

Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Российской академии наук»

На правах рукописи

САВЕНКОВ Евгений Борисович

Математическое моделирование развития флюидонаполненных трещин
в пороупругой среде

Специальность 05.13.18 — «Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2020

Оглавление

Введение	5
1 Математическая модель развития флюидонаполненной трещины	19
1.1 Модель вмещающей среды	20
1.1.1 Линейная пороупругая среда	21
1.1.2 Закон сохранения энергии	22
1.1.3 Замыкающие соотношения	22
1.2 Геометрическая модель трещины	24
1.3 Модель течения флюида в трещине	26
1.4 Условия согласования «пласт»/«трещина»	27
1.5 Критерии развития трещины	30
1.5.1 Формулировка J -интеграла для модели Био пороупругой среды	35
1.5.2 Критерий развития трещины	41
1.5.3 Потенциальная энергия и поток энергии при развитии трещины	43
1.6 Условия согласования на фронте флюида	49
1.7 Заключение	53
2 Вычислительные алгоритмы: обзор методов и подходов	55
2.1 Методы решения задач пороупругости	56
2.2 Способы учета крупномасштабных трещин в пространственно-трехмерных задачах	57
2.3 Методы решения уравнений на поверхностях	60
2.4 Заключение	63
3 Моделирование геометрической эволюции трещины	65
3.1 Геометрическая модель трещины: метод проекции ближайшей точки	66
3.1.1 Основные понятия метода	66
3.1.2 Модель эволюции поверхности	68
3.1.3 Дискретная модель поверхности	69
3.1.4 Алгоритм расчета эволюции поверхности	70
3.1.5 Интегрирование по поверхности	71
3.1.6 Расчет локальных базисов на поверхности и ее крае	74
3.2 Примеры расчетов	77

3.3	Заключение	81
4	Решение задач пороупругости с трещиной	82
4.1	Упрощенная математическая модель	83
4.2	Слабая постановка задачи	84
4.3	Конечномерные аппроксимации: пороупругость без трещины	89
4.4	Алгоритмы итерационного связывания: пороупругость	95
4.5	Конечномерные аппроксимации: пороупругость с трещиной (X-FEM/CP)	97
4.6	Примеры расчетов: пороупругость без трещины	102
4.7	Примеры расчетов: пороупругость с трещиной	111
4.7.1	Задача теории упругости со стационарной трещиной	111
4.7.2	Трещина в неоднородной среде	117
4.7.3	Задача с несколькими трещинами	123
4.7.4	Задача с эволюционирующей трещиной I	127
4.7.5	Задача с эволюционирующей трещиной II	132
4.8	Заклучение	135
5	Решение уравнений на поверхностях	136
5.1	Метод проекции ближайшей точки	137
5.1.1	Способы учета граничных условий Дирихле в слабой постановке краевой задачи	139
5.1.2	КЭ вариант метода проекции ближайшей точки: «плоский» случай	144
5.1.3	Конечномерные аппроксимации	149
5.1.4	КЭ вариант метода проекции ближайшей точки: «пространственный» случай	151
5.2	Решение уравнений смазочного слоя: эволюционирующая трещина	158
5.2.1	Постановка задачи	158
5.2.2	Вычислительный алгоритм	160
5.3	Примеры расчетов: решение уравнения на поверхности	163
5.3.1	Уравнение теплопроводности	163
5.3.2	Течение в трещине с постоянным раскрытием	165
5.3.3	Нелинейная задача	171
5.3.4	Задача для трещины сложной формы	175
5.3.5	Случай эволюционирующей трещины	175
5.4	Заклучение	176
6	Решение связанной задачи	182
6.1	Структура модели и аппроксимации по времени	183

6.2	Итерационное связывание в случае неподвижной трещины	185
6.2.1	Стандартные подходы	185
6.2.2	«Недренируемое» связывание для задачи с трещиной	188
6.3	Итерационное связывание в случае развивающейся трещины	191
6.3.1	Обзор алгоритмов	192
6.3.2	Анализ применимости	201
6.4	Алгоритм решения связанной задачи	202
6.5	Примеры расчетов	211
6.5.1	Стационарная трещина в неоднородной среде	211
6.5.2	Эволюционирующая плоская трещина	217
6.5.3	Эволюционирующая неплоская трещина	224
6.5.4	Эволюционирующая трещина в естественном поле напряжений	235
6.5.5	Эволюционирующая трещина в естественном поле напряжений с учетом неоднородности прочностных свойств	245
6.6	Заключение	258
	Заключение	260
	Литература	264
	Приложения	280
	Приложение А Тестовые расчеты	281
A.1	Задача о мгновенном точечном источнике	282
A.2	Задача о мгновенном линейном источнике	283
A.3	Задача о постоянном линейном источнике	284
A.4	Задача консолидации Терцаги	286
A.5	Задача Манделя	289
A.6	Пороупругий пласт при наличии скважин	292
A.7	Численное исследование скорости сходимости итерационного связывания	295
A.8	Пример расчета в реалистичной геометрии	297

Введение

Основной проблематикой, которой посвящена настоящая работа, является разработка математических моделей, вычислительных алгоритмов и комплекса программ для математического моделирования динамики флюидонаполненных трещин, в частности — трещин гидроразрыва пласта.

Технология гидроразрыва (ГРП) заключается в закачке в нефтеносный пласт специальной жидкости с целью создания искусственной (техногенной) трещины длиной ~ 100 м, высотой ~ 10 м и средним раскрытием $\sim 5\text{--}10$ мм). В результате создается соединенный со скважиной искусственный канал с большой площадью притока. Он имеет высокую, на порядки превышающую пластовую, проницаемость. Это обеспечивает значительное увеличение притока пластового флюида к скважине [Салимов2013].

Создание трещины гидроразрыва является экономически дорогим и технически сложным процессом. По этой причине важным является обоснование применимости технологии в случае каждой отдельной скважины. Для этого необходимо оценить возможность создания трещины с заданными параметрами с учетом влияния свойств напряженно-деформированной среды на процесс развития трещины, ее конечные геометрические и фильтрационные характеристики, в том числе траекторию. Полноценное решение этих задач в настоящее время доступно только средствами математического моделирования. По этой причине анализу и математическому моделированию процесса развития флюидонаполненных трещин уделяется большое внимание. Это относится как к теоретическому анализу процесса с точки зрения механики сплошной среды, так и к разработке вычислительных алгоритмов и программ, пригодных для прикладного анализа.

В соответствии с общепринятыми представлениями нефтеносный пласт представляет собой пористую среду, пустотное пространство которой заполнено флюидом. Процессы деформации пласта и фильтрации флюида в нем происходит совместно, согласованным образом. Совокупность процессов, сопровождающих и влияющих на процесс развития флюидонаполненной трещины в пороупругой среде включает в себя следующие:

- эволюция полей давления флюида и напряженно-деформированного состояния вмещающей трещину среды в ходе развития трещины и изменения состояния флюида в ней;
- течение жидкости в пустотном пространстве трещины, которое представляет собой тонкий слой с априорно неизвестными геометрическими параметрами;
- геометрическая эволюция срединной поверхности трещины, обусловленная как состоянием флюида внутри нее, так и полями давления и напряжений во вмещающей трещину среде.

Указанные процессы взаимосвязаны и не могут быть рассмотрены в рамках частных моделей.

Отметим, что сходные по физической постановке задачи возникают в целом ряде других приложений, например, в задачах описания динамики магмы в трещинах тектонических плит и анализе развития трещин в гидрогелях [Massaferri2010, Rubin1995, Dahm2000].

Математическое моделирование развития флюидонаполненных трещин является сложной задачей с точки зрения разработки как математических моделей, так и вычислительных алгоритмов. Ниже будет кратко рассмотрено состояние работ по обоим вопросам.

Первые модели гидроразрыва пласта появились в 1950-1970-х годах [Carter1957, Khristianovich1955, Khristianovich1959, Perkins1961, Geertsma1969, Nordgren1972]. Результатом этих работ стало появление двух основных упрощенных моделей, которые по имени предложивших их авторов называются моделями KGD (Khristianovich–Geertsma–de Klerk) и PKN (Perkins–Kern–Nordgreen). Основными допущениями, в рамках которых построены эти модели, являются двумерность напряженно-деформированного состояния пласта, априорная параметризация формы трещины, то есть профиля ее срединной поверхности и раскрытия, и ее ориентация (вертикальная или горизонтальная). Это позволяет свести задачу к одномерной с минимальным набором параметров, среди которых объем закачанной в пласт жидкости и значения пластовых напряжений. Эти параметры являются наблюдаемыми и часто известны с достаточной для приложений точностью. Фильтрационные эффекты, связанные с утечкой флюида из трещины в пласт в рамках этих моделей, описываются упрощенными зависимостями. Наиболее распространенной является модель Картера [Carter1957] и ее обобщения. Они построены на основе аналитического решения модельных задач фильтрации в окрестности трещины и используют эмпирические параметры. Их значения определяются на основе качественного и количественного анализа свойств конкретного пласта, насыщающих трещину и пласт флюидов, или известных корреляционных зависимостей, построенных на основе многочисленных экспериментов. Дополнительные эффекты учитываются введением в базовую модель «подгоночных» коэффициентов. Модели KGD и PKN получили широкое распространение и инициировали развитие более сложных, псевдо-трехмерных (pseudo-3D, P3D) моделей, которые являются основой большинства промышленных симуляторов дизайн–проектов гидроразрыва пласта [Economides2000].

Назначением этих программ является прогнозирование профиля трещины (формы ее срединной поверхности) и поля раскрытия в зависимости от свойств жидкости разрыва, структуры и свойств пласта. Основу моделей этого класса составляет уравнение течения жидкости внутри трещины, которое обычно рассматривается в приближении смазочного слоя. Эффекты, связанные с упругими свойствами вмещающей среды, учитываются упрощенно, по существу в том же виде, что и в моделях типа KGD и PKN. В целом, модели этого типа позволяют учитывать слоистость распределения упругих и фильтрационных свойств пласта, неньютоновскую реологию жидкости разрыва, перенос пропантa, поверхностная концентрация которого в итоге и определяет раскрытие трещины, и ряд других эффектов.

Модели «следующего поколения» основаны на прямом решении уравнений смазочного слоя для жидкости разрыва (модели типа planar-3D). Качество описания течения флюида в трещине у моделей этого класса является вполне достаточным для практических приложений. Вместе с тем, учет влияния на динамику развития трещины и течения флюида в ней

особенностей распределения полей механических напряжений и давления в пласте мало отличается от описанных ранее простых моделей. Примерами программ-симуляторов дизайн-проектов гидроразрыва пласта, основанных на описанных выше моделях, являются такие программы как MFRACK [mfrac2012], GOHFER [gohfer2012], FRACPRO [FRACPRO] и ряд других. Вопрос корректности и применимости используемых в этих симуляторах математических моделей и алгоритмов в целом не закрыт (в том числе и с точки зрения используемых в них эмпирических зависимостей). Так, например, в работах [Warpinski1993, Warpinski1994] приведено сравнение результатов моделирования развития трещины в одних и тех же условиях для 5-ти таких программ. Получающиеся результаты существенно (в разы) отличаются в зависимости от используемой математической модели и программы.

Таким образом, развитие моделей динамики флюидонаполненных трещин в основном идет по пути формального и не всегда обоснованного усложнения сравнительно простых моделей. Эти обобщения не позволяют анализировать влияние на динамику развития трещины вторичных геомеханических и фильтрационных эффектов разработки — динамики полей давления, связанной с работой соседних добывающих и нагнетательных скважин и вызванными ими эффекты переориентации полей пластовых напряжений. Так же не возможен учет интерференции нескольких трещин в масштабе элемента системы заводнения или нескольких трещин на одной горизонтальной скважине; учет неоднородности распределения механических и фильтрационных свойств пласта. Одной из важных задач является обоснование возможности применения более простых моделей, традиционно используемых для анализа процесса развития трещин.

Корректное описание процесса развития трещины в этих ситуациях требует самосогласованного учета фильтрационных и механических эффектов. Именно этого не позволяют большинство применяемых в настоящее время моделей гидроразрыва пласта.

Рассмотрим сначала способы описания частных процессов, сопровождающих развитие трещины. С точки зрения своих механических и фильтрационных свойств пористая насыщенная среда описывается как двухфазная система, состоящая из неподвижной фазы — пористого скелета, и подвижной — флюида, протекающего сквозь поры при наличии градиента давления. Напряженно-деформированное состояние такой среды в простейшем случае описывается уравнениями теории упругости. При этом в тензор напряжений входит поправка, пропорциональная давлению флюида в порах. В уравнение фильтрации, выражающее закон сохранения массы флюида, добавляются члены, описывающие изменение массы жидкости в единице объема среды за счет деформации скелета. Таким образом, состояние пороупругого пласта описывается связанной системой уравнений теории пороупругости. В современном виде модель такого вида предложена в известных работах М. Био (M. Biot) [Biot1941, Biot1956a, Biot1956b, Biot1957, Biot1962] и носит его имя. Теория пороупругости в настоящее время достаточно хорошо разработана см., например, монографии [Wang2000, Coussy2004, Lewis1998].

Считается, что для описания развития трещины достаточно использовать модели хрупкого разрушения и линейной (геометрически и физически) теории упругости. Для упругих сред без учета фильтрационных эффектов теория хрупкого разрушения хорошо разработана. Предложены различные критерии развития трещин, как механистические (сформулированные в терминах коэффициентов интенсивности напряжений), так и энергетические. В частности, построена теория J -интеграла Черепанова-Райса, которая позволяет связать воз-

возможность развития трещины и направление ее развития с количеством энергии, выделяемой в среде в ходе этого процесса, см., например, [Черепанов1967, Черепанов1974, Anderson2002]. Разработаны алгоритмы численного решения задач динамики трещин, в том числе в трехмерных постановках. Эти методы включают в себя как классические, например, метод конечных элементов или граничных интегральных уравнений, так и современные подходы, основанные, например, на «обобщенном» или «расширенном» методе конечных элементов (eXtended Finite Element Method/X-FEM). Они позволяют описывать геометрию трещины, не согласованную с расчетной сеткой во вмещающей среде. Последнее особенно важно в силу того, что геометрический характер развития трещины, вообще говоря, априори неизвестен.

Теоретическому анализу развития заполненной флюидом трещины в упругой или пороупругой среде также посвящено значительное количество работ, см., в частности, [Garagash2000, Savitsky2004, Detournay2004, Detournay2003, Garagash2006]. Однако в такой постановке задача качественно сложнее упругого случая.

Практически все полученные ранее результаты являются двумерными по своей природе. Сравнительно мало работ, посвященных вопросам математического моделирования динамики флюидонаполненных трещин в пороупругой среде в трехмерных постановках. Например, в работе [Carter2000] рассматривается модель, включающая в себя уравнения теории упругости и гидродинамику течения в трещине. Вычислительный алгоритм основан на методе граничных интегральных уравнений. Он не позволяет рассматривать пороупругие среды и среды с существенно неоднородными распределениями свойств. В работе [Kresse2013] рассматривается сходная модель, позволяющая учитывать приближенным способом взаимное влияние нескольких трещин. По существу, постановка не является самосогласованной с точки зрения механики.

Модели описанного типа широко распространены как в теоретических исследованиях, так и на практике. Их применение позволило решить широкий круг важных задач обоснования и применения технологии гидроразрыва. Вместе с тем, не смотря на значительный прогресс в моделировании гидроразрыва пласта, достигнутый к настоящему времени, можно сказать следующее:

- большинство подходов для описания динамики развития трещин используют двумерное приближение;
- направление развития моделей связано преимущественно с их техническим усложнением и формальным переносом полученных двумерных результатов на трехмерный случай;
- в большинстве своем существующие модели не описывают развитие трещины с учетом всех основных сопровождающих развитие механизмов.

Такая ситуация в значительной степени связана с алгоритмическими проблемами, рассмотренными ниже.

Разработке алгоритмов решения задач пороупругости, как в рамках «монокристаллической» постановки, так и в рамках методов, основанных на итерационном связывании групп уравнений теории фильтрации и упругости, в настоящее время уделяется значительное внимание (см., например, [Noorishad1982, Lewis1993, Philips2005, Zheng2003, Kim2009, Kim2010, Philips2009,

Preisig201, Naga2012, Vermeer1981]). Этот вопрос является достаточно хорошо разработанным.

Вычислительные алгоритмы и программы для моделирования динамики трещины гидро-разрыва пласта в рамках трехмерных моделей, появились только в последние годы. С технической точки зрения, типичными сложностями, которые возникают при решении связанных задач рассмотренного типа, являются: пространственная и временная разномасштабность процессов происходящих в трещине и пласте; необходимость описания в рамках одной модели нескольких связанных процессов, существенно отличающихся своими свойствами. Это приводит к необходимости учета тех или иных условий согласования (например, на границе «трещина»–«пласт»). Учет этих условий в конечномерных аппроксимациях задачи требует аккуратной «сшивки» решений заданных, например, на трехмерной сетке во вмещающей среде и независимой двумерной сетке на срединной поверхности трещины. Это, в свою очередь, может приводить к существенным вычислительным сложностям, как с точки теоретического обоснования методов, так и с точки программной реализации. Так, например, способ построения inf-sup [Brezzi1991] устойчивых пар пространств для задания граничных условий Дирихле в «обобщенном» методе конечных элементов (X-FEM) был предложен совсем недавно [Mourad2007, Dolbow2008, Bechet2009, Hautefeuille2012]. В целом нет возможности охарактеризовать соответствующие направления или классифицировать подходы — текущая ситуация сводится к сравнительно небольшому числу отдельных работ, затрагивающих отдельные аспекты моделирования. Перечень рассматриваемых вопросов крайне разнообразен. Он включает выбор и обоснование модели того или иного вида, решение полной системы уравнений в рамках итерационного связывания или «монолитных» постановки, конкретные способы построения конечномерных аппроксимаций для уравнений во вмещающей среде и в трещине, учет граничных условий на срединной поверхности трещины и ее фронте, см., например [Carter2000, Gordeliy2013, Weber2016] и обзор в главе 6 настоящей работы.

Можно выделить следующие особенности подобных работ:

- ряд из них используют достаточно сложные математические модели, однако, соответствующие вычислительные алгоритмы не позволяют исследовать полный спектр актуальных постановок. В частности, часто рассматриваются упругие постановки с однородным или кусочно-однородным распределением свойств вмещающей трещину среды;
- используются вычислительные методы, основанные на применении нескольких алгоритмов или пакетов программ, отвечающих за решение частных задач.

Полная проработка соответствующих вопросов в настоящее время отсутствует. При этом важно отметить, что практически никогда результирующий алгоритм не является разработанным для полной, связанной задачи, с учетом всех входящих в нее групп уравнений для описания частных процессов.

Таким образом, рассмотренная задача является комплексной. Она требует разработки как новых математических моделей динамики развития флюидонаполненных трещин, так и вычислительных методов и алгоритмов, пригодных для эффективного применения построенных моделей в актуальных постановках.

Существующие в настоящее время способы решения этих проблем, прежде всего алгоритмических, в большинстве своем идут по пути формального объединения алгоритмов и

программ для решения частных задач. Это не позволяет корректно рассматривать новые классы задач, требующих комплексного описания.

Разработка таких средств моделирования, включающих в себя достаточно «насыщенную» математическую модель, комплекс вычислительных методов и алгоритмов, максимально адаптированных для анализа связанных постановок, а также соответствующее программное обеспечение, является актуальной, но до конца не решенной задачей.

Научной проблемой, на решение которой направлена работа, является создание новых средств математического моделирования (математических моделей, комплекса вычислительных методов и алгоритмов и их программной реализации) процесса развития крупномасштабной флюидонаполненной трещины в связанной постановке. Задача рассматривается в трехмерной постановке и без существенных априорных допущений о геометрии срединной поверхности трещины. Математическая модель предназначена для самосогласованного описания процесса развития трещины с учетом основных механизмов, определяющих динамику ее развития, включая: течение флюида в трещине; напряженно-деформированное состояние вмещающего трещину пласта; процессы фильтрации в пласте, утечку флюида из трещины в пласт; физически обоснованные критерии развития трещины. Вычислительные алгоритмы должны учитывать особенности задачи, обладать единой алгоритмической базой, преемственностью по данным и являться «тесно связанными» между собой в указанном смысле.

Целью исследования является разработка математических моделей, вычислительных методов, алгоритмов и комплекса программ для математического моделирования динамики развития флюидонаполненной трещины в связанной постановке с учетом течения в трещине, пороупругих процессов в среде и обоснованных критериев ее развития.

Для достижения поставленной цели в диссертационной работе решены следующие задачи:

- проведен анализ существующих способов математического моделирования динамики развития трещин, в том числе флюидонаполненных;
- разработана математическая модель развития трещины в трехмерной связанной постановке, учитывающая основные гидродинамические и упругие эффекты, сопровождающие ее развитие, включая пороупругие процессы во вмещающей среде, течение в трещине и ее развитие в соответствии с физически обоснованными критериями;
- разработан комплекс вычислительных методов и алгоритмов для решения полной связанной задачи о развитии трещины в рамках единой алгоритмической базы, обеспечивающей преемственность вычислительных алгоритмов для частных задач по данным;
- выполнена программная реализация разработанных вычислительных методов и алгоритмов и проведены вычислительные эксперименты, демонстрирующие их пригодность для моделирования динамики флюидонаполненных трещин в актуальных постановках.

Основные результаты работы, обладающие существенной новизной:

- Трехмерная математическая модель развития флюидонаполненной трещины в пороупругой среде, включающая в себя группы уравнений пороупругости, течения в трещине и развития срединной поверхности трещины. Построенная модель является согласованной, неизотермической, описывает трещину с произвольной гладкой срединной

поверхностью. Развитие трещины определяется критерием с использованием векторного J -интеграла Черепанова-Райса.

- Вычислительные алгоритмы для описания эволюции срединной поверхности трещины с использованием метода проекции ближайшей точки, интегрирования по поверхности, вычисления локальных базисов в окрестности трещины. Эволюция поверхности описывается непосредственно в терминах эволюции оператора проекции ближайшей точки, без явной аппроксимации поверхности.
- Вычислительный алгоритм «расширенного» метода конечных элементов — X-FEM/CP, использующий метод проекции ближайшей точки для представления поверхности и описания ее эволюции.
- Вариационные (слабые) постановки начально-краевых задач для решения уравнения смазочного слоя на стационарных и эволюционирующих поверхностях с краем с применением метода проекции ближайшей точки. Построенные постановки основаны на продолжении уравнения на поверхности в трехмерное пространство и вариационном способе учета главных граничных условий на границе трещины.
- Метод решения уравнений смазочного слоя на стационарных и эволюционирующих поверхностях с краем. Предложенный метод использует эйлерово описание течения в области с изменяющейся геометрией, основан на конечно-элементном варианте метода проекции ближайшей точки с использованием построенных вариационных постановок.
- Вычислительный алгоритм решения полной связанной задачи развития флюидонаполненной трещины в рамках предложенной трехмерной самосогласованной модели. Алгоритм является эйлеровым, использует единое представление поверхности для решения пороупругой задачи во вмещающей трещину среде и течения в трещине и единую заданную в пространстве эйлерову расчетную сетку, без использования расчетной сетки, заданной на срединной поверхности трещины.
- Комплекс программ для моделирования развития флюидонаполненных трещин, реализующий предложенные новые модели и алгоритмы. Обоснование эффективности кода при решении задач с учетом практически важных особенностей и эффектов, сопровождающих развитие трещин гидроразрыва.

Теоретическая и практическая значимость работы обусловлены полученными в ней результатами. Предложен комплекс средств математического моделирования (математические модели, вычислительные методы, алгоритмы и программы) для решения крупной научно-прикладной задачи — анализа развития крупномасштабных флюидонаполненных трещин в пороупругой среде. Результаты работы дают основу для разработки новых перспективных средств моделирования, предназначенных для решения широкого спектра задач прикладной геофизики, в том числе нефтегазодобычи, которые имеют важное значение с точки зрения эффективной разработки недр как стратегического ресурса.

С теоретической точки зрения создан цельный и пригодный для дальнейшего развития комплекс алгоритмов для моделирования целевой задачи. Полученные в работе тео-

ретические результаты использованы при разработке комплексов программ, предназначенных для моделирования развития флюидонаполненных трещин в пороупругой среде [HFrac3d, HFrac3d++]. С их использованием были выполнены все представленные в настоящей работе расчеты.

Программный комплекс HFrac3D++ реализован в виде вычислительного ядра на языке C++-11 и интерфейса на языке Python, предназначенных для применения с использованием операционной системы Linux. Для связывания программных компонент используется система SWIG.

В вычислительном ядре реализован класс модели хранящий глобальные параметры, неструктурированную расчетную тетраэдрическую сетку (и данные на ней), граничные условия и так далее. Кроме того класс модели предоставляет методы для инициализации сетки, перехода на следующий временной слой, вывода диагностики в различных форматах.

Поскольку с одним вычислительным ядром можно моделировать множество различных постановок задач, для каждой постановки создается отдельный головной скрипт на языке Python, содержащий экземпляр класса модели, его инициализацию, расчетный цикл по времени и сохранение результатов расчета.

Для задания расчетной области сложной геометрии и генерации неструктурированной сетки используется широко распространенный пакет Salome. Данная платформа предоставляет средства для пред- и пост- обработки данных численного моделирования. В частности, в пакете есть встроенные средства твердотельного моделирования и интерфейс к пакетам создания расчетных сеток. Пакет Salome позволяет использовать различные алгоритмы построения сетки. В приведенных выше примерах использовался пакет NETGEN. После задания области в Salome запускается отдельный скрипт на языке Python, сохраняющий всю необходимую информацию о сетке в один файл в формате pickle. При запуске расчета этот файл зачитывается, и на его основе создается сетка, а для различных фрагментов задаются физические параметры расчетной области, начальные и граничные условия. При этом используются имена групп (узлов, граней и ячеек сетки) заданные пользователем в Salome. В головном скрипте на языке Python для каждой группы тетраэдров можно задать физические параметры и начальные условия, а для групп узлов и граней можно задавать граничные условия различного типа.

В головном скрипте на языке Python, после создания и инициализации класса модели, запускается цикл расчета по времени. При этом есть возможность сохранять результаты расчета в различных форматах. Для сохранения распределения физических полей используется формат .vtk.

На защиту выносятся следующие положения:

- Разработана новая трехмерная самосогласованная математическая модель развития флюидонаполненной трещины в пороупругой среде. Модель учитывает все основные механизмы, сопровождающие развитие трещины, включая пороупругие эффекты в среде и течение в трещине с самосогласованным учетом потоков консервативных величин между ними. Развитие трещины описывается с минимальными ограничениями на геометрию ее срединной поверхности и с использованием физически обоснованных критериев развития трещины.
- Предложены вычислительные алгоритмы для описания эволюции срединной поверх-

ности трещины с использованием метода проекции ближайшей точки, интегрирования по поверхности, вычисления локальных базисов в окрестности трещины. Эволюция поверхности описывается непосредственно в терминах эволюции оператора проекции ближайшей точки, без явной аппроксимации поверхности.

- Разработан оригинальный вариант алгоритма «расширенного» метода конечных элементов — X-FEM/CP, использующий метод проекции ближайшей точки для описания геометрии срединной поверхности трещины и ее эволюции.
- Предложены новые слабые постановки начально-краевых задач для решения уравнений на поверхностях с краем. Они основаны на продолжении уравнения с поверхности в пространство с помощью метода проекции ближайшей точки и используют вариационный учет главных граничных условий.
- Разработан алгоритм решения уравнений смазочного слоя на стационарных и эволюционирующих поверхностях с краем. Алгоритм основан на эйлеровом способе описании течения на срединной поверхности трещины и использует для построения аппроксимаций заданную в пространстве стационарную расчетную сетку, не согласованную с геометрией поверхности. Аппроксимации задачи строятся методом конечных элементов с использованием предложенных вариационных постановок.
- Предложен вычислительный алгоритм решения полной связанной задачи в рамках разработанной трехмерной математической модели развития флюидонаполненной трещины. Алгоритм использует единое представление срединной поверхности трещины в рамках метода X-FEM/CP и метода решения уравнения смазочного слоя на поверхности. Алгоритм является эйлеровым, использует единое представление поверхности для решения задачи во вмещающей трещину пороупругой среде и течения в трещине. Для построения конечномерных аппроксимаций используется единая заданная в пространстве эйлерова расчетная сетка, без использования расчетной сетки, заданной на срединной поверхности трещины.
- Разработан программный комплекс, реализующий предложенные модели и алгоритмы, который может служить основой для создания пакета прикладных программ для решения актуальных задач нефтегазодобывающей отрасли. Продемонстрирована работоспособность предложенных моделей, вычислительных методов, алгоритмов и их программной реализации на примере решения задач с учетом практически важных особенностей и эффектов, сопровождающих развитие флюидонаполненных трещин.

Все представленные в работе и выносимые на защиту результаты получены лично автором, под его руководством или при его непосредственном участии. Общая концепция работы, ее структура, уровень понимания рассматриваемых в ней проблем, основные результаты и выводы работы, положения, выносимые на защиту отражают творческий вклад автора. В совместных публикациях по теме диссертации вклад автора состоит в определении направления исследования, постановке и решении конкретных задач, включая построение математических моделей и разработку вычислительных алгоритмов, программную реализацию,

постановку и определение целей вычислительных экспериментов, проведение расчетов и анализ результатов.

Результаты диссертационной работы опубликованы в 21 печатной работе ([Каракин2017, Борисов2017, Иванов2017, Ramazanov2018, Borisov2018, Borisov2018b, Borisov2018c, Савенков2018, Савенков2018, Ramazanov2018, Рамазанов2017, Рамазанов2017, Борисов2019a, Борисов2019b, Савенков2020, Савенков2020a, Савенков2020b, Borisov2018d, Zhirnova2020, Савенков2020c, Савенков2020d]) в изданиях, рекомендованных ВАК для публикации основных научных результатов, в том числе в 15-ти работах, индексируемых в РИНЦ, 10-ти работах, индексируемых в Scopus, 4-х работах, индексируемых в Web of Science. Получено 2 свидетельства о регистрации программ [HFrac3d, HFrac3d++].

Работа состоит из введения, 6-ти глав и заключения, изложена на 298 страницах. Список литературы включает в себя 276 наименований.

Во введении описывается общая проблематика работы с прикладной и теоретической точек зрения. Обосновывается актуальность работы, описывается актуальное состояние работ по тематике. Формулируются цели и задачи исследования, выносимые на защиту положения, обосновывается их научная новизна и значимость. Приводится краткое описание разработанного в ходе работы программного комплекса.

В первой главе формулируется и обсуждается предлагаемая в работе математическая модель развития трещины гидроразрыва пласта. Рассматриваются частные модели для пороупругой среды, течения в трещине, геометрическая модель трещины, критерии ее развития. Рассматриваются вопросы постановки (внутренних) граничных условий согласования на срединной поверхности трещины в случае неизотермической пороупругой модели вмещающей трещину среды и течения в трещине, постановки граничных условий на фронте трещины.

В качестве базовой модели для описания вмещающей трещину среды применяется пороупругая модель Био. Трещина описывается своей срединной поверхностью с заданной на ней полем раскрытия и полем давления флюида в ней. Геометрическая модель трещины позволяет рассматривать срединную поверхность трещины как произвольную гладкую поверхность с краем, удовлетворяющей естественным требованиям гладкости. Течение в трещине описывается уравнением смазочного слоя в приближении Рейнольдса.

Значительный объем главы посвящен анализу критериев разрушения для пороупругой среды. Выводится критерий хрупкого разрушения для пороупругой среды на основе векторного J -интеграла Черепанова-Райса.

Во второй главе диссертации приводится обзор вычислительных алгоритмов, которые могут быть применены для решения полной и частных задач. Рассматриваются вопросы численного решения задач пороупругости, постановки и способов учета условий согласования на срединной поверхности трещины в рамках слабых постановок соответствующих краевых задач. Анализируются методы решения уравнений на поверхностях, методы решения задач механики деформируемого твердого тела при наличии крупномасштабных трещин.

В ходе анализа предпочтение отдавалось подходам, с одной стороны допускающим дальнейшее развитие и применение для более сложных моделей, а с другой — обеспечивающим робастную реализацию и устойчивость получаемых результатов. Основной акцент сделан на алгоритмах подсеточного учета геометрии трещины, не согласованной с геометрией используемой расчетной сетки и методах решения уравнений на поверхностях, не предполагающих аппроксимацию срединной поверхности трещины той или иной расчетной сеткой.

На основе выполненного обзора делается вывод о том, что в качестве базового алгоритма решения задачи во вмещающей трещину среде наиболее пригоден метод конечных элементов X-FEM, позволяющий учитывать наличие в расчетной области трещин, геометрия которых не согласована с геометрией расчетной сетки. Для представления срединной поверхности трещины при этом традиционно используется метод множеств уровня. Вместе с тем, такой способ представления поверхности не является достаточно удобным при разработке методов решения уравнений на поверхностях с краем. По этой причине, единственным способом представления срединной поверхности трещины в разработанном комплексе алгоритмов выбран метод проекции ближайшей точки. Для его применения в соответствующих главах работы:

- развивается алгоритм метода X-FEM с использованием метода проекции ближайшей точки для представления срединной поверхности трещины;
- развивается метод проекции ближайшей точки для представления поверхности: рассматриваются вопросы расчета эволюции поверхности, локального построения поверхностей уровня с помощью метода проекции ближайшей точки, интегрирования по поверхностям, методы решения уравнений с помощью конечно-элементного варианта метода проекции ближайшей точки.

Разработка этих вопросов и демонстрация применимости разработанных методов составляет, наряду с описанием математической модели, одну из основных частей диссертационной работы.

В третьей главе рассматриваются способ представления срединной поверхности трещины и алгоритмы расчета ее эволюции на основе метода проекции ближайшей точки. В рамках этого метода поверхность описывается неявно, путем задания проектора точки пространства на срединную поверхность трещины.

Основное содержание главы посвящено формулировке и решению алгоритмических задач, связанных с моделированием развития трещины. В частности, предлагается алгоритм расчета эволюции зависящего от времени проектора ближайшей точки в рамках геометрической модели трещины, описанной в главе 2 диссертации.

Полученные результаты делают возможным сформулировать рассматриваемые далее в работе методы (решение задач порупругости с трещиной методом X-FEM, алгоритмы решения уравнений на поверхностях) целиком в терминах оператора проекции ближайшей точки, без промежуточного представления поверхности в рамках метода множеств уровня или какого-либо другого.

Результаты главы являются техническими, но центральными для дальнейшего изложения. Они обеспечивают использование единой алгоритмической базы в рамках полного комплекса алгоритмов в следующем смысле: а) для решения как задач в объеме, так и на поверхности используется единая пространственная расчетная сетка; б) используется единое представление поверхности в рамках частных алгоритмов решения этих задач. Это принципиальное отличие настоящей работы от других, посвященных сходной тематике. Помимо этого, предложенные методы могут быть эффективно реализованы программно и не требуют, в отличие от традиционных подходов, многократного решения уравнений типа Гамильтона-Якоби для расчета эволюции, ортогонализации и (пере)инициализации множеств уровня.

В заключении главы приводятся результаты тестовых расчетов, демонстрирующих предложенные предложенных вычислительных методов и алгоритмов.

В четвертой главе работы рассматриваются вопросы решения задач пороупругости, в том числе с трещиной. Приводятся слабые постановки задач для уравнений пороупругости и пороупругости с трещиной. Рассматривается ряд аспектов применения метода конечных элементов для решения уравнений пороупругости.

Рассматриваются различные варианты слабой постановки задачи, в том числе для среды с трещиной. Подробно описывается алгоритм метод конечных элементов для среды без трещины, особенности его реализации, способы итерационного связывания групп уравнений.

Рассматривается «расширенный» метод конечных элементов X-FEM. Его отличием от распространенного (и фактически единственного) варианта этого метода является использование метода проекции ближайшей точки для представления поверхности трещины. Отметим, что, вообще говоря, исходная формулировка метода не зависит от способа представления поверхности, однако удобный способ представления поверхности является основой его эффективного применения. Описанный вариант алгоритма является новым. В плане общности и удобства представления геометрии срединной поверхности трещины он не уступает оригинальному варианту метода, использующего метод множеств уровня для представления поверхности трещины.

Далее приводятся примеры расчетов ряда задач для среды с трещиной и без трещины как тестового, так и содержательного характера. В частности, приведены результаты анализа лабораторных экспериментов, проводимых в Институте динамики геосфер РАН. В приложении А диссертационной работы приведено решение тестовых задач, демонстрирующих корректность разработанной программной реализации. Приводятся результаты расчета упругих и пороупругих задач, демонстрирующие возможности метода и разработанного программного комплекса. В частности, рассматриваются примеры решения задач со стационарной и развивающейся трещиной в однородной и неоднородной среде, приводятся примеры решения задач с несколькими трещинами. Подробно иллюстрируются особенности реализации метода проекции ближайшей точки при его использовании в рамках метода X-FEM.

В пятой главе рассмотрены вопросы решения уравнений на поверхностях с краем. В соответствии с общей идеологией работы, в качестве способа представления поверхности применяется метод проекции ближайшей точки. Метод основан на продолжении уравнения, заданного на поверхности с краем, во вмещающее поверхность пространство. Далее построенное трехмерное уравнение аппроксимируется, в первоначальном варианте, с помощью подходящего разностного метода.

В отличие от первоначального варианта метода проекции ближайшей точки, в работе предлагается его конечно-элементный аналог. Его построение и содержательная интерпретация в контексте вариационных методов требует рассмотрения целого ряда новых вопросов. Для их решения в главе предлагаются слабые постановки краевых задач на поверхностях с краем, которые «совместимы» с представлением поверхности с помощью оператора проекции ближайшей точки. Сначала рассматривается случай модельного уравнения в двумерной области на плоскости. Далее анализируется случай уравнения смазочного слоя, заданного на неплоской поверхности в пространстве.

В обоих случаях принципиальное внимание уделено двум вопросам: а) построение слабой постановки для продолженного в пространство уравнения на поверхности; б) интерпретация «неявного» способа задания граничных условий на крае поверхности. В последнем случае рассматриваются различные подходы в рамках метода множителей Лагранжа и метода

штрафа.

В результате строится постановка, для которой конечномерные аппроксимации, включая способ задания граничного условия, могут быть получены формальной процедурой применения метода конечных элементов. Идеино предложенные постановки и алгоритмы близки к методам типа «диффузной границы», представляют отдельный интерес вне контекста настоящей работы и допускают дальнейшие обобщения.

Разработанный алгоритм решения уравнения смазочного слоя на эволюционирующей срединной поверхности трещины является полностью *эйлеровым* и использует ту же пространственную расчетную сетку, которая используется для решения пороупругой задачи во вмещающей трещину среде. В этом заключается отличие предложенного метода от известных подходов для решения задачи о развитии флюидонаполненной трещины.

В заключении приводятся результаты тестовых расчетов для задач, заданных на плоских и неплоских, стационарных и эволюционирующих поверхностях с краем.

В шестой главе диссертации рассматриваются алгоритмы для решения связанной задачи о развитии флюидонаполненной трещины в пороупругой среде. По существу, настоящая глава «интегрирует» результаты предыдущих глав работы.

Представлен обзор известных алгоритмов решения рассматриваемой задачи. Все описанные алгоритмы основаны на последовательном решении частных групп уравнений задачи или итерациях между ними. Показано, что они не обладают степенью общности, необходимой для решения рассматриваемой в работе задачи. В частности, некоторые из них не учитывают пороупругие эффекты, другие основаны на применении методом типа граничных интегральных уравнений, не пригодных для анализа неоднородных сред или требующих нетривиальных обобщений. Для каждого алгоритма приводится его интерпретация и формальное обобщение на пороупругий случай безотносительно способа решения частных групп уравнений.

Предлагается вариант решения задачи с учетом течения в трещине, который является аналогом «недренируемого» связывания для итерационного решения задачи пороупругости. Этот метод рассматривается как в абстрактной постановке, так и конкретно для задачи о развитии трещины в пороупругой среде.

Формулируется и подробно описывается предложенный в работе алгоритм решения полной связанной задачи. В качестве алгоритмов решения частных задач используются ранее предложенные в работе алгоритмы, описанные в соответствующих главах.

В алгоритме решения полной связанной задачи для построения конечномерных аппроксимаций задачи используется единая и единственная заданная в расчетной области сетка. Расчетная область включает в себя трещину, геометрия которой зависит от времени. На срединной поверхности трещины какая-либо отдельная сетка не вводится. Предполагается, что срединная поверхность трещины и расчетная сетка никак не согласованы. Центральной идеей предлагаемого подхода является неявное описание геометрии эволюционирующей трещины с применением метода проекции ближайшей точки. Таким образом, предлагаемый подход является *эйлеровым*. Это касается как решения уравнений пороупругости в объеме, то есть непосредственно в области, так и решения уравнения на эволюционирующей поверхности. В частности:

- При решении уравнений пороупругости при заданной геометрии трещины метод проек-

ции ближайшей точки используется при построении варианта «расширенного» метода конечных элементов X-FEM. Подробно эти вопросы рассмотрены в главе 4.

- При решении уравнения смазочного слоя используется конечно-элементный вариант метода проекции ближайшей точки. Соответствующие вопросы рассмотрены в главе 5.

Отметим следующие особенности применения метода проекции ближайшей точки в настоящей работе:

- Эволюция поверхности описывается исключительно в терминах эволюции оператора проекции ближайшей точки.
- Все заданные на срединной поверхности трещины поля физических величин рассматриваются как заданные в пространстве функции. Они являются продолжением полей, заданных на срединной поверхности трещины, построенных с помощью оператора проекции ближайшей точки.

В заключении главы приводятся результаты расчетов, которые демонстрируют возможности разработанных алгоритмов и программной реализации для решения связанных задач с учетом пороупругого поведения среды, течения в трещине и ее эволюции. Рассматриваются примеры со стационарной трещиной, с трещиной в среде с однородным и неоднородным распределением упругих фильтрационно-емкостных свойств, с заданным характером развития трещины и ее развитием в естественном поле напряжений, возникающих в среде.

В заключении формулируются основные выводы и результаты работы.

Автор хотел бы выразить свою благодарность всем своим коллегам и соавторам за плодотворное сотрудничество. Среди них В.Е. Борисов, Е.В. Зипунова, А.В. Иванов, Б.А. Критский, И.С. Меньшов (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН); А.В. Каракин (ИФЗ им. О.Ю. Шмидта РАН), М.М. Рамазанов (Институт проблем геотермии Дагестанского научного центра РАН — филиал ОИВТ РАН), М.А. Тримонова (Институт динамики геосфер РАН).

В 2015-2019 гг. работа автора была поддержана грантом Российского научного фонда, проект № 15-11-00021.

Глава 1

Математическая модель развития флюидонаполненной трещины

В настоящей главе рассмотрена связанная постановка задачи о развитии равновесной крупномасштабной флюидонаполненной трещины в пороупругой среде.

Физико–математическое описание флюидонаполненной трещины в ходе ее развития сводится к решению сложной связанной задачи, включающей в себя следующие группы уравнений:

- система уравнений пороупругости, описывающие эволюцию напряженно–деформированного состояния среды и полей давления флюида в нем в ходе развития трещины;
- уравнения течения жидкости в трещине;
- механические условия развития трещины, определяющие направление ее развития в каждой точке ее фронта;
- заданные на боковых поверхностях трещины условия согласования между полями давления в трещине и в среде, потоками массы, импульса и энергии, а также кинематические условия, связывающие раскрытие трещины и перемещение точек пласта.

Построенная в работе математическая модель позволяет корректно описывать согласованное распределение возмущений начального поля напряжений с учетом эффектов, индуцированных процессами фильтрации при наличии: добывающих и нагнетательных скважин; наличия трещины и ее развития с учетом как региональных, так и индуцированных полей напряжений; течением флюида в трещине. Модель пригодна для анализа эффектов самопроизвольного развития трещины.

В качестве модели вмещающей среды используется связанная модель Био, которая описывает эволюцию поля напряжений, вызванную присутствием и развитием трещины и эффектами фильтрации. Для описания течения флюида в трещине использованы уравнения гидродинамики в приближении смазочного слоя. Гидродинамическая модель течения дополнена уравнениями переноса энергии и позволяет производить учет неизотермических эффектов. При описании процесса развития трещины использованы физически–обоснованные критерии разрушения с учетом комбинированного режима нагружения в окрестности фронта

распространяющейся трещины. Все основные соотношения модели приведены для неизотермического случая.

1.1 Модель вмещающей среды

В настоящем разделе описаны основные уравнения и определяющие соотношения математической модели вмещающей трещину среды, а также использованные допущения и предположения об особенностях описываемых моделью процессов. Основу модели составляет теория пороупругости, которая описывает протекающие одновременно процессы фильтрации в пористой среде и ее деформации.

В качестве модели вмещающей среды используется связанная модель Био для описания эволюции возмущений начального поля напряжений, вызванных присутствием и развитием трещины и эффектами фильтрации. Основы современной теории фильтрации в пороупругой насыщенной среде были заложены в работах М. Био [Biot1941, Biot1956a, Biot1956b, Biot1957, Biot1962]; см. также [Rice1976]. Современное изложение вопроса представлено в монографиях [Wang2000, Coussy2004]. Приведенное ниже описание группы уравнений пороупругости модели основано на [Coussy2004].

Модель основана на следующих допущениях:

- Напряженно-деформированное состояние пласта основано на физически и геометрически линейной модели. То есть рассматривается случай бесконечно малых деформаций и вращений, $\|\nabla \otimes \mathbf{u}\| \ll 1$ где \mathbf{u} — вектор перемещений точек среды, и бесконечно малых перемещений $\|\mathbf{u}/L\| \ll 1$, где L — характерный размер вмещающей трещину среды.

Это допущение позволяет отождествить лагранжевы (\mathbf{X}) и эйлеровы ($\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$) координаты точек среды в деформированном состоянии: $\mathbf{x} \approx \mathbf{X}$ и элементарные объемы среды $\omega \approx \Omega$, ω — элементарный объем в лагранжевых координатах, Ω — в эйлеровых.

Из этих допущений также следует линейная связь между тензорами деформаций и перемещений, см. раздел 1.1.1. В общем случае, в рассматриваемой постановке распределение упругих свойств среды является анизотропным и неоднородным.

- Задача рассматривается в неизотермическом приближении, при этом отклонения температуры от начальной предполагаются малыми, $|(\Theta - \Theta_0)/\Theta_0| \ll 1$.
- Среда является полностью насыщенной, то есть жидкость в любой момент времени заполняет все связанное поровое пространство.
- Пластовый флюид является однофазным и слабо сжимаемым, то есть $|(\rho_f - \rho_f^0)/\rho_f^0| \ll 1$. Приведенные соотношения включают, как частный случай, случай несжимаемого пластового флюида.
- Пористость (объемная доля среды, занятая флюидом) в ходе деформации меняется слабо, то есть $|(\phi - \phi_0)/\phi_0| \ll 1$.

Выше верхним или нижним индексом «0» обозначены опорные или характерные значения величин.

1.1.1 Линейная пороупругая среда

Уравнения механического равновесия (уравнения закона сохранения импульса) имеют вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} = 0, \quad (1.1)$$

где $\rho = \rho(\mathbf{x})$ – плотность насыщенной флюидом вмещающей среды, \mathbf{g} – ускорение свободного падения, \mathbf{T} – тензор напряжений. Описанные уравнения должны быть дополнены граничными условиями.

В общем случае анизотропного пороупругого насыщенного тела в линейном приближении определяющие соотношения имеют вид [Coussy2004]:

$$\Delta \mathbf{T} = \mathbf{C} : \mathbf{E} - \mathbf{B} \Delta p - \mathbf{C} : \mathbf{A} \Delta \Theta, \quad \Delta \phi = \mathbf{V} : \mathbf{E} + \frac{1}{N} \Delta p - 3\alpha_\phi \Delta \Theta,$$

где p – давление флюида, $\mathbf{E} = [\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T] / 2$ – тензор деформаций, \mathbf{u} – поле перемещений точек вмещающей среды, $\mathbf{C} = [C_{ijkl}]$ – симметричный тензор упругих коэффициентов 4-го ранга, $\mathbf{V} = [V_{ij}]$ – симметричный тензор Био, $\mathbf{A} = [A_{ij}]$ – симметричный тензор коэффициентов термического расширения, Θ – температура, ϕ – пористость, α_ϕ – объемный коэффициент термического расширения порового пространства, N – модуль Био, связывающий изменение пористости с изменением давления флюида, C – коэффициент теплоемкости скелета при постоянном объеме, $\Delta f = f - f_0$ для какой-либо величины f , где индексом «0» обозначены опорные значения величины.

В случае изотропной среды имеем:

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2G \mathbf{I}, \quad \mathbf{V} = b \mathbf{I}, \quad \mathbf{A} = \alpha \mathbf{I},$$

где λ , G – коэффициенты Ламе скелета, $\epsilon = \mathbf{E} : \mathbf{I} = E_{ii}$ – объемная деформация, $\lambda = K - (2/3)G$ – объемный модуль упругости.

Плотность ρ в (1.1) зависит от плотности скелета и флюида и пористости вмещающей среды: $\rho = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f$, где ρ_s – плотность скелета, ρ_f – плотность флюида.

Уравнение закона сохранения массы флюида для случая деформирующейся пористой среды имеет вид

$$\frac{\partial m_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{w}_m) = q, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{w}_m}{\rho_f} = \mathbf{K} \cdot (-\nabla p + \rho_f \mathbf{g}), \quad (1.2)$$

где m_f – масса флюида в единице объема насыщенной среды, $\mathbf{w}_m = \rho_f \mathbf{v}$ – вектор плотности потока массы, \mathbf{v} – скорость фильтрации, определяемая законом Дарси, ρ_f – плотность флюида, \mathbf{K} – симметричный тензор коэффициентов проницаемости, q – массовая плотность источников.

Отметим, что приведенные уравнения являются связанными – в определяющие соотношения для тензора напряжений входит давление флюида в порах, в определяющее соотношение для пористости – тензор деформаций скелета. Такая структура уравнений отражает тот факт, что при деформации породы происходит изменение объема, занятого флюидом. Это изменение связано как с изменением объема скелета, так и с изменением объема порового пространства за счет деформации скелета.

1.1.2 Закон сохранения энергии

Для описания неизотермических процессов во вмещающей пористой насыщенной среде мюель необходимо должна включать в себя закон сохранения энергии. Помимо допущений, сформулированных выше, в виду малой скорости протекающих процессов не будем учитывать процессы диссипации механической энергии в тепловую за счет вязких сил. Дополнительно будем считать, что в элементарном объеме насыщенной среды скелет и флюид находятся в состоянии локального термодинамического равновесия, то есть $\Theta = \Theta_s = \Theta_f$, где $\Theta_{s,f}$ — температура скелета и флюида, соответственно.

Тогда уравнение закона сохранения энергии (при отсутствии внешних источников энергии) примет вид:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (h_f \mathbf{w}_m + \mathbf{q}_\Theta) = 0,$$

где h_f — энтальпия флюида, \mathbf{q} — вектор плотности теплового потока за счет эффектов теплопроводности, e — полная внутренняя энергия элемента объема насыщенной среды,

$$e = \rho_s(1 - \phi)e_s + \rho_f \phi e_f.$$

Вектор плотности теплового потока \mathbf{q}_Θ задается законом Фурье:

$$\mathbf{q}_\Theta = -\Lambda \nabla \Theta,$$

где Λ — симметричный тензор коэффициентов теплопроводности.

Таким образом, вектор плотности теплового потока задается выражением:

$$\mathbf{q}_e = h_f \mathbf{q}_m + \mathbf{q}_\Theta. \quad (1.3)$$

Зависимость внутренней энергии от давления и температуры (уравнения состояния) могут быть получены непосредственно из уравнений следующего раздела.

1.1.3 Замыкающие соотношения

Для замыкания приведенной выше системы уравнений уравнений она должна быть дополнена рядом определяющих соотношений. Далее они будут приведены для случая, когда отклонения параметров, описывающих состояние системы от начального (равновесного) малы.

Уравнение состояния для флюида в форме уравнения для внутренней энергии имеет вид:

$$de_f = -pd \left(\frac{1}{\rho_f} \right) + \Theta ds_f. \quad (1.4)$$

Дифференцируя его, получим уравнения состояния флюида в виде:

$$\frac{d\rho_f}{\rho_f} = \frac{1}{K_f} dp - 3\alpha_f d\Theta, \quad ds_f = -3\alpha_f \frac{dp}{\rho_f} + C_p \frac{d\Theta}{\Theta}, \quad (1.5)$$

где p — давление флюида, ρ_f — его плотность, $3\alpha_f$ — коэффициент температурного расширения флюида, Θ — его температура, s_f — энтропия, C_p — теплоемкость при постоянном

давлении, K_f — объемный модуль сжатия флюида,

$$K_f = -\frac{1}{1/\rho_f} \frac{\partial(1/\rho_f)}{\partial p}, \quad -3\alpha_f = \frac{1}{(1/\rho_f)} \frac{\partial(1/\rho_f)}{\partial \Theta}, \quad C_p = \Theta \frac{\partial s_f}{\partial p} = \frac{\partial h_f}{\partial \Theta},$$

где $h_f = h_f(p, s_f)$ — энтальпия флюида:

$$h_f = e_f + \frac{p}{\rho_f}, \quad \frac{1}{\rho_f} = \frac{\partial h_f}{\partial p}, \quad \Theta = \frac{h_f}{s_f}.$$

В дальнейшем будем считать, что отклонения от начального состояния малы и флюид слабо сжимаем, то есть $K_f, C_p, \alpha_f = \text{const}$ — заданные параметры. В этом случае из (1.5) имеем:

$$\frac{\Delta \rho_f}{\rho_f^0} = \frac{\Delta p}{K_f} - 3\alpha_f \frac{\Delta \Theta}{\Theta_0}, \quad \Delta s_f = -3\alpha_f \frac{\Delta p}{\rho_f^0} + C_p \frac{\Delta \Theta}{\Theta_0}. \quad (1.6)$$

В частном случае несжимаемой жидкости ($K_f \rightarrow \infty, \alpha_f = 0$) имеем:

$$\Delta \rho_f = 0, \quad \Delta s_f = C_p \ln \frac{\Theta}{\Theta_0},$$

или, в случае малых изменений температуры,

$$\Delta \rho_f = 0, \quad \Delta s_f = C_p \frac{\Delta \Theta}{\Theta_0}.$$

Пусть m_f — масса жидкости, отнесенная к единице объема среды,

$$m_f = \rho_f \phi, \quad (1.7)$$

где ϕ — пористость (то есть доля объема среды, занятой флюидом).

Из последнего соотношения следует, что

$$\frac{dm_f}{\rho_f} = d\phi + \phi \frac{d\rho_f}{\rho_f}.$$

Тогда из (1.5) следует

$$d\phi = \frac{dm_f}{\rho_f} - \phi \frac{p}{K_f} + 3\phi_f d\Theta, \quad d(m_f s_f) = s_f dm_f - 3\phi \alpha_f dp + m_f C_p \frac{d\Theta}{\Theta}.$$

С учетом этого соотношения пористость ϕ может быть исключена из определяющих соотношений, которые в дифференциальной форме примут вид:

$$d\mathbf{T} = \mathbf{C} : d\mathbf{E} - \mathbf{B} dp - \mathbf{C} : \mathbf{A} d\Theta, \quad (1.8)$$

$$\frac{dm_f}{\rho_f} = \mathbf{B} : d\mathbf{E} + \frac{1}{M} dp - 3\alpha_m d\Theta, \quad (1.9)$$

$$dS = s_f dm_f + \mathbf{C} : \mathbf{A} : d\mathbf{E} - 3\alpha_m dp + \frac{C_d}{\Theta_0} d\Theta, \quad (1.10)$$

где

$$S = S_s + m_f s_f, \quad \frac{1}{M} = \frac{1}{N} + \frac{\phi}{K_f}, \quad \alpha_m = \alpha_\phi + \phi \alpha_f, \quad C_d = C + m_f C_p.$$

С учетом условий малых изменений свойств насыщенной среды, из (1.9) следует:

$$v_f = \mathbf{B} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_0) + \frac{1}{M}(p - p_0) - 3\alpha_m(\Theta - \Theta_0), \quad (1.11)$$

где v_f — относительное изменение объема жидкости в элементарном объеме насыщенной среды, которое определяется как:

$$v_f = \frac{m_f - m_f^0}{\rho_f^0}. \quad (1.12)$$

1.2 Геометрическая модель трещины

В настоящем разделе описана геометрическая модель крупномасштабной трещины. Применительно к задачам описания процесса гидроразрыва пласта, раскрытие («толщина») трещины имеет величину порядка сантиметров. В то же время характерный размер области, в которой решается задача (масштаб элемента системы заводнения) составляет сотни метров, характерная длина трещины (полудлина) — десятки-сотни метров, высота — несколько десятков метров.

По этой причине не имеет смысла учитывать толщину трещины при рассмотрении модели фильтрации во вмещающей трещину среде (и в соответствующих разностных аппроксимациях). Таким образом, будем считать трещину разрезом нулевой толщины, который соответствует срединной поверхности \mathcal{F} трещины. Срединной поверхностью назовем условную поверхность, равноудаленную от боковых поверхностей трещины. В рамках такой модели величина раскрытия w трещины является конечной величиной, которая определяется в ходе решения полной связанной задачи. Конечную величину раскрытия трещины необходимо учитывать, в частности, при описании течения флюида в ней (см. раздел 1.3).

Величины, описывающие напряженно-деформированное состояние пласта (поле перемещений, тензоры напряжений и деформаций), так же как и фильтрационные потоки, давление флюида в пласте, скорость фильтрации терпят при переходе через срединную поверхность \mathcal{F} трещины скачок, тип и величина которого определяется условиями согласования. Последние следуют из физической постановки задачи и рассмотрены в разделе 1.4.

Характер эволюции поверхности \mathcal{F} не может быть произвольным. Соответствующие допущения как принципиального, так и технического характера будут представлены ниже. Они отражают специфику рассматриваемой задачи, а именно тот факт, что \mathcal{F} — срединная поверхность эволюционирующей трещины.

Будем считать, что срединная поверхность трещины является гладкой односвязной поверхностью

$$\mathcal{F} : D_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad D_{\mathcal{F}} \subset \mathbb{R}^2, \quad (1.13)$$

с краем $\partial\mathcal{F}$, который соответствует фронту трещины. Раскрытие w трещины является функцией точки поверхности \mathcal{F} , $w = w(\tilde{\mathbf{x}})$, $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}$. Поверхность \mathcal{F} является срединной поверхностью трещины в том смысле, что боковые поверхности \mathcal{F}^\pm реальной, «физической» трещины

находятся на расстоянии w от срединной поверхности \mathcal{F} :

$$\mathcal{F}^\pm = \tilde{\mathbf{x}} \pm \frac{1}{2} \mathbf{n}(\tilde{\mathbf{x}}) w(\tilde{\mathbf{x}}), \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}.$$

Здесь $\mathbf{n}(\tilde{\mathbf{x}})$ — нормаль к поверхности \mathcal{F} в точке $\tilde{\mathbf{x}}$, направленная в сторону \mathcal{F}^- (таким образом, $\mathbf{n}^+ = \mathbf{n}$, $\mathbf{n}^- = -\mathbf{n}$).

Естественными ограничениями на вид функции w является ее неотрицательность и равенство нулю $\partial\mathcal{F}$:

$$w(\tilde{\mathbf{x}}) \geq 0, \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}; \quad w(\tilde{\mathbf{x}}) = 0, \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \partial\mathcal{F}.$$

Геометрия срединной поверхности трещины и ее раскрытие вообще говоря, зависят от времени $t \geq 0$. Обозначим через \mathcal{F}_t срединную поверхность трещины в момент времени t . При этом для $t_1 \geq t_2$ выполняется условие $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$.

Будем считать, что:

- в каждый момент времени t в рассматриваемом интервале поверхность \mathcal{F}_t целиком содержится внутри некоторой пространственно области Ω ;
- эволюция поверхности \mathcal{F} является «гладкой», то есть поверхность в каждый момент времени может быть гладко и взаимно-однозначно отображена на, например, диск единичного радиуса в \mathbb{R}^2 . В частности, в ходе эволюции у \mathcal{F} не должны появляться самопересечения и так далее.

В этом случае семейство поверхностей $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ может быть представлено как объединение начальной поверхности $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_0$ и следа «движения» ее криволинейного края:

$$\mathcal{F}_t = \{\mathcal{F}_0 \cup \gamma(t') \mid 0 \leq t' \leq t\},$$

где $\gamma(t) \equiv \partial\mathcal{F}_t$ — край поверхности \mathcal{F}_t в момент времени t .

В дальнейшем будем считать, что в каждый момент времени на линии $\gamma(t)$ задано поле скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \gamma(t)$, описывающее ее эволюцию. Таким образом, движение точки границы описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}|_{t=0} = \mathbf{x}_0 \in \gamma(0), \quad (1.14)$$

где поле скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ является гладкой функцией точки $\mathbf{x} \in \gamma(t)$ в каждый фиксированный момент времени t и гладкой функцией времени для каждой фиксированной (лагранжевой) точки границы.

Такая модель эволюции поверхности соответствует задаче о динамике трещины гидро-разрыва пласта. В этом случае направление развития поверхности известно только в точках ее границы (фронта трещины) и определяется с помощью соответствующих критериев разрушения (см., например, [Рамазанов2017, Рамазанов2017, Ramazanov2018]).

Отметим, что в ряде случаев (в частности, для целей теоретического анализа) удобно считать, что поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{F}_t$ является следом на $\partial\mathcal{F}_t$ некоторого гладкого (и без особых точек) поля $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$, заданного в области Ω , содержащей семейство поверхностей \mathcal{F}_t во все моменты времени $t \in [0, T]$. Естественным требованием к полю $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$

является то, что оно является касательным к поверхностям $\mathcal{F}_{\tilde{t}}$ для всех $\tilde{t} < t$ (другими словами, оно не меняет уже образовавшуюся поверхность трещины).

При подходящем выборе поля \mathbf{V} оно порождает гладкое и взаимно-однозначное отображение поверхности $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_0$ на поверхность \mathcal{F}_t для любого $t \in (0, T]$.

Сделанные выше построения являются абстрактными. Для их алгоритмической реализации необходимо задать конкретный способ представления срединной поверхности. Этот вопрос рассмотрен в разделе 3.

1.3 Модель течения флюида в трещине

В данном разделе рассматривается модель течения флюида в трещине с заданной геометрией. Рассмотренная модель основана на допущениях смазочного слоя.

Будем считать, что флюид распространяется по трещине с заданной геометрией (см. раздел 1.2), стремясь заполнить всю трещину. Таким образом, части трещины, занятой жидкостью, соответствует лишь часть срединной поверхности \mathcal{F} трещины. Раскрытие трещины является функцией точки поверхности \mathcal{F} и момента времени t , $w = w(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$. Относительно срединной поверхности будем предполагать, что ее кривизна мала.

В приближении смазочного слоя уравнение течения сжимаемой жидкости, связывающее раскрытие w и давление p_f в трещине, имеет вид [Chipot1986]:

$$\frac{\partial \rho_f w}{\partial t} + \nabla_{\mathcal{F}} \cdot (\rho_f w \mathbf{v}_{\mathcal{F}}) = Q_f, \quad \mathbf{v}_{\mathcal{F}} = -D(\nabla_{\mathcal{F}} p_f - \rho_f \mathbf{g}_{\mathcal{F}}), \quad (1.15)$$

где $\mathbf{v}_{\mathcal{F}}$ — средняя по раскрытию трещины скорость течения флюида в трещине, коэффициент D — эффективная проницаемостью трещины, которая, в общем случае, определяется свойствами жидкости и состоянием среды, $\mathbf{g}_{\mathcal{F}}$ — проекция вектора ускорения свободного падения на срединную поверхность трещины, $\mathbf{g}_{\mathcal{F}} = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{g}$. Символом $\nabla_{\mathcal{F}}$ обозначен поверхностный оператор Гамильтона [Дубровин1986] на поверхности \mathcal{F} .

В простейшем случае ньютоновской жидкости

$$D = w^2 / (12\mu_f),$$

где μ_f — динамическая вязкость флюида. В общем случае неньютоновской жидкости $D = D(w, \nabla_{\mathcal{F}} p_f)$, см., например, [Adachi2007].

Уравнение (1.15) рассматривается в ограниченной области $\Omega_f = \Omega_f(t) \subset \mathcal{F}$, занятой флюидом. Границу области $\Omega_f(t)$ будем обозначать как $\partial\Omega_f(t)$. Будем считать, что Ω_f — односвязная область, а $\partial\Omega_f$ — замкнутая гладкая кривая. На границе $\partial\Omega_f$ этой области должны быть заданы соответствующие граничные условия, которые будут рассмотрены в разделе 1.6.

В ряде практически важных случаев уравнение (1.15) может быть дополнено уравнением, описывающим перенос флюидом в трещине того или иного пассивного компонента (например, «пропанта» — специального калиброванного «песка», предназначенного для того, чтобы трещина не «закрылась» в случае, если давление флюида в ней упадет достаточно сильно). Соответствующие модели широко известны и здесь не рассматриваются.

С геометрической точки зрения эволюция фронта жидкости описывается так же, как и фронта трещины, см. раздел 1.2.

В случае необходимости учета неизотермических эффектов при описании течения в трещине, уравнение сохранения массы флюида дополняется уравнением закона сохранения энергии. В случае слабосжимаемой жидкости в трещине (трехмерное) уравнение закона сохранения энергии (без учета внешних источников тепла) имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f e) + \nabla \cdot (-\lambda_\Theta \nabla \Theta + \rho_f C \Theta \mathbf{v}_\mathcal{F}) - \mathbf{D} : \mathbf{T} = 0, \quad (1.16)$$

где $\rho_f \Delta e = \rho_f C \Delta \Theta$ — объемная плотность внутренней энергии флюида, λ_Θ — коэффициент теплопроводности флюида, $\rho_f C$ — объемная теплоемкость флюида. Последнее слагаемое в (1.16) описывает диссипацию энергии за счет работы вязких сил во флюиде.

Интегрирование уравнения (1.16) по толщине трещины в интервале от $-w/2$ до $+w/2$ дает:

$$\frac{\partial}{\partial t}(w \rho_f C \Theta_\mathcal{F}) + \nabla_\mathcal{F} \cdot (-w \lambda_\mathcal{F} \nabla_\mathcal{F} \Theta_\mathcal{F} + w \rho_f C \Theta_\mathcal{F} \mathbf{v}_\mathcal{F}) - \mathcal{D} + q_\Theta = 0, \quad (1.17)$$

где $\Theta_\mathcal{F}$ — средняя по толщине трещины температура, \mathcal{D} — диссипация за счет работы вязких сил, q_Θ — приток тепла через боковые поверхности трещины.

С учетом допущений о структуре течения в тонком смазочном слое (локально пуазейлевский профиль, малые числа Рейнольдса, малость толщины слоя), для величины диссипации \mathcal{D} может быть получено выражение $\mathcal{D} = (12\mu_\mathcal{F})/w \mathbf{v}_\mathcal{F}^2$. Для течений рассматриваемого класса эта величина обычно мала и ей можно пренебречь, то есть считать $\mathcal{D} \equiv 0$.

Вид слагаемых, которые описывают обмен массы и энергии с вмещающей средой определяются условиями согласования на срединной поверхности трещины и рассматривается ниже.

1.4 Условия согласования «пласт» / «трещина»

Величины, описывающие напряженно-деформированное и насыщенное состояние среды (поле перемещений, тензоры напряжений и деформаций, давление флюида в среде, скорость фильтрации) терпят при переходе через срединную поверхность \mathcal{F} трещины разрыв, величина которого определяется условиями согласования. Эти условия связывают рассмотренные выше независимые группы уравнений, описывающие состояние пороупругой вмещающей среды и течение в трещине. Условия согласования включают в себя кинематические условия и условия, обеспечивающие непрерывность потоков импульса, массы и энергии. Рассмотрим их последовательно.

Пусть далее $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ — точка на срединной поверхности трещины, \mathbf{x}^\pm — соответствующие ей (в смысле проекции кратчайшего расстояния) точки на боковых поверхностях \mathcal{F}^\pm трещины, \mathbf{n}^\pm — вектор единичной внешней нормали к вмещающей среде на боковых поверхностях трещины (см. рисунок 1.1). Как и ранее (см. раздел 1.2), считаем

$$\mathbf{n}^+ = \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}^- = -\mathbf{n}, \quad (1.18)$$

где \mathbf{n} — единичная нормаль к срединной поверхности \mathcal{F} , направленная в сторону от \mathcal{F}^+ к \mathcal{F}^- ,

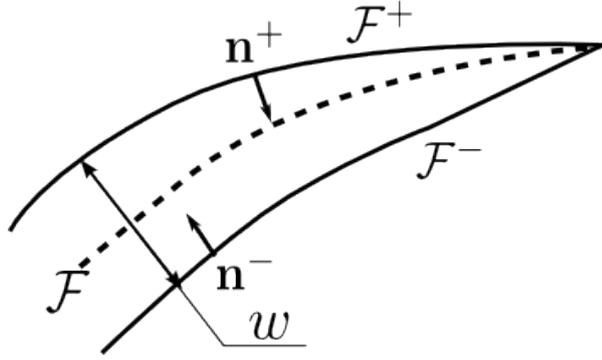


Рис. 1.1. Ориентация боковых поверхностей трещины.

см. рисунок 1.1:

К первой группе условий согласования относятся кинематические условия, связывающие перемещения боковых поверхностей трещины и ее раскрытие. Эти условия имеют вид:

$$w(\mathbf{x}) = (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n} = [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{n} = [[u_n]],$$

где $u_n^\pm = \mathbf{u}^\pm \cdot \mathbf{n}$, $[[u_n]] = u_n^+ - u_n^-$, $\mathbf{u}^\pm = \mathbf{u}(\mathbf{x}^\pm)$. В рассматриваемой постановке задачи нельзя сделать естественных априорных предположений о скачке тангенциальных компонент поля перемещений при переходе через поверхность \mathcal{F} — величина этого скачка неизвестна и определяется решением задачи.

Рассмотрим теперь динамические условия согласования, которые имеют вид условий непрерывности нормальной компоненты тензора напряжений $\mathbf{T}^\pm = \mathbf{T}(\mathbf{x}^\pm)$ на боковых поверхностях трещины:

$$\mathbf{T}^+ \cdot \mathbf{n}^+ = -p^* \mathbf{n}^+, \quad \mathbf{T}^- \cdot \mathbf{n}^- = -p^* \mathbf{n}^-,$$

откуда, с учетом (1.18), имеем:

$$\mathbf{T}^+ \cdot \mathbf{n} = -p^* \mathbf{n}, \quad \mathbf{T}^- \cdot \mathbf{n} = -p^* \mathbf{n}.$$

Эти соотношения можно записать в эквивалентном виде как соотношения для скачка и среднего значения нормальных напряжений при переходе через срединную поверхность \mathcal{F} :

$$[[\mathbf{T}]] \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \{\{\mathbf{T}\}\} \cdot \mathbf{n} = -p^* \mathbf{n}, \quad (1.19)$$

где (здесь и далее) $[[a]] = a^+ - a^-$, $\{\{a\}\} = 1/2(a^+ + a^-)$ для какой-либо величины a , величина p^* имеет смысл давления, приложенного к боковым поверхностям трещины. Конкретный вид p^* и его связь со значениями давления во вмещающей среде и трещине будут рассмотрены ниже. Условия (1.19) предполагают, что силы вязкого трения, действующие на боковых поверхностях трещины со стороны заполняющего трещину флюида, пренебрежимо малы.

Рассмотрим теперь условия согласования для «гидродинамической» части задачи, включающей в себя уравнения фильтрации в пористой вмещающей трещину среде и уравнение течения флюида непосредственно в трещине. Эти условия связывают давление в трещине, вмещающей среде и соответствующие потоки массы. Они будут иметь различный вид в зависимости от допущений, накладываемых на условия течения.

В первом случае будем считать, что трещина и вмещающая среда заполнена одним и тем

же флюидом, который заполняет весь объем трещины, причем гидродинамический контакт между трещиной и вмещающей средой — идеальный. В этом случае в точке $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ срединной поверхности имеем:

$$p^+ = p^- = p_f, \quad (1.20)$$

где, как и ранее, $p^\pm = p(\mathbf{x}^\pm)$, или, что эквивалентно $[[p]] = 0$, $\{\{p\}\} = p_f$.

Условия непрерывности потока массы, с учетом соответствующих выражений для течения во вмещающей среде (1.2) и вида уравнения (1.15), выражающего закон сохранения массы в трещине, имеют вид:

$$Q_f = Q^+ + Q^-, \quad Q^\pm = \mathbf{w}_m \cdot \mathbf{n}^\pm|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^\pm}. \quad (1.21)$$

Таким образом, величина потока из среды в трещину определяет правую часть закона сохранения массы флюида в трещине, а давление в трещине играет роль граничного условия для давления на боковых поверхностях трещины.

В рассматриваемом случае естественно считать, что область срединной поверхности, соответствующая объему трещины, занятому флюидом, совпадает со всей срединной поверхностью, то есть $\Omega_f = \mathcal{F}$. При этом p^* в (1.19) определено как $p^*(\mathbf{x}) = p_f(\mathbf{x})$.

Во втором случае будем считать, что флюид в трещине не проникает во вмещающую среду. Это может быть связано как механической изоляцией объема вмещающей среды, так и с существенным отличием свойств флюида в трещине от флюида во вмещающей среде. В этом случае будем считать, что часть срединной поверхности, соответствующая объему, занятому флюидом, не совпадает со всей срединной поверхностью трещины, то есть $\Omega_f \subset \mathcal{F}$, $\partial\Omega_f \cap \partial\mathcal{F} = \emptyset$.

Тогда условия согласования для потока массы флюида в области Ω_f имеют вид:

$$Q_f = 0, \quad Q^\pm = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_f. \quad (1.22)$$

Другими словами, условия согласования вырождаются в граничные условия Неймана для уравнения фильтрации во вмещающей среде. В этом случае условия для давления во вмещающей среде не могут быть сформулированы, а давление в трещине определяется уравнением (1.15) с заданной (нулевой) правой частью Q_f . Величина p^* в (1.19) задается как $p^*(\mathbf{x}) = p_f(\mathbf{x})$.

Аналогичные условия согласования в области $\mathcal{F} \setminus \Omega_f$ (области «лага») могут быть заданы по-разному в зависимости от того, являются ли боковые поверхности трещины проницаемыми или нет для флюида во вмещающей среде. В первом случае в точках $\mathbf{x} \in \mathcal{F} \setminus \Omega_f$ имеем $Q^\pm = 0$ и $p^*(\mathbf{x}) = 0$ в (1.19). Во втором случае естественно считать, что в рассматриваемой области трещины, соответствующей части срединной поверхности $\mathcal{F} \setminus \Omega_f$ находится поровый флюид, давление которого непрерывно при переходе через боковые поверхности трещины, то есть $[[p]] = 0$, $[[Q]] = 0$.

Наконец, рассмотрим практически важный случай, когда флюид в трещине не проникает во вмещающую среду, но содержит в своем составе компонент, который может проникать во вмещающую среду. Тогда обычно считается, что потоки на боковых поверхностях трещины определены как функции свойств флюида, фильтрационно-емкостных свойств среды и полей давления в трещине и ее окрестности. В рамках рассматриваемой модели это приводит к

условиям

$$Q_f = Q^+ + Q^-, \quad Q^\pm = Q^\pm(p_f, p^\pm) = \mathbf{w}_m^\pm \cdot \mathbf{n}^\pm.$$

Последняя зависимость может быть задана, например, в соответствии с моделью утечки Картера или ее обобщений [Clifton1988, Clifton1991b].

Рассмотрим теперь баланс потока энергии. Будем считать, что в точках границы \mathcal{F}^\pm насыщенная пороупругая среда (скелет и флюид) и флюид в трещине находятся в состоянии локального теплового равновесия. В этом случае имеем $\Theta^\pm = \Theta_{\mathcal{F}}$, или, эквивалентно, $[\Theta] = 0$, $\{\Theta\} = \Theta_{\mathcal{F}}$. В случае если утечка массы из трещины во вмещающую среду не происходит, условия непрерывности потока энергии будут иметь вид:

$$q_\Theta = Q_\Theta^+ + Q_\Theta^-, \quad Q_\Theta^\pm = \mathbf{q}_\Theta^\pm \cdot \mathbf{n}^\pm, \quad \mathbf{m}^\pm = 0.$$

При этом первое уравнение, по существу, является определением для мощности источников энергии в уравнении (1.17), а температура в трещине играет роль граничного условия для уравнения закона сохранения энергии в среде.

В том случае если утечка массы происходит и, так или иначе, задана значениями Q^\pm , условия непрерывности потока энергии будут иметь вид:

$$q_\Theta = Q_\Theta^+ + Q_\Theta^-, \quad Q_\Theta^\pm \equiv h_f Q^\pm = (h_f \mathbf{w}_m + \mathbf{q}_\Theta)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^\pm} \cdot \mathbf{n}^\pm.$$

Тогда заданным можно считать поток из трещины во вмещающую среду. Значение температуры при этом определяются полным решением задачи.

1.5 Критерии развития трещины

В разделе 1.2 была рассмотрена геометрическая модель развития трещины. Другими словами, был указан способ описания геометрии трещины и ее эволюции при условии, что поле направлений развития трещины в точках фронта известно. В настоящем разделе рассматривается задача об оценке возможности роста трещины и определении направления ее развития в зависимости от локального состояния среды.

В рамках используемого формализма срединная поверхность трещины описывается как гладкая поверхность с краем. При описании ее эволюции необходимо уметь отвечать на два основных вопроса:

- Будет ли происходить развитие трещины в заданной точке фронта при заданном напряженно-деформированном состоянии среды?
- Если развитие трещины будет происходить, то в каком направлении?

Ответ на эти вопросы дает так называемый «критерий разрушения» или «критерий развития» трещины.

В соответствии с постановкой задачи, нам интересен случай:

- сложного (полного трехмерного) нагружения среды в окрестности фронта трещины;
- неоднородных и, в общем случае, анизотропных фильтрационно-емкостных, упругих и прочностных свойств среды;

- присутствия объемных сил, действующих в теле, а также поверхностных сил (давления флюида), действующих на боковых поверхностях трещины;
- пороупругой модели поведения среды (то есть случай связанной задачи теории упругости и фильтрации, конкретно, в рамках модели Био).

В полной мере в рассматриваемой постановке эта задача не решена в настоящее время. В рамках задачи о развитии флюидонаполненной трещины она является предметом активных исследований. Анализ напряженно-деформированного состояния в окрестности фронта трещины (в том числе асимптотики физических полей) и механизмов развития трещины за счет нагнетания жидкости представлен, например, в работах [Desrouches1994, Garagash2000, Savitsky2004, Detournay2004, Detournay2003, Kovalyshen2010, Garagash2006]. Эти и другие работы рассматривают критерий разрушения, сформулированный в терминах коэффициентов интенсивности напряжений (см. ниже).

Анализ развития трещин в настоящее время использует два основных подхода, основанных на применении:

- «механистических» критериев, которые утверждают, что развитие трещины происходит при достижении некоторой величиной (обычно, напряжением) заданного критического значения. Эти подходы, так или иначе, основаны на использовании понятия «коэффициент интенсивности напряжений»;
- «энергетических» критериев, которые основаны на допущении о том, что развитие трещины происходит, если достаточно велико выделение энергии деформации, связанной с образованием новой поверхности трещины.

В ряде случаев (например, физически и геометрически линейной упругой среды) критерии обоих видов эквивалентны.

«Механистические» критерии. Рассмотрим трещину, расположенную в упругой среде. Будем считать, что ее раскрытие преимущественно обусловлено нормальным к плоскости трещины напряжением, вызванным давлением жидкости в трещине. Точки, располагающиеся на противоположных боковых поверхностях трещины симметрично относительно ее срединной поверхности, претерпевают нормальное к плоскости трещины перемещение, см. разделы 1.2 и 1.4.

В рамках теории хрупкого разрушения поле напряжений в окрестности фронта трещины имеет особенность: в локальных координатах, связанных с краем трещины (см. рисунок 1.2), компоненты тензора напряжения имеют вид:

$$\mathbf{T}(r, \theta) = \frac{K}{(2\pi r)^{1/2}} \mathbf{T}_s(\theta) + \mathbf{T}_r,$$

где \mathbf{T}_r — гладкое по r и θ слагаемое. Коэффициент K в последнем выражении называется коэффициентом интенсивности напряжений. В общем случае K зависит от характера нагружения среды, формы и размера трещины и свойств вмещающей среды.

В окрестности произвольной точки (гладкого) фронта $\partial\mathcal{F}$ трещины режим нагружения вмещающей среды может быть представлен в виде линейной комбинации трех режимов —

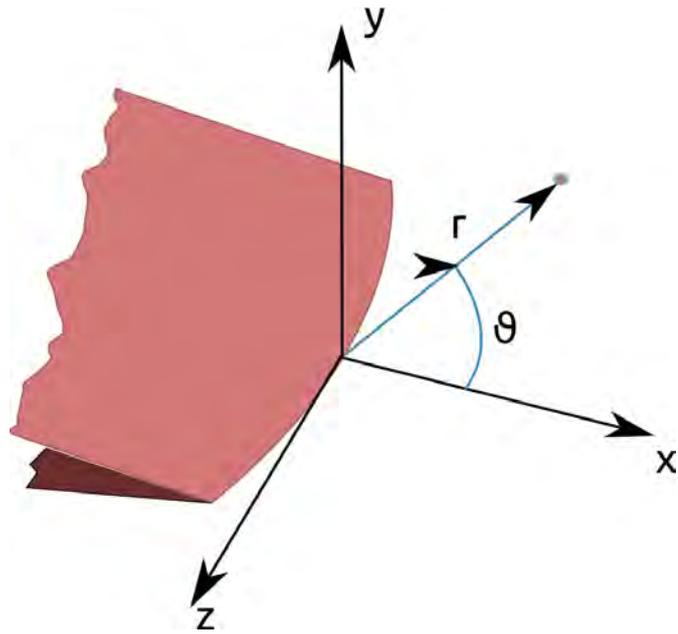


Рис. 1.2. Локальные координаты в окрестности фронта трещины.

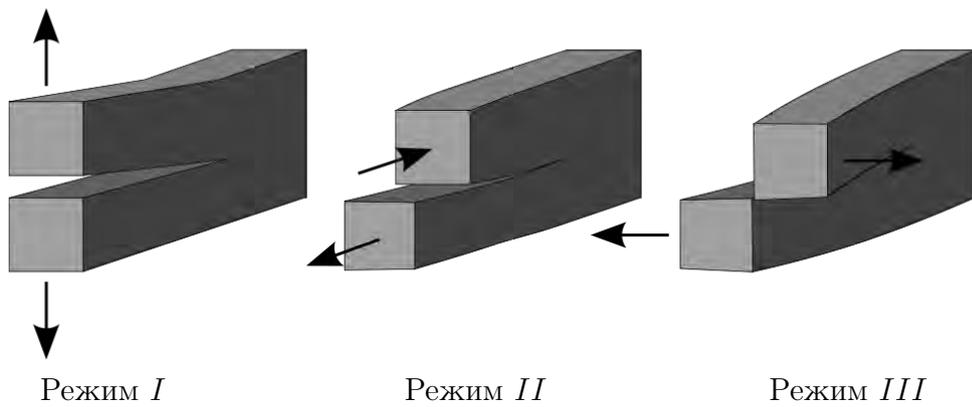


Рис. 1.3. Режимы нагружения в окрестности точки фронта трещины.

режимов I , II и III , см. рисунок 1.3. Соответствующие этим режимам коэффициенты концентрации напряжений обозначаются как K_I , K_{II} и K_{III} и определяются соотношениями (в системе координатах рисунка 1.2):

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} T_{yy}(r, 0), \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} T_{yx}(r, 0), \quad K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} T_{yz}(r, 0).$$

В простейшем случае трещины отрыва (режим I) критерий развития трещины имеет вид:

$$K_I \geq K_{Ic},$$

где K_{Ic} — критическое значение коэффициента интенсивности напряжений, которое является параметром среды. При выполнении указанного неравенства плоская трещина развивается прямолинейно. В противном случае развития трещины не происходит.

В случае квазихрупкого разрушения и комбинированного режима нагружения ($I + II$), удобно использовать следующий критерий ([Anderson2002, Моёс2002]):

$$G > G_c, \tag{1.23}$$

где

$$G = K_I^2 \frac{1 - \nu^2}{E} + K_{II}^2 \frac{1 - \nu^2}{E} + K_{III}^2 \frac{1}{2\mu}, \tag{1.24}$$

где G — энергия упругой деформации, высвобождаемая при образовании новой поверхности трещины. Таким образом, при проверке условия развития трещины, могут использоваться все три коэффициента интенсивности.

Выражение (1.24) может быть связано с энергией, выделяемой при образовании новой поверхности трещины. Таким образом, соответствующий критерий является, по существу, энергетическим. Однако он формулируется в терминах коэффициентов интенсивности напряжений и поэтому рассмотрен в настоящем разделе.

Для определения направления развития трещины обычно используются только коэффициенты интенсивности напряжений $K_{I,II}$. В локальных координатах с осями \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y на фронте трещины (см. рисунок 1.2) направление ее развития определяется как:

$$\mathbf{v} \sim (\cos \theta_c \mathbf{e}_x + \sin \theta_c \mathbf{e}_y), \tag{1.25}$$

где коэффициент пропорциональности в последнем выражении задается эмпирически, а угол определяется выражением ([Cherapanov1979]):

$$\theta_c = 2 \arctan \frac{1}{4} \left[\frac{K_I}{K_{II}} - \text{sign}(K_{II}) \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right]. \tag{1.26}$$

Критерий (1.23)-(1.26) теоретически обоснован для пространственно-двумерного случая плоских деформаций или плоских напряжений. При анализе трехмерных задач они применяются независимо в каждой точке фронта трещины, в плоскости, определяемой осями \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y и перпендикулярной фронту трещины. Применимость такого подхода при решении трехмерных задач подтверждается практически (см., например, [Моёс2002, Gravouil2002] и ссылки

там).

Рассмотрим теперь способы вычисления коэффициента интенсивности напряжений. Теоретически для этого возможно использовать непосредственно выражения, приведенные выше. Однако такой (локальный) способ их вычисления не всегда применим на практике в силу того, что в указанных выражениях присутствует операция предельного перехода. Это может создавать проблемы при использовании численных схем, например, на основе метода конечных элементов. Поэтому для вычисления коэффициентов интенсивности (в том числе, при численной реализации) используются не приведенные выше выражения, а эквивалентные им нелокальные соотношения, основанные на вычислении контурных интегралов или эквивалентных им объемных интегралов в окрестности фронта трещины, см., например, [Shih1986, Walters2005]. Указанные интегралы имеют смысл критической поверхностной энергии, необходимой для образования новой поверхности трещины. Они тесно связаны с понятием J -интеграла Черепанова-Райса, который подробно рассматривается ниже.

Отметим, что известен целый ряд других «механистических» критериев развития трещин. Для примера отметим критерий максимальных растягивающих напряжений, см., например, [Erdogan1963, Sun2012]. В этом случае считается, что трещина развивается в плоскости, перпендикулярной максимальному растягивающему напряжению в окрестности точки фронта. Трещина развивается в том случае, если максимальное растягивающее напряжение превышает заданное пороговое значение. Величина этого значения выбирается обычно так же, как и для трещины отрыва (режим I).

«Энергетические» критерии. Энергетический критерий развития трещины впервые был предложен Гриффитсом в работах [Griffith1920, Griffith1924] и далее развит в работах Дж. Р. Ирвина (J. R. Irwin) [Irwin1948, Irwin1956a, Irwin1956b]. В соответствии с предложенной в этих работах теорией в качестве критерия предлагается использовать скорость высвобождения энергии деформаций при образовании новой поверхности трещины. Формально он имеет приведенный выше вид (1.23). Для его применения необходимо уметь вычислять энергию G , затрачиваемую на образование единицы площади поверхности трещины. Одним из способов вычисления данной энергии в теории упругости является метод J -интеграла Черепанова-Райса, который является основой большинства практических алгоритмов расчета коэффициентов интенсивности напряжения и направления развития трещины как в двумерной, так и в трехмерной постановках.

Впервые выражение для скорости высвобождения упругой энергии при развитии трещины было получено Г. Черепановым в работе [Черепанов1967] и названо Γ -интегралом. Дж. Райс (J. Rice) в своей работе [Rice1968] при рассмотрении деформаций в окрестности кончика трещины в упруго-пластической среде ввел аналогичное понятие и назвал его J -интегралом. Фактически оно совпадает с введенным ранее Γ -интегралом Черепанова.

Интерпретация J -интеграла как балансового выражения для энергии представлена в книге [Черепанов1974]. Там же предложена идея векторного J -интеграла, обобщающая введенный ранее скалярный J -интеграл на случай произвольных криволинейных трещин. В настоящее время векторная форма J -интеграла мало распространена в приложениях, хотя во многом является более удобной в силу того, что не требует (в отличие от подходов, основанных на классическом скалярном варианте J -интеграла) информации об асимптотиках напряженно-деформированного состояния в окрестности фронта трещины и коэффициен-

тах интенсивности напряжений. Векторная форма J -интеграла определяет как критерий развития трещины, так и направление ее развития. В настоящей работе рассматривается скалярная и векторная формы J -интеграла.

Метод J -интеграла является распространенным средством анализа разнообразных задач развития трещин. Как было отмечено выше, с его помощью могут быть вычислены коэффициенты интенсивности напряжений на фронте трещины. Вывод J -интеграла для термоупругих материалов приводится в работах [Shih1986, Moran1987, Gozs1998, Gozs2001, Walters2004]. Для трещин в материалах под воздействием электрохимических нагрузок J -интеграл был получен в [Haftbaradaran2014]. В статье [Bouklas2015] J -интеграл выводится для гидрогеля, который представляет собой двухфазную среду с упругой матрицей и жидким наполнением. Размеры пор при этом малы настолько, что фильтрация жидкости не происходит и перенос массы жидкости происходит только за счет диффузионных процессов. Уравнения, описывающие такой процесс, по форме аналогичны уравнениям Био, которые применяются для описания пороупругой среды. При выводе соотношения для J -интеграла в случае гидрогеля авторы пользуются общим подходом на основе уравнений неравновесной термодинамики. Боковые поверхности считаются свободными от нагрузок.

Непосредственно критерий Ирвина является эмпирическим, однако скорость высвобождения энергии при развитии трещины является вполне определенной с точки зрения математической модели поведения среды величиной, которая и является, по существу, J -интегралом.

Далее в настоящей главе дается обоснованный вывод J -интеграла для модели Био пороупругой среды. Формулируется критерий развития трещины в терминах векторного J -интеграла Черепанова-Райса.

1.5.1 Формулировка J -интеграла для модели Био пороупругой среды

Основные уравнения. В настоящем разделе используются индексные обозначения. Компоненты векторов и тензоров обозначаются как a_α и $b_{\alpha\beta}$ соответственно. Пространственные компоненты векторов обозначаются греческими индексами. Латинские индексы обозначают дополнительную информацию, смысл которой поясняется по ходу изложения. Производные величин по координатам обозначаются как $\partial(\cdot)/\partial x_\alpha$. По повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до 3 или от 1 до 2 в пространственно двумерном случае.

Рассмотрим двухфазную среду, в которой одна фаза является твердой деформируемой пористой пронизываемой матрицей (скелетом), а вторая является жидкой (подвижной) средой. Первую среду будем обозначать индексом «s» («solid»), вторую — индексом «f» («fluid»).

Введем декартову ортогональную систему координат $\mathcal{O}x_\alpha$. Будем рассматривать случай малых пространственных деформаций. В этом случае эйлеровы и лагранжевы координаты точек скелета совпадают. Пусть $u_\alpha = u_\alpha(t, x_\beta)$ — компоненты поля перемещения точек среды.

Запишем уравнения, описывающие динамику пороупругой среды. Закон сохранения массы флюида имеет вид:

$$\frac{\partial m_f}{\partial t} + \frac{\partial w_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (1.27)$$

где $m_f = \rho_f \phi$ — флюидосодержание, $w_\alpha = \rho_f (v_{f,\alpha} - v_{s,\alpha})$ — компоненты вектора плотности потока массы жидкости, ρ_f — плотность жидкости, ϕ — пористость, $v_{f,\alpha}$ и $v_{s,\alpha} = \partial u_\alpha / \partial t$ —

компоненты скорости жидкости и скелета соответственно.

Уравнение сохранения импульса для твердой фазы имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \sigma_{\alpha\beta} + m_s (f_\beta - \gamma_{s,\beta}) + m_f (f_\beta - \gamma_{f,\beta}) = 0, \quad (1.28)$$

где $\sigma_{\alpha\beta}$ — тензор напряжений Коши, f_β — компоненты вектора массовой плотности внешних сил, $\gamma_{s,\alpha} = \partial v_{s,\alpha}/\partial t$ и $\gamma_{f,\alpha} = \partial v_{f,\alpha}/\partial t$ — ускорения скелета и жидкости, $m_s = \rho_s(1 - \phi)$ — средняя плотность твердой фазы.

Для изменения объемной плотности внутренней энергии e системы имеем следующее уравнение:

$$\frac{de}{dt} + e \frac{\partial v_{s,\alpha}}{\partial x_\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (h_f w_\alpha + Q_\alpha) + (f_\alpha - \gamma_{f,\alpha}) w_\alpha, \quad (1.29)$$

где $de/dt = \partial e/\partial t + v_{s,\alpha} \partial e/\partial x_\alpha$, $h_f = e_f + p/\rho_f$ — удельная массовая энтальпия жидкости, p — давление, $d_{\alpha\beta} = 1/2 (\partial v_\beta/\partial x_\alpha + \partial v_\alpha/\partial x_\beta)$ — компоненты тензора скоростей деформаций. Объемную плотность внутренней энергии e можно выразить через удельные массовые энергии жидкости и скелета как $e = (1 - \phi)\rho_s e_s + \phi\rho_f e_f$, где e_f — удельная массовая энергия жидкости, e_s — удельная массовая энергия скелета.

Для замыкания системы уравнений (1.27), (1.28), (1.29) необходимо задать выражение для вектора плотности потока массы жидкости. В линейном случае оно имеет вид закона Дарси:

$$w_\alpha = \frac{\rho_f K_p}{\mu} \left[-\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \rho_f (f_\alpha - \gamma_{f,\alpha}) \right],$$

где K_p — коэффициент проницаемости, μ — вязкость жидкости.

При учете тепловых эффектов необходимо задать выражение для потока тепла. В линейном случае он имеет вид закона Фурье:

$$Q_\alpha = -k_T \frac{\partial T}{\partial x_\alpha},$$

где k_T — коэффициент теплопроводности.

Также необходимо задать термодинамические потенциалы жидкости и скелета, которые в общем виде можно записать как:

$$g_f = g_f(p, T), \quad g_s = g_s(\varepsilon_{\alpha\beta}, p, T), \quad (1.30)$$

$$g_f = h_f - T s_f = e_f + p/\rho_f - T s_f, \quad (1.30)$$

$$g_s = \psi_s - p\phi = e_s \rho_s + p\phi - T s_s, \quad (1.31)$$

где g_f — удельная массовая свободная энергия Гиббса жидкости, g_s — удельная объемная свободная энергия Гиббса скелета, ψ_s — удельная объемная свободная энергия Гельмгольца скелета, $\varepsilon_{\alpha\beta} = 1/2 (\partial u_\alpha/\partial x_\beta + \partial u_\beta/\partial x_\alpha)$ — компоненты тензора упругих деформаций. В этом случае определяющие соотношения для плотности жидкости ρ_f , удельной массовой энтропии жидкости s_f , удельной объемной энтропии скелета s_s , давления p и тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ имеют вид:

$$\frac{1}{\rho_f} = \frac{\partial g_f}{\partial p}, \quad s_f = \frac{\partial g_f}{\partial T}, \quad s_s = -\frac{\partial g_s}{\partial T}, \quad \phi = -\frac{\partial g_s}{\partial p}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{\partial g_s}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}.$$

Если в ходе связанных процессов деформации скелета и фильтрации жидкости отклонения полей термодинамических величин от равновесных малы, определяющие соотношения для жидкости можно записать в следующем виде:

$$\frac{\rho_f - \rho_{f0}}{\rho_{f0}} = \frac{1}{K_f}(p - p_0) - \alpha_f(T - T_0), \quad s_f - s_{f0} = -\alpha_f \frac{p - p_0}{\rho_{f0}} + C_p \frac{T - T_0}{T_0}, \quad (1.32)$$

где индексом «0» обозначены опорные (равновесные) значения параметров, α_f — коэффициент температурного расширения флюида, K_f — объемный модуль сжатия, C_p — удельная теплоемкость жидкости при постоянном давлении. Определяющие соотношения для скелета можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{0,\alpha\beta} &= C_{\alpha\beta\gamma\delta} [\varepsilon_{\gamma\delta} - \varepsilon_{0,\gamma\delta} - \alpha_{\gamma\delta}(T - T_0)] - b_{\alpha\beta}(p - p_0), \\ \phi - \phi_0 &= b_{\alpha\beta}(\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{0,\alpha\beta}) + \frac{1}{N}(p - p_0) - \alpha_\phi(T - T_0), \\ s_s - s_{s0} &= C_{\alpha\beta\gamma\delta}\alpha_{\alpha\beta}(\varepsilon_{\gamma\delta} - \varepsilon_{0,\gamma\delta}) - \alpha_\phi(p - p_0) + C \frac{T - T_0}{T_0}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

где C — удельная объемная теплоемкость скелета при постоянных $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и p , α_ϕ — коэффициент температурного расширения скелета, $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — компоненты симметричного тензора упругих коэффициентов, $\alpha_{\gamma\delta}$ — компоненты тензора температурного расширения скелета, N , $b_{\alpha\beta}$ — параметры Био.

Подставляя (1.32) и (1.33) в выражения

$$\begin{aligned} g_f - g_{f0} &= \frac{1}{\rho_f} \Delta p - s_f \Delta T, \\ g_s - g_{s0} &= \sigma_{0,\alpha\beta} \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} - \phi_0 \Delta p - s_{s0} \Delta T + \frac{1}{2} (\Delta \sigma_{\alpha\beta} \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} - \Delta \phi \Delta p - \Delta s_s \Delta T), \end{aligned} \quad (1.34)$$

получим определяющие соотношения для g_f и g_s . В последнем выражении для какой-либо величины f символом Δf обозначено ее отклонение от ее равновесного, опорного, значения f_0 , $\Delta f = f - f_0$. Аналогично, с помощью соотношений (1.30) и (1.31) можно получить определяющие соотношения для e_f и e_s .

Вывод J -интеграла. Рассмотрим неограниченную пороупругую среду. Пусть в среде имеется трещина, длина которой увеличивается с течением времени. Будем считать, ее боковые поверхности свободны от нагрузок.

Рассмотрим некоторый объем среды V , ограниченный поверхностью ∂V и содержащий край трещины. Согласно закону сохранения энергии работа, совершенная в единицу времени внешними объемными и поверхностными силами и тепловая энергия, подведенная к телу в единицу времени, идут на изменение полной энергии среды и на увеличение поверхности трещины. Обозначим через $d\Pi/dt$ изменение энергии, связанное с увеличением площади поверхности трещины внутри объема V в единицу времени. Тогда интегральный закон сохранения энергии для объема V можно записать в виде:

$$\int_V A_m dV + \int_{\partial V} A_e dS - \int_{\partial V} Q_\alpha n_\alpha dS = \frac{d}{dt} \int_V (e + K) dV + \frac{d\Pi}{dt}, \quad (1.35)$$

где A_m и A_e — работа, совершенная в единицу времени объемными силами и поток энергии через поверхность области V , соответственно; Q_e — поток тепла, K — кинетическая энергия единицы массы. Выражения для этих величин имеют следующий вид:

$$K = \frac{1}{2} [\rho_s (1 - \phi) v_s^2 + \rho_f \phi v_f^2], \quad (1.36)$$

$$A_m = [\rho_s (1 - \phi) v_{s,\alpha} + \rho_f \phi v_{f,\alpha}] f_\alpha, \quad A_e = \left[\sigma_{\alpha\beta} n_\alpha v_{s,\beta} - \left(\frac{v_f^2}{2} + h_f \right) w_\alpha n_\alpha \right],$$

где n_α — компоненты вектора единичной внешней нормали к поверхности ∂V , $v_f^2 = v_{f,\alpha} v_{f,\alpha}$, $v_s^2 = v_{s,\alpha} v_{s,\alpha}$ — квадрат нормы вектора скорости жидкости и скелета, соответственно.

Анализ соотношения (1.35) в общей постановке (произвольная пространственная геометрия срединной поверхности трещины, произвольное направление ее развития) является сложной задачей. Поэтому рассмотрим более простой случай двумерного приближения и плоской трещины. Далее будет показано, каким образом полученные в этом приближении результаты можно применить к общему случаю.

Рассмотрим полубесконечную плоскую трещину, распространяющуюся вдоль оси $\mathcal{O}x_1$ так, что ее фронт параллелен оси $\mathcal{O}x_3$. Будем предполагать, что решение не зависит от координаты x_3 . Другими словами, рассматривается пространственно-двумерная задача в плоскости $\mathcal{O}x_1x_2$.

В качестве области V выберем содержащий участок фронта трещины цилиндр единичной длины с основанием Ω_0 , образующая L которого параллельна оси $\mathcal{O}x_3$, $V = \Omega_0 \times L$. Длину отрезка L обозначим как $|L|$. Тогда уравнение (1.35) переходит в интегральное соотношение на плоскости $\mathcal{O}x_1x_2$:

$$\int_{\Omega_0} A_m d\omega + \int_{\partial\Omega_0} A_e ds - \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega_0} Q_\alpha n_\alpha ds = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} (e + K) d\omega + \frac{1}{|L|} \frac{d\Pi}{dt}. \quad (1.37)$$

В общем случае величина $d\Pi/dt$ зависит от формы трещины, скорости движения ее фронта и направления движения. В рассматриваемом приближении она определяется в виде:

$$\frac{d\Pi}{dt} = \int_L 2\gamma v_{\text{frac}} dl,$$

где $v_{\text{frac}} = da/dt$ — скорость движения фронта трещины, $a = a(t)$ — координата ее фронта, γ — энергия, выделяющаяся при образовании единицы площади поверхности трещины в расчете на единицу длины ее фронта. Обозначим через $\tilde{\Pi} = \Pi/|L|$ энергию, отнесенную к единице длины фронта трещины. С учетом симметрии задачи получим $d\tilde{\Pi}/dt = 2\gamma v_{\text{frac}}$.

Интегрируя уравнение баланса внутренней энергии (1.29) по объему Ω_0 и вычитая полу-

ченное выражение из (1.37), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\Pi}}{dt} + \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} K d\omega + \int_{\partial\Omega_0} \frac{v_f^2}{2} w_\alpha n_\alpha ds = \\ = - \int_{\Omega_0} \sigma_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta} d\omega + \int_{\partial\Omega_0} \sigma_{\alpha\beta} n_\alpha v_{s,\beta} ds + \int_{\Omega_0} A_m - (f_\alpha - \gamma_{f,\alpha}) w_\alpha d\omega. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Отсюда с учетом

$$\sigma_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta} = \frac{\partial\psi_s}{\partial t} - P \frac{\partial\phi}{\partial t} + s_s \frac{\partial T}{\partial t},$$

имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\Pi}}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} (\psi_s + K) d\omega + \int_{\Omega_0} \left(P \frac{d\phi}{dt} - s_s \frac{dT}{dt} \right) d\omega + \\ + \int_{\partial\Omega_0} \sigma_{\alpha\beta} n_\alpha v_{s,\beta} ds + \int_{\Omega_0} [A_m - (f_\alpha - \gamma_{f,\alpha}) w_\alpha] d\omega + \int_{\partial\Omega_0} \frac{v_f^2}{2} w_\alpha n_\alpha ds. \end{aligned} \quad (1.39)$$

В рассматриваемом приближении любая величина F будет зависеть от a и не зависеть от x_3 , то есть $F = F(t, x_1, x_2, a)$. В относительной системе координат, связанной с кончиком трещины, зависимость поля F от времени и координат будет иметь вид $F = F(t, x_1 - a(t), x_2)$ и, соответственно,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{da}{dt} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1}. \quad (1.40)$$

Заменяем в соответствии с (1.40) производную по времени в (1.39) и, сокращая на da/dt , получим выражение для J -интеграла:

$$\begin{aligned} J = \frac{d\Pi}{da} = \int_{\partial\Omega_0} \left[(\psi_s + K) n_1 - \sigma_{\alpha\beta} n_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial x_1} \right] ds - \int_{\Omega_0} \left(p \frac{\partial\phi}{\partial x_1} - s_s \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) d\omega - \\ - \int_{\Omega_0} \left[\rho f_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_1} + \rho_f \phi \gamma_{f,\alpha} \frac{\partial (u_{f,\alpha} - u_\alpha)}{\partial x_1} \right] d\omega + \int_{\partial\Omega_0} \frac{v_f^2}{2} \rho_f \phi \frac{\partial (u_{f,\alpha} - u_\alpha)}{\partial x_1} n_\alpha ds, \end{aligned} \quad (1.41)$$

где $u_{f,\alpha}$ — компоненты вектора перемещений частиц жидкости, $\rho = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f$.

Если процесс совместного деформирования скелета и течения жидкости является медленным, то можно пренебречь силами инерции $\gamma_{s,\alpha}$, $\gamma_{f,\alpha}$ и кинетической энергией в уравнениях (1.27)-(1.29) и (1.37)-(1.41). Тогда выражение для J -интеграла примет вид:

$$J = \int_{\partial\Omega_0} \left[\psi_s n_1 - \sigma_{\alpha\beta} n_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial x_1} \right] ds - \int_{\Omega_0} p \frac{\partial\phi}{\partial x_1} d\omega + \Lambda, \quad \Lambda = \int_{\Omega_0} \left[s_s \frac{\partial T}{\partial x_1} - \rho f_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_1} \right] d\omega, \quad (1.42)$$

где ψ_s — удельная объемная свободная энергия Гельмгольца скелета,

$$\psi_s - \psi_{s0} = \sigma_{0\alpha\beta} \Delta\varepsilon_{\alpha\beta} + p_0 \Delta\phi - s_{s0} \Delta T + \frac{1}{2} (\Delta\sigma_{\alpha\beta} \Delta\varepsilon_{\alpha\beta} + \Delta\phi \Delta p - \Delta s_s \Delta T).$$

Величина Λ связана с работой массовых сил и неизотермичностью процесса.

Соотношение (1.42) является выражением для интенсивности высвобождения энергии в ходе развития трещины. Для полноты приведем эквивалентные формулировки J -интеграла (1.42), выраженные через другие термодинамические потенциалы:

$$J = \int_{\partial\Omega_0} \left[\psi n_1 - \sigma_{\alpha\beta} n_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial x_1} \right] ds - \int_{\Omega_0} g_f \frac{\partial m_f}{\partial x_1} d\omega + \Lambda,$$

$$J = \int_{\partial\Omega_0} \left[g_s n_1 - \sigma_{\alpha\beta} n_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial x_1} \right] ds + \int_{\Omega_0} \phi \frac{\partial p}{\partial x_1} d\omega + \Lambda,$$

где ψ — удельная объемная свободная энергия Гельмгольца среды, g_s — удельная объемная свободная энергия Гиббса скелета:

$$d\psi = d\psi_s - p d\phi + g_f dm_f, \quad dg_s = d\psi_s - d(p\phi).$$

Отметим, что в случае постоянного по времени и пространству поля давления выражение (1.42) совпадает с классическим интегралом Черепанова-Райса [Черепанов1974].

Случай криволинейной трещины. Перейдем к рассмотрению случая криволинейной трещины. Другими словами, будем считать, что ее срединная поверхность не является плоской. При этом задача все еще является двумерной, то есть поля, определяющие состояние среды, не зависят от координаты x_3 . Также, не ограничивая общность, будем считать, что $\Lambda = 0$.

Определим величины

$$J_\gamma = \int_{\partial\Omega_0} \left[\psi_s n_\gamma - \sigma_{\alpha\beta} n_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma} \right] ds - \int_{\Omega_0} p \frac{\partial \phi}{\partial x_\gamma} d\omega, \quad \gamma = 1, 2. \quad (1.43)$$

Покажем, что при интегрировании по замкнутому контуру, который не содержит внутри себя какую-либо часть трещины, данные величины равняются нулю. В самом деле, так как в этом случае все величины являются гладкими функциями, в (1.43) можно перейти от интеграла по контуру к интегралу по объему:

$$\begin{aligned} J_\gamma &= \int_{\Omega_0} \left[\frac{\partial \psi_s}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma} \right) \right] d\omega - \int_{\Omega_0} p \frac{\partial \phi}{\partial x_\gamma} d\omega = \\ &= \int_{\Omega_0} \left[\sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + p \frac{\partial \phi}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma} \right) \right] d\omega - \int_{\Omega_0} p \frac{\partial \phi}{\partial x_\gamma} d\omega = \\ &= \int_{\Omega_0} \left[-\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma} \right] d\omega = 0. \end{aligned}$$

В случае, если контур охватывает кончик трещины, поля, описывающие состояние среды имеют разрыв внутри области Ω_0 . Тогда переход от контурного интеграла к объемному не правомерен и $J_\gamma \neq 0$. Следовательно, интеграл J_γ можно рассматривать как величину, ха-

рактически характеризующую мощность источников энергии, высвобождающейся при развитии трещины.

Заметим, что в частном случае прямолинейной трещины, распространяющейся в направлении $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$, $\|\mathbf{k}\| = k_1^2 + k_2^2 = 1$, отличном от $(1, 0)$, в связанной с кончиком трещины относительной системе координат имеем $F = F(t, x_1 - k_1 a(t), x_2 - k_2 a(t))$, и, как следствие

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} - k_1 \frac{da}{dt} \frac{\partial F}{\partial x_1} - k_2 \frac{da}{dt} \frac{\partial F}{\partial x_2}.$$

Проделив те же действия, что и при выводе выражения (1.41), можно получить следующее выражение для J -интеграла:

$$J = \mathbf{J} \cdot \mathbf{k} = J_1 k_1 + J_2 k_2.$$

При переходе в систему координат, связанную с вектором J_α , выражение (1.43) переходит в (1.42).

Вычисление J -интеграла в пространственном случае. Определение векторного J -интеграла (1.43) может быть перенесено на случай пространственной трещины с гладким фронтом. Пусть s — параметрическая координата вдоль фронта трещины. В каждой точке фронта трещины введем локальную систему ортогональных координат $\mathcal{O}x_\alpha$ так, что ось $\mathcal{O}x_1$ направлена по нормали к фронту и лежит в плоскости, касательной к ее срединной поверхности; ось $\mathcal{O}x_2$ направлена перпендикулярно к срединной поверхности трещины; ось $\mathcal{O}x_3$ направлена по касательной к фронту трещины и совпадает с направлением увеличения параметра s . Также предположим, что в окрестности точки на фронте локально реализуется напряженно-деформированное состояние, близкое к плоскому. Тогда в каждой точке s фронта имеем вектор $J_\alpha = J_\alpha(s)$, вычисленный в плоскости $\mathcal{O}x_1 x_2$ точно так же, как и в двумерном случае, с помощью (1.43).

На практике вычисление J_α в точке фронта $s = s_0$ удобно выполнять в следующем представлении:

$$J_\gamma(s_0) = \int_L \int_{\Omega_0} \left[\frac{\partial \psi_s}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma} \right) - p \frac{\partial \phi}{\partial x_\gamma} \right] \delta(s - s_0) d\omega ds, \quad (1.44)$$

где $\delta(s)$ — дельта-функция Дирака на числовой оси, L — сегмент фронта трещины, область Ω_0 расположена в плоскости $\mathcal{O}x_1 x_2$ локальной системы координат. Если ввести неотрицательную на своей области определения функцию $\delta^h(s)$ с компактным носителем $\text{supp } \delta^h(s) = [s - h, s + h]$, аппроксимирующую $\delta(s)$ в смысле распределений, то получим:

$$J_\gamma(s_0) \approx \int_{V(s_0)} \left[\frac{\partial \psi_s}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma} \right) - p \frac{\partial \phi}{\partial x_\gamma} \right] \delta^h(s) dv \Bigg/ \int_{s_0-h}^{s_0+h} \delta^h(s - s_0) ds, \quad (1.45)$$

где $V(s_0) = \Omega_0 \times [s_0 - h, s_0 + h]$ — пространственная область интегрирования. Формула (1.45) позволяет использовать J_α в численных расчетах в рамках метода конечных элементов.

1.5.2 Критерий развития трещины

Выражение (1.43) позволяет сформулировать следующий эмпирический критерий развития трещины, аналогичный приведенному в [Черепанов1974]: трещина развивается в направле-

нии $\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0 \in \mathbb{R}^2$, таком, что

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{K}_0 \equiv J_\alpha k_{0,\alpha} = G_0(\mathbf{k}_0), \quad \mathbf{J} \cdot \mathbf{k} \equiv J_\alpha k_\alpha \leq G_0(\mathbf{k}), \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0. \quad (1.46)$$

Здесь G_0 — некоторое пороговое значение энергии, которое, в общем случае, может зависеть от направления. Критерий позволяет определить направление развития трещины: если найдется такое направление \mathbf{k}_0 , для которого выполняется условие (1.46), то в данном направлении происходит развитие трещины. Для однородной изотропной среды $G_0 = \text{const}$ и направление развития трещины совпадает с направлением вектора J_α .

Таким образом, при заданном положении фронта $\partial\mathcal{F}_t$ трещины в момент времени t в каждой его точке $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{F}_t$ можно определить вектор $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{x})$. С физической точки зрения вектор \mathbf{J} определяет количество энергии J , высвобождаемой при локальном развитии трещины в заданном направлении \mathbf{l} ($\|\mathbf{l}\| = 1$), $J = \mathbf{J} \cdot \mathbf{l}$. В соответствии с энергетическим критерием развития трещины ее развитие происходит в направлении вектора \mathbf{l} , при котором величина высвобождаемой энергии максимальна, $J = J_{\max} = J(\mathbf{l}_{\max})$. В случае, если $J_{\max} \leq J_*$, где J_* — некоторое критическое значение энергии, которое обычно считают свойством материала, развития трещины не происходит. При $J_{\max} = J_*$ происходит устойчивое развитие трещины, при $J_{\max} > J_*$ — неустойчивое.

Таким образом, если развитие трещины в заданной точке происходит, локальное направление развития совпадает с направлением вектора \mathbf{J} , то есть в уравнении (1.14) имеем $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{J}$, $\alpha \geq 0$.

Вместе с тем, теория развития квазиравновесных трещины в упругой среде не позволяет непосредственно определить *скорость* развития трещины, то есть значение коэффициента α в случае, если он положителен. Поэтому уравнение (1.14) является «кинематическим», то есть дает удобную параметризацию поверхности трещины. Оно должно быть дополнено непосредственно уравнением для определения положения фронта трещины, которое уже было сформулировано выше и имеет вид $\mathbf{J}_{\max} \leq J_*$. Это уравнение является нелокальным и зависит от текущей конфигурации срединной поверхности трещины, решения задачи порупругости во всей области и распределения давления внутри трещины.

В совокупности, приведенные уравнения означают, что в ходе развития трещины в каждой точке ее фронта вектор, касательный к поверхности трещины и нормальный к ее фронту, сонаправлен вектору \mathbf{J} в заданной точке, при этом в этой точке выполняется соотношение $\mathbf{J}_{\max} \leq J_*$. При этом $\alpha = 0$ в точках, где $J_{\max} < J_*$. В точках, где происходит рост трещины, уравнение $J_{\max} = J_*$, по-существу, является уравнением относительно α .

На практике определение величины α является вычислительно сложной задачей (ее решение требует решения уравнения $J_{\max} = J_*$ тем или иным способом). Поэтому для оценки значения α используют зачастую необоснованные, но хорошо зарекомендовавшие себя на практике методы, типа «закона Пэриса» (см. [Paris1963] и обсуждение в главе 6), который связывает скорость развития трещины с величиной отношения J/J_{\max} . Для рассматриваемого класса задач (динамика квазиравновесной трещины в упругой и/или пороупругой среде) они не обоснованы ни теоретически, ни экспериментально.

В главе 6 настоящей работе используется критерий на основе J -интеграла и критерий максимальных растягивающих напряжений, см., например, [Erdogan1963, Sun2012]. Сравнение этих критериев не производится. Это содержательная работа, которая требует от-

дельного внимания. Центральный «вычислительный» результат работы, а именно, комплекс алгоритмов для анализа распространения трещины в пороупругой среде, требует для своего использования лишь значение скорости развития трещины и не зависит от конкретного способа ее определения. При этом сформулированный в настоящем разделе критерий развития трещины в пороупругой среде является неотъемлемой частью предложенной математической модели и является, на взгляд автора, содержательным результатом «модельной» части работы.

1.5.3 Потенциальная энергия и поток энергии при развитии трещины

В предыдущем разделе был представлен вывод J -интеграла Черепанова-Райса для пороупругой среды и сформулирован критерий развития трещины с его использованием. В настоящем разделе показывается, что полученное выражение для J -интеграла обладает свойствами, типичными для упругого случая. В частности, показывается, что вариационная производная потенциальной энергии по длине трещины равна энергии, необходимой для развития трещины, то есть величине J -интеграла.

Поток энергии при развитии трещины. Формула для потока энергии в точках развития трещин в упругой среде хорошо известна. Для вывода этой формулы используются разные подходы, см. [Седов2004, Rice1968b]. В данном разделе указанная формула обобщается на рассматриваемый случай трещины в пороупругой среде. Для этого используется подход, изложенный в [Седов2004].

Рассмотрим неограниченную пороупругую среду. Пусть в среде имеется увеличивающаяся со временем трещина со срединной поверхностью $\Sigma = \Sigma(t)$, t — время. Фронтом трещины является (одномерный) край $\partial\Sigma$ этой поверхности.

В случае развития трещины как в чисто упругой, так и в пороупругой среде обобщенный закон сохранения энергии для произвольного объема V среды записывается в виде:

$$dK + dU = dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dA_{d\Sigma}^{(e)}, \quad (1.47)$$

где K — кинетическая энергия, U — внутренняя энергия; $dA^{(e)}$ — приток энергии за счет работы внешних объемных и поверхностных сил, $dQ^{(e)}$ — приток тепла.

Величина $dA_{d\Sigma}^{(e)}$ интерпретируется как поток энергии в особых точках (на фронте, в двумерном случае — кончике трещины), необходимый для развития трещины. Если трещина не движется либо объем V не содержит точек фронта трещины, то указанная величина равна нулю. Выражение для этой величины в случае развития трещины в чисто упругой среде приведено в [Седов2004, Rice1968b].

Рассмотрим некоторую область V , содержащую фронт (кончик) трещины. Как было показано в разделе 1.5.1, интегральная форма закона сохранения энергии для рассматриваемой модели имеет вид (1.35), (1.36).

Пусть в некоторый момент времени t трещина представлена поверхностью Σ , а в момент времени $t + \Delta t$ — поверхностью $\Sigma + \Delta\Sigma$. Будем считать, что в оба момента времени область V содержит часть поверхности трещины вместе с краем. Площадь трещины также будем

обозначать символом Σ .

Обозначим через $\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbf{x}_\alpha, t$ вектор перемещения точек скелета из некоторого начального состояния в состоянии в момент времени t , а $\mathbf{u}' = \mathbf{u}(\mathbf{x}_\alpha, t + \Delta t)$ — вектор перемещения из того же начального состояния в состоянии в момент времени $t + \Delta t$.

Используя уравнение (1.27) для моментов времени t и $t + \Delta t$ для точек объема V , можно записать соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\sigma'_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}) + F'_\alpha + F_\alpha = 0, \quad F_\alpha = m_s (f_\beta - \gamma_{s,\beta}) + m_f (f_\beta - \gamma_{f,\beta}). \quad (1.48)$$

Здесь без штрихов указаны величины в текущий момент времени t , а со штрихами — те же величины в момент времени $t + \Delta t$.

Умножим (1.48) на выражение $\Delta u_\alpha/2 = (u'_\alpha - u_\alpha)/2$. Суммируя и далее интегрируя сумму по всему объему, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma+\Delta\Sigma} (\sigma'_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}) (u'_\alpha - u_\alpha) n_\beta ds + \frac{1}{2} \int_V (F'_\alpha + F_\alpha) (u'_\alpha - u_\alpha) d\omega = \\ = \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{\partial \psi'_s}{\partial \varepsilon'_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \psi_s}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} \right) \frac{\partial}{\partial x_\beta} (u'_\alpha - u_\alpha) d\omega, \end{aligned} \quad (1.49)$$

где ψ_s — удельная свободная энергия Гельмгольца твердой фазы,

$$d\psi_s = \sigma_{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta} + p d\phi - S_s dT, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{\partial \psi_s}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}, \quad p = \frac{\partial \psi_s}{\partial \phi}, \quad S_s = -\frac{\partial \psi_s}{\partial T}.$$

Вычислим подынтегральное выражение в правой части (1.49). Для этого, сначала найдем разность

$$\begin{aligned} \psi'_s(\varepsilon'_{\alpha\beta}, \phi', T') - \psi_s(\varepsilon_{\alpha\beta}, \phi, T) = \\ \Delta\varepsilon_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial \psi_s}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_s}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{\alpha\beta}} \Delta\varepsilon_{ij} + \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta} \partial \phi} \Delta\phi + \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta} \partial T} \Delta T \right) \right] + \\ \Delta\phi \left[\frac{\partial \psi_s}{\partial \phi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_s}{\partial \phi^2} \Delta\phi + \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial T \partial \phi} \Delta T \right) \right] + \\ \Delta T \left[\frac{\partial \psi_s}{\partial T} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_s}{\partial T^2} \Delta T + \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial T \partial \phi} \Delta\phi \right) \right]. \end{aligned}$$

Далее, имеем:

$$\frac{\partial \psi'_s(\varepsilon'_{\alpha\beta}, \phi', T')}{\partial \varepsilon'_{\alpha\beta}} - \frac{\partial \psi_s(\varepsilon_{\alpha\beta}, \phi, T)}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} = \Delta \frac{\partial \psi_s}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} = \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{\alpha\beta}} \Delta\varepsilon_{ij} + \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta} \partial \phi} \Delta\phi + \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta} \partial T} \Delta T.$$

Из последних двух равенств следует, что:

$$\psi'_s(\varepsilon'_{\alpha\beta}, \phi', T') - \psi_s(\varepsilon_{\alpha\beta}, \phi, T) = \frac{1}{2} \left[2 \frac{\partial \psi_s}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} + \Delta \frac{\partial \psi_s}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} \right] \Delta\varepsilon_{\alpha\beta} + p \Delta\phi - S_s \Delta T,$$

или

$$\frac{1}{2} \left[2 \frac{\partial \psi_s}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} + \Delta \frac{\partial \psi_s}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} \right] \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} = \psi'_s(\varepsilon'_{\alpha\beta}, \phi', T') - \psi_s(\varepsilon_{\alpha\beta}, \phi, T) - p \Delta \phi + S_s \Delta T. \quad (1.50)$$

Подставляя (1.50) в (1.49) получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma} \sigma'_{\alpha\beta} (u'_\alpha - u_\alpha) n_\beta ds + \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma} \sigma_{\alpha\beta} u'_\alpha n_\beta ds + \int_{\Sigma} \sigma_{\alpha\beta} (u'_\alpha - u_\alpha) n_\beta d\omega + \\ + \int_V F_\alpha (u'_\alpha - u_\alpha) d\omega = \int_V (\Delta \psi_s - p \Delta \phi + S_s \Delta T) d\omega, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma} \sigma'_{\alpha\beta} (u'_\alpha - u_\alpha) n_\beta ds + \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma} \sigma_{\alpha\beta} u'_\alpha n_\beta ds + \int_{\Sigma} \sigma_{\alpha\beta} du_\alpha n_\beta ds + \\ + \int_V F_\alpha du_\alpha d\omega = \int_V (\Delta \psi_s - p \Delta \phi + S_s d\Delta) d\omega. \quad (1.51) \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь интегральный закон сохранения энергии (1.35) и уравнение баланса внутренней энергии (1.29). Интегрируя (1.29) по объему и вычитая из (1.35) результат интегрирования, получим уравнение, которое вместе с (1.51) дает следующую систему из двух соотношений:

$$\begin{aligned} \int_V A_m d\omega + \int_{\partial V} \left[\sigma_{\alpha\beta} n_\alpha v_{s,\beta} - \frac{v_f^2}{2} w_\alpha n_\alpha \right] ds = \\ = \int_V [\sigma_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta} + (f_\alpha - \gamma_{f,\alpha}) w_\alpha] d\omega + \frac{d}{dt} \int_V K d\omega + \frac{d\Pi}{dt}, \quad (1.52) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma} \sigma'_{\alpha\beta} (u'_\alpha - u_\alpha) n_\beta ds + \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma} \sigma_{\alpha\beta} u'_\alpha n_\beta ds + \\ + \int_{\Sigma} \sigma_{\alpha\beta} du_\alpha n_\beta ds + \int_V F_\alpha du_\alpha d\omega = \int_V (\Delta \psi_s - p \Delta \phi + S_s \Delta T) d\omega. \quad (1.53) \end{aligned}$$

Умножив (1.52) на Δt и вычитая из полученного уравнения соотношение (1.53), окончательно получим:

$$\Delta \Pi = \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma} \sigma'_{\alpha\beta} (u'_\alpha - u_\alpha) n_\beta ds + \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma} \sigma_{\alpha\beta} u'_\alpha n_\beta ds,$$

или

$$\frac{d\Pi}{d\Sigma} = \lim_{\Delta\Sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta\Sigma} \left[\int_{\Delta\Sigma} \sigma'_{\alpha\beta} (u'_\alpha - u_\alpha) n_\beta ds + \int_{\Delta\Sigma} \sigma_{\alpha\beta} u'_\alpha n_\beta ds \right]. \quad (1.54)$$

Таким образом, формула (1.54) позволяет вычислить величину скорости оттока энергии при развитии трещины. Отметим, что формально выражение (1.54) не отличается от сво-

его аналога для чисто упругой среды, однако в данном случае в выражение для тензора напряжений входит давление жидкости в порах, как это следует из (1.33).

Формулой (1.54) удобно пользоваться, когда известно аналитическое решение задачи. В случае, когда задача может быть решена только численными методами, удобнее пользоваться другой формулой, основанной на применении понятия J -интеграла.

Заметим, что формулы (1.54) и (1.42) получены из одного и того же исходного уравнения, то есть обобщенного закона сохранения энергии с учетом развития трещины. Поэтому они дают два различных способа вычисления одной и той же величины.

Потенциальная энергия пороупругой среды с трещиной. В теории упругости хорошо известно, что в упругом теле при механическом равновесии потенциальная энергия достигает минимума как функционал допустимых виртуальных перемещений [Седов2004]. Если указанное тело содержит движущуюся трещину, выясняется, что вариационная производная указанной потенциальной энергии по длине трещины равна энергии необходимой для развития трещины, то есть J -интегралу [Rice1968b]. Покажем, что аналогичное утверждение справедливо для пороупругой среды. Для этого предварительно необходимо обобщить выражение для потенциальной энергии.

Как и ранее, будем рассматривать пространственно двумерный случай. Пусть одномерная прямолинейная трещина занимает отрезок $[0, l]$ на оси $\mathcal{O}x_1$ в плоскости $\mathcal{O}x_1x_2$. Рассмотрим произвольную область V с границей $\Gamma = \partial V$, содержащую кончик трещины, как это показано на рисунке (1.4). Полагаем, что на части границы S_T задана сила T_α , на оставшейся части S_u границы задан вектор перемещений u_α . Границы трещины свободны от нагрузок. Далее для простоты полагаем, что массовые силы отсутствуют (при необходимости они могут быть учтены, так же как и изменение температуры).

В этом случае потенциальная энергия чисто упругой среды для изотермических процессов определяется как [Седов2004]:

$$\mathcal{P} = \int_V (W(\varepsilon_{\alpha\beta}) - \rho F_\gamma u_\gamma) d\omega - \int_{S_T} T_\gamma u_\gamma ds, \quad (1.55)$$

где $W(\varepsilon_{\alpha\beta})$ — объемная плотность свободной (упругой) энергии; F_γ — массовая плотность внешних сил; T_γ — поверхностная сила, заданная на части S_T поверхности тела. В выражении (1.55) компоненты u_α вектора перемещений можно рассматривать как обобщенные координаты, а величины F_γ, T_γ — как обобщенные силы.

Если обобщенные силы заданы и по определению не варьируются, то из (1.55) получим известный результат:

$$\delta\mathcal{P} = 0, \quad (1.56)$$

то есть вариация потенциальной энергии в положении механического равновесия относительно обобщенных координат равна нулю. Для линейно упругого тела можно показать, что потенциальная энергия при этом имеет минимум.

В случае пороупругой среды этот потенциал для изотермических процессов обобщается

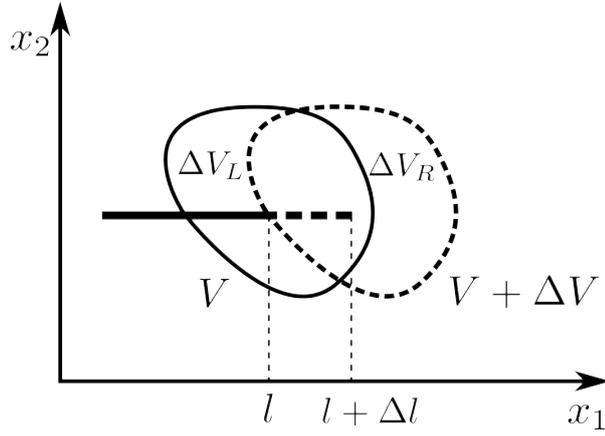


Рис. 1.4. К вычислению величины потока энергии при развитии трещины.

следующим образом:

$$\mathcal{P} = \int_V [\psi_s(\varepsilon_{\alpha\beta}, \phi) - p\phi - \rho F_\gamma u_\gamma] d\omega - \int_{S_T} T_\gamma u_\gamma ds. \quad (1.57)$$

Здесь, по сравнению с (1.55), имеется дополнительная обобщенная координата ϕ и соответствующая обобщенная сила p . Если в рассматриваемом объеме V нет трещины, то эти поля гладкие. В этом случае выполняется равенство (1.56). В случае же наличия трещины, как показано в [Rice1968b] для чисто упругой среды, вариационная производная по длине трещины равна J -интегралу. Покажем, что аналогичное равенство имеет место и для пороупругой среды.

Пусть длина трещины получает приращение Δl . В результате этого происходит изменение полей, описывающих состояние среды. Для какого либо поля f его результирующее состояние будем обозначать как $f + \Delta f$. Одновременно с этим будем считать, что область V сдвигается как единое целое вместе с кончиком трещины. Результирующую область можно представить в виде $V + \Delta V_R - \Delta V_L$, см. рисунок 1.4.

В ходе развития трещины поля, описывающие состояния среды, изменяются. Будем рассматривать их как функцию трех переменных: двух пространственных координат x_α и длины l трещины, $f = f(x_1, x_2, l)$.

Далее заметим, что имеет место равенство

$$\int_{S_T} T_\gamma \Delta u_\gamma ds = \int_\Gamma (T_\gamma + \Delta T_\gamma) \Delta u_\gamma d\omega, \quad (1.58)$$

которое следует из того, что $\Delta T_\gamma = 0$ на S_T , $\Delta u_\gamma = 0$ на S_u и $T_\gamma^0 + \Delta T_\gamma = 0$ на боковых поверхностях трещины.

Вычислим вариационную производную потенциальной энергии по длине трещины:

$$-\frac{dP}{dl} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l} \left\{ \int_{\Gamma} (T_{\gamma} + \Delta T_{\gamma}) \Delta u_{\gamma} ds + \int_V [p\Delta\phi - \psi_s(\varepsilon_{\alpha\beta} + \Delta\varepsilon_{\alpha\beta}, \phi + \Delta\phi) + \psi_s(\varepsilon_{\alpha\beta}, \phi)] dx_1 dx_2 \right\}.$$

Для суммы первого (поверхностного) интеграла и первого слагаемого во втором (объемном) интеграле имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l} \int_{\Gamma} (T_{\gamma} + \Delta T_{\gamma}) \Delta u_i ds + \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l} \int_V p\Delta\phi dx_1 dx_2 = \\ \int_{\Gamma} T_{\gamma}(X_1, x_2, l) \frac{\partial u_{\gamma}(X_1, x_2, l)}{\partial l} ds - \int_{\Gamma} T_{\gamma}(X_1, x_2, l) \frac{\partial u_{\gamma}(X_1, x_2, l)}{\partial x_1} ds + \\ + \int_V p \left[\frac{\partial\phi(X_1, x_2, l)}{\partial l} - \frac{\partial\phi(X_1, x_2, l)}{\partial x_1} \right] dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

где $X_1 = x_1 - l$.

Далее (см. рисунок 1.4, можно записать:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l} \int_V [\psi_s(\varepsilon_{\alpha\beta} + \Delta\varepsilon_{\alpha\beta}, \phi + \Delta\phi) - \psi_s(\varepsilon_{\alpha\beta}, \phi)] dx_1 dx_2 = \\ = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l} \left\{ \int_{V+\Delta V_L - \Delta V_R} \psi_s(X_1, x_2, l_0 + \Delta l) dX_1 dx_2 - \int_V \psi_s(X_1, x_2, l_0) dX_1 dx_2 \right\} = \\ = - \int_{\Gamma} \psi_s(X_1, x_2, l) dX_1 dx_2 + \int_V \frac{\partial\psi_s(X_1, x_2, l)}{\partial l} dX_1 dx_2 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial\psi_s(X_1, x_2, l)}{\partial l} dX_1 dx_2 = \int_V \left(\sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}(X_1, x_2, l)}{\partial l} + p \frac{\partial\phi(X_1, x_2, l)}{\partial l} \right) dX_1 dx_2 = \\ = \int_{\Gamma} T_i(X_1, x_2, l) \frac{\partial u_i(X_1, x_2, l)}{\partial l} dX_1 dx_2 + \int_V p \frac{\partial\phi(X_1, x_2, l)}{\partial l} dX_1 dx_2. \end{aligned}$$

В результате получим:

$$-\frac{dP}{dl} = \int_{\Gamma} \left[\psi_s dx_2 - \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} ds \right] - \int_V p \frac{\partial\phi}{\partial x_1} d\omega \equiv J. \quad (1.59)$$

Отметим, что если надлежащим образом обобщить выражение (1.57) для потенциала, то равенство (1.59) можно получить и в более общем неизотермическом случае, а так же с учетом массовых сил.

1.6 Условия согласования на фронте флюида

Типичным сценарием развития флюдонаполненной трещины является ее развитие за счет закачки в ее объем флюида. В ходе этого процесса происходит движение как фронта трещины, так и фронта жидкости, заполняющей трещину. При этом существенно разными являются ситуации, когда фронт трещины и фронт флюида совпадают — и когда они расположены на положительном расстоянии друг от друга.

Часть срединной поверхности трещины, не заполненную флюидом, называют область «лага». Случай с наличием лага соответствует ситуации, когда фронт флюида, заполняющего трещину, «отстает» (“lag”) на конечное расстояние от фронта трещины. При отсутствии лага флюид заполняет весь объем трещины.

В обоих случаях постановка задачи должна быть дополнена граничными условиями на фронте жидкости. Обсуждению этого вопроса посвящен настоящий раздел.

Случай наличия лага. Будем считать сначала, что область, заполненная флюидом меньше (по включению), чем область трещины. Другими словами, в любой момент времени t имеем $\Omega_f(t) \subset \mathcal{F}$ и $\partial\Omega_f(t) \cap \partial\mathcal{F} = \emptyset$, где Ω_f — область, заполненная флюидом. Это условие предполагает, что в каждой точке области Ω_f , включая ее границу, раскрытие положительно, то есть $w(\mathbf{x}) \geq w_0 > 0$, $\mathbf{x} \in \Gamma(t)$. В этом случае флюид в трещине «растекается» по уже существующей трещине, пытаясь заполнить весь ее объем. Часть Ω_f срединной поверхности, соответствующая области трещины, занятой флюидом, в общем случае изменяется за счет притока флюида в трещину и изменения раскрытия трещины за счет деформации вмещающей среды.

Пусть \mathbf{n} — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega_f$, касательная к срединной поверхности трещины, \mathbf{V} — скорость движения границы $\Gamma(t) = \partial\Omega_f(t)$, w — как и ранее, раскрытие трещины, $\mathbf{v}_{\mathcal{F}}$ — средняя по раскрытию скорость движения жидкости, ρ_f — плотность жидкости, Q_f — мощность массового источника жидкости, $q_f = Q_f/\rho_f$ — мощность объемного источник.

Интегрируя уравнение (1.15) по области, занятой флюидом, получим:

$$\int_{\Omega_f(t)} \frac{\partial \rho_f w}{\partial t} ds + \int_{\Gamma(t)} \rho_f w v_n d\gamma = \int_{\Omega_f(t)} Q_f ds, \quad v_n = \mathbf{v}_{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma(t)}. \quad (1.60)$$

Это уравнение будет справедливо, если поток массы через границу области флюида связан исключительно с ее движением. Другими словами на фронте жидкости отсутствуют потоки массы, связанные, например, с испарением флюида. Отметим, что в случае несжимаемого флюида уравнения (1.60) играет роль условия разрешимости задачи Неймана для уравнения течения в трещине.

В рассматриваемом случае нормальная компонента скорости распространения фронта жидкости V_n совпадает с нормальной компонентной v_n средней скорости движения частиц жидкости на фронте, то есть

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_f} v_n = V_n = \frac{d\mathbf{x}_f}{dt} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{x}_f \in \Gamma(t). \quad (1.61)$$

Несмотря на свою очевидность, соотношение (1.61) носит фундаментальный характер и свя-

зывает скорость движения точек границы области $\partial\Omega_f$ со скоростью жидкости. Его называют называют уравнением для скорости фронта («speed equation») [Linkov2011a] или условием Стефана («Stefan condition») [Detournay2014]. Как правило, на фронте тангенциальная компонента v_τ скорости жидкости мала по сравнению с ее нормальной компонентой v_n . В таком случае $\mathbf{V} = \mathbf{v}$, то есть скорости фронта трещины и фронта жидкости совпадают.

Уравнение для скорости (1.61) можно записать в виде:

$$V_n = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_f} \frac{q_n}{w} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_f} \frac{\mathbf{q}_F \cdot \mathbf{n}}{\rho_f w}, \quad \mathbf{x}_f \in \Gamma(t); \quad \mathbf{q}_F = \rho_f w \mathbf{v}_F. \quad (1.62)$$

Отметим, что уравнения (1.61) и (1.62) верны и в том случае, если на фронте жидкости раскрытие равно нулю. Именно поэтому в этих уравнениях используется предельный переход $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_f$, а не равенство $\mathbf{x} = \mathbf{x}_f$).

Теперь перейдем к обсуждению возможных граничных условий, которые могут быть сформулированы для решения уравнения (1.15) с учетом (1.61) и (1.62).

Первый вариант предполагает задание на фронте жидкости граничного условия (Дирихле) для давления,

$$p_f(\mathbf{x}) = p_f^*(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t),$$

где p_f^* — заданная функция. Скорость движения фронта жидкости в этом случае определяется уравнением (1.62). Эволюция области, занятой флюидом, определяется уравнением, аналогичному (1.14), где скорость определяется уравнением (1.62). Значение p_f^* в точке фронта можно положить равным нулю в том случае, если пластовый флюид не проникает в область трещины, не занятой жидкостью. В том случае, если область лага занята пластовым флюидом, естественно считать, что $p_f(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma(t)$.

Второй вариант предполагается задание в каждой точке фронта флюида значения скорости движения точки фронта или (что эквивалентно в силу (1.62)), потока массы на фронте. При этом значение скорости движения фронта не может быть задано произвольно — в случае несжимаемого флюида она должна быть согласована с потоком массы в трещине и текущим значением раскрытия трещины, см. соотношение (1.60).

Отметим, что в рассматриваемом случае естественным является первый способ задания граничных условий. При этом в задаче присутствуют два фронта — трещины и флюида, эволюция которых определяется независимо.

Рассмотрим коротко основные способы постановки граничных условий при наличии лага, описанные в литературе. Одной из основных вычислительных работ по данной тематике, построенных на предположении о наличии лага, является [Garagash2000]. В ней рассматривается случай плоской трещины в допущениях одномерной KGD модели, несжимаемой жидкости и непроницаемой вмещающей среда. Считается, что лаг имеет постоянную величину, которая, однако, неизвестна и является частью решения. После перехода в движущуюся вместе с фронтом систему координат и обезразмеривании системы уравнений, рассматриваются два предельных случая распространения трещины. В первом из них определяющими являются механические процессы разрушения вмещающей трещины среды, то есть развитие трещины в упругой среде. Во втором — процесс течения флюида в трещине. На основе построенных асимптотик решения задачи в кончике трещины строится асимптотика решения в общем случае. Эта асимптотика используется для постановки граничных условий.

Дальнейшее обобщение указанной работы было произведено в [Garagash2006a], где вместо предположения о постоянной скорости задавался постоянный темп закачки флюида и изменяющаяся длина лага. В несколько другой постановке, с наличием свободной поверхности, но тоже в плоском (или осесимметричном) случае и при наличии лага задача решалась в работах [Gordeliy2011, Zhang2005]. В обеих работах новое положение фронта трещины на каждом временном шаге выбиралось априори заданным, после чего подбирался соответствующий временной шаг и находилось положение фронта жидкости. Отличие указанных работ состоит в именно в определении фронта флюида и шага по времени. А именно, в работе [Zhang2005] для определения положения фронта жидкости используется вариант метода «жидкого объема» (fluid volume approach). В работе [Gordeliy2011] вместо этого применяется алгоритм, основанный на определении скорости движения фронта жидкости (fluid velocity-based approach), сходный с одномерной реализацией неявного алгоритма метода множеств уровня.

Принципиально другой подход к решению задачи при наличии лага предложен в работе [Linkov2014]. Сначала во всей области предлагается найти внешнюю (основную) часть решения в предположении отсутствия лага, а потом по найденному решению из одномомерного интегрального уравнения получить внутреннюю (вспомогательную) часть решения, учитывающую лаг. По существу, для получения общего решения комбинируется внешнее решение без учета лага и асимптотическое внутреннее решение, полученное из задачи о стационарном распространении полубесконечной трещины с найденной из внешней части решения скоростью в текущий момент времени. Сравнение внешней части решения с универсальным асимптотическим решением позволяет получить два параметра согласования: расстояние согласования r_m и соответствующую константу C_m для разницы давлений в двух областях в точке согласования. Кроме того, из внутреннего решения оценивается минимальное расстояние r_α , на котором локальные возмущения, вызванные наличием лага, могут не учитываться. Согласование возможно, если $r_\alpha \leq r_m$.

Отметим, что все описанные подходы позволяют с высокой точностью получить решение уравнения течения флюида в трещине совместно с решением упругой задачи. Однако, они требуют информации семействе асимптотик решения задачи в окрестности фронта флюида. Эта информация зависит от полной модели, включающей в себя, в том числе, задачу теории упругости во вмещающей трещину среде. Для пороупругих и неоднородных упругих сред, законов утечки флюида из трещины в пласт общего вида, жидкостей со сложной реологией такая информация неизвестна.

Случай отсутствия лага. Рассмотрим теперь случай, когда флюид заполняет весь объем трещины. Другими словами, фронт жидкости и фронт трещины совпадают. С математической точки зрения этот случай является наиболее сложным. Это связано с тем, что в точках фронта трещины раскрытие равно нулю. Как следствие, поток в уравнении (1.15) формально вырождается. Однако в силу того, что фронт трещины (и совпадающий с ним фронт флюида) распространяются с *конечной* скоростью, скорость флюида на фронте, определенная в соответствии с (1.62), конечна. В силу этого значение давления в точках фронта имеет особенность и является неограниченным. Корректная постановка граничных условий для уравнения течения в трещине в этом случае является нетривиальной задачей. «Естественным» граничным условием в этом случае является задание скорости движения фронта, которая, в

свою очередь, определяется решением задачи о развитии трещины. При этом содержательным становится использование соотношения (1.62), которое в данном случае рассматривается не как определение скорости движения фронта, а как уравнение, связывающее скорость движения фронта флюида и трещины. Различные способы корректной постановки граничных условий в этом случае рассмотрены, например, в [Detournay2014, Linkov2011a].

Сингулярность поля давления в трещине может быть устранена допущением о том, что в ходе развития трещины фронт флюида всегда немного отстает от фронта трещины на заданную величину. В этом случае говорят, что рассматривается модель трещины с «лагом». Величина лага заранее не известна. В общем случае она может быть определена рассмотрением постановки с одновременным учетом эволюции двух фронтов — флюида и трещины.

В целом известны два системных подхода моделирования флюидонаполненной трещины в рамках сделанных допущений.

В первом из них уравнение (1.62) регуляризуется для формулировки граничного условия на относительно малом расстоянии ε позади фронта, а не на самом фронте. Такой подход, называемой ε -регуляризацией, развит в работах [Linkov2014, Linkov2011a, Linkov2011b, Линьков2011c, Linkov2011d, Linkov2012a, Linkov2013c, Linkov2015, Mishuris2012, Wrobel2015, Wrobel2015a]. Скорость движения фронта определяется в том или ином виде (включая учет асимптотик) из регуляризованного уравнения (1.62). Принципиальным компонентом этого подхода является полученный в [Linkov2015] теоретический результат о том, что в случае отсутствия лага в каждой точке фронта задача о распространении трещины имеет универсальное асимптотическое решение, зависящее только от скорости фронта трещины.

Второй подход также основан на применении уравнения (1.62), которое рассматривается, по существу, как специальное уравнение для определения положения фронта трещины [Detournay2014]. Отличие от ранее описанного выше подхода состоит в использовании уравнения для скорости. Поскольку в окрестности фронта определить *одновременно* и w , и \mathbf{q} с требуемой точностью довольно трудно без значительного измельчения сетки (и, следовательно, сложно использовать усредненную скорость частиц \mathbf{v} для нахождения скорости фронта \mathbf{V}), для определения положения фронта предлагается неявная процедура, не требующая точного определения скорости фронта. Эта процедура позволяет определить скорость фронта из апостериорной оценки положения фронта, положение которого известно на соответствующем шаге итерационного алгоритма. Указанная процедура носит название ILSA (Implicit Level-Set Algorithm — неявный метод поверхностей уровня). Она была предложена в [Peirce2008] и подробно описана в [Peirce2015]. Суть ее состоит в определении свободной границы фронта, основываясь на известном предельном поведении раскрытия в его окрестности, при этом в явном виде поле скорости фронта знать не требуется. Преимущества использования этого подхода были продемонстрированы в работе [Lecampion2013].

в настоящей работе далее рассматривается случай наличия лага. Это связано с тем, что в общем случае рассматриваемой постановки асимптотики, необходимые для постановки граничных условий при отсутствии лага неизвестны. По этой же причине для постановки граничных условий на фронте жидкости рассматривается следующий подход:

- считается, что фронт флюида и фронт трещины геометрически совпадают;
- при рассмотрении уравнения для течения флюида в трещине считается, что раскрытие

трещине на фронте жидкости является малой, но конечной положительной величиной. Ее значение является параметром метода.

- на фронте жидкости ставится граничное условие Дирихле для давления. Значение граничного условия для давления определяется давлением в среде в точках фронта трещины.

Обоснованием такого подхода с точки зрения «физики задачи» является то, что

- для практических расчетов важно существование лага как такового, а не его точное значение (достаточно, если он будет сравнительно маленьким);
- учет лага существенен только на первоначальном этапе развития трещины (в дальнейшем величина лага становится несущественной и ей можно пренебречь).

Именно ввиду второго условия зачастую величина лага определяется из тех или иных дополнительных соображений, см., например [Garagash2000, Garagash2006a, Linkov2015], или считается малой фиксированной величиной.

Отметим также, что при необходимости использовать модель роста трещины без области лага, построенные ниже алгоритмы практически не изменяются. Для своей работы они требуют лишь направление развития фронта трещины и соответствующую скорость. Способ, которым определяется последняя — не важен.

1.7 Заключение

В настоящей главе формулируется и обсуждается предлагаемая в работе математическая модель эволюции трещины гидроразрыва пласта. Формулируются и обосновываются допущения полной связанной модели. Формулируются частные модели для вмещающей трещину пороупругой среды, течения в трещине, геометрическая модель трещины, критерии ее развития. Рассматриваются вопросы постановки (внутренних) граничных условий согласования на боковых поверхностях трещины в общем случае неизотермической пороупругой модели вмещающей трещину среды и течения в трещине. Обсуждаются вопросы постановки граничных условий на фронте трещины.

В качестве базовой модели для описания вмещающей трещину среды применяется пороупругая модель Био, которая рассматривается в приближении физически и геометрически линейной среды. Указанная модель представляет собой связанную систему уравнений механики деформируемого твердого тела, которая описывает напряженно-деформированное состояние пласта и уравнений фильтрации, которые описывают фильтрационные потоки жидкости в среде. Трещина описывается своей срединной поверхностью с заданной на ней полем ее раскрытия и полем давления флюида в ней. Геометрическая модель трещины позволяет рассматривать срединную поверхность трещины как произвольную гладкую поверхность с краем, удовлетворяющей естественным требованиям гладкости. Течение жидкости в трещине описывается уравнением смазочного слоя в приближении Рейнольдса.

Результирующая модель состоит из следующих групп уравнений:

- системы уравнений пороупругости в трехмерной постановке, описывающей состояние вмещающей трещину среды;

- уравнения течения в трещине;
- условий согласования на границе «трещина»/«вмещающая среда», которые включают в себя условия непрерывности потоков консервативных (массы, энергии и импульса) величин и геометрические условия, связывающие раскрытие трещины с перемещениями точек ее боковой поверхности.
- критерия разрушения, который определяет направление развития фронта трещины в его точках и формулируется на основе векторного J -интеграла Черепанова-Райса.

Рассматриваются случаи проницаемых и непроницаемых для жидкости боковых поверхностей трещины.

Сформулированная модель далее используется (в ряде случаев — с упрощениями) в дальнейших главах работы.

Глава 2

Вычислительные алгоритмы: обзор методов и подходов

Описанная в предыдущей главе математическая модель мало пригодна для теоретического анализа процесса развития трещины в силу своей сложности. Ее основное назначение — использование для анализа средствами математического моделирования и вычислительного эксперимента. По этой причине ниже кратко представлены базовые алгоритмы вычислительной математики, которые могут быть использованы для реализации модели в описанном выше виде.

Как видно из содержания главы 1, для решения полной задачи необходимы алгоритмы для решения целого ряда частных задач, включая

- решение задачи пороупругости с трещиной;
- решение уравнений смазочного слоя на срединной поверхности трещины;
- задание внутренних граничных условий (условий согласования) на срединной поверхности трещины для решения уравнений пороупругости.

Для решения каждой из этих задач в настоящее время предложен целый ряд методов и подходов. Ниже приведен их краткий обзор. Приведенное описание не является исчерпывающим. Его основное назначение — сформировать алгоритмическую основу, которая далее развивается в последующих главах работы. С целью упрощения изложения соответствующие методы рассматриваются на примере частных, упрощенных, задач. Сделанные упрощения не ограничивают область применимости описанных методов; опущенные детали не существенны и связаны с применением стандартных подходов и алгоритмов вычислительной математики.

Основное внимание уделено эффективным и надежным с вычислительной точки зрения алгоритмам учета наличия крупномасштабной трещины в конечномерной задаче, а так же построению аппроксимаций связанной задачи о течении в трещине и напряженно-деформированном состоянии насыщенной вмещающей среды. Среди известных алгоритмов основное предпочтение отдавалось тем, которые, с одной стороны, являются достаточно общими и допускающими дальнейшее развитие и обобщение на более сложные модели, а с другой — допускающих робастную реализацию и гарантирующих устойчивость получаемых результатов.

В заключении главы формулируется основное направление развития комплекса алгоритмов для решения полной задачи. Разработке соответствующих методов посвящена значительная часть последующих глав работы.

2.1 Методы решения задач пороупругости

В рассматриваемом приближении система уравнений пороупругости представляет собой связанную задачу для эллиптического уравнений (описывающего напряженно-деформированное состояние насыщенной среды) и параболического уравнения (описывающего закон сохранения массы флюида во вмещающей среде).

Для решения указанной системы уравнений могут применяться различные методы, среди которых отметим метод конечных объемов, метод конечных элементов и метод граничных интегральных уравнений.

В силу того, что модель предполагает произвольное пространственное распределение свойств вмещающей среды, наиболее приемлемым из указанных является метод конечных элементов, см. [Lewis1998]. Для аппроксимаций по времени чаще всего используются полностью неявные схемы (например, неявный метод Эйлера). Для решения конечномерной задачи могут использоваться как «монолитные» постановки (в рамках которых одновременно определяется как поле перемещений, так и поле давления), так и методы на основе итераций между группами уравнений упругости и фильтрации (далее для таких методов также будет использоваться термин «методы итерационного связывания»). Построение эффективных итерационных методов решения задач пороупругости является отдельной нетривиальной проблемой, см., например, [Kim2009, Kim2010] и ссылки там.

Характерным свойством системы уравнений пороупругости в рассматриваемом приближении является то, что после аппроксимации по времени система уравнений имеет вид задачи о седловой точке (см. [Brezzi1991] и раздел 4.1). В этом случае для устойчивости решения задачи как в континуальном, так и в дискретном случае необходимо выполнение так называемых inf-sup -условий (условия Ладыженской-Бабушки-Бреззи) [Brezzi1991] (помимо стандартных условий аппроксимации конечноэлементных пространств). При нарушении этих условий в задачах пороупругости возникают численные неустойчивости и эффекты «блокировки» («locking») конечномерного решения, особенно в несжимаемом пределе, см. [Philips2009, Preisig201, Haga2012, Vermeer1981].

Простейшим примером конечного элемента, удовлетворяющего этим условиям является элемент Тэйлора-Худа, в котором для аппроксимации перемещений используются конечные элементы второго порядка, а для аппроксимации давления — первого. При этом обе системы функций заданы на одном и том же разбиении области на конечные элементы. Данный конечный элемент гарантирует оптимальную скорость сходимости, в том числе, и в задачах пороупругости [Ern2009, Murad1992, Murad1994, Murad1996, Showalter2000]. В случае, если для конкретной задачи inf-sup устойчивые пары пространств неизвестны, необходим контроль за особенностями решения и проверка выполнения численных inf-sup условий [Chappelle1993]. Альтернативным подходом является регуляризация исходной задачи (см., например, [White2008, White2009, Commend2004, Commend2001, Truty2006, Wan2002, Xia2005, Xia2009]), цель которой — построить задачу, для которой inf-sup условия выполня-

ются для стандартных пар пространств (конечные элементы одинакового, первого, порядка и для поля перемещений, и для давления).

2.2 Способы учета крупномасштабных трещин в пространственно-трехмерных задачах

Наличие в постановке задачи трещины приводит к тому, что решение связанной задачи термопоупругости терпит разрыв при переходе через ее срединную поверхность.

Помимо этого, особенностью задачи является наличие на границе трещины «внутренних» граничных условий, которые определяются решением задачи о течении флюида в трещине совместно с уравнениями, описывающими поведение вмещающей трещину среды. Аппроксимация этих условий согласования может представлять существенную сложность. В настоящем разделе кратко описаны основные подходы, которые применяются для решения указанной задачи.

В целом можно выделить два тесно связанных аспекта, связанных с разработкой соответствующих алгоритмов:

- непосредственно способ построения аппроксимаций в случае, если в среде присутствует трещина;
- способ задания граничных условий на ней.

Ниже рассмотрены основные классы методов, применяемые для решения задач рассматриваемого класса.

«Стандартные» методы. При использовании методов первого класса считается, что разрыв проходит по ребрам (в пространственно-двумерном случае) или граням (в пространственно-трехмерном случае) сетки.

Использование такого подхода требует перестройки расчетной сетки на каждом шаге развития трещины и корректной (в частности, консервативной) переинтерполяции расчетных величин со «старой» сетки на «новую». Первая из этих операций может быть вычислительно дорогой, вторая требует использования специальных алгоритмов, и не всегда хорошо сказывается на качестве конечномерного решения задачи (главной причиной является частичная потеря информации о полученном решении в окрестности фронта трещины).

Достоинством подхода является легкость построения конечномерной задачи и программной реализации: заданная в пространственной области трехмерная сетка порождает корректную сетку на срединной поверхности трещины, что значительно облегчает построение аппроксимаций для решения задачи о течении флюида в трещине и аппроксимации условий сопряжения «трещина»/«вмещающая среда». Так, если пространственная сетка является квазиравномерной согласованной сеткой из тетраэдров, то и ее «сечение» срединной поверхностью трещины будет квазиравномерной согласованной двумерной сеткой из треугольников.

Для «сшивки» сеточного решения на разных боковых поверхностях трещины и аппроксимации условий согласования часто используются специальные конечные элементы, отнесенные к тем граням трехмерной сетки, которые образуют срединную поверхность трещины,

см., например, [Carrier2012, Corner2003]. В силу того, что узлы двумерной сетки на срединной поверхности трещины и узлы трехмерной сетки, используемой для аппроксимации решения во вмещающей среде, совпадают, аппроксимация условий согласования производится сравнительно просто.

Метод граничных интегральных уравнений. К отдельному классу методов отнесем методы на основе граничных интегральных уравнений. В этом случае сеточная дискретизация пространственной области не производится вообще — расчетную сетку необходимо задавать лишь на срединной поверхности трещины. Этот подход очень удобен при решении задач с динамически развивающейся трещиной. Вместе с тем, область его применения ограничена стандартными для метода граничных интегральных уравнений особенностями: необходимо знать в явном виде выражение для фундаментального решения уравнения во вмещающей среде. Это приводит к сложности или невозможности использования подхода в случае нелинейных задач, неоднородных сред и так далее. Отметим, что в случаях, когда методы этого типа применимы в силу постановки задачи, они позволяют получать качественные и количественные результаты очень высокого качества. Применение метода граничных интегральных уравнений для решения задачи о развитии флюидонаполненной трещины рассмотрены в [Garagash2006a, Zubkov2007, Cheng1984, Cheng1988, Roegires1983, Rajapakse1995]. Пример трехмерного симулятора «промышленного» качества для анализа развития трещин, в том числе и трещин гидроразрыва, описан в [Carter2000].

В дальнейшем будут рассматриваться сеточные методы, как имеющие более широкую область применения и допускающие робастную программную реализацию.

Методы подсеточного разрешения. При использовании методов этого класса считается, что геометрия срединной поверхности трещины не согласована с геометрией сетки во вмещающем трещину пространстве. В этом случае сечение трехмерной сетки срединной поверхностью трещины уже не будет корректной двумерной сеткой на поверхности \mathcal{F} , а именно:

- ячейки двумерной сетки на \mathcal{F} , порожденной трехмерной сеткой в Ω могут иметь различную геометрию;
- даже если сетка в Ω является равномерной, порожденная ею «сетка-сечение» на \mathcal{F} может быть сильно неоднородной, в частности, в ней могут быть очень маленькие ячейки;
- малое «шевеление» поверхности \mathcal{F} трещины меняет топологию сетки (может приводить к исчезновению и появлению ячеек).

Первая проблема может быть решена, например, если узлы сетки заданы как точки пересечения ребер трехмерной сетки и поверхности \mathcal{F} . При этом триангуляция поверхности \mathcal{F} строится независимо (от разбиения области Ω) по заданной системе точек. Однако, такой подход не решает второй проблемы.

Указанные причины не позволяют использовать сетку, которая является следом трехмерной сетки в Ω на срединной поверхности трещины \mathcal{F} в качестве расчетной сетки.

В качестве альтернативы возможно два варианта:

- использовать на \mathcal{F} независимую сетку, например из треугольников, на которой строятся аппроксимации уравнения для течения в трещине;

- использовать «сетку-сечение», но со специально выбранными базисными функциями.

К методам, которые позволяют рассматривать трещину как нарушение сплошности среды, геометрия которого никак не связана с геометрией расчетной сетки в самой среде, относятся такие методы, как Assumed Strain Elements ([Gasser2003, Simo1990, Armero1995, Oliver1999, Simo1994, Wells2001]), X-FEM (eXtended Finite Elements), метод Нитше (Nitsche method) и ряд других. Эти методы основаны на том, что для учета разрыва решения в ячейках сетки, через которые проходит трещина, используются специальные базисные функции, допускающие наличие сильного или слабого разрыва конечномерного решения внутри этих ячеек.

Отметим, что в контексте метода X-FEM обычно используется неявное представление срединной поверхности трещины, когда она описывается как поверхность уровня ноль заданной в объеме функции. Для описания эволюции таких поверхностей разработан целый ряд методов на основе решений уравнений типа Гамильтона-Якоби, см., например, [Peng1999, Chopra1993]. Эти вопросы не рассматриваются в настоящем разделе. Они подробно рассмотрены в главе 3.

В случае если срединная поверхность трещины не согласована с геометрией расчетной сетки во вмещающей среде, возникает вопрос о конечномерной аппроксимации условий согласования на границе «трещина»/«пласт». В частности, условия равенства двух функций, определенных в объеме и на срединной поверхности не могут быть выполнены поточечно. В этом случае стандартным способом является аппроксимация условий равенства в слабом (в смысле вариационной постановки задачи) смысле. Для учета заданных на трещине граничных условий в рамках этих методов могут быть применены различные способы, включая метод множителей Лагранжа и его модификации, метод Нитше, метод штрафа и их обобщения.

Рассмотрим коротко часть из них.

Метод множителей Лагранжа. В этом случае постановка задачи является вариационно-согласованной: решение задачи удовлетворяет граничным условиям точно; в конечномерном случае — с точностью до ошибок аппроксимаций. Недостатками метода являются (а) наличие дополнительного неизвестного — множителя Лагранжа — в конечномерной задаче и (б) необходимость выбора конечномерных пространств для аппроксимации пространств основной переменной и множителей Лагранжа так, чтобы выполнялись inf-sup-условия, см. [Brezzi1991]. При этом построение inf-sup-устойчивых пар пространств для конечно-элементных аппроксимаций метода X-FEM рассмотрено в работах [Mourad2007, Dolbow2008, Bechet2009, Hautefeuille2012]. Отметим, что способ построения inf-sup устойчивых пар пространств в случае, когда граничные условия заданы на поверхности с краем, в настоящее время автору данной работы неизвестны.

Для ослабления inf-sup условий, накладываемых на пространства первичных переменных и множителей Лагранжа используется «комбинация» метода штрафа и метода множителей Лагранжа, которая приводит к стабилизированному методу множителей Лагранжа.

Метод Нитше. Метод Нитше изначально был предложен в работе [Nitsche1971] и в дальнейшем развит, в том числе в контексте метода X-FEM в работах [Dolbow2009, Becker2003,

Hansbo2002, Hansbo2004]. Связь метода Нитше и метода множителей Лагранжа рассматривается в [Stenberg1995].

Отметим достоинства метода Нитше. Вариационное уравнение метода является симметричным и положительно определенным, программная реализация метода сравнительно проста в силу того, что в задаче не вводятся дополнительных переменных.

Недостатком метода является корректное определение ряда параметров метода. Обычно он подбирается опытным путем, хотя в ряде случаев известны и теоретические оценки, гарантирующие его устойчивость.

2.3 Методы решения уравнений на поверхностях

Наличие в расчетной области поверхности, на которой задано отдельное уравнение, входящее в полную связанную постановку задачи (а именно, закон сохранения массы и энергии для флюида в трещине), вносит существенные сложности в построение аппроксимаций полной задачи. А именно:

- Для построения уравнения на поверхности \mathcal{F} на ней необходимо ввести ту или иную расчетную сетку. При этом использовать в качестве такой сетки сетку, которая является сечением сетки в трехмерной области нельзя — «наивные» аппроксимации на ней не будут устойчивыми.
- С другой стороны, использование на \mathcal{F} независимой сетки также нетривиально: аппроксимации задачи на \mathcal{F} строятся легко, однако возникает проблема «склейки» решения на \mathcal{F} и во вмещающей среде.

В предыдущих разделах настоящей главы были рассмотрены вопросы решения уравнений во вмещающей среде при наличии трещины. В этом разделе рассмотрим ту же задачу с другой точки зрения: будем отталкиваться от способов решения задачи на произвольной гладкой поверхности (многообразии) в \mathbb{R}^3 . В контексте настоящей работы такой задачей является задача о течении в трещине.

Построение аппроксимаций уравнения на поверхности «наивным» способом (триангуляция поверхности с последующей дискретизацией задачи например, методом конечных элементов) сталкивается со следующими трудностями:

- в случае если, например, кривизна поверхности существенно меняется, требуется построение адаптивной триангуляции. Если форма поверхности меняется во времени, то требуется перестройка сетки, что приводит к стандартным трудностям.
- свойства решений задач на поверхностях определяются такими характеристиками поверхности, как, например, ее кривизна — которая является дифференциальной характеристикой *второго* порядка. Аккуратный учет этих свойств при использовании, например, линейных конечных элементов (для аппроксимации решения и самой поверхности непосредственно) — нетривиальная задача.

На первый взгляд, задача о течение флюида в трещине не наследует этих трудностей. В самом деле, поверхность трещины меняется во времени лишь «вдоль самой себя» и в окрестности фронта $\partial\mathcal{F}$, а кривизной срединной поверхности можно пренебречь.

Однако оказывается, что общие принципы построения эффективных аппроксимаций уравнений на поверхностях актуальны и для решения рассматриваемой задачи. Прежде всего в связи с основной трудностью рассматриваемой полной задачи — корректным «связыванием» решения во вмещающей среде и аппроксимации уравнения на поверхности.

Необходимость решения описанных выше проблем построения аппроксимаций уравнений на поверхностях привела к развитию подходов, так или иначе основанных на погружении поверхности в объемлющее трехмерное пространство. В этом случае уравнение продолжается в некоторую область, содержащую поверхность. Далее тем тем или иным способом строятся аппроксимации трехмерной задачи в пространственной области. В результате решение уравнения на поверхности приближается следом решения конечномерной задачи во всем пространстве.

Отметим, что вычислительные алгоритмы решения задач на поверхностях является активно развиваемой тематикой. В частности, условно можно выделить следующие классы методов.

Методы аппроксимации на поверхности. В методах этого класса уравнение на поверхности аппроксимируется непосредственно, например, методом конечных элементов. Применение этих методов требует построения триангуляции поверхности; ни уравнение, ни сетка не продолжают во вмещающее поверхность пространство. Примеры таких подходов описаны, например, в [Dziuk1988, Demlow2007, Dziuk2007a, Dziuk2007b]. Применение этих методов не дает преимуществ при построении аппроксимаций полной связанной задачи о трещине; в дальнейшем они рассматриваться не будут.

Методы типа погружения на основе множеств уровня. Основное достоинство методов данного класса заключается в следующем: решение задачи на поверхности строится без введения на ней отдельной, поверхностной, расчетной сетки — единая трехмерная сетка используется как для построения аппроксимаций (трехмерных) уравнений во вмещающей среде, так и для аппроксимаций (двумерных) уравнений в трещине.

В результате, при использовании одинаковых сеток и пространств конечных элементов одного типа, остается лишь проблема «склейки» решений в трещине и вмещающей среде, которая, как будет подробно описано ниже, может быть решена выбором способа задания условий согласования.

В этом классе методов поверхность, на которой решается уравнение, считается погруженной в трехмерное пространство. Геометрия поверхности задается неявно, как поверхность уровня ноль заданной функции ϕ , определенной в трехмерном пространстве. Суть этих методов заключается в том, что уравнение, заданное на поверхности уровня ноль, продолжается во все пространство (то есть, на все поверхности уровня функции ϕ) так, что решение этого уравнения совпадает с решением исходного уравнения на поверхности.

Далее «продолженное» уравнение аппроксимируется во всей трехмерной области стандартным методом конечных элементов. След трехмерного решения на исходной поверхности дает решение исходной задачи.

Метод этого типа изначально был предложен в [Bertalmio2001]. Для аппроксимации уравнения использовался метод конечных разностей. Обобщение рассмотренного подхода в контексте метода конечных разностей на случай динамически меняющихся поверхностей были

рассмотрены в [Adalsteinsson2003, Xu2003], а на случай уравнений четвертого порядка — в [Greer2006a]. Подход с использованием метода конечных элементов для решения задач как второго, так и четвертого порядка, был предложен в [Dziuk2008a]; обобщение на случай динамических поверхностей представлено в [Dziuk2010]. В работе [Bradman2007] конечно-элементный подход был развит для решения спектральных задач для уравнений на поверхностях. Обобщение метода на случай динамически меняющейся поверхности (без края) приведено в [Eilks2008]. Аналогичные подходы рассмотрены, например, в [Greer2006a, Greer2006b], где представлены модификации методов рассматриваемого класса, которые обеспечивают невырожденность результирующего, трехмерного, уравнения.

Методы погружения типа «диффузной границы». Этот класс методов близок к рассмотренному ранее. Общая идея сохраняется, однако способ продолжения уравнения на поверхности в трехмерное пространство отличается от рассмотренного ранее. Впервые метод был предложен в [Ratz2006].

Основная идея этого класса методов заключается в том, что поверхность, имеющая меру ноль во вмещающей среде заменяется тонкой областью конечной толщины. В эту область продолжают параметры (коэффициенты) задачи, причем так, что значения продолжения вне слоя конечной толщины равняются нулю. Методы этого класса построены в духе многочисленных методов типа диффузной границы для решения, например, задач многофазной гидродинамики (см., например, обзор в [Nguen2017], особенно [Maury2001, Ratz2006, Lervag2014, Li2014, Schlottbom2016]) и многие другие.

Методы с погружением поверхности, но без погружения уравнения. Это класса методов предложен и подробно анализируется в работах [Olshanskii2009, Olshanskii2009a, Olshanskii2012]. В соответствии с ним считается, что поверхность \mathcal{F} вложена в трехмерную область Ω . В отличие от рассмотренных выше подходов, уравнение не продолжается в пространственную область Ω и соответствующая слабая постановка задачи строится непосредственно на поверхности \mathcal{F} .

В области Ω вводится конечно-элементная расчетная сетка Ω_h , например, из тетраэдров. Пусть ω_h — сеточная подобласть, состоящая из тех ячеек сетки Ω_h , которые имеют непустое пересечение с поверхностью \mathcal{F} . Для простоты считаем, что пересечение ячеек сетки ω_h с поверхностью лежит целиком внутри ячеек (то есть, поверхность не проходит через узлы или грани ячеек). Аппроксимация решения вариационной задачи ищется в конечномерном пространстве V_h , элементы которого — линейные комбинации базисных функций, соответствующих узлам сетки ω_h .

Таким образом, уравнение аппроксимируется на поверхности, но его решение ищется как след некоторой сеточной функции в трехмерном пространстве.

В отличие от методов, рассмотренных выше, в слабую постановку задачи и ее аппроксимации входят величины, отнесенные только к поверхности. Для их вычисления необходимо введение триангуляции на \mathcal{F} . Однако, она носит вспомогательные характер (используется только для численного интегрирования при вычислении элементов матрицы масс и жесткости конечномерной задачи).

Метод проекции ближайшей точки. Этот класс методов также основан на продолжении уравнения с поверхности в пространство. Для построения продолжения (как решения уравнения, так и самого уравнения) используется оператор проекции ближайшей точки. Из описанных выше методов этот метод является единственным, в котором не представляет труда решение задачи на поверхности с краем. Конечноэлементный вариант этого метода развивается и применяется в главе 5 настоящей работы.

Перечень описанных выше алгоритмов не является исчерпывающим. Так, например, не были рассмотрены алгоритмы на основе бессеточных методов конечных элементов («meshfree finite elements methods») и алгоритмы, основанные на представлении поверхности как «облака точек» («point cloud surface»).

Детальный обзор всех упомянутых выше методов представлен в работе [Савенков2020].

В заключении можно отметить следующее.

- В настоящее время известно достаточно много классов алгоритмов для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных на поверхностях. Многие из них имеют цельное теоретическое обоснование и хорошо апробированы. Помимо непосредственно способа аппроксимации уравнений (метод конечных элементов или конечных разностей и так далее), одним из основных критериев отличия является способ представления поверхности. Он является базовой алгоритмической деталью, во многом определяющей возможности метода.
- Большинство рассмотренных алгоритмов ориентировано на решение уравнений на поверхностях без края. В этом случае наиболее простым и эффективным способом построения алгоритма является использование для описания поверхности метода множеств уровня. Достоинства этого подхода, тем не менее, теряются, если рассматривается поверхность с краем — в этом случае алгоритм существенно усложняется (в частности, требуется не одна, а по крайней мере две поверхности уровня — для описания непосредственно поверхности и ее края; возникает вопрос о способах учета граничных условий на крае поверхности и так далее).
- По всей видимости, единственным методом, естественным образом допускающим рассмотрение неявно заданных поверхностей с краем, является метод проекции ближайшей точки. Соответствующие алгоритмы для решения задач типа эллиптических и параболических уравнений диффузии и теплопроводности достаточно просты. Вместе с тем, подход является достаточно общим и универсальным, допуская обобщения на случай нелинейных задач и уравнений порядка выше второго.
- Наконец, отдельный интерес, по очевидным причинам, представляют методы, использующие представление поверхности как множества точек («point cloud surfaces»).

2.4 Заключение

В настоящем разделе были коротко рассмотрены методы решения основных групп уравнений, которые входят в полную постановку задачи о развитии флюидонаполненной трещины в пороупругой среде. Методы решения полной связанной задачи сколь-либо детально не рассматривались — обзор таких подходов сделан в главе 6.

Для каждой отдельной группы уравнений известен целый ряд эффективных алгоритмов. Однако, как и следовало ожидать, соответствующие алгоритмы конструировались независимо друг от друга — и, чаще всего, именно в таком виде применяются на практике. Другими словами, вопрос выбора алгоритма обычно сводится к вопросу о выборе надежных программ, эффективно решающих «каждая свою задачу».

Не сложно заметить, что целый ряд описанных алгоритмов для решения разных задач (групп уравнений) требуют реализации одних и тех же вспомогательных алгоритмов. Основным примером тут является способ представления срединной поверхности трещины, необходимый как для применения методов типа X-FEM, так и для решения уравнений на поверхности (а также для построения дискретной модели эволюции срединной поверхности трещины). Таким образом, очевидной становится необходимость, при решении полной связанной задачи максимально использовать общие подходы, которые, возможно, являются не самыми удобными в каждой отдельной задаче, но «хорошо» работают в комплексе.

Эта идея является одной из основных в настоящей работе. На ее реализации построено дальнейшее изложение. В последующих главах работы проблема разработки вычислительных алгоритмов для решения связанной задачи пороупругости, эволюции трещины и течения в ней будет рассмотрена в комплексе — с учетом того, что вычислительные алгоритмы для каждой отдельной задачи, помимо того, что должны быть эффективны независимо, — так же должны обеспечивать эффективное решение полной задачи, включающей в себя все группы уравнений, как с точки алгоритмической точки зрения, так и с точки зрения программной реализации.

В частности, в базового метода принят метод конечных элементов для решения задач с подсеточным разрешением трещины — X-FEM. Этот метод является наиболее разработанным среди алгоритмов рассматриваемого класса.

Для решения уравнений на поверхности будет использован метод проекции ближайшей точки, как наиболее пригодный для решения уравнений на поверхностях с краем.

Вместе с тем, формальная комбинация этих методов не эффективна: для представления срединной поверхности трещины в методе X-FEM традиционно используется методов множеств уровня, а метод проекции ближайшей точки в разработан в контексте конечно-разностных схем на структурированных сетках.

По этой причине в последующих главах работы:

- развивается метод X-FEM, использующий метод проекции ближайшей точки для представления срединной поверхности трещины;
- развиваются слабые (вариационные) постановки метода проекции ближайшей точки;
- развиваются алгоритмы расчета эволюции срединной поверхности трещины, геометрия которой представлена методом проекции ближайшей точки.

Глава 3

Моделирование геометрической эволюции трещины

В настоящей главе будут рассмотрены вопросы моделирования эволюции трещины как геометрического объекта — достаточно гладкой поверхности с краем, которая эволюционирует («растет») с течением времени в соответствии с заданным законом.

Для описания геометрии поверхности с подвижным краем известно достаточно много подходов, включая полигональные модели, параметрическое представление, представление в виде множества точек (“point cloud surface”), неявное представление как поверхности уровня заданных в пространстве функций (“level set method”) и другие. Все они достаточно эффективны в том случае, если конечной задачей является лишь описание динамики изменения геометрии поверхности, как, например, в ряде задач компьютерной графики. Однако не все они подходят для решения рассматриваемой задачи моделирования развития трещины.

Среди известных методов в качестве наиболее предпочтительного в настоящей работе выбран метод проекции ближайшей точки. Мотивацией служит прежде всего то, что в рамках этого подхода известны и достаточно хорошо разработанные методы решения дифференциальных уравнений на поверхностях, см. [Ruuth2008, Macdonald2011, Macdonald2008, Macdonald2009], а сам метод представления поверхности хорошо адаптирован для использования совместно с методом X-FEM для расчета напряженно-деформированного состояния среды в окрестности трещины. Эти вопросы рассмотрены в главе 4.

Большинство работ, посвященных методу проекции ближайшей точки, связаны с его применением к решению уравнений на стационарных поверхностях с краем. В настоящей работе предложен эффективный метод расчета эволюции поверхностей, рассмотрены вопросы представления, интегрирования и дифференцирования функций, заданных на этой поверхности, построения ортогональных базисов во внутренних и граничных точках поверхности.

Отметим так же, что в большинстве работ по моделированию развития трещин с помощью «расширенного» метода конечных элементов X-FEM ([Stolarska2001, Moës2002, Gravouil2002]) геометрическая модель трещины строится с использованием метода множеств уровня («level set method», см. [Osher2002, Sethian1999]). Поверхность с краем задается при этом парой определенных в пространстве скалярных функций $\varphi(\mathbf{x}, t)$ и $\psi(\mathbf{x}, t)$ так, что

$$\mathcal{F}_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \varphi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \psi(\mathbf{x}, t) \leq 0\}, \quad (3.1)$$

где t — время, \mathcal{F}_t — поверхность в момент времени t . Другими словами, в фиксированный момент времени t поверхность задается как часть поверхности уровня ноль функции $\varphi(\mathbf{x}, t)$, ограниченная изоповерхностью функции $\psi(\mathbf{x}, t)$. С теоретической и практической точки зрения удобно, чтобы функции φ и ψ являлись знаковыми расстояниями, определенными в некоторой небольшой окрестности Ω поверхности \mathcal{F} . Движение края поверхности задается полем скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, описывающим эволюцию функций φ и ψ . Для расчета эволюции функций φ и ψ применяются уравнения типа Гамильтона-Якоби. Основным недостатком такого метода является сложность реализации: для решения задачи на каждом шаге развития трещины необходимо решение нескольких различных уравнений типа Гамильтона-Якоби относительно функций φ и ψ , обеспечивающих, помимо прочего, сохранение ортогональности их градиентов, свойств знаковых расстояний и так далее, см. [Stolarska2001, Moës2002, Gravouil2002].

Опыт применения алгоритмов такого типа в настоящей работе представлен в [Савенков2020с].

Альтернативный подход, отчасти близкий использованному в настоящей работе, описан в работе [Ventura2003]. В нем поверхность задается с помощью так называемых «векторных поверхностей уровня» («vector level sets»), представляющих собой пару функций, первая из которых является оператором проектирования точки на поверхность в смысле ближайшего расстояния, а вторая определяет ориентацию поверхности. Вместе с тем в описанном подходе используется полигональное представление поверхности, которое используется для построения проекторов. В ходе эволюции поверхности сначала обновляется ее полигональное представление, которое затем используется для построения проекторов и функций уровня.

В отличие от этого подхода в настоящей работе не используется полигональное представление поверхности, а значения операторов проектирования в ходе ее эволюции вычисляются непосредственно. При этом сама поверхность и задающие ее поверхности уровня, при необходимости, могут быть восстановлены локально. В этом смысле предложенный в настоящей работе подход на основе метода проекции ближайшей точки, является более гибким и, по своей сути, близок к методам представления поверхностей как «облака точек» («point cloud surfaces», см., например, [Berger2014]).

3.1 Геометрическая модель трещины: метод проекции ближайшей точки

3.1.1 Основные понятия метода

Рассмотрим основные понятия метода ближайшей точки. Строгое математическое обоснование этого метода приведено в [März2012].

Рассмотрим гладкую поверхность \mathcal{F} с краем, вложенную в трехмерное пространство \mathbb{R}^3 . Термин «гладкая» здесь и далее будем понимать как то, что множество \mathcal{F} является образом гладкого отображения ограниченной замкнутой подобласти двумерной плоскости \mathbb{R}^2 в трехмерное пространство \mathbb{R}^3 . При этом будем считать, что используемые отображения имеют любое требуемое число производных. Также будем считать, что поверхность \mathcal{F} целиком расположена внутри пространственной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Пусть для произвольной точки $\mathbf{x} \in \Omega$, точка \mathbf{x}_{cp} является ближайшей к ней точкой на

поверхности \mathcal{F} :

$$\mathbf{x}_{cp} = \arg \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{F}} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

Здесь и далее используются евклидовы нормы. Точку \mathbf{x}_{cp} будем называть проекцией точки \mathbf{x} на поверхность \mathcal{F} в смысле наименьшего расстояния, а соответствующий оператор проектирования будем обозначать \mathbf{P} ,

$$\mathbf{x}_{cp} = \mathbf{P}\mathbf{x}.$$

Оператор \mathbf{P} является векторнозначным. Он отображает область Ω на поверхность \mathcal{F} , рассматриваемую как подмножество в $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. В случае, если поверхность и ее край являются гладкими, а область Ω — «достаточно маленькая», то оператор \mathbf{P} однозначно определен, то есть каждая точка области Ω однозначно проектируется в единственную точку на поверхности. Проектор \mathbf{P} однозначно описывает поверхность \mathcal{F} как множество своих неподвижных точек:

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}\}.$$

Если для поверхности \mathcal{F} можно задать функцию знакового расстояния $d_{\mathcal{F}}(\mathbf{x})$ (то есть \mathcal{F} — ориентированная поверхность без края), то для оператора \mathbf{P} справедливо представление:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - d_{\mathcal{F}}(\mathbf{x})\nabla d_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}).$$

Отметим, что такой способ описания является достаточно общим. Он позволяет описывать геометрию поверхности с краем и без края, неориентируемые многообразия или многообразия коразмерности больше единицы, (то есть кривые (коразмерность 2) и точки (коразмерность 3), а так же объединение объектов разной коразмерности.

В дальнейшем нам понадобится различать точки области Ω , которые проектируются во внутренние точки поверхности \mathcal{F} или на ее край $\partial\mathcal{F}$. Для этого рассмотрим вспомогательный оператор $\tilde{\mathbf{P}}$, который определим как [Macdonald2011]:

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(2\mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}). \quad (3.2)$$

Из простых геометрических соображений (см. рисунок 3.1) следует, что для точек \mathbf{x} , проекции которых принадлежат краю поверхности, справедливо соотношение

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{P}(\mathbf{x}), \quad (3.3)$$

а для точек, проекции которых принадлежат внутренним точкам \mathcal{F} , значения проекторов $\tilde{\mathbf{P}}$ и \mathbf{P} совпадают:

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}). \quad (3.4)$$

Далее перейдем непосредственно к описанию алгоритма расчета эволюции поверхности, заданной проекцией ближайшей точки.

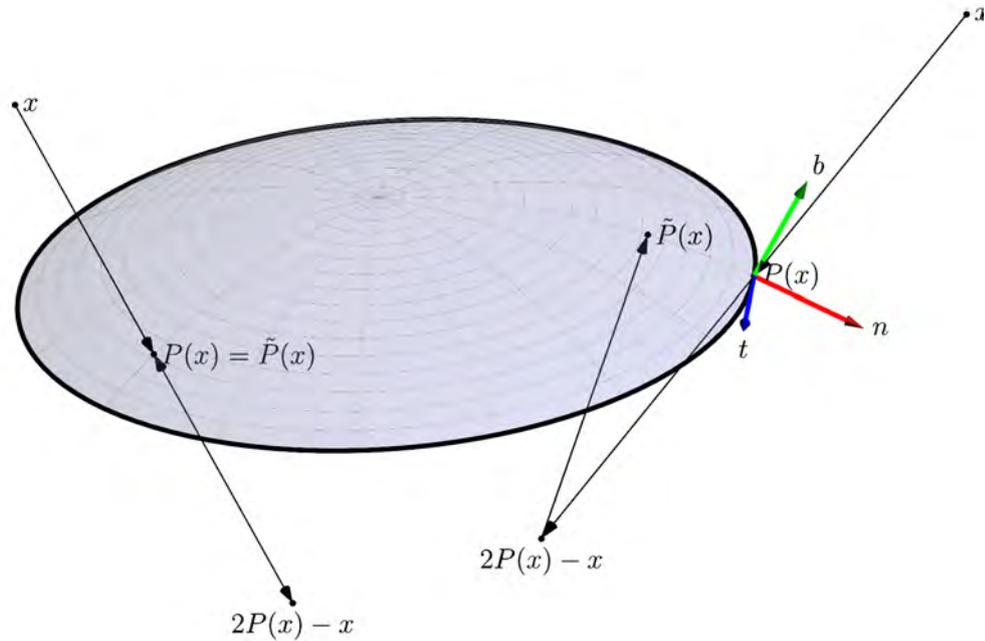


Рис. 3.1. К определению операторов \mathbf{P} и $\tilde{\mathbf{P}}$.

3.1.2 Модель эволюции поверхности

Выше были изложены основные идеи метода ближайшей точки применительно к стационарной поверхности. Рассмотрим теперь постановку задачи об эволюции поверхности.

Пусть $t \geq 0$ — время. Обозначим через \mathcal{F}_t рассматриваемую поверхность в момент времени t . Будем считать, что при $t_1 \geq t_2$ выполняется условие $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$. Другими словами, семейство поверхностей, соответствующих меньшим моментам времени содержится внутри поверхности, соответствующей любому большему моменту времени. Или, что то же самое, поверхность может эволюционировать только за счет движения ее края. Такая ситуация соответствует специфике решаемой задачи, а именно развитию срединной поверхности трещины в ходе роста последней.

Будем считать, что:

- в каждый момент времени t в рассматриваемом интервале поверхность \mathcal{F}_t целиком содержится внутри области Ω ;
- эволюция поверхности \mathcal{F} является «гладкой», то есть поверхность в каждый момент времени может быть гладко и взаимно-однозначно отображена на, например, диск единичного радиуса в \mathbb{R}^2 . В частности, в ходе эволюции у \mathcal{F} не должны появляться самопересечения и так далее.

В этом случае семейство поверхностей $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ может быть представлено как объеди-

нение начальной поверхности $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_0$ и следа «движения» ее криволинейного края:

$$\mathcal{F}_t = \{\mathcal{F}_0 \cup \gamma(t') \mid 0 \leq t' \leq t\},$$

где $\gamma(t) \equiv \partial\mathcal{F}_t$ — подвижный край поверхности \mathcal{F}_t в момент времени t .

В дальнейшем будем считать, что в каждый момент времени на линии $\gamma(t)$ задано векторное поле скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \gamma(t)$, описывающее ее эволюцию. Таким образом, движение точки границы описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}|_{t=0} = \mathbf{x}_0 \in \gamma(0). \quad (3.5)$$

Будем считать, что поле скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ является гладкой функцией точки $\mathbf{x} \in \gamma(t)$ в каждый фиксированный момент времени t и для каждой фиксированной (лагранжевой) точки границы является гладкой функцией времени.

В каждый момент времени будем описывать поверхность \mathcal{F} с помощью оператора проекции ближайшей точки. Построение алгоритма вычисления этого оператора (точнее, его аппроксимаций) в каждый момент времени при его известном значении в предыдущие моменты времени и заданной скорости \mathbf{v} будет рассмотрено ниже.

3.1.3 Дискретная модель поверхности

Пусть в области Ω , содержащей поверхность \mathcal{F} , задана расчетная сетка, ячейки которой являются тетраэдрами. Полученную триангуляцию будем считать регулярной (то есть пересечение двух различных тетраэдров может являться пустым множеством, узлом сетки, ее ребром или гранью). Соответствующую дискретную область обозначим как Ω_h . Предполагается, что сетка является достаточно мелкой так, что характерный шаг h сетки много меньше радиусов главных кривизн поверхности и радиуса кривизны ее края.

Множество узлов сетки обозначим как \mathbf{x}_i , $i = \overline{1, N}$, N — число узлов сетки. Отнесем к каждому узлу сетки базисную функцию $\varphi_i = \varphi_i(\mathbf{x})$. В простейшем случае могут быть использованы непрерывные кусочно-линейные базисные функции, для которых $\varphi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, а внутри ячеек сетки φ_i продолжены линейно.

В дискретном случае оператор проектирования \mathbf{P}^h задается своими значениями \mathbf{P}_i^h в узлах сетки. Для вычисления оператора проектирования \mathbf{P}^h в произвольной точке области используется ранее введенная система базисных функций. Если $\mathbf{x} \in \Omega_h$ — произвольная точка области Ω_h , ω — тетраэдр, в котором она расположена, $\{\xi_k\}_{k=1}^4$ — ее барицентрические координаты относительно вершин тетраэдра ω . Тогда проекцией точки \mathbf{x} считается точка

$$\mathbf{P}^h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^4 \xi_k \mathbf{P}_k^h.$$

Построенные аппроксимации проектора \mathbf{P}^h позволяют естественным образом построить аппроксимации проектора $\tilde{\mathbf{P}}^h$ в соответствии с (3.2).

Пусть, далее, \mathbb{I} — множество всех узлов сетки. Определим его подмножества $\mathbb{I}_{d,b}$, $\mathbb{I} = \mathbb{I}_d \cup \mathbb{I}_b$, $\mathbb{I}_d \cap \mathbb{I}_b = \emptyset$, соответствующие узлам, которые проектируются во внутренние точки поверхности

и на ее край, соответственно:

$$\mathbb{I}_d = \left\{ \mathbf{x}_i \in \mathbb{I} : \|\mathbf{x}_i - \tilde{\mathbf{P}}^h(\mathbf{x}_i)\| \leq \epsilon, \right\}, \quad \mathbb{I}_b = \mathbb{I} \setminus \mathbb{I}_d, \quad (3.6)$$

где $0 < \epsilon \ll h$ — малый вещественный параметр, который является параметром алгоритма.

Очевидно, что в ходе эволюции поверхности множество \mathbb{I}_d может только увеличиваться (по включению). Другими словами, при $t_1 < t_2$ имеем:

$$\mathbb{I}_d(t_1) \subset \mathbb{I}_d(t_2).$$

Это позволяет при моделировании движения поверхности, на каждом очередном временном шаге дискретизации, обновлять информацию только для узлов из множества \mathbb{I}_b .

Опишем способ построения дискретной аппроксимации оператора продолжения. Рассмотрим произвольный узел \mathbf{x}_i сетки Ω_h . Пусть \mathbf{x}_i^{CP} — его проекция, ω_i — тетраэдр сетки, в котором расположена точка проекции. Оператор продолжения определяет значение продолженной функции в узле \mathbf{x}_i как $u_h(\mathbf{P}_h \mathbf{x}_i)$. Это значение может быть вычислено с помощью линейной интерполяции по значениям решения u_k , $k \in \omega_i$, в узлах тетраэдра ω_i , внутри которого расположена проекция узла \mathbf{x}_i . В результате, значение u_h^{ext} конечномерной аппроксимации \mathbf{E}_h оператора продолжения имеет вид:

$$u_h^{\text{ext}} = \mathbf{E}_h \mathbf{u}_h,$$

где \mathbf{E}_h — квадратная матрица, ненулевые строки которой имеют вид

$$\mathbf{E}_h(i, [k_1, k_2, k_3, k_4]) = [\xi_1(\omega_i), \xi_2(\omega_i), \xi_3(\omega_i), \xi_4(\omega_i)],$$

где $\xi_\alpha(\omega_i)$ — барицентрические координаты точки $\mathbf{P}(\mathbf{x}_i)$, относящиеся к узлам тетраэдра ω_i .

3.1.4 Алгоритм расчета эволюции поверхности

В настоящем разделе рассматривается алгоритм пересчета дискретизации проектора \mathbf{P}^h в ходе эволюции поверхности.

Общая идея алгоритма состоит в следующем: сначала по известной информации вычисляются координаты точек проекций узлов сетки из множества \mathbb{I}_b . Далее эти точки смещаются в заданном направлении в соответствии с заданной скоростью движения края и заданной величиной шага по времени. Полученные точки принадлежат новому положению фронта, однако вектор, соединяющий исходный узел пространственной сетки и новое положение точки края не является вектором проекции ближайшей точки. Поэтому аппроксимации проектора корректируются.

Далее будем считать, что поверхность эволюционирует на интервале времени $[0, T]$. Введем на этом интервале расчетную сетку с шагами $\{\Delta t_i, i = \overline{1, N_T}\}$,

$$T = \sum_{i=1}^{N_T} \Delta t_i,$$

где N_T — число шагов сетки.

В начальный момент времени $t = 0$ аппроксимация проектора \mathbf{P}^h считается известной.

Также будем считать, что на интервале времени $[0, T]$ поверхность остается внутри сеточной области Ω_h .

Полный алгоритм построения дискретного оператора $\mathbf{P}^{h,n+1}$ в момент времени $t = t_n$ при заданных параметрах метода и известной аппроксимации $\mathbf{P}^{h,n}$ представлен на схеме 1. Входными данным алгоритма являются дискретизация $\mathbf{P}^{h,n}$ проектора в момент времени $t = t_n$ и множества $\mathbb{I}_{d,n}$ и $\mathbb{I}_{b,n}$. В результате своей работы алгоритм возвращает значения тех же переменных в момент времени $t = t_{n+1}$.

Параметрами метода являются величины l_{\min} , R_f и γ_{\min} . Параметр l_{\min} определяет обусловленность проекции точки на отрезок и точность вычисления проекции,

$$l_{\min} \ll R_f,$$

где R_f – радиус шара, в котором производится поиск точек на шаге 6 алгоритма 1. Считается, что R_f достаточно велик по сравнению с шагом сетки, но не превышает максимального расстояния от точки до ее проекции на край,

$$R_f \leq R_{\max}, \quad R_{\max} = \max_{i \in \mathbb{I}_{b,n}} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{P}_i^{h,n}\|.$$

В общем случае достаточно положить $R_f = R_{\max}$. Параметр γ_{\min} определяет пороговое значение, которое используется для того, чтобы определить принадлежит ли проекция краю поверхности или множеству ее внутренних точек. При вычислении значения γ_{\min} (см. этап 13 алгоритма), используется то же значение параметра ϵ , что и в (3.6).

3.1.5 Интегрирование по поверхности

Рассмотрим вопросы интегрирования функций на поверхностях, заданных проектором «ближайшей точки». Конкретно, речь пойдет о вычислении интегралов вида:

$$G = \int_{\mathcal{F}} g(\mathbf{x}) dS,$$

или, в частном случае, о вычислении площади рассматриваемой поверхности с краем:

$$S = \int_{\mathcal{F}} dS.$$

Рассмотрим сразу дискретный случай. Как и ранее, будем считать, что поверхность расположена внутри некоторой сеточной области Ω_h . Пусть $\Gamma_h = \partial\Omega_h$ — ее граница, образованная объединением треугольных граней T_i :

$$\Gamma_h = \bigcup_{i=1}^{N_f} T_i,$$

где N_f — число граней. При известном разбиении области Ω_h множество граней Γ_h легко может быть определено как множество граней, инцидентных одному и только одну тетраэдру триангуляции.

Алгоритм 1 Расчет эволюции проектора \mathbf{P}^h .

- 1: **Входные данные:** дискретное представление поверхности в момент времени t_n : множества $I_{d,n}$, $I_{b,n}$, аппроксимации проектора $\mathbf{P}^{h,n}$, шаг Δt , параметры алгоритма: ϵ , l_{\min} , R_f , R_{\max} .
- 2: Положить $\mathbb{I}_{b,n+1} = \emptyset$, $\mathbb{I}_{d,n+1} = \mathbb{I}_{d,n}$.
- 3: Вычислить новые положения всех проекций на край в соответствии с аппроксимацией (3.5):

$$X = \{\mathbf{P}_i^{h,n} + \Delta t \mathbf{v}(\mathbf{P}_i^{h,n}), i \in \mathbb{I}_{b,n}\}.$$

- 4: **for all** $i \in \mathbb{I}_{b,n}$ **do** // Для всех узлов, проектирующихся на край
- 5: Определить ближайший к \mathbf{x}_i узел из X :

$$\mathbf{a} = \arg \min_{\mathbf{x} \in X} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\| = \arg \min_{i \in \mathbb{I}_{b,n}} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{P}_i^{h,n}\|;$$

- 6: Определить (под)множество $B \subset X$, такое что:

$$B = \{\mathbf{b} \in X : \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| > l_{\min}, \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| < R_f, 0 < (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) < \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2\}.$$

- 7: **if** $B = \emptyset$ **then** // Точка \mathbf{a} является проекцией на край поверхности.
- 8: Положить $\mathbf{q} = \mathbf{a}$.
- 9: **else** // Точка \mathbf{a} не является проекцией на край поверхности.
- 10: Найти среди точек в B такую, что длина отрезка $\overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ минимальна:

$$\mathbf{b} = \arg \min_{\mathbf{b} \in B} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|,$$

- 11: Положить $\mathbf{q} = \mathbf{a} + [(\mathbf{x}_i - \mathbf{a}) \cdot \xi] \xi$, $\xi = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|}$.

- 12: **end if**
 // Определить проекцию точки \mathbf{x}_i на отрезок $\overline{\mathbf{P}_i^{h,n}\mathbf{q}}$:

- 13: Положить

$$\gamma_{\min} = \frac{\epsilon}{\|\mathbf{P}_i^{h,n} - \mathbf{q}\|}, \quad \gamma = \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{P}_i^{h,n} - \mathbf{q})}{\|\mathbf{P}_i^{h,n} - \mathbf{q}\|^2}.$$

- 14: **if** $\gamma \in (\gamma_{\min}, 1)$ **then** // Точка проектируется на поверхность
- 15: Положить $\mathbf{P}_i^{h,n+1} = \mathbf{q} + \gamma(\mathbf{P}_i^{h,n} - \mathbf{q})$, $\mathbb{I}_{d,n+1} := \mathbb{I}_{d,n+1} \cup \{i\}$
- 16: **else if** $\gamma \leq \gamma_{\min}$ **then** // Точка проектируется на край.
- 17: Положить $\mathbf{P}_i^{h,n+1} = \mathbf{q}$, $\mathbb{I}_{b,n+1} = \mathbb{I}_{b,n+1} \cup \{i\}$;
- 18: **else if** $\gamma \geq 1$ **then** // Точка проектируется на поверхность.
- 19: Положить $\mathbf{P}_i^{h,n+1} = \mathbf{P}_i^{h,n}$, $\mathbb{I}_{d,n+1} = \mathbb{I}_{d,n+1} \cup \{i\}$
- 20: **end if**
- 21: **end for**

- 22: **Выходные данные:** дискретное представление поверхности в момент времени t_{n+1} : множества $I_{d,n+1}$, $I_{b,n+1}$, аппроксимации проектора $\mathbf{P}^{h,n+1}$.
-

Представим Γ_h в виде объединения трех попарно непересекающихся множеств:

$$\Gamma_h = \Gamma_h^+ \cup \Gamma_h^- \cup \Gamma_h^0,$$

где Γ_h^0 состоит из граней, все узлы которых проектируются на фронт (то есть являются элементами множества \mathbb{I}_b), а Γ_h^+ и Γ_h^- — множество остальных граней, причем все грани из множества Γ_h^+ и Γ_h^- лежат по одну сторону от поверхности.

Заметим теперь, что:

- все узлы граней из Γ_h^0 проектируются на край поверхности. Площади треугольников, вершины которых являются проекциями вершин треугольников из Γ_h^0 пренебрежимо малы при стремлении шага сетки h к нулю;
- оператор проектирования (как континуальный, так и дискретный), ограниченный на множества Γ_h^\pm является сюръекцией (отображением «на») на поверхность \mathcal{F} ;
- в случае, если прямая, проходящая через произвольную точку на поверхности и ориентированная единичной нормалью к ней, пересекает границы множества Γ_h^\pm по одному разу, то треугольные сетки, заданные на Γ_h^\pm порождают треугольные сетки на поверхности \mathcal{F} . Узлы этих сеток образованы проекциями вершин треугольников из Γ_h^\pm , при этом два узла этой сетки считаются связанными ребром, если им связаны соответствующие узлы в Γ_h^\pm .

Для вычисления интегралов от функций, заданных на поверхности, будем, фактически, использовать эти сетки, при этом для вычисления приближенного значения интеграла по одному треугольнику будем использовать одноточечную квадратурную формулу.

При этом не возникает необходимости в явном представлении в алгоритме описанных выше сеток на поверхности \mathcal{F} — суммирование по треугольникам такой сетки можно проводить в цикле по всем треугольникам, образующим множество Γ_h . При это вклад от треугольников, принадлежащих множеству Γ_h^0 будет исчезающе мал при $h \rightarrow 0$, а вклад от поверхностей Γ_h^\pm будет (асимптотически) удваиваться.

Далее, в том случае, если прямая проходящая через произвольную точку на поверхности и ориентированная единичной нормалью к ней пересекает границы множества Γ_h^\pm более одного раза, проекции сеток Γ_h^\pm уже не будут образовывать корректную сетку на \mathcal{F} в силу того, что проекции отдельных треугольников могут иметь непустое пересечение. В этом случае приведенная выше схема вычислений должна быть скорректирована: необходимо учитывать взаимную ориентацию внешней нормали к грани и направления проектирования, например, ее центра.

Так, рассмотрим некоторую грань (треугольник) ω_k , образованную узлами сетки \mathbf{x}_{k_1} , \mathbf{x}_{k_2} и \mathbf{x}_{k_3} . Соответственно, четвертый узел тетраэдра будем обозначать \mathbf{x}_{k_4} . Тогда компоненты нормали к грани определяются выражением:

$$\mathbf{n}_k = \frac{(\mathbf{x}_{k_1} - \mathbf{x}_{k_2}) \times (\mathbf{x}_{k_2} - \mathbf{x}_{k_3})}{\|(\mathbf{x}_{k_1} - \mathbf{x}_{k_2}) \times (\mathbf{x}_{k_2} - \mathbf{x}_{k_3})\|},$$

где « \times » обозначает векторное произведение в \mathbb{R}^3 . Направление нормали можно определить по взаимной ориентации рассчитанной нормали и вектора, соединяющего центр грани и его

проекцию: вектор нормали \mathbf{n}_k будет являться вектором внешней нормали, если величина

$$(\mathbf{P}^h(\mathbf{x}_c) - \mathbf{x}_c) \cdot \mathbf{n}_k < 0, \quad \mathbf{x}_c = \frac{1}{3}(\mathbf{x}_{k,1} + \mathbf{x}_{k,2} + \mathbf{x}_{k,3}).$$

В дальнейшем будем считать, что это условие выполняется.

Таким образом, приходим к следующему выражению для вычисления интеграл по поверхности:

$$2G \approx \frac{1}{4} \sum_{T_k \in \Gamma_h} \tilde{g} \left(\frac{\mathbf{P}_{k_1}^h + \mathbf{P}_{k_2}^h + \mathbf{P}_{k_3}^h}{3} \right) \|(\mathbf{P}_{k_1}^h - \mathbf{P}_{k_2}^h) \times (\mathbf{P}_{k_2}^h - \mathbf{P}_{k_3}^h)\|,$$

где \tilde{g} — какое-либо продолжение функции g с поверхности в область Ω . Если $\tilde{g} = \mathcal{E}[g]$, то имеем:

$$\tilde{g}(\mathbf{P}(\mathbf{x})) = \tilde{g}(\mathbf{x})$$

и выражение для приближенного вычисления интеграла соответственно упрощается.

Множитель 2 перед интегралом возникает за счет того, что, фактически, интеграл вычисляется дважды — при обходе треугольников из Γ_h^+ и Γ_h^- .

3.1.6 Расчет локальных базисов на поверхности и ее крае

В рассматриваемой задаче моделирования эволюции крупномасштабной трещины, возникает необходимость вычисления на крае поверхности и его окрестности локальных векторных базисов. В частности, это требуется при применении расширенного метода конечных элементов (X-FEM) для расчета напряженного–деформированного состояния во вмещающей трещину среде. В настоящем разделе рассмотрен этот и смежные вопросы.

Введем еще один оператор \mathbf{P}_f , представляющий собой оператор проекции в смысл кратчайшего расстояния на край поверхности:

$$\mathbf{P}_f(\mathbf{x}) = \arg \min_{\tilde{\mathbf{x}} \in \partial \mathcal{F}} \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|.$$

Оператор \mathbf{P}_f корректно (в смысле единственности проекции) определен в некоторой достаточно малой окрестности края $\partial \mathcal{F}$ поверхности \mathcal{F} . Соответствующую окрестность будем обозначать как Ω_f .

Будем считать, что (а) $\Omega_f \subset \Omega$ и (б) область Ω_f содержит все точки области Ω , проекции которых принадлежат краю поверхности в смысле критериев (3.3) и (3.4). Далее, пусть Ω^+ — подобласть областей Ω и Ω_f состоящая из точек, которые проектируются на край поверхности, см. рисунок 3.2.

Отсюда следует, что:

- в подобласти Ω^+ определены все три оператора \mathbf{P} , $\tilde{\mathbf{P}}$ и \mathbf{P}_f ;
- образы операторов \mathbf{P} и \mathbf{P}_f , действующих на области Ω^+ , совпадают между собой и с множеством точек края $\partial \mathcal{F}$ поверхности.

Если обозначить через Ω^+ множество точек множества Ω , проектирующихся на край

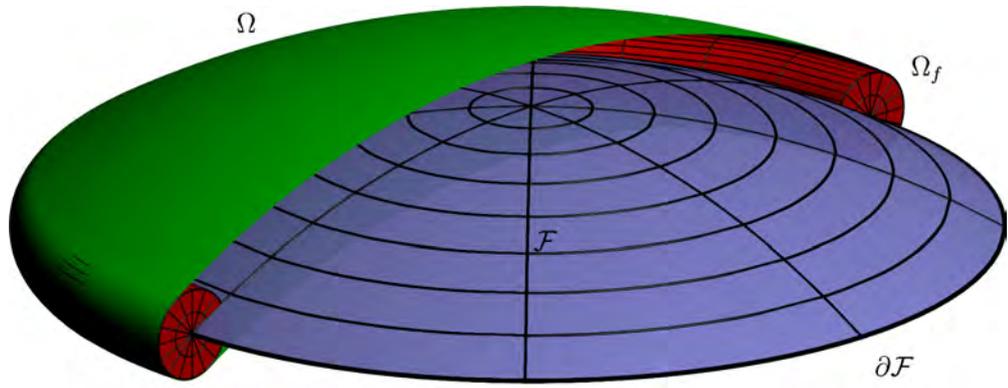


Рис. 3.2. Области Ω , Ω_f и Ω^+ .

поверхности, то множество Ω_f может быть выбрано в виде:

$$\Omega_f = \Omega^+ \cup \{2\mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \Omega^+\} \cap \Omega,$$

то есть получено «зеркальным» отражением множества Ω^+ относительно края поверхности \mathcal{F} . Этот же алгоритм может быть применен и для построения области $\Omega_{f,h}$ в дискретной постановке.

Рассмотрим теперь вопрос о построении локальных базисов на поверхности и ее крае.

Во всех точках проекций $\mathbf{P}_i^h = \mathbf{P}^h(\mathbf{x}_i)$ узлов сетки из множества \mathbb{I}_d вектор единичной нормали к поверхности может быть определен как:

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{n}(\mathbf{P}_i^h) = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{P}_i^h}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{P}_i^h\|}, \quad (3.7)$$

при этом направления векторов \mathbf{n}_i для всех узлов сетки, лежащих «по одну сторону» от поверхности \mathcal{F} , совпадают. В том случае, если поверхность «слабо искривлена», то есть ее радиус кривизны существенно больше диаметра самой поверхности, ориентация поверхности может быть однозначно задана выбором (не зависящего от точки поверхности и области Ω) вектора \mathbf{N} . В этом случае для узла сетки \mathbf{x}_i , $i \in \mathbb{I}_d$ его положение относительно поверхности и ориентация нормали \mathbf{n}_i могут быть определены путем вычисления знака скалярного произведения $\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}_i$.

Тогда во всех узлах из множества \mathbb{I}_d может быть восстановлено значение аппроксимации функции $\varphi(\mathbf{x})$ знакового расстояния до поверхности:

$$\varphi_i^h = \varphi^h(\mathbf{x}_i) = \text{sign}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}_i) \|\mathbf{x}_i - \mathbf{P}_i^h\|.$$

В произвольной точке области, проецирующейся на поверхность (но не на ее край), вектор единичной нормали в точке проекции и значение функции знакового расстояния могут быть восстановлены интерполяцией. Если $\{\xi_i\}_{i=1}^4$ — барицентрические координаты точки \mathbf{x}

относительно тетраэдра, в котором она расположена, то имеем:

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{P}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{P}_i^h \xi_i, \quad \mathbf{n}(\mathbf{x}_p) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{n}_i \xi_i, \quad \varphi^h(\mathbf{x}_p) = \sum_{i=1}^4 \varphi_i^h \xi_i,$$

где \mathbf{n}_i определены согласно (3.7).

Рассмотрим теперь точки, проекция которых расположена на крае $\partial\mathcal{F}$ поверхности. Пусть \mathbf{n} — вектор в точке края поверхности, который является нормальным к ее краю и лежит в касательной плоскости поверхности. Для произвольной точки \mathbf{x} области Ω_f («трубчатой» окрестности края поверхности) определим аппроксимацию вектора \mathbf{n} в точке проекции $\mathbf{x}_p = \mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_f(\mathbf{x})$ как:

$$\mathbf{n}^h = \frac{\mathbf{P}_f^h(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{P}}^h(\mathbf{x})}{\|\mathbf{P}_f^h(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{P}}^h(\mathbf{x})\|}.$$

Очевидно, что этот вектор аппроксимирует точное значение вектора нормали \mathbf{n} с точностью $\mathcal{O}(\|\mathbf{P}_f^h(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{P}}^h(\mathbf{x})\|)$. Если «диаметр» трубчатой окрестности Ω_f линейно уменьшается с уменьшением шага расчетной сетки (например, «диаметр» окрестности ограничен фиксированным числом шагов сетки), то

$$\|\mathbf{n} - \mathbf{n}^h\| = \mathcal{O}(h), \quad h \rightarrow 0.$$

Далее, аппроксимация вектора \mathbf{t} , касательного к краю поверхности в точке \mathbf{x}_p , может быть вычислен как:

$$\mathbf{t}^h = \mathbf{n}^h \times \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{P}_f^h(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{P}_f^h(\mathbf{x})\|}.$$

Наконец, вектор \mathbf{b}^h , который является нормалью и к поверхности, и к ее краю, может быть определен как:

$$\mathbf{b}^h = \mathbf{t}^h \times \mathbf{n}^h.$$

Приведенные выше построения иллюстрирует рисунок 3.1.

Таким образом, в каждой точке проекции может быть построен локальный ортогональный базис векторов. Ориентация этого базиса может быть определена, если известен не зависящий от точки поверхности «глобальный» вектор \mathbf{N} , задающий ориентацию поверхности, см. выше.

Введенный базис позволяет ввести в каждом «сечении» трубчатой окрестности Ω_f локальные декартовы и полярные координаты по правилу:

$$\begin{aligned} X &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}, & Y &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}, \\ r &= \|\mathbf{r}\|, & \theta &= \text{atan2}(Y, X), \\ \mathbf{r} &= \mathbf{x} - \mathbf{P}_f^h(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

где функция $atan2$ определена всюду кроме точки $x = 0, y = 0$ выражением:

$$atan2(y, x) = \begin{cases} atan(y/x), & x > 0, \\ atan(y/x) + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ atan(y/x) - \pi, & x < 0, y < 0 \\ +\pi/2, & x = 0, y > 0 \\ -\pi/2, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

и возвращает значение полярного угла вектора \mathbf{r} в базисе (\mathbf{n}, \mathbf{b})

Функции, задающие поверхность и ее край как множества меры ноль (см. (3.1)) могут быть восстановлены как:

$$\varphi(\mathbf{x}) = Y(\mathbf{x}), \quad \psi(\mathbf{x}) = X(\mathbf{x}).$$

Наконец, в окрестности точек, расположенных как на поверхности, так и на ее крае, возможно локально восстановить непосредственно поверхность. Для этого можно воспользоваться методами, развитыми в связи с представлением поверхностей как множества принадлежащих им точек («point cloud surfaces»), см., например, [Berger2014]. Здесь они не рассматриваются.

3.2 Примеры расчетов

Разработанные алгоритма расчета эволюции поверхности с краем и интегрирования заданных на ней функций были программно реализованы в составе разработанного программного комплекса. Ниже кратко приведены результаты тестирования реализаций этих алгоритмов.

Эволюция диска в однородном поле скоростей. В качестве первого теста рассмотрим задачу об эволюции плоской поверхности, которая представляет собой след движущегося поступательно и с постоянной скоростью диска радиуса R_d . В начальный момент времени поверхность задается как половина такого диска, расположенная области $x_1 \geq 0$. Расчетная область имеет вид параллелепипеда со сторонами, параллельными осям координат. Плоскость диска горизонтальна, его центр $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0$ в начальный момент времени совпадает с центром боковой грани расчетной области. Заданное на крае диска поле скоростей считается постоянным и однородным во всех точках края, $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, $v = \text{const}$. Тогда в момент времени t центр диска расположен в точке $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{v}t$. Поверхность образуется как след от движения диска в расчетной области.

Непосредственными вычислениями можно получить следующее аналитическое выражение для проектора \mathbf{P} :

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} (x_1, x_2, c_{0,3}), & \text{при } x_1 < c_1 \text{ и } |x_2 - c_{0,2}| < R_d \\ & \text{или при } \beta < 0; \\ (x_1, c_{0,2} - R_d, c_{0,3}), & \text{при } x_1 < c_1 \text{ и } x_2 \leq c_{0,2} - R_d, \\ (x_1, c_{0,2} + R_d, c_{0,3}), & \text{при } x_1 < c_1 \text{ и } x_2 \geq c_{0,2} + R_d \\ (\alpha x_1 + \beta c_1, \alpha x_2 + \beta c_{0,2}, c_{0,3}), & \text{при } x_1 \geq c_1 \text{ и } \beta \leq 1 \end{cases}$$

где $\beta = 1 - R_d / \|\mathbf{c}(t) - \mathbf{x}\|$, $\alpha = 1 - \beta$, $c_1 = c_{0,1} + vt$, x_i , $i = \overline{1,3}$ — декартовы координаты в области.

Зависимость площади диска от времени имеет вид:

$$S = \frac{\pi R_d^2}{2} + 2R_d vt.$$

Эволюция диска в вихревом поле скоростей. В качестве второго теста рассмотрим аналогичную задачу, в которой, однако, поверхность не является плоской. Как и ранее, будем считать, что в начальный момент времени поверхность представляет собой половину диска, однако, теперь, расположенную на поверхности цилиндра заданного радиуса. в ходе эволюции поверхность остается на цилиндре, «наматываясь» на него вдоль сечения, плоскость которого перпендикулярна оси цилиндра. Ось цилиндра параллельна координатной оси Ox_2 . Поле скорости является вихревым с осью, параллельной оси Ox_2 . Считается, что ось вихря находится на правой границе расчетной области и проходит через точку \mathbf{c}_v . Тогда поле скоростей имеет вид:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (c_{v,3} - x_3, 0, x_1 - c_{v,1}) \frac{v_0}{R_v^2} \sqrt{(c_{v,3} - x_3)^2 + (c_{v,1} - x_1)^2},$$

где R_v — такое расстояние от точки пространства до оси вихря, на котором модуль скорости равняется v_0 .

Пусть R_v — радиус цилиндра, которому принадлежит поверхность. На поверхности цилиндра введем угловую координату ξ . Тогда координаты точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ на поверхности цилиндра будут иметь вид:

$$x_1 = c_{v,1} + R_v \sin \xi, \quad x_3 = c_{v,3} - R_v \cos \xi, \quad \xi = \arctg \frac{x_1 - c_{v,1}}{c_{v,3} - x_3}, \quad \xi \in [0, \pi], \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

Если в начальный момент времени центр диска по оси x_2 имеет координату $c_{v,2}$, то уравнение края поверхности можно записать в параметрическом виде как:

$$\mathbf{x}_f(\varphi) = (c_{v,1} + R_v \sin \xi_f, c_{v,2} + R_d \cos \varphi, c_{v,3} - R_v \cos \xi_f), \quad \xi_f = \frac{v_0 t + R_d \sin \varphi}{R_v}, \quad \varphi \in [0, \pi],$$

где φ — параметр. В этом случае условие проекции на край (то есть условие минимума расстояния от точки пространства до края) можно записать в виде:

$$\frac{d\|\mathbf{x}_f(\varphi) - \mathbf{x}\|}{d\varphi} = 0.$$

Отсюда получается следующее уравнение относительно значения φ , соответствующего проекции заданной точки пространства на криволинейный край поверхности:

$$[(c_{v,1} - x_1) \cos \xi_f + (c_{v,3} - x_3) \sin \xi_f] \cos \varphi - (c_{v,2} - x_2) \sin \varphi - \frac{R_d}{2} \sin 2\varphi = 0.$$

В расчетах, при построении точного решения, это уравнение решается методом Ньютона.

Аналитическое решение для проектора \mathbf{P} имеет вид:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \begin{cases} (c_{v,1} + R_v \sin \xi, x_2, c_{v,3} - R_v \cos \xi), & \text{при } \xi < v_0 t / R_v \text{ и } |x_2 - c_{v,2}| < R_d, \\ & \text{или при } \beta > 1; \\ (c_{v,1} + R_v \sin \xi, c_{v,2} - R_d, c_{v,3} - R_v \cos \xi), & \text{при } \xi < v_0 t / R_v \text{ и } x_2 \leq c_{v,2} - R_d; \\ (c_{v,1} + R_v \sin \xi, c_{v,2} + R_d, c_{v,3} - R_v \cos \xi), & \text{при } \xi < v_0 t / R_v \text{ и } x_2 \geq c_{v,2} + R_d; \\ \mathbf{x}_f(\varphi), & \text{при } \xi \geq v_0 t / R_v \text{ и } \beta \leq 1; \end{cases}$$

где $\beta = R_d / \sqrt{(v_0 t - \xi R_v)^2 + (c_{v,2} - x_2)^2}$.

Для площади поверхности справедливо выражение:

$$S = \frac{\pi R_d^2}{2} + 2R_d v_0 t.$$

Результаты тестирования. В процессе тестирования изучалась зависимость средней ошибки определения проекции ε_P в конце расчета, при заданном $t = t_{\max}$:

$$\langle \varepsilon_P \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{P}(\mathbf{x}_i, t_{\max}) - \mathbf{P}^h(\mathbf{x}_i, t_{\max})\|,$$

где суммирование ведется по всем узлам расчетной сетки и ошибки определения площади:

$$\varepsilon_S = \frac{|S(t_{\max}) - S^h(t_{\max})|}{S(t_{\max}) + S^h(t_{\max})}$$

от характерного шага сетки h .

Отметим, что алгоритм расчета эволюции поверхности никак не использует информацию о структуре сетки, для его работы необходима информация лишь о координатах ее узлов. В то же время, информация о структуре сетки необходима для вычисления интегралов от функций, заданных на поверхности.

Для расчета использовалась сетка из тетраэдров в характерном шагом h , не адаптированная к геометрии поверхности. Параметры тестов имели значения $R_d = 5$, $v_0 = 1$ для случая диска в однородном поле скоростей и $R_d = 5$, $R_v = 7$, $v_0 = 1$ для случая диска в вихревом поле скорости.

Во всех расчетах временной шаг $\tau = h/2v_0$ и время моделирования $t \in [0, t_{\max}]$, $t_{\max} = 5$.

На рисунках 3.3 и 3.4 приведены этапы эволюции поверхности, полученные в ходе расчетов.

Графики на рисунке 3.5 показывают зависимость ошибки вычисления проектора и площади поверхности в ходе ее эволюции. Видно, что построенный алгоритм имеет порядок сходимости по h , близкий ко второму.

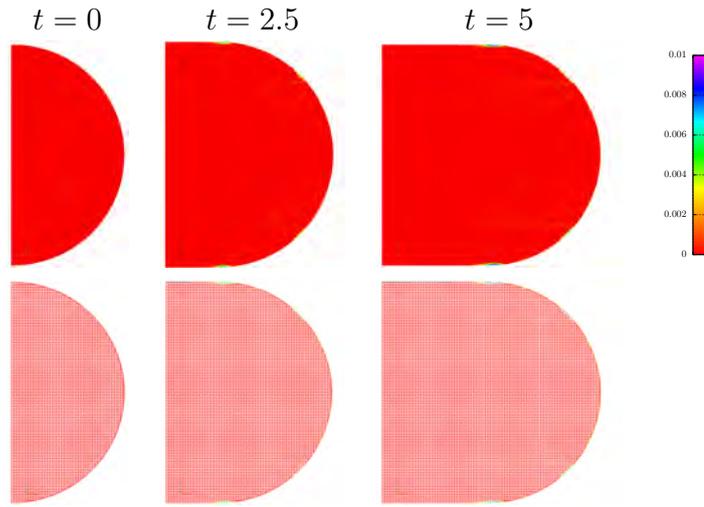


Рис. 3.3. Эволюция диска в однородном поле скоростей при $h = 0.125$, $R_{\max} = 0.625$, цветом показан уровень ошибки проекции $\|\mathbf{P}_i - \mathbf{P}^h(\mathbf{x}_i, t)\|$ в интервале $[0, 0.01]$.

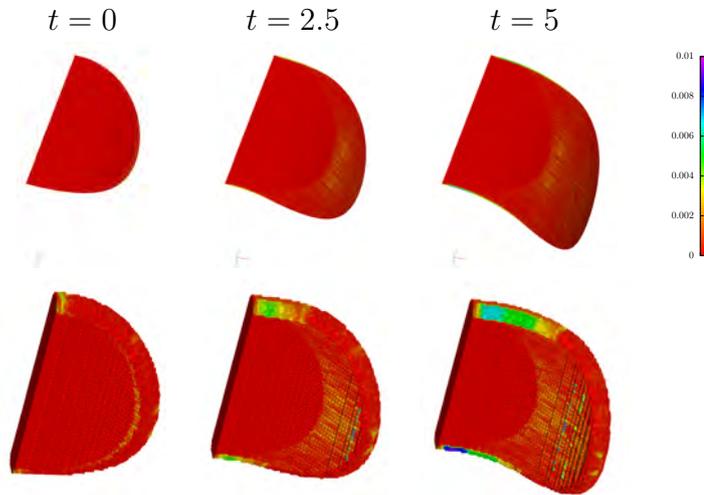


Рис. 3.4. Эволюция диска в вихревом поле скоростей при $h = 0.125$, $R_{\max} = 0.625$, цветом показан уровень ошибки проекции $\|\mathbf{P}_i - \mathbf{P}^h(\mathbf{x}_i, t)\|$ в интервале $[0, 0.01]$.

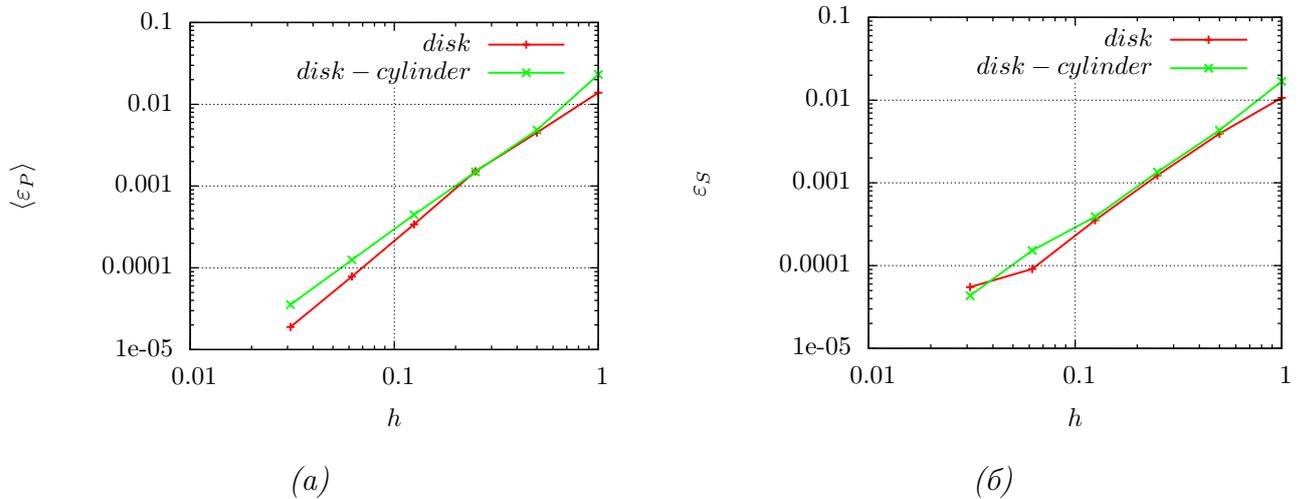


Рис. 3.5. Зависимость ошибок $\langle \epsilon_P \rangle$ и ϵ_S от параметра h для двух тестовых постановок — диска в однородном поле скоростей (кривые *disk*) и диска в вихревом поле скоростей (кривые *disk-cylinder*).

3.3 Заключение

В главе рассматриваются методы представления срединной поверхности трещины и расчета ее эволюции, основанный на проекторе ближайшей точки. Подробно описываются соответствующие вычислительные алгоритмы и особенности их применения. Предложенный алгоритм расчета эволюции поверхности сформулирован в терминах значений оператора проекции ближайшей точки в узлах и не использует какие-либо альтернативные формы представления поверхности. Рассмотрены задачи расчета локальных базисов на поверхности и ее крае, а так же интегрирования функций поверхностях, заданных операторы проекции ближайшей точки. Эти алгоритмы являются необходимыми для дальнейшего применения метода проекции ближайшей точки в настоящей работе — в частности, для построения соответствующего варианта метода X-FEM. В отличие от широко распространенного метода множеств уровня, разработанный алгоритм является полностью геометрическим и не требует многократного решения уравнений типа Гамильтона-Якоби, как это требуется для метода множеств уровня.

Глава 4

Решение задач пороупругости с трещиной

В настоящей главе рассматриваются вопросы численного решения системы уравнений пороупругости с трещиной с фиксированной геометрией.

Строится слабая постановка задачи, как без трещины, так и с трещиной. В последнем случае рассматривается ряд постановок, в зависимости от выбора пространств функций, которым принадлежит решение задачи.

Подробно описывается метод конечных элементов для задач пороупругости без трещины, рассматриваются способы решения конечномерной задачи, в частности, вопросы итерационного связывания групп уравнений теории упругости и фильтрации.

Далее описывается вариант метода конечных элементов X-FEM, использующий для представления поверхности метод проекции ближайшей точки. Основное назначение метода — это решение задачи теории упругости и фильтрации в области с трещиной. При этом не предполагается, что геометрия трещины и расчетная сетка согласованы.

В дальнейшем построенный вариант метода называется X-FEM/CP. Отметим, что, вообще говоря, сам метод X-FEM может быть определен независимо от способа представления поверхности. Однако с точки зрения программной реализации удобное представление поверхности является одним из ключевых факторов, обуславливающих практическую применимость метода в целом.

Традиционно для представления поверхности в методе X-FEM используется метод множеств уровня, когда срединная поверхность трещины и ее край описываются парой функций знакового расстояния $\phi = \phi(\mathbf{x})$ и $\psi = \psi(\mathbf{x})$. Первая из них описывает срединную поверхность трещины, вторая — ее край. В дискретном случае рассматриваются аппроксимации функций ϕ и ψ . Этот подход является традиционным, однако является вычислительно дорогим и требует надежной программной реализации. В частности, в случае подвижной трещины, описание эволюции срединной поверхности трещины в терминах эволюции функций ϕ и ψ требует решений целого ряда уравнений типа Гамильтона-Якоби для расчета эволюции трещины, (пере)инициализации и ортогонализации функций знакового расстояния.

В настоящей работе в рамках метода X-FEM используется способ представления поверхности, основанный на применении оператора проектора ближайшей точки. В этом случае расчет эволюции поверхности может быть выполнен сравнительно простыми «геометрическими» алгоритмами. Аналогично, не представляет труда расчет необходимых параметров

типа расстояния от произвольной точки расчетной области до ее поверхности и/или ее края. Большая их часть детально описана в главе 3.

Приводятся примеры численных расчетов как модельных, так и содержательных задач без трещины. В качестве последней рассматривается анализ лабораторных экспериментов, выполненных в Институте динамики геосфер РАН. Далее приводятся примеры расчета порупругих задач с трещиной. Результаты валидационных расчетов приведены в приложении А.

4.1 Упрощенная математическая модель

В настоящем разделе рассматривается упрощенная по сравнению с представленной в разделе 1 постановка задачи. Она будет использована для иллюстрации основных вычислительных алгоритмов, которые в последствие будут использованы при разработке программы-прототипа. Упрощенная модель наследует все основные «проблемные» с точки зрения разработки вычислительных алгоритмов свойства полной постановки. Оставшиеся детали либо не существенны, либо учитываются с использованием стандартных подходов и не требуют особого внимания на данном этапе. В частности, упрощенная модель является изотермической, не включает в себя уравнения смазочного слоя и предполагает, что геометрия трещины фиксирована.

Пусть задача решается в пространственной области Ω содержащей трещину, геометрия которой описывается срединной поверхностью \mathcal{F} .

Рассматриваемая модель состоит из следующих групп уравнений.

Законы сохранения импульса и массы для вмещающей среды. Указанные уравнения составляют линейную модель Био и имеют вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_f) + \nabla \cdot \left(\rho_f \frac{K}{\mu} \nabla p \right) = 0, \quad (4.2)$$

где $\mathbf{T} = \mathbf{T}' - b p \mathbf{I}$ — тензор полных напряжений, $\mathbf{T}' = \mathbf{C} : \mathbf{E}$ — тензор эффективных напряжений, \mathbf{C} — тензор упругих коэффициентов, \mathbf{E} — тензор малых деформаций, $m_f = \rho_f v_f$ — масса флюида в единице объема насыщенной среды, $v_f = b \epsilon + (1/M)p$ — флюидосодержание, $\epsilon = \mathbf{E} : \mathbf{I}$ — объемная деформация, $\rho = \rho_s(1 - \phi_0) + \rho_f \phi_0$ — плотность насыщенной среды,, $b = \text{const}$ и $M = \text{const}$ — параметры Био; $K = \text{const}$ — коэффициент проницаемости пористой среды, μ — вязкость флюида.

Уравнения (4.1) и (4.2) рассматриваются в пространственной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Уравнение течения флюида в трещине. Уравнения течения флюида в трещине определены на ее срединной поверхности \mathcal{F} и имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f w) + \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{q}}_f + Q_{\text{fr}} = Q_f, \quad \tilde{\mathbf{q}}_f = -\rho_f \frac{1}{12\mu} w^3 \left(\tilde{\nabla} p_f - \mathbf{g} \right). \quad (4.3)$$

w — раскрытие трещины, $\tilde{\mathbf{q}}_f$ — вектор плотности потока массы флюида в трещине, μ — вязкость флюида, Q_{fr} — поверхностная плотность поток массы флюида из трещины в пласт.

Условия согласования «трещина»/«пласт». Условия согласования «трещина»/«пласт» на срединной поверхности \mathcal{F} трещины включают в себя следующие:

1. условие непрерывности давлений флюида внутри среды и в трещине:

$$p^+ - p_f = 0, \quad p^- - p_f = 0, \quad (4.4)$$

которое может быть записано в виде

$$[[p]] = 0, \quad \{\{p\}\} = p_f; \quad (4.5)$$

2. Условие непрерывности потоков массы на срединной поверхности трещины, которое имеет вид

$$Q_{fr} = Q^+ + Q^-,$$

где Q^\pm — плотность потока флюида во вмещающей трещину среде на соответствующих сторонах \mathcal{F}^\pm срединной поверхности трещины.

3. условие непрерывности нормальных напряжений на срединной поверхности трещины:

$$\mathbf{T}^+ \cdot \mathbf{n}^+ = -p_f \mathbf{n}^+, \quad \mathbf{T}^- \cdot \mathbf{n}^- = -p_f \mathbf{n}^-; \quad (4.6)$$

Пусть $\mathbf{t}_n = \mathbf{T}^+ \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^- \cdot \mathbf{n}$ — вектор нормальных напряжений, тогда

$$\mathbf{t}_n = [[\mathbf{T}]] \cdot \mathbf{n} + \{\{\mathbf{T}\}\} \cdot \mathbf{n}. \quad (4.7)$$

4. геометрические соотношения, связывающие перемещение боковых поверхностей трещины и величину ее раскрытия: $w = (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n} = [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{n}$.

Как и ранее, верхними индексами «+» и «-» отмечены величины, отнесенные к боковым поверхностям \mathcal{F}^\pm трещины, \mathbf{n} — внешняя единичная нормаль к \mathcal{F}^+ .

Постановка задачи должна быть дополнена граничными условиями на границе $\partial\Omega$ области Ω и начальными условиями в момент времени $t = 0$.

Первичными неизвестными задачи являются поле перемещений вмещающей среды \mathbf{u} , давление p флюида в пласте и p_f в трещине.

4.2 Слабая постановка задачи

Для построения аппроксимаций задачи в дальнейшем будем использовать метод конечных элементов. Одним из основных элементов построения аппроксимаций является слабая (вариационная) постановка задачи, которая будет рассмотрена в данном разделе.

Сначала определим необходимые пространства, в которых будет искаться решение. Будем считать, что

- поле перемещений \mathbf{u} принадлежит пространству векторных полей в области Ω , гладких всюду за исключением поверхности $\mathcal{F} \in \Omega$, на которой они могут претерпевать разрыв, $\mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}} = V_{\mathbf{u}}(\Omega)$.

- поле давлений p во вмещающей среде так же принадлежит пространству функций, гладких всюду в Ω за исключением \mathcal{F} , $p \in V_p = V_p(\Omega)$.

Отметим, что в соответствие с условиями согласования (4.4) (или (4.5)) поле давления при переходе через \mathcal{F} непрерывно и принимает согласованные с p_f значения. Однако, мы не будем учитывать условия непрерывности в определении пространства допустимых полей давления. Вместо этого, слабая форма условий согласования будет входить в систему уравнений для определения решения.

Соответствующие двойственные переменные (потoki из трещины в пласт) определены только на поверхности \mathcal{F} , и принадлежат пространству $V_q = V_q(\mathcal{F})$.

- давление флюида в трещине и величина раскрытия являются достаточно гладкими функциями, заданными только на срединной поверхности \mathcal{F} , $p_f \in V_{p_f} = V_{p_f}(\mathcal{F})$, $w \in V_w = V_w(\mathcal{F})$.

Все указанные пространства могут быть точно охарактеризованы в терминах пространств Соболева нужной гладкости. Однако мы не будем этого делать в силу того исследование теоретических вопросов, связанных с анализом существования и единственности решения и скоростью сходимостью численных аппроксимаций в данной работе не рассматриваются.

Перейдем к построению слабой постановки задачи. Будем считать, для простоты, что для всех переменных, определенных в Ω , заданы однородные главные граничные условия (то есть перемещения и поле давления). Учет естественных граничных условий не представляет труда и может быть выполнен стандартными способами. Для построения приведенных ниже вариационных уравнений необходимо умножить скалярно в пространстве $L_2(\Omega)$ соответствующее операторное уравнение на пробную функцию, удовлетворяющую однородным главным граничным условиям и, далее, применить формулу Грина в подходящем варианте. Эта процедура является стандартной и далее не рассматривается.

Слабая форма уравнения (4.1) с учетом трещины имеет вид:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{C} : \mathbf{E}(\mathbf{u}) - bp\mathbf{I}) : \mathbf{E}(\delta\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\mathcal{F}} \mathbf{t}_n[[\delta\mathbf{u}]] d\Gamma = \int_{\Omega} \rho\mathbf{g} d\Omega, \quad \delta\mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}},$$

или, с учетом (4.6) и (4.7):

$$\int_{\Omega} (\mathbf{C} : \mathbf{E}(\mathbf{u}) - bp\mathbf{I}) : \mathbf{E}(\delta\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\mathcal{F}} (-p_f)\mathbf{n}[[\delta\mathbf{u}]] d\Gamma = \int_{\Omega} \rho\mathbf{g} d\Omega, \quad \delta\mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}}. \quad (4.8)$$

Аналогично, слабая форма закона сохранения массы флюида во вмещающей среде будет иметь вид:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(m_f)\delta p d\Omega + \int_{\Omega} \rho_f \frac{K}{\mu} \nabla p \cdot \nabla \delta p d\Omega + \int_{\mathcal{F}} q^+ \delta p d\Gamma + \int_{\mathcal{F}} q^- \delta p d\Gamma = 0, \quad \delta p \in V_p, \quad (4.9)$$

где $q^{\pm} \in V_q$ — множители Лагранжа, заданные на \mathcal{F} и имеющие смысл потоков из трещины во вмещающую среду.

Слабая форма уравнения (4.3) (закона сохранения массы флюида в трещине) имеет вид:

$$\int_{\mathcal{F}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f w) \delta p_f d\Gamma + \int_{\mathcal{F}} \rho_f \frac{1}{12\mu} w^3 (\tilde{\nabla} p_f - \mathbf{g}) \cdot \tilde{\nabla} \delta p_f d\Gamma - \int_{\mathcal{F}} (q^+ + q^-) \delta p_f d\Gamma = \int_{\mathcal{F}} Q \delta p_f, \quad \delta p_f \in V_{p_f}, \quad (4.10)$$

где p^\pm — давление флюида во вмещающей среде на боковых поверхностях \mathcal{F}^\pm трещины.

Слабая форма условий согласований в виде (4.4) имеет вид:

$$\int_{\mathcal{F}} ([\mathbf{u}] - w) \delta w d\Gamma = 0, \quad \delta w \in V_w,$$

$$\int_{\mathcal{F}} (p^+ - p_f) \delta q^+ d\Gamma = 0, \quad \int_{\mathcal{F}} (p^- - p_f) \delta q^- d\Gamma = 0, \quad q^\pm \in V_q.$$

Приведенная система уравнений содержит 6 уравнений относительно 6-ти неизвестных полей \mathbf{u} , p , p_f , w , q^+ и q^- .

Построенная система учитывает условия согласования для давления в виде (4.4). Для дальнейшего более удобно использовать их в виде (4.5). При этом уравнение (4.8) не изменится.

Уравнение (4.9) закона сохранения массы для флюида во вмещающей среде примет вид:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (m_f) \delta p d\Omega + \int_{\Omega} \rho_f \frac{K}{\mu} \nabla p \cdot \nabla \delta p d\Omega + \int_{\mathcal{F}} q_J [\delta p] d\Gamma + \int_{\mathcal{F}} q_A \{\{\delta p\}\} d\Gamma = 0, \quad \delta p \in V_p,$$

где $q_J, q_A \in V_q$ — множители Лагранжа, заданные на \mathcal{F} .

Уравнение (4.10) закона сохранения массы для трещины примет вид:

$$\int_{\mathcal{F}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f w) \delta p_f d\Gamma + \int_{\mathcal{F}} \rho_f \frac{1}{12\mu} w^3 (\tilde{\nabla} p_f - \mathbf{g}) \cdot \tilde{\nabla} \delta p_f d\Gamma - \int_{\mathcal{F}} q_A \delta p_f d\Gamma = \int_{\mathcal{F}} Q \delta p_f, \quad \delta p_f \in V_{p_f}. \quad (4.11)$$

Слабая форма условий согласования примет вид:

$$\int_{\mathcal{F}} [p] \delta q_J d\Gamma = 0, \quad \int_{\mathcal{F}} (\{\{p\}\} - p_f) \delta q_A d\Gamma = 0, \quad q_{J,A} \in V_q.$$

Введем следующие формы, определенные на соответствующих парах пространств:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}} : \quad & \mathbb{A}_u(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \mathbf{E}(\delta \mathbf{u}) d\Omega, \\
p \in V_p, \delta \mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}} : \quad & \mathbb{A}_p(p, \mathbf{u}) = \int_{\mathcal{F}} (-bp\mathbf{I}) : \mathbf{E}(\delta \mathbf{u}) d\Gamma, \\
p \in V_p, \delta p \in V_p : \quad & \mathbb{B}(p, \delta p) = \int_{\Omega} \rho_f \frac{K}{\mu} \nabla p \cdot \nabla \delta p d\Omega, \\
p_f \in V_{p_f}, \delta p_f \in V_{p_f} : \quad & \mathbb{C}(w; p_f, \delta p_f) = \int_{\mathcal{F}} \rho_f \frac{1}{12\mu} w^3 \left(\tilde{\nabla} p_f - \mathbf{g} \right) \cdot \tilde{\nabla} \delta p_f d\Gamma,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Для скалярного произведения (или отношения двойственности, если речь идет парах двойственных пространств), определенного на \mathcal{F} или в области Ω будем использовать обозначения

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_{\mathcal{F}} \phi \psi d\mathcal{F}, \quad (u, v) = \int_{\Omega} uv d\Omega.$$

Тогда слабая постановка задачи примет вид: определить $\mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}}, p \in V_p, p_f \in V_{p_f}, w \in V_w, q^{J,A} \in V_q$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned}
& \mathbb{A}_u(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \mathbb{A}_p(p, \delta \mathbf{u}) - \langle p_f, [[\delta \mathbf{u}_n]] \rangle = (\rho \mathbf{g}, \delta \mathbf{u}), \\
& \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f m), \delta p \right) + \mathbb{B}(p, \delta p) + \langle q_J, [[\delta p]] \rangle + \langle q_A, \{\{\delta p\}\} \rangle = 0, \\
& \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f w), \delta p_f \right) + \mathbb{C}(w; p_f, \delta p_f) - \langle q_A, \delta p_f \rangle = (Q, \delta p_f), \\
& \langle [[\mathbf{u}_n]], \delta w \rangle - \langle w, \delta w \rangle = 0, \quad \langle [[p]], \delta q_J \rangle = 0, \quad \langle \{\{p\}\}, \delta q_A \rangle - \langle p_f, \delta q_A \rangle = 0,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

для всех допустимых $\delta \mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}}, \delta p \in V_p, \delta p_f \in V_{p_f}, \delta w \in V_w, \delta q^{J,A} \in V_q$.

Эту постановку можно упростить, учтя непрерывность поля давления p в определении пространства V_p . В этом случае условия непрерывности p более не будут входить в систему уравнений, — останется лишь условия согласования давления во вмещающей среде и в трещине.

Обозначим пространство непрерывных на \mathcal{F} полей давления через $V_p^{(c)}$. Тогда приведенная слабая постановка задачи примет вид: определить $\mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}}, p \in V_p^{(c)}, p_f \in V_{p_f}, w \in V_w, q^A \in V_q$, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}
& \mathbb{A}_u(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \mathbb{A}_p(p, \delta \mathbf{u}) - \langle p_f [[\delta \mathbf{u}_n]] \rangle = (\rho \mathbf{g}, \delta \mathbf{u}), \\
& \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f m), \delta p \right) + \mathbb{B}(p, \delta p) + \langle q_A, \delta p \rangle = 0, \\
& \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f w), \delta p_f \right) + \mathbb{C}(w; p_f, \delta p_f) - \langle q_A, \delta p_f \rangle = (Q, \delta p_f), \\
& \langle [[\mathbf{u}_n]], \delta w \rangle - \langle w, \delta w \rangle = 0, \quad \langle p, \delta q_A \rangle - \langle p_f, \delta q_A \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Далее, последнюю систему можно упростить еще больше, если в явном виде использовать

зависимость раскрытия w от скачка нормальных перемещений на \mathcal{F} . В этом случае получим:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_u(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \mathbb{A}_p(p, \delta \mathbf{u}) - \langle p_f, [[\delta \mathbf{u}_n]] \rangle &= (\rho \mathbf{g}, \delta \mathbf{u}), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f m), \delta p \right) + \mathbb{B}(p, \delta p) + \langle q_A, \delta p \rangle &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f [[\mathbf{u}_n]]), \delta p_f \right) + \mathbb{C}([[\mathbf{u}_n]]; p_f, \delta p_f) - \langle q_A, \delta p_f \rangle &= (Q, \delta p_f), \\ \langle p - p_f, \delta q_A \rangle &= 0, \end{aligned}$$

где неизвестными являются $\mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}}$, $p \in V_p$, $p_f \in V_{p_f}$, $q^A \in V_q$.

Последняя система является наиболее простой из представленных выше и содержит минимальное количество переменных. Вместе с тем она использует наиболее сильные допущения о гладкости искомых полей, которые не всегда реализуются для условий согласования общего вида, описанных в главе 1. Поэтому на данном этапе будем использовать представленную выше постановку (4.13) относительно полного набора неизвестных.

Наконец, на основе построенных постановок в терминах множителей Лагранжа можно построить более простые постановки с использованием метода штрафа. Сделаем это для постановки (4.13). Действуя стандартным образом, получим

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_u(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \mathbb{A}_p(p, \delta \mathbf{u}) - \langle p_f, [[\delta \mathbf{u}_n]] \rangle &= (\rho \mathbf{g}, \delta \mathbf{u}), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f m), \delta p \right) + \mathbb{B}(p, \delta p) + \frac{1}{\epsilon} \langle [[p]], [[\delta p]] \rangle + \frac{1}{\epsilon} \langle \{\{p\}\} - p_f, \{\{\delta p\}\} \rangle &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f w), \delta p_f \right) + \mathbb{C}(w; p_f, \delta p_f) - \langle q_A, \delta p_f \rangle &= (Q, \delta p_f). \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $[[\mathbf{u}_n]]$ — раскрытие трещины, поток q_A определяет поток их вмещающей среды в трещину.

Построенная постановка далее используется в настоящей работе. С одной стороны, она является достаточно общей и позволяет, при минимальных изменениях, учесть широкий класс граничных условий на срединной поверхности трещины. С другой — не требует построения дискретных пространств множителей Лагранжа, что, как уже отмечалось выше, в случае метода X-FEM, является достаточно сложным.

Отметим также следующее. Уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние вмещающей трещину среды далее используются непосредственно. Уравнение для описания течения в трещине используются в несколько ином виде, основанном на использовании метода проекции ближайшей точки для построения продолжения соответствующего уравнения из трещины во вмещающее ее пространство. Однако общая структура задача при этом сохраняется. Далее, представленная полная система уравнений не решается в «монолитной» постановке. Для ее решения используется подходящий итерационный метод, подробно описанный в соответствующей главе.

4.3 Конечномерные аппроксимации: пороупругость без трещины

Для построения конечномерных аппроксимаций задачи (4.13) необходимо ввести конечномерные аппроксимации пространств $V_{\mathbf{u}}, V_p, V_{pf}, V_w, V_q$, которые, соответственно, будем обозначать верхним индексом « h »,

$$V_{\mathbf{u}}^h \subset V_{\mathbf{u}}, \quad V_p^h \subset V_p, \quad V_{pf}^h \subset V_{pf}, \quad V_w^h \subset V_w, \quad V_q^h \subset V_q.$$

Как только конечномерные пространства выбраны, построение конечномерных аппроксимаций не составляет труда. Коротко это процедура будет описана ниже.

Минимальное требование к последовательности конечномерных аппроксимаций V_h какого-либо пространства V заключается в ее предельной плотности в V при $h \rightarrow 0$. В рассматриваемом случае, когда система уравнений имеет вид задачи о седловой точке, для построения устойчивых аппроксимаций необходимо также выполнение \inf - \sup условий (в другой терминологии — условий Ладыженской-Бабушки-Бреззи), см. [Brezzi1991].

В случае, если для конкретной задачи \inf - \sup устойчивые пары пространств не известны, необходим тщательный контроль за особенностями решения и проверка выполнения численных \inf - \sup условий, см. [Chapelle1993].

В соответствии с методом конечных элементов расчетная область Ω разбивается на множество конечных элементов ω_i ,

$$\Omega_h = \bigcup_{i=1}^{N_e} \omega_i,$$

где N_e — число конечных элементов, Ω_h — аппроксимация области Ω . В дальнейшем считается, что область Ω является многогранником и $\Omega = \Omega_h$. Помимо этого, будем считать, что разбиение Ω_h области Ω на конечных элементы — правильное, то есть два конечных элемента либо имеют пустое пересечение, либо имеют общую вершину (узел), либо общее ребро, либо общую грань.

Конечные элементы обычно имеют простую форму и являются тетраэдрами, шестигранниками или призмами и так далее. В дальнейшем будем считать, что все конечные элементы имеют одинаковую форму и являются параллелепипедами, или, в общем случае — шестигранниками, ребра которых — отрезки прямых. Обобщение рассмотренных ниже методов на случай конечных элементов другой формы (например, тетраэдры) является технической задачей.

Для каждого конечного элемента ω_i существует его отображение T_i на канонический конечный элемент. В рассматриваемом случае это куб с ребром длины 2 и центром в начале локальной системы координат $\{\xi_i\}_{i=1}^3$:

$$T_i : \omega_i \rightarrow \omega = [-1, 1]^3.$$

Отображение T_i является гладким и имеет гладкое обратное отображение T_i^{-1} . Оно задается, в рамках изопараметрического метода конечных элементов, с использованием определенных к конечному элементу базисных функций. Локальная система координат и нумерация узлов канонического элемента показана на рисунке 4.1.

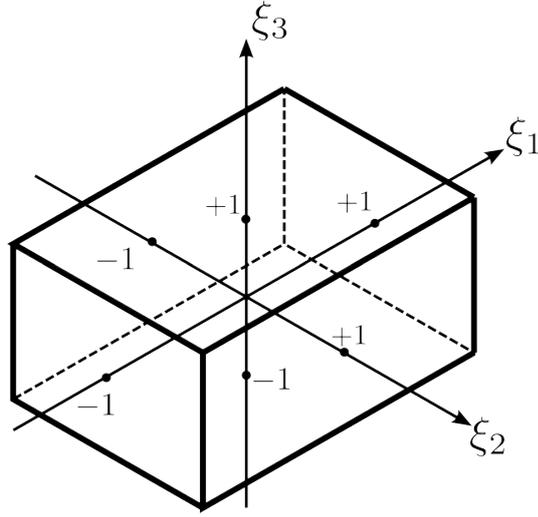


Рис. 4.1. Канонический элемент ω .

Базисные функции метода конечных элементов для аппроксимации всех требуемых полей будем относить к узлам P_i , $i = \overline{1, N_n}$ расчетной сетки Ω_h . В большинстве случаев базисные функции обладают δ -свойством, то есть для базисной функции $N_i = N_i(\mathbf{x})$ имеем

$$N_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Отметим, что к одному узлу может быть отнесено более одной степени свободы решения (более одного неизвестного). Соответственно, и число базисных функций, отнесенных к узлу может быть больше единицы.

В дальнейшем будем считать, что для используемых конечномерных пространств базисные функции заданы явно, то есть

$$V_\alpha^h = \text{span}(N_i(\mathbf{x}), i = \overline{1, N_n}),$$

где $\alpha = \mathbf{u}, p, p_f, w, q$.

Соответственно, конечномерное решение задачи ищется в виде линейной комбинации соответствующих базисных функций. Например, для поля давления имеем:

$$p^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_n} p_i(t) N_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{p}^h = [p_1, p_2, \dots, p_{N_n}]^T,$$

где \mathbf{p}^h — вектор узловых значений.

Как только базис в соответствующих конечномерных пространствах задан, аппроксимация билинейных форм, входящих в слабую постановку задачи, строится стандартным способом. Поясним его на примере аппроксимации билинейной формы из (4.12),

$$\mathbb{A}_u(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \mathbf{E}(\delta \mathbf{u}) d\Omega \quad (4.15)$$

в постановке (4.13).

Для примера, для аппроксимации поля перемещений будем рассматривать 8-ми узло-

вой конечный элемент, показанный на рисунке 4.1. К каждому из его узлов отнесены три компоненты поля перемещений. Тогда вектор узловых значений элемента имеет вид:

$$\{\mathbf{u}^{(e)}\} = [u_x^{(1)}, u_y^{(1)}, u_z^{(1)}, u_x^{(2)}, u_y^{(2)}, u_z^{(2)}, \dots, u_x^{(8)}, u_y^{(8)}, u_z^{(8)}]^T \in \mathbb{R}^{24 \times 1},$$

где $u_\alpha^{(i)}$ — значение компонента α векторного поля перемещений в узле i , $i = \overline{1, 8}$ конечного элемента.

Здесь и далее величины в квадратных скобках (« $[\cdot]$ ») обозначают матрицы, величины в фигурных скобках (« $\{\cdot\}$ ») — векторы столбцы.

Пусть теперь

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 24}$$

— матрица базисных функций. Тогда поле перемещений внутри конечного элемента ω_e имеет вид:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x})|_{\omega_e} = [\Phi] \cdot \{\mathbf{u}^{(e)}\} \in \mathbb{R}^3.$$

Далее, в силу того, что тензоры деформаций и напряжений являются симметричными, будем представлять их в виде 6-ти мерных векторов-столбцов вида (векторные обозначения Войгта, см. [Heinwein2001]):

$$\{\mathbf{T}\} = [T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}, T_{yz}, T_{xz}, T_{xy}]^T \in \mathbb{R}^6,$$

и

$$\{\mathbf{E}\} = [E_{xx}, E_{yy}, E_{zz}, 2E_{yz}, 2E_{xz}, 2E_{xy}]^T \in \mathbb{R}^6.$$

Перемещения и деформация связаны следующим матричным дифференциальным оператором:

$$\{\mathbf{E}\} = [\mathbf{D}] \cdot \mathbf{u}^{(e)} = [\mathbf{D}] \cdot [\Phi] \cdot \{\mathbf{u}^{(e)}\},$$

где

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 & \partial_y & \partial_z & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 & \partial_x & 0 & \partial_z \\ 0 & 0 & \partial_z & 0 & \partial_x & \partial_y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}.$$

Закон Гука, связывающий напряжения и деформации, в матричных обозначениях имеет вид:

$$\{\mathbf{T}\} = [\mathbf{C}] \cdot \{\mathbf{E}\},$$

где $[\mathbf{C}]$ — матрица упругих коэффициентов с элементами

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{2122} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6},$$

где C_{ijkl} , $i, j, k, l = \overline{1, 3}$ — компоненты симметричного тензора четвертого ранга \mathbf{C} (тензора упругих коэффициентов).

В частном случае изотропной среды матрица $[C]$ имеет вид:

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6},$$

где

$$C_{11} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad C_{12} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (C_{11} - C_{12})/2 = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \mu,$$

где E — модуль Юнга среды, ν — коэффициент Пуассона, μ — модуль сдвига.

Наконец, подынтегральное выражение билинейной формы (4.15) примет вид:

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}^{(e)}) : \mathbf{C} : \mathbf{E}(\delta \mathbf{u}^{(e)}) = \{\delta \mathbf{u}^{(e)}\}^T ([\Phi]^T \cdot [\mathbf{D}]^T \cdot [C] \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\Phi]) \{\mathbf{u}^{(e)}\}.$$

Пусть теперь

$$\mathbb{A}^{(k)} = \int_{\omega_i} ([\Phi]^T \cdot [\mathbf{D}]^T \cdot [C] \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\Phi]) d\Omega \in \mathbb{R}^{24 \times 24} \quad (4.16)$$

— локальная матрица жесткости конечного элемента ω_k .

Далее, пусть \mathcal{I}^k — множество глобальных номеров локальных степеней свобод i ($i = \overline{1, 24}$) конечного элемента номер k . Зададим для каждого конечного элемента матрицы (проекторы), сопоставляющие полному вектору неизвестных вектор неизвестных, отнесенных к одному элементу с номером k по правилу:

$$\mathbf{P}_{il}^{(k)} = \begin{cases} 1, & l \in \mathcal{I}^{(k)}, \\ 0, & l \notin \mathcal{I}^{(k)}, \end{cases}, \quad i = \overline{1, 24}, \quad j = \overline{1, N_u}; \quad \mathbf{P}^{(k)} \in \mathbb{R}^{24 \times N_u}$$

где N_u — число степеней свободы для описания поля перемещений (в простейшем случае $N_u = 3N_n$, где N_n — число узлов расчетной сетки).

Вектор неизвестных, соответствующий одному конечному элементу с номером k имеет

вид:

$$\{\mathbf{u}^{(k)}\} = [\mathbf{P}^{(k)}] \cdot \{\mathbf{u}^h\},$$

где $\{\mathbf{u}^h\} \in \mathbb{R}^{N_u \times 1}$ — полный вектор неизвестных.

Тогда значения билинейной формы \mathbb{A} на элементах конечномерного пространства $V_{\mathbf{u}}$ имеют вид:

$$\mathbb{A}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \{\delta \mathbf{u}^h\}^T \cdot \mathbb{A}^h \cdot \{\delta \mathbf{u}^h\}, \quad \mathbb{A}^h = \sum_k [\mathbf{P}^{(k)}] \cdot [\mathbb{A}^{(k)}] \cdot [\mathbf{P}^{(k)}]^T, \quad (4.17)$$

где $\mathbb{A}^{(k)}$ — матрица жесткости конечного элемента с номером k , вычисляемая в соответствии с (4.16).

Уравнение (4.17) является формализацией стандартного алгоритма сборки матрицы жесткости задачи из матриц жесткости отдельных конечных элементов.

Для вычисления значений матрицы $\mathbb{A}^{(k)}$ выражение (4.16) интегрируется численно с использованием квадратурных формул нужного порядка (который определяется степенью многочлена, задающего базисные функции $N_i(\mathbf{x})$), см., например [Шайдуров1989, Zienkewicz2005].

Построение аппроксимаций остальных билинейных форм в вариационной постановке (4.13) производится аналогично.

С учетом сказанного рассмотрим более подробно аппроксимации поропругой части модели. Для простоты будем считать, что для всех переменных, определенных в Ω , заданы однородные главные граничные условия (то есть перемещения и поле давления). Учет естественных граничных условий не представляет труда и может быть выполнен стандартными способами.

При отсутствии трещины слабая форма уравнения (4.1) имеет вид:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{C} : \mathbf{E}(\mathbf{u}) - bp\mathbf{I}) : \mathbf{E}(\delta \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \delta \mathbf{u} d\Omega, \quad \delta \mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}}.$$

Аналогично, слабая форма закона сохранения массы флюида во вмещающей среде будет иметь вид:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (m_f) \delta p d\Omega + \int_{\Omega} \rho_f \frac{K}{\mu} \nabla p \cdot \nabla \delta p d\Omega = 0, \quad \delta p \in V_p.$$

Приведенная система уравнений содержит 2 уравнения относительно 2 неизвестных полей \mathbf{u} и p .

Введем следующие билинейные формы:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_u(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \mathbf{E}(\delta \mathbf{u}) d\Omega, & \mathbb{A}_p(p, \mathbf{u}) &= \int_{\Omega} (-bp\mathbf{I}) : \mathbf{E}(\delta \mathbf{u}) d\Omega, \\ \mathbb{B}(p, \delta p) &= \int_{\Omega} \rho_f \frac{K}{\mu} \nabla p \cdot \nabla \delta p d\Omega, & \mathbb{M}_u(\mathbf{u}, \delta p) &= \int_{\Omega} (-\rho_f b \delta p \mathbf{I}) : \mathbf{E}(\delta \mathbf{u}) d\Omega, \\ \mathbb{M}_p(p, \delta p) &= \int_{\Omega} \rho_f \frac{1}{M} p \delta p d\Omega, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где $\mathbf{u}, \delta \mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}}, p, \delta p \in V_p$.

Тогда слабая постановка задачи примет вид: определить $\mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}}$, $p \in V_p$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_u(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \mathbb{A}_p(p, \delta \mathbf{u}) &= \mathbf{f}_u(\delta \mathbf{u}), \\ \frac{\partial}{\partial t} [\mathbb{M}_u(\mathbf{u}, \delta p) + \mathbb{M}_p(p, \delta p)] + \mathbb{B}(p, \delta p) &= \mathbf{f}_p(\delta p), \end{aligned} \quad (4.19)$$

для всех допустимых $\delta \mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}}$, $\delta p \in V_p$. Заметим, что в последней системе уравнений в случае постоянной плотности флюида билинейные формы \mathbb{M}_u и $\rho_f \mathbb{A}_p$ являются сопряженными в силу того, что сопряженными являются операторы дивергенции и градиента.

В приведенных выше соотношениях $\mathbf{f}_u(\delta \mathbf{u})$ и $\mathbf{f}_p(\delta p)$ — линейные функционалы, порождаемые правыми частями уравнений (4.1), (4.2). В рассматриваемом частном случае имеем $\mathbf{f}_p(\delta p) = 0$,

$$\mathbf{f}_u(\delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \delta \mathbf{u} \, d\Omega.$$

После аппроксимации задачи по пространству соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{M}_u & \mathbf{M}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_h \\ \dot{\mathbf{p}}_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_u & \mathbf{A}_p \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{p}_h \end{bmatrix} = \mathbf{F},$$

где точкой обозначена производная по времени, \mathbf{u}_h , \mathbf{p}_h — зависящие от времени векторы узловых значений конечно-элементных аппроксимаций поля перемещений и давления соответственно; матрицы \mathbf{A}_u , \mathbf{A}_p , \mathbf{M}_u , \mathbf{M}_p , \mathbf{B} и \mathbf{F} — конечномерные аппроксимации соответствующих билинейных форм и правой части из (4.19).

Пусть далее \mathbf{u}_h , \mathbf{p}_h — значения векторов неизвестных в момент времени t , $\hat{\mathbf{u}}_h$, $\hat{\mathbf{p}}_h$ — в момент времени $t + \Delta t$, Δt — шаг времени. Аппроксимируя последнюю систему уравнений по времени неявным образом, получим

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{M}_u & \mathbf{M}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h}{\Delta t} \\ \frac{\hat{\mathbf{p}}_h - \mathbf{p}_h}{\Delta t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_u & \mathbf{A}_p \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_h \\ \hat{\mathbf{p}}_h \end{bmatrix} = \mathbf{F},$$

или

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_u & \mathbf{A}_p \\ \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_u & \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_p + \mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_h \\ \hat{\mathbf{p}}_h \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{F}}; \quad \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_u & \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_p + \mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{p}_h \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Решение этой системы линейных алгебраических уравнений относительно $\hat{\mathbf{u}}_h$ и $\hat{\mathbf{p}}_h$ позволяет получить решение задачи в момент времени $t + \Delta t$.

Отметим, что существует целый ряд подходов для решения указанной системы уравнений, среди которых отметим следующие:

- Непосредственно решение системы относительно «полного» вектора неизвестных. Такой подход является наиболее надежным (с точки зрения устойчивости расчета), однако не всегда удобен на практике, особенно если речь идет о решении задачи, в которой уравнения Био составляют лишь часть полной системы уравнений — либо в случае,

когда расчет упругой и фильтрационной части задачи осуществляется различными солверами, которые не могут быть объединены в одну программу.

- Организация тех или иных итераций между переменными $\hat{\mathbf{u}}_h$ и $\hat{\mathbf{p}}_h$ и соответствующими группами уравнений (блочными строками системы (4.20)). В простейшем случае эти итерации соответствуют методу простой итерации решения системы (4.20) с использованием того или иного варианта предобуславливания с помощью метода Гаусса-Зейделя.
- Наконец, простейший вариант состоит в использовании ровно одной итерации Гаусса-Зейделя на каждом шаге по времени. Этот метод обладает минимальным запасом устойчивости в смысле величины шага по времени.

4.4 Алгоритмы итерационного связывания: пороупругость

Для численного решения уравнений пороупругости в данной работе использовались два различных алгоритма расщепления уравнений по физическим процессам: «дренированное» (“drained split”) и «недренированное» (“undrained split”). Практически значимое различие данных методов состоит в различии их областей устойчивости. Далее опишем оба этих метода и переведем без доказательства условия устойчивости, подробное описание которых можно найти в [Kim2009, Kim2010].

Оба упомянутых выше алгоритма состоят в последовательном решении групп уравнений теории упругости и фильтрации. При использовании «дренированного» расщепления при расчете упругой части считается неизменным давление жидкости в скелете, при использовании «недренированного» расщепления неизменной является уже масса жидкости.

Система уравнений пороупругости имеет вид:

$$\nabla \cdot (\mathbf{T}' - bp\mathbf{I}) + \rho\mathbf{g} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(b\epsilon + \frac{1}{M}p \right) + \nabla \cdot \left(-\rho_f \frac{K}{\mu} \nabla p \right) = 0.$$

Аппроксимируем производную по времени с первым порядком, получим

$$\nabla \cdot (\mathbf{T}'^{(n+1)} - bp^*\mathbf{I}) + \rho\mathbf{g} = 0 \tag{4.21}$$

$$\frac{1}{M} \frac{p^{(n+1)} - p^n}{\Delta t} + \frac{\epsilon^{(n+1)} - \epsilon^n}{\Delta t} + \nabla \cdot \left(-\rho_f \frac{K}{\mu} \nabla p^{(n+1)} \right) = 0. \tag{4.22}$$

В случае «дренированного» расщепления берется

$$p^* = p^n.$$

В случае «недренированного», воспользовавшись уравнением состояния

$$\frac{dm_f}{\rho_f} = \mathbf{B} : d\mathbf{E} + \frac{1}{M}dp,$$

получим:

$$p^* = p^n - M\mathbf{B} : (\mathbf{E}^{(n+1)} - \mathbf{E}^n),$$

то есть изменение давления при фиксированной массе жидкости определяется деформацией. Подставив данное выражение в 4.21, имеем:

$$\nabla \cdot [(C - M\mathbf{B}) : \mathbf{E}^{(n+1)} - b(p^n + M\mathbf{B} : \mathbf{E}^n)\mathbf{I}] + \rho\mathbf{g} = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{1}{M} \frac{p^{(n+1)} - p^n}{\Delta t} + \frac{\epsilon^{(n+1)} - \epsilon^n}{\Delta t} + \nabla \cdot \left(-\rho_f \frac{K}{\mu} \nabla p^{(n+1)} \right) = 0. \quad (4.24)$$

Заметим, что величина $C - M\mathbf{B}$ является «недренированным» модулем упругости. «Дренируемое» связывание является условно устойчивым при

$$\frac{b^2 M}{\lambda + 2G} \leq 1,$$

причем устойчивость определяется исключительно параметрами среды и не накладывает ограничения на шаг по времени. «Недренированное» связывание является безусловно устойчивым.

Также оба указанных выше метода связывания можно несложным образом модифицировать для получения на слое по времени решения, совпадающего с решением при использовании полностью неявной связной постановки. Два новых метода будем называть итерационным «дренированным» и «недренированным» связываниями. Уравнения для получения решения на $(k + 1)$ -ой итерации будут выглядеть следующим образом:

$$\nabla \cdot (\mathbf{T}^{(k+1)} - bp^*\mathbf{I}) + \rho\mathbf{g} = 0 \quad (4.25)$$

$$\frac{1}{M} \frac{p^{(k+1)} - p^n}{\Delta t} + \frac{\epsilon^{(k+1)} - \epsilon^n}{\Delta t} + \nabla \cdot \left(-\rho_f \frac{K}{\mu} \nabla p^{(k+1)} \right) = 0. \quad (4.26)$$

При этом в случае «дренированного» связывания $p^* = p^k$, в случае «недренированного» $p^* = p^k - M\mathbf{B} : (\mathbf{E}^{(k+1)} - \mathbf{E}^k)$. Итерационный процесс инициализируется значениями с предыдущего временного слоя.

Как было указано в матричном виде система может быть записана в виде:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{M}_u & \mathbf{M}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_h \\ \dot{\mathbf{p}}_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_u & \mathbf{A}_p \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{p}_h \end{bmatrix} = \mathbf{F},$$

Для ясности общей картины ниже приведена запись «дренированного» и «недренированного» методов расщеплений в матричном виде. В случае «дренированного» связывания система имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_u & 0 \\ \mathbf{M}_u & \mathbf{M}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h^{n+1} \\ \mathbf{p}_h^{n+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{M}_u & \mathbf{M}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h^n \\ \mathbf{p}_h^n \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A}_p \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h^n \\ \mathbf{p}_h^n \end{bmatrix} = \Delta t \mathbf{F},$$

Метод с итерациями будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_u & 0 \\ \mathbf{M}_u & \mathbf{M}_p + \Delta t \mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h^{k+1} \\ \mathbf{p}_h^{k+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{M}_u & \mathbf{M}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h^n \\ \mathbf{p}_h^n \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A}_p \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h^k \\ \mathbf{p}_h^k \end{bmatrix} = \Delta t \mathbf{F},$$

В «недренированном» случае заметим, что выражение $\mathbf{M}_u \cdot \dot{\mathbf{u}}_h + \mathbf{M}_p \cdot \dot{\mathbf{p}}_h$ должно равняться нулю при вычислении перемещения на верхнем слое по времени, поэтому:

$$\mathbf{p}_h^* = \mathbf{p}_h^n - \mathbf{M}_p^{-1} \cdot \mathbf{M}_u \cdot (\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n)$$

Соответственно приходим к системе:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_u + \Delta t \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{M}_p^{-1} \cdot \mathbf{M}_u & 0 \\ \mathbf{M}_u & \mathbf{M}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h^{n+1} \\ \mathbf{p}_h^{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta t \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{M}_p^{-1} \cdot \mathbf{M}_u & -\Delta t \mathbf{A}_p \\ -\mathbf{M}_u & \Delta t \mathbf{B} - \mathbf{M}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h^n \\ \mathbf{p}_h^n \end{bmatrix} = \Delta t \mathbf{F}.$$

Метод с итерациями будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_u + \Delta t \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{M}_p^{-1} \cdot \mathbf{M}_u & 0 \\ \mathbf{M}_u & \mathbf{M}_p + \Delta t \mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h^{k+1} \\ \mathbf{p}_h^{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mathbf{M}_u & -\mathbf{M}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h^n \\ \mathbf{p}_h^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta t \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{M}_p^{-1} \cdot \mathbf{M}_u & -\Delta t \mathbf{A}_p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h^k \\ \mathbf{p}_h^k \end{bmatrix} = \Delta t \mathbf{F}.$$

4.5 Конечномерные аппроксимации: пороупругость с трещиной (X-FEM/CP)

В рассматриваемой постановке поля перемещения, давления и температуры и/или их производные терпят разрыв на срединной поверхности трещины. Величина этого разрыва априорно неизвестна и определяется решением задачи. В настоящем разделе описан способ построения соответствующих конечномерных пространств V^h и базиса в них для случая, когда срединная поверхность трещины не согласована с расчетной конечноэлементной сеткой, заданной в области Ω_h . Такой подход удобен тем, что не требует в обязательном порядке перестройки расчетной сетки при развитии трещины.

Существует несколько различных способов учесть в конечноэлементных аппроксимациях наличие разрывов. В данной работе будем использовать подход X-FEM (eXtended Finite Elements), предложенный в работах [Belytschko1999, Moës1999]. В настоящее время метод широко используется для аккуратного подсеточного учета трещин и других поверхностей, на которых решение задачи терпит сильный или слабый разрыв (см. обзоры [Fries2010, Fries2011, Karihaloo2003]). Для задач пороупругости метод применялся, в частности, в [Khoei2011, Mesckhe2011a, Mesckhe2011b, Mohammadnejad2012].

Суть метода заключается в том, что к стандартным базисным функциям, описывающим непрерывную компоненту решения, добавляются специальные базисные функции, которые позволяют учесть те или иные особенности решения, в частности, наличие сильного разрыва или асимптотику решения в окрестности фронта трещины. Дополнительные базисные функции являются финитными, то есть имеют компактный носитель. Таким образом, с одной

стороны, матрица системы уравнений дискретной задачи остается разреженной, а с другой — построенное конечномерное пространство позволяет описать все требуемые особенности решения.

В соответствие с методом X-FEM, для конечномерной аппроксимации решения используются:

- стандартные непрерывные аппроксимации гладкой части решения;
- дополнительные базисные функции для аппроксимации разрыва поле перемещений (для конечных элементов, которые срединная поверхность трещины делит на две несвязанные части);
- дополнительные базисные функции для аппроксимации разрыва поля перемещений в окрестности фронта трещины (для конечных элементов, которые содержат фронт трещины, при этом срединная поверхность трещины *не* делит элемент на две несвязанные части);

Пусть, как и ранее, \mathcal{F} — срединная поверхность трещины, \mathcal{I} — множество узлов сетки. Будем считать, что узлу i соответствует базисная функция $N_i(\mathbf{x})$. В соответствие со взаимным расположением трещины и узлов сетки разобьем все множество узлов сетки на три подмножества:

- к множеству \mathcal{I}_t отнесены такие узлы i , для которых носитель соответствующей базисной функции $N_i(\mathbf{x})$ имеет непустое пересечением с фронтом $\partial\mathcal{F}$ трещины:

$$\mathcal{I}_t = \{i \in \mathcal{I} : \text{supp } N_i(\mathbf{x}) \cap \partial\mathcal{F} \neq \emptyset\}.$$

- к множеству \mathcal{I}_c отнесены такие узлы i , для которых носитель соответствующей базисной функции $N_i(\mathbf{x})$ имеет непустое пересечением со срединной поверхностью \mathcal{F} , при этом узел не входит в множество \mathcal{I}_t :

$$\mathcal{I}_c = \{i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_t : \text{supp } N_i(\mathbf{x}) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset\}.$$

- последнее множество дополняет первые два до полного множества узлов:

$$\mathcal{I}_s = \mathcal{I} \setminus (\mathcal{I}_t \cup \mathcal{I}_c).$$

По построению множества $\mathcal{I}_{t,c,s}$ попарно не пересекаются, их объединение равняется полному множеству узлов \mathcal{I} .

Отметим, что существуют более общие способы построения множества \mathcal{I}_t . В частности, известно, что оптимальная скорость сходимости метода X-FEM реализуется в случае, если к множеству узлов \mathcal{I}_t относятся все узлы сетки, удаленные от фронта на расстояние δ , не зависящее от шага сетки $h \rightarrow 0$. Далее, при программной реализации в рамках настоящей работы множество узлов \mathcal{I}_t строится как множество узлов, расстояние от которых до трещины не превышает заданной величины $\delta = Nh$, $N = 3 \div 5$. Такое множество узлов легко построить с использованием оператора проекции ближайшей точки, см. главу 3.

В дальнейшем, для примера, будут рассмотрены аппроксимации поля перемещений. В соответствии с методом X-FEM представление решения (для каждой компоненты поля перемещений) имеет следующий вид:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}_s} N_i(\mathbf{x}) u_i + \sum_{i \in \mathcal{I}_c} N_i^*(\mathbf{x}) [(H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_i))] a_i + \sum_{k=1}^m \sum_{i \in \mathcal{I}_t} N_i^*(\mathbf{x}) [B^k(\mathbf{x}) - B^k(\mathbf{x}_i)] b_i^k, \quad (4.27)$$

где $N_i(\mathbf{x})$ — стандартная базисная функция, соответствующая узлу i ; u_i — соответствующее узловое значения компонента поля перемещений; $N_i^*(\mathbf{x})$ — отнесенные к узлам сетки достаточно гладкие функции, задающие разбиение единицы в окрестности фронта трещины,

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} N_i^*(\mathbf{x}) = 1, \quad \mathcal{I} = \mathcal{I}_s \cup \mathcal{I}_c \cup \mathcal{I}_t,$$

при этом обычно принимают $N_i^*(\mathbf{x}) = N_i(\mathbf{x})$; $B^k(\mathbf{x})$ — некоторый набор функций, описывающий асимптотику поля перемещений в окрестности фронта трещины (см. ниже); $H(\mathbf{x})$ — функция, описывающая разрывный характер решения в окрестности срединной поверхности трещины.

В представлении (4.27) первая сумма является аппроксимацией гладкой компоненты решения, вторая — служит для представления разрывной компоненты решения в окрестности срединной поверхности \mathcal{F} трещины, третья — для представления разрывной и сингулярной компоненты решения в окрестности фронта $\partial\mathcal{F}$ трещины.

В качестве функции $H(\mathbf{x})$ проще всего взять функцию типа функции Хевисайда, принимающую постоянные значения 0 и 1 по разные стороны от срединной поверхности трещины:

$$H(\mathbf{x}) = h(\phi(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1, & \phi(\mathbf{x}) < 0, \\ 0, & \phi(\mathbf{x}) \geq 0, \end{cases}$$

где $h(x)$ — функция Хевисайда скалярного аргумента, $\phi(\mathbf{x})$ — функция знакового расстояния. Последняя задает срединную поверхность \mathcal{F} трещины как

$$\phi(\mathbf{x}) = d_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) = \text{sign dist}(\mathbf{x}, \mathcal{F}) = \pm \min_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}} \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|.$$

Функции $B^k(\mathbf{x})$, $k = \overline{1, m}$ предназначено для описания как асимптотического поведения решения в окрестности фронта трещины, так и его разрывного характера. Для рассматриваемой модели и в системе координат, приведенной на рис. 1.2, они имеют вид:

$$\mathbf{B}(r, \theta) = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right\},$$

где (r, θ) — полярные координаты в окрестности фронта трещины.

Вычисление матрицы жесткости отдельного элемента, содержащего узлы, в которых за-

даны дополнительные базисные функции

$$\Psi_i(\mathbf{x}) = N_i^*(\mathbf{x})(H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_i)), \quad \Psi_i^{(k)} = N_i^*(\mathbf{x})(B^k(\mathbf{x}) - B^k(\mathbf{x}_i)),$$

выполняется аналогично случаю без использования дополнительных базисных функций: в вектор узловых значений конечного элемента добавляются дополнительные степени свободы,

$$\{\mathbf{u}^{(e)}\} = [u_x^{(1)}, u_y^{(1)}, u_z^{(1)}, u_x^{(2)}, u_y^{(2)}, u_z^{(2)}, \dots, u_x^{(8)}, u_y^{(8)}, u_z^{(8)}, a_x^{(1)}, a_y^{(1)}, a_z^{(1)}, \dots, b_{x,1}^1, b_{y,1}^1, b_{z,1}^1, \dots]^T,$$

а в матрицу $[\Phi]$ — соответствующие новым степеням свободы блоки-столбцы размерности 3×3 вида:

$$[\Phi_i] = \text{diag}(\Psi_i, \Psi_i, \Psi_i), \quad [\Phi_i^{(k)}] = \text{diag}(\Psi_i^{(k)}, \Psi_i^{(k)}, \Psi_i^{(k)}).$$

Дальнейшая процедура сборки матрицы жесткости ничем не отличается от рассмотренной в предыдущем разделе.

Описанный выше метод является стандартным вариантом метода X-FEM. На практике он требует вычисления функции знакового расстояния до срединной поверхности трещины, функции расстояния до фронта и углов θ в определении функций $\mathbf{B}(r, \theta)$.

Традиционно для этого используется метод множеств уровня, когда срединная поверхность трещины и ее край описываются парой функций знакового расстояния $\phi = \phi(\mathbf{x})$ и $\psi = \psi(\mathbf{x})$. Этот подход является традиционным, однако является вычислительно дорогим и требует тщательной программной реализации. В частности, в случае подвижной трещины, эволюция функций ϕ и ψ требует решений целого ряда уравнений типа Гамильтона-Якоби для расчета эволюции трещины, (пере)инициализации и ортогонализации функций знакового расстояния. Эти вопросы рассмотрены в работе [Савенков2020с].

В настоящей работе в рамках метода X-FEM используется способ представления поверхности, основанный на применении оператора проектора ближайшей точки. В этом случае расчет эволюции поверхности может быть выполнен сравнительно простыми «геометрическими» алгоритмами. Аналогично, не представляет труда расчет необходимых параметров типа расстояния от произвольной точки расчетной области до ее поверхности и/или ее края. Соответствующие алгоритмы детально описаны в главе 3, которая, в этом смысле, является неотъемлемой частью и настоящей главы.

Поэтому ниже рассмотрим вопросы, специфичные для метода X-FEM, но не специфичные для метода проекции ближайшей точки в целом, а именно, способ задания множеств \mathcal{I}_c и \mathcal{I}_t .

Пусть задача решается в пространственной области Ω , в которой введена триангуляция \mathcal{T} — ее правильное разбиение на тетраэдры. Далее, в зависимости от ситуации, будем писать $\mathbf{x}_i \in \mathcal{T}$ или $i \in \mathcal{T}$ если \mathbf{x}_i — узел сетки, $\omega_k \in \mathcal{T}_h$ — тетраэдр (конечный элемент) сетки. В том случае, если узел \mathbf{x}_i сетки инцидентен тетраэдру ω_k , будем писать $\mathbf{x}_i \in \omega_k$.

Пусть далее $\Omega_{\mathbb{P}}^h \subset \Omega^h$ — сеточная область определения сеточного проектора \mathbb{P}^h ближайшей точки, $\Omega_{\mathbb{P}, \partial \mathcal{F}}^h$ — сеточная область определения проектора $\mathbb{P}_{\partial \mathcal{F}}^h$ проектора ближайшей точки на фронт трещины. Здесь и далее под сеточной областью определения понимается множество конечных элементов сетки и инцидентных им узлов, — а не только множество узлов, в которых известно значение соответствующего проектора. Без ограничения общности будем считать, что $\Omega_{\mathbb{P}, \partial \mathcal{F}}^h \subset \Omega_{\mathbb{P}}^h$ как сеточные области.

По построению, проекторы P и $P_{\mathcal{F}}$ позволяют определить в узлах их областей определения расстояние от узла до поверхности и/или ее края,

$$d_i = \|\mathbf{x}_i - P\mathbf{x}_i\|, \quad d_{\mathcal{F},i} = \|\mathbf{x}_i - P_{\mathcal{F}}\mathbf{x}_i\|.$$

Сначала рассмотрим процедуру задания множества узлов \mathcal{I}_t . По определению, оно должно включать в себя множество узлов, таких, что носители отнесенных к ним базисных функций имеют непустое пересечение с фронтом трещины. Рассмотрим сеточную область \mathcal{T}_t , которая состоит из тетраэдров сетки \mathcal{T}_h , все узлы которых расположены на расстоянии от фронта трещины, не превышающее заданное

$$\mathcal{T}_t = \{\omega \in \mathcal{T}_h : d_{\mathcal{F},i} \leq \Delta\},$$

где Δ — параметр. Очевидным ограничением на его значение является неравенство

$$\min_{\mathbf{x}_i \in \Omega_{P,\partial\mathcal{F}}; d_i > 0} d_{\mathcal{F},i} \leq \Delta \leq \max_{\mathbf{x}_i \in \Omega_{P,\partial\mathcal{F}}} d_{\mathcal{F},i}.$$

На практике значение параметра Δ задается как $\Delta = 3 \div 5h$, где h — характерный локальный шаг сетки.

Теперь множество узлов \mathcal{I}_t может быть определено как множество узлов сеточной области \mathcal{T}_t .

Рассмотрим теперь процедуру определения узлов множества \mathcal{I}_c . В него входят узлы, которые:

- не входят в множество \mathcal{I}_c ;
- носитель базисной функции, отнесенной к рассматриваемому узлу, имеет непустое пересечение со срединной поверхностью трещины.

Очевидно, что в это множество входят узлы, которые непосредственно лежат на поверхности, то есть такие, что

$$d_i = \|\mathbf{x}_i - P\mathbf{x}_i\| \leq \epsilon, \tag{4.28}$$

где $0 \leq \epsilon \ll 1$ — малый параметр точности. Теоретически $\epsilon = 0$, на практике его значение выбирается как $\epsilon = \delta h$, где h — минимальное расстояние от узла \mathbf{x}_i до других узлов, инцидентных ему.

Полученное множество узлов не исчерпывает все множество \mathcal{I}_c — в него не входят узлы сетки, которые не лежат на срединной поверхности трещины, но являются узлами тетраэдров, которые имеют с ней непустое пересечение.

которые пересекаются срединной поверхностью, но не лежат на ней. Для определения этих узлов поступим следующим образом.

Пусть \mathbf{x}_i — узел сетки, $\mathcal{S}(\mathbf{x}_i)$ — множество узлов, инцидентных ему. Носитель базисной функции N_i , отнесенной к узлу \mathbf{x}_i имеет непустое пересечение с трещиной в том случае, если непустое пересечение с ней имеет по крайней мере одно из ребер сетки, инцидентное узлу \mathbf{x}_i . Пусть $e_i = \{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\}$, $\mathbf{x}_j \in \mathcal{S}(\mathbf{x}_i)$ — одно из ребер, инцидентных узлу \mathbf{x}_i . По построению ни узел \mathbf{x}_i , ни узел \mathbf{x}_j не лежат на поверхности. В этом случае они:

- либо лежат с одной стороны поверхности, и тогда вектора их проекций на трещину ориентированы в одну сторону относительно нормали к поверхности,

$$\mathbf{P}\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{P}\mathbf{x}_j > \epsilon;$$

- либо лежат по разные стороны поверхности, и тогда вектора их проекций на трещину ориентированы в разные стороны относительно нормали к поверхности,

$$\mathbf{P}\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{P}\mathbf{x}_j < -\epsilon.$$

Случай $\mathbf{P}\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{P}\mathbf{x}_j = 0$ соответствует ситуации, когда один из векторов $\mathbf{P}\mathbf{x}_{i,j}$ равен нулю — но это невозможно по построению, либо когда они ортогональны. Последний случай реализуется только в том случае, когда радиус кривизны поверхности имеет значение порядка шага сетки, что невозможно в силу ограничений на геометрию трещины — предполагается, что ее радиус кривизны существенно больше шага сетки (другими словами, на пространственном масштабе порядка шага сетки трещина является плоской).

Отметим, что значения дополнительных базисных функций также могут быть рассчитаны в терминах непосредственно проекторов \mathbf{P} и $\mathbf{P}_{\mathcal{F}}$. Необходимый для этого способ расчета локальных цилиндрических координат в окрестности фронта трещины приведен в главе 3. Функция $H(\mathbf{x})$ может быть вычислена как

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} \text{sign} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{P}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}\|} \cdot \mathbf{N}, & \text{при } \|\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}\| > \epsilon, \\ \frac{1}{2}, & \text{при } \|\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}\| \leq \epsilon \end{cases},$$

где \mathbf{N} — единичный вектор, задающий ориентацию трещины.

4.6 Примеры расчетов: пороупругость без трещины

В настоящем разделе приводятся результаты моделирования двух лабораторных экспериментов, проведенных в Институте динамики геосфер РАН. Общая цель серии проводимых исследований: с одной стороны, верификация созданной программы на модельных задачах в целях ее дальнейшего использования для более сложных постановок, с другой — уточнение методики проведения лабораторных экспериментов и определение требуемых для их описания методов математического моделирования. Представленные ниже результаты по анализу фильтрационных течений в пороупругих средах являются первым шагом к реализации указанной цели, с их помощью была проведена «калибровка» вычислительной модели под лабораторную установку и определены эффективные фильтрационные параметры модели.

Валидационные расчеты ряда классических тестов (задача Терцаги, Манделя и ряд других) приведены в приложении А.

Описание лабораторной установки. Лабораторные эксперименты проводились на установке, разработанной в Институте динамики геосфер Российской академии наук [Trimonova2017, Trimonova2018]. Ее особенностью является возможность создания в об-



Рис. 4.2. Схема и общий вид экспериментальной установки.

разце трехмерного напряженно-деформированного состояния, необходимого для проведения исследований по изучению процессов, связанных с гидроразрывом пласта, неустойчивостью развития трещин на нагнетательных скважинах, взаимодействия нескольких трещин между собой и так далее. Ниже будут описаны особенности установки, важные с точки зрения моделирования протекающих в ней процессов.

Конструктивно установка состоит из верхней и нижней металлических крышек, в кольцевом углублении которых фиксируется боковина, см. рис. 4.2. Между собой крышки скрепляются шестнадцатью шпильками, которые на рисунке не показаны. Основные детали установки изготовлены из нержавеющей стали. Перед началом эксперимента в установку заливается материал, который после затвердевания образует модельную среду (образец).

Верхняя крышка отделена от образца резиновой мембраной. По периметру мембраны расположены резиновое кольцо и опорный хомут, которые создают герметичное пространство между мембраной и крышкой. Это пространство заполняется водой под давлением, что позволяет моделировать литостатическое давление в модели коллектора. Давление над мембраной поддерживается при помощи разделительного цилиндра, верхняя часть которого заполнена сжатым азотом под необходимым давлением, а нижняя — водой. Горизонтальное нагружение модели обеспечивается с помощью герметичных камер, расположенных на поверхности боковой стенки. Боковое нагружение осуществляется за счет закачки газа или жидкости в попарно противоположные камеры. В обеих крышках и в боковине просверлены сквозные технологические отверстия диаметром 6 мм, оснащенные с внешней стороны приваренными резьбовыми штуцерами. Схема расположения отверстий показана на рисунке 4.3.

В представленных ниже экспериментах модельная среда была изготовлена из смеси гипса с портландцементом и имела следующие свойства: $\nu_{\text{dyn}} = 0.25$ — динамический коэффициент Пуассона, $\nu_{\text{st}} = 0.2$ — статический коэффициент Пуассона, $E_{\text{dyn}} = 7.5 \times 10^9$ [Па] — динамический модуль Юнга, $E_{\text{st}} = 3.7 \times 10^9$ [Па] — статический модуль Юнга, $K = 2.4$ [мД] — коэффициент абсолютной проницаемости пласта.

Описание экспериментов по определению данных прочностных и фильтрационных харак-

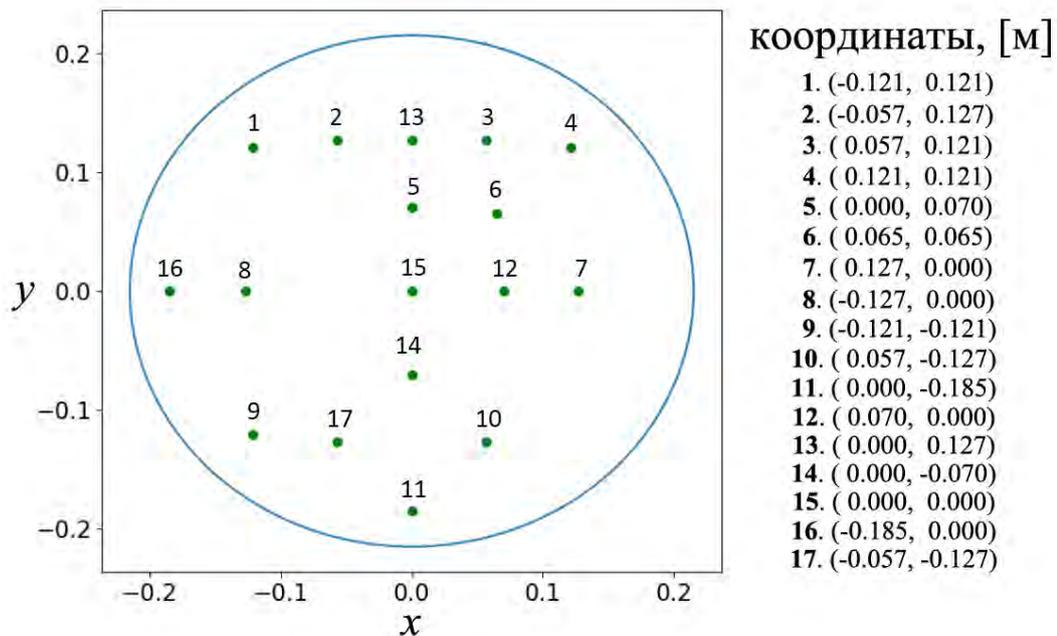


Рис. 4.3. Схема расположения отверстий на нижней крышке установки.

теристик образца можно найти в работах [Trimonova2017, Trimonova2018].

Вычислительный эксперимент. Для численного моделирования работы экспериментальной установки необходимо задавать ряд параметров, например, модуль Био. Для их определения нужны дополнительные лабораторные эксперименты, требующие специального оборудования. В настоящей работе использовались значения параметров, взятых из работы [Constantinides2004], где применялись похожие материалы и смеси. Очевидно, что при таком подходе необходима некоторая «калибровка» параметров математической модели для правильного описания работы экспериментальной установки.

С этой целью использовались результаты двух похожих лабораторных экспериментов по определению кривых восстановления и падения давления в зависимости от времени. В ходе экспериментов в скважины, после насыщения образца, закачивался раствор гипса для создания в нем стационарного поля порового давления. После этого давление в нагнетательной скважине сбрасывалось, она «запечатывалась», а добывающая скважина продолжала свою работу. Соответственно, значение давления, регистрируемого в датчиках, сначала возрастало, а потом убывало. Временная динамика этого изменения фиксировалась в ходе эксперимента.

В первом эксперименте скважины устанавливались в отверстия с номерами 3 и 17, во втором – 4 и 9 (см.рис. 4.3), датчики давления были помещены в отверстия 1, 2, 4–7, 10–16 (измеренное давление соответствовало давлению на расстоянии 5 мм от дна образца). После монтажа скважин и датчиков в установку заливался гипс, который высыхивался в течение 2-3 дней. Далее сверху к образцу прикладывалось давление P_{top} , имитирующее литостатическое давление. При этом в боковых камерах давление не задавалось. После этого в одну из скважин закачивался раствор гипса с постоянным давлением P_{inj} . Другая скважина была соединена с атмосферой. В соответствии с планом эксперимента насыщение образца

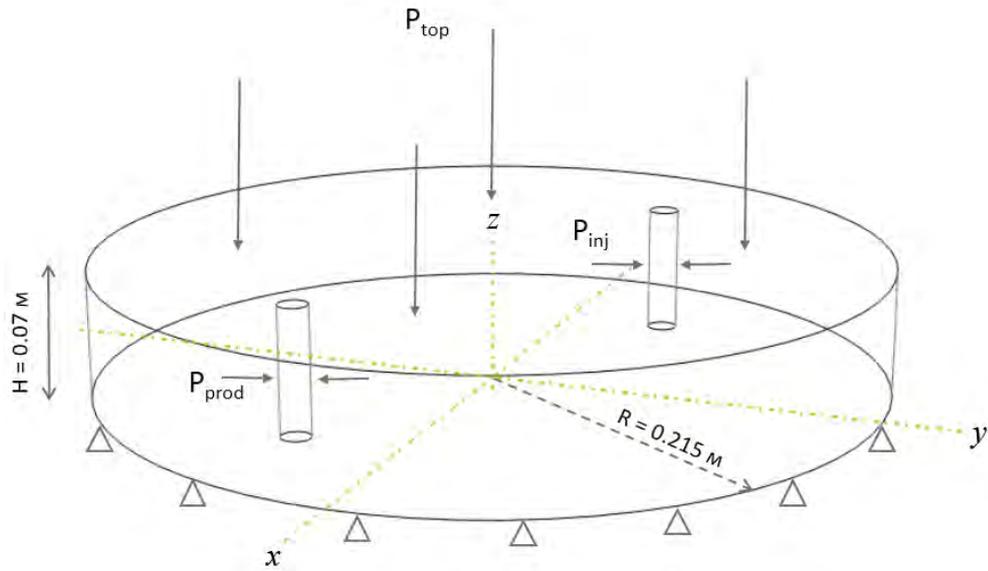


Рис. 4.4. Схематический вид образца с приложенными нагрузками.

продолжалось до установления в нем стационарного режима. Установление определялось по стабилизации расхода в добывающей скважине, после чего подача раствора прекращалась. Значения давления в датчиках записывались каждые 0.01 секунды в течение всего эксперимента.

Для численного решения системы уравнений Био необходимо задание граничных условий, соответствующих эксперименту. Схематический вид образца с прикладываемыми нагрузками представлен на рисунке 4.4. Для упругой части задачи граничные условия ставились следующим образом. На верхней поверхности образца задавалась вертикальная нагрузка: вектор приложенной силы равен нормальной компоненте $\mathbf{f} = \mathbf{f}_n = P_{top}\mathbf{n}$. Нижняя граница образца была жестко зафиксирована по вертикали, поэтому на ней ставилось граничное условие на перемещение по оси Oz : $u_z = 0$. Чтобы исключить поворот образца вокруг своей оси и сдвига образца в плоскости Oxy на боковой поверхности образца ставилось граничное условие в виде нулевого касательного перемещения в плоскости Oxy : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\tau = 0$, где $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $\mathbf{e}_\tau = (-n_y, n_x, 0)$, то есть, $-n_y u_x + n_x u_y = 0$. На поверхности скважин задаются нормальные напряжения: для нагнетательной $T_n = P_{inj}$, для добывающей $T_n = P_{prod}$. После остановки закачки на втором этапе эксперимента напряжение на боковой поверхности добывающей скважины задавалось исходя из локального значения давления в прилегающей поровой среде.

Для фильтрационной части системы на верхней, нижней, боковой поверхностях образца ставились граничные условия непротекания: $\partial P / \partial \mathbf{n} = 0$. На первой стадии расчета на скважинах задавались постоянные давления: в нагнетательную закачивался раствор под давлением P_{inj} , а добывающая скважина была связана с атмосферой, $P_{prod} = 1$ атм. После достижения условия переключения режима, закачка раствора в нагнетательную скважину прекращалась и на ней задавалось условие непротекания.

Эксперимент 1. При проведении первого эксперимента задавались следующие параметры: $P_{prod} = 1$ атм, $P_{inj} = 14.5$ атм, $P_{top} = 20$ атм, 1 атм = 101325 Па. Нагнетательная скважина радиусом 7.5 мм располагалась в отверстии 3, добывающая — в отверстии 17.

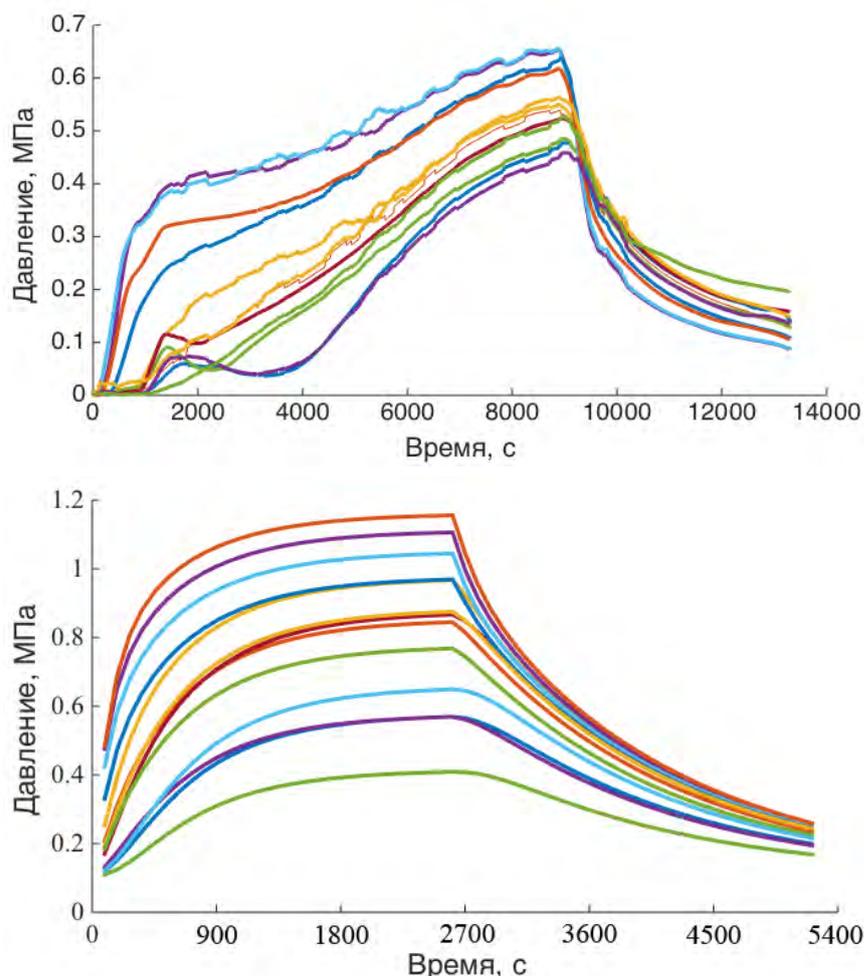


Рис. 4.5. Первичное сравнение кривых падения давления в эксперименте и моделировании. Вверху: экспериментальные кривые. Внизу: данные моделирования.

Согласно общим соображениям следует, что давление в датчиках должно сначала увеличиваться, а потом плавно спадать. При анализе результатов оказалось, что начальный процесс поддержания постоянного давления в скважине был нестабилен. Поэтому для сравнения с численным решением использовалась только вторая половина эксперимента, то есть, процесс спада давления. Также было замечено, что в лабораторном эксперименте не было достигнуто стационарное состояние, поэтому отключение нагнетательной скважины в численном расчете производилось в момент достижения известного порогового значения давления на центральном датчике.

Первое сравнение результатов численного моделирования и экспериментальных данных показало их существенное несоответствие в темпе падения давления, см. рис. 4.5. Это произошло по нескольким причинам. Во-первых, для расчетов использовались значения параметров Био, взятые из работы [Constantinides2004], которые соответствовали фильтрации насыщенного раствора через цементную пасту. Для данного эксперимента могут обеспечить лишь качественное совпадение результатов. Во-вторых, как показали дополнительные исследования, в образце после его затвердевания присутствует остаточный воздух, который препятствует процессу фильтрации. Для учета этого эффекта параметры смеси «пороупругий скелет/воздух» корректировались согласно методу Хашина–Штрикмана [Hashin1963],

позволяющего строго определить верхнюю и нижнюю оценки упругих для двухфазного материала. В частности, для модуля сжатия составной среды:

$$K_{HS}^{\pm} = K_2 + \frac{\alpha_{HS}}{(K_1 - K_2)^{-1} + (1 - \alpha_{HS})(K_2 + 4/3\mu_2)^{-1}}, \quad (4.29)$$

где $K_{1,2}$ и $\mu_{1,2}$ – модули сжатия и сдвига составляющих материалов, α_{HS} – удельное содержание одной из составляющих. Здесь верхняя граница рассчитывается, когда $K_2 > K_1$, нижняя – наоборот.

В настоящей работе использовалась следующая последовательность действий при вычислении эффективных свойств среды:

1. Определение удельного содержания воздуха в смеси «скелет+воздух» по известной пористости образца ϕ и доли воздуха α в поровом пространстве:

$$\alpha_{HS} = \frac{\alpha\phi}{(1 - \phi) + \alpha\phi};$$

2. Вычисление сжимаемости скелета по известному коэффициенту Био b и объемному модулю сжатия образца K :

$$K_s = \frac{K}{1 - b};$$

3. Расчет верхней и нижней оценки сжимаемости $K_{s,air}^{\pm}$ смеси «скелет+воздух» по формуле Хашина–Штрикмана (4.29);
4. Расчет верхней и нижней оценки модуля Био M^{\pm} смеси «скелет+воздух» при фильтрации гипсового раствора со сжимаемостью K_f :

$$\frac{1}{M^{\pm}} = \frac{b - \phi}{K_{s,air}^{\pm}} + \frac{\phi}{K_f};$$

5. Определение объемной доли раствора в насыщенной среде «скелет+воздух/раствор» по известной пористости образца и по известной доле воздуха в поровом пространстве;
6. Расчет верхней и нижней оценки сжимаемости материала «скелет+воздух/раствор» по формуле Хашина–Штрикмана (4.29);
7. Вычисление эффективных упругих параметров среды (модуля Юнга, коэффициента Пуассона) по эффективному значению сжимаемости и исходному значению модуля сдвига пороупругой среды, на который не влияет наличие воздуха.

Найденные оценки для сжимаемости материала «скелет+воздух» составили 10^6 и 10^{10} Па для нижней и верхней границ, соответственно. Аналогичные оценки справедливы и для модуля Био, изменение которого является определяющим для фильтрационно-емкостных свойств среды. В частности, при значении модуля Био порядка $10^7 - 10^8$ Па скорости фильтрации, полученные в лабораторном эксперименте и численном моделировании, обеспечивают приемлемое совпадение кривых давлений, см. рисунок 4.6 (нумерация слева направо). При этом варьирование упругих модулей, как и ожидалось, не оказало значимого эффекта.

Таким образом, проведенное моделирование продемонстрировало возможное существенное влияние воздуха, задержанного в образце, на процесс фильтрации. Для более точного анализа было решено провести еще один лабораторный эксперимент с подтвержденным выходом на стационарный режим в целях исключения ошибки, связанной с неопределенностью выполнения критерия смены режима работы нагнетательной скважины.

Эксперимент 2. Второй эксперимент в целом повторяет первый. Существенные отличия состоят в изменении расположения действующих скважин (нагнетательная была помещена в отверстие 9, а добывающая — в 4), изменении значения давления $P_{inj} = 4.2$ атм и величины вертикальной нагрузки $P_{top} = 12$ атм.

Граничные условия задавались аналогично первому эксперименту с необходимыми корректировками на изменившиеся входные данные. Так, в частности, при анализе результатов лабораторного эксперимента было замечено, что уменьшение давления происходит не до 1 атм, как этого можно было ожидать из условий проведения эксперимента, а до 1.5 атм. Это привело к соответствующему изменению граничного условия для добывающей скважины. Переключение режима работы нагнетательной скважины осуществлялось по достижении стационарного характера течения в образце.

Результаты сопоставления кривых давления, полученных во втором эксперименте и при моделировании, представлены для каждого из датчиков на рис. 4.7 (нумерация слева направо). На части экспериментальных данных присутствует зашумление, которое имеет ярко выраженную границу, приемлемо совпадающую с численными результатами. Так же заметно некоторое несоответствие в скорости изменения давления, наблюдаемое на начальном этапе моделирования. Скорее всего, его причиной является наличие в образце остаточного воздуха, который в начале эксперимента вытесняется в течении конечного времени под действием закачиваемого раствора. Эта гипотеза основана на наблюдении, что в ходе эксперимента жидкость начала вытекать не сразу после начала закачки жидкости в нагнетательную скважину, что говорит о недонасыщении образца. Другой причиной может являться проявление на начальном этапе вытеснения вязкоупругих и пластических свойств гипса.

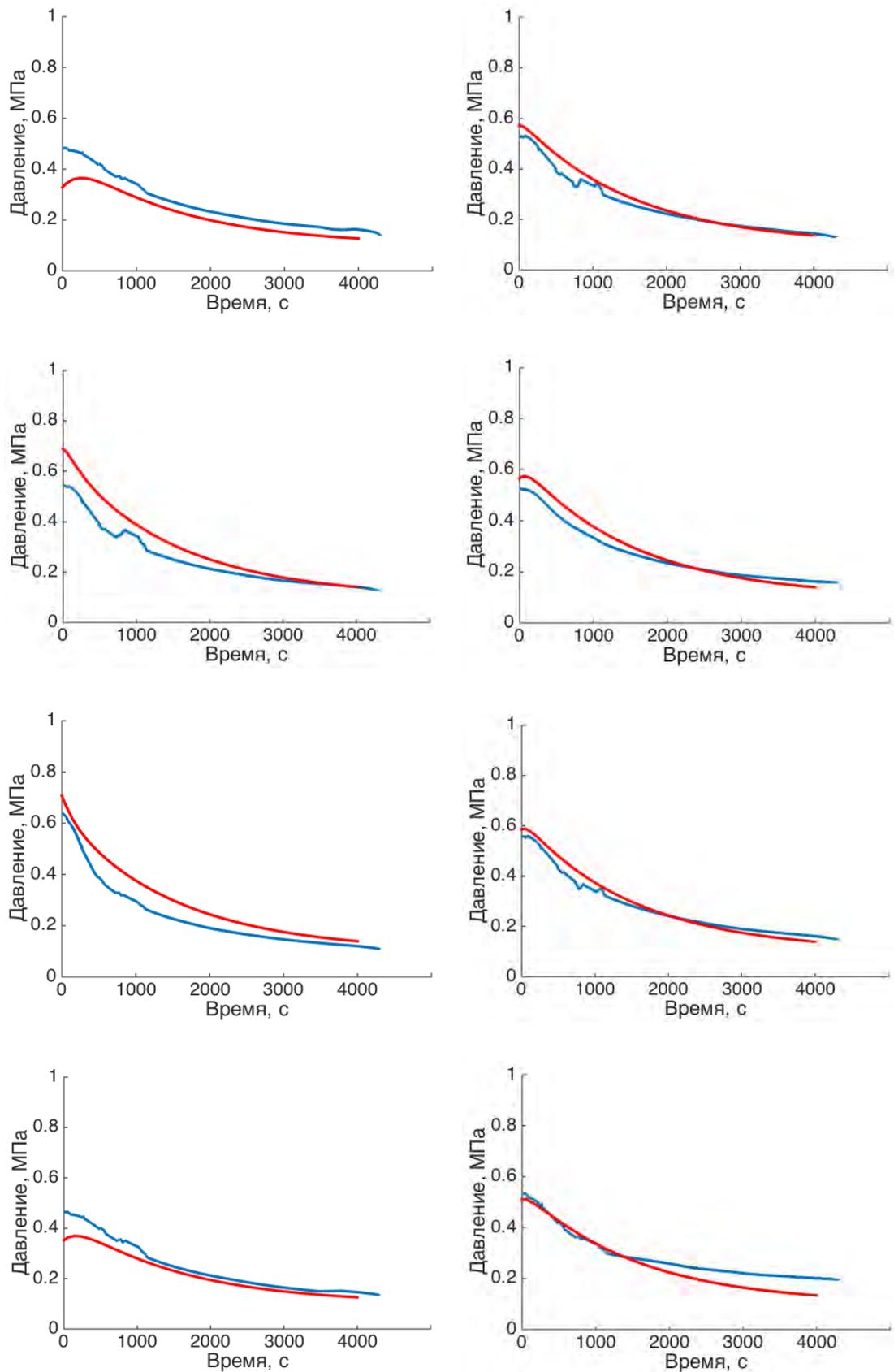


Рис. 4.6. Сопоставление кривых давлений из эксперимента (синие) и расчета (красные) в датчиках № 12, 2, 13, 5, 4, 14, 15, 16 (слева направо и сверху вниз).

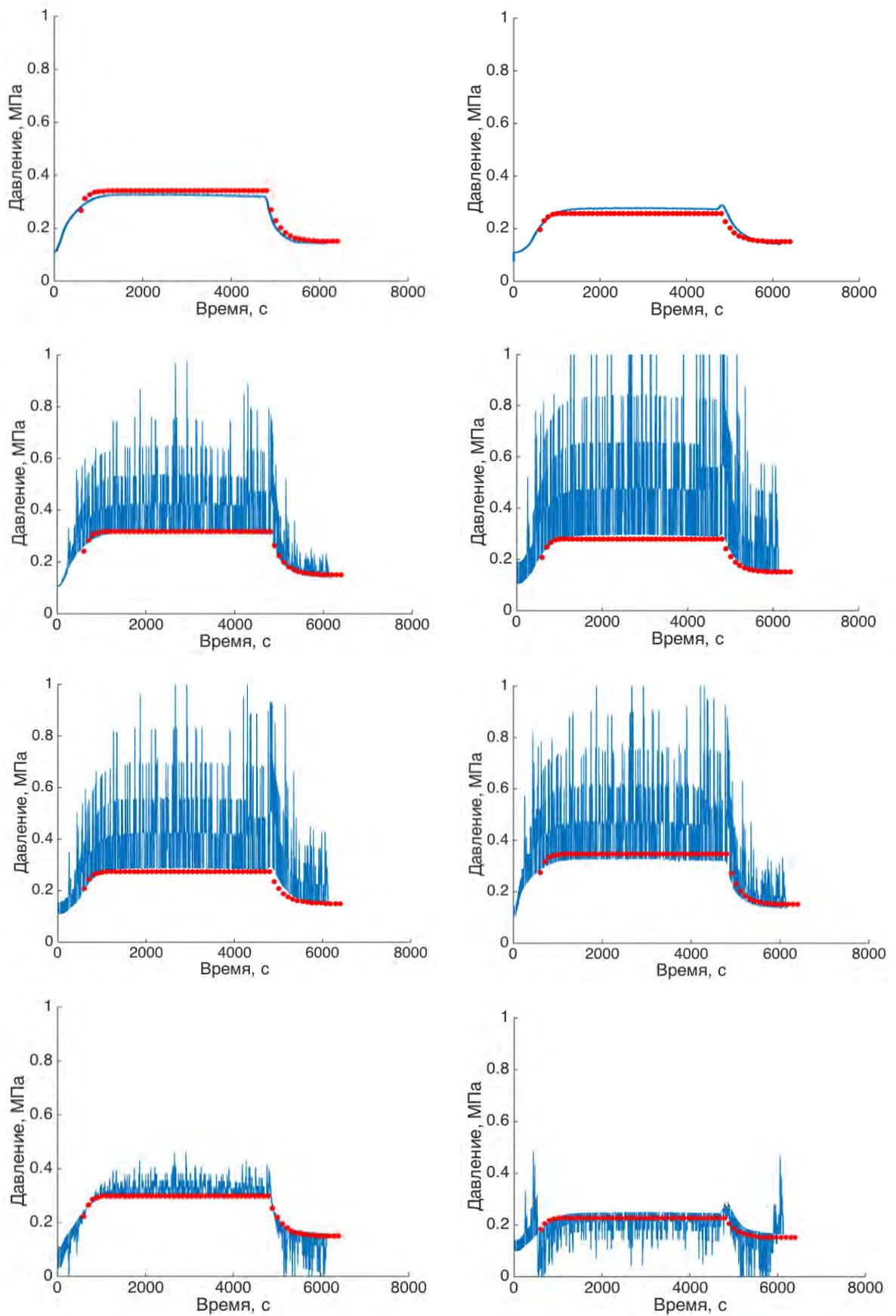


Рис. 4.7. Сопоставление кривых давлений из эксперимента (синие) и расчета (красные) в датчиках № 8, 7, 10, 2, 5, 11, 1, 3 (слева направо и сверху вниз).

4.7 Примеры расчетов: пороупругость с трещиной

В настоящем разделе приведена серия расчетов, в более сложных, чем рассмотренные выше постановки.

Всюду ниже в настоящем разделе считается, что расчетная область представляет собой параллелепипед $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$. Область и расчетная в ней сетка строились в пакете Salome. В том случае, если в области присутствуют зоны с отличающимися свойствами, сетка строилась согласованно с границами раздела зон.

В начальный момент времени трещина во всех расчетах представляет собой круглый диск радиуса r_f с центром в точке c_f и вектором нормали к срединной поверхности трещины \mathbf{n}_f .

Постановка задачи предполагает задание граничных условий на границе расчетной области. В зависимости от постановки задачи задаются граничные условия Дирихле или Неймана. Граничные условия Дирихле для задачи фильтрации — это заданные значений давления на границе области. Граничные условия Неймана для задачи фильтрации — это задание значений нормальной компоненты вектора плотности потока массы. Граничные условия Дирихле для задачи упругости — заданные значения вектора перемещений на границах. Граничные условия Неймана для задачи упругости — заданные значения вектора нормальных к границе напряжений. Таким образом, при описании каждой задачи будут использоваться следующие обозначения для граничных условий:

- p_b — давление — граничное условие Дирихле для задачи фильтрации;
- q_b — расход — граничное условие Неймана для задачи фильтрации;
- u_b — перемещение — граничное условие Дирихле для задачи упругости;
- T_b — напряжение — граничное условие Неймана для задачи упругости.

Если в постановке задачи не оговорено обратное, то в расчете используются следующие значения параметров модели, геометрических, направления действия прикладываемых нагрузок, ориентация трещины:

- свойства среды: $\varphi = 0.19$ — пористость, $k = 2.4 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2$ — проницаемость, $E = 3.7 \cdot 10^9 \text{ Па}$ — модуль Юнга, $\nu = 0.2$ — коэффициент Пуассона, $K_s = 10^{-9} \text{ 1/Па}$ — сжимаемость скелета, $K_f = 10^{-6} \text{ 1/Па}$ — сжимаемость флюида, $M = 2.5 \cdot 10^8 \text{ Па}$ — модуль Био, $\mu = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ — вязкость жидкости, $\alpha = 0.7$ — коэффициент Био.

Условия расчета, описанные выше, будут далее называться *условиями по умолчанию*. Далее, если не оговорено обратное, используются именно эти значения параметров. Если это необходимо, делаются уточнения.

4.7.1 Задача теории упругости со стационарной трещиной

В настоящем разделе в качестве исследуемой задачи для демонстрации работоспособности и эффективности предложенной расчетной методики рассматривается задача о стационарной круговой трещине («penny shaped») [Fabrikant1989, Bower2009, Kachanov2003], возникающей в однородной упругой среде при ее одноосном нагружении на бесконечности. Схематично она

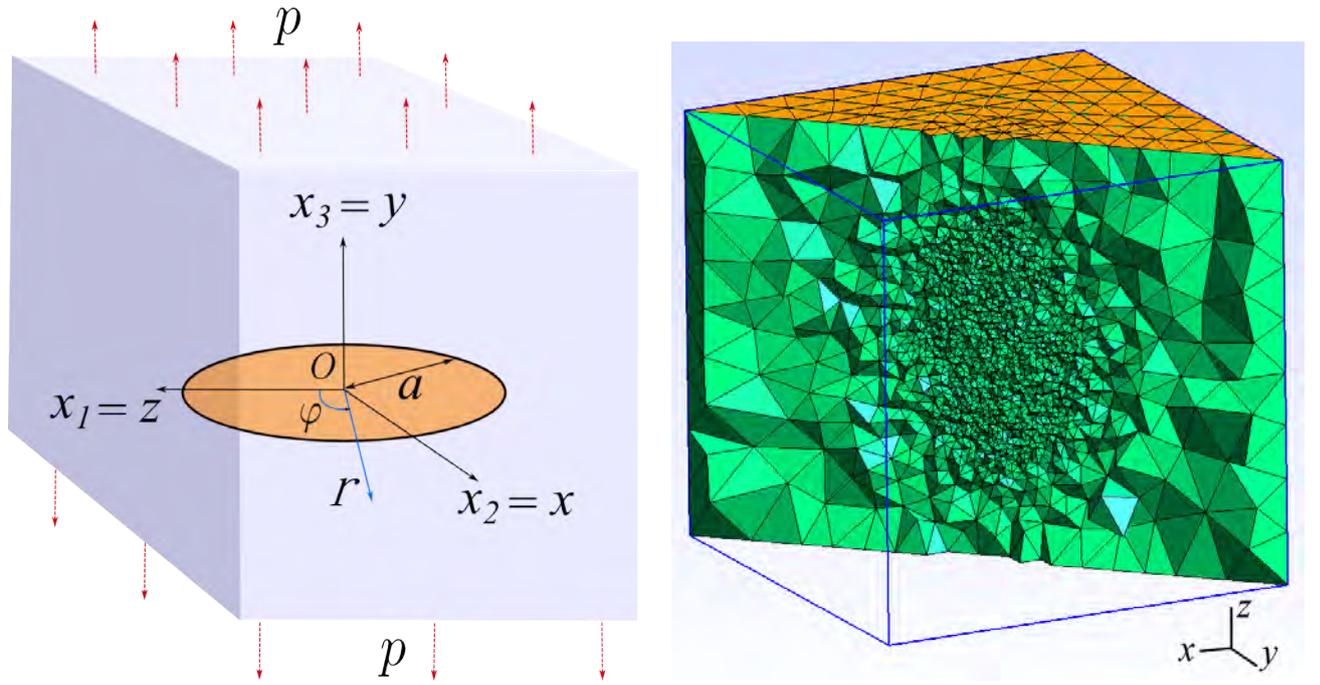


Рис. 4.8. Слева: схематичный вид задачи о круговой трещине. Справа: фрагмент расчетной сетки № 3.

представлена на рис. 4.8, где p обозначает величину нагружения, a – радиус трещины, нагружение осуществляется вдоль оси Oy . Аналитическое решение данной задачи записывается в виде [Bower2009]:

$$u_r(r, y) = -\frac{\nu pr}{E} + \frac{(1 + \nu) pr}{\pi E} \left[(1 - 2\nu) \left(\frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2} - \arcsin \frac{a}{l_2} \right) + \frac{2a^2|y|(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2^2(l_2^2 - l_1^2)} \right], \quad (4.30)$$

$$u_y(r, y) = \frac{py}{E} + \frac{2(1 + \nu)p}{\pi E} \left[2(1 - \nu) \left(\frac{y}{|y|}(a^2 - l_1^2)^{1/2} - y \arcsin \frac{a}{l_2} \right) + y \arcsin \frac{a}{l_2} - \frac{ay(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2} \right], \quad (4.31)$$

где $r = \sqrt{x^2 + z^2}$, $u_x = u_r \sin \varphi$, $u_z = u_r \cos \varphi$ и

$$2l_{1,2} = \sqrt{(a+r)^2 + y^2} \mp \sqrt{(a-r)^2 + y^2}.$$

Расчетная область представляет собой куб со стороной $L = 5$ м, в центре которого в плоскости $y = L/2$ расположена срединная поверхность трещины, имеющая форму диска радиусом $a = 1$ м, величина нагружения составляет $p = 300$ атм. В качестве параметров упругой среды использовались следующие значения: $\nu = 0.25$ – коэффициент Пуассона, $E = 1.5 \times 10^{10}$ [Н/м²] – модуль Юнга.

Расчеты проводились на трех адаптивных тетраэдральных сетках, имеющих сгущение в окрестности срединной поверхности трещины и отличающихся степенью измельчения ячеек.

Их параметры представлены в таблице. 4.1. Часть элементов расчетной сетки № 3, обладающей наилучшей степенью измельчения, представлена слева на рисунке 4.8.

Номер сетки	число узлов	число элементов
1	7983	43523
2	17932	104981
3	27410	162486

Таблица 4.1. Параметры расчетных сеток.

В предложенном комплексе алгоритмов трещина описывается с помощью оператора проекции ближайшей точки. В случае конечномерной задачи этот проектор задается в узлах расчетной конечноэлементной сетки и сопоставляет каждому узлы сетки его проекцию на срединную поверхность трещины. В силу того, что указанный проектор является гладким отображением лишь локально, в небольшой окрестности срединной поверхности трещины, в реализации имеет смысл определять его только для множества узлов тетраэдров триангуляции, образующих первые несколько слоев «вокруг» трещины. Эти множества показаны на рисунке 4.9. На рис. 4.10 (слева) дополнительно приведена визуализация действия проектора ближайшей точки на фронт трещины. Указанные структуры данных являются одними из основных в используемом подходе: они используются при построении аппроксимаций методом X-FEM, при расчете течения в трещине и при расчете эволюции трещины. На рисунке 4.10 (справа) показаны узлы и конечные элементы, используемые для построения базисных функций в использованном в комплексе алгоритмов методе X-FEM. Синим цветом показаны конечные элементы, все узлы которых имеют дополнительные базисные функции, соответствующие разрезу. Непосредственно такие узлы показаны зелеными маркерами. Конечные элементы, которые имеют узлы, имеющие базисные функции для края, обозначены коричневым цветом. Непосредственно узлы показаны красными маркерами.

На рисунке 4.11 показаны относительные ошибки численного решения в сравнении с точным (с использованием для оценки сеточной нормы в пространстве l_2) для соответствующих компонент поля перемещений на всех трех сетках. Четко виден аналог сеточной сходимости, когда при уменьшении характерного линейного размера тетраэдров в окрестности срединной поверхности трещины, ошибка убывает.

Наконец, на рисунке 4.12 показаны распределение поля перемещений и компонент полного тензора напряжений, получившиеся в расчетах на сетке № 3. На всех приведенных рисунках не показаны конечные элементы, которые имеют непустое пересечение с трещиной.

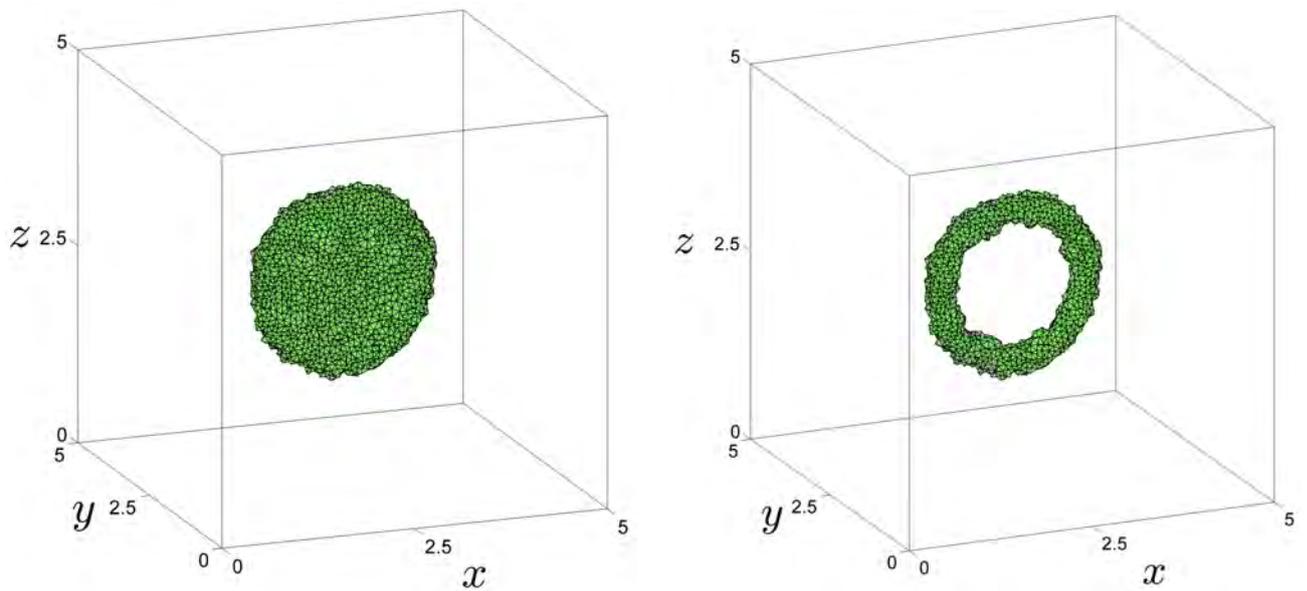


Рис. 4.9. Область в окрестности срединной поверхности трещины, в которой определен проектор ближайшей точки (слева — на \mathcal{F} , справа — на $\partial\mathcal{F}$).

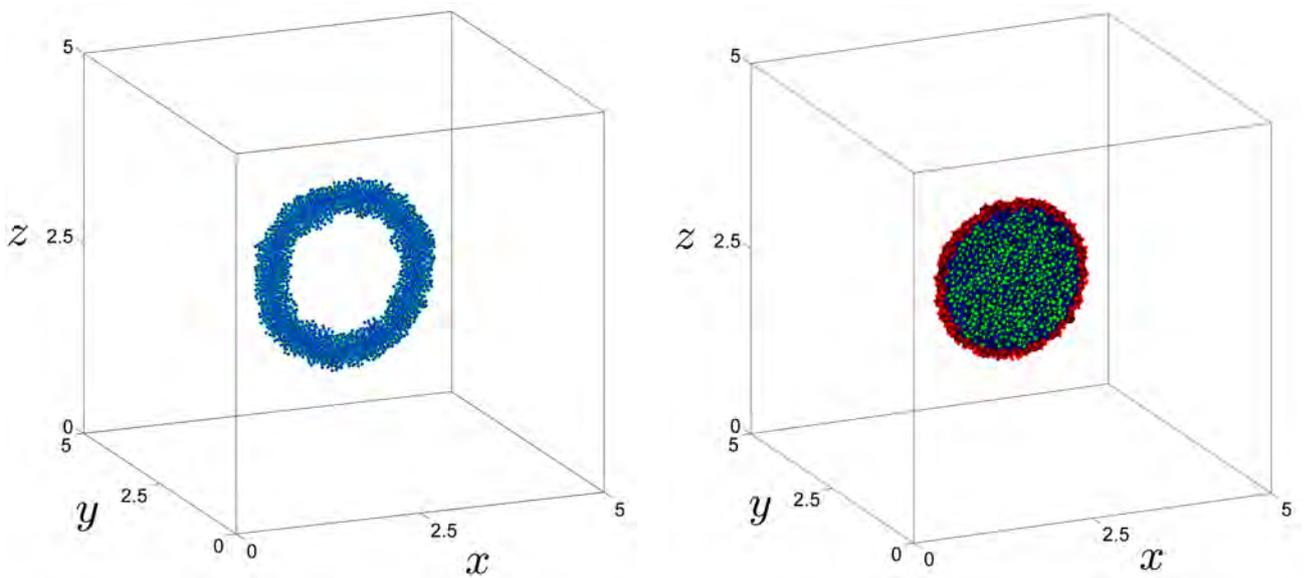


Рис. 4.10. Слева: визуализация проектора ближайшей точки на фронт трещины. Справа: Область в окрестности фронта трещины с обозначение выделенных узлов и конечных элементов метода X-FEM.

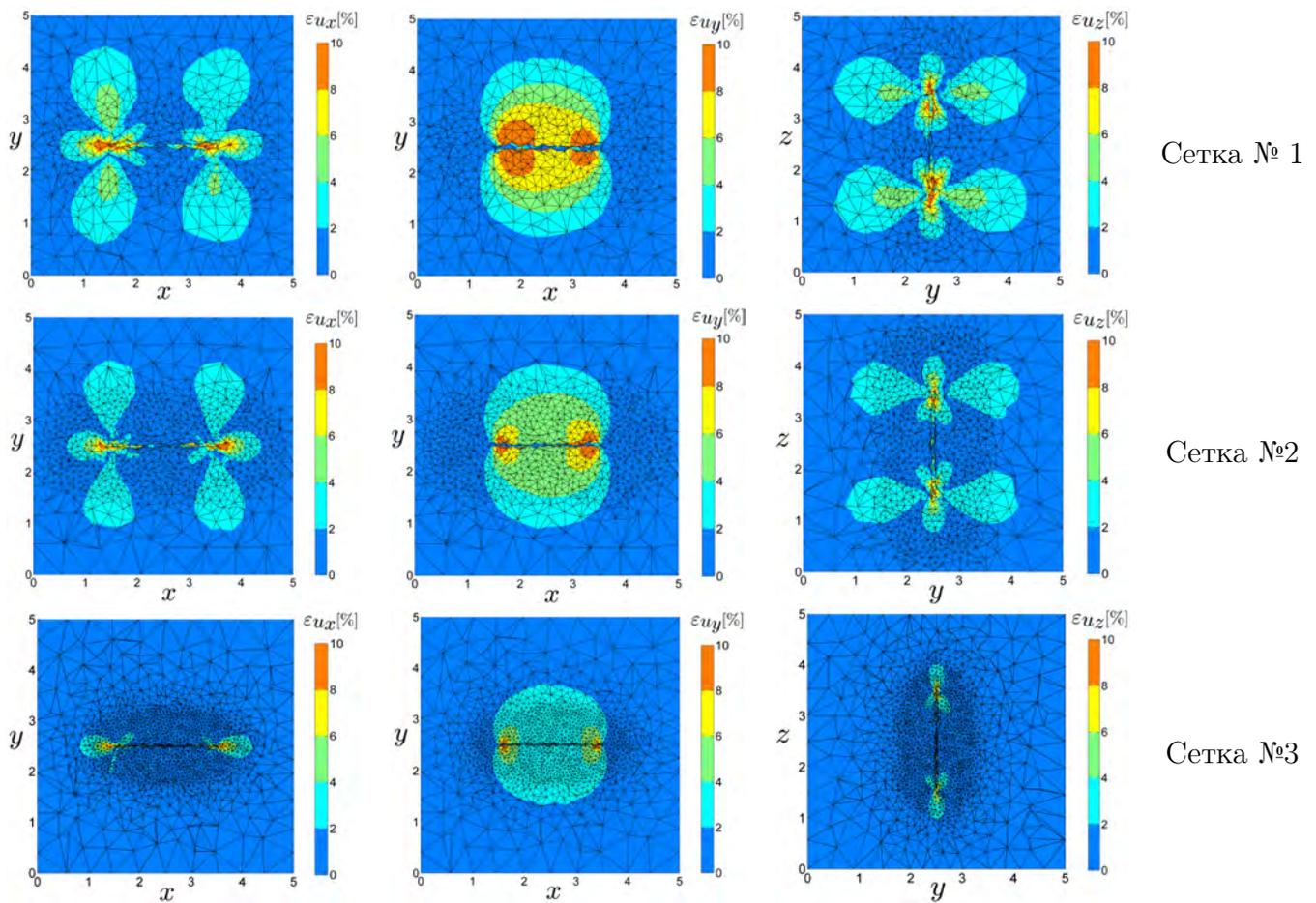


Рис. 4.11. Относительная ошибка полей u_x , u_y и u_z в плоскости $z = L/2$.

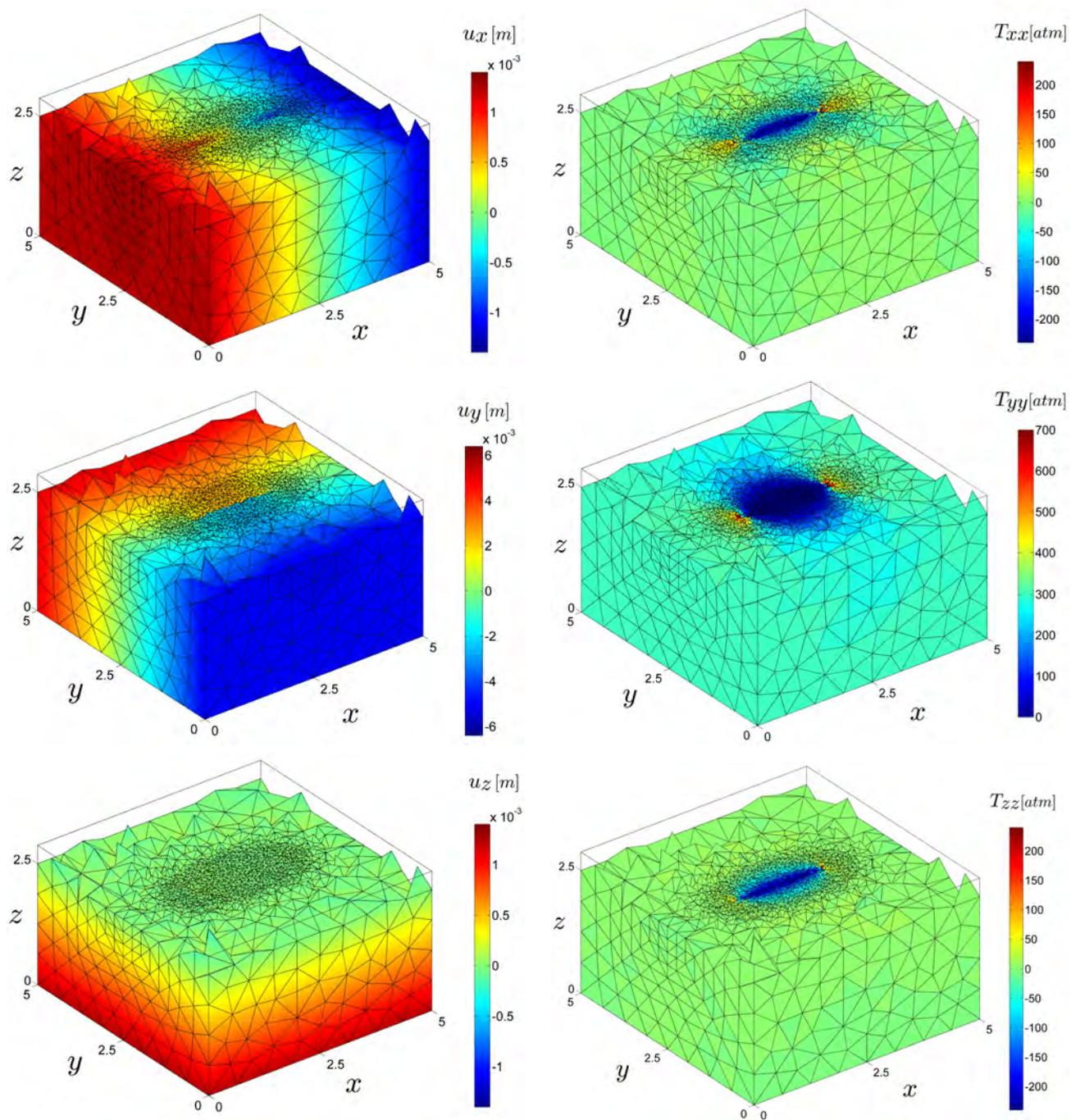


Рис. 4.12. Слева: распределение компонент u_x , u_y и u_z поля перемещений в области $z \leq L/2$ (сверху вниз). Справа: распределение компонент T_{xx} , T_{yy} и T_{zz} поля полных напряжений в области $z \leq L/2$ (сверху вниз).

4.7.2 Трещина в неоднородной среде

В настоящем разделе представлены результаты двух расчетов в неоднородной среде. Неоднородными являются как распределение упругих модулей, так и фильтрационных свойств (коэффициента проницаемости) и модулей Био. Расчеты демонстрируют взаимное влияние напряженно-деформированного состояния пороупругой среды.

В обоих случаях расчетная область представляет собой куб $\Omega = L_x \times L_y \times L_z$, где $L_x = L_y = L_z = 100$ метров. Для расчетов использовалась равномерная сетка из тетраэдров. Узлы сетки образуют кубическую решетку $N_x \times N_y \times N_z$ с $N_x = N_y = N_z = 40$. Таким образом, шаг сетки узлов $h_x = h_y = h_z = 2.5$. Всего в сетке $N_n = 64000$ узлов и $N_e = 50319$ конечных элементов. Шаг по времени составлял $\Delta t = 900$ с (или 15 минут). Полное время расчета $T = 18000$ с (или 5 часов).

В обоих вариантах расчета область Ω разделена на две части вертикальной плоскостью, проходящей через начало координат перпендикулярно оси Ox . Свойства среды в каждой из подобластей для вариантов расчета приведены в таблицах 4.2. Как видно из таблицы,

	E , Па	ν	b	M , Н/м ²	K , м ²
Вариант 1					
$x < L_x/2$	$1.5E + 10$	0.2	0.79	$1.3E + 10$	$1.87E - 13$
$x \geq L_x/2$	$1.5E + 09$	0.2	0.75	$1.3E + 09$	$1.87E - 15$
Вариант 2					
$x < L_x/2$	$1.5E + 10$	0.2	0.79	$1.3E + 10$	$1.87E - 15$
$x \geq L_x/2$	$1.5E + 09$	0.2	0.75	$1.3E + 09$	$1.87E - 13$

Таблица 4.2. Свойства среды.

упругие свойства среды и параметры Био в обоих случаях совпадают, а значения проницаемости для подобластей меняются местами. оставшиеся параметры модели имеют следующие значения: $\mu = 1.0E - 3$ Па·с — вязкость флюида, $c_f = 1.0E$ Па⁻¹ — сжимаемость флюида.

Трещина имеет форму плоского диска радиусом $R = 22$ м, расположенного горизонтально в центре расчетной области. Давление трещины внутри принималось равным 330 атм. Это значение рассматривается как граничное условие Дирихле для уравнения фильтрации и граничное условие Неймана для уравнения теории упругости модели Био.

На границе области считается заданным давление жидкости 300 атм и заданные равное нулю нормальные компоненты поля перемещений на гранях. В начальный момент времени давление жидкости в области равнялось 300 атм.

Расчет проводился с шагом по времени $\Delta t = 9000$ с (или 15 минут) до момента времени 90000 с (или 150 минут).

На рисунках 4.13 и 4.14 приведены распределения компонент тензора напряжений в сечении расчетной области вертикальной плоскостью, проходящей через ось Oz перпендикулярно оси Oy . В силу того, что распределение упругих модулей в обоих вариантах расчета совпадают, поля напряжений отличаются незначительно. Обратим внимание на наличие разрыва у компонент тензора напряжений, перпендикулярных границе между подобластями — его наличие связано с тем, что на рисунках приведены компоненты тензора упругих напряжений, а не полных.

На рисунке 4.15 приведены распределения поля давления в среде. В силу того, что для двух вариантов расчета распределения поля проницаемости существенно отличается, отличаются и поля давления в среде.

На рисунках 4.16 и 4.17 приведены распределения компонент u_x (слева) и u_z (справа) поля перемещений. На рисунке 4.18 приведено распределение компоненты $u_z z$ поля перемещений для первого варианта расчета (два второго соответствующие кривые имеют сходный вид). На них хорошо заметны отличия в раскрытии трещины в областях с различными упругими свойствами.

Отметим, что описанная постановка, не смотря на ее «модельность», является содержательной — постоянное по срединной поверхности трещины распределение давления соответствует трещине с очень высокой проницаемостью. Такая ситуация может возникать при реально выполненных процедурах гидроразрыва пласта для «запертой» проппантом трещине, в рассматриваемой постановке — на нагнетательной скважине..

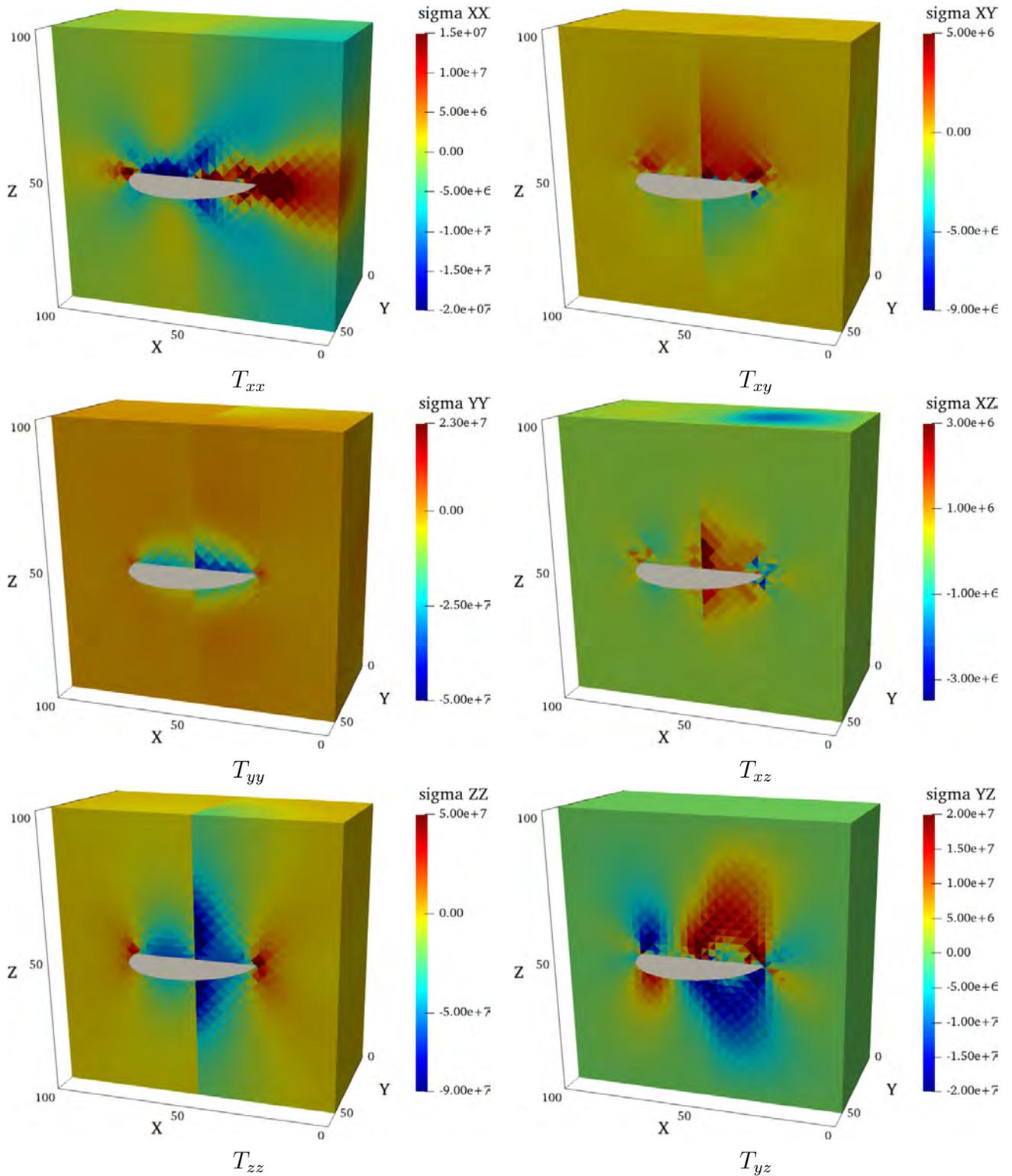


Рис. 4.13. Распределение компонентов тензора упругих напряжений \mathbf{T} в неоднородной среде (вариант 1 расчета).

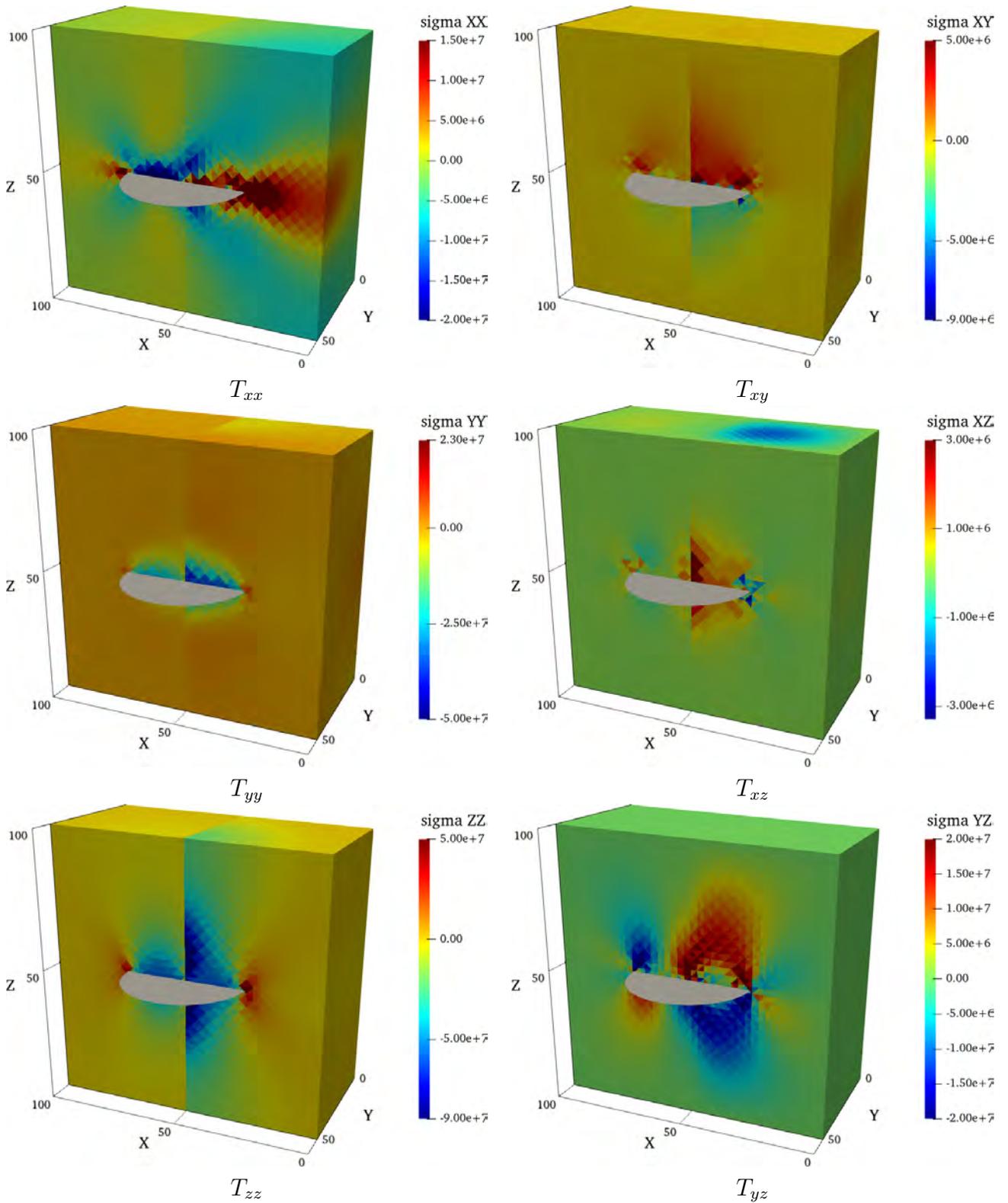


Рис. 4.14. Распределение компонентов тензора упругих напряжений \mathbf{T} в неоднородной среде (вариант 2 расчета).

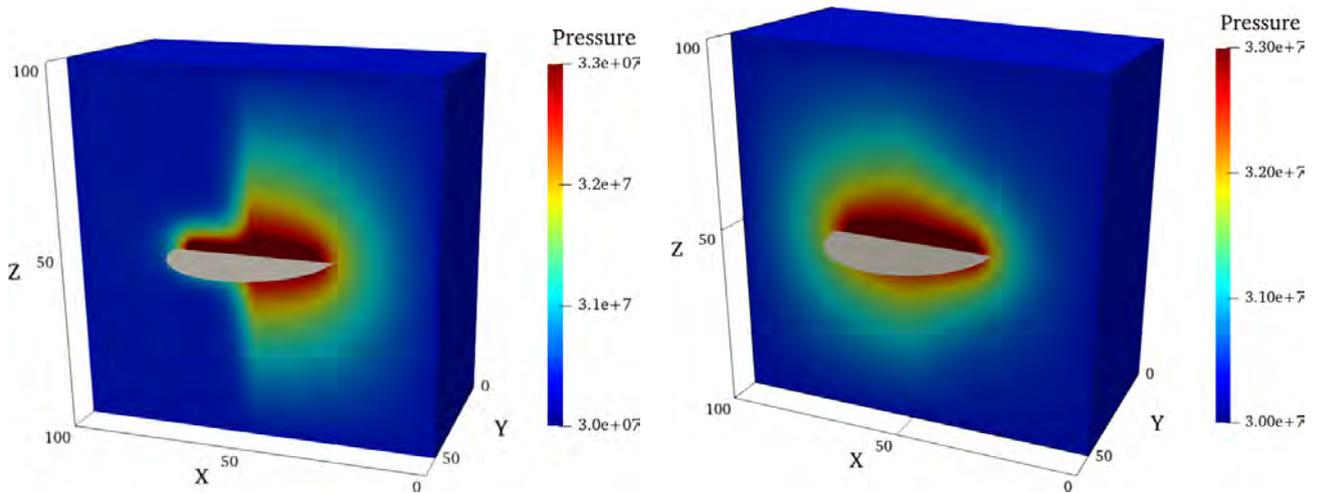


Рис. 4.15. Распределение давления в неоднородной среде (слева: вариант 1 расчета, справа: вариант 2).

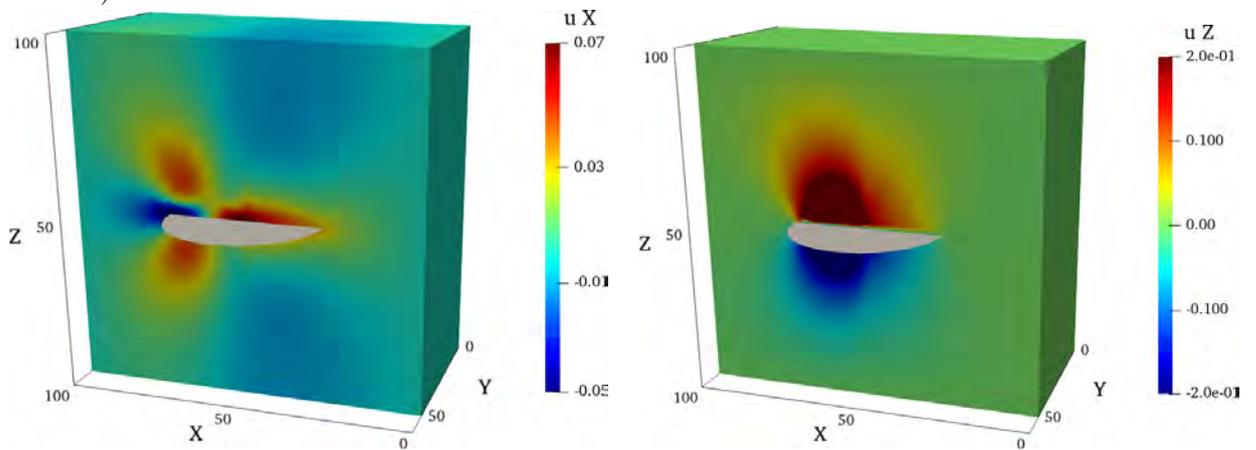


Рис. 4.16. Распределение компонент поля перемещений u_x (слева) и u_z (справа) в неоднородной среде (вариант 1 расчета).

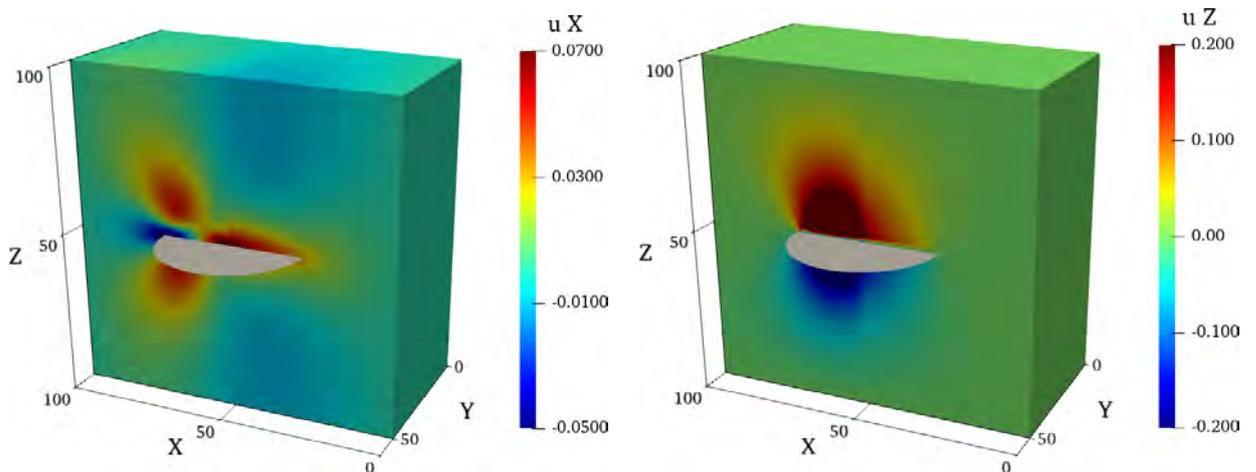


Рис. 4.17. Распределение компонент поля перемещений u_x (слева) и u_z справа в неоднородной среде (вариант 2 расчета).

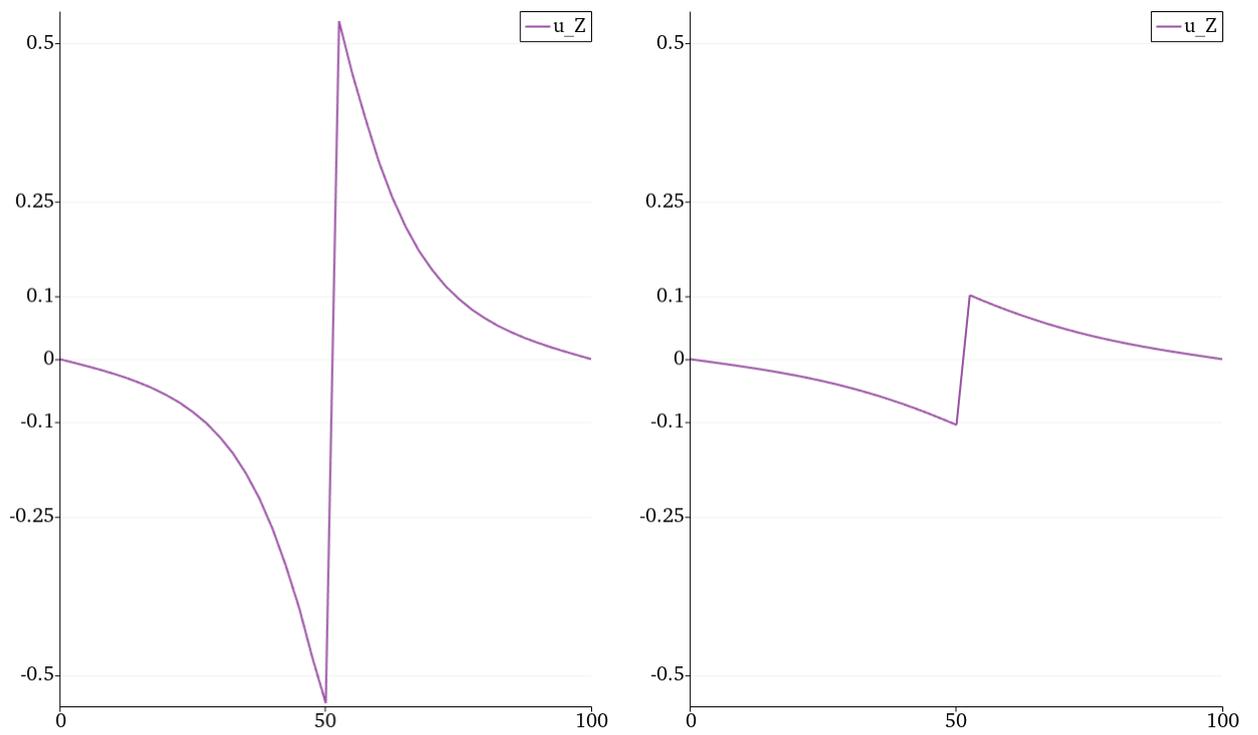


Рис. 4.18. Распределение компонент поля перемещений u_x (слева) и u_z (справа) вдоль вертикальных прямых в точках оси Ox с координатами $x = 40$ и $x = 60$ (вариант 1 расчета).

4.7.3 Задача с несколькими трещинами

В настоящем разделе приведен пример расчета с двумя стационарными трещинами. Обе трещины имеют форму дисков с радиусами 0.5 и 1.0 единиц длины. Используется пороупругая постановка. Параметры среды такие же, как и в предыдущих расчетах. В начальный момент времени трещины ориентированы вертикально. На боковой (вертикальной) части внешней границы области заданы значения нормальных напряжений, направленных вдоль оси Oy . На внешней границе области ставится граничное условие непротекания. На серии рисунков 4.19-4.21 показаны распределения полей давления (слева) и y -компоненты тензора полных напряжений (справа).

Расчет демонстрирует возможность предложенных модели и алгоритмов для решения задач с несколькими трещинами. В работе детально такие варианты алгоритма не рассматриваются, однако соответствующее обобщение носит скорее технический характер. В целом алгоритм устроен следующим образом.

Область расчета Ω разбивается на подобласти $\Omega_0, \Omega_i, i = \overline{1, N}$, причем

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^N \Omega_i, \quad \Omega_0 = \Omega \setminus \left(\bigcup_{i=1}^N \Omega_i \right).$$

Каждая из подобластей Ω_i представляет собой часть расчетной области, содержащую трещину $\mathcal{F}_i, i = \overline{1, N}$. Считается, что области $\Omega_i, i = \overline{1, N}$, попарно не пересекаются, равно как и их границы. Более того, границы областей $\Omega_i, i = \overline{1, N}$ не имеют общих точек с границей $\partial\Omega$ области Ω . Аналогичное разбиение производится на сеточном уровне. При этом считается, что в узлах, принадлежащих общей границе области Ω_i и области Ω_0 заданы два набора степеней свободы. Далее строится описанным выше образом конечномерная аппроксимация задачи в каждой из подобластей $\Omega_i, i = \overline{0, N}$. В узлах с двумя наборами степеней свободы задаются дополнительные уравнения, выражающий равенство перемещений в узлах (в методе конечных элементов эта процедура иногда носит название «гибридизации»). Далее формируется полная матрица конечномерной задачи, которая обращается стандартными способами для определения решения задачи.

Описанный вариант метода может рассматриваться как простейший вариант метода декомпозиции области в конечномерных задачах. Матрица этой задачи имеет характерную структуру, типичную для методов такого типа. Важнейшим вопросом здесь является построение эффективных итерационных методов ее обращения, которые сводятся к обращению матриц для каждой отдельной области. Эти вопросы не рассматривались, хотя и представляют существенный интерес.

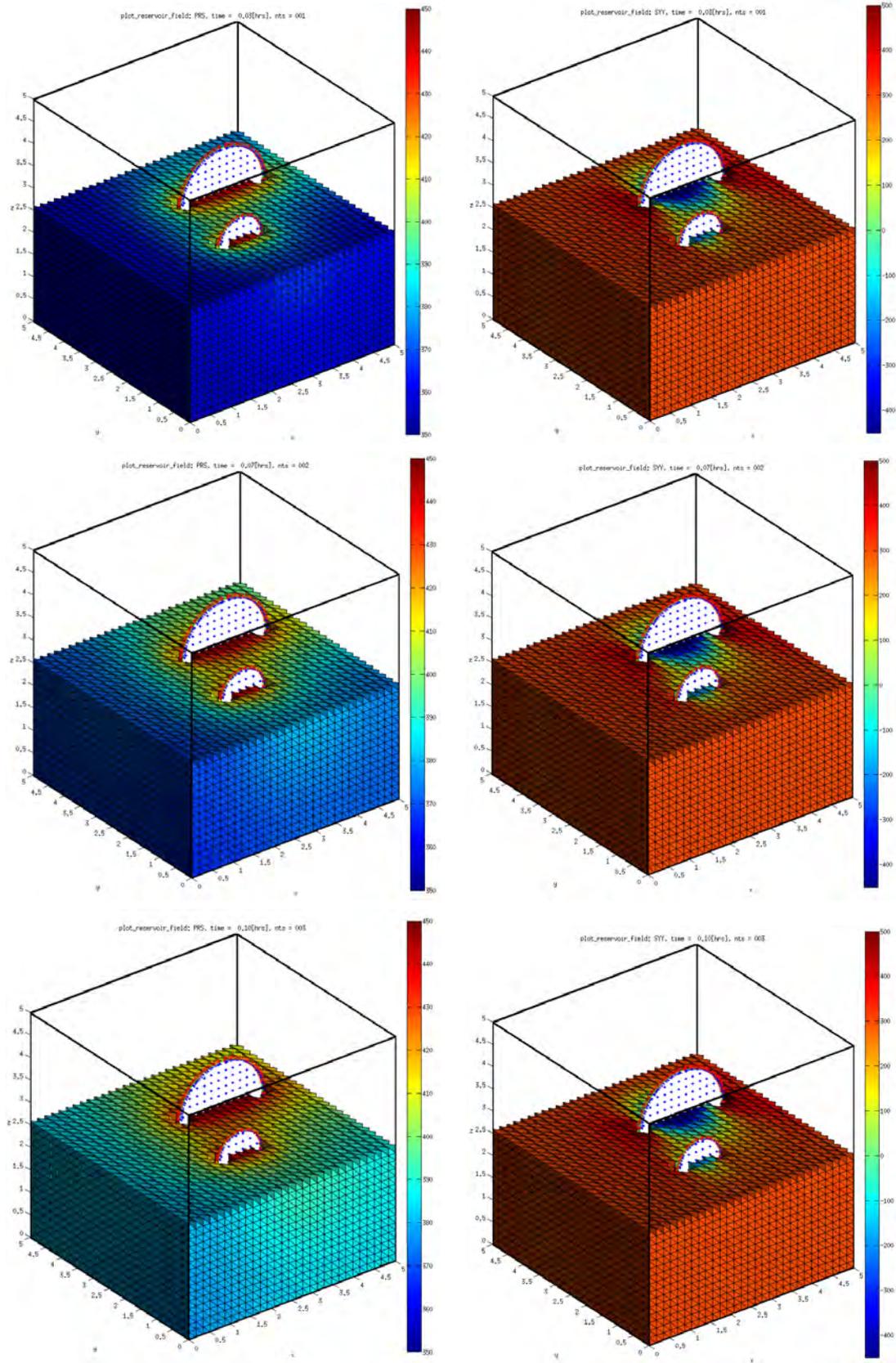


Рис. 4.19. Распределение давления (слева) и компоненты T_{yy} поля полных напряжений (справа) при $t = 0.03, 0.07, 0.10$ ч.

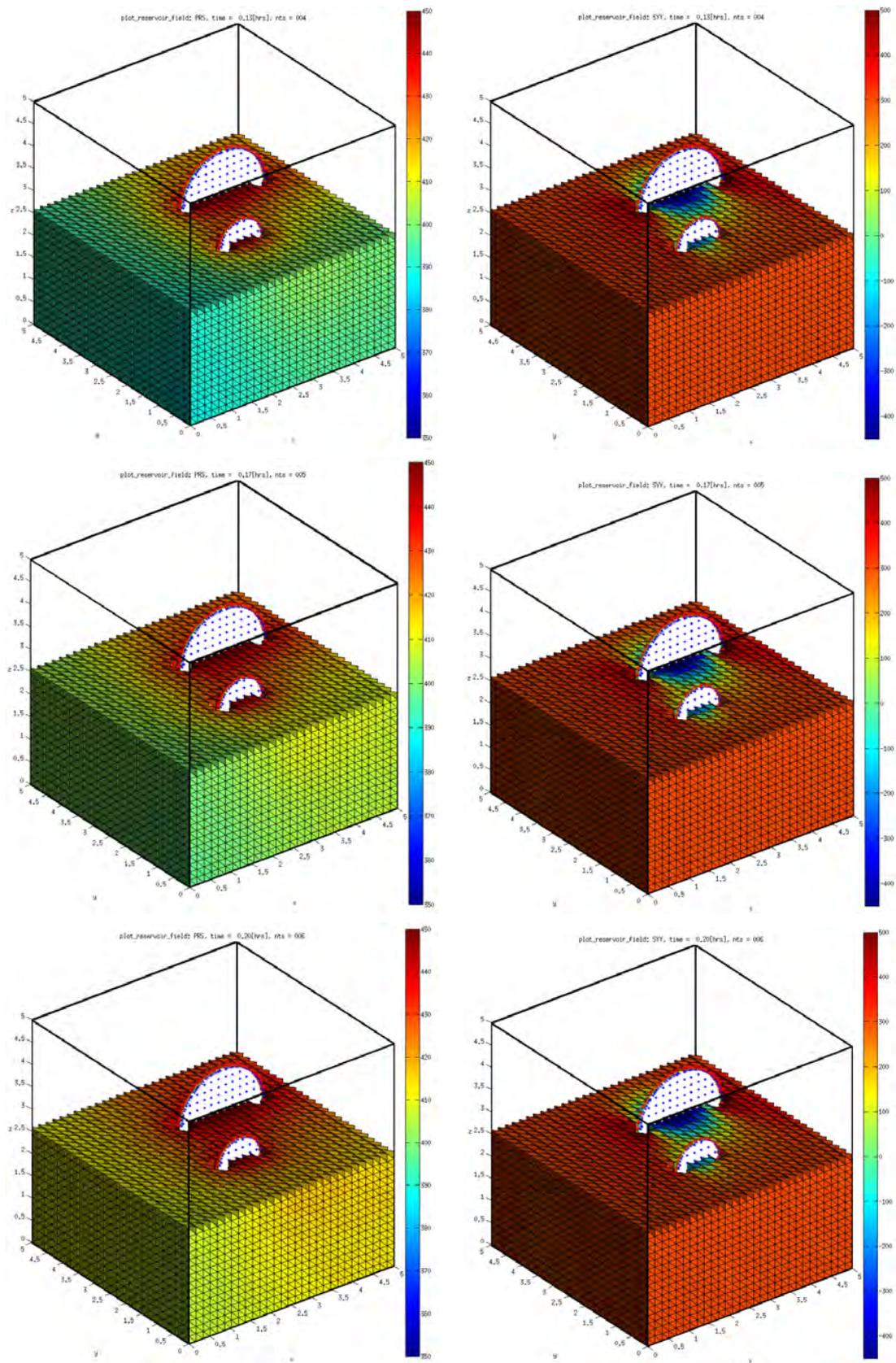


Рис. 4.20. Распределение давления (слева) и компоненты T_{yy} поля полных напряжений (справа) при $t = 0.13, 0.17, 0.20$ ч.

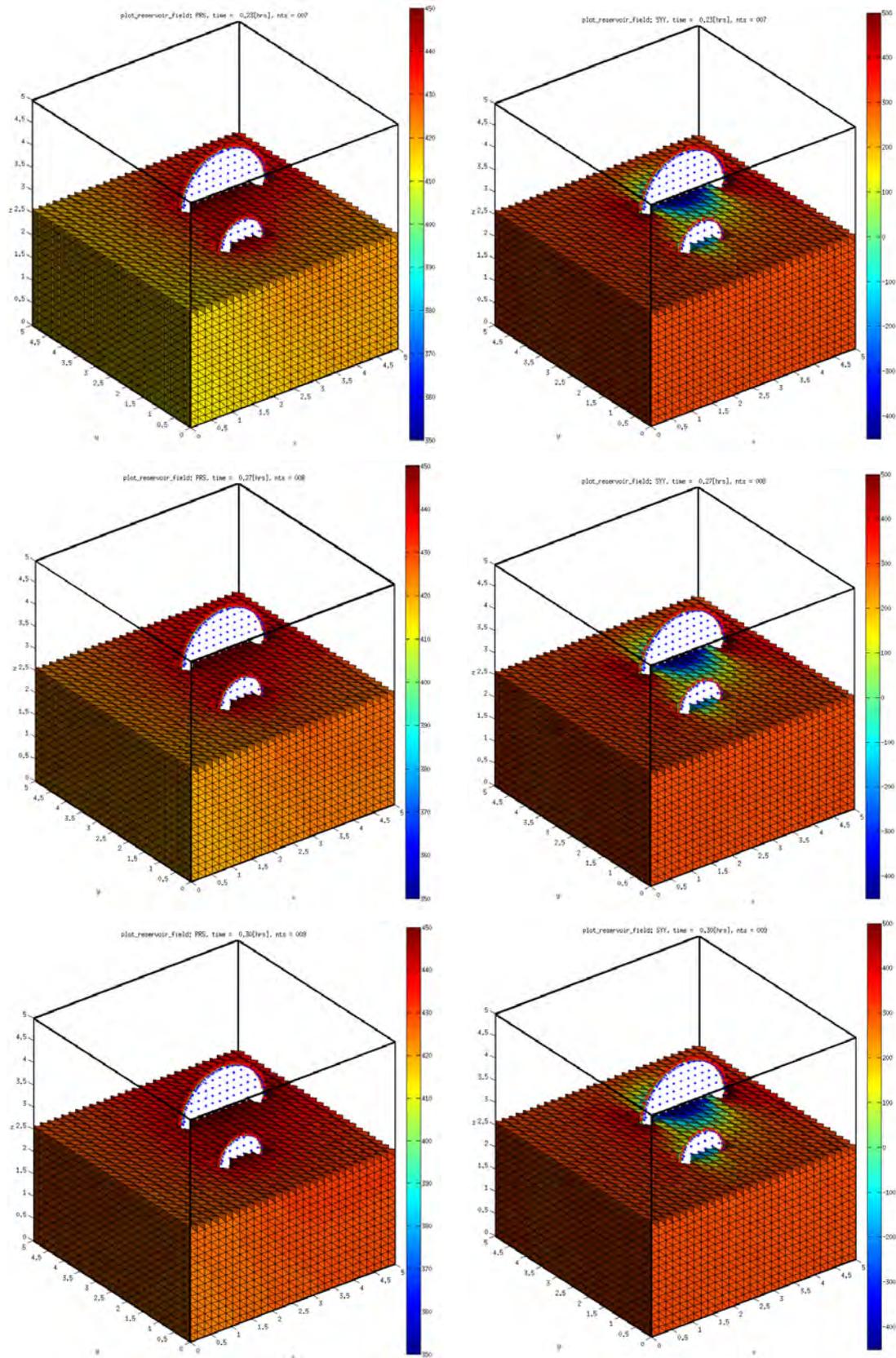


Рис. 4.21. Распределение давления (слева) и компоненты T_{yy} поля полных напряжений (справа) при $t = 0.23, 0.27, 0.30$ ч.

4.7.4 Задача с эволюционирующей трещиной I

В настоящем разделе приведен пример расчета с эволюционирующей трещиной. В начальный момент времени трещина представляет собой круглый диск радиуса 0.5 единиц длины, расположенный в центре расчетной области, которая имеет вид куба с длиной ребра 5. Срединная поверхность трещины ориентирована вертикально. Использовалась регулярная расчетная сетка, узлы которой образуют кубическую решетку размерности $30 \times 30 \times 30$ узлов. полное число узлов в сетке равнялось $N_n = 27000$, конечных элементов $N_e = 135000$. Параметры среды такие же, как и в предыдущих расчетах. Трещина ориентирована вертикально и развивается вдоль оси координат Ox , при этом в точке фронта трещины, которая имеет пространственную координату $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ скорость ее движения равна $\dot{\mathbf{x}} = 0.7 \cdot 10^{-3} \text{sign}(x)$.

Внутри трещины заданно фиксированное и постоянное по срединной поверхности давление, равное $p_{\text{fr}} = 450$ атм. В начальный момент времени давление области равнялось 400 атм.

Для расчета эволюции трещины использован метод проекции ближайшей точки. На боковой (вертикальной) части внешней границы области заданы значения нормальных напряжений, направленных вдоль оси Oy . На внешней границе области ставится граничное условие непротекания. На серии рисунков 4.22-4.25 показаны распределения полей давления (слева) и y -компоненты тензора полных напряжений (справа).

Представленный расчет демонстрирует прежде всего робастность вычислительных алгоритмов расчета геометрической эволюции трещины и корректность определения типов узлов для «расширенного» метода конечных элементов X-FEM/CP в случае, когда срединная поверхность трещины испытывает значительное удлинение.

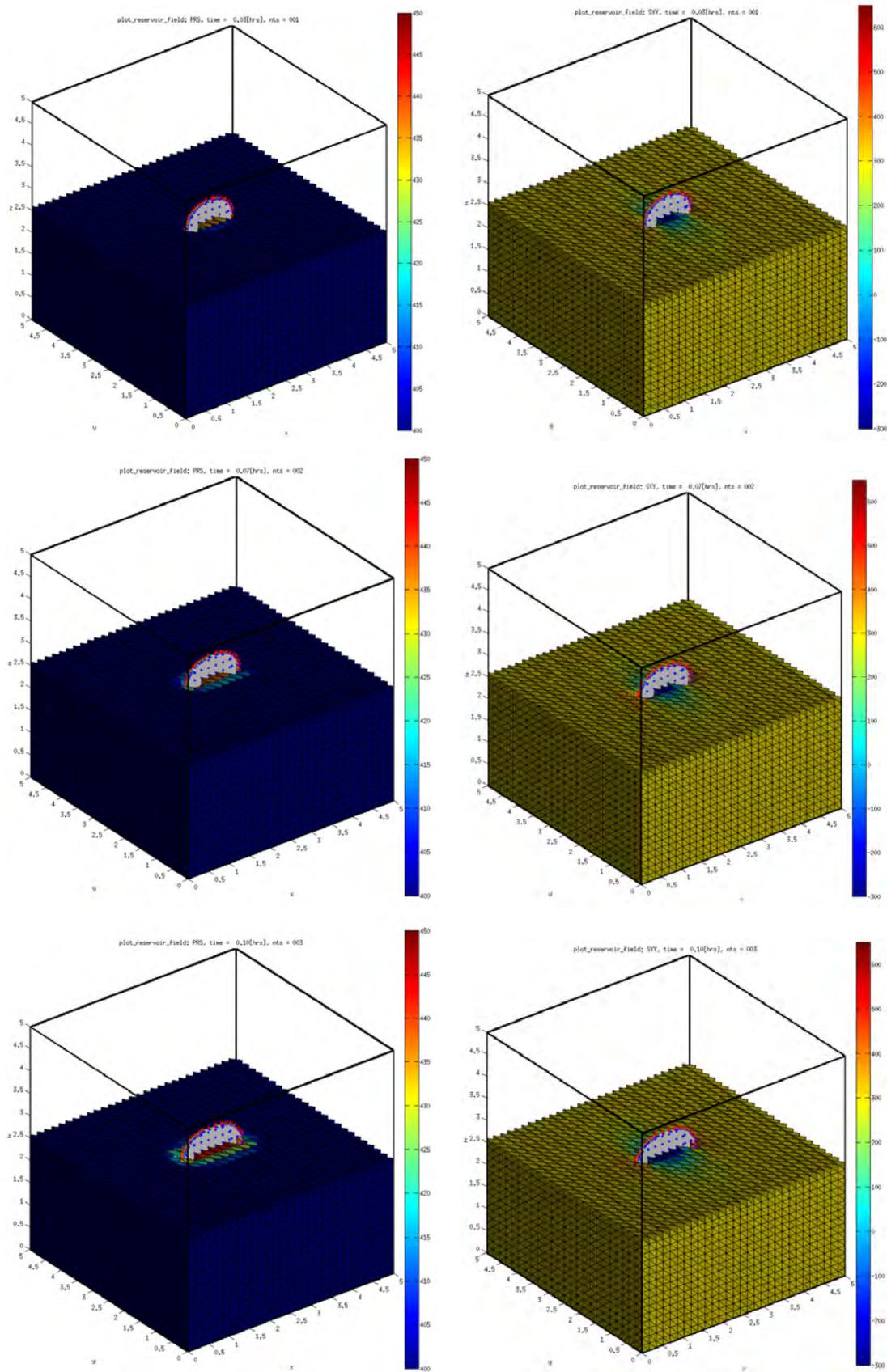


Рис. 4.22. Распределение давления (слева) и компоненты T_{yy} поля полных напряжений (справа) при $t = 0.03, 0.07, 0.10$ ч.

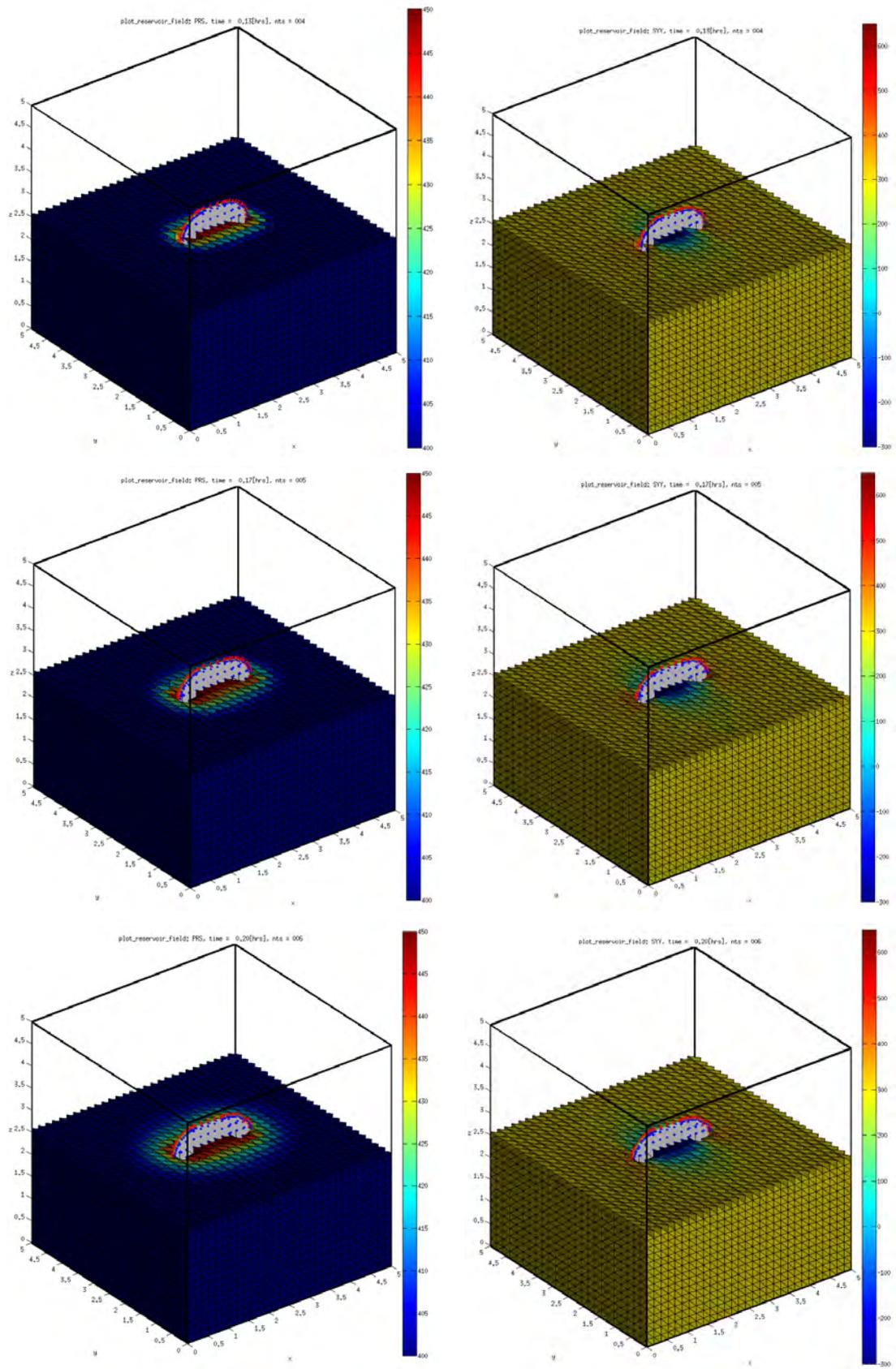


Рис. 4.23. Распределение давления (слева) и компоненты T_{yy} поля полных напряжений (справа) при $t = 0.13, 0.17, 0.20$ ч.

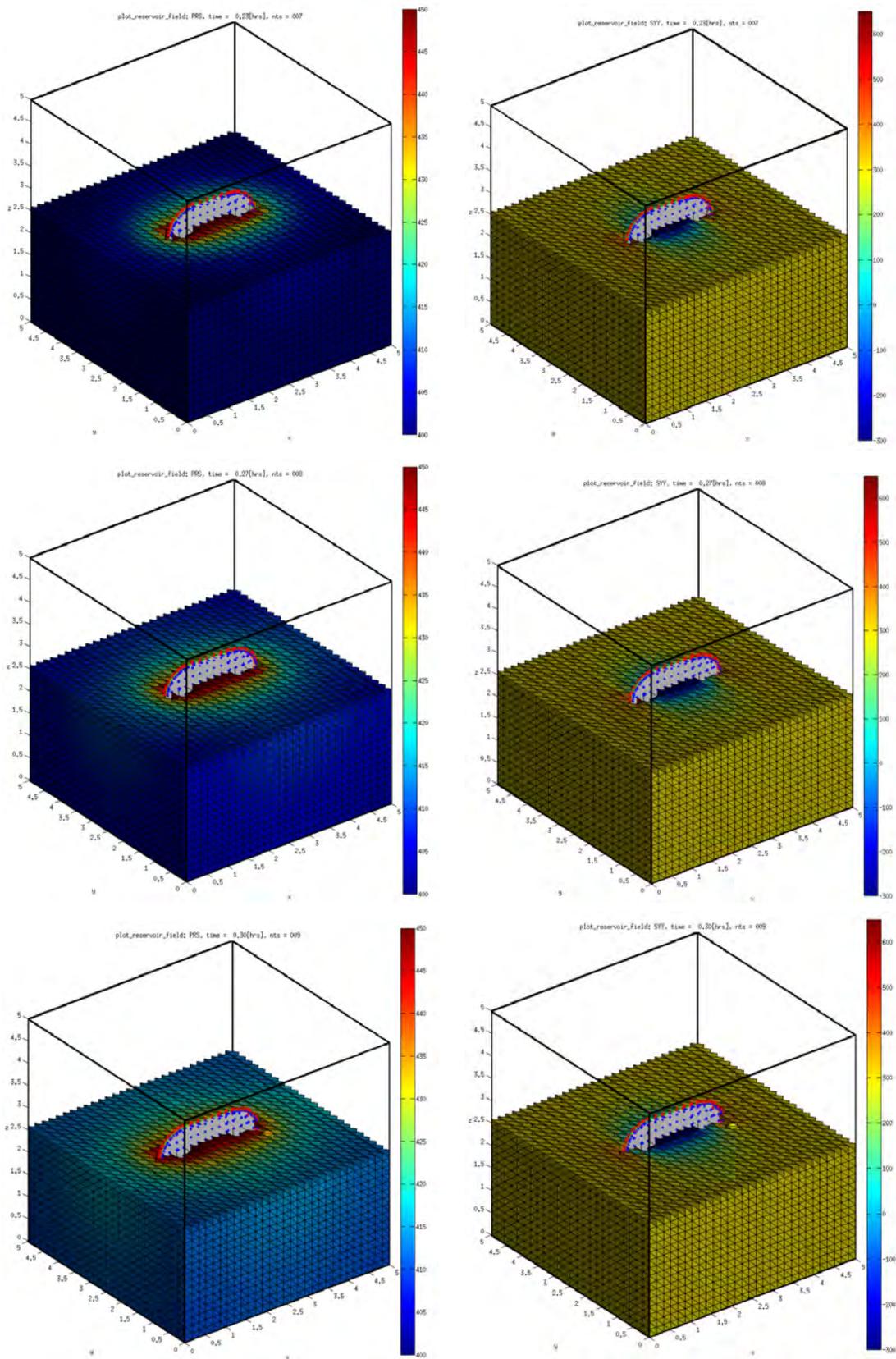


Рис. 4.24. Распределение давления (слева) и компоненты T_{yy} поля полных напряжений (справа) при $t = 0.23, 0.27, 0.30$ ч.

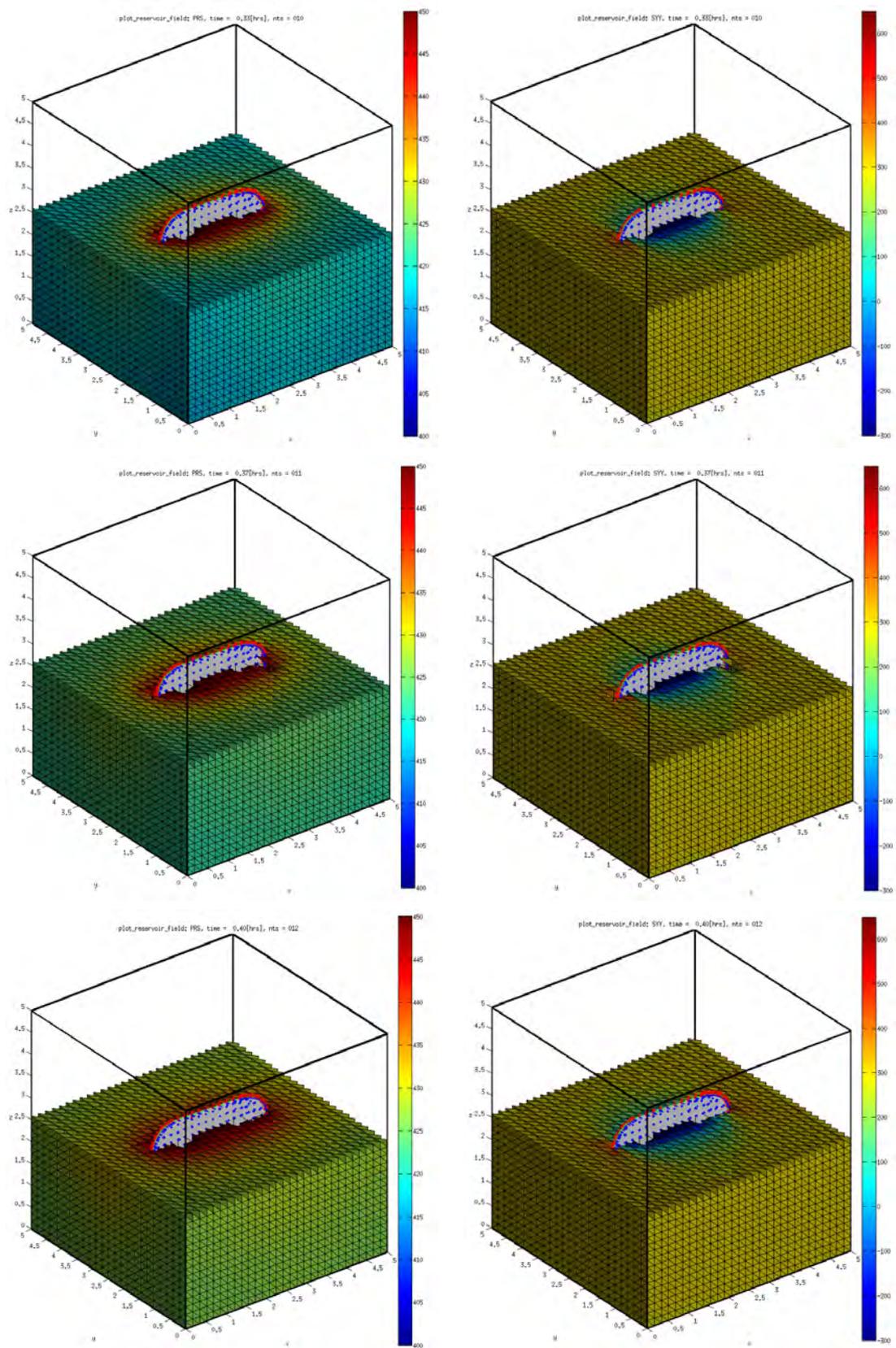


Рис. 4.25. Распределение давления (слева) и компоненты T_{yy} поля полных напряжений (справа) при $t = 0.33, 0.37, 0.40$ ч.

4.7.5 Задача с эволюционирующей трещиной II

В настоящем разделе приведен пример расчета с эволюционирующей трещиной. В начальный момент времени трещина представляет собой круглый диск радиуса 0.5 единиц длины, расположенный в центре расчетной области, которая имеет вид куба с длиной ребра 5. Срединная поверхность трещины ориентированна вертикально. Использовалась регулярная расчетная сетка, узлы которой образуют кубическую решетку размерности $30 \times 30 \times 30$ узлов. полное число узлов в сетке равнялось $N_n = 27000$, конечных элементов $N_e = 135000$. Параметры среды такие же, как и в предыдущих расчетах. В начальный момент времени трещина ориентирована вертикально. Впоследствии в ходе своего развития трещина «поворачивает» так, что ее срединная поверхность в окрестности фронта становится параллельной плоскости Oxy . Скорость точки фронта трещины, расположенной в пространственной точке с координатами $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ задается выражением $\mathbf{v} = 5.0 \cdot 10^{-3} \cdot \tilde{\mathbf{v}}$,

$$\begin{aligned}\tilde{v}_x &= 0.25 \cdot \left(\frac{2}{1.0 + \exp(-2x)} - 1.0 \right), \\ \tilde{v}_y &= +a \cdot 5.0 \cdot 10^{-3} \cdot z, \\ \tilde{v}_z &= -a \cdot y + 2.0 \cdot b \cdot (h(z) - 1.0),\end{aligned}$$

где $a = 0.2$, $b = 0.2$.

Для расчета эволюции трещины, как и ранее, использован метод проекции ближайшей точки. На боковой (вертикальной) части внешней границы области заданы значения нормальных напряжений, направленных вдоль оси Oy . На внешней границе области ставится граничное условие непротекания. На серии рисунков 4.26-4.27 показаны распределения полей давления (слева) и y -компоненты тензора полных напряжений (справа).

На рисунках серым цветом показана срединная поверхность трещины. красными маркерами обозначены проекции узлов трехмерной расчетной сетки (точнее, — ее заданной части, окружающей трещину) на фронт трещины. Синими маркерами показаны проекции узлов сетки на срединную поверхность трещины.

Внутри трещины заданно фиксированное и постоянное по срединной поверхности давление, равное $p_{fr} = 450$ атм. В начальный момент времени давление области равнялось 400 атм.

Как и предыдущий, представленный расчет демонстрирует прежде всего робастность вычислительных алгоритмов расчета геометрической эволюции трещины и корректность определения типов узлов для «расширенного» метода конечных элементов X-FEM/CP в случае, когда срединная поверхность трещины испытывает значительное удлинение.

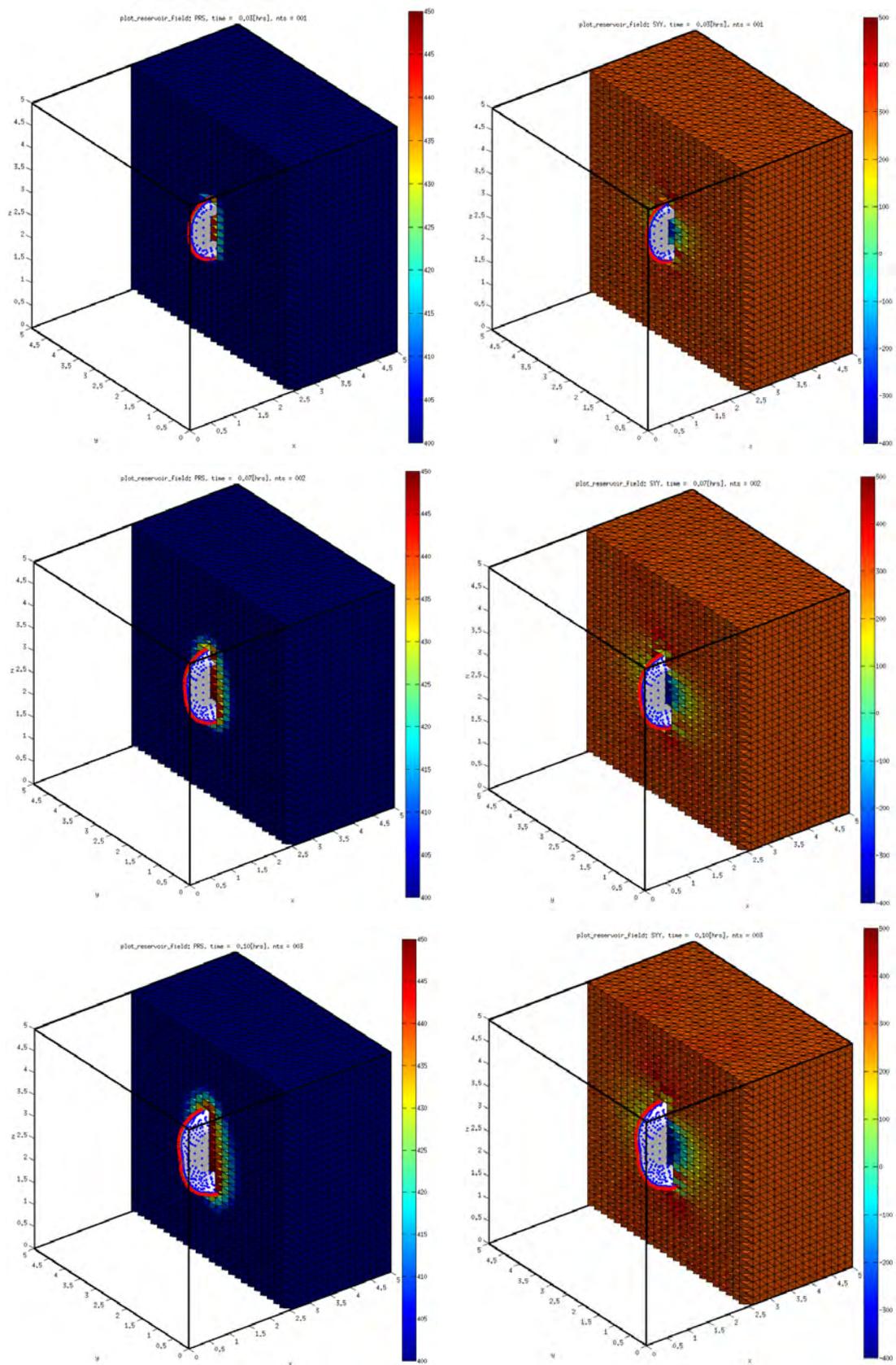


Рис. 4.26. Распределение давления (слева) и компоненты T_{yy} поля полных напряжений (справа) при $t = 0.03, 0.07, 0.10$ ч.

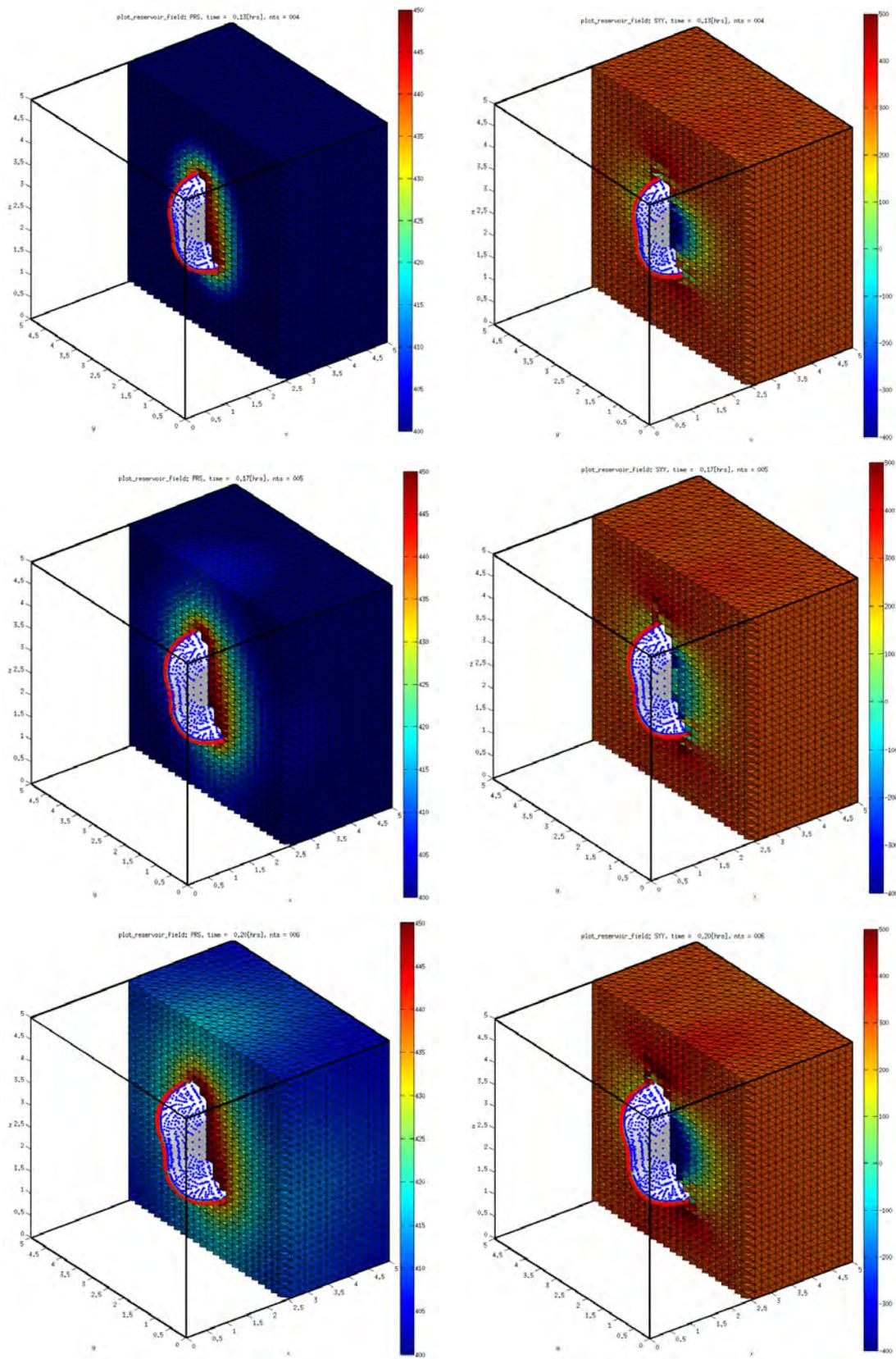


Рис. 4.27. Распределение давления (слева) и компоненты T_{yy} поля полных напряжений (справа) при $t = 0.13, 0.17, 0.20$ ч.

4.8 Заключение

В главе рассматриваются слабые постановки задач для пороупругой среды как с трещиной, так и без трещины. Подробно рассматривается метод конечных конечных элементов для решения уравнений пороупругости без трещины. Описывается алгоритм метода, особенности его реализации, способы итерационного связывания групп уравнений, основные моменты его применения.

Часть содержания главы имеет технический характер, однако содержит изложение базового, как с точки теории, так и с точки зрения программной реализации алгоритма материала и необходима для дальнейшего изложения.

Рассматривается вариант «расширенного» метода конечных элементов X-FEM с представлением поверхности с помощью метода проекции ближайшей точки. Описаны детали реализации метода в случае, когда для представления поверхности используется метод проекции ближайшей точки. Описанный вариант алгоритма является новым, в плане общности и удобства представления геометрии срединной поверхности трещины он не уступает оригинальному варианту метода, использующего метод множеств уровня для представления поверхности трещины.

Приводятся примеры численных расчетов как модельных, так и содержательных задач без трещины. В качестве последней рассматривается анализ лабораторных экспериментов, выполненных в Институте динамики геосфер РАН. Результаты валидационных расчетов для задач пороупругости без трещины приведены в приложении А.

Приведены примеры решения упругих и пороупругих задач с трещиной. Рассматривается целый ряд постановок: в однородной и неоднородной среде, с регулярными и нерегулярными сетками, в областях с однородным и неоднородным распределением фильтрационных и упругих свойств и модулей Био. Результаты расчетов демонстрируют возможности предложенных алгоритмов и их программной реализации и степень общности постановок задач, которые могут быть проанализированы ими.

Отметим, что степень общности рассмотренных постановок существенно превосходит описываемые в литературе, прежде всего для пороупругих задач с трещиной в неоднородных средах.

Глава 5

Решение уравнений на поверхностях

Настоящая глава посвящена вопросам решения уравнений на поверхностях с краем, вложенных в трехмерное пространство. В рамках комплексной задачи о динамике развития флюидонаполненной трещины она соответствует решению задачи о течении в трещине, раскрытие которой является заданной функцией точки срединной поверхности трещины и времени или является заданной функцией давления. Обзор соответствующих алгоритмов приведен в разделе 2.3. Основным алгоритмом, рассматриваемым ниже, является метод проекции ближайшей точки. В разделе обсуждаются общая идеология метода, рассматривается его конечно-элементный вариант. На основе полученных результатов формулируется метод решения задачи в эволюционирующей трещине. Приводятся результаты численных расчетов, демонстрирующих возможности метода.

В работах [Ruuth2008, Merriman2007, Macdonald2011, Macdonald2008, Macdonald2009] был предложен оригинальный метод решения уравнений на поверхностях, основанный на представлении поверхности с помощью оператора проекции ближайшей точки. Суть метода заключается в том, что сначала с помощью оператора проекции ближайшей точки строится продолжение уравнения с поверхности в трехмерное пространство. Далее «продолженная» задача аппроксимируется подходящим разностным методом на сетке, не согласованной с геометрией поверхности. В качестве решения исходной задачи на поверхности рассматривается след решения продолженной трехмерной задачи на ней. Одновременно с этим оператор проекции ближайшей точки используется для аппроксимации граничных условий Дирихле (и Неймана) на границе как исходной поверхности, так и трехмерной области, в которой рассматривается продолженное уравнение.

Особенностью этого метода является то, что он естественным (в отличие от ряда других методов, см. [Савенков2020]) образом позволяет решать уравнения на поверхностях с *краем* — а также в областях, являющихся объединением многообразий различной (ко)размерности, вложенных в трехмерное пространство, см. [Macdonald2011].

Целью настоящего раздела является попытка рассмотреть предложенный метод в контексте вариационных (слабых) постановок задач, естественные конечномерные аппроксимации которых приводят к аппроксимациям метода конечных элементов — в том числе с использованием предложенного в [Macdonald2011] способа задания граничных условий. В соответствии с идеологией проекционно-сеточных методов, это требует построения соответствующих слабых постановок задач для «продолженного» уравнения.

В настоящей работе предлагается ряд слабых постановок, существенно опирающихся на

способ задания поверхности с помощью оператора проекции ближайшей точки. Показывается, что формальные аппроксимации построенных постановок приводят к конечноэлементному аналогу оригинальной версии метода проекции ближайшей точки.

Сначала рассматривается вопрос о способах учета граничных условий Дирихле для модельной двумерной задачи для уравнения Пуассона. Результирующая постановка эффективно использует способ учета граничных условий с использованием проектора ближайшей точки. Далее полученные постановки обобщаются непосредственно на случай решения уравнения смазочного слоя в развивающейся трещине.

5.1 Метод проекции ближайшей точки

В настоящем разделе коротко описаны основные идеи метода решения уравнений на поверхностях, предложенного и развитого в работах [Ruuth2008, Merriman2007, Macdonald2011, Macdonald2008, Macdonald2009]. Он использует неявное представление поверхности и продолжение уравнения на поверхности во вмещающее ее пространство, однако использует с этой целью не распространенный метод множеств уровня (см. обзор в [Савенков2020]), а метод проекции ближайшей точки.

Рассмотрение будем вести на примере модельной краевой задачи для параболического уравнения с оператором Лапласа-Бельтрами (см., например, [Дубровин1986]) на криволинейной поверхности \mathcal{F} с краем: требуется определить заданную в $\bar{\mathcal{F}}$ функцию $u = u(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_{\mathcal{F}} \cdot (-\nabla_{\mathcal{F}} u) &= f, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{F}, \\ u|_{\partial \mathcal{F}} &= g, \quad \mathbf{x} \in \partial \mathcal{F}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

с начальным условием $u(\mathbf{x}, t = 0) = u_0(\mathbf{x})$.

Будем считать, что поверхность \mathcal{F} целиком расположена внутри пространственной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Пусть для произвольной точки $\mathbf{x} \in \Omega$, точка $\mathbf{x}_{\text{ср}}$ — ближайшая к ней точка на поверхности \mathcal{F} ,

$$\mathbf{x}_{\text{ср}} = \arg \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{F}} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в \mathbb{R}^3 . Точку $\mathbf{x}_{\text{ср}}$ будем называть проекцией точки \mathbf{x} на поверхность \mathcal{F} , а соответствующий оператор будем обозначать P ,

$$\mathbf{x}_{\text{ср}} = P\mathbf{x}.$$

Оператор P является векторнозначным: он отображает область Ω на поверхность \mathcal{F} , рассматриваемую как подмножество в $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Если для поверхности \mathcal{F} можно задать функцию знакового расстояния $d_{\mathcal{F}}(\mathbf{x})$ (например, если \mathcal{F} — ориентированная поверхность без края), то для оператора P справедливо представление:

$$P(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - d_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) \nabla d_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}), \quad d(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - P\mathbf{x}\|.$$

Проектор P однозначно описывает поверхность \mathcal{F} как

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{x} = P\mathbf{x}\}.$$

С помощью проектора P легко построить продолжение произвольной функции, заданной на поверхности, во всю область Ω . Для произвольной функции u , заданной на поверхности, ее продолжение $\mathcal{E}[u]$ в Ω определим как:

$$\mathcal{E}[u](\mathbf{x}) = u(P\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Таким способом построенный оператор продолжения может быть определен для произвольных функций, заданных в *пространстве*. А именно, любая функция, заданная в пространстве, однозначно определяет функцию на поверхности как свой собственный след на ней. В этом случае оператор \mathcal{E} является проектором в том смысле, что $\mathcal{E}^2 = I$, где I — тождественный оператор.

Отметим, что:

- для произвольной функции в Ω , постоянной в направлении нормали к \mathcal{F} ,

$$(\nabla u)|_{\mathcal{F}} = \nabla_{\mathcal{F}}(u|_{\mathcal{F}});$$

- для произвольного векторного поля в Ω , касательного к поверхности \mathcal{F} ,

$$(\nabla \cdot \mathbf{q})|_{\mathcal{F}} = \nabla_{\mathcal{F}} \cdot (q|_{\mathcal{F}}).$$

Тогда в силу свойств проектора P и оператора продолжения \mathcal{E} имеем:

$$\nabla \mathcal{E}[u](\mathbf{x}) = \nabla u(P\mathbf{x}) = \nabla_{\mathcal{F}} u.$$

В силу того, что восполнение $\mathcal{E}[u](\mathbf{x})$ постоянно вдоль направлений, нормальных к поверхности, векторное поле $\nabla \mathcal{E}[u](\mathbf{x})$ является касательным к \mathcal{F} . Отсюда следует, что

$$\nabla \cdot [\nabla \mathcal{E}[u](\mathbf{x})] = \nabla \cdot [\nabla u(P\mathbf{x})] = \nabla_{\mathcal{F}} \cdot \nabla_{\mathcal{F}} u.$$

Аналогичные продолжения можно построить и для более сложных эллиптических операторов дивергентного типа, см. [März2012].

Таким образом, исходное уравнение (5.1) может быть продолжено во всю область Ω . Далее продолженное уравнение аппроксимируется подходящим разностным методом на трехмерной сетке, введенной в области Ω и не согласованной с геометрией поверхности. Решение исходной задачи на поверхности восстанавливается как след решения трехмерной задачи на поверхности. Строгое обоснование описанных выше построений представлено в работе [März2012]. Детали метода подробно изложены в цитированных выше в данном разделе работах.

В соответствии с описанным выше подходом рассмотрим продолжение уравнения (5.1) в пространственную область $\Omega_{\mathcal{F}}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\nabla \mathcal{E}[u]) = \mathcal{E}[f], \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{F}}. \quad (5.2)$$

След решения уравнения (5.2) на \mathcal{F} является решением уравнения (5.1) с соответствующими граничными условиями.

Граничные условия для уравнения (5.2) могут быть построены как продолжение граничных условий с границы $\partial\mathcal{F}$ поверхности \mathcal{F} . Подробно этот вопрос будет рассмотрен ниже в настоящей главе.

Относительно области Ω считается, что она (а) мала в том смысле, что в каждой ее точке однозначно определена проекция (то есть значение оператора P) на поверхность и ее край и (б) область Ω включает в себя поверхность \mathcal{F} , $\Omega \supset \mathcal{F}$, причем расстояния от граничных точек области до поверхности положительны. Другими словами, все точки поверхности являются внутренними точками области.

В том случае, если поверхность \mathcal{F} является поверхностью без края, значение решения $u(t, \mathbf{x})$ задачи (5.2) в точках, лежащих на поверхности \mathcal{F} , будет совпадать с решением исходной задачи на поверхности (в этом случае $\partial\mathcal{F} = \emptyset$ и задача (5.1) является задачей Коши). В противном случае требуется указать способ задания граничных условий для уравнения (5.1). В работе [Macdonald2011] предложен удобный способ ее решения, основанный на использовании специального вида оператора продолжения с поверхности в пространство. В контексте метода конечных элементов соответствующие вопросы рассмотрены ниже, см. также [Савенков2020b].

5.1.1 Способы учета граничных условий Дирихле в слабой постановке краевой задачи

Настоящий раздел носит вспомогательный характер, однако важен для дальнейшего рассмотрения. В нем на сравнительно простом примере рассматриваются способы построения слабой постановки задачи, которые далее будут использованы как отправная точка для построения слабых постановок с учетом граничных условий Дирихле с использованием оператора проекции ближайшей точки.

Рассмотрим следующую операторную постановку задачи в области $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$: определить функцию $u \in D(A)$, удовлетворяющую следующим уравнению в области Ω и граничным условиями Дирихле на ее границе $\Gamma = \partial\Omega$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$:

$$Au = f, x \in \Omega; \quad u|_{\Gamma} = g, \quad (5.3)$$

где $D(A)$ — область определения оператора A , $f \in \text{Im}(A)$ — правая часть, $\text{Im}(A)$ — область значений оператора A . Далее будем считать, что A — симметричный положительно определенный оператор. В качестве конкретного примера далее рассмотрен оператор Лапласа, $A = -\Delta$.

Будем считать, что для оператора A справедлива следующая формула Грина

$$(Au, v) = a(u, v) + \langle \gamma u, \delta v \rangle,$$

где $a(\cdot, \cdot)$ — порожденная оператором задачи непрерывная симметричная положительно определенная билинейная форма, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение или отношение двойственности на Γ , γ и δ — операторы следа и конормальной производной, см. [Обэн1977]. В случае $A = -\Delta$

(как симметричного положительно определенного оператора) такая формула существует. Соответствующая билинейная форма имеет вид

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega;$$

отношение двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ для достаточно гладких функций определено как

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Gamma} uv \, d\gamma;$$

операторы γ и δ имеют вид

$$\gamma u = u|_{\Gamma}, \quad \delta u = \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma},$$

где \mathbf{n} — вектор единичной внешней нормали к Γ .

Слабая постановка задачи [Обэн1977, Марчук1985] имеет вид: определить функцию $u \in V_g(\Omega)$, такую что

$$a(u, v) = f(v), \quad v \in V_0(\Omega), \quad (5.4)$$

где

$$V_g(\Omega) = \{u \in V(\Omega) : u|_{\Gamma} = g\}, \quad V_0(\Omega) = \{u \in V(\Omega) : u|_{\Gamma} = 0\}.$$

Далее предполагается, что все нужные функции как элементы соответствующих функциональных пространств имеют требуемую гладкость. Конкретный вид пространств далее не важен. В том случае, если это потребуется, будут сделаны соответствующие уточнения.

Слабая постановка (5.4) является основой для построения аппроксимаций метода конечных элементов, см., например, [Марчук1985].

Опишем коротко способ построения аппроксимаций. Пусть $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_h(\Omega)$ — заданное в области Ω ее правильное разбиение на треугольные конечные элементы ω (другими словами, два конечных элемента либо имеют пустое пересечение, либо общую грань, ребро или узел). Будем считать, что

$$\Omega_h = \bigcup_{\omega \in \mathcal{T}_h} \omega = \Omega,$$

то есть область Ω и ее граница аппроксимируются точно.

Пусть \mathcal{N} — множество узлов триангуляции, с каждым из которых связана базисная функция $\varphi_i = \varphi_i(\mathbf{x})$, $i \in \mathcal{N}$. Далее можно считать, что используются простейшие непрерывные кусочно-линейные конечные элементы Куранта. Тогда конечномерное пространство $V_h(\Omega) \subset V(\Omega)$ может быть определено как

$$V_h(\Omega) = \text{span}_{i \in \mathcal{N}} \varphi_i(\mathbf{x}). \quad (5.5)$$

Будем считать, что граница Γ области Ω аппроксимируется расчетной сеткой точно, то есть образована ребрами конечных элементов. Пусть $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\Omega} \cup \mathcal{N}_{\Gamma}$, где \mathcal{N}_{Ω} и \mathcal{N}_{Γ} — множества узлов внутри области Ω и на ее границе Γ , соответственно. Тогда, в простейшем случае,

элементы пространства V_h имеют вид

$$v_h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}_\Omega \cup \mathcal{N}_\Gamma} v_i \varphi_i(\mathbf{x});$$

пространства $V_{0,h}$:

$$v_h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}_\Omega} v_i \varphi_i(\mathbf{x}); \quad v_i = 0, \quad i \in \mathcal{N}_\Gamma;$$

пространства $V_{g,h}$:

$$v_h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}_\Omega} v_i \varphi_i(\mathbf{x}) + \sum_{i \in \mathcal{N}_\Gamma} g(\mathbf{x}_i) \varphi_i(\mathbf{x}),$$

где \mathbf{x}_i — координаты узла $i \in \mathcal{N}_\Gamma$.

Вектор с компонентами v_i далее будем обозначать как \mathbf{v} ; величины v_i будем иногда называть «степенями свободы».

С учетом сказанного конечномерные аппроксимации задачи (5.4) имеют вид: определить функцию $u \in V_{g,h}(\Omega)$, такую что

$$a(u_h, v_h) = f(v_h), \quad v_h \in V_{0,h}(\Omega). \quad (5.6)$$

Последняя задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов u_i , см., например, [Марчук1985].

Одной из важных проблем, возникающих при построении конечномерной задачи, является аппроксимация и способ задания граничных условий для сеточного решения u_h , то есть построение конечномерных пространств $V_{g,h}(\Omega)$ и $V_{0,h}(\Omega)$.

Наиболее простой (рассмотренный выше) способ состоит в построении дискретных аппроксимаций Ω_h области Ω (ее разбиения на конечные элементы) таким способом, что задание граничного условия сводится к явному заданию степеней свободы решения в узлах расчетной сетки, расположенных на границе области. Однако во многих важных прикладных случаях так сделать нельзя. Примером является задание граничных условий в случае, когда граница Γ области Ω является кривой общего положения относительно сетки, то есть не согласована с ней (другими словами, граница дискретной области Ω_h не образована ребрами расчетной сетки).

Существует целый ряд способов решения этой задачи. Примерами являются метод множителей Лагранжа, метод штрафа, метод Нитше [Freund1995, Juntunen2009], методы типа диффузной (или «толстой») границы (см., например, обзор в [Nguen2017], особенно [Maury2001, Ratz2006, Lervag2014, Li2014, Schlottbom2016]) и многие другие. Ниже будет рассмотрен ряд из них, имеющих непосредственное отношения к дальнейшим построениям.

Вариационно-согласованным способом задания граничных условий в слабой постановке задачи является метод множителей Лагранжа (и метод Нитше, который ниже не рассматривается). В рамках этого подхода граничное условие рассматривается как ограничение на решение, которое формально определяется как элемент пространства $V(\Omega)$ — а не как элемент пространства $V_g(\Omega)$.

Постановка задачи в этом случае имеет вид: определить пару функций $(u, \lambda) \in V \times \Lambda$,

удовлетворяющих уравнениям:

$$a(u, v) + \langle \lambda, v \rangle = f(v), \quad (5.7a)$$

$$\langle u - g, \mu \rangle = 0 \quad (5.7b)$$

для произвольных функций $(v, \mu) \in V \times \Lambda$. Здесь Λ — пространство (множителей Лагранжа) достаточно гладких функций с областью определения Γ . Задача вида (5.7) называется задачей о седловой точке. Теория таких задач, в том числе в абстрактной постановке, рассмотрена, например, в [Brezzi1991]. Важно отметить, что решение u задачи о седловой точке (5.7) совпадет с решением вариационной задачи (5.4), а множитель Лагранжа $\lambda = -\partial u / \partial \mathbf{n}$ на Γ .

Далее рассмотрим регуляризованный вариант постановки (5.7), который имеет вид (см. [Brezzi1991, Burger2015]): определить пару функций $(u_\beta, \lambda_\beta) \in V \times \Lambda$, удовлетворяющих уравнениям

$$a(u_\beta, v) + \langle \lambda_\beta, v \rangle = f(v), \quad (5.8a)$$

$$\langle u_\beta - g, \mu \rangle - \beta \langle \lambda_\beta, \mu \rangle = 0, \quad (5.8b)$$

для произвольных функций $(v, \mu) \in V \times \Lambda$. Параметр β в постановке (5.8) считается малым и положительным. Можно показать, что решения задач (5.7) и (5.8) близки при условии малости параметра β и совпадают в пределе $\beta \rightarrow 0$. Смысл использования такой регуляризованной постановки заключается в том, что для существования и единственности решения задачи о седловой точке (5.8) не требуется (как в континуальной, так и в дискретной постановке) соблюдения так называемых inf-sup условий (или условий Ладыженской-Бабушки-Бреззи), которые накладывают ограничения на пару пространств V и Λ и обеспечивают устойчивость решения задачи, см. [Brezzi1991]. Построение inf-sup устойчивых пар пространств в дискретном случае может являться сложной задачей.

В силу того, что уравнение (5.8b) справедливо для любой достаточно гладкой функции μ , положим формально

$$\mu = \frac{1}{\beta} v \Big|_{\Gamma},$$

и, после подстановки этого выражения в (5.8b), сложим результат с уравнением (5.8a). В результате придем к методу штрафа (см. [Babuska1973, Utku1982, Barret1986]): определить функцию $u_\beta \in V(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению

$$a(u_\beta, v) + \frac{1}{\beta} \langle u_\beta - g, v \rangle = f(v) \quad (5.9)$$

для произвольной функции $v \in V(\Omega)$.

В этой постановке, так же как и в постановках (5.7) и (5.8), выполнение граничных условий (точное для (5.7) или приближенное для (5.8)) является следствием рассматриваемых уравнений, а не определяется пространством, в котором ищется решение. Таким образом, проблемы построения конечномерных аппроксимаций пространства $V_g(\Omega)$ при рассмотрении подобных постановок не возникает.

Целый ряд способов аппроксимации задачи с учетом граничных условий Дирихле может быть построен на основе рассмотренных выше вариационных постановок (5.4), (5.7) и (5.8).

Во всех этих постановках, однако, требуется, чтобы сетка была согласована с границей Γ области Ω в том смысле, что граница Γ_h дискретной области Ω_h образована ребрами расчетной сетки.

Рассмотрим теперь случай, когда это условие не выполняется. Будем считать, что область Ω содержится в большей области Ω_{ext} , $\Omega \subset \Omega_{\text{ext}}$. Пусть в области Ω_{ext} задана триангуляция $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_h(\Omega_{\text{ext}})$. Конечномерное пространство, в котором ищутся решения рассмотренных выше задач, определяется как ограничение конечномерного пространства $V_h(\Omega_{\text{ext}})$ вида (5.5) на область Ω :

$$V_h(\Omega) = \{v|_{\Omega}, v \in V(\Omega_{\text{ext}})\}.$$

В этом случае задать граничное условие на границе Γ_h непосредственно (то есть явным указанием значений степеней свободы конечных элементов) сложно — в силу того, что узлы сетки, вообще говоря, не принадлежат Γ .

Однако пересечение каждого конечного элемента сетки $\mathcal{T}_h(\Omega_{\text{ext}})$ при подходящем способе описания границы области (например, с помощью метода множеств уровня) определить несложно. Поэтому вычисление интегралов в рассмотренных выше постановках также не представляет труда. Сложность заключается в способе задания пространства множителей Лагранжа в постановке (5.7). Именно поэтому интерес представляют регуляризованные постановки метода множителей Лагранжа (5.8) и метода штрафа (5.9).

Отметим, что в рассмотренных выше постановках интегрирование по пространству всегда осуществляется по области Ω . В ряде случаев это не всегда удобно и более удобным является интегрирование по области Ω_{ext} . В частности, определенной (технической) проблемой является интегрирование в ходе процедуры сборки матрицы жесткости задачи по «обрезанным» границей Γ треугольниками конечно-элементной сетки $\mathcal{T}_h(\Omega_{\text{ext}})$.

Лишенная описанных недостатков слабая постановка задачи, сформулированная в виде задачи о седловой точке, была предложена в рамках метода фиктивной области [Glowinski1994]: определить функцию $u \in V_0(\Omega_{\text{ext}})$, удовлетворяющую уравнению

$$a_{\Omega_{\text{ext}}}(u, v) + \langle \lambda, v \rangle_{\Gamma} = f_{\Omega_{\text{ext}}}(v), \quad (5.10a)$$

$$\langle u - g, \mu \rangle_{\Gamma} = 0, \quad (5.10b)$$

для произвольной пробной функции $v \in V_0(\Omega_{\text{ext}})$, где пространство $V_0(\Omega_{\text{ext}})$ состоит из функций, равных нулю на $\partial\Omega_{\text{ext}}$.

В уравнениях выше интегрирование в билинейной форме $a_{\Omega_{\text{ext}}}(\cdot, \cdot)$ осуществляется по области Ω_{ext} (а не Ω), $f_{\Omega_{\text{ext}}}$ — подходящее продолжение правой части f , определенной в области Ω , в область Ω_{ext} .

Можно показать, что ограничение решения задачи (5.10), на область Ω совпадает с решениями задач (5.4) и (5.7). Как и ранее, с помощью постановки (5.10) могут быть построены описанным выше способом регуляризованные постановки задачи о седловой точке и метода штрафа.

5.1.2 КЭ вариант метода проекции ближайшей точки: «плоский» случай

В настоящем разделе рассмотренные выше вариационные постановки задач модифицируются с учетом того, что для описания границы области, в которой решается задача, используется метод проекции ближайшей точки. Далее показывается, как в рамках предложенного подхода может быть построен конечно-элементный аналог способа учета граничных условий, аналогичный рассмотренному в [Macdonald2011].

Предложенные ниже в настоящем разделе постановки имеют независимый интерес. Они могут применяться каждый раз, когда область, в которой ищется решение задачи, описывается проектором ближайшей точки.

Рассмотрим третий вариант слабой постановки, дополняющий постановки, рассмотренные в предыдущем разделе. Сам по себе он не несет дополнительных удобств, однако может быть эффективно использован в рамках метода проекции ближайшей точки.

Будем считать, что область Ω расположена внутри большей вмещающей ее области Ω_{ext} . Предложим, что существует оператор продолжения \mathbb{E} функций u , определенных в области Ω , в область Ω_{ext} , с сохранением соответствующего класса гладкости, то есть

$$\mathbb{E} : u \in V(\Omega) \mapsto u_{\text{ext}} \in V(\Omega_{\text{ext}}), \quad u_{\text{ext}}|_{\Omega} = u.$$

Рассмотрим теперь следующую операторную постановку задачи: определить функцию $u \in D(A)$, такую, что

$$Au = f, \quad x \in \Omega; \quad u|_{\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega} = \mathbb{E}[u_g]|_{\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega}, \quad (5.11)$$

где $u_g \in V_g(\Omega)$ — произвольная функция, удовлетворяющая граничному условию на Γ . Другими словами, потребуем, чтобы решение u удовлетворяло бы нужному уравнению в области Ω и совпадало бы с продолжением $\mathbb{E}[u_g]$ заданного вида (который определяется оператором \mathbb{E} и функцией u_g) в области $\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega$. Очевидно, что в этом случае u удовлетворяет требуемому граничному условию на Γ в силу определения \mathbb{E} . Это следует из определения функции u_g и гладкости функции u в окрестности границы.

Операторная постановка (5.11) приводит к следующей слабой постановке задачи: определить функцию $u \in V(\Omega; \mathbb{E})$, такую, что

$$a(u, v) = f(v), \quad (5.12)$$

где $v \in V_0(\Omega)$ — произвольная функция из $V_0(\Omega)$, пространство $V(\Omega; \mathbb{E})$ определено как:

$$V(\Omega; \mathbb{E}) = \{u \in V(\Omega_{\text{ext}}) : u|_{\Omega} \in V(\Omega), u|_{\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega} = \mathbb{E}[u_g|_{\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega}]\}.$$

Задача построения конечномерной аппроксимации пространства $V(\Omega; \mathbb{E})$ может быть, как будет показано ниже, решена конструктивно. Однако применение (5.12) требует еще и построения аппроксимаций пространства $V_0(\Omega)$, что является нетривиальной задачей в случае, когда расчетная сетка в области Ω_{ext} не согласованна с $\Gamma = \partial\Omega$.

Поэтому рассмотрим другой вариант слабой постановки, сформулированный в виде за-

дачи о седловой точке: определить $(u, \lambda) \in V(\Omega_{\text{ext}}) \times \Lambda(\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega)$, такую, что

$$\begin{aligned} a(u, v) + (\lambda, v)_{\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega} &= f_{\Omega_{\text{ext}}}(v), \\ (u - \mathbb{E}[u_g], \mu)_{\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (5.13)$$

для произвольных функций $(v, \mu) \in V_0(\Omega_{\text{ext}}) \times \Lambda(\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega)$. В постановке выше правая часть считается продолженной нулем в область $\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega$, то есть

$$\text{supp } f_{\Omega_{\text{ext}}} = \Omega, \quad f_{\Omega_{\text{ext}}}|_{\Omega} = f.$$

Как и ранее, отталкиваясь от постановки (5.13), можно построить регуляризованные постановки описанного выше типа. В частности, постановка с использованием метода штрафа будет иметь вид: определить функцию $u \in V(\Omega_{\text{ext}})$, такую что

$$a(u, v) + \frac{1}{\beta}(u - \mathbb{E}[u_g], v)_{\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega} = f_{\Omega_{\text{ext}}}(v) \quad (5.14)$$

для произвольной функции $v \in V(\Omega_{\text{ext}})$.

Отметим, что интегрирование в билинейных формах $a(\cdot, \cdot)$ и $(\cdot, \cdot)_{\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega}$ осуществляется по непересекающимся областям, дополняющим друг друга до области Ω_{ext} .

Граничные условия для решения u задачи (5.13) на границе Γ выполняется в силу того, что вне области Ω функция u совпадает с некоторой функцией, которая (а) является продолжением некоторой функции из $V_g(\Omega)$ и (б) имеет требуемую гладкость как элемент пространства $V(\Omega_{\text{ext}})$. Возникает вопрос о том, как следует выбирать функцию $u_g \in V(\Omega)$. При наличии нужного семейства неравенств о вложении и продолжении и теорем о следах (как, например, в случае $V(\Omega) = W_2^1(\Omega)$, $V(\Gamma) = W_2^{1/2}(\Omega)$) функция u_g может быть выбрана произвольно, но удовлетворяющей условию $u_g|_{\Gamma} = g$. Далее будут рассмотрены два конкретных варианта выбора функции u_g в области $\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega$.

Отметим также следующее. В описанной выше постановке значение продолжение $\mathbb{E}[u_g]$ может определяться как значениями u_g только на границе области Ω , так значениями u_g во внутренних точках области Ω .

В рассмотренных выше в настоящем разделе постановках, для практической реализации требуется интегрировать по пространственной области, включающей в себя «разрезанные» конечные элементы $\omega \in \mathcal{T}_h(\Omega_{\text{ext}, h})$, для которых $\omega \cap \Omega \neq \omega$, — и по сегментам границы, соответствующим пересечению границы Γ с конечными элементами. В постановке (5.7) метода фиктивных областей интегрирование по «разрезанным» конечным элементам не производится, однако все еще требуется использовать интегрирование по сегментам границы.

Понятно, что указанные подходы имеет «меньшую точность» по сравнению с методами, которые предполагают интегрирование только по $\omega \in \mathcal{T}_h(\Omega_{\text{ext}})$. Термин «меньшая точность» с использованием строгих оценок в соответствующих функциональных нормах здесь не определяется, однако должен быть понятен интуитивно. Так, например, решение рассмотренных задач в области Ω_{ext} может иметь разрыв производной по направлению нормали на границе Γ . Вместе с тем такой разрыв на Γ не могут иметь конечно-элементные аппроксимации решения (в случае, когда сетка и граница не согласованы). Возможен двойкий выход из такой ситуации: (а) использование «скорректированных» конечномерных пространств

функций, с помощью которых разрыв может быть представлен, или (б) определение такого способа продолжения правой части и коэффициентов задачи в область Ω_{ext} , при котором разрыв нормальной производной решения задачи не возникает. Первый способ широко используется, например, в рамках расширенного метода конечных элементов (X-FEM, см., например [Moës1999, Sukumar2001]). Анализ второго способа авторам неизвестен, однако, возможно, может быть основан на рассматриваемых ниже способах продолжения решения и уравнения в большую, по сравнению с Ω , область с использованием оператора проекции ближайшей точки.

Способом, позволяющим формально избавиться от интегрирования по частям $\omega \cap \Omega \neq \omega$, «разрезанных» конечных элементов ω и их границам является использование методов типа «диффузной границы». Общая схема их применения в контексте учета граничных условий Дирихле может быть описана следующим образом. Сначала строится слабая постановка задачи, в которой так или иначе (с использованием методов множителей Лагранжа, метода штрафа, метода Нитше или других) главные граничные условия учитываются в слабой постановке задачи, непосредственно в соответствующем вариационном уравнении. Далее интегралы по областям и/или их границам приближенно заменяются на интегралы по областям конечной ширины, окружающим границу. При стремлении ширины «диффузной» области к нулю «диффузные» интегралы по пространству сходятся к соответствующим интегралам по поверхности. В настоящее время существует множество подходов, основанных на этой идее. Для примера укажем работы [Nguen2017, Maury2001, Ramière2007, Li2014, Lervag2014, Schlottbom2016] и ссылки там.

Применим такой подход для постановки (5.14). А именно, рассмотрим характеристическую функцию χ области $\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega$,

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ 1, & \mathbf{x} \in \Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega. \end{cases}$$

Далее, пусть $d(\mathbf{x})$ — расстояние от точки области Ω_{ext} до Γ , $d_s(\mathbf{x})$ — соответствующая функция знакового расстояния,

$$d(\mathbf{x}) = \text{dist}(\mathbf{x}, \Gamma) = \min_{\mathbf{y} \in \Gamma} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad d_s(\mathbf{x}) = \begin{cases} +d(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ -d(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega. \end{cases}$$

Пусть $S(t)$ — по крайней мере непрерывная функция, такая, что $S(t) = \text{sign}(t)$ при $|t| \geq 1$. В случае, когда от функции $S(t)$ требуется не более чем просто непрерывность, достаточно взять $S(t) = t$ при $-1 < t < +1$. Определим семейство функций $\phi_\epsilon(\mathbf{x})$ как (см., например, [Burger2015]) :

$$\phi_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[1 + S \left(-\frac{d_s(\mathbf{x})}{\epsilon} \right) \right], \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\text{ext}},$$

где $\epsilon > 0$ — малый параметр.

Множество (линию) уровня ϵ функции $d_s(\mathbf{x})$ и ограниченную ей область будет обозначать как

$$\Gamma_\epsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d_s(\mathbf{x}) = \epsilon\}, \quad \Omega_\epsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d_s(\mathbf{x}) \leq \epsilon\},$$

при этом имеем $\Gamma_0 = \Gamma$, $\Omega_0 = \Omega$. Значения функции ϕ_ϵ , $\epsilon > 0$, отличны от нуля вне области $\Omega_{+\epsilon}$, при этом вне области $\Omega_{-\epsilon}$ ее значения равны единице. Семейство функций ϕ_ϵ при $\epsilon \rightarrow 0$ приближает характеристическую функцию $\chi(\mathbf{x})$ области $\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega$. В соответствии с методом диффузной границы, значение интеграла по области Ω может быть приближенно вычислено как

$$\int_{\Omega} f d\Omega \approx \int_{\Omega_{\text{ext}}} f(1 - \phi_\epsilon) d\Omega, \quad \int_{\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega} f d\Omega \approx \int_{\Omega_{\text{ext}}} f \phi_\epsilon d\Omega.$$

Вопросы сходимости такого приближения при $\epsilon \rightarrow 0$ рассмотрены в различных работах, см., например, [Burger2015, Schlottbom2016].

В результате, заменяя интегралы в (5.14) на их диффузные приближения, приходим к следующей постановке: определить функцию $u \in V(\Omega_{\text{ext}})$, такую что

$$\int_{\Omega_{\text{ext}}} \nabla u \nabla v (1 - \phi_\epsilon) d\Omega + \frac{1}{\beta} \int_{\Omega_{\text{ext}}} (u - \mathbb{E}[u_g]) v \phi_\epsilon d\Omega = \int_{\Omega_{\text{ext}}} f v (1 - \phi_\epsilon) d\Omega \quad (5.15)$$

для произвольной функции $v \in V_0(\Omega_{\text{ext}})$, где последнее пространство состоит функций, обрашающихся в ноль на $\partial\Omega_{\text{ext}}$.

Рассмотрим теперь два конкретных способа выбора оператора продолжения \mathbb{E} . Для этого введем в области Ω_{ext} оператор проекции ближайшей точки P на Γ , см. раздел 5.1. Приведенные ниже способы соответствуют двум описанным в [Macdonald2011] способам задания граничных условий.

Способ 1. Построим продолжение функции, заданной в Ω , используя заданную на Γ функцию g (причем пока не обязательно $g = u|_\Gamma$):

$$\mathbb{E}_g[u](\mathbf{x}) = \mathbb{E}_{g,1}[u](\mathbf{x}) = \begin{cases} u(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ g(P(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in \Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega. \end{cases} \quad (5.16)$$

Таким образом построенная функция, вообще говоря, не будет непрерывной в случае, если $g \neq u|_\Gamma$.

В силу того, что значения продолжения в области $\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega$ зависят только от значений на границе, далее иногда будем писать $\mathbb{E}_1[u] \equiv \mathbb{E}_1[g]$, где $g = u|_\Gamma$.

Способ 2. Построим продолжение другим способом, используя значения g на границе и значения u внутри области Ω . Конкретно, положим, аналогично [Macdonald2011],

$$\mathbb{E}_g[u](\mathbf{x}) = \mathbb{E}_{g,2}[u](\mathbf{x}) = \begin{cases} u(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ 2g(P\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}_{\text{sym}}), & \mathbf{x} \in \Omega_{\text{ext}}. \end{cases} \quad (5.17)$$

Здесь $\mathbf{x}_{\text{sym}} = \mathbf{x} + 2[P\mathbf{x} - \mathbf{x}]$, точка \mathbf{x}_{sym} является «отражением» точки \mathbf{x} относительно границы Γ . Значение продолжения в точке \mathbf{x}_{sym} определяется соотношением

$$\frac{1}{2}(u(\mathbf{x}) + u(\mathbf{x}_{\text{sym}})) = g(\mathbf{x}_{\text{cp}}), \quad \mathbf{x}_{\text{cp}} = P\mathbf{x}.$$

Важно отметить следующее. Если (в обоих случаях) $u|_\Gamma \neq g$, то построенные продолжения не являются непрерывными. Если же $g = u|_\Gamma$, то построенные продолжения являются непре-

рывными. В том случае, если используется соболевская линейка пространств, $V(\cdot) = W_2^1(\cdot)$, построенное продолжение будет иметь требуемую гладкость.

При этом для первого способа значение производной продолжения по направлению нормали к Γ в точке $x_{\text{ср}}$ может иметь разрыв. Значение продолжения в области $\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega$ не зависит от выбора функции u . Геометрически продолжение строится как постоянное продолжение значения функции g в точке границы вдоль внешней нормали к ней.

Для второго способа при выполнении условия $g = u|_{\Gamma}$ продолжение (а) является непрерывным и (б) имеет непрерывные первые производные вдоль направления внешней нормали к границе Γ в точке $x_{\text{ср}}$.

Отметим следующее:

- Формально оператор продолжения обоих описанных видов определен для произвольной функции из $V(\Omega)$, не обязательно имеющей след g на границе Γ . Однако в этом случае результат продолжения не будет непрерывной на Γ функцией.

По этой причине условие гладкости продолжения в Ω_{ext} играет принципиальную роль: именно оно гарантирует то, что решение задачи будет иметь след g на границе Γ .

- В качестве определенной в области Ω функции u_g , фигурирующей в постановке (5.14), может выступать произвольное (в том числе слабое) решение рассматриваемого уравнения в Ω .

Эти соображения приводят к следующей постановке задачи: определить функцию $u \in V(\Omega_{\text{ext}})$, такую, что

$$\int_{\Omega_{\text{ext}}} \nabla u \nabla v (1 - \phi_\epsilon) d\Omega + \frac{1}{\beta} \int_{\Omega_{\text{ext}}} (u - \mathbb{E}_g[u|_{\Omega}]) v \phi_\epsilon d\Omega = \int_{\Omega_{\text{ext}}} f v (1 - \phi_\epsilon) d\Omega \quad (5.18)$$

для произвольной функции $v \in V_0(\Omega_{\text{ext}})$.

В такой постановке выполнение граничного условия, по существу, является следствием того, что

- в области Ω функция u является решением нужного уравнения;
- в области Ω_{ext} она является (слабым) решением *функционального* уравнения

$$u|_{\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega} = \mathbb{E}_g[u|_{\Omega}];$$

- функция u в Ω_{ext} обладает требуемой гладкостью, то есть $u \in V(\Omega_{\text{ext}})$.

Оба способа построения оператора продолжения \mathbb{E} являются конструктивными: как в континуальном, так и в дискретном случае значение оператора продолжения может быть легко вычислено, как только определен оператор P проекции ближайшей точки на границу, см. главу 3.

Основным отличием двух рассмотренных выше способов задания функции u_g в области $\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega$ — то есть способов определения оператора продолжения \mathbb{E} — является то, что

продолжение функции u_g во втором случае имеет бóльшую гладкость (оно имеет непрерывную производную в направлении нормали к границе), чем в первом случае (когда продолжение является непрерывным, но, вообще говоря, имеет разрыв нормальной производной к границе). Это позволяет считать, что асимптотическая точность сходимости в части выполнения граничных условий на границе во втором случае будет выше, чем в первом. В работе [Macdonald2011] этот факт подтверждается расчетами при использовании конечно-разностных схем.

Наконец, покажем, что рассмотренный подход имеет тесную связь с классическим методом фиктивных областей ([Марчук1989], см. также [Ramière2007]). В терминах настоящего раздела соответствующую слабую постановку задачи из [Ramière2007] можно записать в виде: определить функцию $u \in V(\Omega_{\text{ext}})$, удовлетворяющую следующему уравнению:

$$\int_{\Omega_{\text{ext}}} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \frac{1}{\beta} \int_{\bar{\Omega}_{\text{ext}} \setminus \Omega} (u - \mathbb{E}[u_g])v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad (5.19)$$

для произвольного $v \in V(\Omega_{\text{ext}})$. В терминах работы [Ramière2007] такой подход называется методом «внешнего штрафа» (“exterior penalty”). Термин «внешний» означает, что в конечномерном случае область Ω состоит из конечных элементов, расположенных внутри области Ω или имеющих непустое пересечение с ее границей Γ . В этом случае второе слагаемое и правая часть в (5.19) формально соответствует второму слагаемому и правой части в (5.14), если формально положить, что сглаженная характеристическая функция $\phi_\epsilon(\mathbf{x})$ области $\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega$ совпадает с ее характеристической функцией $\chi(\mathbf{x})$. Свойства соответствующей конечномерной задачи и способы выбора штрафа β подробно рассмотрены в [Ramière2007].

Таким образом, по-существу, конечно-элементным аналогом предложенных в [Macdonald2011] способов задания граничных условий является метод фиктивных областей (в варианте с диффузной или с четкой границей) при специальном выборе продолжения решения задачи в область Ω_{ext} .

5.1.3 Конечномерные аппроксимации

Для построения конечномерных аппроксимаций задачи (5.15) поступим стандартным способом. Введем в области Ω_{ext} конечно-элементную сетку и соответствующие конечномерные пространства $V_h(\Omega_{\text{ext}})$.

Тогда следствием (5.15) будет следующая конечномерная задача: определить вектор \mathbf{u} , который является решением системы уравнений:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} + \frac{1}{\beta}\mathbf{M}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{ext}}) = \mathbf{f}, \quad (5.20)$$

где элементы матриц \mathbf{A} , \mathbf{M} определены как

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \int_{\Omega_{\text{ext}}} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j (1 - \phi_\epsilon) \, d\Omega, \quad [\mathbf{M}]_{ij} = \int_{\Omega_{\text{ext}}} \varphi_i \varphi_j \phi_\epsilon \, d\Omega,$$

$$[\mathbf{f}]_i = \int_{\Omega_{\text{ext}}} f \varphi_i (1 - \phi_\epsilon) \, d\Omega,$$

где $i, j \in \mathcal{N}$; $\varphi_i = \varphi_i(\mathbf{x})$, $i \in \mathcal{N}$ — базисные функции, \mathbf{u}_{ext} — конечномерная аппроксимация значения оператора продолжения. В силу вида функции ϕ_ϵ матрица последней системы будет иметь «почти» блочно-диагональный вид — так как слагаемые \mathbf{A} и \mathbf{M} будут одновременно отличны нуля только в тех узлах, которые расположены в области $\text{supp}(1 - \phi_\epsilon) \cap \text{supp}(\phi_\epsilon)$, которая представляет собой полосу шириной 2ϵ в окрестности границы Γ . Отметим, что способ построения оператора продолжения \mathbb{E} не меняется в рассматриваемом конечномерном случае, главу 3.

Более того, в случае первого способа построения оператора продолжения значения \mathbf{u}_{ext} в узлах сетки, которые расположены в области $\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega$, заданы непосредственно граничным условием g и никак не зависят от значения решения в узлах, расположенных внутри области Ω . Это означает, что значение решения \mathbf{u}_{ext} в этих узлах известно.

В том случае, когда используется второй способ построения оператора продолжения, значения функции \mathbf{u}_{ext} в узлах сетки, расположенных на границе Γ или в области $\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega$, могут быть явно выражены через значения решения \mathbf{u} в узлах сетки, расположенных внутри области Ω аналогично [Macdonald2011], для конечноэлементного варианта — в главе 3.

Далее систему (5.20) можно упростить, заменяя матрицу масс \mathbf{M} на диагонализированную матрицу $\tilde{\mathbf{M}}$ (“lumped mass matrix”; что может рассматривать как приближенный способ ее вычисления, см., например, [Chen1985, Hinton1976]).

Для обоих (дискретных) способов определения оператора продолжения можно показать, что оператор продолжения является линейным, то есть $\mathbf{u}_{\text{ext}} = \mathbf{E}\mathbf{u}$, где \mathbf{E} — матрица соответствующей размерности. При этом для степеней свободы решения, которые соответствуют узлам сетки, расположенным в Ω или на ее границе, оператор \mathbf{E} является тождественным.

В этом случае система уравнений (5.20) принимает вид:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} + \frac{1}{\beta}\tilde{\mathbf{M}}[I - \mathbf{E}]\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

где I — единичная матрица.

Эта постановка является законченной и может применяться непосредственно. Формально ее можно привести к виду, в точности совпадающему с предложенным в [Macdonald2011] следующим образом. Пусть \mathcal{N}_ω — множество узлов сетки $\mathcal{T}_h(\Omega_{\text{ext}})$, которые расположены строго внутри области Ω , $\mathcal{N}_{\tilde{\omega}} = \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_\omega$. Определим сеточные области ω_h и $\tilde{\omega}_h$ как

$$\omega_h = \bigcup_{i \in \mathcal{N}_\omega} \text{supp} \varphi_i(\mathbf{x}), \quad \tilde{\omega}_h = \mathcal{T}_h(\Omega_{\text{ext}}) \setminus \omega_h, \quad \tilde{\omega}_h = \mathcal{T}(\Omega_{\text{ext}}) \setminus \omega_h.$$

Другими словами, область ω_h является объединением конечных элементов, имеющих непустое пересечение с Ω , $\tilde{\omega}_h$ — ее дополнение до Ω_{ext} . Определим формально в слабой постановке задачи

$$\phi_\epsilon(\mathbf{x}) = \chi_{\tilde{\omega}_h}(\mathbf{x}).$$

Тогда

$$1 - \phi_\epsilon(\mathbf{x}) = 1 - \chi_{\tilde{\omega}_h}(\mathbf{x}) = \chi_{\omega_h}(\mathbf{x}).$$

Теперь, подставляя соответствующие выражения в (5.18), получим систему уравнений вида:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathcal{N}_\omega \mathcal{N}_\omega} & \mathbf{A}_{\mathcal{N}_\omega \mathcal{N}_{\tilde{\omega}}} \\ \frac{1}{\beta} \mathbf{E}_{\mathcal{N}_{\tilde{\omega}} \mathcal{N}_\omega} & -\frac{1}{\beta} \mathbf{I}_{\mathcal{N}_{\tilde{\omega}} \mathcal{N}_{\tilde{\omega}}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathcal{N}_\Omega} \\ \mathbf{u}_{\tilde{\mathcal{N}}_\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\mathcal{N}_\Omega} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Эта система уравнений в точности соответствует предложенному в [Macdonald2011] методу с той лишь разницей, что для построения аппроксимаций задачи используется метод конечных элементов, а не конечных разностей. Индексы у матриц и векторов в последнем уравнении обозначают, что соответствующие строки и столбцы соответствуют множествам узлов \mathcal{N}_ω и $\mathcal{N}_{\tilde{\omega}}$ сетки.

5.1.4 КЭ вариант метода проекции ближайшей точки: «пространственный» случай

Ниже построения предыдущего раздела обобщаются на случай произвольной достаточно гладкой поверхности с краем, вложенной в трехмерное пространство.

Геометрические построения. Рассмотрим одностороннюю поверхность $\bar{\mathcal{F}}$ с краем $\partial\mathcal{F}$, погруженную в трехмерное пространство \mathbb{R}^3 . Тогда

$$\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \partial\mathcal{F},$$

где открытая область \mathcal{F} — внутренняя часть поверхности, $\partial\mathcal{F}$ — ее граница. В некоторых случаях, когда это не будет вызывать неоднозначности, будем отождествлять обозначения \mathcal{F} и $\bar{\mathcal{F}}$. Будем считать, что \mathcal{F} и ее край имеют требуемую гладкость.

Поверхность $\bar{\mathcal{F}}$ будем считать расположенной внутри пространственной области Ω . Пусть Ω такова, что в каждой ее точке однозначно определены значения проектора ближайшей точки P на $\bar{\mathcal{F}}$ (см. раздел 5.1).

В зависимости от расположения точки в пространстве, ее проекция на $\bar{\mathcal{F}}$ принадлежит либо \mathcal{F} , либо $\partial\mathcal{F}$. Это позволяет представить область Ω в виде объединения

$$\Omega = \Omega_{\mathcal{F}} \cup \Omega_{\partial\mathcal{F}},$$

где

$$\Omega_{\mathcal{F}} = \{\mathbf{x} \in \Omega : P\mathbf{x} \in \mathcal{F}\}, \quad \Omega_{\partial\mathcal{F}} = \{\mathbf{x} \in \Omega : P\mathbf{x} \in \partial\mathcal{F}\}.$$

Границу $\partial\Omega_{\mathcal{F}}$ области $\Omega_{\mathcal{F}}$ представим в виде

$$\partial\Omega_{\mathcal{F}} = \Gamma_{\mathcal{F}} \cup \Gamma_{\partial\mathcal{F}}, \quad \Gamma_{\mathcal{F}} = \partial\Omega_{\mathcal{F}} \cap \partial\Omega, \quad \Gamma_{\partial\mathcal{F}} = \partial\Omega_{\mathcal{F}} \setminus \Gamma_{\mathcal{F}}.$$

Введенные обозначения иллюстрирует рисунок 5.1.

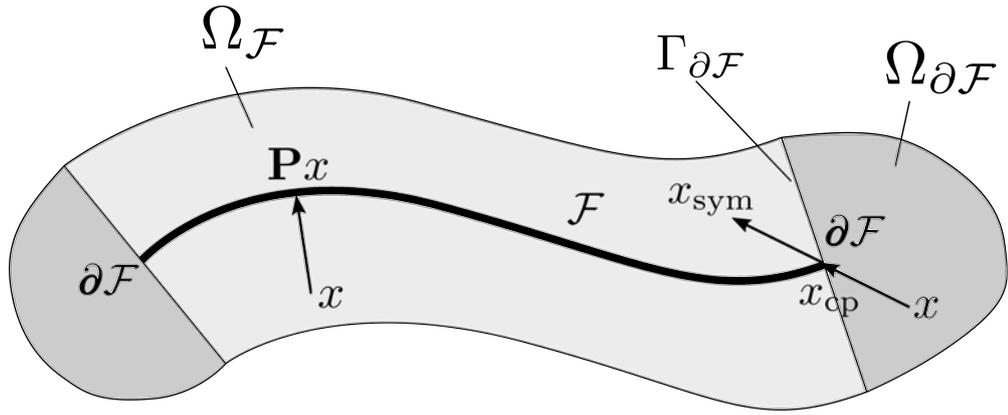


Рис. 5.1. Поверхность и ассоциированные с ней области.

Операторная постановка задачи. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу: определить заданную в $\bar{\mathcal{F}}$ функцию $u = u(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_{\mathcal{F}} \cdot (-\nabla_{\mathcal{F}} u) &= f, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{F}, \\ u|_{\partial \mathcal{F}} &= g, \quad \mathbf{x} \in \partial \mathcal{F}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

с начальным условием $u(\mathbf{x}, t = 0) = u_0(\mathbf{x})$.

В соответствии со способом, предложенным в [Macdonald2011] и описанным выше в разделе 5.1, рассмотрим продолжение уравнения (5.21) в пространственную область $\Omega_{\mathcal{F}}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\nabla \mathcal{E}[u]) = \mathcal{E}[f], \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{F}}. \quad (5.22)$$

След решения этого уравнения на \mathcal{F} является решением уравнения (5.21).

Граничные условия для уравнения (5.22) на «боковой» границе $\Gamma_{\partial \mathcal{F}}$ области $\Omega_{\mathcal{F}}$ могут быть построены как продолжение граничных условий на $\partial \mathcal{F}$ исходной задачи (5.21):

$$u|_{\Gamma_{\partial \mathcal{F}}} = \mathcal{E}[u|_{\partial \mathcal{F}}] = \mathcal{E}[g], \quad (5.23)$$

или, что то же,

$$u(\mathbf{x}) = g(P\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_{\text{cp}}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\partial \mathcal{F}}, \quad \mathbf{x}_{\text{cp}} = P\mathbf{x} \in \partial \mathcal{F}.$$

Отметим, что значения решения задачи (5.22) на части границы $\Gamma_{\mathcal{F}}$ полностью определяются как продолжение u из внутренних точек поверхности \mathcal{F} . По этой причине граничные условия для (5.22) на этой части границы не ставятся.

Слабая постановка со штрафом на $\Gamma_{\partial \mathcal{F}}$. Для построения слабой постановки задачи воспользуемся одним из ранее рассмотренных методов, а именно, соответствующим слабой постановке (5.15) и (5.18). Другие способы (например, на основе метода множителей Лагранжа) также могут быть рассмотрены, однако здесь этого не делается.

Тогда, в соответствии с (5.15), слабая постановка задачи имеет вид: определить функ-

цию $u \in V(\Omega)$, такую что

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} uv(1 - \phi_{\epsilon}) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \mathcal{E}[u] \nabla v(1 - \phi_{\epsilon}) d\Omega + \frac{1}{\beta} \int_{\Omega} (u - \mathbb{E}[u_g]) v \phi_{\epsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \mathcal{E}[f] v(1 - \phi_{\epsilon}) d\Omega \quad (5.24)$$

для произвольной функции $v \in V_0(\Omega)$. Здесь ϕ_{ϵ} — сглаженная характеристическая функция области $\Omega_{\mathcal{F}}$, пространство $V_0(\Omega)$ определено как

$$V_0(\Omega) = \{v \in V(\Omega) : v|_{\partial\Omega \setminus \Gamma_{\mathcal{F}}} = 0\}.$$

Оператор продолжения \mathbb{E} может быть построен точно так же, как и в предыдущем разделе, на основе оператора проектора ближайшей точки на «боковую» поверхность $\Gamma_{\partial\mathcal{F}}$ области $\Omega_{\mathcal{F}}$.

Отметим, что в последнем вариационном уравнении используется два оператора продолжения. Роль первого — \mathcal{E} — продолжить уравнение с поверхности в пространственную область $\Omega_{\mathcal{F}}$, роль второго — \mathbb{E} — продолжить заданную в $\Omega_{\mathcal{F}}$ функцию в (большую) область Ω .

В силу того, что $\text{supp}(1 - \phi_{\epsilon}) \supset \Omega_{\mathcal{F}}$, оператор продолжения \mathcal{E} должен быть определен не только в области $\Omega_{\mathcal{F}}$, но и в области $\Omega_{\partial\mathcal{F}}$. Конкретный способ его задания будет указан ниже.

Снова, аналогично предыдущему разделу, рассмотрим два способа построения оператора продолжения \mathbb{E} .

Способ 1. Определим оператор \mathbb{E} с помощью оператора \mathcal{E} как

$$\mathbb{E}_1[u](\mathbf{x}) \equiv \mathcal{E}[u](\mathbf{x}) = u(P(\mathbf{x})).$$

В этом случае значения функции, заданной в $\Omega_{\mathcal{F}}$ продолжаются в область $\Omega \setminus \Omega_{\mathcal{F}}$ ее значениями на границе $\partial\mathcal{F}$ поверхности \mathcal{F} . Здесь считается, что оператор продолжения \mathcal{E} действует на функции, заданные в $\Omega_{\mathcal{F}}$ описанным в разделе 5.1 способом.

Этот способ аналогичен способу 1 предыдущего раздела, см. (5.16).

Способ 2. Рассмотрим вспомогательный оператор \tilde{P} , который определим как [Macdonald2011]:

$$\tilde{P}(\mathbf{x}) = P(2P(\mathbf{x}) - \mathbf{x}).$$

Из геометрических соображений (см. рисунок 3.1) следует, что для точек \mathbf{x} , проекции которых принадлежат краю поверхности, справедливо соотношение

$$\tilde{P}(\mathbf{x}) \neq P(\mathbf{x}),$$

а для точек, проекции которых принадлежат внутренним точкам \mathcal{F} , значения проекторов \tilde{P} и P совпадают:

$$\tilde{P}(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}).$$

Другими словами, в области $\Omega_{\mathcal{F}}$ значения обоих проекторов совпадают,

$$P\mathbf{x} = \tilde{P}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{F}}.$$

Определим теперь оператор продолжения $\tilde{\mathcal{E}}$ как

$$\tilde{\mathcal{E}}[u](\mathbf{x}) = \begin{cases} u(P\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{F}}, \\ 2u(P\mathbf{x}) - u(2P\mathbf{x} - \mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_{\partial\mathcal{F}}. \end{cases}$$

Таким образом, значение продолжения в точке $\mathbf{x} \in \Omega_{\partial\mathcal{F}}$ выбирается так, что бы значение граничного условия в точке $P\mathbf{x}$ являлось результатом линейной интерполяции между точками \mathbf{x} и $2P\mathbf{x} - \mathbf{x}$.

Далее положим

$$\mathbb{E}_2[u] = \tilde{\mathcal{E}}[u].$$

При этом значения операторов \mathcal{E} и $\tilde{\mathcal{E}}$ в области $\Omega_{\mathcal{F}}$ совпадают.

Теперь поступим так же, как в предыдущем разделе: заменим в определении введенных операторов значения $u|_{\partial\mathcal{F}}$ на значения заданной на $\partial\mathcal{F}$ функции g . Соответствующие определения будут иметь вид:

$$\mathbb{E}_{g,1}[u](\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathcal{E}[u], & \mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{F}}, \\ g(P\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_{\partial\mathcal{F}} \end{cases}$$

и

$$\mathbb{E}_{g,2}[u](\mathbf{x}) = \begin{cases} u(P\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{F}}, \\ 2g(P\mathbf{x}) - u(2P\mathbf{x} - \mathbf{x}). & \mathbf{x} \in \Omega_{\partial\mathcal{F}}. \end{cases}$$

Напомним, что для точек $\mathbf{x} \in \Omega_{\partial\mathcal{F}}$ значения $P\mathbf{x}$ принадлежат границе $\partial\mathcal{F}$ поверхности \mathcal{F} . Более того, для точек $\mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{F}}$ имеем

$$u(P\mathbf{x}) = 2g(P\mathbf{x}) - u(2P\mathbf{x} - \mathbf{x}).$$

Здесь справедливы все комментарии к определению проекторов, представленные в предыдущем разделе. А именно, если продолжение будет гладкой функцией, то оно будет иметь значение g на $\partial\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}[g]$ на «боковой» поверхности $\Gamma_{\partial\mathcal{F}}$ области $\Omega_{\mathcal{F}}$.

Как и ранее, аппроксимации обоих операторов продолжения легко могут быть построены в дискретном случае, см. главу 3. Разница между ними аналогична таковой в предыдущем разделе: при втором способе задания гладкость продолженной функции в окрестности границы $\Gamma_{\mathcal{F}}$ выше, чем в первом.

В силу того, что внутри области $\Omega_{\mathcal{F}}$ значения построенного оператора совпадают со значениями оператора \mathcal{E} , будем использовать обозначения $\mathbb{E}_{g,1,2} = \mathcal{E}_g$ или просто $\mathbb{E} = \mathcal{E}$, если нет необходимости подчеркивать разницу между ними.

Таким образом, приходим к следующей постановке задачи (которая является аналогом постановки (5.18)): определить $u \in V_0(\Omega)$, такую, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} uv(1 - \phi_{\epsilon}) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \mathcal{E}_g[u] \nabla v(1 - \phi_{\epsilon}) d\Omega + \frac{1}{\beta} \int_{\Omega} (u - \mathcal{E}_g[u])v\phi_{\epsilon} d\Omega = \\ \int_{\Omega} \mathcal{E}_g[f]v(1 - \phi_{\epsilon}) d\Omega \quad (5.25) \end{aligned}$$

для произвольной функции $v \in V_0(\Omega)$. При этом в билинейной форме задачи и в слагаемом, задающем штраф, оператор продолжения — один и тот же. Аналогично разделу (5.1.3), для постановки (5.25) могут быть построены конечно-элементные аппроксимации. Как и ранее, она может быть применена в случае, когда поверхность \mathcal{F} не согласована с геометрией расчетной сетки.

Для полноты отметим, что функция ϕ_ϵ соответствует сглаженной характеристической функции области $\Omega \setminus \Omega_{\mathcal{F}}$. Конструктивный способ ее задания удобно дать в терминах рассматриваемой задачи. Это может быть сделано следующим образом.

Пусть функция $\tilde{d}(\mathbf{x})$ определена как

$$\tilde{d}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}_{\text{ср}} - \mathbf{x}_{\text{ср},2}\|,$$

где $\mathbf{x}_{\text{ср}} = P\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_{\text{ср},2} = P(2P\mathbf{x} - \mathbf{x})$. Таким образом, построенная функция не является функцией расстояния $d = d(\mathbf{x})$ от точки \mathbf{x} пространства до границы $\Gamma_{\partial\mathcal{F}}$, однако (а) совпадает с ней, если поверхность \mathcal{F} является частью плоскости (имеет нулевую кривизну) и отличается от $d(\mathbf{x})$ на величину $\mathcal{O}(d)$ при $d \rightarrow 0$ в общем случае, (б) монотонно убывает с убыванием функции расстояния и (в) равна нулю на границе $\Gamma_{\partial\mathcal{F}}$.

В заключение настоящего раздела обратим внимание на следующее:

- Любой из рассмотренных в настоящем разделе операторов продолжения может быть формально определен для любой достаточно гладкой функции $u \in V(\Omega)$ (а не только для функции на поверхности \mathcal{F}):

$$\mathcal{E}[u] = \mathcal{E}[u|_{\mathcal{F}}].$$

- Для использованных построений, вообще говоря, не требуется, чтобы был определен след функции, заданной в трехмерной области Ω на одномерной границе $\partial\mathcal{F}$.
- Билинейная форма (относительно u) задачи не является симметричной. Но, при условии требуемой гладкости продолжения, является непрерывной и положительно определенной в соболевской линейке пространств. Это обеспечивает применимость леммы Сеа и, как следствие, корректность задачи.
- Использованные операторы продолжения, при определенных ограничениях на гладкость поверхности \mathcal{F} и ее границы, являются непрерывными. Это следует из регулярности функции расстояния и знакового расстояния в окрестности поверхности \mathcal{F} , см. например, [Ambrosio1998, Krantz1981, Foot1984, Krantz1999].

Слабая постановки со штрафом на $\partial\mathcal{F}$. В рассмотренной выше постановке задачи, в том числе для продолженного уравнения, граничное условие полностью определяется своими значениями на границе $\partial\mathcal{F}$ области \mathcal{F} . Этот факт можно использовать для построения еще одного класса слабых постановок для решения уравнений на поверхности с краем методом проекции ближайшей точки. Рассмотрим их, для простоты, для стационарного случая уравнения Пуассона на поверхности \mathcal{F} .

Напомним, что граница области $\Omega_{\mathcal{F}}$ представляется в виде объединения $\Omega_{\mathcal{F}} = \Gamma_{\mathcal{F}} \cup \Gamma_{\partial\mathcal{F}}$. В силу способа построения оператора продолжения \mathcal{E} значения решения u на части грани-

цы $\Gamma_{\mathcal{F}}$ определяются исключительно его значениями на поверхности \mathcal{F} , то есть решением уравнения (5.21). Значения же решения краевой задачи на поверхности $\Gamma_{\partial\Omega}$ определяются граничным условием на $\partial\mathcal{F}$. Для задачи в области $\Omega_{\mathcal{F}}$ они могут быть записаны в виде:

$$u|_{\Gamma_{\partial\mathcal{F}}} = \mathcal{E}[g]|_{\Gamma_{\partial\mathcal{F}}},$$

или, другими словами:

$$u(\mathbf{x}, t) = g(P\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\partial\mathcal{F}}, \quad P\mathbf{x} \in \partial\mathcal{F}.$$

Это условие эквивалентно

$$u(\mathbf{x}, t) = \mathcal{E}[u], \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\partial\mathcal{F}}; \quad u|_{\partial\mathcal{F}} = g.$$

Другими словами, считается, что u определено всюду в $\Omega_{\mathcal{F}}$ и на $\Gamma_{\partial\mathcal{F}}$ как продолжение с поверхности и ее границы.

Далее учет граничных условий может быть осуществлен в слабой постановке задачи тем или иным вариационным способом, например, методом штрафа или вариационно-согласованным методом множителей Лагранжа. Ниже рассмотрен первый вариант.

В этом случае с учетом сделанных построений можно формально прийти к следующей слабой постановке: определить функцию $u \in V_0(\Omega)$, такую, что

$$\int_{\Omega_{\mathcal{F}}} \nabla \mathcal{E}[u] \cdot \nabla v \, d\Omega + \frac{1}{\beta} \int_{\partial\mathcal{F}} (u|_{\partial\mathcal{F}} - g)v \, d\gamma = \int_{\Omega_{\mathcal{F}}} f v \, d\Omega \quad (5.26)$$

для любых функций $v \in V_0(\Omega)$.

С использованием стандартных аргументов видно, что решение такой задачи, если оно существует, будет удовлетворять уравнению (5.21) и (приблизенно, с точностью, определяемой величиной штрафа $\beta \ll 1$) граничным условиям на $\partial\mathcal{F}$. В рассмотренной постановке соответствующее слагаемое метода штрафа обеспечивает выполнение граничного условия на $\partial\mathcal{F}$. Выполнение граничного условия на $\Gamma_{\partial\mathcal{F}}$ является следствием того, что в точках границы $\Gamma_{\partial\mathcal{F}}$ значения u определяются описанным выше оператором продолжения, см. (5.23).

Для того чтобы иметь возможность использовать расчетные сетки, заданные в области Ω и не согласованные с геометрией области $\Omega_{\mathcal{F}}$ и поверхностью \mathcal{F} , снова воспользуемся методом диффузной границы.

Сначала рассмотрим интеграл по $\partial\mathcal{F}$ в (5.26), который заменим на объемный.

Формально это можно сделать введением меры Дирака $\delta_{\partial\mathcal{F}}$ на линии $\partial\mathcal{F}$ и последующим приближением ее гладкой « δ -образной» функцией с компактным носителем,

$$\int_{\partial\mathcal{F}} (u - g)v \, d\gamma = \int_{\mathbb{R}^3} (u - g)v \delta_{\partial\mathcal{F}} \, d\Omega \approx \int_{\mathbb{R}^3} (u - g)v \delta_{\partial\mathcal{F}}^{(\epsilon)} \, d\Omega, \quad (5.27)$$

где $\delta_{\partial\mathcal{F}}^{(\epsilon)}(\mathbf{x})$, $\epsilon > 0$ — семейство функций с компактным носителем, таких, что для произвольной достаточно гладкой функции v справедливо:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta_{\partial\mathcal{F}}^{(\epsilon)} \, d\Omega = 1, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} v \delta_{\partial\mathcal{F}}^{(\epsilon)} \, d\Omega = \int_{\partial\mathcal{F}} v \, d\gamma, \quad \text{supp } \delta_{\mathcal{F}}^{(\epsilon)} \subseteq T(\epsilon, \partial\mathcal{F}) \subseteq \Omega, \quad (5.28)$$

где v — произвольная достаточно гладкая функция точки пространства,

$$T(\epsilon, \partial\mathcal{F}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(\mathbf{x}, \partial\mathcal{F}) \leq \epsilon\},$$

— трубчатая окрестность радиуса ϵ границы $\partial\mathcal{F}$, $\text{dist}(\mathbf{x}, \partial\mathcal{F})$ — кратчайшее расстояние от точки пространства до границы $\partial\mathcal{F}$ поверхности \mathcal{F} . Помимо этого будем считать, что $\delta_{\partial\mathcal{F}}^{(\epsilon)} \geq 0$, хотя это условие и не является необходимым для дальнейшего. Более подробно построение функций $\delta_{\partial\mathcal{F}}^{(\epsilon)}$ будет рассмотрено ниже.

Отметим также, что последнее равенство в (5.27) является приближенным и переходит в точное в предел $\epsilon \rightarrow 0$. На самом деле небольшой модификацией его можно сделать точным, см. [Kublik2016, Kublik2018] — и таким образом, отказаться от рассмотрения описанной δ -образной последовательности. В этом значении интеграла по границе в точности будет равняться объемному с точностью до ошибок сеточной аппроксимации. Это позволяет избавиться от параметра метода ϵ , задающего радиус трубчатой окрестности, как от величины, которая определяет точность приближенного равенства в (5.27).

Рассмотрим теперь способ задания регуляризованной δ -функции Дирака, отнесенной к линии $\partial\mathcal{F}$.

Пусть $\phi^{(\epsilon)}(r)$ — семейство функций, являющихся при $\epsilon \rightarrow 0$ симметричной аппроксимацией δ -функции Дирака на плоскости \mathbb{R}^2 . Способы построения таких аппроксимаций, в том числе для целей вычислительного анализа, рассмотрены, например, в [Zahedi2010, Hosseinia2015] (см. также обзор и ссылки в этих работах). Для дальнейшего важно, что элементы последовательности удовлетворяют минимальным необходимым требованиям, в частности,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi^{(\epsilon)} \rightarrow \delta_{\mathbb{R}^2}, \quad \int_{\mathbb{R}^2} \phi^{(\epsilon)} d\Omega = \int_{B_0(\epsilon)} \phi^{(\epsilon)} d\Omega = 1,$$

где сходимость понимается в смысле распределений (*-слабая), $B_0(\epsilon)$ — шар радиуса ϵ с центром в точке 0 в \mathbb{R}^2 .

Далее положим, что значения функций $\delta_{\partial\mathcal{F}}^{(\epsilon)}$ зависят только от расстояния от точки пространства до ее проекции на $\partial\mathcal{F}$ и определяются функцией $\phi^{(\epsilon)}$, то есть

$$\delta_{\partial\mathcal{F}}^{(\epsilon)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha} \phi^{(\epsilon)}(r), \quad r = \text{dist}(\mathbf{x}, \partial\mathcal{F}) = \|\mathbf{x} - P_{\partial\mathcal{F}}\mathbf{x}\|,$$

где r — расстояние от точки \mathbf{x} до $\partial\mathcal{F}$, $P_{\partial\mathcal{F}}$ — оператор проекции ближайшей точки на \mathcal{F} , α — константа, обеспечивающая условие нормировки в (5.28).

Важно отметить, что способ выбора $\phi^{(\epsilon)}(r)$ имеет большое значение. В частности, от выполнения *условия моментов* принципиально зависит величина ошибки между δ -функцией и ее регулярным приближением и, как следствие, точность приближенного равенства в (5.27) в смысле порядка малости относительно величины параметра ϵ , см., например, [Zahedi2010, Hosseinia2015] и ссылки там.

Помимо этого, требование симметричности аппроксимации δ -функции (то есть зависимости ее значений только от r) не является необходимым — возможно использование любой ее аппроксимации, в том числе как произведения аппроксимаций одномерных δ -функций (в этом случае носитель уже не имеет форму шара).

В результате придем к следующей слабой постановке задачи: определить функцию $u \in V_0(\Omega)$, такую, что

$$\int_{\Omega_{\mathcal{F}}} \nabla \mathcal{E}[u] \cdot \nabla v \, d\Omega + \frac{1}{\beta} \int_{T(\epsilon, \partial \mathcal{F})} (u - g)v \delta_{\partial \mathcal{F}}^{(\epsilon)} \, d\Omega = \int_{\Omega_{\mathcal{F}}} f v \, d\Omega \quad (5.29)$$

для любых функций $v \in V_0(\Omega)$.

Далее необходимо заменить интегрирование по области $\Omega_{\mathcal{F}}$ в пространственных интегралах на интегрирование по области Ω . Это может быть сделано с использованием его «диффузного» приближения, которое уже было построено выше и может быть использовано без изменений.

Дальнейшее исследование рассмотренных в настоящем разделе постановок проводить не будем.

Отметим только, что для того, чтобы (5.29) имело смысл, аргументы соответствующих билинейных форм должны быть определены не только в $\Omega_{\mathcal{F}}$, но и всюду в Ω . Если считать, что области $\Omega \setminus \Omega_{\mathcal{F}}$ значения u продолжены в соответствии со вторым описанным выше способом, то в континуальном случае слагаемое со штрафом равно нулю, а в дискретном — является малой величиной, убывающей при стремлении шага расчетной сетки к нулю.

5.2 Решение уравнений смазочного слоя: эволюционирующая трещина

Выше была рассмотрена задача о решении модельного уравнения на стационарной поверхности. В настоящем разделе рассмотрим алгоритма решения задачи о течении в смазочном слое на эволюционирующей поверхности трещины.

5.2.1 Постановка задачи

В настоящем разделе представлена математическая постановка задачи.

Модель течения в трещине. Рассмотрим одностороннюю поверхность $\bar{\mathcal{F}}$ с краем $\partial \mathcal{F}$, погруженную в трехмерное пространство \mathbb{R}^3 . Тогда

$$\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \partial \mathcal{F},$$

где открытая область \mathcal{F} — внутренняя часть поверхности, $\partial \mathcal{F}$ — ее граница. В некоторых случаях, когда это не будет вызывать неоднозначности, будем отождествлять обозначения \mathcal{F} и $\bar{\mathcal{F}}$. Будем считать, что \mathcal{F} и ее край имеют требуемую гладкость.

Поверхность $\bar{\mathcal{F}}$ будем считать расположенной внутри пространственной области Ω . Пусть Ω такова, что в каждой ее точке однозначно определены значения проектора ближайшей точки P на $\bar{\mathcal{F}}$ (см. раздел 5.1).

В зависимости от расположения точки в пространстве, ее проекция на $\bar{\mathcal{F}}$ принадлежит

либо \mathcal{F} , либо $\partial\mathcal{F}$. Это позволяет представить область Ω в виде объединения

$$\Omega = \Omega_{\mathcal{F}} \cup \Omega_{\partial\mathcal{F}},$$

где

$$\Omega_{\mathcal{F}} = \{\mathbf{x} \in \Omega : \text{P}\mathbf{x} \in \mathcal{F}\}, \quad \Omega_{\partial\mathcal{F}} = \{\mathbf{x} \in \Omega : \text{P}\mathbf{x} \in \partial\mathcal{F}\}.$$

Границу $\partial\Omega_{\mathcal{F}}$ области $\Omega_{\mathcal{F}}$ представим в виде

$$\partial\Omega_{\mathcal{F}} = \Gamma_{\mathcal{F}} \cup \Gamma_{\partial\mathcal{F}}, \quad \Gamma_{\mathcal{F}} = \partial\Omega_{\mathcal{F}} \cap \partial\Omega, \quad \Gamma_{\partial\mathcal{F}} = \partial\Omega_{\mathcal{F}} \setminus \Gamma_{\mathcal{F}}.$$

В случае эволюционирующей геометрии трещины приведенные построения сохраняются за исключением того, что на этот раз расчетная область зависит от времени, то есть теперь задача решается в области $\mathcal{F} = \mathcal{F}_t \equiv \mathcal{F}(t)$, где t — время. Соответственно, от времени зависят и все участвующие в построениях выше пространственные области. Другими словами, теперь $\Omega = \Omega_t \equiv \Omega(t)$, $\Omega_{\mathcal{F}} = \Omega_{\mathcal{F},t} \equiv \Omega_{\mathcal{F}}(t)$, и так далее. Дополнительно будем считать, что для всех моментов времени все рассмотренные ранее и зависящие от времени области, равно как и сама срединная поверхность трещины содержатся внутри некоторой пространственной и независимой от времени области $\tilde{\Omega}$.

Характер зависимости срединной поверхности \mathcal{F} от времени не может быть произвольным. Соответствующие уточнения будут даны ниже.

Уравнение течения в трещине имеет вид:

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \text{div} \left(-\frac{1}{12\nu} \rho w^3 \nabla p \right) = f_m, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{F}_t, \quad (5.30)$$

где ρ — плотность жидкости; $w = w(\mathbf{x})$ — раскрытие трещины, $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ — точка срединной поверхности трещины \mathcal{F} ; ν — вязкость жидкости, $p = p(\mathbf{x})$ — ее давление, f_m — массовая мощность внешних источников.

Будем считать, что плотность жидкости линейно зависит от давления, то есть

$$\rho = \rho_0 [1 + c_f(p - p_0)]$$

— плотность жидкости как функция давления, ρ_0 и p_0 — опорные значения плотности и давления, c_f — коэффициент сжимаемости жидкости.

Уравнение (5.30) должно быть дополнено начальным и граничным условием вида

$$p(\mathbf{x}, t = 0) = p_{\text{ini}}(\mathbf{x}), \quad p|_{\partial\mathcal{F}} = p_{\partial\mathcal{F}}.$$

Далее будем считать, что раскрытие w на фронте $\partial\mathcal{F}_t$ трещины всегда положительно,

$$w = w(\mathbf{x}) \geq w_0 > 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{F}.$$

В простейшем случае можно считать, что раскрытие w трещины не зависит от давления (но зависит от точки поверхности трещины). В более реалистичной постановке раскрытие является функцией давления. Эта зависимость отражает тот факт, что трещина располо-

жена внутри упругого тела, которое деформируется при изменении давления в трещине. В качестве конкретного примера такой зависимости далее возьмем линейную, то есть будем считать, что

$$w(\mathbf{x}) = \mathcal{W}(\mathbf{x}; p(\mathbf{x})), \quad \mathcal{W}(\mathbf{x}; p) = w_{\text{ref}}(\mathbf{x}) (1 + c_w [p(\mathbf{x}) - p_{\text{ref}}]), \quad (5.31)$$

где $w_{\text{ref}}(\mathbf{x})$ — раскрытие трещины при заданном опорном значении давления p_{ref} , c_w — коэффициент, описывающий «сжимаемость» трещины (точнее, вмещающей трещину среды). При решении полной связанной задачи (см. главу 6), величина раскрытия w определяется решением (поро)упругой задачи во вмещающей трещину среде.

Касательно геометрической модели эволюции трещины в постановке (5.30) будем считать, что она определена в соответствии с разделом 1.2.

5.2.2 Вычислительный алгоритм

Формальные аппроксимации по времени. Запишем задачу (5.30) в операторном виде как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(u)}{\partial t} + \mathcal{A}(w(u); u) &= f, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{F}_t, \\ u|_{\partial \mathcal{F}} &= g, \quad \mathbf{x} \in \partial \mathcal{F}_t, \end{aligned}$$

с начальным условием

$$u(\mathbf{x}, t = 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{F}_0.$$

Пусть задача решается на отрезке $t \in [0, T]$. Разобьем его на интервалы (шаги по времени) Δt так, что

$$0 = t_0 < \Delta t < \dots < n\Delta t = t_n < \dots < N\Delta t = t_N = T.$$

В соответствии с разделом 1.2 в момент времени t решение $u_n = u(t_n)$ определено в области $\mathcal{F}_{t_n} \equiv \mathcal{F}_n$, причем $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$.

Полудискретная (по времени) аппроксимация задачи (5.32) на интервале $[t_n, t_{n+1}]$ может быть определена как

$$\frac{\varphi(u_{n+1}) - \mathbb{E}[\varphi(u_n)]}{\Delta t} + \mathcal{A}(w(u_{n+1}); u_{n+1}) = f_{n+1}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{F}_{n+1}. \quad (5.32)$$

Здесь $\mathbb{E}[\cdot]$ — оператор продолжения, сопоставляющий функции, заданной в области \mathcal{F}_n , функцию, заданную в области \mathcal{F}_{n+1} . Для корректности задачи оператор продолжения должен удовлетворять определенным свойствам гладкости и ограниченности. В терминах соболевских норм такие свойства оператора продолжения сформулированы в [Lehrenfeld2019].

В настоящей работе строгое теоретическое обоснование использованного метода не дается, однако можно ожидать, что необходимые для его корректности условия выполняются в силу того, что:

- для гладких областей с гладкой границей естественные свойства гладкости решения совпадают с таковыми для случая плоских областей (подмножеств \mathbb{R}^2). Более того, поверхность \mathcal{F}_t для всех t может быть, в порядке допущения, взаимно-однозначно отображена гладким образом на двумерную область $\tilde{\mathcal{F}}_t \subset \mathbb{R}^2$ (и даже на не зависящую от времени каноническую область, например круг заданного радиуса на плоскости);

- заданное в пространстве векторное поле \mathbf{V} , определяющее эволюцию поверхности (см. раздел 1.2), определяет гладкое отображение $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_0$ на \mathcal{F}_t .

Отметим также следующее. В работах [Lehrenfeld2019] и [Burman2019] оператор продолжения не используется явным образом. Вместо этого используется неявный способ продолжения решения из области Ω_n в область Ω_{n+1} , который технически реализуется путем добавления в слабую постановку задачи дополнительной билинейной формы специального вида. В результате ограниченность и требуемая гладкость дискретного продолжения является следствием модифицированной вариационной постановки задачи. Указанный метод носит название “ghost penalty stabilization”. Он может непосредственно применяться для решения рассматриваемой в настоящей работе задачи.

Ниже рассмотрен алгоритм, который предполагает явное определение продолжение $E[u]$ решения u . А именно, заданное в области \mathcal{F}_n решение продолжается в область \mathcal{F}_{n+1} константой в направлении нормали к границе области \mathcal{F}_n .

В качестве альтернативного варианта может быть использован способ продолжения, типичный для метода X-FEM и описанный, например, в [Moës2002, Gravouil2002]:

1. сначала для заданного на границе $\partial\mathcal{F}_t$ векторного поля \mathbf{v} строится его продолжение в трубчатую окрестность $\partial\mathcal{F}_t$ (или во всю трехмерную область, содержащую поверхность);
2. далее это заданное в пространстве поле используется для построения продолжения решения из области \mathcal{F}_n в большую область путем решения уравнения типа уравнения переноса.

На каждом временном слое задача (5.32) решается на поверхности \mathcal{F}_{n+1} . Для ее решения может быть применен целый ряд методов, в том числе вариационный вариант метода проекции ближайшей точки.

Далее будем считать, что в ходе своей эволюции поверхность \mathcal{F}_t (и поверхности \mathcal{F}_n , $n = \overline{0, N}$) всегда расположены внутри пространственной области $\tilde{\Omega}$. Будем считать, что в этой области введена конечно-элементная сетка \mathcal{T}_h , ячейки которой используются для построения пространственных аппроксимаций задач (5.32) для $n = \overline{1, N}$. Область $\tilde{\Omega}$ и сетка \mathcal{T}_h не зависят от времени.

В каждый момент времени с поверхностью \mathcal{F}_n связана трехмерная (сеточная) область Ω_n^h , в которой решение задачи (5.32) будет аппроксимироваться методом проекции ближайшей точки. Конструктивно область Ω_n^h может быть построена как множество конечных элементов $\omega \in \mathcal{T}_h$, все узлы которых удалены от поверхности \mathcal{F}_n на расстояние, не превышающее значение заданного параметра δ , кратного шагу расчетной сетки. Всюду в области Ω_n^h будем считать определенным оператор проекции ближайшей точки P_n (индекс « n » указывает на номер временного шага).

Далее для решения задачи в области Ω_{n+1} непосредственно могут применяться алгоритмы из предыдущих разделов настоящей главы, см. также работы [Савенков2020а, Савенков2020б, Савенков2020а].

Схема используемого вычислительного алгоритма имеет следующий вид.

1. Задать начальные параметры задачи: поверхность $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_0$, поле скорости «роста» поверхности $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, заданное на ее крае $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{F}$; начальное условие $u_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$.

2. Задать область Ω и расчетную сетку \mathcal{T}_h в ней.
3. Положить $n = 0, t = 0$.
4. Вычислить дискретные аппроксимации проектора P_0^h ближайшей точки для поверхности \mathcal{F}_0 .
5. Для $n = \overline{1, N}$:
 - (a) Положить $n := n + 1$.
 - (b) Определить поле \mathbf{v} скорости развития фронта трещины (края поверхности).
 - (c) Задать сеточную область Ω_n^h как корректное подмножество конечных элементов сетки \mathcal{T}_h .
 - (d) На основе заданного поля \mathbf{v} и сеточного проектора P_{n-1}^h определить сеточную область Ω_n^h и проектор ближайшей точки P_n^h . Алгоритм вычисления проектора подробно описан в главе 3.
 - (e) Вычислить продолжение решения Eu_{n-1} из области Ω_{n-1}^h в область Ω_n^h .
 - (f) Построить и решить конечномерную аппроксимацию задачи (5.32).
 - (g) Перейти к шагу 5а.
6. Завершение работы алгоритма.

Отметим, что в ходе работы алгоритма поверхность задается непосредственно только на первом шаге работы алгоритма, при его инициализации. В дальнейшем рассчитывается только эволюция проектора P_n^h с течением времени. Образ этого проектора является аппроксимацией поверхности. Непосредственно поверхность в ходе работы алгоритма в том или ином виде не восстанавливается. Ее геометрические характеристики, если это необходимо, могут быть вычислены в соответствии с алгоритмами, описанными в главе 3.

Приведенный выше алгоритм предполагает на шаге 5f решение дискретной задачи относительно значения ее решения на «новом» временном шаге. Эта задача является нелинейной относительно раскрытия и, как следствие, давления в трещине, см. (5.30) и 5.31. Для определения ее решения будем использовать метод простой итерации.

Применительно к неявным по времени аппроксимациям задачи (5.30) этот алгоритм, описывающий переход от текущего состояния $\{p, \rho, w\}$ в момент t к состоянию $\{\hat{p}, \hat{\rho}, \hat{w}\}$ в очередной момент времени $t + \Delta t$ имеет следующий вид:

1. При $i = 0$ положить $\hat{p}_i = p$.
2. Вычислить \hat{w}_{i+1} как

$$\hat{w}_{i+1}(\mathbf{x}) = \mathcal{W}(\mathbf{x}; \hat{p}_i), \quad \hat{\rho}_{i+1}(\mathbf{x}) = \rho(\hat{p}_i(\mathbf{x})).$$

3. Определить \hat{p}_{i+1} как решение уравнения:

$$\frac{1}{\Delta t}(\rho(\hat{p}_{i+1})\hat{w}_{i+1} - \rho w) + \operatorname{div} \left(-\frac{1}{12\nu} \hat{p}_{i+1} \hat{w}_{i+1}^3 \nabla \hat{p}_{i+1} \right) = f. \quad (5.33)$$

4. Проверить выполнения критерия остановки итераций. В случае, если требуемая точность не достигнута, положить $i := i + 1$ и перейти к шагу 2. В случае, если требуемая точность достигнута, положить

$$\{\hat{p}, \hat{\rho}, \hat{w}\} := \{\hat{p}_{i+1}, \rho(\hat{p}_{i+1}), \mathcal{W}(\hat{p}_{i+1})\}$$

и завершить расчет временного шага.

В приведенном выше алгоритме считается, что решение получено с требуемой точностью, если равномерная норма приращения давления на итерации меньше заданного порогового значения ϵ_{iter} :

$$\left\| \frac{p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{p_0} \right\| < \epsilon_{\text{iter}}.$$

Метод проекции ближайшей точки и аппроксимации по пространству. В соответствие с изложенным, после аппроксимации по времени решение задачи сводится к решению на каждом шаге метода простых итераций стационарного и линейного уравнения (5.33) относительно «нового» значения давления \hat{p}_{i+1} .

Чтобы не загромождать обозначения, запишем уравнения (5.33) в виде

$$\frac{1}{\Delta t} M(u - \tilde{u}) + \nabla \cdot (A(\mathbf{x}) \nabla u) = f, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{F}. \quad (5.34)$$

Последнее уравнение решается с применением методов, предложенных в разделе 5.1 настоящей главы.

5.3 Примеры расчетов: решение уравнения на поверхности

5.3.1 Уравнение теплопроводности

В настоящем разделе рассматривается применение метода проекции ближайшей точки для решения простейшей задачи — краевой задачи Коши для уравнения теплопроводности. На примере этой задачи будут рассмотрены основные особенности реализации метода.

Постановка задачи имеет вид: определить определенную в цилиндре $\mathcal{F} \times [0, T]$ функцию $u = u(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{\mathcal{F}} u + f \quad (5.35)$$

и начальным и граничным условиям

$$u(\mathbf{x}, t = 0) = u_{\text{ini}}(\mathbf{x}), \quad u|_{\partial \mathcal{F}} = u_{\partial \mathcal{F}}.$$

Поверхность \mathcal{F} является гладкой поверхностью с краем (границей) $\partial \mathcal{F}$, вложенной в трехмерное пространство.

Основные этапы численного решения включают в себя следующие:

1. Задается пространственная область Ω , содержащая в себе поверхность \mathcal{F} с краем $\partial\mathcal{F}$, $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \partial\mathcal{F} \subset \Omega$. Ниже область Ω всегда имеет форму куба с ребром длины l . В этой области задается сетка Ω_h из тетраэдров, которая строится следующим образом: сначала в Ω вводится равномерная сетка из $N_x \times N_y \times N_z$ кубов меньшего размера, каждый из которых далее разбивается на пять тетраэдров. В дальнейшем всегда $N_x = N_y = N_z = N$. Под шагом сетки понимается величина $h = l/N$. Не предполагается, что поверхность \mathcal{F} и построенная сетка согласованны (другими словами, поверхность \mathcal{F} нельзя представить как объединение граней сетки).

Построенная сеточная область Ω_h в расчетах непосредственно не используется, однако служит для построения сеточной области $\Omega_{\mathcal{F}}^h$, в которой определяются решения продолжения уравнения (5.35) в пространство.

2. В соответствии с рассматриваемым подходом задача решается в сеточной области $\Omega_{\mathcal{F}}$, которая является «подсеткой» сетки Ω^h так, что расстояние (в смысле проекции ближайшей точки) от всех узлов сетки в области $\Omega_{\mathcal{F}}^h$ до поверхности не превышает заданную величину δ . Во всех расчетах ниже эта величина выбирается как $\delta = N_{\delta}h$, где $N_{\delta} = 4$.

Далее области Ω и Ω^h (а также $\Omega_{\mathcal{F}}^h$ и $\Omega_{\mathcal{F}}$) отождествляются и верхний индекс h не используется, если это не мешает пониманию.

3. В области $\Omega_{\mathcal{F}}$ применяется ранее описанный вариант метода. Граничные условия задаются простейшим способом, в соответствии с разделом 5.2.1.
4. В ряде рассматриваемых ниже случаев требуется задавать граничное условие в центре трещины. В этом случае считается, что заданным является значение решения в небольшой окрестности \mathcal{F}_{bc}^h центра трещины, которая имеет форму круга радиусом R , лежащего в плоскости трещины и центр которого совпадает с ее центром. В этом случае уравнение (5.35) формально решается в области $\mathcal{F} \setminus \Omega_{bc}$.

Для рассматриваемого в настоящем разделе примера поверхность \mathcal{F} имеет форму плоского диска диаметром $L = 1$. Диск расположен в плоскости Oxy с центром в начале координат. Вмещающая диск область Ω имеет форму куба с ребром длины $l = 1.5$.

На каждом ребре куба Ω задается $N = 31$ узел сетки. Таким образом, в рассматриваемом случае характерный шаг четки $h = 0.05$. Шаг по времени $\Delta t = 10^{-7}$.

Отметим, что длина ребра l куба Ω и радиус диска L меняются в зависимости от постановки задачи, однако число узлов N на ребре куба остается неизменным во всех описанных ниже вариантах расчета.

Правая часть уравнения (5.35) $f = 0$. Граничные и начальные условия определяются функциями

$$u_{ini}(\mathbf{x}) = 0, \quad u_{\partial\mathcal{F}}(\mathbf{x}, t) = 1.$$

В соответствии с алгоритмом метода ближайшей точки уравнение, являющееся продолжением уравнения (5.35), решается в пространственной области $\Omega_{\mathcal{F}} \subset \Omega$. Область $\Omega_{\mathcal{F}}$ состоит из тех конечных элементов, все узлы которых удалены от \mathcal{F} на расстояние не более

$\delta = 0.2$. Таким образом, «толщина» «облака» (множества узлов сеточной области $\Omega_{\mathcal{F}}$) равняется $2\delta = 0.4$ (≈ 8 узлов сетки). Наибольший диаметр облака равняется 1.4 (≈ 28 узлов сетки).

На примере рассматриваемой задачи проиллюстрируем основные геометрические построения метода проекции ближайшей точки.

На рисунке 5.2 синими сферами обозначены точки облака (узлы области $\Omega_{\mathcal{F}}$), сетка из красных линий показывает поверхность \mathcal{F} . Эта сетка является исключительно визуализационной и не используется в расчетах.

На рисунке 5.3 изображено сечение области Ω плоскостью, проходящей через центр диска \mathcal{F} и перпендикулярной его плоскости. Сетка красного цвета показывает поверхность \mathcal{F} , красные сферы — узлы в области $\Omega_{\mathcal{F}}$ («облаке»).

На рисунке 5.4 изображены сечения расчетной области плоскостями Oxy и Oyz . Красными сферами обозначены узлы области $\Omega_{\mathcal{F}}$, проекции которых принадлежат краю $\partial\mathcal{F}$ поверхности. Белые сферы — узлы в $\Omega_{\mathcal{F}}$, проекции которых являются внутренними точками поверхности \mathcal{F} . Синими линиями обозначена сетка, заданная в области Ω .

Дискретный оператор проектора ближайшей точки определен только для узлов, расположенных в области $\Omega_{\mathcal{F}}$. На рисунке 5.5 изображены вектора, соединяющие узлы сетки \mathbf{x} с их проекциями $P(\mathbf{x})$ на \mathcal{F} . Цвет каждого вектора соответствует его длине.

На рисунке 5.6 показана поверхность \mathcal{F} и проекции на нее всех узлов области $\Omega_{\mathcal{F}}$. Маркеры, обозначающие проекции узлов, расположенных во внутренней части области \mathcal{F} и на ее границе, показаны разным цветом (синим и красным соответственно).

Численное решение уравнения (5.35) через 1 и 10 шагов по времени показано на рисунке 5.7. В левом столбце рисунков показан след решения трехмерной задачи на поверхности \mathcal{F} (отметим, что именно так определяется решение исходной задачи на поверхности). В правом — след решения трехмерной задачи на плоскости, перпендикулярной поверхности \mathcal{F} и проходящей через ее центр.

Обратим внимание на следующий факт. Для точного решения рассматриваемой задачи линии уровня решения являются окружностями. Однако на приведенных выше рисунках линии уровня решения вблизи границы расчетной области имеют характерные «уголки». Это аппроксимационный эффект, связанный с тем, что рассматриваемая расчетная сетка является недостаточно мелкой. По существу, он связан с тем, что минимальное расстояние от проекции узла, расположенной вблизи границы, до непосредственно границы, имеющей форму окружности, меняется в пределах шага расчетной сетки. Другими словами, для ряда узлов расстояние от их проекции до границы области практически равно нулю. Однако сами эти узлы не являются «граничными» в том смысле, что при решении конечномерной задачи в них задается аппроксимация уравнения, а не аппроксимация граничного условия.

5.3.2 Течение в трещине с постоянным раскрытием

Тестовый расчет I. В настоящем разделе приведены результаты расчета модельной задачи о течении в трещине с заданным и не зависящим от давления (но зависящим от точки срединной поверхности трещины) раскрытием. Задача решается в размерных переменных.

Постановка задачи (за исключением ряда упрощений, см. ниже) описана в разделе 5.2.1. Течение описывается уравнением (5.30). Плотность жидкости, как ранее линейно зависит от

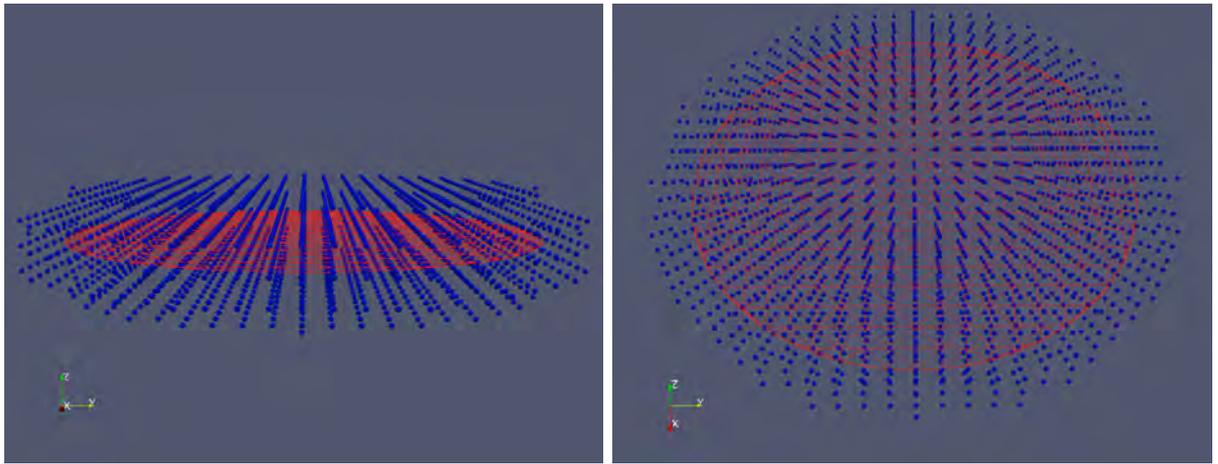


Рис. 5.2. Поверхность \mathcal{F} (красная сетка) и узлы трехмерной сетки (синие маркеры) в области $\Omega_{\mathcal{F}}$.

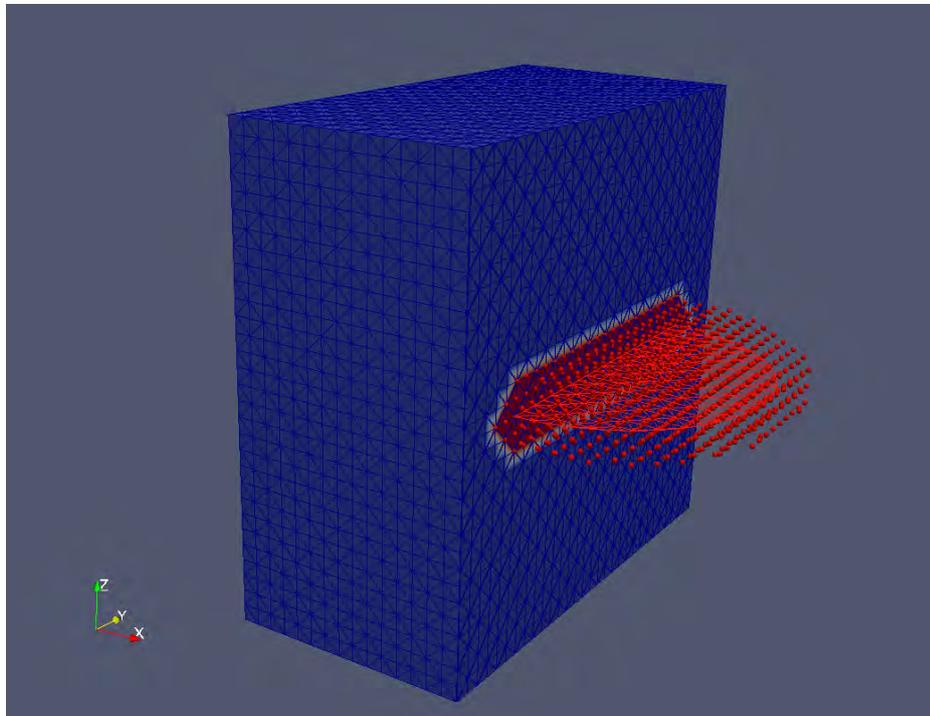


Рис. 5.3. Сечение области Ω , поверхность (красная сетка) и узлы сетки в области $\Omega_{\mathcal{F}}$ (красные маркеры).

давления, то есть

$$\rho = \rho_0[1 + c_f(p - p_0)]$$

— плотность жидкости как функция давления, ρ_0 и p_0 — опорные значения плотности и давления, c_f — коэффициент сжимаемости жидкости.

Уравнения (5.30) должно быть дополнено начальным и граничным условием вида

$$p(\mathbf{x}, t = 0) = p_{\text{ini}}(\mathbf{x}), \quad p|_{\partial\mathcal{F}} = p_{\partial\mathcal{F}}.$$

Трещина (как трехмерная область со срединной поверхностью \mathcal{F}) имеет вид двухосного

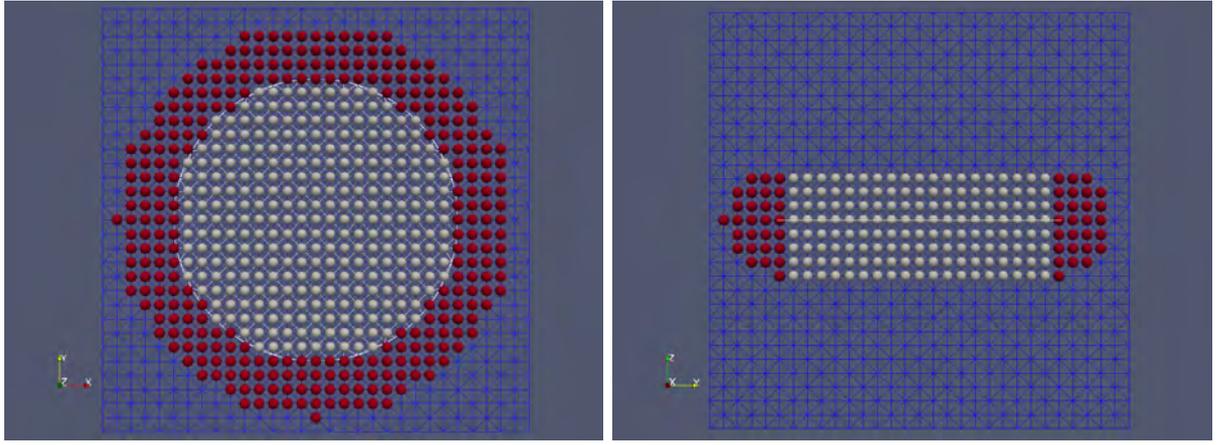


Рис. 5.4. Белые сферы — узлы, проецирующиеся внутрь \mathcal{F} , красные — на ее край $\partial\mathcal{F}$. Синими линиями обозначена расчетная сетка.

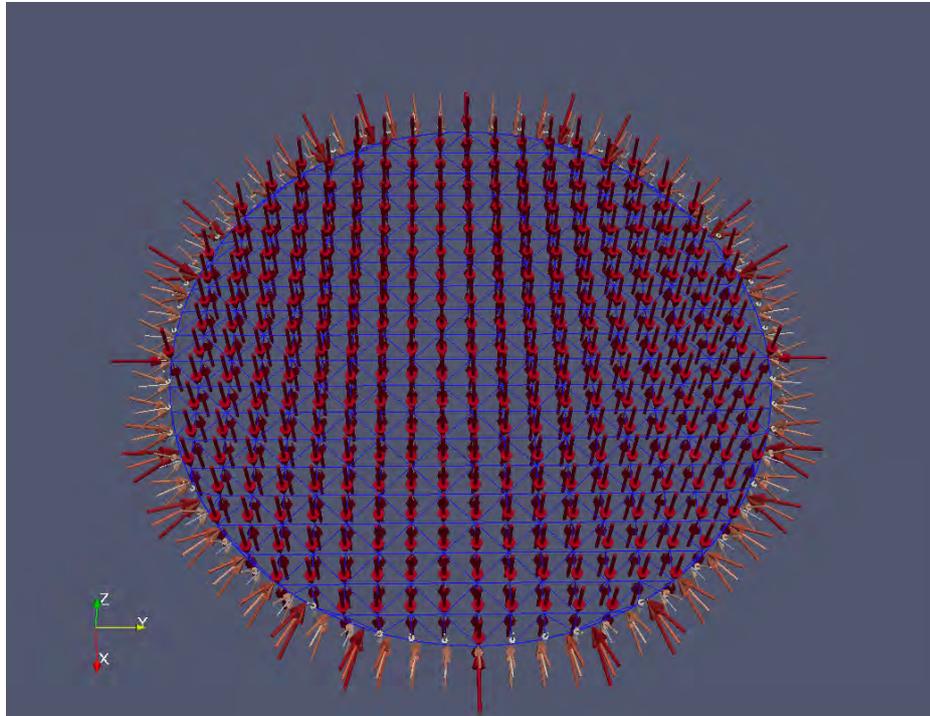


Рис. 5.5. Вектора проекции узлов области $\Omega_{\mathcal{F}}$ на \mathcal{F} .

эллипсоида, у которого длина l_0 меньшей оси равна максимальному раскрытию трещины, длина L большей — является параметром, который будет уточнен позже.

Пусть \mathbf{x}_c — центр трещины, $\mathbf{x}_{cp} = P(\mathbf{x})$ — проекция точки \mathbf{x} пространства на срединную поверхность трещины, d — расстояние от центра трещины до проекции точки на трещину:

$$d = d(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_{cp}\|,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в \mathbb{R}^3 .

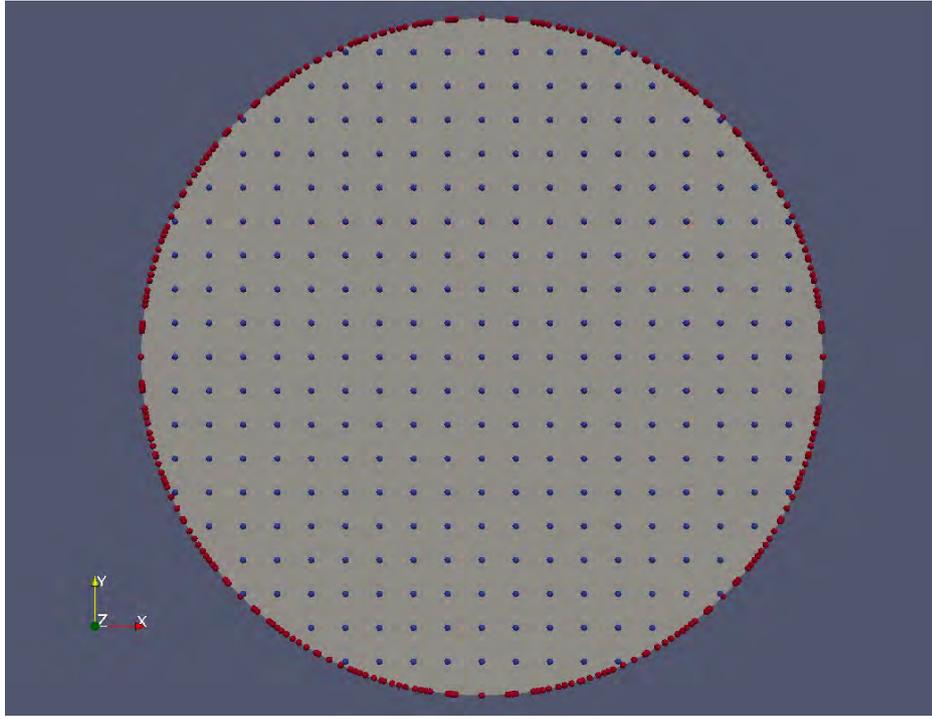


Рис. 5.6. Проекция точек облака внутрь поверхности \mathcal{F} — синие сферы, на ее край $\partial\mathcal{F}$ — красные сферы. Поверхность \mathcal{F} показана серым цветом.

Тогда уравнение «боковой» поверхности трещины имеет вид

$$\frac{w(\mathbf{x})^2}{l_0^2} + \frac{d(\mathbf{x})^2}{L_0^2} = 1.$$

Соответственно, раскрытие как функция точки срединной поверхности трещины выражается как

$$w(\mathbf{x}) = l_0 \sqrt{\left(1 - \frac{\|\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_{cp}\|^2}{L_0^2}\right)}. \quad (5.36)$$

Для того чтобы раскрытие трещины на ее фронте не равнялось нулю (в этом случае уравнение смазочного слоя (5.30) вырождается на фронте трещины), далее считается, что рассмотренный выше эллипсоид вращения имеет радиус $L_0 = (1 + \epsilon)L$, больший, чем радиус трещины. Здесь $0 < \epsilon \ll L$ — малый параметр.

Область Ω является кубом с ребром $l = 1.5$ м, шаг сетки $h = 0.05$ м. Шаг по времени $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-5}$. Радиус диска \mathcal{F} равен $L = 0.5$ м.

Все узлы расчетной области $\Omega_{\mathcal{F}}$ удалены от срединной поверхности на расстояние, не превышающее $\delta = 0.2$.

Максимальное раскрытие $l_0 = 30$ мм, радиус трещины $L = 1$ м, параметр $\epsilon = 0.1$ (таким образом, $L_0 = 1.1L$). Как и ранее, срединная поверхность трещины лежит в плоскости, параллельной координатной плоскости Oxy , ее центр совпадает с началом координат.

Физические параметры задачи имеют следующие значения: кинематическая вязкость жидкости $\nu = 1004 \cdot 10^{-6}$ Па·с, величина опорного давления $p_0 = 300$ бар, сжимаемость жидкости $c_f = 4.16 \cdot 10^{-10}$ Па $^{-1}$, плотность $\rho_0 = 1000$ кг/м 3 .

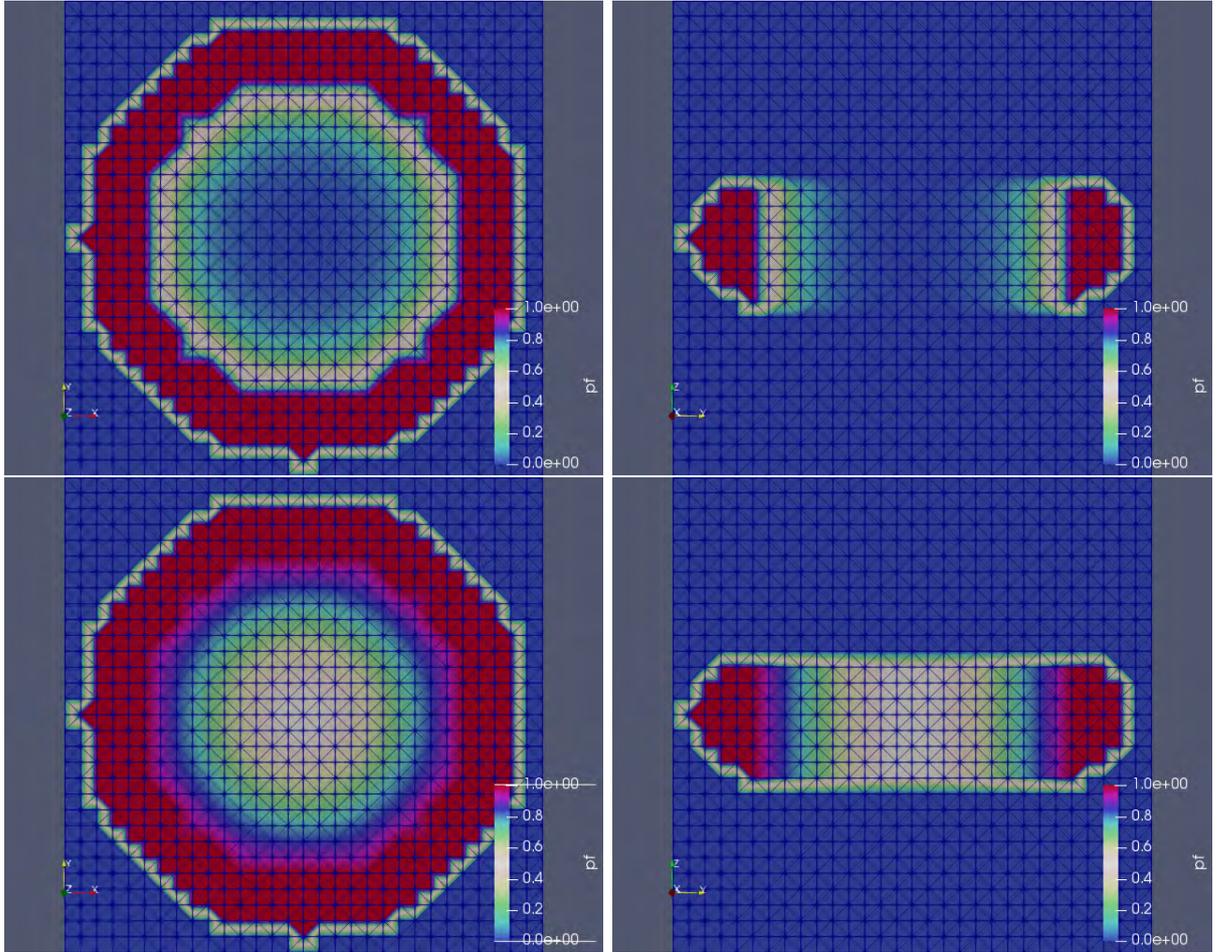


Рис. 5.7. Численное решение после одного шага по времени (вверху) и десяти шагов по времени (внизу). Слева: след решения продолжения уравнения (5.35) на плоскости, содержащей поверхность \mathcal{F} . Справа: след решения продолжения уравнения (5.35) на плоскости, перпендикулярной \mathcal{F} .

Граничные и начальные условия определяются функциями

$$p_{\text{ini}}(\mathbf{x}) = 0, \quad p_{\partial\mathcal{F}}(\mathbf{x}, t) = p_0.$$

В центре трещины, в круге Ω_{bc}^h радиусом $R = h$, где h — характерный шаг сетки, задается постоянное по времени давление равное p_0 .

Решение задачи для пяти временных слоев приведено на рисунке 5.8.

Тестовый расчет II. Постановка задачи в этом разделе совпадает с рассмотренной в предыдущем разделе.

Область Ω является кубом со стороной $l = 30$ м, шаг сетки $h = 1$ м. Уравнение решается в сеточной области $\Omega_{\mathcal{F}}$, все узлы которой находятся на расстоянии не более $\delta = 2$ м метров от срединной поверхности. Шаг по времени равен $\Delta t = 3 \cdot 10^{-8}$ с.

Срединная поверхность \mathcal{F} имеет форму диска радиусом $L = 10$ м с центром в начале координат. Максимальное раскрытие трещины $l_0 = 1$ см. В отличие от предыдущих случаев, срединная поверхность трещины ориентирована нормалью $(1, 1, 1)^T$. На рисунке 5.9 показано

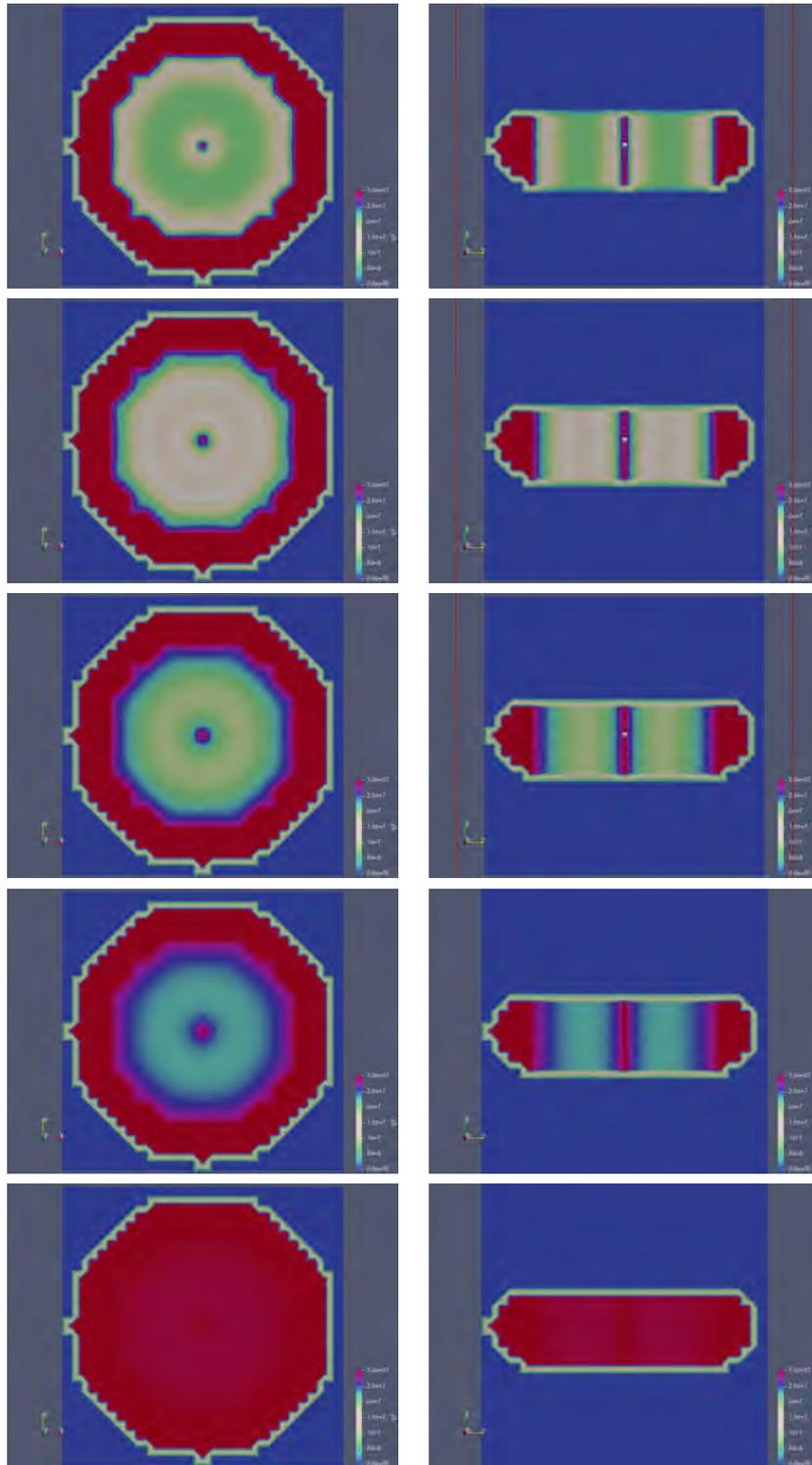


Рис. 5.8. Распределение давления при $t \in (1, 2, 3, 4, 11)\Delta t$ (снизу вверх). Слева: след решения продолжения уравнения на плоскости, содержащей поверхность \mathcal{F} . Справа: след решения продолжения уравнения (5.35) на плоскости, перпендикулярной \mathcal{F} .

распределение раскрытия по срединной поверхности трещины.

В центре трещины, в круге Ω_{bc}^h радиусом $R = h$, где h — характерный шаг сетки, задается постоянное по времени давление, равное p_0 .

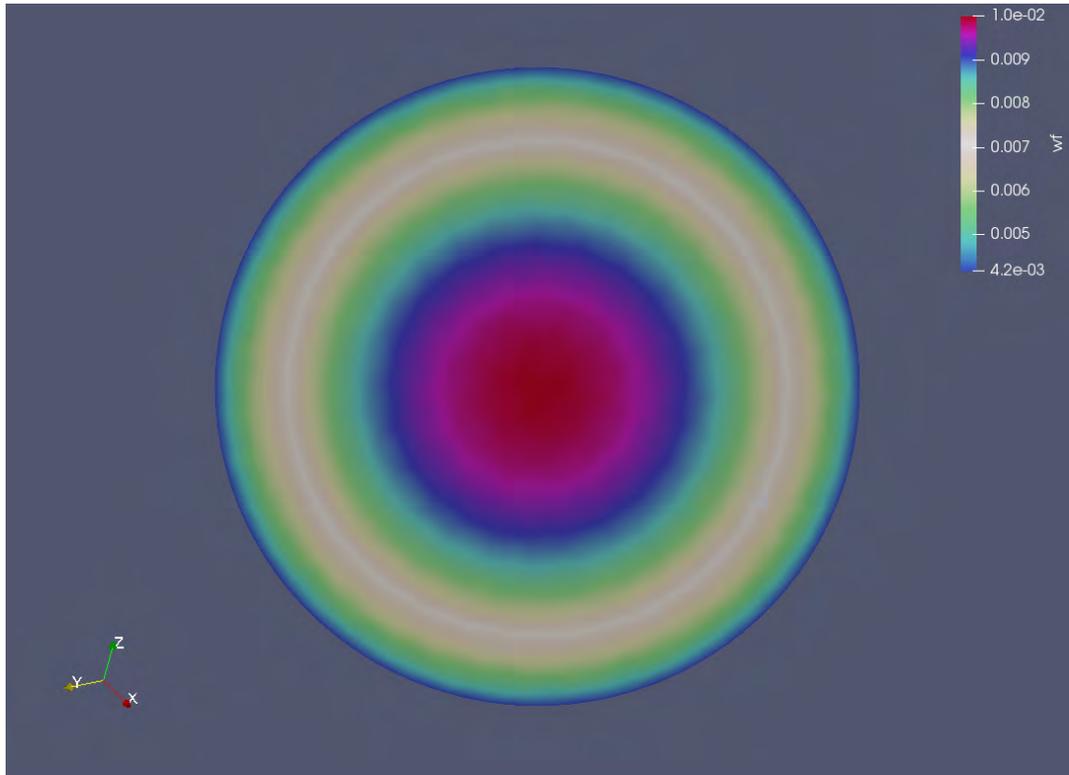


Рис. 5.9. Распределение раскрытия по срединной поверхности трещины.

Физические параметры жидкости и параметры уравнения состояния такие же, как и в предыдущем разделе.

Граничные и начальные условия определяются функциями

$$p_{\text{ini}}(\mathbf{x}) = 0, \quad p_{\partial\mathcal{F}}(\mathbf{x}, t) = p_0.$$

Результаты моделирования представлены на рисунке 5.10.

5.3.3 Нелинейная задача

В рассматриваемом примере геометрия срединная поверхность трещины не меняется, ее раскрытие зависит от давления. Течение жидкости описывается, как и ранее, уравнением (5.30). Зависимость раскрытия от давления определяется уравнением (5.31), опорное распределение раскрытия — зависимостью (5.36).

В начальный момент времени давление постоянно по срединной поверхности трещины и равно p_0 (опорному значению давления). Соответственно, начальное распределение раскрытия совпадает с опорным.

Граничные условия на фронте трещины:

$$p_{\partial\mathcal{F}} = p_{\partial\mathcal{F}}(\mathbf{x}) = p_0 \left(1 + \gamma \frac{x - x_c}{L} \right), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{F},$$

где $\gamma = 0.1$ — параметр, x — проекция вектора \mathbf{x} на ось $\mathcal{O}x$.

Расчетная область является кубом со стороной $l = 30$ м, шаг сетки $h = 1$ м. Уравнение

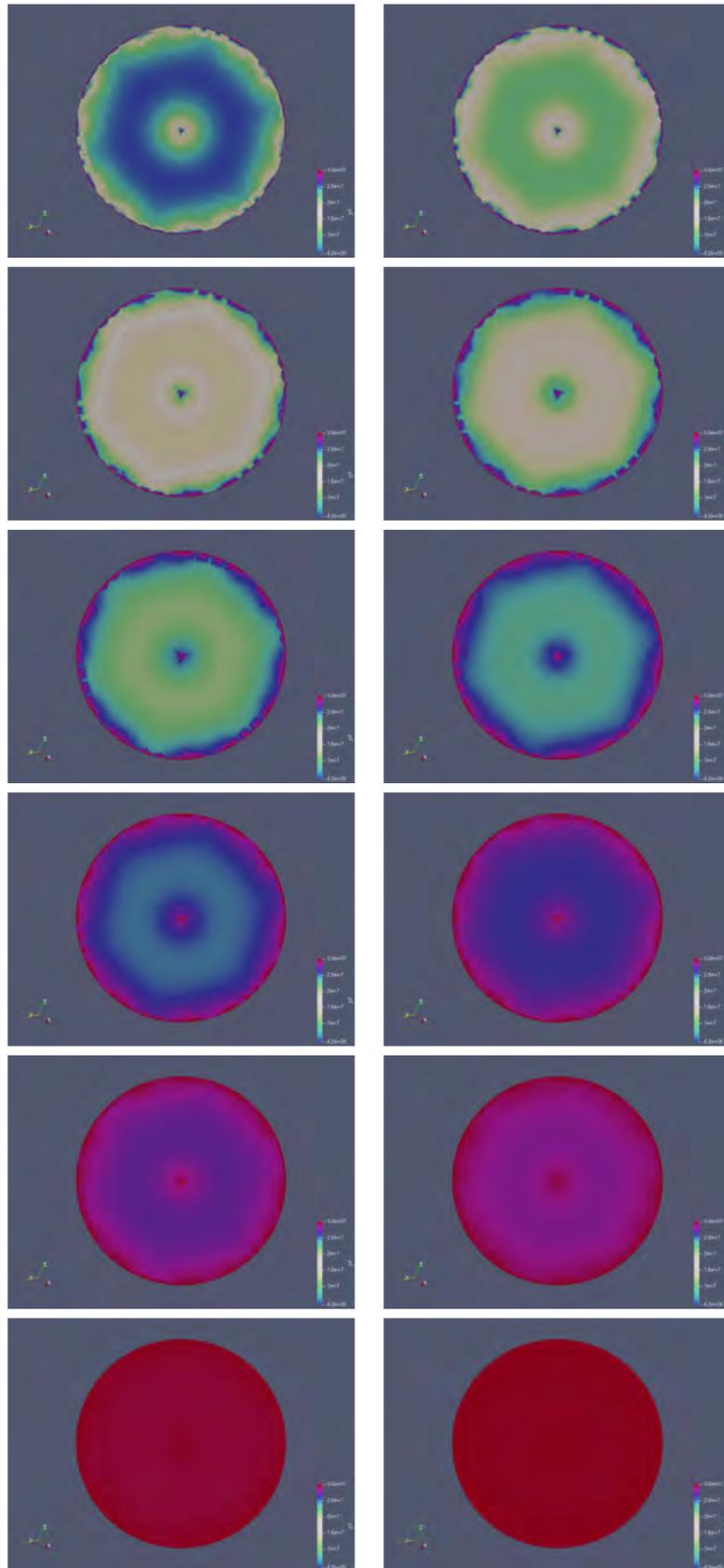


Рис. 5.10. Распределение давления (слева) и раскрытия (справа) в моменты времени $t \in (1, 2, \dots, 10, 15, 20)\Delta t$ (сверху вниз).

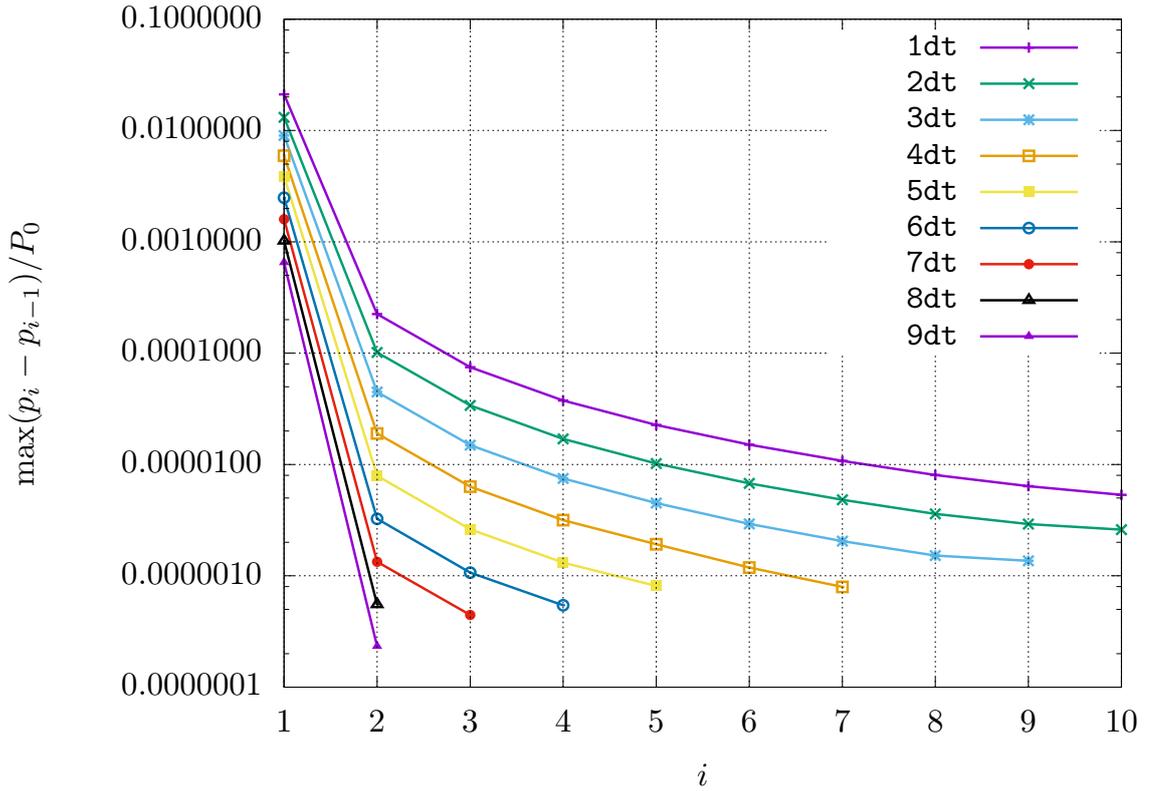


Рис. 5.11. Зависимость относительного изменения давления от номера итерации для последовательных временных слоев.

решается в сеточной области $\Omega_{\mathcal{F}}$, состоящей из тетраэдров, все узлы которых удалены от трещины на расстояние не превышающее $\delta = 2$ м. Шаг по времени $\Delta t = 0.5 \cdot 10^{-7}$ с.

Радиус трещины $L = 10$ м, трещина лежит в плоскости $\mathcal{O}xy$ с центром в начале координат. Максимальное раскрытие трещины определяется параметром $l_0 = 1$ см.

В центре трещины, в круге Ω_{bc}^h радиусом $R = h$ задается постоянное по времени давление, равное $1.1p_0$.

Параметр точности в критерии останова итераций равнялся $\epsilon_{iter} = 1.0 \cdot 10^{-6}$, максимальное число итераций равнялось $N_{iter}^{max} = 10$.

Физические параметры жидкости: кинематическая вязкость $\nu = 1 \cdot 10^{-3}$ Па·с, величина опорного давления $p_0 = 300$ бар, опорное раскрытие $l_0 = 1$ см, сжимаемость $c_f = 4.16 \cdot 10^{-10}$ Па $^{-1}$, плотность $\rho_0 = 1000$ кг/м 3 . Параметры уравнения (5.31) $c_w = 1/p_0$, $p_{ref} = p_0$.

Результаты расчетов представлены на рисунках 5.11 и 5.12. На рисунке 5.11 показана зависимость относительного изменения решения в зависимости от номера итерации для разных временных слоев. В целом для достижения требуемой точности требуется не более 10 итераций на каждом временном слое. Как и следует ожидать, число итераций существенно уменьшается с течением времени. На рисунке 5.12 показано непосредственно решение: распределение поля давления в трещине и ее раскрытие.

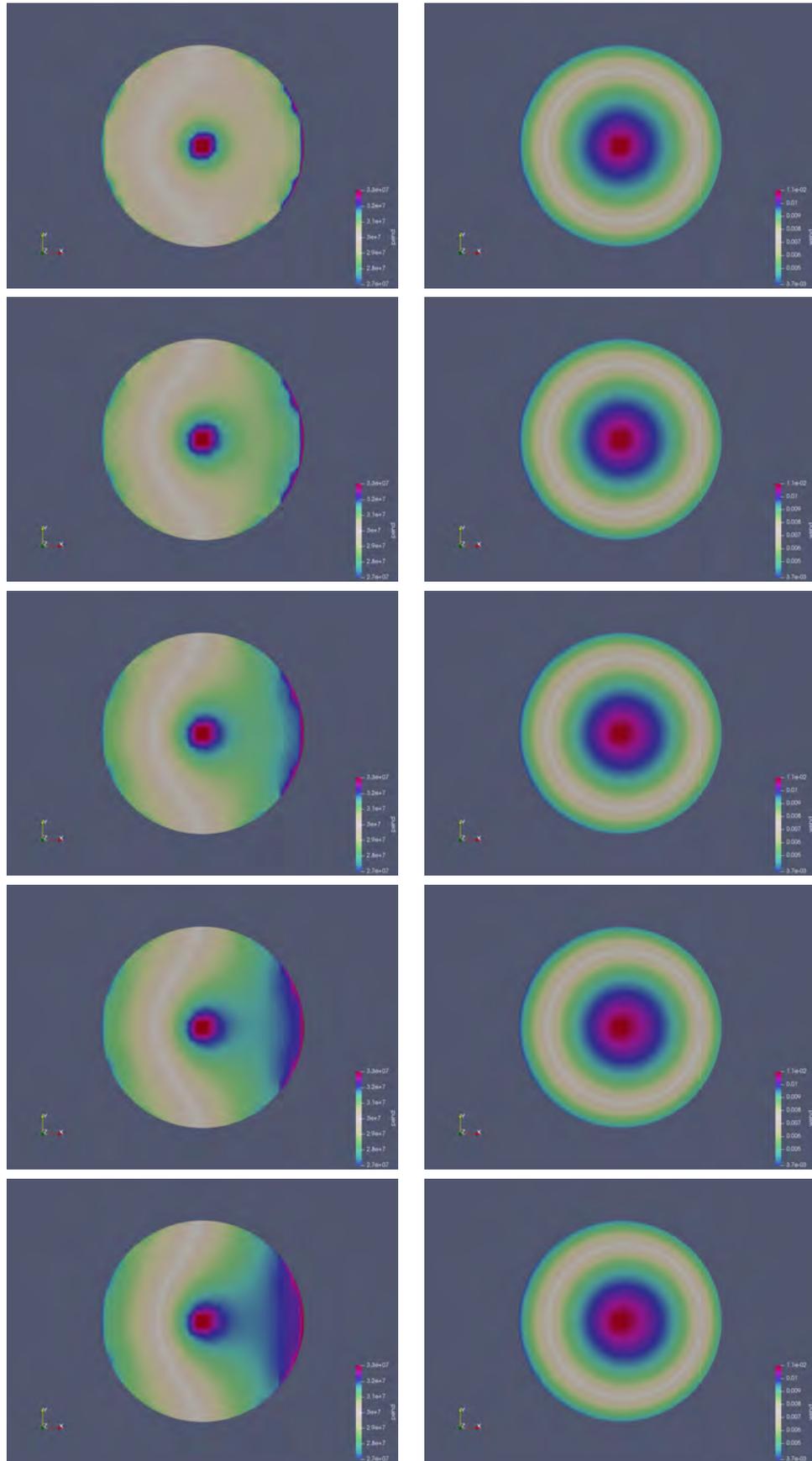


Рис. 5.12. Распределение давления (слева) и раскрытия (справа) в моменты времени $t \in (1, 2, 3, 4, 5)\Delta t$ (сверху вниз).

5.3.4 Задача для трещины сложной формы

В предыдущих разделах срединная поверхность трещины всегда являлась плоским диском. В настоящем разделе рассмотрен пример решения задачи для трещины, срединная поверхность которой плоской не является.

Постановка задачи имеет следующий вид.

В начальный момент времени давление постоянно по срединной поверхности трещины и равно p_0 (опорному значению давления). В начальный момент времени раскрытие трещины постоянно по срединной поверхности трещины и равно w_0 (опорное значение раскрытия). Зависимость раскрытия трещины от давления задается аналогично предыдущему разделу с $w_{\text{ref}}(\mathbf{x}) = w_0 = \text{const}$.

Расчетная область является кубом со стороной $l = 50$ м, шаг сетки $h = 1$ м. Уравнение решается в сеточной области $\Omega_{\mathcal{F}}$, состоящей из тетраэдров, все узлы которых удалены от трещины на расстояние, не превышающее $\delta = 2$ м. Шаг по времени $\Delta t = 0.00024$ с.

Параметр точности в критерии останова итераций равнялся $\epsilon_{\text{iter}} = 1.0 \cdot 10^{-6}$, максимальное число итераций равнялось $N_{\text{iter}}^{\text{max}} = 3$.

Физические параметры жидкости: кинематическая вязкость $\nu = 1 \cdot 10^{-3}$ Па·с, величина опорного давления $p_0 = 300$ бар, опорное раскрытие $w_0 = 1$ см, сжимаемость $c_f = 1 \cdot 10^{-6}$ Па $^{-1}$, плотность $\rho_0 = 1000$ кг/м 3 .

Параметры уравнения (5.31) $c_w = 1/p_0$, $p_{\text{ref}} = p_0$.

Расчеты проводились для трещины трех разных форм.

- Срединная поверхность является эллипсом с малой полуосью 10 м и большой полуосью 20 м. В центре трещины, в круге Ω_{bc}^h радиусом $R = h$, где h — характерный шаг сетки, задается постоянное по времени давление, равное $1.1p_0$. Результаты расчетов представлены на рисунке 5.13.
- Срединная поверхность является «следом» движения диска радиусом 5 м вдоль четверти окружности радиусом 12.5 м. В центре «изначального» диска, в круге Ω_{bc}^h радиусом $R = 2h$, где h — характерный шаг сетки, задается постоянное по времени давление, равное $1.1p_0$. Результаты расчетов представлены на рисунке 5.14.
- Срединная поверхность является частью параболоида высотой 3 м и радиусом в нижней точке 4 м. В верхней точке параболоида, в круге Ω_{bc}^h радиусом $R = h$, где h — характерный шаг сетки, задается постоянное по времени давление, равное $1.1p_0$. Результаты расчетов представлены на рисунке 5.15.

5.3.5 Случай эволюционирующей трещины

В настоящем разделе приведен пример решения задачи о течении жидкости в эволюционирующей трещине.

Будем считать, что раскрытие трещины зависит от давления в соответствии с уравнением (5.31).

Считается, что в пространстве, вмещающем срединную поверхность трещины, задано поле скорости, в соответствии с которым сдвигаются точки фронта трещины (края срединной

поверхности). В рассматриваемом случае поле скорости являлось осесимметричным,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v_m \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_m}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_m\|}, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{F}_t,$$

развитие трещины происходит в плоскости $\mathcal{O}xy$. Соответственно, поле скоростей задавалось координатой «центра роста» \mathbf{x}_m и постоянной (не зависящей от момента времени и точки пространства) скоростью v_m . За интервал времени Δt координата точки фронта трещины \mathbf{x} изменялась как

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \Delta t v_m \frac{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_m}{\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_m\|}.$$

Считалось, что область Ω в каждый момент времени содержит внутри себя срединную поверхность трещины. Область $\Omega_{\mathcal{F}}$, в которой решается задача, растет соответственно росту трещины.

Расчетная область является кубом со стороной $l = 50$ м, соответственно шаг сетки $h = 1$ м. Уравнение решается в сеточной области Ω_h^n , состоящей из тетраэдров, все узлы которых удалены от трещины на расстояние, не превышающее $\delta = 2$ м. Шаг по времени $\Delta t = 0.5 \cdot 10^{-7}$ с.

Радиус трещины в начальный момент времени $L = 10$ м, трещина лежит в плоскости $\mathcal{O}xy$ с центром в начале координат. Скорость роста трещины выбрана так, что $v_m \Delta t = 0.5$ м.

Считается, что опорное раскрытие является постоянным по поверхности трещины, $w_{\text{ref}}(\mathbf{x}) = \text{const}$.

Физические параметры задачи имеют следующие значения: кинематическая вязкость жидкости $\nu = 1004 \cdot 10^{-6}$ Па·с, величина опорного давления $p_0 = 300$ бар, сжимаемость жидкости $c_f = 4.16 \cdot 10^{-10}$ Па $^{-1}$, плотность $\rho_0 = 1000$ кг/м 3 . Опорное значение раскрытия $w_{\text{ref}} = 10$ мм.

В центре трещины, в круге Ω_{bc}^h радиусом $R = h$, где h — характерный шаг сетки, задается постоянное по времени давление, равное $1.1p_0$. В начальный момент времени давление в трещине равняется p_0 .

Параметр точности в критерии остановки метода простых итераций равнялся $\epsilon_{\text{iter}} = 1.0 \cdot 10^{-6}$, максимальное число итераций равнялось $N_{\text{iter}}^{\text{max}} = 10$.

Параметры уравнения (5.31) $c_w = 1/p_0$, $p_{\text{ref}} = p_0$.

Результаты расчетов представлены на рисунке 5.16.

5.4 Заключение

В настоящей главе предлагаются новые вариационные постановки, которые использованы для построения проекционно-сеточных вариантов метода проекции ближайшей точки. Рассматриваются как модельные двумерные задачи, так и задачи о решении параболических уравнений на поверхностях с краем. Предложенные классы постановок являются новыми и представляют независимый интерес. Дается интерпретация способа учета граничных условий типа предложенного в [Macdonald2011] в контексте вариационных постановок краевых задач и проекционно-сеточных методов их решения. Структура полученных постановок, как в континуальном, так и в дискретном случае, позволяет провести их теоретический анализ непосредственно, используя стандартные способы анализа метода конечных элементов. По-

строенные постановки имеют ряд общих черт с методами диффузной границы для учета граничных условий, теоретическое изучение которого как в континуальном, так и в дискретном случае рассмотрено в целом ряде работ, опубликованных в последние годы.

На примере рассмотренной модельной задачи показан способ построения слабой постановки специального вида, которая в дальнейшем непосредственно обобщается на случай конечноэлементного метода решения уравнений на поверхностях в рамках метода проекции ближайшей точки.

После этого рассматривается вариант конечно-элементного метода проекции ближайшей точки для решения уравнений на эволюционирующих поверхностях с краем. В качестве конкретной задачи рассматривается задача о течении жидкости в трещине в приближении смазочного слоя. Подробно описывается полный алгоритм решения задачи. Приводятся результаты расчетов — как модельных задач, так и уравнений смазочного слоя с раскрытием трещины, зависящим от давления.

С алгоритмической точки зрения результаты главы позволяют использовать для решения уравнения на поверхности ту же расчетную сетку тот же способ построения конечномерных аппроксимаций, который используется для решения уравнений в пространственной области. При программной реализации для этого могут быть применены практически все те алгоритмы (сборка матриц жесткости, численное интегрирование и так далее), что и для решения пространственной задачи. Это обеспечивает единую алгоритмическую базу и программную реализацию для задач как во вмещающей среде, так и на срединной поверхности трещине.

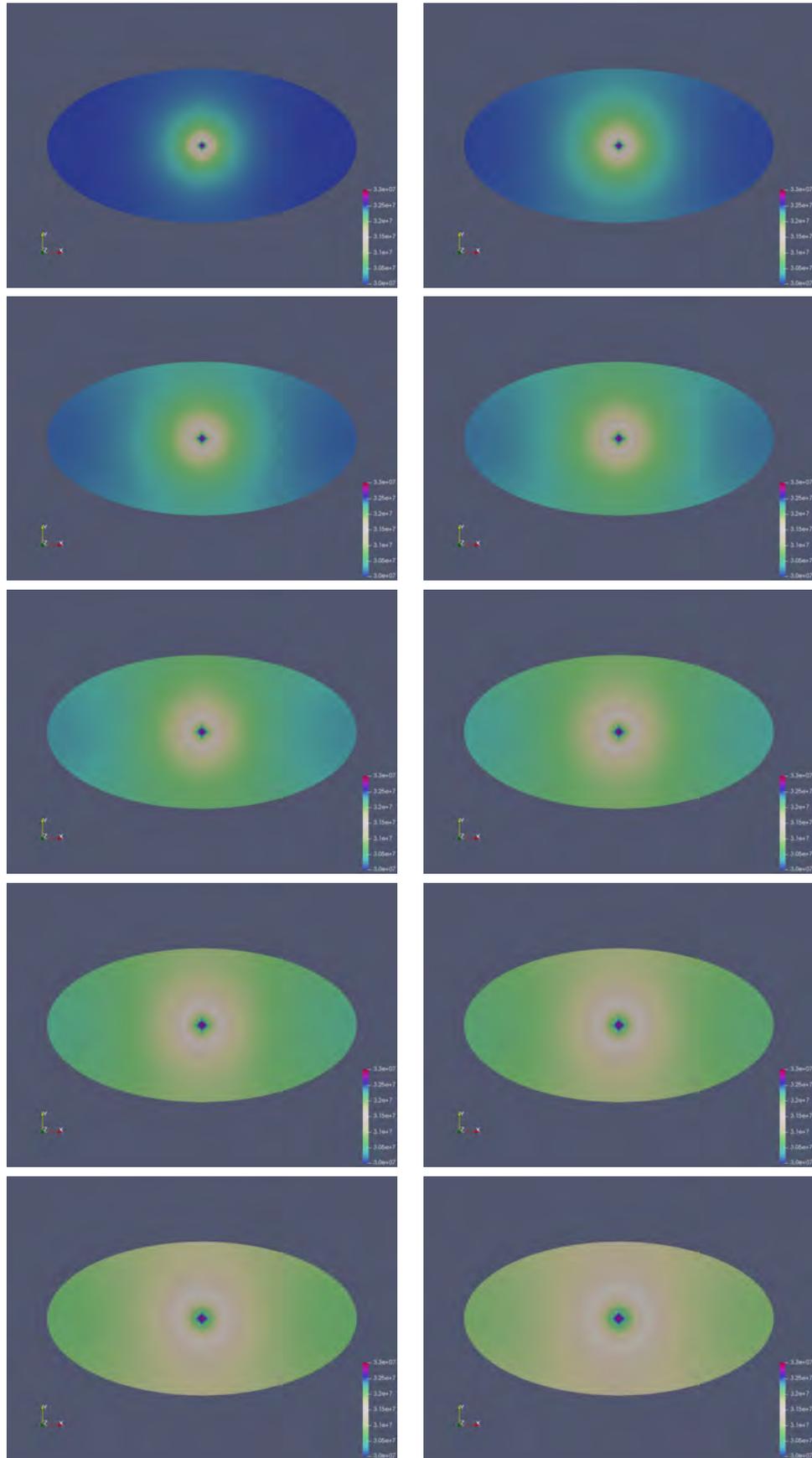


Рис. 5.13. Распределение давления (слева) и раскрытия (справа) в моменты времени $t \in (1, 3, 5, 7)\Delta t$ (сверху вниз).

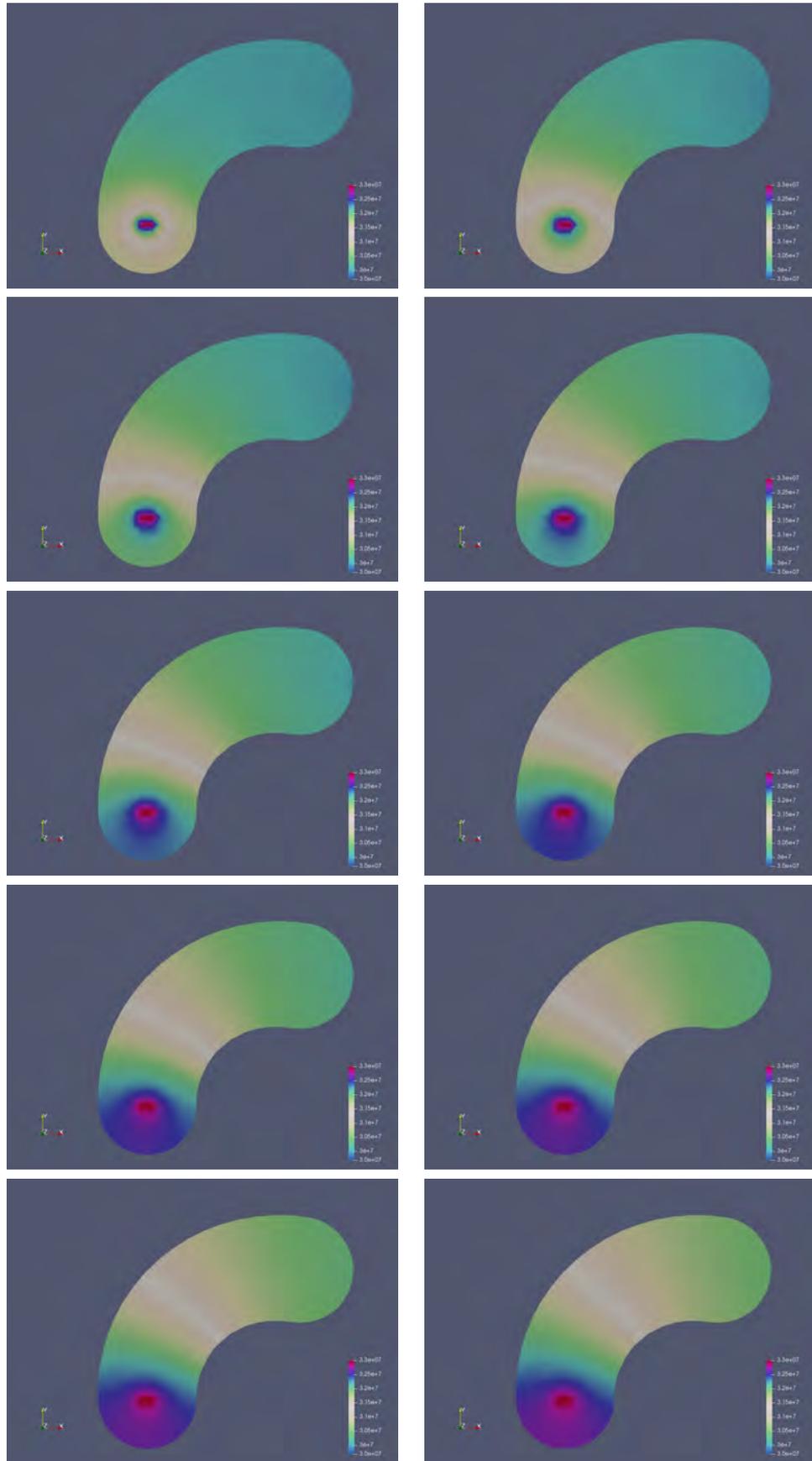


Рис. 5.14. Распределение давления (слева) и раскрытия (справа) в моменты времени $t \in (1, 3, 5, 7)\Delta t$ (сверху вниз).

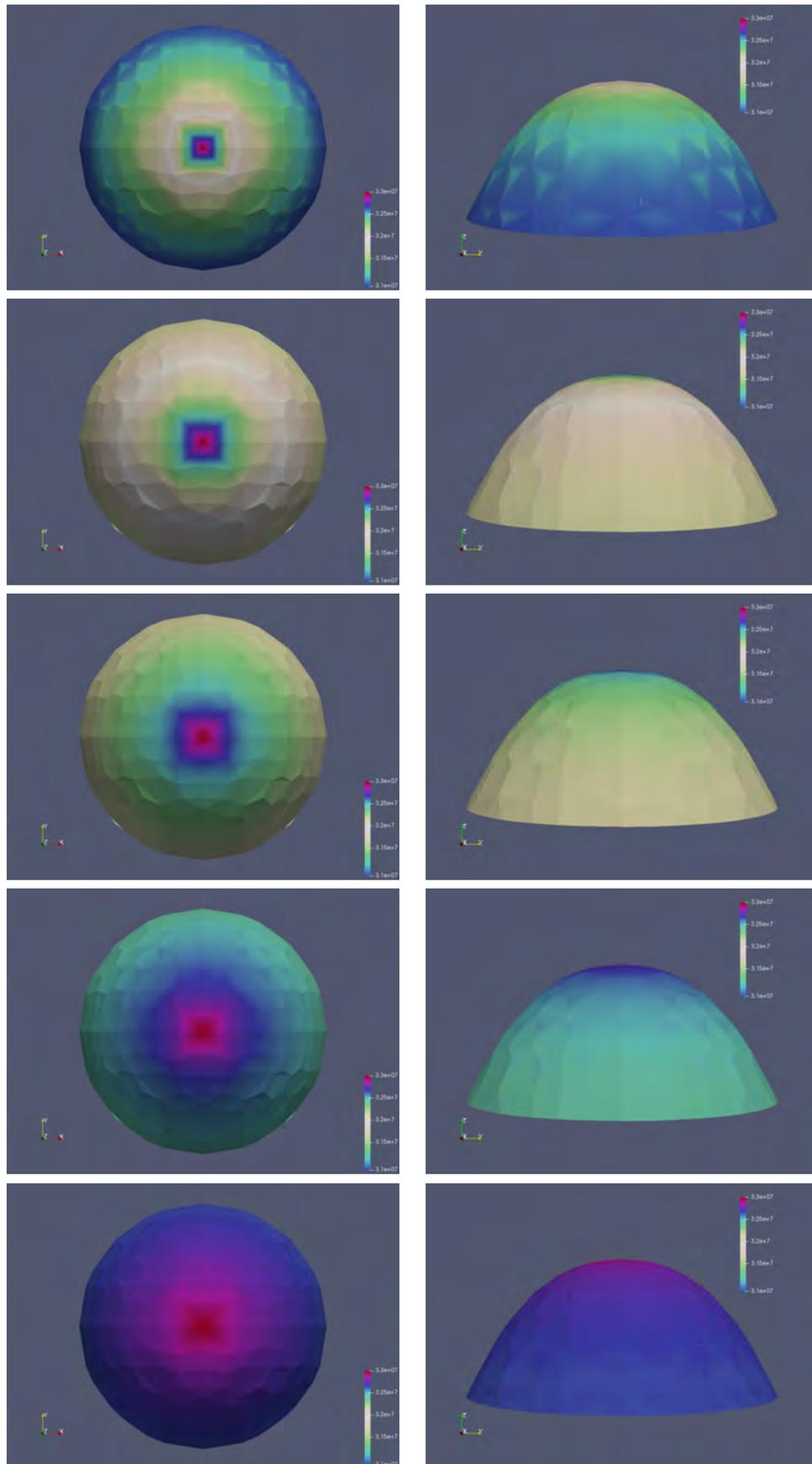


Рис. 5.15. Распределение давления в моменты времени $t \in (1, 2, 3, 4, 5)\Delta t$ (сверху вниз).

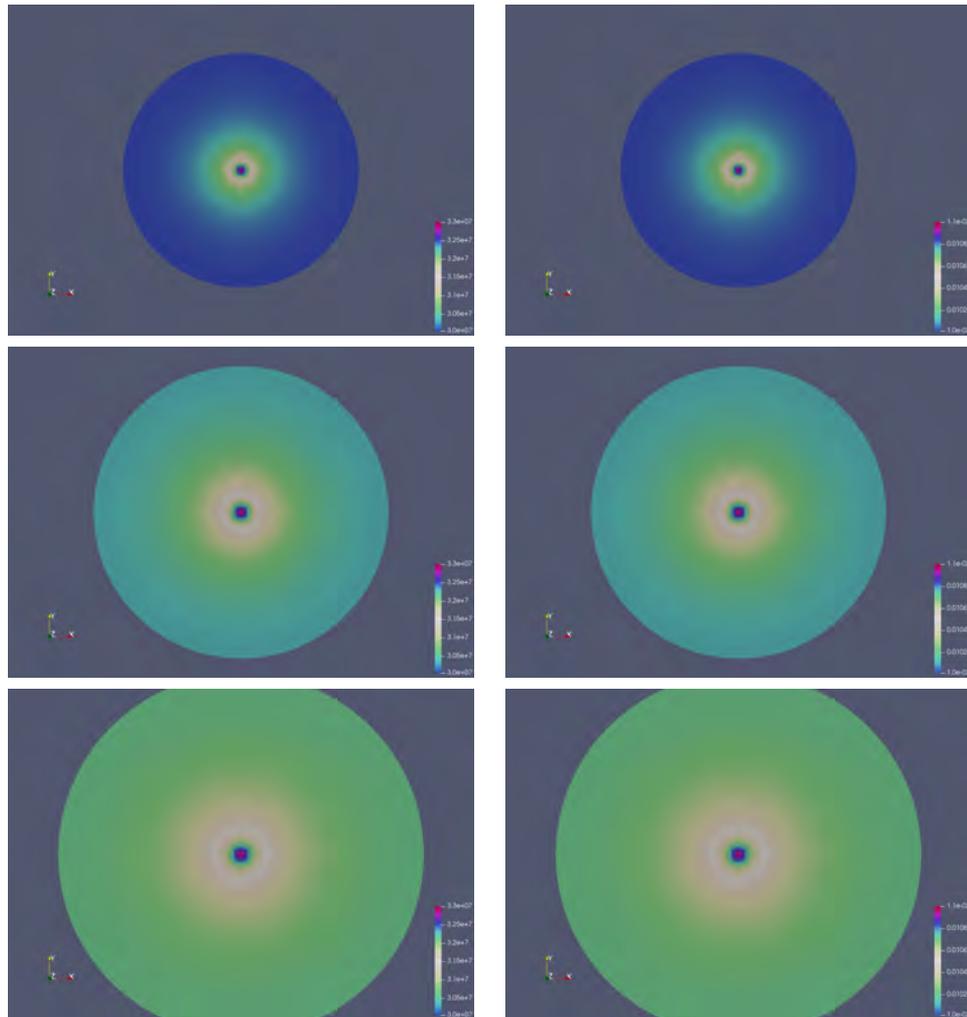


Рис. 5.16. Распределение давления (слева) и раскрытия (справа) в моменты времени $t \in (1, 6, 12)\Delta t$ (сверху вниз).

Глава 6

Решение связанной задачи

В настоящем разделе рассмотрены алгоритмы решения полной, связанной, задачи о развитии флюидонаполненной трещины. Как следует из главы 1, постановка задачи включает в себя следующие группы уравнений:

- уравнения пороупругости в (трехмерной) вмещающей среде;
- уравнения смазочного слоя в (двумерной) трещине;
- условия согласования «вмещающая среда»/«трещина», заданные на срединной поверхности трещины;
- граничные условия (или условия согласования) на фронте трещины и фронте флюида, включая уравнения относительно геометрического расположения фронта трещины, сформулированные в рамках того или иного критерия разрушения.

Дискретные аппроксимации каждой из указанных групп уравнений могут быть построены сравнительно просто; они рассмотрены в предыдущих главах работы. Формальное построение конечномерных аппроксимаций полной связанной задачи также может быть построено, однако оно слишком сложно для последующего теоретического анализа и программной реализации, а также не обладает необходимой для практических приложений гибкостью.

Поэтому традиционным подходом для решения полной задачи является использование тех или иных схем итерационного связывания между указанными группами уравнений. Такой подход обладает достаточной для приложений гибкостью и обеспечивает удобство программной реализации. Формально он может быть рассмотрен как тот или иной метод решения системы уравнений (нелинейными) методами типа Якоби, Гаусса-Зейделя, простой итерации (Ричардсона) или их обобщениями. Основными вопросами, связанными с применением этих методов является не всегда достаточная скорость сходимости итераций и чувствительность к выбору начального приближения. Полное решение этих вопросов в настоящее время неизвестно. Отметим также, что для построения того или иного способа связывания большое значение имеет учет при построении схемы соответствующих итераций тех или иных «физических» соображений, обычно отражающих представления о степени «главенствования» тех или иных процессов в ходе развития полного процесса, включающего все группы уравнений. В англоязычной литературе такой подход обычно отражает термином «physics-based coupling/preconditioning».

Устоявшегося способа построения указанных алгоритмов не существует. Поэтому, помимо прочего, ниже будет рассмотрен ряд алгоритмов связывания, опубликованных в современной литературе и перспективных с точки зрения настоящей работы. Цель этого обзора — с одной стороны, продемонстрировать текущий уровень развития методов решения задач рассматриваемого класса, с другой — показать, что все они имеют особенности, которые не позволяют непосредственно применить их для решения рассматриваемого в настоящей работе класса задач.

Ниже сначала рассмотрим важные для дальнейшего изложения особенности постановки задачи в операторном виде, далее — способы итерационного связывания для случая известной (заданной) геометрии трещины, и, наконец, способы итерационного связывания для задачи с развивающейся трещиной. В заключении приводится алгоритм решения полной связанной задачи и результаты численных расчетов.

6.1 Структура модели и аппроксимации по времени

В настоящем разделе кратко описана структура модели. Основное внимание уделено связи между группами уравнений, описывающими состояние среды в объеме и течение в трещине. В дальнейшем это будет использовано при описании и построении методов итерационного связывания для решения полной связанной задачи о распространении флюидонаполненной трещины в поропругой среде.

Будем считать, что справедливы все сделанные ранее в главе 1 допущения об условиях применимости модели, как то изотермичность течения, физическая и геометрическая линейность вмещающей трещину среды и другие.

Для простоты изложения будем рассматривать случай чисто упругой среды, содержащей флюидонаполненную трещину. Кроме того, будем предполагать, что текущее положение трещины в пространстве уже определено.

В этом случае модель включает в себя следующие группы уравнений теории упругости и течения в трещине.

С точки зрения задачи теории упругости

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} = 0,$$

заданное на срединной поверхности трещины давление является граничным условием Неймана, которое имеет вид

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}^\pm = -p_f \mathbf{n}^\pm.$$

Если оно задано (помимо граничных условий на внешней границе), то в области может быть определено поле перемещения u и, как следствие, однозначно определенное раскрытие трещины w как

$$w = [\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}].$$

В силу единственности задачи, таким образом определенное раскрытие является единственным. Соответствующее операторное уравнение, связывающее давление в трещине и раскрытие в ней, будем обозначать как

$$\mathcal{C}(w, p_f) = 0. \tag{6.1}$$

Оператор \mathcal{C} здесь неявным образом задает соответствующий задаче теории упругости оператор Пуанкаре-Стеклова, отображающий заданное на границе поле давления в раскрытие трещины.

Аналогично, как только определено раскрытие в трещине, поле давления в ней однозначно определяется решением уравнения смазочного слоя

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f w) + \nabla \cdot \mathcal{F} = Q_f, \quad \mathcal{F} = -\frac{\rho_f}{12\mu} w^3 (\nabla p_f - \mathbf{g}).$$

Соответствующее формальное отображение будем рассматривать как решение операторного уравнения

$$\mathcal{A}(p_f, w) = 0. \quad (6.2)$$

В уравнениях выше, как и ранее, w — раскрытие трещины; p_f, ρ_f и μ — соответственно давление, плотность и вязкость флюида в трещине, Q_f — массовый источник флюида (приток из скважины и утечка в пласт), \mathbf{T} — тензор напряжений для вмещающей среды (пласта), \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения, \mathcal{F} — вектор плотности потока массы. В рамках данной модели также предполагается, что $\rho_f = \rho_f(p_f)$ — известная зависимость. В соответствии со сделанными допущениями будем считать, что $w \geq w_0 > 0$ всюду в области, заполненной флюидом. В дальнейшем термин «трещина» будем относить к области, заполненной флюидом, а не к области, которая нарушает сплошность вмещающей среды; таким образом далее термины «фронт» и «фронт флюида» эквивалентны и означают границу области, заполненной флюидом.

В силу особенностей уравнений и используемых в дальнейшем численных методов будем считать, что приведенная выше система уравнений может быть разрешена следующим образом: по известному p_f из уравнения (6.1) возможно определить раскрытие w , и с помощью (6.2) по заданному раскрытию w определять давление в трещине p_f :

$$w = \mathcal{C}_w(p_f) \equiv \mathcal{C}^{-1}(\cdot, p_f), \quad (6.3)$$

$$p_f = \mathcal{A}_p(w) \equiv \mathcal{A}^{-1}(\cdot, w). \quad (6.4)$$

В общем случае численное решение системы уравнений (6.3)-(6.4) требует использования сеточных методов. Они были подробно рассмотрены в предыдущих главах работы. Далее для простоты изложения, но без ограничения общности, будем считать, что при каждом фиксированном распределении поля давления p_f в трещине или раскрытия w трещины:

- раскрытие w может быть вычислено, но явная зависимость $w = \mathcal{C}_w(p_f)$ — неизвестна;
- зависимости $p_f = \mathcal{C}_p(w)$ и $w = \mathcal{A}_w(p_f)$ не могут быть явно вычислены в рамках используемой расчетной схемы;

Конечномерные аппроксимации отдельных уравнений системы (6.1),(6.2) подробно были рассмотрены в предыдущих. Конкретный вид этих аппроксимаций не важен. Принципиальным является лишь тот факт, что в результате получается конечномерная система следую-

щего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f w) + \mathcal{B}(w, p_f) = Q_f, \quad (6.5)$$

$$w = \mathcal{C}_w(p_f), \quad (6.6)$$

где w и p_f теперь являются элементами соответствующих конечномерных пространств.

Настоящий раздел посвящен решению уравнений (6.5) и (6.6). Отличие приведенной выше системы уравнений от задач, рассмотренных в главе 5 заключается в том, что зависимость (6.6) не известна в явном виде ни в континуальном, ни в дискретном случае.

В общем случае аппроксимация временной производной в уравнении (6.5) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f w) \approx \frac{\hat{\rho}_f \hat{w} - \rho_f w}{\Delta t},$$

где $(\hat{\cdot})$ обозначает значение величины на следующем временном слое, Δt — временной шаг и $\hat{\rho}_f = \rho_f(\hat{p}_f)$, $\hat{w} = \mathcal{C}_w(\hat{p}_f)$.

В аппроксимации «пространственной» части $\mathcal{B}(w, p_f)$ задачи (6.5). будем использовать взвешенное значение \tilde{w} вида

$$\tilde{w} = (1 - \alpha) w + \alpha \hat{w}, \quad (6.7)$$

где α — параметр, характеризующий неявность схемы по значению раскрытия w , которое зависит от времени через давление p_f : $w = w(t) = \mathcal{C}_w(p_f(t))$. При $\alpha = 0$, получим полностью явную схему относительно w , при $\alpha = 1$ — полностью неявную.

6.2 Итерационное связывание в случае неподвижной трещины

Система уравнений (6.1)-(6.2), записанная в операторном виде (6.3)-(6.4), должна быть решена относительно w и p_f . Решение этой системы совместно, относительно полного набора неизвестных, сопряжено с рядом трудностей, которые связаны с нелинейностью уравнений, сложностью реализации условий согласования на срединной поверхности трещины и другими. Поэтому обычно в таких случаях уравнения системы «развязываются»: решение системы сводится к последовательному итерированию уравнений между собой, например, с помощью метода простой итерации (Якоби), Гаусса-Зейделя и так далее. В случае, если возможностей этих методов недостаточно, могут использоваться более эффективные алгоритмы, например, называемое «ускорение по Андерсону», рассмотренное ниже.

6.2.1 Стандартные подходы

В рамках текущей программной реализации используются следующие методы, коротко описанные ниже:

- метод простой итерации;
- метод Гаусса-Зейделя с «PW» и «WP» итерациями;

Алгоритм 2 Метод простой итерации (Якоби).

1. **Инициализация.** Задать параметры $\alpha, \beta, \varepsilon_w, \varepsilon_p$.
 2. Вычислить $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_w \|w^{\text{in}}\| + \varepsilon_p \|p_f^{\text{in}}\|$.
 3. Положить $\hat{p}_f^1 := p_f^{\text{in}}, \hat{w}^1 := w^{\text{in}}$.
 4. **Итерации.** Для $i = 2, \dots, N_{\text{max}}$:
 - (a) $w^i = \mathcal{C}_w(\hat{p}_f^{i-1})$
 - (b) $\hat{w}^i := (1 - \beta) \hat{w}^{i-1} + \beta w^i$
 - (c) $\tilde{w} := (1 - \alpha) w^{\text{in}} + \alpha \hat{w}^{i-1}$
 - (d) $p_f^i = \mathcal{A}_p(w^{\text{in}}, \tilde{w}, \hat{w}^{i-1})$
 - (e) $\hat{p}_f^i := (1 - \beta) \hat{p}_f^{i-1} + \beta p_f^i$
 - (f) Если критерий сходимости $\mathcal{E}(\hat{w}^i, \hat{w}^{i-1}, \hat{p}_f^i, \hat{p}_f^{i-1}) < \tilde{\varepsilon}$ выполнен, то перейти к шагу 5
 5. **Выход.** Положить $\hat{p}_f := \hat{p}_f^i, \hat{w} := \hat{w}^i$.
-

- метод ускорения по Андерсону (Anderson Acceleration).

Пусть далее i — номер текущей итерации; N_{max} — максимальное число итераций метода; α — как и ранее в (6.7), параметр релаксации для схемы аппроксимации; β — параметр релаксации для итерационного метода; $\varepsilon_w, \varepsilon_p$ — параметры для оценки относительной ошибки; p_f^{in} и $w^{\text{in}} = \mathcal{C}_w(p_f^{\text{in}})$ — начальные приближения, которые считаются известными. В зависимости от метода значения на итерациях могут релаксироваться с параметром β аналогично формуле (6.7).

Критерий сходимости для i -й итерации запишем в виде

$$\mathcal{E}(w^i, w^{i-1}, p_f^i, p_f^{i-1}) = \|w^i - w^{i-1}\|_2 + \|p_f^i - p_f^{i-1}\|_2 < \tilde{\varepsilon}, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon_w \|w^{\text{in}}\|_2 + \varepsilon_p \|p_f^{\text{in}}\|_2. \quad (6.8)$$

Метод простой итерации. Используемая в работе модификация метода простой итерации представлена на схеме алгоритма 2. В программной реализации приняты значения параметров $\alpha = 1, \beta = 0.5$.

Метод Гаусса-Зейделя. Метод Гаусса-Зейделя используется в двух вариациях: «WP» и «PW» итерации. Соответствующие алгоритмы представлены на схемах 3 и 4. Как нетрудно заметить, в первом случае в ходе итерации сначала вычисляется w , а потом — p_f , во втором — наоборот.

В программной реализации алгоритма 3 полагается $\alpha = 0.5$, в 4 — $\alpha = 1$. В обоих вариантах $\beta = 0.5$.

Алгоритм 3 Метод Гаусса–Зейделя: «WP» итерации.

1. **Инициализация.** Задать параметры $\alpha, \beta, \varepsilon_w, \varepsilon_p$.
 2. Вычислить $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_w \|w^{\text{in}}\|_2 + \varepsilon_p \|p_f^{\text{in}}\|_2$.
 3. Положить $\hat{p}_f^1 := p_f^{\text{in}}, \hat{w}^1 := w^{\text{in}}$.
 4. **Итерации.** Для $i = 2, \dots, N_{\text{max}}$:
 - (a) $w^i = \mathcal{C}_w(\hat{p}_f^{i-1})$
 - (b) $\hat{w}^i := (1 - \beta) \hat{w}^{i-1} + \beta w^i$
 - (c) $\tilde{w} := (1 - \alpha) w^{\text{in}} + \alpha \hat{w}^i$
 - (d) $p_f^i = \mathcal{A}_p(w^{\text{in}}, \tilde{w}, \hat{w}^i)$
 - (e) $\hat{p}_f^i := (1 - \beta) \hat{p}_f^{i-1} + \beta p_f^i$
 - (f) Если критерий сходимости $\mathcal{E}(\hat{w}^i, \hat{w}^{i-1}, \hat{p}_f^i, \hat{p}_f^{i-1}) < \tilde{\varepsilon}$ выполнен, то перейти к шагу 5
 5. **Выход.** Положить $\hat{p}_f := \hat{p}_f^i, \hat{w} := \hat{w}^i$.
-

Алгоритм 4 Метод Гаусса–Зейделя: «PW» итерации.

1. **Инициализация.** Задать параметры $\alpha, \beta, \varepsilon_w, \varepsilon_p$.
 2. Вычислить $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_w \|w^{\text{in}}\|_2 + \varepsilon_p \|p_f^{\text{in}}\|_2$.
 3. Положить $\hat{p}_f^1 := p_f^{\text{in}}, \hat{w}^1 := w^{\text{in}}$.
 4. **Итерации.** Для $i = 2, \dots, N_{\text{max}}$:
 - (a) $\tilde{w} := (1 - \alpha) w^{\text{in}} + \alpha \hat{w}^{i-1}$
 - (b) $p_f^i = \mathcal{A}_p(w^{\text{in}}, \tilde{w}, \hat{w}^{i-1})$
 - (c) $\hat{p}_f^i := (1 - \beta) \hat{p}_f^{i-1} + \beta p_f^i$
 - (d) $w^i = \mathcal{C}_w(\hat{p}_f^i)$
 - (e) $\hat{w}^i := (1 - \beta) \hat{w}^{i-1} + \beta w^i$
 - (f) Если критерий сходимости $\mathcal{E}(\hat{w}^i, \hat{w}^{i-1}, \hat{p}_f^i, \hat{p}_f^{i-1}) < \tilde{\varepsilon}$ выполнен, то перейти к шагу 5
 5. **Выход.** Положить $\hat{p}_f := \hat{p}_f^i, \hat{w} := \hat{w}^i$.
-

Метод Anderson Acceleration. Метод Anderson Acceleration (кратко — AA; в некоторых работах — Anderson mixing) впервые был представлен в работе [Anderson1965] для решения нелинейных интегральных уравнений математической физики. Он основывается на последовательном уточнении решения с помощью специальной итерационной процедуры. По сути, AA является разновидностью семейства квази-ньютоновских методов [Fang2009, Walker2009, Ganine2013] и обладает сверхлинейной скоростью сходимости [Toth2015]. В оригинальной работе он рассмотрен как способ улучшения сходимости метода простой итерации за счет использования не только последнего рассчитанного значения, но их ряда за несколько последних итераций.

В случае, когда оператор системы является линейным, метод ускорения по Андерсону совпадает (с точностью до задания коэффициентов) с методом обобщенных минимальных невязок GMRES [Peng2009, Walker2009, Saad2003]. В работе [Ganine2013] приведен алгоритм метода AA, по структурному виду наиболее близкий к рассматриваемой задаче. Другим примером является работа [Lipnikov2013].

Вариант метода ускорения по Андерсона может быть построен для решения рассматриваемой задачи. Однако, здесь он не приводится. Тестовые численные расчеты не выявили его существенных преимуществ перед более простыми методами, рассмотренными в настоящей работе. Тем не менее, в ряде случаев он существенно улучшает скорость сходимости более простых методов.

6.2.2 «Недренируемое» связывание для задачи с трещиной

Ниже в настоящем разделе приводится общая схема построения схем итерационного связывания для решения задачи пороупругости при наличии трещины, построенная с использованием идей методов «дренируемого»/«недренируемого» связывания для решения задач пороупругости, см. раздел 4.4. Для простоты рассмотрен случай, когда трещина является флюидонаполненной, но вмещающая среда — чисто упругой. Приводятся лишь общая схема построения метода. Детальное их изложение весьма громоздко.

Система уравнений пороупругости состоит из двух уравнений. Первое уравнение, выражающее закон механического равновесия, не включает в себя производные по времени. Второе уравнение, выражающее закон сохранения массы флюида в пласте, является нестационарным. Запишем эти уравнения формально в виде системы:

$$\begin{aligned} A_1(u, v) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} B(u, v) + A_2(u, v) &= 0. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Здесь A_1, A_2 — некоторые, вообще говоря нелинейные операторы, действующие на неизвестные u и v . В случае, если система является системой уравнений с частными производными, операторы $A_{1,2}$ являются дифференциальными операторами. В конечномерном случае (после того, как выполнены аппроксимации по пространству) задача (6.9) является дифференциально-алгебраической системой уравнений.

При аппроксимации системы уравнений (6.9) по времени для определения решения на очередном временном слое необходимо решить (вообще говоря, нелинейную) систему уравнений

$$\begin{aligned} A_1(\hat{u}, \hat{v}) &= 0, \\ \frac{1}{\Delta t} [B(\hat{u}, \hat{v}) - B(u, v)] + A_2(\hat{u}, \hat{v}) &= 0. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Здесь $u = u(t) \in \mathbb{R}^N, v = v(t) \in \mathbb{R}^N, \hat{u} = u(t + \Delta t) \in \mathbb{R}^N, \hat{v} = v(t + \Delta t) \in \mathbb{R}^N, \Delta t$ — шаг по времени, N — размерность вектора решения. Для построения аппроксимаций использована полностью неявная схема. Для дифференциальных операторов $A_{1,2}$ и их конечномерных пространственных аппроксимаций использованы одни и те же обозначения.

Схема итерационного связывания, аналогичная «дренируемому расщеплению» для решения абстрактной системы уравнений (6.10) имеет вид: определить пару $(\hat{u}^{+1}, \hat{v}^{+1})$, удовлетво-

ряющую системе уравнений

$$\begin{aligned} A_1(\hat{u}^{+1}, \hat{v}) &= 0, \\ \frac{1}{\Delta t} [B(\hat{u}^{+1}, \hat{v}^{+1}) - B(u, v)] + A_2(\hat{u}^{+1}, \hat{v}^{+1}) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь верхним индексом «+1» обозначено новое $(n+1)$ -е приближение, параметры без индекса соответствуют текущему, n -му, приближению. Соответственно, первое уравнение решается относительно неизвестного значения \hat{u}^{+1} , второе — относительно неизвестного значения \hat{v}^{+1} .

Для построения аналога «недренируемого связывания» сначала формально запишем задачу (6.9) для интегрирования решения на шаге по времени $[t, t + \Delta t]$ в виде следующей схемы операторного расщепления:

1. Интегрирование на интервале $[t, \Delta t]$ системы уравнений

$$A_1(U, V) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} B(U, V) = 0,$$

с начальным условием $U(t) = u(t)$, $V(t) = v(t)$. Результирующее решение в момент времен $t + \Delta t$ обозначим как (U^*, V^*) .

2. Интегрирование на интервале $[t, t + \Delta t]$ системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} U &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} B(U, V) + A_2(U, V) &= 0, \end{aligned}$$

с начальным условием $U(t) = U^*$, $V(t) = V^*$. Первое уравнение в последней системе формально отражает тот факт, что первое уравнение в (6.9) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} B_1(u, v)u + A_1(u, v) = 0,$$

где $B_1(\cdot, \cdot) \equiv 0$.

Формальная аппроксимация уравнений в описанном методе операторного расщепления приводит к следующему алгоритму:

1. Определить (\hat{u}, v^*) из уравнений:

$$\begin{aligned} A_1(\hat{u}, v^*) &= 0, \\ \frac{1}{\Delta t} [B(\hat{u}, v^*) - B(\hat{u}, v)] &= 0. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Здесь найденное значение v^* является предиктором для неизвестного \hat{v} .

2. Определить \hat{v} из уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} [B(\hat{u}, \hat{v}) - B(u, v^*)] + A_2(\hat{u}, \hat{v}) &= 0, \\ \hat{u} - u &= 0. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Описанная процедура может рассматриваться как итерационный метод, или как метод расщепления (который формально соответствует одной итерации).

Уравнение (6.12) имеет такой же вид, как и в случае «дренируемого связывания». Уравнения (6.11) устроены более сложно — они имеют вид системы уравнений, решение которой формально более сложно, чем решение единственного уравнения (6.11). В случае задачи пороупругости эта проблема обходится тем, что при аппроксимации уравнения фильтрации используется диагонализация матрицы жесткости. В результате второе уравнение в (6.11) является системой линейных уравнений относительно v^* с диагональной матрицей и может быть легко обращена относительно v^* .

Рассмотрим, как такой алгоритм может быть применен для построения итерационного метода решения задачи с трещиной. Для простоты рассмотрим случай, когда вмещающая трещину среда является непроницаемой.

Считая, что положение трещины известно и фильтрационные эффекты во вмещающей среде отсутствуют, набор переменных, описывающих решение задачи, имеет вид

$$\Xi = \Xi(t) = \{\mathbf{u}, w, p_f\},$$

где \mathbf{u} — поле перемещений во вмещающей среде, w и p_f — раскрытие трещины и давление в ней как функция точки ее срединной поверхности \mathcal{F} .

Поля перемещений, напряжений и давления в трещине связаны следующими условиями согласования:

$$[[\mathbf{T}]] \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \{\{\mathbf{T}\}\} \cdot \mathbf{n} = -p \mathbf{n}, \quad w = [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{n}. \quad (6.13)$$

В дискретной постановке задача расчета эволюции состояния системы «вмещающая среда»/«трещина» сводится к определению указанных переменных в момент времени $t + \Delta t$. Соответствующее множество переменных обозначим как $\hat{\Xi}$,

$$\hat{\Xi} = \Xi(t + \Delta t) = \{\hat{\mathbf{u}}, \hat{w}, \hat{p}_f\}.$$

Далее будем использовать обозначения и модель, описанную в разделе 6.1. Видно, что система уравнений (6.1), (6.2) может быть формально записана в виде (6.9). В этом случае первое уравнение соответствует, как и в случае задачи пороупругости, уравнению механического равновесия, второе — уравнению смазочного слоя. Отметим также, что давление трещины входит в первое уравнение как граничное условие Неймана, см. (6.13). В явном виде оно входит в него при построении вариационной постановки задачи и в конечномерных аппроксимациях методом конечных элементов.

Применяя к описанной модели построенную выше итерационную схему, можно прийти к следующему алгоритму для определения полей \mathbf{u} , p :

1. Определить поля (\hat{u}^{+1}, p^*) из системы уравнений:

$$\nabla \cdot \mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}}^{+1}) + \rho_f \mathbf{g} = 0 \text{ при } \mathbf{T}^\pm \cdot \mathbf{n}^\pm = p^*, \quad \hat{w}^{+1} C_f \frac{1}{\Delta t} (p^* - p) + \frac{1}{\Delta t} (\hat{w}^{+1} - w) = 0,$$

где $\hat{w}^{+1} = [[\hat{\mathbf{u}}^{+1} \cdot \mathbf{n}^\pm]]$. Вычисленное на этом шаге значение p^* рассматривается как пре-

диктор для давления в трещине. В конечномерной постановке предполагается применение процедуры диагонализация матриц масс для давления.

2. Определить давление в трещине \hat{p}^{+1} из уравнения

$$\hat{w}^{+1} C_f \frac{1}{\Delta t} (\hat{p}^{+1} - p) + \frac{1}{\Delta t} (\hat{w}^{+1} - w) = \nabla \cdot \left[-\frac{1}{12\mu} (\hat{w}^{+1})^3 (\nabla \hat{p}^{+1} - \mathbf{g}) \right] = \frac{Q_f}{\rho_{f,0}}.$$

Аналогичные схемы могут быть построены и для случая полной, пороупругой постановки. Здесь они не приводятся в силу громоздкости соответствующих выражений.

6.3 Итерационное связывание в случае развивающейся трещины

В настоящем разделе описан ряд вариантов итерационного связывания уравнений полной модели в случае подвижной трещины. Основное внимание уделено способам организации итераций между группами уравнений.

Постановка полной задачи о развитии трещины флюидонаполненной трещины в пороупругой среде была приведена в предыдущих разделах. Напомним только структуру соответствующей математической модели, которая включает в себя четыре группы уравнений, связанных условиями согласования:

1. Задача теории упругости во вмещающей трещину среде:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} = 0,$$

которую запишем в операторном виде как

$$\mathcal{F}_{\text{el}}(\mathbf{u}, p) = 0 : \tag{6.14}$$

где \mathbf{u} и p — поле перемещений и давление во вмещающей среде.

2. Задача о течении флюида во вмещающей трещину среде:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_f) + \nabla \cdot \left(-\rho_f \frac{K}{\mu} (\nabla p - \mathbf{g}) \right) = 0,$$

которую запишем в операторном виде как

$$\mathcal{F}_{\text{pr}}(\mathbf{u}, \underline{p}) = 0. \tag{6.15}$$

3. Задача о течении флюида в трещине:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f w) + \tilde{\nabla} \cdot \left(-\frac{\rho_f}{12\mu} w^3 (\tilde{\nabla} p_f - \mathbf{g}) \right) = Q_f.$$

которую запишем в операторном виде как

$$\mathcal{F}_{\text{fr}}(w, \underline{p}_f, v_f) = 0. \quad (6.16)$$

Интегрируя уравнение течения флюида в трещине по срединной поверхности трещины, можно получить уравнение материального баланса:

$$\int_{\mathcal{F}(t)} Q_f = \int_{\mathcal{F}(t)} \frac{\partial \rho_f w}{\partial t} + \int_{\Gamma(t)} \rho_f w v_{f,n} d\gamma. \quad (6.17)$$

Здесь v_f — скорость течения флюида в трещине. Далее будем предполагать, что зависимость $v_f = f(V_c)$, связывающая скорость движения фронта трещины и фронта флюида, является известной легко обратимой функцией. При этом не исключается случай $v_f = V_c$.

4. Задача геометрической эволюции трещины:

$$\mathcal{F}_{\text{ev}}(\Omega, V_c) = 0. \quad (6.18)$$

5. Условия согласования на срединной поверхности трещины:

$$[[p]] = 0, \quad \{\{p\}\} = p_f, \quad [[\mathbf{T}]] \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \{\{\mathbf{T}\}\} \cdot \mathbf{n} = -p_f \mathbf{n}, \quad w = [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{n}. \quad (6.19)$$

Уравнения (6.14) и (6.15) собой уравнения модели Био для пороупругой среды. Уравнение (6.16) является уравнением гидродинамики в приближении смазочного слоя, которое описывает течение в трещине. Полная система уравнений решается в области с изменяющейся границей (так как происходит изменение геометрии трещины) и, поэтому, должна быть также дополнена тем или иным уравнением движения границы области с течением времени (уравнение (6.18)).

Рассмотрим теперь основные представленные в литературе алгоритмы, которые, по существу, исчерпывают множество алгоритмов, предназначенных для решения задачи о динамике флюидонаполненной трещины. Для каждого алгоритма дается его описание в терминах сформулированной выше модели с указанием конкретных групп уравнений и способа их решения. Не смотря на то, что содержание настоящего разделе ниже имеет в основном описательный характер, оно важно для понимая общей современной ситуации. Существенным является то, что, когда это необходимо, все алгоритмы обобщаются на случай более общей пороупругой модели.

Цель этого обзора — сформулировать основные особенности и ограничения алгоритмов, которые делают затруднительным их применение для решения задачи в рассматриваемой постановке.

6.3.1 Обзор алгоритмов

Алгоритм Картера (код Franc3D). Первый из рассматриваемых подходов к численному решению связанной задачи о распространении трещины флюидонаполненной трещины

предложен в работе [Carter2000]. На его основе реализовано вычислительное ядро программы FRANC3D. Опираясь на введенную нумерацию компонентов модели, опишем основные элементы структуры решения задачи в комплексе FRANC3D. Используется следующий подход:

- Вмещающая трещину область считается упругой средой, фильтрационные эффекты не учитываются (в силу этого уравнение (6.15) в модели отсутствует).
- Геометрия трещины представляется явно как множество четырехугольных ячеек сетки (конечных элементов), объединенных в сетку. Новые элементы добавляются по мере роста трещины (уравнение (6.18)).
- Решение задачи (6.14) теории упругости осуществляется с помощью метода граничных элементов, см. [Lutz1991]. В результате для фиксированной геометрии и свойств пласта в явном виде формируется зависимость $w(p_f)$. Отметим, что использование граничных интегральных уравнений накладывает существенные ограничения на возможное распределение упругих свойств пласта.
- Аппроксимация уравнения (6.16) течения в трещине проводится методом конечных элементов. При этом вводится специальный тип граничных элементов на фронте трещины, в которых используется априори известное асимптотическое поведение раскрытия и давления в зависимости от расстояния до фронта трещины. За счет этого обеспечивается учет существующего между фронтом трещины и фронтом флюида лага без его разрешения сеткой.
- При расчете задачи для продвижения фронта трещины применяется следующий метод: сначала фиксируется новая геометрия трещины, а потом итерационно определяется соответствующий временной шаг таким образом, чтобы удовлетворялись все уравнения модели (включая уравнение массового баланса). Такой подход выбран для того, чтобы минимизировать вычисление наиболее ресурсоемкой части расчета, которая заключается в решении уравнений теории упругости.

Асимптотики для величины раскрытия и давления на кончике трещины определяются в рамках модели, называемой Linear Elastic Hydraulic Fracturing (LEHF) [Carter2000]. Считается, что фронт трещины является локально плоским, компонентами скорости флюида в трещине, параллельными ее фронту можно пренебречь. Конкретный вид асимптотик зависит от типа вмещающей среды (проницаемая/непроницаемая) и используемой в уравнении течения в трещине модели утечки.

Отметим, что термин «проницаемая» здесь означает лишь то, что уравнение баланса массы флюида в трещине имеет слагаемое, описывающее утечку флюида из трещины в пласт. Сама по себе вмещающая трещину среда при этом не является проницаемой — уравнение закона сохранения массы (6.15) во вмещающей трещину среде в систему уравнений модели не входит. Это замечание справедливо для всех рассмотренных ниже методов, если не оговорено обратное.

Вариационная постановка задачи о течении в трещине в приближении смазочного слоя

в [Carter2000] записывается как

$$\int_{\Omega} \delta p_f \frac{\partial w}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{w^3}{12\mu} (\nabla p_f \cdot \nabla \delta p_f) d\Omega + \int_{\Gamma} \delta p_f \beta V_c^\gamma d\Gamma = Q(t) \delta p_f(\mathbf{x}_Q),$$

где асимптотическое поведение решения на кончике трещины учитывается за счет третьего интеграла в левой части уравнения. В правой части уравнения величина \mathbf{x}_Q — пространственное положение точечного источника массы, описывающего процесс закачки флюида в трещину. Отметим, что в это уравнение явно определяет зависимость решения от скорости движения фронта трещины V_c .

Для случая чисто упругой среды алгоритм решения полной задачи на одном временном шаге можно записать в следующем виде:

1. Инициализация. Известно решение для момента времени t_n : геометрия трещины $\Omega^*(t_n)$, объем трещины $\text{Vol}(t_n)$, поле раскрытия $w(t_n)$, поле давления в трещине $p_f(t_n)$ и скорость распространения фронта трещины $V_c(t_n)$. Кроме того, на данном этапе предполагаются известными перемещения точек фронта трещины в момент t_{n+1} .
2. Построение по известной геометрии $\Omega^*(t_n)$ и заданным перемещениям точек фронта новой геометрии $\Omega^*(t_{n+1})$: $\mathcal{F}_{ev}(\Omega^*(t_{n+1}), \Omega^*(t_n), V_c(t_n), \Delta) = 0$. При этом Δ выбирается в зависимости от конкретной задачи. Также полагается, что точка фронта с максимальной по модулю скоростью $V_c(t_n)$ перемещается на Δ .
3. Решение для заданной геометрии и свойств пласта задачи теории упругости и построение «матрицы упругости» K . Последняя позволяет, в дискретном случае, по известному полю давления в трещине позволяет определить соответствующую величину раскрытия: $\mathbf{w}_h = K \mathbf{p}_{f,h}$. В общем случае это соотношение определяет решение уравнения $\mathcal{F}_{el}(w, p_f) = 0$ относительно w .
4. Расчет течения в трещине совместно с полученным решением задачи упругости: итерации между w и p_f при фиксированных значениях Δt и V_c :

$$\mathcal{F}_{fr}(w, p_f, \Delta t, V_c) = 0.$$

При этом в качестве начального приближения к полю скорости используется величина скорости с предыдущего временного слоя $V_c(t_{n+1}) = V_c(t_n)$, после чего временной шаг определяется как $\Delta t = (\Omega^*(t_{n+1}) - \Omega^*(t_n)) / V_c(t_{n+1})$. Контроль сходимости осуществляется по w . Итерационный процесс инициализируется известным решением задачи при $t = t_n$.

5. Для полученных $w(t_{n+1})$ и $p_f(t_{n+1})$ проводится проверка на выполнение уравнения материального баланса: объем закачанной жидкости должен равняться объему трещины за исключением объема утечки через боковые поверхности трещины. Кроме того, скорость фронта флюида должна совпасть со скоростью фронта трещины. Если данные условия не выполняются, шаг Δt уменьшается и заново пересчитывается шаг 4. При этом теперь скорость задается как $V_c(t_{n+1}) = (\Omega^*(t_{n+1}) - \Omega^*(t_n)) / \Delta t$.

Алгоритм 5 Обобщенный алгоритм Картера.

1. **Инициализация.** Для момента времени t_n известны: $\mathbf{u}^n, w^n, p^n, p_f^n, V_c^n, \Omega^n$.
2. **Расчет новой геометрии.** Задаются некоторые перемещения Δ точек фронта. По Ω^n, V_c^n и этим перемещениям рассчитывается новая геометрия трещины Ω^{n+1} : $\mathcal{F}_{ev}(\Omega^{n+1}, \Omega^n, V_c^n, \Delta) = 0$.
3. **Задание начальных приближений.** Положить:

$$V_c^{n+1,1} = V_c^n, \quad \Delta t^{n+1,1} = (\Omega^{n+1} - \Omega^n) / V_c^{n+1,0}.$$

4. **Итерационное решение системы уравнений.** Для $k = 1, 2, 3 \dots$

- (a) **Расчет блока уравнений «упругость-трещина-течение в пласте».** При фиксированных $\Delta t^{n+1,k}$ и $V_c^{n+1,k}$ решается система уравнений (в ней для удобства индексы $n + 1$ и k опущены):

$$\mathcal{F}_{el}(\underline{\mathbf{u}} | \Delta t, V_c) = 0, \quad \mathcal{F}_{fr}(w, \underline{p}_f | \Delta t, V_c) = 0, \quad \mathcal{F}_{pr}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{p} | \Delta t, V_c) = 0,$$

дополненная условиями согласования на срединной поверхности трещины.

- (b) **Расчет уравнения материального баланса.** Для полученных $\mathbf{u}^{n+1,k}, w^{n+1,k}, p^{n+1,k}, p_f^{n+1,k}$ с использованием известных $\Delta t^{n+1,k}$ и $V_c^{n+1,k}$ производится решение уравнения (6.17): должен быть выполнен закон сохранения массы и кроме того, вычисленная скорость фронта флюида $v_f^{n+1,k}$ должна совпасть со скоростью фронта трещины $V_c^{n+1,k}$. Если данные условия не выполняются, временной шаг уменьшается $\Delta t^{n+1,k+1} = f \Delta t^{n+1,k}$, $0 < f < 1$, скорость фронта пересчитывается как $V_c^{n+1,k+1} = (\Omega^{n+1} - \Omega^n) / \Delta t^{n+1,k+1}$. После этого проводится следующая итерация алгоритма.

5. Переход к пункту 1 для расчета следующего временного шага.
-

6. Переход к пункту 1 для расчета следующего временного шага.

На схеме алгоритма 5 представлено формальное обобщение описанного выше алгоритма на случай порорупругой задачи.

Построенное обобщение формально в силу того, что «матрица упругости» оригинального алгоритма не может быть явно построена в случае неоднородной и/или анизотропной среды. Формально алгоритм может быть применен, если для решения упругой задачи используются методы, отличные от метода граничных интегральных уравнений — однако в этом случае последовательность действий алгоритма, основанная на однократном (в независимости от числа итераций) решении упругой задачи и вычислении «матрицы упругости», становится неэффективной. Более того, алгоритм существенно использует информацию об асимптотиках решения в окрестности фронта трещины, которые известны лишь в простейших случаях.

Алгоритм Peirce & Gordeliy. Второй из рассматриваемых подходов к численному решению связанной задачи о распространении флюидонаполненной трещины описан в цикле в работ [Gordeliy2013, Gordeliy2013a, Gordeliy2015, Peirce2008, Peirce2014, Peirce2015]. Особенностью метода является применение «расширенного» метода конечных элементов X-FEM

для решения задачи о развитии трещины. Отметим, что, как и предыдущий, метод применен для чисто упругой постановки, без учета поропругих эффектов. Более того, алгоритм был предложен для решения пространственно двумерной, плоской, задачи с одномерной трещиной. Поэтому ниже используются термины «кончик трещины» (вместо «фронт трещины») и «длина трещины» (вместо «положение фронта трещины»).

Метод использует следующие допущения:

- Вмещающая трещину область считается упругой средой, фильтрационные эффекты не учитываются. В силу этого уравнение фильтрации (6.15) не входит в полную систему уравнений.
- Во всей расчетной области вводится стационарная сетка из параллелепипедов/тетраэдров. Геометрия трещины описывается с помощью метода множеств уровня, расчет ее эволюции (уравнение (6.18)) проводится с помощью метода ILSA — Implicit Level Set Algorithm — который будет более подробно описан ниже. Геометрия трещины не разрешается сеткой, для аппроксимации решения задачи во вмещающей среде используется метод X-FEM.
- Расчет задачи теории упругости (уравнение (6.14)) и течение флюида в трещине (уравнение (6.16)) проводятся с помощью метода X-FEM со специальными базисными функциями для учета разрывного характера решения. Аналогично алгоритму Картера на кончике трещины вводится специальный тип граничных элементов, в которых учитываются асимптотики для поля раскрытия. Лаг между флюидом и трещиной сеткой не разрешается сеткой.
- Расчет положения фронта трещины проводится путем обращения известной и заданной в окрестности кончика трещины асимптотической зависимости раскрытия от расстояния до кончика трещины в его окрестности.
- Расчет полной задачи проводится с заданным временным шагом, для которого итерационно определяется новая геометрия трещины таким образом, чтобы были выполнены уравнения теории упругости, течения в трещине и уравнение материального баланса. В качестве мотивации к использованию фиксированного временного шага вместо фиксированной геометрии трещины указывается, что такой подход позволяет моделировать несимметричное распространение трещин, когда точки фронта перемещаются на различное расстояние за текущий временной шаг.

Используемые асимптотики для раскрытия задаются в зависимости от режима распространения трещины. Их конкретный вид существенно зависит от рассматриваемой задачи.

В рамках метода X-FEM для расчета применяется так называемая схема *P&W*, в рамках которой выделяются элементы сетки попадающие во внутреннюю область трещины («channel region») и граничные элементы на фронте трещины («tip region»). Во внутренних элементах происходит расчет давления, по нему в дальнейшем строится раскрытие. В граничных элементах рассчитывается раскрытие с учетом асимптотик, далее по нему определяется давление. Указывается, что указанный подход обеспечивает точность вычислений порядка $O(h^2)$.

Расчет эволюции трещины проводится с помощью метода ILSA, который рассмотрен в следующем разделе.

Алгоритм решения полной задачи на одном временном шаге можно записать в следующем виде:

1. Инициализация. Известно решение для момента времени t_n : геометрия трещины в виде изоповерхностей функций ϕ и ψ , поле раскрытия $w(t_n)$, поле давления в трещине $p_f(t_n)$.
2. Задание временного шага Δt . После этого задается *пробное* значение длины трещины $\gamma = \gamma^0$.
3. Проводятся итерации m по длине трещины γ^m :

- (a) Методом Ньютона решается нелинейная система уравнений, состоящая из уравнений теории упругости (6.14) совместно с уравнением (6.16) течением флюида в трещине для определения значений раскрытия $w^{n+1,m}$ и $p_f^{n+1,m}$:

$$\mathcal{F}_{\text{el}}(w, p_f | \gamma, \Delta t) = 0, \quad \mathcal{F}_{\text{fr}}(w, p_f | \gamma, \Delta t) = 0.$$

- (b) По полю раскрытия $w^{n+1,m}$ в граничных элементах рассчитывается наименьшее расстояние до фронта трещины. Расчет производится с помощью обращения известного асимптотического решения для величины раскрытия, заданного как $w = w(\zeta)$, см. ниже.
- (c) Далее определяется новое положение фронта как $\gamma^{m+1} = \zeta_{N-1} - \mathcal{T}(\zeta_{N-1})$, где индекс $N - 1$ обозначает последний внутренний узел перед граничным элементом. После этого осуществляется расчет следующей итерации.
- (d) Итерации прекращаются при условии $\|\gamma^{m+1} - \gamma^m\| < \delta_\gamma \|\gamma^m - \gamma^0\|$.

4. Переход к пункту 1 для расчета следующего временного шага.

Обобщим предложенный в [Gordeliy2013a] алгоритм, описанный выше, на случай решения полной связанной задачи о развитии флюидонаполненной трещины. В используемой постановке такой алгоритм (для решения задачи на одном временном шаге) представлен на схема алгоритма 6. Рассмотренное обобщение является формальным. В частности, алгоритм требует использования в явном виде асимптотик решения задачи в окрестности фронта трещины.

Алгоритм ILSA. Алгоритм ILSA — Implicit Level Set Algorithm был предложен в работе [Peirce2008], см. также [Lescampion2013, Peirce2015]. Как следует из названия, он использует неявное представление трещины на основе метода множеств уровня. Термин «implicit» в названии алгоритма означает, что новое положение фронта трещины в очередной момент времени определяется не явно, — то есть с помощью какой-либо подходящей априорной оценки, — а итерационно уточняется в ходе работы алгоритма.

Используемая математическая модель предполагает чисто упругое описание вмещающей трещину среды без учета пороупругих эффектов, утечку флюида из трещины в пласт в соответствии с моделью Картера, однородность и изотропность среды. Принципиальное отличие алгоритма ILSA от других заключается в следующем. Обычно вопросы распространения

Алгоритм 6 Обобщенный алгоритм Пирса для решения связанной задачи.

1. **Инициализация.** Для момента времени t_n известны: $\mathbf{u}^n, w^n, p^n, p_f^n, \mathcal{T}^n$.

2. **Задание временного шага и начальных приближений.** Положить:

$$\Delta t^{n+1} = \Delta \tau, \quad \gamma^{n+1,0} = \gamma.$$

3. **Итеративное решение системы уравнений.** Для $m = 1, 2, 3 \dots$

(а) **Расчет блока уравнений «упругость»/«трещина»/«течение в пласте».** При фиксированных Δt^{n+1} и $\gamma^{n+1,m}$ решается система уравнений (в ней для удобства индексы $n + 1$ и m опущены):

$$\mathcal{F}_{\text{el}}(\underline{\mathbf{u}} | \Delta t, \gamma) = 0, \quad \mathcal{F}_{\text{fr}}(w, \underline{p}_f | \Delta t, \gamma) = 0, \quad \mathcal{F}_{\text{pr}}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{p} | \Delta t, \gamma) = 0$$

совместно с условиями согласования на срединной поверхности трещины.

(б) **Расчет расстояния до фронта трещины.** Для полученных $\mathbf{u}^{n+1,k}, w^{n+1,k}, p_f^{n+1,k}, p_{n+1,k}$ с использованием известных обращенных асимптотик для раскрытия на кончике трещины $w(\zeta)$ проводится расчет расстояния до текущего положения фронта трещины $\mathcal{T}(\zeta)$, после чего его положение корректируется и осуществляется переход на следующую итерацию с новым $\gamma^{n+1,m+1}$. Итерации останавливаются, когда выполняется условие

$$\|\gamma^{m+1} - \gamma^m\| < \delta_\gamma \|\gamma^m - \gamma^0\|.$$

4. Переход к пункту 1 для расчета следующего временного шага.

трещины основаны на анализе только лишь группы уравнений теории упругости полной модели. Одновременно с этим известно (см. цитированные в разделе 1.6 работы), что процесс развития флюидонаполненной трещины отличен от случая классической упругой трещины. В частности, теоретический анализ позволяет выделить целый ряд отличающихся друг от друга режимов развития трещины, которые определяются взаимными свойствами вмещающей среды, флюида в трещине и режима утечки флюида из трещины в пласт. Это приводит к возможности математически корректной в рамках выбранной модели постановке связанных между собой граничных условий на фронте трещины и флюида, которые могут быть построены для ряда асимптотических значений безразмерных комплексов, зависящих от параметров задачи. Алгоритм ILSA позволяет использовать эту информацию для математически корректного в рамках выбранных допущений моделирования динамики трещины.

А именно, основу алгоритма составляет *явно* известная зависимость вида

$$w \sim \mathcal{W}(s; V, E, \mu, K, C) \text{ при } s \rightarrow 0, \quad (6.20)$$

где s — расстояние от точки на срединной поверхности (плоской) трещины до ее фронта, w — раскрытие в рассматриваемой точке, V — скорость распространения фронта трещины, E, μ и так далее — параметры среды и флюида, \mathcal{W} — известная монотонная функция параметра s .

В ходе работы алгоритма по значению раскрытия, известному на текущей итерации, определяется раскрытие w трещины как функция точки ее срединной поверхности. Анализируя

асимптотическое поведение w в локально окрестности фронта трещины, зависимость (6.20) позволяет уточнить, какому расстоянию до фронта соответствуют текущие значения раскрытия w и, таким образом, определить режим развития трещины и уточнить соответствующее известному w расстоянию до фронта в очередной момент времени. Для этого выражение (6.20), по существу, обращается относительно s . После этого пересчитываются поля перемещений во вмещающей среде и распределение давления в трещине и процедура повторяется.

Достоинством алгоритма является очень аккуратное разрешение динамики трещины. В частности, алгоритм ILSA является, по все видимости, единственным, который позволяет с высокой точностью учесть воспроизвести в численном решении математически правильное асимптотическое поведение поля раскрытия и давления флюида в трещине. вопрос о том, насколько важна такая точность с точки зрения содержательных приложений, авторы работы не обсуждают.

Очевидными проблемами алгоритма являются:

- Необходимость наличия выражения вида (6.20) — в настоящее время оно получено только для линейной однородной и изотропной вмещающей среды, плоской трещины, прямолинейного фронта и утечки в рамках модели Картера. Более того, оно известно только для чисто упругого случая без учета пороупругих эффектов.
- Алгоритм решения задачи по крайней мере во вмещающей среде должен позволять определять раскрытия с очень высокой точностью. В частности — позволять вычислить с высокой точностью асимптотику поля раскрытия в окрестности фронта трещины. Разностные методы, основанные на дискретном пространственном представлении расчетной области (в частности, метод конечных элементов) мало пригодны для решения такой задачи, — либо требуют огромной плотности расчетной сетки в окрестности фронта трещины. Неудивительно, что реализации метода ILSA предполагают использование для расчета упругой задачи метода граничных интегральных уравнений — сеточные методы не позволяют с использованием разумных ресурсов получать решение задачи с точностью, достаточной для определения асимптотики раскрытия трещины.

Эти проблемы затрудняют (в ряде случаев — делают невозможным) применения метода ILSA для решения задач в неоднородных средах либо при наличии пороупругих эффектов.

Тем не менее, в рамках описанных допущений рассмотренный алгоритм является, наиболее точным из известных, учитывая наиболее полную информацию о решении континуальной задачи.

Алгоритм Weber2016. Один из вариантов решения задачи в связанной постановке предложен в работе [Weber2016]. В работе используется «традиционная» модель: упругая модель вмещающей среды без учета пороупругих эффектов, уравнения смазочного слоя в трещине, «механические» критерии развития трещины без учета наличия флюида в трещине. Для представления геометрии трещины используется «явно-неявный» подход с использованием метода «векторного множества уровня»: в каждый момент времени на срединной поверхности трещины строится треугольная расчетная сетка, которая используется для решения уравнений смазочного слоя (явное представление), — и, одновременно с этим используется неявное представление с использованием метода множеств уровня для расчета упругой

Алгоритм 7 Алгоритм Weber2016 для решения связанной задачи на одном временном шаге.

1. **Инициализация.** Для момента времени t_n известны: поле перемещений и раскрытие, положение фронта трещины и флюида (то есть параметр δ).
2. Определить новое положение фронта трещины.
3. Определить величину лага и положение фронта флюида. Для этого вычислить новое положение фронта флюида исходя из потока массы на фронте и текущей величины раскрытия.
4. **Итерационное решение упругой задачи.** Для $m = 1, 2, 3 \dots$:
 - (a) Расчет значения давления p_f в трещине при заданном раскрытии и новом положении фронта флюида.
 - (b) Расчет поля перемещений вмещающей среды и раскрытия трещины при заданном поле давления в трещине.
 - (c) Если выполнен критерий остановки итераций, то перейти к шагу 5, в противном случае — перейти к шагу 4.
5. Вычислить коэффициент интенсивности напряжений K_I в точках фронта трещины.
6. Если $K_I \geq K_c$, то решение найдено, положить $t = t + \Delta t$ и перейти к шагу 1.
7. Если условия развития трещины не выполняются, то перейти к шагу 3.

задачи во вмещающей среде (неявное представление). Для решения уравнений смазочного слоя используется метод конечных элементов на поверхности. Для расчета упругой задачи используется метод X-FEM.

В работе рассматривается два варианта алгоритма связывания: для случая, когда лаг отсутствует и для случая, когда лаг присутствует. Отметим, что при наличии лага фронт трещины и фронт флюида в трещине не совпадают. В рассматриваемом подходе считается, что фронт трещины соответствует множеству уровня $\psi(\mathbf{x}) = 0$, фронт флюида — множеству уровня $\psi = -\delta$, где $\delta < 0$ — заданная для текущего временного слоя постоянный (как функция точки на фронте трещины) параметр, который оценивается в ходе расчета. Это позволяет описывать динамику фронта трещины и флюида один набором функций уровня ϕ и ψ , однако не позволяет использовать различные значения для величины лага в различных точках фронта трещины.

Последовательность вычислений формального обобщения алгоритма на случай поропругой задачи приведено на схеме 7 алгоритма. Отметим, что приведенное в цитированной работе описание подходов не содержит в себе значительное количество ключевой, с точки зрения реализации, информации, включая: способ (пере)интерполяция полей давления и раскрытия с сетки для трещины на границу разреза во вмещающей среде; конкретные способы построения очередных приближений для фронта трещины и флюида (детально описанные способы существенно используют конкретную постановку расчетной задачи); способов построения (обновления) динамической сетки для трещины.

6.3.2 Анализ применимости

В предыдущем разделе было описано представительное множество алгоритмов, предназначенных для решения (в той или иной степени) полной задачи о развитии трещины гидроразрыва пласта. Исходя из выполненного обзора, можно сделать следующие выводы.

- Все описанные алгоритмы предназначены для решения задач, в число уравнений которых не входит группа уравнений фильтрации. Другими словами, рассматриваются чисто упругие постановки. Это ограничение не является формальным — непосредственное обобщение изложенных алгоритмов на более общий пороупругий случай может быть выполнено, однако многие ключевые свойства алгоритмов, делающих их привлекательными, пропадут. В частности, это касается невозможности использования метода граничных элементов, отсутствия известных теоретических асимптотик решения в окрестности фронта (или кончика) трещины и так далее.
- Ряд алгоритмов используют для решения «упругой» части задачи метод граничных элементов. Эти методы имеют ряд стандартных «стандартных» ограничений типа однородности вмещающей трещину среды.

Формальная замена метода граничных интегральных уравнений на, например, метод конечных элементов, приводит к существенному изменению (в худшую сторону) свойств этих алгоритмов.

Например, алгоритм Картера основан на том, что для заданного распределения поля давлений в трещине может быть *быстро* рассчитано поле напряжений во вмещающей трещину среде. Для этого используется явное вычисление соответствующей «матрицы упругости». В случае применения метода граничных элементов размерность этой матрицы мала — ее размерность определяется числом узлов сетки на поверхности трещины. Это делает возможным ее явный расчет и дальнейшее многократное применение. Даже если размерность этой матрицы достаточно велика — возможно применение «быстрых» вариантов метода граничных элементов, основанных на теории иерархических матриц или мультиполюсном разложении.

Если же аналогичная «матрица упругости» рассчитывается в рамках сеточного метода, то ее размерность может быть неприемлемо большой с точки зрения затрат оперативной памяти и машинного времени.

Другим примером является алгоритм типа ILSA. В этом случае метод граничных элементов позволяет с высокой точностью рассчитывать асимптотическое поведение решения в окрестности кончика трещина. Точность этого расчета принципиально важна с точки зрения применимости метода. Сеточные методы вряд ли могут обеспечить требуемую точность при разумных ограничениях на сеточную размерность задачи.

- Ряд алгоритмов (Картера, ILSA и другие, описанные выше) требуют нетривиальной информации о качественном поведении решения в окрестности кончика трещины. Этой информацией являются точные асимптотики поведения упругих и гидродинамических полей в окрестности фронта трещины. Такие асимптотики получены лишь для ряда частных случаев с существенными ограничениями (однородность среды, заданная реология флюида в трещине, одномерность течения в окрестности фронта и так далее).

В общей ситуации такие асимптотики неизвестны. Их определение является сложной теоретической задачей.

Указанные алгоритмы являются «тонкими», позволяют эффективно учитывать особенности задачи, — однако, вместе с тем, не могут быть применены для решения широкого класса задач, особенности которых включают в себя, прежде всего:

- неоднородность и анизотропность среды;
- учет пороупругих эффектов;
- учет более общих, чем «классические», критериев разрушения.

Учет этих особенностей либо принципиально не возможен (например, в силу отсутствия необходимых асимптотик точного решения в окрестности фронта трещины), либо делает указанные алгоритмы не эффективными. Одной из причин этого, как уже отмечалось ранее, является структура алгоритма как совокупности «черных ящиков», каждый из которых оптимален для решения соответствующей группы уравнений, но не вполне удобен при рассмотрении полной связанной задачи.

Выработке алгоритмической базы для решения частных задач посвящены предыдущие главы работы. В следующем разделе описывается предлагаемый алгоритм решения полной связанной задачи.

6.4 Алгоритм решения связанной задачи

В настоящем разделе представлено описание численного алгоритма для решения полной, связанной задачи. Основное внимание разделе будет уделено описанию алгоритма «в целом»: детали решения отдельных частных задач изложены в предыдущих главах работы.

Сначала суммируем ряд общих идей, использованных при разработке алгоритма и подробно освещенных выше.

Математическая модель. Используемая математическая модель подробно описана в главе 1. Модель включает в себя следующие группы уравнений и соотношений:

- Уравнения пороупругости, описывающая течение флюида в пористой насыщенной среде и соответствующие изменения ее напряженно-деформированного состояния. Соответствующая группа уравнений модели состоит из уравнений теории упругости и фильтрации. Связывание уравнений модели рассмотрено в рамках классической модели Био. На распределение свойств параметров модели (упругие и фильтрационные модули) не накладываются ограничения однородности и изотропности. Флюид считается сжимаемым, задача — полностью связанной. Последнее условие означает, что параметры течения влияют на распределение напряжений и деформаций в среде, и, наоборот, — напряженно-деформированное состояние среды влияет на изменение ее емкостных свойств.

Предполагается, что в среде расположена трещина со срединной поверхностью, которая эволюционирует с течением времени.

- Уравнение смазочного слоя в рамках приближения Рейнольдса, которое описывает распределение давления в трещине. Раскрытие трещины является параметром, заданном на срединной поверхности трещины. Уравнение смазочного слоя связывает раскрытие трещины и распределение полей давления в ней.
- Группа условий согласования, заданных на срединной поверхности трещины. Эти условия связывают поле раскрытия трещины с полями перемещений в среде и давление в трещине с полями напряжений и полями давления в среде.
- Уравнения, описывающие эволюцию срединной поверхности трещины. Считается, что срединная поверхность трещин является произвольной гладкой поверхностью с краем, который является гладкой кривой. Направление развития трещины в каждой точке ее фронта (границы ее срединной поверхности) определяется локальным напряженно-деформированным состоянием среды.

Алгоритмы. Для построения конечномерных аппроксимаций задачи используется единая и единственная, заданная в расчетной области Ω сетка Ω_h . Расчетная область включает в себя трещину \mathcal{F}_t , геометрия которой зависит от времени t . На срединной поверхности трещины какая-либо отдельная сетка не вводится. Предполагается, что срединная поверхность трещины и расчетная сетка Ω_h никак не согласованы.

Центральной идеей предлагаемого подхода является неявное описание геометрии эволюционирующей трещины с применением метода проекции ближайшей точки. Таким образом, предлагаемый подход является чисто *эйлеровым*. Это касается как решения уравнений пороупругости в объеме, то есть непосредственно в области Ω , — так и решения уравнения на эволюционирующей поверхности. В частности:

- При решении уравнений пороупругости при заданной геометрии трещины метод проекции ближайшей точки используется при построении варианта «расширенного» метода конечных элементов X-FEM. Подробно эти вопросы рассмотрены в главе 4.
- При решении уравнения смазочного слоя используется конечно-элементный вариант метода проекции ближайшей точки. Соответствующие вопросы рассмотрены в главе 5.

Отметим следующие особенности применения метода проекции ближайшей точки в настоящей работе:

- Эволюция срединной поверхности трещины описывается исключительно в терминах эволюции оператора проекции ближайшей точки. Соответствующие вопросы рассмотрены в главе 3.
- Все заданные на срединной поверхности трещины поля физических величин рассматриваются как заданные в пространстве функции, которые являются продолжением полей, заданных на срединной поверхности трещины. Для построения указанных продолжений используется оператор проекции ближайшей точки.

Далее опишем непосредственно используемый алгоритм. Для записи частных задач будем использовать операторное представление. Детально способ построения и вид соответствующих конечномерных задач рассматриваться не будет — это было сделано в предыдущих главах работы.

Пусть в области Ω введена расчетная сетка Ω_h , состоящая из тетраэдров. В области расположена трещина $\mathcal{F} = \mathcal{F}_t$, которая описывается значениям оператора проекции ближайшей точки P . Ее дискретное представление в рамках метода проекции ближайшей точки будем обозначать как \mathcal{F}_t^h , соответствующий моменту времени t проектор ближайшей точки будем обозначать как P_t^h , см. главу 3.

Пусть задача решается на отрезке $t \in [0, T]$. Разобьем его на интервалы (шаги по времени) Δt , так что

$$0 = t_0 < \Delta t < \dots < n\Delta t = t_n < \dots < N\Delta t = t_N = T.$$

Будем считать, что в каждый момент времени t_n решение задачи описывается следующим набором переменных:

$$\Xi(t) = \{\mathbf{u}_n(t), p_n(t), w_n(t), p_{f,n}(t), P(t), \mathbf{V}(t)\},$$

где \mathbf{u} и p — поле перемещений и давление во вмещающей среде, w — раскрытие трещины, p_f — давление в трещине, P_n — оператор проекции ближайшей точки, однозначно определяющий геометрию срединной поверхности трещины, \mathbf{V} — скорость движения фронта трещины. Последняя считается заданной по крайней мере в небольшой (сеточной) окрестности фронта трещины (или, что то же, края срединной поверхности). В зависимости от ситуации, ниже указанные поля могут рассматриваться как непрерывные или как их дискретные аппроксимации. В том случае, если это не приводит к непониманию, это не отмечается.

Рассмотрим задачу на одном шаге по времени $[t_n, t_{n+1}]$. Будем использовать обозначения

$$\Xi \equiv \Xi_n \equiv \Xi(t_n) = \{\mathbf{u}, p, w, p_f, P, \mathbf{V}\}, \quad \hat{\Xi} \equiv \Xi_{n+1} \equiv \Xi(t_{n+1}) = \{\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}, \hat{w}, \hat{p}_f, \hat{P}, \hat{\mathbf{V}}\}.$$

Символом $\tilde{\Xi}$ будем обозначать промежуточный набор переменных, вычисляемых в ходе итераций метода.

Отметим, что вид уравнений, которые иллюстрируют ниже в настоящем разделе шаги алгоритма, условный — они показывают структуру соответствующих дискретных задач. Полная и точная форма уравнений приведена в соответствующих главах работы.

Расчет одного временного шага соответствует переходу от набора переменных Ξ к набору переменных $\hat{\Xi}$. Алгоритм перехода состоит из следующих шагов.

Шаг 0. Инициализация. Определено решение

$$\Xi \equiv \Xi_n \equiv \Xi(t_n) = \{\mathbf{u}, p, w, p_f, P, \mathbf{V}\},$$

шаг по времени Δt , сеточная область Ω_h . Значения величин соответствуют моменту времени t .

Шаг 1. А. Производится расчет дискретного оператора проекции ближайшей точки \hat{P} для новой геометрии трещины $\hat{\mathcal{F}}$. Для этого используются алгоритмы, описанные в главе 3. Вектор переменных имеет вид

$$\tilde{\Xi} = \{\mathbf{u}, p, w, p_f, \hat{P}, \mathbf{V}\}.$$

Б. Производится определение типов узлов конечных элементов для алгоритма мето-

да X-FEM, расчет информации, необходимой для определения разрывных и сингулярных базисных функций метода. Соответствующие алгоритмы приведены в главе 4.

Информация, полученная на данном шаге далее не меняется в ходе работы алгоритма.

- Шаг 2. А. Построение поля $p_{f,\text{ext}} = E_{\mathcal{F}}[p_f]$ давления в трещине для новой геометрии трещины. Поле давление продолжается в «новую» часть $\hat{\mathcal{F}} \setminus \mathcal{F}$ срединной поверхности трещины.
- Б. Построение поля $p_{\text{ext}} = E_{\Omega}[p]$ давления в объеме Ω . Давление $p_{f,\text{ext}}$ определено в той же области Ω , что и давление p , — но с новой геометрией $\hat{\mathcal{F}}$ трещины.
- В. Построение поля $\mathbf{u}_{\text{ext}} = E_{\Omega}[\mathbf{u}]$ давления в объеме Ω . Поле перемещений $u_{f,\text{ext}}$ определено в той же области Ω , что и поле перемещений \mathbf{u} , — но с новой геометрией $\hat{\mathcal{F}}$ трещины.

Информация, полученная на данном шаге далее не меняется на последующих шагах работы алгоритма.

- Шаг 3. Инициализация внутренних итераций: положить

$$p_* = p_{\text{ext}}, \quad p_{f,*} = p_{f,\text{ext}}.$$

Значения p_* и $p_{f,*}$ переписываются в ходе итераций.

- Шаг 4. Решение уравнения для определения поля перемещений \mathbf{u}_* при заданном поле давления в области p_* , поле давления в трещине $p_{f,*}$ и «новой» геометрии трещины $\hat{\mathcal{F}}$:

$$\mathcal{A}_{\text{el}}(\mathbf{u}_*; p_*, p_{f,*}, \hat{\mathcal{F}}) = 0.$$

Решению этой задачи методом X-FEM/CP с применением представления поверхности с помощью оператора проекции ближайшей точки посвящена глава 4.

- Шаг 5. А. Расчет очередного приближения w_* для раскрытия трещины по определенному полю перемещений \mathbf{u}_* :

$$w_* = [\mathbf{u}_*] \cdot \mathbf{n},$$

на срединной поверхности $\hat{\mathcal{F}}$ трещины. Символ $[\cdot]$ обозначает скачок поля перемещений на боковых поверхностях $\hat{\mathcal{F}}^{\pm}$ трещины, см. раздел 1.4.

- Б. Решение уравнения для определения очередного приближения $p_{f,*}$ для поля давления в трещине, которое в операторном виде можно записать как:

$$\mathcal{B}(p_{f,*}, w_*) \frac{p_{f,*} - p_{f,\text{ext}}}{\Delta t} + \mathcal{A}_{\text{fr}}(\hat{p}_{f,*}; w_*) = Q.$$

Решению этого уравнения на поверхности посвящена глава 4 работы.

- Шаг 6. Решение уравнения для давления во вмещающей среде при заданном поле перемещений \mathbf{u}_* для определения поля давления p_* ,

$$\mathcal{B}_1(p_*) \frac{p_* - p_{\text{ext}}}{\Delta t} + \mathcal{B}_2 \frac{\epsilon(u_*) - \epsilon(\mathbf{u}_{\text{ext}})}{\Delta t} + \mathcal{A}_{\text{fr}}(p_*; \tilde{w}) = Q,$$

где ϵ — величина объемной деформации как функция поля перемещений. Соответствующие алгоритмы рассматриваются в главе 4.

Шаг 7. Проверка критерия остановки итераций. В случае его невыполнения — переход на шаг 4, в противном случае — на шаг 8.

Шаг 8. Определение направления развития и скорости \mathbf{V} трещины в точках ее фронта на основе заданного критерия и скорости развития фронта трещины.

Шаг 9. Окончание расчета временного шага, решение определено как

$$\hat{\Xi} := \{\mathbf{u}_*, p_*, w_*, p_*, \hat{P}, \hat{\mathbf{V}}\}.$$

Алгоритмические детали для каждого шага алгоритма подробно описаны в соответствующих главах. Ниже кратко приведены детали, связанные с конкретным способом реализации шагов.

На шаге 1А алгоритма происходит расчет оператора проекции ближайшей точки для «новой» геометрии $\hat{\mathcal{F}}$ трещины. Это позволяет (см. алгоритмы главы 3) определить как множество проекций узлов сетки, так и непосредственно поверхность $\hat{\mathcal{F}}$ и ее край $\partial\hat{\mathcal{F}}$. Эта информация далее используется:

- при построении классификации узлов сетки для метода X-FEM/CP (шаг 1Б алгоритма) и расчете используемых в нем дополнительных базисных функций (шаг 4 алгоритма);
- при решении уравнения на поверхности на шаге 5 алгоритма.

Дискретный оператор проекции ближайшей точки определен в области $\Omega_{\mathcal{F}}$, окружающей трещину, см. главу 3). Область $\Omega_{\mathcal{F}}$ определена как сеточная окрестность трещины заданной «толщины» $N = 3 \div 10$ конечных элементов. Для построения (сеточной) области $\Omega_{\mathcal{F}}$ используется рекурсивный алгоритм. Предположим, что на очередном шаге по времени известно множество проекций на срединную поверхность трещины и ее фронт. С использованием этой информации определяется множество конечных элементов, которые содержат в себе точки проекций. Далее к этому множеству добавляются все инцидентные уже известным конечные элементы. Процедура повторяется заданное число раз. На конечном шаге происходит проверка корректности построенной сеточной области: в нее добавляются конечные элементы, все узлы которых удалены от срединной поверхности на расстояние, которое не превышает таковое для уже построенной сеточной области.

Так как для расчета одного временного слоя необходима информация о «старой» (в момент времени t) и «новой» (в момент времени $\hat{t} = t + \Delta t$) геометрии трещины, то при расчете каждого временного шага поддерживается информация об обеих областях — $\Omega_{\mathcal{F}}$ и $\Omega_{\hat{\mathcal{F}}}$. При этом явно контролируется, что $\Omega_{\mathcal{F}} \subset \Omega_{\hat{\mathcal{F}}}$, — как сеточные области, то есть как множества образующих их тетраэдров сетки в области Ω .

В ходе работы алгоритма происходит динамическое построение области $\Omega_{\hat{\mathcal{F}}}$ на основе известной информации об области $\Omega_{\mathcal{F}}$ и скорости \mathbf{V} движения фронта трещины.

На шаге 2А алгоритма поле давления p_f , заданное для геометрии \mathcal{F} трещины продолжается на «новую» геометрию $\hat{\mathcal{F}}$ трещины. Это необходимо для корректного определения

граничных условий для решения задачи теории упругости на шаге 4 и для аппроксимации временной производной при решении уравнения на поверхности на шаге 5, см. главу 5 работы. При этом гарантируется, что в общей части \mathcal{F} трещин \mathcal{F} и $\hat{\mathcal{F}}$ значения исходного и продолженного поля совпадают, см. главу 3.

В соответствии с идеологией метода все поля, отнесенные к трещине, в частности, поле p_f давления в трещине и поле w ее раскрытия, определены как заданные в пространственной области $\Omega_{\mathcal{F}}$ функции. Для построения продолжения используется (определенный в той же области) оператор продолжения E , построенный с помощью оператора проекции ближайшей точки, см. главу 5.

На шагах 2Б и 2В строится продолжение уже известных в области Ω с трещиной \mathcal{F} полей в ту же область, но с «новой» геометрией $\hat{\mathcal{F}}$ трещины. Необходимость продолжения полей связана с необходимостью аппроксимировать временную производную на шаге 6 алгоритма. Оператор продолжения формулируется непосредственно в терминах узловых значений решения.

Конкретно, оператор продолжения строится следующим способом.

Пусть $\mathcal{I}_{t,c}$ и $\hat{\mathcal{I}}_{t,c}$ — множества узлов, к которым отнесены дополнительные базисные функции соответствующего вида, в моменты времени t и $t + \Delta t$ соответственно. На текущем временном слое оба этих множества известны.

Для примера рассмотрим способ продолжения аппроксимации скалярной функции u_h , которая является, например, одной из компонент поля перемещений. В соответствии с методом X-FEM и построениями главы 4, имеем

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}_s} N_i(\mathbf{x})u_i + \sum_{i \in \mathcal{I}_c} N_i^t(\mathbf{x})a_i + \sum_{k=1}^m \sum_{i \in \mathcal{I}_t} N_{i,k}^{(t)}(\mathbf{x})b_i^k,$$

где множество узлов \mathcal{I}_s дополняет множества \mathcal{I}_t и \mathcal{I}_c до полного множества \mathcal{I} узлов сетки, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_s \cup \mathcal{I}_c \cup \mathcal{I}_t$.

Продолжение функции u_h определено как

$$E_{\Omega}[u^h](\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}_s} N_i(\mathbf{x})u_i + \sum_{i \in \mathcal{I}_c \cap \hat{\mathcal{I}}_c} N_i^t(\mathbf{x})a_i.$$

Другими словами, продолжение строится следующим способом: значения степеней свободы, общие для обоих представлений $\mathcal{I}_{c,t}$ и $\hat{\mathcal{I}}_{c,t}$ «копируются», остальные дополнительные степени свободы в «продолженном» дискретном решении задачи приравниваются нулю.

На шаге 3 работы алгоритма инициализируются начальные значения приближений для полей давления в трещине и в среде. Для поля перемещений такая инициализация не требуется.

На шаге 4 алгоритма происходит расчет очередного приближения для поля перемещений на для области с трещиной с новой геометрией $\hat{\mathcal{F}}$. Для решения задачи используется метод X-FEM/CP, описанный в главе 4. Известное поле давления в трещине учитывается как граничное условие Неймана. Особенностью реализации метода X-FEM является то, что узлы, в которых заданы дополнительные степени свободы для фронта трещины, образуют область фиксированного размера вокруг фронта трещины. Таким образом, «обогащаются» не только те узлы, которые инцидентны конечным элементам, через которые проходит фронт $\partial\hat{\mathcal{F}}$

трещины.

Для интегрирования используются специального вида квадратуры. Для тетраэдров, в которых заданы сингулярные базисные функции, но сам тетраэдр не содержит срединную поверхность трещины или ее край, исходный тетраэдр разбивается 8 меньших путем добавления узлов в центры его ребер. Далее, внутри каждого «маленького» тетраэдра используется квадратурная формула 3-го порядка.

Для тетраэдров, в которых заданы сингулярные базисные функции, и тетраэдр содержит край трещины (то есть границу $\partial\mathcal{F}$ срединной поверхности \mathcal{F} трещины) процедура имеет аналогичный вид, однако разбиение на меньшие тетраэдры производится с учетом геометрии трещины. Программная реализация позволяет использовать задаваемую пользователем степень измельчения конечного элемента на тетраэдры меньших размеров. На основе построенных разбиений генерируются узлы и веса квадратурной формулы для исходного тетраэдра, которая непосредственно используется в алгоритме сборки матрицы жесткости.

На шаге 5 алгоритма по известному раскрытию трещины производится расчет очередного приближения для поля $p_{f,*}$ давления в трещине. Для этого используются алгоритмы, изложенные в главе 5 работы. Дискретная задача решается не во всей расчетной области Ω , а лишь в ее части $\Omega_{\mathcal{F}}$, окружающей срединную поверхность трещины. Для решения используется конечно-элементный вариант метода проекции ближайшей точки.

На крае поверхности для давления задается граничное условие первого рода, то есть непосредственно значение давления. В качестве такового берется значения давления флюида в области в точках фронта. Поле давления в области является ограниченным и постановка такого условия не представляет проблем. Отметим, что такая постановка граничного условия, вообще говоря, не связана с фактом наличия или отсутствия лага.

Отметим, что в отличие от подавляющего большинства работ, флюид в трещине описывается как сжимаемый. Как следствие, в такой постановке не требуется учет балансового уравнения для флюида в трещине, которое связывает объем закачанной в трещину жидкости с объемом трещины.

Источник Q в правой части уравнения, которое решается на шаге 2Б алгоритма, учитывает приток флюида в трещину, как внешний, так и из вмещающей среды. Последний определяется из решения задачи во вмещающей трещину среде.

В том случае, если вмещающая среда является непроницаемой, то есть описывается уравнениями «чистой» теории упругости, на данном шаге заканчивается одна итерация определения решения. После этого возможен переход на шаг 4 алгоритма для определения очередного приближения поля напряжений и раскрытия трещины. Численные исследования метода в этом случае показывают, что в этом случае для сходимости достаточно $3 \div 5$ итераций. При этом после первой итерации решение меняется слабо и вообще не меняется качественно. По этой причине при решении пороупругой задачи эти «внутренние» итерации не производятся, хотя их наличие предусмотрено в программе.

На шаге 6 алгоритма производится решения уравнения для определения очередного приближения поля давления p_* в области. При расчете учитывается (в аппроксимации временной производной) «новое» поле перемещений, рассчитанное на шаге 4 и «новое» поле давления, рассчитанное на шаге 5. Известное поле $p_{f,*}$ давления в трещине задает граничное условие первого рода. Оно учитывается методом штрафа, величина которого определяется шагом сетки.

На шаге 7 алгоритма происходит вычисление критерия остановки итераций, который имеет вид стандартного условия малости изменения компонент решения (полей перемещений и давления в среде, давления в трещине) на очередном шаге итерационного алгоритма. Если соответствующее условие выполняется, то происходит переход на шаг 8 алгоритма — определение направления развития трещины. В противном случае происходит переход на шаг 2.

На шаге 8 алгоритма происходит определение направления развития и трещины и скорости ее развития.

Здесь необходимо отметить следующее. Вообще говоря, в рассматриваемой работе, равно как и во всех цитированных источниках, посвященных теоретическому описанию и моделированию динамики флюидонаполненной трещины, рассматривается квазиравновесная модель трещины. В рамках этого допущения считается, что трещина является равновесной в каждый момент времени. Это означает, что в заданный момент времени и при заданных нагрузках, определенных в объеме области, на ее границах и на срединной поверхности трещины, — геометрические параметры трещины полностью определены и «скорость» ее развития равняется нулю. Другими словами, скорость движения трещины однозначно определяется скоростью изменения внешних и внутренних сил, действующих в среде и трещине. В свою очередь, равновесная конфигурация трещины определяется условием $J = J_*$, где J — значение интеграла Черепанова-Райса, J_* — его критическое значение, см. раздел 1.5.2 работы.

По существу, приведенное соотношение является нелокальным по пространству и времени уравнением, определяющим состояние среды и конфигурацию трещины. Рассмотренные выше в настоящей работе методы решения задач пороупругости и течения в трещине необходимы для вычисления значения J -интеграла Черепанова-Райса при конкретных заданных внешних нагрузках и истории нагружения.

Тем не менее, такой теоретически корректный подход практически никогда не используется. Причина этого заключается в том, что решение уравнения $J = J_*$ с одной стороны, является теоретически и вычислительно сложной задачей (необходимо на каждом шаге по времени итерационно уточнять положение каждой точки фронта трещины), — а с другой стороны, не слишком важной с прикладной точки зрения — технологические условия, которые реализуются при проведении, например, процедуры гидроразрыва пласта, априорно предполагают, что трещина *будет* развиваться.

По этой причине во всех работах (включая настоящую), посвященных динамике развития трещин гидроразрыва, используется следующий подход. В модель процесса входит тот или иной критерий хрупкого разрушения. Он используется, прежде всего, для определения *направления* развития трещины. Далее, в том случае, если $J \leq J_*$, считается, что развитие трещины не происходит. В случае, если $J > J_*$ считается, что трещина «сдвинется» в заданном направлении на расстояние, которое тем больше, чем больше текущее значение J превышает критическое значение J_* . Этот критерий неявно обоснован допущением о том, что в указанных точках и в текущий момент времени процесс развития трещины является неравновесным. Именно этой ситуации соответствует выполнение неравенства $J > J_*$, см. раздел 1.5.2 работы. Здесь важно, ввиду приведенного выше в разделе 6.3.1 обзора и материалов раздела 1.5.2 отметить следующее:

- Даже в том случае, если алгоритм расчета динамики трещины использует теоретиче-

скую асимптотику, связывающая раскрытие трещины, давление в ней и скорость ее движения, — сама по себе скорость движения является неизвестным параметром. Если же она задана каким-то образом, то соответствующая зависимость выражает асимптотическое поведение раскрытия трещины и давления в ней. При этом указанная асимптотика не позволяет одновременно определить распределение давления в трещине, ее раскрытие в окрестности фронта и скорость ее развития.

- Развитие трещины, к боковым поверхностям которой приложены нагрузки, в ряде случаев является неравновесным. В частности, это касается случая, когда к боковым поверхностям трещины приложено постоянное по ее срединной поверхности давление.

Такая ситуация типична и для трещин в чисто упругой среде — для определения скорости движения трещины (или, что эквивалентно, оценке расстояния, на которое она сместится за шаг по времени), используются теоретически необоснованные (в конкретно рассматриваемом случае), но хорошо зарекомендовавшие себя в практических расчетах критерии типа закона Пэриса (“Paris law”, см., [Paris1963]).

Обоснованная оценка скорости распространения трещины *технически* может быть получена при условии, что флюид в трещине является несжимаемым. В этом случае объем трещины (на шаге решения уравнения течения в трещине при ее *фиксированном* раскрытии) однозначно определяются массой флюида, закачанного в нее за шаг по времени. В этом случае алгоритм (и модель) должны учитывать уравнение баланса массы флюида в трещине в случае, если раскрытие трещины является фиксированным. Удовлетворить этому уравнению можно двумя способами: либо изменить раскрытие трещины за счет реализации соответствующего шага итерационного алгоритма «раскрытие»/«давление в трещине» — но такого шага обычно избегают как вычислительно дорогого; либо путем коррекции величины шага по времени. В этом смысле оценки скорости движения фронта трещины подобного типа и являются *техническими*, а не *содержательными* — в силу того, что в полной постановке задачи по крайней мере одна из сред — вмещающая трещину среда — или флюид в трещине — являются сжимаемыми. В силу этого возможность закачать в заданный объем трещины произвольную массу флюида не является принципиально невозможной с точки зрения корректности постановки задачи. Соответствующее ограничение — не свойство модели как таковой, а ограничением способа реализации конкретного вычислительного алгоритма.

В настоящей работе в такого сорта «коррекции» нет необходимости — в рассматриваемой модели флюид считается *сжимаемым* и в пласте, и в трещине. Поэтому в описанном выше алгоритме используется естественный, с учетом сказанного выше, способ определения скорости «движения» точек фронта трещины за счет выбора модельного параметра — характерного расстояния, на которое сместится фронт трещины за шаг по времени (см. параметр α разделе 1.5.2. В расчетах ниже значение этого параметра определяется шагом расчетной сетки и соображениями точности: за один шаг по времени точка фронта трещины, если сдвигается, то на расстояние порядка шага расчетной сетки.

При минимальных изменениях описанный выше алгоритм позволяет проводить расчеты для нескольких трещин в случае выполнения единственного условия: трещины расположены достаточно далеко друг от друга. С алгоритмической точки зрения это означает, что содержащие трещины сеточные области, в которых решается уравнение смазочного слоя и определены дополнительные степени свободы метода X-FEM, не пересекаются (то есть, отделены

по крайней мере одни «слоем» конечных элементов). Формально это позволяет использовать описанные выше алгоритмы и структуры данных для случая одной трещины, в каждой из таких сеточных областей.

6.5 Примеры расчетов

В настоящем разделе представлены результаты применения предложенного в настоящей главе алгоритма для моделирования процессов изменения полей давления и напряжений в пороупругой среде совместно с течением в трещине.

Рассматриваются задачи с трещиной со стационарной и нестационарной срединной поверхностью, в неоднородных и неоднородных средах. Представленные расчеты демонстрируют работоспособность предложенных алгоритмов для решения полной связанной задачи о развитии флюидонеполненной трещине в пороупругой среде.

6.5.1 Стационарная трещина в неоднородной среде

В настоящем разделе представлены результаты расчета эволюции полей в окрестности трещины и давления в трещине для стационарной в неоднородной среде. В отличие от расчетов, описанных в разделе 4.7.2, где давление на срединной поверхности трещины задано, в настоящем расчете оно описывается уравнением смазочного слоя. Это предполагает эволюцию с течением времени распределения давления в трещине, ее раскрытия и полей во вмещающей трещину среде. Таким образом, геометрия трещины (форма ее срединной поверхности) считается заданной и не меняется с течением времени. Вместе с тем, задача решается в полностью связанной постановке, — с учетом течения в трещине и эволюции полей давлений и напряжений в среде.

Расчетная область представляет собой параллелепипед $\Omega = L_x \times L_y \times L_z$, где $L_x = L_y = L_z = 100$ метров. Для расчетов использовалась равномерная сетка из тетраэдров. Узлы сетки образуют кубическую решетку $N_x \times N_y \times N_z$ с $N_x = N_y = N_z = 40$. Таким образом, шаг сетки узлов $h_x = h_y = h_z = 2.5$. Всего в сетке $N_n = 64000$ узлов и $N_e = 296595$ конечных элементов. Шаг по времени составлял $\Delta t = 900$ с (или 15 минут). Полное время расчета $T = 18000$ с (или 5 часов).

Расчетная область Ω разделена на две части вертикальной плоскостью, проходящей через ее центр перпендикулярно оси Ox . Свойства среды в каждой из подобластей для вариантов расчета приведены в таблицах 6.1. Оставшиеся параметры модели имеют следующие

	E , Па	ν	b	M , Н/м ²	K , м ²
$x < L_x/2$	$1.5E + 10$	0.2	0.79	$1.3E + 10$	$1.87E - 15$
$x \geq L_x/2$	$1.5E + 09$	0.2	0.75	$1.3E + 09$	$1.87E - 15$

Таблица 6.1. Свойства среды.

значения: $\mu = 4.0E - 2$ Па·с — вязкость флюида, $c_f = 1.0E - 6$ Па⁻¹ — сжимаемость флюида.

В начальный момент времени имеет форму плоского диска радиусом $R = 22$ м, расположенного горизонтально в центре расчетной области. Распределение давления в трещине

определяется решением полной системы уравнений, с учетом группы уравнений пороупругости и течения в трещине. В начальный момент времени давление внутри трещины принималось равным 300 атм. В центральной части трещины считалось заданным, как граничное условие, давление $p_{fr} = 330$ атм.

На границе области считается заданным давление жидкости 300 атм и заданные равное нулю нормальные компоненты поля перемещений на гранях. В начальный момент времени давление жидкости в области равнялось 300 атм.

На рисунке 6.1 показано изменение давления в трещине и вмещающей ее среде с течением времени. Результаты приведены для моментов времени $t = (0, 2, 5, 8 \dots, 20)\Delta t$. Видно выполнение условий непрерывности давлений в среде и на срединной поверхности трещины. Распределение давления (равно как и раскрытие) трещине непостоянно и несимметрично — это связано с отличием упругих и фильтрационных модулей среды в различных подобластях расчетной области.

На рисунке 6.2 показано распределения компонент тензора напряжений на последнем шаге по времени. На этих рисунках также заметно качественно отличающееся поведение полей напряжений, связанное с существенным отличием упругих свойств.

На рисунке 6.3 показана эволюция давления в трещине. Распределение давления показано цветом. На этих рисунках трещина показана не как плоская срединная поверхность, а как трехмерный объект. Его толщина в различных точках срединной поверхности определяется раскрытием трещины в соответствующих точках (показано в измененном масштабе).

Характер деформации боковых поверхностей трещины более подробно демонстрируют рисунки 6.4, 6.5 и 6.6. На рисунке 6.4 представлены поля u_x и u_z поля перемещений совместно с деформированной геометрией трещины. Более детально и в различных ракурсах поле перемещений u_z показано на рисунке 6.5. Наконец, на рисунке 6.6 показана деформированная поверхность трещины в различных ракурсах. Цветом показано распределение давления в трещине.

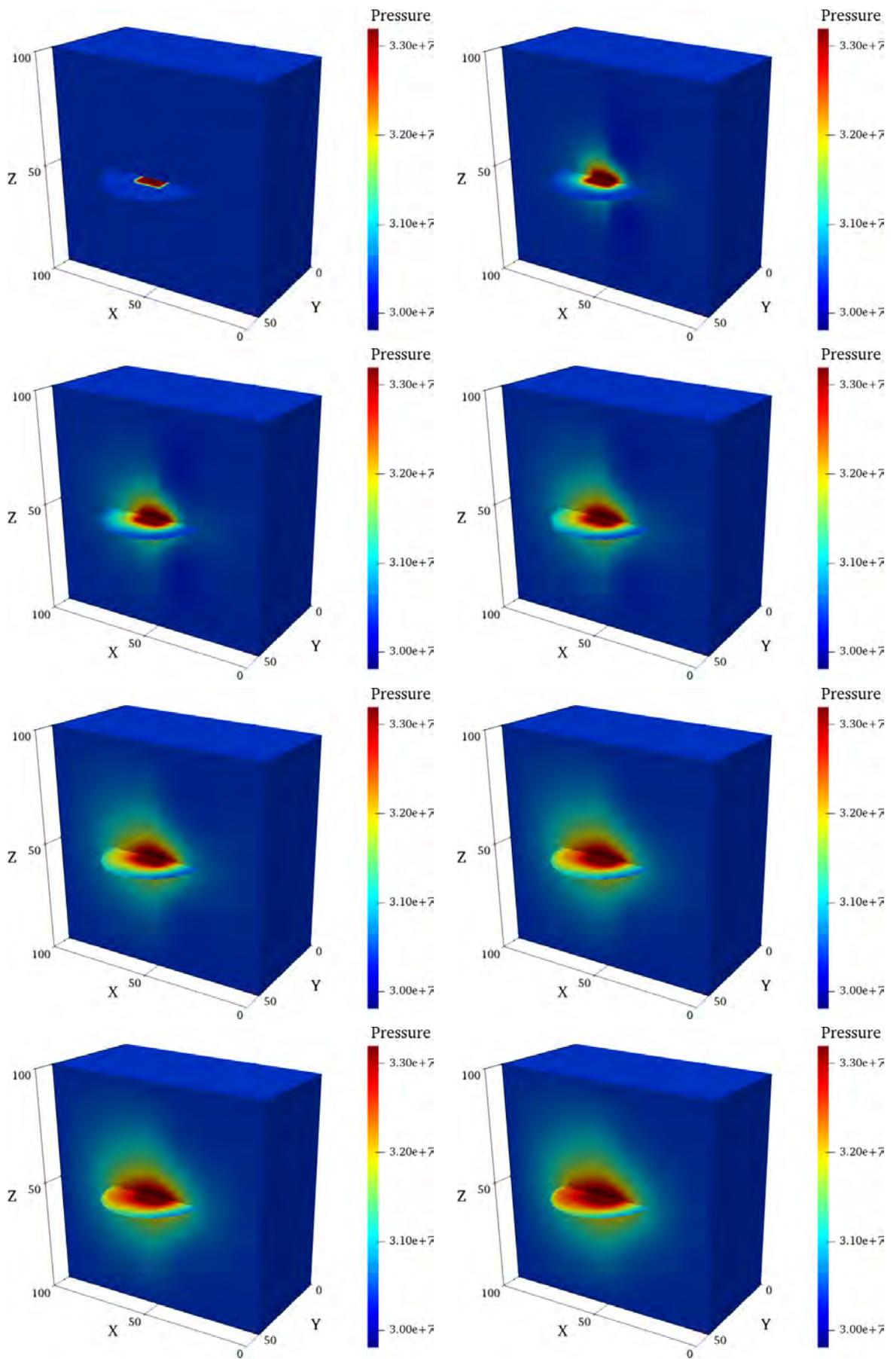


Рис. 6.1. Распределение давления в среде и трещине для $t = (0, 2, 5, 8 \dots, 20)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

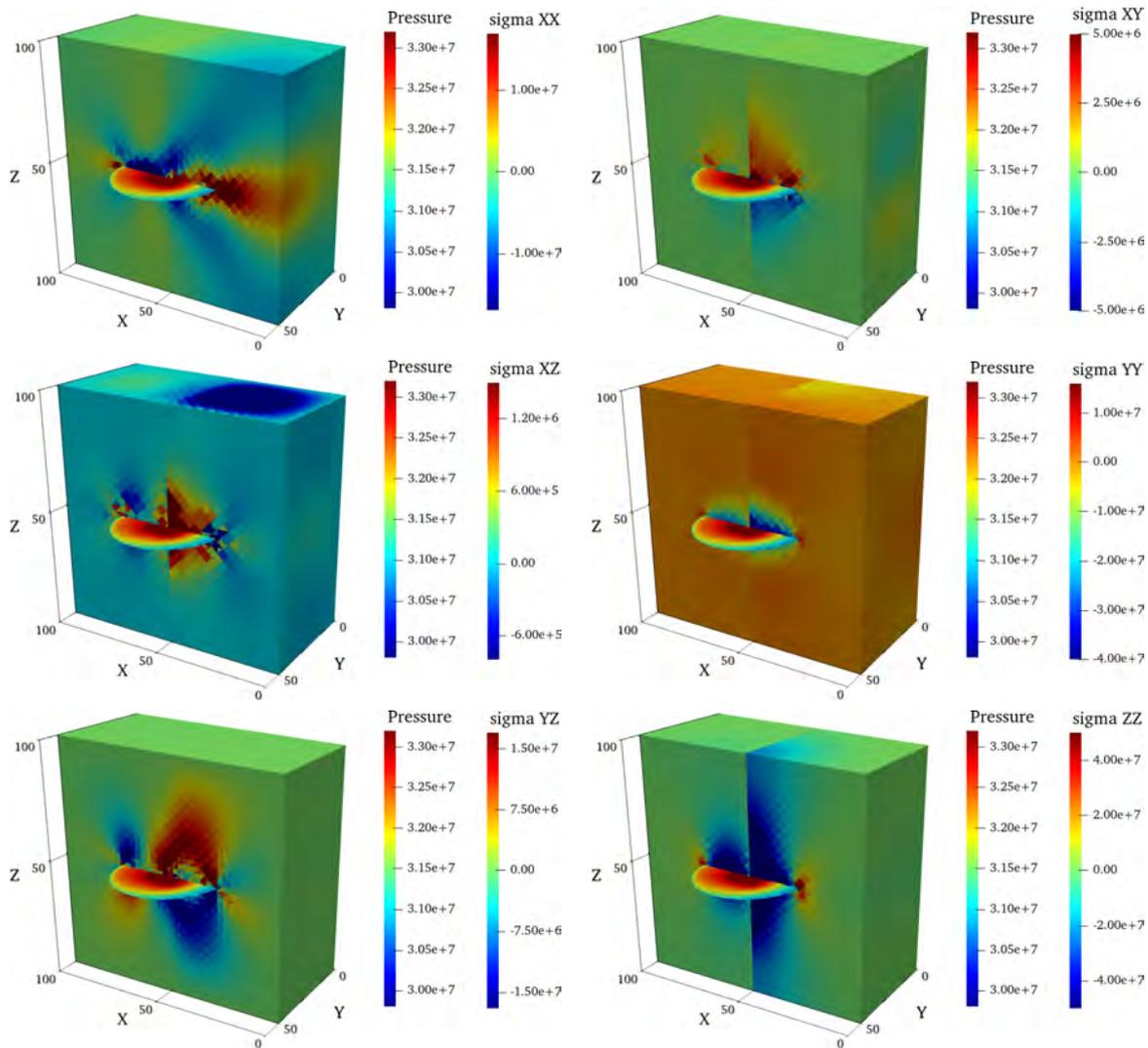


Рис. 6.2. Распределение давления в трещине и компоненты тензора напряжений в среде при $t = 20\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

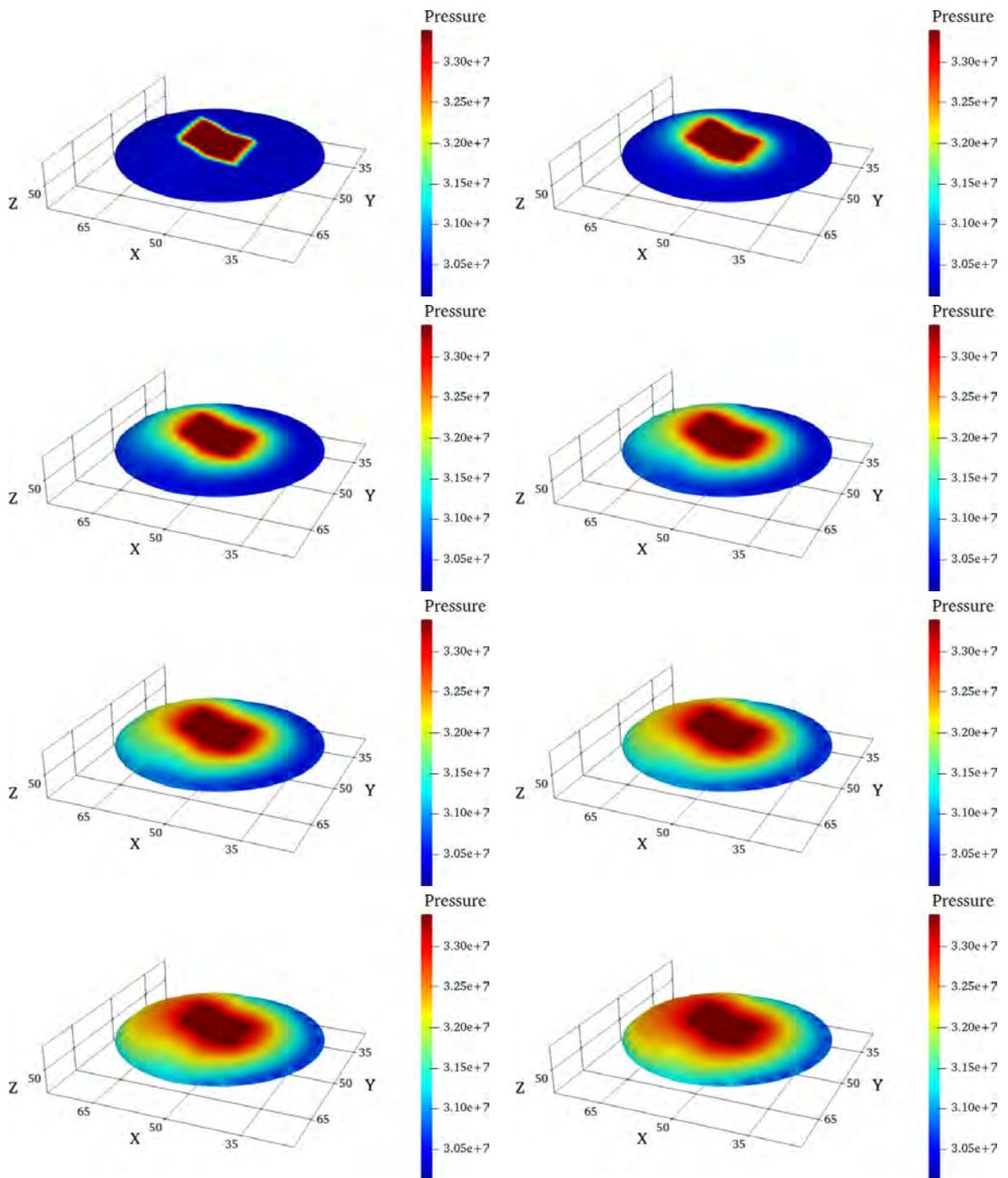


Рис. 6.3. Раскрытие трещины (геометрия) и давление в ней (цвет) при $t = (0, 2, 5, 8 \dots, 20)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

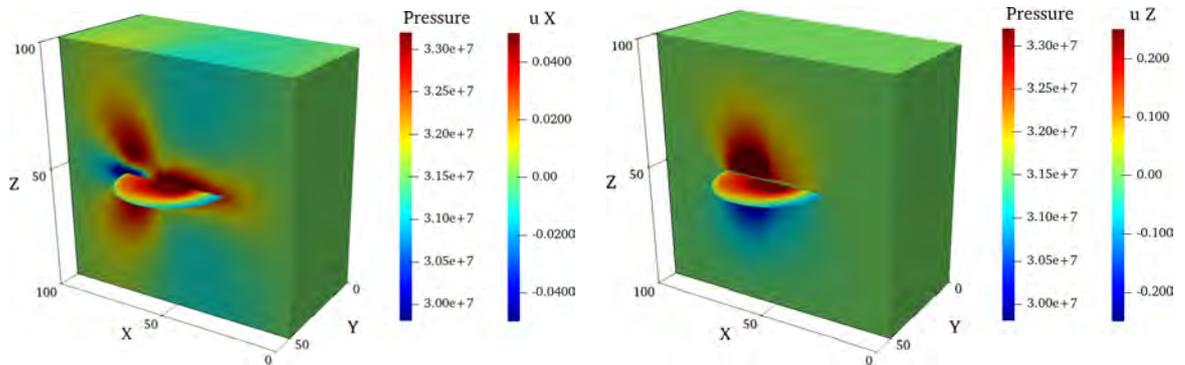


Рис. 6.4. Поля перемещений u_x (слева) и u_z (справа) при $t = 20\Delta t$.

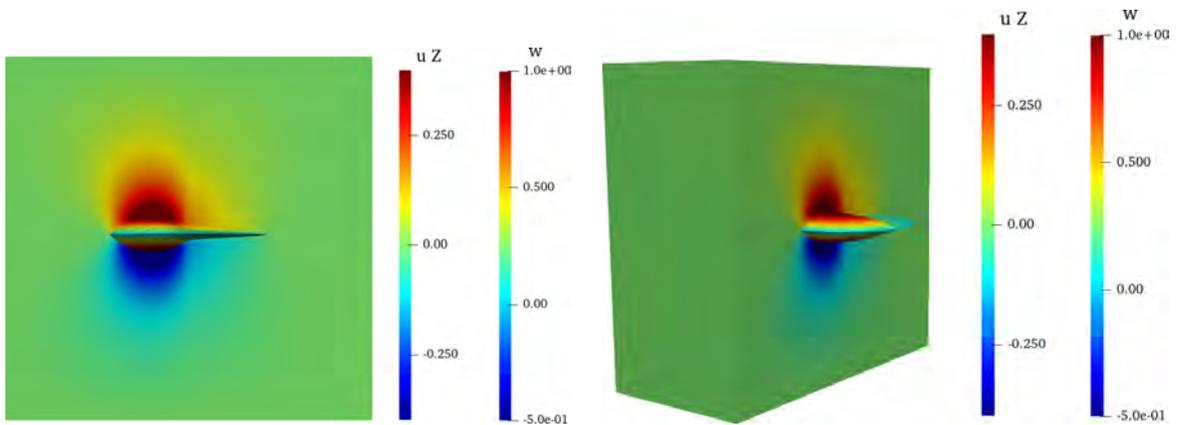


Рис. 6.5. Деформированная геометрия трещины и поле перемещений u_z при $t = 20\Delta t$.

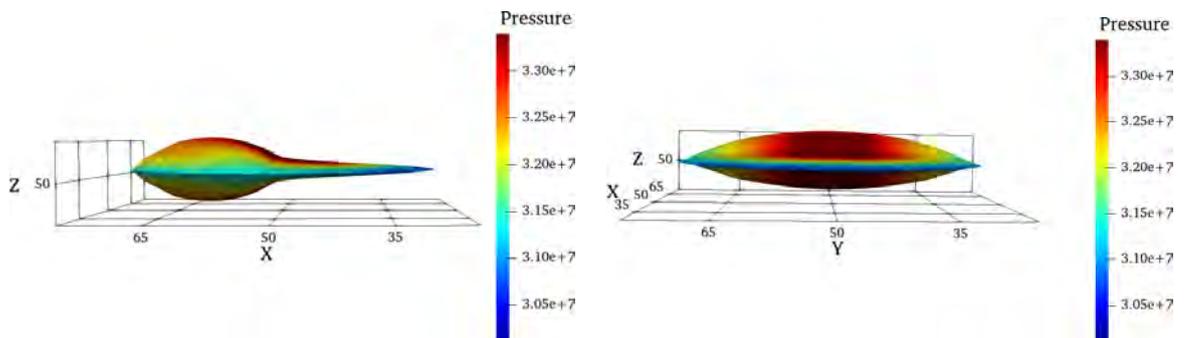


Рис. 6.6. Деформированная геометрия трещины и распределение поля давления в ней (цвет) при $t = 20\Delta t$.

6.5.2 Эволюционирующая плоская трещина

В настоящем разделе рассматривается задача об эволюции плоской трещины в заданном поле направлений распространения трещины.

Расчетная область представляет собой параллелепипед $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$, где $L_x = L_y = 100$ м, $L_z = 50$ м. Для расчетов использовалась равномерная сетка из тетраэдров. Узлы сетки образуют кубическую решетку $N_x \times N_y \times N_z$ с $N_x = N_y = 40$, $N_z = 50$. Таким образом, шаг сетки узлов $h_x = h_y = h_z = 2.5$. Всего в сетке $N_n = 32000$ узлов и $N_e = 28899$ конечных элементов. Шаг по времени составлял $\Delta t = 900$ с (или 15 минут). Полное время расчета $T = 18000$ с (или 5 часов).

Распределение свойств среды является однородным со следующими параметрами: $E = 1.4E + 10$ Па — модуль Юнга, $\nu = 0.2$ — коэффициент Пуассона, $M = 1.3E + 10$ Па и $B = 0.79$ — модули Био, $\mu = 1.0E - 3$ Па·с — вязкость флюида. Сжимаемость флюида принималась равной $1.0E$ Па⁻¹. Проницаемость среды $K = 1.87511E - 13$ м².

В начальный момент времени давление жидкости в пласте $p_0 = 300$ атм, в трещине $p_{f,0} = 300$ атм. Давление в центре трещины $p_{fr} = 330$ атм.

На границе области заданы следующие граничные условия. На гранях расчетной области $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ задавались нулевые нормальные перемещения $u_x = 0$, $u_y = 0$ и $u_z = 0$, соответственно. На гранях $x = L_x$, $y = L_y$ и $z = L_z$ задавались нормальные сжимающие напряжения $T_x = T_y = 300$ атм и $T_z = 700$ атм.

Срединная поверхность трещины является диском с начальным радиусом $R_0 = 12$ м. В ходе развития трещины точки границы диска движутся с постоянной скоростью радиальном направлении.

На рисунках 6.7-6.8 приведено распределение давления в сечении расчетной области в последовательные моменты времени. Порядок рисунков: слева направо и сверху вниз. Аналогично, на серии рисунков 6.9-6.10 показана динамика изменения компоненты T_{zz} поля напряжений. На рисунках 6.11-6.12 представлено распределение компоненты u_z поля перемещений. Из представленных результатов можно заметить существенное влияние развития трещины на динамику поля давления. Распределение напряжений имеет вид, характерный для распределения напряжений в окрестности фронта трещины.

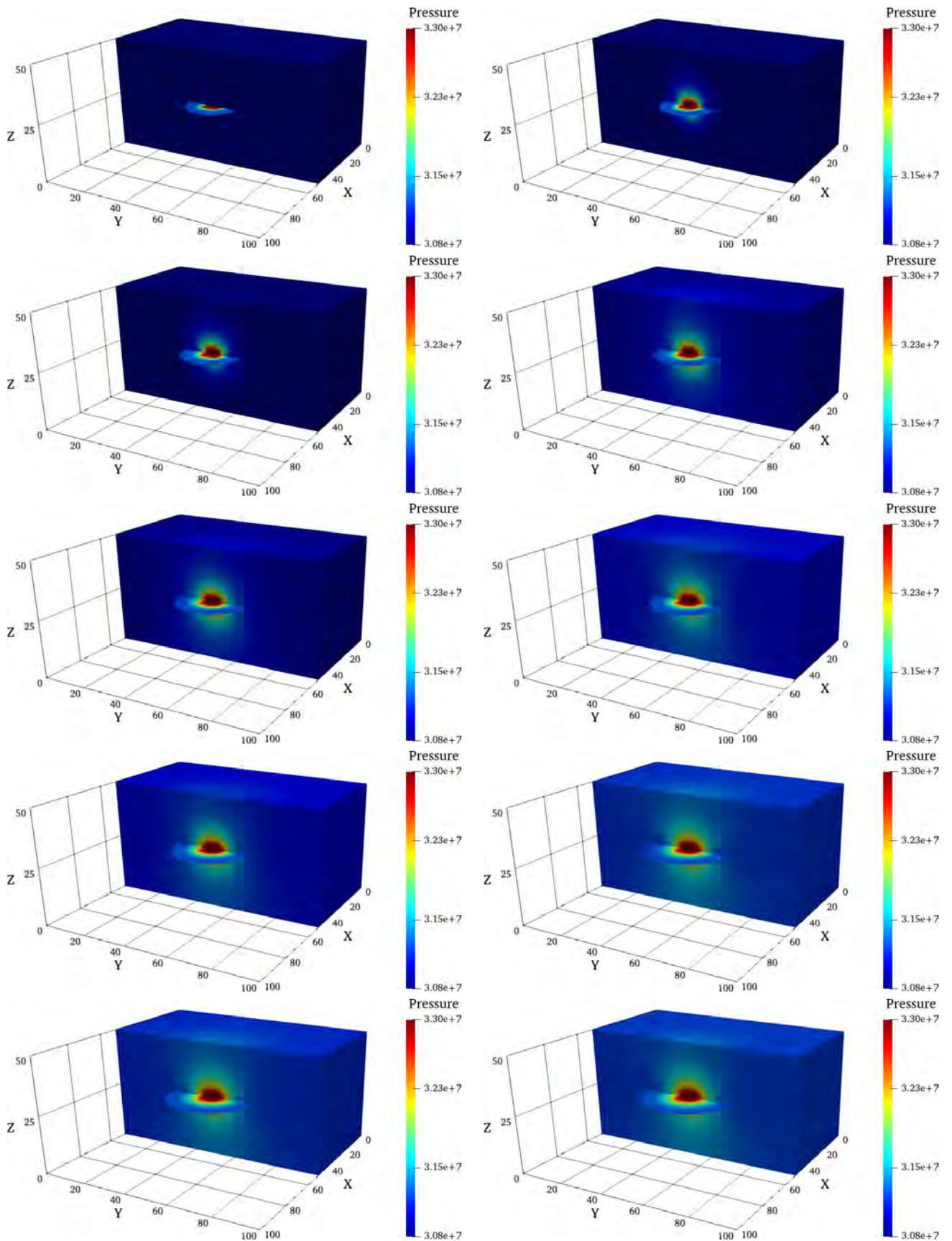


Рис. 6.7. Распределение давления в среде и трещине для $t = (1, 2, \dots, 10)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

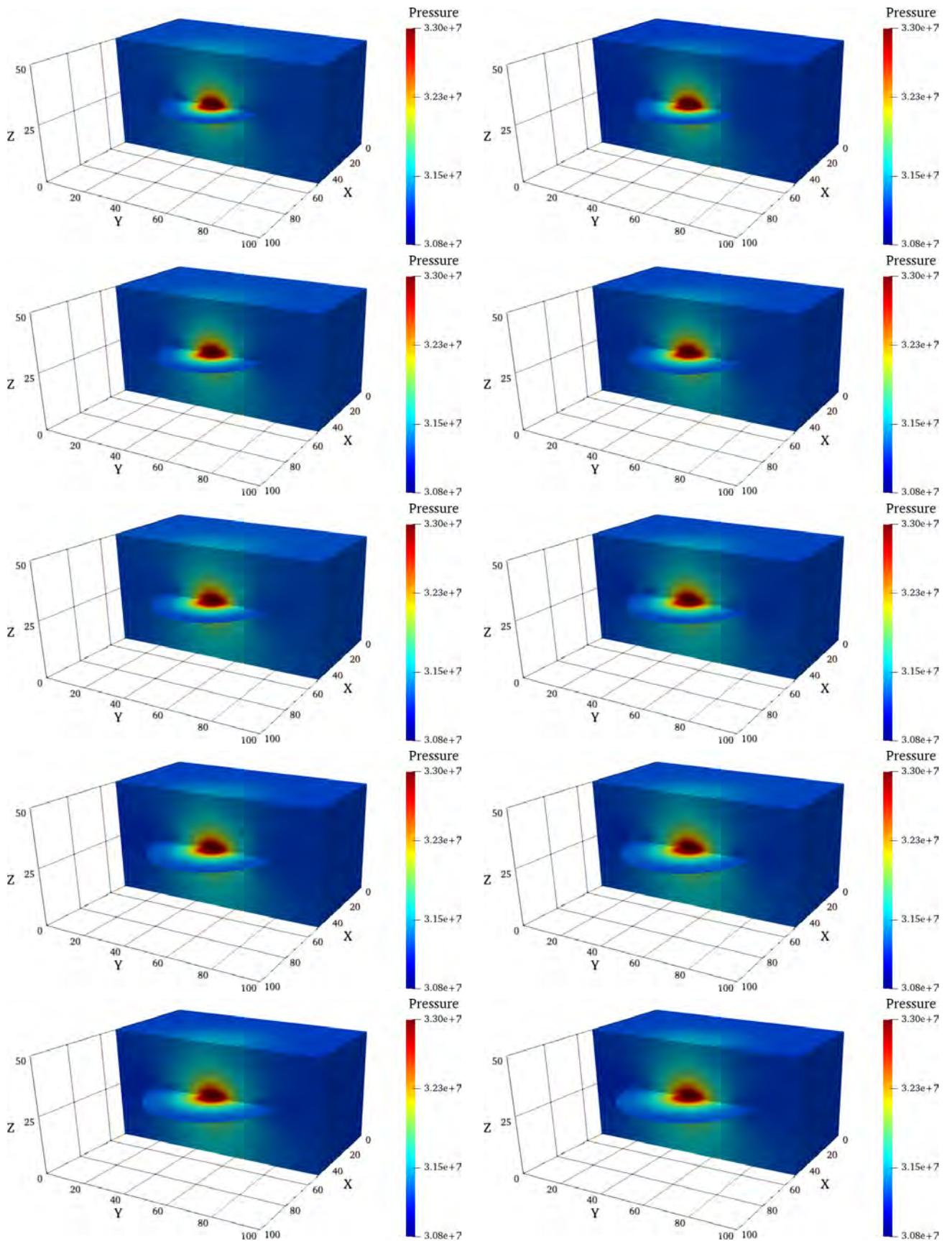


Рис. 6.8. Распределение давления в среде и трещине для $t = (11, 12 \dots, 20)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

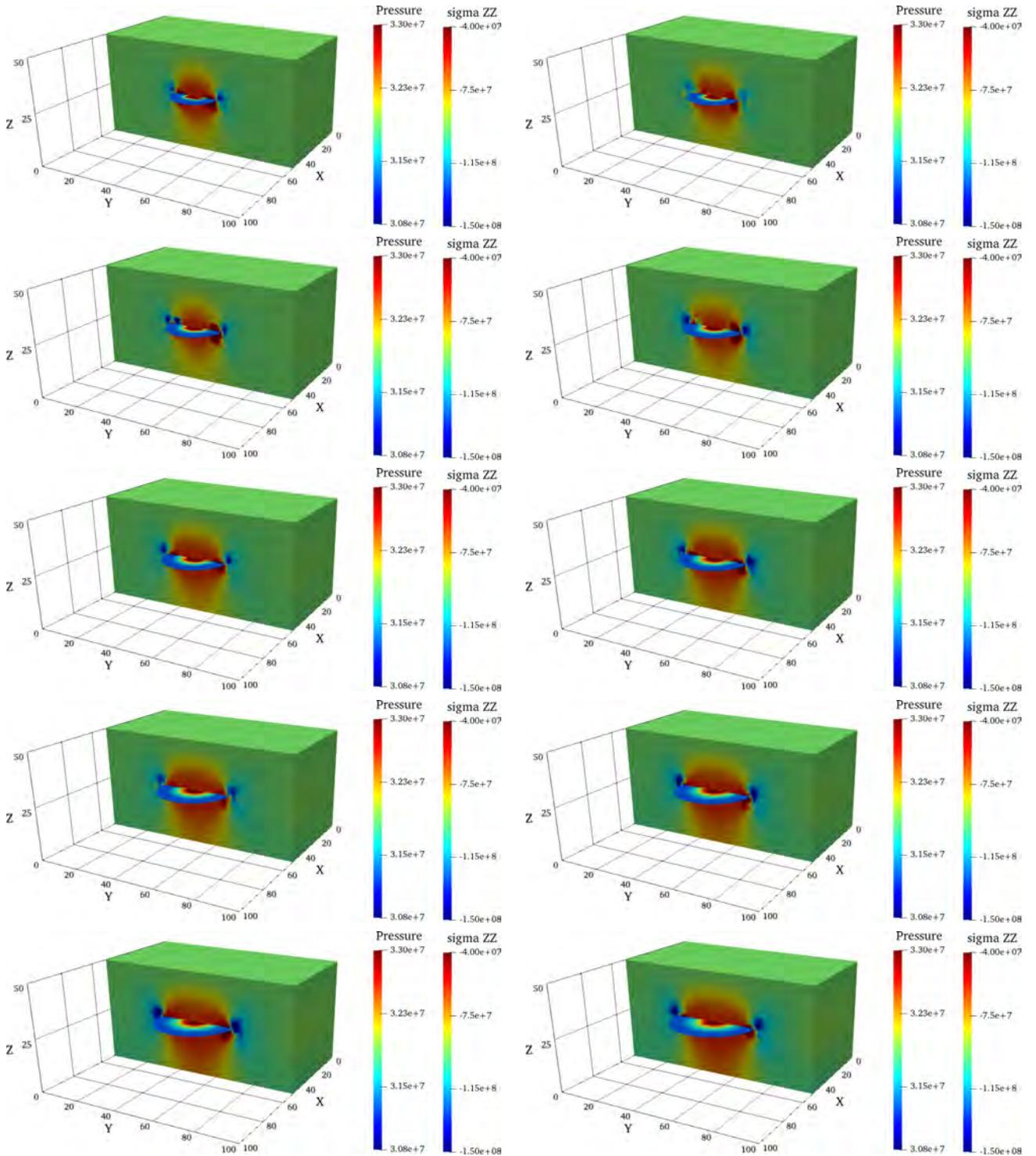


Рис. 6.9. Распределение компоненты T_{zz} тензора напряжений в среде и давления в трещине для $t = (1, 2, \dots, 10)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

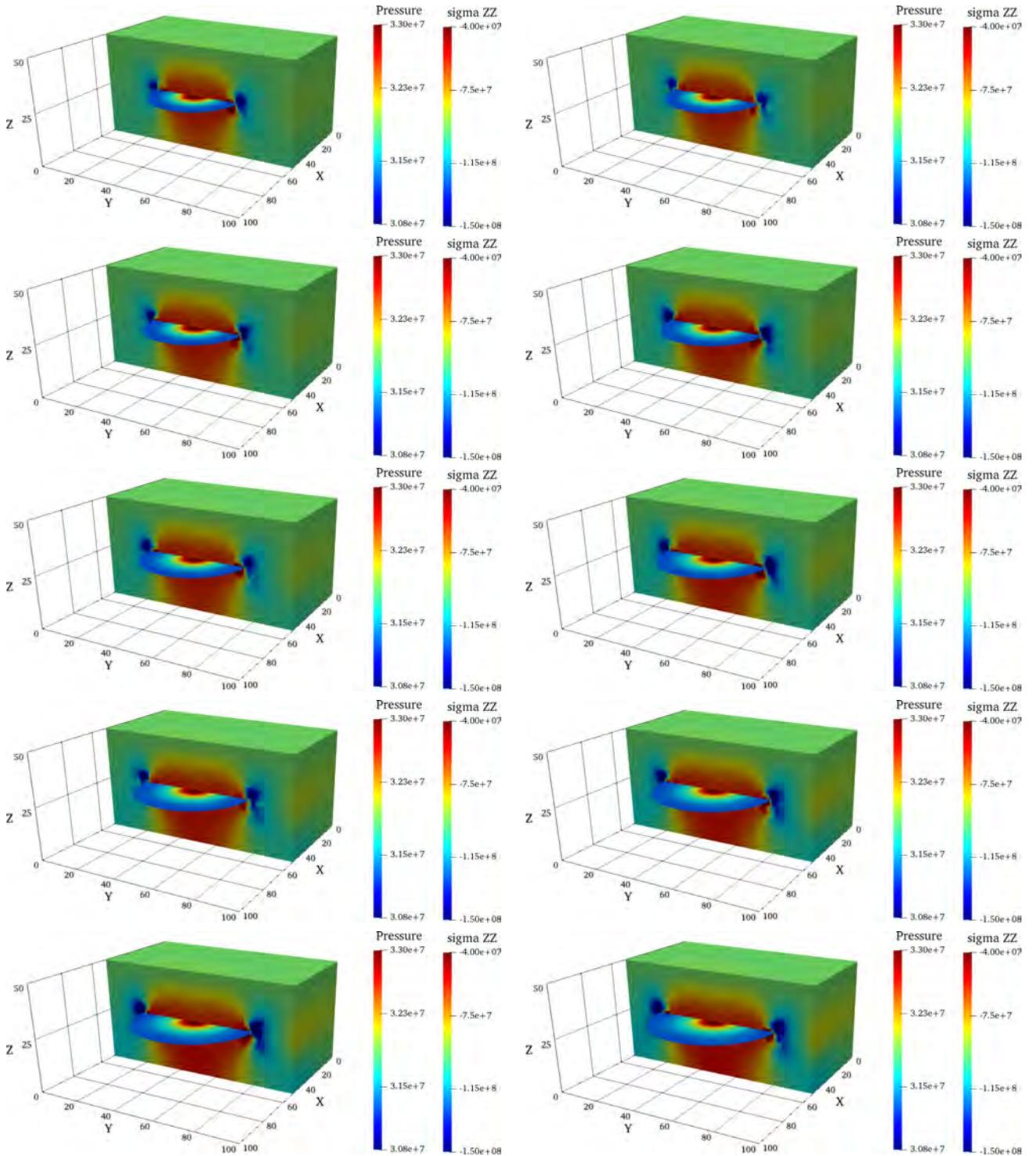


Рис. 6.10. Распределение компоненты T_{zz} тензора напряжений в среде и давления в трещине для $t = (11, 12, \dots, 20)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

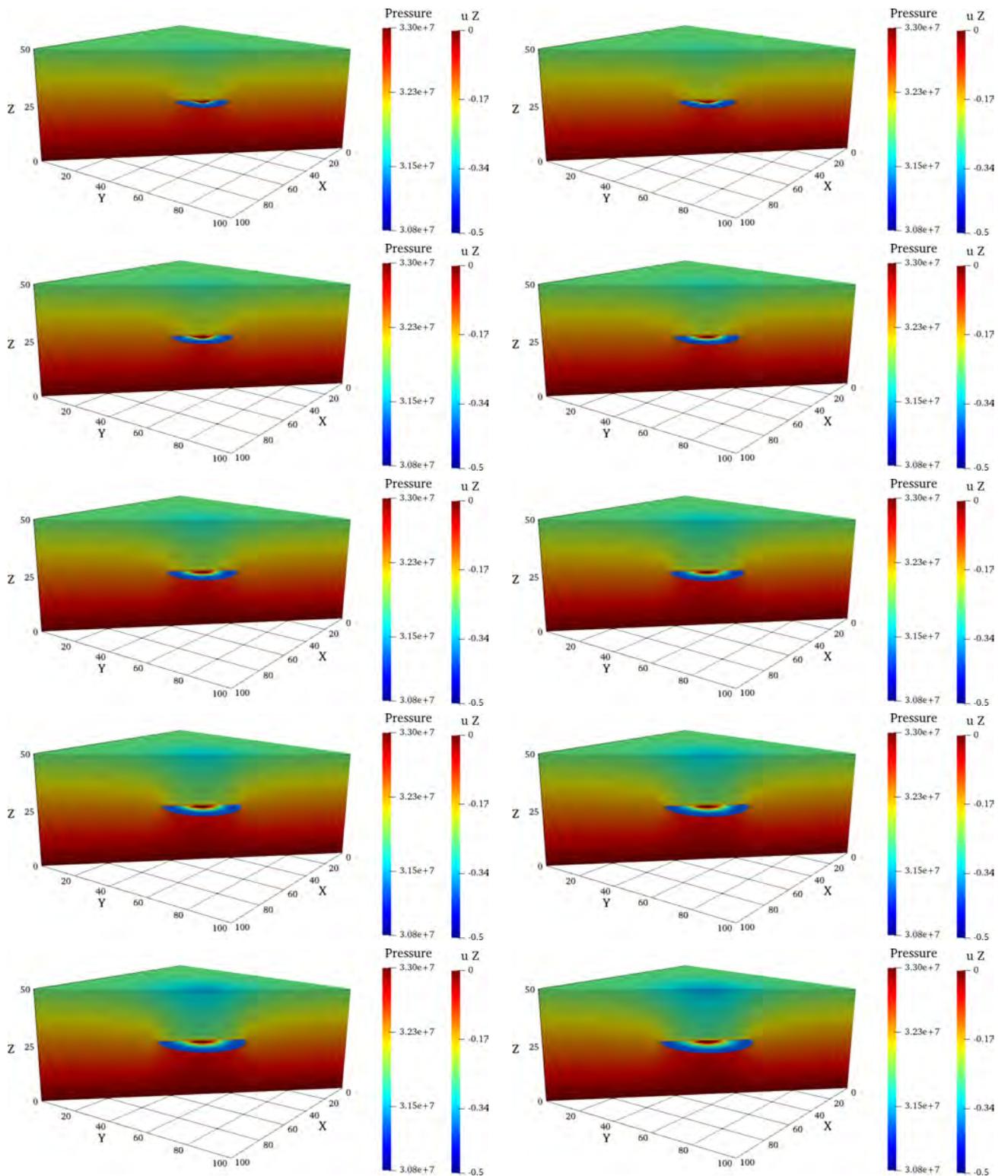


Рис. 6.11. Распределение компоненты u_z поля перемещений в среде и давления в трещине для $t = (1, 2, \dots, 10)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

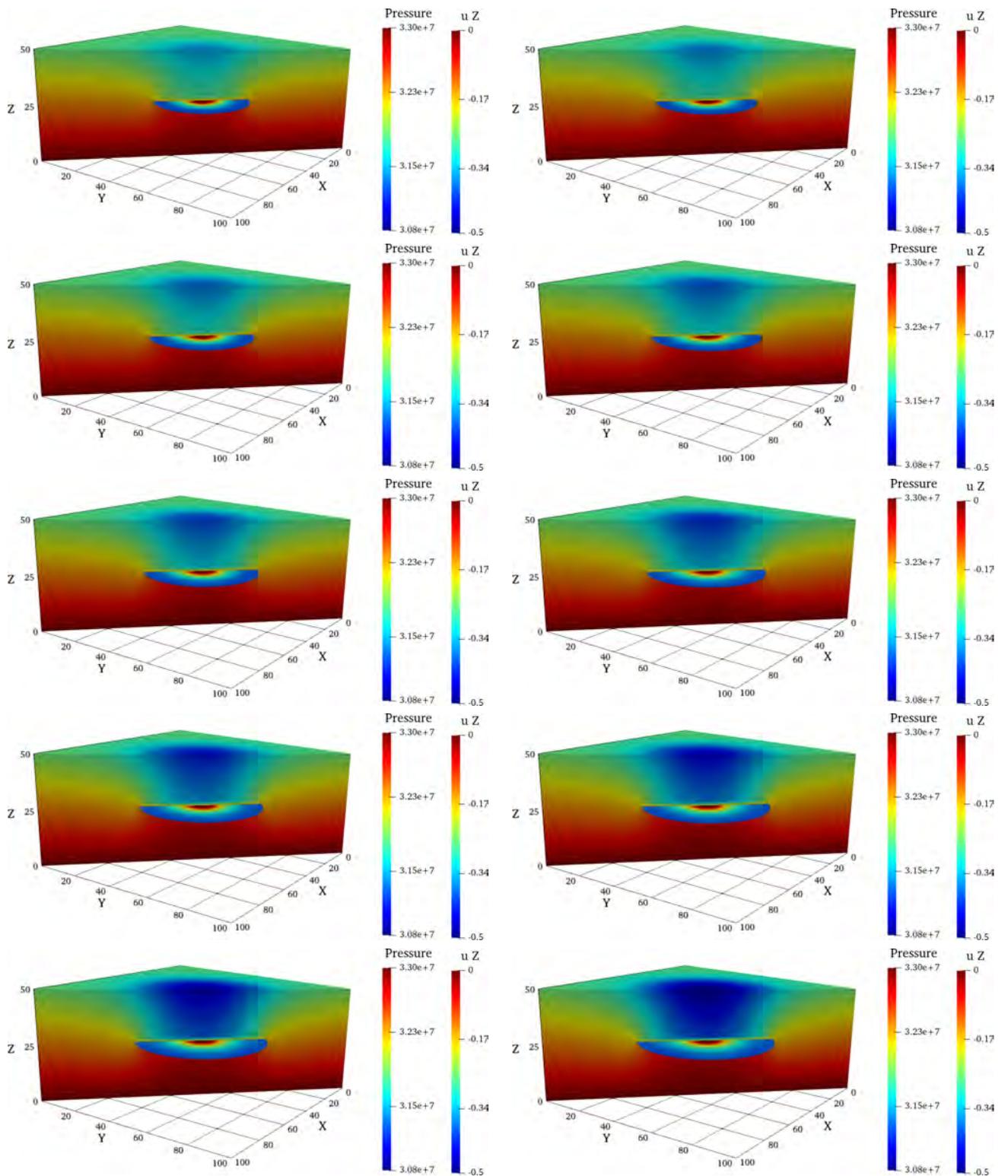


Рис. 6.12. Распределение компоненты u_z поля перемещений в среде и давления в трещине для $t = (11, 12, \dots, 20)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

6.5.3 Эволюционирующая неплоская трещина

В настоящем разделе рассматривается задача об эволюции неплоской трещины в заданном поле направлений трещины.

Расчетная область представляет собой параллелепипед $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$, где $L_x = L_y = 100$ м, $L_z = 50$ м. Для расчетов использовалась равномерная сетка из тетраэдров. Узлы сетки образуют кубическую решетку $N_x \times N_y \times N_z$ с $N_x = N_y = 40$, $N_z = 50$. Таким образом, шаг сетки узлов $h_x = h_y = h_z = 2.5$. Всего в сетке $N_n = 80000$ узлов и $N_e = 372645$ конечных элементов. Шаг по времени составлял $\Delta t = 900$ с (или 15 минут). Полное время расчета $T = 18000$ с (или 5 часов).

Распределение свойств среды является однородным со следующими параметрами: $E = 1.4E + 10$ Па — модуль Юнга, $\nu = 0.2$ — коэффициент Пуассона, $M = 1.3E + 10$ Па и $B = 0.79$ — модули Био, $\mu = 1.0E - 3$ Па·с — вязкость флюида. Сжимаемость флюида принималась равной $1.0E$ Па⁻¹. Проницаемость среды $K = 1.87511E - 13$ м².

В начальный момент времени давление жидкости в пласте $p_0 = 300$ атм, в трещине $p_{f,0} = 300$ атм. Давление в центре трещины $p_{fr} = 330$ атм.

На границе области заданы следующие граничные условия. На гранях расчетной области $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ задавались нулевые нормальные перемещения $u_x = 0$, $u_y = 0$ и $u_z = 0$, соответственно. На гранях $x = L_x$, $y = L_y$ и $z = L_z$ задавались нормальные сжимающие напряжения $T_x = T_y = 300$ атм и $T_z = 700$ атм.

Срединная поверхность трещины является частью сферической поверхности. Радиус и центр этой поверхности не меняется в ходе расчета. В ходе своей эволюции срединная поверхность трещины монотонно увеличивается (то есть увеличивается угол раскрытия сектора при неизменно радиусе и центре сферической поверхности). является диском с начальным радиусом $R_0 = 12$ м.

На рисунках 6.13-6.14 приведено распределение давления в сечении расчетной области в последовательные моменты времени. Порядок рисунков: слева направо и сверху вниз. Аналогично, на серии рисунков 6.15-6.16, 6.17-6.18, 6.19-6.20 показана динамика изменения компонент T_{zz} , T_{xy} и T_{yz} поля напряжений. На рисунках 6.21-6.22 представлено распределение компоненты u_z поля перемещений.

Данный расчет демонстрирует робастность предложенного алгоритма для трещины общего, относительно сетки, положения.

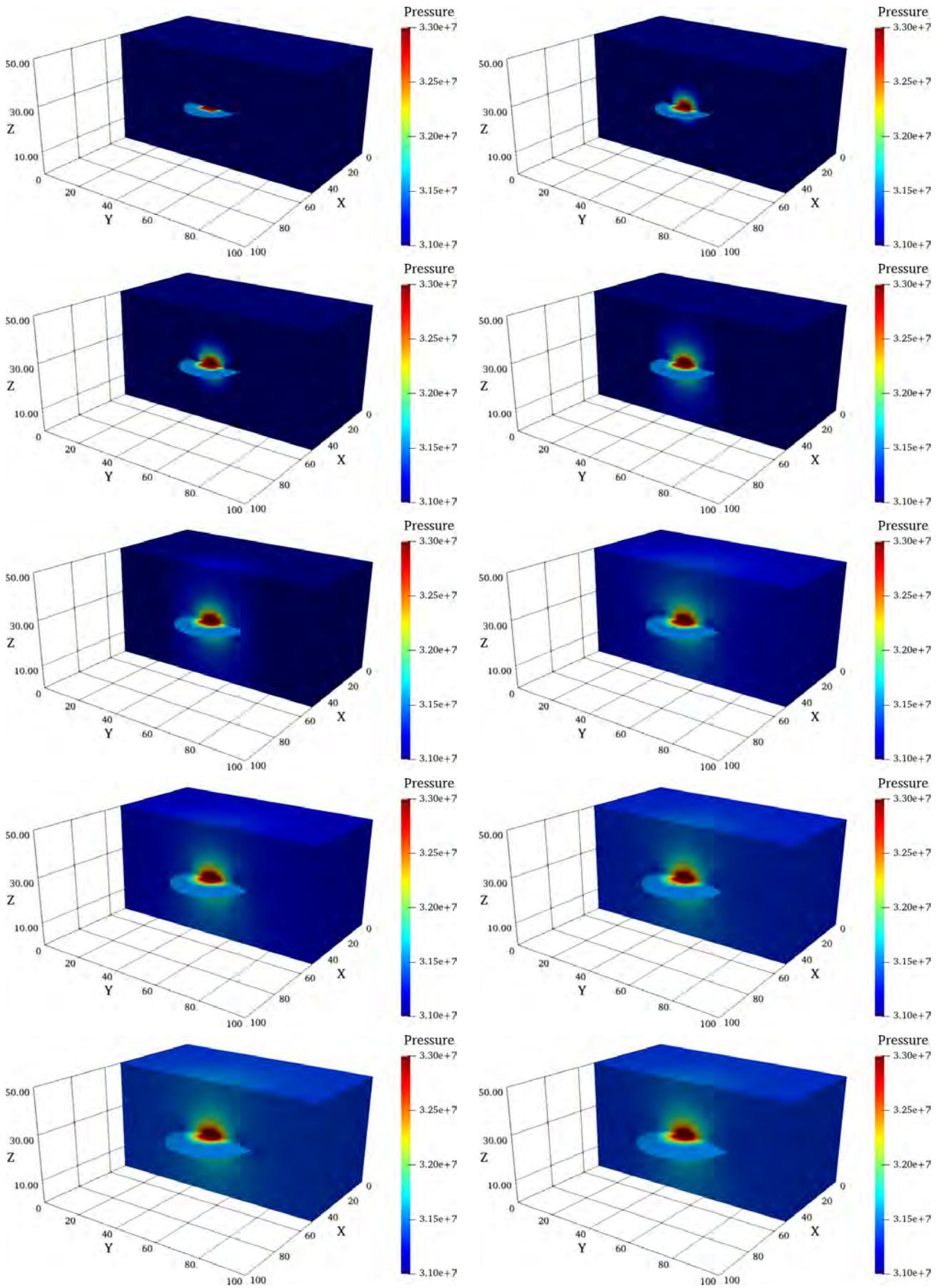


Рис. 6.13. Распределение давления в среде и трещине для $t = (1, 2, \dots, 10)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

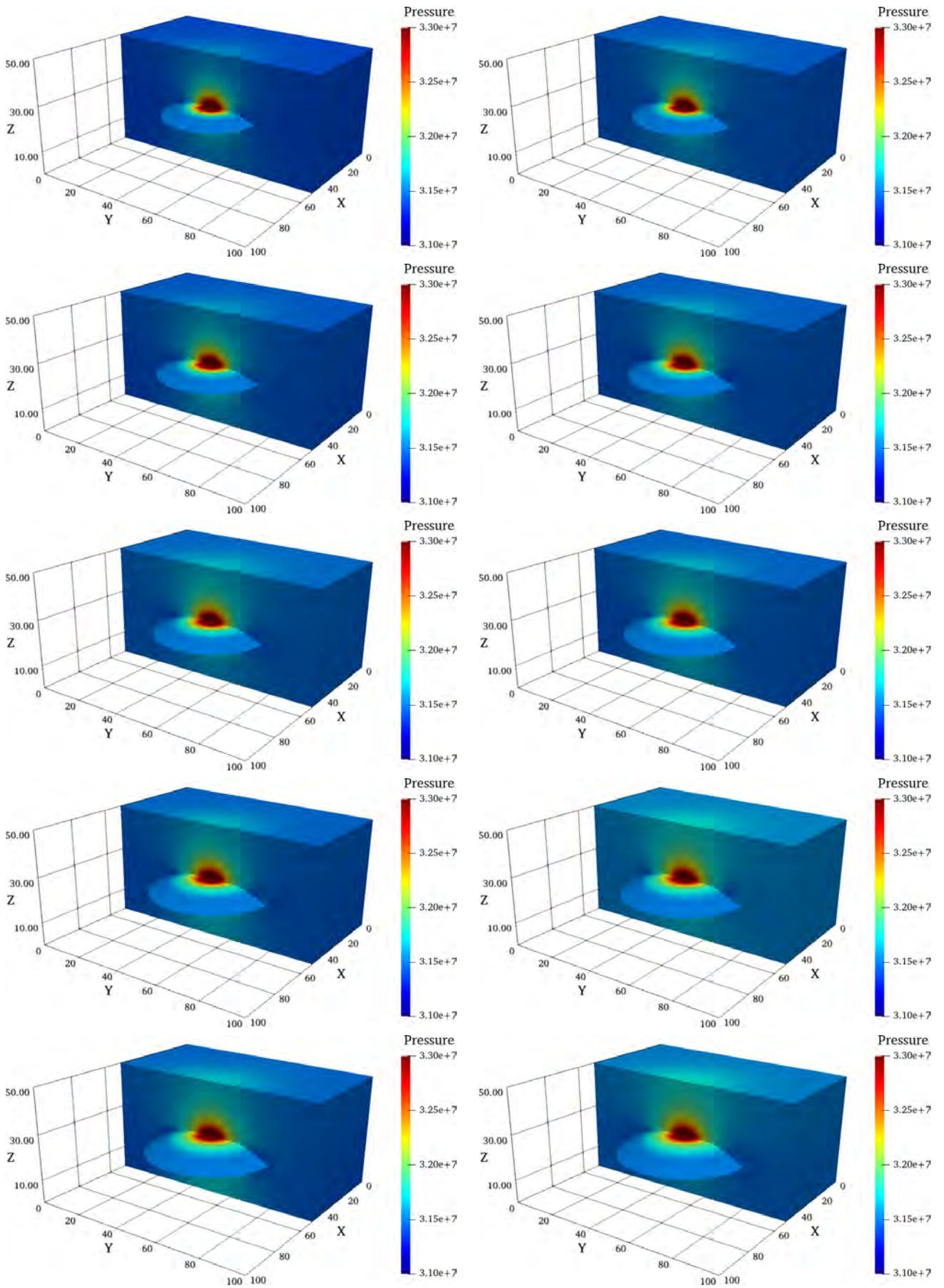


Рис. 6.14. Распределение давления в среде и трещине для $t = (11, 12 \dots, 20)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

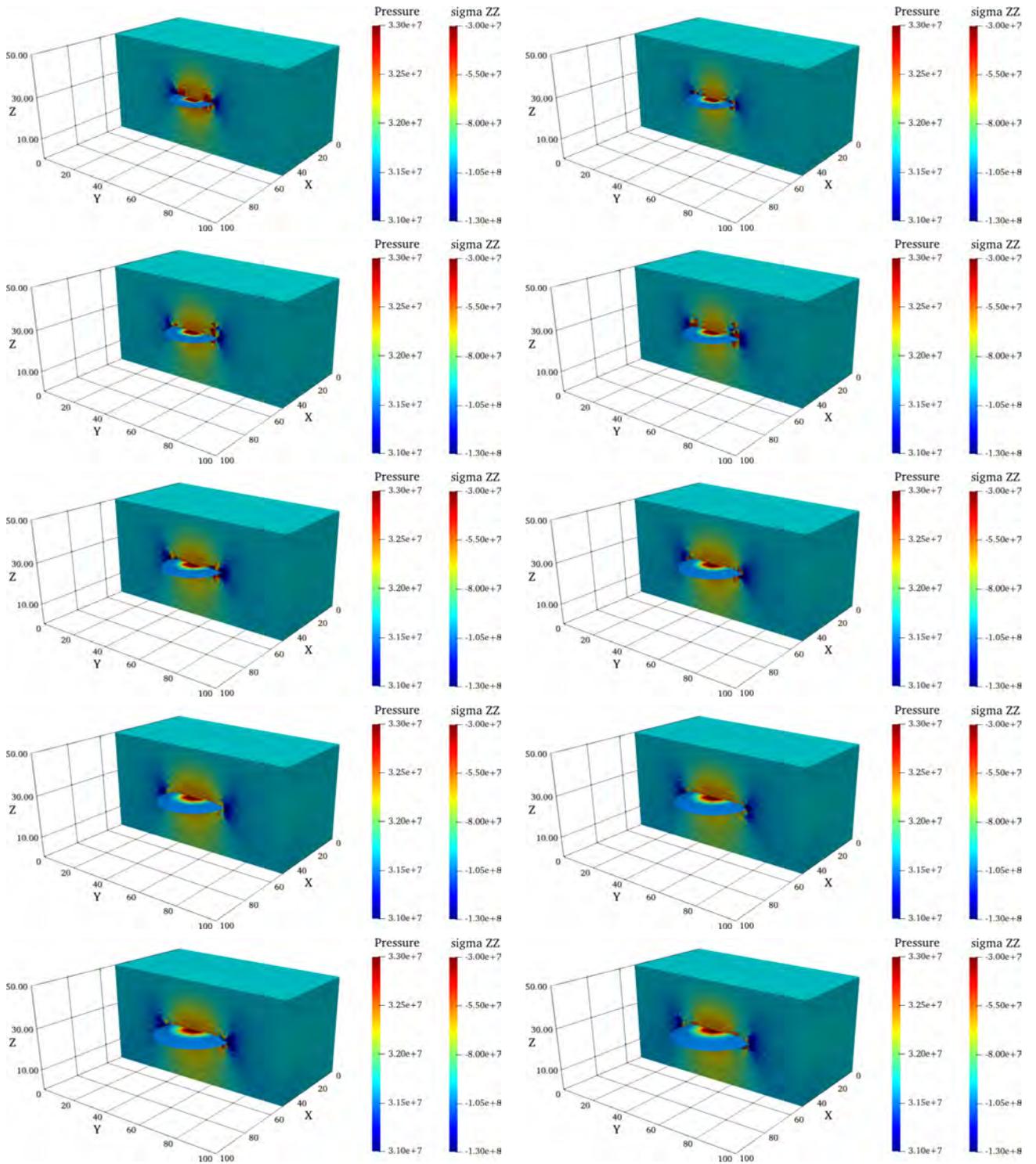


Рис. 6.15. Распределение компоненты T_{zz} тензора напряжений в среде и давления в трещине для $t = (1, 2, \dots, 10)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

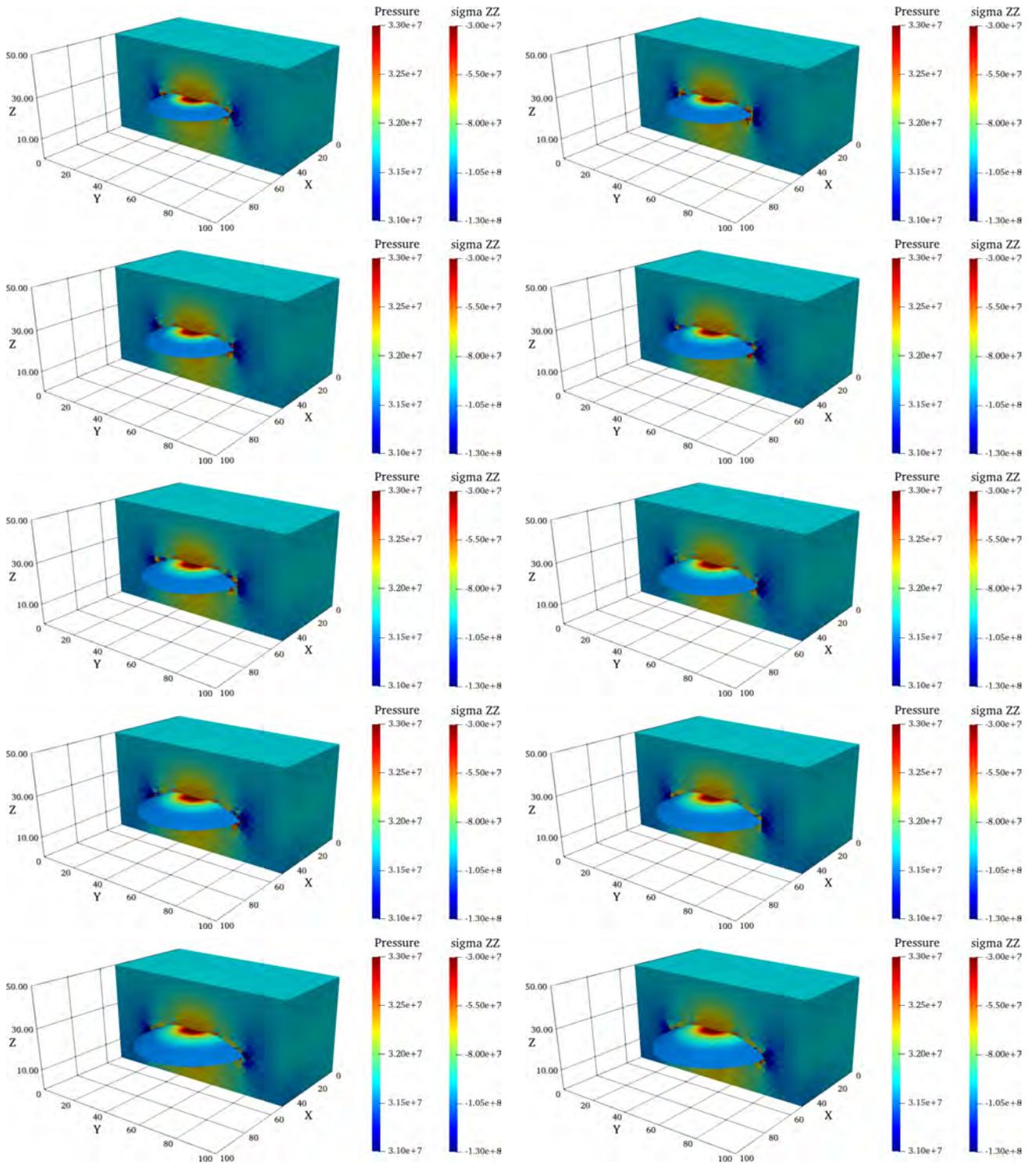


Рис. 6.16. Распределение компоненты T_{zz} тензора напряжений в среде и давления в трещине для $t = (11, 12 \dots, 20)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

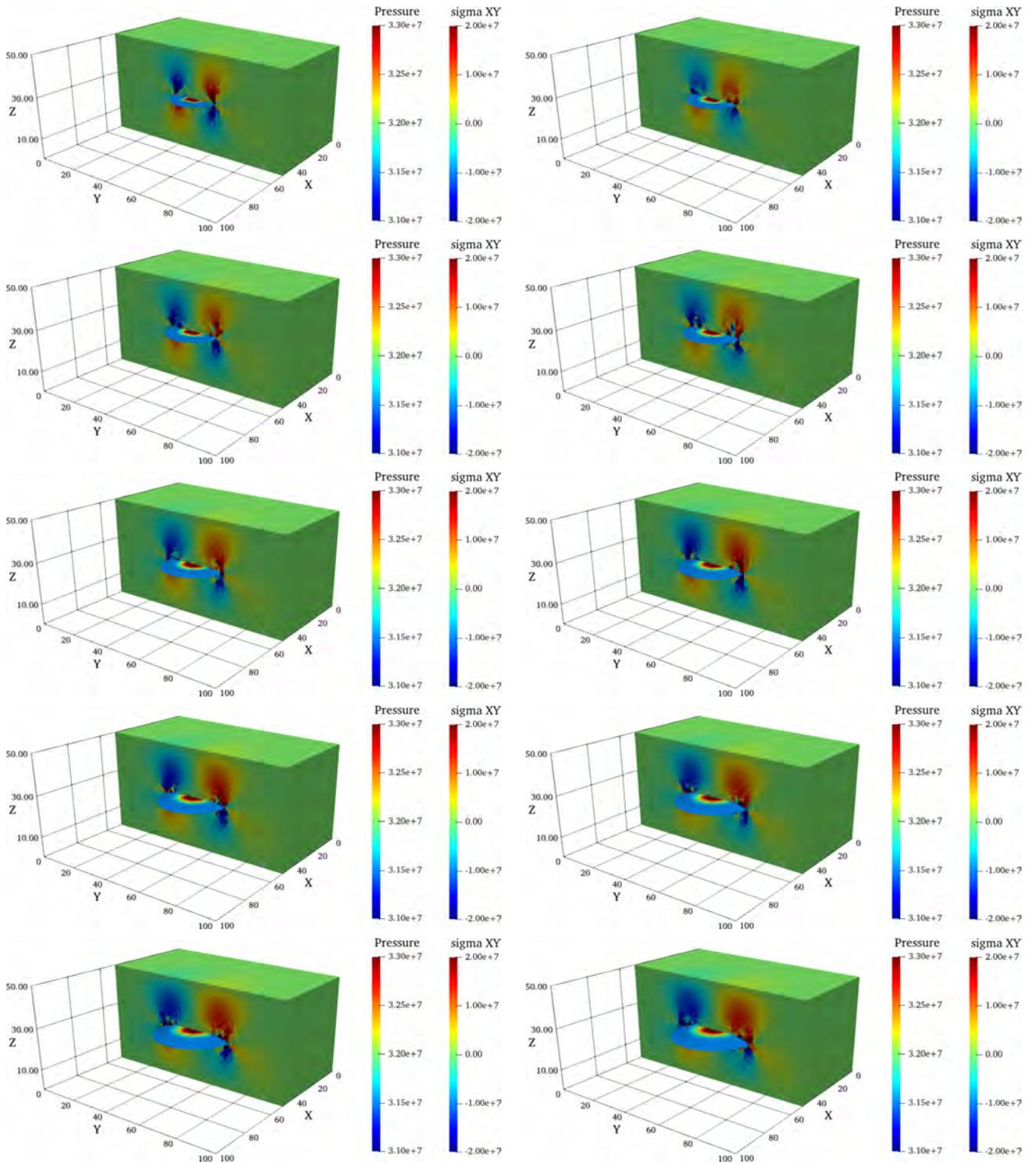


Рис. 6.17. Распределение компоненты T_{xy} тензора напряжений в среде и давления в трещине для $t = (1, 2, \dots, 10)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

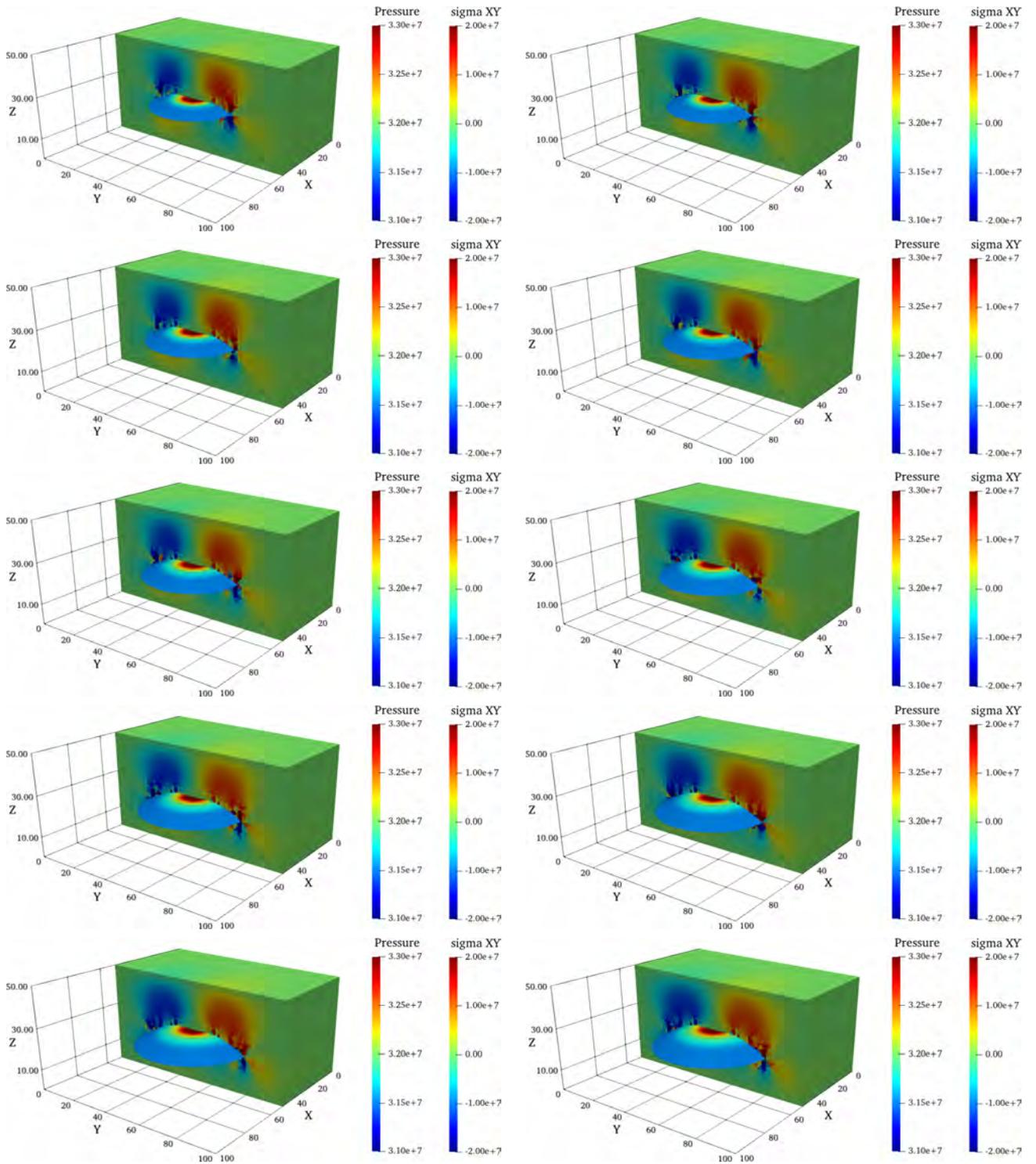


Рис. 6.18. Распределение компоненты T_{xy} тензора напряжений в среде и давления в трещине для $t = (11, 12 \dots, 20)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

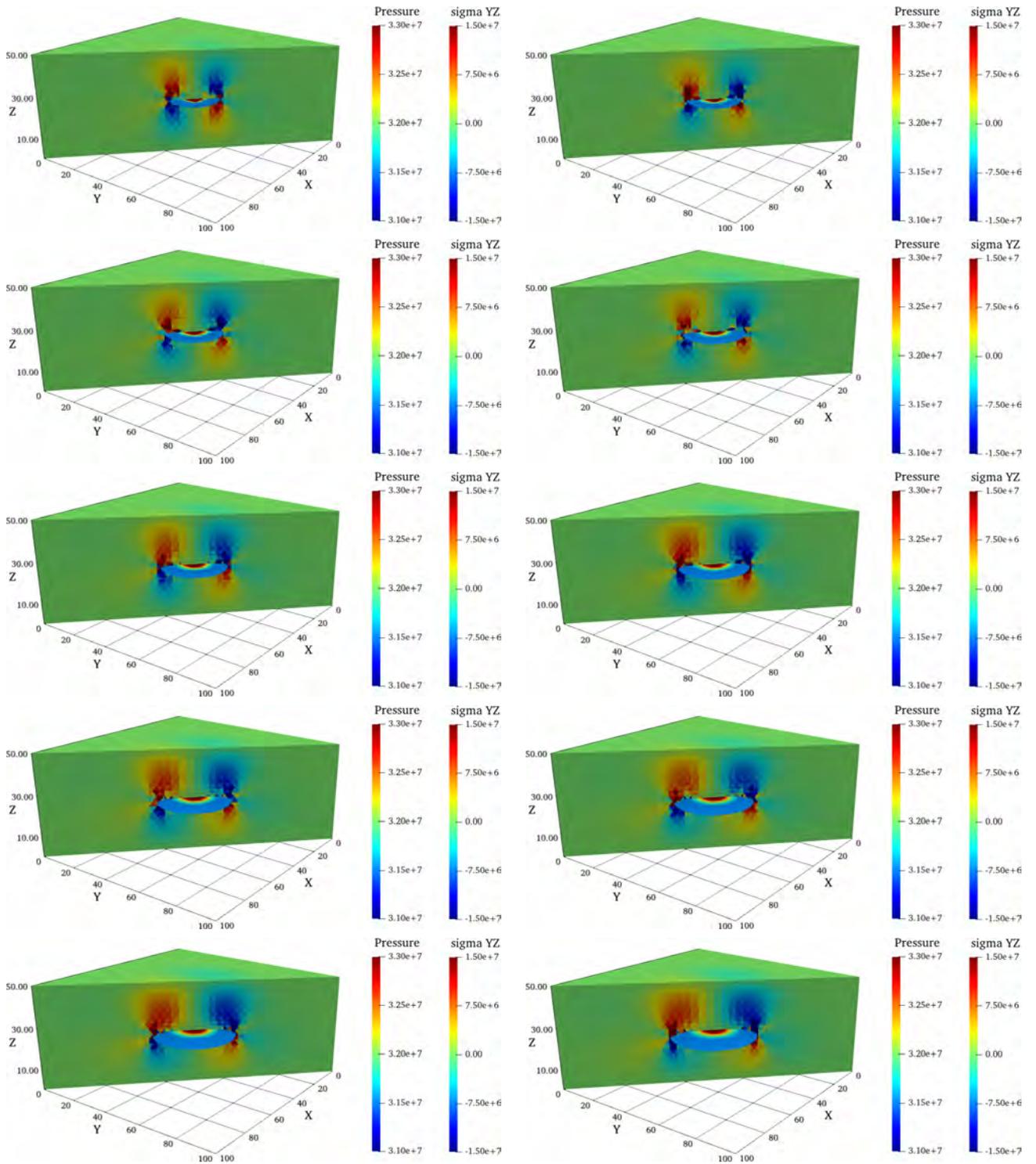


Рис. 6.19. Распределение компоненты T_{yz} тензора напряжений в среде и давления в трещине для $t = (1, 2, \dots, 10)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

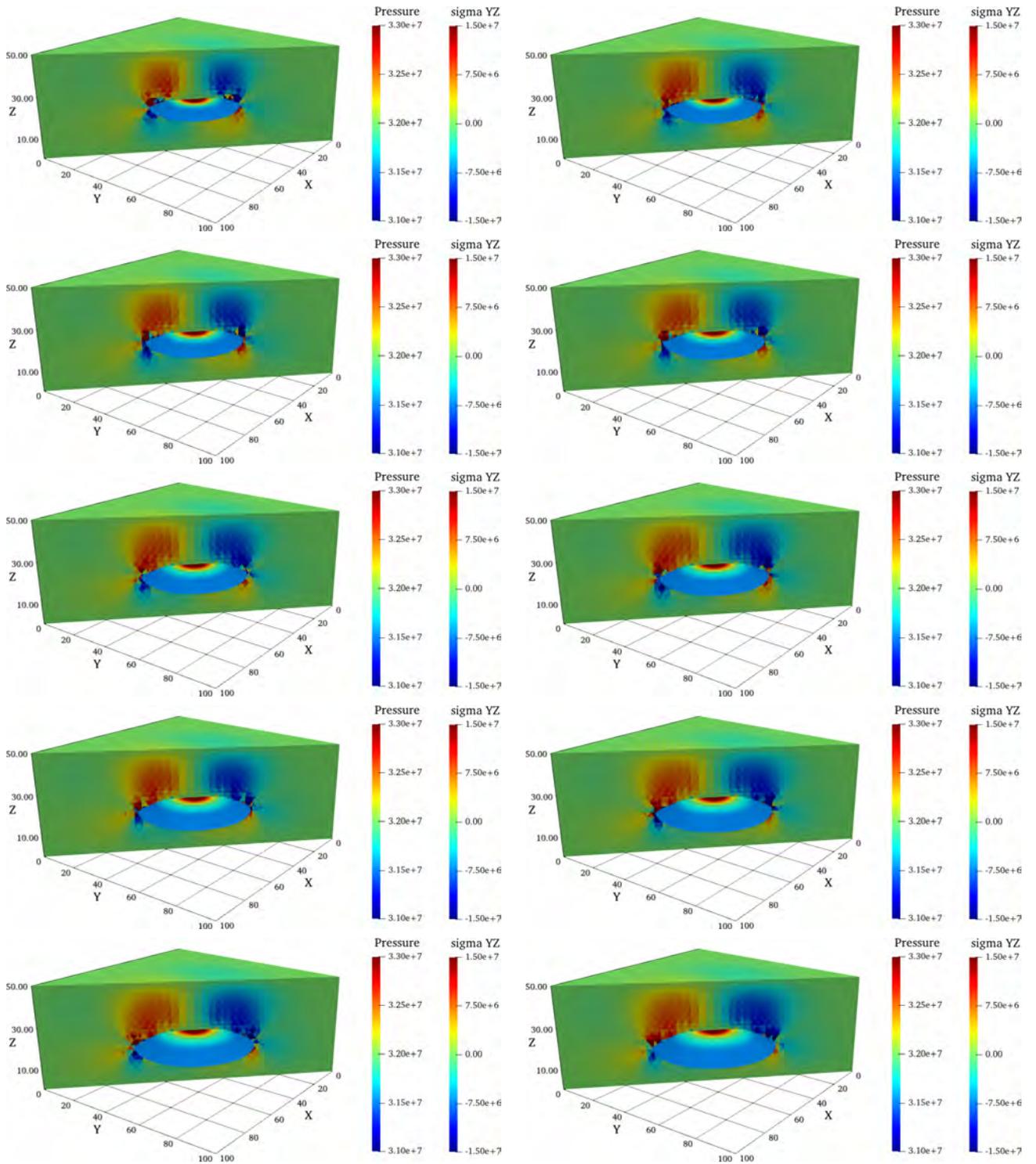


Рис. 6.20. Распределение компоненты T_{yz} тензора напряжений в среде и давления в трещине для $t = (11, 12 \dots, 20)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

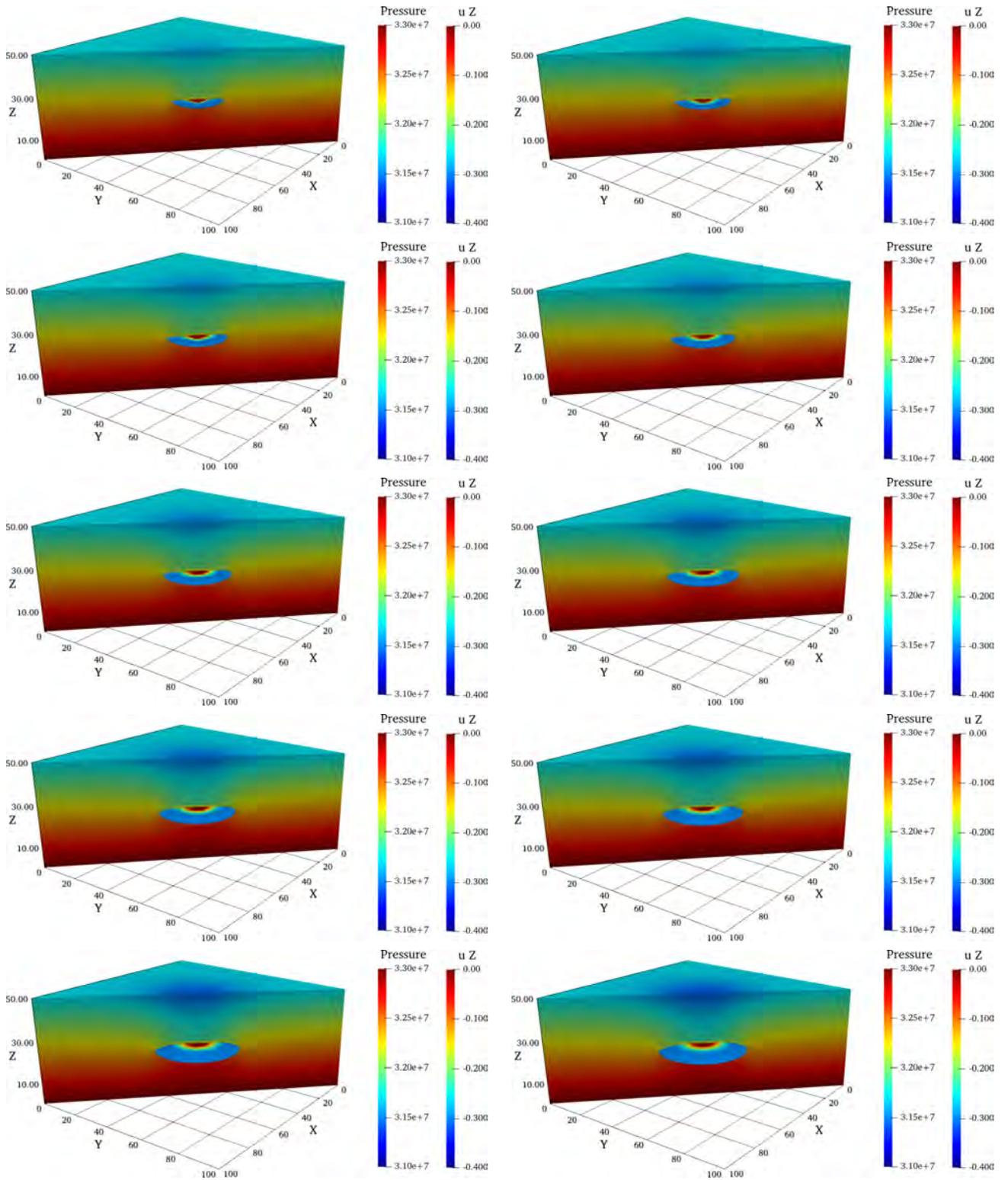


Рис. 6.21. Распределение компоненты u_z поля перемещений в среде и давления в трещине для $t = (1, 2, \dots, 10)\Delta t$.

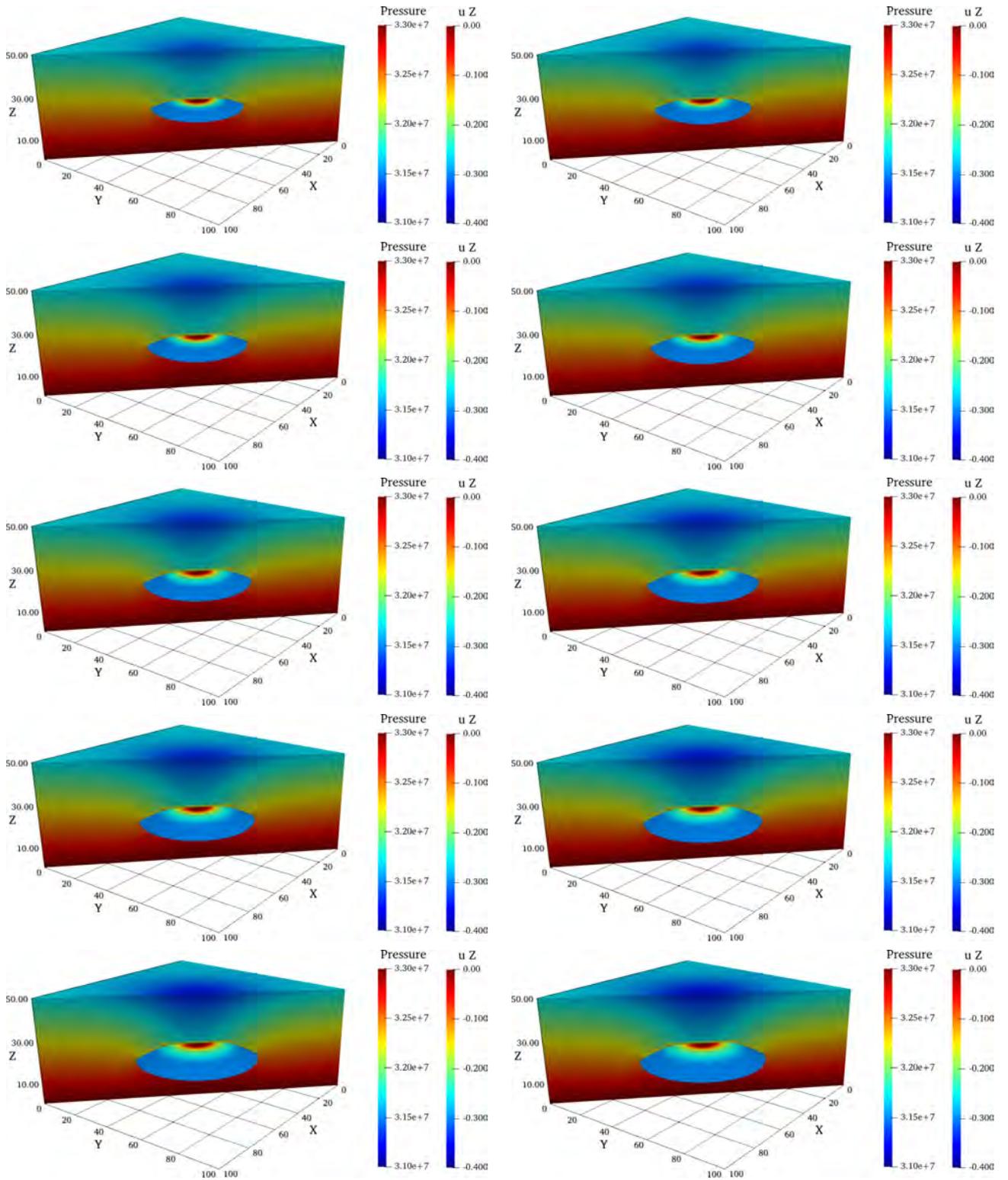


Рис. 6.22. Распределение компоненты u_z поля перемещений в среде и давления в трещине для $t = (11, 12 \dots, 20)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

6.5.4 Эволюционирующая трещина в естественном поле напряжений

В настоящем разделе рассматривается задача об эволюции изначально плоской трещины в естественном поле напряжений. Развитие геометрии определяется действующим в среде полем напряжений, согласованным с трещиной.

Расчетная область представляет собой параллелепипед $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$, где $L_x = L_y = 100$ м, $L_z = 50$ м. Для расчетов использовалась равномерная сетка из тетраэдров. Узлы сетки образуют кубическую решетку $N_x \times N_y \times N_z$ с $N_x = N_y = 40$, $N_z = 20$.

Таким образом, шаг сетки узлов $h_x = h_y = h_z = 2.5$. Всего в сетке $N_n = 80000$ узлов и $N_e = 372645$ конечных элементов. Шаг по времени составлял $\Delta t = 1800$ с (или 30 минут). Всего рассчитывалось 50 шагов по времени. Полное время расчета составляло, таким образом, 25 часов.

Распределение свойств среды является однородным со следующими параметрами: $E = 1.4E + 10$ Па — модуль Юнга, $\nu = 0.2$ — коэффициент Пуассона, $M = 1.3E + 10$ Па и $B = 0.79$ — модули Био, $\mu = 1.0E - 3$ Па·с — вязкость флюида. Сжимаемость флюида принималась равной $1.0E$ Па⁻¹. Проницаемость среды $K = 1.87511E - 13$ м².

В начальный момент времени давление жидкости в пласте $p_0 = 300$ атм, в трещине $p_{f,0} = 300$ атм. Давление в центре трещины $p_{fr} = 330$ атм.

На границе области заданы следующие граничные условия. На гранях расчетной области $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ задавались нулевые нормальные перемещения $u_x = 0$, $u_y = 0$ и $u_z = 0$, соответственно. На гранях $x = L_x$, $y = L_y$ завались нулевые нормальные напряжения. На грани $z = L_z$ задавалась действующая в плоскости грани сила с компонентами $\mathbf{T} = (0, 600, 1800)$ атм.

В начальный момент времени трещина имела форму диска радиусом $R_0 = 12$ м с центром в центре области и перпендикулярного оси Oz .

На рисунках 6.23, 6.24-6.29, 6.30, 6.31 приведены результаты расчета. На рисунках представлены распределения полей в среде и в трещине для моментов времени $t = (5, 10, 15, \dots, 50)\Delta t$. На рисунке 6.23 представлено распределение давления в трещине и среде. Как следует из постановки задачи, поле давлений в среде и трещине непрерывно на срединной поверхности трещины. На серии рисунков 6.24-6.29 показано распределение компонент тензора напряжений в среде и давление в трещине. Наконец, на рисунках 6.30 и 6.31 показано распределение компонент u_y и u_z поля перемещений.

Заданные граничные условия соответствуют ситуации, когда трещина является трещиной сдвига. Характер нагрузки на верхней грани расчетной области предполагает, что в ходе своего развития трещина будет поворачивать в направлении противоположному от грани, к которой приложена нагрузка. Это предполагает симметричное развитие трещины, причем ее правая часть поворачивает вниз, левая — вверх. Передняя и задняя части развиваются без поворота. Как демонстрируют приведенные ниже рисунки, расчетное развитие трещины, определенное в ходе моделирования, отвечает этим условиям. Отметим также, что в ходе своего развития трещины «выросла» примерно на 3-3.5 своего начального радиуса.

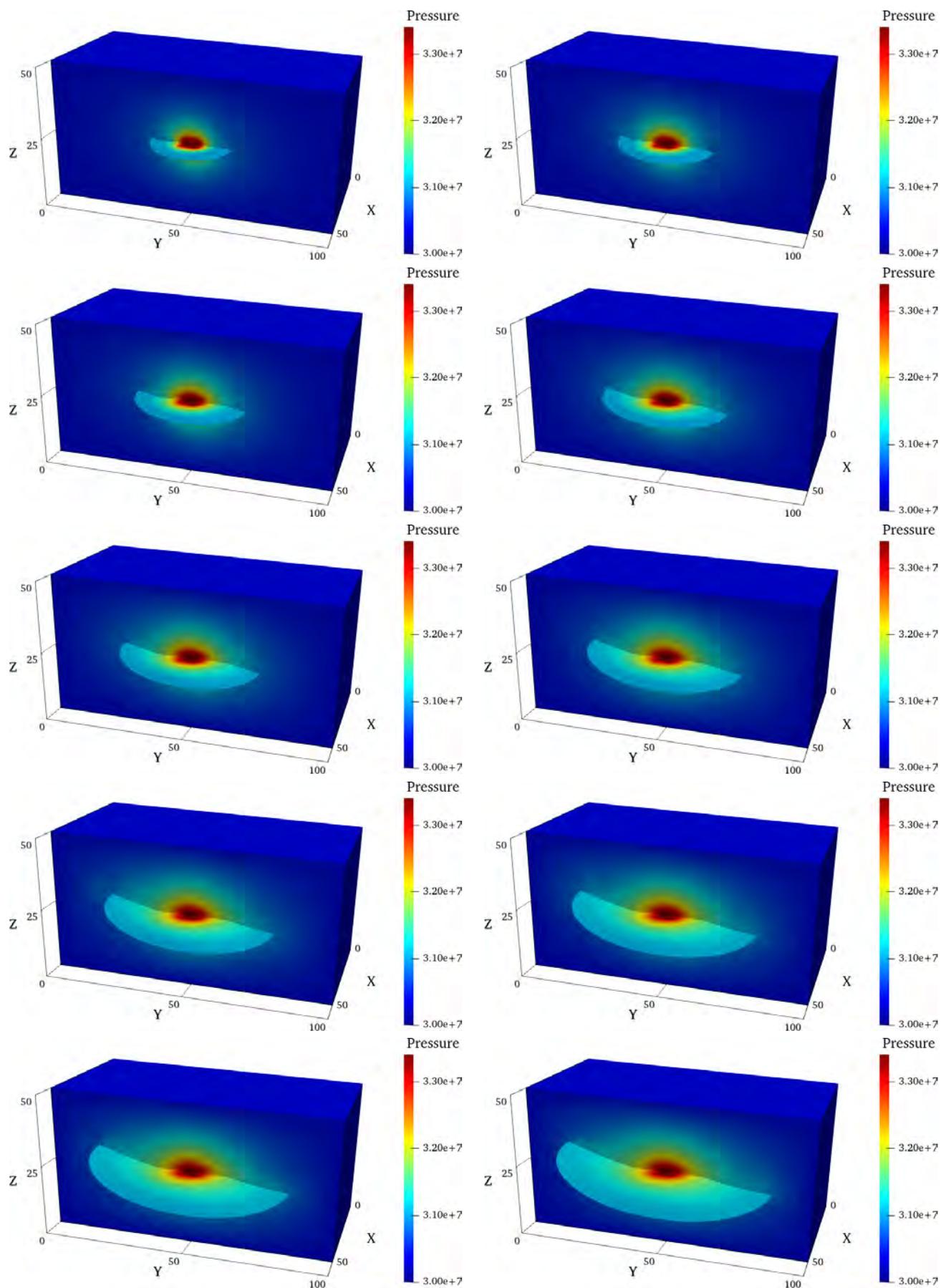


Рис. 6.23. Распределение давления в среде и трещине для $t = (5, 10, 15 \dots, 50)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

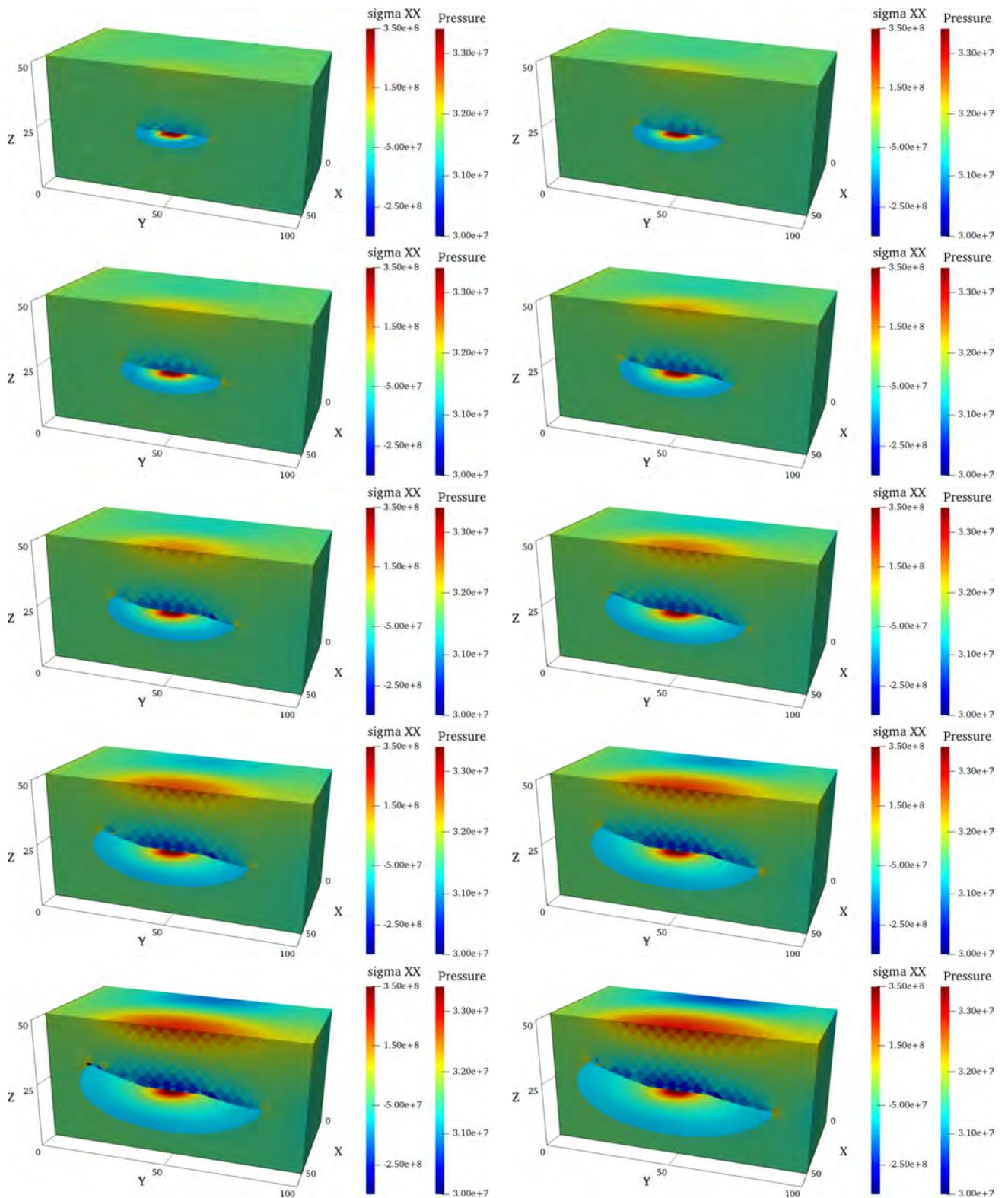


Рис. 6.24. Распределение компоненты T_{xx} поля напряжений в среде и давления в трещине для $t = (5, 10, 15 \dots, 50)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

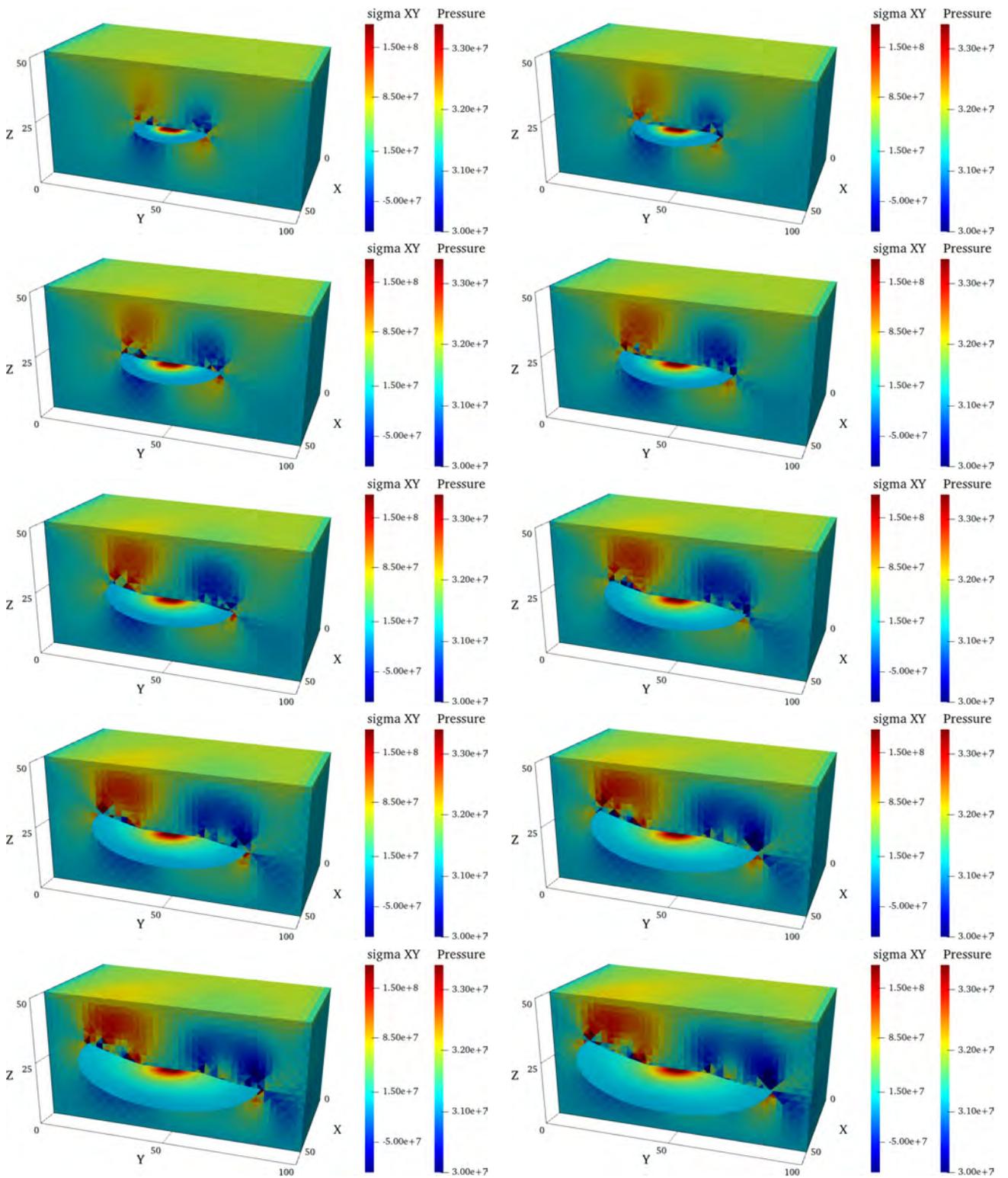


Рис. 6.25. Распределение компоненты T_{xy} поля напряжений в среде и давления в трещине для $t = (5, 10, 15 \dots, 50)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

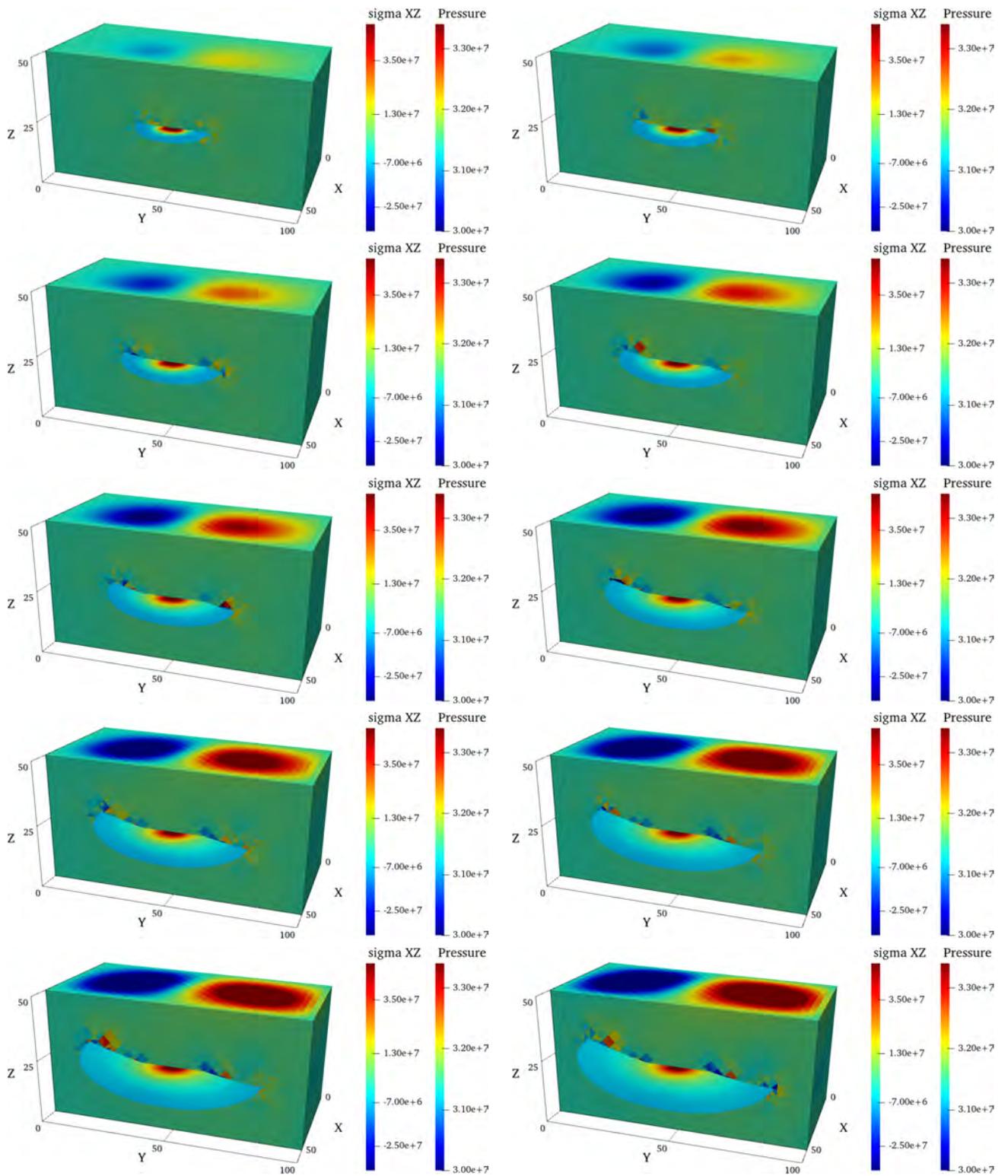


Рис. 6.26. Распределение компоненты T_{xz} поля напряжений в среде и давления в трещине для $t = (5, 10, 15 \dots, 50)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

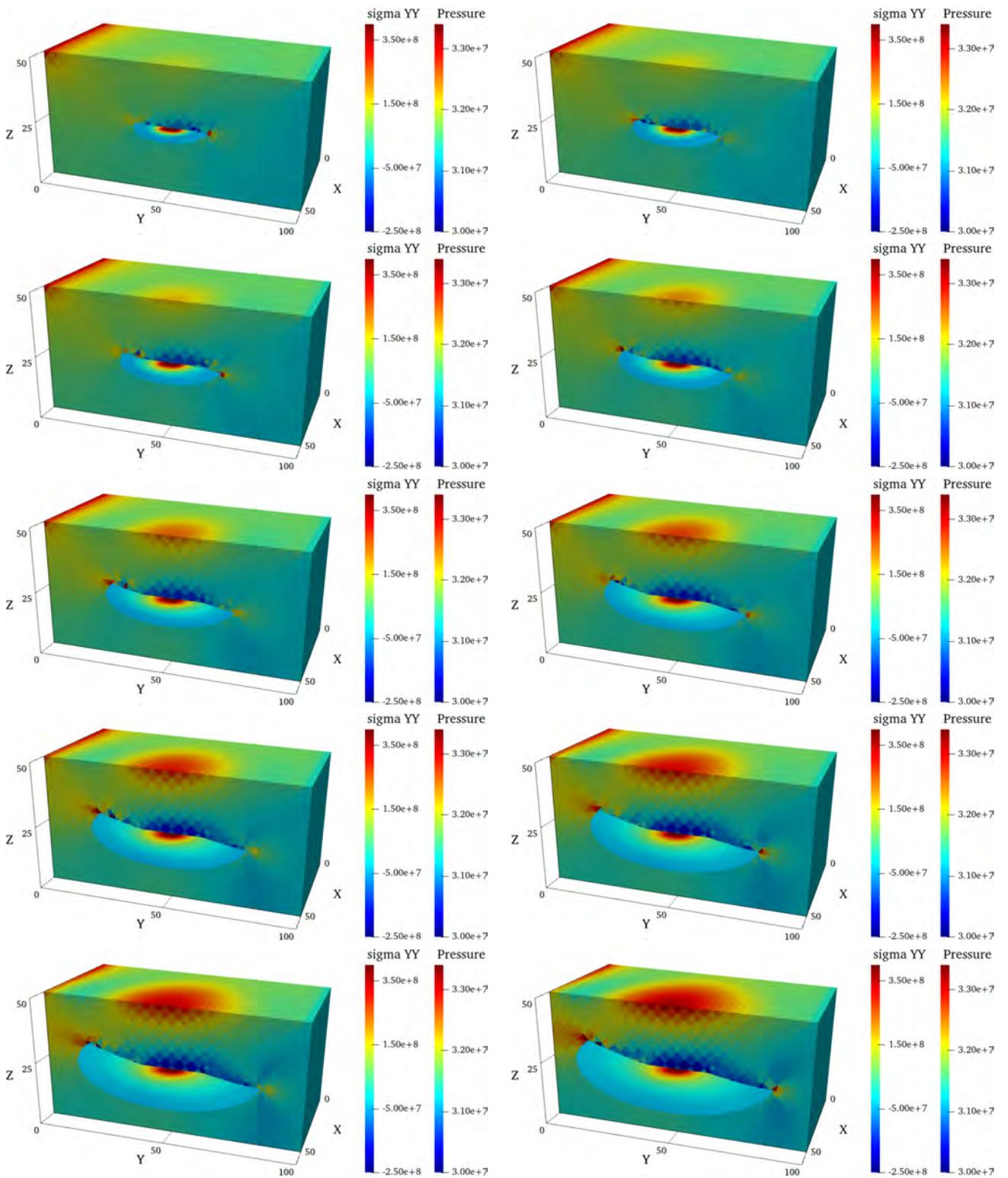


Рис. 6.27. Распределение компоненты T_{yy} поля напряжений в среде и давления в трещине для $t = (5, 10, 15 \dots, 50)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

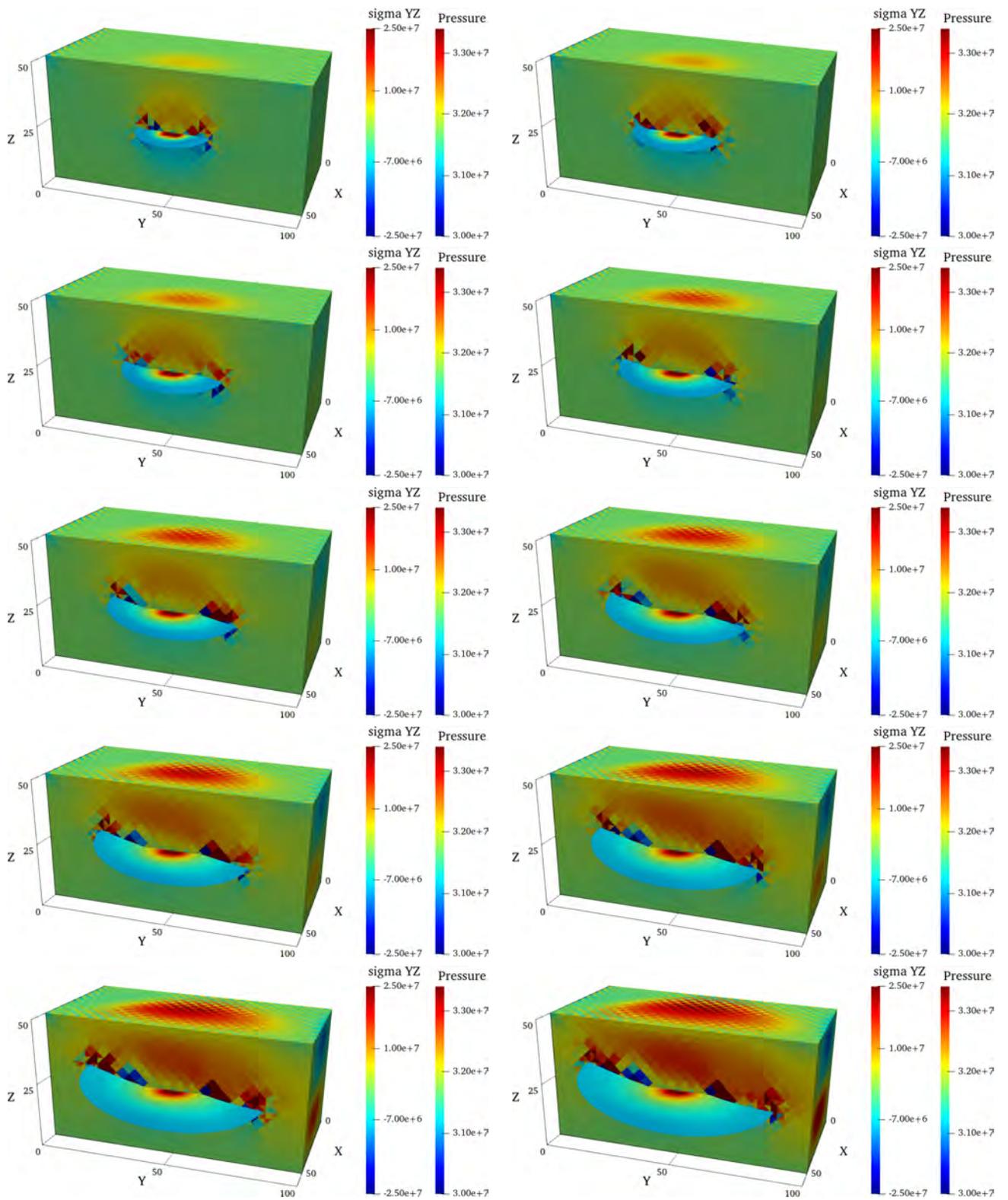


Рис. 6.28. Распределение компоненты T_{yz} поля напряжений в среде и давления в трещине для $t = (5, 10, 15 \dots, 50)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

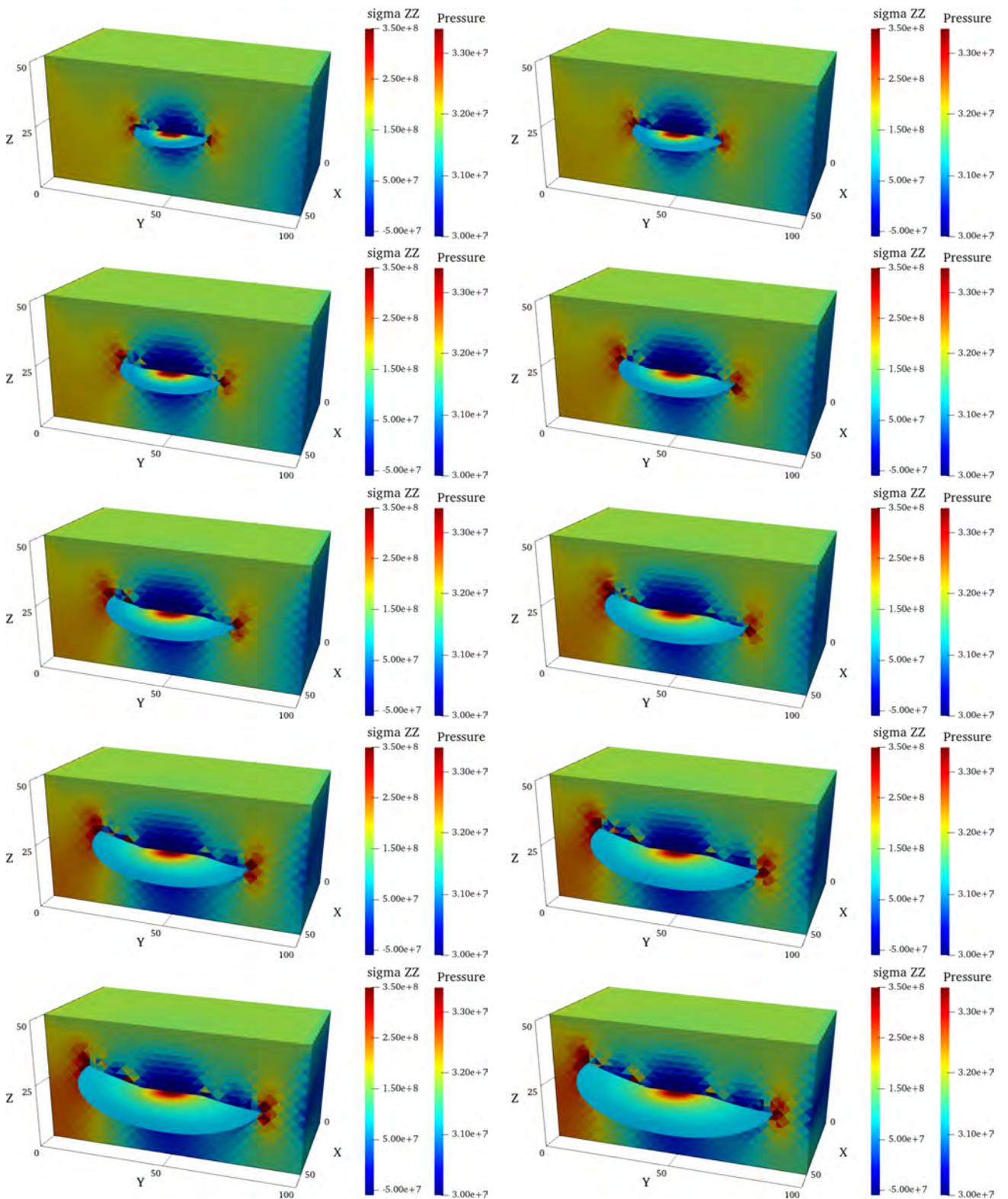


Рис. 6.29. Распределение компоненты T_{zz} поля напряжений в среде и давления в трещине для $t = (5, 10, 15 \dots, 50)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

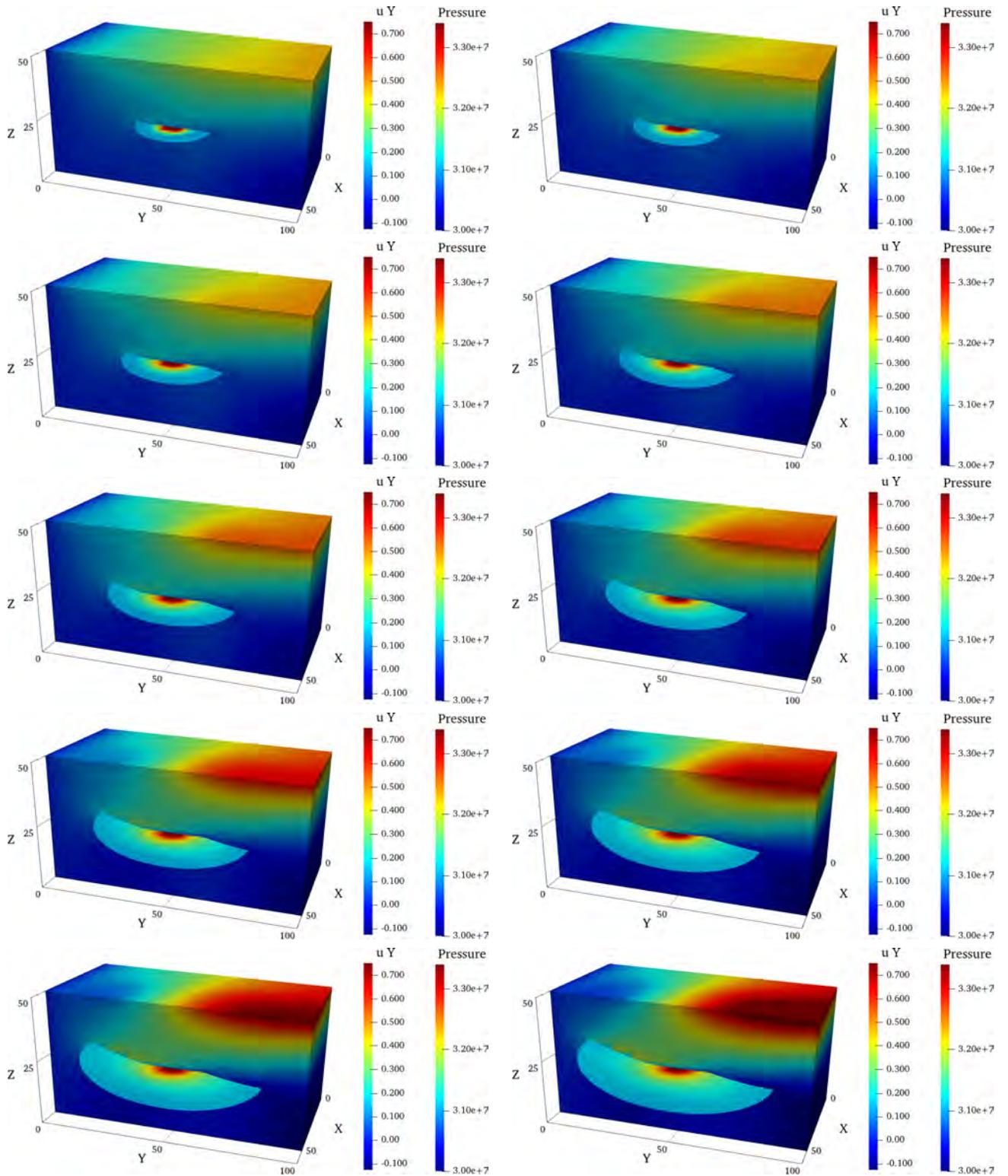


Рис. 6.30. Распределение компоненты U_y поля перемещений в среде и давления в трещине для $t = (5, 10, 15 \dots, 50)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

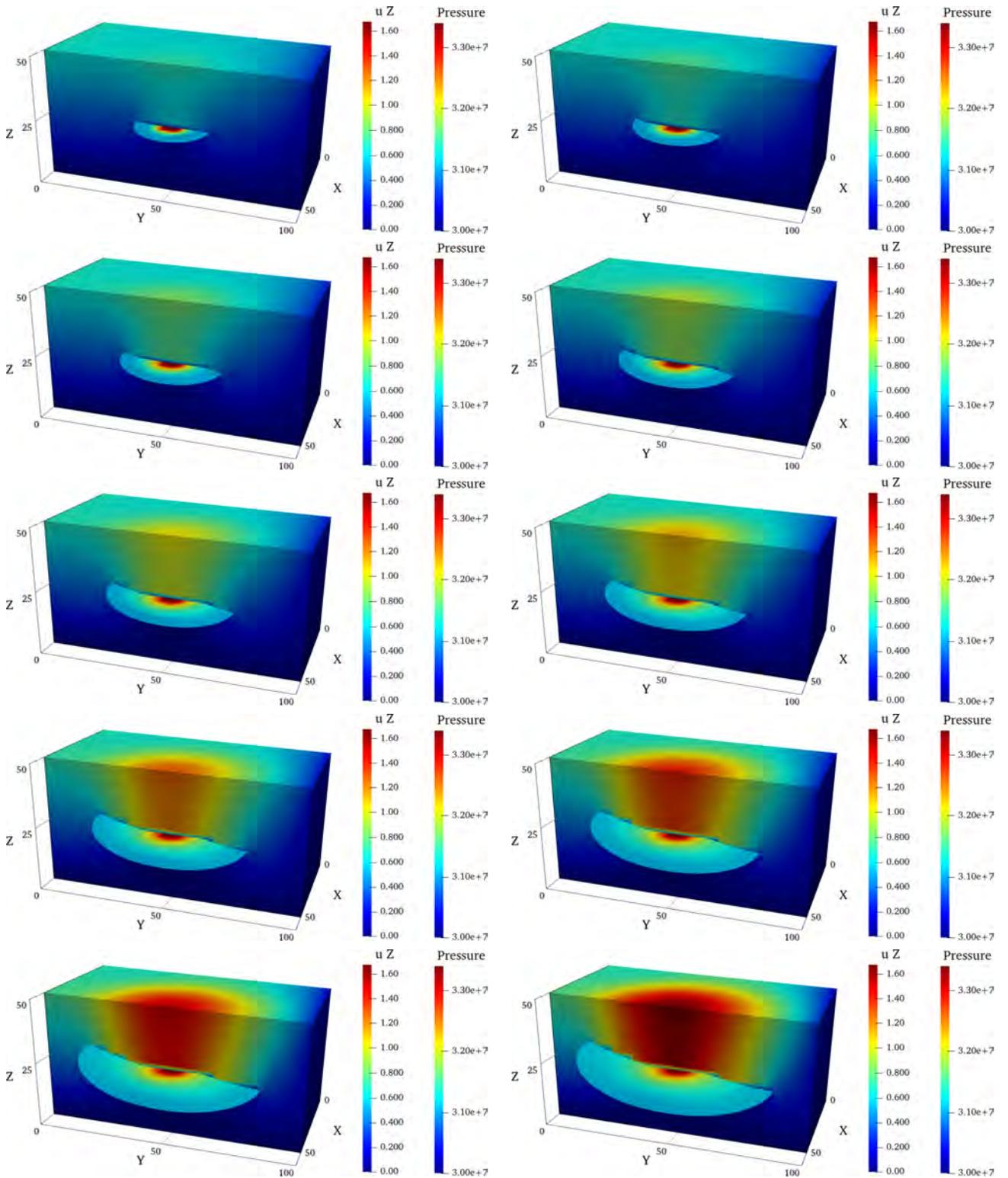


Рис. 6.31. Распределение компоненты U_z поля перемещений в среде и давления в трещине для $t = (5, 10, 15 \dots, 50)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

6.5.5 Эволюционирующая трещина в естественном поле напряжений с учетом неоднородности прочностных свойств

В настоящем разделе рассматривается задача об эволюции изначально плоской трещины в естественном поле напряжений с учетом неоднородности прочностных свойств среды. Это означает, что в различных подобластях вмещающей трещину среды коэффициенты трещиностойкости имеют разное значение, что приводит к тому, что скорость распространения фронта трещины в них так же отличается. Развитие срединной поверхности трещины определяется как распределением поля напряжений, так и значением коэффициента трещиностойкости.

Расчетная область представляет собой параллелепипед $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$, где $L_x = L_y = 100$ м, $L_z = 50$ м. Для расчетов использовалась равномерная сетка из тетраэдров. Узлы сетки образуют кубическую решетку $N_x \times N_y \times N_z$ с $N_x = N_y = 40$, $N_z = 20$. Таким образом, шаг сетки узлов $h_x = h_y = h_z = 2.5$. Всего в сетке $N_n = 80000$ узлов и $N_e = 372645$ конечных элементов. Шаг по времени составлял $\Delta t = 900$ с (или 15 минут). Всего рассчитывалось 26 шагов по времени. Полное время расчета составляло, таким образом, 390 минут или 6.5 часов.

Расчетная область Ω разделена на две части вертикальной плоскостью, проходящей через ее центр перпендикулярно оси Oy . Свойства среды в каждой из подобластей для вариантов расчета приведены в таблицах 6.2. Оставшиеся параметры модели имеют следующие

	E , Па	ν	b	M , Н/м ²	K , м ²
$y < L_y/2$	$1.5E + 10$	0.2	0.79	$1.3E + 10$	$9.35E - 13$
$y \geq L_y/2$	$1.5E + 11$	0.2	0.75	$1.3E + 09$	$1.87E - 13$

Таблица 6.2. Свойства среды.

значения: $\mu = 1.0E - 3$ Па·с — вязкость флюида, $c_f = 1.0E - 6$ Па⁻¹ — сжимаемость флюида.

В начальный момент времени трещина имеет форму плоского диска радиусом $R = 22$ м, расположенного горизонтально в центре расчетной области. Распределение давления в трещине определяется решением полной системы уравнений, с учетом группы уравнений пороупругости и течения в трещине. В начальный момент времени давление внутри трещины принималось равным 300 атм. В центральной части трещины считалось заданным, как граничное условие, давление $p_{fr} = 330$ атм.

На границе области считается заданным давление жидкости 300 атм и заданные равное нулю нормальные компоненты поля перемещений на гранях. В начальный момент времени давление жидкости в области равнялось 300 атм.

Коэффициенты трещиностойкости, определяющие скорость развития трещины, принимают различные значения в подобластях, симметричных плоскости $y = L_y/2$.

На рисунке 6.32 показано изменение давления в трещине и вмещающей ее среде с течением времени. Результаты приведены для моментов времени $t = (0, 2, 5, 8, 11, \dots, 26)\Delta t$. Видно выполнение условий непрерывности давлений в среде и на срединной поверхности трещины. Распределение давления трещине непостоянно и несимметрично — это связано с различием упругих и фильтрационных модулей среды в различных подобластях расчетной области. Более того, явно заметен несимметричный характер развития трещины — в одном из направ-

лений она развивается быстрее, чем в другой. Более детально динамика развития срединной поверхности в трещины и распределения давления в ней показано на рисунках 6.33 и 6.34. Распределение давления показано цветом. Хорошо заметны небольшие изломы на фронте трещины, которые в местах разрыва прочностных свойств среды.

На серии рисунков 6.35-6.40 показано распределение компонент тензора напряжений для моментов времени $t = (0, 2, 5, 8, 11, \dots, 26)\Delta t$. На этих рисунках заметно качественно отличающееся поведение полей напряжений, связанное с существенным отличием упругих свойств.

Далее, на рисунках 6.41 и 6.42 показано распределение компонент u_y и u_z поля перемещений в среде. Распределение этих полей отражает характер распределения свойств среды.

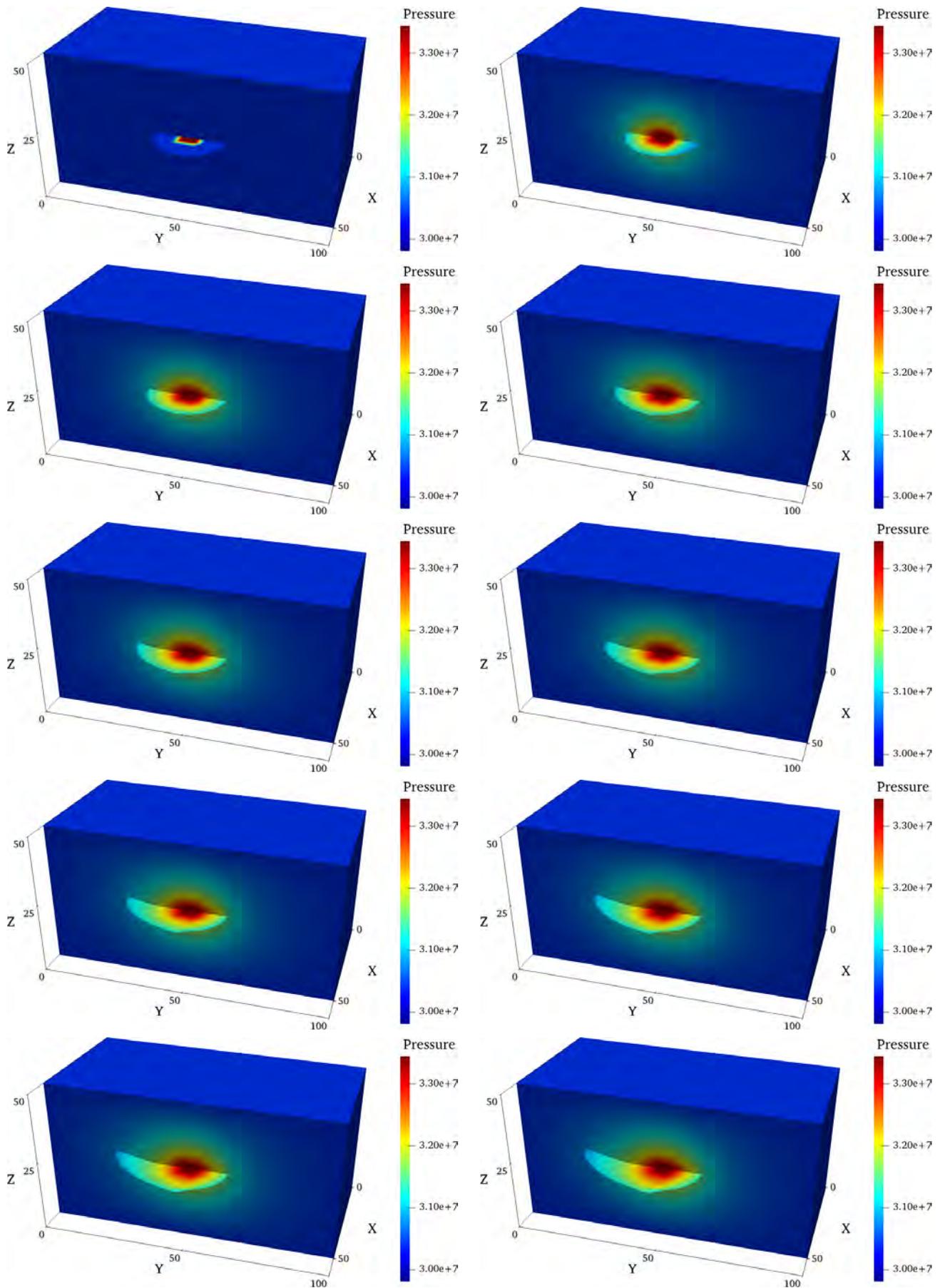


Рис. 6.32. Распределение давления в среде и трещине для $t = (0, 2, 5, 8, 11, \dots, 26)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

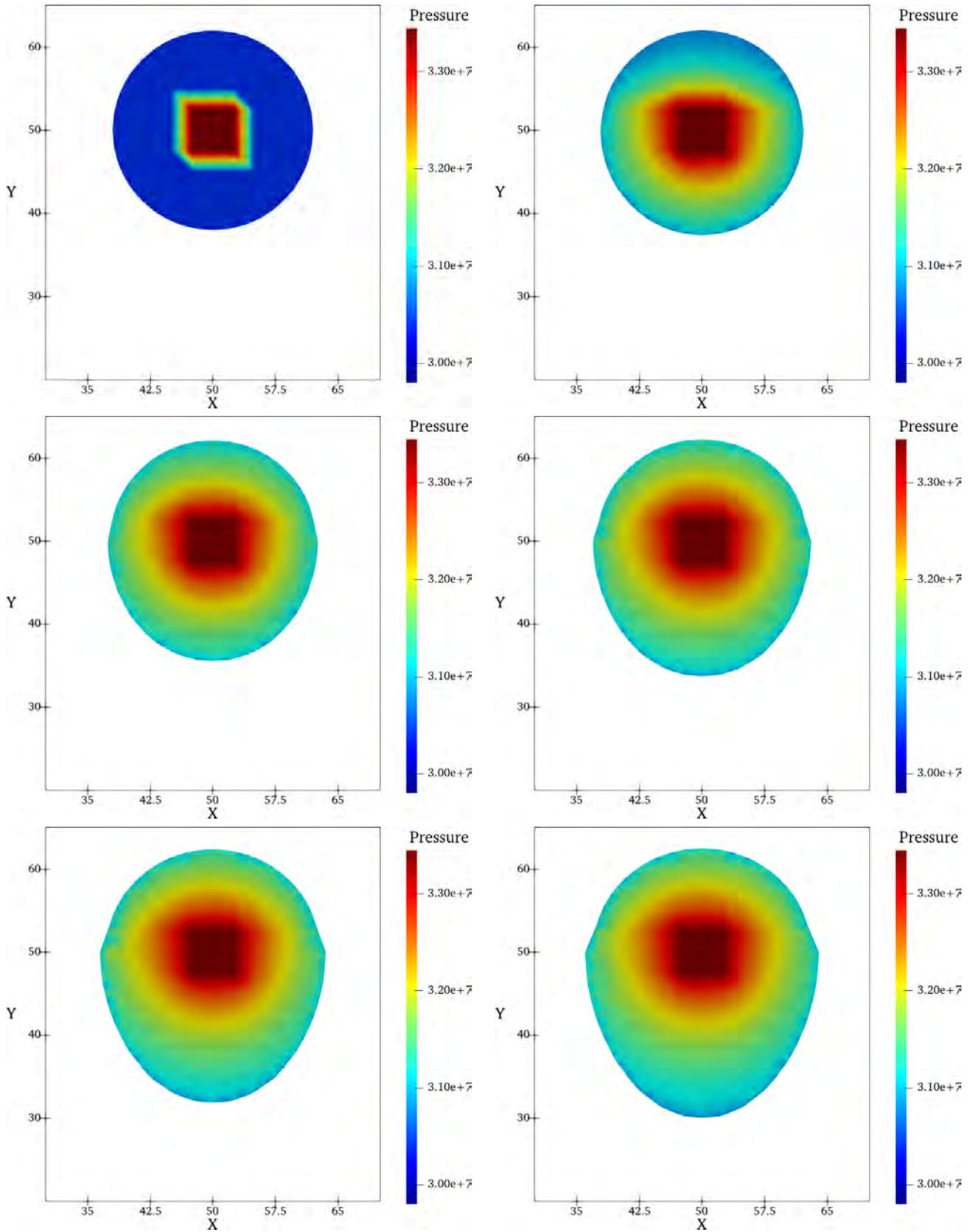


Рис. 6.33. Эволюция срединной поверхности трещины и в ней для $t = (0, 2, 5, 8, 11, 14)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

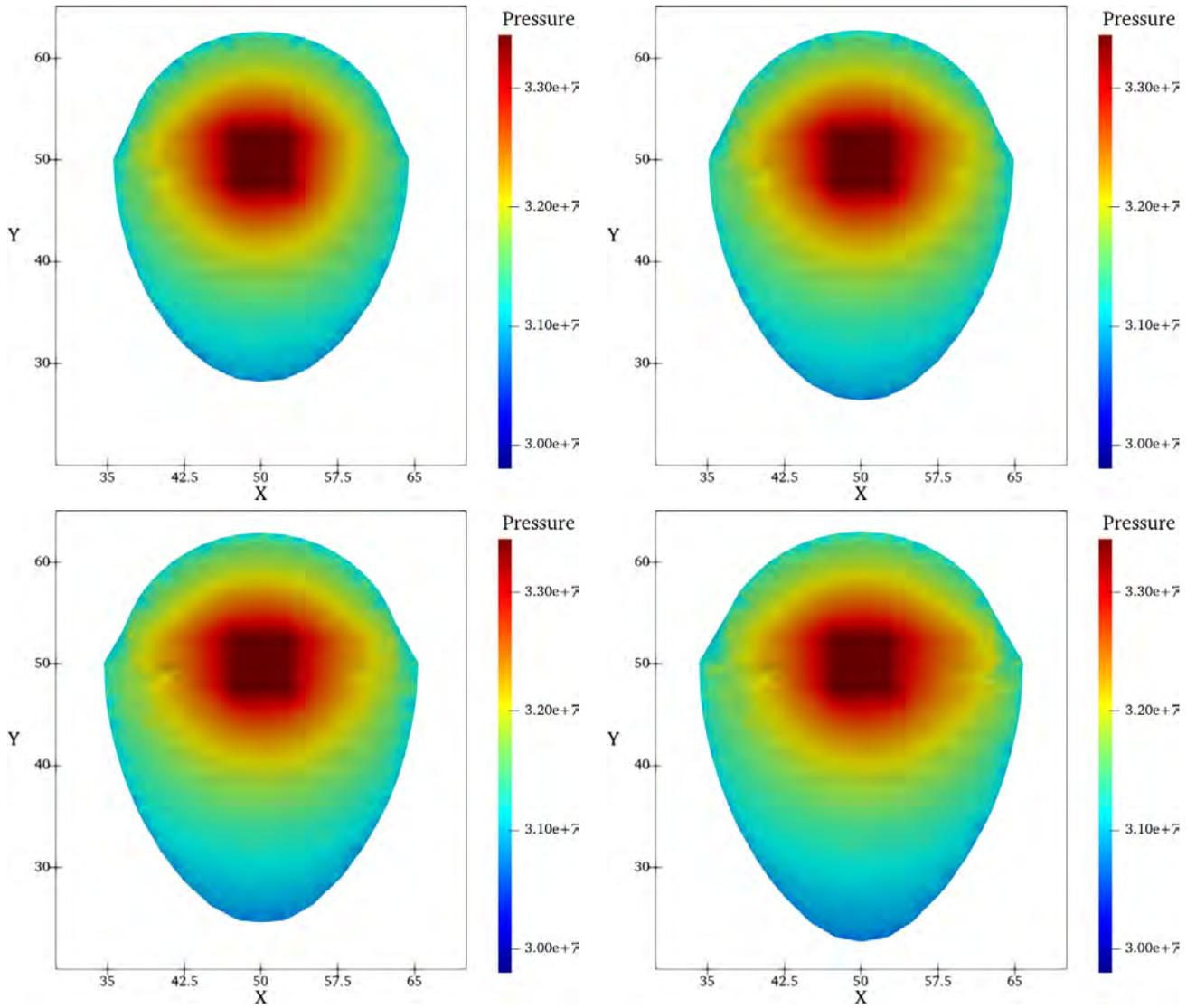


Рис. 6.34. Эволюция срединной поверхности трещины и в ней для $t = (17, 20, 23, 26)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

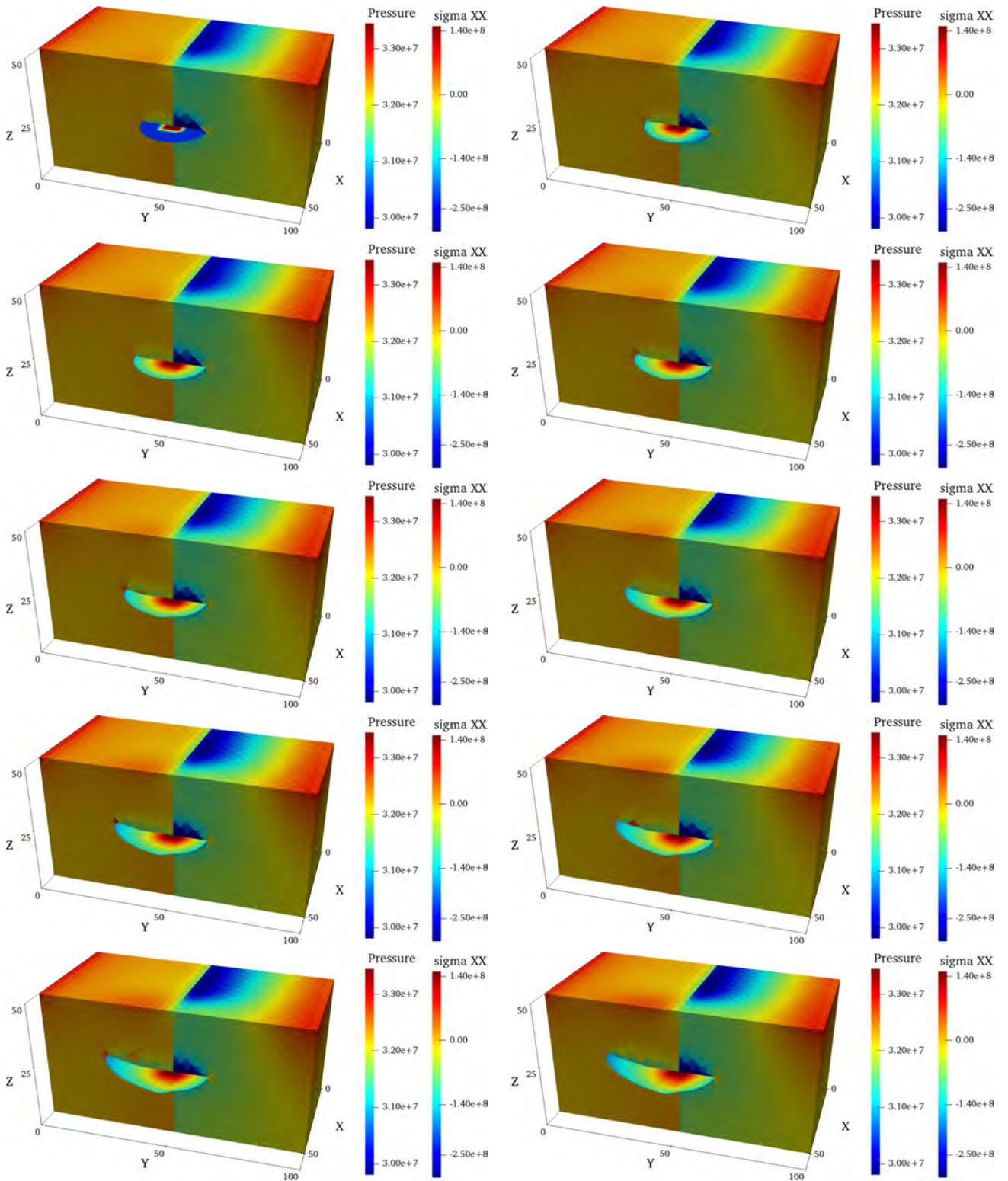


Рис. 6.35. Распределение компоненты T_{xx} поля напряжений в среде и давления в трещине для $t = (0, 2, 5, 8, 11, \dots, 26)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

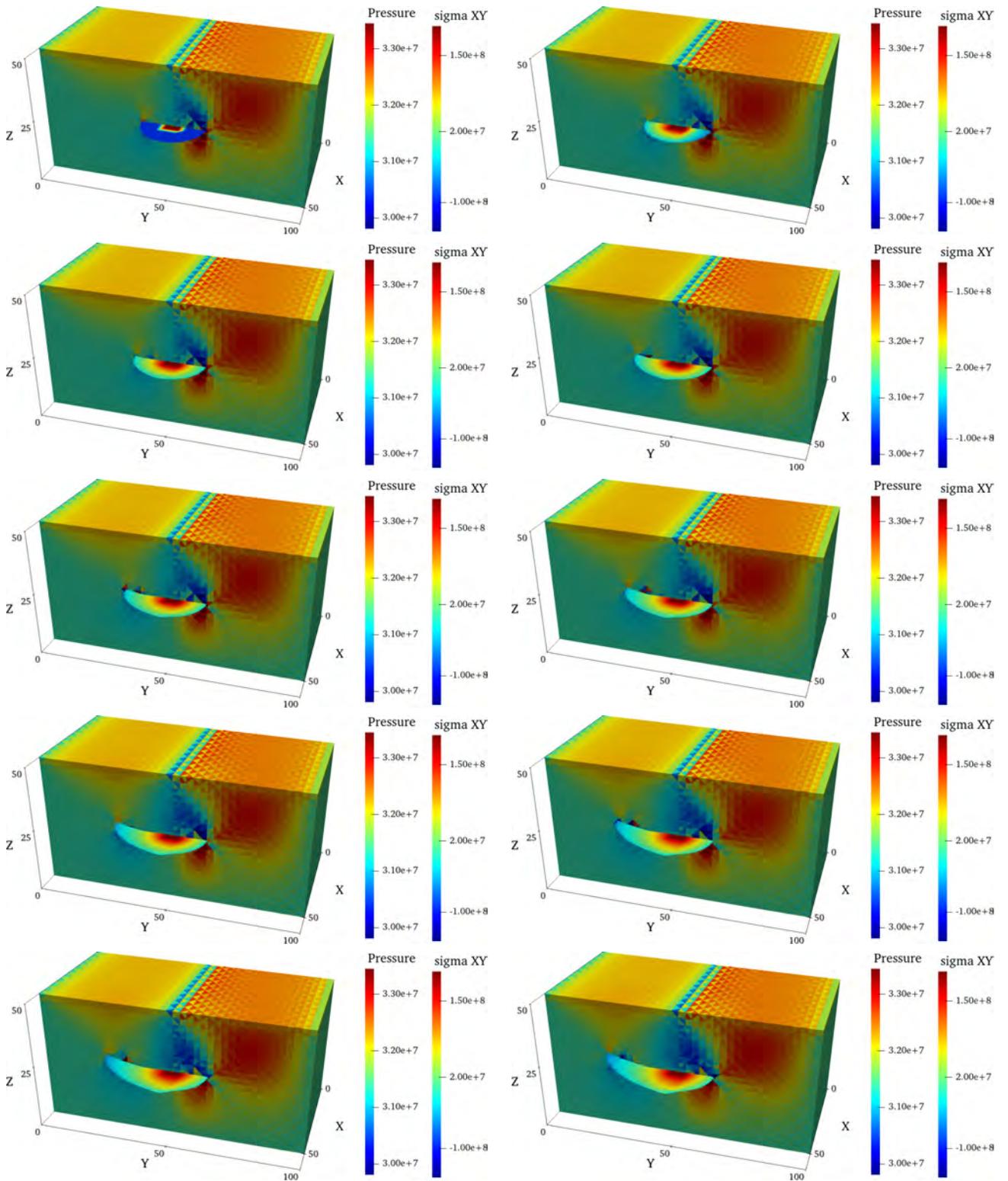


Рис. 6.36. Распределение компоненты T_{xy} поля напряжений в среде и давления в трещине для $t = (0, 2, 5, 8, 11, \dots, 26)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

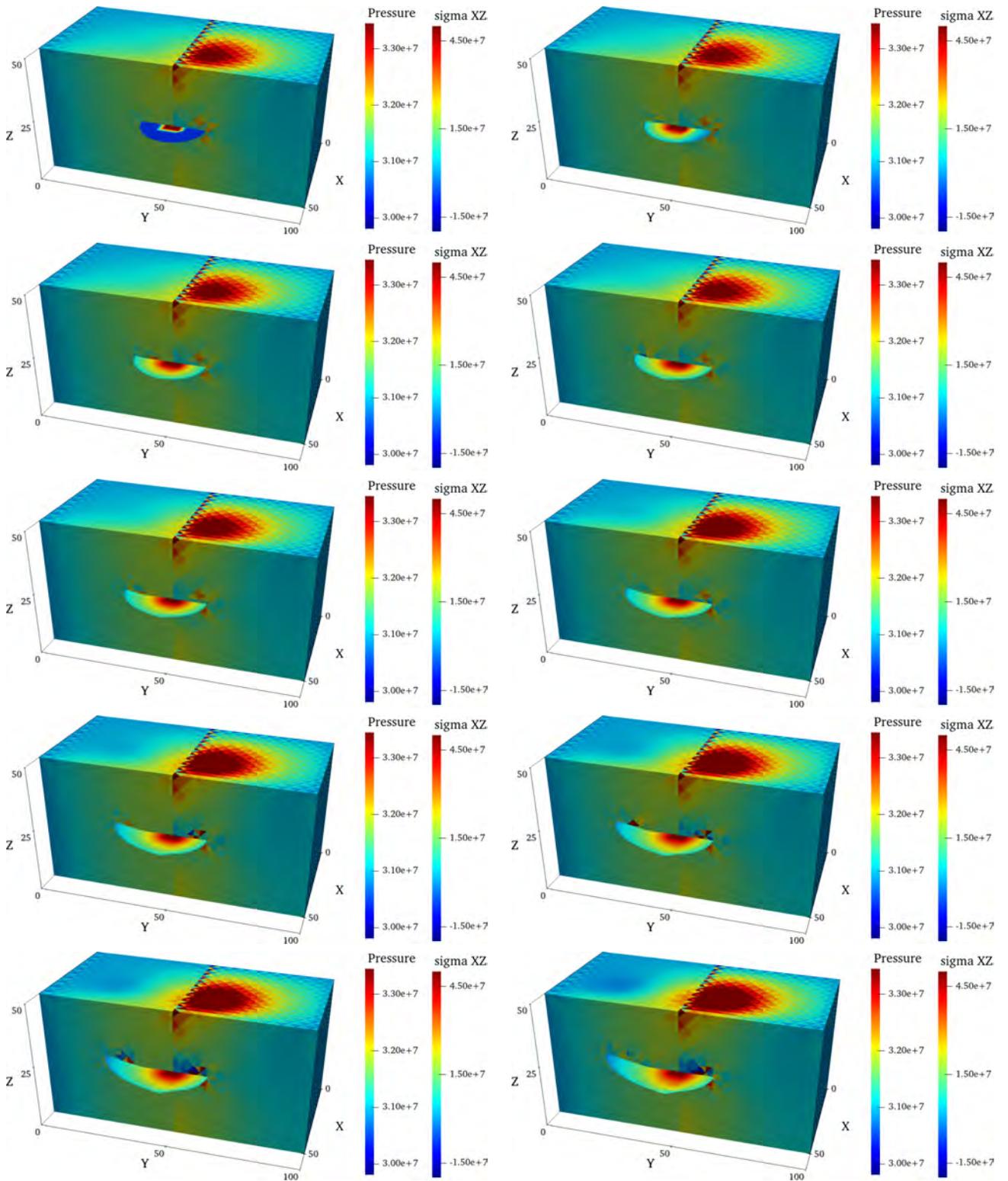


Рис. 6.37. Распределение компоненты T_{xz} поля напряжений в среде и давления в трещине для $t = (0, 2, 5, 8, 11, \dots, 26)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

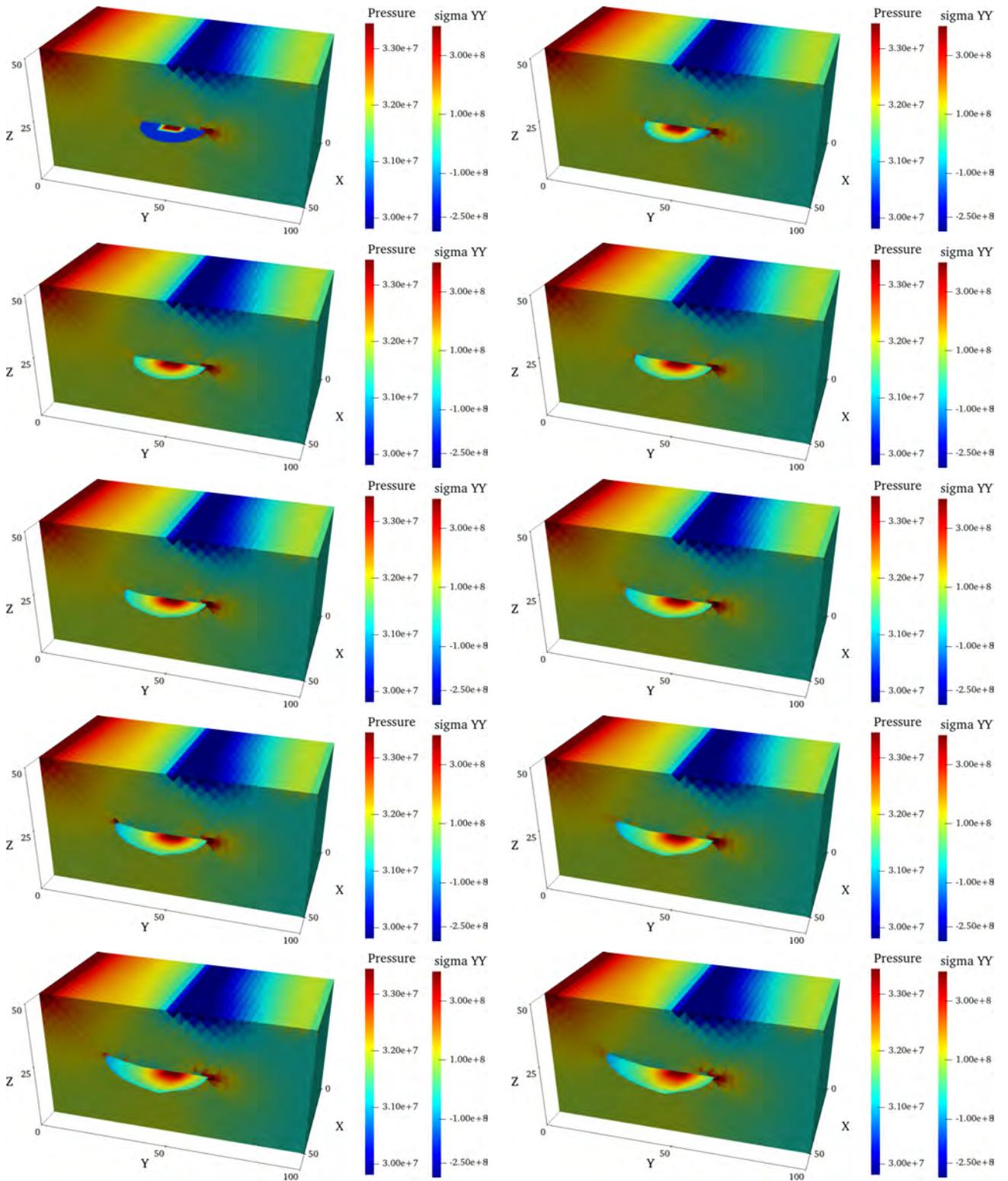


Рис. 6.38. Распределение компоненты T_{yy} поля напряжений в среде и давления в трещине для $t = (0, 2, 5, 8, 11, \dots, 26)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

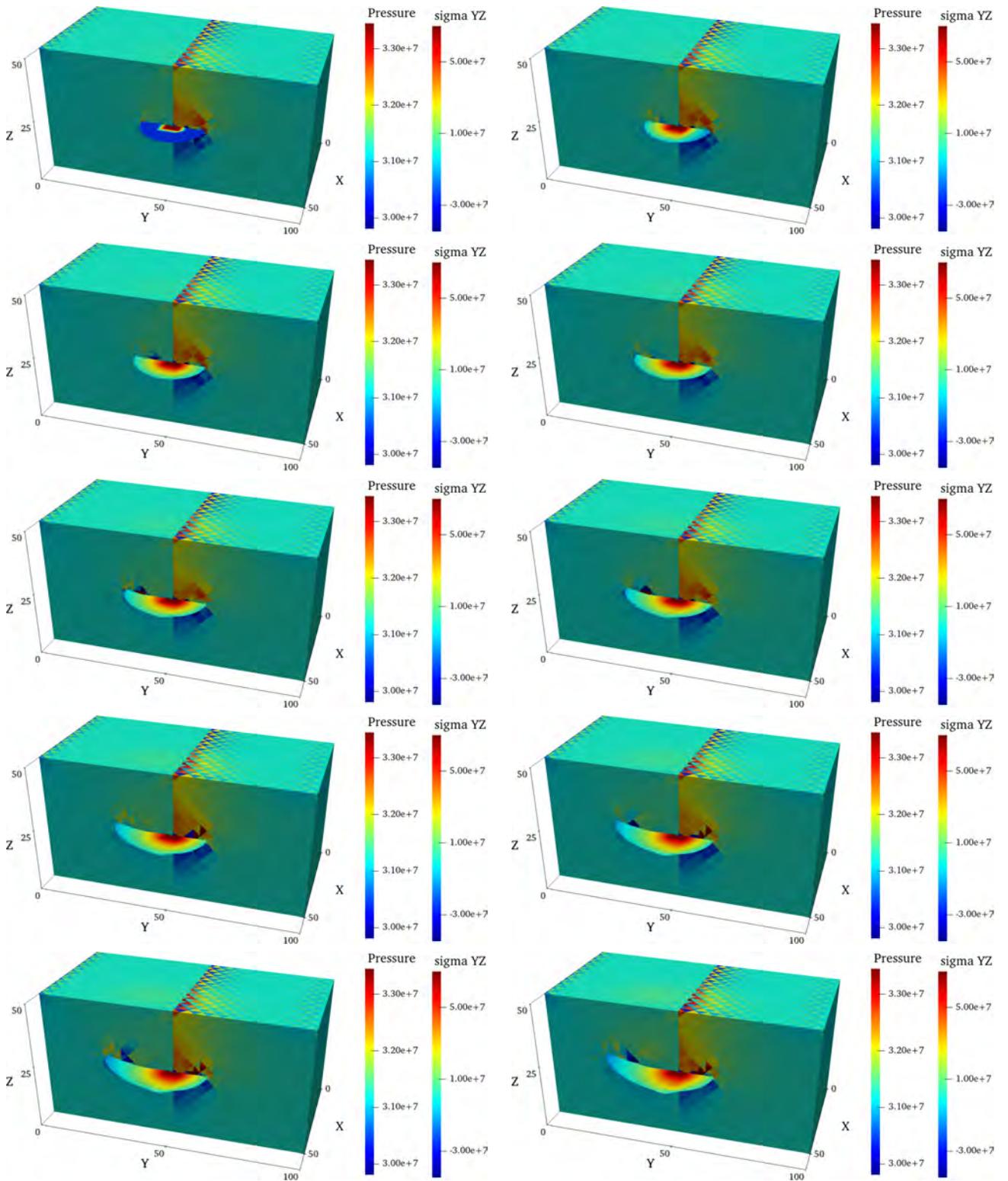


Рис. 6.39. Распределение компоненты T_{yz} поля напряжений в среде и давления в трещине для $t = (0, 2, 5, 8, 11, \dots, 26)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

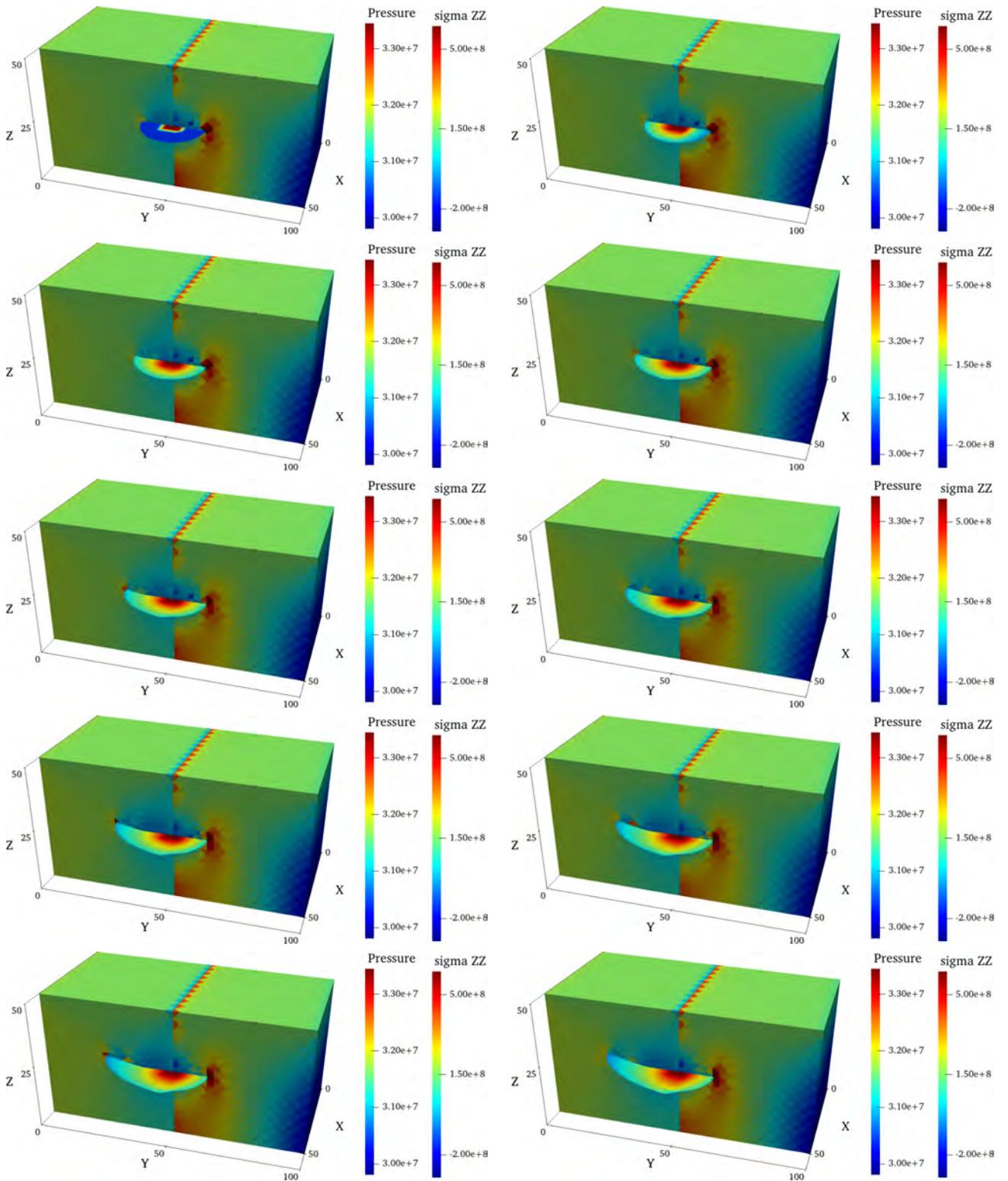


Рис. 6.40. Распределение компоненты T_{zz} поля напряжений в среде и давления в трещине для $t = (0, 2, 5, 8, 11, \dots, 26)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

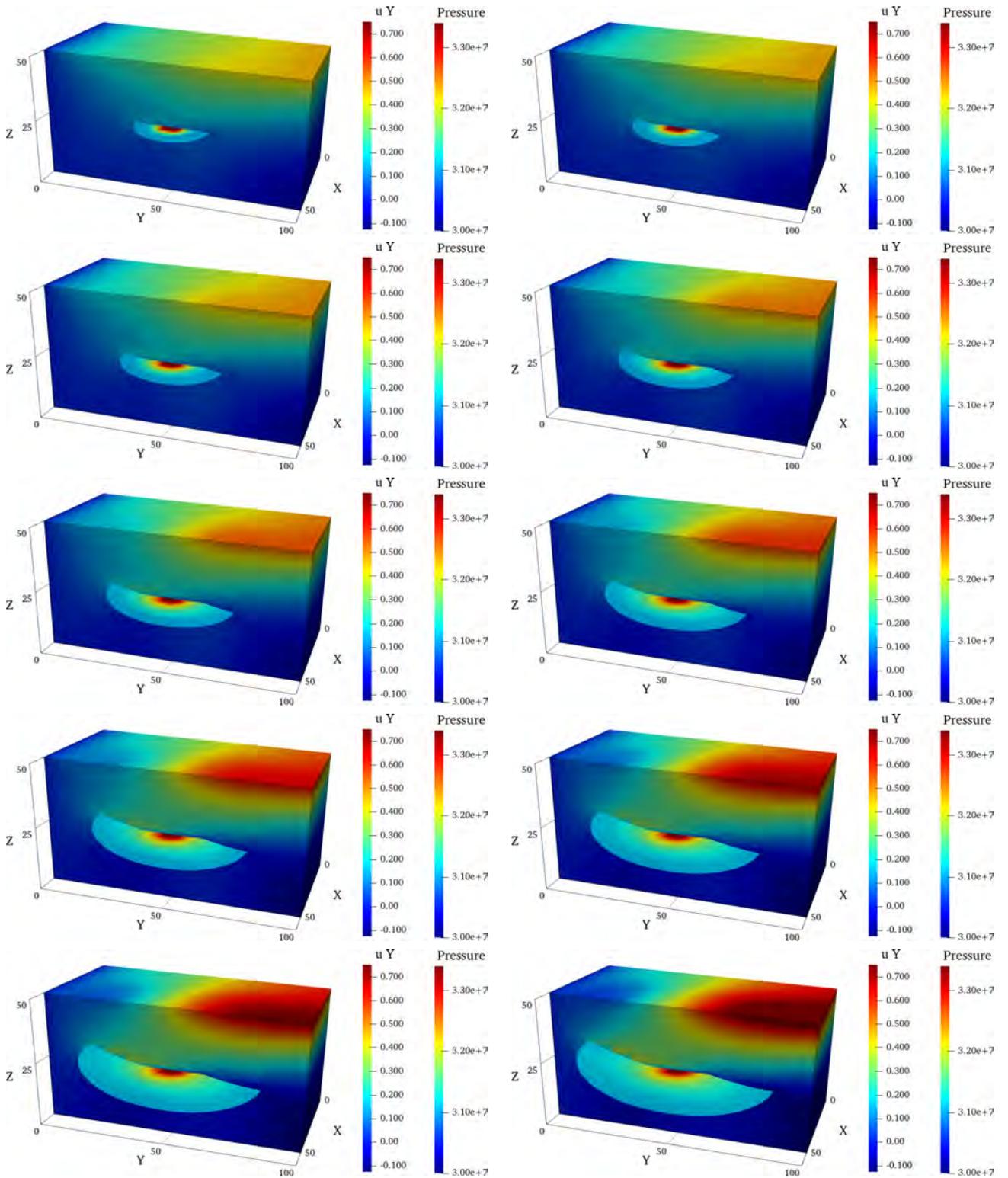


Рис. 6.41. Распределение компоненты u_y поля напряжений в среде и давления в трещине для $t = (0, 2, 5, 8, 11, \dots, 26)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

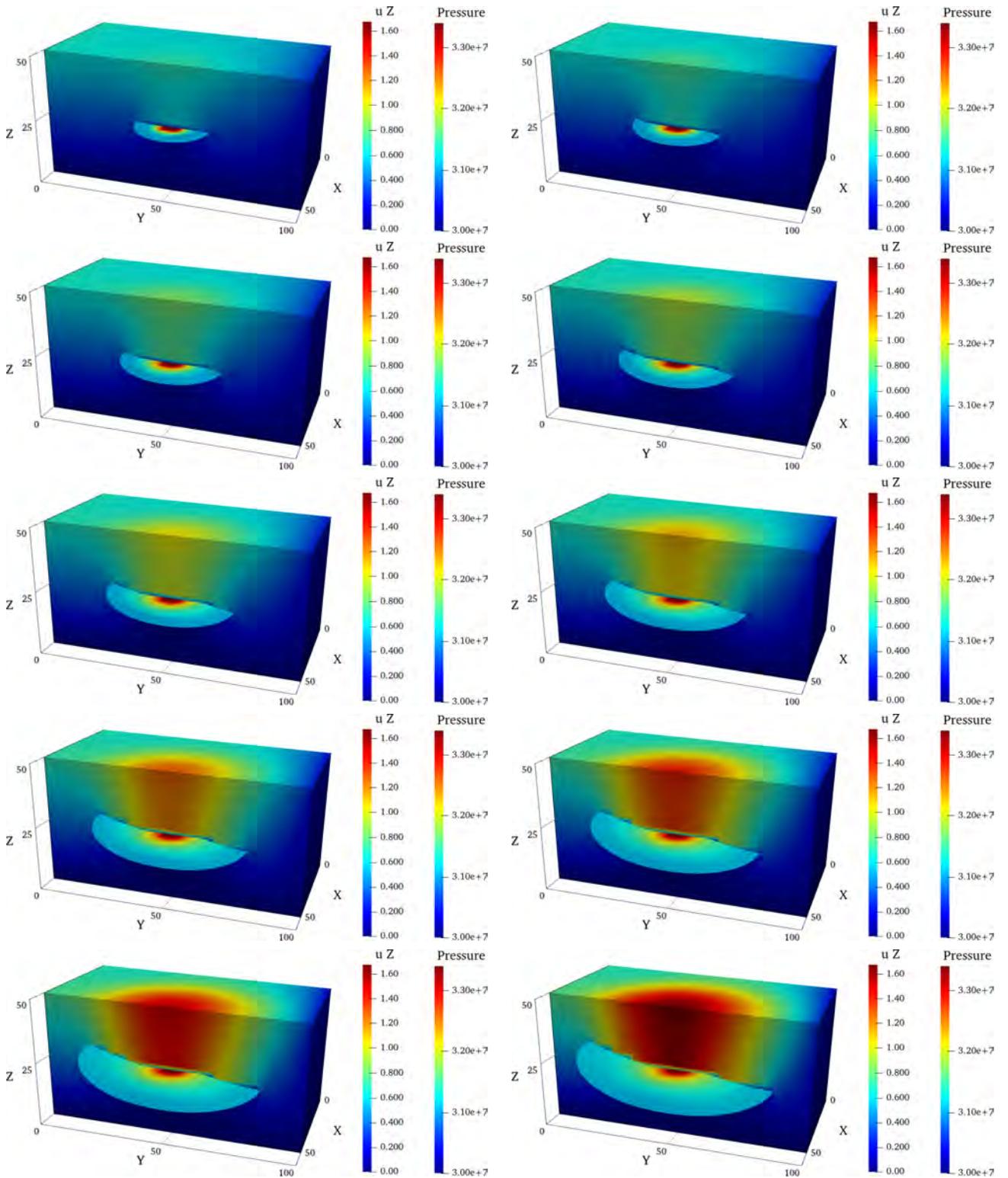


Рис. 6.42. Распределение компоненты u_z поля напряжений в среде и давления в трещине для $t = (0, 2, 5, 8, 11, \dots, 26)\Delta t$ (слева направо, сверху вниз).

6.6 Заключение

В главе рассматриваются алгоритмы для решения связанной задачи о развитии флюидонаполненной трещины в пороупругой среде. По существу, настоящая глава «интегрирует» результаты предыдущих глав работы.

Представлен обзор известных алгоритмов решения рассматриваемой задачи. Все описанные алгоритмы основаны на последовательном решении частных групп уравнений задачи или итерациях между ними. Показано, что они не обладают степенью общности, необходимой для решения рассматриваемой в работе задачи. В частности, некоторые из них не учитывают пороупругие эффекты, другие основаны на применении методом типа граничных интегральных уравнений, не пригодных для анализа неоднородных сред или требующих нетривиальных обобщений. Для каждого алгоритма приводится его интерпретация и обобщение в терминах рассматриваемой задачи безотносительно способа решения частных групп уравнений.

Предлагается вариант решения задачи с учетом течения в трещине, который является аналогом «недренируемого» связывания для итерационного решения задачи пороупругости. Этот метод рассматривается как в абстрактной постановке, так и конкретно для задачи о развитии трещины в пороупругой среде.

Формулируется и подробно описывается предложенный в работе алгоритм решения полной связанной задачи. В качестве алгоритмов решения частных задач используются ранее предложенные в работе алгоритмы, описанные в соответствующих главах.

Для построения конечномерных аппроксимаций задачи используется единая и единственная, заданная в расчетной области Ω сетка Ω_h . Расчетная область включает в себя трещину \mathcal{F}_t , геометрия которой зависит от времени t . На срединной поверхности трещины какая-либо отдельная сетка не вводится. Предполагается, что срединная поверхность трещины и расчетная сетка Ω_h никак не согласованы.

Центральной идеей предлагаемого подхода является неявное описание геометрии эволюционирующей трещины с применением метода проекции ближайшей точки. Таким образом, предлагаемый подход является *эйлеровым*. Это касается как решения уравнений пороупругости в объеме, то есть непосредственно в области Ω , так и решения уравнения на эволюционирующей поверхности. В частности:

- При решении уравнений пороупругости при заданной геометрии трещины метод проекции ближайшей точки используется при построении варианта «расширенного» метода конечных элементов X-FEM. Подробно эти вопросы рассмотрены в главе 4.
- При решении уравнения смазочного слоя используется конечно-элементный вариант метода проекции ближайшей точки. Соответствующие вопросы рассмотрены в главе 5.

Отметим следующие особенности применения метода проекции ближайшей точки в настоящей работе:

- Эволюция поверхности описывается исключительно в терминах эволюции оператора проекции ближайшей точки.
- Все заданные на срединной поверхности трещины поля физических величин рассматриваются как заданные в пространстве функции. Они являются продолжением полей,

заданных на срединной поверхности трещины, построенных с помощью оператора проекции ближайшей точки.

В заключении главы приводятся результаты расчетов, которые демонстрируют возможности разработанных алгоритмов и программной реализации для решения связанных задач с учетом пороупругого поведения среды, течения трещины и ее эволюции. Рассматриваются примеры со стационарной трещиной, с трещиной в среде с однородным и неоднородным распределением упругих фильтрационно-емкостных свойств, с заданным характером развития трещины и ее развитием в естественном поле напряжений, возникающих в среде.

Заключение

В настоящей работе представлены результаты по разработке комплекса средств математического моделирования (математических моделей, вычислительных алгоритмов и программ) для моделирования динамики развития флюидонаполненных трещин в пороупругой среде.

В качестве базовой модели для описания вмещающей трещину среды применяется пороупругая модель Био, которая рассматривается в приближении физически и геометрически линейной среды. Задача рассматривается в трехмерной постановке. Указанная модель представляет собой связанную систему уравнений механики деформируемого твердого тела, которая описывает напряженно-деформированное состояние пласта и уравнений фильтрации, которые описывают фильтрационные потоки жидкости в среде. Трещина описывается своей срединной поверхностью с заданным на ней полем ее раскрытия и полем давления флюида в ней. Геометрическая модель трещины позволяет рассматривать срединную поверхность трещины как произвольную гладкую поверхность с краем, удовлетворяющую естественным требованиям гладкости. Течение жидкости в трещине описывается уравнением смазочного слоя в приближении Рейнольдса.

Результирующая модель состоит из следующих групп уравнений:

- системы уравнений пороупругости в трехмерной постановке, описывающей состояние вмещающей трещину среды;
- уравнения течения в трещине;
- условий согласования на границе «трещина»/«вмещающая среда», которые включают в себя условия непрерывности потоков консервативных (массы, энергии и импульса) величин и геометрические условия, связывающие раскрытие трещины с перемещениями точек ее боковой поверхности.
- критерия разрушения, который определяет направление развития фронта трещины в его точках и формулируется на основе векторного J -интеграла Черепанова-Райса.

Рассматриваются случаи проницаемых и непроницаемых для жидкости боковых поверхностей трещины.

На основе выполненного обзора литературы делается вывод о том, что в качестве базового алгоритма решения задачи во вмещающей трещину среде наиболее пригоден метод конечных элементов X-FEM, позволяющий учитывать наличие в расчетной области трещин, геометрия которых не согласована с геометрией расчетной сетки. Для представления срединной поверхности трещины при этом традиционно используется метод множеств уровня. Вместе с тем, такой способ представления поверхности не является достаточно удобным при разработке методов решения уравнений на поверхностях с краем. По этой причине, единым

способом представления срединной поверхности трещины в разрабатываемом комплексе алгоритмов выбран метод проекции ближайшей точки. Для его применения в соответствующих главах работы

- развивается алгоритм метода X-FEM с использованием метода проекции ближайшей точки для представления срединной поверхности трещины;
- развивается непосредственно метод проекции ближайшей точки для представления поверхности: рассматриваются вопросы расчета эволюции поверхности, локального построения поверхностей уровня с помощью метода проекции ближайшей точки, интегрирования по таким способом заданным поверхностям, методы решения уравнений с помощью конечно-элементного варианта метода проекции ближайшей точки.

Разработка этих вопросов и демонстрация применимости разработанных методов составляет основную часть диссертационной работы.

Далее рассматривается ряд аспектов применения метода конечных элементов для решения уравнений поропругости. Описывается алгоритм метода, особенности его реализации, способы итерационного связывания групп уравнений, основные моменты его применения. С теоретической точки зрения глава носит вспомогательный характер, однако содержит изложение базового, как с точки теории, так и с точки зрения программной реализации алгоритма и необходима для дальнейшего изложения. Приводятся примеры расчетов ряда поропругих задач, демонстрирующих работоспособность разработанного в ходе работы программного комплекса. Рассматриваются как тестовые постановки, так и содержательные примеры. В частности, рассмотрено применение разработанного программного комплекса для анализа реальных лабораторных экспериментов, проводимых в Институте динамики геосфер РАН.

Далее рассматриваются методы представления срединной поверхности трещины и расчета ее эволюции. Рассматриваются два метода: традиционный, основанный на применении метода множеств уровня и метод на основе проекции ближайшей точки. Подробно описываются оба метода, соответствующие вычислительные алгоритмы и особенности их применения. Для метода проекции ближайшей точки предлагаются новые алгоритмы для расчета эволюции поверхности (без вспомогательного представления, непосредственно в терминах соответствующего проектора); расчета локальных базисов на поверхности и ее крае; интегрирования функций поверхностях, заданных операторы проекции ближайшей точки; локального построения функций множеств уровня. Эти алгоритмы являются необходимыми для дальнейшего применения метода проекции ближайшей точки в настоящей работе — в частности, для построения соответствующего варианта метода X-FEM. Для обоих методов приводятся результаты тестовых расчетов. Делается вывод о том, что возможности метода проекции ближайшей точки достаточны для его эффективного применения в рамках рассматриваемого комплекса алгоритмов. Вместе с тем, он может быть эффективно программно и не требует многократного решения уравнений типа Гамильтона-Якоби, как это требуется для метода множеств уровня.

Предлагается вариант «расширенного» метода конечных элементов X-FEM с представлением поверхности с помощью метода проекции ближайшей точки. Описанный вариант алгоритма является новым, в плане общности и удобства представления геометрии срединной поверхности трещины он не уступает оригинальному варианту метода, использующего

метод множеств уровня для представления поверхности трещины. Приводятся результаты расчета упругих и пороупругих задач, демонстрирующие возможности метода и разработанного программного комплекса.

Существенное внимание в работе уделено рассмотрению вопросов, связанных с решением уравнений на поверхностях с краем. В соответствии с общей идеологией работы, в качестве базового метода применяется метод проекции ближайшей точки. Метод основан на продолжении уравнения, заданного на поверхности с краем, в о вмещающее пространство. Далее продолженное трехмерное уравнение аппроксимируется, в оригинальном варианте, с помощью разностного метода.

Предлагаются слабые постановки краевых задач на поверхностях с краем, которые «совместимы» с представлением поверхности с помощью оператора проекции ближайшей точки. В результате, аппроксимации метода могут быть получены формальной процедурой применения метода конечных элементов. Принципиальное внимание уделено способу задания (в продолженной с поверхности в пространство задаче) вариационному способу задания главных граничных условий. Показано, что для этого могут применяться методы типа множителей Лагранжа и метод штрафа в различных вариантах. Все построения рассматриваются для двух случаев. Первый соответствует ситуации, когда необходимо решить двумерную задачу на плоскости в случае, когда граница расчетной области и расчетная сетка не согласованы. В этом случае оператор проекции ближайшей точки используется для построения постановки задачи в области, содержащей исходную. Идеино построенный алгоритм близок к методам типа «диффузной границы» и представляет отдельный интерес вне контекста настоящей работы. Второй случай соответствует непосредственно решению уравнения на поверхности с краем, вложенной в трехмерное пространство.

Далее формулируется полный алгоритм решения нелинейного уравнения на эволюционирующей поверхности с краем. Приводятся результаты тестовых расчетов для задач, заданных на плоских и неплоских, стационарных и эволюционирующих поверхностях с краем.

Наконец, рассмотрены варианты алгоритмы для решения полной связанной задачи о развитии флюидонаполненной трещины в пороупругой среде. Представлен обзор различных алгоритмов итерационного связывания между группами уравнений пороупругости и течения в трещине. Предлагается используемый в дальнейшем вариант алгоритма. В заключении приводятся результаты расчетов, демонстрирующих работоспособность предложенных решений.

Основными результатами работы являются следующие:

- Разработана новая трехмерная математическая модель развития флюидонаполненной трещины в пороупругой среде, включающая в себя группы уравнений пороупругости и течения в трещине с самосогласованным учетом потоков консервативных величин между трещиной и средой.
- Для расчета динамики развития срединной поверхности трещины предложен эффективный алгоритм на основе метода проекции ближайшей точки. Эволюция поверхности описывается непосредственно в терминах определенного в пространстве оператора проекции без использования явной аппроксимации поверхности. Предложенные алгоритмы позволили построить новые эффективные алгоритмы решения полной связанной задачи.

- Разработан оригинальный вариант алгоритма «расширенного» метода конечных элементов — X-FEM/CP, использующий, в отличие от ранее известных вариантов метода, метод проекции ближайшей точки для описания геометрии срединной поверхности трещины и ее эволюции.
- Предложены новые слабые постановки и метод решения начально-краевых задач для уравнения смазочного слоя на стационарных и эволюционирующих поверхностях с краем, вложенных в трехмерное пространство. Построенные постановки основаны на продолжении уравнения на поверхности в трехмерное пространство и вариационном способе учета главных граничных условий на границе трещины. Предложенный метод использует эйлерово описание течения в трещине и основан на конечно-элементном варианте метода проекции ближайшей точки с использованием построенных слабых постановок. Это позволяет применять его для решения уравнения на эволюционирующей поверхности с использованием пространственной неструктурированной сетки, которая не согласована с ее геометрией.
- Предложен вычислительный алгоритм решения связанной задачи развития флюидонаполненной трещины в рамках предложенной трехмерной самосогласованной модели. Он использует единое представление поверхности для описания эволюции трещины, решения пороупругой задачи во вмещающей трещину пороупругой среде и течения в трещине. Метод является эйлеровым и использует единую трехмерную расчетную сетку для решения уравнений в среде и в трещине.
- Разработан программный комплекс, реализующий предложенные модели и алгоритмы, который может служить основой для создания пакета прикладных программ для решения актуальных задач нефтегазодобывающей отрасли. Продемонстрирована работоспособность предложенных моделей, вычислительных методов, алгоритмов и их программной реализации на примере решения задач с учетом практически важных особенностей и эффектов, сопровождающих развитие флюидонаполненных трещин.

Литература

- [Борисов2017] Борисов В.Е., Иванов А.В., Критский Б.В., Меньшов И.С., Савенков Е.Б. Численное моделирование задач пороупругости // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 81. 36 с.
- [Борисов2019a] Борисов В.Е., Критский Б.В., Савенков Е.Б. ГРП в «расширенной» постановке: математическое моделирование // NEFTEGAS.RU. 2019, № 6 (90), с. 88–90.
- [Борисов2019b] Борисов В.Е., Критский Б.В., Савенков Е.Б. Представление поверхности с помощью проекции ближайшей точки в методе X-FEM // Математическое моделирование, т. 31, № 6, с. 18–42. 2019.
- [Деммель2001] Деммель Д. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. Москва: Мир, 2001. 432 С.
- [Дубровин1986] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: методы и приложения, М.: Наука, 1986. 760 с.
- [Иванов2017] Иванов А.В., Савенков Е.Б. Моделирование и визуальное представление динамики поверхности с подвижным краем на стационарной неструктурированной сетке // Научная визуализация. 2017, т. 9, № 2, с. 64–81.
- [ИНЭИ2012] Нефть сланцевых плеев — новый вызов энергетическому рынку? // ИНЭИ РАН, ноябрь 2012.
- [Качанов1974] Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
- [Линьков2011с] Линьков А. М. Уравнение скорости и его применение для решения некорректных задач о гидроразрыве // Доклады Академии наук, 2011, т. 439, № 4, с. 473–475.
- [Марчук1985] Марчук, Г.И., агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы: М.: Мир, 1985. 432 с.
- [Марчук1989] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
- [Мусхелишвили1966] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1966.
- [Обэн1977] Обэн, Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977. 383 с.
- [Прищепа2013] Прищепа О.М., Аверьянова О.Ю., Высоцкий В.И., Морариу Д. Формация Баккен: геология, нефтегазоносность и история разработки // Нефтегазовая геология. Теория и практика. – 2013. – Т.8. – № 2.
- [Рамазанов2017] Рамазанов М.М., Критский Б.В., Савенков Е.Б. Формулировка J -интеграла для модели пороупругой среды Био // Инженерно-физический журнал, Т. 91, № 6. 2017. с. 1677-1684.
- [Рамазанов2017] Рамазанов М.М., Савенков Е.Б. Критерий развития трещин в пороупругой

- среде // Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки, № 5(80). с. 65-82. 2018.
- [Райс1982] Райс Д. Механика очага землетрясения. М.: Мир. – 1982. – 217 с.
- [Савенков2018] Савенков Е.Б., Борисов В.Е. Математическая модель развития трещины гидроразрыва пласта в трехмерной пороупругой среде // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2018. № 1. С. 5–17.
- [Савенков2018] Савенков Е.Б., Борисов В.Е., Критский Б.В. Алгоритм метода X-FEM с представлением поверхности трещины на основе проекции ближайшей точки // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 42. 36 с.
- [Савенков2020] Савенков Е.Б. Решение уравнений в частных производных на поверхностях: обзор алгоритмов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 5. 18 с.
- [Савенков2020a] Зипунова Е.В., Савенков Е.Б. Применение метода проекции ближайшей точки для решения уравнений гидродинамики в приближении смазочного слоя // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 10. 32 с.
- [Савенков2020b] Савенков Е.Б. Конечноэлементный вариант метода проекции ближайшей точки для решения уравнений на поверхностях с краем // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 8. 36 с.
- [Савенков2020c] Савенков Е.Б., Иванов А.В. Реализация метода множеств уровня для расчета геометрической эволюции трещины с применением сеточно-характеристического метода // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 47. 32 с.
- [Савенков2020d] Борисов В.Е., Зипунова Е.В., Иванов А.В., Критский Б.В., Савенков Е.Б. Программный комплекс HFrac3D++ для решения задач геомеханики с учетом крупномасштабных флюидонаполненных трещин // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 46. 20 с.
- [Салимов2013] Салимов В.Г., Ибрагимов Н.Г., Насыбуллин А.В., Салимов О.В. Гидравлический разрыв карбонатных пластов. М.: Нефтяное хозяйство, 2013. 471 с.
- [Седов2004] Седов Л.И. Механика сплошной среды, Т. 2., изд. «Лань», 2004, 560 с.
- [Черепанов1967] Черепанов Г.П., О распространении трещин в сплошной среде // ПММ, 31, с. 283-291. 1967.
- [Черепанов1974] Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
- [Шайдуров1989] Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука, 1989, 288 с.
- [Экономидес2007] Экономидес М., Олини Р., Валько П. Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта. От теории к практике. М.: Институт компьютерных исследований, 2007. 236 С.
- [Adachi2007] Adachi, J, Siebrits, E., Peirce, A., Desroches, J. Computer simulation of hydraulic fractures // International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 44 (2007), 739–757.
- [Adalsteinsson2003] Adalsteinsson, D., Sethian, J.A. Transport and diffusion of material quantities on propagating interfaces via level set methods // J. Comput. Phys., 185, 271–288, 2003.
- [Ambrosio1998] Ambrosio, L., Mantegazza, C. Curvature and distance function from a manifold // The Journal of Geometric Analysis. vol. 8, iss. 5, pp. 723–748. 1998.
- [Anderson1965] Anderson D. Iterative procedures for nonlinear integral equations // Journal of

- the Association of Computing Machinery, 1965; 12:547–560.
- [Anderson2002] Anderson, T.L. Fracture mechanics: fundamentals and applications. CRC Press. 2002.
- [Armero1995] Armero, F. Garikipati, K., Recent advances in the analysis and numerical simulation of strain localization in inelastic solids // D.R.J. Owen, E. Onate (Eds.), Computational Plasticity: Fundamentals and Applications. Proceedings of the Fourth International Conference, Pineridge press, Barcelona, pp. 547–561, 1995.
- [Babuska1973] Babuska, I. The Finite Element Method with Penalty // Mathematics of Computation Vol. 27, No. 122 (Apr., 1973), pp. 221-228.
- [Barret1986] Barrett, J.W., Elliott, C.M. Finite Element Approximation of the Dirichlet Problem Using the Boundary Penalty Method // Numer. Math. 49, 343-366 (1986)
- [Bechet2009] Bechet, E., Moës, N., Wohlmuth, B. A stable Lagrange multiplier space for stiff interface conditions within the extended finite element method // Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 78, pp. 931–954, 2009.
- [Becker2003] Becker, R., Hansbo, P., Stenberg, R. A finite element method for domain decomposition with non-matching grids // Mathematical Modelling and Numerical Analysis, vol. 37, № 2, pp. 209–225, 2003.
- [Belytschko1999] Belytschko, T., Black, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing // Internat. J. Numer. Methods Engrg., vol. 45, pp. 601–620, 1999.
- [Berger2014] Berger M., Tagliasacchi A., Seversky L., Alliez, P., Levine, J., Sharf, A., Silva, C. State of the Art in Surface Reconstruction from Point Clouds // EUROGRAPHICS 2014/ S. Lefebvre and M. Spagnuolo. STAR — State of The Art Report, 2014.
- [Berryman2002] Berryman, James G. Extension of Poroelastic Analysis to Double-Porosity Materials: New Technique in Microgeomechanics // Journal of Eng. Mechanics. August 2002, pp. 840-847.
- [Bertalmio2001] Bertalmio, M., Cheng, L.T., Osher, S., Sapiro, G. Variational problems and partial differential equations on implicit surfaces // J. Comput. Phys., 174, 759–780, 2001.
- [Biot1941] Biot, M.A. General theory of three dimensional consolidation // Journal of Applied Physics, 12, pp. 155-164. 1941.
- [Biot1956a] Biot, M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. I. Low frequency range // The Journal of the Acoustical Society of America, 28, pp. 168-178. 1956.
- [Biot1956b] Biot, M.A., Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. II. Higher frequency range // The Journal of the Acoustical Society of America, 28. 1956.
- [Biot1957] Biot, M.A. The elastic coefficients of the theory of consolidation // Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, 24, pp. 594-601. 1957.
- [Biot1962] Biot, M.A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media // Journal of Applied Physics, 33, 1482-1498. 1962.
- [Borisov2018] Borisov, V., Ivanov, A., Kritsky, B., Menshov, I., Ramazanov, M., Savenkov E. Fully coupled numerical simulation techniques for 3D hydraulic fracturing // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1141 (2018) 012085.
- [Borisov2018b] Borisov V.E., Ivanov A.I., Kritsky B.V., Menshov I.S., Savenkov E.B., Trimonova M.A., Turuntaev S.B., Zenchenko E.V. Analysis of Poroelastic Laboratory Experiments Using Numerical Simulation Techniques // Physical and Mathematical Modeling of Earth

- and Environment Processes. Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences. pp. 244-252. 2018.
- [Borisov2018c] Borisov V.E., Ivanov A.I., Ramazanov M.M., Savenkov E.B. Poroelastic Hydraulic Fracture Simulation Using X-FEM/ CPP Approach // Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes. Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences. pp. 323-333. 2018.
- [Borisov2018d] Borisov V.E., Zenchenko E.V., Kritsky B.V., Savenkov E.B., Trimonova M.A., Turuntaev S.B. Numerical Simulation of Laboratory Experiments on the Analysis of Filtration Flows in Poroelastic Media // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences, № 1 (88), pp. 16-31, 2020.
- [Bouklas2015] Bouklas N., Landis C.M., Huang R. Effect of solvent diffusion on crack-tip fields and driving force for fracture of hydrogels // Journal of Applied Mechanics. 2015. 82. 081007–081007.
- [Bower2009] Bower A.F. Applied Mechanics of Solids. CRC Press, 2009.
- [Bradman2007] Bradman, J., A level-set method for computing the eigenvalues of elliptic operators defined on compact hypersurfaces // J. Sci. Comput., 37, 282–315, 2007.
- [Brezzi1991] Brezzi, F., Fortin, M. Mixed and Hybrid Finite Elements Methods. Springer, 1991.
- [Burger2015] Burger, M., Elvetun, O.L., Schlottbom, M. Analysis of the Diffuse Domain Method for Second Order Elliptic Boundary Value Problems // Found Comput Math (2017), vol. 17, issue 3, pp. 627–674.
- [Burman2019] Burman, E., Frei, S., Massing, A. Eulerian time-stepping schemes for the non-stationary Stokes equations on time-dependent domains // arXiv:1910.03054v1 [math.NA] 7 Oct 2019.
- [Carter1957] Carter, R.D. Derivation of the General Equation for Estimating the Extent of the Fractured Area, Appendix I of “Optimum Fluid Characteristics for Fracture Extension” // Drilling and Production Practice, G.C. Howard and C.R. Fast, New York, New York, USA, American Petroleum Institute (1957), 261–269.
- [Carter2000] Carter, B.J., Desroches, J., Ingraffea, A.R., Wawrzynek, P.A., Simulating Fully 3D Hydraulic Fracturing // Modeling in Geomechanics. Ed. Zaman, Booker, and Gioda, Wiley Publishers. 2000.
- [Carrier2012] Carrier, B., Granet, S. Numerical modeling of hydraulic fracture problem in permeable medium using cohesive zone model // Engineering Fracture Mechanics. V. 79, pp. 312-328, 2012.
- [Chappele1993] Chappelle, D., Bathe, K.J. The inf-sup Test // Computers & Structures, Vol. 47, № 4-5, pp. 537-545, 1993.
- [Chen1985] Chen, C. M., Thomee, V. The lumped mass finite element method for a parabolic problem // J. Austral. Math. Soc. Ser. B 26 (1985), 329-354.
- [Cheng1984] Cheng, A., Liggett, J.A. Boundary integral equation method for linear poroelasticity with applications to fracture propagation // International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 20, Issue 2, pp. 279–296, 1984.
- [Cheng1988] Cheng A.H-D., Detournay E. A direct boundary element method for plane strain poroelasticity // Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., 12, pp. 551–572, 1988.
- [Cherepanov1979] Cherepanov, G.P. Mechanics of Brittle Fracture. New York, McGraw-Hill. 1979.
- [Chipot1986] Chipot, M., Luskin, M. The compressible Reynolds lubrication equations // IMA

Preprint Series № 232. 1986.

- [Cleary1994] Cleary M.P., Quinn. T.S., C.J. de Pater. Experimental Verification of Dimensional Analysis for Hydraulic Fracturing // SPE Production & Facilities, November 1994. pp. 230–238
- [Clifton1988] Clifton, R.J., Wang, J.-J. Multiple fluids, proppant transport, and thermal effects in threedimensional simulation of hydraulic fracturing // SPE paper 18198 presented at the 63 rd Annual Technical Conference of the Society of Petroleum Engineers held in Houston, TX, October 2-5, 1988.
- [Clifton1991b] Clifton, R.J., Brown, U., Wang, J.-J. Modeling of Poroelastic Effects in Hydraulic Fracturing // SPE Paper 21871, 1991.
- [Commend2004] Commend, S., Truty, A., Zimmermann, Th. Stabilized finite elements applied to elastoplasticity: I. Mixed displacement–pressure formulation // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 193, pp. 3559–3586, 2004.
- [Commend2001] Commend, S. Stabilized Finite Elements in Geomechanics // PhD Dissertation 2391, Swiss Federal Institute of Technology (EPFL), Lausanne, 2001.
- [Constantinides2004] Constantinides, G., Ulm, F.J. Multi-scale poro-elastic properties of cement-based materials // FraMCoS-5 Vail (USA) at Vail, Colorado, USA. 2004.
- [Chopp1993] Chopp, D.L. Computing minimal surfaces via level-set curvature flow // Journal of Computational Physics, vol. 106, pp. 77–91. 1993.
- [Corner2003] Cornec, A., Scheider, I., Schwalbe, K.-H. On the practical application of the cohesive model // Engineering Fracture Mechanics, vol. 70, № 14, pp. 1963–1987, 2003.
- [Coussy2004] Coussy, O., 2004, Poromechanics, John Wiley & Sons. 312 pp., 2nd edition.
- [Dahm2000] Dahm, T. Numerical simulations of the propagation path and the arrest of fluid-filled fractures in the Earth // Geophysical Journal International, 141(3), 2000, 623–638.
- [Daneshy1978] Daneshy, A.A. Numerical solution of sand transport in hydraulic fracturing // Journal of Petroleum Technology, January 1978, pp.132-140 (SPE 5636). 1978.
- [Dassault2011] Dassault Systèmes. Abaqus 6.11 Online Documentation. Dassault Systèmes, Providence, Rhode Island. 2011.
- [Deckelnick2010] Deckelnick, K., Dziuk, G., Elliott, C.M, Heine, C.-J. An h -narrow band finite-element method for elliptic equations on implicit surfaces // IMA Journal of Numerical Analysis (2010) 30, pp. 351-376.
- [Demlow2007] Demlow, A., Dziuk, G. An adaptive finite element method for the Laplace–Beltrami operator on implicitly defined surfaces // SIAM J. Numer. Anal., 45, 421–442, 2007.
- [Detournay1991] Detournay, E., Cheng, A. H.-D. Plain Strain Analysis of a Stationary Hydraulic Fracture in a Poroelastic Medium // Int. J. Solid & Structures, vol. 27, No. 13, pp. 1645-1662, 1991.
- [Detournay1993] Detournay E., Cheng A.H.-D. Fundamentals of poroelasticity. Chapter 5 in Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects, Vol. II, Analysis and Design Method, ed. C. Fairhurst, Pergamon Press, 1993, pp. 113–171.
- [Detournay2003] Detournay, E., Garagash, D. The near-tip region of a fluid-driven fracture propagating in a permeable elastic solid // Fluid Mech., vol. 494, pp. 1–32. 2003.
- [Detournay2004] Detournay, E. Propagation regimes of fluid-driven fractures in impermeable rocks // Int. J. Geomechanics, 4(1):1–11, 2004.
- [Detournay2014] Detournay, E., Peirce, A. On the moving boundary conditions for a hydraulic

- fracture // International Journal of Engineering Science, 84 (2014), 147–155.
- [Desrouches1994] Desroches, J., Detournay, E., Lenoach, B., Papanastasiou, P., Pearson, J.R.A., Thiercelin, M., Cheng, A. The crack tip region in hydraulic fracturing // Proc. Roy. Soc. London, Series A, vol. 447, № 1929, pp. 39–48, 1994.
- [Dolbow2008] Dolbow J.E., Franca L.P. Residual-free bubbles for embedded Dirichlet problems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 2008; 197:3751–3759.
- [Dolbow2009] Dolbow, J., Harari, I. An efficient finite element method for embedded interface problems // International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 78, № 2, pp. 229–252, 2009.
- [Dziuk1988] Dziuk, G. Finite elements for the Beltrami operator on arbitrary surfaces. Partial Differential Equations and Calculus of Variations (S. Hildebrandt & R. Leis eds). Lecture Notes in Mathematics, vol. 1357. Berlin: Springer, pp. 142–155.
- [Dziuk2007a] Dziuk, G., Elliott, C.M. Finite elements on evolving surfaces // IMA J. Numer. Anal., 27, 262–292, 2007.
- [Dziuk2007b] Dziuk, G., Elliott, C.M. Surface finite elements for parabolic equations // J. Comput. Math., 25, 385–407, 2007.
- [Dziuk2008a] Dziuk, G., Elliott, C.M, Eulerian finite element method for parabolic PDEs on implicit surfaces // Interfaces and Free Boundaries 10 (2008), pp. 119–138.
- [Dziuk2010] Dziuk, G., Elliott, C.M. An Eulerian approach to transport and diffusion on evolving implicit surfaces // Comput Visual Sci (2010) 13:17–28.
- [Economides2000] Economides, M. (ed.) Reservoir stimulation. 3rd ed., Wiley and Son, 2000.
- [Eilks2008] Eilks, C., Elliott, C.M. Numerical simulation of dealloying by surface dissolution via the evolving surface finite element method // Journal of Computational Physics, 227, pp. 9727–9741. 2008.
- [Erdogan1963] Erdogan, F. Sih, G.C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear // J. Basic Eng. ASME 85 (1963) 519–527.
- [Ern2009] Ern, A., Meunier, S. A-posteriori error analysis of Euler-Galerkin approximations to coupled elliptic-parabolic problems // ESAIM: M2AN, 43(2):353–375, 2009.
- [Eshelby1970] Eshelby, J.D. Energy relations and the energy-momentum tensor in continuum mechanics // In: Kanninen M.F., Alder W.F., Rosenfield A.R., Joffe R.I. (eds), Inelastic behaviour of solids. N.-Y.: McGraw-Hill. pp. 77-115. 1970.
- [Eskin2008b] Eskin, D., Miller, M.J. A model of non-Newtonian slurry flow in a fracture // Powder Technology, V. 182, pp. 313-322. 2008.
- [Fabrikant1989] Fabrikant V.I. Applications of Potential Theory in Mechanics. Selection of New Results, Kluwer Academic, Dordrecht, 1989.
- [Fang2009] Fang H, Saad Y. Two classes of multiseant methods for nonlinear acceleration // Numerical Linear Algebra with Applications, 2009; 16:197–221.
- [Foot1984] Foot, R. Regularity if the distance function // Pproceedings of the American Mathematical Society, Volume 92, Number 1, pp. 153-155. 1984.
- [FRACPRO] FRACPRO fracture design and analysis software. 2015.
- [Freund1995] Freund, J., Stenberg, R. On weakly imposed boundary conditions for second-order problems // Proceedings of the Ninth Int. Conf. Finite Elements in Fluids, Venice, 1995. M. Morandi Cecchi *et al.*, Eds. pp. 327-336.
- [Fries2010] Fries, T.P., Belytschko, T. The extended/generalized finite element method: An

- overview of the method and its applications // *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 84, pp. 253–304, 2010.
- [Fries2011] Fries, T.P., Moës, N. (editors), Zilian, A. The extended finite element method, special issue // *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 86, pp. 403–666, 2011.
- [Ganine2013] Ganine V., Hills N.J., Lapworth B.L. Nonlinear acceleration of coupled fluid–structure transient thermal problems by Anderson mixing. // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2013; 71: 939–959.
- [Garagash2000] Garagash, D.I., Detournay, E., The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium // *ASME J. Appl. Mech.* 2000. 67 (1), 183–192.
- [Garagash2006] Garagash, D. Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture during injection and shut-in: Asymptotics of large toughness // *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 73, pp. 456–481, 2006.
- [Garagash2006a] Garagash, D.I. Propagation of a plane-strain fluid-driven fracture with a fluid lag: early-time solution // *Int. J. Solids Struct.* 43:5811–35. 2006.
- [Gasser2003] Gasser, T.C., Holzapfel, G.A. Geometrically non-linear and consistently linearized embedded strong discontinuity models for 3D problems with an application to the dissection analysis of soft biological tissues // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 192, pp. 5059–5098, 2003.
- [Gerstenberger2010] Gerstenberger, A. An X-FEM based fixed-grid approach to fluid-structure interaction // *Technischen Universität Munchen*, 201 pp., 2010
- [gohfer2012] GOHFER // 2012, <http://www.gohfer.com/>
- [Glowinski1994] Glowinski, R., Pan, T.-W., Periaux, J. A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 111, Issues 3–4, 1994, pp. 283-303.
- [Gordeliy2011] Gordeliy, E., Detournay, E. A fixed grid algorithm for simulating the propagation of a shallow hydraulic fracture with a fluid lag // *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 2011; 35:602–629
- [Gordeliy2013] Gordeliy, E., Peirce, A. Coupling schemes for modeling hydraulic fracture propagation using the X-FEM // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 253 (2013) 305–322.
- [Gordeliy2013a] Gordeliy, E., Peirce, A. Implicit level set schemes for modeling hydraulic fractures using the X-FEM // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 266 (2013) 125–143
- [Gordeliy2015] Gordeliy, E., Peirce, A. Enrichment strategies and convergence properties of the X-FEM for hydraulic fracture problems // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 283 (2015) 474–502
- [Gozs1998] Gosz, M., Dolbow, J., Moran, B. Domain integral formulation for stress intensity factor computation along curved three-dimensional interface cracks // *International Journal of Solids and Structures*, V. 35, pp. 1763–1783, 1998.
- [Gozs2001] Gosz, M., Moran, B. An interaction energy integral method for the computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions // *Engineering Fracture Mechanics*, 2001.
- [Gravouil2002] Gravouil, A., Moës, N., Belytschko, T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets — Part II: Level set update // *Int. J. Num. Meth. Eng.* vol. 53, issue 11. pp. 2569-2586. 2002.

- [Greer2006a] Greer, J.B. An Improvement of a Recent Eulerian Method for Solving PDEs on General Geometries // Journal of Scientific Computing, Vol. 29, No. 3, 2006.
- [Greer2006b] Greer, J.B., Bertozzi, A.L., Sapiro, G. Fourth order partial differential equations on general geometries // Journal of Computational Physics 216 (2006) 216–246.
- [Griffith1920] Griffith, A.A. The phenomena of rupture and flow in solids // Phil. Tran. Ser. 1920. A 221. pp. 163–189.
- [Griffith1924] Griffith, A.A. The Theory of Rupture // Proc. of First Int. Congress of Applied Mechanics. Delft (1924).
- [Geertsma1969] Geertsma, J. and de Klerk, F. A Rapid Method of Predicting Width and Extent of Hydraulic Induced Fractures, paper SPE 2458, Journal of Petroleum Technology (December 1969) 21, 1571–1581.
- [Haftbaradaran2014] Haftbaradaran, H., Qu J. A Path-Independent Integral for Fracture of Solids Under Combined Electrochemical and Mechanical Loadings // J. Mech. Phys. Solids. 2014. 71. pp. 1–14.
- [Haga2012] Haga, J. B., Osnes, H., Langtangen, H.P. On the causes of pressure oscillations in low-permeable and low-compressible porous media // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, vol. 36, issue 12, pp. 1507-1522, 2012.
- [Hansbo2002] Hansbo, A., Hansbo, P. An unfitted finite element method, based on Nitsche’s method, for elliptic interface problems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 191, № 47-48, pp. 5537–5552, 2002.
- [Hansbo2004] Hansbo, A., Hansbo, P. A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 193, № 33-35, pp. 3523–3540, 2004.
- [Hashin1963] Hashin, Z., Shtrikman, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids vol. 11, iss. 2, 1963, pp. 127-140.
- [Hautefeuille2012] Hautefeuille, M., Annavarapu, C. Dolbow, J.E. Robust imposition of Dirichlet boundary conditions on embedded surfaces // Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 90, pp. 40–64, 2012.
- [Helnwein2001] Helnwein, P. Some Remarks on the Compressed Matrix Representation of Symmetric Second-Order and Fourth-Order Tensors // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190(22–23), pp. 2753–2770, 2001.
- [HFfrac3d] Борисов В.Е., Иванов А.В., Савенков Е.Б. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019666240 от 6.11.2019 «Программный комплекс HFfrac3D для анализа процесса гидроразрыва пласта в расширенной постановке».
- [HFfrac3d++] Борисов В.Е., Зипунова Е.В., Иванов А.В., Критский Б.В., Савенков Е.Б. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019666497 от 11.12.2019 г. «Программный комплекс HFfrac3D++ для анализа процесса гидроразрыва пласта в рамках расширенной постановки на высокопроизводительных вычислительных системах».
- [Hinton1976] Hinton, E., Rock, T., Zienkiewicz, O. C. A note on mass lumping and related processes in finite element method // Earthquake engineering and structural dynamics, vol. 4 (1976), pp. 245-249.
- [Hosseinia2015] Hosseini, B., Nigam, N., Stockie, J., On regularizations of the Dirac delta

- distribution // Journal of Computational Physics, Volume 305, 15 January 2016, pp. 423-447.
- [Irwin1948] Irwin G.R. Fracture dynamics // Fracturing of metals. Cleveland, OH, USA: ASM. 1948. pp. 147–166.
- [Irwin1956a] Irwin G.R. Onset of fast crack propagation in the high strength steel and aluminum alloys // Sagamore research conference proceedings. 1956. 2. pp. 289–305.
- [Irwin1956b] Irwin G.R. Onset of fast crack propagation in the high strength steel and aluminum alloys // Interim rept., Naval Research Lab., Washington DC, 1956, 23 pp.
- [Johnson2009] Johnson, S.M., Morris, J.P. Modeling hydraulic fracturing for carbon sequestration applications // The 43rd US Rock Mechanics Symposium and the 4th US-Canada Rock Mechanics Symposium, Asheville, NC, ARMA paper № 09-30, 2009.
- [Juntunen2009] Juntunen, M., Stenberg, R. Nitsche’s method for general boundary conditions // Math. Comp. 78(267), 1353–1374 (2009).
- [Kachanov2003] Kachanov M., Shafiro B., Tsukrov Ig. Handbook of Elasticity Solutions // Springer Science + Business Media, B.V., 2003.
- [Kahar1989] Kahar, D., Moler, C., S. Nash, Numerical methods and software. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. 1989.
- [Каракин2017] Каракин А.В., Рамазанов М.М., Борисов В.Е., Меньшов И.С., Савенков Е.Б. Автомодельное решение задачи о трещине гидроразрыва пласта для пороупругой среды // Математическое моделирование, 2017, т.29, № 4, с. 59 – 74.
- [Karihaloo2003] Karihaloo, B.L., Xiao, Q.Z. Modelling of stationary and growing cracks in FE framework without remeshing: a state-of-the-art review // Computers & Structures, vol. 81, pp. 119-129, 2003.
- [Khoei2011] Khoei, A.R., Haghghat, E. Extended finite element modeling of deformable porous media with arbitrary interfaces // Applied Mathematical Modelling, vol. 35, pp. 5426–5441, 2011.
- [Khristianovich1955] Khristianovich, S.A. and Zheltov, Y.P. Formation of Vertical Fractures by Means of Highly Viscous Liquid, Proc., Fourth World Pet. Congress, Rome (1955) 2, 579–586.
- [Khristianovich1959] Khristianovich, S.A., Zheltov, Y.P., Barenblatt, G.I. and Maximovich, G.K. Theoretical Principles of Hydraulic Fracturing of Oil Strata, Proc., Fifth World Petroleum Congress, New York (1959).
- [Kim2009] Kim, J., Tchelepi, H. A., Juanes, R. Stability, Accuracy and Efficiency of Sequential Methods for Coupled Flow and Geomechanics // SPE Paper 119084, 2009.
- [Kim2010] Kim, J. Sequential Methods for Coupled Geomechanics and Multiphase Flow // PhD Thesis, Stanford University, 274 pp., 2010.
- [Kita1995] Kita, E., Kamiya, N. Subregion boundary element method // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts vol. 32 issue 4 June, 1995. p. 166A-167A.
- [Kovalyshen2010] Kovalyshen, Y. Fluid-Driven Fracture in Poroelastic Medium // PhD Thesis, University of Minnesota, 2010.
- [Krantz1981] Krantz, S.G., Parks, H.R. Distance to C^k Hypersurfaces // Journal of Differential Equations, 40, pp. 116-120. 1981.
- [Krantz1999] Steven G. Krantz, Harold R. Parks The Geometry of Domains in Space. Birkhäuser

- Advanced Texts Basler Lehrbücher), 1999th Edition. Birkhäuser, 308 pp.
- [Kresse2013] Kresse, O., Weng, X., Gu, H., Wu, R., Numerical Modeling of Hydraulic Fractures Interaction in Complex Naturally Fractured Formations // *Rock Mech Rock Eng* (2013) 46:555–568.
- [Kublik2016] Kublik, C., Tsai, R., Integration over curves and surfaces defined by the closest point mapping // *Res. Math. Sci.* 3 (2016), Paper No. 3, 17.
- [Kublik2018] Kublik, C., Tsai, R. An extrapolative approach to integration over hypersurfaces in the level set framework // *Math. Comp.* 87 (2018), 2365-2392.
- [Kuske1974] Kuske, A, G. Robertson, Photoelastic stress analysis. John Wiley & Sons, London. 1974.
- [Kusmierczyk2013] Kusmierczyk, P., Mishuris, G., Wrobel, M. Remarks on application of different variables for the PKN model of hydrofracturing. Various fluid-flow regimes // *International Journal of Fracture*, 2013, Volume 184, Issue 1, pp. 185–213.
- [Lecampion2013] Lecampion, B., Peirce, A., Detournay, E., Zhang, X., Chen, Z., Bunger, A. The impact of the near-tip logic on the accuracy and convergence rate of hydraulic fracture simulators compared to reference solutions. In A. P. Bunger, J. McLennan, & R. Jeffrey (Eds.) // *Effective and sustainable hydraulic fracturing* (pp. 855–873). Rijeka, Croatia: InTech.
- [Lehrenfeld2019] Lehrenfeld, C., Olshanskii, M. An Eulerian finite element method for pdes in time-dependent domains // *ESAIM: M2AN*, 53(2):585–614, 2019.
- [Lervag2014] Lervag, K.Y., Lowengrub, J. Analysis of the diffuse-domain method for solving PDEs in complex geometries // *arXiv preprint arXiv:1407.7480*, 2014.
- [Liang2013] Liang, J., Zhao, H. Solving Partial Differential Equations on Point Clouds // *Article in SIAM Journal on Scientific Computing* 35(3), 2013.
- [Lewis1993] Lewis, R.W., Sukirman, Y. Finite Element Modelling of Three-Phase Flow in Deforming Saturated Reservoirs // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 17, pp. 577-598, 1993.
- [Lewis1998] Lewis, R.W., Schrefler, B.A. *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation in Porous Media*. J. Wiley, Chichester, 2nd ed., 1998.
- [Li2014] Li, X., Lowengrub, J, Rätz, A., Voigt, A. Solving PDEs in complex geometries: a diffuse domain approach // *Communications in Mathematical Sciences*, 7(1):81, 2009.
- [Linkov2011a] Linkov, A.M. Speed Equation and Its Application for Solving Ill-Posed Problems of Hydraulic Fracturing // *Doklady Physics*, 2011, Vol. 56, No. 8, pp. 436–438.
- [Linkov2011b] Linkov, A.M. On Numerical Simulation of Hydraulic Fracturing // *Proc. XXXVIII Summer SchoolConference, Advanced Problems in Mechanics*, Repino, St. Petersburg, 2011, 291–296.
- [Linkov2011d] Linkov, A.M. Use of a speed equation for numerical simulation of hydraulic fractures // *arXiv preprint arXiv:1108.6146* (2011)
- [Linkov2012a] Linkov, A.M. On efficient simulation of hydraulic fracturing in terms of particle velocity // *International Journal of Engineering Science*, 52 (2012), 77–88
- [Linkov2012b] Linkov, A.M., Numerical Modeling of Hydraulic Fractures: State of Art and New Results // *Proc. XL Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics, APM 2012”*, Institute for Problems of Mechanical Engineering, RAS, CD-ROM, 2012
- [Linkov2013c] Linkov, A.M., Mishuris, G. Modified Formulation, ε -Regularization and the

- Efficient Solution of Hydraulic Fracture Problems // Effective and Sustainable Hydraulic Fracturing, 2013.
- [Linkov2014] Linkov, A.M. Solution of hydraulic fracture problem accounting for lag // arXiv preprint arXiv:1404.5246 (2014)
- [Linkov2015] Linkov, A. M. Particle velocity, speed equation and universal asymptotics for efficient modelling of hydraulic fracturing // Прикладная математика и механика, 2015, том 79, № 1, с. 74–89.
- [Lipnikov2013] Lipnikov, K., Svyatskiy, D., Vassilevski, Yu. Anderson Acceleration for Nonlinear Finite Volume Scheme for Advection-Diffusion Problems // SIAM Journal on Scientific Computing, 2013, Vol. 35, No. 2: pp. A1120–A1136.
- [Lutz1991] Lutz, E.E. Numerical methods for hypersingular and near-singular boundary integrals in fracture mechanics // PhD Thesis, Cornell University, Stanford, CA, (1991).
- [Maccaferri2010] Maccaferri, F. Bonafede, M. Rivalta, E. A numerical model of dyke propagation in layered elastic media // Geophysical Journal International, 180(3), 2010, 1107–1123.
- [Macdonald2008] Macdonald C.B., Ruuth S.J. Level set equations on surfaces via the Closest Point Method // J. Sci. Comput., 35 (2008), pp. 219–240.
- [Macdonald2009] Macdonald C.B., Ruuth S.J. The implicit Closest Point Method for the numerical solution of partial differential equations on surfaces // SIAM J. Sci. Comput., 31 (2009), pp. 4330–4350.
- [Macdonald2011] Macdonald C.B., Brandman J., Ruuth S.J. Solving eigenvalue problems on curved surfaces using the Closest Point Method // J. Comput. Phys., 230 (2011), pp. 7944–7956.
- [Macdonald2013] Macdonald, C., Merriman, B., Ruuth, S. Simple computation of reaction-diffusion processes on point clouds // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 110. 2013.
- [Mandel1953] Mandel J. Consolidation des sols (étude mathématique) // Gbotechnique, 1953, pp. 287–299.
- [März2012] März T., Macdonald C.B. Calculus on surfaces with general closest point functions // SIAM J. Numer. Anal., Vol. 50, No. 6, pp. 3303–3328.
- [Maury2001] Maury, B. A fat boundary method for the Poisson problem in a domain with holes // Journal of Scientific Computing, 16(3):319–339, 2001.
- [Merriman2007] Merriman, B., Ruuth, S.J. Diffusion generated motion of curves on surfaces // Journal of Computational Physics, 225 (2007) pp. 2267–2282.
- [Meschke2011a] Meschke, G. Grasberger, S., Becker, C., Jox, S. Smearred Crack and X-FEM Models in the Context of Poromechanics // G. Hofstetter et al. (eds.), Numerical Modeling of Concrete Cracking, CISM, Udine, pp. 265–327, 2011. 265–327
- [Meschke2011b] Meschke, G., Leonhart, D., Timothy, J.J., Zhou, M.-M. Computational mechanics of multiphase materials — modeling strategies at different scales // Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, vol. 18, pp. 73–89, 2011.
- [mfrac2012] MFrac // 2012, <http://www.mfrac.com/>
- [Mishuris2012] Mishuris G., Wrobel M., Linkov A. On modeling hydraulic fracture in proper variables: stiffness, accuracy, sensitivity //arXiv preprint arXiv:1203.5691 (2012).
- [Moës2002] Moës, N., Gravouil, A., Belytschko, T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets—Part I: Mechanical model // Int. J. Numer. Meth. Engng 2002;

- [Moës2006] Moës, N., Béchet, E., Tourbier, M. Imposing essential boundary conditions in the extended finite element method // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 67, pp. 1641–1669, 2006.
- [Moës1999] Moës, N., Dolbow, J., Belytschko, T. A finite element method for crack growth without remeshing // *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 46, pp. 131–150, 1999.
- [Mohammadnejad2012] Mohammadnejad, T., Khoei, A.R. An extended finite element method for fluid flow in partially saturated porous media with weak discontinuities: the convergence analysis of local enrichment strategies // *Comput. Mech.*, 19 pp., 2012.
- [Moran1987] Moran B, Shih C. Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance // *Engineering Fracture Mechanics*, V. 127, pp. 615– 642, 1987.
- [Mourad2007] Mourad, H.M., Dolbow, J., Harari, I. A bubble-stabilized finite element method for Dirichlet constraints on embedded interfaces // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 69, № 4, pp. 772–793, 2007.
- [Murad1992] Murad, M.A., Loula, F.D. Improved accuracy in finite element analysis of Biot’s consolidation problem // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Volume 95, Issue 3, pp. 359–382. 1992.
- [Murad1994] Murad, M.A., Loula, F.D. On stability and convergence of finite element approximations of Biot’s consolidation problem // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Volume 37, Issue 4, pp. 645–667. 1994.
- [Murad1996] Murad, M.A., Thomee, V., Loula, A.F.D. Asymptotic Behavior of Semidiscrete Finite-Element Approximations of Biot’s Consolidation Problem // *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 33, No. 3, 1996, pp. 1065-1083.
- [Nguen2017] Nguyen, L.H., Stoter, S.K.F., Ruess, M., Uribe, M.A.S., Schillinger, D. The diffuse Nitsche method: Dirichlet constraints on phase-field boundaries // *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 113, issue 4, 2018. pp. 601-633.
- [Nitsche1971] Nitsche, J. Ueber ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind // *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 36:9–15, 1971.
- [Noorishad1982] Noorishad, J., Ayatollahi, M.S., Witherspoon, P.A. A Finite-Element Method for Coupled Stress and Fluid Flow Analysis in Fractured Rock Masses // *J. Rock Mech. Min. Sol & Geomech.*, Vol. 19. pp. 185-193, 1982.
- [Nordgren1972] Nordgren, R.P. Propagation of a Vertical Hydraulic Fracture // SPE paper 7834, SPE Journal (August 1972) 12, No. 8, pp. 306–314.
- [Novotny1977] Novotny E.J. Proppant transport // SPE paper 6813 presented at the 52 nd Annual Fall Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers of AIME held in Denver, Colorado, October 9-12. 1977.
- [Oliver1999] Oliver, J., Cervera, M. Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach // *Int. J. Plasticity*, vol. 15, pp. 319–351, 1999.
- [Olshanskii2009] Olshanskii, M.A., Reusken, A., Grande, J. A finite Element Method for Elliptic Equations on Surfaces // *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 47, No. 5, pp. 3339–3358, 2009.
- [Olshanskii2009a] Olshanskii, M. Reusken, A. A finite element method for surface PDEs: matrix properties // *Numer. Math.*, 114:491–520, 2009.
- [Olshanskii2012] Olshanskii, M.A., Reusken, A., Xu, X. A Volume Mesh Finite Element Method

- for PDEs on Surfaces // European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012) J. Eberhardsteiner et.al. (eds.) Vienna, Austria, September 10-14, 2012.
- [Osher2002] Osher, S. J., Fedkiw, R.P. Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces. Springer-Verlag. 2002.
- [Paris1963] Paris, P., Erdogan, F. A Critical Analysis of Crack Propagation Laws // J. Basic Eng. Dec 1963, 85(4): 528-533.
- [Peirce2008] Peirce, A.P., Detournay, E. An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2008, 197, 2858–2885.
- [Peirce2014] Peirce, A., Bungler, A. Interference Fracturing: Nonuniform Distributions of Perforation Clusters That Promote Simultaneous Growth of Multiple Hydraulic Fractures // SPE-172500-PA paper. SPE Journal, vol. 20, iss. 02, 2015.
- [Peirce2015] Peirce, A.P. Modeling multi-scale processes in hydraulic fracture propagation using the implicit level set algorithm // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2015, 283, 881–908.
- [Peng1999] Peng, D., Merriman, B., Osher, S., Zhao, H., Kang, M. A PDE-based fast local level set method // Journal of Computational Physics, vol. 155, pp. 410 – 438, 1999.
- [Peng2009] Peng N. Anderson acceleration of fixed-point iteration with applications to electronic structure computations // PhD Thesis, Worcester Polytechnic Institute, 2009.
- [Perkins1961] Perkins T.K. and Kern L.R. Widths of Hydraulic Fractures, paper SPE 89, Journal of Petroleum Technology (September 1961) 13, No. 9, pp. 937–949.
- [Philips2005] Philips, B.A. Finite Element Methods in Linear Poroelasticity: Theoretical and Computational Results // PhD Thesis, The University of Texas at Austin, 284 pp., 2005.
- [Philips2009] Phillips, P.J., Wheeler, M.F. Overcoming the problem of locking in linear elasticity and poroelasticity: an heuristic approach // Comput. Geosci., vol. 13, pp. 5–12, 2009.
- [Preisig201] Preisig, M., Průst, J.H. Stabilization procedures in coupled poromechanics problems: A critical assessment // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech, vol. 35, pp. 1207–1225, 2011.
- [Rajapakse1995] Rajapakse, R., Senjuntichai, T., An indirect boundary integral equation method for poroelasticity // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics vol. 19, issue 9, pp. 587–614, 1995.
- [Ramazanov2018] Ramazanov, M., Borisov, V., Kritsky, B., Savenkov, E. Fracture growth criterion for poroelastic media // AIP Conference Proceedings, 2018, 2051, 020250. 2018.
- [Ramière2007] Ramière, I., Angot, P., Belliard, M. A fictitious domain approach with spread interface for elliptic problems with general boundary conditions // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196:766–781, 2007.
- [Ratz2006] Ratz, A., Voigt, A. PDEs on Surfaces: A Diffuse Interface Approach // Comm. Math.Sci., Vol. 4, No. 3, pp. 575–590, 2006.
- [Rice1968] Rice, J.R. A Path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // Journal of Applied Mechanics, 35, 379-386. 1968.
- [Rice1968b] Rice, J.R. Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture // Chapter 3 of “Fracture: An Advanced Treatise”. Vol. 2, Mathematical Fundamentals. Ed. H. Liebowitz, Academic Press, N.Y., 1968 , pp. 191-311.
- [Rice1976] Rice, J.R., Cleary, M.P. Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic

- porous media with compressible constituents // *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 14, pp. 227-241. 1976
- [Roegires1983] Roegiers, J.-C., Ishijima, Y., A coupled fracturing model and its application to hydraulic fracturing // *SPE Paper № 12311-MS*, 1983.
- [Rubin1995] Rubin, A.M. Propagation of magma-filled cracks // *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, vol. 23, pp. 287-336. 1995.
- [Ruuth2008] Ruuth, S.J., Merriman, B. A simple embedding method for solving partial differential equations on surfaces // *Journal of Computational Physics*, 227, pp. 1943–1961. 2008.
- [Saad2003] Saad Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. — SIAM, 2003.
- [Savitsky2004] Savitski, A., Detournay, E. Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions // *Int. J. Solids Struct.*, 39:6311–6337, 2002.
- [Schlottbom2016] Schlottbom, M. Error analysis of a diffuse interface method for elliptic problems with Dirichlet boundary conditions // *Applied Numerical Mathematics* 109 (2016) pp. 109–122.
- [Sethian1999] Sethian, J. A. *Level Set Methods and Fast Marching Methods : Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge University Press. 1999.
- [Shih1986] Shih, C.F., Moran, B., Nakamura, T. Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body // *International Journal of Fracture*, Vol. 30, No. 2, 1986, pp. 79-102.
- [Showalter2000] Showalter, R.E. Diffusion in Poro-Elastic Media // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 251, № 1, pp. 310–340, 2000.
- [Sih1974] Sih, G.C. Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems // *International Journal of Fracture*, V. 10, № 3, pp. 305-321. 1974.
- [Simo1990] Simo, J.C., Rifai, M.S. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes // *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 29, pp. 1595–1638, 1990.
- [Simo1994] Simo, J.C., Oliver, J. A new approach to the analysis and simulation of strain softening in solids // in: Z.P. Bazant, Z. Bittnar, M. Jirasek, J. Mazars (Eds.), *Fracture and Damage in Quasibrittle Structures: Proceedings of the US–Europe Workshop on Fracture and Damage in Quasibrittle Structures*, E&FN Spon, London, pp. 25–39, 1994.
- [Stenberg1995] Stenberg, R. On some techniques for approximating boundary conditions in the finite element method // *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 63, № 1-3, pp. 139–148, 1995.
- [Stolarska2001] Stolarska M., Chopp D., Moës N., Belytschko T. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method // *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* 2001; 51:943–960.
- [Sukumar2001] Sukumar, N., Chopp, D.L., Moës, N., Belytschko, T. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190 (2001) pp. 6183-6200.
- [Sun2012] Sun, C.T., Jin, Z.H. *Fracture mechanics*. Waltham, MA: Academic Press, 2012.
- [Trimonova2017] Trimonova M., Baryshnikov N., Zenchenko E., Zenchenko P., Turuntaev S. The Study of the Unstable Fracure Propagation in the Injection Well: Numerical and Laboratory Modeling // *Society of Petroleum Engineers*, 2017, October 16. Conference paper. 187822-MS.

- [Trimonova2018] Trimonova M., Baryshnikov N., Zenchenko E., Zenchenko P., Turuntaev S., Aigozhieva A. Estimation of the Hydraulic Fracture Propagation Rate in the Laboratory Experiment // Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes. 2018.
- [Truty2006] Truty, A., Zimmermann, Th. Stabilized mixed finite element formulations for materially nonlinear partially saturated two-phase media // Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., Vol. 195, pp. 1517-1546, 2006.
- [Terzaghi1996] Terzaghi K. Soil mechanics in engineering practice. John Wiley & Sons, 1996.
- [Toth2015] Toth, A., Kelley, C.T. Convergence Analysis for Anderson Acceleration // SIAM Journal on Numerical Analysis, 03/2015; 53(2):805–819.
- [Ulmishek2003] Ulmishek, G.F. Petroleum Geology and Resources of the West Siberian Basin, Russia. U.S. Geological Survey Bulletin (2201-G). 2003.
- [Utku1982] Utku, M., Carey, G.F. Boundary penalty techniques // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Vol. 30, Issue 1, April 1982, pp. 103-118.
- [Ventura2003] Ventura, G., Budyn, E., Belytschko, T. Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements // Int. J. Numer. Meth. Engng 2003; 58:1571–1592.
- [Vermeer1981] Vermeer, P.A., Verruijt, A. An Accuracy condition for Consolidation by Finite Elements // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, vol. 5, pp. 1-14, 1981.
- [Walker2009] Walker H., Peng, Ni. Anderson acceleration for fixed-point iterations // Technical Report MS-9-21-45, Worcester Polytechnique Institute, Mathematical Sciences Department, 2009. Submitted to SIAM Journal of Numerical Analysis.
- [Walters2004] Walters M.C., Paulino G.H., Dodds R.H. Stress-intensity factors for surface cracks in functionally graded materials under mode-I thermomechanical loading // International Journal of Solids and Structures. 2004. 41. P. 1081–1118.
- [Walters2005] Walters, M. C., Paulino, G. H. Interaction integral procedures for 3-D curved cracks including surface tractions // Engineering Fracture Mechanics. 2005.
- [Wan2002] Wan, J. Stabilized Finite Element Method for Coupled Geomechanics and Multiphase Flow // PhD Thesis, Stanford Univeristy, 180 pp. 2002.
- [Wang2000] Wang H.F. Theory of Linear Poroelasticity, Princeton University Press, 2000.
- [Warpinski1993] Warpinski, N., Abou-Sayed, I.S., Moschovidis, Z., Parker, C. Hydraulic fracture model comparison study : complete results : topical report // Sandia National Laboratories report GRI93/0109. 1993.
- [Warpinski1994] Warpinski, N., Abou-Sayed, I.S., Moschovidis, Z., Parker, C. Comparison study of hydraulic fracturing models — Test Case: GRI Staged Field Experiment No. 3 // SPE Production & Facilities, February 1994.
- [Weber2016] Weber, N. The X-FEM for Hydraulic Fracture Mechanics // PhD Thesis, Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule, Aachen, 2016, 149 pp.
- [Wells2001] Wells, G.N. Discontinuous modelling of strain localization and failure // PhD thesis, Delft University of Technology, Netherlands, 2001.
- [White2008] White, J.A., Borja, R.I. Stabilized low-order finite elements for coupled solid-deformation/fluid-diffusion and their application to fault zone transients // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 197, №. 49–50, pp. 4353–4366, 2008.
- [White2009] White, J.A. Stabilized Finite Element Methods for Coupled Flow and Geomechanics

- // PhD Thesis, Stanford University, 2009.
- [Wieners2003] Wieners, C. Taylor-Hood elements in 3D // Analysis and Simulation of Multifield Problems, Wolfgang L. Wendland, Messoud Efendiev, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol. 12, 381 pp., Springer, 2003.
- [Wrobel2015] Wrobel, M., Mishuris, G. Particle velocity based universal algorithm for numerical simulation of hydraulic fractures // arXiv preprint arXiv:1412.5529. 2015.
- [Wrobel2015a] Wrobel, M., Mishuris, G. Hydraulic fracture revisited: Particle velocity based simulation // International Journal of Engineering Science, vol. 94, pp. 23-58. 2015.
- [Xia2005] Xia, K., Masud, A. Stabilized Finite Elements For Computational Geomechanics // ARMA/USRMS Paper № 05-874, 2005.
- [Xia2009] Xia, K., Masud, A. A stabilized finite element formulation for finite deformation elastoplasticity in geomechanics // Computers and Geotechnics, vol. 36, pp. 396–405, 2009.
- [Xu2003] Xu, J.-J., Zhao, H.-K. An Eulerian formulation for solving partial differential equations along a moving interface // J. Sci. Comput., 19, 573–594, 2003.
- [Zahedi2010] Zahedi, S., Tornberg, A.-K. Delta function approximations in level set methods by distance function extension // Journal of Computational Physics 229 (2010) 2199–2219.
- [Zhang2005] Zhang X, Jeffrey R.G, Detournay E. Propagation of a hydraulic fracture parallel to a free surface // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2005, 29(13):1317–1340
- [Zienkiewicz2005] Zienkiewicz, O. C. Taylor, R. L. The Finite Element Method. Butterworth-Heinemann, 2005, 1872 pp.
- [Zipunova2020] E. Zipunova, A. Ivanov, E. Savenkov Application of the closest point projection method to solution of Reynold’s lubrication equations on evolving surfaces // Mathematica Montinsnigri, Vol. XLVII (2020).
- [Zheng2003] Zheng, Y., Burrige, R., Burns, D. Reservoir Simulation with the Finite Element Method Using Biot Poroelastic Approach // Earth Resources Laboratory Industry Consortia Annual Report 2003-11, Massachusetts Institute of Technology. Earth Resources Laboratory, 20 pp., 2003.
- [Zubkov2007] Zubkov, V.V., Koshelev, V.F., Linkov, M. Numerical Modelling of Hydraulic Fracture Initiation and Development // Journal of Mining Science, Vol. 43, No. 1, pp. 40-56, 2007.

Приложения

Приложение А

Тестовые расчеты

В настоящем разделе приведены примеры решения тестовых задач пороупругости. Их основное назначение — продемонстрировать возможности разработанной в диссертационной работе программной реализации.

Используемые ссылки на литературу приведены в общей библиографии к работе.

Всюду далее, если не оговорено обратное, параметры пороупругой среды соответствуют песчанику бережских месторождений [Detournay1993], насыщенному водой:

$\nu = 0.20$ – дренированный коэффициент Пуассона,

$\nu_u = 0.33$ – недренированный коэффициент Пуассона,

$B = 0.62$ – коэффициент Скемптона порового давления,

$b = 0.79$ – коэффициент Био,

$\varphi = 0.19$ – пористость пласта,

$M = 1.3 \times 10^{10}$ [Н/м²] – модуль Био,

$G = 6.0 \times 10^9$ [Н/м²] – модуль сдвига,

$E = 1.4 \times 10^{10}$ [Н/м²] – дренированный модуль Юнга,

$K = 8.0 \times 10^9$ [Н/м²] – дренированный объемный модуль сжатия,

$E_u = 1.6 \times 10^{10}$ [Н/м²] – недренированный модуль Юнга,

$K_u = 1.6 \times 10^{10}$ [Н/м²] – недренированный объемный модуль сжатия,

$k = 1.9 \times 10^2$ [мД] – коэффициент абсолютной проницаемости пласта,

$\mu = 1.0 \times 10^{-3}$ [Па·с] – вязкость флюида,

$\rho_f = 1.0 \times 10^3$ [кг/м³] – плотность флюида.

В настоящей работе в качестве первичных параметров используются E , ν , b , M , φ , k , μ , ρ_f . Остальные параметры, при необходимости, выражаются через них с помощью известных соотношений [Coussy2004]. Также полагается, что массовые силы отсутствуют.

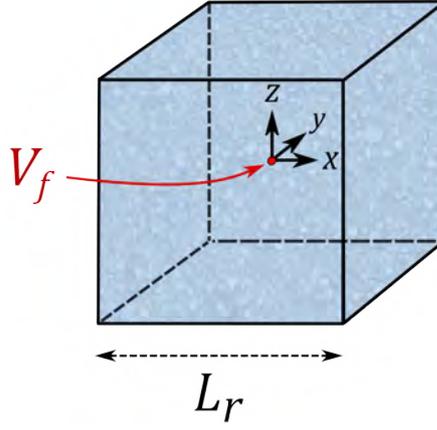


Рис. А.1. Схематичный вид задачи о мгновенном точечном источнике.

А.1 Задача о мгновенном точечном источнике

Данная задача является одной из простейших задач пороупругости, но представляет полезный тестовый пример. Рассмотрим бесконечную невозмущенную пороупругую среду. В начальный момент времени происходит впрыскивание флюида массы M_f с объемом $V_f = M_f/\rho_f$ в точку, расположенную в начале системы координат, что мгновенно приводит к деформации пороупругой среды. В такой постановке решение задачи обладает радиальной симметрией.

Аналитическое решение данной задачи записывается в виде [Coussy2004]:

$$p(r, t) = \frac{c_f V_f}{(4\pi c_f t)^{\frac{3}{2}} (k/\mu)} \exp\left(-\frac{r^2}{4c_f t}\right), \quad u_r(r, t) = \frac{3bM}{3K_u + 4\nu} \cdot \frac{V_f}{4\pi r^2} g\left(\frac{r}{\sqrt{c_f t}}\right), \quad (\text{A.1})$$

где

$$c_f = M \frac{k}{\mu} \cdot \frac{3K + 4\nu}{3K_u + 4\nu}, \quad g(\lambda) = \operatorname{erf}\left(\frac{\lambda}{2}\right) - \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right), \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\lambda^2} d\lambda. \quad (\text{A.2})$$

Для расчетов использовалась область в форме куба со стороной L_r , в центре которого расположен источник флюида. Схематично постановка задачи представлена на рис. А.1. Конкретные значения используемых для расчетов параметров приведены в табл. А.1. На границе расчетной области давление и перемещение задавались согласно точному решению (А.1). Аналогичным образом задавалось начальное распределение полей на момент времени t_{st} .

L_r	V_f	t_{st}	t_{end}	Δt
400.0 м	1.0 м ³	150.0 с	200.0 с	1.0 с

Таблица А.1. Параметры для численного расчета задачи о мгновенном точечном источнике.

В расчетах использовалась тетраэдральная сетка, состоящая из $N_n = 68921$ узлов и $N_e = 256000$ прямоугольных тетраэдров со сторонами $h_x = h_y = h_z = 1.0$ м.

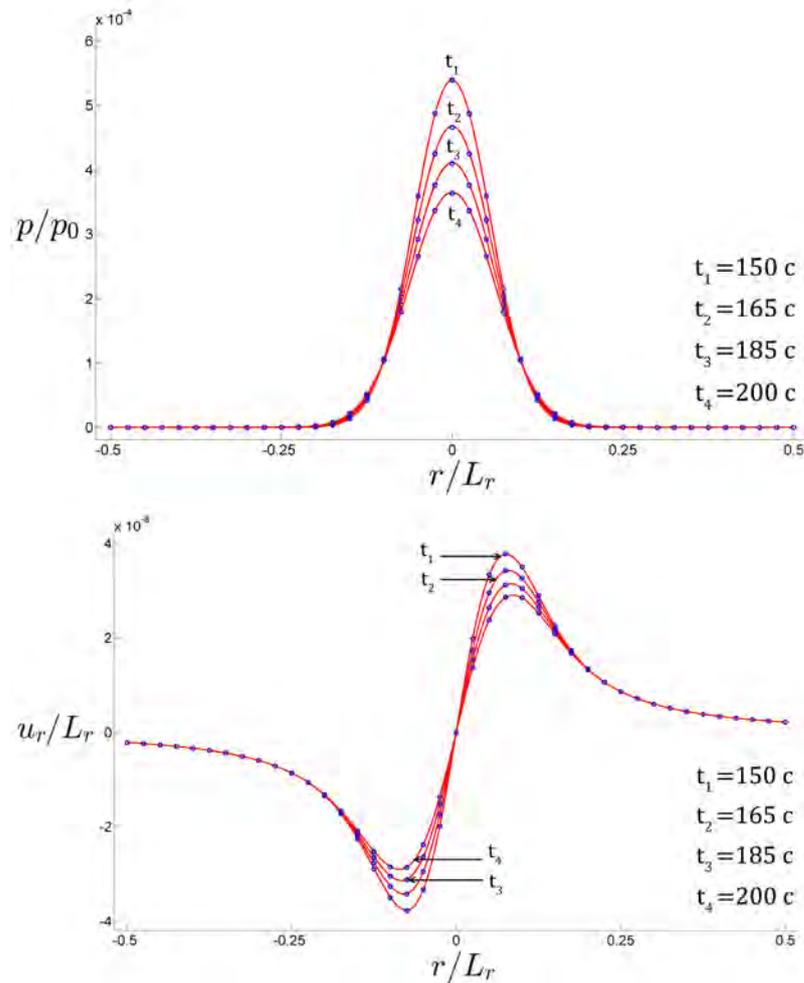


Рис. А.2. Задача о мгновенном точечном источнике. Нормированное давление (вверху) и перемещение (внизу) в различные моменты времени: красным цветом показано аналитическое решение, синим — результаты расчета.

В качестве величин для сравнения используются нормированные значения \bar{p} , \bar{u}_r :

$$\bar{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \bar{u}_r = \frac{u_r}{L_r}, \quad p_0 = \mu V_f / 2k. \quad (\text{A.3})$$

Результаты расчетов и точное решение приведены на рис. А.2, где показаны нормированные давления и перемещения в последовательные моменты времени $t = 150, 165, 185, 200$ с. Как видно из рисунков, получено хорошее совпадение с аналитическими результатами на все указанные моменты времени.

А.2 Задача о мгновенном линейном источнике

Задача о линейном источнике является простейшей моделью, описывающей скважину в пороупругой среде. Поэтому расчет этого теста является обязательной валидационной задачей для программных комплексов, моделирующих течения в пороупругих средах.

Задача ставится следующим образом: в бесконечной невозмущенной пороупругой среде в момент времени $t = 0$ с на некоторой линии происходит впрыскивание массы флюида

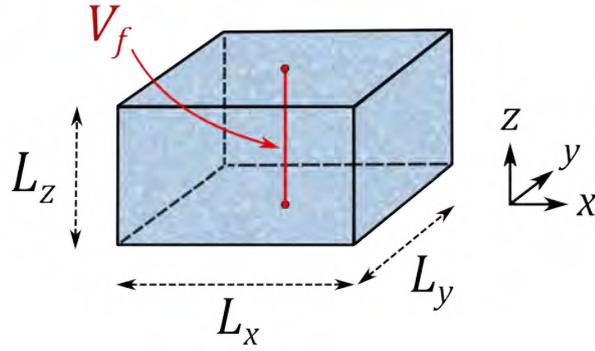


Рис. А.3. Схематичный вид задачи о мгновенном линейном источнике.

с линейной плотностью M_f объемом $V_f = M_f/\rho_f$, что мгновенно приводит к деформации попружной среды. В такой постановке решение задачи, очевидно, обладает радиальной симметрией.

Аналитическое решение задачи записывается следующим образом [Coussy2004]:

$$p(r, t) = \frac{V_f}{4\pi(k/\mu)t} \exp\left(-\frac{r^2}{4c_f t}\right), \quad u_r(r, t) = \frac{3bM}{3K_u + 4\nu} \cdot \frac{V_f}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4c_f t}\right)\right], \quad (\text{A.4})$$

где c_f определяется согласно формуле (А.2).

Для расчетов использовалась область с линейными размерами L_x , L_y , L_z , в центре которой располагался линейный источник, проходящий через точки с координатами $(0, 0, 0)$ и $(0, 0, L_z)$. Схематично постановка задачи представлена на рисунке А.3. Конкретные значения используемых для расчетов параметров приведены в табл. А.2.

На границе расчетной области перемещение задавалось согласно точному решению (А.4), для давления на всех границах использовалось условие нулевого потока $\partial p/\partial \mathbf{n} = 0$. Начальное распределение задавалось согласно аналитическому решению на момент времени t_{st} .

L_x	L_y	L_z	V_f	t_{st}	t_{end}	Δt
400.0 м	400.0 м	10.0 м	1.0 м ³	150.0 с	200.0 с	1.0 с

Таблица А.2. Параметры для численного расчета задачи о мгновенном линейном источнике.

В расчетах использовалась тетраэдральная сетка, состоящая из $N_n = 5043$ узлов и $N_e = 12800$ прямоугольных тетраэдров со сторонами $h_x = h_y = h_z = 1.0$ м.

В качестве величин для сравнения используются нормированные значения \bar{p} , \bar{u}_r , см. (А.3).

Результаты расчетов и точное решение приведены на рис. А.4 где показаны нормированные давления и перемещения в последовательные моменты времени $t = 150, 165, 185, 200$ с. Как видно из рисунков, получено хорошее совпадение с аналитическими результатами на все указанные моменты времени.

А.3 Задача о постоянном линейном источнике

На основе решения задачи о мгновенном линейном источнике в попружной среде путем суперпозиции решений можно получить решение для линейного постоянного источни-

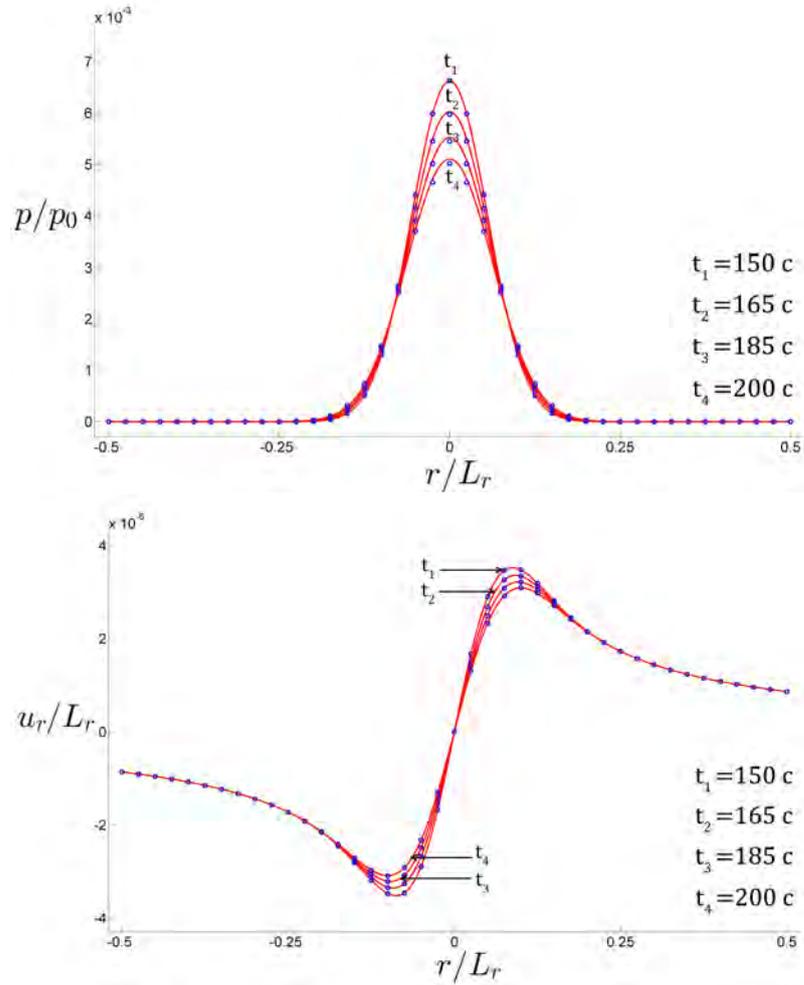


Рис. А.4. Задача о мгновенном линейном источнике. Нормированное давление (вверху) и перемещение (внизу) в различные моменты времени: красным цветом показано аналитическое решение, синим — результаты расчета.

ка [Wang2000]:

$$p(r, t) = \frac{V_f}{4\pi(k/\mu)} E_1\left(\frac{r^2}{4c_f t}\right), \quad E_1(u) = \int_0^{\frac{u}{\xi}} \frac{\exp(-\xi)}{\xi} d\xi, \quad (\text{A.5})$$

$$u_r(r, t) = \frac{3b}{(3K + 4\nu)(k/\mu)} \cdot \frac{V_f}{8\pi} r \cdot \left\{ \frac{4c_f t}{r^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4c_f t}\right) \right] + E_1\left(\frac{r^2}{4c_f t}\right) \right\}. \quad (\text{A.6})$$

В данных выражениях V_f имеет смысл объема жидкости, притекающего через источник в единицу времени.

Область, граничные условия и расчетная сетка брались аналогично таковым для задачи о мгновенном линейном источнике. Объем притока в единицу времени задавался как $V_f = 1\text{м}^3/\text{с}$. Расчет начинался с момента времени $t_{\text{st}} = 1000$ с, проводился с шагом $\Delta t = 100$ с до времени $t_{\text{end}} = 1800$ с.

Результаты расчетов приведены на рис. А.5, где показано распределение нормированного давления и перемещения в начальный и конечный моменты времени. Как видно из рисунков, получено приемлемое совпадение с аналитическими результатами.

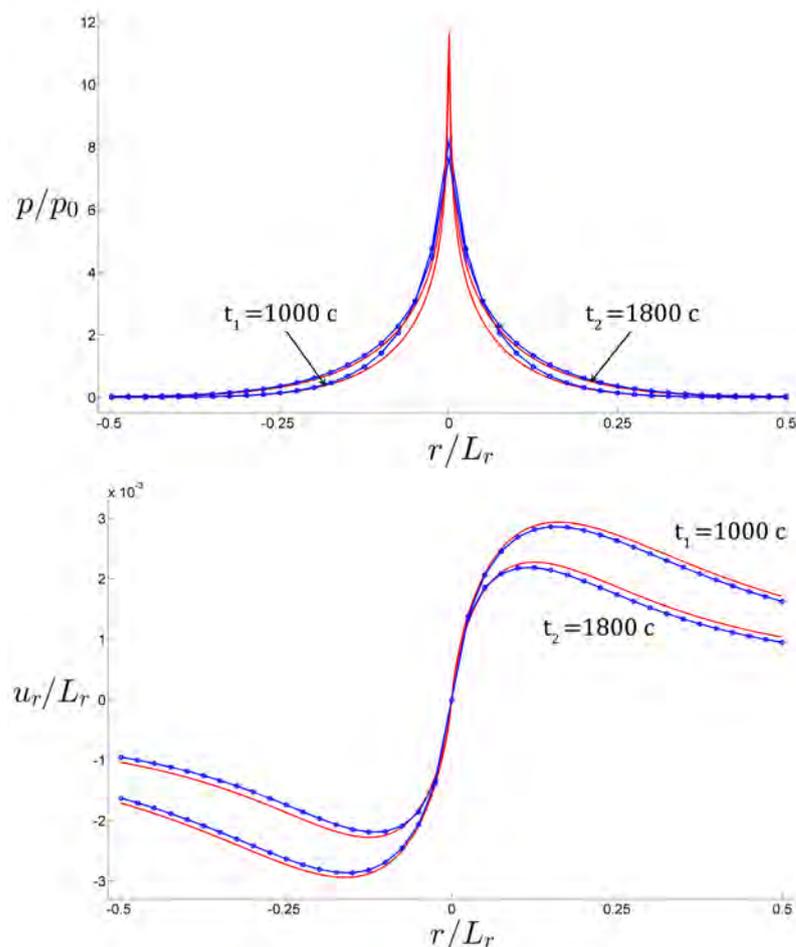


Рис. А.5. Задача о постоянном линейном источнике. Нормированное давление (вверху) и перемещение (внизу) в различные моменты времени: красным цветом показано аналитическое решение, синим — результаты расчета.

А.4 Задача консолидации Терцаги

Одной из классических задач пороупругости, для которых известно аналитическое решение, является одномерная задача консолидации Терцаги [Terzaghi1996].

Рассмотрим насыщенную пороупругую область с линейными размерами L_x , L_y , L_z . Верхняя граница резервуара имеет координату $z = 0$, нижняя — $z = L_z$. Нижняя и боковые границы являются непротекаемыми, при этом нижняя стенка закреплена, а боковые стенки могут деформироваться только в вертикальном направлении. Верхняя граница является проницаемой, к ней прикладывается сжимающее напряжение величиной $T_z = -T_0$, что приводит к деформации пороупругой среды. В такой постановке задача является одномерной, решение не зависит от x и y . Схематично постановка задачи представлена на рис. А.6.

Граничные условия в одномерной постановке ставятся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 z = 0 : \quad T_{zz}(0, t) = -T_0, \quad p(0, t) = 0, \\
 z = L_z : \quad u_z(L_z, t) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{A.7}$$

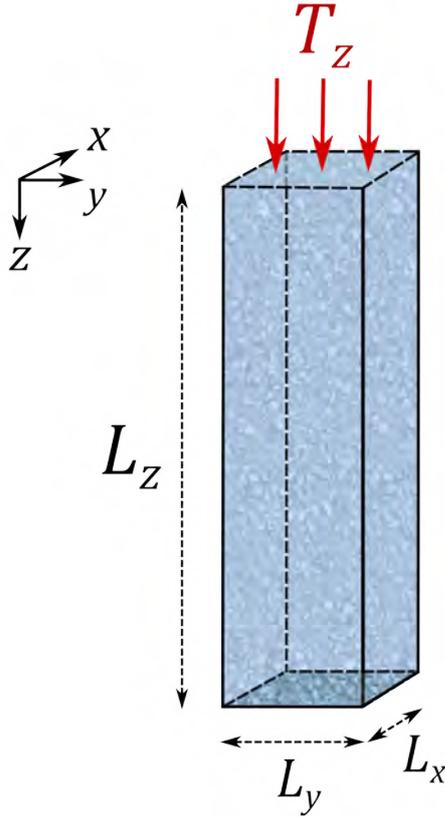


Рис. А.6. Схематичный вид задачи Терцаги.

Начальные условия после мгновенного нагружения задаются в виде

$$u_z(z, 0^+) \equiv u_0 = T_0(L_z - z)/K_v^{(u)}, \quad p(z, 0^+) \equiv p_0 = \gamma T_0. \quad (\text{A.8})$$

Аналитическое решение задачи может быть записано как [Wang2000]:

$$p(z, t) = p_0 - p_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[\operatorname{erfc} \frac{(2m+1)L_z - (z - L_z)}{\sqrt{4ct}} + \operatorname{erfc} \frac{(2m+1)L_z + (z - L_z)}{\sqrt{4ct}} \right], \quad (\text{A.9})$$

$$u_z(z, t) = u_0 + c_m \gamma T_0 \left[(L_z - z) - \frac{8L_z}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \times \right. \\ \left. \times \exp \left(\frac{-(2m+1)^2 \pi^2 ct}{4L_z^2} \right) \cdot \cos \left(\frac{(2m+1)\pi z}{2L_z} \right) \right]. \quad (\text{A.10})$$

Здесь

$$\gamma = \frac{B(1 + \nu_u)}{3(1 - \nu_u)}, \quad c_m \gamma = \frac{\nu_u - \nu}{2G(1 - \nu)(1 - \nu_u)}, \quad c = \frac{2kG(1 - \nu)(\nu_u - \nu)}{\mu b^2(1 - 2\nu)^2(1 - \nu_u)}, \quad K_v^{(u)} = \frac{2G(1 - \nu_u)}{1 - 2\nu_u}.$$

L_z	L_x	L_y	T_0	t_{st}	t_{end}	Δt
15.0 м	1.0 м	1.0 м	1.0 КПа	0.0 с	1500.0 с	1.0 с

Таблица А.3. Параметры для численного расчета задачи Терцаги.

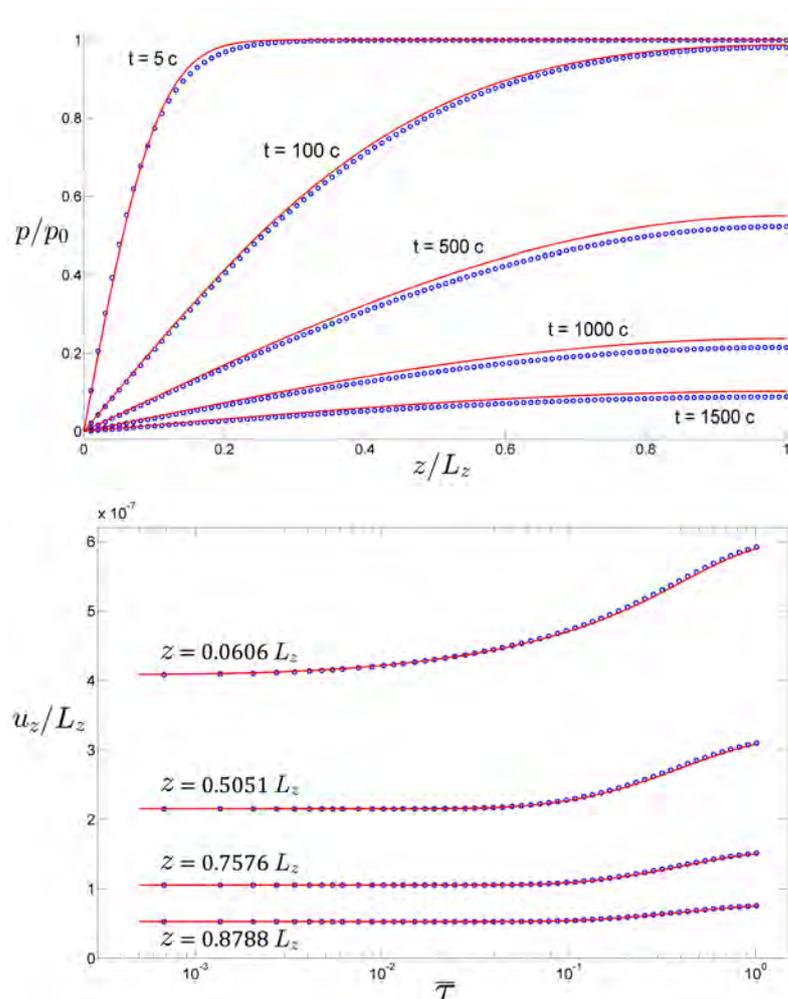


Рис. А.7. Задача консолидации Терцаги. Нормированное давление (вверху) и перемещение (внизу) в различные моменты времени: красным цветом показано аналитическое решение, синим — результаты расчета.

В качестве данных для сравнения используются нормированные значения \bar{p} и \bar{u}_z :

$$\bar{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \bar{u} = \frac{u_z}{L_z}, \quad \bar{z} = \frac{z}{L_z}, \quad \bar{\tau} = \frac{ct}{L_z^2}.$$

Конкретные значения используемых для расчетов параметров приведены в табл. А.3.

Для численных расчетов использовалась тетраэдральная сетка, состоящая из $N_n = 1600$ узлов и $N_e = 5346$ прямоугольных тетраэдров со сторонами $h_x = h_y = 0.3333$ м, $h_z = 0.1515$ м. В отличие от представленной выше постановки задачи и аналитического решения для нее при проведении расчетов в программном комплексе начало координат и ориентация оси Oz были выбраны другими. В силу этого при сравнении с аналитическим решением полученное численное решение при необходимости нормировалось соответствующим образом.

На рис. А.7 (вверху) показано распределение нормированного на начальную нагрузку p_0 давления p в зависимости от нормированной глубины z/L_z в последовательные моменты времени $t = 5, 100, 500, 1000, 1500$ с. Рис. А.7 (внизу) демонстрирует нормированное на высоту колонны L_z перемещение u_z в зависимости от безразмерного времени \bar{t} для нескольких выделенных глубин $z/L_z = 0.0606, 0.5051, 0.7576, 0.8788$. На обоих рисунках красным цветом показано соответствующее аналитическое решение, синим – результаты численного расчета, при этом данные для анализа брались в центральных точках области, равноудаленных от боковых границ резервуара. Как видно из представленных рисунков, расчеты продемонстрировали хорошее совпадение с аналитическими данными. Также в качестве иллюстрации на рис. А.8 приведены полученные в расчетах размерные распределения полей давления p и перемещения u_z в последовательные моменты времени $t = 100, 500, 1000, 1500$ с.

А.5 Задача Мандела

В работе [Mandel1953] приведен классический пример задачи с немонотонным поведением распределения порового давления по времени при недренированном нагружении в условиях плоских деформаций. В оригинальной постановке задача ставилась следующим образом. Рассматривалась насыщенная пороупругая среда с линейными размерами $2a \times 2b$, зажата между двумя жесткими непроницаемыми пластинами. В начальный момент времени на пластины мгновенно начинала действовать сжимающая сила $F = -2T_0a$, нормированная на единичную длину в z направлении и далее не меняющаяся со временем. Боковые границы области полагались свободно деформируемыми и проницаемыми, в начальный момент времени среда покоилась.

В силу симметрии задачи в настоящей работе для численных расчетов используется одна восьмая часть резервуара, с началом координат в центре исходной области. Также в отличие от оригинальной постановки предполагается, что нагружение осуществляется в плоскости Oxz . Схематично задача представлена на рис. А.9. Здесь $L_x = a$ м, $L_z = b$ м, $T_z = -T_0$.

Граничные условия в двумерной постановке ставятся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 x = 0 : \quad & u_x = 0, \quad \partial p / \partial x = 0, \\
 x = a : \quad & T_{xx} = 0, \quad p = 0, \\
 z = 0 : \quad & u_z = 0, \quad \partial p / \partial z = 0, \\
 z = b : \quad & \int_0^a T_{zz}(x, b, t) dx = -T_0a, \quad \partial p / \partial z = 0.
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Аналитическое решение представленной задачи в наиболее полном виде представлено в работе [Cheng1988] и имеет вид:

$$p(x, t) = \frac{2}{3}T_0B(1 + \nu_u) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_m}{\lambda_m - \sin \lambda_m \cos \lambda_m} \cdot \left(\cos \frac{\lambda_m x}{a} - \cos \lambda_m \right) \cdot \exp \left(-\frac{\lambda_m^2 ct}{a^2} \right), \tag{A.12}$$

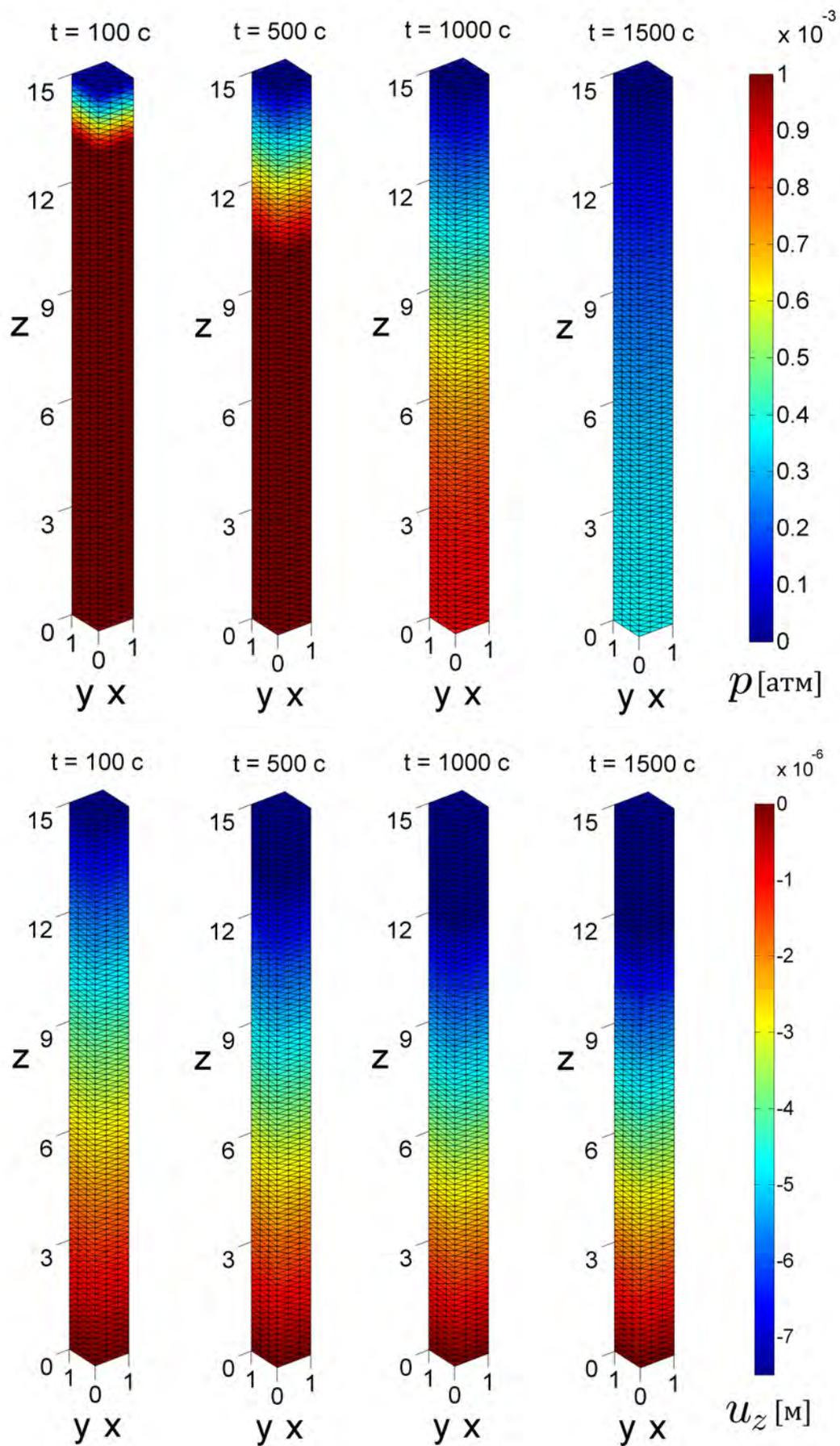


Рис. А.8. Задача консолидации Терцаги. Распределение давления (вверху) и перемещений u_z (внизу) в последовательные моменты времени.

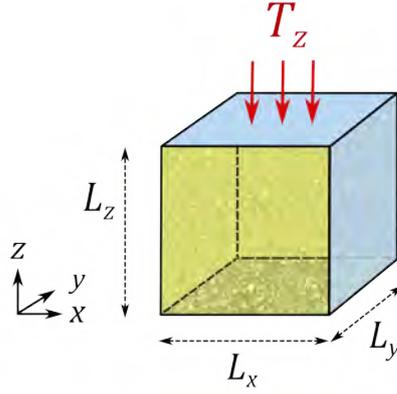


Рис. А.9. Схематичный вид задачи Манделя. Желтым цветом выделены плоскости симметрии в соответствии с граничными условиями.

$L_x = a$	$L_z = b$	L_y	T_0	t_{st}	t_{end}	Δt
1.0 м	1.0 м	1.0 м	1.0 КПа	3.125×10^{-3} с	1.25 с	3.125×10^{-4} с

Таблица А.4. Параметры для численного расчета задачи Манделя.

$$u_x(x, t) = \left[\frac{T_0 \nu}{2G} - \frac{T_0 \nu_u}{G} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_m \cos \lambda_m}{\lambda_m - \sin \lambda_m \cos \lambda_m} \cdot \exp \left(-\frac{\lambda_m^2 ct}{a^2} \right) \right] \cdot x + \frac{T_0 a}{G} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_m}{\lambda_m - \sin \lambda_m \cos \lambda_m} \cdot \sin \frac{\lambda_m x}{a} \cdot \exp \left(-\frac{\lambda_m^2 ct}{a^2} \right), \quad (\text{A.13})$$

$$u_z(z, t) = \left[-\frac{T_0(1-\nu)}{2G} + \frac{T_0(1-\nu_u)}{G} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_m \cos \lambda_m}{\lambda_m - \sin \lambda_m \cos \lambda_m} \cdot \exp \left(-\frac{\lambda_m^2 ct}{a^2} \right) \right] \cdot z, \quad (\text{A.14})$$

где λ_m – решение соответствующего нелинейного уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda_m = \frac{1-\nu}{\nu_u - \nu} \lambda_m. \quad (\text{A.15})$$

В качестве величин для сравнения используются нормированные значения \bar{p} , \bar{u}_z , \bar{u}_x :

$$\bar{p} = \frac{p}{T_0}, \quad \bar{u}_x = \frac{u_x}{a}, \quad \bar{u}_z = \frac{u_z}{b}, \quad \bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{\tau} = \frac{ct}{a^2}, \quad c = \frac{2kG(1-\nu)(\nu_u - \nu)}{\mu b^2(1-2\nu)^2(1-\nu_u)}.$$

Конкретные значения используемых для расчетов параметров приведены в табл. А.4. В качестве начальных данных брались значения, полученные из аналитического решения (А.12)–(А.14) на момент времени t_{st} . Кроме того, вместо граничного условия (А.11) для T_{zz} на плоскости $z = b$ использовались значения из аналитического решения (А.14) для u_z .

Для численных расчетов использовалась тетраэдральная сетка, состоящая из $N_n = 2625$ узлов и $N_e = 12096$ прямоугольных тетраэдров со сторонами $h_x = 0.0417$, $h_y = 0.1667$, $h_z = 0.0714$ м.

Для нахождения корней нелинейного уравнения (А.15) использовался метод Ньютона.

L_x	L_y	L_z	$ Q $	t_{st}	t_{end}	Δt
400.0 м	400.0 м	400.0 м	20.0 м ² /сутки	0.0 ч	20.0 ч	1.0 ч

Таблица А.5. Параметры для численного расчета задачи о двух скважинах.

На рисунке А.10 (сверху) показано распределение нормированного на начальную нагрузку T_0 давления p в зависимости от нормированной продольной координаты x/a в последовательные моменты времени $t = 6.25 \times 10^{-3}$, 3.75×10^{-2} , 1.28×10^{-1} , 3.28×10^{-1} , 6.25×10^{-1} с. Отметим, что на малых временах давление растет выше значения, предсказанного эффектом Скемптона, $p(0^+)/T_0 = B(1 + \nu_u)/3 = 0.2879$, что является отличительной особенностью данной задачи.

Рисунки А.10 (нижние два рисунка) демонстрируют нормированные перемещения u_x и u_z соответственно. Распределение u_x бралось в плоскости $y = 0.5/b$, u_z – в плоскости $x = 0.5/a$. На всех рисунках красным цветом показаны соответствующие аналитические решения, синим – результаты численного расчета.

Как видно из представленных результатов, расчеты продемонстрировали отличное совпадение с аналитическими данными для всех моментов времени, в точности воспроизведя характерные особенности задачи.

Также в качестве иллюстрации на рис. А.11 приведено полученное в расчетах размерное распределение поля давления p в последовательные моменты времени $t = 3.75 \times 10^{-2}$, 1.28×10^{-1} , 3.28×10^{-1} , 6.25×10^{-1} с.

А.6 Пороупругий пласт при наличии скважин

Рассмотренные в предыдущих разделах постановки задач предназначены для валидации разработанного авторами программного комплекса. Для них известно точное аналитическое решение, но фактически данные задачи являются одномерными или двумерными. В данном разделе рассматривается полностью трехмерная задача о перераспределении поля пластового давления при работе двух скважин различной ориентации. К сожалению, эта задача не имеет точного аналитического решения, но иллюстрирует возможности программного комплекса и позволяет качественно оценить достоверность полностью трехмерного моделирования задачи фильтрации в пороупругой среде в рамках разработанных алгоритмов.

Для расчетов использовалась область с линейными размерами L_x , L_y , L_z , внутри которой расположены две скважины, полностью перфорирующие пласт. Скважины моделируются с помощью линейных источника и стока мощностью Q и $-Q$ на единицу длины. Нагнетательная скважина расположена вертикально и проходит через точки с координатами $(L_x/3, L_y/2, 0)$ и $(L_x/3, L_y/2, L_z)$, добывающая скважина является горизонтальной и проходит через точки с координатами $(2L_x/3, 0, L_z/2)$ и $(2L_x/3, L_y, L_z/2)$. Схематично постановка задачи представлена на рис. А.12. Конкретные значения используемых для расчетов параметров приведены в табл. А.5.

Предполагается, что пороупругая область изолирована от внешней среды. На границе области заданы нулевые перемещения и нулевой поток, то есть $\partial p / \partial \mathbf{n} = 0$. В качестве начального условия задавалось состояние покоя при давлении $p = 100$ атм и нулевых перемещениях

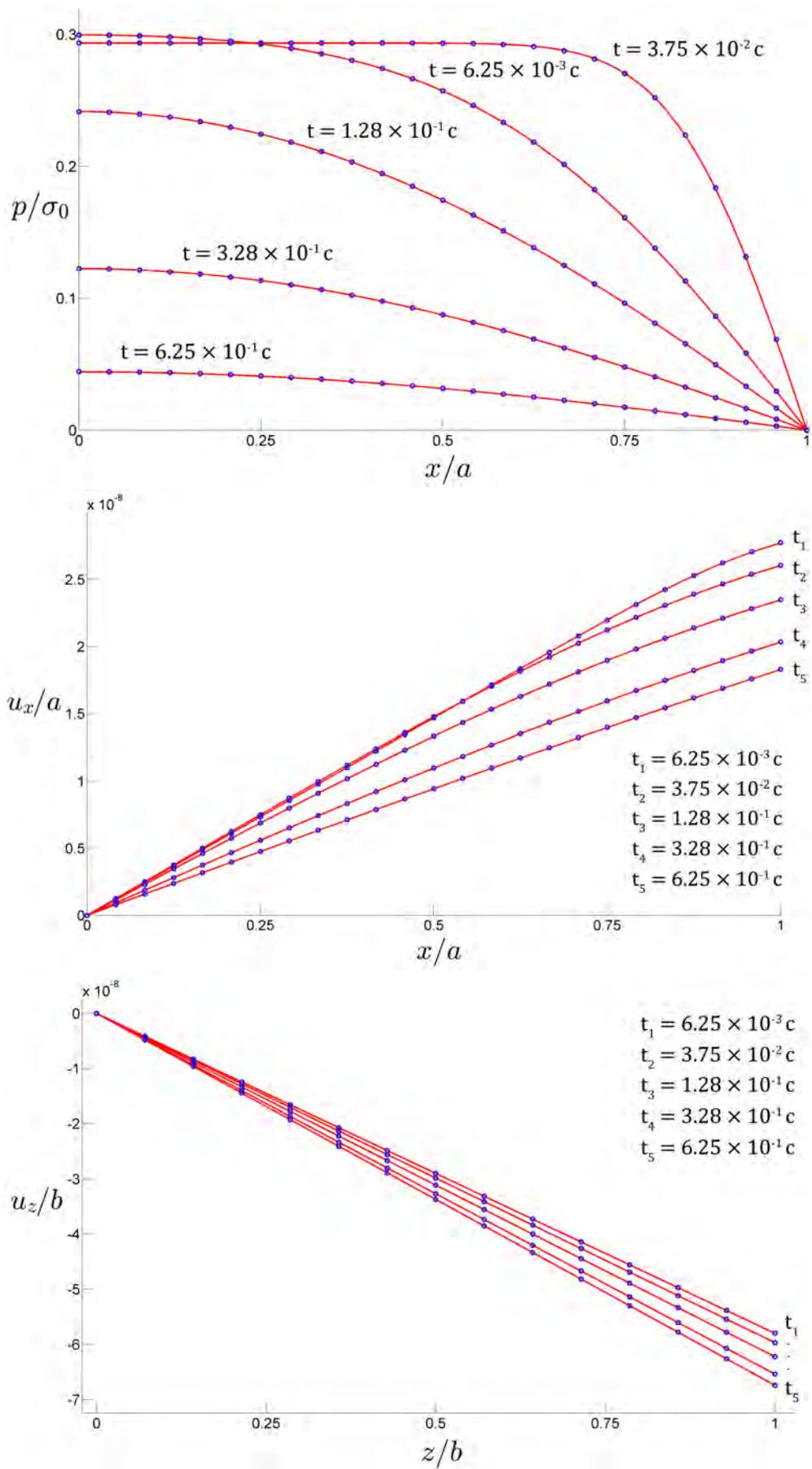


Рис. А.10. Задача Манделя. Нормированное давление, перемещение u_x и u_z (сверху вниз) в различные моменты времени. Красным цветом показано аналитическое решение, синим — результаты расчета.

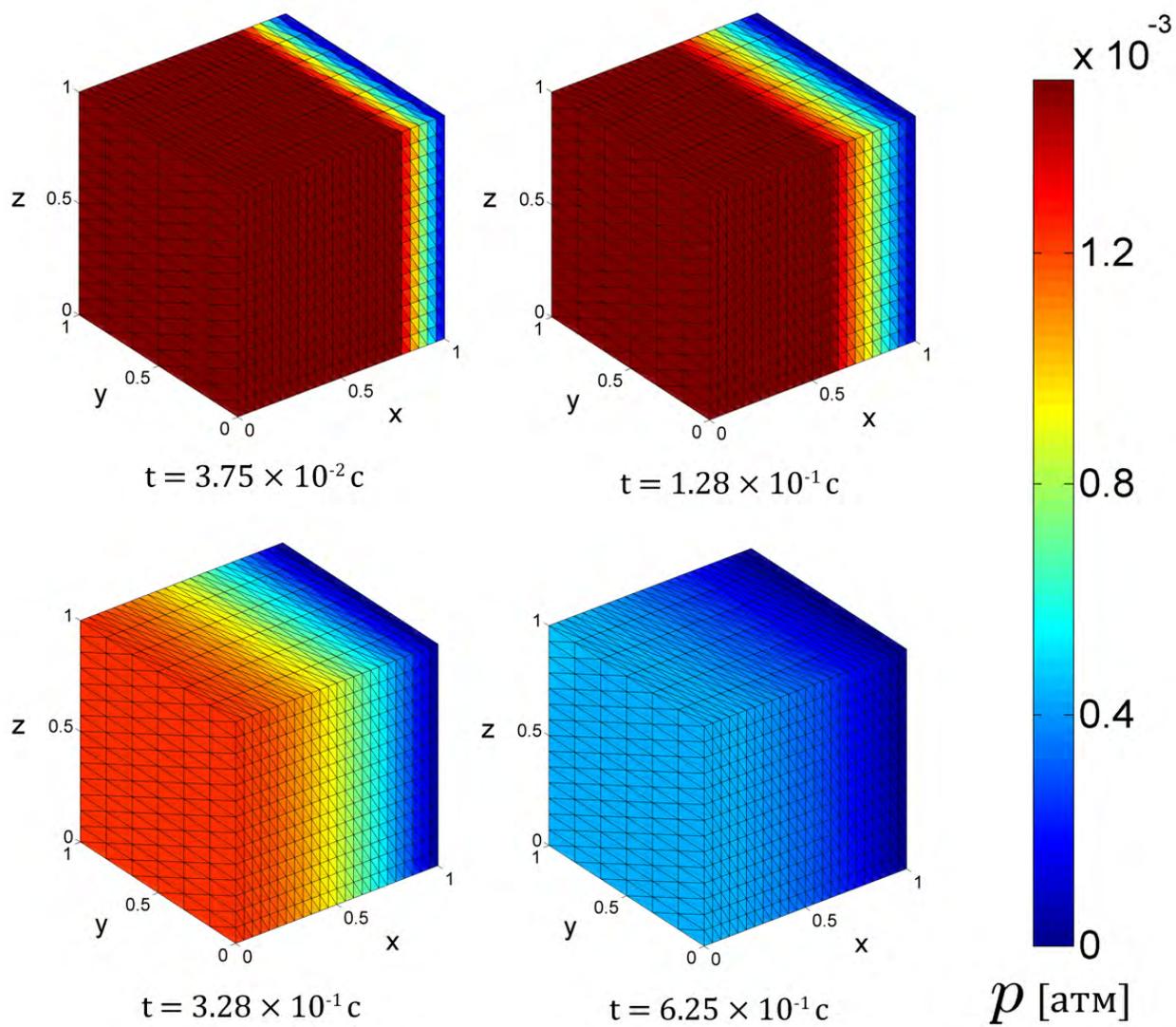


Рис. А.11. Задача Манделя. Распределение давления в последовательные моменты времени.

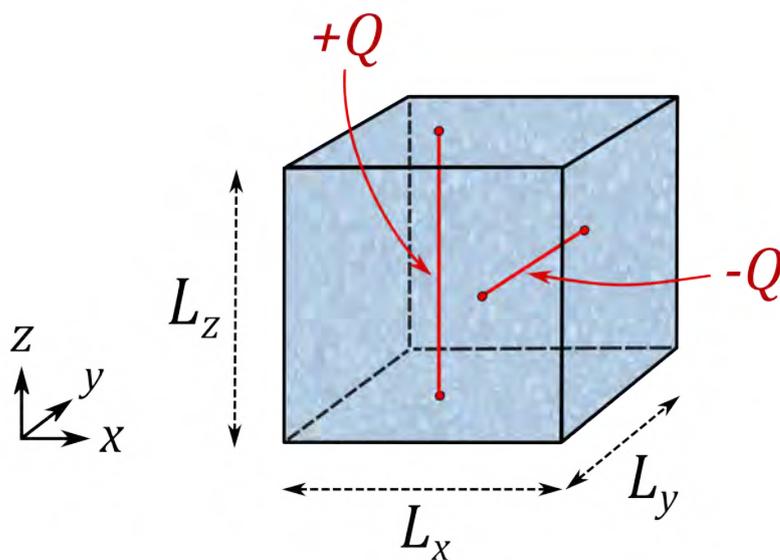


Рис. А.12. Схематичный вид задачи о двух скважинах.

точек среды.

Для численных расчетов использовалась тетраэдральная сетка, состоящая из $N_n = 29791$ узлов и $N_e = 162000$ прямоугольных тетраэдров со сторонами $h_x = h_y = h_z = 13.3333$ м.

На рис. А.13 представлены несколько поверхностей уровня порового давления (вверху) и линий тока (внизу) в конце моделирования при установлении псевдостационарного режима течения. Видно, что структура течения существенно трехмерна и симметрична в силу симметричности постановки задачи.

А.7 Численное исследование скорости сходимости итерационного связывания

Были рассмотрены четыре метода связывания: «дренируемое», «недренируемое» — и те же самые, но с итерациями до сходимости на каждом временном слое. Для последних двух случаев результат расчета (теоретически, при достижении сходимости), эквивалентен применению полностью неявной схемы. Дренируемое безитерационное связывание является условно устойчивым, причем условие устойчивости ограничивает диапазон допустимых параметров задачи и не ставит ограничений на шаг по времени. Все остальные методы являются безусловно устойчивыми. В области устойчивости все методы дают сходный (в рамках допустимой погрешности) результат при выборе «правильных» начальных условий. Различия в результатах при применении методов, итерационными и безытерационными, появляются из-за необходимости задания в начальный момент времени наряду с начальными условиями для поля давления еще и (формально ненужного) начального условия для поля перемещений. Возникающая в начальный момент времени, при расчете первого временного шага, ошибка не компенсируется в силу того, что итерации до сходимости не производятся. Особенно большие расхождения появляются при резком приложении нагрузок в модели, то формальном отсутствии согласования между граничными условиями полей напряжений (и давления) и перемещений — например, как в случае задачи Терцаги. Использование итераций до сходимости на каждом временном шаге решает эту проблему — поля на каждом шаге по времени определяются согласованным образом. Очевидно, что итерационный метод является более затратным по времени — время, затрачиваемое на одну итерацию равно времени, затрачиваемому на расчет шага по времени в безитерационном методе, то есть итерационные методы в N раз медленнее безитерационных, где N — среднее количество итераций на шаге по времени. Проведенные тесты (задачи Мандела и Терцаги) показали, что по количеству итераций для «дренируемого» связывания заметно больше чем число итераций для «недренируемого». В первом случае ошибка на итерации убывает в среднем в 1.5 раза, во втором случае ошибка уменьшается примерно в 2 раза за итерацию. В качестве рекомендаций для дальнейшего применения стоит использовать итерационный «недренируемый» метод связывания или комбинацию «недренируемого» итерационного связывания на начальном этапе счета и «недренируемого» безитерационного на последующих этапах.

Далее на рисунке А.14 приведена история сходимости итераций для задачи Мандела для случая «дренируемого» и «недренируемого» связывания. На графиках показана ошибка решения для давления и перемещения для каждой итерации для последовательных шагов по времени. По оси абсцисс отложен накопленный номер итерации. Пики на графиках соответ-

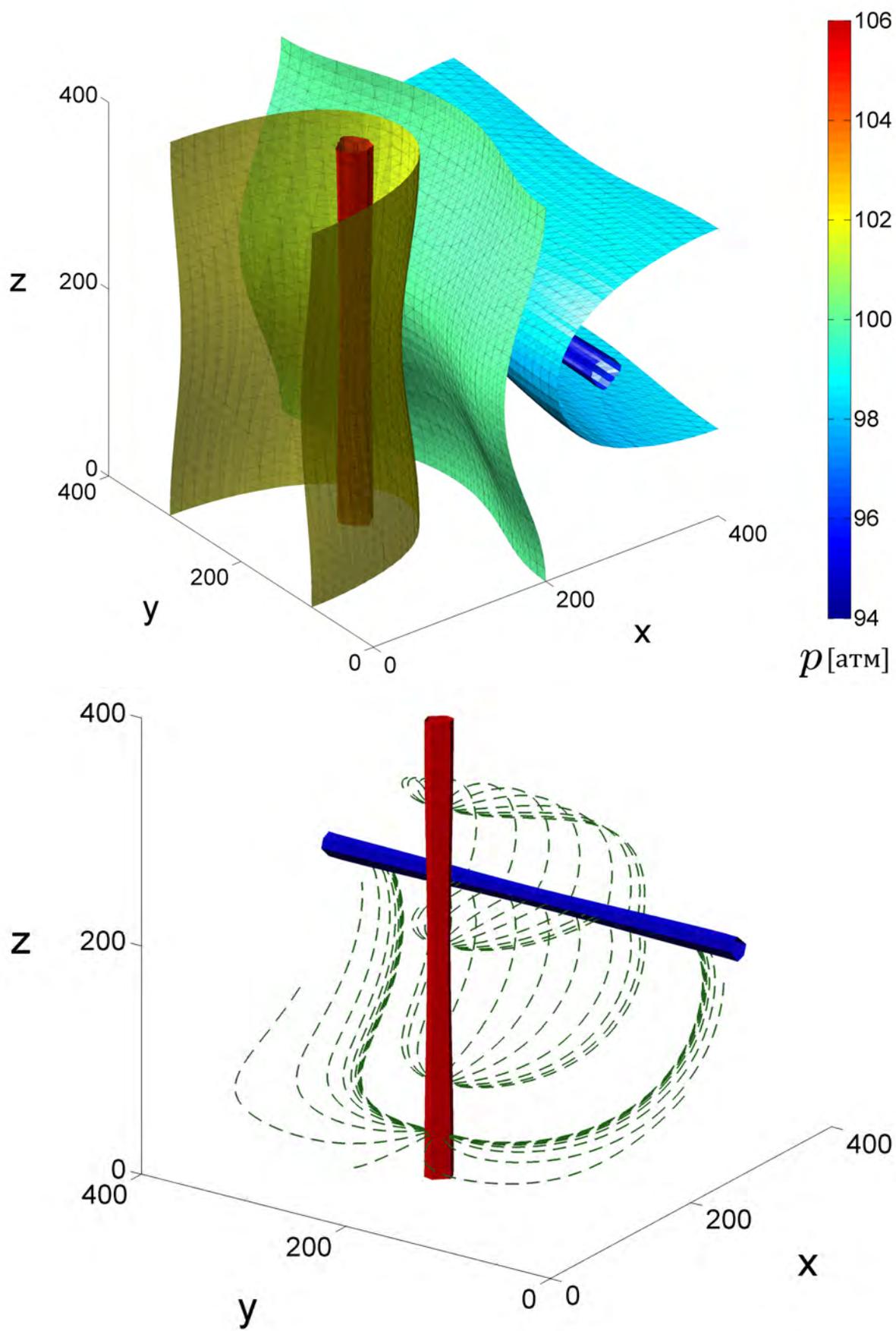


Рис. А.13. Задача о двух скважинах. Изоповерхности давления (вверху) и линии тока (внизу) в конце расчета.

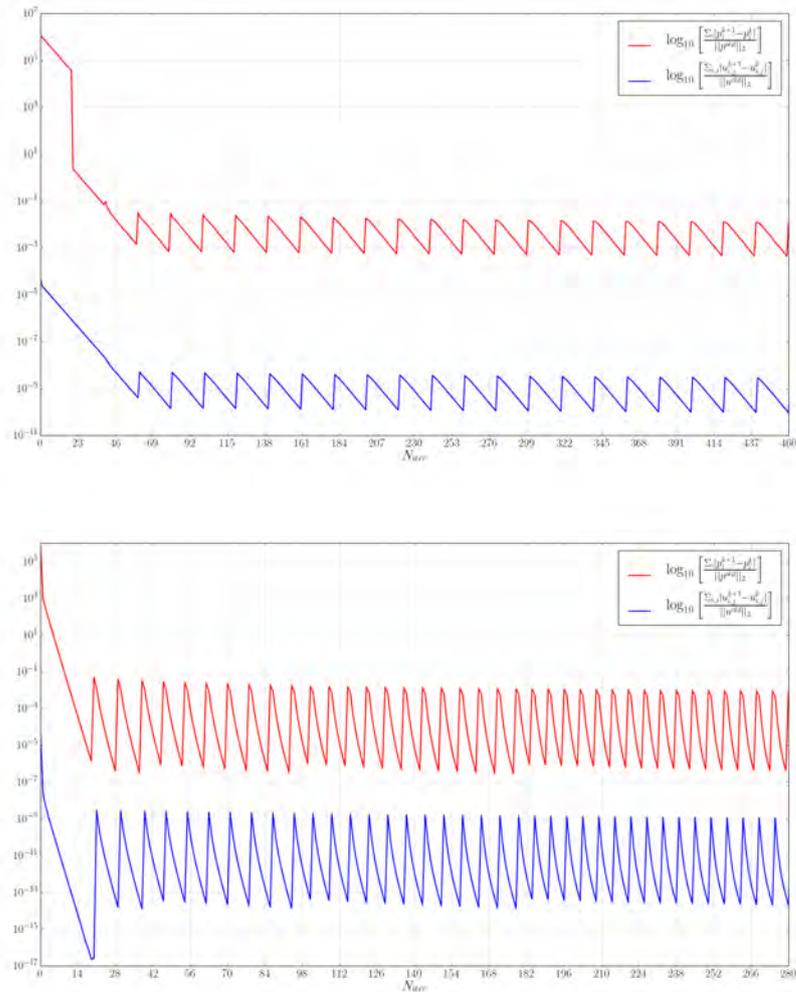


Рис. А.14. История итераций для случая «дренируемого» (вверху) и «недренируемого» связывания (внизу) .

ствуют началу очередного временного слоя. В обоих случаях критерием останковки итераций являлось выполнение условия

$$\frac{\|p^{k+1} - p^k\|}{\|p^k\|} \leq \epsilon_p, \quad \frac{\|u^{k+1} - u^k\|}{\|y^k\|} \leq \epsilon_u,$$

где $\epsilon_u = \epsilon_p = 1.0E - 6$. Максимальное число итераций выбиралось равным $N_{\max} = 20$. Для решения систем линейных алгебраических уравнений применялся метод `gmres(10)` и неполное LU разложение в качестве предобуславливателя (`ILUT(60, 1.0E-4)`). Точность решения систем линейных алгебраических уравнений — $1.0E - 12$, критерий останковки — малость величины относительной невязки системы.

А.8 Пример расчета в реалистичной геометрии

Рассматривалась модель фильтрации жидкости с плотностью $\rho = 10^3[\text{кг/м}^3]$, сжимаемостью $C_f = 10^{-6}[1/\text{Па}]$, вязкостью $\mu = [\text{Па}\cdot\text{с}]$ в пороупругой среде с модулем Юнга $E = 3.7 \cdot 10^9[\text{Па}]$, коэффициентом Пуассона $\nu = 0.2$, сжимаемостью $C_s = 10^{-9}[1/\text{Па}]$, и модулями Био $b =$

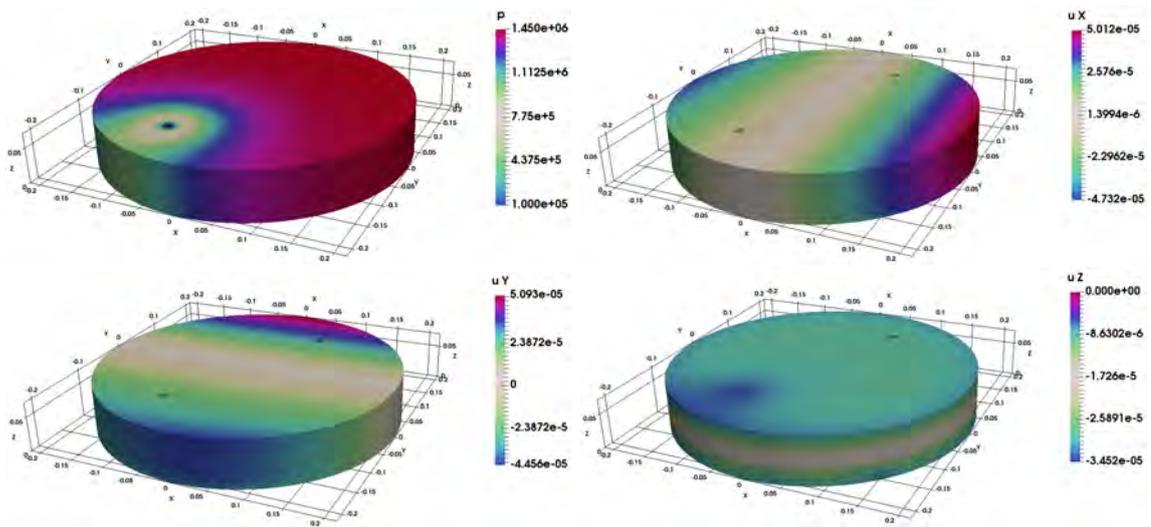


Рис. А.15. Давление и три компоненты перемещения на момент времени 10 с.

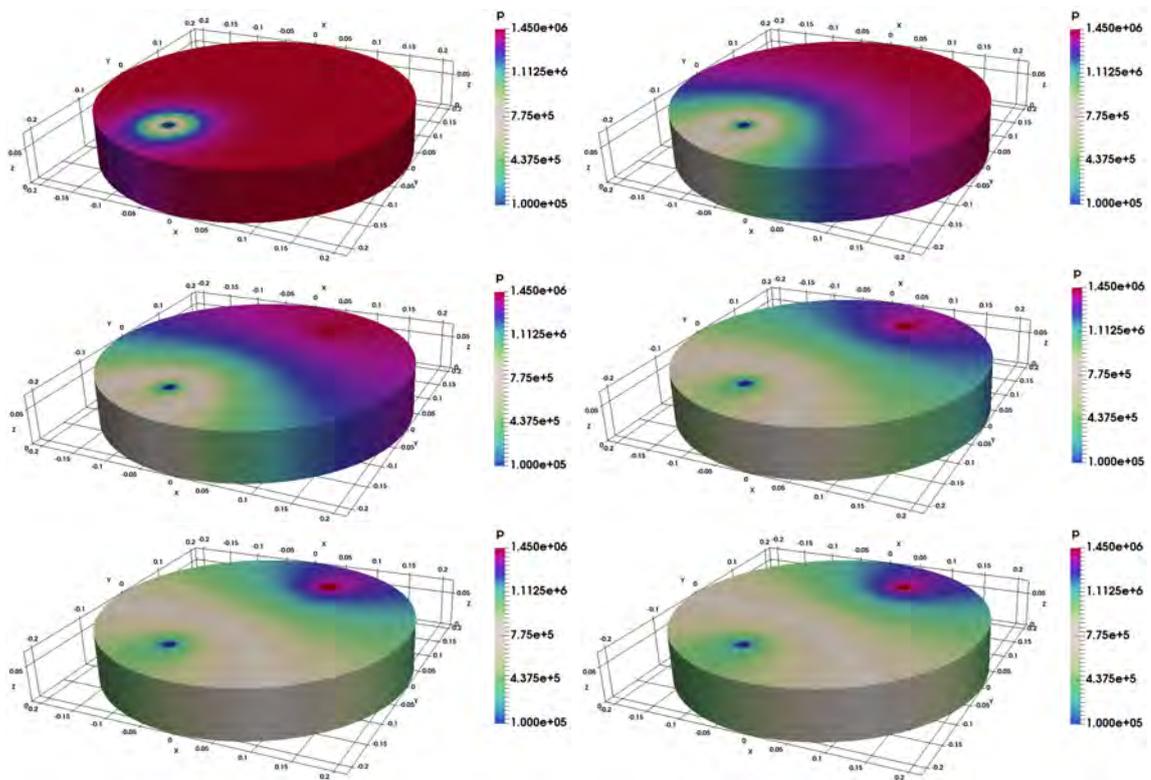


Рис. А.16. Давление на моменты времени 2 и 20, 40, 100, 200 и 500 с (слева направо, сверху вниз).

$0.5, M = 10^8 [\text{Н/м}^2]$ с одним источником и одним стоком.

Источник и сток моделировались с помощью задания граничных условий. Начальное давление составляло $14.5 \cdot 10^5 [\text{Па}]$, на верхней границе задано напряжение $T_{zz} = -20 \cdot 10^5 [\text{Па}]$, на нижней границе отсутствовали вертикальные перемещения, на всех внешних поверхностях заданы условия непротекания, на части границы, отвечающей источнику задано давление $14.5 \cdot 10^5 [\text{Па}]$, на стоке давление равно $10^5 [\text{Па}]$. Результаты расчетов на различные моменты времени представлены на рисунках А.15 и А.16. Сетка являлась тетраэдрической, состоящей из 50568 элементов и 11223 узлов. На каждый узел приходилось по одной степени свободы для каждого неизвестного поля (поле давления и 3 компоненты поля перемещения).