. Построена линеаризованная система РУМВ, для которой получены энергетические соотношения и доказаны теоремы об асимптотической устойчивости равновесного решения и единственности классического решения [30]. Получены необходимые и достаточные условия неравномерной и равномерной параболичности регуляризованных уравнений по Петровскому [31]. В монографии [32] доказана единственность классического решения начально-краевой задачи в приближении УМВ, получены точные решения для некоторых частных случаев. В [28—32] показано, что если функции  $h$ ,  $u_x$  и  $u_y$  являются решением стационарных уравнений мелкой воды, то они также являются решением стационарных регуляризованных УМВ. Примеры численного моделирования течений на основе регуляризованных уравнений МВ приведены в [27], [33].

В настоящее время теория регуляризованных УМВ продолжает развиваться. В [34] впервые для регуляризованных УМВ была построена аппроксимация на неструктурированных сетках. В [35] выведены регуляризованные УМВ в полярных координатах. В [36] построена система уравнений для двухслойной мелкой воды.

### 1.3 Разностная аппроксимация регуляризованных уравнений мелкой воды

Для численной аппроксимации УМВ было разработано и адаптировано большое количество разнообразных численных методик, учитывающих особенности той или иной рассматриваемой проблемы. Среди них можно выделить такие методы, как метод конечных разностей [37—39], метод частиц [40; 41], метод конечных элементов [42; 43], метод конечного объема [44; 45] и других, более специфических, основанных, например, на дроблении шагов [46; 47], методе Годунова [48; 49] и др.

Для численного решения регуляризованной системы можно применять любые из описанных выше методов. Наличие в РУМВ дополнительных слага-



емых делает разностное решение более устойчивым и позволяет использовать простые численные алгоритмы.

В данной работе для аппроксимации РУМВ применялась явная по времени разностная схема, в которой использовался интегро-интерполяционный метод с аппроксимацией пространственных производных центральными разностями [50; 51]. Для расчетов применялись равномерные неразнесенные пространственные сетки. Шаг по времени определялся условием устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви по отношению фазовой скорости длинных гравитационных волн. Ниже приводится подробное описание разностной схемы.

Значения основных переменных  $h(x,y,t)$  и  $u(x,y,t)$  задаются в узлах пространственной сетки  $(i,j)$ , значения в полуцелых точках  $i \pm 1/2, j$  и  $i, j \pm 1/2$  вычисляются как среднее арифметическое значение величин в соседних узлах, например,  $h_{i\pm 1/2, j} = 0.5(h_{i,j} + h_{i\pm 1, j})$ . Значения в центрах ячеек определяются как среднее арифметическое от значений в соседних узлах, например,  $h_{i+1/2, j+1/2} = 0.25(h_{i,j} + h_{i+1, j} + h_{i, j+1} + h_{i+1, j+1})$ . Аналогично аппроксимируются величины  $u_x$ ,  $u_y$  и  $b$ .

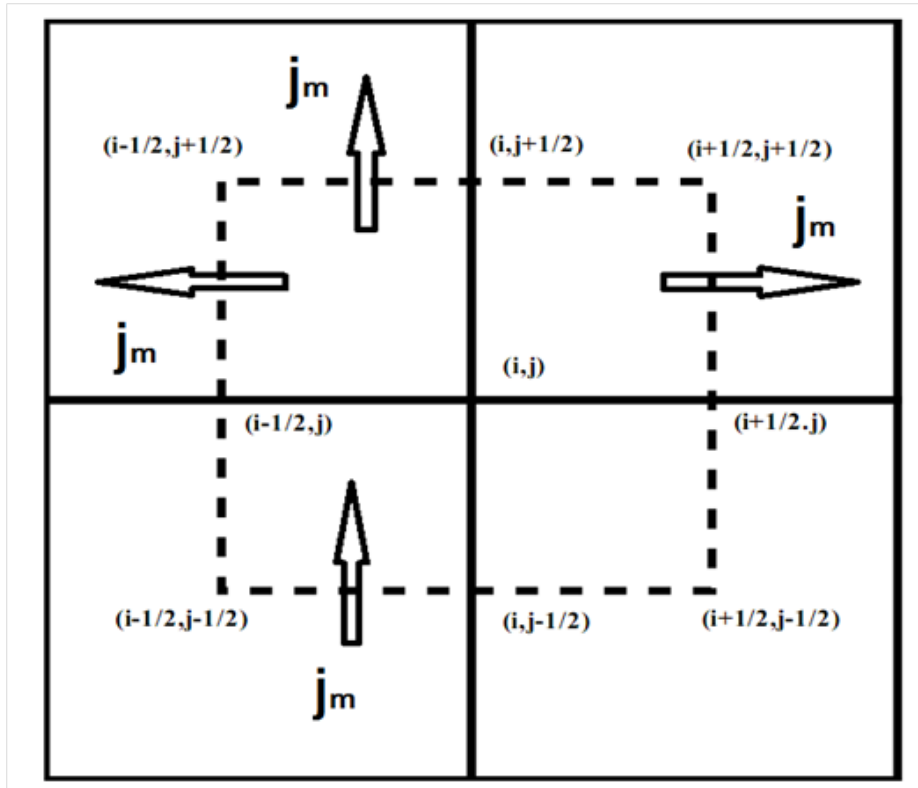


Рисунок 1.2 — Шаблон разностной схемы

Аппроксимация потоковых величин происходит в полуцелых точках на ребрах. В качестве примера приводится аппроксимация для величин  $j_x$  и  $j_y$ .

$$\begin{aligned}
j_{i\pm 1/2,j}^x &= h_{i\pm 1/2,j}(u_{i\pm 1/2,j}^x - w_{i\pm 1/2,j}^x) \\
j_{i,j\pm 1/2}^y &= h_{i,j\pm 1/2}(u_{i,j\pm 1/2}^y - w_{i,j\pm 1/2}^y)
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Здесь и далее для удобства использован верхний индекс для обозначения  $x$  и  $y$  компонент. Значения  $w_{i+1/2,j}^x$ ,  $w_{i-1/2,j}^x$  и  $w_{i,j+1/2}^y$ ,  $w_{i,j-1/2}^y$  также определяются на ребрах сеточной ячейки. Входящие в эти выражения производные аппроксимируются центральными разностями. Разностная запись этих величин приведена в [52].

В качестве примера приводится разностная аппроксимация  $w^{*,x}$  и  $w^{*,y}$ :

$$\begin{aligned}
w_{i+1/2,j}^{*,x} &= \tau_{i+1/2,j} h_{i+1/2,j} \left( u_{i+1/2,j}^x \frac{u_{i+1,j}^x - u_{i,j}^x}{\Delta x} + \right. \\
&\quad \left. u_{i+1/2,j}^y \frac{u_{i+1/2,j+1/2}^x - u_{i+1/2,j-1/2}^x}{\Delta y} + g h_{i+1/2,j} \frac{h_{i+1,j} + b_{i+1,j} - h_{i,j} - b_{i,j}}{\Delta x} \right) \\
w_{i-1/2,j}^{*,x} &= \tau_{i-1/2,j} h_{i-1/2,j} \left( u_{i-1/2,j}^x \frac{u_{i,j}^x - u_{i-1,j}^x}{\Delta x} + \right. \\
&\quad \left. u_{i-1/2,j}^y \frac{u_{i-1/2,j+1/2}^x - u_{i-1/2,j-1/2}^x}{\Delta y} + g h_{i-1/2,j} \frac{h_{i,j} + b_{i,j} - h_{i-1,j} - b_{i-1,j}}{\Delta x} \right) \\
w_{i,j+1/2}^{*,y} &= \tau_{i,j+1/2} h_{i,j+1/2} \left( u_{i,j+1/2}^x \frac{u_{i+1/2,j+1/2}^y - u_{i-1/2,j+1/2}^y}{\Delta x} + \right. \\
&\quad \left. u_{i,j+1/2}^y \frac{u_{i,j+1}^y - u_{i,j}^y}{\Delta y} + g h_{i,j+1/2} \frac{h_{i,j+1} + b_{i,j+1} - h_{i,j} - b_{i,j}}{\Delta y} \right) \\
w_{i,j-1/2}^{*,y} &= \tau_{i,j-1/2} h_{i,j-1/2} \left( u_{i,j-1/2}^x \frac{u_{i+1/2,j-1/2}^y - u_{i-1/2,j-1/2}^y}{\Delta x} + \right. \\
&\quad \left. u_{i,j-1/2}^y \frac{u_{i,j}^y - u_{i,j-1}^y}{\Delta y} + g h_{i,j-1/2} \frac{h_{i,j} + b_{i,j} - h_{i,j-1} - b_{i,j-1}}{\Delta y} \right)
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Аналогично аппроксимируются величины  $R^*$  и  $\Pi_{i,j}$ .

Полная разностная схема для системы уравнений (1.18) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\hat{h}_{i,j} &= h_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( j_{i+1/2,j}^x - j_{i-1/2,j}^x \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( j_{i,j+1/2}^y - j_{i,j-1/2}^y \right), \\
\hat{h}_{i,j} \hat{u}_{i,j}^x &= h_{i,j} u_{i,j}^x + \Delta t \left( \tau_{i,j}^{x,w} - \tau_{i,j}^{x,b} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \Pi_{i+1/2,j}^{xx} - \Pi_{i-1/2,j}^{xx} \right) - \\
&\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( u_{i+1/2,j}^x j_{i+1/2,j}^x - u_{i-1/2,j}^x j_{i-1/2,j}^x \right) - 0.5g \frac{\Delta t}{\Delta x} (h_{i+1/2,j}^2 - h_{i-1/2,j}^2) + \\
&\quad + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \Pi_{i,j+1/2}^{yx} - \Pi_{i,j-1/2}^{yx} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( u_{i,j+1/2}^x j_{i,j+1/2}^y - u_{i,j-1/2}^x j_{i,j-1/2}^y \right) + \\
&\quad + \Delta t h_{i,j}^{*,x} \left( f_{i,j}^{v,x} - g \frac{b_{i+1/2,j} - b_{i-1/2,j}}{\Delta x} \right) + \Delta t f_{i,j}^{s,x}, \\
\hat{h}_{i,j} \hat{u}_{i,j}^y &= h_{i,j} u_{i,j}^y + \Delta t \left( \tau_{i,j}^{y,w} - \tau_{i,j}^{y,b} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \Pi_{i+1/2,j}^{xy} - \Pi_{i-1/2,j}^{xy} \right) - \\
&\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( u_{i+1/2,j}^y j_{i+1/2,j}^x - u_{i-1/2,j}^y j_{i-1/2,j}^x \right) - 0.5g \frac{\Delta t}{\Delta y} (h_{i,j+1/2}^2 - h_{i,j-1/2}^2) + \\
&\quad + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \Pi_{i,j+1/2}^{yy} - \Pi_{i,j-1/2}^{yy} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( u_{i,j+1/2}^y j_{i,j+1/2}^y - u_{i,j-1/2}^y j_{i,j-1/2}^y \right) + \\
&\quad + \Delta t h_{i,j}^{*,y} \left( f_{i,j}^{v,y} - g \frac{b_{i,j+1/2} - b_{i,j-1/2}}{\Delta y} \right) + \Delta t f_{i,j}^{s,y}.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Здесь величины с крышкой  $\hat{h}$ ,  $\hat{u}$  относятся к верхнему временному слою,  $\Delta t$  обозначает шаг по времени,  $\Delta x$  и  $\Delta y$  – шаги разностной сетки по пространству.

## 1.4 Специфические особенности численного алгоритма

### 1.4.1 Устойчивость численного алгоритма

Устойчивость численного алгоритма обеспечивается слагаемыми с коэффициентом  $\tau$ . Для этого величина  $\tau$  связывается с шагами пространственной сетки и вычисляется в виде:

$$\tau = \alpha \frac{\Delta x + \Delta y}{2c}, \quad c = \sqrt{gh(x,y,t)}, \tag{1.24}$$

где  $c$  - скорость распространения малых возмущений, рассчитанная в приближении модели мелкой воды,  $0 < \alpha < 1$  – численный коэффициент, выбираемый из условий точности и устойчивости счета. При правильном подборе  $\alpha$  параметр  $\tau$  соотносится со временем, необходимым малому возмущению для преодоления площади расчетной ячейки.

Шаг по времени выбирается в соответствии с условием Куранта, которое для данной задачи имеет вид

$$\Delta t = \beta \frac{\Delta x + \Delta y}{2c_{max}}, \quad (1.25)$$

число Куранта  $0 < \beta < 1$  зависит от величины параметра регуляризации  $\tau$  в виде  $\beta = \beta(\alpha)$  и подбирается в процессе вычислений для обеспечения монотонности численного решения.

Условие (1.24) понижает порядок построенной выше разностной схемы и делает ее схемой первого порядка точности. Однако, как показала практика применения аналогичных схем для решения задач газовой динамики и вязкой несжимаемой жидкости, эти схемы имеют целый ряд положительных качеств при расчете нестационарных течений с большими градиентами. Применительно к уравнениям МВ на примере расчетов течений в рамках одномерных уравнений Сен-Венана для ряда задач о распаде разрыва в [32] показано, что описанный выше численный метод оказывается более точным, чем схема Лакса–Фридрихса первого порядка точности.

### 1.4.2 Реализация условия well-balanced

Для системы регуляризованных уравнений так же, как и для исходной системы (1.1), выполняется так называемое условие покоящейся жидкости: т.е. для покоящейся в начальный момент времени жидкости в отсутствие внешних сил в любой последующий момент времени уровень поверхности жидкости остается постоянным

$$h + b = \text{const} \quad (1.26)$$

Важность соблюдения этого условия для разностных схем заключается в том, что в отсутствие внешних сил для изначально покоящейся жидкости в численном решении не должны появляться нефизические возмущения, обусловленные разностной аппроксимацией неровностей дна.

В построенной разностной схеме условие "well-balanced" определяется величиной  $h^*$ . При её аппроксимации в виде

$$\begin{aligned} h_{x,i,j}^* &= 0.5(h_{i+1/2,j} + h_{i-1/2,j}) - \tau_{i,j}(\dots) \\ h_{y,i,j}^* &= 0.5(h_{i,j+1/2} + h_{i,j-1/2}) - \tau_{i,j}(\dots) \end{aligned} \quad (1.27)$$

условие хорошей балансировки выполняется естественным образом, т.е. при подстановке разностного решения  $u_{i,j}^x = u_{i,j}^y = 0$  и  $h_{i,j} + b_{i,j} = \text{const}$  уравнения превращаются в тождество. Простота аппроксимации объясняется тем, что включенные в численный алгоритм диссипативные добавки с коэффициентом  $\tau$  обращаются в ноль на стационарных решениях, а также первым порядком точности разностного алгоритма. Подробнее об условии "well-balanced" для регуляризованных уравнений мелкой воды см. в [52]. Построение сбалансированных разностных схем для алгоритмов высокого порядка точности представляет существенные трудности, см., например, [53].

### 1.4.3 Условия сухого дна

Для задач, связанных, например, с численным моделированием разливов рек и наводнений, требуется определять границы областей сухого дна - зоны, где уровень жидкости считается нулевым. Для описания таких областей используется подход, изложенный в [54; 55], в котором предполагается, что в области сухого дна жидкость покоится. Граница области определяется параметром отсечения  $\varepsilon_{i,j}$ , который по смыслу является минимальным уровнем жидкости, параметром малости для уровня  $h$ , ниже которого скорости течения, а также

регуляризующие добавки, связанные с  $\tau$ , должны быть равны нулю, т.е. при  $h_{i,j} \leq \varepsilon_{i,j}$ :

$$h_{i,j} \leq \varepsilon_{i,j} : \quad u_{i,j} = 0, \tau = 0 \quad (1.28)$$

Выбор параметра отсечения  $\varepsilon_{i,j}$  определяется решаемой задачей.

Для задач с неровным профилем дна  $\varepsilon$  связывается с градиентом топографии соотношением вида

$$\varepsilon > \Delta x \left| \frac{\partial b}{\partial x} \right|, \quad (1.29)$$

т.е. параметр отсечения является переменной величиной и зависит от формы подстилающей поверхности и выбранной пространственной сетки. Для двумерной прямоугольной сетки (1.29) записывается в виде:

$$\varepsilon_{i,j} = \varepsilon_0 \max((b_{i+1,j} - b_{i,j}), (b_{i,j} - b_{i-1,j}), (b_{i,j+1} - b_{i,j}), (b_{i,j} - b_{i,j-1})) \quad (1.30)$$

где  $\varepsilon_0$  – настроечный параметр. Отметим, что определение параметра отсечения может меняться в зависимости от решаемой задачи.

#### 1.4.4 Реализация численного алгоритма

Таким образом, численный алгоритм включает в себя три настраиваемых параметра разностной схемы - параметр сухого дна  $\varepsilon_0$ , число Куранта  $\beta$  и параметр регуляризации  $\alpha$ . Кроме того, в качестве параметров физической модели используются топография дна  $b(x,y)$ , а также внешнее воздействие  $f_{i,v}$  и  $f_{i,s}$ . Подбор оптимальных параметров модели определяет точность и устойчивость численного решения.

В данной работе все расчеты произведены по оригинальной программе, написанной на языке C++ с реализованной технологией OpenMP для параллельных вычислений. Отметим, что наиболее оптимальные алгоритмы распа-

раллеливания строиться по принципу геометрического параллелизма [56; 57]. Исходная область разбивается на подобласти, число которых равно количеству процессоров. Каждый процессор вычисляет разностные уравнения в отведенной ему подобласти.

Программа позволяет выводить данные для различных точек области в режиме реального времени, то есть с шагом, равным  $\Delta t$ . Расчет 7 дней по явной разностной схеме с количеством узлов  $1521 \cdot 1091 = 1659411$  занимает около 7 часов компьютерного времени на персональном компьютере с процессором Intel(R) Core(TM) i7 с тактовой частотой 4 GHz и 8 процессорами. Оптимизация программы не проводилась, хотя по предварительным оценкам она может ускорить расчет в 2-4 раза. Визуализация данных проводилась с помощью программного комплекса TechPlot.

## Глава 2. Численное моделирование колебаний жидкости в баках газозовов

### 2.1 Введение

Россия является одним из ведущих современных экспортеров нефти и газа. Важнейшим аспектом экспорта, наряду с непосредственно добычей топлива, является его транспортировка, которая осуществляется самым экономичным способом доставки груза - морским путем. При этом газ сжижается и закачивается в специальный топливный танк (рис. 2.1 и 2.2).



Рисунок 2.1 — Транспортировка газа морским путём

Большинство месторождений находится за полярным кругом или в непосредственной близости от него, что определяет дополнительные сложности для транспортировки топлива. Поэтому суда-газовозы, работающие в арктических условиях, должны иметь ледокольный класс, чтобы иметь возможность расчищать себе путь. При столкновении со льдиной топливо в танке приходит в движение, и это движение может вызвать не только повреждения, но и разрушение стенки бака. Поэтому своевременной и важной является задача расчета колебаний жидкости в танках газозова, их качественное описание и количественный расчет предельных нагрузок на стенки танка, вызванных сложными маневрами судна [58—62].



Для этой задачи существуют два принципиальных подхода – численный и экспериментальный. В рамках экспериментального подхода в огромных резервуарах создают условия, наиболее близкие к реальным, и в этих условиях производится удар жидкости о стенку, на которой закреплены специальные датчики, которые измеряют уровень воды и давление на стенку сосуда. Информация от этих датчиков собирается и моделируется общая картина, а затем вычисляется коэффициент подобия, который отражает различия между экспериментом и реальной ситуацией [63]. Примеры экспериментальных исследований описаны, например, в [62; 64]

Другой подход подразумевает численное решение данной задачи в рамках уравнений Навье-Стокса и его различных модификаций [61; 62; 65; 66]. Обзор численных методов решения задач слошинга в танкерах газовозов можно найти в [67; 68].

У каждого подхода есть свои плюсы и минусы – так, теоретический подход намного дешевле по сравнению с экспериментальным, с другой стороны, он требует использования современных интеллектуальных технологий и менее нагляден. Расчет одного варианта – первых 20 секунд столкновения может занимать до 12 часов работы соответствующей программы на суперкомпьютере.

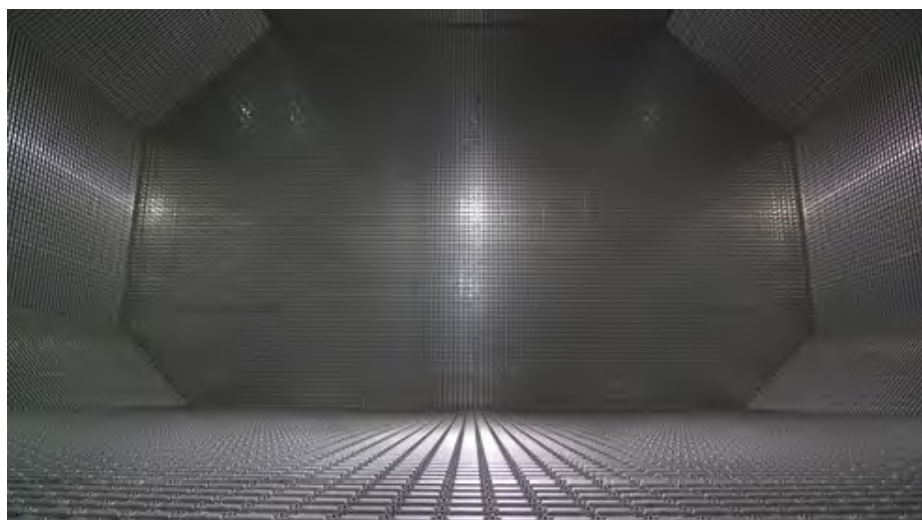


Рисунок 2.2 — Внутренний вид топливного бака

Согласно условиям технической безопасности, учитывающим конструкцию баков и толщину его стенок, транспортировка сжиженных газов допустима только при заполнении бака меньше 15% и при его заполнении больше 75%. В первом случае помимо полных уравнений Навье-Стокса расчет возможен и с помощью уравнений мелкой воды. В случае лобового столкновения применима

одномерная модель. В таком случае расчетная область будет расположена по оси симметрии бака, вдоль которой и происходит столкновение. Для описания случаев, когда столкновение является не лобовым, а происходит под некоторым углом к движению ледокола, а также для более точного учета вихревого, существенно нелинейного движения жидкости и неровного профиля бака, используется двумерная система УМВ. Применение приближения МВ позволяет не только получить аналогичное решение совершенно другим способом, но и существенно сократить времена счета даже при использовании обычного персонального компьютера.

## 2.2 Постановка задачи

Задача решалась в постановке [61]. Рассматривался танк призматической формы [69]. Расчетной областью является емкость танка со следующими размерами: длина – 33.6 м, ширина – 29.8 м, высота – 23 м. Внешний вид емкости показан на рис. 2.2.

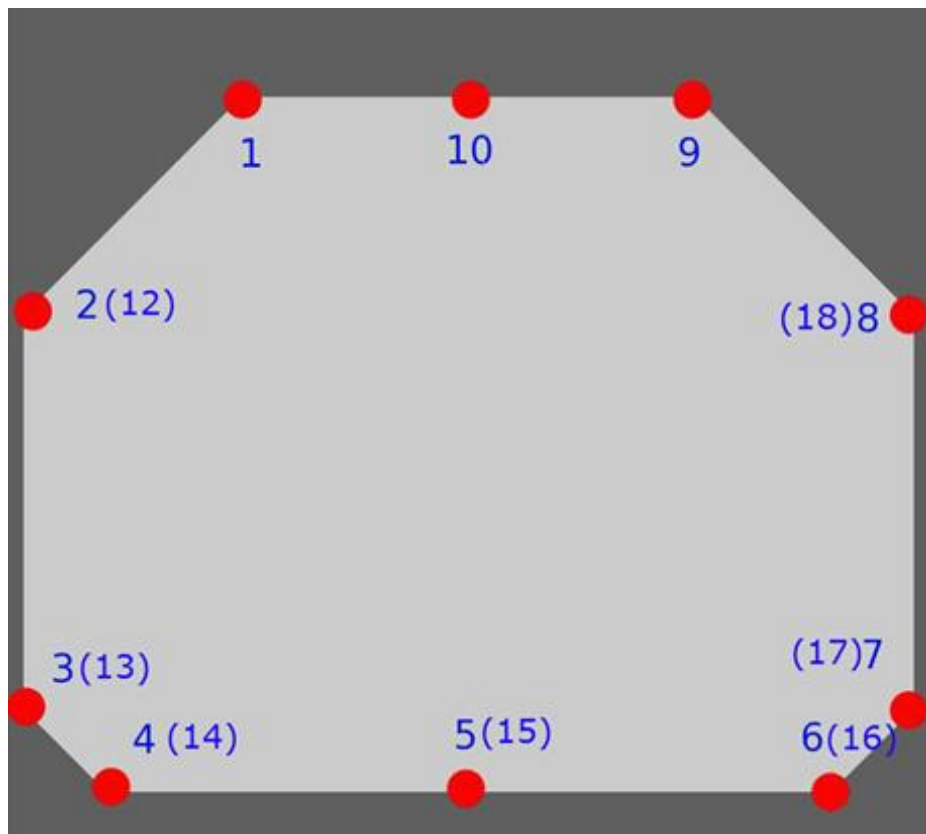


Рисунок 2.3 — Вертикальное сечение танка и обозначение реперных точек

Постановка задача осуществляется в неинерциальной системе координат, связанной с самим баком, в которой ось  $X$  направлена вдоль движения судна, ось  $Z$  – противоположно ускорению свободного падения  $g$ , и ось  $Y$  – перпендикулярно осям  $X$  и  $Z$ .

На рис. 2.3 изображен поперечный срез емкости танка. В нижней части функция рельефа дна выглядит следующим образом:

$$b(x,y) = \begin{cases} 2.9 - y, & \text{если } 0 \leq y \leq 2.9; \\ 0, & \text{если } 2.9 \leq y \leq 26.9; \\ y - 26.9, & \text{если } 26.9 \leq y \leq 29.8; \end{cases} \quad (2.1)$$

Размеры приведены в метрах. В плоскости симметрии в одномерной постановке резервуар имеет плоское дно  $b(x) = const$ .

В рамках двумерных УМВ задача решалась в следующей постановке:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u_x h}{\partial x} + \frac{\partial u_y h}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u_x h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu_x^2 + \frac{1}{2}gh^2) + \frac{\partial}{\partial y}(hu_x u_y) &= hf_x - gh\frac{\partial b}{\partial x} - \mu|u|u_x \\ \frac{\partial u_y h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu_x u_y) + \frac{\partial}{\partial y}(hu_y^2 + \frac{1}{2}gh^2) &= hf_y - gh\frac{\partial b}{\partial y} - \mu|u|u_y \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $f_i$  – компоненты силы инерции, которая действует на топливо в баке при неравномерном движении судна,  $\mu|u|u_i$  – компоненты силы трения о дно резервуара,  $\mu$  – безразмерный коэффициент гидравлического трения, который принимал значения 0 и 0.001.

Обозначим момент столкновения судна со льдиной  $t = 0$  с. В этот момент полагаем уровень жидкости  $H(x, y) = b(x, y) + h(x, y) = h_0$  занимает примерно 10% от полного объема бака. При этом начальная высота уровня жидкости  $h_0$  не превышает 3 метра.

В данной работе рассматриваются постановки задач колебаний топлива в танкере при его столкновении с льдиной и при качке на волна. В первом случае законы изменения скорости движения судна-газовоза при его соударении с ледовым препятствием описываются полиномами шестой степени [61]. Для начальной скорости движения судна в 8 узлов этот полином имеет вид:

$$V = -6.8192t^6 + 22.639t^5 - 7.693t^4 - 12.453t^3 + 0.1757t^2 - 0.0249t + 4.1161, \quad (2.3)$$

для начальной скорости движения судна в 6 узлов

$$V = -2.4914t^6 + 9.3244t^5 - 3.5721t^4 - 6.5188t^3 + 0.1037t^2 - 0.0165t + 3.0871, \quad (2.4)$$

для начальной скорости судна в 4 узла

$$V = -0.6027t^6 + 2.671t^5 - 1.2116t^4 - 2.618t^3 + 0.0493t^2 - 0.0093t + 2.0581. \quad (2.5)$$

Один морской узел равен 0.514 м/сек. В приведенных выше формулах размерность скорости - метры в секунду. В дальнейшем все величины даны в системе СИ. В рамках одномерной постановке полагается, что скорость судна  $V$  направлена вдоль оси  $x$ .

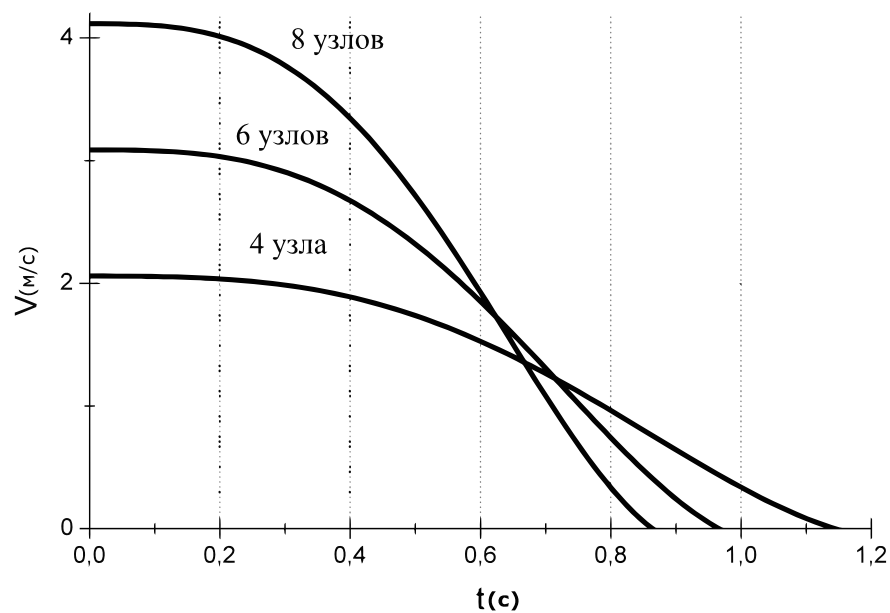


Рисунок 2.4 — Графики эволюции скорости судна при его остановке

Графики скоростей приведены на Рис. 2.4. Из графиков наглядно видно, что для всех трех вариантов остановка судна происходит за время порядка 1 сек.

Сила инерции определяется законом изменения скорости судна от времени  $V(\vec{t})$ :

$$\vec{f} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (2.6)$$

Таким образом, при остановке судна вследствие соударения со льдиной сила  $f$  действует на жидкость в течение некоторого заданного промежутка времени  $\Delta t_0 \sim 1$  с.

В качестве граничных условий используются условия непротекания со скольжением для скорости и отражения для величины  $h$ :

$$u_n = 0, \quad \frac{\partial u_\tau}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial n} = 0.$$

Здесь обозначено  $n$  – направление, перпендикулярное к границе области,  $\tau$  – направление по касательной к границе области.

С практической точки зрения интерес представляет величина нагрузки на стенки бака при остановке судна. Давление в баке  $P$  вычисляется как

$$P(x,t) = P_{atm} + gh(x,t)\rho \quad (2.7)$$

где  $\rho = 700$  кг/м<sup>3</sup> – плотность жидкости,  $P_{atm} = 101$  кПа – атмосферное давление, включая давление паров жидкости.

## 2.3 Моделирование колебаний топлива в рамках одномерной модели

### 2.3.1 Общая картина течения

Рассмотрим вариант расчета, в котором начальная скорость судна составляет 8 узлов, длина бака  $L = 33.6$  м и начальная высота жидкости  $h_0 = 1.46$  м.

На рис. 2.5(а) приведены профили уровня жидкости  $h(x)$  для четырех последовательных моментов времени 0, 0.98, 5 и 8.5 сек. Виден характерный заброс жидкости вверх по передней стенке бака и постепенное понижение уровня с течением времени. На рис. 2.5(б) приведены соответствующие распределения

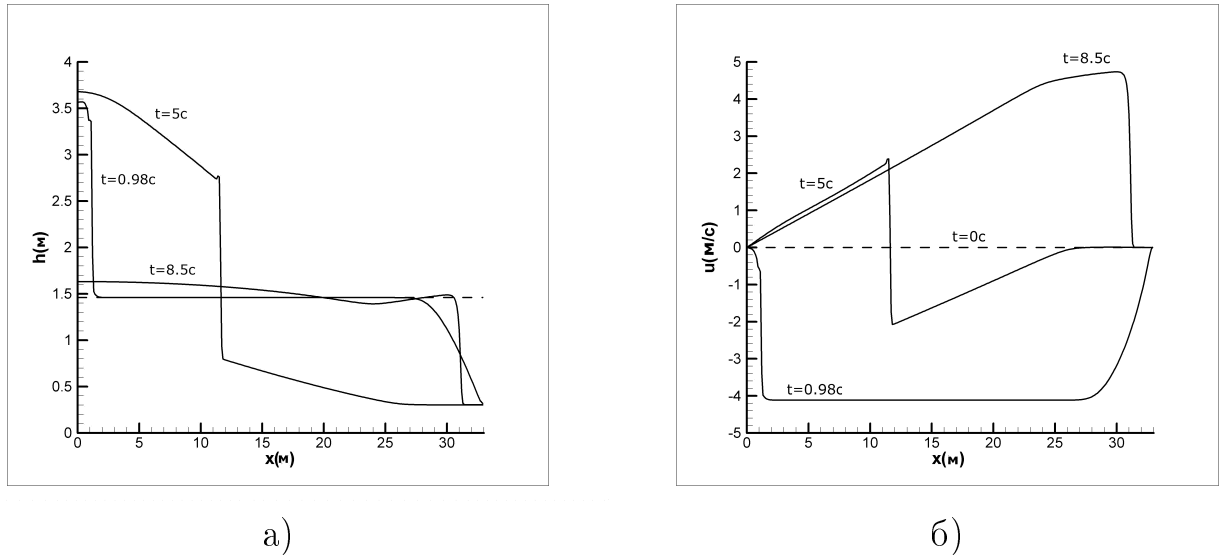


Рисунок 2.5 — Распределение уровня жидкости (а) и скорости (б) для последовательных моментов времени,  $h_0 = 1.46$  м

скорости жидкости в баке. На обоих представленных графиках видны большие градиенты в распределениях скорости и высоты. На этих временах число Фруда  $Fr = |u|/c$  достигает значения 1.1, что соответствует сверхкритическому течению, характерному для формирования разрывных решений типа гидравлического прыжка.

Фрагмент графика колебаний давления на передней стенке бака приведен на рис. 2.6 для варианта расчета  $L=36.5$  м,  $h_0=2.86$  м,  $\mu = 0$ .

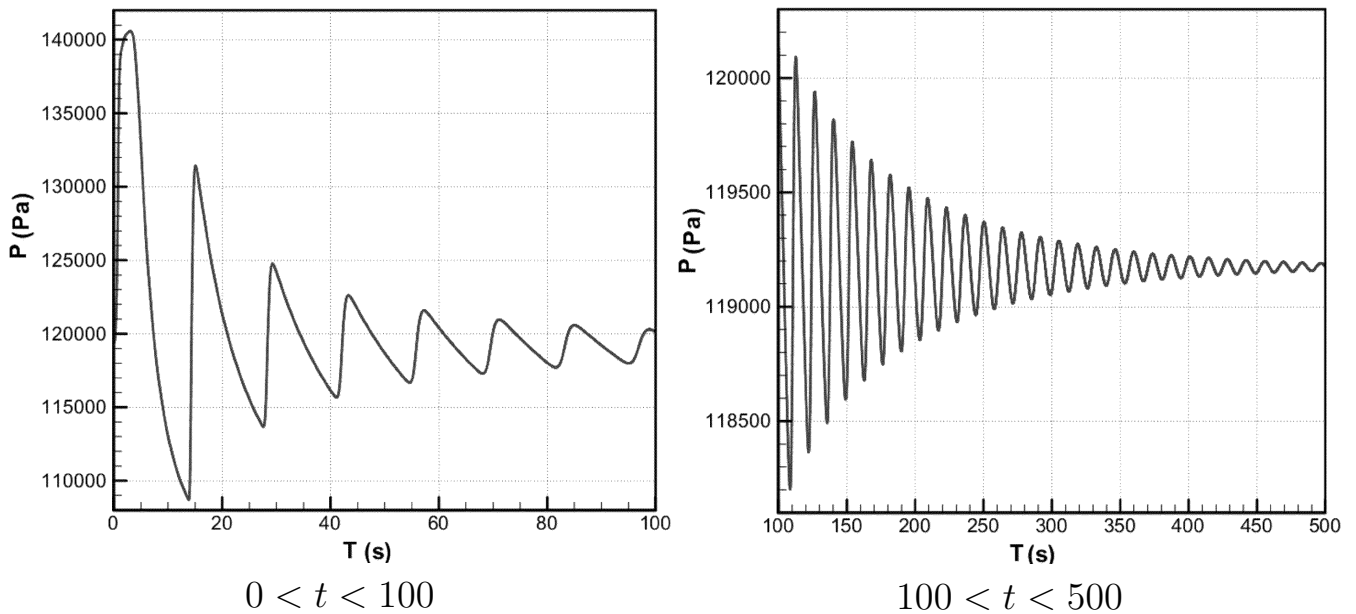


Рисунок 2.6 — График зависимости давления на переднюю стенку от времени, начальная высота  $h_0 = 2.86$  м, скорость - 8 узлов.

В начале процесса колебания имеют нерегулярную форму, однако с течением времени устанавливаются слабо затухающие гармонические колебания, которые полностью сглаживаются на временах порядка 700 сек. На временах  $100 < t < 500$  сек. колебания жидкости в баке близки к гармоническими. Вследствие условий отражения на стенках на длине бака  $L$  укладывается половина длины волны основной частотной моды  $\lambda = 2L$ . Таким образом, период колебания  $T$  связан со скоростью волны  $c$  соотношением

$$T = \frac{2L}{c}. \quad (2.8)$$

В [5], стр. 60. приведена аналитическая формула для скорости распространения гравитационной волны на неограниченной поверхности жидкости глубины  $h_0$

$$c = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{kt h(kh_0)}} \left( th(kh_0) + \frac{kh_0}{ch^2(kh_0)} \right). \quad (2.9)$$

Для данного расчета глубина жидкости в баке  $h_0 = 2.86$  м. и волновое число  $k = 2\pi/\lambda = \pi/L$ . Таким образом  $kh_0 = 0.24$ , что приблизительно соответствует длинноволновому приближению  $kh_0 \ll 1$ . В этом приближении выражение (2.9) упрощается и принимает вид  $c = \sqrt{gh_0}$ .

Согласно (2.8) и (2.9) значение периода колебаний в рассматриваемом случае составляет  $T=14.3$  сек. Использование длинноволнового приближения дает значение  $T=13.9$  сек. В приведенном расчете период колебаний составляет  $14 \pm 0.45$  сек, при его измерении в интервале времени  $30 < t < 550$  сек. Полученное значение соответствует теоретическим оценкам, основанным на величине скорости распространения гравитационной волны в жидкости.

Таким образом для указанного интервала времени можно говорить о выходе численного решения на аналитическую зависимость, которая полностью согласуется с гидродинамическим описанием процесса колебаний. Последнее подтверждает физичный характер диссипации в используемом разностном алгоритме.

### 2.3.2 Зависимость разностного решения от параметров схемы

Разностный алгоритм решения задачи включает в себя несколько настроечных параметров - это размер шагов по пространству  $\Delta x$ , шаг по времени  $\Delta t$ , который определяется числом Куранта  $\beta$ , параметр регуляризации  $\alpha$ , и величины для расчёта движения границы области сухого дна – параметр отсечения  $\varepsilon$  или коэффициент  $k$ , связанный с наклоном дна. Все эти величины определяют точность и трудоёмкость численного решения.

Оптимальное значение пространственного шага обусловлено выбором между быстротой решения, его точностью и устойчивостью расчёта, поскольку уменьшение шага по пространству требует пропорционального уменьшения шага по времени.

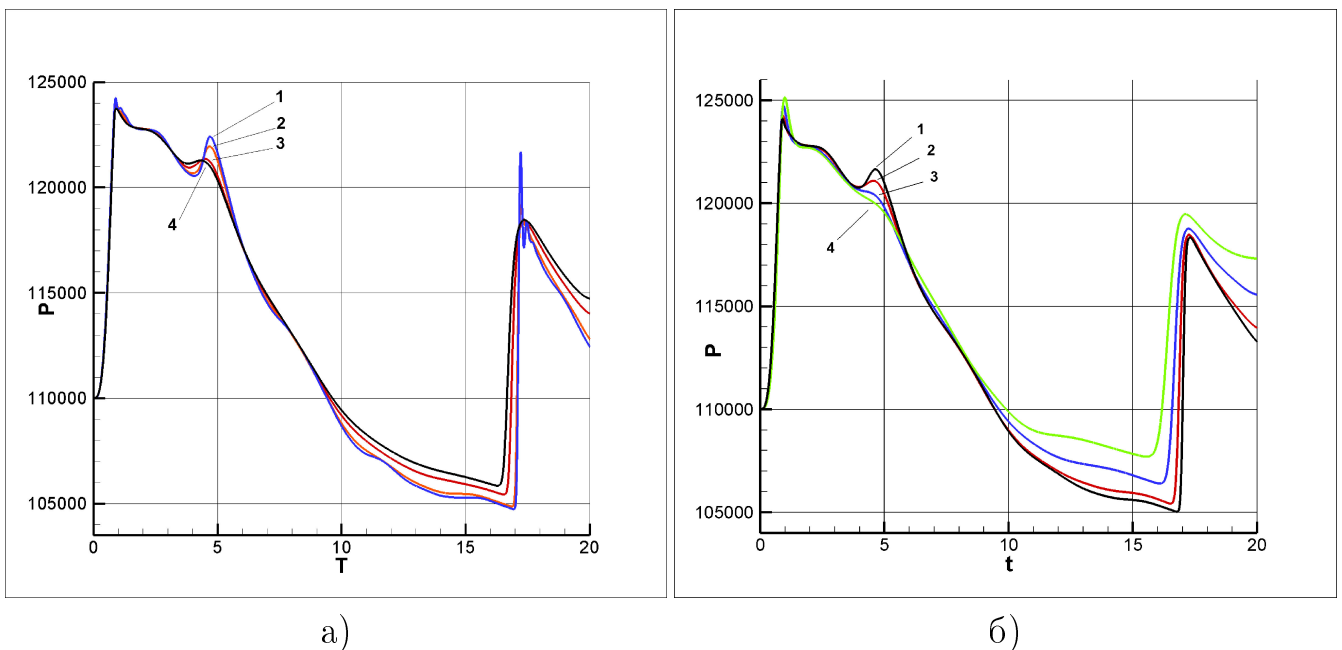


Рисунок 2.7 — Зависимость давления от времени для реперной точки 5 а) при изменении шага пространственной сетки  $\Delta : 0.2(1), 0.3(2), 0.5(3), 0.7(4)$  для  $\alpha = 0.3$  б) при изменении параметра  $\alpha : 0.1(1), 0.2(2), 0.3(3), 0.5(4)$  для  $\Delta x 0.2$ ,  $k = 0.2$

Зависимости давления жидкости на стенку бака в точке 5 при сгущении пространственной сетки приведены на рис. 2.7. Здесь  $\alpha = 0.3$ ,  $k = 0.5$ . Графики показывают сходимость численного решения задачи при дроблении пространственной сетки. В качестве оптимального шага было выбрано значение  $\Delta x = \Delta y = 0.2$  м.



Для этого шага было исследовано поведение решения при различных значениях параметра регуляризации  $\alpha$ : чем меньше параметр регуляризации, тем точнее решение. С другой стороны, при малом значении  $\alpha$  в решении появляются нефизичные осцилляции и в дальнейшем решение может терять устойчивость. На рисунке 2.7 хорошо видна сходимость решения в той же точке 5 при различных значениях коэффициента  $\alpha$ . В результате проведённого анализа было выбрано минимальное из приемлемых решений - параметр  $\alpha = 0.3$ .

Дополнительная сложность задачи заключается в том, что в начальный момент времени из-за наклона нижней части стенок бака в 1/4 части расчётной области имеется зона сухого дна. При численном решении задачи этот факт вызывает сильные нефизичные осцилляции решения в начальные моменты времени вблизи границы сухого дна. Для исключения этого численного эффекта в начальный момент времени удобно положить, что в указанных областях высота уровня жидкости имеет малое, но не нулевое значение  $h(x, y) = \delta\varepsilon = 0.0001$  м. При дальнейшем уменьшении  $\delta\varepsilon$  погрешность решения практически не изменяется, в то время как устойчивость алгоритма, то есть шаг по времени, уменьшается. Для рассматриваемого течения оптимальное значение  $k = 0.2$ .

Указанные параметры расчёта соответствуют числу Куранта  $\beta = 0.01$ . Выбор столь малого числа Куранта  $\beta$ , и, соответственно, малого шага по времени, обусловлен жёсткими разрывами, возникающими в задаче в начальные моменты времени. Для ускорения расчёта шаг по времени может быть сделан переменным, в зависимости от  $h_{max}$ , что позволяет существенно увеличить его на больших временах расчёта, когда начальные градиенты решения достаточно сгладились.

Таким образом оптимальными параметрами решения задачи является следующий набор величин:

- Равномерная пространственная сетка с шагами:  $\Delta x = \Delta y = 0.2$ м
- Параметр регуляризации:  $\alpha = 0.3$
- Шаг по времени:  $\Delta t = \beta \frac{\Delta x}{\sqrt{gh_{max}}} = 10^{-3}$  с, что соответствует числу Куранта  $\beta = 0.01$
- Параметры сухого дна:  $\delta\varepsilon = 0.0001$ м,  $k = 0.2$

Величина коэффициента трения составляет  $\mu = 0.001$ . Исключение силы трения  $\mu = 0$  мало меняет результаты численного расчёта, что свидетельствует о слабом влиянии силы трения в данной задаче.

### 2.3.3 Сравнение результатов моделирования с расчетами по уравнениям Навье-Стокса

Детальное исследование колебаний жидкости в баке газоведа приведено в [61], где возникающее при остановке судна пространственное нестационарное течение рассчитано на основе осредненных по времени уравнений Навье-Стокса в форме уравнений Рейнольдса для учета влияния турбулентности (URANS модель). Задача решалась в приближении вязкой несжимаемой жидкости с учетом изменения формы поверхности. Для численного решения задачи применялся метод конечных элементов, адаптированный для его использования на высокопроизводительных параллельных вычислительных системах. Последнее является необходимым для решения этой весьма трудоемкой в вычислительном плане задачи. В виду вычислительной сложности и учитывая потребности практики, расчеты выполнялись до времени порядка 20 сек. В [61] рассчитаны течения при остановке судна для случая произвольного уровня заполнения бака, однако имеется и расчет для заполнения бака в десять процентов его емкости. В последнем случае высота  $h_0$  составляет 1.46 м., что существенно меньше длины бака. Приближенные данные о таком течении в баке могут быть получены на основе уравнений мелкой воды.

Результаты расчетов в рамках уравнений МВ приведены на рис. 2.8(а) где представлены графики изменения от времени давления на переднюю и заднюю стенки бака в течение первых 20 сек. Начальная скорость судна 8 узлов, начальная высота жидкости 1.46 м., значение коэффициента трения составляет  $\mu = 0.001$ . На рис. 2.8(б) представлены соответствующие графики, полученные в работе [61] для двух точек, расположенных на дне передней и задней стенках бака.

Из сопоставления приведенных графиков видно, что несмотря на ограниченность модели приближения мелкой воды, основные особенности в распределении нагрузки на передней и задней стенках бака передаются достаточно хорошо. В частности, в обоих расчетах близки максимальные и минимальные значения давления на этих стенках, в удовлетворительном соответствии находятся и моменты времени, соответствующие набеганию и отходу волны давления на переднюю и заднюю стенки бака. Действительно, для передней стенки

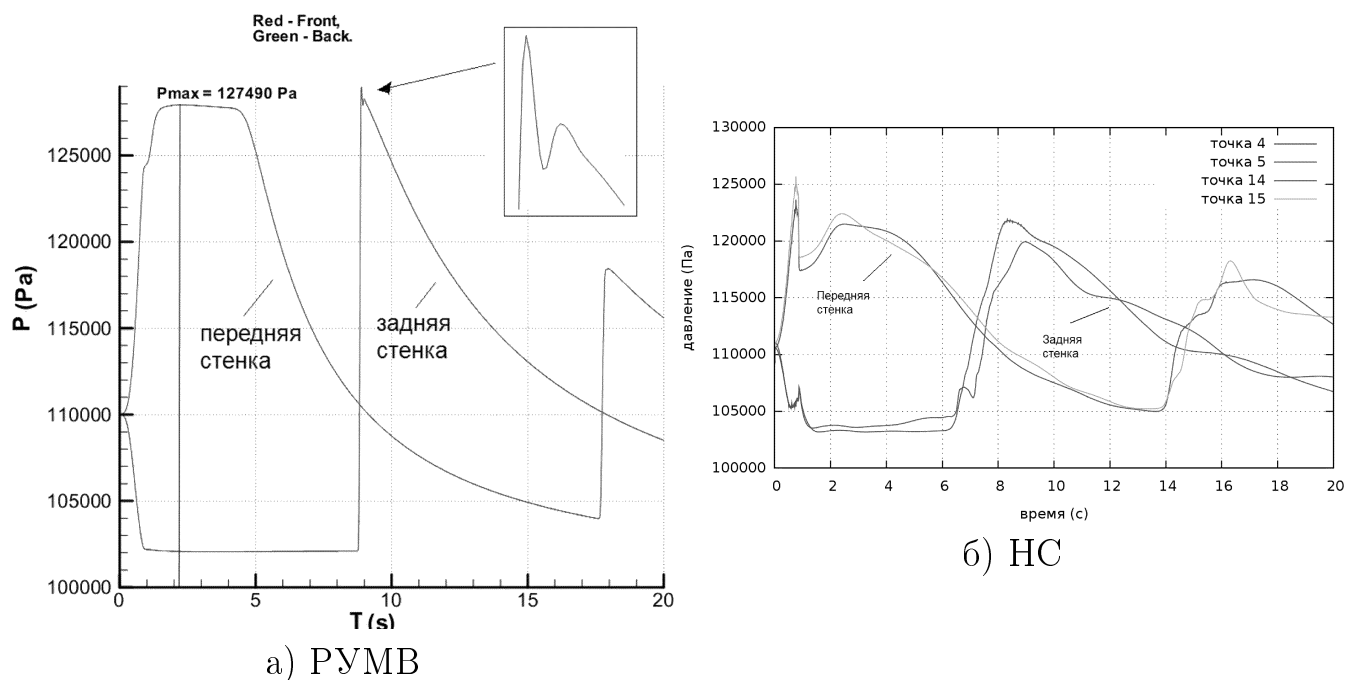


Рисунок 2.8 — Сравнение расчетов по уравнениям МВ и НС. Зависимость давления на переднюю и заднюю стенки резервуара от времени, фрагмент 0 - 20 сек, Скорость 8 узлов, высота уровня  $h_0 = 1.46$  м

бака время прихода первой волны давления для обеих моделей составляет  $\sim 1$  сек, время прихода второй волны давления составляет  $\sim 17.5$  и 16 сек. для моделей МВ и URANS, соответственно. Для задней стенки время отхода волны давления для обеих моделей составляет  $\sim 1$ сек. а время прихода волны давления определяется как  $\sim 9$  и 8 сек для приближений МВ и URANS, соответственно.

Следует отметить, что данный расчет в приближении уравнений мелкой воды длится несколько минут на персональном компьютере, что не сравнимо с вычислительными затратами, необходимыми для расчета задачи в полной постановке [61].

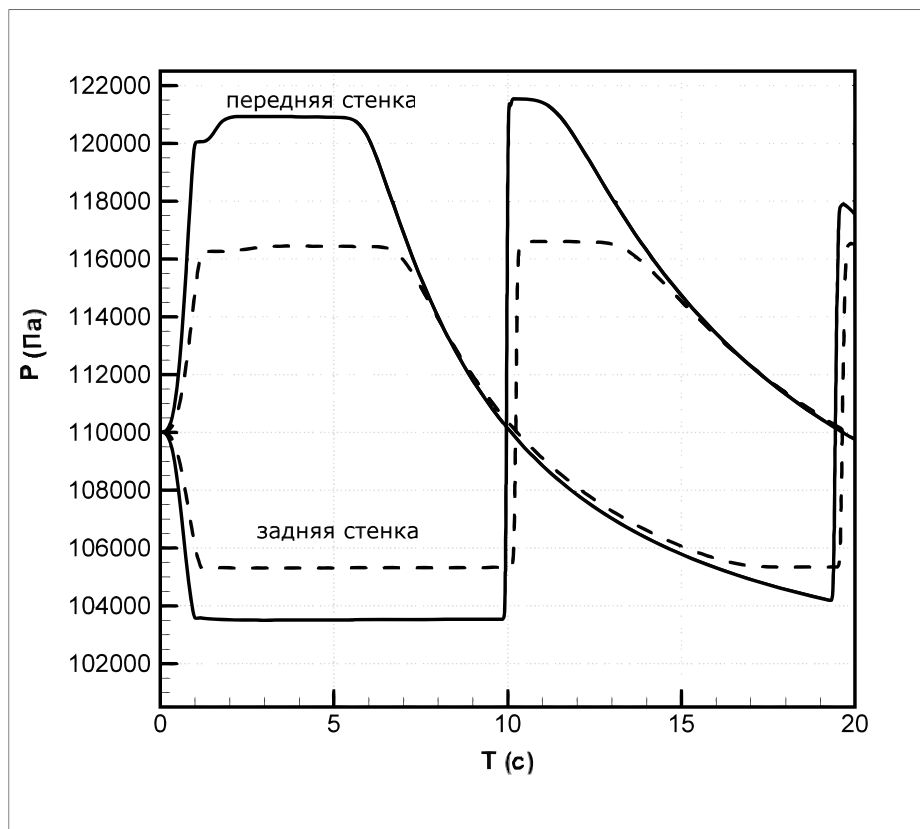


Рисунок 2.9 — Давление на переднюю стенку резервуара, начальная высота уровня  $h_0 = 1.46$  м, скорость 6 узлов (сплошная линия) и скорость 4 узла (пунктир)

Графики распределения нагрузки на стенки бака для скоростей судна в 6 и 4 узла приведены на Рис. 2.9. Видно, что при уменьшении начальной скорости судна как минимальные, так и максимальные нагрузки на стенки бака снижаются, а продолжительность максимальных нагрузок увеличивается. Последнее видно по уширению максимума на графике нагрузки на заднюю стенку бака. При этом с уменьшением начальной скорости время прихода соответствующих волн давления на стенки несколько увеличивается. Проведенные расчеты показывают также, что с увеличением длины бака  $L$  и уменьшением начальной высоты уровня жидкости  $h_0$  время прихода второго пика давления на переднюю и заднюю стенки бака увеличивается. Сглаживающее влияние коэффициента трения  $\mu$  на градиенты давления оказывается незначительным.

В таблице 4 приведены соотношения максимальных нагрузок на переднюю стенку бака, рассчитанных для указанных трех режимов движения судна в рамках уравнений мелкой воды и модели URANS [61].

Из приведенной таблицы видно хорошее количественное совпадение результатов, полученных с использованием приближенной и более точной моде-

Скорость	8 узлов	6 узлов	4 узла
URANS модель	125 кПа	121 кПа	117 кПа
Уравнения мелкой воды	125.8 кПа	121.5 кПа	116.6 кПа

Таблица 1 — Максимальные нагрузки на переднюю стенку бака, расчет по уравнениям МВ при  $\alpha = 0.1$

лей процесса для максимальных нагрузок на стенку бака для всех трех исследованных режимов остановки судна.

Приведенные выше расчеты были выполнены на пространственной сетке с  $h_x = 0.1$  м и шагом по времени  $\Delta t = 0.0026$  сек, который соответствует числу Куратна  $\beta = 0.1$ , и параметре регуляризации  $\tau$  при  $\alpha = 0.1$ . При меньших значениях  $\alpha$  в решении появляются численные осцилляции, которые могут быть устранены путем уменьшения шага по времени. Расчеты на сетках с шагами 2, 0.5 и 0.1 м. оказались практически неразличимы, что говорит о достигнутой сходимости численного решения по сетке.

### 2.3.4 Образование областей сухого дна

Исследование процесса формирования в резервуаре областей с сухим дном является важным аспектом данной задачи с точки зрения оценки механических нагрузок на донную поверхность и стенки бака. Сам термин "сухое дно" означает образование или наличие в резервуаре зон с нулевым уровнем жидкости. При этих условиях на математическую модель накладываются специальные условия. Расчет задач с областями сухого дна сопряжен с дополнительными трудностями и эффектами, обусловленными как физическими, так и вычислительными причинами. Для расчета задач, в которых возможно образование зон с сухим дном, используется описанный в пункте 1.4.3 алгоритм.

Для задач остановки судна при соударении с ледовым препятствием были проведены расчеты для всех трех начальных скоростей, длины бака 33.6 м и различных уровней заполнения бака с целью определения, начиная с какого уровня заполнения в резервуаре могут образовываться области с сухим дном. Минимальная высота, принятая за отсчет сухого дна, составляла  $\epsilon = 0.001$  м. В Таблице 2 приведены максимальные значения уровня жидкости в баке, при

которых образуется сухое дно, для всех трех начальных скоростей. Здесь же приведены максимальные значения числа Фруда, которые получились в описанных расчетах.

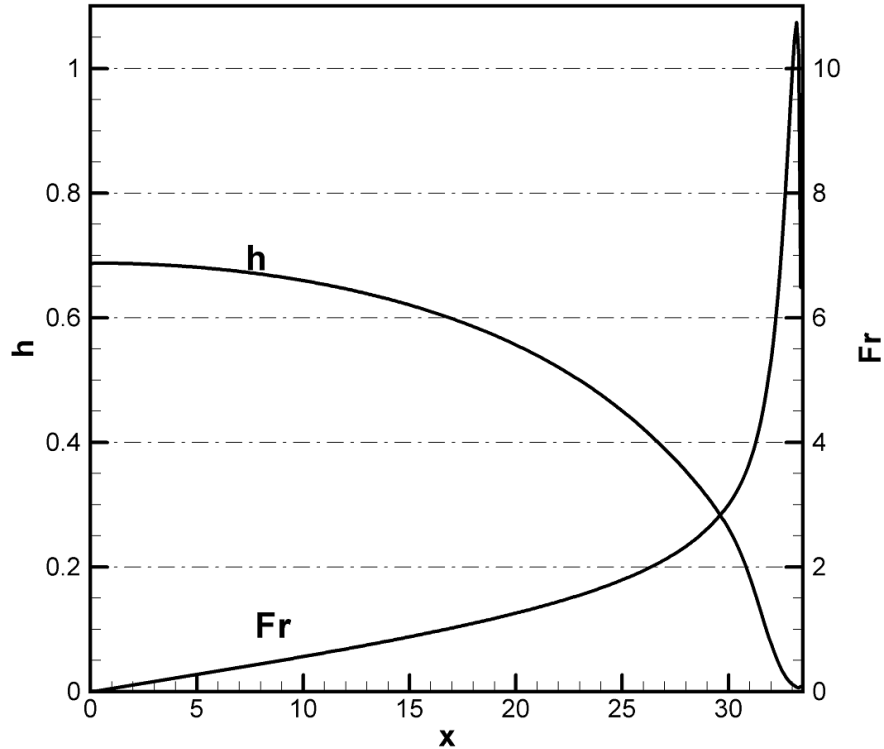


Рисунок 2.10 — Распределение высоты жидкости  $h$  и числа Фруда  $Fr$  при начальной высоте  $h_0 = 0.53$  м и начальной скорости 8 узлов на момент времени  $t = 11$ с.

Рассмотрим процесс формирования зоны сухого дна на примере варианта расчета с начальной скоростью 8 узлов и  $h_0 = 0.53$  м. В начальные моменты времени общий вид решения качественно соответствует Рис. 2.6, за исключением того, что в правой части области к моменту времени  $\sim 5$  сек. уровень  $h$  опускаются до нулевой отметки.

Само по себе формирование областей сухого дна не приводит к вычислительным неустойчивостям, однако образование областей с низким уровнем жидкости  $h > \epsilon$  в некоторые моменты времени сопровождается резким возрастанием локального числа Фруда, что может приводить к неустойчивости численного решения. Причины появления высоких значений  $Fr$  наглядно видны на Рис. 2.10. Действительно, значение  $Fr$  резко возрастает при движении волны, отраженной от левой стенки, направо, когда уровень жидкости вблизи правой стенки достаточно низкий, но превосходит  $\epsilon$ . При этом большие значе-

Скорость	8 узлов	6 узлов	4 узла
Максимальный уровень жидкости	0.53 м	0.31 м	0.15 м
Максимальное число Фруда	10.7	8.21	4.92

Таблица 2 — Максимальные значения уровня жидкости, соответствующие появлению зон сухого дна, и соответствующие максимальные числа Фруда

ния  $Fr$  держатся в пределах не более 5 секунд, и численное решение не теряет устойчивости. При продолжении расчета величины  $Fr$  не превышают 2. Параметры алгоритма для этого варианта составляли  $\alpha = 0.3$  и число Куранта  $\beta = 0.01$ . При дальнейшем уменьшении уровня заполнения резервуара  $h_0$  указанные процессы проявляются более интенсивно. Устойчивость численного алгоритма резко возрастает при увеличении значения  $\epsilon$ .

Для более аккуратного решения задачи с низким начальным уровнем жидкости используемую математическую модель следует дополнить более точным учетом гидравлического трения, включающим в себя реальные значения коэффициента Маннинга.

### 2.3.5 Расчет колебаний топлива при качке на волнах

При исследовании влияния волновой нагрузки на поведение жидкости в баке предполагается, что в начальный момент судно неподвижно и жидкость в баке покоится, затем скорость судна изменяется пропорциональна  $\sin(\omega t)$ . Таким образом, плотность силы инерции представляется в виде

$$f(t) = -V\omega \cos(\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (2.10)$$

где  $T$  – заданный период колебания,  $V$  – характерная скорость. Для практических приложений интерес представляют колебания с периодами  $T_1=60$  сек,  $T_2=120$  сек,  $T_3=600$  сек, и  $V = 8$  узлов.

Расчет трех указанных вариантов проводился для длины бака  $L=33.6$  м., начальной высоты уровня  $h_0=1.46$  м. на пространственной сетке с шагом  $h_x=0.1$  м. для параметров расчета  $\alpha = 0.1$  и  $\beta = 0.1$ .

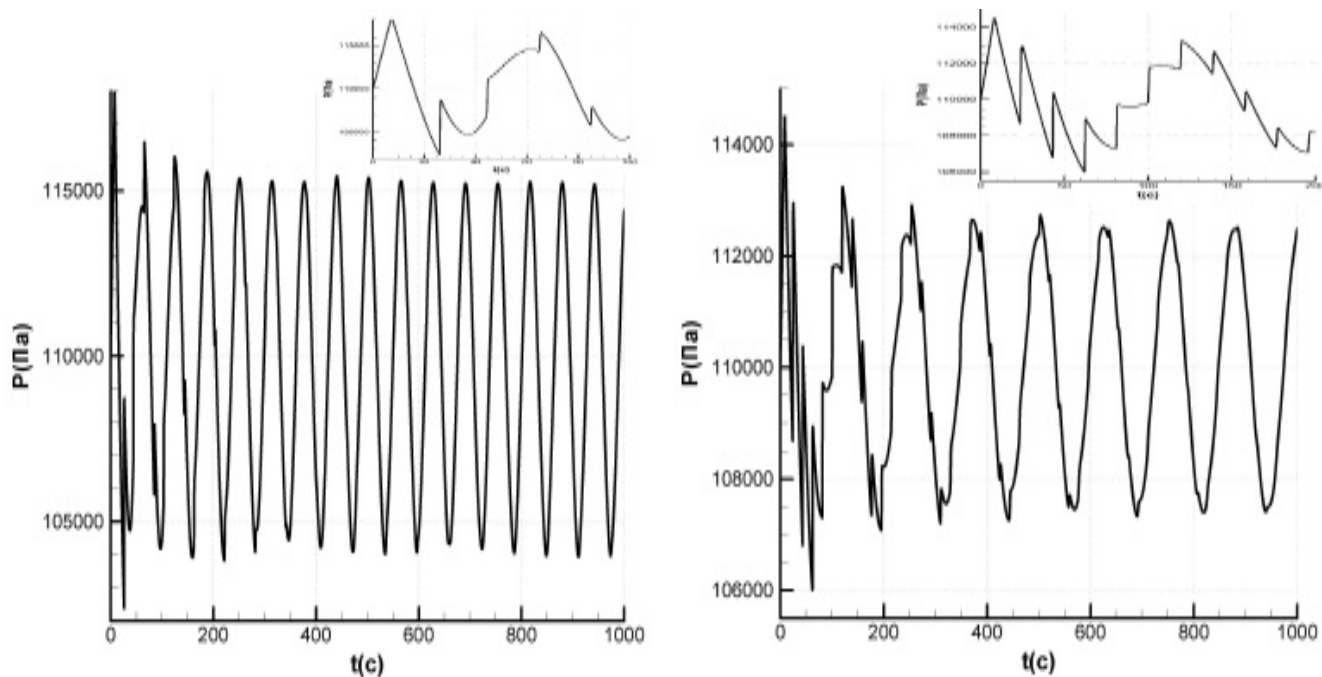
а)  $T = 60$  секб)  $T = 120$  сек

Рисунок 2.11 — Давление на переднюю стенку резервуара при колебании судна на волнах при периодах колебаний (а)  $T = 60$  сек и (б)  $T = 120$  сек.

Вверху — фрагмент графика на начальном этапе по времени.

На Рис. 2.11(а) представлена зависимость от времени давления на переднюю стенку бака для периода колебаний  $T_1=60$  сек. Фрагмент графика показывает эволюцию давления на передней и задней стенках бака в первые 20 сек. Из рисунка видно, что основная нагрузка на стенки приходится на первый момент времени, при этом колебания носят сильно нерегулярный характер, которые с течением времени переходят в колебания с частотой вынуждающей силы.

Соответствующие картины нагрузок на стенки для волновых периодов  $T_2$  и  $T_3$  приведены на Рис.2.11(б) и рис.2.12. На двух последних графиках, которые соответствуют периоду колебаний  $T_3$ , отчетливо прослеживается наложение собственных колебаний в баке на колебания с частотой вынуждающей силы.

В Таблице 3 приведены значения максимальных нагрузок на переднюю стенку бака, рассчитанных для трех вариантов волновых колебаний судна. Полученные в расчетах значения нагрузок представляют интерес для практических приложений.



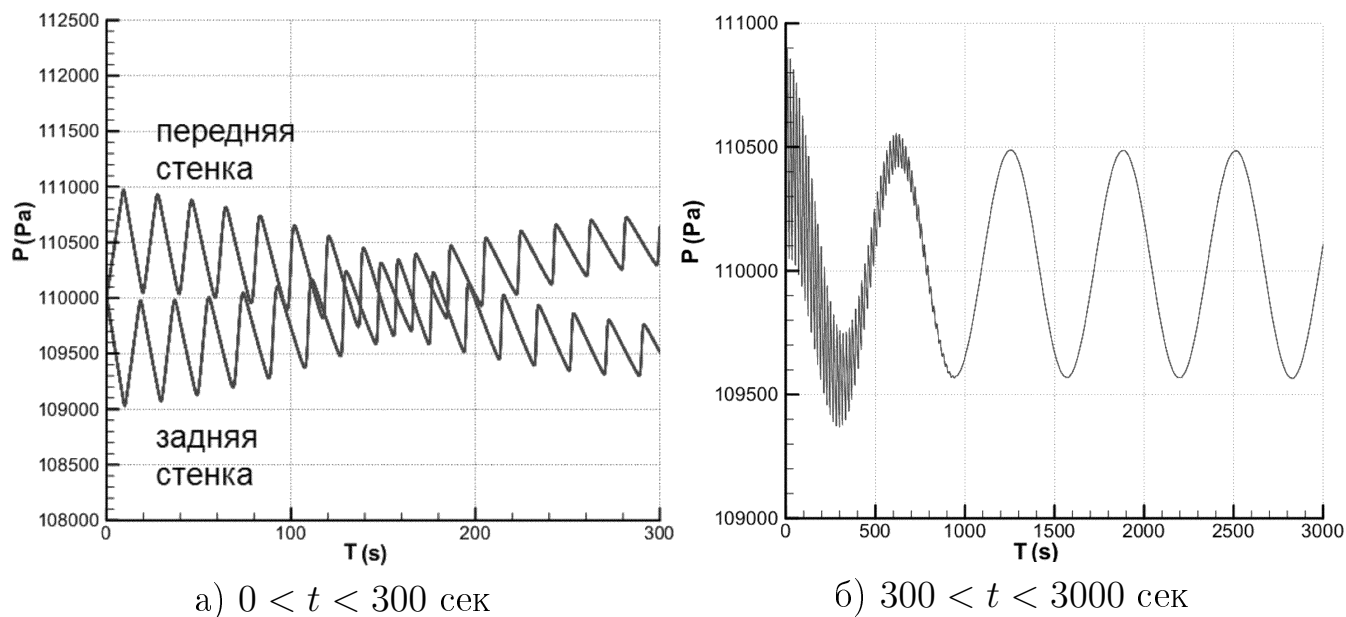


Рисунок 2.12 — Давление на переднюю и заднюю стенки,  $T_3 = 600$  сек для (а)  $0 < t < 300$  сек и (б)  $300 < t < 3000$  сек.

Волновой период	60 сек.	120 сек.	600 сек.
Уравнения мелкой воды	118 кПа	114.5 кПа	111 кПа

Таблица 3 — Максимальные нагрузки на переднюю стенку бака при колебаниях судна на волнах

## 2.4 Моделирование колебаний топлива в рамках двумерной модели

### 2.4.1 Колебания топлива при лобовом столкновении

Предполагаем, что перед столкновением скорость судна направлена вдоль оси  $Ox$ , то есть в плоскости симметрии вдоль продольной оси судна, и скорость судна перед соударением составляет 8 узлов. Общая картина течения и его особенности отражены на рис. 2.13. На указанных рисунках приведены линии тока на последовательные моменты времени, цветом обозначены линии уровня жидкости  $H(x,y) = h(x,y) + b(x,y)$ . Рисунки показывают характерный заброс жидкости вверх по передней стенке бака и постепенное понижение этого максимума с течением времени. Виден также существенно двумерный характер течения вне плоскости симметрии, формирование и эволюция вихревых зон и

линий растекания. Эти вихревые зоны образуются в результате жёсткого торможения судна, а также из-за наличия сложной геометрии стенок бака и не плоского профиля его дна. С течением времени амплитуда колебаний жидкости в баке уменьшается, колебания приобретают гармонический вид, который соответствует распространению гравитационных волн в жидкости [5]. С течением времени колебания полностью затухают.

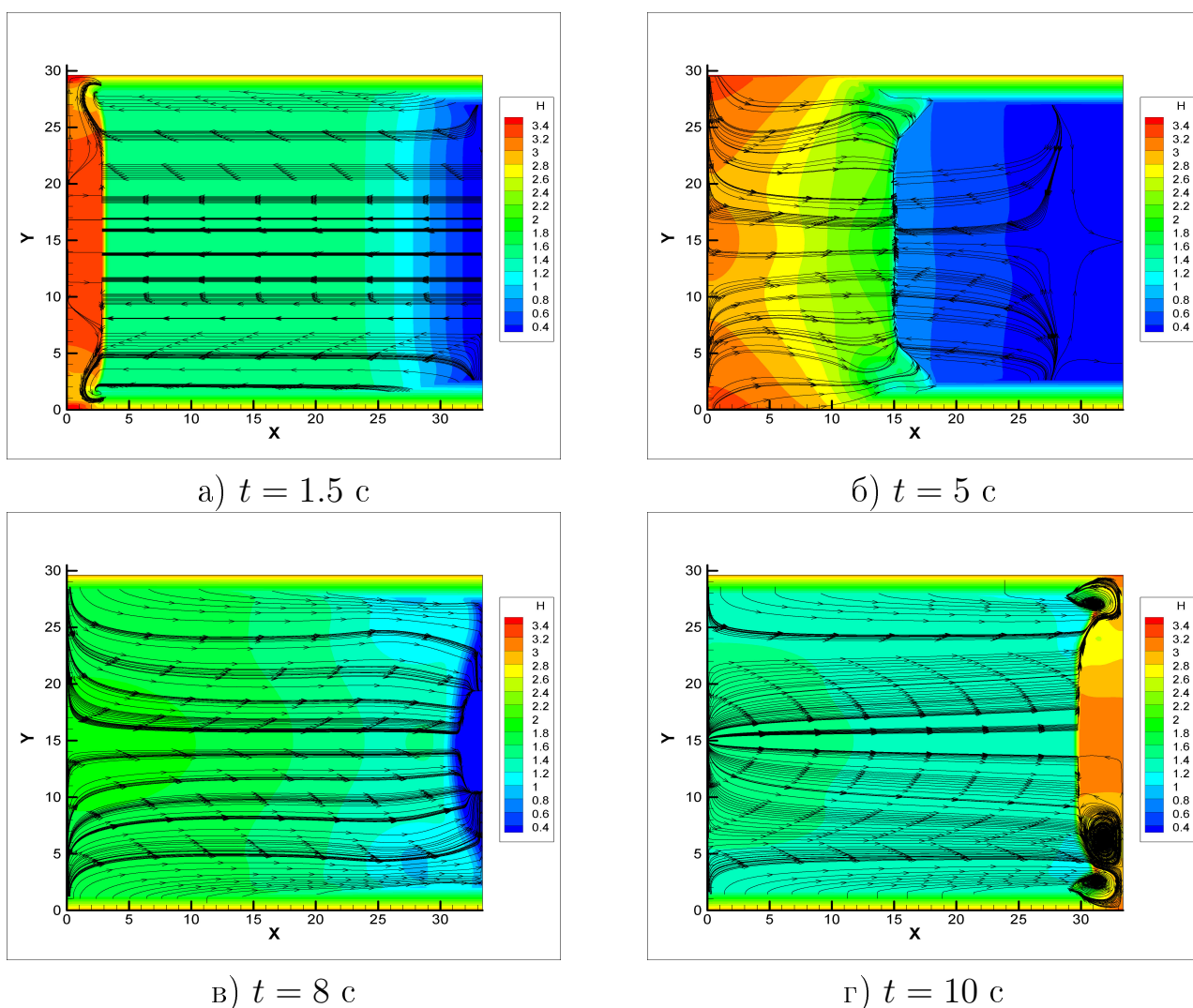
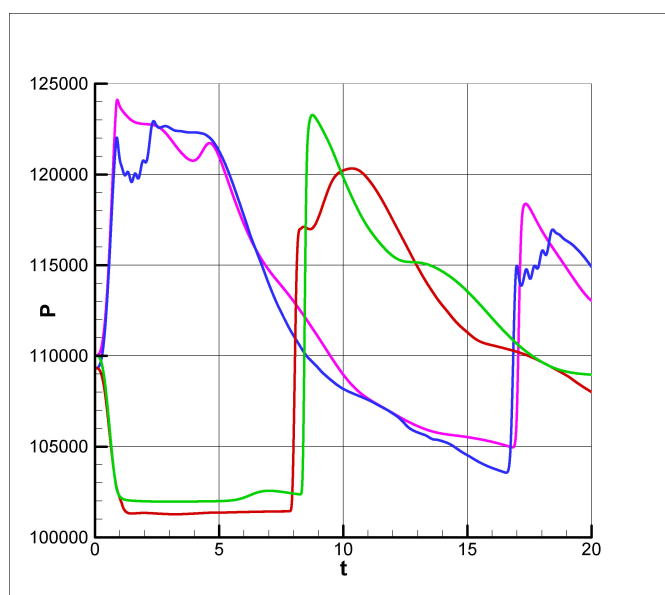


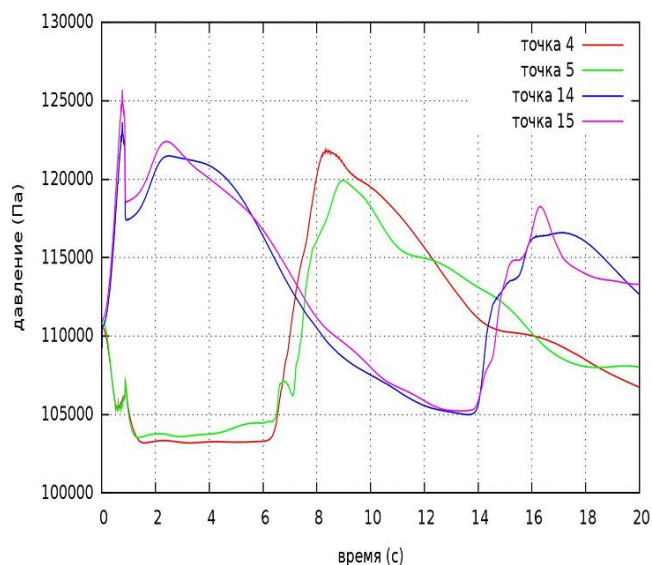
Рисунок 2.13 — Линии тока и изолинии уровня поверхности при столкновении вдоль оси  $OX$  для различных моментов времени  $t$ .

Схожая топология движения свободной поверхности жидкости для этого варианта течения была получена в рамках использования осреднённых уравнений Навье-Стокса, когда дополнительно учитывалась вихревая динамика фракций газа, образующихся над поверхностью жидкости. При этом обнаружено, что в газообразной среде над поверхностью происходит активное формирование вихревых структур, которые образуются не только вблизи поверхности разде-

ла фаз, но и во всем объёме танка, заполненном газом. Графики для величин нагрузок на стенки танка для характерных реперных точек, расположенных в плоскости симметрии, приведены на рис. 2.14(а) для двумерных уравнений мелкой воды, на рис. 2.14(б) для трёхмерных осреднённых уравнений Навье-Стокса [61]. Из графиков видно, что решения, рассчитанные в трёх указанных постановках, в плоскости симметрии (точки 5 и 15) очень близко совпадают между собой не только по значению максимального пика давления, но и по времени его появления, а также по времени появления второго и третьего пиков, и их высоты. Сравнение решения задач в рамках двумерных уравнений мелкой воды и трёхмерных уравнений Навье-Стокса вне плоскости симметрии (точки 4 и 14) также показывает, что полученные течения практически идентичны. Исключение составляет небольшие отличия поведения решения на границе в реперных точках 3 и 7 (рис. 2.3), где расположена граница жидкости с областью сухого дна (здесь не приведены). Замеченные различия согласуются с общей картиной движения топлива, и тем самым не представляют особого практического интереса, так как в этих зонах не наблюдаются существенные нагрузки на стенки.



а) РУМВ



б) НС

Рисунок 2.14 — Сравнение расчетов по уравнениям МВ и НС. Зависимость давления на переднюю и заднюю стенки резервуара от времени, фрагмент 0 – 20 сек, Скорость 8 узлов, высота уровня  $h_0 = 1.46$  м

Далее в таблице 4 приведены максимальные значения давлений на стенку бака, полученные с помощью трёх указанных подходов для трёх значений начальной скорости судна:

Скорость	8 узлов	6 узлов	4 узла
URANS модель	125 кПа	121 кПа	117 кПа
1D РУМВ	125.8 кПа	121.5 кПа	116.6 кПа
2D РУМВ	124.2 кПа	120.0 кПа	116.2 кПа

Таблица 4 — Максимальные нагрузки на переднюю стенку бака, расчет по уравнениям МВ при  $\alpha = 0.1$

Таблица показывает, что все полученные значения пиковых нагрузок на стенки бака оказываются весьма близкими. Таким образом, мы получили подтверждения адекватности решения задачи о колебаниях топлива на основе решения полных уравнений Навье-Стокса и в рамках приближения мелкой воды. Хорошее соответствие данных, полученных в рамках разных математических моделей и различной алгоритмической реализации для трёх значений начальной скорости судна, подтверждает правильность результатов математического моделирования поставленной задачи

#### 2.4.2 Колебания топлива при столкновении под углом к направлению движения судна

Важным практическим случаем столкновений является вариант столкновения с льдиной, происходящее под небольшим углом к продольной оси судна. Такой вид остановки судна является частным случаем двойного столкновения с ледовым препятствием, при котором корабль, ударяясь об одну льдину, затем сталкивается уже под некоторым ненулевым углом с другим препятствием. Здесь мы не будем рассматривать конкретный случай двойного столкновения, а рассмотрим его модельный вариант, для чего направим скорость  $V(t)$  под некоторым углом к оси судна ОХ, что приводит к появлению отличной от нуля компоненты силы инерции  $f_y$ . Далее приведён расчёт для столкновения под углом 20 градусов. Данное течение является существенно двумерным и несимметричным.

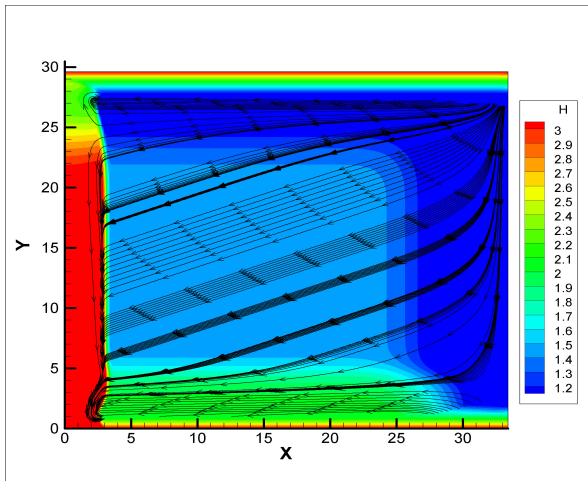
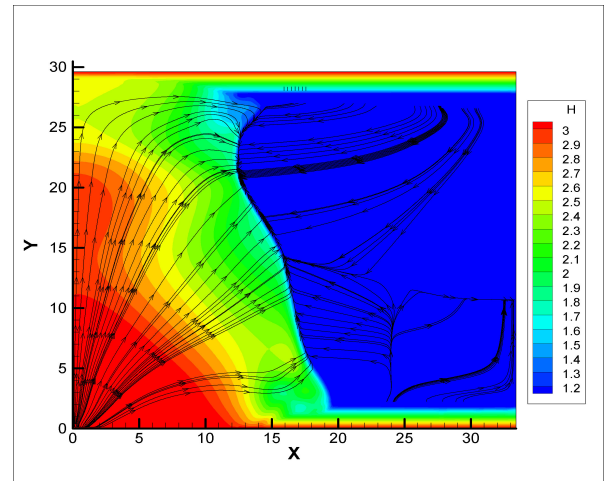
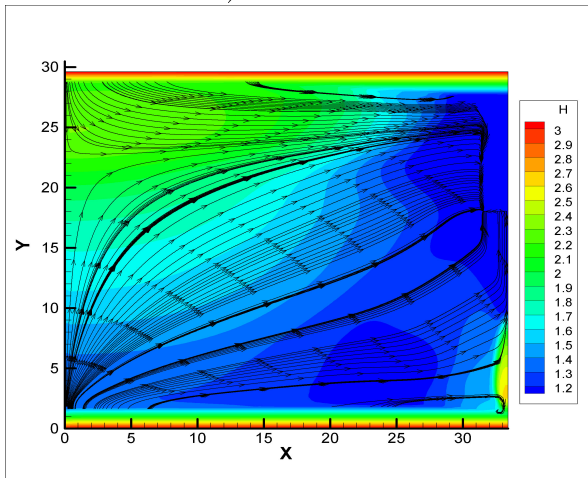
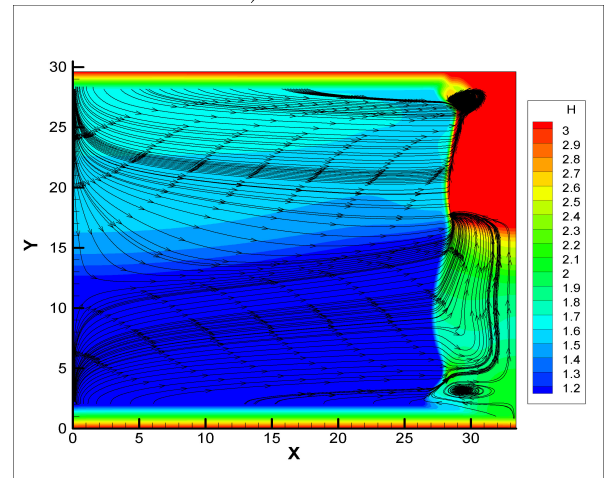
а)  $t = 1.5$  сб)  $t = 5$  св)  $t = 8$  сг)  $t = 10$  с

Рисунок 2.15 — Линии тока и изолинии уровня поверхности при столкновении под углом к оси  $OX$  для различных моментов времени  $t$ .

Линии тока этого течения на те же последовательные моменты времени, как и в варианте с нулевым углом столкновения, приведены на рис. 2.15. Цветом обозначены линии уровня жидкости  $H(x,y) = h(x,y) + b(x,y)$ . Наличие ненулевой компоненты силы инерции  $f_y$  приводит к кардинальной перестройке течения и перераспределению нагрузок на стенки бака по сравнению со случаем симметричного течения. При этом наблюдаются колебания жидкости, которые являются результатом нелинейного взаимодействия колебаний вдоль осей  $OX$  и  $OY$ . В частности, максимальные значения уровня в начальные моменты времени сосредоточены только в левой нижней части плоскости  $XY$ , а наибольшие значения достигаются в точке 4. Интересен и другой факт – так как размеры резервуара по осям  $x$  и  $y$  близки,  $L_x \leq L_y$ , то следующий максимум уровня жидкости возникает на противоположной стенке бака в точке 16.

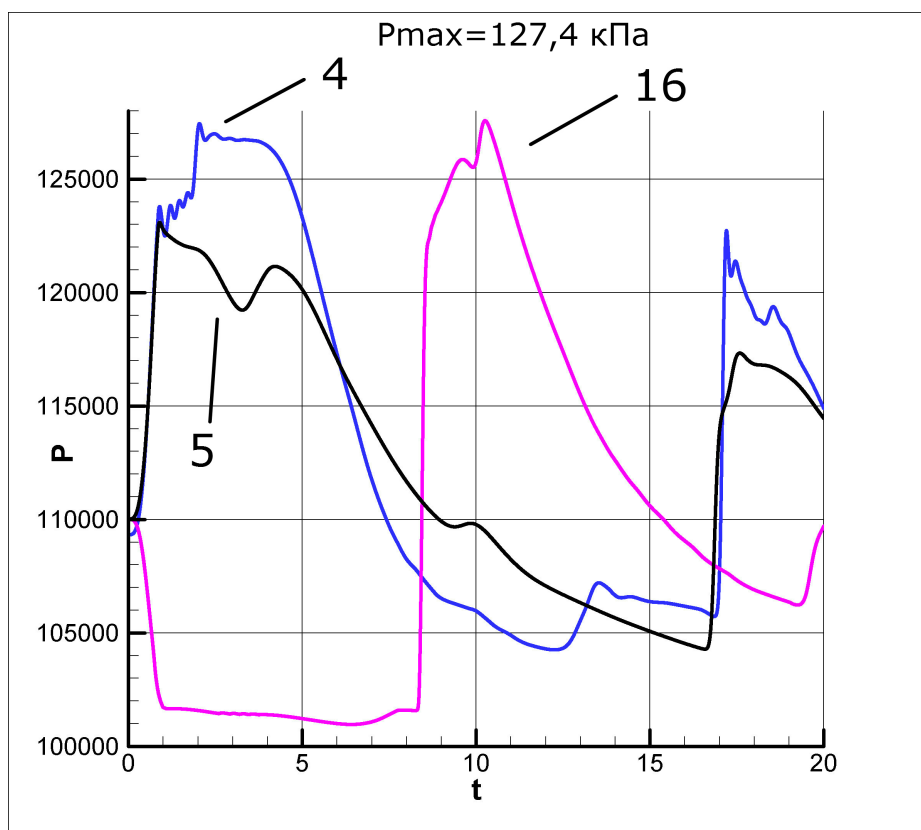


Рисунок 2.16 — Зависимость давления сжиженного газа на стенку при столкновении под углом. Реперные точки 4, 5, 16.

Это наглядным образом видно на рис. 2.15(а) и 2.15(г). Между этими двумя пиками уровня жидкости движение представляет собой два поперечных колебания, которые сосуществуют практически независимо друг от друга (рис. 2.15(б) и 2.15(в)). Графики нагрузок на стенки бака в этих точках, а также для

сравнения в точке 5 приведены на рис. 2.16. Отметим, что по сравнению с вариантом симметричного течения, здесь образуется более высокое максимальное давление на стенку – 127.5 кПа.

## 2.5 Заключение

В данной главе в рамках РУМВ были представлены одномерные и двумерные математические модели для описания нестационарных движений жидкостей в баках грузовых судов, движущихся с существенными изменениями скорости. Приближение мелкой воды ограничивает рассмотрение баков с относительно невысоким уровнем заполнения.

Численный алгоритм основан на конечно-разностном решении регуляризованных уравнений мелкой воды. Алгоритм допускает обобщение на случай пространственных течений мелкой воды в резервуарах с произвольной формой дна.

Модель мелкой воды упрощенно описывает сложные процессы движения жидкости в баке, однако полученные данные по пространственным и временным нагрузкам на стенки бака достаточно хорошо совпадают с результатами, полученными ранее для этой задачи в 3D-расчетах на основе численного решения уравнений Рейнольдса с учетом свободной границы жидкости. Очевидно, решение задачи в полной постановке представляет собой сложную и вычислительно трудоемкую проблему.

Предложенный авторами подход позволил кардинально снизить вычислительные затраты и быстро проводить расчеты на больших временах при разнообразных скоростных режимах, например, при движении судна на волнах или при столкновении под углом к направлению движения судна. Расчеты позволили получить значения начальных уровней жидкости, при которых возможно образование зон сухого дна. Было установлено, что расчет при малых уровнях жидкости представляет собой дополнительную сложность из-за образующихся при этом больших значениях числа Фруда.

Достаточно точный расчет основных характеристик процесса в сочетании с простотой численного алгоритма в рамках модели мелкой воды делает пер-

спективным использование построенной авторами методики для быстрой оценки максимальных нагрузок на стенки баков кораблей в различных условиях их плавания. Именно эти данные наиболее важны для практических приложений при определении безопасных предельных скоростей движения судна.



## Глава 3. Численное моделирование волн Фарадея

### 3.1 Введение

Волнами Фарадея называют стоячие волны, возбуждаемые в сосуде с жидкостью, который совершает периодические колебания в направлении силы тяжести. Параметрический резонанс – процесс в колебательной системе, при котором внешнее воздействие приводит непосредственно к относительно малым периодическим изменениям во времени параметров системы, что, в свою очередь, вызывает в системе стационарные колебания достаточно большой амплитуды. В случае модуляции волн Фарадея образуются стоячие волны. Частота этих волн кратна половине частоты колебаний сосуда с жидкостью. Впервые данное явление было обнаружено в экспериментах Фарадея в 1831 г. и с тех пор интенсивно изучается. Экспериментально установлено, что даже при малых амплитудах движения сосуда высота возбуждаемых волн достигает больших значений в нескольких узких диапазонах частот внешнего воздействия. Подобные колебания наблюдаются как в природных процессах, так и в технических устройствах и при транспортировке жидкостей.

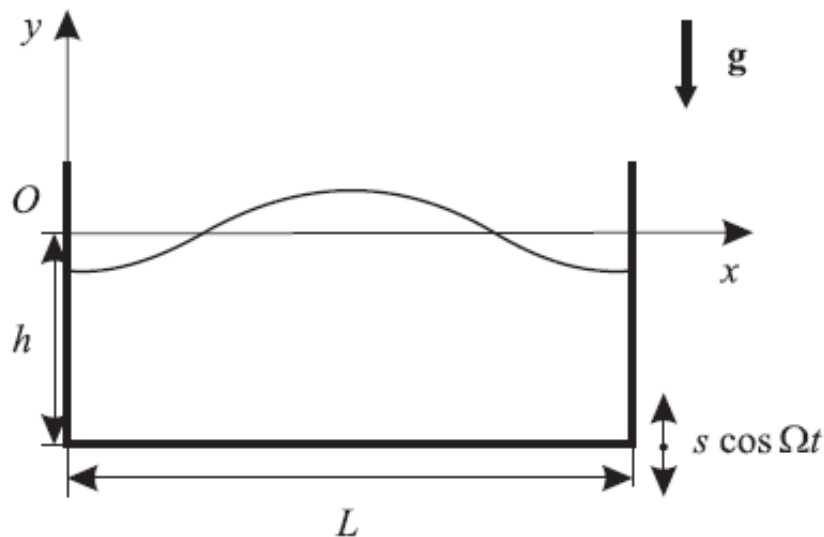


Рисунок 3.1 — Иллюстрация к постановке задачи о формировании волн Фарадея

Теория этого явления была независимо разработана [70; 71]. Было показано, что малые колебания идеальной жидкости в случае гармонического движения сосуда описываются уравнением Матье:

$$\frac{d^2 H_n(t)}{dt^2} + (\omega_n^2 - \Omega^2 \kappa \cos(\Omega t)) H_n(t) = 0 \quad (3.1)$$

где  $\omega_n$  — одна из собственных частот колебаний свободной поверхности жидкости;  $H_n$  — высота соответствующей волновой моды номера  $n$ , измеренная относительно подвижного сосуда;  $k = \frac{\pi n}{\lambda}$  — волновое число;  $\Omega$  и  $s$  — частота и амплитуда колебаний сосуда. Решение данного уравнения может быть или устойчивым, или неустойчивым. Начальное возмущение свободной поверхности остается ограниченным по величине или экспоненциально возрастает до бесконечности, если будет выполняться условие

$$\omega_n \sim \frac{m\Omega}{2} \quad (3.2)$$

В данной работе рассматривается случай только основного параметрического резонанса, когда  $\omega = \frac{\Omega}{2}$ .

Величину  $R = \frac{s\Omega^2}{g}$  называют перегрузкой. Она не должна превышать единицу  $|R| < 1$ . В зависимости от величины перегрузки, можно наблюдать разные типы волн Фарадея. В экспериментах [72–74] наблюдаются три категории поверхностных волн:

- Регулярные волны: волны, сохраняющие периодичность во времени и пространственную симметрию
- Нерегулярные волны: волны, сохраняющие связность объема и имеющие нарушение временной и пространственной симметрии
- Разрушающиеся волны: волны, имеющие срыв капель и струй со свободной поверхности.

Известно, что мода номер  $n$  гармонической волн имеет параметры: длину волны и волновое число, вычисляемые по формулам:

$$\lambda_n = 2L/n, \kappa = \frac{\pi n}{L} \quad (3.3)$$

- частота колебаний по формуле частоты колебаний для гравитационных волн:

$$\omega = \sqrt{kgth(\kappa h)} \quad (3.4)$$

– частота колебаний по общей формуле будет равна

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{\pi n c}{L}, c = \sqrt{gh} \quad (3.5)$$

Таким образом, для получения  $n$ -й моды нужно задать частоту  $\Omega = 2\omega$ . Кроме того, необходимо правильно подобрать амплитуду колебаний. Она не должна быть слишком маленькой, в тоже время величина  $s\Omega^2$  не должна превышать  $g$ .

В качестве примеров исследований волн Фарадея укажем, в частности, [70], [71]. В настоящее время изучение колебательных движений типа волн Фарадея проводятся на основе экспериментов и теоретических моделей [72; 75–77]. Теоретические подходы основаны на анализе решений упрощенных модельных уравнений, либо на численном решении нестационарных уравнений Навье-Стокса, дополненных уравнением для описания свободной поверхности жидкости, см., например, [76; 77]. Отметим также работы [78; 79] по параметрическому резонансу в рамках двухслойной и непрерывно стратифицированной вязкой жидкости, где аналитическое решение находится путем введения малого параметра  $\varepsilon$  и раскладывания решения на сумму регулярной части и пограничного слоя. Существующие подходы представляют существенные трудности. Модельные нелинейные уравнения ограничены в постановках и не позволяют учитывать многомерность задачи, форму сосуда и другие особенности течения. Решение полных уравнений гидродинамики достаточно трудоемко и примеры численного моделирования указанных задач весьма ограничены.

В данной работе автор впервые проводит численное моделирование возбуждения колебаний жидкости, возникающих под действием периодического внешнего воздействия в вертикальном направлении, с помощью уравнений гидродинамики в приближении мелкой воды (МВ) [48; 80]. Модель МВ описывает течения вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в сосудах произвольной формы. Приближение уравнений МВ существенно проще полной системы уравнений Навье-Стокса, но имеет свои ограничения – в модели МВ предполагается, что вертикальная компонента скорости течения несущественна, и по ней выполнено осреднение.

### 3.2 Постановка задачи

Данная задача была поставлена совместно с институтом Проблем Механики РАН. Исследовалась специально созданная экспериментальная установка (рис. 3.2), позволяющая сообщать сосуду с жидкостью гармонические колебания в вертикальном направлении с заданной частотой и амплитудой [72—74]. Прямоугольный сосуд имеет параметры 50x4x40 см. Рассматривались амплитуды колебаний сосуда в пределах  $s = 7.5 - 0.25$  см при частоте  $\Omega$  колебаний до 100 Гц.



Рисунок 3.2 — Внешний вид экспериментальной установки в ИПМЕХе

Рассмотрим сосуд с жидкостью, совершающий вертикальные колебания (рис. 3.1). Закон смещения сосуда по времени имеет вид  $s(t) = s \cos(\Omega t)$ , где  $s$  – амплитуда колебаний сосуда. В неинерциальной системе координат, жестко связанной с сосудом, вертикальное ускорение  $g$ , действующее на жидкость, примет вид

$$g(t) = g_0 \left( 1 + \frac{s\Omega^2}{g} \cos(\Omega t) \right), \quad (3.6)$$

где  $g_0 = 980$  см/сек<sup>2</sup> – ускорение силы тяжести. Гармонические колебания сосуда с частотой  $\Omega$  могут вызвать незатухающие колебания жидкости с частотой  $\omega_n$ , если выполняется соотношение

$$\omega_n = \frac{m\Omega}{2}, \quad (3.7)$$

где  $n$  – номер моды гармонической волны,  $m$  – целое число. Область частот, в которой возбуждаются колебания при частотах  $\omega_n \sim \Omega/2$ , соответствует основному частотному диапазону возмущения.

Таким образом, первая мода с частотой  $\omega_1$  соответствует частоте колебаний сосуда  $\Omega = 2\omega_1$ . Вторая мода соответствует частоте  $\Omega = \omega_2$ .

В рамках приближения МВ генерация волн Фарадея описывалась с помощью следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + \frac{1}{2}g(t)\frac{\partial h^2}{\partial x} &= -\mu u|u|. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь  $g = g(t)$  – переменное значение ускорения силы тяжести (3.6),  $\mu$  – безразмерный коэффициент гидравлического трения. Коэффициент гидравлического трения  $\mu$  выбран равным 0.005. Изменение  $\mu$  в 10 раз не влияло на результаты расчетов.

На границах расчетной области ставятся условия непротекания для скорости и отражения для высоты слоя жидкости:

$$\mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0.$$

Изучались колебания уровня жидкости для заполнения сосуда  $h = 7.5–15$  см. При этом собственные частоты колебаний для  $h = 15$  см

– по ф-ле 3.4:  $\omega_1 = 6.737, \omega_2 = 10.85, \omega_3 = 13.551$

– по ф-ле 3.5:  $c = 1.213, \omega_1 = 7.603, \omega_2 = 15.243, \omega_3 = 22.808$

Соответствующие частоты возбуждения:

– по ф-ле 3.4:  $\Omega_1 = 13.474, \Omega_2 = 21.7, \Omega_3 = 27.102$

– по ф-ле 3.5:  $\Omega_1 = 15.206, \Omega_2 = 30.486, \Omega_3 = 45.616$

Отметим, что для покоящейся стационарном уровне жидкости  $h_0 = const$  колебания не образуются для всех частот и амплитуд модуляции. В связи с тем, что поймать резонанс - задача очень трудоемкая, начальное возмущение задавалась в виде первой моды стоячих волн:

$$h(x,0) = h_0 + \frac{h_{00}}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (3.9)$$

где  $h_{00} = 0.025$  м, для первой волновой моды  $n=1$ .

### 3.3 Результаты численного моделирования

Данные для расчетов выбирались в соответствии с параметрами экспериментов, описанных в [72–74]. Были произведены расчеты для трех начальных значений  $h_0$  уровня заполнения жидкостью прямоугольного сосуда длины  $L=50$  см:  $h_0 = 15, 30$  и  $50$  см в диапазоне частот возмущения  $\Omega$  от 10 до 60 рад/с с шагом  $\Delta\Omega = 0.5$  рад/с для различных значений перегрузки  $R < 1$  и с различными величинами амплитуды колебаний сосуда  $s$ . Значения  $s$  варьировались в пределах от 0.01 до 5 см с шагом 0.1 см.

В результате численных экспериментов для начального уровня заполнения  $h_0 = 15$  см была обнаружена первая мода волн Фарадея в диапазоне частот возмущений от  $\Omega = 14.5$  рад/с до  $\Omega = 17.5$  рад/с и в вторая мода в диапазоне частот возмущений от  $\Omega = 29$  рад/с до  $\Omega = 33.5$  рад/с. Для колебаний характерен резкий срыв на интервале  $\Delta\Omega = 0.5$  рад/с. Эти данные совместно с результатами расчетов для уровней заполнения  $h_0 = 30$  см и  $h_0 = 50$  см. приведены в таблице 5. Резонансные частоты соответствуют оценкам в приближении МВ (3.5).

Эксперимент $h_0$ , см; мода	$\Omega_{min}$ , рад/с	$\Omega_{max}$ , рад/с	$\Omega$ (по ф-ле 3.5), рад/с	$s$ , см.	$R_{max}$
$h_0 = 15$ , 1-я	15.1	15.7	15.21	0.40	0.100
$h_0 = 15$ , 2-я	30.3	31.2	30.49	0.12	0.119
$h_0 = 30$ , 1-я	21.3	22.1	21.56	0.20	0.099
$h_0 = 30$ , 2-я	42.9	44.2	43.10	0.06	0.113
$h_0 = 50$ , 1-я	27.5	28.6	27.83	0.12	0.100
$h_0 = 50$ , 2-я	55.3	57.1	55.66	0.035	0.116

Таблица 5 — Коридор резонансных частот, полученных в численных экспериментах при  $R_{max} \leq 0.12$ , и теоретическое значение резонансной частоты в приближении МВ (3.5).

На рис. 3.3 приведены полученные в численных экспериментах значения амплитуды колебаний  $H_{max}$ , возникающих под действием колебаний сосуда с частотой  $\Omega$ . Данные приведены для начального уровня жидкости  $h_0 = 15$  см,  $h_0 = 30$  см и  $h_0 = 50$  см при различных амплитудах возмущения  $s$ , указанных в таблице 5. Девять графиков построены следующим образом: 6 графиков (1, 2, 3, 5, 7, 9) построены для амплитуд возмущений, при которых значение перегрузки  $R_{max} = R(\Omega_{max}) < 0.11$ . Эти графики соответствуют первой моде колебаний.

Графики 4, 6 и 8 соответствуют вторым модам, построенных для тех  $s$ , при которых для первой моды  $R_{max} < 0.12$ . Таким образом, для каждого значения начального уровня жидкости  $h_0$  приведено три графика: первая и вторая моды, при которой  $R_{max} < 0.12$  и вторая мода, при которой  $R_{max}$  для первой моды  $< 0.12$ . Например, для  $h_0 = 15$  см, это графики 1, 5 и 4 при амплитудах возмущения  $s$ , равных 0.4, 0.12 и 0.4 см. соответственно.

Графики наглядно показывают, что в ограниченных частотных диапазонах образуются стационарные колебательные движения жидкости. Вне этих диапазонов заданное начальное возмущение поверхности жидкости быстро затухает. При этом амплитуды колебаний для первой и второй мод (см. например, кривые 1 и 4, 2 и 6 и 3 и 8), существенным образом зависит от величины перегрузки (см. кривые 4 и 5). Амплитуды колебаний зависят также от начального уровня жидкости в резервуаре.

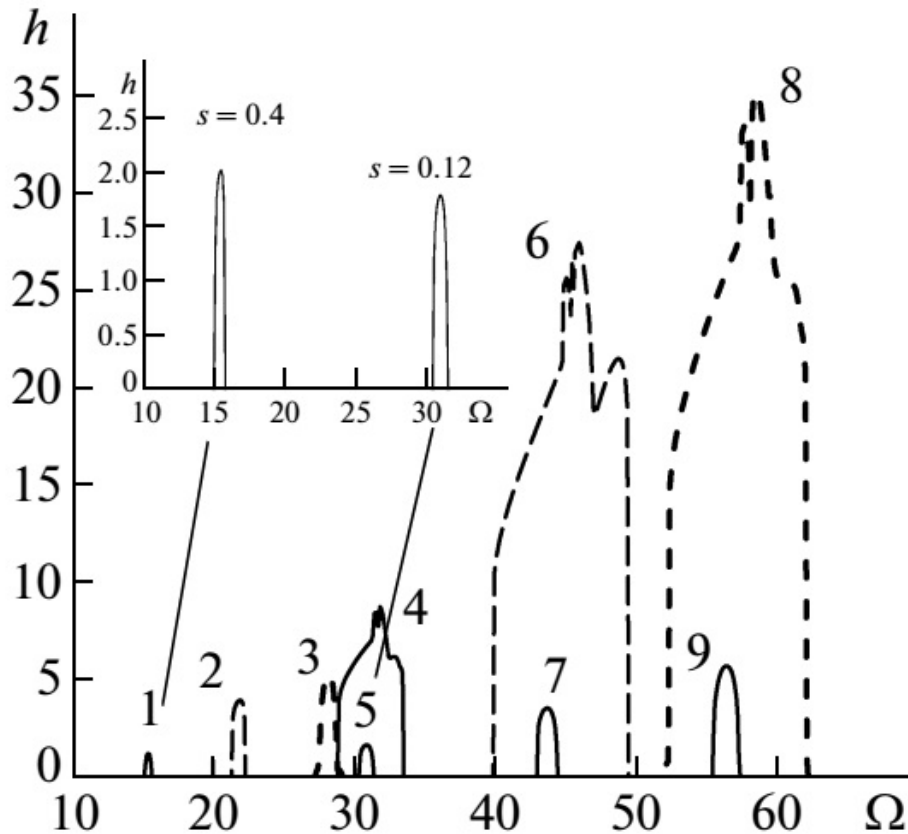


Рисунок 3.3 — Полученные в численном эксперименте частотные диапазоны возмущений и соответствующие амплитуды стационарных волн: линии 1, 4 соответствуют первой и второй модам при  $h_0 = 15$  см,  $s = 0.4$  см; линии 2, 6 — первой и второй модам при  $h_0 = 30$  см,  $s = 0.2$  см; линии 3, 8 — первой и второй модам при  $h_0 = 50$  см,  $s = 0.1$  см; линия 5 —  $h_0 = 15$  см,  $s = 0.12$  см; линия 7 —  $h_0 = 30$  см,  $s = 0.06$  см; линия 9 —  $h_0 = 50$  см,  $s = 0.035$  см.

Соответствующие диаграммы устойчивости приведены на рис. 3.4. Для каждой амплитуды возмущения  $s$  колебания образуются внутри определенного диапазона частот, выделенного на рисунке. Таким образом, в системе образуются незатухающие волны Фарадея только при условии, что частота возмущения находится внутри границ для своей моды. Из графиков следует, что для каждой моды существует пороговое значение амплитуды возмущений  $s^*$ , и соответствующее значение перегрузки  $R$ , ниже которой данная мода не может образоваться на всем диапазоне частот. Так, для первой моды при  $h_0 = 15$  см пороговое значение составляет  $s^* = 0.23$  см, для 2й моды -  $s^* = 0.08$  см.

Зависимость амплитуды колебаний жидкости от времени для регулярных волн первой моды ( $\Omega = 15.6$  рад/с,  $s = 0.4$  см,  $R = 0.1$ ,  $h_0 = 15$  см) показана на рис. 3.5. Параметры колебательного течения соответствуют линии 1 на рис.



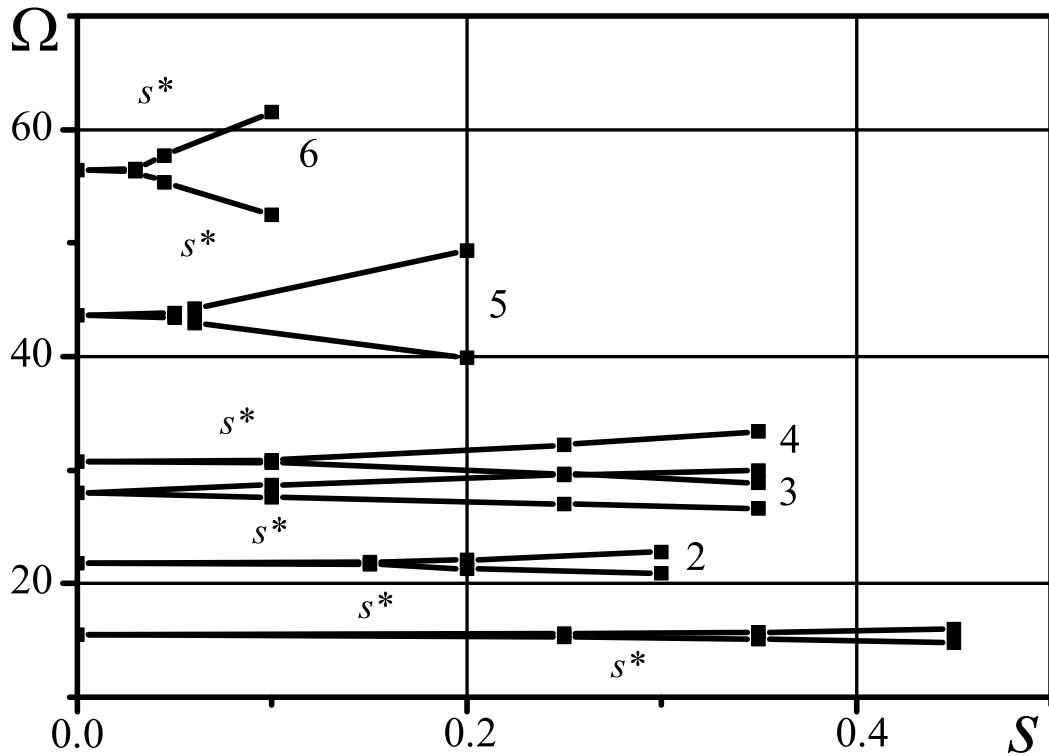


Рисунок 3.4 — Полученные в численном эксперименте диаграммы устойчивости: 1 –  $h = 15$  см (1-я мода),  $s^* = 0.23$  см; 2 –  $h = 30$  см (1-я мода),  $s^* = 0.12$  см; 3 –  $h = 50$  см (1-я мода),  $s^* = 0.09$  см; 4 –  $h = 15$  см (1-я мода),  $s^* = 0.08$  см; 5 –  $h = 30$  см (2-я мода),  $s^* = 0.04$  см; 6 –  $h = 50$  см (2-я мода),  $s^* = 0.03$  см ( $h$  – начальный уровень жидкости,  $s^*$  – минимальная амплитуда, при которой реализуются стационарные волны. Черные квадраты соответствуют расчетным точкам)

**3.3.** С помощью этого графика была подсчитана частота колебаний для волн Фарадея, наблюдаемая в численных экспериментах. На всем временном диапазоне она составила  $\omega_1 = 7.5 - 7.8$  рад/с. Таким образом, в наших расчетах было получено соотношение  $\Omega \approx 2\omega_1$ .

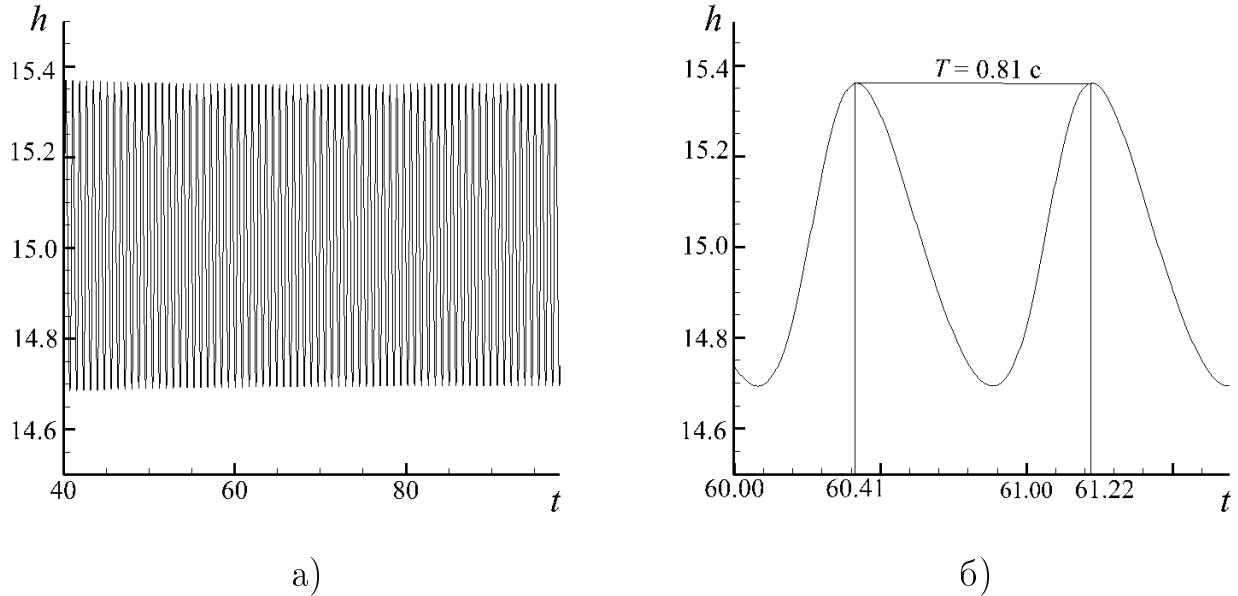


Рисунок 3.5 — Временная зависимость амплитуды колебаний поверхности жидкости с возмущающей частотой  $\Omega = 15.6$  рад/с,  $s = 0.4$  см и  $R = 0.1$  для  $h_0 = 15$  см. (а) Общий вид и (б) Фрагмент при  $60 < t < 62$  сек.

Форма колебаний первой моды меняется в зависимости от величины перегрузки  $R$ . При малых значениях  $R$  колебания максимально близки к стоячим волнам (регулярные волны, рис. 3.5 и 3.6(а), при больших  $R$  они имеют вид бегущих волн в замкнутом сосуде (нерегулярные волны, рис. 3.6(б). В обоих случаях наблюдается один узел и две пучности, что соответствует первой моде колебаний.

Внешний вид колебаний для второй моды волн Фарадея представлен на рис. 3.7. При малых  $R$  их форма близка к регулярным стоячим волнам, рис. 3.7(а). При больших значениях перегрузках  $R \leq 1$  появляются разрушающиеся волны, рис. 3.7(б). Как и в натурном эксперименте, они имеют вид бегущих с двух сторон навстречу друг другу волн, после столкновения которых образуются срывы струй и капель со свободной поверхности. На рис. 3.7(б) экстремумы величины  $h$ , в силу используемого описания связной свободной поверхности, выглядят как пики, однако их ширина составляет порядка 10 шагов сетки, что говорит о том, что механизм образования этих экстремумов не связан с численной неустойчивостью.

Таким образом, основные черты получающихся волновых движений согласуются с теоретическими и экспериментальными данными, описывающими волны Фарадея. А именно, в численном эксперименте получено, что образуются

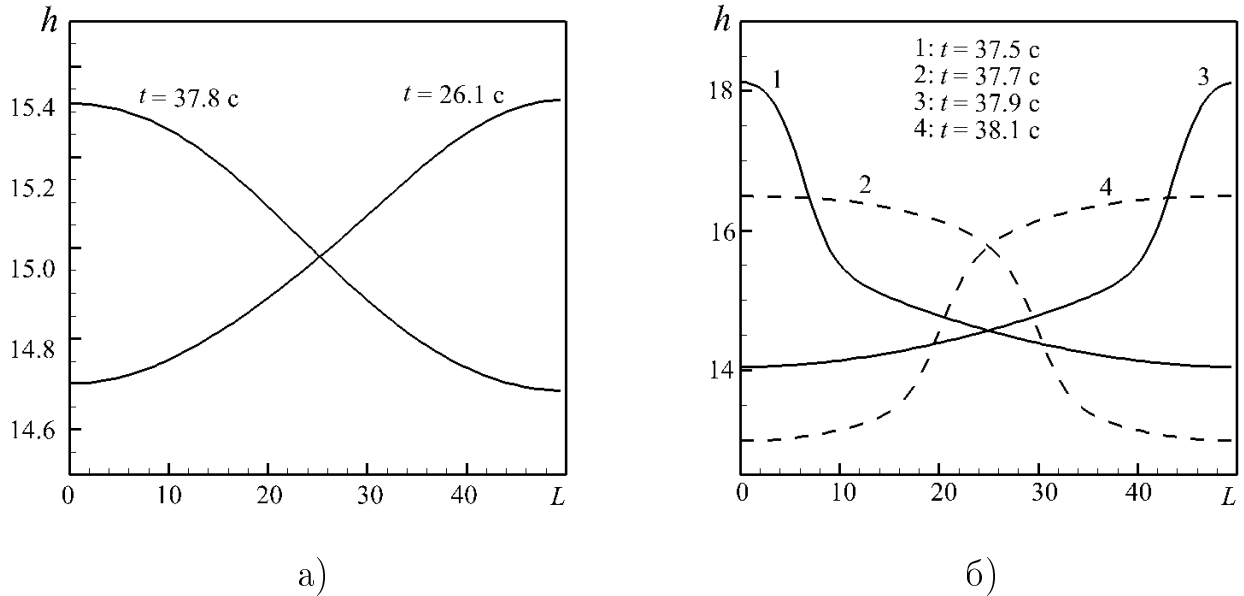


Рисунок 3.6 — Поверхности жидкости для первой моды волн Фарадея при  $h_0 = 15$  см для (а)  $\Omega = 15.635$  рад/с,  $s = 0.4$  см,  $R = 0.1$  и (б)  $\Omega = 15.70$  рад/с,  $s = 1.6$  см,  $R = 0.4$

незатухающие колебания в частотных диапазонах, соответствующих приближению МВ (3.5). Обнаружено возникновение первой и второй мод волн Фарадея в фиксированных частотных диапазонах, при этом частота колебаний в два раза меньше частоты возмущения. На границе частотных диапазонов колебания имеют резкий срыв  $\leq 0.5$  рад/с. Имеется пороговое значение амплитуды колебаний сосуда  $s^*$ , ниже которого стационарные колебания в жидкости не образуются. В зависимости от величины перегрузки  $R$  наблюдаются регулярные, нерегулярные и разрушающиеся волны.

Однако частоты возбуждения колебаний в расчетах оказываются выше, чем в эксперименте. В частности, в [72] диапазон частот возмущений  $\Omega$ , при которых образуются колебания 2й моды для  $h_0 = 15$  см при перегрузках  $R \lesssim 0.3$  составляет от 20 до 24 рад/с, в то время как согласно нашим результатам, частота возбуждения лежит в диапазоне от 29 до 33 рад/с. (Рис.3.3, линия 4). По мнению авторов это объясняется простотой выбранной модели, в которой не учитываются пространственные эффекты. Кроме того в используемой модели не исследовано влияние сил трения о стенки и дно сосуда.

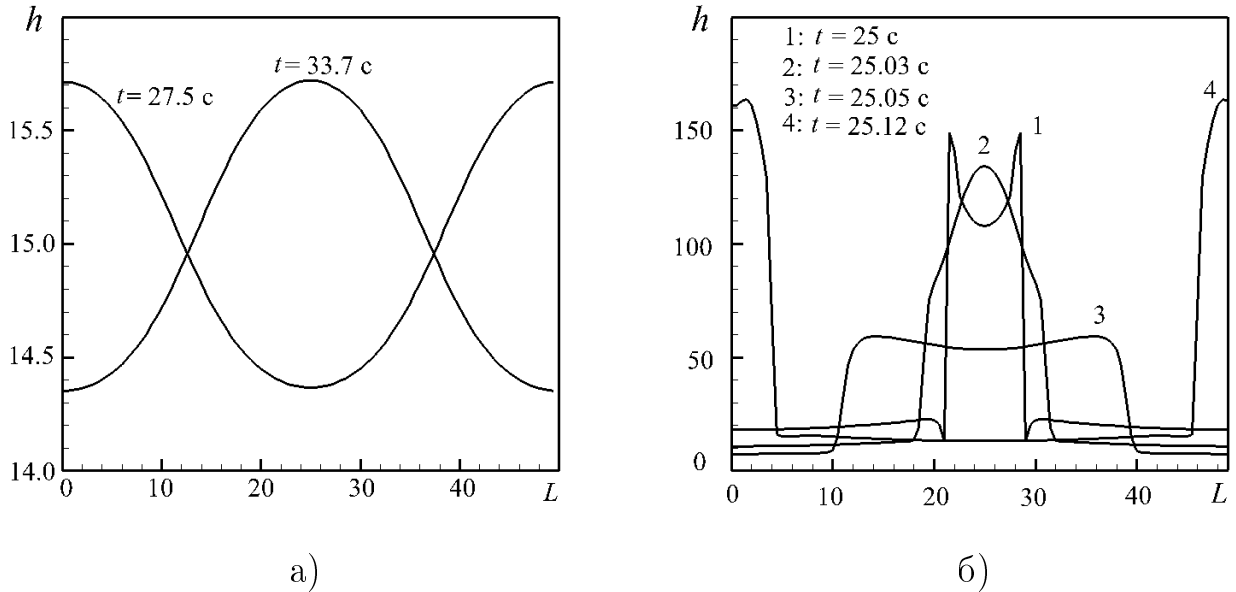


Рисунок 3.7 — Поверхности жидкости для второй моды волн Фарадея при  $h_0 = 50$  см для (а)  $\Omega = 29.4$  рад/с,  $s = 0.25$  см,  $R = 0.22$  и (б)  $\Omega = 62.5$  рад/с,  $s = 0.25$  см,  $R = 0.98$

### 3.4 Заключение

В данной главе диссертации была впервые показана возможность прямого численного моделирования волн Фарадея с помощью уравнений мелкой воды. Движение жидкости предполагалось одномерным. Расчеты были выполнены с помощью регуляризованных уравнений мелкой воды. Новизна постановки состояла в том, что в уравнения МВ впервые введено переменное ускорение свободного падения.

Основные черты рассчитанных волновых движений согласуются с теоретическими и экспериментальными данными, описывающими волны Фарадея. В частности, в численном эксперименте получено формирование незатухающих параметрических колебаний в частотных диапазонах, соответствующих приближению мелкой воды, при этом частота колебаний в два раза меньше частоты возбуждающей силы. Обнаружено возникновение первой и второй мод волн Фарадея в ограниченных частотных диапазонах. В зависимости от величины перегрузки получено формирование регулярных, нерегулярных и разрушающихся волн. Отметим, что полученные в численных расчетах диапазоны частот внешнего воздействия, вызывающих возбуждение колебаний, оказываются ниже зна-

чений, зафиксированных в [72]. По мнению автора улучшение согласия данных расчета и эксперимента может быть достигнуто при использовании более полной вычислительной модели, включающей в себя учет двумерности течения и более адекватное описание эффектов трения о стенки.

В качестве несомненных плюсов предложенного метода укажем простоту его программной реализации, быстроту численного расчета а также более широкие по сравнению с экспериментом возможности для изучения волн Фарадея в сосудах различной формы с различными вариантами внешнего воздействия. Таким образом численное моделирование волн Фарадея с помощью уравнений мелкой воды является перспективным подходом к изучению данного явления.

## Глава 4. Численное моделирование сейшевых колебаний и экстремальных ветровых нагонов в Азовском море

### 4.1 Введение

Регион Азовского моря является стратегически важным для Российской Федерации: он имеет огромную транспортную, промышленную, рекреационную, стратегическую и военную значимость. Поэтому актуальной задачей является прогнозирование динамики и циркуляции моря при изменяющемся воздействии окружающей среды, связанным, в первую очередь, с изменением погодных условий. Азовское море обладает уникальным рельефом и климатом. Ряд климатических явлений, чаще всего вызываемых сильными ветрами, может нести серьезную угрозу человеку и принимать масштабы стихийных бедствий. К таким явлениям относятся сгонно-нагонные колебания уровня моря, штормовые ветры, вызванные прохождением циклонов, штормовые волны, сейши, цунами и ветровые волны. Каждое такое явление предъявляет дополнительные требования к численным моделям для их исследования и прогнозирования.

Сейшами называются стоячие волны, возникающие в замкнутых или частично замкнутых водоемах под действием перепада атмосферного давления, ветра или штормовых нагонов из соседних акваторий.

В мелководном Азовском море сейшевые колебания происходят постоянно. Течения, возникающие из-за сейши, приводят в движение всю массу воды водоема. В узловых точках, где уровень воды почти постоянен, и вблизи сужения берегов сейши могут формировать экстремальные скорости течения до 1.5 м/сек. Амплитуда колебаний уровня может превышать 1 м. Сейши могут серьезно усиливать сгонно-нагонные явления в этом регионе, вызывая катастрофические перепады уровня. Подробное описание этих явлений в Азовском море представлено, например, в [81]. Таким образом, изучение и прогнозирование сейшевых течений в мелководном Азовском море с пологими берегами является актуальной задачей.

Штормовые ветра в данном регионе могут формировать крупные сгонно-нагонные явления, которые наносят ущерб населению и экономике прибрежных

городов. Катастрофические подъемы (на 2-3 метра в Таганрогской бухте) обычно формируются с периодичностью в несколько лет [81]: 12 апреля 1997 г; 1 марта 2005 г; 30 сентября 2010 г. , однако, в 21 веке они случились два года подряд - 24-25 марта 2013 г. и 24–25 сентября 2014 г. Эти события подробно описаны в статьях [82] и [83]. Отметим, что ни один из этих экстремальных нагонов не было заранее спрогнозировано. Поэтому задача моделирования и предсказания экстремальных нагонов в Азовском море является актуальной.



Рисунок 4.1 — Экстремальный нагон в городе Таганрог, 2013 год

В силу небольших поперечных размеров и глубины Азовского моря, его динамика и циркуляция может быть описана как в рамках 3D моделей (например, в рамках модели INMOM (см. [84–87]) или модели, разработанной в Морском гидрофизическом институте (МГИ) в городе Севастополь [88]; также см. обзор в [89]), так и в рамках отдельных 2D моделей для Азовского моря [90–95]. Численные расчеты нагонов 2013-2014 годов описаны в статьях [82] и [87; 93–95]. Большое внимание уделялось поднятию уровня воды в дельте реки Дон [82].

В перечисленных моделях для Азовского моря, как правило, используются уравнения мелкой воды (УМВ) линеаризованного вида, а их разностная аппроксимация осуществляется на разнесенных сетках “В” и “С” по классификации Аракавы. Первое ухудшает качество модели, делая ее менее точной, разнесенные расчетные сетки усложняют разностный алгоритм, затрудняя учет

массовых сил, так как расчетные узлы компонентов скорости сдвинуты друг от друга и относительно толщины слоя.

Основными факторами, определяющими течения в бассейне Азовского моря, являются ветер, топография дна, форма береговой линии и сила Кориолиса. Одной из целей данной работы является демонстрация возможностей адекватного описания циркуляции и экстремальных нагонов в Азовском море с помощью модели, основанной на полных двумерных УМВ. Этот подход существенно проще описания в рамках примитивных 3D уравнений крупномасштабной циркуляции моря, он позволяет выделить определяющие факторы процесса формирования колебаний уровня моря и оценить суммарное влияние не включенных в модель параметров. Успешное применение предложенной модели позволит использовать ее для моделирования колебаний уровня и баротропных течений в других неглубоких водоемах и морях, например, в Балтийском, Аральском морях, Северном Каспии, а также в искусственных водохранилищах.

## 4.2 Постановка задачи

Рассматривается двумерная система УМВ в потоковой форме. С учетом внешних сил и топологии дна система записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u_x h}{\partial x} + \frac{\partial u_y h}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u_x h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( h u_x^2 + \frac{1}{2} g h^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (h u_x u_y) &= h f^c u_y - g h \frac{\partial b}{\partial x} + \tau^{x,w} - \tau^{x,b} \\ \frac{\partial u_y h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h u_y^2 + \frac{1}{2} g h^2 \right) &= -h f^c u_x - g h \frac{\partial b}{\partial y} + \tau^{y,w} - \tau^{y,b} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь  $h(x,y,t)$  - глубина жидкости,  $u_x(x,y,t)$  и  $u_y(x,y,t)$  - компоненты скорости течения,  $g$  - ускорение силы тяжести,  $f^{cor} = 2\Omega \sin\phi$  - параметр Кориолиса, где  $\Omega = 7.2921 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$  - угловая скорость вращения Земли,  $\phi$  - географическая широта. Функция  $b(x,y)$  описывает топографию дна от некоторого отсчетного уровня, находящегося ниже дна моря (Рис. 4.2).



Компоненты силы трения ветра на поверхности воды обозначены через  $\tau^w(x,y,t)$  и вычисляются как  $\tau^{i,w}(x,y,t) = \gamma|W|W_i$ , где  $W_i(x,y,t)$  – компонента скорости ветра (м/с),  $|W| = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}$  – модуль скорости ветра,  $\gamma$  – коэффициент трения ветра о свободную поверхность воды. Индексом  $i$  обозначены компоненты  $x$  и  $y$ .

Проекции силы трения о дно водоема обозначены как  $\tau^b(x,y,t)$  и вычисляются с помощью соотношения  $\tau^{i,b}(x,y,t) = \mu|u|u_i$ , где  $\mu$  – коэффициент трения,  $|u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$  – модуль скорости потока.

Коэффициенты трения являются заданными величинами и для морских акваторий составляют  $\mu = 2,6 \cdot 10^{-3}$  ([96]) и  $\gamma = 0.001 \frac{\rho_0}{\rho_w} (1.1 + 0.0004|W|)$ , где  $\rho_0 = 1.3 \cdot 10^{-3}$  – плотность воздуха [г/см<sup>3</sup>],  $\rho_w = 1.025$  [г/см<sup>3</sup>] – плотность воды ([86]), коэффициент 0.0004 имеет размерность (м/с)<sup>-1</sup>.

Область решения задачи представляет собой акваторию Азовского моря, Керченский пролив и прилегающую к нему часть акватории Черного моря (рис 4.2). Она расположена в пределах от 34°45'6" в.д. до 39°29'38" в.д. и от 44°48'4" с.ш. до 47°16'12" с.ш. топография дна задана на сетке с шагами 8", что соответствует шагу по пространству 250 м.

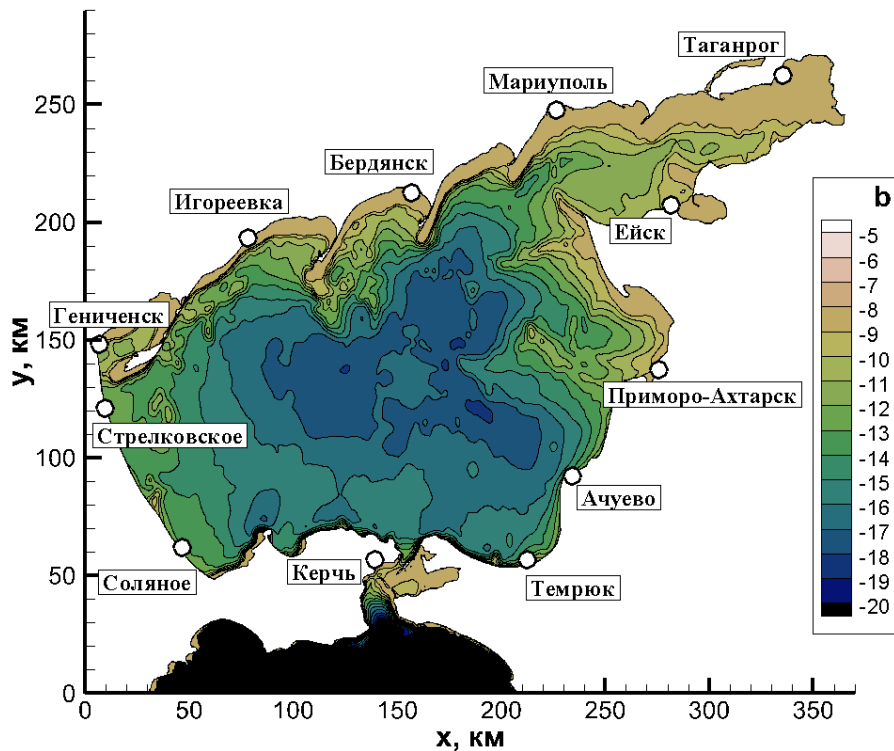


Рисунок 4.2 – Топография дна Азовского моря

В силу относительно небольших линейных размеров рассматриваемых акваторий по отношению к радиусу Земли задача рассматривается в декартовой системе координат. В качестве начальных условий выбирается равновесная глубина  $h = h_0$ , соответствующей невозмущенному уровню моря, и нулевые скорости течения  $u_x = u_y = 0$  м/с. Для описания граничных условий вдоль береговой границы используются условия сухого дна. В области Черного моря (рис. 4.2 — нижний край), где граница ставится вдоль линии сетки, применяются условия сноса или свободные граничные условия в нормальном к границе направлении.

Расчеты по экстремальным нагонам проводятся на временном интервале 2013 - 2014 г.г. Внешний форсинг задается в виде полей скорости ветра с шагом в 1 час, рассчитанных по модели WRF в Государственном океанографическом институте [87]. Для анализа рассматриваются промежутки с 21 марта по 25 марта 2013 и 21 по 25 сентября 2014.

В рамках данной задачи условие сухого дна обеспечивает условие неподвижной береговой линии. Это происходит за счет использования достаточно грубой сетки (250 метров), в результате чего на шаге сетки получается достаточный перепад высот, чтобы на берегу всегда выполняется условия (1.28). При выключении условий сухого дна происходит затопление прибрежных территорий и нарушение границы береговой линии, однако, оценка затопления будет не корректна из-за большого шага сетки. Отметим, что при расчетах на более мелкой сетке условие сухого дна будет позволять отслеживать смещение береговой линии.

Для описанной разностной схемы параметры численного алгоритма были подобраны в  $\alpha = 0.1$  и  $\beta = 0.5$ . Параметр сухого дна был выбран минимальным, при котором сохранялась форма береговой линии, и составил  $\varepsilon_0 = 0.9$

Расчеты выполняются на подробной сетке 250x250 метров, количество точек – 1521x1091=1 659 411. Данные были предоставлены сотрудниками государственного океанографического института имени Н.Н.Зубова.

Отметим, что для численной аппроксимации силы Кориолиса, входящей в исходные уравнения модели (4.1) и содержащей множитель  $\sin\phi$ , зависящий от широты в геоцентрической системе координат, значения  $\sin\phi$  рассчитываются в каждом узле сетки с постоянным по широте шагом 8".

## 4.3 Моделирование сейшевых колебаний

### 4.3.1 Общая картина течения

Изучаются сейшевые колебания при продолжительном действии ветра в одну сторону. В начальный момент времени включается ветер со скоростью 15 м/с, который дует в одном направлении в течении 10 часов, после чего – выключается. В данной статье будут отображены результаты моделирования ветра с западной и южной стороны (рис. 4.3).

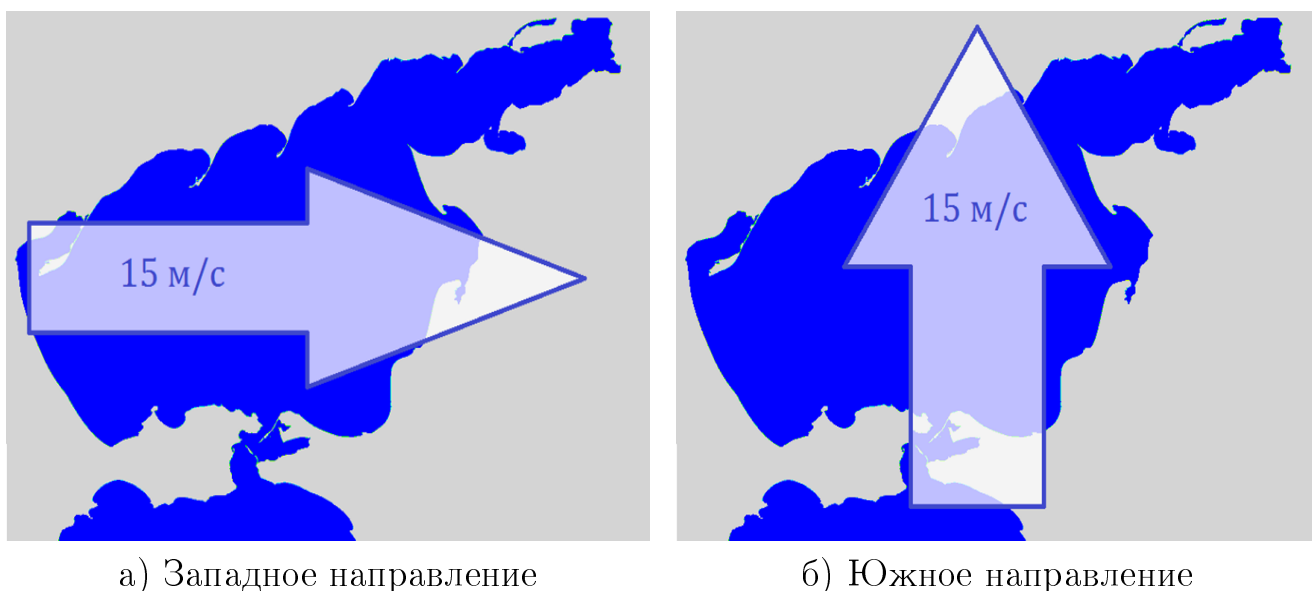


Рисунок 4.3 — К постановке задачи о сейшевых колебаниях в Азовском море.

Рассмотрим основные течения, возникающие при западном и южном направлениях ветра. Пространственное распределение уровня моря и характерные течения, соответствующие максимальному нагону перед выключением ветра ( $t = 10$  ч), представлены на рис. 4.4.

Здесь цветом обозначены повышения (красным, до +1 метра) и понижения (синим, до -1 метра) уровня моря относительно равновесного. Черными линиями нарисованы линии тока – касательные к мгновенным векторам скоростей течения. Основное направление линий тока соответствует направлению ветра. Тем не менее, за счет сложной топографии дна и береговой линии, в некоторых частях возникают вихревые течения. Так, при западном ветре они особенно заметны в районе городов Темрюк, Приморо-Ахтарск, Соляное и кос

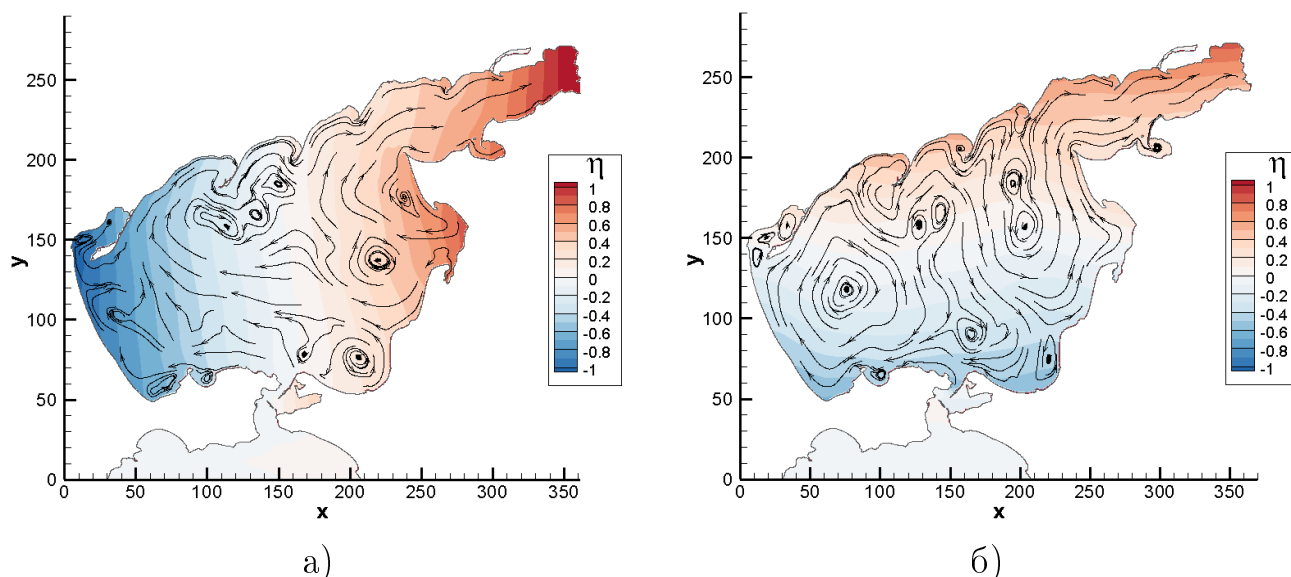


Рисунок 4.4 — Циркуляция Азовского моря при продолжительном действии ветра ( $t = 10$  ч) западного (а) и южного (б) направлений.

Игоревская и Бердянская. При южном ветре наблюдается возникновение единого антициклонического течения в западном районе Азовского моря. Кроме того, наблюдаются локальные вихри в районе городов Гениченск, Темрюк, Соляное, а также кос Игоревская, Бердянская и Белосарайской косы.

На рис. 4.5 показана эволюция сейши после выключения ветра. Шесть последовательных рисунков соответствуют положениям сейши на моменты времени  $t = 10 - 35$  часов. Цветом обозначены повышения (красным, до  $+0,2$  метра) и понижения (синим, до  $-0,2$  метра) уровня относительно равновесного. С течением времени наблюдается вращение сейши против часовой стрелки. При  $t=24-25$  часов сейша совершает полный оборот. При этом ее амплитуда уменьшается более чем в 10 раз.

#### 4.3.2 Изучение сейшевых колебаний в крупных населенных пунктах

Графики изменения уровня моря относительно равновесного вблизи крупных населенных пунктов показаны на рис. 4.6. Здесь по оси X указано время в часах, по оси Y – отклонение уровня моря от равновесного значения  $\eta$ . Данные

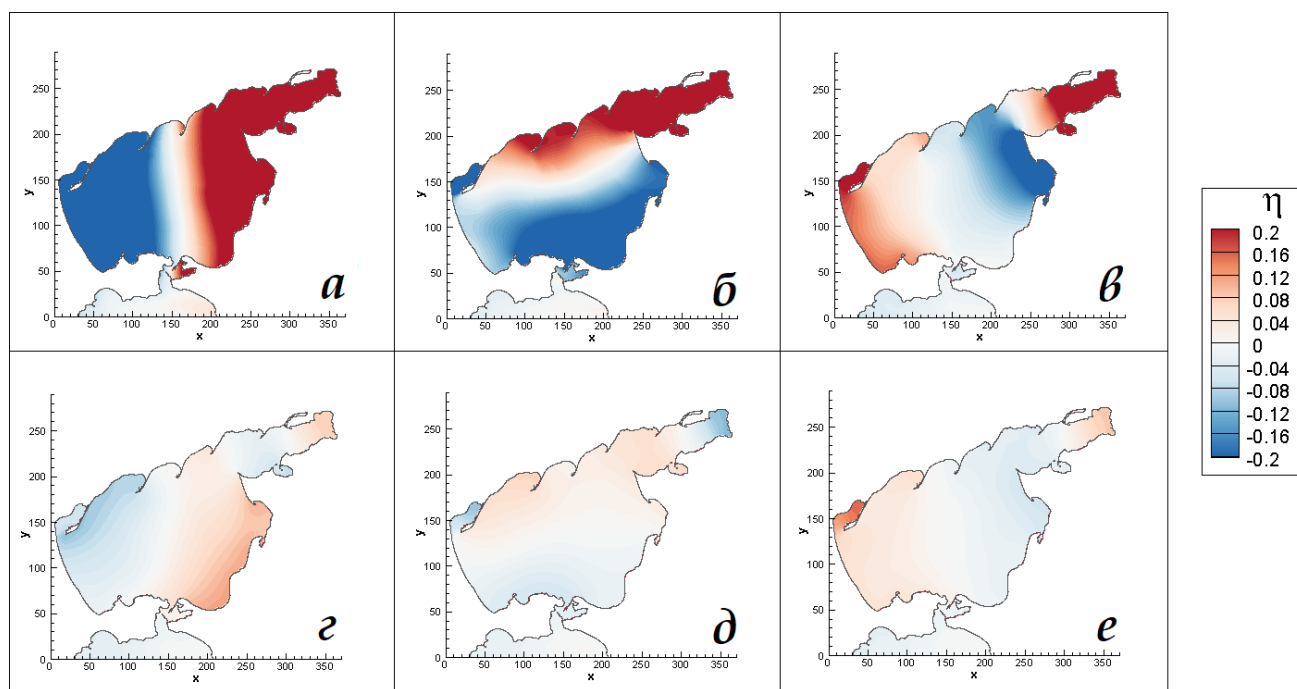


Рисунок 4.5 — Основные положения сейши после выключения ветра:  $t = 10$  (а), 15 (б), 20 (в), 25 (г), 30 (д), 35 (е) ч.

об уровне моря считывались с шагом, равным временному шагу разностной схемы – 3.9 с.

При западном ветре сейшевые колебания наиболее четко видны в городах Бердянск, Таганрог, Гениченск. Кривые последних двух являются как бы зеркальными отражениями друг друга, т.к. находятся на противоположных концах сейши. С течением времени (при  $t > 40$  ч, верхний правый график) их кривые близки к линиям гармонических колебаний и практически совпадают друг с другом. Период колебаний составляет 15.5 – 15.8 часов.

При южном ветре в колебания в городе Гениченск практически не наблюдаются. Наиболее четко здесь видны колебания в городах Темрюк и Бердянск, которые в этом случае находятся на противоположных концах сейши и имеют одинаковый период колебаний, равный 6.2 – 6.5 часов. В Таганроге характер осцилляций более сложный, здесь видно сложение колебаний разных частот.

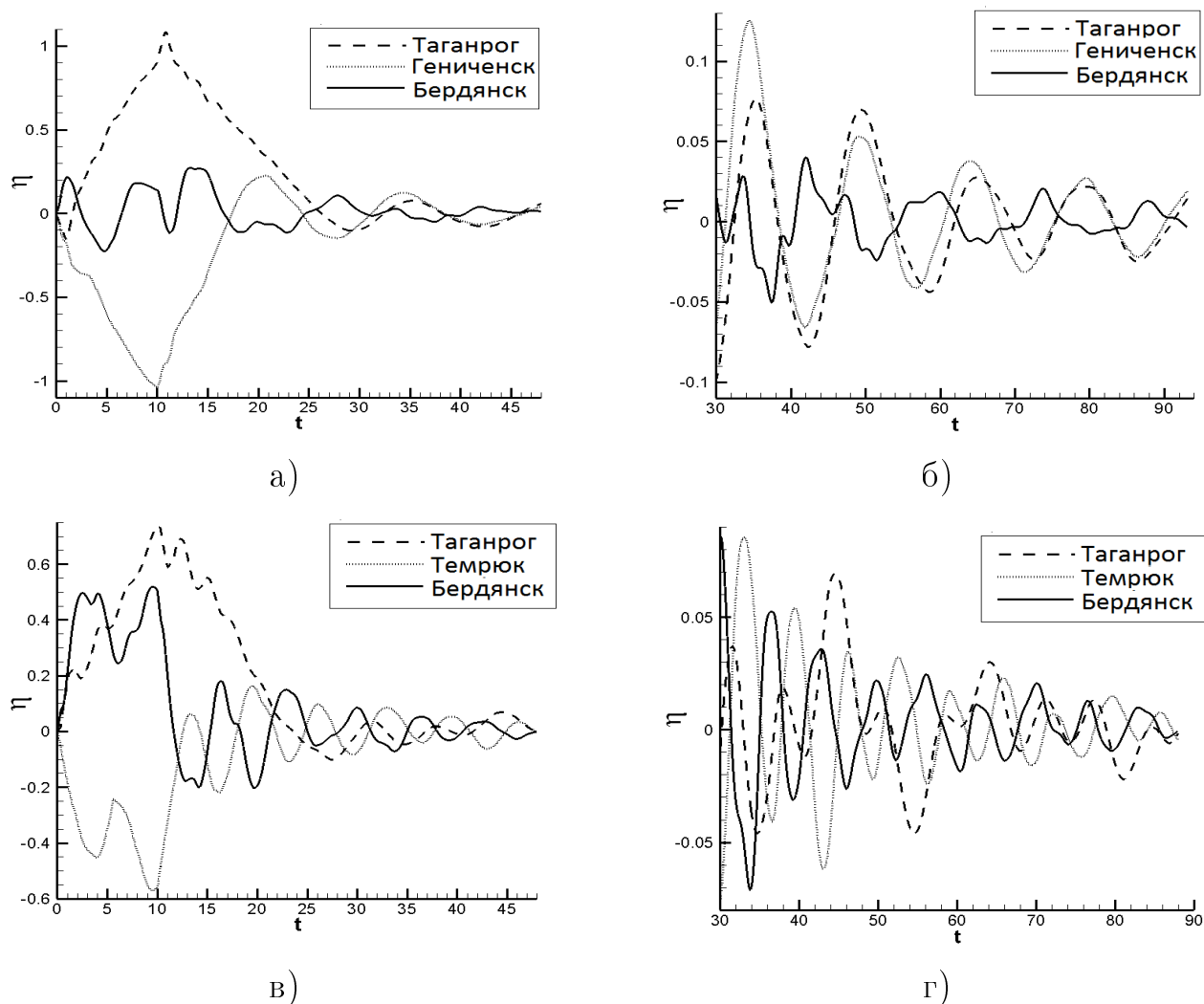


Рисунок 4.6 — Величины повышения и понижения уровня моря в крупных населенных пунктах при западном ветре (а, б) при  $0 < t < 45$  ч (а),  $30 < t < 90$  ч (б); при южном ветре (в, г) при  $0 < t < 45$  ч (в),  $30 < t < 90$  ч (г). На графиках по оси  $X$  указано время в часах, по оси  $Y$  – отклонение  $\eta$  в метрах.

### 4.3.3 Влияние силы трения о дно на амплитуду сейшевых колебаний вблизи крупных городов

В данном разделе будет подробно рассмотрено влияние силы трения о дно на амплитуду сейшевых колебаний вблизи крупных городов. Постановка задачи в данном разделе несколько отличается от той, что рассматривалась в предыдущих разделах. В рамках данного раздела в качестве начальных условий для  $h$  был задан равномерный градиент уровня моря, который имеет уровень +1 метр

от равновесного значения  $h_0$  в верхней правой части области и уровень  $-1$  метр в левой нижней. Численный алгоритм задания такого градиента заключается в разделении уровней от  $+1$  метра до  $-1$  метра на 1000 подуровней, каждый из которых занимает одинаковую площадь.

Далее будут рассмотрены графики эволюции уровня моря относительно равновесного  $\eta$  на каждый час до 3-х суток включительно.

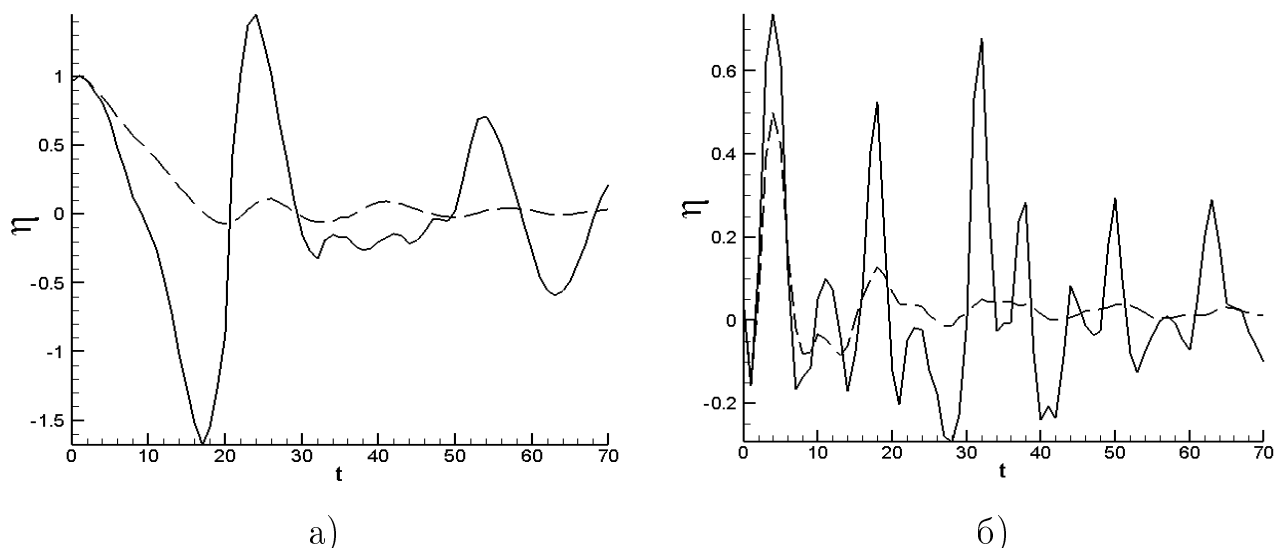


Рисунок 4.7 — Сравнение сейшевых колебаний в городах (а) Таганрог (б) Бердянск при наличии силы трения (—) и без нее (- - -).

Первая серия расчетов сейшевых колебаний была проведена без учета трения о дно ( $\mu = 0$ ). Начнем рассмотрение с города Таганрог, находящегося в северо-восточной части области. Изменение уровня в точке с течением времени показано на Рис. 4.7 (а). Здесь и в последующих графиках ось  $x$  соответствует времени эволюции профиля в часах. В соответствии с начальными условиями в начальный момент времени поднятие уровня воды составляет  $+1$  метр. В первые часы решения уровень жидкости плавно понижается и достигает минимума  $-1.68$  м при  $t = 17$  часов. Таким образом, за 17 часов изменение составило 2.7 метра. После этого наблюдается еще более резкое возрастание уровня: при  $t = 24$  часа высота жидкости составляет  $+1.7$  метров, т.е. за 7 часов уровень воды поднялся более чем на 3 метра. Стоит обратить внимание на то, что второй максимум значительно выше первого, то есть во время своего оборота сейшевое течение принесло увеличенную водную массу в Таганрогскую бухту. После наплыва вода сходит из бухты, причем гораздо более резко, достигая второго минимума  $-0.4$  за 5 часов. Следующий макси-

мум  $+0.6\text{ м}$  наблюдается при  $t = 53$  часа, после чего вода также стремительно покидает бухту. Таким образом, рассчитанные колебания сейши в Таганроге характеризуются очень резкими и большими изменениями уровня.

Двигаясь с востока на Запад, рассмотрим город Бердянск. График высоты уровня моря показан на рис. 4.7 (б). В начальный момент времени уровень моря практически совпадает с равновесным. Далее, в течении трех часов образуется резкий пик с максимальной величиной  $+0.75\text{ м}$  при  $t = 4$  часа. Затем наблюдается дополнительный, более пологий максимум  $+0.15\text{ м}$  при  $t = 12$  часов. Эта картина повторяется со временем: так следующий главный максимум появляется при  $t = 18$  часов и побочный - при  $t = 24$  часа; затем, при  $t = 32$  и  $t = 38$  часов, после чего внешний вид колебаний несколько меняется: сначала идет более пологий пик при  $t = 44$  и  $t = 58$  часов, затем – более острый при  $t = 51$  и  $t = 65$  часов. Наличие побочного максимума связано с отражением течения от западного берега Азовского моря. Второй главный максимум появляется после того, как масса воды сделала полный оборот в акватории Азовского моря – таким образом, период колебаний для города Бердянск составляет примерно 13 часов. Аналогично образуется третий максимум, однако, он выше второго – это происходит за счет перемещения водных масс из Таганрогской бухты, где период колебаний составляет примерно 24-26 часов.

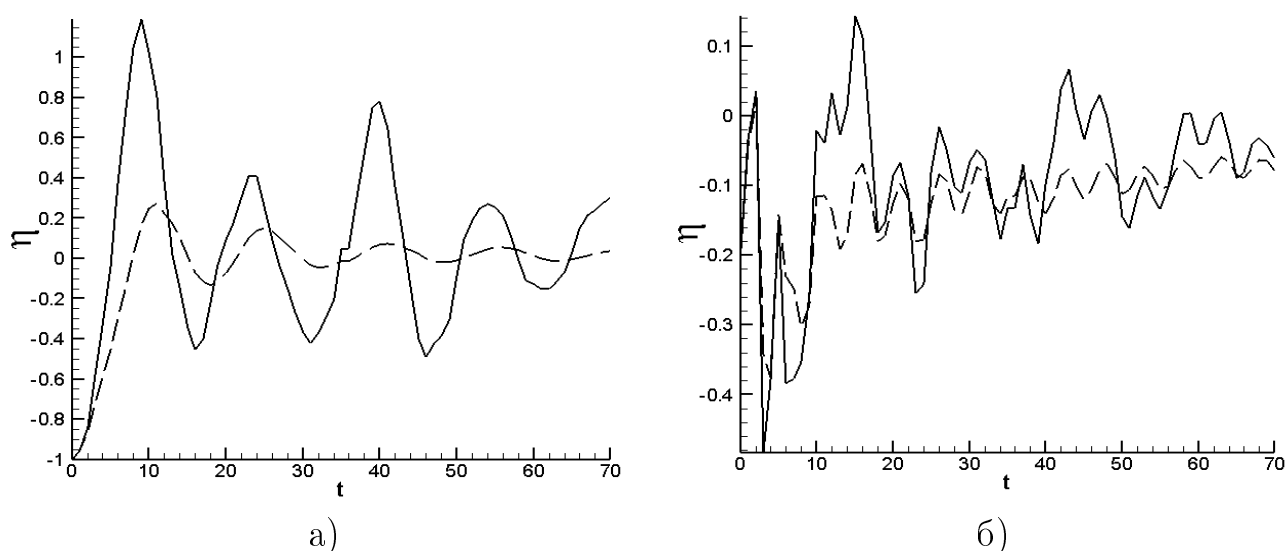


Рисунок 4.8 — Сравнение сейшевых колебаний в городах (а) Гениченск (б) Керчь при наличии силы трения (—) и без нее (- - -).

Двигаясь далее на Запад, рассмотрим город Гениченск. Географически он расположен на берегу не самого Азовского моря, а в Улютском лимане. График



высоты уровня моря показан на рис. 4.8(а). Его внешний вид похож на соответствующий график для города Бердянска. Однако на этом графике колебания более чистые, без шумов. Это связано с его географическим расположением на берегу лимана, сюда не доходят отраженные от противоположных берегов массы воды. Период колебаний составляет 15 часов. На графике третий пик значительно выше второго за счет перетекания водных масс из Таганрогской бухты.

Рассмотрим колебания уровня моря в Керченском проливе в районе порта г. Керчь, рис. 4.8(б). Этот график сильно зашумлен, и повышение уровня моря здесь довольно незначительно по сравнению с аналогичными графиками для других городов. Последнее показывает, что в Керченский пролив сейша практически не заходит.

Таким образом, были исследованы собственные сейшовые колебания Азовского моря с начальной амплитудой 1 метр. Определены периоды этих колебаний в характерных точках, которые составили от 12 до 16 часов в основных портах Азовском моря и 24-28 часов в Таганрогской бухте. Вблизи городов уставлено наличие слабых скоростей и течений, связанных с сейшовыми колебаниями. В численных расчетах установлено, что сейшевое течение не проникает в Керченский пролив. Отметим, что для городов Таганрог, Гениченск, Приморо-Ахтарск повышение уровня может быть довольно существенным.

Рассмотрим ту же задачу, но теперь учтем действие силы трения согласно, e.g., (4.1). Коэффициент  $\mu$  выбран равным  $2,6 \cdot 10^{-3}$  согласно [96]. Общий характер сейшовых колебаний остается неизменным. Сила трения вносит дополнительное затухание в систему, в результате чего уже за один период амплитуда колебаний сокращается в 8 раз по сравнению с амплитудой без силы трения, а за три периода сейша практически полностью исчезает.

Переходя к рассмотрению колебаний уровня моря в портах Азовского моря, отметим, что в целом период колебаний остался неизменным, в то время, как за счет силы трения амплитуды колебаний и скорости течений сильно уменьшились.

График изменения уровня моря с течением времени для города Таганрог приведен на Рис. 4.7(а). За счет действия силы трения из бухты вытекает меньшая водная масса, в результате чего возникает обертоном с периодом колебаний 17 часов согласно рис. 4.7(а). Его наличие обусловлено сложными береговыми

границами залива и бухты. Отметим визуальные различия графиков с силой трения и без. Максимумы стали более пологими по сравнению с вариантом без трения. Максимальный размах колебаний достигает 0.1 метра и быстро затухает со временем.

Аналогичные характеристики (без изменения периода колебаний) течения наблюдаются и в других городах. Рассмотрим город Гениченск, где наблюдались чистые сейшовые колебания. График уровня моря приведен на Рис. 4.8(а). Видно сильное затухание с максимальным размахом амплитуды 0.21 метр. Основные максимумы немного сдвигаются по времени вправо, но период колебаний остается неизменным – 16 часов.

Таким образом, было изучено влияние силы трения на решение задачи о собственных сейшовых колебаниях. Коэффициент силы трения  $\mu \sim 10^{-3}$  приводит к сильному затуханию решения: уже после 2-3 периодов колебаний сейши уровень в Азовском море становится равновесным. При этом период колебаний остается неизменным, амплитуда колебаний уменьшается в несколько раз.

#### 4.4 Моделирование экстремальных нагонов 2013-2014 г.г.

При прогнозировании динамики Азовского моря особый интерес представляет предсказание штормовых нагонов, возникающих в результате прохождения экстремальных циклонов в черноморском регионе. Далее представлен анализ развития экстремальных нагонов 2013 и 2014 г.г. Будут рассмотрены основные этапы формирования нагонов и динамика уровня моря в крупных населенных пунктах. В рамках модели будут исследоваться результаты при различных коэффициентах донного трения  $\mu$ .

##### 4.4.1 Общая картина формирования нагонов

Характерные циркуляции и распределения уровня моря приведены на рис. 4.9 и 4.10 для 2013 и 2014 г.г. соответственно. На рисунках цветом указан уро-

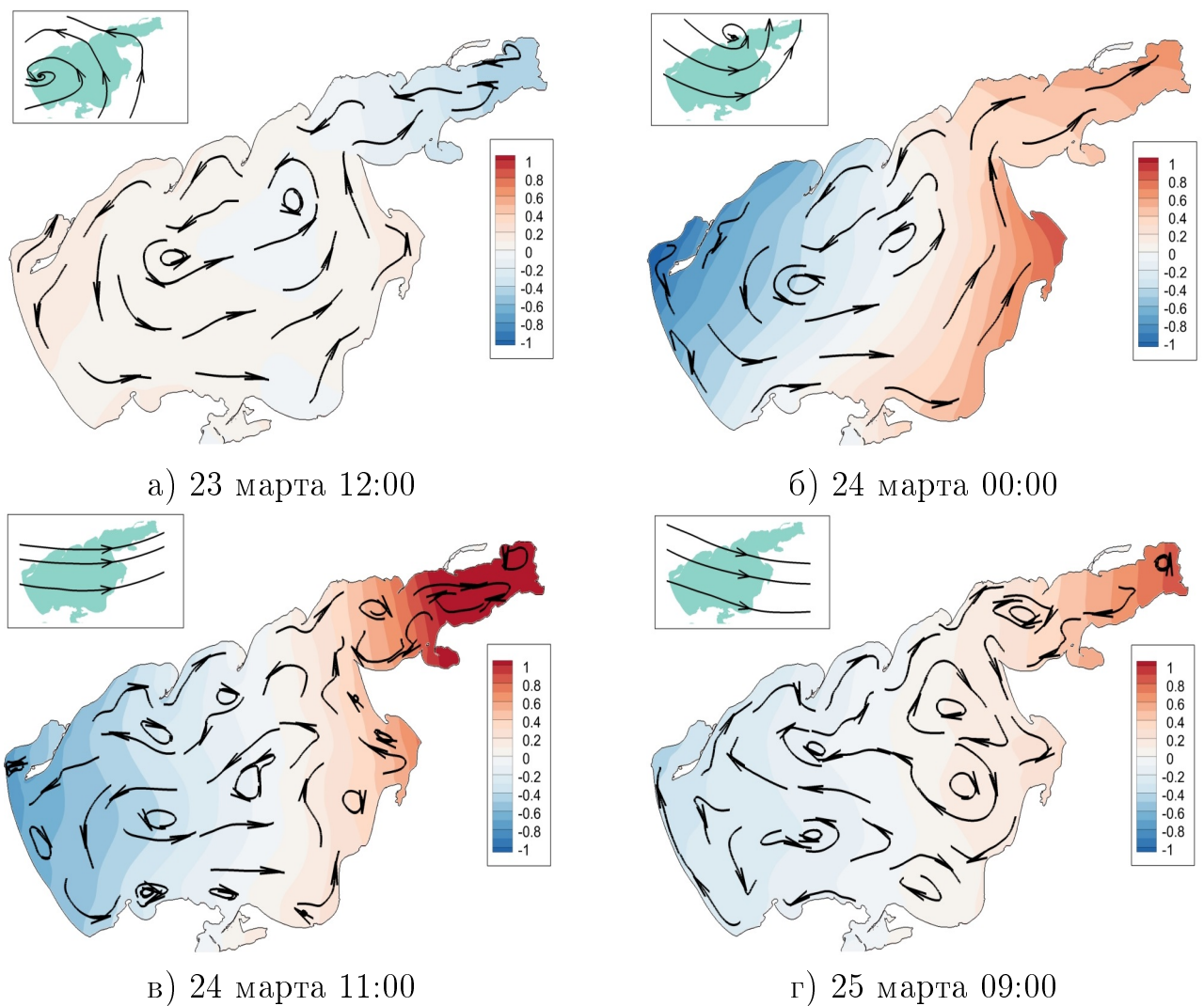


Рисунок 4.9 — Отклонение  $\eta$  уровня поверхности от равновесного значения в бассейне Азовского моря при штормовом нагоне 21-25 марта 2013 года. Расчет произведен при  $\mu = 0.00078$ .

вень моря относительно равновесного, стрелками – линии тока. Для каждого рисунка в левом верхнем углу нарисованы основные линии тока для ветра. Все характеристики соответствуют конкретному моменту времени, указанному в подписи к рисунку.

Экстремальные нагоны 2013 и 2014 г.г имеют схожие картины формирования, в которых можно выделить несколько этапов. На первом этапе нагонам предшествовал вызванный юго-восточным ветром экстремальный сгон воды из Таганрогского залива в центральную часть Азовского моря. Уровень моря в Таганрогской бухте понижался до -50 см. Характерные для этого этапа циркуляции и распределения уровня моря представлены на рис. 4.9(а) и 4.10(а) соответственно.

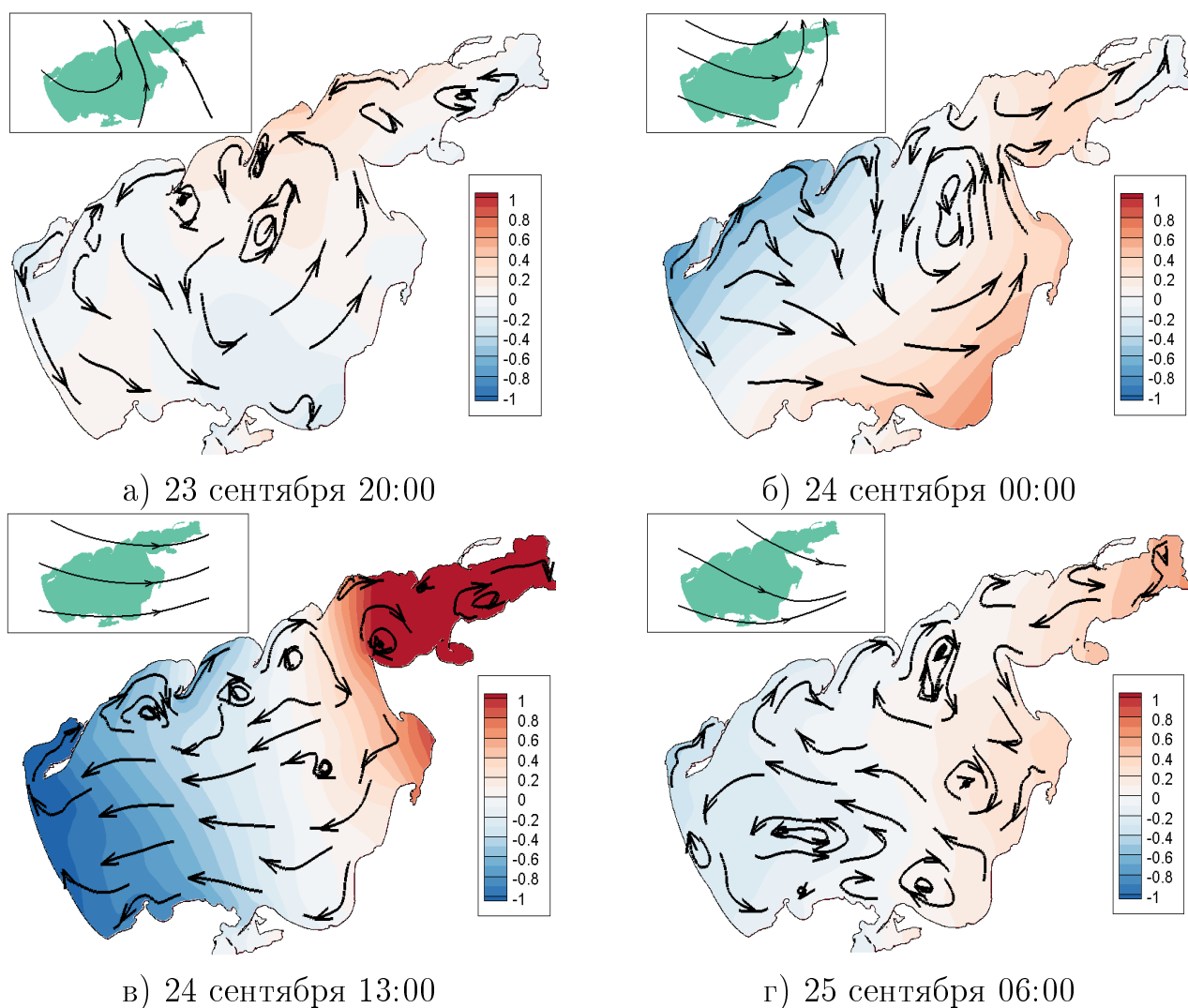


Рисунок 4.10 — Отклонение  $\eta$  уровня поверхности от равновесного значения в бассейне Азовского моря при штормовом нагоне 21-25 сентября 2014 года.

Расчет произведен при  $\mu = 0.00078$ .

Далее, в течение нескольких часов происходила резкая смена направления ветра с юго-восточного на юго-западное с ураганными порывами ветра до до 32–37 м/с ([82],[83]). Такие мощные юго-западные потоки ветра в Черном море именуется "черноморкой". В след за сменой ветра менялось направление циркуляции Азовского моря, начинался нагон воды в Таганрогский залив (рис. 4.9(б) и 4.10(б)).

В течении первой половины дня в день нагона уровень моря стремительно возрастал. В пик развития черноморки скорость подъема воды достигала 1 м/ч ([83]). Распределения циркуляции и уровня моря в момент максимального нагона показаны на рис. 4.9(в) и 4.10(в). Отметим, что во всей бухте уровень моря превышал + 1 метр над равновесным.

Со второй половине дня происходил постепенный сгон воды из Таганрогского залива. Соответствующие распределения циркуляции и уровня моря показаны на рис. 4.9(г) и 4.10(г).

Таким образом, четыре выделенных выше этапа полностью описывают механизмы образования экстремальных нагонов 2013 и 2014 г.г. в Азовском море. Отметим, что получившаяся картина полностью соответствует результатам наблюдений, описанных в [82], [83] и [87].

#### 4.4.2 Изучение экстремальных нагонов в крупных населенных пунктах

Для анализа влияния силы донного трения на решение задачи, а также для сравнения с данными реальных наблюдений будут рассмотрены графики изменения уровня моря относительно равновесного для различных  $\mu$  вблизи городов Таганрог и Ейск. Они показаны на рис. 4.11 и 4.12 для 2013 и 2014 г.г. соответственно.

На рис. 4.11 изображен штормовой нагон 21-25 марта 2013 года для городов Ейск и Таганрог. По оси  $X$  отложено время  $t$  в днях, начиная с 21 марта 2013 года, по оси  $Y$  – высота над равновесным уровнем моря в метрах. Красными квадратиками указаны данные наблюдений метеорологических станций в этих городах. Они имеют шаг 6 часов по времени. Непрерывными линиями показаны расчеты отклонения высоты уровня от равновесного для различных  $\mu$ . Шаг по времени для этих графиков составляет 4 секунды. Зеленая линия соответствует  $\mu = 0.0026$  - значение, которое часто указывается в литературе [96]. Синяя линия соответствует  $\mu = 0$  - расчет без силы донного трения, черная линия –  $\mu = 0.00078$ . Для города Таганрог при  $\mu = 0$  максимальная высота нагона  $h_{max} = 1.78$  м, пик достигается при  $t_{max} = 03 : 36$ . При  $\mu = 0.0026$   $h_{max} = 1.42$  м,  $t_{max} = 13 : 12$ , при  $\mu = 0.00078$  –  $h_{max} = 1.62$  м,  $t_{max} = 09 : 36$ . Наглядно видно, что наличие силы донного трения влияет как на высоту, так и на время нагона. Её учет в уравнениях позволяет более точно рассчитывать подобный класс задач. Однако, даже при отсутствии силы трения не удастся воспроизвести максимальную высоту нагона.

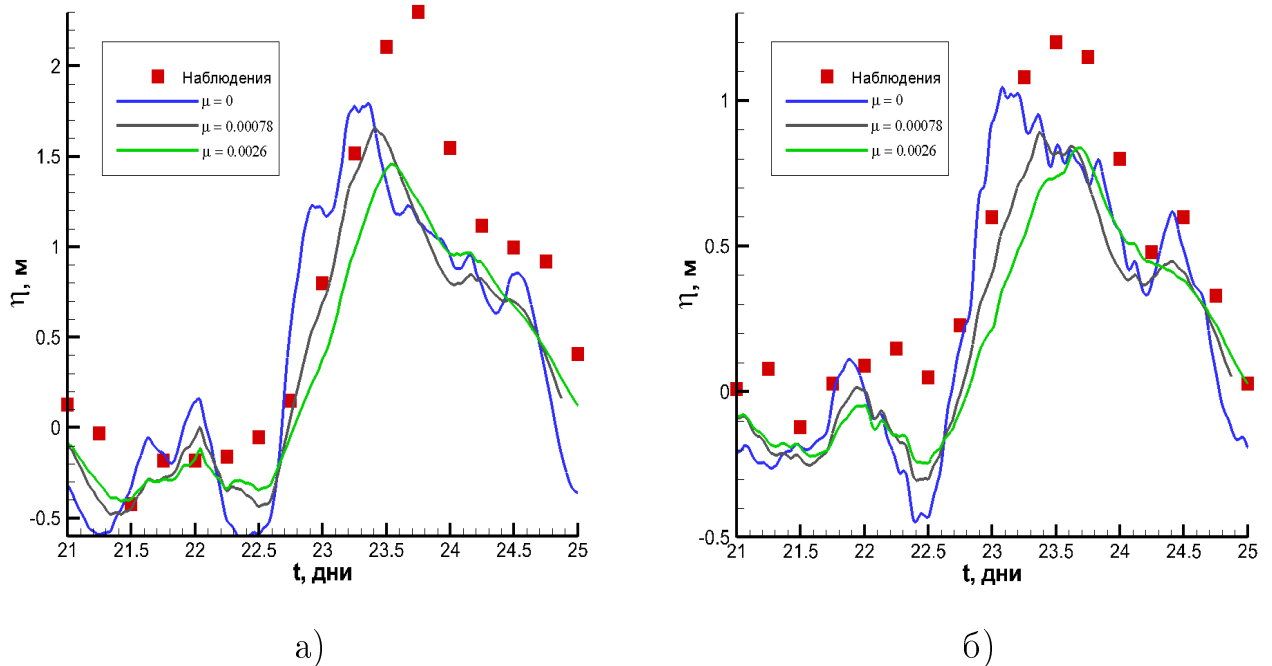


Рисунок 4.11 — График экстремального нагона 21-25 марта 2013 года при различных коэффициентах донного трения в городах (а) Таганрог, (б) Ейск. По оси X отложено время  $t$  в днях, начиная с 21 марта, по оси Y – высота над равновесным уровнем моря в метрах. Красными квадратиками указаны данные наблюдений метеорологических станций в этих городах.

На рис. 4.12 изображен аналогичный график штормового нагона 21-25 сентября 2014 года в городах Таганрог и Ейск. Для города Таганрог при  $\mu = 0$  максимальная высота нагона  $h_{max} = 5.48$  м, пик достигается при  $t_{max} = 12 : 52$ . При  $\mu = 0.0026$   $h_{max} = 2.22$  м,  $t_{max} = 16 : 15$ , при  $\mu = 0.00078$  –  $h_{max} = 3.12$  м,  $t_{max} = 14 : 45$ . Коэффициент донного трения  $\mu = 0.00078$  наиболее точно приближает высоту экстремального нагона 2014 года.

Таким образом, в рамках модели РУМВ были произведены расчеты экстремальных нагонов 2013 и 2014 г.г. в Азовском море. Общая картина формирования нагонов соответствует данным наблюдений, описанным в [82] и [83]. Проведено сравнение динамики равновесного уровня моря с данными метеорологических станций вблизи городов Таганрог и Ейск. Показано, что изменение силы донного трения влияло как на высоту, так и на время нагона. Для экстремального нагона 2014 года был подобран оптимальный коэффициент донного трения  $\mu$ , который наиболее точно воспроизводит максимальную высоту нагона, согласно данным метеорологических наблюдений. Для экстремального нагона

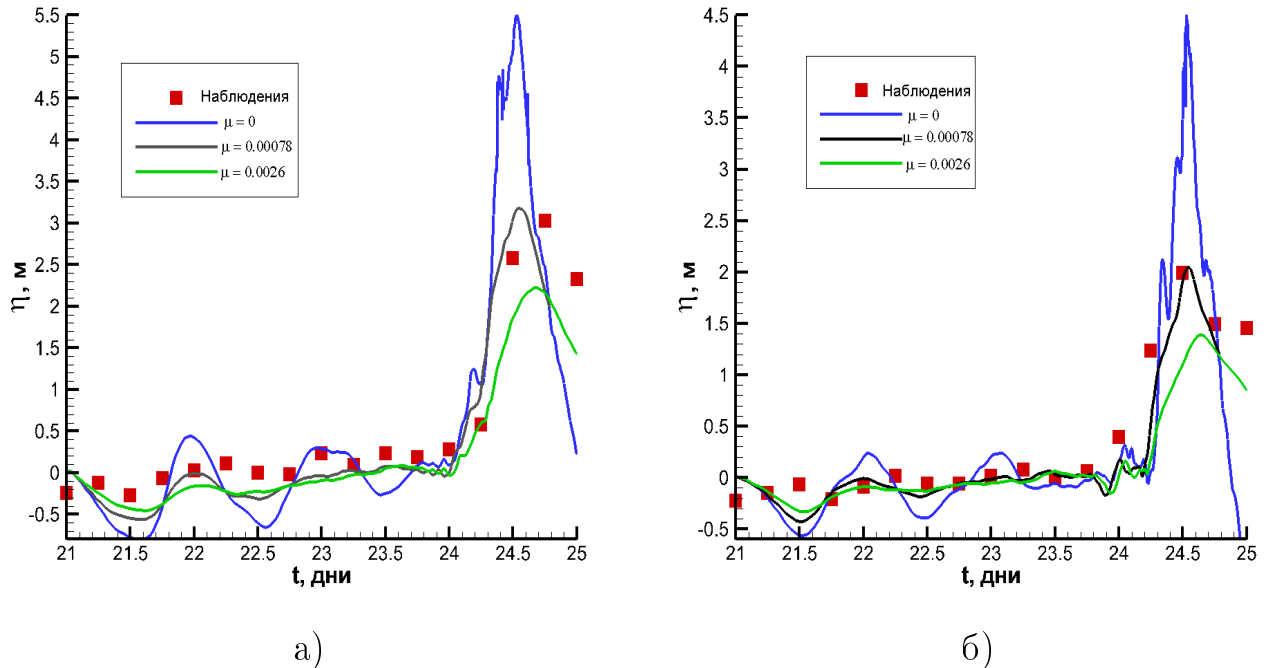


Рисунок 4.12 — График экстремального нагона 21-25 сентября 2014 года при различных коэффициентах донного трения в городах (а) Таганрог, (б) Ейск. По оси  $X$  отложено время  $t$  в днях, начиная с 21 сентября, по оси  $Y$  — высота над равновесным уровнем моря в метрах. Красными квадратиками указаны данные наблюдений метеорологических станций в этих городах.

2013 года даже при отсутствии силы трения не удалось воспроизвести максимальную высоту. Этот факт может быть связан с неточностями задаваемого ветра.

## 4.5 Заключение

В рамках данной главы был представлен новый метод численного расчета для гидродинамических течений в морских акваториях. Для этого класса задач метод обладает целым рядом качеств, такими, как вычислительная точность совместно с простотой реализации, скрытыми возможностями для параллельной реализации и расчет зон осушки/обводнения, которые делают его применение очень эффективным. Возможности метода были показаны на примере задачи о сейшевых колебаниях в Азовском море, возникающих при продолжи-

тельном ветре в постоянном направлении. Были получены картины циркуляции и эволюция уровня моря, а также картины колебаний уровня моря вблизи больших населенных пунктов. Основные периоды колебаний для них составили 15.6 и 6.5 часов.

Применение модели мелкой воды совместно с алгоритмом ее реализации на основе регуляризованных уравнений позволяет адекватно описать течения в Азовском море, включая экстремальные нагоны в его прибрежных зонах. При этом уравнения учитывают профиль дна, реально измеренный ветровой форсинг, влияние силы Кориолиса и донное трение. При соответствующем подборе величины донного трения, которое оказывается несколько меньше значений, известных из литературы [96], величина и время экстремальных нагонов в городах Таганрог и Ейск 21-25 сентября 2014 г. совпадают с данными метеонаблюдений в этих городах. Высота соответствующих экстремальных нагонов в 2013 г. в расчетах оказывается ниже измеренных в наблюдениях. Этот факт может быть связан с неточностями задаваемого ветра. Схожий вывод сделан и в работе [87].

Тем самым учет природных факторов, которые используются в модели мелкой воды оказывается достаточным для использования этого подхода при моделировании изменений уровня моря и осредненных по глубине течений в других неглубоких природных водоемах, например, в Балтийском и Аральском морях, Северном Каспии.

Специфическими особенностями данной вычислительной модели являются использование неразнесенных сеток, что облегчает вычисление действия сил Кориолиса, и использование неструктурированных сеток. Повышение пространственного разрешения гидродинамических моделей вблизи береговых зон необходимо для уточнения картины прибрежных течений [85], перспективным инструментом для этого является использование неструктурированных сеток [97]. Отказ от применения сдвинутых сеток значительно упрощает запись разностных уравнений на неструктурированных сетках. Тем не менее, для повышения точности и устойчивости разностных дискретизаций слагаемых уравнений 1.1, в том числе силы Кориолиса, модель может быть модифицирована для использования сетки "С" по классификации Аракавы и разнесения по времени расчета глубины и потоковых величин. Другой особенностью модели является отсутствие процедуры линеаризации уравнений и использование полной нели-



нейной модели, записанной в потоковом виде. Последнее обеспечивает аккуратное выполнение разностных аналогов законов сохранения массы и импульса в отсутствие внешних сил. Используется простая схема интегрирования по времени, что удобно для распараллеливания задачи.

Для моделирования глубоководных морей, каким, например, является Черное море, использованная модель УМВ уже не является адекватным приближением. Стратификация скоростей, солености и температуры сильно неоднородна по глубине. Это не позволяет в рамках УМВ описать даже расположенную в верхних слоях структуру Основного черноморского течения (см., например, [85]). Тем не менее, для описания изменения параметров жидкости с глубиной может быть построен аналогичный численный алгоритм, основанный на регуляризации более сложных примитивных уравнений гидротермодинамики [32],[25], описывающих крупномасштабную циркуляцию моря. Специфические особенности алгоритма делают его конкурентоспособным по сравнению с существующими дорогостоящими методами высоких порядков, а его дальнейшая разработка и использование являются очень перспективным для подобного класса задач.

## Заключение

В рамках данной диссертационной работы, посвященной математическому моделированию нестационарных течений несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести в приближении мелкой воды, были разработаны и применены численные алгоритмы на основе регуляризованных уравнений мелкой воды для решения прикладных задач циркуляции жидкости в морских акваториях и колебаний жидкости в замкнутых сосудах.

Основные результаты работы:

- На основе регуляризованных уравнений мелкой воды разработаны математические модели для решения широкого класса задач в приближении уравнений мелкой воды, среди которых задачи колебаний топлива в емкостях сложной формы, описание генерации волн Фарадея и ветровых явлений в акватории мелководных морей. Разработаны численные алгоритмы, аппроксимирующие соответствующие системы дифференциальных уравнений и данные внешних источников. На основе языка C++ создан комплекс программ для параллельных расчетов и визуализации с помощью внешнего программного обеспечения. Все полученные результаты соответствуют известным экспериментальным и теоретическим данным.
- Впервые в рамках уравнений мелкой воды проведено математическое моделирование колебаний топлива в реальных баках газозовов при заполнении емкостей не более 15%. Рассчитаны распределения давления на стенки емкостей при различных вариантах эксплуатации судна, соответствующим реальным условиям плавания. Используемые модели и программы позволяют в десятки раз сократить время решения задач указанного вида по сравнению с использующимися в настоящее время программами на основе полных уравнений Навье-Стокса.
- Впервые в рамках уравнений мелкой воды проведено математическое моделирование генерации волн Фарадея в замкнутом сосуде при непрерывном изменении амплитуды и частоты возбуждения колебаний. В численном эксперименте с использованием параметров экспериментальной установки получены частотные диапазоны возбуждения первой и

второй моды колебаний, построены диаграммы резонанса и устойчивости колебаний.

- Впервые на основе регуляризованных уравнений мелкой воды проведено математическое моделирование штормовых нагонов и сейшिवых колебаний в Азовском море. В частности, рассчитаны основные периоды сейшевых колебаний, а также максимальные высоты и времена экстремальных нагонов в прибрежных городах Азовского моря в марте 2013 г. и сентябре 2014 г. при реальном распределении ветровой нагрузки.

Таким образом, подход сглаженных уравнений МВ успешно адаптирован для описания как циркуляции и различных природных явлений в неглубоких водоемах, так и для явлений слошинга. Специфические достоинства алгоритма, такие, как неразнесенные разностные сетки, работа с зонами осушки/обводнения, отсутствие линеаризации исходных систем делают его конкурентоспособным по сравнению с существующими дорогостоящими методами высоких порядков, а простота реализации позволяет применять его для большого класса задач, при этом получая оригинальное решение искомой задачи. Кроме того, метод легко может быть интегрирован для работы в промышленных программных комплексах.

Дальнейший потенциал развития метода РУМВ состоит в учет кривизны поверхности Земли и постановка задачи в сферических координатах, адаптация модели под неструктурированные сетки и применение метода для уравнений крупномасштабной циркуляции океана и двухслойных УМВ. Оптимизация работы программного комплекса позволит ускорить расчет в 2-4 раза. Реализация потенциала позволит значительно увеличить возможности метода и расширить круг решаемых задач, сделав алгоритм более универсальным.

Автор выражает благодарность: своим научным руководителям, Елизаровой Татьяне Геннадиевне, за плодотворное сотрудничество в течении всей работы, участие в установлении научных контактов, обсуждении полученных результатов и помощь при оформлении работы и Попову Виктору Юрьевичу за руководство учебной работой на факультете и помощь при оформлении работы; Калиниченко Владимиру Анатольевичу за обсуждение постановки задачи и физических особенностей образующегося течения; Н.А. Дианскому и В. В. Фомину за привлечения внимания к задаче о моделировании ветровых воздей-

ствий в Азовском море, помощь в использовании данных по топографии дна и натурным наблюдениям, а также за постоянное внимание к работе.

**Публикации автора по теме диссертации**

1. *Елизарова Т. Г., Сабурин Д. С.* Численное моделирование колебаний жидкости в топливных баках // Математическое моделирование. — 2013. — Т. 25, № 3. — С. 75—88.
2. *Елизарова Т. Г., Сабурин Д. С.* Математическое моделирование и визуализация течений жидкости в грузовой емкости газовева при его соударении с ледовым препятствием // Научная визуализация. — 2013. — Т. 5, № 4. — С. 118—135.
3. *Елизарова Т. Г., Сабурин Д. С., Ткаченко И. В., Тряскин Н. В.* Численное моделирование колебаний жидкости в танках газовевов // Морские интеллектуальные технологии. — 2014. — Т. 2, № 4(26). — С. 74—83.
4. *Елизарова Т. Г., Сабурин Д. С.* Численное моделирование волн Фарадея на основе уравнений гидродинамики в приближении мелкой воды // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2015. — Т. 1. — С. 3—8.
5. *Елизарова Т. Г., Сабурин Д. С.* Применение регуляризованных уравнений мелкой воды к моделированию сейшевых колебаний уровня Азовского моря // Математическое моделирование. — 2017. — Т. 29, № 1. — С. 45—62.
6. *Елизарова Т. Г., Сабурин Д. С.* Численное моделирование сейшевых колебаний в Азовском море с использованием сглаженных уравнений гидродинамики // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон моря. — 2017. — Т. 2. — С. 74—81.
7. *Saburin D. S.* Tank sloshing simulations in shallow-water approximation // Computational Methods in Marine Engineering. — 2015. — Vol. VI, no. 4. — P. 1039–1050.
8. *Saburin D. S., Elizarova T. G.* Modeling of the Azov Sea circulation and extreme surges in 2013-2014 with the use of regularized shallow water equations // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2018. — No. 3. — (in print).

## Список литературы

1. *Стокер Д. Д.* Волны на воде. Математическая теория и приложения. — Изд-во иностранной литературы, 1959. — 620 с.
2. *Vreugdenhil C. B.* Numerical methods for shallow-water flow. — Kluwer Academic Publishers, 1994. — 261 p.
3. *Вольцингер Н. Е., Пясковский Р. В.* Теория мелкой воды. Океанологические задачи и численные методы. — Гидрометеиздат, 1977. — 206 с.
4. *Saint-Venant A. J. B.* Theorie du Mouvement non permanent des Eaux, avec application aux crues de rivieras et a l'introduction des marces dans leur lit. — 1871.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. — Наука, 1986. — 763 с.
6. *Кочин Н. Е., Кибель Н. Н., Розе Н. В.* Теоретическая гидродинамика. — Физматгиз, 1963.
7. *Рождественский В. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. — Наука, 1978. — 688 с.
8. *Коул. Д.* Методы возмущения в прикладной математике. — Издательство Мир, 1972. — 276 с.
9. Coanda effect in coastal flows / L. Francesco [et al.] // Coastal Engineering. — 2010. — Vol. 57. — P. 278–289.
10. *Jazizadeh F., Zarrati A. R.* Development of a three-dimensional numerical model to solve shallow-water equations in compound channels // Canadian Journal of Civil Engineering. — 2008. — Sept. — Vol. 35. — P. 963–974.
11. *Вольцингер Н. Е., Пясковский Р. В.* Основные океанологические задачи теории мелкой воды. — Гидрометеиздат, 1968. — 300 с.
12. *Петросян А. С.* Дополнительные главы теории мелкой воды. — Ротапринт ИКИ РАН, 2014. — 64 с.
13. *Abgrall R., Karni S.* Two-layer shallow water system: A relaxation approach // SIAM Journal of Scientific Computing. — 2009. — Vol. 31, no. 3. — P. 1603–1627.

14. Numerical simulation of two-layer shallow water flows through channels with irregular geometry / M. J. Castro [и др.] // Journal of Computational Physics. — 2004. — Т. 195. — С. 202—235.
15. *Остапенко В. В.* Гиперболические системы законов сохранения и их приложение к теории мелкой воды. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2004. — 233 с.
16. *Петросян А. С.* Дополнительные главы гидродинамики тяжелой жидкости со свободной границей. — ИКИ РАН, 2010. — 127 с.
17. *Елизарова Т. Г., Четверушкин Б. Н.* Об одном вычислительном алгоритме для расчета газодинамических течений // Доклады АН СССР. — 1984. — Т. 279, № 1. — С. 80—83.
18. *Елизарова Т. Г., Четверушкин Б. Н.* Кинетический алгоритм для расчета газодинамических течений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1985. — Т. 25, № 10. — С. 1526—1533.
19. *Шеретов Ю. В.* Об одной новой математической модели в гидродинамике // Применение функционального анализа в теории приближений. — 1996. — С. 124—134.
20. *Шеретов Ю. В.* Квазигидродинамические уравнения как модель течений сжимаемой вязкой теплопроводной среды // Применение функционального анализа в теории приближений. — 1997. — С. 127—155.
21. *Четверушкин Б. Н.* Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике: : новая модель вязкого газа, алгоритмы, параллельная реализация, приложения. — М: Изд-во МГУ, 1999. — 226 с.
22. *Четверушкин Б. Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. — М.: Макс Пресс, 2004. — 332 с.
23. *Шеретов Ю. В.* Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. — Тверь: Тверской государственный университет, 2000. — 235 с.
24. *Шеретов Ю. В.* Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. — Издательство «РХД», 2009. — 400 с.
25. *Елизарова Т. Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. — Научный мир, 2007. — 351 с.

26. *Елизарова Т. Г., Афанасьева М. В.* Регуляризованные уравнения мелкой воды // Вестник Московского Университета, серия 3. Физика. Астрономия. — 2010. — № 1. — С. 15—18.
27. *Булатов О. В., Елизарова Т. Г.* Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2011. — Т. 51, № 1. — С. 17—184.
28. *Злотник А. А.* О построении квазигазодинамических систем уравнений и баротропной системы с потенциальной массовой силой // Матем. моделирование. — 2012. — Т. 24, № 4. — С. 65—79.
29. *Злотник А. А.* Энергетические равенства и оценки для баротропных квазигазо- и квазигидродинамических систем уравнений // Матем. моделирование. — 2010. — Т. 50, № 2. — С. 325—337.
30. *Сухомозгий А. А., Шеретов Ю. В.* Единственность решения регуляризованных уравнений Сен-Венана в линейном приближении // Вестн. Тверского гос. ун-та. Сер. “Прикладная математика”. — 2012. — Т. 1, № 21. — С. 5—7.
31. *Zlotnik A. A., Chetverushkin B. N.* Parabolicity of the quasi-gasdynamic system of equations, its hyperbolic second-order modification, and the stability of small perturbations for them // *Comput. Math. and Math. Phys.* — 2008. — Vol. 48, no. 3. — P. 445—472.
32. *Шеретов Ю. В.* Регуляризованные уравнения гидродинамики. — Тверь, Тверской государственный университет, 2016. — 222 с.
33. *Елизарова Т. Г., Истомина М. А., Шелковников Н. К.* Численное моделирование формирования уединенной волны в кольцевом аэрогидроканале // Матем. моделирование. — 2012. — Т. 24, № 4. — С. 107—116.
34. *Булатов О. В., Елизарова Т. Г.* Численный алгоритм решения регуляризованных уравнений мелкой воды на неструктурированных сетках // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2014. — № 21.
35. *Елизарова Т. Г., Злотник А. А., Истомина М. А.* О двумерном численном КГД моделировании спирально-вихревых структур в аккреционных газовых дисках. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2017. — № 1.



36. *Елизарова Т. Г., Иванов А. В.* Квазигазодинамический алгоритм численного решения двухслойных уравнений мелкой воды // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2016. — № 69.
37. The shallow water equations: An example of hyperbolic system. / P. Garcia-Navarro [et al.] // Journal of Computational Physics. — 2008. — Vol. 31. — P. 89–119.
38. *Wang J., Ni H., He Y.* Finite-difference TVD schemes for computation of dam-breeak problems. // J. Hydraul. Engng ASCE. — 2000. — Vol. 126. — P. 253–262.
39. *Delis A., Skeels C. P.* TVD schemes for open channal flow. // Intern. J. Numer. Methods Fluids. — 1998. — Vol. 26. — P. 791–809.
40. *Богомолов С. В., Захаров Е. В., Зеркаль С. В.* Моделирование волн на мелкой воде методом частиц // Математическое моделирование. — 2002. — Т. 14, № 3. — С. 103–116.
41. Численное моделирование наката волн цунами на побережье с использованием метода крупных частиц / Ю. И. Шокин [и др.] // Математическое моделирование. — 2015. — Т. 27, № 1. — С. 99–112.
42. *Shin-Jye L., Chiung-Yang L., Ying-Chih C.* Shallow water flow modeling using space-time least-squares finite-element method // Journal of Marine Science and Technology (Taiwan). — 2012. — Jan. — Vol. 20. — P. 595–602.
43. *Laibel J. P., Pinder G. F.* Solution of the shallow water equations by least squares collocation // Water Resources Research. — 1993. — Vol. 29. — P. 445–455.
44. *Valiani A., Caleffi V., Zanni A.* Case Study: Malpasset dam-break simulation using a two-dimensional finite volume method // ASCE Journal of Hydraulic Engineering. — 2002. — Vol. 128, no. 5. — P. 460–472.
45. Finite-volume two dimensional unsteady-flow model for river basins / D. H. Zhao [et al.] // ASCE Journal of Hydraulic Engineering. — 1994. — Vol. 120, no. 7. — P. 863–883.

46. A numerical method for the solution of tidal dynamics equations and the results of its application / G. I. Marchuk [et al.] // Journal of Computational Physics. — 1973. — Vol. 13, no. 1. — P. 15–34.
47. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физике. — Новосибирск: Наука, 1967. — 197 с.
48. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ш. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 607 с.
49. Gallo T., Herard J.-M., Seguin N. Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topograph. // Computers and Fluids. — 2003. — Vol. 32. — P. 479–513.
50. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 656 с.
51. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978. — 512 с.
52. Булатов О. В., Елизарова Т. Г. Регуляризованные уравнения мелкой воды для численного моделирования течений с подвижной береговой линией // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2016. — Т. 56, № 4. — С. 158–177.
53. Huang Y., Zhang N., Pei Y. Well-balanced finite volume scheme for shallow water flooding and drying over arbitrary topography // Engineering Appl. of Computat. Fluid Mech. — 2013. — Vol. 7, no. 1. — P. 40–54.
54. Bulatov O. V., Elizarova T. G., Lengrand J.-C. Regularized shallow water equations applied to flows with wet/dry bottom areas // Proc. of the 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. — ECCOMAS 2012, Vienna, Austria. — 2012. — P. 1556–1571.
55. Nikolos I., Delis A. An unstructured node-centred finite volume scheme for shallow water flows with wet/dry fronts over complex topography. — 2009.
56. Четверушкин Б. Н., Дородницын Л. В. Кинетически согласованные схемы в газовой динамике // Математическое моделирование. — 1999. — Т. 11, № 5. — С. 84–100.
57. Старченко А. В., Берцуун В. Н. Методы параллельных вычислений. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 2013. — 223 с.

58. *Гурьев Ю. В., Ткаченко И. В.* Компьютерные технологии в корабельной гидродинамике. — СПб: ВМИИ, 2016. — 20,25 печ.л.
59. *Гурьев Ю. В., Ткаченко И. В., Якушенко Е. И.* Компьютерные технологии в корабельной гидродинамике: состояние и перспективы // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*,. Сб. научн. трудов. — 2011. — Т. 4, № 3. — С. 8—21.
60. *Сафрай А. С., Ткаченко И. В.* Численное моделирование гравитационных течений жидкости в наклонных каналах // *Изв. РАН, Механика жидкости и газа*. — 2009. — Т. 1, № 3. — С. 8—21.
61. Математическое моделирование колебаний жидкости в грузовых емкостях газозовов при соударении с ледовым препятствием / А. О. Дукарский [и др.] // *Морские интеллектуальные технологии*. — 2011. — № 4. — С. 69—75.
62. Sloshing impact simulation with material point method and its experimental validations / J. G. Li [et al.] // *Computers & Fluids*. — 2014. — Nov. — Vol. 103. — P. 86–99.
63. *Yung T., Ding Z., Sandstrom H. H.* LNG sloshing: characteristics and scaling laws // *Int J Offshore Polar Eng*. — 2009. — Vol. 19, no. 4. — P. 264–270.
64. *Akyildiz H., Unal E.* Experimental investigation of pressure distribution on a rectangular tank due to the liquid sloshing // *Ocean Eng*. — 2005. — Vol. 32, no. 11/12. — P. 1503–1516.
65. *Chen Y., Djidjeli K., Price W.* Numerical simulation of liquid sloshing phenomena in partially filled containers // *Computers & Fluids*. — 2009. — Vol. 38, no. 4. — P. 830–842.
66. An adaptive numerical method for free surface flows passing rigidly mounted obstacles / K. Nikitin [et al.] // *Computers and Fluids*. — 2017. — Vol. 148. — P. 56–68.
67. *Cariou A., Casella G.* Liquid sloshing in ship tanks: a comparative study of numerical simulation // *Mar Struct*. — 1999. — Vol. 12, no. 3. — P. 183–198.

68. *Rebouillat S., Liksonov D.* Fluid-structure interaction in partially filled liquid containers: a comparative review of numerical approaches. // *Comput Fluids*. — 2010. — Vol. 39, no. 5. — P. 739–746.
69. *Hale S., Ulrikke B., Britta W.* LNG Carriers. — *Marine Structural Engineering*, 2012. — 261 p.
70. *Болотин В. В.* О движении жидкости в колеблющемся сосуде // *ПММ*. — 1956. — Т. 20, № 2. — С. 293–294.
71. *Мусеев Н. Н.* Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы // *Матем. Сб.* — 1953. — Т. 32(74), № 1. — С. 61–96.
72. Экспериментальное исследование поверхностных волн при резонансе Фарадея / В. А. Калиниченко [и др.] // *Изв. РАН, Механика жидкости и газа*. — 1995. — № 1. — С. 122–129.
73. *Калиниченко В. А.* О разрушении волн Фарадея и формировании струйного всплеска // *Изв. РАН, Механика жидкости и газа*. — 2009. — № 4. — С. 112–122.
74. *Калиниченко В. А., Серерж-Зенкович С. Я.* О срыве параметрических колебаний жидкости // *Изв. РАН, Механика жидкости и газа*. — 2010. — № 1. — С. 128–136.
75. *Ibrahim R. A.* Liquid Sloshing dynamics: theory and applications. — Cambridge Univ. Press, 2005. — 948 p.
76. *Jeff W., Steve Y., Pozrikidis C.* Numerical studies of two-dimensional Faraday oscillations of inviscid fluids // *J. Fluid Mech.* — 2000. — Vol. 402. — P. 1–32.
77. *Nicolas P., Damir J., Laurette S. T.* Numerical simulation of Faraday waves // *J. Fluid Mech.* — 2009. — Vol. 635. — P. 1–26.
78. *Кравцов А. В., Серерж-Зенькович С. Я.* Параметрическое возбуждение колебаний вязкой двухслойной жидкости в замкнутом сосуде // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 1993. — Т. 33, № 4. — С. 611–619.
79. *Кравцов А. В.* Асимптотическое решение задачи свободных колебаниях вязкой стратифицированной жидкости // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 1998. — Т. 38, № 5. — С. 807–812.

80. *Сретенский Н. Л.* Теория волновых движений жидкости. — Наука, 1977. — 816 с.
81. *Доценко С. Ф., Иванов В. А.* Природные катастрофы Азово-Черноморского региона. — НАН Украины, Морской гидрофизический институт, 2010. — 174 с.
82. Экстремальное затопление дельты Дона весной 2013 г.: хронология, условия формирования и последствия. / Г. Г. Матишов [и др.] // Вестник Южного научного центра РАН. — 2014. — Т. 10, № 1. — С. 17–24.
83. *Матишов Г. Г.* Керченский пролив и дельта Дона: безопасность коммуникаций и населения. // Вестник Южного научного центра РАН. — 2015. — Т. 11, № 1. — С. 6–15.
84. *Залесный В. Б., Гусев А. В., Мошонкин С. Н.* Численная модель гидродинамики Черного и Азовского морей с вариационной инициализацией температуры и солености // Изв. РАН Физика атмосферы и океана. — 2013. — Т. 49, № 6. — С. 699–716.
85. *Залесный В. Б., Гусев А. В., Агошков В. И.* Моделирование циркуляции Черного моря с высоким разрешением прибрежной зоны // Изв. РАН Физика атмосферы и океана. — 2016. — Т. 52, № 3. — С. 316–333.
86. *Дианский Н. А.* Моделирование циркуляции океана и исследование его реакции на короткопериодные и долгопериодные атмосферные воздействия. — ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 271 с.
87. *Фомин В. В., Дианский Н. А.* Расчет экстремальных нагонов в Таганрогском заливе с использованием моделей циркуляции атмосферы и моря различного пространственного разрешения // Метеорология и гидрология. — 2018. — (в печати).
88. Development of Black Sea nowcasting and forecasting system / G. K. Korotaev [et al.] // Ocean Sci. — 2011. — Vol. 7, no. 5. — P. 629–649.
89. *Stanev E. V.* Understanding Black Sea dynamics // Oceanography. — 2005. — Vol. 18, no. 2. — P. 56–75.

90. *Fomin V. V., Polozok A. A., Kamyshnikov R. V.* Wave and storm surge modelling for sea of azov with use of swan+adcirc // Geoinformation Sciences and Environmental Development: New Approaches, Methods, Technologies, Collection of articles of the II Internati, At Limassol, Cyprus. — Rostov-on-Don. — 2014. — P. 111–116.
91. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е.* Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе // Выч. мет. программирование. — 2012. — Т. 13, № 1. — С. 290–297.
92. Экстремальные колебания уровня Азовского моря, включая Керченский пролив, в безледный период. — URL: <http://oceanography.ru/index.php/ru/component/jdownloads/viewdownload/6--/69>.
93. *Фомин В. В.* Расчеты уровня и ветрового волнения в Таганрогском заливе на основе совместной модели // Труды Государственного океанографического института. — 2016. — № 217. — С. 254–267.
94. Моделирование экстремального наводнения в дельте Дона на многопроцессорных вычислительных системах / В. Н. Дацюк [и др.] // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Вычислительная математика и информатика. — 2014. — Т. 3, № 1. — С. 80–88.
95. *Попов С. К., Лобов А. Л.* Диагноз и прогноз наводнения в Таганроге по оперативной гидродинамической модели // Труды Гидрометеорологического научно-исследовательского центра Российской Федерации. — 2016. — № 362. — С. 92–108.
96. *Филиппов Ю. Г.* О влиянии стока р. Дон на уровень воды в Таганрогском заливе // Метеорология и гидрология. — 2015. — № 2. — С. 76–81.
97. Автоматизированные технологии построения неструктурированных расчетных сеток / Ю. В. Василевский [и др.]. — ФИЗМАТЛИТ, 2016. — 216 с.
98. *ФГБУ НИЦ Планета.* Итоговый бюллетень за 2013 год // Ежемесячные и итоговые бюллетени спутникового мониторинга Российского сектора Черного и Азовского морей. — 2013. — URL: [http://planet.iitp.ru/sea%5C\\_monitor/archive/2008/12/06.htm](http://planet.iitp.ru/sea%5C_monitor/archive/2008/12/06.htm).

## Приложение А

### Моделирование циркуляции Черного моря в рамках РУМВ

#### А.1 Постановка задачи

В данном разделе будет изучаться возможность применения описанной в четвертой главе диссертации модели расчета циркуляции в Азовском море для аналогичных расчетов в более глубоководном Черном море. Рассматриваемая область решения задачи включает в себя всю акваторию Черного и Азовского морей, а также кусок прилегающего к ней Мраморного моря. Расположена в пределах от  $26^{\circ}30'0''$  в.д. до  $42^{\circ}1'12''$  в.д. и от  $40^{\circ}0'0''$  с.ш. до  $47^{\circ}31'12''$ . Топология дна задана на сетке с шагами  $4'48''$ . Данные по топографии были предоставлены ГОИН им. Зубова

В силу относительно небольших линейных размеров рассматриваемых акваторий по отношению к радиусу Земли задача рассматривается в декартовой системе координат. Используются равномерные прямоугольные сетки с шагами  $4000 \times 4000$  м. В качестве начальных условий выбирается равновесный уровень  $h = h_0$  м и нулевые скорости течения  $u_x = u_y = 0$  м/с. Для описания граничных условий вдоль береговой границы используются условия сухого дна.

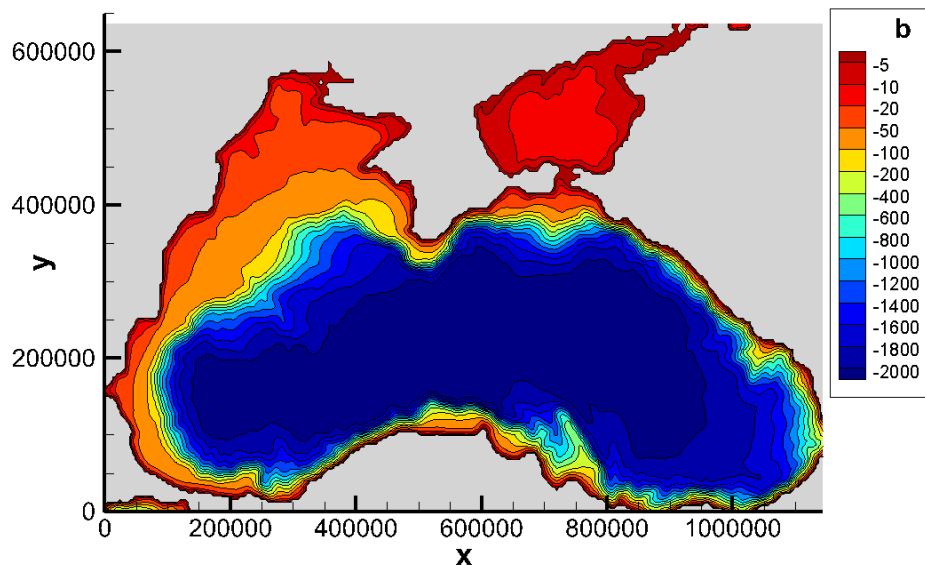


Рисунок А.1 — Топография дна Черного моря

В отличие от мелководного Азовского моря с пологим рельефом Черное море является достаточно глубоководным. Его топографию дна принято разделять на три части [81]. От берега простирается шельфовая зона Черного моря - пологий подводный склон, продолжение берега под водой до глубины 100-150 м. Его ширина изменяется от 10 – 15 км до 2,5 км у турецкого побережья. После шельфа следует очень крутой (до 20-30 градусов) материковый склон – обрыв, который простирается до глубин более 1000 метров. Склон ведет к дну котловины, которая представляет собой равнину, плоско углубляющуюся к центру до 2000 м. Максимальная глубина Черного моря – 2211 м. В рамках заданной топографии запада на восток оно простирается на 1150 км, с севера на юг его длина составляет 635 км. Отметим, что горизонтальные масштабы моря значительно больше его глубины, т.е. описание явлений в рамках приближения мелкой воды является справедливым.

## А.2 Расчеты в масштабах Черного моря без учета рельефа дна

Для первоначальной калибровки численного алгоритма, подбора оптимальных параметров схемы и проверки адекватности решения была рассмотрена модельная задача, в которой не учитывался реальный рельефа дна. Рассматриваемая область - бассейн Черного и Азовского морей - двумерный прямоугольник со сторонами  $L_x = 1144$  км и  $L_y = 636$  км. В качестве начальных условий выбирается равновесный уровень  $h_0 = 1000$  м и нулевые скорости течения  $u_x = u_y = 0$  м/с. В качестве граничных условий были выбраны условия отражения для  $h$  и непротекания для  $u_x$  и  $u_y$ .

Ветровой потенциал имеет следующий вид (рис А.2):

$$f_{s,x}(x,y,t) = 0 \quad f_{s,y}(x,y,t) = 10^{-6} \cos(\pi x/L_x) \quad (\text{A.1})$$

Расчеты производились как с учетом силы Кориолиса, так и без нее, коэффициент трения  $\mu$  полагался равным нулю.

Перейдем к описанию результатов. Первым будет рассмотрен случай простого воздействия ветрового потенциала без учета силы Кориолиса. Такая постановка задачи описывает простейший механизм возникновения нагонных яв-



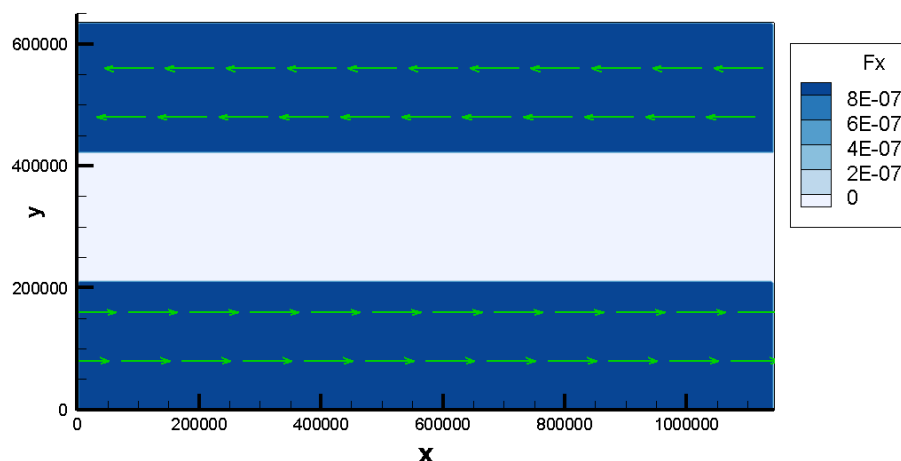


Рисунок А.2 — Схематическое изображение ветрового потенциала. Цветом показана величина ветрового потенциала, стрелками - его направления

лений: ветер, движущийся в одном направлении в течении долгого периода времени, вызывает соответствующее перемещение водных масс, в результате чего образуется градиент высоты уровня жидкости.

Рассмотрим ветровой потенциал, приведенный на рис. А.2. Из рисунка видно, что действие потенциала можно разделить на три области: в верхней области он сгоняет воду на запад (на левую часть области), в нижней области – на восток (на правую часть области), а в середине его воздействие практически равно нулю. Таким образом, мы ожидаем, что вода будет скапливаться в левой верхней и правой нижней части области.

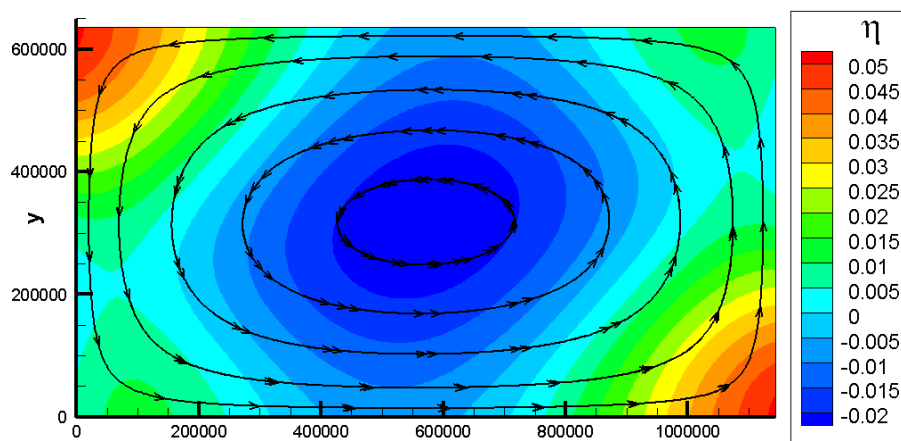


Рисунок А.3 — Циркуляция и отклонение  $\eta$  уровня моря относительно равновесного. В качестве внешнего форсинга используется только модельный ветрового потенциал. Без учета топографии дна

Соответствующий график распределения уровня моря относительно начального  $\eta$  приведен на рис. А.3. Расчет произведен вплоть до 21 дня модельно-

го времени. На графике видно повышение уровня на 5 миллиметров в верхней левой и правой нижней частях области. В центре области наблюдается незначительное понижение вплоть до 2 миллиметров ниже нуля. Отметим, что при прошествии 3-4 дней модельного времени устанавливается практически стационарная картина – внешний вид распределения уровня остается таким же, а перепад высот продолжает увеличиваться. Такое решение полностью вписывается в рамки наших предположений. Отметим, что схема позволяет учитывать и гораздо более меньший по величине потенциал: так, при  $f_y^{wind}(x,y,t) = 10^{-8} \cos(\pi x/L_x)$  образуется похожее распределение уровня и циркуляции жидкости. При этом порядок распределения уровня равен  $10^{-6}$  м, что говорит о хорошей точности полученной модели.

Черными линиями со стрелками обозначены линии тока. Как видно на рисунке, в центре расчетной образуется круговое течение, охватывающее весь периметр. Максимальные скорости течение имеет в средних точках вблизи границ области. В центре области и в точках, близких к углу прямоугольнику скорости течения существенно меньше.

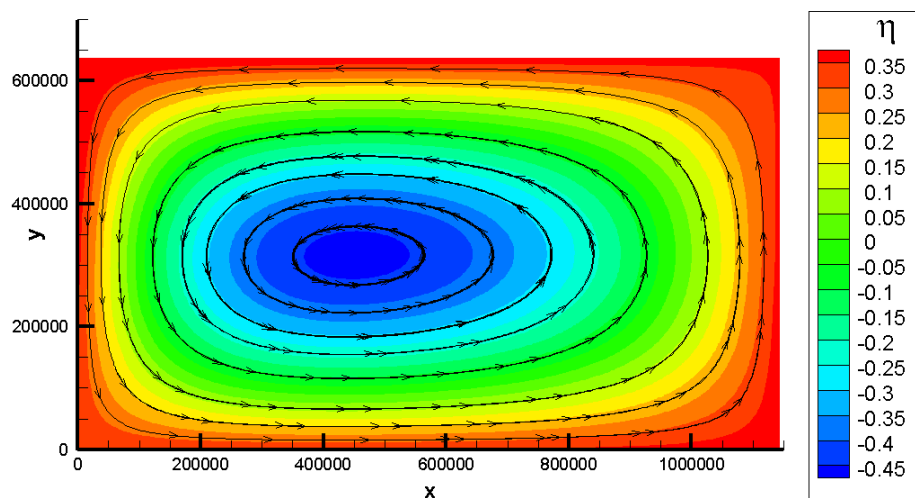


Рисунок А.4 — Циркуляция и отклонение уровня моря относительно равновесного. В качестве внешнего форсинга используются модельный ветровой потенциал и сила Кориолиса. Без учета топографии дна

Теперь к действию ветрового потенциала добавим воздействие силы Кориолиса. Соответствующий график распределения уровня моря относительно равновесного  $\eta$  и циркуляции моря приведены на рис. А.4. Расчет также произведен вплоть до 21 дня модельного времени. Стационарная картина устанавливается при прошествии 3-4 дней модельного времени. По сравнению с

предыдущим расчетом на этих графиках повышение уровня значительно выше – максимальное значение составляет порядка 0.35 м. Изменилась и картина распределения высоты  $h - h_0$ : теперь максимальные значения находятся в точках вблизи всей границы области, а минимальные – в центре. Кроме того, на этих графиках наблюдается смещение как линий уровня, так и центра вихря из центра области на ее левую часть, т.е. на запад. Линии уровня и линии тока имеют один и тот же вид. Направление циркуляции идет против часовой стрелки.

### А.3 Реальная циркуляция Черного моря

Теперь проведем расчеты в акватории Черного моря с учетом рельефом дна (рис. А.1). Ветровой потенциал рассчитывается по формуле А.1. Расчеты производились с учетом силы Кориолиса, коэффициент трения  $\mu$  полагался равным нулю.

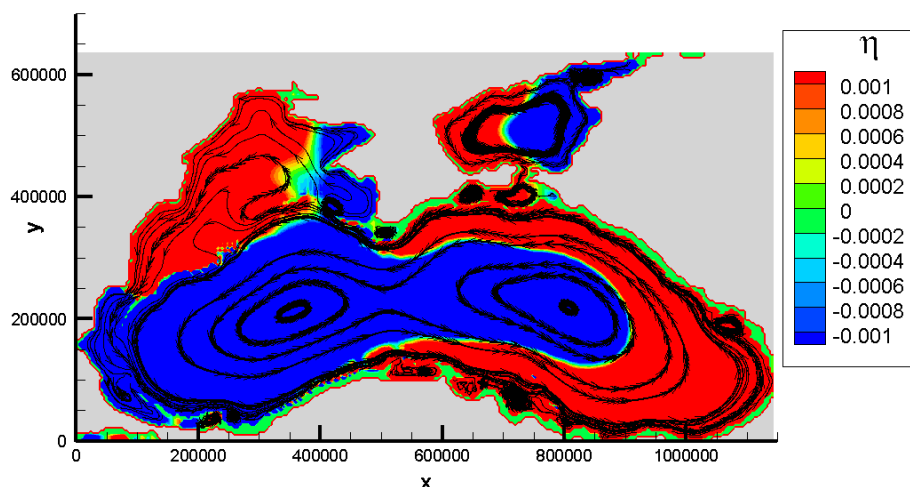


Рисунок А.5 — Циркуляция Черного моря в случае действия модельного ветрового потенциала и силы Кориолиса.

График распределения высоты моря приведен на рис. А.5. Максимальный разброс значений  $h_{max} - h_{min}$  не превышает нескольких сантиметров. В центральной (глубинной) части Черного моря зоны повышенного уровня находится в правой части области, в том время как на мелководье - Азовское море и часть черного моря с противоположной стороны полуострова Крым - зоны повышенного уровня находятся в левых частях своих бассейнов.

Основной интерес в данных расчетах представляет картина циркуляции моря. В центральной часть Черного моря наблюдается так называемое основное черноморское течение (ОЧТ). Оно распространяется по всей глубинной части бассейна. Это течения имеет направление циркуляции против часовой стрелки и образует два вихревых потока, которые в литературе называются кольца или глаза. Отметим, что скорость основного течения Черного моря довольно часто меняется, в следствии чего ОЧТ может быть как слабо заметным на фоне других морских течений меньшего масштаба, так и иметь скорость порядка нескольких метров в секунду.

В прибрежных водах можно наблюдать отдельные небольшие вихревые потоки, которые имеют противоположную основному черноморскому течению направленностью - так называемые антициклонические круговороты. Больше всего они заметны у Анатолийского и Кавказкого берегов. Такие береговые течения в поверхностном слое определяется ветром, и их направление может изменяться в течении суток. Отдельно отметим круговую циркуляцию в Азовском море, которое, по сути, является отдельным бассейном, соединенным с Черным морем через узкий Керченский пролив.

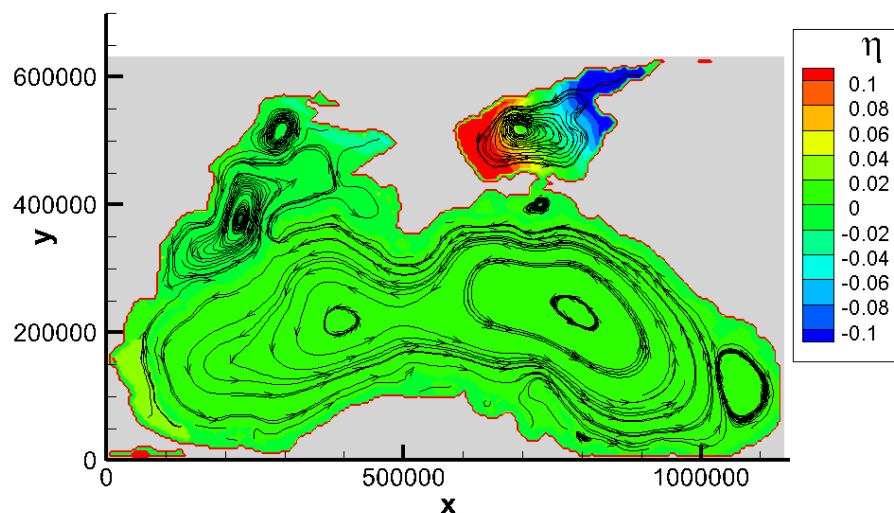


Рисунок А.6 — Циркуляция Черного моря с реальным ветровым форсингом.

17 мая 2014 года

В данном расчете модели не удается воспроизвести так называемый Батумский антициклонический вихрь, который находится в правой нижней части области. Это связано с видом ветрового потенциала - известно [81; 89; 98], что

Батумский вихрь наблюдается не круглогодично, и в отдельные периоды может не наблюдаться вовсе.

На рис. А.6 представлен расчет циркуляции Черного моря с реальным ветровым форсингом на 17 мая 2014 года. ОЧТ сохраняет свою структуру, но становится менее устойчивым. В шельфово-склоновой зоне южной и центральной части акватории образуются меандры и прибрежные антициклонические вихри (ПАВ), которые, как правило, перемещаются с основным потоком ОЧТ, а в северной части акватории могут отрываться от побережья и следовать на запад или северо-запад [98]. На рис. А.6 хорошо виден Батумский антициклонический вихрь, что подтверждает гипотезу о том, что его структура сильно зависит от ветрового форсинга. Максимальный разброс уровня моря относительно равновесного составляет порядка нескольких миллиметров при равновесном уровне жидкости порядка 2000 метров. Это говорит о хорошей чувствительности полученной разностной схемы.

Однако, при дальнейших расчетах становится видно, что использованная модель УМВ уже не является адекватным приближением. Мгновенные снимки показывают, что в рамках произведенных расчетов могут происходить большие отклонения от общих картин циркуляции Черного моря. В частности, разброс уровня моря относительно равновесного и скорости течений значительно ниже реальных значений. Различия в результатах объясняются глубоководностью Черного моря, стратификацией его скоростей, солености и температуры. Так как в приближении мелкой воды скорости жидкости усредняются по всей глубине, расчеты не могут воспроизводить основные течения у поверхности.

#### А.4 Заключение

В данном разделе была изучена возможность применения описанной в четвертой главе диссертации модели расчета циркуляции в Азовском моря для аналогичных расчетов в глубоководном Черном море. Использовались уравнения мелкой воды в потоковом виде, описывающие воздействие ветра, воздействие вращения Земли (силы Кориолиса), рельеф дна и сила трения о дно.

Для первоначальной калибровки разностной схемы и подбора оптимальных параметров уравнений использовалась простая двумерная область без учета рельефа дна. В качестве ветрого форсинга было использовано аналитическое выражение, которое формировало общую круговую циркуляцию водной массы. Было изучено влияние силы Кориолиса на циркуляцию внутри водоема. Полученные результаты адекватно отражают влияние описанного внешнего воздействия на циркуляцию в водоемах.

Для бассейна Черного моря была посчитана циркуляция течений для модельного ветрового форсинга и для реального ветрового форсинга, рассчитанного по модели WRF в Государственном океанографическом институте [87]. Полученная модель может воспроизводить основные виды течений в Черном море: Основное Черноморское течение, антициклонические круговороты у Анатолийского и Кавказского берегов, Батумский антициклонический вихрь.

Однако, не смотря на соблюдение условий мелкой воды, результаты расчетов с реальным ветровым форсингом показывают, что использованная модель УМВ не является адекватным приближением. Различия в результатах объясняются глубоководностью Черного моря, стратификацией его скоростей, солености и температуры. Так как в приближении мелкой воды скорости жидкости усредняются по всей глубине, поэтому расчеты и не могут воспроизводить основные течения у поверхности.

Тем не менее, автор полагает, что построенный алгоритм может эффективно применяться для расчета в глубоководных акваториях течений, возникающих под действием объемных сил или возмущений, а именно, распространения волн цунами и приливных волн, включая их взаимодействие с береговой линией. Кроме того, предложенный алгоритм позволяет рассчитывать течения, возникающих вследствие ветровой нагрузки, для неглубоких водоемов, к которым относится, например, Балтийское и Каспийское моря. Перспективным направлением для описания изменения параметров жидкости с глубиной является построение аналогичного численного алгоритма, основанный на регуляризации более сложных примитивных уравнений гидротермодинамики [32],[25], описывающих крупномасштабную циркуляцию моря.

## Приложение Б

### Программная реализация расчетов по двумерным РУМВ

#### Б.1 Краткое описание алгоритма

Программный комплекс реализован на языке C++ в виде классов `Problem Defenition` – математическая постановка задачи и наследующего его класса `Numerical_Solver` – численный расчет задачи. Для начала приведем краткое описание классов и их основных функций. Подробные листинги файлов приведены в следующем разделе.

В классе `Problem Defenition` происходит определение области решения задачи и постановка начальных условий (см. листинг [Б.1](#)). Объявляются соответствующие переменные, отвечающие за определение области решения задачи, а также основные переменные УМВ (система [1.1](#)). Постановка начальных условий осуществляется через конструкторы класса (листинг [Б.3](#)). Отметим, что в двумерной постановке для основных переменных УМВ используется более эффективное динамическое размещение в памяти, поэтому для всех соответствующих массивов используется одномерное представление. Таким образом, вместо организации доступа к элементам массива по индексам  $[i][j]$ , предварительно вычисляется индекс одномерного массива, которому соответствует необходимый элемент двумерного массива. Освобождение памяти реализовано в деструкторе класса.

В классе `Numerical_Solver` (листинг [Б.2](#)), который наследует все переменные класса `Problem Defenition`, дополнительно объявлены переменные, соответствующие параметрам разностной схемы, а также массивы основных переменных на следующем временном слое; реализованы методы для расчета разностной схемы и экспорта данных для последующей визуализации. Основным методом класса является метод `Exec_Numerical_Solver` (листинг [Б.4](#)), который в цикле реализует расчет разностной схемы до времени  $T$  и экспортирует данные в текстовый файл для последующей визуализации.

Для его реализации подготовлены вспомогательные методы. Подготовительный этап расчета реализован в методе `Prepate_Numerical_Solver` (листинг

**Б.5)** - здесь вычисляется матрица граничных точек  $S$ , вычисляются массивы  $\tau$  (см. раздел 1.2, ф-лу 1.18) и  $\varepsilon$  - (см. раздел 1.4, ф-лу 1.30). В методе `Recalc_forces_parallel` реализован расчет внешнего воздействия (компонент  $f_{v,i}$  и  $f_{s,i}$ , см. ф-лу 1.1), зависящего от времени. Этот метод модифицируется для каждой задачи отдельно. В методе `Numerical_scheme_time_step_parallel` (листинг Б.6) реализован расчет одного шага разностной схемы по времени и расчет граничных условий задачи. Цикл по пространственной сетке реализован с помощью библиотеки OpenMP для параллельных вычислений. Наконец, в методе `Visualization` реализован экспорт данных в текстовый файл для последующей визуализации, например, в программе TechPlot. Данные подготавливаются как в виде одномерных зависимостей от времени в конкретных точках области (реализованы в функции `Time_Step_Params_Extraction`) и выгружаются на каждом шаге по времени, так и в виде полных массивов основных переменных РУМВ, которые выгружаются через определенный промежуток времени, который задается переменной `t_step`.

Для математического моделирования с помощью данного программного решения, необходимо в отдельном файле задать область решения и начальные условия, подключить и инициализировать класс численного расчета задачи и запустить соответствующий метод класса.

## Б.2 Листинги программы

Ниже приведены листинги основных файлов, реализующие классы `Problem Defenition` - математической постановки задачи и наследующего его класса `Numerical_Solver` - численного расчета задачи.

Листинг Б.1 Заголовочный файла класса `Problem_Defenition`

```

| #pragma once
| #include <string>
| using namespace std;
5 |
| /*Class of mathematical formulation of the problem*/
| class Problem_Defenition
| {

```



```
public:
10
    //Domain variables
    double Lx;
    double Ly;
    int Nx;
15    int Ny;
    double T;
    double* X;
    double* Y;

20
    //RSWE variables
    double* B;
    double* H;
    double* xU;
25    double* yU;
    double* ForceX;
    double* ForceY;
    double* PhiX;
    double* PhiY;

30
    //Initialization
    Problem_Defenition();
    Problem_Defenition(double Lx,
35        double Ly,
        int Nx,
        int Ny,
        double T,
        double B[],
        double H[],
40        double xU[],
        double yU[],
        double ForceX[],
        double ForceY[],
        double PhiX[],
45        double PhiY[]
        );
    // Destructor
    ~Problem_Defenition();
```

```

50 |     // Uploads calculated data
    |     void Continue_from(char [80]);
    |
    | };

```

Листинг Б.2 Заголовочный файла класса Numerical\_Solver

```

    | #pragma once
    | #include <string>
    | #include "Problem_Defenition.h"
5  |
    | /*Numerical calculations class*/
    | class Numerical_Solver: public Problem_Defenition
    | {
    |     public:
10 |
    |     /*Difference scheme variables*/
    |     float hx;
    |     float hy;
    |     int Nx;
15 |     int Ny;
    |     float alpha;
    |     float kappa;
    |     float beta;
    |
20 |     float Hmax;
    |     float Bmax;
    |     float dT;
    |     float Time_elapsed;
    |     float eps;
25 |
    |     int Stop_Raschet_Flag; //Error_Flag
    |
    |     float t_step;
    |     float t_graph_export;
30 |     int HourMark;
    |
    |     double* epsilon;
    |     double* tau;
35 |
    |     /* intermediate layer variables*/

```

```

private:
    int* S;
    int TypeOfPoint;
40 float X_spot, Y_spot;
    double* xUt;
    double* yUt;
    double* Ht;
    double* PhiXt;
45 double* PhiYt;
public:

    //Initialization

50 Numerical_Solver();

    Numerical_Solver(double Lx,
        double Ly,
        int Nx,
55 int Ny,
        double T,
        float alpha,
        float kappa,
        float beta,
60 double B[],
        double H[],
        double xU[],
        double yU[],
        double ForceX[],
65 double ForceY[],
        double PhiX[],
        double PhiY[],
        float t_step,
        float Time_elapsed,
70 float t_graph_export
    ) ;

    //Methods
    void Recalc_forces_parallel(); // Calculates ForceX, ForceY,
        PhiX, PhiY
75 void Time_Step_Params_Extraction(float X_cord, float Y_Cord,
        char FName[50]);

```

```

void Visualization(); // Creates a data file using for
    visualizing in Techplot
void Exec_Raschet(); // Calculates the numerical solution

~Raschet(); // Destructor

80 private:
    void Prepare_Raschet(); // Initialization of tau and epsilon
    void Numerical_scheme_time_step_parallel(); // Computes 1
        step of difference scheme
        // Extracts solution data for 1D time-series plot

85 };

```

### Листинг Б.3 Конструкторы и деструкторы класса Numerical\_Solver

```

#include <math.h>
#include <time.h>
#include <stdio.h>
5 #include <string>
#include <iostream>
#include <fstream>
#include "Problem_Defenition.h"
#include "Numerical_Solver.h"
10 #include "Constants.h"
using namespace std;

Numerical_Solver::Numerical_Solver()
{
15 }

Numerical_Solver::Numerical_Solver(double Lx,
    double Ly,
    int Nx,
20 int Ny,
    double T,
    float alpha,
    float kappa,
    float beta,
25 double B[],
    double H[],
    double xU[],

```

```

double yU[],
double ForceX[],
30 double ForceY[],
double PhiX[],
double PhiY[],
float t_step,
float Time_elapsed,
35 float t_graph_export
) : Problem_Defenition(Lx,
                        Ly,
                        Nx,
                        Ny,
40 T,
B,
H,
xU,
yU,
45 ForceX,
ForceY,
PhiX,
PhiY
)
50 {

Numerical_Solver::Nx = Nx;
Numerical_Solver::Ny = Ny;
Numerical_Solver::Lx = Lx;
55 Numerical_Solver::Ly = Ly;
Numerical_Solver::T = T;
Numerical_Solver::alpha = alpha;
Numerical_Solver::kappa = kappa;
Numerical_Solver::beta = beta;
60 Numerical_Solver::t_step = t_step;
int N = Nx*Ny;

Numerical_Solver::hx = Lx / Nx;
Numerical_Solver::hy = Ly / Ny;
65 Numerical_Solver::Stop_Numerical_Solver_Flag = 0;

Numerical_Solver::B = new double [N];

```

```

70 Numerical_Solver::H = new double [N];
Numerical_Solver::xU = new double [N];
Numerical_Solver::yU = new double [N];
Numerical_Solver::ForceX = new double [N];
Numerical_Solver::ForceY = new double [N];
75 Numerical_Solver::PhiX = new double [N];
Numerical_Solver::PhiY = new double [N];
Numerical_Solver::xUt = new double [N];
Numerical_Solver::yUt = new double [N];
Numerical_Solver::Ht = new double [N];
80 Numerical_Solver::PhiXt = new double [N];
Numerical_Solver::PhiYt = new double [N];

Numerical_Solver::Time_elapsed = Time_elapsed;
Numerical_Solver::t_graph_export = t_graph_export;
Numerical_Solver::HourMark = int(Time_elapsed/3600);
85

for (int i=0; i<Nx; i++)
{
90   for (int j=0; j<Ny; j++)
   {
      Numerical_Solver::B[i*Ny+j] = B[i*Ny+j];
      Numerical_Solver::H[i*Ny+j] = H[i*Ny+j];
      Numerical_Solver::xU[i*Ny+j] = xU[i*Ny+j];
      Numerical_Solver::yU[i*Ny+j] = yU[i*Ny+j];
95     Numerical_Solver::ForceX[i*Ny+j] = ForceX[i*Ny+j];
      Numerical_Solver::ForceY[i*Ny+j] = ForceY[i*Ny+j];
      Numerical_Solver::PhiX[i*Ny+j] = PhiX[i*Ny+j];
      Numerical_Solver::PhiY[i*Ny+j] = PhiY[i*Ny+j];
      Numerical_Solver::Ht[i*Ny+j] = 0;
100    Numerical_Solver::xUt[i*Ny+j] = 0;
      Numerical_Solver::yUt[i*Ny+j] = 0;
      Numerical_Solver::PhiXt[i*Ny+j] = 0;
      Numerical_Solver::PhiYt[i*Ny+j] = 0;
   }
105 }
}

Numerical_Solver::~Numerical_Solver()

```

```

110 {
    delete B;
    delete H;
    delete xU;
    delete yU;
115 delete ForceX;
    delete ForceY;
    delete PhiX;
    delete PhiY;
}

```

Листинг Б.4 Метод Exec\_Numerical\_Solver класса Numerical\_Solver

```

#include <math.h>
#include <time.h>
#include <stdio.h>
5 #include <string>
#include <iostream>
#include <fstream>
#include "Numerical_Solver.h"
#include "Constants.h"
10 using namespace std;

void Numerical_Solver::Exec_Numerical_Solver()
{
15 Numerical_Solver::Prepare_Numerical_Solver();
    cout << "Prepare_Numerical_Solver" << endl;
    dT = ((hx+hy)*0.5*beta)/sqrt(gc*Hmax);
    while (T>Time_elapsed)
    {
20
        Recalc_forces_parallel();
        Numerical_scheme_time_step_parallel();

        Time_elapsed = Time_elapsed + dT;
25 if(Stop_Numerical_Solver_Flag==1) {Time_elapsed = T;}

        cout << Time_elapsed << " %:" << Time_elapsed*100/T << "\n"
            ;

        Visualization();
}

```

```

30 }
}

```

Листинг Б.5 Метод Prepare\_Numerical\_Solver класса Numerical\_Solver

```

#include <math.h>
#include <time.h>
#include <stdio.h>
5 #include <string>
#include <iostream>
#include <fstream>
#include "Variable.h"
#include "Problem_Defenition.h"
10 #include "Numerical_Solver.h"
#include "Constants.h"
#include <algorithm>
// #include "libxl->h"
using namespace std;

15
void Numerical_Solver::Prepare_Numerical_Solver()
{
    //
    *****

20 // Step 1-> Creating Matrix S(i,j), indicating boundary
    points
    //
    *****

    // 1 - bottom boundary
    // 2 - right boundary
25 // 3 - top boundary
    // 4 - left boundary

    S = new int [Nx*Nx];
    Numerical_Solver::X = new double [Nx*Nx];
30 Numerical_Solver::Y = new double [Nx*Nx];

    Hmax = H[0];

```



```
Bmax = B[0];  
35  
for (int i=0; i<Nx; i++)  
{  
    for (int j=0; j<Ny; j++)  
    {  
40      X[i*Ny+j] = hx*i;  
        Y[i*Ny+j] = hy*j;  
  
        S[i*Ny+j] = 7;  
  
45      if (j==0)  
        {  
            S[i*Ny+j] = 1;  
        }  
  
50      if (i==Nx-1)  
        {  
            S[i*Ny+j] = 2;  
        }  
  
55      if (j==Ny-1)  
        {  
            S[i*Ny+j] = 3;  
        }  
  
60      if (i==0)  
        {  
            S[i*Ny+j] = 4;  
        }  
  
65      if (H[i*Ny+j] > Hmax) {Hmax = H[i*Ny+j];}  
        if (B[i*Ny+j] > Bmax) {Bmax = B[i*Ny+j];}  
  
    }  
70 }  
  
S[0*Ny+0] = 41; // bottom left  
S[(Nx-1)*Ny+0] = 12; // bottom right
```

```

75 S[(Nx-1)*Ny+Ny-1] = 32; // top right
   S[0*Ny+Ny-1] = 43; // top left

   //
   *****

   // Step 2-> Defining epsilon for each point (i,j) for wet-dry
   bottom conditions
   //
   *****

80
   epsilon = new double [Nx*Ny];
   tau = new double [Nx*Ny];
   double MAX_epsilon;
   int I0,J0;

85

   for (int i=1; i<Nx-1; i++)
   {
   for (int j=1; j<Ny-1; j++)
90   {
       epsilon[i*Ny+j] = fabs(B[(i+1)*Ny+j]-B[(i-1)*Ny+j]) + fabs
           (B[i*Ny+j+1]-B[i*Ny+j-1]);
   }
   }

95

   // using tau as intermediate level
   for (int i=1; i<Nx-1; i++)
   {
100   for (int j=1; j<Ny-1; j++)
       {
           MAX_epsilon = epsilon[i*Ny+j];

           for (int k=0; k<3; k++)
105   {
               for (int n=0; n<3; n++)
               {
                   I0 = i-1+k;

```

```

110         J0 = j-1+n;

        if (MAX_epsilon < epsilon[I0*Ny+J0])    MAX_epsilon =
            epsilon[I0*Ny+J0];
    }
}

115     tau[i*Ny+j] = MAX_epsilon;
}
}

120
for (int i=0; i<Nx; i++)
{
    for (int j=0; j<Ny; j++)
    {
125         epsilon[i*Ny + j] = kappa*tau[i*Ny + j];
    }
}

130
//
// *****
//
// Step 3-> Calculating tau for RSWE with wet-dry bottom
// conditions
//
// *****

135 for (int i=0; i<Nx-1; i++)
{
    for (int j=0; j<Ny-1; j++)
    {
140         if (H[i*Ny+j]>epsilon[i*Ny+j])
        {
            tau[i*Ny+j] = alpha*0.5*(hx+hy)/sqrt(gc*H[i*Ny+j]);
        }
        else

```

```

    {
145     tau[i*Ny+j] = 0.0;
    }
  }
}
}

```

Листинг Б.6 Метод `Numerical_scheme_Step_parallel` класса

`Numerical_Solver`

```

#include <math.h>
#include <time.h>
#include <stdio.h>
5 #include <string>
#include <iostream>
#include <fstream>
#include "Problem_Defenition.h"
#include "Numerical_Solver.h"
10 #include "Constants.h"
#include <omp.h>
using namespace std;

15 void Numerical_Solver::Numerical_scheme_time_step_parallel()
{

    #pragma omp parallel for
    for (int m=Ny+1;m<(Nx-2)*Ny+Ny-2+1;m++)
20 {
        int i=int(m/Ny);
        int j = m - i*Ny;
        if (j !=0)
        {
25     double xWS_05R, xWS_05L, xWS_05B, xWS_05T;
        double yWS_05R, yWS_05L, yWS_05B, yWS_05T;
        double RS_05R, RS_05L, RS_05B, RS_05T;
        double xxPT_05R, xxPT_05L, xyPT_05R, xyPT_05L, yxPT_05T,
            yxPT_05B, yyPT_05T, yyPT_05B;
        double xW_05R, xW_05L, yW_05B, yW_05T;
30     double xJ_05R, xJ_05L, yJ_05B, yJ_05T;
        double B_05R, B_05L, B_05B, B_05T, B_c, B_05L05B, B_05L05T
            , B_05R05B, B_05R05T, B_1R, B_1L, B_1B, B_1T;

```

```

double H_05R, H_05L, H_05B, H_05T, H_c, H_05L05B, H_05L05T
, H_05R05B, H_05R05T, H_1R, H_1L, H_1B, H_1T;
double xU_05R, xU_05L, xU_05B, xU_05T, xU_c, xU_05L05B,
xU_05L05T, xU_05R05B, xU_05R05T, xU_1R, xU_1L, xU_1B,
xU_1T;
double yU_05R, yU_05L, yU_05B, yU_05T, yU_c, yU_05L05B,
yU_05L05T, yU_05R05B, yU_05R05T, yU_1R, yU_1L, yU_1B,
yU_1T;
35 double ForceX_05R, ForceX_05L, ForceX_05B, ForceX_05T,
ForceX_c, ForceX_05L05B, ForceX_05L05T, ForceX_05R05B,
ForceX_05R05T, ForceX_1R, ForceX_1L, ForceX_1B,
ForceX_1T;
double ForceY_05R, ForceY_05L, ForceY_05B, ForceY_05T,
ForceY_c, ForceY_05L05B, ForceY_05L05T, ForceY_05R05B,
ForceY_05R05T, ForceY_1R, ForceY_1L, ForceY_1B,
ForceY_1T;
double PhiY_05R, PhiY_05L, PhiY_05B, PhiY_05T, PhiY_c,
PhiY_05L05B, PhiY_05L05T, PhiY_05R05B, PhiY_05R05T,
PhiY_1R, PhiY_1L, PhiY_1B, PhiY_1T;
double PhiX_05R, PhiX_05L, PhiX_05B, PhiX_05T, PhiX_c,
PhiX_05L05B, PhiX_05L05T, PhiX_05R05B, PhiX_05R05T,
PhiX_1R, PhiX_1L, PhiX_1B, PhiX_1T;
double tau_05R, tau_05L, tau_05B, tau_05T, tau_c,
tau_05L05B, tau_05L05T, tau_05R05B, tau_05R05T, tau_1R,
tau_1L, tau_1B, tau_1T;
40
H_05R05T = 0.25*( H[i*Ny+j] + H[(i+1)*Ny+j] + H[i*Ny+j+1]
+ H[(i+1)*Ny+j+1] );
H_05R05B = 0.25*( H[i*Ny+j] + H[(i+1)*Ny+j] + H[i*Ny+j-1]
+ H[(i+1)*Ny+j-1] );
H_05L05T = 0.25*( H[i*Ny+j] + H[(i-1)*Ny+j] + H[i*Ny+j+1]
+ H[(i-1)*Ny+j+1] );
H_05L05B = 0.25*( H[i*Ny+j] + H[(i-1)*Ny+j] + H[i*Ny+j-1]
+ H[(i-1)*Ny+j-1] );
45
H_05R = 0.5*( H[i*Ny+j] + H[(i+1)*Ny+j] );
H_05L = 0.5*( H[(i-1)*Ny+j] + H[i*Ny+j] );
H_05T = 0.5*( H[i*Ny+j] + H[i*Ny+j+1] );
H_05B = 0.5*( H[i*Ny+j-1] + H[i*Ny+j] );
50

```

```

H_1R = H[(i+1)*Ny+j];
H_1L = H[(i-1)*Ny+j];
H_1T = H[i*Ny+j+1];
55 H_1B = H[i*Ny+j-1];

H_c = H[i*Ny+j];
B_c = B[i*Ny+j];

60 B_05R05T = 0.25*( B[i*Ny+j] + B[(i+1)*Ny+j] + B[i*Ny+j+1]
+ B[(i+1)*Ny+j+1] );
B_05R05B = 0.25*( B[i*Ny+j] + B[(i+1)*Ny+j] + B[i*Ny+j-1]
+ B[(i+1)*Ny+j-1] );
B_05L05T = 0.25*( B[i*Ny+j] + B[(i-1)*Ny+j] + B[i*Ny+j+1]
+ B[(i-1)*Ny+j+1] );
B_05L05B = 0.25*( B[i*Ny+j] + B[(i-1)*Ny+j] + B[i*Ny+j-1]
+ B[(i-1)*Ny+j-1] );

65 B_05R = 0.5*( B[i*Ny+j] + B[(i+1)*Ny+j] );
B_05L = 0.5*( B[(i-1)*Ny+j] + B[i*Ny+j] );
B_05T = 0.5*( B[i*Ny+j] + B[i*Ny+j+1] );
B_05B = 0.5*( B[i*Ny+j-1] + B[i*Ny+j] );

70 B_1R = B[(i+1)*Ny+j];
B_1L = B[(i-1)*Ny+j];
B_1T = B[i*Ny+j+1];
B_1B = B[i*Ny+j-1];

75 xU_c = xU[i*Ny+j];

xU_05R05T = 0.25*( xU[i*Ny+j] + xU[(i+1)*Ny+j] + xU[i*Ny+j
+1] + xU[(i+1)*Ny+j+1] );
xU_05R05B = 0.25*( xU[i*Ny+j] + xU[(i+1)*Ny+j] + xU[i*Ny+j
-1] + xU[(i+1)*Ny+j-1] );
80 xU_05L05T = 0.25*( xU[i*Ny+j] + xU[(i-1)*Ny+j] + xU[i*Ny+j
+1] + xU[(i-1)*Ny+j+1] );
xU_05L05B = 0.25*( xU[i*Ny+j] + xU[(i-1)*Ny+j] + xU[i*Ny+j
-1] + xU[(i-1)*Ny+j-1] );

xU_05R = 0.5*( xU[i*Ny+j] + xU[(i+1)*Ny+j] );
xU_05L = 0.5*( xU[(i-1)*Ny+j] + xU[i*Ny+j] );

```

```

85  xU_05T = 0.5*( xU[i*Ny+j] + xU[i*Ny+j+1] );
    xU_05B = 0.5*( xU[i*Ny+j-1] + xU[i*Ny+j] );

    xU_1R = xU[(i+1)*Ny+j];
90  xU_1L = xU[(i-1)*Ny+j];
    xU_1T = xU[i*Ny+j+1];
    xU_1B = xU[i*Ny+j-1];

    yU_c = yU[i*Ny+j];
95

    yU_05R05T = 0.25*( yU[i*Ny+j] + yU[(i+1)*Ny+j] + yU[i*Ny+j
        +1] + yU[(i+1)*Ny+j+1] );
    yU_05R05B = 0.25*( yU[i*Ny+j] + yU[(i+1)*Ny+j] + yU[i*Ny+j
        -1] + yU[(i+1)*Ny+j-1] );
    yU_05L05T = 0.25*( yU[i*Ny+j] + yU[(i-1)*Ny+j] + yU[i*Ny+j
        +1] + yU[(i-1)*Ny+j+1] );
    yU_05L05B = 0.25*( yU[i*Ny+j] + yU[(i-1)*Ny+j] + yU[i*Ny+j
        -1] + yU[(i-1)*Ny+j-1] );
100

    yU_05R = 0.5*( yU[i*Ny+j] + yU[(i+1)*Ny+j] );
    yU_05L = 0.5*( yU[(i-1)*Ny+j] + yU[i*Ny+j] );
    yU_05T = 0.5*( yU[i*Ny+j] + yU[i*Ny+j+1] );
    yU_05B = 0.5*( yU[i*Ny+j-1] + yU[i*Ny+j] );
105

    yU_1R = yU[(i+1)*Ny+j];
    yU_1L = yU[(i-1)*Ny+j];
    yU_1T = yU[i*Ny+j+1];
110  yU_1B = yU[i*Ny+j-1];

    ForceX_c = ForceX[i*Ny+j];

115  ForceX_05R05T = 0.25*( ForceX[i*Ny+j] + ForceX[(i+1)*Ny+j]
        + ForceX[i*Ny+j+1] + ForceX[(i+1)*Ny+j+1] );
    ForceX_05R05B = 0.25*( ForceX[i*Ny+j] + ForceX[(i+1)*Ny+j]
        + ForceX[i*Ny+j-1] + ForceX[(i+1)*Ny+j-1] );
    ForceX_05L05T = 0.25*( ForceX[i*Ny+j] + ForceX[(i-1)*Ny+j]
        + ForceX[i*Ny+j+1] + ForceX[(i-1)*Ny+j+1] );

```

```

ForceX_05L05B = 0.25*( ForceX[i*Ny+j] + ForceX[(i-1)*Ny+j]
    + ForceX[i*Ny+j-1] + ForceX[(i-1)*Ny+j-1] );

120 ForceX_05R = 0.5*( ForceX[i*Ny+j] + ForceX[(i+1)*Ny+j] );
ForceX_05L = 0.5*( ForceX[(i-1)*Ny+j] + ForceX[i*Ny+j] );
ForceX_05T = 0.5*( ForceX[i*Ny+j] + ForceX[i*Ny+j+1] );
ForceX_05B = 0.5*( ForceX[i*Ny+j-1] + ForceX[i*Ny+j] );

125 ForceX_1R = ForceX[(i+1)*Ny+j];
ForceX_1L = ForceX[(i-1)*Ny+j];
ForceX_1T = ForceX[i*Ny+j+1];
ForceX_1B = ForceX[i*Ny+j-1];

130 ForceY_c = ForceY[i*Ny+j];

ForceY_05R05T = 0.25*( ForceY[i*Ny+j] + ForceY[(i+1)*Ny+j]
    + ForceY[i*Ny+j+1] + ForceY[(i+1)*Ny+j+1] );
ForceY_05R05B = 0.25*( ForceY[i*Ny+j] + ForceY[(i+1)*Ny+j]
    + ForceY[i*Ny+j-1] + ForceY[(i+1)*Ny+j-1] );
135 ForceY_05L05T = 0.25*( ForceY[i*Ny+j] + ForceY[(i-1)*Ny+j]
    + ForceY[i*Ny+j+1] + ForceY[(i-1)*Ny+j+1] );
ForceY_05L05B = 0.25*( ForceY[i*Ny+j] + ForceY[(i-1)*Ny+j]
    + ForceY[i*Ny+j-1] + ForceY[(i-1)*Ny+j-1] );

ForceY_05R = 0.5*( ForceY[i*Ny+j] + ForceY[(i+1)*Ny+j] );
ForceY_05L = 0.5*( ForceY[(i-1)*Ny+j] + ForceY[i*Ny+j] );
140 ForceY_05T = 0.5*( ForceY[i*Ny+j] + ForceY[i*Ny+j+1] );
ForceY_05B = 0.5*( ForceY[i*Ny+j-1] + ForceY[i*Ny+j] );

ForceY_1R = ForceY[(i+1)*Ny+j];
145 ForceY_1L = ForceY[(i-1)*Ny+j];
ForceY_1T = ForceY[i*Ny+j+1];
ForceY_1B = ForceY[i*Ny+j-1];

tau_c = tau[i*Ny+j];

150 tau_05R05T = 0.25*( tau[i*Ny+j] + tau[(i+1)*Ny+j] + tau[i*
    Ny+j+1] + tau[(i+1)*Ny+j+1] );

```



```

tau_05R05B = 0.25*( tau[i*Ny+j] + tau[(i+1)*Ny+j] + tau[i*
Ny+j-1] + tau[(i+1)*Ny+j-1] );
tau_05L05T = 0.25*( tau[i*Ny+j] + tau[(i-1)*Ny+j] + tau[i*
Ny+j+1] + tau[(i-1)*Ny+j+1] );
tau_05L05B = 0.25*( tau[i*Ny+j] + tau[(i-1)*Ny+j] + tau[i*
Ny+j-1] + tau[(i-1)*Ny+j-1] );
155

tau_05R = 0.5*( tau[i*Ny+j] + tau[(i+1)*Ny+j] );
tau_05L = 0.5*( tau[(i-1)*Ny+j] + tau[i*Ny+j] );
tau_05T = 0.5*( tau[i*Ny+j] + tau[i*Ny+j+1] );
tau_05B = 0.5*( tau[i*Ny+j-1] + tau[i*Ny+j] );
160

tau_1R = tau[(i+1)*Ny+j];
tau_1L = tau[(i-1)*Ny+j];
tau_1T = tau[i*Ny+j+1];
165 tau_1B = tau[i*Ny+j-1];

TypeOfPoint = S[i*Ny+j];

170 if (TypeOfPoint == 7)
{

xW_05R = (tau_05R / H_05R)*((H_1R * xU_1R * xU_1R - H_c
* xU_c * xU_c)/hx
+ (H_05R05T * xU_05R05T
* yU_05R05T -
H_05R05B * xU_05R05B
* yU_05R05B)/hy
175 + gc * H_05R * (H_1R - H_c)/hx + gc *
H_05R * (B_1R - B_c)/hx - H_05R *
ForceX_05R);
xW_05L = (tau_05L / H_05L)*((H_c * xU_c * xU_c - H_1L *
xU_1L * xU_1L)/hx
+ (H_05L05T * xU_05L05T * yU_05L05T -
H_05L05B * xU_05L05B * yU_05L05B)/
hy
+ gc * H_05L * (H_c - H_1L)/hx + gc *
H_05L * (B_c - B_1L)/hx - H_05L *
ForceX_05L);

```

```

180     yW_05T = (tau_05T / H_05T)*((H_05R05T * xU_05R05T *
        yU_05R05T - H_05L05T * xU_05L05T * yU_05L05T)/hx
        + (H_1T * yU_1T * yU_1T - H_c * yU_c *
        yU_c)/hy
        + gc * H_05T * (H_1T - H_c)/hy + gc *
        H_05T * (B_1T - B_c)/hy - H_05T *
        ForceY_05T);
    yW_05B = (tau_05B / H_05B)*((H_05R05B * xU_05R05B *
        yU_05R05B - H_05L05B * xU_05L05B * yU_05L05B)/hx
        + (H_c * yU_c * yU_c - H_1B * yU_1B *
        yU_1B)/hy
        + gc * H_05B * (H_c - H_1B)/hy + gc *
        H_05B * (B_c - B_1B)/hy - H_05B *
        ForceY_05B);

185

    //xJ
    xJ_05R = H_05R*(xU_05R - xW_05R);
    xJ_05L = H_05L*(xU_05L - xW_05L);

190

    //yJ
    yJ_05T = H_05T*(yU_05T - yW_05T);
    yJ_05B = H_05B*(yU_05B - yW_05B);

195

    Ht[i*Ny+j] = H_c - (dT/hx)*(xJ_05R - xJ_05L) - (dT/hy)*(
        yJ_05T - yJ_05B);

    if (Ht[i*Ny+j] != Ht[i*Ny+j])
    {
200         cout << "Error! X: " << X[i*Ny+j] << " Y: " << Y[i*Ny+
            j] << " T: " << Time_elapsed << endl ;
        //Numerical_Solver::Visualization_to_techplot();
        Stop_Numerical_Solver_Flag = 1;
    }

205

    if (Ht[i*Ny+j] > epsilon[i*Ny+j])
    {
        //xWS
        xWS_05R = tau_05R * (H_05R * xU_05R *(xU_1R - xU_c)/hx
            + H_05R * yU_05R * (xU_05R05T - xU_05R05B)/hy

```

210

```

+ gc * H_05R *(H_1R - H_c)/hx + gc * H_05R
  *(B_1R - B_c)/hx - H_05R * ForceX_05R)
;

```

```

xWS_05L = tau_05L * (H_05L * xU_05L *(xU_c - xU_1L)/hx
  + H_05L * yU_05L * (xU_05L05T - xU_05L05B)/hy
  + gc * H_05L *(H_c - H_1L)/hx + gc * H_05L
  * (B_c - B_1L)/hx - H_05L * ForceX_05L
);

```

215

```

xWS_05T = tau_05T * (H_05T * xU_05T *(xU_05R05T -
  xU_05L05T)/hx + H_05T * yU_05T * (xU_1T - xU_c)/hy
  + gc * H_05T *(H_05R05T - H_05L05T)/hx +
  gc * H_05T *(B_05R05T - B_05L05T)/hx -
  H_05T * ForceX_05T);

```

```

xWS_05B = tau_05B * (H_05B * xU_05B *(xU_05R05B -
  xU_05L05B)/hx + H_05B * yU_05B * (xU_c - xU_1B)/hy
  + gc * H_05B *(H_05R05B - H_05L05B)/hx +
  gc * H_05B *(B_05R05B - B_05L05B)/hx -
  H_05B * ForceX_05B);

```

220

```

//yWS

```

```

yWS_05R = tau_05R * (H_05R * xU_05R *(yU_1R - yU_c)/hx
  + H_05R * yU_05R * (yU_05R05T - yU_05R05B)/hy
  + gc * H_05R *(H_05R05T - H_05R05B)/hy +
  gc * H_05R *(B_05R05T - B_05R05B)/hy -
  H_05R * ForceY_05R);

```

225

```

yWS_05L = tau_05L * (H_05L * xU_05L *(yU_c - yU_1L)/hx
  + H_05L * yU_05L * (yU_05L05T - yU_05L05B)/hy
  + gc * H_05L *(H_05L05T - H_05L05B)/hy +
  gc * H_05L *(B_05L05T - B_05L05B)/hy -
  H_05L * ForceY_05L);

```

```

yWS_05T = tau_05T * (H_05T * xU_05T *(yU_05R05T -
  yU_05L05T)/hx + H_05T * yU_05T * (yU_1T - yU_c)/hy
  + gc * H_05T *(H_1T - H_c)/hy + gc * H_05T
  *(B_1T - B_c)/hy - H_05T * ForceY_05T)
;

```

230 yWS\_05B = tau\_05B \* (H\_05B \* xU\_05B \* (yU\_05R05B -  
 yU\_05L05B)/hx + H\_05B \* yU\_05B \* (yU\_c - yU\_1B)/hy  
 + gc \* H\_05B \* (H\_c - H\_1B)/hy + gc \* H\_05B  
 \*(B\_c - B\_1B)/hy - H\_05B \* ForceY\_05B)  
 ;

*//RS*

235 RS\_05R = gc \* tau\_05R \* (xU\_05R \* (0.5 \* H\_1R \* H\_1R -  
 0.5 \* H\_c \* H\_c)/hx + yU\_05R \* (0.5 \* H\_05R05T \*  
 H\_05R05T - 0.5 \* H\_05R05B \* H\_05R05B)/hy  
 + H\_05R \* H\_05R \* ((xU\_1R - xU\_c)/hx + (  
 yU\_05R05T - yU\_05R05B)/hy));

RS\_05L = gc \* tau\_05L \* (xU\_05L \* (0.5 \* H\_c \* H\_c -  
 0.5 \* H\_1L \* H\_1L)/hx + yU\_05L \* (0.5 \* H\_05L05T \*  
 H\_05L05T - 0.5 \* H\_05L05B \* H\_05L05B)/hy  
 + H\_05L \* H\_05L \* ((xU\_1R - xU\_c)/hx + (  
 yU\_05L05T - yU\_05L05B)/hy));

240

RS\_05T = gc \* tau\_05T \* (xU\_05T \* (0.5 \* H\_05R05T \*  
 H\_05R05T - 0.5 \* H\_05L05T \* H\_05L05T)/hx + yU\_05T \*  
 (0.5 \* H\_1T \* H\_1T - 0.5 \* H\_c \* H\_c)/hy  
 + H\_05T \* H\_05T \* ((xU\_05R05T -  
 xU\_05L05T)/hx + (yU\_1T - yU\_c)/hy));

RS\_05B = gc \* tau\_05B \* (xU\_05B \* (0.5 \* H\_05R05B \*  
 H\_05R05B - 0.5 \* H\_05L05B \* H\_05L05B)/hx + yU\_05B \*  
 (0.5 \* H\_c \* H\_c - 0.5 \* H\_1B \* H\_1B)/hy  
 + H\_05B \* H\_05B \* ((xU\_05R05B - xU\_05L05B)/hx  
 + (yU\_c - yU\_1B)/hy));

245

*////xxPT*

xxPT\_05R = xU\_05R \* xWS\_05R + RS\_05R + 2 \* gc \* tau\_05R  
 \* H\_05R \* H\_05R \* 0.5 \* (xU\_1R - xU\_c) / hx;  
 xxPT\_05L = xU\_05L \* xWS\_05L + RS\_05L + 2 \* gc \*  
 tau\_05L \* H\_05L \* H\_05L \* 0.5 \* (xU\_c - xU\_1L)/hx;

250

*////yxPT*

```

yxPT_05T = yU_05T * xWS_05T + gc * tau_05T * H_05T *
  H_05T * 0.5 * ((xU_1T - xU_c)/hy + (yU_1R - yU_c)/hx
);

```

```

yxPT_05B = yU_05B * xWS_05B + gc * tau_05B * H_05B *
  H_05B * 0.5 * ((xU_c - xU_1B)/hy + (yU_c - yU_1L)/hx
);

```

255

```

////xyPT

```

```

xyPT_05R = xU_05R * yWS_05R + gc * tau_05R * H_05R *
  H_05R * 0.5 * ((xU_1T - xU_c)/hy + (yU_1R - yU_c)/
  hx);

```

```

xyPT_05L = xU_05L * yWS_05L + gc * tau_05L * H_05L *
  H_05L * 0.5 * ((xU_c - xU_1B)/hy + (yU_c - yU_1L)/
  hx);

```

```

////yyPT

```

260

```

yyPT_05T = yU_05T * yWS_05T + RS_05T + 2 * gc *
  tau_05T * H_05T * H_05T * 0.5 * (yU_1T - yU_c)/hy;

```

```

yyPT_05B = yU_05B * yWS_05B + RS_05B + 2 * gc *
  tau_05T * H_05T * H_05T * 0.5 * (yU_c - yU_1B)/hy;

```

```

////xUt

```

265

```

//// Well balanced: H[i*Ny+j] _c 0.5*(H2y2+H2y1)

```

```

xUt[i*Ny+j] = (H_c * xU_c + dT * PhiX[i*Ny+j] + (dT/hx
) * (xxPT_05R - xxPT_05L) - (dT/hx) * (xU_05R *
xJ_05R - xU_05L * xJ_05L) - 0.5 * gc * (dT/hx) * (
H_05R * H_05R - H_05L * H_05L)
+ (dT/hy) * (yxPT_05T - yxPT_05B) - (dT/hy)*(xU_05T
* yJ_05T - xU_05B * yJ_05B) + dT * (0.5 * (H_05R
+ H_05L) - tau_c * ((H_05R * xU_05R - H_05L *
xU_05L)/hx
+ (H_05T * yU_05T - H_05B * yU_05B)/hy)) * (
ForceX_c - gc * (B_05R - B_05L)/hx ))/H[i
*Ny+j];

```

270

```

////yUt

```

```

//// Well balanced: H[i*Ny+j] _c 0.5*(H2y2+H2y1)

```

```

yUt[i*Ny+j] = (H_c * yU_c + dT*PhiY[i*Ny+j] + (dT/hx)
* (xyPT_05R - xyPT_05L) - (dT/hx) * (yU_05R *

```

```

    xJ_05R - yU_05L * xJ_05L) + (dT/hy) * (yyPT_05T -
    yyPT_05B)
    - (dT/hy) * (yU_05T * yJ_05T - yU_05B * yJ_05B) -
    0.5 * gc * (dT/hy) * (H_05T * H_05T - H_05B *
    H_05B) + dT * (0.5 * (H_05T + H_05B)
275         - tau_c * ((H_05R * xU_05R - H_05L * xU_05L)
            /hx + (H_05T * yU_05T - H_05B * yU_05B)/
            hy )) * ( ForceY_c - gc * (B_05T - B_05B)
            /hy ))/H[i*Ny+j];

    }
    else
    {
280         xUt[i*Ny+j] = 0.0;
        yUt[i*Ny+j] = 0.0;
    }
    } //if (TypeOfPoint == 7)
  } //for (j=1; j<(Ny-1); j++)
285 } // for (i=1; i<(Nx-1); i++)

//#pragma omp barrier
for (int m=0;m<2*Nx+2*Ny;m++)
{
290   int I_min = 0;
   int I_max = Nx-1;
   int J_min = 0;
   int J_max = Ny-1;

295   int i=0;
   int j=0;

   if (m<Ny)
   {
300     i = I_min;
     j = m;
   }
   else if ((m%2==0) && (m<Ny+2*Nx))
   {
305     i = int((m-Ny)/2)+1;
     j = J_max;
   }
}

```

```

else if ((m%2==1) && (m<Ny+2*Nx))
{
310   i = int((m-Ny)/2)+1;
      j = J_min;
}
else
{
315   i = I_max;
      j = m - 2*Nx - Ny;
}

// 1 - bottom boundary
320 // 2 - right boundary
// 3 - top boundary
// 4 - left boundary

TypeOfPoint = S[i*Ny+j];

325
if (TypeOfPoint == 1)
{
    //Ht[i*Ny+j] = Ht[i*Ny+j+1];
    xUt[i*Ny+j] = xUt[i*Ny+j+1];
330   yUt[i*Ny+j] = - yUt[i*Ny+j+1];

    Ht[i*Ny+j] = Ht[i*Ny+j+1] + B[i*Ny+j+1] - B[i*Ny+j] /*-
        0.5*(ForceY[i*Ny+j]+ForceY[i*Ny+j+1])*hy/gc*/;
}
if (TypeOfPoint == 2)
335 {
    xUt[i*Ny+j] = - xUt[(i-1)*Ny+j];
    yUt[i*Ny+j] = yUt[(i-1)*Ny+j];
    Ht[i*Ny+j] = Ht[(i-1)*Ny+j] + B[(i-1)*Ny+j] - B[i*Ny+j]
        /*+ 0.5*(ForceX[i*Ny+j]+ForceX[(i-1)*Ny+j])*hx/gc*/;
}
340 if (TypeOfPoint == 3)
{
    xUt[i*Ny+j] = xUt[i*Ny+j-1];
    yUt[i*Ny+j] = - yUt[i*Ny+j-1];
    Ht[i*Ny+j] = Ht[i*Ny+j-1] + B[i*Ny+j-1] - B[i*Ny+j] /*+
        0.5*(ForceY[i*Ny+j]+ForceY[i*Ny+j-1])*hy/gc*/;
345 }

```

```

if (TypeOfPoint == 4)
{
  xUt[i*Ny+j] = - xUt[(i+1)*Ny+j];
  yUt[i*Ny+j] = yUt[(i+1)*Ny+j];
350
  Ht[i*Ny+j] = Ht[(i+1)*Ny+j] + B[(i+1)*Ny+j] - B[i*Ny+j]
    /*-0.5*( ForceX[i*Ny+j]+ ForceX[(i+1)*Ny+j])*hx/gc*/;
}

///S[0*Ny+0] = 41;
355 ///S[(Nx-1)*Ny+0] = 12;
///S[(Nx-1)*Ny+Ny-1] = 32;
///S[0*Ny+Ny-1] = 43;

if (TypeOfPoint == 41)
360 {
  xUt[i*Ny+j] = - xUt[(i+1)*Ny+j+1];
  yUt[i*Ny+j] = - yUt[(i+1)*Ny+j+1];
  Ht[i*Ny+j] = Ht[(i+1)*Ny+j+1] + B[(i+1)*Ny+j+1] - B[i*Ny+
    j] /*- 0.5*(ForceX[i*Ny+j]+ForceX[(i+1)*Ny+j+1])*hx/gc
    - 0.5*(ForceY[i*Ny+j]+ ForceY[(i+1)*Ny+j+1])*hy/gc*/;
}
365 if (TypeOfPoint == 12)
{
  xUt[i*Ny+j] = - xUt[(i-1)*Ny+j+1];
  yUt[i*Ny+j] = - yUt[(i-1)*Ny+j+1];
  Ht[i*Ny+j] = Ht[(i-1)*Ny+j+1] + B[(i-1)*Ny+j+1] - B[i*Ny+j
    ] /*+ 0.5*(ForceX[i*Ny+j]+ ForceX[(i-1)*Ny+j+1])*hx/gc
    - 0.5*(ForceY[i*Ny+j]+ ForceY[(i-1)*Ny+j+1])*hy/gc*/;
370 }

if (TypeOfPoint == 32)
{
  xUt[i*Ny+j] = - xUt[(i-1)*Ny+j-1];
  yUt[i*Ny+j] = - yUt[(i-1)*Ny+j-1];
375 Ht[i*Ny+j] = Ht[(i-1)*Ny+j-1] + B[(i-1)*Ny+j-1] - B[i*Ny+
    j] /*+ 0.5*(ForceX[i*Ny+j]+ ForceX[(i-1)*Ny+j-1])*hx/gc
    + 0.5*(ForceY[i*Ny+j]+ ForceY[(i-1)*Ny+j-1])*hy/gc*/;
}

if (TypeOfPoint == 43)
{
  xUt[i*Ny+j] = - xUt[(i+1)*Ny+j-1];

```



```

380     yUt[i*Ny+j] = - yUt[(i+1)*Ny+j-1];
        Ht[i*Ny+j] = Ht[(i+1)*Ny+j-1] + B[(i+1)*Ny+j-1] - B[i*Ny+
            j] /*- 0.5*(ForceX[i*Ny+j]+ ForceX[(i+1)*Ny+j-1])*hx/gc
            + 0.5*(ForceY[i*Ny+j]+ForceY[(i+1)*Ny+j-1])*hy/gc*/;

        }

385     }
        #pragma omp parallel for
        for (int m=0;m<Nx*Ny;m++)
        {
            int i=int(m/Ny);
390     int j = m - i*Ny;

            H[i*Ny+j] = Ht[i*Ny+j];
            xU[i*Ny+j] = xUt[i*Ny+j];
            yU[i*Ny+j] = yUt[i*Ny+j];
395

            if (H[i*Ny+j]>epsilon[i*Ny+j])
            {
                tau[i*Ny+j] = alpha*0.5*(hx+hy)/sqrt(gc*H[i*Ny+j]);
            }
400     else
            {
                tau[i*Ny+j] = 0.0;
            }

            }
405 } // for (m=0; m<(Ny*Nx); m++)
    }

```