

## ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

доктора физико-математических наук, главного научного сотрудника ИДСТУ СО РАН Булатова Михаила Валерьяновича на диссертационную работу Семисалова Бориса Владимировича «Моделирование течений вязкоупругих полимерных сред и слаботурбулентных процессов в бозе-газах на основе дробно-рациональных приближений и алгоритмов без насыщения», представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

### Актуальность диссертационного исследования

Диссертация Семисалова Бориса Владимировича посвящена разработке и применению методов математического и численного моделирования для решения двух актуальных научных проблем.

Проблема 1 состоит в достоверном математическом описании и расчёте течений несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости, возникающих в технологиях экструзии, печати и напыления, а также в моделировании процессов установления и потери устойчивости таких течений в каналах принтеров и экструдеров.

Проблема 2 заключается в верификации и развитии современных методов математического описания турбулентных течений в жидкостях и газах, в режиме, когда вклад нелинейных эффектов является достаточно малым. Речь идёт о теории волновой турбулентности.

Важное наблюдение соискателя состоит в том, что для результативного анализа указанных проблем необходимо учитывать характерные свойства возникающих математических формулировок: информацию о гладкости и об особенностях искомых решений. Из численных и аналитических результатов, представленных в диссертации, можно заключить, что искомые решения имеют высокую гладкость (по-видимому, являются аналитическими), но при этом их аналитические продолжения имеют особые точки (полюса или точки ветвления), которые, с одной стороны, характеризуют качественные свойства решений, а с другой – принципиальным образом усложняют численный анализ рассмотренных процессов. Для построения вычислительных алгоритмов в этом случае требуется разработка специальных методов приближения решений и новых алгоритмов их поиска. Такие методы и алгоритмы были построены и детально изучены в диссертации, что позволило существенно продвинуться в анализе двух указанных проблем и получить эффективный инструмент (численный алгоритм) для решения задач с особенностями, возникающих во многих приложениях за рамками диссертационного исследования.

## Структура диссертации

Работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы и включает четыре приложения.

Во введении приведён обзор литературы по двум рассмотренным проблемам, а также по методам полиномиальных и дробно-рациональных приближений функций, по методам без насыщения и по применению методов коллокаций и установления для решения нелинейных дифференциальных уравнений; сформулированы основные результаты диссертации, обоснованы их новизна и значимость; даны сведения о личном вкладе соискателя и об апробации работы.

В главе 1 разработаны варианты полиномиальных и дробно-рациональных барицентрических интерполяций (ДРБИ) для поиска решений задач Коши и краевых задач для дифференциальных уравнений. В комбинации с методом коллокации созданные приближения обеспечивают автоматический учёт начальных и граничных условий. С использованием тензорных произведений построенных приближений получены аппроксимации функций нескольких переменных. Обоснованы значительные преимущества применения дробно-рациональных приближений в тех случаях, когда искомое решение имеет особенности (полюса, точки ветвления, экспоненциальные пики), см. рис. 1.3. Получены оценки погрешности созданных приближений. Выведены матрицы, аппроксимирующие операторы дифференцирования в краевых задачах с различными типами условий на границах. Рассчитаны числа обусловленности, нормы и спектральные разложения этих матриц и матриц, возникающих в их спектральных разложениях. При этом с использованием интервальных методов даны оценки радиусов интервалов, гарантированно содержащих указанные величины. Разработаны методы интегрирования функций с особыми точками, находящимися на границах отрезка интегрирования, или в малой окрестности границы. Получены оценки погрешности методов.

Глава 2 посвящена разработке нескольких вариантов нелокального метода без насыщения (НМБН) для решения краевых и начально-краевых задач для уравнений с частными производными и задач Коши для интегро-дифференциальных кинетических уравнений. Метод использует приближения решения единой функцией во всей области задачи (отсюда, по-видимому, возник термин “нелокальный метод”) – полиномом, ДРБИ или их произведениями, описанными в гл. 1. Также применяются метод коллокаций, метод установления и оригинальный способ записи системы линейных уравнений, соответствующих дифференциальной задаче. В главе 2 доказана теорема о сходимости метода в линейной задаче, получены оценки объёмов памяти и числа операций метода, выведены апостериорные оценки погрешности метода и вычислительной

погрешности, охарактеризована их связь с гладкостью искомого решения. Метод апробирован на тестовых задачах с известными точными решениями различной гладкости, в том числе с аналитическими решениями, имеющими особые точки. Показана высокая скорость сходимости метода и его эффективность с точки зрения соотношения “точность / время работы”. С применением декомпозиции области задачи и метода Шварца разработаны обобщения созданного метода для решения задач достаточно сложной геометрии. Даны полезные комментарии о реализации метода в виде комплекса программ для ЭВМ и о возможностях его дальнейшего развития.

В главе 3 описан вариант модели течения несжимаемой вязкоупругой проводящей полимерной жидкости, учитывающий температурные и магнитные эффекты, характерные для процессов экструзии и печати изделий с применением материалов на полимерной основе. Даны постановки задач о течениях, схожих по своим качественным свойствам с течениями Пуазейля для ньютоновской жидкости. Показано, что задачи о стационарном течении могут иметь несколько (до трёх) решений высокой гладкости. В расчётах на установление определено, какое из этих решений является устойчивым. Проведена верификация численных решений путём сравнения результатов, полученных тремя разными методами: разработанным методом, методом конечных элементов, методом коллокаций и наименьших квадратов. Показано совпадение полученных решений в широком диапазоне параметров модели с точностью до трёх–пяти знаков. Важным результатом главы 3 являются точные стационарные решения задачи об осесимметричном течении полимерной жидкости в цилиндрическом канале. Анализ условий существования этих решений позволил соискателю сформулировать условия потери устойчивости пуазейлевского течения, означающей переход к более сложной динамике. Эти условия связаны с положением точек ветвления найденных точных решений. Далее эти условия удалось распространить на случай неизотермического течения. Однако при этом решения задачи и положения особых точек при различных значениях параметров модели удалось найти только численно.

В главе 4 сформулированы и решены важные проблемы, касающиеся верификации теории волновой турбулентности. Конкретно, исследованы отклонения турбулентных спектров (а также их статистик), рассчитанных в рамках динамической и кинетической моделей на больших интервалах по времени. Получены уточнения и корректировки классических решений Колмогорова–Захарова в ситуации, когда локальность волновых взаимодействий может нарушаться; проведены вычисления автомодельных спектров первого и второго рода.

В заключении подведены итоги работы и указаны перспективы развития предложенных методов. В приложениях приведены: перечень теоретических

результатов, использованных в работе, с указанием ссылок на первоисточники; доказательства утверждений, сформулированных в диссертации; анализ матричных аппроксимаций операторов дифференцирования в краевых задачах с различными типами условий; перечень значений параметров обобщённой мезоскопической модели, полученных по данным из экспериментальных работ.

### **Научная новизна работы**

Отметим прежде всего новый подход к аппроксимации решений краевых и начально-краевых задач, основанный на применении дробно-рациональных барицентрических интерполяций. Такой подход является существенным развитием классических спектральных методов, в которых используются ортогональные системы полиномов. Мотивация разработки этого подхода состоит в необходимости значительного увеличения скорости сходимости метода, когда искомое решение имеет существенные особенности: большие градиенты, разрывы производных, особые точки в малой окрестности области задачи. Эффективное решение этой проблемы, по-видимому, невозможно найти при использовании аппроксимаций бесконечномерных классов функций линейными подпространствами. Нужны нелинейные способы аппроксимации, одним из которых, как раз, является дробно-рациональное приближение. Применение таких приближений для поиска решений дифференциальных уравнений наталкивается на множество фундаментальных проблем, связанных с неограниченным ростом значений дробно-рациональных функций, с линеаризацией уравнений на их коэффициенты, возникновением ложных полюсов, аппроксимацией функций с точками ветвления и с другими проблемами. Подход, предложенный в диссертации, является демонстрацией возможностей решения этих проблем на практике и больших перспектив этого направления.

Значительная новизна содержится в способе сведения дифференциальной модели к задаче линейной алгебры (этот способ восходит к работам соискателя с его учителем, А.М. Блохиным, где он был использован для построения численных методов, удовлетворяющих аналогам априорных оценок на норму решения дифференциальной задачи). Принципиальный шаг, сделанный в этом направлении лично соискателем, – создание аппроксимаций уравнений второго порядка в двумерных и трёхмерных задачах в виде матричного уравнения Сильвестра и его тензорных обобщений, что в совокупности с ортогональными разложениями матриц, аппроксимирующих операторы дифференцирования, позволило на несколько порядков сократить число операций, необходимых для решения задачи.

В работе сформирован новый взгляд на проблему устойчивости течений пуазейлевского типа вязкоупругой полимерной жидкости. Соискатель предложил находить условия потери устойчивости течения из условий существования решений соответствующей краевой (начально-краевой) задачи. Идея соискателя является понятной: если решение уравнений, описывающих течение с прямыми линиями тока, перестаёт существовать, значит течение приобретает более сложную структуру, завихрения и т.п. В диссертации показано, что разрушение решения связано с возникновением у его аналитического продолжения особых точек. Анализ их положения позволил сформулировать новый критерий потери устойчивости течения.

Новизна содержится в результатах главы 4: впервые на большом интервале по времени проведено сопоставление спектров динамического уравнения Гросса–Питаевского и соответствующего кинетического уравнения; найдены уточнения классических стационарных решений кинетического уравнения, позволившие правильно трактовать данные экспериментальных работ.

#### **Теоретическая значимость и практическая ценность работы. Рекомендации по использованию её результатов**

Следующие результаты имеют существенную теоретическую значимость, либо практическую ценность:

1. Варианты дробно-рациональных приближений для решения краевых и начально-краевых задач. Оценки погрешности этих приближений
2. Методы расчёта интегралов столкновения, имеющие высокую скорость сходимости.
3. Формулы элементов матриц, аппроксимирующих операторы дифференцирования с различными типами краевых условий.
4. Форма записи задач линейной алгебры, соответствующих рассмотренным дифференциальным уравнениям и методы решения этих задач.
5. Апостериорные оценки погрешности разработанного численного метода.
6. Критерий потери устойчивости течений полимерной жидкости с прямыми линиями тока в каналах.
7. Данные об отклонениях турбулентных спектров при решении динамических и кинетических уравнений.

8. Стационарные и автомодельные решения кинетического уравнения, описывающего однородные изотропные взаимодействия волн в бозе-газе.

Разработанные алгоритмы и комплексы программ могут быть использованы для решения нелинейных задач с особенностями из различных областей математической физики. Результаты диссертации полезны для развития технологий экструзии и печати с применением полимерных материалов и для исследования турбулентных течений в бозе-газах и нелинейных оптических системах.

### **Обоснованность и достоверность положений, выносимых на защиту**

Существенная часть диссертации посвящена обоснованию и верификации предложенных методов и полученных результатов. В этом направлении проведены следующие работы:

1. Доказательства оценок погрешности разработанных методов и проведение значительного количества тестовых расчётов на сходимость.
2. Сопоставление результатов расчётов, полученных на основе метода, предложенного в диссертации, с решениями, найденными методом конечных элементов и методом коллокаций и наименьших квадратов.
3. Проверка аналитических решений задачи о течении полимерной жидкости в цилиндрическом канале и стационарных решений кинетического уравнения, с помощью численных экспериментов.
4. Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными.

### **Дискуссионные позиции и замечания**

1. Модификации полиномиальных и дробно-рациональных интерполяций, предложенные в работе, состоят во введении дополнительных множителей и слагаемых, позволяющих при решении краевых задач методом коллокаций реализовать нужный тип граничных условий. Могут ли предложенные модификации замедлить сходимость или негативно повлиять на устойчивость исходных использованных приближений и разработанных методов?

2. В диссертации использованы адаптации барицентрического приближения при изменении положения узлов. Можно ли адаптировать это приближение, изменяя значения весов? Каким образом?
3. В тексте Замечания 1.7 на стр. 77 при рассмотрении «чистой» задачи Неймана следует сформулировать дополнительные условия, обеспечивающие её корректность.
4. Можно ли использовать другие системы ортогональных функций в рамках разработанного алгоритма (в частности, полиномы Чебышёва второго рода)?

### **Оформление работы и представление результатов**

Отметим высокое качество оформления текста работы. В работе приведены детальные выкладки всех полученных аналитических результатов, а описание вычислительных алгоритмов и проведённых экспериментов сделано так, что любой из расчётов можно воспроизвести. Результаты моделирования являются наглядными и сопровождаются графиками и таблицами. Отметим скрупулёзность соискателя в проставлении ссылок на литературу: при том, что количество ссылок довольно большое, соискатель цитирует только ту литературу, которая имеет непосредственное отношение к рассмотренным им проблемам; при использовании результатов из монографий, либо обзорных статей поставлены ссылки на конкретные параграфы и страницы.

Представление содержания диссертационной работы в рецензируемых журналах и уровень апробации её основных результатов являются вполне достаточными. По работе имеется 19 публикаций из списка изданий, рекомендованных ВАК, а также 3 свидетельства о регистрации комплексов программ для ЭВМ. Список научных мероприятий (конференций и семинаров), где обсуждались результаты диссертации, является внушительным и насчитывает порядка 30 позиций.

Автореферат соответствует содержанию диссертации.

### **Заключение**

Диссертационная работа Семисалова Бориса Владимировича «Моделирование течений вязкоупругих полимерных сред и слаботурбулентных процессов в бозе-газах на основе дробно-рациональных приближений и алгоритмов без насыщения» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по

специальности 1.2.2 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, а также требованиям п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24.09.2013 г. № 842. Соискатель, Семисалов Борис Владимирович, заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук.

Официальный оппонент

доктор физико-математических наук,



Булатов Михаил Валерьянович

04.03.2025

главный научный сотрудник Лаборатории дифференциальных уравнений и управляемых систем Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук».

Почтовый адрес: 664033, Иркутская область, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134

Телефоны: +7 964 746 32 50 (сот.), +7 (3952) 42 44 66 (раб.)

E-mail: mvbul@icc.ru

Подпись г. н. с. Булатова Михаила Валерьяновича заверяю



ВЕРНО.  
ведущий специалист  
по кадрам ИДСТУ СО РАН  
А. Л. СКИТОВИЧ

