

На правах рукописи

Семилетов Василий Александрович

**МЕТОДЫ ОСРЕДНЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ
АЛГОРИТМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ
ПО ПОДОБЛАСТЯМ НЕФТЕГАЗОВЫХ
МЕСТОРОЖДЕНИЙ**

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2010

Работа выполнена на кафедре вычислительной механики, механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
доцент Пергамент Анна Халиловна

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Головизнин Василий Михайлович
кандидат физико-математических наук
Савенков Евгений Борисович

Ведущая организация: кафедра математической физики
факультета ВМиК МГУ им.М.В.Ломоносова

Защита состоится 25 ноября 2010 г. в 13 час 00 мин на заседании диссертационного совета Д 002.058.01 при Институте математического моделирования РАН по адресу: 125047, Миусская пл., д. 4а.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ РАН.

Автореферат разослан 15 октября 2010 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 002.058.01,
д. ф.-м. н.

Н. В. Змитренко

Актуальность

Важным инструментом для принятия технологических решений при разработке месторождений углеводородов является математическое моделирование процессов фильтрации нефти и газа в пласте. В настоящее время коэффициент извлечения нефти и газа неуклонно падает. В эксплуатацию вводятся месторождения с трудно извлекаемыми запасами. В связи с этим усложняются физические и математические задачи, описывающие фильтрационные процессы в насыщенных средах. Решение практических задач в данной области связано с выбором оптимального режима разработки месторождения нефти и газа: моделирование методов увеличения нефтеотдачи, определение коэффициента извлечения нефти, уменьшение заводнения. Решение данных задач, конечно, требует использования и разработки самых современных физических и математических постановок задач, а также эффективных алгоритмов их численного решения.

Настоящая диссертация посвящена численному решению уравнений двухфазной фильтрации, описывающих течение двух фаз в пористой среде¹. При этом во время движения жидкостей выполняется локальное термодинамическое равновесие. Движение каждой фазы описывается уравнением сохранения массы и законом Дарси, выражающим зависимость скорости фильтрации фазы флюида от градиента напора. В данной модели пренебрегается изменением температуры, но учитываются сжимаемости фаз и породы, эффекты гравитации и влияние капиллярных сил.

Математические исследования задач многофазной фильтрации имеют длительную историю как зарубежом, так и в нашей стране. Классические работы Л.С. Лебейзона, Г.И. Баренблата, В.М. Ентова, В.Н. Николаевского и других отечественных ученых сыграли существенную роль в понимании процессов подземной гидрогазодинамики.

¹*M. Muskat* — *The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media* // McGRAW-HILL BOOK COMPANY, Inc., New York and London, 1937

Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик — *Движение жидкостей и газов в природных пластах* // "Недра Москва, 1984

В настоящее время имеет большое значение разработка численных методов решения трехмерных задач фильтрации в областях со сложной структурой². Регулярно проводятся международные конференции по данной тематике ECMOR (the European Conference on Mathematics of Oil Recovery), SIAM (Conference of Mathematical and Computational Issues in Geosciences). Созданы комплексы программ для моделирования процессов разработки углеводородных месторождений Eclipse(Schlumberger), Tempest MORE (Roxar), VIP (LandMark), CMG (CMG).

Высокая стоимость экспериментов в этой области с одной стороны, и тяжелые последствия неправильных технологических решений при разработке месторождений с другой, приводят к необходимости проведения математического моделирования на более детальных сетках. Строятся сетки, адаптированные к структуре среды, и, как следствие, неортогональные. Характерные размеры ячеек по латерали в десятки и сотни раз могут превосходить характерные размеры по вертикали. Количество активных ячеек сетки может быть порядка 10^9 . Вычисления на таких огромных сетках являются трудоемкими даже для современной вычислительной техники. Поэтому встает проблема осреднения задачи — укрупнение сетки с определением эффективных параметров. Существенным недостатком подходов осреднения, которые в принципе решают проблему возможности моделирования, является избыточное огрубление модели, не позволяющее учитывать влияние мелкомасштабных неоднородностей. Это обстоятельство не позволяет корректно описывать процессы заводнения или перенос примесей, для чего важно знать поле скоростей на подробной сетке.

Как следствие, необходимо разрабатывать многомасштабные алгоритмы типа ремасштабирования-демасштабирования. Этому и посвящена настоящая диссертационная работа.

²*Kh. Aziz, A. Settari* — Petroleum Reservoir Simulation // Elsevier Applied Science Publishers, London, 1980

I. M. Cheshire, J. R. Appleyard, D. Banks, R. J. Crozier and J. A. Holmes — An Efficient Fully Implicit Simulation // Paper EUR 179, European Offshore Petroleum Conference and Exhibition, London, 1980

R.D. Kanevskaya and R.M. Kats — Exact Solutions of Problems of Fluid Inflow into a Well with a Vertical Hydrofracture and Their Use in Numerical Models of Flow through Porous Media // Fluid Dynamics, Vol. 31, No. 6, pp. 854-864, 1996

Цель работы

Целью настоящей работы является разработка эффективного метода моделирования нефтегазовых месторождений по подобластям, что позволит уменьшить время разработки проекта для месторождения и повысит точность расчетов. При этом в работе рассматриваются задачи с неортогональными сетками, адаптированными к структуре среды.

Научная новизна

Для задач фильтрации обобщен метод опорных операторов на случай разрывных тензорных коэффициентов. В трехмерном случае для сеток, характерных для задач фильтрации, построен присоединенный объем, так что выполняется теорема о сильной сходимости, и оператор дивергенции аппроксимируется со вторым порядком точности. Это позволяет на неортогональных сетках с тензорными коэффициентами отслеживать фронт заводнения и распространения примесей в неоднородной среде.

Предложено решение задачи осреднения на основе физических принципов равенства интеграла энергий. Построена система линейных уравнений для определения компонентов эффективного тензора проницаемости для ячеек грубой сетки с достаточно гладкими поверхностями разрывов. При этом при переходе на крупную сетку оператор дивергенции аппроксимируется с первым порядком точности.

Построен алгоритм моделирования по подобластям. При этом сначала с помощью техники ремасштабирования решается уравнение давления на грубой сетке, а потом потоки методом демасштабирования для каждой границы подобластей интерполируются на исходную мелкую сетку, используя базисные функции, вычисленные на мелкой сетке для каждого элемента грубой сетки. Далее решается полная задача фильтрации в каждой подобласти по отдельности на мелкой сетке с граничными условиями второго рода, определенными из решения уравнения давления.

Практическая и научная ценность

Для решения задач фильтрации рассмотрен многосеточный алгоритм, обладающий существенными преимуществами по сравнению со стандартными полностью неявными схемами. Во-первых, вычисляется давление с помощью неявной схемы на грубой сетке, т.е. с относительно небольшим числом ячеек. Как следствие, линейные уравнения, которые приходится решать на каждом шаге, имеют меньшую размерность. Наиболее трудоемкая часть решения — это построение базисных функций, но они вычисляются локально, и данная процедура может быть эффективно распараллелена. Во-вторых, используется разделение области на подобласти, что позволяет также эффективно распараллелить задачу для гигантских месторождений. При рассмотрении неизотермической фильтрации, как правило, уравнения фильтрации и теплопроводности разделяют, т.к. характерная скорость теплопередачи выше характерной скорости фильтрации. Предложенный алгоритм может быть эффективно применен и для решения задачи теплопроводности в пласте.

На основе вариационного принципа разработан алгоритм осреднения с определением эффективного тензора проницаемости, который может быть эффективно применен для неортогональных ячеек со сложной внутренней структурой. При этом в общем случае даже для изначально изотропной среды получается эффективный недиагональный тензор проницаемости.

Применение предложенных методов позволяет значительно сократить трудоемкость процесса моделирования разработки нефтяных и газовых месторождений, а также повысить качество принимаемых проектных решений, поскольку полученное решение является решением "high resolution" т.е. учитывает особенности структуры, заданные на мелкой сетке.

Обоснованность и достоверность

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов подтверждается строгим доказательством теорем о порядке аппроксимации и

сходимости разностных схем и сравнением результатов расчетов как с аналитическими решениями тестовых задач, так и с результатами расчетов реальных задач, выполненными с помощью современных коммерческих комплексов программ.

Апробация результатов

Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах:

1. X, XI, XII European Conference on the Mathematics of Oil Recovery (ESMOR) 2006, 2008 и 2010.
2. Научная конференция «Ломоносовские чтения», апрель 2007, 2009 и 2010.
3. Всероссийская конференция по вычислительной математике (КВМ), Академгородок, Новосибирск, Россия, 18-20 июня 2007
4. Современные проблемы газовой и волновой динамики, Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 21-23 апреля 2009

Публикации и личный вклад автора

Результаты диссертации с достаточной полнотой отражены в 12 научных работах, среди которых две публикации в реферируемых журналах [3, 14], два препринта [1, 8], а также восемь докладов в сборниках материалов и тезисов научных конференций [2, 4–7, 9–11].

В [1, 3, 4] автору принадлежит доказательство теоремы о сильной сходимости метода опорных операторов для случая разрывных тензорных коэффициентов, численная реализация метода, исследование сходимости метода для модельных задач с аналитическим решением и для задач, для которых не существует аналитического решения.

В [2, 5–7, 9, 10] автором проведены расчеты эффективных тензоров проницаемости для случаев сильно неоднородной слоистой системы и для случая одиночной трещины.

В [8] автором выписана разностная схема для решения задачи многофазной фильтрации в переменных насыщенность воды, давление нефти и массовая концентрация тяжелой компоненты углеводорода в нефти и реализована разностная схема аппроксимации по пространству.

В [13] автором описаны алгоритмы осреднения, основанные на вариационном принципе равенства энергий.

В [11, 12, 14] автор сформулировал алгоритм моделирования по подобластям на основе многосеточного метода, предложил доказательство теоремы об аппроксимации второго порядка оператора дивергенции методом опорных операторов для трехмерного случая на сетках, координатные линии которых хотя бы вдоль одного направления параллельны и функции заданы в узлах, а коэффициенты в ячейках. Обобщен метод опорных операторов для ячеек с достаточно гладкими поверхностями разрывов. Проведен расчет реальной задачи фильтрации. Продемонстрировано хорошее согласование решений, полученных с помощью предложенного многомасштабного алгоритма и с помощью стандартной полностью неявной схемой расчетов.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из Введения, трёх Глав, Заключения и Списка литературы из 51 наименования. Работа изложена на 85 страницах, содержит 26 рисунков.

В **Первой главе** сформулирована постановка задачи двухфазной фильтрации и методы ее решения. В данном разделе подробно описывается модель скважин и выписывается иерархия явно-неявных разностных схем, а также приведены результаты расчетов в сравнении с апробированным современным комплексом программ.

В разделе 1.1 сформулирована постановка задачи. Двухфазная фильтрация в анизотропных пористых средах в трехмерном пространстве с уче-

том сжимаемостей породы и флюидов и при наличии гравитации и влиянии капиллярных сил описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_w S_w) + \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{v}_w) &= q_w^M, \\ \frac{\partial}{\partial t}(m\rho_o S_o) + \operatorname{div}(\rho_o \mathbf{v}_o) &= q_o^M, \\ S_w + S_o &= 1,\end{aligned}\tag{1}$$

где индексы $\alpha = \{w, o\}$ обозначают фазы воды и нефти соответственно, m — пористость, доля пор в объеме, ρ_α — плотность фазы α , S_α — насыщенность фазы α , \mathbf{v}_α — скорость фазы α , q_α^M — массовый источник фазы α .

Скорость определяется многофазным законом Дарси:

$$\mathbf{v}_\alpha = -\frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \hat{K} (\nabla P_\alpha - \mathbf{g} \rho_\alpha \nabla z),\tag{2}$$

где $k_{r\alpha}$ — относительная фазовая проницаемость фазы α , μ_α — вязкость фазы α , \hat{K} — абсолютная проницаемость породы, P_α — поровое давление фазы α , \mathbf{g} — вектор ускорения силы тяжести.

При наличии капиллярных сил поровые давления фаз связываются следующими соотношениями:

$$P_L - P_W = P_{COW}(S_W)\tag{3}$$

где $P_{COW}(S_W)$ — капиллярное давление между нефтяной и водяной фазой.

Уравнения (1), (2), (3) описывают модель двухфазной фильтрации двух сжимаемых фаз с учетом капиллярных сил и гравитации. Данную систему уравнений необходимо дополнить начальными и граничными условиями.

В разделе 1.2 выписаны дифференциальные уравнения фильтрации в переменных давления нефти и насыщенности воды, строится разностная схема и описывается метод Ньютона для ее решения.

Построена конечно-разностная схема уравнений двухфазной фильтрации в трехмерном пространстве. Рассматриваются различные подходы к

аппроксимации уравнений по времени, поэтому аппроксимация оператора дивергенции записывалась в общем виде без относительно метода аппроксимации (метод конечных объемов, метод опорных операторов). При этом фазовая проницаемость аппроксимировалась по схеме сноса против потока (up-wind).

В разделе 1.3 построена модель скважин и сформулированы ограничения, накладываемые на параметры скважины и режим ее работы.

В модели скважина представляет собой вертикальную трубу с круглым сечением. Перфорации считаются идеальными: поверхность массообмена является цилиндрической и совпадает с внутренней границей скважины. Давление внутри скважины распределено гидростатически, и предполагается, что смесь гомогенная.

Метод учета скважин в численных моделях фильтрации основан на допущении того, что вблизи скважины течение описывается аналитическим решением. Этот подход впервые предложен Писманом³. Основным предположением в данном подходе является то, что в окрестности скважины, ось которой параллельна оси Oz , характер течения близок к радиальному.

В силу радиальной симметрии течение в цилиндрическом слое в окрестности скважины будет описываться формулой Дюпюи:

$$Q = -2\pi h \frac{K}{\mu} \frac{P_k - P_{well}}{\ln \frac{R_k}{r_{well}}}. \quad (4)$$

Формула (4) представляет собой связь дебита с падением давления на скважине. Значение R_k определяется при рассмотрении сеточной модели. Таким образом, в каждой ячейке, через которую проходит скважина, определяется приток или сток. В результате получается уравнение, связывающее опорное давление (забойное давление) в скважине и параметры в пласте.

Как правило, задаются либо фиксированное забойное давление, либо фиксированный дебит. При этом в случае фиксированного забойного давле-

³*D. W. Peaceman* — Interpretation of Well-block Pressures in Numerical Reservoir simulation // SPE Journal, V. 18, N 3, pp. 183-194, 1978

ния источник в каждой ячейке(перфорации) является функцией от давления и насыщенностей данной ячейки. В случае заданного дебита источники в каждой ячейке связаны друг с другом.

В конце главы, раздел 1.3, проведено сравнение результатов расчетов реальной задачи.

В трехмерной области со сложной геометрией (рис. 1) задана сетка, адаптированная к структуре среды. Размеры области по латерали 461.15 км x 7099 км, минимальная глубина 2743.314 м, максимальная глубина 2824.252 м. Сетка содержит 85491 активных ячеек (64 x 97 x 18), при этом $h_x = 50.000$ м, $h_y = 50.000$ м, $h_z = [0.0$ м, 8.548 м]. Значения пористости от 0.0001 до 0.238, проницаемости по латерали от 0.002 мД до 389.246 мД, по вертикали от 0.00008 мД до 2.6 мД. Начальные условия: пластовое давление распределено по гидростатическому закону и принимает значения от 298.749 бар до 305.751 бар, на глубине 2759 м задан водонефтяной контакт, величина остаточной водонасыщенности составляет 0.22 (неподвижная доля воды). Разработка велась 35 добывающими и 16 нагнетательными скважинами в течение 17 лет.

Описанные выше алгоритмы были реализованы. Апробация алгоритмов проводилась с использованием коммерческого комплекса программ Eclipse. На рис. 2 представлено сравнение графиков суммарной добычи нефти и воды. Видно, что результаты достаточно хорошо согласуются.

Вторая глава посвящена методу опорных операторов и проблемам масштабирования. В разделе 3.1 подробно описан метод опорных операторов для аппроксимации оператора дивергенции на неортогональных сетках с постоянными тензорными коэффициентами.

Основная идея метода опорных операторов — это согласованное определение операторов градиента и дивергенции из соотношения, вытекающего из теоремы Гаусса-Остроградского:

$$\int_D u \operatorname{div} \mathbf{v} dV = - \int_D (\mathbf{v}, \nabla u) dV + \int_{\partial D} uv_n ds.$$

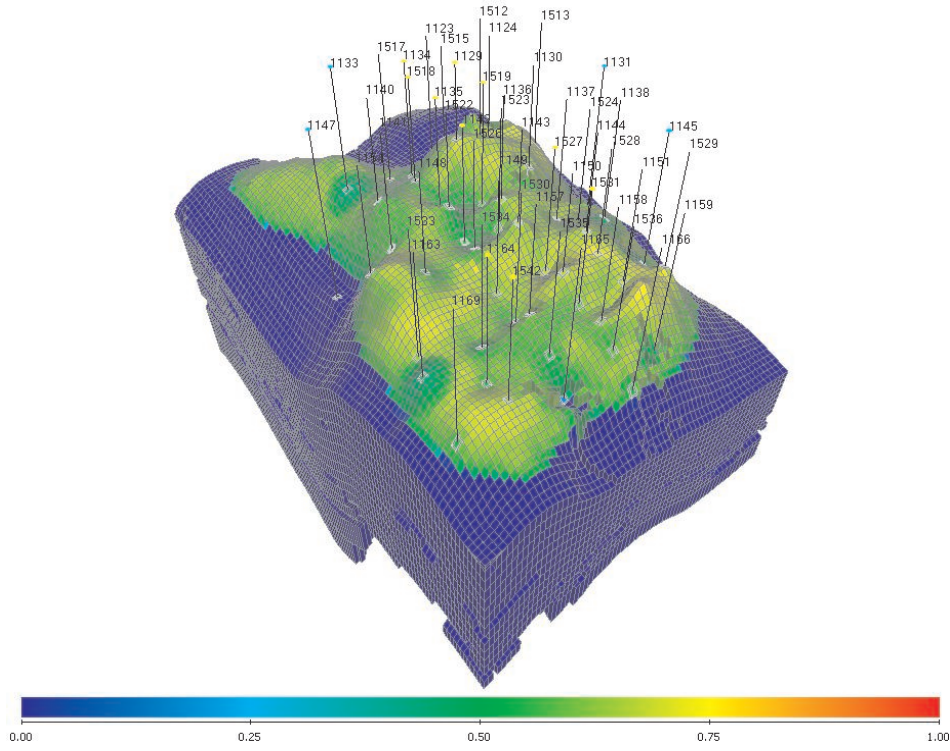


Рис. 1. Сетка и начальное поле насыщенности модели реального месторождения

Здесь ∂D — граница области D . Это соотношение справедливо для произвольного вектора \mathbf{v} и произвольной функции u . Поскольку эти величины произвольны, то можно задать $u|_{\partial D} = 0$.

Если в этом равенстве известен оператор ∇ для сеточных функций, то можно определить оператор div . Рассмотрим очевидный случай $\mathbf{v} = -\hat{K}\nabla p$, где \hat{K} — тензор. Тогда интеграл $\int_D (\mathbf{v}, \nabla u) dV = -\int_D (\hat{K}\nabla p, \nabla u) dV$ можно рассматривать как аналог интеграла энергии. Функции определены в узлах, коэффициенты в ячейках. Согласно общим принципам метода опорных операторов этот интеграл для каждой ячейки Ω может быть представлен в виде:

$$\int_{\Omega} (\hat{K}\nabla p, \nabla u) dV \cong g^{ab} \Delta_a p \Delta_b u \quad (5)$$

$$\Delta_a p = -P(A) + P(B), \quad \Delta_b u = -U(C) + U(B),$$

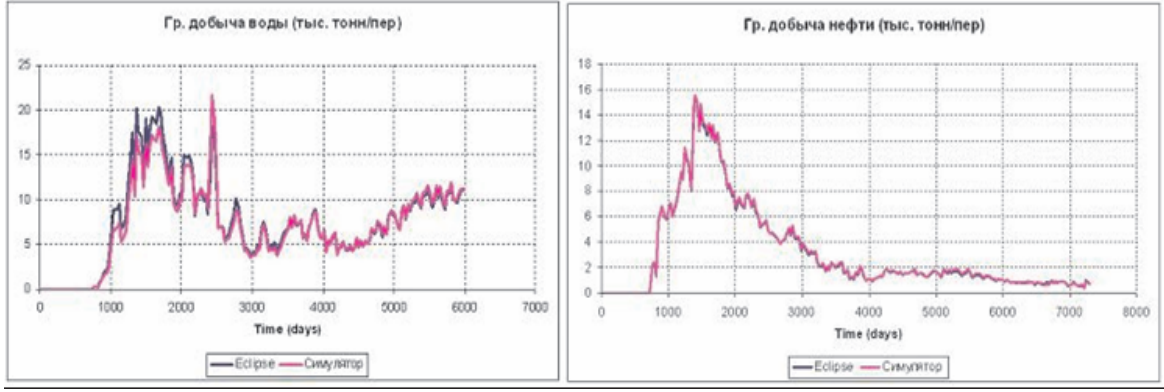


Рис. 2. Групповая добыча нефти и воды (тыс. тонн)

где P и U — сеточные функции функций p и u соответственно, g^{ab} — матрица билинейной формы. Здесь положительное направление определено от точки А к точке В и от точки С к точке В.

Таким образом, из теоремы Остроградского-Гаусса получается алгебраическое равенство:

$$\sum_i V_i u_i \langle \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle_i = \sum_{\Omega} g^{ab} \Delta_a p \Delta_b u \quad (6)$$

где a, b пробегают все ребра ячейки Ω . По повторяющимся индексам производится суммирование. Приведем подобные члены при u_i получим аппроксимацию оператора дивергенции в каждой ячейке:

$$\langle \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle_i = \frac{\sigma_a g^{ab} \Delta_a p_b}{V_i}, \quad (7)$$

Суммирование производится по всем ребрам, выходящим из точки i . $\sigma_a = \pm 1$ в зависимости от выбора положительного направления вдоль ребра a , V_i — объем присоединенный к точке i .

Алгоритм построения g^{ab} стандартен⁴. По лемме Лакса-Мильграмма решение уравнения принадлежит пространству $H_0^1 \cap H^2$. Из стандартных свойств аппроксимации функций из $H_0^1 \cap H^2$ следует⁵, что точное решение можно аппроксимировать в каждой ячейке Ω функциями из линейной оболочки $L(\Omega) = \operatorname{span}\{1, x, y\}$ с точностью $O(h^2)$. Тогда потребуем для каждой

⁴ А. А. Самарский, А. В. Колдоба, Ю. А. Повещенко, В. Ф. Тиликин, А. П. Фаворский — Разностные схемы на нерегулярных сетках // Минск, 1996

⁵ Ф. Сьярле — Метод конечных элементов для эллиптических задач // изд. Москва, 1980

ячейки Ω точного совпадения непрерывной энергии $\int_{\Omega} \hat{K} \nabla p \nabla p dV$ и разностной $g^{ab} \Delta p_a \Delta p_b$ на функциях из $L(\Omega)$. Это даст нам возможность конкретизировать g^{ab} . В работе приводятся три теоремы и их доказательства, которые во многом схожи с результатами А.А. Самарского и А.Х. Пергамент и М.Ю. Заславского⁶.

Теорема 1. (А.Х.Пергамент, В.А.Семилетов, 2007) Существуют g^{ab} такие, что $\int_{\Omega} (\hat{K} \nabla p, \nabla p) dV = g^{ab} \Delta p_a \Delta p_b$ для $p \in L(\Omega)$, и они могут быть представлены в виде

$$g^{ab} = \sum_{\varphi} S_{\varphi} (\hat{K} \mathbf{l}^a, \mathbf{l}^b) \quad (8)$$

Здесь суммирование производится по всем общим узлам граней a, b рассматриваемой ячейки, $(\hat{K} \mathbf{l}^a, \mathbf{l}^b)$ есть евклидово скалярное произведение векторов $\hat{K} \mathbf{l}^a$ и \mathbf{l}^b , где $\mathbf{l}^a, \mathbf{l}^b$, сопряженные векторам $\mathbf{l}_a, \mathbf{l}_b$, т.е. $(\mathbf{l}^a, \mathbf{l}_b) = \delta_b^a$ (направленные из вершины φ); S_{φ} есть некоторые площади, присоединенные к узлу φ и сумма которых равна площади S_{Ω} ячейки Ω .

Таким образом, очевидно, что определяемое формулой g^{ab} выражение для энергии действительно положительно. G — метрический оператор, порожденный в каждой ячейке метрическим тензором g^{ab} . Далее нам понадобится еще несколько свойств g^{ab} , а также оператора G . Действительно, предположим для ячеек грубой сетки справедливы условия C_{φ} и C_l такие, что $C_{\varphi} \leq \varphi \leq \pi - C_{\varphi}$ и $\frac{1}{C_l} \leq \frac{|a|}{|b|} \leq C_l$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. (А.Х.Пергамент, В.А.Семилетов, 2007) Пусть сделанные выше предположения относительно сетки выполнены. Тогда определяемые формулой (8) g^{ab} удовлетворяют неравенствам: $G \geq \beta I$, $\sum_b |g^{ab}| \leq \gamma$, причем оценки выполнены равномерно для всех рассматриваемых сеток и ячеек.

⁶М. Ю. Заславский, А. Х. Пергамент — Алгоритмы осреднения и метод опорных операторов в эллиптических задачах с разрывными коэффициентами // ЖВМиМФ, Т.45, №9, с 1616-1627, 2005

Как и для случая скалярных коэффициентов в двумерной области доказывается теорема об аппроксимации потоков и строятся V_i и S_φ для случая тензорных коэффициентов.

Теорема 3. (А.Х.Пергамент, В.А.Семилетов, 2007) Существуют такие площади V_i и S_φ , что

$$\|q - Q\|_E = \sqrt{\sum_M g^{ab}(q_a - Q_a)(q_b - Q_b)} \leq Ch\|p\|_{HL^1(\hat{K}, D)},$$

Q_a — разностный аналог $q_a = -\int \nabla p \mathbf{ds}$, p и P — точное и разностное решения соответственно. $\|\cdot\|_E$ — энергетическая норма.

Доказательство данной теоремы сводится к доказательству равенства потоков для функций $p \in L(\Omega)$:

$$g^{ab}Q_b + \int_a (\hat{K} \nabla p, \mathbf{ds}) = 0,$$

при этом интеграл берется для части присоединенного ребра a , находящейся в ячейке Ω . Оказывается, что данное равенство выполняется точно на функциях из линейной оболочки $\{1, x, y\}$, когда $S_\varphi = \frac{1}{2}S_{\Delta_\varphi}$, где Δ_φ — треугольник, опирающийся на ребра, составляющие угол φ , а границы V_i являются отрезками, соединяющими центры ячеек и центры граней.

Далее рассматривается метод опорных операторов для трехмерных задач. В трехмерной области в общем случае построить присоединенные объемы не получается. Но для задач фильтрации характерны шестигранные сетки, у которых есть четыре параллельных ребра. Как показано в работе [14], на таких сетках можно построить присоединенные объемы, таким образом, что будет справедлива теорема об аппроксимации потоков. При этом присоединенные объемы, которые входят в выражения для компонент квадратичной формы, имеют вид: $S_\varphi = \frac{1}{8}(\mathbf{l}_a, \mathbf{l}_b, \mathbf{l}_c)$, где $\mathbf{l}_a, \mathbf{l}_b, \mathbf{l}_c$ — векторы, лежащие на гранях, с общей вершиной φ , а границы присоединенных объемов к узлам являются плоскостями, натянутым на центры ребер, центры граней и центр ячейки.

В разделе 2.2 проводится обобщение метода опорных операторов на случай сетки с неоднородными ячейками.

Очевидно, что для неоднородных ячеек аппроксимировать решение линейными функциями не представляется возможным, в силу разрывности коэффициентов. Базисные функции должны обладать теми же свойствами гладкости, что и полное решение, а именно: должна сохраняться непрерывность на разрывах коэффициентов функций и непрерывности нормальных компонент потока и тангенциальных компонент градиента.

Определить базисные функции аналитически для ячейки с произвольной структурой невозможно, но их можно определить численно с достаточной точностью из решения эллиптических задач на мелкой сетке. Для определения базисных функций $\{\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z\}$ решаются три эллиптических задачи со специальными граничными условиями в каждой ячейке грубой сетки. Область сильно неоднородная, поэтому необходимо использовать граничные условия, адаптированные к структуре среды. В диссертационной работе предлагается это сделать, используя решения сначала одномерных задач на ребрах, а затем решения двумерных задач на гранях. В работах⁷ было предложено определять краевые условия из решения одномерных эллиптических задач на ребрах. В диссертационной работе вычисляются подобным образом граничные условия для трехмерных ячеек: на двух противоположных гранях задается перепад давления, и для каждой грани решается эллиптическое уравнение с граничными условиями, определенными из решения одномерных эллиптических уравнений на ребрах. Таким образом, имеем три базисные функции с нужными свойствами.

При этом предполагается, что сетка и структура среды таковы, что функции $\{\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z\}$ — линейно независимые, якобиан перехода к новым координатам внутри ячейки неотрицателен.

Таким образом, данные функции являются базисными, линейные комбинации которых аппроксимируют решение в каждой укрупненной ячейке со вторым порядком точности. Данные функции будем использовать вместо

⁷J. E. Efendiev, T. Hou, V. Cinting — Multiscale Finite Elements for Nonlinear Problem and Their Application // Computational Mathematic Science, 2, pp. 553-598, 2004

F. Brezzi — Interacting with the Subgrid World, in Numerical analysis 1999 (Dundee), Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000, pp. 69-82

линейных функций для построения аппроксимации оператора дивергенции методом опорных операторов.

По аналогии со стандартным методом опорных операторов из равенства энергий определяются компоненты билинейной формы для каждого угла φ ячейки Ω :

$$AG_\varphi A^T = D,$$

$$A = \begin{pmatrix} \Delta_a \varphi_x & \Delta_b \varphi_x & \Delta_c \varphi_x \\ \Delta_a \varphi_y & \Delta_b \varphi_y & \Delta_c \varphi_y \\ \Delta_a \varphi_z & \Delta_b \varphi_z & \Delta_c \varphi_z \end{pmatrix}, \quad G_\varphi = \begin{pmatrix} g_\varphi^{aa} & g_\varphi^{ab} & g_\varphi^{ac} \\ g_\varphi^{ab} & g_\varphi^{bb} & g_\varphi^{bc} \\ g_\varphi^{ac} & g_\varphi^{bc} & g_\varphi^{cc} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \int_\Omega (\hat{K} \nabla \varphi_x, \nabla \varphi_x) dV & \int_\Omega (\hat{K} \nabla \varphi_x, \nabla \varphi_y) dV & \int_\Omega (\hat{K} \nabla \varphi_x, \nabla \varphi_z) dV \\ \int_\Omega (\hat{K} \nabla \varphi_x, \nabla \varphi_y) dV & \int_\Omega (\hat{K} \nabla \varphi_y, \nabla \varphi_y) dV & \int_\Omega (\hat{K} \nabla \varphi_y, \nabla \varphi_z) dV \\ \int_\Omega (\hat{K} \nabla \varphi_x, \nabla \varphi_z) dV & \int_\Omega (\hat{K} \nabla \varphi_y, \nabla \varphi_z) dV & \int_\Omega (\hat{K} \nabla \varphi_z, \nabla \varphi_z) dV \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$G_\varphi = A^{-1} D (A^T)^{-1}.$$

Достаточным условием аппроксимации первого порядка $O(h)$ оператора дивергенции будет использование в ячейке билинейной формы $G = \sum_\varphi d_\varphi G_\varphi$, где $\sum_\varphi d_\varphi = 1$, $d_\varphi > 0$. В качестве d_φ и V_i будем использовать те же, что получены для однородных ячеек, при этом условие потоков выполняется в слабом смысле [14].

Также во второй главе в разделе 2.3 обсуждаются проблемы ремасштабирования (осреднения).

В данной работе предлагается метод ремасштабирования, основанного на принципе равенства энергий. Для каждой ячейки грубой сетки имеем уравнения с неизвестными компонентами тензора проницаемости \hat{K}_{ij} :

$$\int_\Omega (\hat{K} \nabla p^l, \nabla p^m) dV = \sum_\varphi S_\varphi (\hat{K}_{eff} \mathbf{l}^a, \mathbf{l}^b)_\varphi \Delta_a p^l \Delta_b p^m,$$

Здесь p^l, p^m те же базисные функции, которые использовались для построения аппроксимации оператора дивергенции обобщенным методом

опорных операторов, и с теми же свойствами. Важно отметить, что таким образом, мы имеем симметричный, положительно-определенный тензор проницаемости.

Частым случаем на практике является система параллельных разрывов, для которых удастся построить аналитические базисные функции даже в случае тензорных коэффициентов проницаемости:

$$\begin{aligned}
 p^1 &= \int_0^{(\mathbf{n}, \mathbf{r})} \frac{ds}{(\hat{K}(s)\mathbf{n}, \mathbf{n})}, & p^2 &= (\mathbf{m}, \mathbf{r}) - \int_0^{(\mathbf{n}, \mathbf{r})} \frac{(\hat{K}(s)\mathbf{m}, \mathbf{n})}{(\hat{K}(s)\mathbf{n}, \mathbf{n})} ds, \\
 p^3 &= (\mathbf{w}, \mathbf{r}) - \int_0^{(\mathbf{n}, \mathbf{r})} \frac{(\hat{K}(s)\mathbf{w}, \mathbf{n})}{(\hat{K}(s)\mathbf{n}, \mathbf{n})} ds.
 \end{aligned} \tag{9}$$

В разделе 2.4 приведены результаты расчетов, которые демонстрируют эффективность методов осреднения для однофазных задач. Данные результаты показали эффективность алгоритмов осреднения для задач однофазной фильтрации. Но в случае моделирования процесса заводнения время прорыва воды определяется некорректно.

Третья глава посвящена алгоритму моделирования по подобластям. В разделе 3.1 описывается постановка задачи. Для упрощения рассматривалась двухфазная модель без учета сжимаемости флюидов, влияния гравитации и капиллярных сил.

В разделе 3.2 описывается алгоритм решения. Здесь использовалась идея определения модели по подобластям⁸. Сначала во всей области на грубой сетке решается уравнение давления с помощью обобщенного метода опорных операторов. Далее исходная модель разделяется на подобласти с приемлемым количеством активных ячеек. Затем для каждой подобласти на исходной сетке решается полная задача фильтрации с граничными условиями второго рода, определенными из решения уравнения давления на грубой сетке. Таким образом, реализуется алгоритм ремасштабирования-демасштабирования.

⁸*R.E. Bank, M. Holst* — A New Paradigm for Parallel Adaptive Meshing Algorithms // SIAM Rev., Vol.45, No.2, 2003

Раздел 3.3 представлены результаты расчета реальной трехмерной задачи с неортогональной сеткой в неоднородной области с длительным периодом разработки месторождения.

В области сложной геометрией (рис. 3) задана сетка, адаптированная к структуре среды. Размеры области по латерали 5475 м x 3275 м, минимальная глубина 2238.5 м, максимальная глубина 2332.2 м. Сетка содержит 500 000 ячеек (100 x 100 x 50), при этом $h_x = 54.75$ м, $h_y = 32.75$ м, $h_z = [0.39 \text{ м}, 0.53 \text{ м}]$. Значения пористости от 0.184 до 0.264, проницаемости от 3 мД до 300 мД. Начальные условия: пластовое давление 400 бар, пласт полностью насыщен нефтью. Разработка велась 13 добывающими и 4 нагнетательными скважинами в режиме полной компенсации добычи закачкой в течение 17 лет.

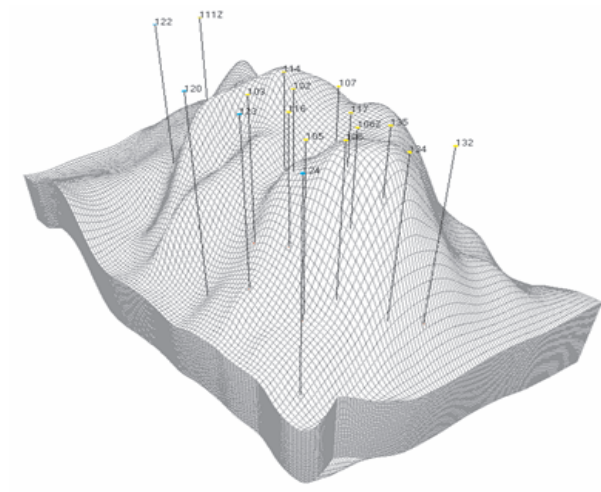


Рис. 3. Сетка

Исходная область разбивалась на 4 подобласти равномерно по осям Ox , Oy . При расчете давления многомасштабным методом сетка укрупнялась в 10 раз. Сравнение результатов расчета на исходной сетке и по секторам представлено на рисунках ниже.

На рис. 5 изображена относительная разница давлений в процентах, рассчитанных на исходной модели и при помощи рассматриваемого метода. Расхождение результатов лежит в рамках допустимой погрешности для данного класса задач.

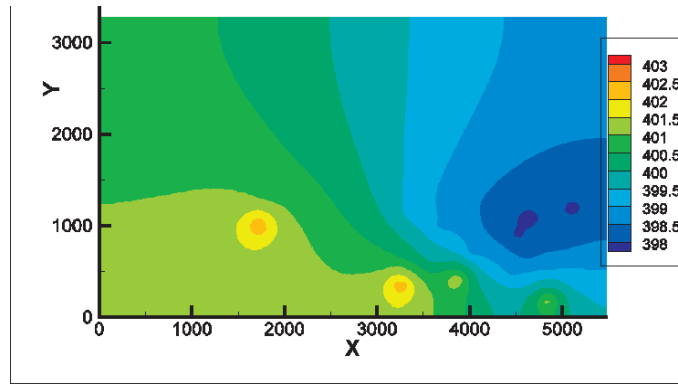


Рис. 4. Поле давления на конечную дату разработки при расчете полной модели. Вид сверху

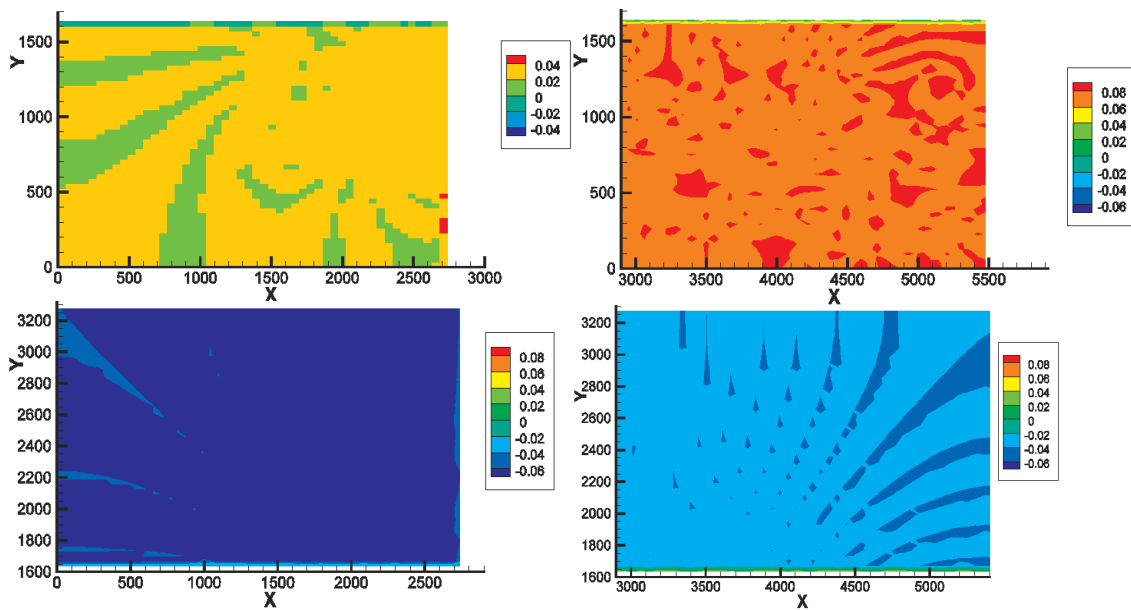


Рис. 5. Относительная разница давлений в процентах по всем подобластям

Очевидно, что изменение поля насыщенности происходит в районе закачивающих скважин. На рис. 6 представлено распределение насыщенности вокруг трех скважин, рассчитанное на исходной сетке, и абсолютная разница насыщенностей, рассчитанных по исходной модели и на подобласти. Из приведенных результатов видно, что расхождения составляют меньше полпроцента.

В **Заключении** изложены основные результаты и выводы.

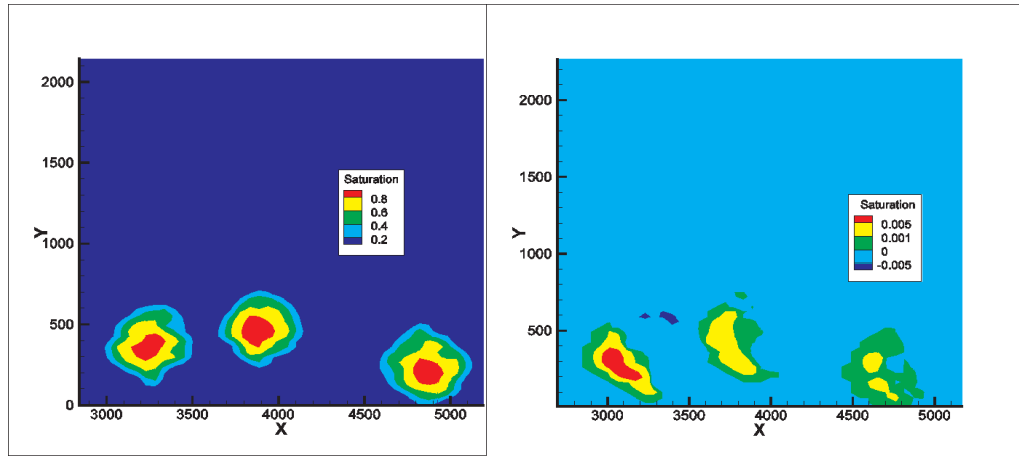


Рис. 6. Распределение насыщенности и абсолютная разница насыщенностей

Результаты и выводы диссертации

1. Предложен и обоснован эффективный алгоритм моделирования по подобластям, основанный на корректном определении фильтрационных потоков отдельных фаз флюидов многомасштабным методом
2. Разработан физически и математически обоснованный метод ремасштабирования на основе вариационного принципа равенства энергий
3. Обобщен метод опорных операторов на случаи ячеек с тензорными коэффициентами и ячеек со сложной структурой, в том числе построен присоединенный объем в 3D случае, характерном для задач фильтрации.

Список работ автора по теме диссертации

1. *А. Х. Пергамент, В. А. Семилетов* — Метод опорных операторов для задач фильтрации в анизотропных однофазных средах // Препринт ИПМ № 142, Москва, 2005
2. *A.K.Pergament, V.A.Semiletov and M.Y.Zaslavsky* — Multiscale Averaging Algorithms for Flow Modeling in Heterogeneous Reservoir // 10th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery (ECMOR X), Amsterdam, The Netherlands, Proceedings pap.no.P014, 9/4-7/2006

3. *А. Х. Пергамент, В. А. Семилетов* — Метод опорных операторов для эллиптических и параболических краевых задач с разрывными коэффициентами в анизотропных средах // Матем. моделирование, 19:5, 105-115, 2007
4. *А. Х. Пергамент, В. А. Семилетов* — Метод опорных операторов для анизотропных сред и алгоритмы осреднения // Ломоносовские чтения, 2007
5. *А. Х. Пергамент, В. А. Семилетов* — Ремасштабирование и многосеточные алгоритмы для эллиптических краевых задач с разрывными коэффициентами // Всероссийская конференция по вычислительной математике КВМ-2007, г. Академгородок, Новосибирск, Россия, 18-20 июня 2007
6. *A. Kh. Pergament, P. Y. Tomin, V. A. Semiletov* — Mathematical Modeling of Multiphase Flow in Fracture Media // 11th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery (ECMOR XI), Bergen, Norway, 08 September 2008
7. *A. K. Pergament, V. A. Semiletov, P. Y. Tomin* — Multiscale Asynchronous Algorithms Based on the Superelements Method for Multiphase Flow // ECMOR XI, Bergen, Norway, 08 September 2008
8. *Н. А. Марченко, А. Х. Пергамент, С. Б. Попов, В. А. Семилетов, П. Ю. Томин* — Иерархия явно-неявных разностных схем для решения задач многофазной фильтрации // Препринт ИПМ № 97, Москва, 2008
9. *А. Х. Пергамент, В. А. Семилетов* — Алгоритмы осреднения при моделировании многофазной фильтрации в трещиноватых средах, Международная конференция // Современные проблемы газовой и волновой динамики, Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 21-23 апреля 2009

10. *А. Х. Пергамент, В. А. Семилетов* — Разностные схемы и алгоритмы осреднения для многофазной фильтрации в анизотропных средах // Ломоносовские чтения, апрель 2009
11. *А. Х. Пергамент, В. А. Семилетов, П. Ю. Томин* — Многомасштабный метод численного моделирования многофазной фильтрации для гигантских нефтегазовых месторождений // Ломоносовские чтения, апрель 2010
12. *A.K. Pergament, V.A. Semiletov, P.Y. Tomin* — Multiscale Method for Numerical Simulation of Multiphase Flows in Giant Production Fields // 12th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery (ECMOR XII), Oxford, UK, 6-9 September 2010
13. *Д.Ю. Максимов, В.А. Семилетов, П.Ю. Томин* — Проблема ремасштабирования в трехмерных задачах многофазной фильтрации // XVIII Всероссийской конференции «Теоретические основы конструирования численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященной памяти К.И. Бабенко, сентябрь 2010
14. *А. Х. Пергамент, В. А. Семилетов, П. Ю. Томин* — О некоторых многомасштабных алгоритмах секторного моделирования в задачах многофазной фильтрации // Математическое моделирование, 22:11, стр. 3-17, 2010