

На правах рукописи

Савенков Евгений Борисович

Математическое моделирование развития флюидонаполненных
трещин в пороупругой среде

Специальность 05.13.18 — «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2020

Работа выполнена в Федеральном государственном учреждении «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук».

Официальные оппоненты: **Сушинов Александр Иванович**,
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук, профессор,
Донской государственной технической университет,
кафедра «Математики и Информатики»,
заведующий кафедрой

Лаевский Юрий Миронович,
доктор физико-математических наук, профессор,
Институт вычислительной математики и
математической геофизики СО РАН,
главный научный сотрудник

Мухин Сергей Иванович,
доктор физико-математических наук,
МГУ имени М.В. Ломоносова,
факультет ВМиК,
кафедра Вычислительных методов,
профессор

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт автоматизации
проектирования РАН

Защита состоится 10 декабря 2020 года в ___ часов на заседании диссертационного совета Д002.024.03 при ИПМ им. М.В. Келдыша РАН по адресу 125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

Автореферат разослан ___ _____ 2020 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д002.024.03,
кандидат физ.-мат. наук

М.А. Корнилина

1 Общая характеристика работы

Актуальность работы

и современное состояние работ по тематике исследования

Общая проблематика. Основной тематикой, которой посвящена настоящая работа, является разработка математических моделей, вычислительных алгоритмов и комплекса программ для математического моделирования динамики флюидонаполненных трещин, в частности — трещин гидроразрыва пласта.

Технология гидроразрыва (ГРП) заключается в закачке в нефтеносный пласт специальной жидкости с целью создания искусственной (техногенной) трещины длиной ~ 100 м, высотой ~ 10 м и средним раскрытием $\sim 5\text{--}10$ мм). В результате создается соединенный со скважиной искусственный канал с большой площадью притока. Он имеет высокую, на порядки превышающую пластовую, проницаемость. Это обеспечивает значительное увеличение притока пластового флюида к скважине.¹

Создание трещины гидроразрыва является экономически дорогим и технически сложным процессом. По этой причине важным является обоснование применимости технологии в случае каждой отдельной скважины. Для этого необходимо оценить возможность создания трещины с заданными параметрами с учетом влияния свойств напряженно-деформированной среды на процесс развития трещины, ее конечные геометрические и фильтрационные характеристики, в том числе траекторию. Полноценное решение этих задач в настоящее время доступно только средствами математического моделирования. По этой причине анализу и математическому моделированию процесса развития флюидонаполненных трещин уделяется большое внимание. Это относится как к теоретическому анализу процесса с точки зрения механики сплошной среды, так и к разработке вычислительных алгоритмов и программ, пригодных для прикладного анализа.

В соответствии с общепринятыми представлениями нефтеносный пласт представляет собой пористую среду, пустотное пространство которой заполнено флюидом. Процессы деформации пласта и фильтрации флюида в нем происходят совместно, согласованным образом. Совокупность процессов, сопровождающих и влияющих на процесс развития флюидонаполненной трещины в пороупругой среде, включает в себя следующие:

- эволюция полей давления флюида и напряженно-деформированного со-

¹Салимов В.Г., Ибрагимов Н.Г., Насыбуллин А.В., Салимов О.В. Гидравлический разрыв карбонатных пластов. М.: Нефтяное хозяйство, 2013. 471 с.

стояния вмещающей трещину среды в ходе развития трещины и изменения состояния флюида в ней;

- течение жидкости в пустотном пространстве трещины, которое представляет собой тонкий слой с априорно неизвестными геометрическими параметрами;
- геометрическая эволюция срединной поверхности трещины, обусловленная как состоянием флюида внутри нее, так и полями давления и напряжений во вмещающей трещину среде.

Указанные процессы взаимосвязаны и не могут быть рассмотрены в рамках частных моделей.

Математическое моделирование развития флюидонаполненных трещин является сложной задачей с точки зрения разработки как математических моделей, так и вычислительных алгоритмов. Ниже будет кратко рассмотрено состояние работ по обоим вопросам.

Модели. Первые модели гидроразрыва пласта появились в 1950-1970-х годах^{2,3,4,5,6,7}. Результатом этих работ стало появление двух основных упрощенных моделей, которые по имени предложивших их авторов называются моделями KGD (Khristianovich–Geertsma–de Klerk) и PKN (Perkins–Kern–Nordgreen). Основными допущениями, в рамках которых построены эти модели, являются двумерность напряженно-деформированного состояния пласта, априорная параметризация формы трещины, то есть профиля ее срединной поверхности и раскрытия, и ее ориентация (вертикальная или горизонтальная). Это позволяет свести задачу к одномерной с минимальным набором параметров, среди которых объем закачанной в пласт жидкости и значения пластовых напряжений. Эти параметры являются наблюдаемыми и часто известны с достаточной для приложений точностью. Фильтрационные эффекты, связанные с утечкой флюида из трещины в пласт, в рамках этих моделей описываются упрощенными зависимостями. Наиболее распростра-

²Carter, R.D. Derivation of the General Equation for Estimating the Extent of the Fractured Area, Appendix I of "Optimum Fluid Characteristics for Fracture Extension" // Drilling and Production Practice, G.C. Howard and C.R. Fast, New York, New York, USA, American Petroleum Institute (1957), 261–269.

³Khristianovich, S.A. and Zheltov, Y.P. Formation of Vertical Fractures by Means of Highly Viscous Liquid, Proc., Fourth World Pet. Congress, Rome (1955) 2, 579–586.

⁴Khristianovich, S.A., Zheltov, Y.P., Barenblatt, G.I. and Maximovich, G.K. Theoretical Principles of Hydraulic Fracturing of Oil Strata, Proc., Fifth World Petroleum Congress, New York (1959).

⁵Perkins T.K. and Kern L.R. Widths of Hydraulic Fractures, paper SPE 89, Journal of Petroleum Technology (September 1961) 13, No. 9, 937–949.

⁶Geertsma, J. and de Klerk, F. A Rapid Method of Predicting Width and Extent of Hydraulic Induced Fractures, paper SPE 2458, Journal of Petroleum Technology (December 1969) 21, 1571–1581.

⁷Nordgren, R.P. Propagation of a Vertical Hydraulic Fracture // SPE paper 7834, SPE Journal (August 1972) 12, No. 8, 306–314.

ненной является модель Картера⁸ и ее обобщения. Они построены на основе аналитического решения модельных задач фильтрации в окрестности трещины и используют эмпирические параметры. Их значения определяются на основе качественного и количественного анализа свойств конкретного пласта, насыщающих трещину и пласт флюидов, или известных корреляционных зависимостей, построенных на основе многочисленных экспериментов. Дополнительные эффекты учитываются введением в базовую модель «подгоночных» коэффициентов. Модели KGD и PKN получили широкое распространение и инициировали развитие более сложных, псевдотрехмерных (pseudo-3D, P3D) моделей, которые являются основой большинства промышленных симуляторов дизайн–проектов гидроразрыва пласта.⁹ Назначением этих программ является прогнозирование профиля трещины (формы ее срединной поверхности) и поля раскрытия в зависимости от свойств жидкости разрыва, структуры и свойств пласта. Основу моделей этого класса составляет уравнение течения жидкости внутри трещины, которое обычно рассматривается в приближении смазочного слоя. Эффекты, связанные с упругими свойствами вмещающей среды, учитываются упрощенно, по существу в том же виде, что и в моделях типа KDG и PKN. В целом модели этого типа позволяют учитывать слоистость распределения упругих и фильтрационных свойств пласта, неньютоновскую реологию жидкости разрыва, перенос пропанта, поверхностная концентрация которого в итоге и определяет раскрытие трещины, и ряд других эффектов.

Модели «следующего поколения» основаны на прямом решении уравнений смазочного слоя для жидкости разрыва (модели типа planar-3D). Качество описания течения флюида в трещине у моделей этого класса является вполне достаточным для практических приложений. Вместе с тем, учет влияния на динамику развития трещины и течения флюида в ней особенностей распределения полей механических напряжений и давления в пласте мало отличается от описанных ранее простых моделей. Примерами программ-симуляторов дизайн-проектов гидроразрыва пласта, основанных на описанных выше моделях, являются такие программы как MFRACK,¹⁰ GOHFER,¹¹ FRACPRO¹² и ряд других. Вопрос корректности и применимости используемых в этих симуляторах математических моделей и алгоритмов в целом не

⁸Carter, E. (1957). Optimum fluid characteristics for fracture extension. In Howard, G. and Fast, C., editors, *Drilling and Production Practices*, pages 261–270. American Petroleum Institute, Tulsa OK.

⁹Economides, M. (ed.) *Reservoir stimulation*. 3rd ed., Wiley and Son, 2000.

¹⁰Mfrac // 2012, <http://www.mfrac.com/>

¹¹GOHFER // 2012, <http://www.gohfer.com/>

¹²FRACPRO fracture design and analysis software. 2015.

закрыт (в том числе и с точки зрения используемых в них эмпирических зависимостей). Так, например, в^{13,14} приведено сравнение результатов моделирования развития трещины в одних и тех же условиях для 5 таких программ. Получающиеся результаты существенно отличаются в зависимости от используемой программы.

Таким образом, развитие моделей динамики флюидонаполненных трещин в основном идет по пути формального и не всегда обоснованного усложнения сравнительно простых моделей. Эти обобщения не позволяют анализировать влияние на динамику развития трещины вторичных геомеханических и фильтрационных эффектов разработки — динамики полей давления, связанной с работой соседних добывающих и нагнетательных скважин и вызванными ими эффекты переориентации полей пластовых напряжений. Также невозможен учет интерференции нескольких трещин в масштабе элемента системы заводнения или нескольких трещин на одной горизонтальной скважине; учет неоднородности распределения механических и фильтрационных свойств пласта. Одной из важных задач является обоснование возможности применения более простых моделей, традиционно используемых для анализа процесса развития трещин.

Корректное описание процесса развития трещины в этих ситуациях требует самосогласованного учета фильтрационных и механических эффектов. Именно этого не позволяют большинство применяемых в настоящее время моделей гидроразрыва пласта.

Рассмотрим сначала способы описания частных процессов, сопровождающих развитие трещины. С точки зрения своих механических и фильтрационных свойств пористая насыщенная среда описывается как двухфазная система, состоящая из неподвижной фазы — пористого скелета, и подвижной — флюида, протекающего сквозь поры при наличии градиента давления. Напряженно-деформированное состояние такой среды в простейшем случае описывается уравнениями теории упругости. При этом в тензор напряжений входит поправка, пропорциональная давлению флюида в порах. В уравнение фильтрации, выражающее закон сохранения массы флюида, добавляются члены, описывающие изменение массы жидкости в единице объема пористой среды за счет деформации скелета. Модели такого типа изучаются в теории пороупругости, которая в настоящее время достаточно хорошо раз-

¹³Warpinski, N., Abou-Sayed, I.S., Moschovidis, Z., Parker, C. Hydraulic fracture model comparison study : complete results : topical report // Sandia National Laboratories report GRI93/0109. 1993.

¹⁴Warpinski, N., Abou-Sayed, I.S., Moschovidis, Z., Parker, C. Comparison study of hydraulic fracturing models — Test Case: GRI Staged Field Experiment No. 3 // SPE Production & Facilities, February 1994.

работана как с теоретической, так и с вычислительной точки зрения (см., например, ^{15,16}).

Считается, что для описания развития трещины достаточно использовать модели хрупкого разрушения и линейной (геометрически и физически) теории упругости. Для упругих сред без учета фильтрационных эффектов теория хрупкого разрушения хорошо разработана. Предложены различные критерии развития трещин, как механистические (сформулированные в терминах коэффициентов интенсивности напряжений), так и энергетические. В частности, построена теория J -интеграла Черепанова-Райса, которая позволяет связать возможность развития трещины и направление ее развития с количеством энергии, выделяемой в среде в ходе этого процесса. Развита алгоритмы численного решения задач динамики трещин, в том числе в трехмерных постановках. Эти методы включают в себя как классические, например, метод конечных элементов или граничных интегральных уравнений, так и современные подходы, основанные, например, на «обобщенном» или «расширенном» методе конечных элементов (eXtended Finite Element Method/X-FEM). Они позволяют описывать геометрию трещины, не согласованную с расчетной сеткой во вмещающей среде. Последнее особенно важно в силу того, что геометрический характер развития трещины, вообще говоря, априори неизвестен.

Теоретическому анализу развития заполненной флюидом трещины в упругой или пороупругой среде также посвящено значительное количество работ^{17,18,19,20,21}. Однако в такой постановке задача качественно сложнее упругого случая.

Практически все полученные ранее результаты являются двумерными по своей природе. Сравнительно мало работ, посвященных вопросам математического моделирования динамики флюидонаполненных трещин в пороупру-

¹⁵Coussy, O., 2004, Poromechanics, John Wiley & Sons. 312 pages, 2nd edition.

¹⁶Lewis, R.W., Sukirman, Y. Finite Element Modelling of Three-Phase Flow in Deforming Saturated Reservoirs // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, vol. 17, pp. 577-598, 1993.

¹⁷Detournay, E., Garagash, D. The near-tip region of a fluid-driven fracture propagating in a permeable elastic solid // Fluid Mech. , vol. 494, pp. 1-32. 2003.

¹⁸Garagash, D. Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture during injection and shut-in: Asymptotics of large toughness // Engineering Fracture Mechanics, vol. 73, pp. 456-481, 2006.

¹⁹Garagash, D.I., Detournay, E., The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium // ASME J. Appl. Mech. 2000. 67 (1), 183-192.

²⁰Savitski, A., Detournay, E. Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions // Int. J. Solids Struct., 39:6311-6337, 2002.

²¹Линьков А. М. Уравнение скорости и его применение для решения некорректных задач о гидроразрыве // Доклады Академии наук, 2011, том 439, № 4, с. 473-475.

гой среде в трехмерных постановках. Например, в работе²² рассматривается модель, включающая в себя уравнения теории упругости и гидродинамику течения в трещине. Вычислительный алгоритм основан на методе граничных интегральных уравнений. Он не позволяет рассматривать пороупругие среды и среды с существенно неоднородными распределениями свойств. В работе²³ рассматривается сходная модель, позволяющая учитывать приближенным способом взаимное влияние нескольких трещин. По существу, постановка не является самосогласованной с точки зрения механики.

Модели описанного типа широко распространены как в теоретических исследованиях, так и на практике. Их применение позволило решить широкий круг важных задач обоснования и применения технологии гидроразрыва. Вместе с тем, несмотря на значительный прогресс в моделировании гидроразрыва пласта, достигнутый к настоящему времени, можно сказать следующее:

- большинство подходов для описания динамики развития трещин используют двумерное приближение;
- направление развития моделей связано преимущественно с их техническим усложнением и формальным переносом полученных двумерных результатов на трехмерный случай;
- в большинстве своем существующие модели не описывают развитие трещины с учетом всех основных сопровождающих развитие механизмов.

Такая ситуация в значительной степени связана с алгоритмическими проблемами, рассмотренными ниже.

Алгоритмы. Вычислительные алгоритмы и программы для моделирования динамики трещины гидроразрыва пласта в рамках трехмерных моделей появились только в последние годы. В целом нет возможности охарактеризовать соответствующие направления или классифицировать подходы — текущая ситуация сводится к сравнительно небольшому числу отдельных работ, затрагивающих отдельные аспекты моделирования. Перечень рассматриваемых вопросов крайне разнообразен. Он включает выбор и обоснование модели того или иного вида, решение полной системы уравнений в рамках итерационного связывания или «монолитной» постановки, конкретные способы построения конечномерных аппроксимаций для уравнений во вмещающей среде и в трещине, учет граничных условий на срединной поверхности

²²Carter, B.J., Desroches, J., Ingraffea, A.R., Wawrzynek, P.A., Simulating Fully 3D Hydraulic Fracturing // Modeling in Geomechanics. Ed. Zaman, Booker, and Gioda, Wiley Publishers. 2000.

²³Kresse, O., Weng, X., Gu, H., Wu, R., Numerical Modeling of Hydraulic Fractures Interaction in Complex Naturally Fractured Formations // Rock Mech Rock Eng (2013) 46:555–568.

трещины и ее фронте, см., например^{24,25,26}. Можно выделить следующие особенности таких работ:

- ряд из них используют достаточно сложные математические модели, однако соответствующие вычислительные алгоритмы не позволяют исследовать полный спектр актуальных постановок. В частности, часто рассматриваются упругие постановки с однородным или кусочно-однородным распределением свойств вмещающей трещину среды;
- используются вычислительные методы, основанные на применении нескольких алгоритмов или пакетов программ, отвечающих за решение частных задач.

Полный анализ соответствующих вопросов в настоящее время отсутствует.

Таким образом, рассмотренная задача является комплексной. Она требует разработки как новых математических моделей динамики развития флюидонаполненных трещин, так и вычислительных методов и алгоритмов, пригодных для эффективного применения построенных моделей в актуальных постановках.

Существующие в настоящее время способы решения этих проблем, прежде всего алгоритмических, в большинстве своем идут по пути формального объединения алгоритмов и программ для решения частных задач. Это не позволяет корректно рассматривать новые классы задач, требующих комплексного описания.

Разработка таких средств моделирования, включающих в себя достаточно «насыщенную» математическую модель, комплекс вычислительных методов и алгоритмов, максимально адаптированных для анализа связанных постановок, а также соответствующее программное обеспечение, является актуальной, но до конца не решенной задачей.

Научная проблема. Научной проблемой, на решение которой направлена работа, является создание новых средств математического моделирования (математических моделей, комплекса вычислительных методов и алгоритмов и их программной реализации) процесса развития крупномасштабной флюидонаполненной трещины в связанной постановке. Задача рассматривается в трехмерной постановке и без существенных априорных допущений о геомет-

²⁴Carter, B.J., Desroches, J., Ingraffea, A.R., Wawrzynek, P.A., Simulating Fully 3D Hydraulic Fracturing // Modeling in Geomechanics. Ed. Zaman, Booker, and Gioda, Wiley Publishers. 2000.

²⁵Gordeliy, E., Peirce, A. Coupling schemes for modeling hydraulic fracture propagation using the X-FEM // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 253 (2013) 305–322.

²⁶Weber, N. The X-FEM for Hydraulic Fracture Mechanics // PhD Thesis, Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule, Aachen, 2016, 149 pp.

рии срединной поверхности трещины. Математическая модель предназначена для самосогласованного описания процесса развития трещины с учетом основных механизмов, определяющих динамику ее развития, включая: течение флюида в трещине; напряженно-деформированное состояние вмещающего трещину пласта; процессы фильтрации в пласте, утечку флюида из трещины в пласт; физически обоснованные критерии развития трещины. Вычислительные алгоритмы должны учитывать особенности задачи, обладать единой алгоритмической базой, преемственностью по данным и являться «тесно связанными» между собой в указанном смысле.

Цели и задачи исследования. Целью исследования является разработка математических моделей, вычислительных методов, алгоритмов и комплекса программ для математического моделирования динамики развития флюидонаполненной трещины в связанной постановке с учетом течения в трещине, пороупругих процессов в среде и обоснованных критериев ее развития.

Для достижения поставленной цели в диссертационной работе решены следующие задачи:

- проведен анализ существующих способов математического моделирования динамики развития трещин, в том числе флюидонаполненных;
- разработана математическая модель развития трещины в трехмерной связанной постановке, учитывающая основные гидродинамические и упругие эффекты, сопровождающие ее развитие, включая пороупругие процессы во вмещающей среде, течение в трещине и ее развитие в соответствии с физически обоснованными критериями;
- разработан комплекс вычислительных методов и алгоритмов для решения полной связанной задачи о развитии трещины в рамках единой алгоритмической базы, обеспечивающей преемственность вычислительных алгоритмов для частных задач по данным;
- выполнена программная реализация разработанных вычислительных методов и алгоритмов и проведены вычислительные эксперименты, демонстрирующие их пригодность для моделирования динамики флюидонаполненных трещин в актуальных постановках.

Научная новизна. Основные результаты работы, обладающие существенной новизной:

- Трехмерная математическая модель развития флюидонаполненной трещины в пороупругой среде, включающая в себя группы уравнений пороупругости, течения в трещине и развития срединной поверхности трещины. Построенная модель является согласованной, неизотермической,

описывает трещину с произвольной гладкой срединной поверхностью. Развитие трещины определяется критерием с использованием векторного J -интеграла Черепанова-Райса.

- Вычислительные алгоритмы для описания эволюции срединной поверхности трещины с использованием метода проекции ближайшей точки, интегрирования по поверхности, вычисления локальных базисов в окрестности трещины. Эволюция поверхности описывается непосредственно в терминах эволюции оператора проекции ближайшей точки, без явной аппроксимации поверхности.
- Вычислительный алгоритм «расширенного» метода конечных элементов — X-FEM/CP, использующий метод проекции ближайшей точки для представления поверхности и описания ее эволюции.
- Вариационные (слабые) постановки начально-краевых задач для решения уравнения смазочного слоя на стационарных и эволюционирующих поверхностях с краем с применением метода проекции ближайшей точки. Построенные постановки основаны на продолжении уравнения на поверхности в трехмерное пространство и вариационном способе учета главных граничных условий на границе трещины.
- Метод решения уравнений смазочного слоя на стационарных и эволюционирующих поверхностях с краем. Предложенный метод использует эйлерово описание течения в области с изменяющейся геометрией, основан на конечно-элементном варианте метода проекции ближайшей точки с использованием построенных вариационных постановок.
- Вычислительный алгоритм решения полной связанной задачи развития флюидонаполненной трещины в рамках предложенной трехмерной самосогласованной модели. Алгоритм является эйлеровым, использует единое представление поверхности для решения пороупругой задачи во вмещающей трещину среде и течения в трещине и единую заданную в пространстве эйлерову расчетную сетку, без использования расчетной сетки, заданной на срединной поверхности трещины.
- Комплекс программ для моделирования развития флюидонаполненных трещин, реализующий предложенные новые модели и алгоритмы. Обоснование эффективности кода при решении задач с учетом практически важных особенностей и эффектов, сопровождающих развитие трещин гидроразрыва.

Теоретическая и практическая значимость работы. Предложен комплекс средств математического моделирования (математические модели,

вычислительные методы, алгоритмы и программы) для решения крупной научно-прикладной задачи — анализа развития крупномасштабных флюидонаполненных трещин в пороупругой среде. Результаты работы дают основу для разработки новых перспективных средств моделирования, предназначенных для решения широкого спектра задач прикладной геофизики, в том числе нефтегазодобычи, которые имеют важное значение с точки зрения эффективной разработки недр как стратегического ресурса.

С теоретической точки зрения, создан цельный и пригодный для дальнейшего развития комплекс алгоритмов для моделирования целевой задачи. Полученные в работе теоретические результаты использованы при разработке комплексов программ, предназначенных для моделирования развития флюидонаполненных трещин в пороупругой среде [22, 23].

Методология и методы исследования. Для решения поставленных в диссертационной работе задач использованы методы механики сплошной среды, теории трещин в рамках механики хрупкого разрушения, термомеханики, гидродинамики, методы вычислительной математики, в частности, теория и приложения метода конечных элементов для решения нестационарных начально-краевых задач, методы вычислительной геометрии.

Достоверность результатов. Достоверность результатов исследования обеспечена использованием в работе современных обоснованных представлений механики и гидродинамики сплошной среды и обоснованных механизмов развития трещин, самосогласованных и непротиворечиво связанных математических моделей, построенных на основе фундаментальных законов механики и гидродинамики сплошной среды; использованием обоснованных методов вычислительной математики и математического моделирования; валидацией и верификацией разработанных математических моделей, вычислительных алгоритмов и их программной реализации.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие положения:

- Разработана новая трехмерная самосогласованная математическая модель развития флюидонаполненной трещины в пороупругой среде. Модель учитывает все основные механизмы, сопровождающие развитие трещины, включая пороупругие эффекты в среде и течение в трещине с самосогласованным учетом потоков консервативных величин между ними. Развитие трещины описывается с минимальными ограничениями на геометрию ее срединной поверхности и с использованием физически обоснованных критериев развития трещины.

- Предложены вычислительные алгоритмы для описания эволюции срединной поверхности трещины с использованием метода проекции ближайшей точки, интегрирования по поверхности, вычисления локальных базисов в окрестности трещины. Эволюция поверхности описывается непосредственно в терминах эволюции оператора проекции ближайшей точки, без явной аппроксимации поверхности.
- Разработан оригинальный вариант алгоритма «расширенного» метода конечных элементов — X-FEM/CP, использующий метод проекции ближайшей точки для описания геометрии срединной поверхности трещины и ее эволюции.
- Предложены новые слабые постановки начально-краевых задач для решения уравнений на поверхностях с краем. Они основаны на продолжении уравнения с поверхности в пространство с помощью метода проекции ближайшей точки и используют вариационный учет главных граничных условий.
- Разработан алгоритм решения уравнений смазочного слоя на стационарных и эволюционирующих поверхностях с краем. Алгоритм основан на эйлеровом способе описании течения на срединной поверхности трещины и использует для построения аппроксимаций заданную в пространстве стационарную расчетную сетку, не согласованную с геометрией поверхности. Аппроксимации задачи строятся методом конечных элементов с использованием предложенных вариационных постановок.
- Предложен вычислительный алгоритм решения полной связанной задачи в рамках разработанной трехмерной математической модели развития флюидонаполненной трещины. Алгоритм использует единое представление срединной поверхности трещины в рамках метода X-FEM/CP и метода решения уравнения смазочного слоя на поверхности. Алгоритм является эйлеровым, использует единое представление поверхности для решения задачи во вмещающей трещину пороупругой среде и течения в трещине. Для построения конечномерных аппроксимаций используется единая заданная в пространстве эйлера расчетная сетка, без использования расчетной сетки, заданной на срединной поверхности трещины.
- Разработан программный комплекс, реализующий предложенные модели и алгоритмы, который может служить основой для создания пакета прикладных программ для решения актуальных задач нефтегазодобывающей отрасли. Продемонстрирована работоспособность предложенных

моделей, вычислительных методов, алгоритмов и их программной реализации на примере решения задач с учетом практически важных особенностей и эффектов, сопровождающих развитие флюидонаполненных трещин.

Соответствие работы паспорту специальности. Целью диссертационной работы является разработка математических моделей, вычислительных алгоритмов и их программная реализация, что вносит вклад в следующие области исследований, перечисленные в паспорте специальности 05.13.18 — «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»:

- разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений;
- разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий;
- реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

Апробация работы. Результаты диссертационного исследования докладывались на следующих мероприятиях:

- Всероссийская научно-практическая конференция «Математическое моделирование, информационные системы и базы данных в гидрогеологии», 25-27 сентября 2013 г., Москва.
- 6-я китайско-российская конференция по вычислительной алгебре и приложениям (The Sixth China-Russia Conference on Numerical Algebra with Applications (CRCNAA 2017), ВШЭ, 28-30 августа 2017 г., Москва.
- Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», посвященная памяти академика Л.И. Седова в связи со столетием со дня его рождения, 13–15 ноября 2017 г., МИАН, Москва.
- 7th International Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences IC-MSQUARE 2018, August 27-31, 2018, Moscow, Russia.
- Международная конференция «Перспективные материалы с иерархической структурой для новых технологий и надежных конструкций», 1-5 октября 2018 г., Томск, Россия.
- 4-я Международная научная школа молодых ученых «Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах», Москва, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 24-26 октября, 2018 г.

- 47th International Summer School – Conference «Advanced Problems in Mechanics – 2019», June 24-29, 2019, St. Petersburg, Russia.
- Семинар «Вычислительные методы и математическое моделирование» им. Ю.П. Попова, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2015, 2018.
- Семинар «Математическое моделирование», ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2020.

Личный вклад соискателя. Все представленные в работе и выносимые на защиту результаты получены лично автором, под его руководством или при его непосредственном участии. Общая концепция работы, ее структура, уровень понимания рассматриваемых в ней проблем, основные результаты и выводы работы, положения, выносимые на защиту, отражают творческий вклад автора. В совместных публикациях по теме диссертации вклад автора состоит в определении направления исследования, постановке и решении конкретных задач, включая построение математических моделей и разработку вычислительных алгоритмов, программную реализацию, постановку и определение целей вычислительных экспериментов, проведение расчетов и анализ результатов.

Личный вклад соискателя в публикациях по теме диссертации:

- в работах [16, 18, 19] — постановка задачи, разработка алгоритма, постановка частных расчетных задач, разработка прототипа программы. Вклад соавтора связан с финальной программной реализацией метода и проведением расчетов;
- в работах [3, 8, 10–12, 12] — анализ проблематики и постановка задачи, разработка математических моделей, разработка части теоретических результатов. Вклад соавторов заключается в разработке частных теоретических вопросов;
- в работах [1, 13] — разработка модели и алгоритмов, анализ результатов расчетов. Работа выполнена под руководством автора. Вклад соавторов связан с программной реализацией, разработкой средств пре- и постпроцессинга, проведением расчетов;
- в работе [9] — разработка математической модели, вычислительных алгоритмов. Вклад соавтора заключается в анализе частных моделей;
- в работе [2] — способ представления срединной поверхности и основные вычислительные алгоритмы. Вклад соавторов заключается в уточнении технических деталей алгоритмов, их программной реализации, проведении расчетов;
- в работах [6, 14] — постановка задачи, вычислительный алгоритм мето-

да X-FEM/CP, анализ результатов расчетов. Вклад соавторов связан с программной реализацией части вычислительных алгоритмов и проведением расчетов;

- в работах [5, 16] — постановка и уточнение задачи, анализ результатов расчетов. Вклад соавторов заключается в проведении натурального эксперимента, расчетов и визуализации результатов;
- в работе [4] — разработка математической модели, схемы общего алгоритма и его основных частных компонентов. Вклад соавторов связан с решением частных алгоритмических вопросов и программной реализацией части алгоритмов.

Личный вклад соискателя в разработанное программное обеспечение:

- в программном комплексе [22] — разработка математической модели и комплекса вычислительных алгоритмов, программная реализация большей части программного кода. Вклад соавторов заключался в валидации и верификации разработанной программы, программной реализации вспомогательных алгоритмов общего назначения.
- в программном комплексе [23] — разработка математической модели и комплекса вычислительных алгоритмов, программная реализация части вычислительных алгоритмов, контроль за программной реализацией кода. Вклад соавторов заключался в программной реализации части расчетных модулей, валидации и верификации разработанной программы, проведении ряда расчетов.

Публикации. По теме диссертации в рецензируемых научных изданиях автором опубликована 21 печатная работа [1–21], оформлено 2 свидетельства о регистрации программ [22, 23]. Из них 21 публикация — в изданиях, включенных в перечень ВАК; 15 — в изданиях, индексируемых в РИНЦ; 10 — в изданиях, индексируемых в Scopus; 4 — в изданиях, индексируемых в Web of Science.

Благодарности. Автор благодарит всех своих коллег и соавторов за плодотворное сотрудничество. Среди них В.Е. Борисов, Е.В. Зипунова, А.В. Иванов, Б.А. Критский, И.С. Меньшов (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН); А.В. Каракин (ИФЗ им. О.Ю. Шмидта РАН), М.М. Рамазанов (Институт проблем геотермии Дагестанского научного центра РАН — филиал ОИВТ РАН), М.А. Тримонова (Институт динамики геосфер РАН).

В 2015-2019 гг. работа автора была поддержана грантом Российского научного фонда, проект № 15-11-00021.

2 Содержание работы

Работа состоит из введения, 6 глав, заключения и приложения, изложена на 298 страницах. Список литературы включает в себя 276 наименований.

Во **введении** описывается общая проблематика работы с прикладной и теоретической точек зрения. Обосновывается актуальность работы, описывается актуальное состояние работ по тематике. Формулируются цели и задачи исследования, выносимые на защиту положения, обосновывается их научная новизна и значимость. Указываются сведения об апробации работы и публикации результатов исследования. Приводится краткое описание разработанного в ходе работы программного комплекса.

В **первой главе** формулируется и обсуждается предлагаемая в работе математическая модель развития трещины гидроразрыва пласта. Рассматриваются частные модели для пороупругой среды, течения в трещине, геометрическая модель трещины, критерии ее развития. Рассматриваются вопросы постановки (внутренних) граничных условий согласования на срединной поверхности трещины в случае неизотермической пороупругой модели вмещающей трещину среды и течения в трещине, постановки граничных условий на фронте трещины.

В качестве базовой модели для описания вмещающей трещину среды применяется пороупругая модель Био. Трещина описывается своей срединной поверхностью с заданными на ней полем раскрытия и полем давления флюида в ней. Геометрическая модель трещины позволяет рассматривать срединную поверхность трещины как произвольную гладкую поверхность с краем, удовлетворяющую естественным требованиям гладкости. Течение в трещине описывается уравнением смазочного слоя в приближении Рейнольдса.

Значительный объем главы посвящен анализу критериев разрушения для пороупругой среды. Выводится критерий хрупкого разрушения для пороупругой среды на основе векторного J -интеграла Черепанова-Райса.

Приведем уравнения модели для изотермическом случае (в тексте диссертации рассмотрен общий, неизотермический, случай).

Система уравнений пороупругости в трехмерной постановке, которая описывает состояние вмещающей трещину среды и имеет вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} = 0, \quad \frac{\partial m_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{w}_m) = q,$$

где $\rho = \rho(\mathbf{x})$ – плотность насыщенной флюидом вмещающей среды, \mathbf{f} –

плотность внешних сил, \mathbf{T} – тензор напряжений, который в общем случае определяется как $\Delta\mathbf{T} = \mathbf{C} : \mathbf{E} - \mathbf{B}\Delta p$, p – давление флюида, $\mathbf{E} = [\nabla\otimes\mathbf{u} + (\nabla\otimes\mathbf{u})^T] / 2$ – тензор деформаций, \mathbf{u} – поле перемещений точек вмещающей среды, \mathbf{C} – тензор упругих коэффициентов, $\mathbf{B} = [B_{ij}]$ – тензор Био, $\mathbf{A} = [\alpha_{ij}]$ – тензор коэффициентов термического расширения, ϕ – пористость, $\Delta\phi = \mathbf{B} : \mathbf{E} + (1/N)\Delta p$; N – модуль Био, связывающий изменение пористости с изменением давления флюида, $m_f = \rho_f\phi$ – масса флюида в единице объема насыщенной среды (флюидосодержание), ρ_f – плотность флюида, q – массовая плотность источников $\Delta f = f - f_0$ для какой-либо величины f , где индексом «0» обозначены опорные значения величины.

Плотность потока массы определяется законом Дарси $\mathbf{w}_m = \mathbf{K}\cdot(-\nabla p + \rho_f\mathbf{g})$, где \mathbf{K} – симметричный положительно определенный тензор коэффициентов проницаемости.

Приведенные уравнения описывают динамику полей в пространственной области Ω , которая содержит трещину \mathcal{F} .

Геометрическая модель трещины предполагает, что срединная поверхность трещины является гладкой, односвязной поверхностью \mathcal{F} с краем («фронтом трещины») \mathcal{F} . Толщина (раскрытие) трещины является функцией точки \mathcal{F} , $w = w(\tilde{\mathbf{x}})$, $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}$. Поверхность \mathcal{F} является срединной поверхностью трещины в том смысле, что боковые поверхности \mathcal{F}^\pm реальной, «физической» трещины находятся на расстоянии w от срединной поверхности \mathcal{F} , $\mathcal{F}^\pm = \tilde{\mathbf{x}} \pm (1/2)\mathbf{n}(\tilde{\mathbf{x}})w(\tilde{\mathbf{x}})$, $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}$. Здесь $\mathbf{n}(\tilde{\mathbf{x}})$ – нормаль к поверхности \mathcal{F} в точке $\tilde{\mathbf{x}}$, направленная в сторону \mathcal{F}^- . Естественными ограничениями на вид функции w является ее неотрицательность и равенство нулю на крае $\partial\mathcal{F}$. Второе допущение отражает тот факт, что в ходе развития трещины ее уже образованная поверхность не меняется, то есть при $t_1 \geq t_2$ имеем $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$, где $t \geq 0$ – время, \mathcal{F}_t – поверхность в момент времени t . Помимо этого считается, что эволюция поверхности \mathcal{F} является гладкой.

В этом случае семейство поверхностей \mathcal{F}_t может быть представлено как объединение начальной поверхности $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_0$ и следа «движения» ее края $\gamma(t)$, $\mathcal{F}_t = \cup\gamma(t)$, $t \geq 0$. Считается, что в каждый момент времени на линии $\gamma(t)$ задано векторное поле скорости \mathbf{v} , описывающее ее эволюцию. Таким образом, движение точки границы описывается уравнением $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Направление развития поверхности известно только в точках ее границы (фронта трещины) и определяется с помощью соответствующих критериев разрушения.

Модель течения в трещине основана на приближении Рейнольдса и свя-

зывает раскрытие w и давление p_f в трещине при наличии источников массы:

$$\frac{\partial \rho_f w}{\partial t} + \nabla_{\mathcal{F}} \cdot (\rho_f w \mathbf{v}_{\mathcal{F}}) = Q_f, \quad \mathbf{v}_{\mathcal{F}} = -D(\nabla_{\mathcal{F}} p_f - \rho_f \mathbf{g}_{\mathcal{F}}),$$

где $\mathbf{v}_{\mathcal{F}}$ — скорость течения флюида, D — эффективная проницаемостью трещины. В простейшем случае ньютоновской жидкости $D = w^2/(12\mu_f)$, где μ_f — динамическая вязкость флюида. В общем случае неньютоновской жидкости $D = D(w, \nabla_{\mathcal{F}} p_f)$.

Условия согласования, заданные на срединной поверхности трещины, которые состоят из двух групп соотношений. К первой группе относятся кинематические условия, связывающие перемещения боковых поверхностей трещины и ее раскрытие, $w(\mathbf{x}) = (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n} = [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{n} = [[u_n]]$, где $u_n^{\pm} = \mathbf{u}^{\pm} \cdot \mathbf{n}$, $[[u_n]] = u_n^+ - u_n^-$, $\mathbf{u}^{\pm} = \mathbf{u}(\mathbf{x}^{\pm})$. Ко второй группе уравнений относятся условия, выражающие непрерывность консервативных величин. Динамические условия согласования имеют вид условий непрерывности нормальной компоненты тензора напряжений на боковых поверхностях трещины: $\mathbf{T}^+ \cdot \mathbf{n}^+ = -p^* \mathbf{n}^+$, $\mathbf{T}^- \cdot \mathbf{n}^- = -p^* \mathbf{n}^-$.

Для «гидродинамической» части задачи, включающей в себя уравнения фильтрации и уравнение течения в трещине, условия согласования связывают давление в трещине, вмещающей среде и соответствующие потоки массы. Они будут иметь различный вид в зависимости от допущений, которым удовлетворяют условия течения. В простейшем случае идеального гидродинамического контакта между трещиной и вмещающей ее среды они имеют вид $p^+ = p^- = p_f$. Условия непрерывности потока массы имеют вид $Q_f = Q^+ + Q^-$, $Q^{\pm} = \mathbf{w}_m \cdot \mathbf{n}^{\pm}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{\pm}}$. Таким образом, величина потока из среды в трещину определяет правую часть (источник) закона сохранения массы флюида в трещине, а давление в трещине играет роль граничного условия для давления на боковых поверхностях трещины.

Критерий разрушения, который определяет направление развития фронта трещины в его точках и формулируется с помощью векторного J -интеграла Черепанова-Райса для пороупругой среды.

В частном случае плоской (двумерной) трещины выражение для векторного J -интеграла имеет вид

$$\mathbf{J} = \int_{\partial\Omega_0} [\psi_s \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \nabla \otimes \mathbf{u}] ds - \int_{\Omega_0} p \nabla \phi d\omega,$$

где Ω_0 — двумерная область, окружающая кончик трещины, \mathbf{n} — вектор

единичной внешней нормали к $\partial\Omega_0$, ϕ — пористость, ψ_s — свободная энергия скелета, определенная как $\Delta\psi_s = \mathbf{T}_0:\mathbf{E} + p_0\Delta\phi + \frac{1}{2}(\Delta\mathbf{T}:\Delta\mathbf{E} + \Delta\phi\Delta p)$, где $\Delta f = f - f_0$ для какой-либо величины f , f_0 — ее опорное значение.

В том случае, когда трещина развивается в направлении $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$, традиционный (скалярный) J -интеграл определяется выражением: $J = \mathbf{J}\cdot\mathbf{k}$.

Полученное выражение для J -интеграла позволяет сформулировать следующий эмпирический критерий развития трещины: трещина развивается в направлении \mathbf{k}_0 , $\mathbf{k}_0 \in \mathbb{R}^2$, таком, что $\mathbf{J}\cdot\mathbf{k}_0 = G_0(\mathbf{k}_0)$, при этом $\mathbf{J}\cdot\mathbf{k} \leq G_0(\mathbf{k})$ для произвольного единичного вектора \mathbf{k} , где G_0 — критическое значение энергии, которое, в общем случае, может зависеть от направления. Критерий позволяет определить направление развития трещины: если найдется такое направление \mathbf{k}_0 , для которого выполняется последнее условие, то в данном направлении происходит развитие трещины. Для однородной изотропной среды $G_0 = \text{const}$ и направление развития трещины совпадает с направлением вектора \mathbf{J} . На основе приведенного выше выражения для J -интеграла могут быть получены выражения для трехмерного случая.

Во **второй главе** диссертации приводится обзор вычислительных алгоритмов, которые могут быть применены для решения полной и частных задач. Рассматриваются вопросы численного решения задач пороупругости, постановки и способов учета условий согласования на срединной поверхности трещины в рамках слабых постановок соответствующих краевых задач. Анализируются методы решения уравнений на поверхностях, методы решения задач механики деформируемого твердого тела при наличии крупномасштабных трещин.

В ходе анализа предпочтение отдавалось подходам, с одной стороны допускающим дальнейшее развитие и применение для более сложных моделей, а с другой — обеспечивающим робастную реализацию и устойчивость получаемых результатов. Основной акцент сделан на алгоритмах подсеточного учета геометрии трещины, не согласованной с геометрией используемой расчетной сетки и методах решения уравнений на поверхностях, не предполагающих аппроксимацию срединной поверхности трещины той или иной расчетной сеткой.

На основе выполненного обзора делается вывод о том, что в качестве базового алгоритма решения задачи во вмещающей трещину среде наиболее пригоден метод конечных элементов X-FEM, позволяющий учитывать наличие в расчетной области трещин, геометрия которых не согласована с геометрией расчетной сетки. Для представления срединной поверхности трещи-

ны при этом традиционно используется метод множеств уровня. Вместе с тем такой способ представления поверхности не является достаточно удобным при разработке методов решения уравнений на поверхностях с краем. По этой причине единственным способом представления срединной поверхности трещины в разрабатываемом комплексе алгоритмов выбран метод проекции ближайшей точки. Для его применения в соответствующих главах работы:

- развивается алгоритм метода XFEM с использованием метода проекции ближайшей точки для представления срединной поверхности трещины;
- развивается метод проекции ближайшей точки для представления поверхности: рассматриваются вопросы расчета эволюции поверхности, локального построения поверхностей уровня с помощью метода проекции ближайшей точки, интегрирования по поверхностям, методы решения уравнений с помощью конечно-элементного варианта метода проекции ближайшей точки.

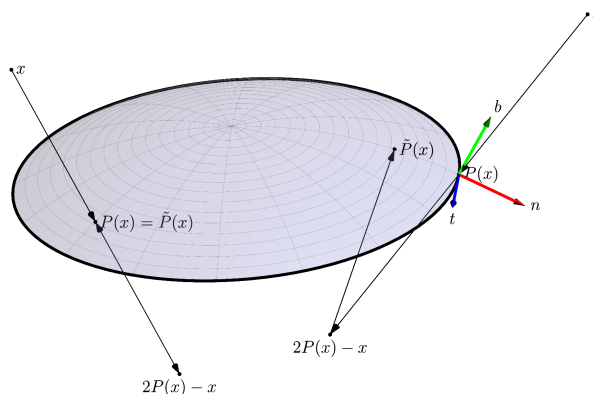


Рис. 1. К определению \mathbf{P} и $\tilde{\mathbf{P}}$.

Разработка этих вопросов и демонстрация применимости разработанных методов составляет, наряду с описанием математической модели, одну из основных частей диссертационной работы.

В **третьей главе** рассматриваются способ представления срединной поверхности трещины и алгоритмы расчета ее эволюции на основе метода проекции ближайшей точки. В рамках этого метода поверхность описывается неявно, путем задания проектора точки пространства на срединную поверхность трещины.

Рассмотрим гладкую поверхность \mathcal{F} с краем, вложенную в трехмерную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Пусть для произвольной точки $\mathbf{x} \in \Omega$, точка $\mathbf{x}_{\text{ср}}$ является ближайшей к ней точкой на поверхности \mathcal{F} . Точку $\mathbf{x}_{\text{ср}}$ будем называть проекцией точки \mathbf{x} на поверхность \mathcal{F} в смысле наименьшего расстояния, а соответствующий оператор проектирования будем обозначать \mathbf{P} , $\mathbf{x}_{\text{ср}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$, см. рис. 1. В случае если поверхность и ее край являются гладкими, а область Ω — «достаточно маленькая», то оператор \mathbf{P} однозначно определен. То есть

каждая точка области Ω однозначно проецируется в единственную точку на поверхности \mathcal{F} . Проектор \mathbf{P} однозначно описывает поверхность \mathcal{F} как множество своих неподвижных точек: $\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}\}$. Проектор \mathbf{P} может быть использован как в континуальной, так и в дискретной постановках. В последнем случае он задается своими значениями в узлах расчетной сетки.

Основное содержание главы посвящено формулировке и решению алгоритмических задач, связанных с моделированием развития трещины. В частности, предлагается алгоритм расчета эволюции зависящего от времени проектора \mathbf{P}_t в рамках геометрической модели трещины, описанной в главе 2 диссертации.

Полученные результаты делают возможным сформулировать рассматриваемые далее в работе методы (решение задач пороупругости с трещиной методом X-FEM, алгоритмы решения уравнений на поверхностях) целиком в терминах оператора проекции ближайшей точки, без промежуточного представления поверхности в рамках метода множеств уровня или какого-либо другого.

Результаты главы являются техническими, но центральными для дальнейшего изложения. Они обеспечивают использование единой алгоритмической базы в рамках полного комплекса алгоритмов в следующем смысле: а) для решения как задач в объеме, так и на поверхности используется единая пространственная расчетная сетка; б) используется единое представление поверхности в рамках частных алгоритмов решения этих задач. Это принципиальное отличие настоящей работы от других, посвященных сходной тематике. Помимо этого, предложенные методы могут быть эффективно реализованы программно и не требуют, в отличие от традиционных подходов, многократного решения уравнений типа Гамильтона-Якоби для расчета эволюции, ортогонализации и (пере)инициализации множеств уровня.

В заключении главы приводятся результаты тестовых расчетов, демонстрирующих применение предложенных вычислительных методов и алгоритмов.

В **четвертой главе** работы рассматриваются вопросы решения задач пороупругости, в том числе с трещиной. Приводятся слабые постановки задач для уравнений пороупругости и пороупругости с трещиной. Рассматривается ряд аспектов применения метода конечных элементов для решения уравнений пороупругости.

Рассматриваются различные варианты слабой постановки задачи, в том числе для среды с трещиной. Подробно описывается алгоритм метода конеч-

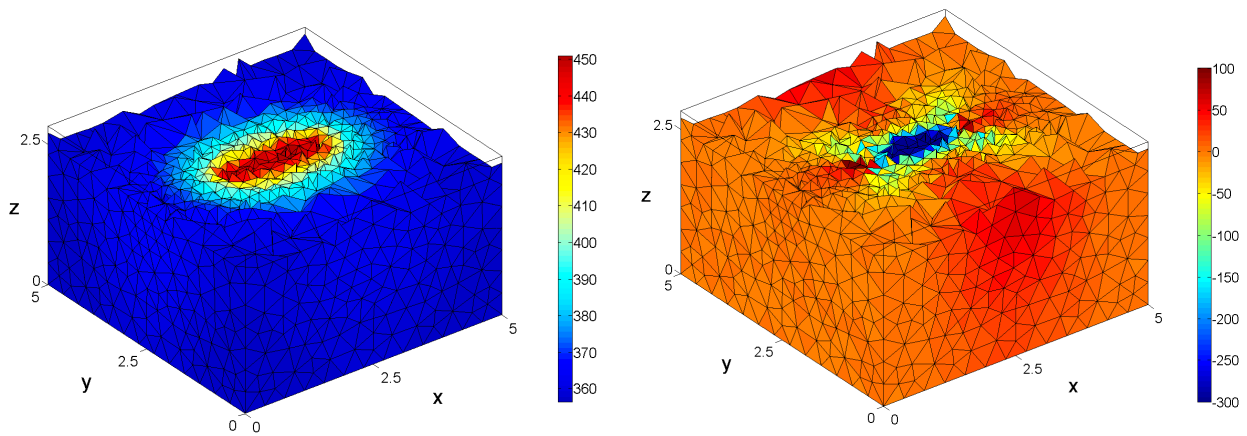


Рис. 2. Распределение давления (слева) и компоненты T_{xx} поля полных напряжений (справа) в области с трещиной.

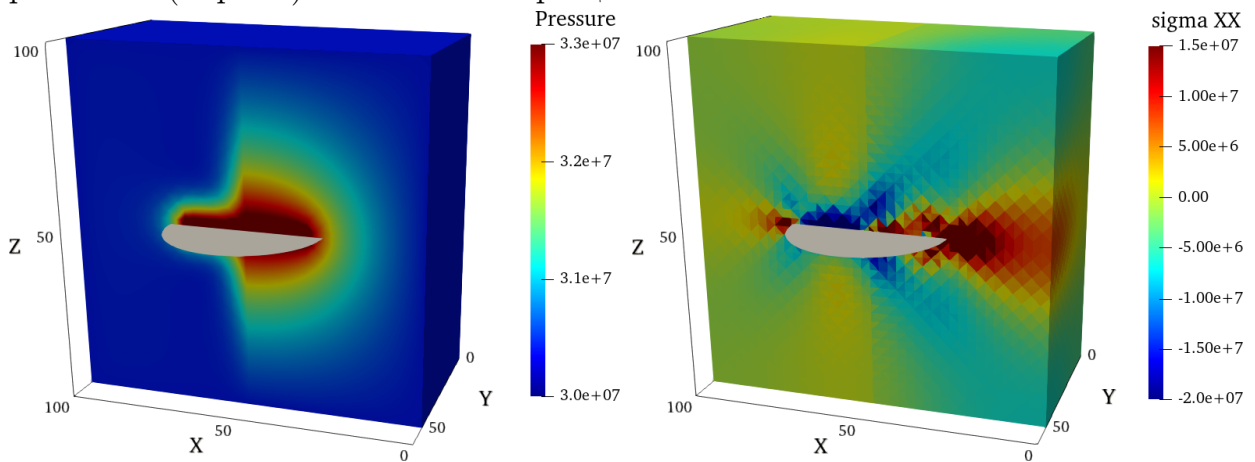


Рис. 3. Распределение давления (слева) и компоненты T_{xx} поля полных напряжений (справа) в области с неоднородным распределением упругих и фильтрационных свойств.

ных элементов для среды без трещины, особенности его реализации, способы итерационного связывания групп уравнений.

Рассматривается «расширенный» метод конечных элементов X-FEM. Его отличием от распространенного (и фактически единственного) варианта этого метода является использование метода проекции ближайшей точки для представления поверхности трещины. Отметим, что, вообще говоря, исходная формулировка метода не зависит от способа представления поверхности, однако удобный способ представления поверхности является основой его эффективного применения. Описанный вариант алгоритма является новым. В плане общности и удобства представления геометрии срединной поверхности трещины он не уступает оригинальному варианту метода, использующего метод множеств уровня для представления поверхности трещины.

Далее приводятся примеры расчетов ряда задач для среды с трещиной и без трещины как тестового, так и содержательного характера. В частности,

приведены результаты анализа лабораторных экспериментов, проводимых в Институте динамики геосфер РАН. В приложении А диссертационной работы приведено решение тестовых и валидационных задач, демонстрирующих корректность разработанной программной реализации. Приводятся результаты расчета упругих и пороупругих задач, демонстрирующие возможности метода и разработанного программного комплекса. В частности, рассматриваются примеры решения задач со стационарной и развивающейся трещиной в однородной и неоднородной среде, приводятся примеры решения задач с несколькими трещинами. Подробно иллюстрируются особенности реализации метода проекции ближайшей точки при его использовании в рамках метода X-FEM. Для примера на рисунках 2 и 3 приведены распределенные расчетные поля для случая плоской трещины в среде с однородным и неоднородным распределением свойств.

В **пятой главе** рассмотрены вопросы решения уравнений на поверхностях с краем. В соответствии с общей идеологией работы, в качестве способа представления поверхности применяется метод проекции ближайшей точки. Метод основан на продолжении уравнения, заданного на поверхности с краем, во вмещающее поверхность пространство. Далее построенное трехмерное уравнение аппроксимируется, в первоначальном варианте, с помощью подходящего разностного метода.

Для построения продолжения уравнения на поверхности в пространство используется оператор \mathcal{E} , который для произвольной заданной на поверхности \mathcal{F} функции определяется как $\mathcal{E}[u](\mathbf{x}) = u(\mathbf{P}\mathbf{x})$. Для таким способом определенного оператора продолжения можно показать, что, например,

$$\nabla \mathcal{E}[u](\mathbf{x}) = \nabla u(\mathbf{P}\mathbf{x}) = \nabla_{\mathcal{F}} u, \quad \nabla \cdot [\nabla \mathcal{E}[u](\mathbf{x})] = \nabla \cdot [\nabla u(\mathbf{P}\mathbf{x})] = \nabla_{\mathcal{F}} \cdot \nabla_{\mathcal{F}} u.$$

Тогда для определенного на поверхности \mathcal{F} уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_{\mathcal{F}} \cdot (-\nabla_{\mathcal{F}} u) = f, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{F}, \quad u|_{\partial \mathcal{F}} = g, \quad \mathbf{x} \in \partial \mathcal{F}, \quad (1)$$

имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\nabla \mathcal{E}[u]) = \mathcal{E}[f], \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{F}}. \quad (2)$$

След решения этого уравнения на \mathcal{F} является решением исходного уравнения на поверхности.

Заметим, что продолженное уравнение расстраивается в «цилиндре» $\Omega_{\mathcal{F}}$, см. рисунок 4. При этом граничное условие для него должно быть задано

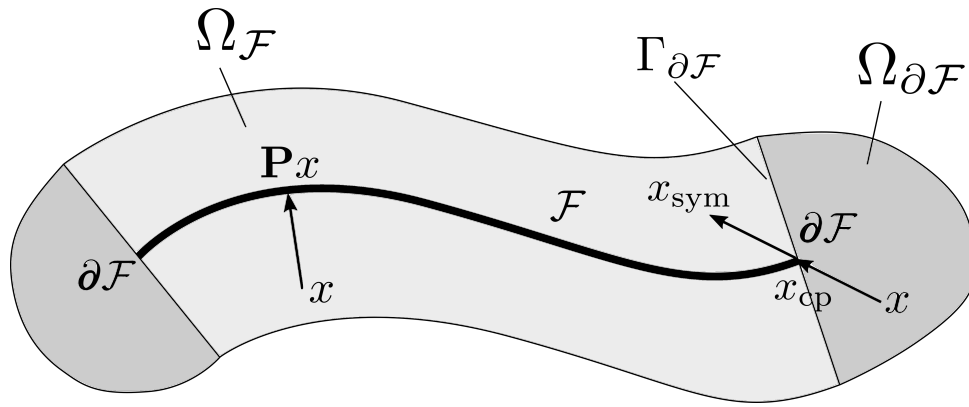


Рис. 4

на поверхности $\Gamma_{\mathcal{F}}$, геометрия которой не согласована с расчетной сеткой в объеме. Таким образом, непосредственно задание граничного условия на $\partial\Omega_{\mathcal{F}}$ в дискретном случае невозможно. Однако можно показать, что задание граничного условия вида (1) эквивалентно заданию следующего алгебраического соотношения в области $\Omega_{\partial\mathcal{F}}$:

$$u(\mathbf{x}) = u(P\mathbf{x}) = g(P\mathbf{x}) \text{ или } \frac{1}{2} [u(\mathbf{x}) + u(x_{\text{sym}})] = g(P\mathbf{x}); \quad \mathbf{x}_{\text{sym}} = 2P(\mathbf{x}) - \mathbf{x}.$$

В отличие от первоначального варианта метода проекции ближайшей точки, в работе предлагается его конечно-элементный аналог. Его построение и содержательная интерпретация в контексте вариационных методов требует рассмотрения целого ряда новых вопросов. Для их решения в главе предлагаются слабые постановки краевых задач на поверхностях с краем, которые «совместимы» с представлением поверхности с помощью оператора проекции ближайшей точки. Сначала рассматривается случай модельного уравнения в двумерной области на плоскости. Далее анализируется случай уравнения смазочного слоя, заданного на неплоской поверхности в пространстве.

В обоих случаях принципиальное внимание уделено двум вопросам: а) построение слабой постановки для продолженного в пространство уравнения на поверхности; б) интерпретация «неявного» способа задания граничных условий на крае поверхности. В последнем случае рассматриваются различные подходы в рамках метода множителей Лагранжа и метода штрафа.

В результате строится постановка, для которой конечномерные аппроксимации, включая способ задания граничного условия, могут быть получены формальной процедурой применения метода конечных элементов. Идеино предложенные постановки и алгоритмы близки к методам типа «диффузной границы», представляют отдельный интерес вне контекста настоящей работы

и допускают дальнейшие обобщения.

Приведем пример такой постановки для модельного уравнения (2). Определим оператор \mathbb{E}_g как:

$$\mathbb{E}_{g,1}[u](\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathcal{E}[u], & \mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{F}}, \\ g(P\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_{\partial\mathcal{F}} \end{cases} \text{ или } \mathbb{E}_{g,2}[u](\mathbf{x}) = \begin{cases} u(P\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{F}}, \\ 2g(P\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}_{\text{sym}}), & \mathbf{x} \in \Omega_{\partial\mathcal{F}}. \end{cases}$$

Тогда слабая постановка задачи примет вид: определить функцию $u \in V_0(\Omega)$, такую, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} uv(1 - \phi_{\epsilon}) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \mathcal{E}_g[u] \nabla v(1 - \phi_{\epsilon}) d\Omega + \\ \frac{1}{\beta} \int_{\Omega} (u - \mathcal{E}_g[u])v\phi_{\epsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \mathcal{E}_g[f]v(1 - \phi_{\epsilon}) d\Omega \end{aligned}$$

для произвольной функции $v \in V_0(\Omega)$. В приведенных выше выражениях интегрирование производится только по объему. Функция $\phi_{\epsilon}(\mathbf{x})$ является «сглаженной» характеристической функцией области $\Omega_{\partial\mathcal{F}}$. Ее значения легко могут быть построены, если в окрестности срединной поверхности трещины задан оператор P проекции ближайшей точки. Конечномерная аппроксимация задачи имеет вид

$$\mathbf{A}\mathbf{u} + \frac{1}{\beta} \tilde{\mathbf{M}} [I - \mathbf{E}] \mathbf{u} = \mathbf{f},$$

где

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}]_{ij} &= \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j (1 - \phi_{\epsilon}) d\Omega, & [\mathbf{M}]_{ij} &= \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \phi_{\epsilon} d\Omega, \\ [\mathbf{f}]_i &= \int_{\Omega_{ext}} f \varphi_i (1 - \phi_{\epsilon}) d\Omega. \end{aligned}$$

Слабая постановка задачи для уравнения смазочного слоя на эволюционирующей трещине может быть построена аналогично. В операторном виде это уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial t} + \mathcal{A}(w(u); u) = f, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{F}_t, \quad u|_{\partial\mathcal{F}} = g, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{F}_t,$$

дополненное соответствующим начальным условием. Полудискретные ап-

проксимации по времени в этом случае будут иметь вид:

$$\frac{\varphi(u_{n+1}) - \mathbb{E}[\varphi(u_n)]}{\Delta t} + \mathcal{A}(w(u_{n+1}); u_{n+1}) = f_{n+1}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{F}_{n+1}.$$

Здесь $\mathbb{E}[\cdot]$ — оператор продолжения решения со «старой» поверхности трещины \mathcal{F}_n на новую \mathcal{F}_{n+1} . Он может быть построен в явном виде с помощью оператора \mathbb{P} .

В силу того, что рассматриваемое уравнение является нелинейным, полный алгоритм решения задачи включает в себя метод простой итерации.

Разработанный алгоритм является полностью *эйлеровым* и использует ту же пространственную расчетную сетку, которая используется для решения пороупругой задачи во вмещающей трещину среде. В этом заключается отличие предложенного метода от известных подходов для решения задачи о развитии флюидонаполненной трещины.

В заключении приводятся результаты тестовых расчетов для задач, заданных на плоских и неплоских, стационарных и эволюционирующих поверхностях с краем.

Работу алгоритма иллюстрирует рисунок 5. На нем синим цветом показан фрагмент пространственной сетки, заданной в расчетной области. Уравнение на поверхности решается в ее небольшой части, окружающей срединную поверхность трещины. В соответствующих ячейках сетки цветом показано решение «продолженного» уравнения. На рисунках 6 и 7 приведены другие примеры решения задач на поверхности. Трехмерная расчетная область и сетка в ней не показаны.

В **шестой главе** диссертации рассматриваются алгоритмы для решения связанной задачи о развитии флюидонаполненной трещины в пороупругой среде. По существу, настоящая глава «интегрирует» результаты предыдущих глав работы.

Представлен обзор известных алгоритмов решения рассматриваемой задачи. Все описанные алгоритмы основаны на последовательном решении частных групп уравнений задачи или итерациях между ними. Показано, что они не обладают степенью общности, необходимой для решения рассматриваемой в работе задачи. В частности, некоторые из них не учитывают пороупругие эффекты, другие основаны на применении методом типа граничных интегральных уравнений, не пригодных для анализа неоднородных сред или требующих нетривиальных обобщений. Для каждого алгоритма приводится его интерпретация и формальное обобщение на пороупругий случай в тер-

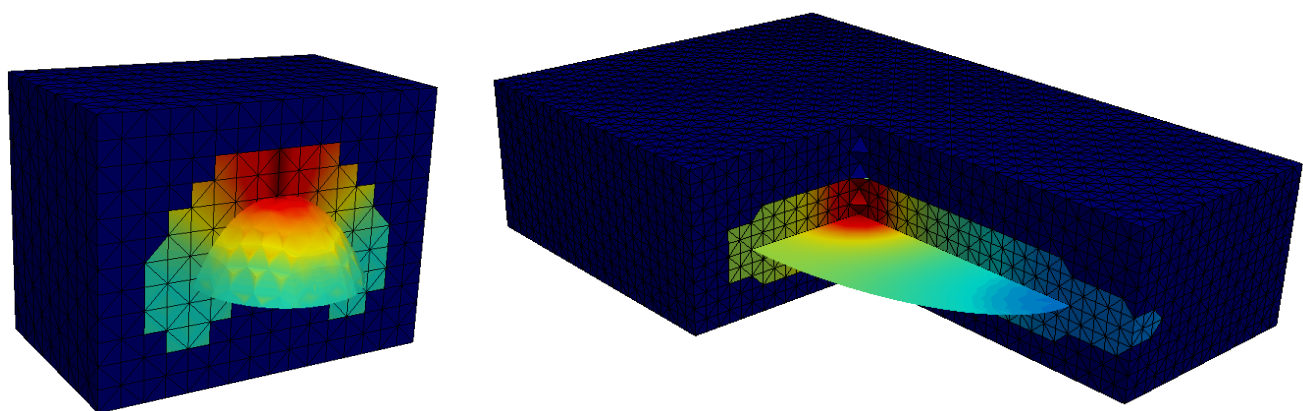


Рис. 5. Решение продолженного уравнения в области и на поверхности.

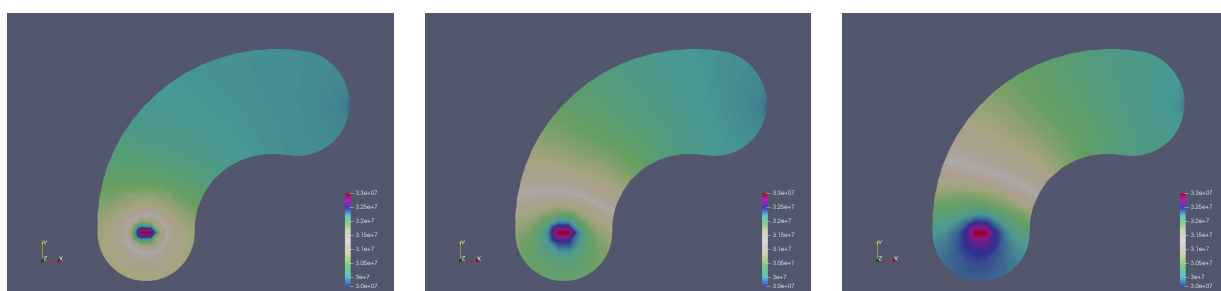


Рис. 6. Плоская трещина сложной формы: распределение давления в последовательные моменты времени (слева направо).

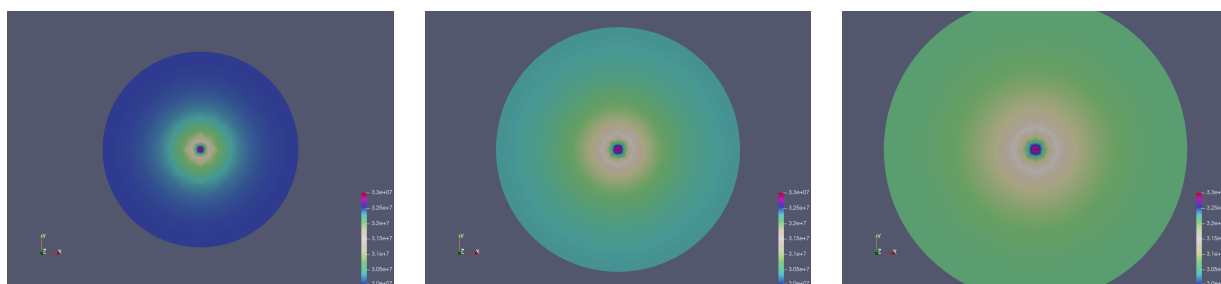


Рис. 7. Распределение давления в развивающейся трещине в последовательные моменты времени (слева направо).

минах рассматриваемой задачи безотносительно способа решения частных групп уравнений.

Предлагается вариант решения задачи с учетом течения в трещине, который является аналогом «недренируемого» связывания для итерационного решения задачи пороупругости. Этот метод рассматривается как в абстрактной постановке, так и конкретно для задачи о развитии трещины в пороупругой среде.

Формулируется и подробно описывается предложенный в работе алгоритм решения полной связанной задачи. В качестве алгоритмов решения частных задач используются ранее предложенные в работе алгоритмы, описанные в соответствующих главах.

Схема алгоритма в сокращенном виде имеет следующий вид. Задача решается в области Ω , в которой введена расчетная сетка \mathcal{T}_h . Эта сетка используется для решения задачи пороупругости и течения в трещине. В каждый момент времени t_n решение задачи описывается следующим набором переменных $\Xi(t) = \{\mathbf{u}_n(t), p_n(t), w_n(t), p_{f,n}(t), P(t), \mathbf{V}(t)\}$, где \mathbf{u} — поле перемещений, p — давление в области, w — раскрытие трещины, p_f — давление в трещине, P_n — оператор проекции ближайшей точки, однозначно определяющий геометрию срединной поверхности трещины, \mathbf{V} — скорость движения фронта трещины.

Рассмотрим задачу на одном шаге по времени $[t_n, t_{n+1}]$. Будем использовать обозначения $\Xi \equiv \Xi(t_n)$, $\hat{\Xi} \equiv \Xi(t_{n+1})$. Расчет одного временного шага соответствует переходу от набора переменных Ξ к набору переменных $\hat{\Xi}$.

Алгоритм расчета решения при $t = t_{n+1}$ состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Производится расчет дискретного оператора проекции ближайшей точки \hat{P} для новой геометрии трещины $\hat{\mathcal{F}}$. Для этого используются алгоритмы, описанные в главе 3. Производится определение типов узлов конечных элементов для алгоритма метода X-FEM, расчет параметров, необходимых для определения разрывных и сингулярных базисных функций метода.

Шаг 2. Строится продолжение поля $p_{f,\text{ext}} = E_{\mathcal{F}}[p_f]$ давления в трещине \mathcal{F} , полей $p_{\text{ext}} = E_{\Omega}[p]$ и $\mathbf{u}_{\text{ext}} = E_{\Omega}[\mathbf{u}]$ давления и перемещений в объеме Ω с учетом новой геометрии $\hat{\mathcal{F}}$ трещины.

Шаг 3. Производится инициализация внутренних итераций: $p_* = p_{\text{ext}}$, $p_{f,*} = p_{f,\text{ext}}$.

Шаг 4. Рассчитывается решение уравнения для поля перемещений \mathbf{u}_* при заданных полях давления в области p_* и трещине $p_{f,*}$. Решение этой задачи методом X-FEM/CP с применением представления поверхности с помощью

оператора проекции ближайшей точки описано в главе 4.

Шаг 5. Рассчитывается раскрытия w_* трещины по определенному полю перемещений \mathbf{u}_* . Далее производится решение уравнения для определения поля $p_{f,*}$ давления в трещине. Решение этого уравнения на поверхности описано в главе 5 работы.

Шаг 6. Производится решение уравнения для давления при заданном поле перемещений \mathbf{u}_* для определения поля давления p_* .

Шаг 7. Выполняется проверка критерия останковки итераций. В случае его невыполнения — переход на шаг 4, в противном случае — на шаг 8.

Шаг 8. Окончание расчета временного шага.

Таким образом, для построения конечномерных аппроксимаций задачи используется единая и единственная заданная в расчетной области Ω сетка Ω_h . Расчетная область включает в себя трещину \mathcal{F}_t , геометрия которой зависит от времени t . На срединной поверхности трещины какая-либо отдельная сетка не вводится. Предполагается, что срединная поверхность трещины и расчетная сетка Ω_h никак не согласованны. Центральной идеей предлагаемого подхода является неявное описание геометрии эволюционирующей трещины с применением метода проекции ближайшей точки. Таким образом, предлагаемый подход является *эйлеровым*. Это касается как решения уравнений пороупругости в объеме, то есть непосредственно в области Ω , так и решения уравнения на эволюционирующей поверхности. В частности:

- При решении уравнений пороупругости при заданной геометрии трещины метод проекции ближайшей точки используется при построении варианта «расширенного» метода конечных элементов X-FEM. Подробно эти вопросы рассмотрены в главе 4.
- При решении уравнения смазочного слоя используется конечно-элементный вариант метода проекции ближайшей точки. Соответствующие вопросы рассмотрены в главе 5.

Отметим следующие особенности применения метода проекции ближайшей точки в настоящей работе:

- Эволюция поверхности описывается исключительно в терминах эволюции оператора проекции ближайшей точки.
- Все заданные на срединной поверхности трещины поля физических величин рассматриваются как заданные в пространстве функции. Они являются продолжением полей, заданных на срединной поверхности трещины, построенных с помощью оператора проекции ближайшей точки.

В заключении главы приводятся результаты расчетов, которые демон-

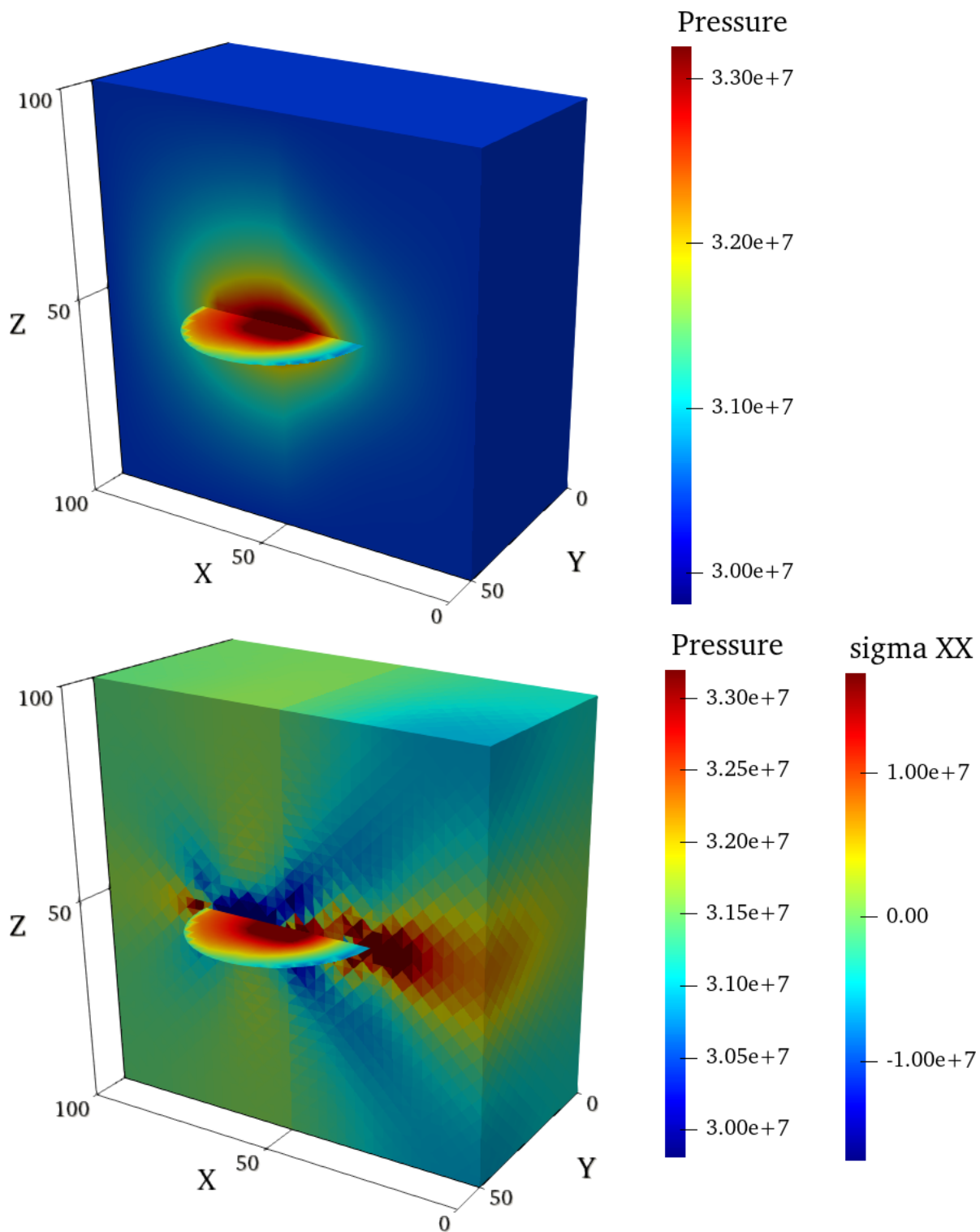


Рис. 8. Стационарная трещина в неоднородной среде: распределение давления (вверху) и компоненты T_{xx} тензора напряжений (внизу).

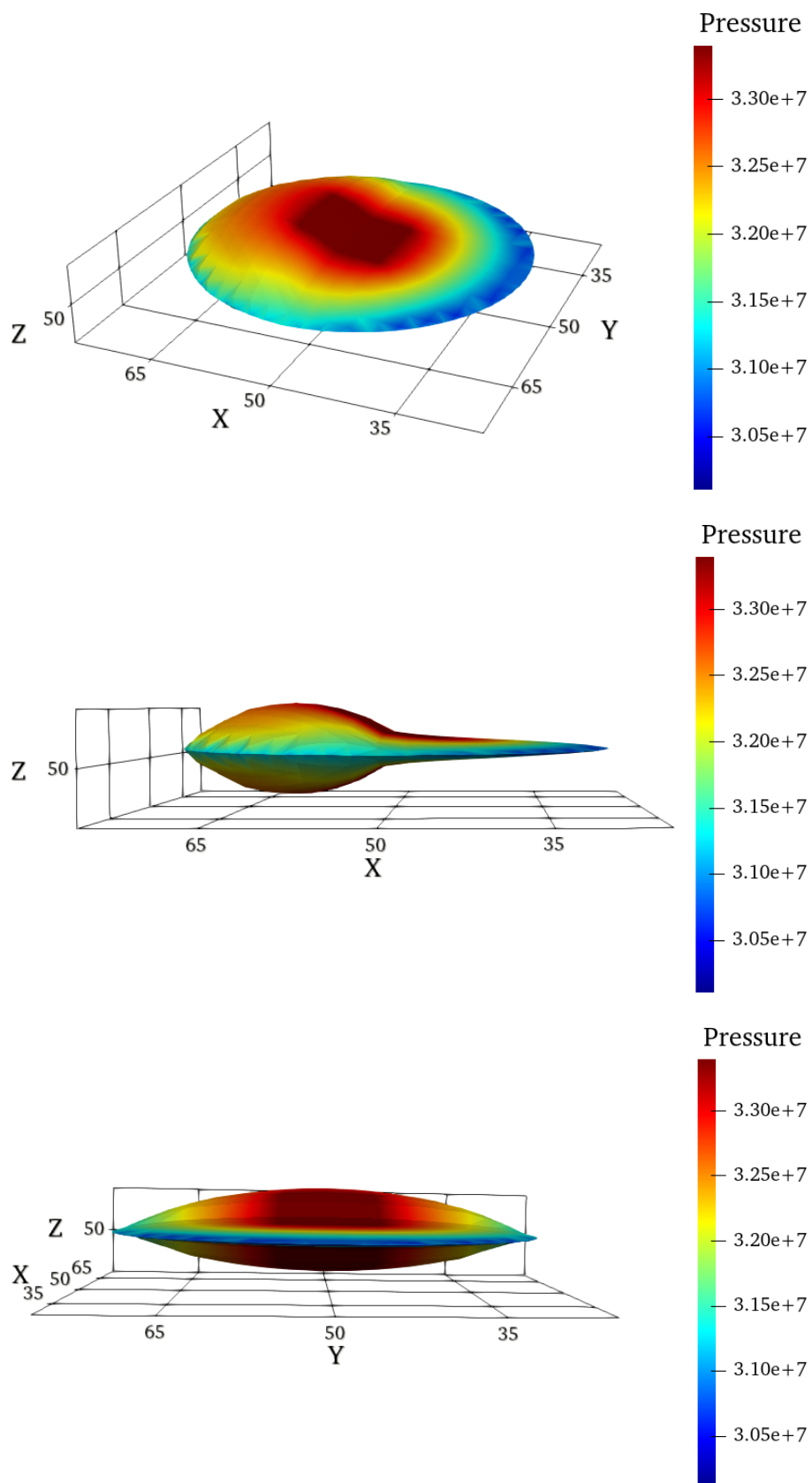


Рис. 9. Стационарная трещина в неоднородной среде: геометрия трещины и поле давления в ней.

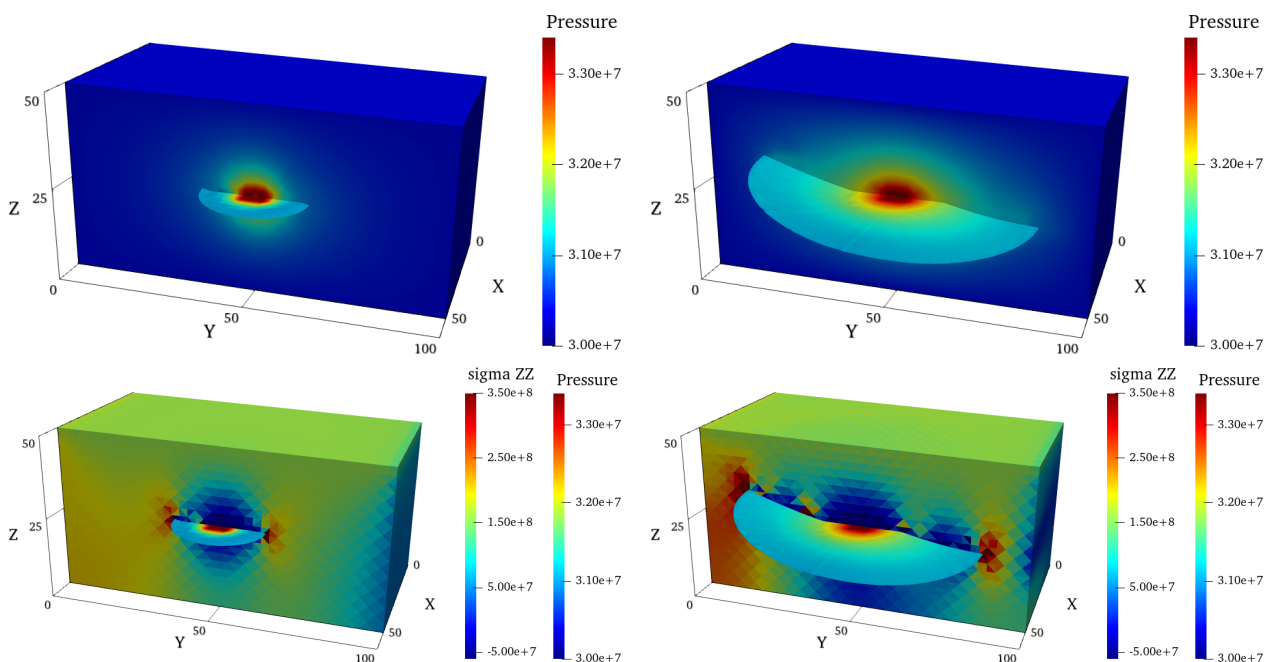


Рис. 10. Трещина в естественном поле напряжений в однородной среде: распределение давления (вверху) и компоненты T_{zz} поля напряжений (внизу) в начальный (слева) и конечный (справа) моменты времени.

стрируют возможности разработанных алгоритмов и программной реализации для решения связанных задач с учетом пороупругого поведения среды, течения трещины и ее эволюции. Рассматриваются примеры со стационарной трещиной, с трещиной в среде с однородным и неоднородным распределением упругих фильтрационно-емкостных свойств, с заданным характером развития трещины и ее развитием в естественном поле напряжений, возникающих в среде.

На рисунке 8 приведено распределение полей в неоднородной вмещающей среде для плоской стационарной трещины с учетом течения в ней. На рисунке 9 показана геометрия трещины с распределением давления в ней. Видно существенное влияние неоднородности свойств среды на раскрытие трещины.

На рисунке 10 показано распределение давления и одной из компонент тензора напряжений в среде, а так же распределение давления в трещине для случая, когда трещина эволюционирует в естественном поле напряжений при условии, что прочностные свойства среды распределены однородно по пространству.

На рисунке 11 рассматривается аналогичный результат, но для неоднородного распределения прочностных свойств среды.

В **заключении** формулируются основные выводы и результаты работы.

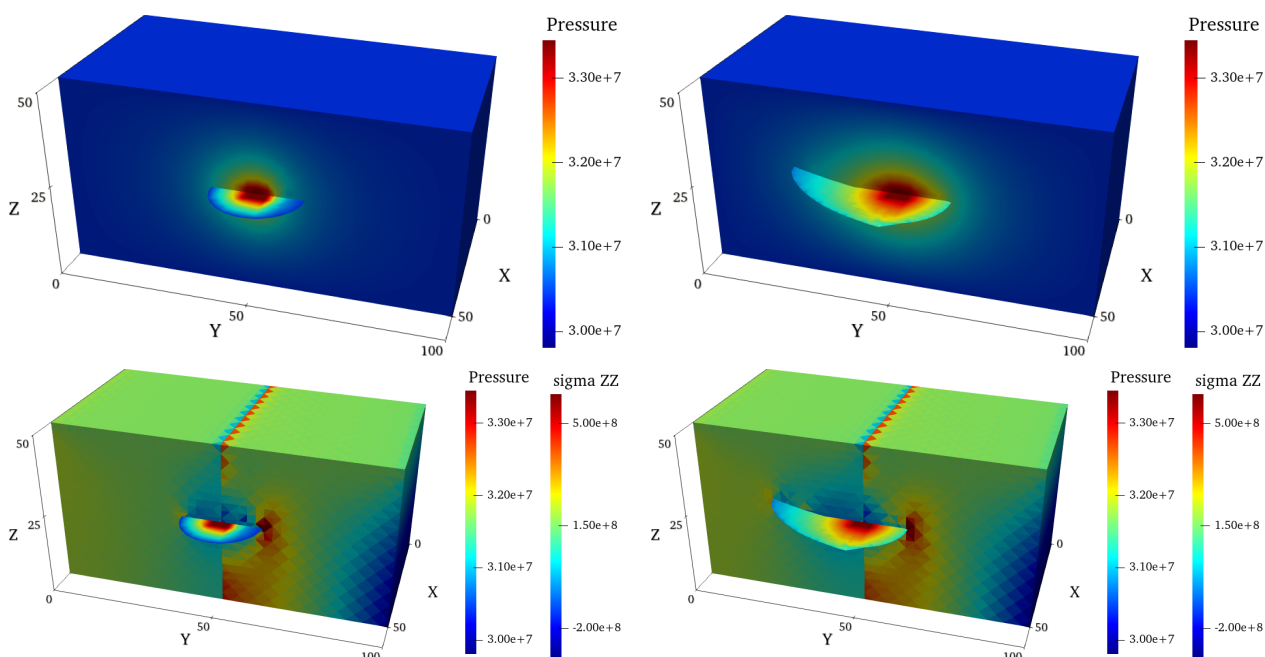


Рис. 11. Трещина в естественном поле напряжений в неоднородной среде: распределение давления в среде (вверху) и компоненты T_{zz} поля напряжений в среде (внизу) в начальный (слева) и конечный (справа) моменты времени.

3 Основные результаты работы

- Разработана новая трехмерная математическая модель развития флюидонаполненной трещины в пороупругой среде, включающая в себя группы уравнений пороупругости и течения в трещине с самосогласованным учетом потоков консервативных величин между трещиной и средой.
- Для расчета динамики развития срединной поверхности трещины предложен эффективный алгоритм на основе метода проекции ближайшей точки. Эволюция поверхности описывается непосредственно в терминах определенного в пространстве оператора проекции без использования явной аппроксимации поверхности. Предложенные алгоритмы позволили построить новые эффективные алгоритмы решения полной связанной задачи.
- Разработан оригинальный вариант алгоритма «расширенного» метода конечных элементов — X-FEM/CP, использующий, в отличие от ранее известных вариантов метода, метод проекции ближайшей точки для описания геометрии срединной поверхности трещины и ее эволюции.
- Предложены новые слабые постановки и метод решения начально-краевых задач для уравнения смазочного слоя на стационарных и эволюционирующих поверхностях с краем, вложенных в трехмерное пространство. Построенные постановки основаны на продолжении уравнения на поверхности в трехмерное пространство и вариационном способе учета главных гранич-

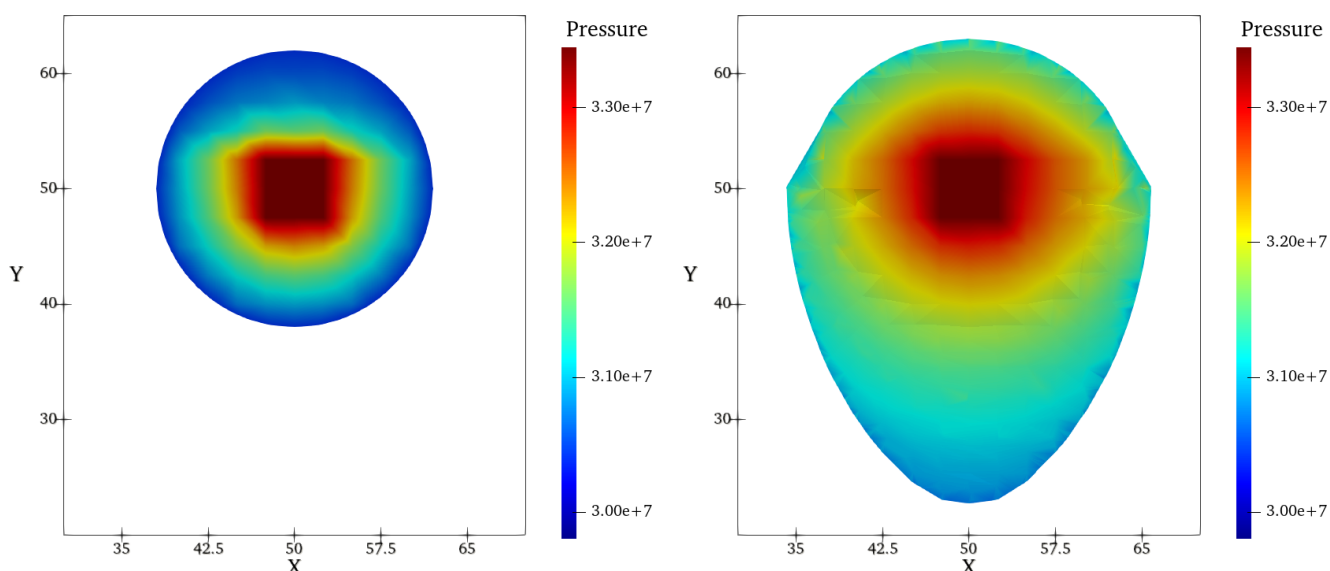


Рис. 12. Трещина в естественном поле напряжений в неоднородной среде: профиль трещины в начальный (слева) и конечный (справа) моменты времени.

ных условий на границе трещины. Предложенный метод использует эйлерово описание течения в трещине и основан на конечно-элементном варианте метода проекции ближайшей точки с использованием построенных слабых постановок. Это позволяет применять его для решения уравнения на эволюционирующей поверхности с использованием пространственной неструктурированной сетки, которая не согласована с ее геометрией.

- Предложен вычислительный алгоритм решения связанной задачи развития флюидонаполненной трещины в рамках предложенной трехмерной самосогласованной модели. Он использует единое представление поверхности для описания эволюции трещины, решения пороупругой задачи во вмещающей трещину пороупругой среде и течения в трещине. Метод является эйлеровым и использует единую трехмерную расчетную сетку для решения уравнений в среде и в трещине.
- Разработан программный комплекс, реализующий предложенные модели и алгоритмы, который может служить основой для создания пакета прикладных программ для решения актуальных задач нефтегазодобывающей отрасли. Продемонстрирована работоспособность предложенных моделей, вычислительных методов, алгоритмов и их программной реализации на примере решения задач с учетом практически важных особенностей и эффектов, сопровождающих развитие флюидонаполненных трещин.

4 Публикации автора по теме диссертации

По теме диссертации автором опубликована 21 печатная работа [1–21], оформлено 2 свидетельства о регистрации программ [22, 23]. Из них 21 публикация — в изданиях, включенных в перечень ВАК; 15 — в изданиях, индексируемых в РИНЦ; 10 — в изданиях, индексируемых в Scopus; 4 — в изданиях, индексируемых в Web of Science.

Публикации по материалам диссертации.

- [1] Борисов В.Е., Иванов А.В., Критский Б.В., Меньшов И.С., Савенков Е.Б. Численное моделирование задач пороупругости // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 81. 36 с. [ВАК, РИНЦ]
- [2] Иванов А.В., Савенков Е.Б. Моделирование и визуальное представление динамики поверхности с подвижным краем на стационарной неструктурированной сетке // Научная визуализация, Т. 9, № 2, 2017. С. 64-81. [ВАК, РИНЦ, Scopus]
- [3] Borisov, V., Kritsky, B., Savenkov, E. Ramazanov M.M. Fracture growth criterion for poroelastic media // AIP Conference Proceedings 2051, 020250 (2018). [ВАК, Scopus]
- [4] Borisov, V., Ivanov, A., Kritsky, B., Menshov, I., Ramazanov, M., Savenkov E. Fully coupled numerical simulation techniques for 3D hydraulic fracturing // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1141 (2018) 012085. [ВАК, Scopus]
- [5] Borisov V.E., Ivanov A.I., Kritsky B.V., Menshov I.S., Savenkov E.B., Trimonova M.A., Turuntaev S.B., Zenchenko E.V. Analysis of Poroelastic Laboratory Experiments Using Numerical Simulation Techniques // Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes. Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences. pp. 244-252. 2018. [WoS]
- [6] Borisov V.E., Ivanov A.I., Ramazanov M.M., Savenkov E.B. Poroelastic Hydraulic Fracture Simulation Using X-FEM/CPP Approach // Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes. Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences. pp. 323-333. 2018. [WoS]
- [7] Савенков Е.Б., Борисов В.Е., Критский Б.В. Алгоритм метода X-FEM с представлением поверхности трещины на основе проекции ближайшей точки // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 42. 36 с. [ВАК, РИНЦ]

- [8] Каракин А.В., Рамазанов М.М., Борисов В.Е., Меньшов И.С., Савенков Е.Б. Автомодельное решение задачи о трещине гидроразрыва пласта для пороупругой среды // Математическое моделирование, 2017, т.29, № 4, с. 59 – 74. [ВАК, РИНЦ, Scopus]
- [9] Савенков Е.Б., Борисов В.Е. Математическая модель развития трещины гидроразрыва пласта в трехмерной пороупругой среде // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2018. № 1. С. 5–17. [ВАК, РИНЦ, Scopus]
- [10] Ramazanov M.M., Borisov V.E., Kritsky B.V., Savenkov E.B. Fracture Growth Criterion for Poroelastic Media // AIP Conference Proceedings 2051, 020250 (2018). [ВАК, Scopus]
- [11] Рамазанов М.М., Критский Б.В., Савенков Е.Б. Формулировка J -интеграла для модели пороупругой среды Био // Инженерно-физический журнал. – 2018. Т. 91, № 6. с. 1677-1684. [ВАК, РИНЦ, Scopus]
- [12] Рамазанов М.М., Савенков Е.Б. Критерий развития трещин в пороупругой среде // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки, № 5(80). с. 65-82. 2018. [ВАК, РИНЦ, Scopus]
- [13] Борисов В.Е., Критский Б.В., Савенков Е.Б. ГРП в «расширенной» постановке: математическое моделирование // NEFTGAS.RU. 2019, № 6 (90), с. 88–90. [ВАК, РИНЦ]
- [14] Борисов В.Е., Критский Б.В., Савенков Е.Б. Представление поверхности с помощью проекции ближайшей точки в методе X-FEM // Математическое моделирование, т. 31, № 6, с. 18–42. 2019. [ВАК, РИНЦ, Scopus]
- [15] Савенков Е.Б. Решение уравнений в частных производных на поверхностях: обзор алгоритмов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 5. 18 с. [ВАК, РИНЦ]
- [16] Зипунова Е.В., Савенков Е.Б. Применение метода проекции ближайшей точки для решения уравнений гидродинамики в приближении смазочного слоя // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 10. 32 с. [ВАК, РИНЦ]
- [17] Савенков Е.Б. Конечноэлементный вариант метода проекции ближайшей точки для решения уравнений на поверхностях с краем // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 8. 36 с. [ВАК, РИНЦ]
- [18] Borisov V.E., Zenchenko E.V., Kritsky B.V., Savenkov E.B., Trimonova M.A., Turuntaev S.B. Numerical Simulation of Laboratory Experiments

- on the Analysis of Filtration Flows in Poroelastic Media // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences, № 1 (88), pp. 16-31, 2020. [ВАК, РИНЦ, Scopus]
- [19] Zipunova E., Ivanov A., Savenkov E. Application of the closest point projection method to solution of Reynold's lubrication equations on evolving surfaces // MATHEMATICA MONTISNIGRI, Vol. XLVII (2020). [ВАК, WoS]
- [20] Савенков Е.Б., Иванов А.В. Реализация метода множеств уровня для расчета геометрической эволюции трещины с применением сеточно-характеристического метода // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 47. 32 с. [ВАК, РИНЦ]
- [21] Борисов В.Е., Зипунова Е.В., Иванов А.В., Критский Б.В., Савенков Е.Б. Программный комплекс HFrac3D++ для решения задач геомеханики с учетом крупномасштабных флюидонаполненных трещин // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 46. 20 с. [ВАК, РИНЦ]
- [22] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019666240 от 6.11.2019 «Программный комплекс HFfrac3D для для анализа процесса гидроразрыва пласта в расширенной постановке». Авторы: Борисов В.Е., Иванов А.В., Савенков Е.Б.
- [23] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019666497 от 11.12.2019 г. «Программный комплекс HFrac3D++ для анализа процесса гидроразрыва пласта в рамках расширенной постановки на высокопроизводительных вычислительных системах». Авторы: Борисов В.Е., Зипунова Е.В., Иванов А.В., Критский Б.В., Савенков Е.Б.