

МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

СТРУСИНСКИЙ ПАВЕЛ МИХАЙЛОВИЧ

**ИССЛЕДОВАНИЕ КЛАСТЕРНОЙ МОДЕЛИ ПОТОКОВ И ЕЕ  
ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЫ  
ГОРОДА**

Специальность 05.13.18 —

«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук, профессор  
Буслаев А.П.

Москва – 2016

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>1 Математическое моделирование транспортных потоков</b>	<b>31</b>
1.1 Улично-дорожные сети . . . . .	31
1.2 Авто-транспортные потоки . . . . .	32
1.3 Математическое моделирование транспортных потоков . . . . .	35
<b>2 Кластерные модели тотально-связных потоков на однополосных носителях</b>	<b>40</b>
2.1 Основные понятия и определения . . . . .	40
2.1.1 Взаимодействие ведущего и ведомого кластеров . . . . .	48
2.2 Модель цепочки $n$ кластеров на бесконечной прямой $\mathbb{R}$ . . . . .	50
2.2.1 Постановка задачи . . . . .	50
2.2.2 Качественные результаты . . . . .	53
2.2.3 Численное исследование . . . . .	54
2.3 Модель цепочки $n$ кластеров на кольце . . . . .	55
2.3.1 Постановка задачи . . . . .	55
2.3.2 Качественные результаты . . . . .	56
2.3.3 Численное исследование . . . . .	57
2.4 Компьютерная реализация . . . . .	59
2.5 Исследование движения кластеров на носителе с элементом управления . . . . .	63
2.5.1 Описание . . . . .	63
2.5.2 Постановка задачи . . . . .	64
2.5.3 Свойства . . . . .	65
2.5.4 Компьютерная реализация . . . . .	65
2.5.4.1 Описание . . . . .	66
2.6 Выводы к главе 2 . . . . .	68
<b>3 Кластерное моделирование транспортных потоков на многополосных сетях</b>	<b>69</b>
3.1 Исследование взаимодействия кластеров на двух полосах . . . . .	69
3.1.1 Описание . . . . .	69
3.1.2 Сценарии поведения . . . . .	69
3.1.2.1 Быстрый перестраивается на соседнюю полосу (Перестроение)	69



3.1.2.2	Быстрый кластер преследует медленный (Спарринг) . . . . .	71
3.2	Движение быстрого кластера в потоке медленных по двухполосному носителю	73
3.2.1	Общая постановка задачи . . . . .	73
3.2.2	Просачивание быстрого кластера в потоке медленных кластеров одной плотности. Последовательное перестроение . . . . .	73
3.2.2.1	Постановка задачи . . . . .	73
3.2.2.2	Результаты . . . . .	74
3.2.3	Просачивание быстрого кластера в потоке медленных кластеров одной плотности. Синхронное перестроение . . . . .	74
3.2.3.1	Постановка задачи . . . . .	74
3.2.3.2	Результаты . . . . .	75
3.2.3.3	Численное исследование . . . . .	75
3.2.4	Просачивание быстрого кластера в потоке медленных двух плотностей. Последовательное перестроение . . . . .	76
3.2.4.1	Постановка задачи . . . . .	76
3.2.4.2	Результаты . . . . .	76
3.2.5	Задача просачивания в потоке медленных кластеров двух плотностей. Синхронное перестроение . . . . .	77
3.2.5.1	Постановка задачи . . . . .	77
3.2.5.2	Результаты . . . . .	77
3.2.5.3	Численное исследование . . . . .	78
3.2.6	Задача просачивания потока кластеров на двухполосном носителе . . . . .	79
3.2.6.1	Постановка задачи . . . . .	79
3.2.6.2	Численные результаты . . . . .	80
3.2.7	Задача распределения потоков . . . . .	81
3.2.7.1	Постановка задачи . . . . .	81
3.3	Компьютерная реализация . . . . .	81
3.4	Выводы к главе 3 . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Кластерное моделирование транспортных потоков на сетях</b>	<b>84</b>
4.1	Поток кластеров на одномерных сетях . . . . .	84
4.1.1	Основные понятия и определения . . . . .	84
4.1.2	Исследование движения кластеров на регулярной сети . . . . .	85
4.1.2.1	Постановка задачи . . . . .	85
4.1.2.2	Качественные результаты . . . . .	86
4.1.2.3	Численные результаты . . . . .	86
4.1.3	Задача исследования потоков на нерегулярной сети . . . . .	87
4.1.3.1	Постановка задачи . . . . .	87
4.1.3.2	Результаты . . . . .	88
4.2	Поток кластеров на двумерных сетях . . . . .	89

4.2.1	Исследование движения кластеров на регулярной сети в случае сонаправленного движения . . . . .	89
4.2.1.1	Постановка задачи . . . . .	89
4.2.1.2	Результаты . . . . .	90
4.2.2	Исследование движения кластеров на регулярной сети в случае однонаправленного движения . . . . .	92
4.2.2.1	Постановка задачи . . . . .	92
4.2.2.2	Результаты . . . . .	93
4.2.3	Исследование движения кластеров на регулярной сети в случае сжимаемых кластеров . . . . .	96
4.2.3.1	Постановка задачи . . . . .	96
4.2.3.2	Результаты . . . . .	96
4.2.4	Исследование движения кластеров на квази-регулярной сети . . . . .	98
4.2.4.1	Постановка задачи . . . . .	98
4.2.4.2	Результаты . . . . .	98
4.3	Компьютерная реализация . . . . .	100
4.4	Выводы к главе 4 . . . . .	102
<b>5</b>	<b>Применение кластерной модели для оптимизации транспортных потоков на городских улично-дорожных сетях</b>	<b>103</b>
5.1	Основные компоненты модели на улично-дорожной сети . . . . .	103
5.1.1	Кластеры автомобилей на улично-дорожной сети . . . . .	103
5.1.2	Взаимодействие кластеров . . . . .	105
5.1.3	Базовые носители . . . . .	106
5.2	Исследование взаимодействия транспортных потоков на примере городских УДС	108
5.2.1	Одномерная сеть . . . . .	108
5.2.2	Многополосная сеть . . . . .	108
5.2.3	Соответствие программных данных реальным . . . . .	109
5.3	Сравнительный анализ представленной работы с диссертацией А.М. Ярошенко	111
	<b>Заключение</b>	<b>112</b>
	<b>Библиографический список</b>	<b>113</b>

# Введение

## *Актуальность работы*

Российская Федерация (РФ) занимает первое место в мире по площади своей территории, составляющей около 17 млн. кв. км., опережая такие страны, как Соединенные Штаты Америки, Канада, Китай, Германия и др. Одним из основных признаков экономического развития государства является транспорт, в частности, автомобильный транспорт, который предполагает наличие большой и развитой сети дорог для транспортировки пассажиров и грузов. По стандартному показателю плотности автомобильно-дорожной сети (км/кв.км) РФ находится на 64 месте в мировой классификации<sup>1</sup>.

*Автомобильный транспорт является неотъемлемой частью логистических цепочек в экономике, занимающий значительную позицию на концах транспортных технологических цепочек.* Всего в России к 2014 году насчитывалось 45 млн. автомобилей, что составляло 5 позицию в мире, а по *показателю автомобилизации* - количеству автотранспортных средств на тысячу населения, занимает 50 место<sup>2</sup>.

Значительная часть населения мира в настоящее время проживает в *мегаполисах*, где быстрый рост автомобилизации актуализирует такие проблемы, как география строительства, автомобильная безопасность, транспортные заторы, размещение парковочных мест и т.д. В РФ к настоящему времени насчитывается 15 мегаполисов, в которых проживает 3/4 населения. В частности, в Москве **около 12,5 млн. человек или 8% от общего населения страны**<sup>3</sup>. Транспортная обстановка мегаполисах России ежегодно осложняется непропорциональным развитием автомобилизации и улично - дорожной сети. Отличительной особенностью УДС российских мегаполисов является преобладание сложных транспортных узлов в одном уровне.

Для решения проблем, связанных с возникновением заторов, при традиционном подходе производится реконструкция проблемных участков, что, как правило, приводит к переносу места возникновения затора и последующим реконструкциям новых проблемных участков. Насыщенное и критическое автомобильно-дорожное движение на УДС мегаполисов характеризуется нелокальными откликами транспортной обстановки даже на локальные изменения (возмущения).

---

<sup>1</sup>Stainfo[Электронный ресурс]: [веб-сайт] – Плотность автомобильных дорог. Режим доступа: [http : //www.stainfo.biz/Geomap.aspx](http://www.stainfo.biz/Geomap.aspx)

<sup>2</sup>Автостат[Электронный ресурс]: [веб-сайт] – Общее количество машин в России. Режим доступа: [http : //www.autostat.ru/](http://www.autostat.ru/)

<sup>3</sup>Росстат[Электронный ресурс]: [веб-сайт] – Численность населения России. Режим доступа: [http : //www.gks.ru](http://www.gks.ru)

В настоящее время существуют два полярных подхода к моделированию АТП – это классический "плотность-скорость-интенсивность" восходящий к работам Гриншилдса, Лайтхилла-Уизема-Ричардса и их последователей и агентный, когда моделируется поведение каждого участника и, тем самым, количество параметров в несколько раз больше. Каждый из этих подходов имеет собственную сферу применения, которые в совокупности еще в недостаточной мере описывают "насыщенные потоки на сложных сетях".

*Агентные имитационные пакеты моделируют поведение отдельных участников транспортного потока (PTV Vision, VISUM/VISSIM, AIMSUN), учитывая большое количество индивидуальных параметров каждого автомобиля (ускорение, траектория движения, характер управления автомобилем и т.д.), что, в условиях насыщенных потоков на значительной территории (например, в крупном городе) приводит к росту погрешности в вычислениях и достаточно большим ошибкам в результатах.* Также, из-за большого количества учитываемых характеристик сложность теоретического анализа агентных моделей увеличивается. В классических гидродинамических моделях поток рассматривается как единое целое и описывается тремя основными параметрами: интенсивностью  $q$ , скоростью  $v$  и плотностью  $\rho$ , чего, как показывает опыт, недостаточно для моделирования насыщенных потоков на сложных сетях.

Таким образом, актуальные задачи построения моделей, которые бы детализировали классические подходы и не имели бы проблем, сопровождающих задачи большой размерности.

В данной работе исследуется один из новых подходов к моделированию потоков на сетях – *NODE-модель*<sup>4</sup> (Nonlinear Ordinary Differential Equations), которая синтезирует основные классические положения теории транспортных потоков: модель следования за лидером [Greenshields B.D., 1933], волновую модель [Lighthill M.J., Whitham G.B., 1955], клеточные автоматы и агентные модели [Nagel K., Schreckenberg M. A, 1992], и позволяет абстрагироваться от некоторых деталей. При этом *размерность задачи – количество контролируемых параметров, увеличивается по сравнению с классическими тремя* (интенсивность  $q$ , скорость  $v$ , плотность  $\rho$ ), но в значительно меньшей степени, чем в клеточных автоматах и агентном моделировании.

#### *Цель исследования*

Установление качественных и количественных закономерностей поведения потоков на сложных многокомпонентных сетях, выявление устойчивых режимов движения, эффектов самоорганизации и полной остановки, динамики заторов и их влияния на сеть города в целом.

#### *Задачи диссертационной работы*

1. Обзор существующих теорий и методов моделирования транспортных потоков с целью их возможного применения к проблеме оптимизации сетей и управлению движением;
2. Анализ модели многоканальных транспортных потоков на сетях;
3. Численное и качественное исследование характеристик транспортных потоков на регулярных сетях;

<sup>4</sup>Bugaev A.S., Buslaev A.P., Kozlov V.V., Yashina M.V., Distributed problems of monitoring and modern approaches to traffic modeling, 14th International IEEE conference on intelligent transportation systems (ITSC-2011), Washington, USA, 2011, pp 477-481.

4. Разработка методики изучения характера изменения поведения транспортного потока в зависимости от параметров движения, типа УДС, правил управления транспортными потоками.

*Объект исследования*

Объектом исследования являются сложные технические распределенные системы, социально-технические системы, биологические системы, функционирование которых осуществляется посредством переноса массы, информации, вещества и т.д.

*Предмет исследования*

Предметом исследования являются сложные транспортные многоканальные сети и потоки высокой интенсивности, автотранспортные потоки.

*Теоретической и методологической основой исследования являются:*

1. Классические модели потоков – следование за лидером, гидродинамическая модель, модель клеточных автоматов.
2. Теория графов и сетей.
3. Классическая теория систем обыкновенных дифференциальных уравнений.
4. Современные теоретические исследования по теории трафика в рамках семинара Российской академии наук по трафику (Научно-практические задачи в теории автотранспортных потоков – семинар под руководством академиков РАН: Козлова В.В., Бугаева А.С., Четверушкина Б.Н.).

*Научная новизна работы*

1. Исследована компьютерная синтетическая кластерная модель потоков, разработанная в рамках семинара по трафику РАН, которая объединила ранее существующие подходы моделирования потоков на локальных фрагментах сети.
2. Создана программная реализация кластерной модели, проведено сравнение полученных результатов с теоретическими, получены количественные оценки для сложных сетевых задач.
3. Установлены стационарные состояния кластерных потоков на полосе и кольце.
4. Разработана спецификация кластерной модели в многоканальном (многополосном) случае и исследованы задачи о характеристиках неоднородных потоков.
5. Разработана технология оценки глобального влияния на транспортную обстановку изменения архитектуры транспортных сетей и управления дорожным движением.

*Теоретическая и практическая значимость*

Теоретическая значимость написанной работы состоит в следующем:

1. Установлены аналогии кластерной модели и классических теорий;

2. Сформулированы базовые задачи кластерной модели на бесконечном и периодическом носителях и проведено их качественное исследование;
3. Разработана характеристика стационарных состояний на городской сети и состояний транспортного потока в виде классификации кластеров;
4. Получены оценки начальных условий и данных о загрузке сети, приводящие к одному из стационарных состояний.

Практическая значимость написанной работы состоит в следующем:

1. Разработанная многополосная кластерная модель позволяет применять полученные результаты для анализа и оптимизации движения транспортных потоков на многополосных участках носителей и использовать для оптимального проектирования многополосных сетей города;
2. Полученные результаты позволяют адаптировать теорию агентных методов моделирования потоков с дискретным временем и расстоянием и суточные карты данных о состоянии потоков с непрерывными параметрами;
3. Разработана методика прогнозирования поведения потоков на сети в целом в результате реакции на изменения в структуре сети и движении потока;
4. С помощью сетевой кластерной модели созданы методики получения и анализа реакции транспортных потоков на изменения в архитектуре и конструкции сети;
5. Полученные результаты позволяют оптимизировать и увеличить эффективность движения транспортного потока на сети мегаполиса.

#### *Реализация результатов исследования*

Результаты работы и полученные оценки характеристик транспортного потока были апробированы и проверены в ходе теоретических и экспериментальных исследований транспортных потоков на реальных УДС в рамках выполнения проектов РФФИ:

1. 14-01-31553 мол\_а, Исследование свойств кластерных и стохастических имитационных моделей потоков на регулярных сетях, 08.07.2013-31.12.2015, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)";
2. 13-01-12064 офи\_м, Модели, математические задачи и теоремы о насыщенных потоках на сложных сетях - кольчугах, 15.04.2013-31.12.2015, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Разработанные методы реализации имитационной модели и методы исследования использовались на занятиях в курсах подготовки по специальности «Прикладная математика».

*Основные положения, выносимые на защиту*

1. Кластерная модель транспортных потоков, совмещающая свойства классических подходов к описанию трафика и современных агентных моделей.
2. Условия возникновения стационарного состояния в потоке кластеров на замкнутом контуре и бесконечной прямой, оценка времени достижения стационарного процесса, характеристики транспортных потоков на многополосных периодических носителях, условия беспрепятственного просачивания потока на линейных сетях.
3. Программное обеспечение *NODE model* кластерной модели потоков для сетей различной архитектуры и тотально-связных потоков, созданное на основе разработанного компьютерного алгоритма, реализующего взаимодействие кластеров, описываемое системой кусочно-линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с *переменной архитектурой*.
4. Свойства транспортных потоков на нерегулярной линейной сети, однородной правильной решетке, квази-регулярной сети. Характер поведения системы в зависимости от загрузки сети.

*Апробация работы*

Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на семинарах:

1. Научно-практические задачи в теории авто-транспортных потоков – семинар под руководством академиков РАН: Козлова В.В., Бугаева А.С., Четверушкина Б.Н.
2. Динамические системы – семинар под руководством академика РАН Козлова В.В., чл.-корр. РАН Трещева Д.В.
3. Заседании кафедры Изысканий и проектирования дорог при участии зав. каф. проф. Поспелова П.И. и проф. Сильянова В.В.

Доклады на отечественных и международных конференциях:

1. 8<sup>th</sup> International Conference DepCoS-RELCOMEX 2013 (Wroclaw, Poland, 2013), Вроцлав, Польша, 2013;
2. CMMSE 2014 Conference (La-Manga, Spain, 2014), Ла-Манка, Испания, 2014;
3. CSCC 2015 Conference (Zakynthos, Greece, 2015), Закинтос, Греция, 2015;
4. 7-е Луканинские чтения МАДИ, Москва, Россия, 2015;
5. 14-й Международный Междисциплинарный Семинар Математические Модели и Моделирование в Лазерно-Плазменных Процессах и Передовых Научных Технологиях, LPpM3 2016, Москва, 2016.

Опубликованы в отечественных и зарубежных научных конференциях: 8<sup>th</sup> International Conference DepCoS-RELCOMEX 2013 (Wroclaw, Poland, 2013), CSP 2014 Conference (London,

Great Britain, 2014), CMMSE 2014 Conference (La-Manga, Spain, 2014), CM3 ECCOMAS Thematic Conference (Jyvaskyla, Finland, 2015), CSCC 2015 Conference (Zakynthos, Greece, 2015), 7-е Луканинские чтения МАДИ (Москва, Россия, 2015), Международная научная конференция Искусственный интеллект. Интеллектуальные транспортные системы (Brest, Belarus, 2016) Be-Safe 2016.

#### *Публикации*

По теме диссертации автором опубликовано 7 печатных работ, в том числе 4 статьи – в изданиях из перечня рецензируемых научных журналов и изданий для опубликования основных научных результатов диссертаций, так же 5 статей в зарубежных рецензируемых изданиях и материалах международных конференций. В опубликованных работах автору принадлежат экспериментальные и теоретические результаты и выводы.

#### *Личное участие автора*

Все результаты, включающие в себя проведение измерений, разработку методов исследования, анализ, вывод и формулировку результатов получены и проведены автором самостоятельно.

#### *Структура и объем работы*

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, библиографического списка из 57 наименований отечественных и зарубежных авторов. Объем работы 117 стр. печатного текста, 123 рисунка, 9 таблиц и 0 приложений.

#### СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

*Во введении* обоснована актуальность выбранной темы, обозначены цель и методы исследования, обоснован выбор направления, научная новизна и практическая значимость работы.

*В первой главе* проведен анализ развития уровня автомобилизации и дорожного строительства в России, история развития теории транспортных потоков и различных методов моделирования.

*Первый параграф первой главы* посвящен анализу *дорожной сети* России.

В таблице 1 представлены данные о плотности автомобильных дорог на 1000 кв. км. территории. В таблице 2 приведены данные о стоимости километра полосы по странам<sup>5</sup>. Данные об удельной плотности автомобилей на километр дороги приведены в таблице 3.

Из приведенных данных таблицы можно подсчитать, что в России на каждый автомобиль приходится около 28 метров дороги. Расчетная стоимость эксплуатации дороги в Российской Федерации – около 20 тыс. долл. на км. дороги, средний межремонтный срок эксплуатации автомобильных дорог составляет 4 года<sup>6</sup>.

<sup>5</sup>Министерство транспорта Российской Федерации[Электронный ресурс]: [веб-сайт] – Стоимость одного километра дорог в России и зарубежом. Режим доступа: <http://www.mintrans.ru>

<sup>6</sup>Правительство Российской Федерации[Электронный ресурс]: [веб-сайт] – Постановление Правительства РФ "О нормативах денежных затрат на содержание и ремонт автомобильных дорог федерального значения и правилах их расчета. Режим доступа: <http://government.ru/>



№	Название государства	Плотность автомобильных дорог, км/км <sup>2</sup>
1	Бельгия	4986
2	Сингапур	4539
3	Нидерланды	3232
4	Япония	3157
5	Италия	2219
6	Венгрия	2036
7	Словения	1898
8	Франция	1824
9	Германия	1805
10	Швейцария	1727
25	США	676,6
47	Китай	188,5
64	Россия	36,5

Таблица 1: Плотность автомобильных дорог, км дороги на 1000 кв. км. территории

№	Название государства	Средняя стоимость 1 км полосы, млн. долл.
1	Германия	3,8
2	Франция	3,2
3	Канада	2,6
4	США	2,3
5	Испания	1,5
6	Россия	1,3
7	Финляндия	1,27
8	Китай	1,1

Таблица 2: Средняя стоимость километра одной полосы автомобильной дороги в мире, млн. долл.

Второй параграф первой главы посвящен анализу авто-транспортных потоков страны. Автомобильный транспорт является неотъемлемой частью транспортно-экономической системы. Всего в России к 2014 году насчитывается 45 млн. автомобилей, что свидетельствует о высоком уровне автомобилизации нашей страны. Для городов и мегаполисов такой показатель оказывает серьезное воздействие, провоцируя такие проблемы, как уменьшение пропускной способности дорог, отсутствие достаточного количества парковочных мест, увеличение количества дорожно-транспортных происшествий и связанных с ними заторов и их протяженности.

№	Название государства	Удельная плотность, авт./км.
1	Испания	125
2	Германия	72
3	Великобритания	70
4	Италия	53
5	Мексика	42
6	Греция	39
7	США	39
8	Россия	36
9	Япония	35
10	Франция	31

Таблица 3: Удельной плотности автомобилей на км. дороги

В управлении городским транспортом актуальным является сбор и обработка информации на протяженной территории, в частности, на улично-дорожной сети. Развитие вычислительной техники позволяет делать в этом направлении большие успехи. С другой стороны существует объективная трудность моделирования: автомобильное движение на улично-дорожной сети является примером сложной социально-технической системы.

*Свободное движение* [Бабков В.Ф.] в условиях крупных мегаполисов является очень редким событием. Чаще всего водитель находится в условиях *связного* движения, где его скорость существенно зависит от впереди-идущего автомобиля (*лидера*). Разработкой основ авто-транспортных потоков с *феноменологической* позиции занимались ученые МАДИ: Бабков В.Ф., Сильянов В.В., Лобанов Е.М. и др.

*Третий параграф первой главы посвящен анализу методов моделирования транспортных потоков и их истории.*

Существующие модели делятся на два типа: микро и макро модели. В микро или агентных моделях объектом моделирования является участник потока (автомобиль), детально реализовано поведение каждого элемента, который обладает большим количеством параметров. В макро-моделях поток является объектом моделирования и обладает своими характеристиками, по аналогии с жидкостными и газовыми моделями.

Первое экспериментальное исследование транспортных потоков проведено в 1933 году, когда *Брюс Дуглас Гриншилдс* [Greenshields B.D., 1933] представил фотографический метод изучения зависимости расстояния между движущимися транспортными средствами и их скоростью. Он экспериментальным путем ввел зависимость плотности транспортного потока от его скорости ( $flow = density \cdot speed$ ):  $q = \rho \cdot v$ , где  $q$  – интенсивность потока,  $\rho$  – плотность,  $v$  – скорость:

$$x_2 - x_1 = 6.9 + 0.81x_1.$$

В дальнейшем математическое моделирование потоков получило развитие в гидродинамической модели Лайтхилла-Уизема-Ричардса, которая представляет поток частиц в виде одномерной жидкости, движущейся по однополосному линейному носителю (дороге). В модели вводится функциональная зависимость скорости потока от его плотности.

*Модель следования за лидером*, как микроскопический подход, явилась фундаментом для создания практически всех известных микро и макромоделей трафика. Гриншильдс опубликовал первые теоретические положения и результаты экспериментов еще в тридцатые годы прошлого века<sup>7</sup>. Позднее эта модель получила бурное развитие.

Значительное место в теории транспортных потоков занимают гидродинамические и газодинамические модели. В газодинамике рассматриваются задачи моделирования транспортного потока в условиях синхронизированного движения автомобилей на больших участках носителя, в которых используется *приближение сплошной среды*, цикл работ, посвященный двумерной макроскопической модели транспортных потоков, выполненный коллективом ученых под руководством академика РАН Четверушкина Б.Н. (Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г., Карамзин Ю.Н.)

Сетевые задачи и проблемы, связанные с функционированием транспортных потоков на сети на примере математической модели сердечно-сосудистой системы и вопросов транспортировки крови в организме исследуются в работах Тишкина В.Ф. и др.

Методы математического моделирования и их применение в теории транспортных потоков, детерминированно-стохастический и кластерный подходы и их применение для оптимизации транспортных потоков на сетях, мониторинг авто-транспортных потоков с использованием современных вычислительных средств, разработка программных комплексов для моделирования транспортных потоков освещены в работах: Буслаева А.П., Таташева А.Г., Яшиной М.В.

Современные пакеты агентного имитационного моделирования (PTV Vision VISUM/VISSIM, AIMSUN) содержат большое число исследуемых характеристик и позволяют провести исследование потоков на городской сети, перегонах и перекрестках. Ввиду большого количества параметров агентные пакеты позволяют получить результаты при исследовании небольших локальных участков сети (перегонах и перекрестках) и дают большие погрешности при исследовании взаимодействия потоков на больших и сложных сетях (городской сети) и взаимодействия *местного и транзитного* потоков на государственной сети.

В данной работе разрабатываются методы и подходы моделирования транспортных потоков, применимые ко всей городской сети в целом, для исследования условий не только образования заторов, но и их распространения и поведения в городе, исследования явления перемещения заторов и влияния на примыкающие дороги и соседние районы города. В модели уменьшено количество параметров, что позволяет получать более точные и адекватные результаты при исследовании сложных сетей в отличие от агентных моделей.

*Во второй главе* исследуются кластерные потоки на однополосном носителе. Сформулированы основные понятия, введена классификация кластеров и носителей, описано взаимо-

<sup>7</sup>Greenshields B.D. The photographic Method of Studying Traffic Behaviour. Proc. US Highway Res. Board, V. 13, 1933.

действие кластеров, проведено исследование кластерной модели на однополосных бесконечном и периодическом носителях, сформулированы теоретические утверждения, проведено исследование с помощью разработанного программного обеспечения.

В первом параграфе второй главы дано описание кластерной модели, сформулированы основные понятия.

*Кластер* – это предельное устойчивое движение системы из двух и более частиц (автомобилей, клеток и т.д.) на одинаковом расстоянии друг от друга в модели следования за лидером.

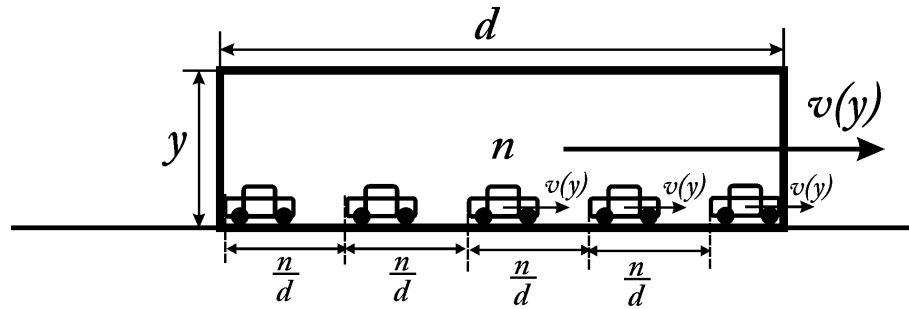


Рис. 1: Кластер

Скорость  $v$  кластера выражается как функция от его плотности  $v = f(y)$ , например:  $v(y) = v_0 \cdot \left(\frac{y_{max} - y}{y_{max}}\right)$ . Площадь  $S$  равна количеству элементов в кластере или его массе:  $S = d \cdot y$ .

*Сжимаемый кластер* – кластер, длина, плотность и скорость которого *изменяются* при взаимодействии с другими кластерами или препятствиями. *Масса* кластера при этом *сохраняется*. Сжимаемый кластер является моделью группы частиц с *локальным распространением информации*, когда участники движения в кластере регулируют свою скорость и дистанцию ориентируясь только по впередиидущей частице.

Процесс взаимодействия предполагается в условиях **тотально-связного поведения**, быстрые кластеры интегрируются в медленные, медленные кластеры интегрируются в быстрые, разрывов при взаимодействии между кластерами не происходит (быстрый кластер не "отрывается" от медленного, медленный интегрируется в быстрый).

*Несжимаемый кластер* – кластер, у которого *изменяется только скорость*, *длина и плотность* остаются *постоянными* даже во время взаимодействия с другими кластерами. Несжимаемый кластер представляет собой движение частиц в условиях глобального распространения информации между участниками (движение автомобилей сопровождения, движение поезда, и т.д.). В данном случае при изменении скорости частиц, находящихся в начале кластера, все остальные участники движения одновременно изменяют свою скорость. Несжимаемый кластер является упрощенным вариантом сжимаемого кластера с меньшим количеством изменяющихся параметров, что позволяет упростить качественное и компьютерное исследование некоторых сложных задач.

Взаимодействие сжимаемых кластеров описывается системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (Nonlinear Ordinary Differential Equations – NODE) движения

координат границ взаимодействующих кластеров. Ниже приведена система уравнений, описывающих взаимодействие пары кластеров.

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = v_1 \\ \dot{x}_1 = \frac{v_2 y_2 - v_1 y_1}{y_2 - y_1} \\ \dot{x}_2 = v_2 \end{cases}$$

Второе уравнение является аналогом условия *Ренкина-Гюгонио* (W.J.Rankine, P.-H. Hugoniot), связывающего поведение частиц до и после ударной волны:

$$\sigma(y_+, y_-) = \frac{q(y_+) - q(y_-)}{y_+ - y_-} \quad (1)$$

где  $\sigma$  – скорость движения разрыва плотностей.

Во втором параграфе второй главы проведено исследование кластерной модели на бесконечном носителе.

Сформулирована постановка следующей задачи:

Имеется некоторая начальная конфигурация взаимодействующих кластеров в условиях разной длины  $l_i$ , различной плотности  $y_i \in (0, 1)$  с координатами  $[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n$ , где  $x_n < x_{n-1} < \dots < x_2 < x_1 < x_0$ , на бесконечной прямой  $R$  в условиях связного потока с локальным распространением информации. Необходимо определить возможность возникновения установившегося режима и начальные условия, которые способствуют возникновению данного режима, конечное число кластеров и конфигурацию.

Взаимодействие кластеров в данной постановке описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = v_1 \\ \dot{x}_1 = \frac{v_2 y_2 - v_1 y_1}{y_2 - y_1} \\ \dot{x}_2 = \frac{v_3 y_3 - v_2 y_2}{y_3 - y_2} \\ \dot{x}_3 = \frac{v_4 y_4 - v_3 y_3}{y_4 - y_3} \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = \frac{v_n y_n - v_{n-1} y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \\ \dot{x}_n = v_n \end{cases} \quad (2)$$

Определим величины:  $\Delta \dot{x}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}, i = 1..n$ . Для всех  $\Delta \dot{x}_i < 0$  пусть  $t^{dis} = \min_{0 < i \leq n} (\frac{d_i}{|\Delta \dot{x}_i|})$  – минимальное время исчезновения кластера. Тогда через время  $t^{dis}(1)$  происходит исчезновение не менее одного кластера, через  $t^{dis}(k)$  –  $k$ -го кластера, каждый интервал происходит пере-конфигурация системы.

Получены следующие *теоретические результаты*:

*Утверждение 2.2.1:* Количество кластеров не увеличивается.

*Утверждение 2.2.2:* При любых начальных условиях, через конечный интервал времени  $t$  движение будет совершать только один *результатирующий* кластер, двигавшийся первым с плотностью  $y_1$ .

*Утверждение 2.2.3:* Время достижения стационарного состояния:

$$t = \sum_{k=1}^{n-1} (t^{dis}(k)).$$

*Утверждение 2.2.4:*  $l^* = v_1 \cdot t$  – величина характерного расстояния, на которое переместится поток за время взаимодействия.

*Утверждение 2.2.5:* Длина результирующего кластера:  $D = M/y_1$ , где  $M = \sum_{i=1}^n d_i \cdot y_i$  – масса потока (*сохраняется*).

В третьем параграфе второй главы проведено исследование кластерной модели на периодическом носителе.

Сформулирована и исследована аналогичная задача взаимодействия кластеров на *периодическом носителе*. В отличие от постановки на бесконечном носителе в данной задаче кластеры с номерами 1 и  $n$  находятся во взаимодействии. Получены следующие *результаты*:

*Утверждение 2.3.1:* При любых допустимых начальных условиях количество кластеров не увеличивается.

*Утверждение 2.3.2:* Через конечный интервал времени  $t$  наступает стационарный процесс: *бегущая волна*, состоящая из двух кластеров с плотностями  $y_u$  и  $y_w$ ;  $u, w \in [1, 2, \dots, n]$ .

*Утверждение 2.3.3:* Время достижения стационарного состояния

$$t = \sum_{k=1}^{n-2} t^{dis}(k).$$

*Утверждение 2.3.4:*  $l^* = v^* \cdot t$  – верхняя граница характерного расстояния, на которое переместится поток за время взаимодействия,  $v^* = \max_{1 \leq i \leq n} (v_i)$  – наибольшее значение скорости среди кластеров.

В четвертом параграфе второй главы приведено описание программного обеспечения, разработанного для исследования кластерной модели.

Экспериментальное исследование транспортных потоков на основе кластерной модели осуществлялось с помощью разработанного программного обеспечения *NODE model*. Программа представляет собой модули, реализующие движение и взаимодействие кластеров на различных группах носителей. Реализовано приложение на языке *C#* в среде разработки *Microsoft Visual Studio 2010 Express*. В программе разработано три основных модуля:

- *Interaction* – модуль *взаимодействия*, реализует взаимодействие кластеров на бесконечном и замкнутом однополосных носителях. Задача модуля: проверка теоретических гипотез о наличии стационарных состояний, возникающих в результате взаимодействия кластеров, получение основных параметров взаимодействия (время достижения стационарного состояния, скорости движения границ).
- *Multi-Lane* – модуль, реализующий движение кластеров по *многополосным* типам носителей. Задача модуля: выявление стационарных состояний в модели, определение основных характеристик кластеров (конфигурация, разбиение, скорость) и наличие зависимостей между ними, условия выхода на максимальную скорость.

- *Cluster Net* – модуль, реализующий движение кластеров по *сетевым* носителям. Задача модуля: определение стационарных состояний кластерной модели на сети, определение скорости кластеров и ее зависимости от массы потока на сети, условия перемещения кластеров с максимальной скоростью.

Данные о кластерах хранятся в структурном массиве *TRoad*, представляющем собой структурированный набор базовых типов данных, используется как трехмерный массив, где  $i, j \in N$  – номер носителя,  $k \in N$  – количество полос. Каждый элемент структуры содержит целочисленные, вещественные и булевы массивы, необходимые для хранения данных о каждом кластере на кольце, расположении и виде кольца (размер кольца, многополосное или однополосное, количество узлов, их расположение и состояние и др.), информацию, требуемую для графического отображения модели, информацию, необходимую для построения графика.

Движение, взаимодействие и начальная расстановка кластеров осуществляются с помощью отдельных классов и функций, описанных в программе:

- Функция  $ClusterPlacement(x1, d, i, j, k)$ : получает данные о местоположении кластера на полосе, рассчитывает положение границы  $x2$ . При автоматической расстановке учитывает расстояние до предыдущего кластера и производит расчет координаты  $x1$  случайно.
- Функция  $ClusterMovement(n, v1, v2, x1, x2, i, j, k)$ : осуществляет перемещение границ  $x1, x2$  кластеров каждый такт на расстояния  $v1$  и  $v2$  соответственно, реализует взаимодействие кластеров. Свободное движение:  $v1 = v2 = v$ . Если кластер стоит, то  $v1 = v2 = 0$ . Взаимодействие: значение  $v2[i] := \frac{v1[i+1]y1[i+1]-v2[i]y[i]}{y[i+1]-y[i]}$ . Если  $x1[i] = x2[i]$ , то  $n := n - 1$ , кластер с номером  $i$  удаляется из массива.

С помощью программного обеспечения проведено исследование кластерной модели на бесконечном и периодическом носителях, подтверждены теоретические результаты, получены траектории взаимодействия границ кластеров.

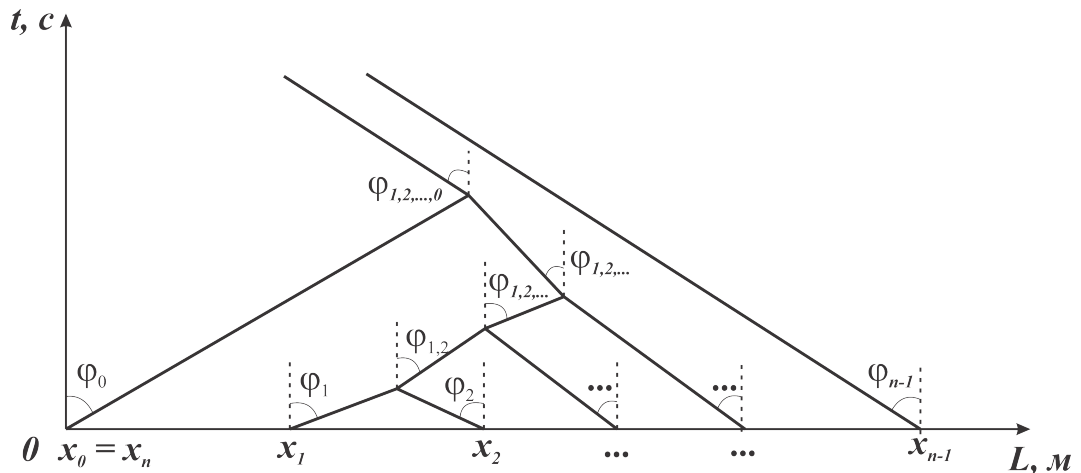


Рис. 2: Траектории границ взаимодействия кластеров

*Выводы к главе 2:*

1. Сформулированы правила взаимодействия кластеров на бесконечном и замкнутом носителях, приведена система дифференциальных уравнений взаимодействия кластеров;
2. Сформулированы задачи взаимодействия кластеров на бесконечной и замкнутой полосах;
3. Проведено качественное исследование взаимодействия, получены результаты взаимодействия кластеров и оценка времени достижения стационарного состояния;
4. Разработано программное обеспечение, с помощью которого проведено численное исследование поставленных задач, подтверждены результаты, полученные с помощью качественного исследования.

В третьей главе проведено исследование кластерной модели на многополосных носителях, сформулированы правила поведения кластеров в условиях многополосного движения, проведено исследование кластерных потоков на двухполосном носителе.

В первом параграфе третьей главы представлено описание сценариев поведения кластеров на многополосном носителе.

Пусть существуют две полосы для движения  $X$  и  $X'$  в одном направлении слева направо. По полосе  $X$  совершают движение два кластера:

1. Ведомый кластер  $[x_1, x_2]$  является быстрым или догоняющим, имеет плотность  $y_1$ , скорость  $v_1$  и длину  $d_1$ ;
2. Ведущий кластер  $[x_3, x_4]$  плотности  $y_2$ , скорости  $v_2$  и длины  $d_2$ , является медленным или лидирующим;
3. Через время  $\Delta t$  быстрый кластер догонит медленный и координата  $x_2$  быстрого кластера станет равной координате  $x_3$  медленного кластера.

*Сценарии поведения:*

1. **Перестроение.** Определим *последовательное и синхронное* перестроение.
2. **Спарринг.** Быстрый взаимодействует с медленным: *интеграция* (стратегия *сжимаемого* кластера). Иначе быстрый движется без взаимодействия с медленным: *следование* (стратегия *несжимаемого* кластера).

Дана характеристика каждому из сценариев поведения кластеров, сформулировано два типа перехода кластеров между полосами: синхронное и последовательное.

*Последовательное перестроение*

1. Если на соседней полосе  $X^{(2)}$  свободна координата  $x_2$ , то быстрый кластер обходит медленный, совершая переход через координату  $x_2$  на полосу  $X^{(2)}$  постепенно и двигаясь с максимальной скоростью;



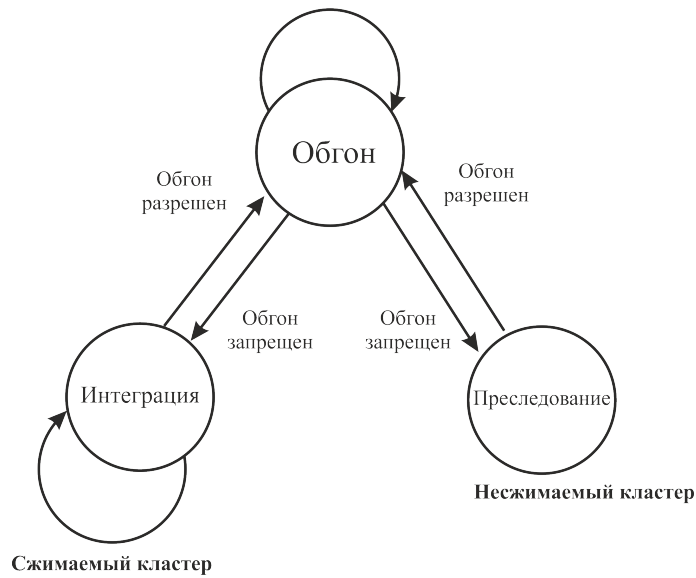


Рис. 3: Схема взаимодействия стратегий

2. Если по соседней полосе  $X^{(2)}$  движется *блокирующий* кластер плотности  $y_3$ , занимающий координату  $x_2$ , то быстрый кластер движется за медленным не взаимодействуя с ним со скоростью медленного кластера;
3. Как только полоса  $X^{(2)}$  будет свободна (блокирующий кластер освободит координату  $x_2$ ), быстрый кластер продолжит обгон медленного, совершая переход на полосу  $X^{(2)}$ ;
4. В данном сценарии допускается разделение быстрого кластера на части, если тот не успевает совершить обгон медленного кластера целиком.

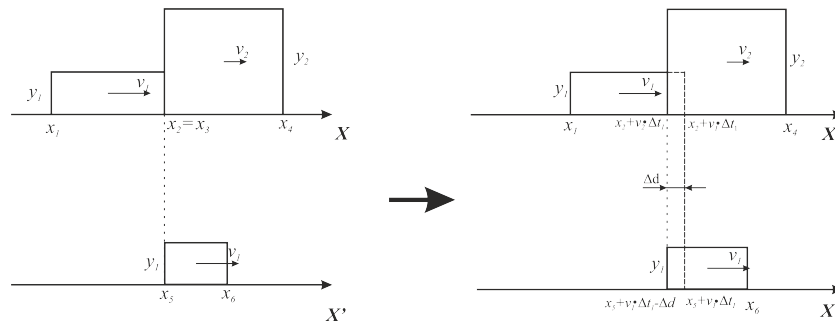


Рис. 4: Последовательное перестроение

### Синхронное перестроение

1. Если соседняя полоса  $X^{(2)}$  свободна и координаты  $[x_1, x_2]$  на полосе  $X^{(2)}$  не заняты другими кластерами, то быстрый кластер целиком перестраивается на соседнюю полосу мгновенно и синхронно, как единое целое, и обходит медленный кластер, двигаясь с максимальной скоростью;
2. Если по соседней полосе  $X^{(2)}$  движется блокирующий кластер плотности  $y_3$  и занимает отрезок  $[x_1, x_2]$ , то быстрый кластер движется за медленным не взаимодействуя с ним со скоростью медленного кластера;

3. Как только полоса  $X^{(2)}$  будет свободна (блокирующий кластер покинет отрезок  $[x_1, x_2]$ ), быстрый кластер продолжит обгон медленного, совершив мгновенное перестроение на полосу  $X^{(2)}$ ;
4. В данном сценарии разделение быстрого кластера на части невозможно, переход на соседнюю полосу быстрый кластер осуществляет целиком и мгновенно.

Во втором параграфе третьей главы исследована задача просачивания кластера в потоке. Рассматривается следующая постановка задачи:

Рассмотрим двухполосный носитель с полосами  $X^{(1)}$  и  $X^{(2)}$ , каждая длины  $L$ . По полосам совершают движение *три типа кластеров*: 1-кластеры, 2-кластеры и 3-кластеры. Скорости кластеров равны  $v_1, v_2, v_3$ , длины  $d_1, d_2, d_3$  и количество  $n_1, n_2, n_3$  соответственно. 1-кластеры *равномерно располагаются* на полосе  $X^{(1)}$  на расстоянии  $l_1$  друг от друга, 2-кластеры *равномерно располагаются* только на полосе  $X^{(2)}$  на расстоянии  $l_2$  друг от друга. 1- и 2-кластеры двигаются только по своим полосам, 3-кластеры *могут менять свою полосу*. Будем рассматривать следующий случай:  $v_3 > v_2 > v_1$ ,  $n_3 = 1, n_2 > 1, n_1 > 1$ . Необходимо определить условия возникновения *синергии* (свойство системы, достижение состояния за конечный промежуток времени, при котором отсутствует конкуренция) и других стационарных состояний, зависимость скорости 3-кластеров от длины и расположения 1- и 2-кластеров, расстояния между ними.

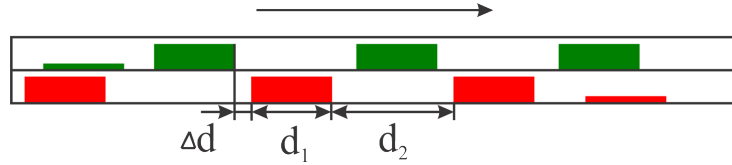


Рис. 5: Просачивание кластера в потоке

Произведено качественное исследование просачивания кластера в потоке с использованием двух сценариев перестроения, получены следующие *результаты*.

Определим величины:

$$t_1 = \frac{\Delta l}{\Delta v_3}, \Delta l = |l_1 - d_2|, t_2 = \frac{l_1}{\Delta v_1}, \Delta v_1 = v_3 - v_1, \Delta v_3 = v_2 - v_1.$$

Тогда, для *последовательного* перестроения *получено*:

*Утверждение 3.2.1:* Если  $t_1 < t_2$ , то 3-кластер *следует* за 2-кластером, его скорость равна  $v_2$ .

*Утверждение 3.2.2:* Если  $t_1 > t_2$ , тогда 3-кластер разделится на пачки длиной:

$$\Delta d_3 = v_1 \cdot (t_1 - t_2),$$

движущиеся со скоростью  $v_3$ . Наступает *синергия*.

В случае *синхронного* перестроения *установлено*:

*Утверждение 3.2.3:* Пусть  $d_3 < \min(l_1, l_2)$ ,  $d_2 < l_1$ . Если выполнено следующее соотношение:

$$\frac{v_3}{v_2} > \frac{l_1}{l_1 - (d_2 + d_3)} > 0, \quad (3)$$

тогда независимо от начального расположения кластеров 1 и 2 типа, 3-кластер движется со скоростью  $v_3$ , наступает *синергия*.

*Утверждение 3.2.4:* Если  $d_3 > l_1$ ,  $d_3 < l_2$ , то 3-кластер *следует* за 2-кластером со скоростью  $v_2$ .

*Утверждение 3.2.5:* Пусть  $d_3 < l_1$ ,  $d_3 > l_2$ , тогда 3-кластер *следует* за 1-кластером со скоростью  $v_1$ .

В третьем параграфе третьей главы проведено исследование данной задачи с использованием программного обеспечения.

Для проверки полученных ранее теоретических результатов и дальнейшего анализа кластерной модели на многополосном носителе использовано программное обеспечение *NODE model*, структура которого была описана ранее. В данной задаче использован модуль *Multi-lane*, в котором присутствуют классы и функции, отвечающие за перестроение кластеров.

*Multi-Lane* – модуль, реализующий движение кластеров по *многополосным* типам носителей. Задача модуля: выявление стационарных состояний в модели, определение основных характеристик кластеров (конфигурация, разбиение, скорость) и наличие зависимостей между ними, условия выхода на максимальную скорость.

Содержит в себе класс *Lane change*:

1. Во время движения кластеров проверяется следующее условие для каждого  $i$  кластера:

$$x_i = x_{i+1} - d_{i+1};$$

2. Если условие не выполнено, то кластер движется дальше;

3. Если условие выполнено, то:

- (a) Если плотность кластеров одинакова, кластеры  $x_i$  и  $x_{i+1}$  удаляются из списка, и добавляется новый кластер плотности  $y_i = y_{i+1} d_i + d_{i+1}$ , скорость кластера  $v_i = v_{i+1}$ ;
- (b) Если плотности кластеров различаются, при следующем такте таймера кластер  $x_i$  переносится на полосу  $j+1$  при условии, что она не занята другим кластером. При перестроении на другую полосу, скорость, длина и плотность кластера сохраняются;
- (c) Если соседняя полоса занята, и кластер  $x_i$  не может перестроиться, он продолжает следовать за кластером  $x_{i+1}$ , сохраняя плотность и длину, но изменяя скорость на  $v_i = v_{i+1}$  до тех пор, пока не появится возможность перестроиться.

В четвертом параграфе третьей главы проведено исследование задачи просачивания потока.

Пусть в исходной постановке задачи  $n_2 = 1, n_1 > 1, n_3 > 1$ . Задача представляет собой просачивание группы кластеров в потоке ( $v_3 > v_2 > v_1$ ). В данной постановке 3-кластеры могут догонять друг друга. Если один кластер 3 типа догоняет другой, то они объединяются в один кластер большей длины и далее не разделяются. Рассматривается случай несжимаемых

кластеров с синхронным перестроением *без возможности разделения* (движение специального автомобиля или организованной колонны). Необходимо определить среднюю скорость кластеров 3 типа, ее зависимость от расположения и длины, окончательное количество 3-кластеров, наличие синергии в системе и условия ее возникновения.

Исследование данной задачи проведено с использованием программного обеспечения, получены следующие *результаты*:

1. Существует число  $N_1$  кластеров 1 типа такое, что если  $n_1 < N_1$ , то средняя скорость 3-кластеров максимальна, в системе наблюдается *синергия*.
2. Если  $n_1 \geq N_1$ , тогда средняя скорость 3-кластеров минимальна.

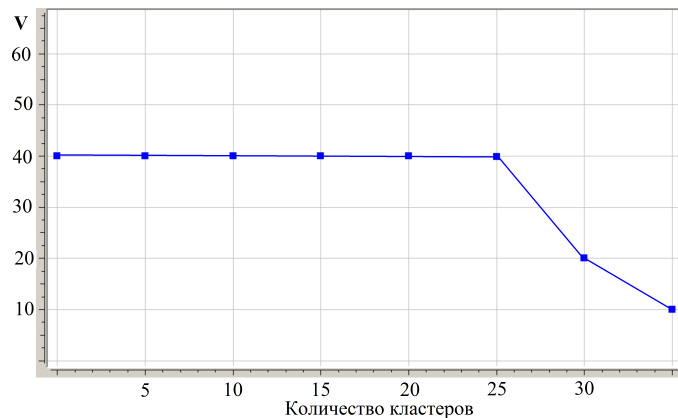


Рис. 6: График средней скорости 3-кластеров

*Выводы к главе 3:*

1. Сформулированы правила и сценарии поведения кластеров на многополосном носителе;
2. Рассмотрена задача с тремя типами кластеров на двухполосном носителе: на каждой из полос равномерно распределен поток соответствующего типа, потока 3 типа движется по обеим полосам. Исследованы задачи просачивания потока 3 типа с двумя типами перестроения;
3. Разработано программное обеспечение для численного исследования просачивания кластеров;
4. С помощью численного исследования подтверждены качественные результаты и получены численные оценки и графические зависимости скорости кластеров 3 типа.

В *четвертой главе* рассмотрены задачи движение кластеров на на одномерных и двумерных кольцевых сетях: регулярные одномерная и двумерная сети, нерегулярная одномерная и гетерогенная сети. Регулярная сеть состоит из колец одинакового радиуса, каждое соединено с соседними в общих точках – **узлах**. В одномерных сетях на каждом носителе присутствует только два узла, в двумерных – 4 и более. Исследование проведено с двумя типами кластеров – сжимаемый и несжимаемый.

В *первом параграфе четвертой главы* сформулированы правила прохождения узлов:

1. Кластеры совершают движение через узел по правилу *FIFO* (First In First Out) (Рис. 89);
2. При одновременном подходе к узлу двух кластеров очередность прохода разыгрывается между кластерами с одинаковой вероятностью;
3. Каждый следующий кластер, приближающийся к уже занятому узлу, попадает в массив-очередь из ожидающих кластеров.

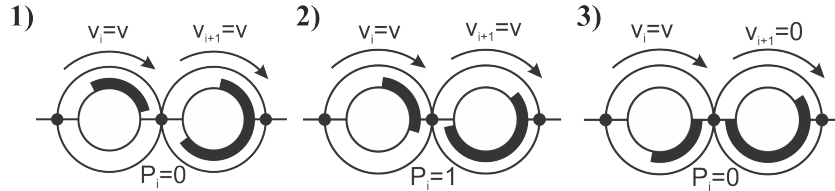


Рис. 7: Проезд узла

Во втором параграфе четвертой главы исследованы кластерные потоки на одномерной замкнутой регулярной сети.

Рассмотрим замкнутую регулярную одномерную сеть из  $n$  колец с узлами, находящимися на максимальном удалении друг от друга. На каждом из колец присутствует один кластер с заданными плотностью, длиной и скоростью  $v = f(y)$ . Пусть все кластеры имеют одинаковые плотности  $y$  (и скорости  $v$ ) и различные длины  $d_i$ . В задаче будем рассматривать случай *локального движения и несжимаемых кластеров*. Необходимо установить зависимость средней скорости движения кластеров  $V_{avg}$  от их длины, наличие *синергии* и *коллапса* и условия их возникновения.

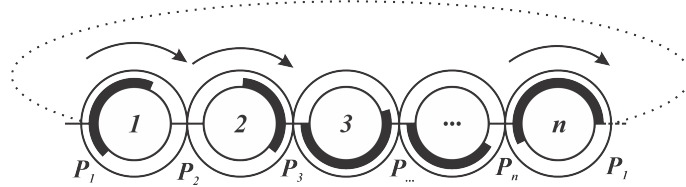


Рис. 8: Модель локального движения на замкнутой регулярной сети

В результате теоретического исследования задачи *установлено*:

*Утверждение 4.2.1* Пусть справедливо  $\forall i, d_i + d_{i+1} < 2\pi$ , тогда за конечное время  $t$ , независимо от начальной конфигурации средняя скорость максимальна, в системе наступает *синергия*.

*Утверждение 4.2.2* Если справедливо  $\forall i, d_i + d_{i+1} \geq 2\pi$  и выполнено  $\forall i, d_i \geq \pi$ , то за конечное время  $t$ , независимо от начальной конфигурации средняя скорость равна 0, в системе наступает *коллапс*.

*Утверждение 4.2.3* Если в утверждении 4.2.2.2 условие  $\forall i, d_i \geq \pi$  не выполнено, то за конечное время  $t$ , независимо от начальной конфигурации кластеров средняя скорость  $V_{avg} < V_{max}$ .

Утверждение 4.2.4 Оценка времени достижения синергии:

$$t_{sm} = \sum_{i=1}^{n-1} d_i/v.$$

Утверждение 4.2.5 Оценка времени достижения коллапса:

$$t_{cm} = 2\pi/v.$$

В третьем параграфе четвертой главы проведено исследование данной задачи с помощью программного обеспечения.

Компьютерный анализ проводился с помощью модуля *Cluster Net* разработанного программного пакета *NODE model*, позволяющего воспроизвести движение кластеров на одномерной регулярной сети.

*Cluster Net* – модуль, реализующий движение кластеров по сетевым носителям. Задача модуля: определение стационарных состояний кластерной модели на сети, определение скорости кластеров и ее зависимости от массы потока на сети, условия перемещения кластеров с максимальной скоростью.

Ключевым в модуле является реализация *прохождения кластерами узла*:

1. Узлы  $P_{a,b}$  хранятся в программе в массиве структуры *TRoad*, каждый  $a$  элемент массива отвечает за  $b$  узлы на соответствующем кольце Ожерелья;
2. Каждый узел принадлежит двум кольцам, через которые он проходит, связь узлов хранится в элементах структуры;
3. Если  $P_{a,b} > x_i$  and  $P_{a,b} < x_i + d_i$ , то  $P_{a,b} = 1$ , иначе  $P_{a,b} = 0$ ;
4. Если граница кластера:  $x_i + d_i = P_{a,b}$  and  $P_{a,b}=1$ , то скорость кластера  $v_i = 0$ , иначе  $v_i \neq 0$ .

Настройки сети позволяют задать размерность, длину носителя, количество кластеров и их характеристики на каждом кольце. Целью моделирования является подтверждение теоретических результатов, получение новых численных результатов и количественных оценок, которые трудно получить теоретическим путем.

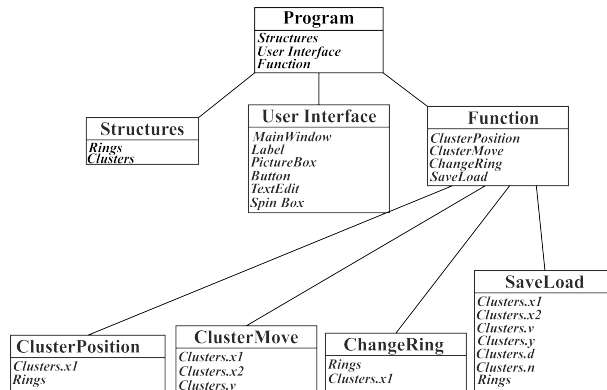


Рис. 9: Архитектура модуля Cluster Net

В четвертом параграфе четвертой главы проведено исследование кластерной модели на одномерной нерегулярной сети.

Рассмотрим нерегулярную замкнутую одномерную сеть из  $n$  колец. В данной сети узлы располагаются не на максимальном удалении друг от друга. На практике такие сети часто встречаются в городской планировке и внутри человеческого организма. Необходимо исследовать кластерную модель на заданном носителе, определить зависимость средней скорости движения кластеров от их длины и расположения, предельные оценки и наличие в системе стационарных состояний, синергии и коллапса.

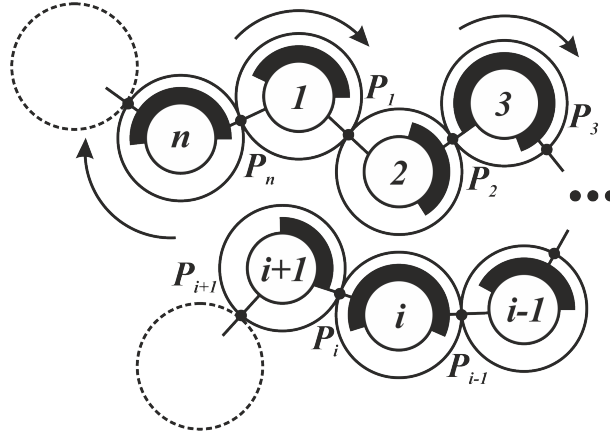


Рис. 10: Одномерная модель локального движения на замкнутой нерегулярной сети

Исследование кластерной модели проведено с помощью модуля *Cluster Net* программного пакета *NODE model*. Установлено:

1. Если справедливо  $\forall i, d_i + d_{i+1} < 360$ , то за конечный промежуток времени  $t$ , не зависимо от расположения кластеров средняя скорость максимальна, в системе *синергия*.
2. Пусть справедливо  $\forall i, d_i + d_{i+1} \geq 360$ , тогда за конечное время  $t$ , не зависимо от расположения кластеров, средняя скорость равна 0, в системе *коллапс*.

В пятом параграфе четвертой главы проведено исследование кластерных потоков на двумерной регулярной сети.

Дана двумерная регулярная сеть из  $N \times M$  колец. Кольца соединены узлами с соседними кольцами в 4 точках: 90, 180, 270, 360 град. На каждом кольце совершает движение несжимаемый кластер одинаковой плотности  $y$ , одинаковой длины  $d$ , со скоростью  $v$ . Движение на сети происходит сонаправлено. Необходимо определить зависимость средней скорости движения кластеров  $V_{avg}$  от их длины, наличие стационарных состояний.

Для исследования кластерной модели использован модуль *Cluster Net* разработанного программного пакета *NODE model*. В данной задаче запрограммирована двумерная сеть с 4 узлами на каждом кольце. В результате проведенных экспериментов с использованием случайной расстановки кластеров на каждом кольце. Получены следующие *результаты*:

1. Если  $d_i < \frac{\pi}{2}$ , то за конечный промежуток времени  $t$  независимо от начальных условий средняя скорость кластеров максимальна, в системе *синергия*.
2. Пусть  $d_i \geq \pi$ , тогда за конечное время  $t$  для любой начальной конфигурации движение

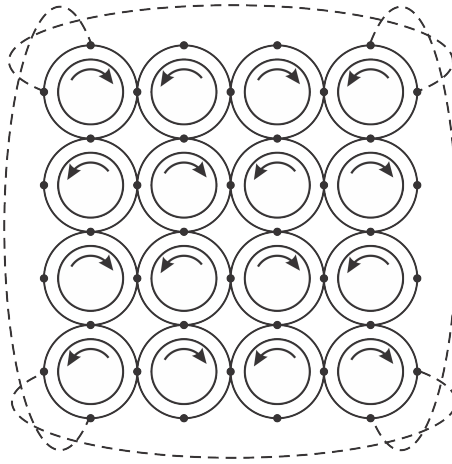


Рис. 11: Двумерная регулярная сеть

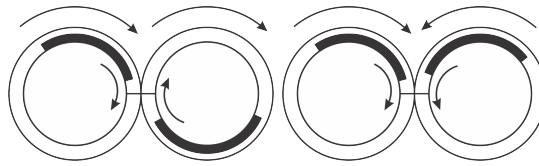


Рис. 12: а) Однонаправленное движение б) Сонаправленное движение

на всех элементах отсутствует, в системе *коллапс*.

3. Если  $\frac{\pi}{2} < d_i < \pi$ , то наблюдаются следующие периодические конструкции: динамический затор, частичное движение, частичный коллапс.

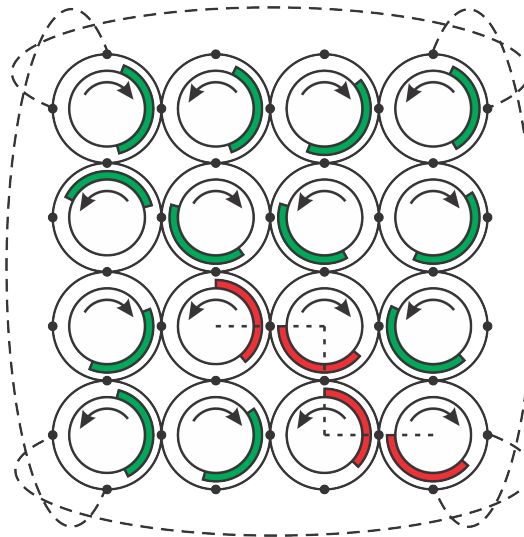


Рис. 13: Динамический затор

В шестом параграфе четвертой главы представлен график зависимости средней скорости кластеров от их длины, построенный с помощью программного обеспечения. На графике видны границы, при которых скорость кластеров максимальна или равна нулю при любом начальном расположении кластеров.

В седьмом параграфе четвертой главы исследуется квази-регулярная(гетерогенная) двумерная сеть, состоящая из носителей двух радиусов.



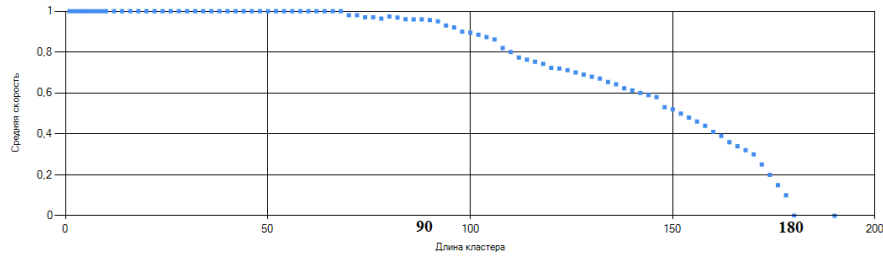


Рис. 14: График зависимости средней скорости от длины кластера

Рассмотрим квази-регулярную (гетерогенную) сеть из колец двух радиусов  $r_1$  и  $r_2$ . Кольца радиуса  $r_1$  соединяются с кольцами радиуса  $r_1$  и  $r_2$  в четырех точках (узлах) каждый. Кольца радиуса  $r_2$  имеют общие точки только с кольцами  $r_1$ . По каждому из колец совершают движение несжимаемые кластеры одинаковой плотности  $y$ , одинаковой длины  $d$ , со скоростью  $v$ . Необходимо определить зависимость средней скорости движения кластеров  $V_{avg}$  от их длины, наличие стационарных состояний, влияние гетерогенного расположения носителей на результат.

Исследование рассматриваемой задачи осуществлено с помощью модуля *Cluster Net* программного обеспечения *NODE model*. Установлено, что при длине (град) кластеров  $d_i < 45$  в системе наступает *синергия*, скорость кластеров максимальна.

*Выводы к 4-ой главе:*

1. Исследована кластерная модель на одномерных регулярных и нерегулярных сетях, двумерных регулярных и квази-регулярных сетях, получены теоретические результаты для регулярных сетей, условия появления синергии и коллапса в системе;
2. Сформулированы правила поведения кластеров на одномерных и двумерных сетях;
3. Разработано программное обеспечение для аналитического исследования кластерной модели на сетях;
4. Проведено компьютерное исследование поставленных задач, подтверждены качественные и получены численные результаты для нерегулярных сетей, условия возникновения синергии и численные значения скорости кластеров.

В пятой главе проводится исследование и апробация модели на реальных данных, дано описание программного обеспечения.

В первом параграфе пятой главы отражено представление потока автомобилей в виде кластеров. Кластер имеет длину (м), плотность (авт/м) и скорость (м/с). Плотность кластера ( $y$ ) вычисляется с помощью интенсивности ( $q$ ) транспортного потока и его скорости ( $v$ ). Оба параметра можно получить с помощью автоматической видео-съемки. При исследовании многополосных носителей кластеры разделяются на типы: грузовые или медленные и легковые или быстрые, состоящие соответственно из грузовых и легковых транспортных средств. Медленные грузовые кластеры перемещаются преимущественно по крайним правым полосам, быстрые легковые по крайним левым. На сетях поток подразделяется на

местный (локальный) и транзитный (сквозной). Соответствующие кластеры могут либо перемещаться только по своему кольцу (местные кластеры), либо по кольцам всей сети с возможностью перемещения между ними.



Рис. 15: Группы автомобилей в виде кластеров

Во втором параграфе пятой главы представлены виды мониторинга транспортного потока. Сбор данных производится с помощью последовательного анализа кадров на видео и определения автомобилей на снимке посредством сравнения двух кадров и определения разницы в цветовой схеме. Тогда интенсивность – количество автомобилей, проехавших через отметку на видео, за единицу времени, скорость – отношение расстояния между двумя отметками к времени, за которое автомобиль проехал эти отметки. Длина кластера вычисляется с помощью количества автомобилей ( $m$ ) в нем:  $d = \frac{m}{y}$ .

Сбор данных о потоке автомобилей производится как с помощью автоматических средств (стационарные видео- и фото-камеры, мобильная передвижная лаборатория (МУДРец, ОТРОК), интернет сервисы (Яндекс-пробки)), так и вручную, непосредственным подсчетом.



Рис. 16: 1-Стационарные камеры; 2-Мобильные лаборатории: ОТРОК, МУДРец; 3-Ручной способ подсчета; 4-Интернет-сервис Яндекс-пробки

В третьем параграфе пятой главы представлена апробация участка улично-дорожной сети города Москвы в виде нерегулярной сети.

Для проверки адекватности работы модели в четвертом параграфе пятой главы получена таблица 4 сравнения изменения скорости транспортного потока в периоды с 11 до 12 и с 14 до 15 часов, в которой содержатся реальные данные, отобранные с помощью сервиса Яндекс-пробки, и данные, полученные с помощью разработанного программного пакета *NODE model*.

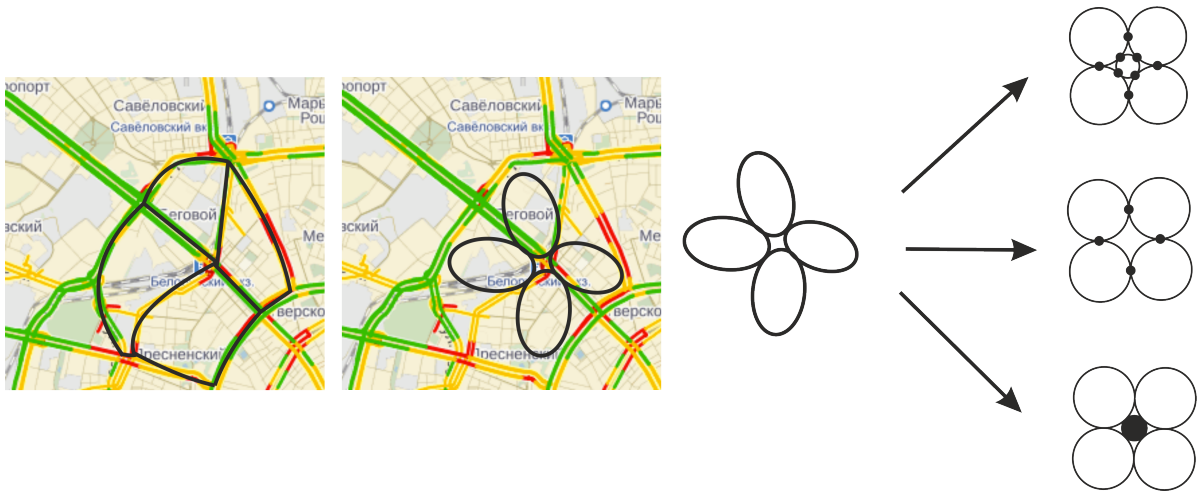


Рис. 17: Часть УДС города и ее сетевой вариант

	Скорость каждые 15 минут, км/ч			
Реальные данные, 11:00 - 12:00	30	26	22	15
Программные данные, 11:00 - 12:00	34	27	22	15
Реальные данные, 14:00 - 15:00	45	27	23	18
Программные данные, 14:00 - 15:00	45	27	26	20

Таблица 4: Сравнение средней скорости потока, полученной в программе *NODE model* с реальными данными.

Погрешность в вычислении между наборами данных составляет не более 6 %, что позволяет судить об удовлетворительной точности, полученных с помощью программы, результатов.

*Выводы к 5-ой главе:*

1. Представлены виды мониторинга и сбора информации о транспортном потоке для последующего исследования с помощью модели;
2. Сформулированы правила апробации участка УДС города в виде базовой сети;
3. Разработаны методики оптимизации транспортного потока с помощью внесения изменений в конструкции сети;
4. Проведена оценка точности компьютерной модели на основе реальных данных.

### ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В процессе исследования получены следующие результаты и выводы, свидетельствующие от о достижении установленной ранее цели и решении поставленных задач:

1. разработана и исследована кластерная модель транспортных потоков, совмещающая свойства классических подходов к описанию трафика и современных агентных моделей;
2. сформулированы условия возникновения стационарного состояния в потоке кластеров на замкнутом контуре и бесконечной прямой, получена оценка времени достижения

стационарного процесса. Рассмотрены базовые задачи для потоков на многополосных периодических носителях. Получены точные утверждения о свойствах модели для линейных сетей;

3. разработан компьютерный алгоритм кластерной модели, реализующий взаимодействие кластеров, описываемое системой кусочно-линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с *переменной архитектурой*. На основе разработанного алгоритма с помощью современных средств объектно-ориентированного программирования (многопоточная обработка данных, структурные динамические массивы и тд.) создано и протестировано программное обеспечение *NODE model* кластерной модели потоков для сетей различной архитектуры и тотально-связных потоков;
4. проведено исследование свойств транспортных потоков на нерегулярной линейной сети, однородной правильной решетке, квази-регулярной сети – системах, которые не поддаются аналитическому решению. Исследовано поведение системы в зависимости от загрузки сети.

## Глава 1

# Математическое моделирование транспортных потоков

### 1.1 Улично-дорожные сети

Российская Федерация (РФ) занимает первое место в мире по площади своей территории, составляющей около 17 млн. кв. км., опережая такие страны, как Соединенные Штаты Америки, Канада, Китай, Германия и др. Одним из основных признаков экономического развития государства является транспорт, в частности, автомобильный транспорт, который предполагает наличие большой и развитой сети дорог для транспортировки пассажиров и грузов. По стандартному показателю плотности автомобильно-дорожной сети (км/кв.км) РФ находится на 64 месте в мировой классификации. На таблице 5 представлены данные о плотности автомобильных дорог на 1000 кв. км. территории [53].

№	Название государства	Плотность автомобильных дорог, км/км <sup>2</sup>
1	Бельгия	4986
2	Сингапур	4539
3	Нидерланды	3232
4	Япония	3157
5	Италия	2219
6	Венгрия	2036
7	Словения	1898
8	Франция	1824
9	Германия	1805
10	Швейцария	1727
25	США	676,6
47	Китай	188,5
64	Россия	36,5

Таблица 5: Плотность автомобильных дорог, км дороги на 1000 кв. км. территории

В следующей таблице 6 представлены данные о стоимости километра полосы по странам.

№	Название государства	Средняя стоимость 1 км полосы, млн. долл.
1	Германия	3,8
2	Франция	3,2
3	Канада	2,6
4	США	2,3
5	Испания	1,5
6	Россия	1,3
7	Финляндия	1,27
8	Китай	1,1

Таблица 6: Средняя стоимость километра одной полосы автомобильной дороги в мире, млн. долл.

Данных об удельной плотности автомобилей на километр дороги приведены в таблице 7.

№	Название государства	Удельная плотность, авт./км.
1	Испания	125
2	Германия	72
3	Великобритания	70
4	Италия	53
5	Мексика	42
6	Греция	39
7	США	39
8	Россия	36
9	Япония	35
10	Франция	31

Таблица 7: Удельной плотности автомобилей на км. дороги

Из приведенных данных таблицы можно подсчитать, что в России на каждый автомобиль приходится около 28 метров дороги.

## 1.2 Авто-транспортные потоки

*Автомобильный транспорт является неотъемлемой частью логистических цепочек в экономике, занимающий значительную позицию на концах транспортных технологических*

*цепочек*. Всего в России к 2014 году насчитывалось 45 млн. автомобилей, что составляло 5 позицию в мире, а по *показателю автомобилизации* - количеству автотранспортных средств на тысячу населения, занимает 50 место [50].

Значительная часть населения мира в настоящее время проживает в *мегаполисах*, где быстрый рост автомобилизации актуализирует такие проблемы, как география строительства, автомобильная безопасность, транспортные заторы, размещение парковочных мест и т.д. В РФ к настоящему времени насчитывается 15 мегаполисов, в которых проживает 3/4 населения. В частности, в Москве **около 12,5 млн. человек или 8% от общего населения страны** [55]. По данным статистики в Москве зарегистрировано около 7 млн. автомобилей [50]. Транспортная обстановка мегаполисах России ежегодно осложняется непропорциональным развитием автомобилизации и улично-дорожной сети. Отличительной особенностью УДС российских мегаполисов является преобладание сложных транспортных узлов в одном уровне.

В управлении городским транспортом актуальным является сбор и обработка информации на протяженной территории, в частности, на улично-дорожной сети. Развитие вычислительной техники позволяет делать в этом направлении большие успехи. С другой стороны существует объективная трудность моделирования: автомобильное движение на улично-дорожной сети является примером сложной социально-технической системы [2], [3].

*Свободное движение* [2], [3] в условиях крупных мегаполисов является очень редким событием. Чаще всего водитель находится в условиях *связного* движения, где его скорость существенно зависит от впереди-идущего автомобиля (*лидера*). *Модель следования за лидером*, как микроскопический подход, явилась фундаментом для создания практически всех известных микро и макромоделей трафика. Гриншилдс [4], [5] опубликовал первые теоретические посылы и результаты экспериментов еще в тридцатые годы прошлого века. Позднее эта модель получила бурное развитие.

Одно из естественных направлений движения от микроскопических подходов к макроскопическим в процессе движения – это гидродинамические аналогии. Стандартные рассуждения и допущения в уравнениях математической физики позволили перейти от динамики конкретного автомобиля к усредненным величинам – плотность  $\rho$ , интенсивность –  $q$  и скорость  $v$  [11], [12]. В результате было создано мощное направление макроскопических моделей, черпающего идеи как из гидродинамики, так и из развивавшейся во второй половине двадцатого века газовой динамики [14], [25].

Для проектирования городской сети или ее модернизации требуется наличие первоначальных данных о пропускной способности и максимальной нагрузке на проектируемый участок. Для сбора таких данных можно использовать имитационную модель транспортного потока на городской сети [34].

Инженерные работы и многочисленные зафиксированные наблюдения содержат понятия "пачки" при описании частично-связного и насыщенного потоков [37]. Представляется, что в рамках существующих теоретических разработок в виде пачек можно представить цепочки автомобилей, движущихся с почти равномерной скоростью на некотором расстоянии друг



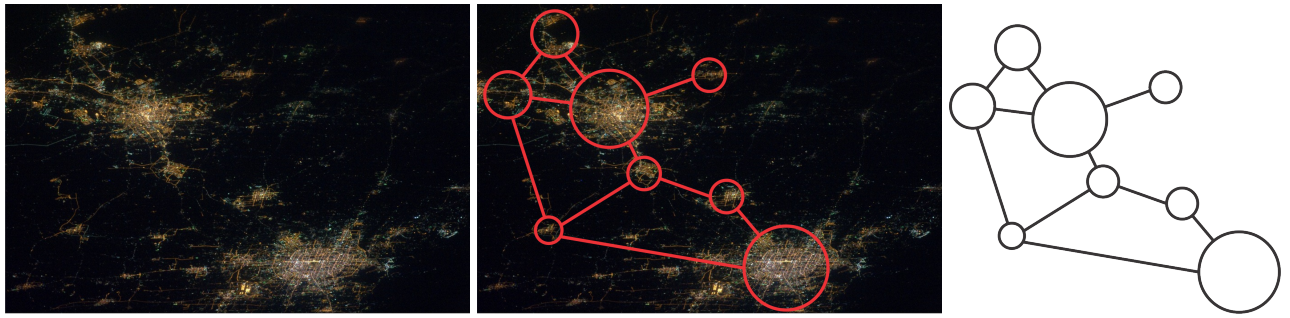


Рис. 18: Сопоставление сети из колец со снимком участка земли из самолета

от друга, зависящем от этой скорости. Таким образом элементарную частицу представляет собой *кластер* равномерно расположенных автомобилей плотностью  $\rho$ , движущихся со скоростью  $f(\rho)$  [31], [37], [29].

*Транспортный поток* представляет собой движущиеся друг за другом автомобили. Расстояние между автомобилями и скорость автомобилей не одинаковые и зависят от множества характеристик, таких как масса и тип автомобиля (легковой, грузовой, пассажирский и т.д.), его технические характеристики (мощность двигателя, максимальная скорость, аэродинамика и др.) и характер водителя (спокойный, агрессивный, нерешительный и т.д.). Учитывая представленные характеристики транспортный поток можно классифицировать следующим образом [41]:

*свободный поток* – расстояние между машинами достаточно велико (при скорости движения 60 км/ч около 167 метров), чтобы они не оказывали влияния на скорость и режим движения друг друга. Каждый водитель движется с удобной для него скоростью и не испытывает никаких затруднений во время движения.

*частично-связный поток* – в потоке транспортных средств редко образуются небольшие группы автомобилей, движущихся с одинаковой скоростью и на небольшом расстоянии друг от друга (при скорости движения 48 км/ч около 53 метров). Расстояния между группами достаточно велики. Такие группы образуются когда один или несколько автомобилей движутся за медленным (обычно грузовым) транспортным средством в ожидании обгона. Как только автомобиль совершит обгон, он продолжит движение в свободном режиме. Водители изредка испытывают затруднения во время движения.

*связный поток* – в транспортном потоке часто образуются большие группы автомобилей, расстояния между которыми небольшие (при скорости движения 30 км/ч около 25 метров). Обгоны во время движения возможны, но после обгона скорость автомобиля снова определяется скоростью движущегося впереди автомобиля. Режим движения водителя зачастую определяется следующим впереди транспортным средством.

*насыщенный (плотный) поток* – транспортный поток движется как единое целое, расстояния между автомобилями минимальны (при скорости движения 30 км/ч около 20 метров), обгон во время движения практически невозможен. Скорости автомобилей в насыщенном потоке низкие, расстояние между ними минимальное. При плохих дорожных условиях возможно возникновение заторов.



Разработкой основ авто-транспортных потоков с *феноменологической* позиции занимались ученые МАДИ: Бабков В.Ф., Сильянов В.В., Лобанов Е.М. и др.

Рост уровня автомобилизации населения приводит к появлению заторов и увеличению времени, затрачиваемого на поездку. Для решения таких проблем, при традиционном подходе, производится реконструкция проблемных участков, что, как правило, приводит к переносу места возникновения затора и последующим реконструкциям новых проблемных участков. Насыщенное и критическое автомобильно-дорожное движение на УДС мегаполисов характеризуется нелокальными откликами транспортной обстановки даже на локальные изменения (возмущения).

Существующие пакеты (PTV Vision, VISUM/VISSIM, AIMSUN) содержат большое количество параметров, что предполагает жесткие требования к точности и скорости настройки системы моделирования. *Эти технологии позволяют исследовать потоки либо на небольших участках городских сетей, либо на всей сети, но в течение небольшого времени, но допускают существенные погрешности при исследовании насыщенных потоков на сложных и больших сетях. Это обстоятельство затрудняет решение как проблемы развития УДС, так и проблемы управления дорожным движением.*

### 1.3 Математическое моделирование транспортных потоков

Первое экспериментальное исследование транспортных потоков проведено в 1933 году, когда *Брюс Дуглас Гриншильдс* [Greenshields B.D., 1933] представил фотографический метод изучения зависимости расстояния между движущимися транспортными средствами и их скоростью [4].

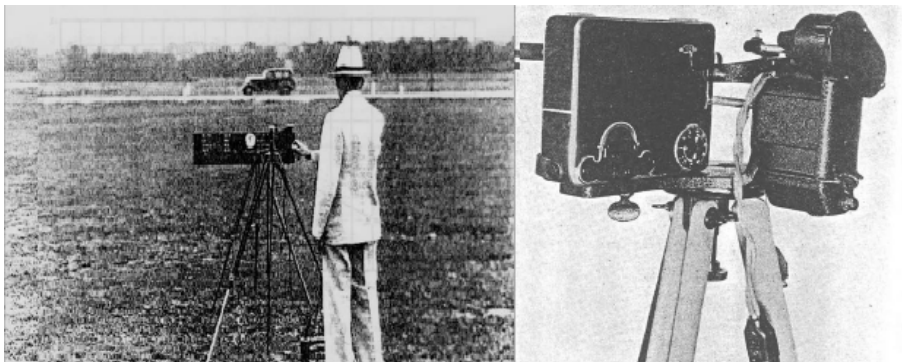


Рис. 19: Съемка и сбор данных

Гриншильдс экспериментальным путем ввел зависимость плотности транспортного потока от его скорости ( $flow = density \cdot speed$ ):  $q = \rho \cdot v$ , где  $q$  – интенсивность потока,  $\rho$  – плотность,  $v$  – скорость:

$$x_2 - x_1 = 6.9 + 0.81x_1 \quad (1.1)$$

В дальнейшем математическое моделирование потоков получило развитие в гидродинамической модели Лайтхилла-Уизема-Ричардса, которая представляет поток частиц в виде

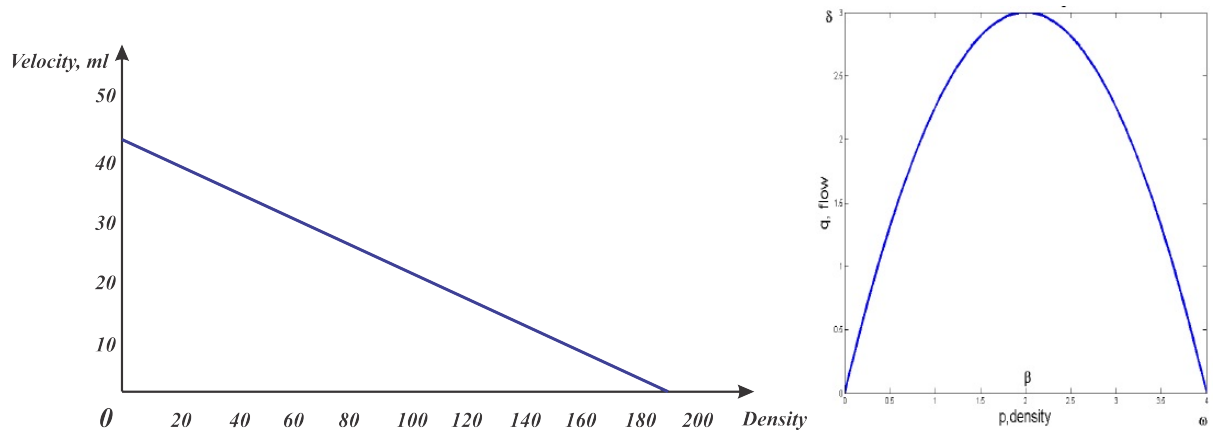


Рис. 20: Диаграмма транспортного потока

одномерной жидкости, движущейся по однополосному линейному носителю (дороге). Поток обладает следующими характеристиками: *плотность*  $\rho$  – плотность автомобильного потока, количество частиц на единицу длины, *интенсивность*  $q$  – интенсивность потока автомобилей, количество транспортных средств, проходящих через сечение за единицу времени, *скорость*  $v$  – скорость потока, приблизительно равна скорости каждого участника движения на рассматриваемом участке.

В модели вводится функциональная зависимость скорости потока от его плотности. Связь между плотностью, скоростью и интенсивностью выглядит следующим образом:

$$Q(\rho) = \rho v(\rho) \quad (1.2)$$

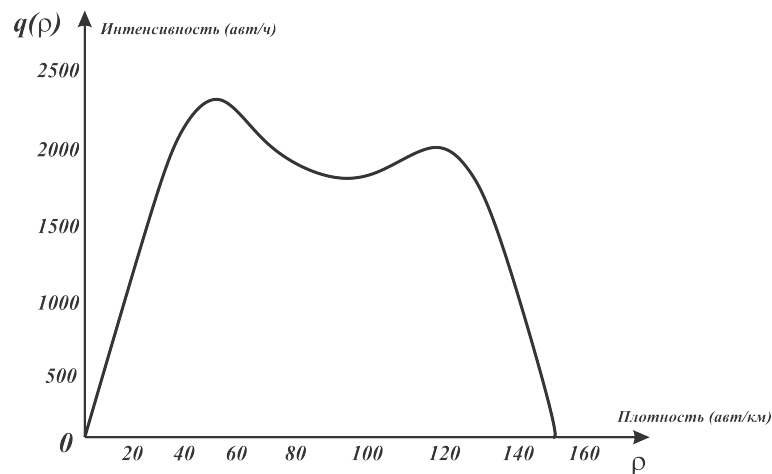


Рис. 21: Диаграмма зависимости интенсивности потока от плотности

*Модель следования за лидером* В данной модели рассматривается движение частиц в одном направлении друг за другом без возможности обгона [16], [42].

$$x_0(t) < x_1(t) < \dots < x_{n+1}(t), \forall t > 0 \quad (1.3)$$

Основным понятием в модели следования за лидером является **динамический габарит** [42].

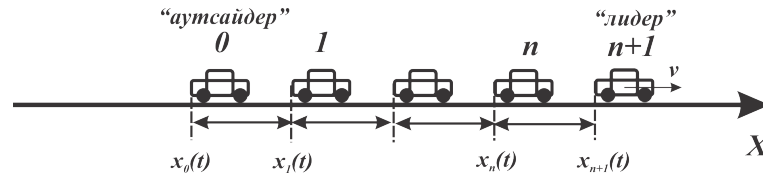


Рис. 22: Цепочка автомобилей

Для модели следования за лидером фундаментальной является система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (НОДУ):

$$\begin{cases} x_1(t) - x_0(t) = C_0 + C_1 x_0(t) + C_2 x_0^2(t), \\ x_2(t) - x_1(t) = C_0 + C_1 x_1(t) + C_2 x_1^2(t), \\ \dots \\ x_{n+1}(t) - x_n(t) = C_0 + C_1 x_n(t) + C_2 x_n^2(t), \end{cases}$$

где  $x_n(t)$  – траектория движения частицы с номером  $n$ ,  $C_0$  – средняя длина автомобиля,  $C_1$  – среднее время реакции водителя,  $C_2$  – коэффициент, связанный со сцеплением с дорогой [42]. Движение каждого автомобиля в модели следования за лидером в пределе зависит от характера движению первого автомобиля – *лидера*. Это значит, что всю цепочку движущихся автомобилей можно рассматривать как единое целое – *пачку* или *кластер*.

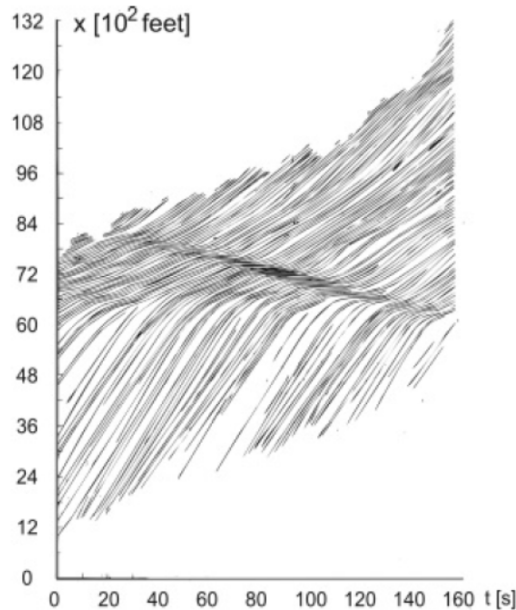


Рис. 23: Траектории движения автомобилей, снятые с помощью аэрофотосъемки Джоном Трейтерером, 1975 [10]

Система дифференциальных уравнений в модели следования за лидером с помощью предельного асимптотического перехода сводится к системе ДУ в *кластерной* модели. В модели следования за лидером происходит анализ локального движения частиц (автомобилей) на *перегоне* – прямом участке без пересечений. Для анализа движения потока частиц на всей городской сети необходимо произвести упрощение модели локального движения за счет уменьшения количества параметров для моделирования движения на все сети.

История математического моделирования транспортных потоков с использованием электронных вычислительных средств берет свое начало с 1962, когда были предприняты первые попытки исследования пропускной способности транспортных перекрестков (Kell 1962, May and Pratt 1968). В модель перекресток представлял собой многоканальную систему по обслуживанию поступающих заявок. Основная проблема заключалась в правильном подборе алгоритма поступления заявок к перекрестку и их последующего отправления [26].

Дальнейшим развитием является модель авторов Дрю, Месероле, Бур, (D.R. Drew, T.C. Meserole, J.H. Buhr, 1967 год), которая позволяла исследовать транспортный поток на примыкающих к магистралям съездах [26], [27]. В ней имелась возможность изменения входных данных для исследования различных магистралей. Главным вопросом оставалось описание поведения водителей и транспортного потока в целом для достижения поставленной цели.

В 1983 году японские ученые Иносэ и Хамада использовали идею макро-моделирования в управлении движением [28]. Объектом исследования ученых стал граф городской транспортной сети. Цель исследования состояла в оптимальном управлении светофорами, что являлось главным в управлении городским движением. Было уделено внимание и имитационному моделированию с помощью ЭВМ.

Значительное место в теории транспортных потоков занимают гидродинамические и газодинамические модели. В газодинамике рассматриваются задачи моделирования транспортного потока в условиях синхронизированного движения автомобилей на больших участках носителя, в которых используется *приближение сплошной среды*, так же рассмотрена двумерная макроскопическая модель транспортных потоков. Данные исследования освещены в работах ученых под руководством академика РАН Четверушкина Б.Н., Трапезниковой М.А., Чурбановой Н.Г., Карамзина Ю.Н.

Сетевые задачи и проблемы, связанные с функционированием транспортных потоков на сети на примере математической модели сердечно-сосудистой системы и вопросов транспортировки крови в организме исследуются в работах Тишкина В.Ф.

Методы математического моделирования и их применение в теории транспортных потоков, детерминированно-стохастический и кластерный подходы и их применение для оптимизации транспортных потоков на сетях, мониторинг авто-транспортных потоков с использованием современных вычислительных средств, разработка программных комплексов для моделирования транспортных потоков освещены в работах ученых: Буслаева А.П., Таташева А.Г., Яшиной М.В.

Разработанные с 30-х годов XX века модели и технологии управления авто-транспортными потоками не в полной мере описывают многополосное движение и поведение больших масс автомобилей на сложных сетях. Практика состоит в том, что локальные модели, берущие начало от Гриншилдса (модель следования за лидером, гидродинамическая модель) при применении на сложных сетях дают неприемлемое количество параметров, применяемых с ошибкой, вследствие чего поведение модели становится далеким от реальности. Применение данных моделей для исследования городской сети является наиболее актуальным аспектом в настоящее время в период урбанизации населения и сосредоточения

всей инфраструктуры страны в городах. *Разработанные модели не позволяют адекватно оценить характеристики транспорта и сети ввиду большого количества изменяющихся параметров и отсутствия адекватного представления на сети.* В таких условиях необходимо уменьшение количества переменных и упрощение модели с целью перевода ее на более сложные носители.

*Агентные имитационные пакеты рассматривают поведение отдельных участников транспортного потока, учитывая большое количество индивидуальных параметров каждого автомобиля (ускорение, траектория движения, коэффициент трения и т.д.), что, в условиях потоков высокой плотности (например в крупном городе) приводит к росту погрешности в вычислениях и достаточно большим ошибкам в результатах.* Из-за большого количества учитываемых характеристик сложность теоретического анализа агентных моделей увеличивается. В классических гидродинамических моделях поток рассматривается как единое целое и учитывается три основных параметра потока: интенсивность  $q$ , скорость  $v$  и плотность  $y$ , что позволяет проводить исследование потока в целом, но не учитывает такие факторы, как, например, взаимодействие потоков различных плотностей.

В данной работе исследуется *один из новых подходов к моделированию потоков на сетях – NODE-модель (Nonlinear Ordinary Differential Equations), которая синтезирует основные классические положения теории транспортных потоков: модель следования за лидером [Greenshields B.D., 1933], волновую модель [Lighthill M.J., Whitham G.B., 1955], клеточные автоматы и агентные модели [Nagel K., Schreckenberg M. A, 1992], и позволяет абстрагироваться от некоторых деталей.* При этом *размерность задачи – количество контролируемых параметров, увеличивается по сравнению с классическими тремя (интенсивность  $q$ , скорость  $v$ , плотность  $\rho$ ), но в значительно меньшей степени, чем в клеточных автоматах и агентном моделировании.*

## Глава 2

# Кластерные модели тотально-связных потоков на однополосных носителях

### 2.1 Основные понятия и определения

**Кластер** – это предельное устойчивое движение системы из двух и более частиц (автомобилей, клеток и т.д.) на одинаковом расстоянии друг от друга в модели следования за лидером. Модель кластера – это прямоугольник, имеющий длину  $d$  и высоту (плотность)  $y$  [1]. Площадь фигуры равна количеству частиц в кластере или массе кластера  $M = y \cdot d$ . В изолированном кластере масса является постоянной величиной. Кластер совершает движение слева направо.

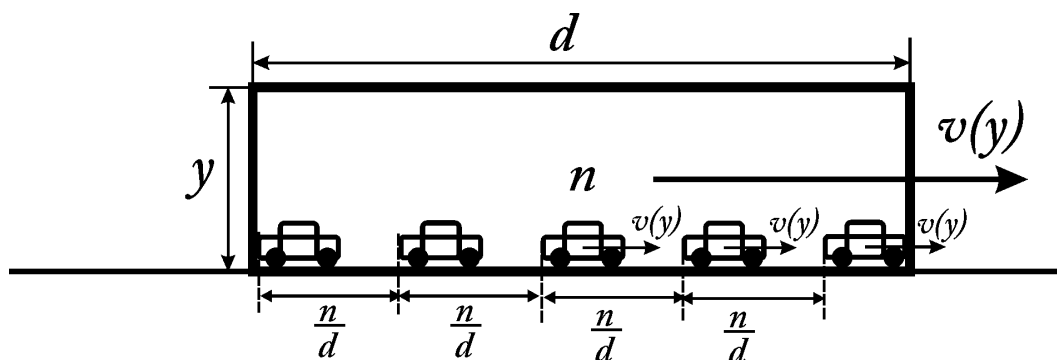


Рис. 24: Кластер

Скорость  $v$  кластера выражается как функция, зависящая от его плотности  $f(y)$  [1], [12], [13]. Например,

$$v(y) = v_0 \cdot \left( \frac{y_{max} - y}{y_{max}} \right)^\alpha, \quad (2.1)$$

здесь  $v_0$  определяет максимальную разрешенную скорость,  $y_{max}$  – максимально возможную плотность на полосе, при которой скорость потока будет равна 0,  $\alpha$  – параметр, от которого зависит вид кривой.

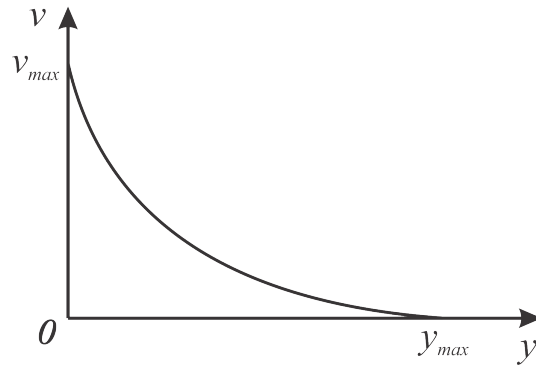


Рис. 25: График зависимости скорости от плотности

Для исследования кластерной модели проведена классификация *базовых типов кластеров*.

### Нулевой кластер

Нулевой кластер является идеализированным кластером, представляет собой участок носителя без частиц. Плотность нулевого кластера:  $y = 0$ .

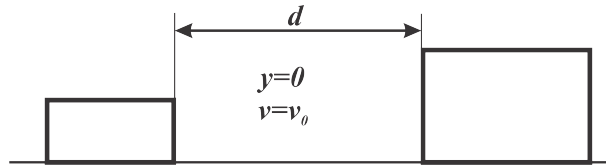


Рис. 26: Нулевой кластер

### Кластер-пробка

Кластер-пробка представляет собой участок носителя, плотность потока на котором равна максимальной плотности (пробка):  $y = y_{max}$ . Скорость кластера-пробки равна 0:  $v = 0$ .

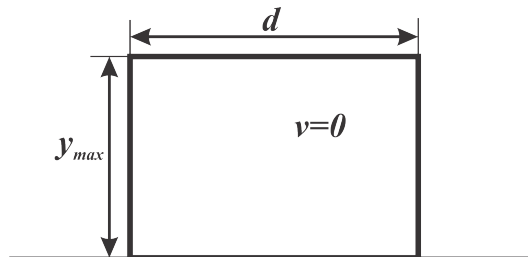


Рис. 27: Кластер-пробка

Все кластеры совершают движение по *носителям* транспортного потока, которые представляют собой простейшие участки рассматриваемых сетей, например, участок улично-дорожной сети (участок дороги заданной длины, жилой квартал, район, город), сердечно-сосудистой системы (система капилляр, малый и большой круги кровообращения), компьютерной сети (локальная сеть предприятия, города и т.д.) и др. Далее будут представлены базовые типы носителей, рассматриваемые в диссертации.

### Полоса

Отрезок  $S$  вещественной прямой  $\mathbf{R}$ , имеющий направление движения потока и длину  $L$ .

Кластеры совершают движение по полосе друг за другом в одном направлении. Является базовым бесконечным носителем потока в кластерной модели.

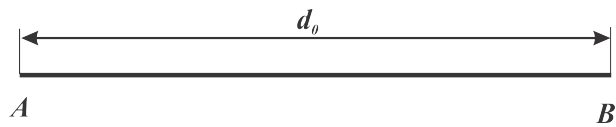


Рис. 28: Полоса

### Кольцо

Отрезок  $S$  вещественной прямой длины  $2\pi r$ , у которого  $A \equiv B$  (замкнутая полоса) (Рис. 29). Качественно длина кольца выражается в градусах или радианах. Является базовым замкнутым носителем потока в кластерной модели.

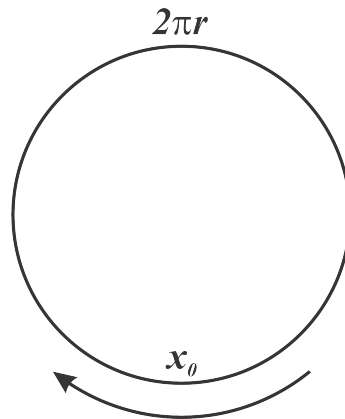


Рис. 29: Кольцо

### Бесконечная полоса

Бесконечная полоса представляет собой всю вещественную прямую  $\mathbf{R}$  бесконечной длины.

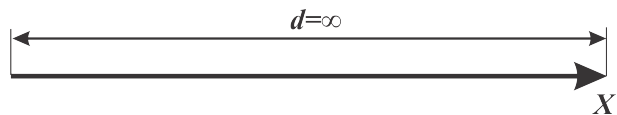


Рис. 30: Бесконечная полоса

### Многополосный носитель

Система из  $n$  полос, идущих параллельно друг другу в одном направлении. Каждая полоса имеет длину  $L$ . Кластеры совершают движение по полосам и имеют возможность менять полосу только на соседнюю (перестраиваться). Является моделью многоканального (многополосного) движения.

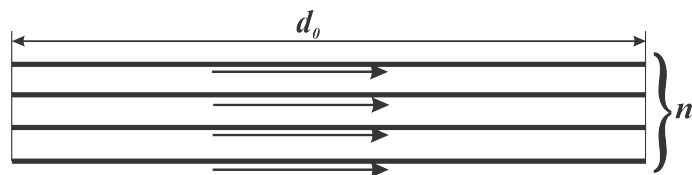


Рис. 31: Многополосный носитель



### Многополосный замкнутый носитель

Система из  $n$  однонаправленных колец одинаковой длины  $L$ , расположенных параллельно друг другу (Рис. 32). Кластеры имеют возможность перестраиваться на соседние кольца. Представляет собой модель локального многоканального (многополосного) движения.

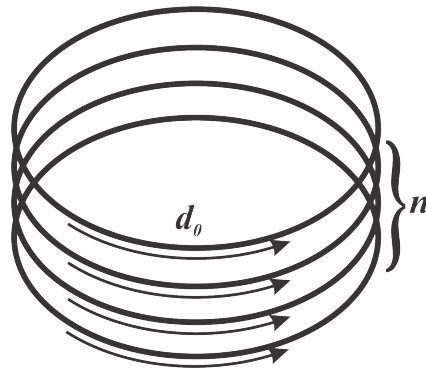


Рис. 32: Многополосный замкнутый носитель

### Одномерная регулярная сеть

Сеть, состоящая из колец одинаковой длины  $L$ , каждое кольцо имеет две общие точки (узлы) с двумя соседними кольцами, расположенные на максимальном удалении друг от друга. (Рис. 33)

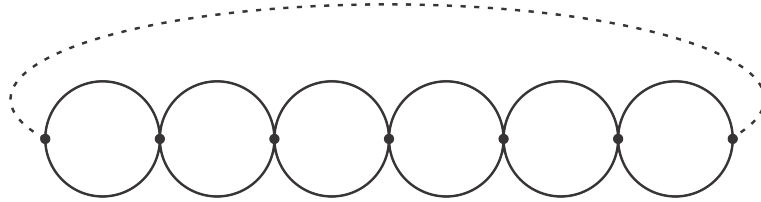


Рис. 33: Одномерная регулярная сеть

### Одномерная нерегулярная сеть

Нерегулярная сеть представляет собой последовательность соединенных друг за другом колец  $T_i$ . Каждое  $i$  кольцо соединяется с двумя соседними в двух точках (узлах)  $P_{i-1}$  и  $P_i$ . Узлы могут располагаться произвольно. Последнее кольцо соединяется с первым (Рис. 34).

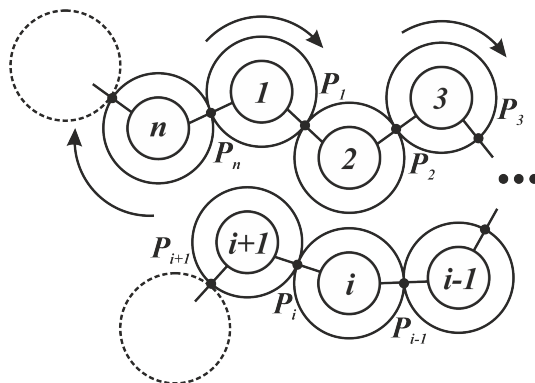


Рис. 34: Одномерная нерегулярная сеть

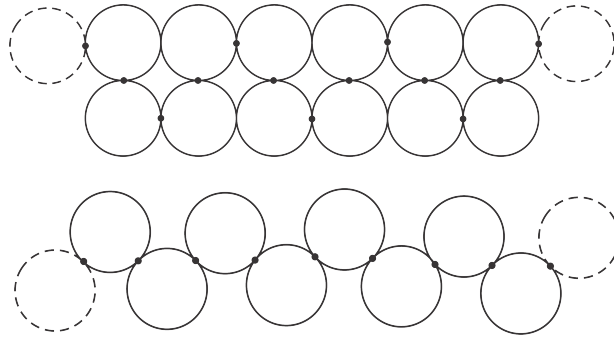


Рис. 36: Примеры нерегулярных одномерных сетей

**Регулярная двумерная сеть** – двумерная кольцевая регулярная сеть, представляет собой систему из  $n \times t$  колец  $\mathbf{T}$ . Каждое имеет 4 узла с соседними кольцами в координатах  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ , по-одному с каждым из соседних колец.

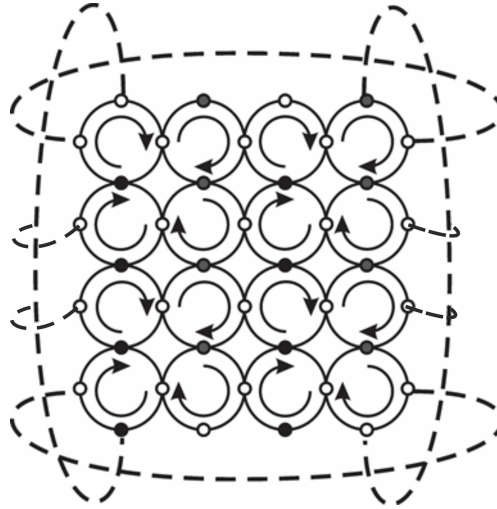


Рис. 37: Двумерная регулярная сеть

### Квази-регулярная двумерная сеть

Сеть состоит из колец двух радиусов:  $R$  и  $r$ . Расположение колец соответствует рисунку Рис. 38.

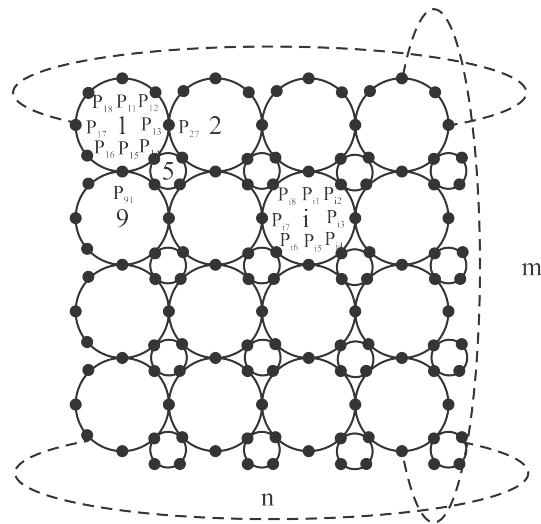


Рис. 38: Квази-регулярная сеть

Далее в работе представлены *основные понятия и определения*, используемые в описании.

**Узел** – общая точка для двух колец.

**Конкуренция** – Ситуация, при которой через узел пытаются совершить проезд два кластера.

**Изолированный кластер** представляет собой кластер, у которого левая и правая границы не соприкасаются с другими кластерами.

**Взаимодействующий кластер** – это кластер, одна из границ которого является общей для соседнего с ним кластера. Один кластер может взаимодействовать не более чем с двумя другими кластерами.

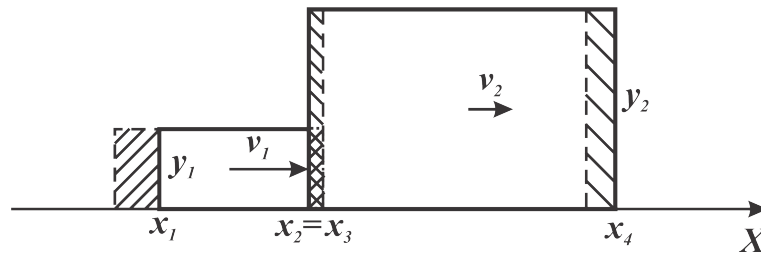


Рис. 39: Взаимодействующие кластеры

**Несвязный поток** – поток частиц, разбитый на кластеры, в котором присутствуют или могут образовываться нулевые кластеры.

**Связный поток** – поток частиц, при взаимодействии которого не образуются кластеры нулевой плотности.

**Локальное распространение информации** – сведения между частицами внутри кластера передаются последовательно, от одной частице к другой.

**Глобальное распространение информации** – сведения между частицами внутри кластера передаются мгновенно.

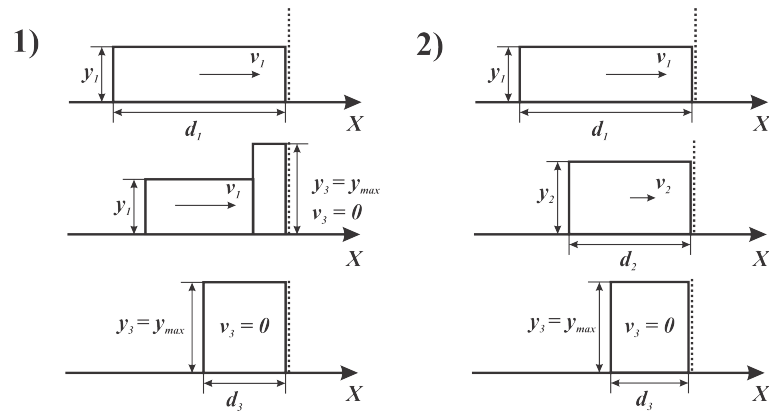


Рис. 40: Локальная информация, глобальная информация

**Синергия** – свойство системы, достижение состояния за конечный промежуток времени, при котором в системе отсутствует какая-либо конкуренция.

**Коллапс** – процесс в системе, отсутствие какого-либо движения на носителе независимо от начальных условий за конечный промежуток времени.

**Частичный коллапс** – процесс в системе, во время которого на носителе наблюдаются элементы, на которых полностью отсутствует движение, в то время как на всем носителе движение осуществляется без остановок.

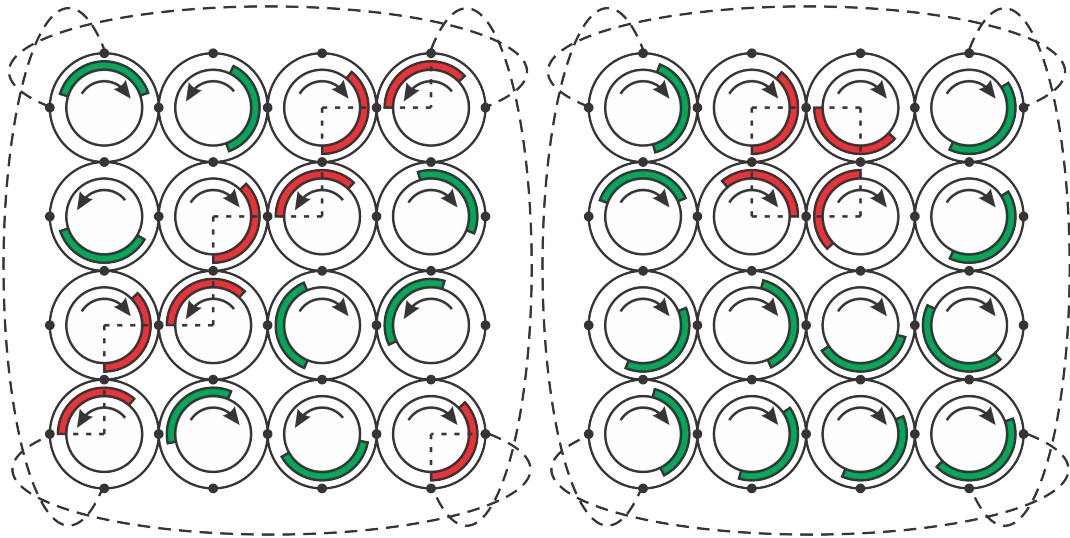


Рис. 41: Частичный коллапс

**Динамический затор** – процесс в системе, последовательно перемещающееся по носителю состояние кластеров с нулевой скоростью.

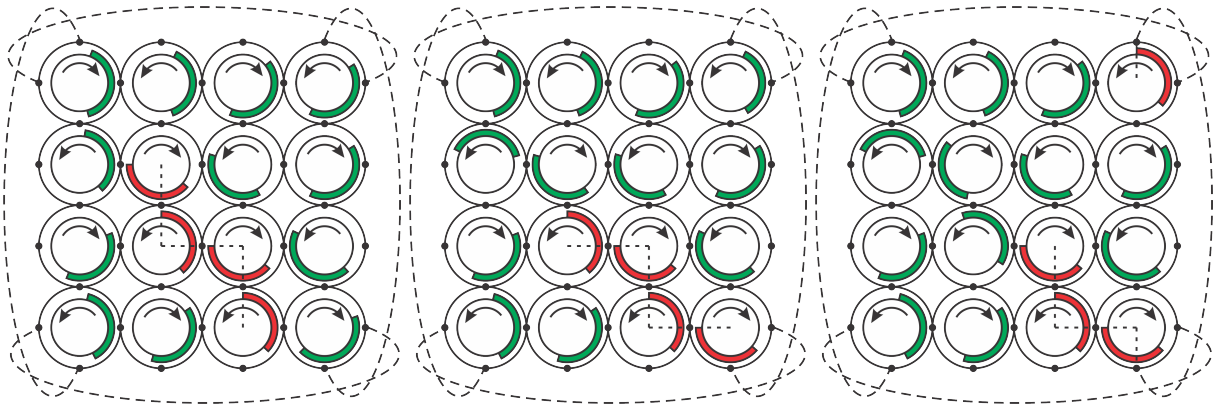


Рис. 42: Динамический затор

**Тотальное движение** – процесс в системе, во время которого на носителе происходит движение на всех его элементах без каких-либо задержек.

**Однонаправленное движение** – поток частиц совершает движение по сети в одном направлении (по часовой или против часовой стрелки).

**Сонаправленное движение** – поток частиц совершает движение по сети так, чтобы проезд через узлы кластеры осуществляли в одном направлении.

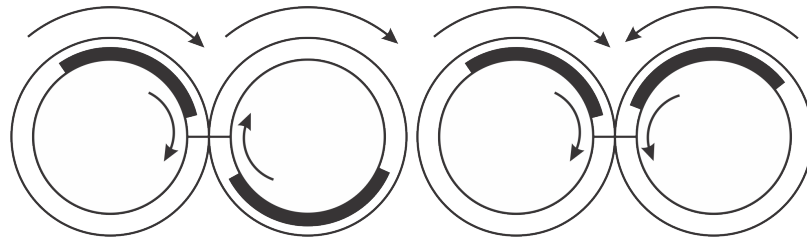


Рис. 43: а) Однонаправленное движение б) Сонаправленное движение

**Сжимаемый кластер** – кластер, длина, плотность и скорость которого *изменяются* при взаимодействии с другими кластерами или препятствиями. *Масса* кластера при этом *сохраняется*. Сжимаемый кластер является моделью группы частиц с *локальным распространением информации*, когда участники движения в кластере регулируют свою скорость и дистанцию ориентируясь только по впередиидущей частице.

Процесс взаимодействия предполагается в условиях **тотально-связного поведения**, быстрые кластеры интегрируются в медленные, медленные кластеры интегрируются в быстрые, разрывов при взаимодействии между кластерами не происходит (быстрый кластер не "отрывается" от медленного, медленный интегрируется в быстрый).

**Несжимаемый кластер** – кластер, у которого *изменяется только скорость*, длина и плотность остаются *постоянными* даже во время взаимодействия с другими кластерами. Несжимаемый кластер представляет собой движение частиц в условиях глобального распространения информации между участниками (движение автомобилей сопровождения, движение поезда, и т.д.). В данном случае при изменении скорости частиц, находящихся в начале кластера, все остальные участники движения одновременно изменяют свою скорость.

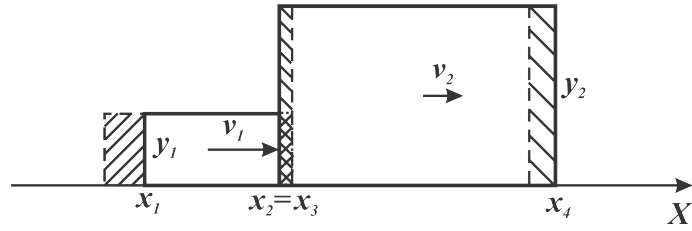


Рис. 44: Сжимаемый кластер

Несжимаемый кластер является упрощенным вариантом сжимаемого кластера с меньшим количеством изменяющихся параметров, что позволяет упростить качественное и компьютерное исследование некоторых сложных задач.

### 2.1.1 Взаимодействие ведущего и ведомого кластеров

По бесконечной полосе совершают движение два кластера. Кластер плотности  $y_1$ , длины  $d_1$  движется со скоростью  $v_1$  и является *ведомым*, располагаясь в координатах  $[x_1, x_2]$ . Кластер плотности  $y_2$ , длины  $d_2$  движется со скоростью  $v_2$  и является *ведущим*, располагаясь в координатах  $[x_2, x_3]$ . Пусть  $v_1 < v_2$ , тогда ведомый кластер является медленным, ведущий кластер быстрым. Так как кластеры имеют общую координату в условиях *тотально-связного* потока, то разрыва между кластерами не происходит.

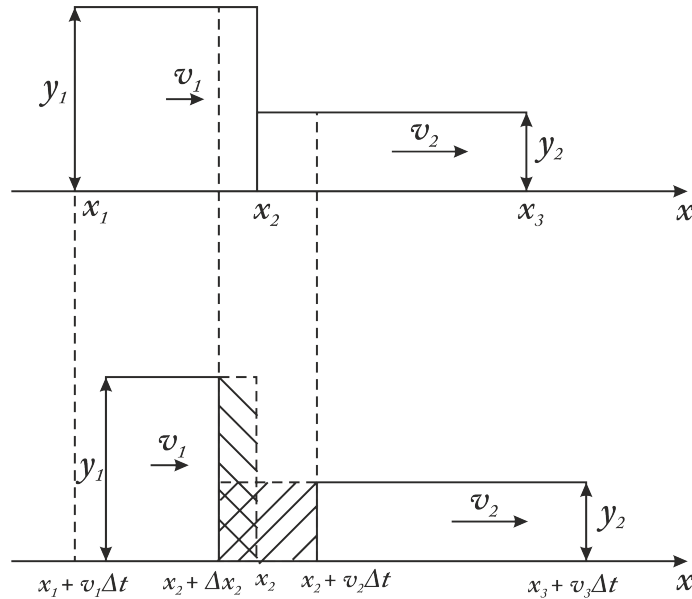


Рис. 45: Взаимодействие ведомого и ведущего кластеров

Левая граница ведомого кластера перемещается со скоростью  $v_1$ , и поэтому в момент времени  $t + \Delta t$  ей соответствует координата  $x_1 + v_1 \Delta t$ . Правая граница ведущего кластера перемещается со скоростью  $v_2$  и в момент времени  $t + \Delta t$  ей соответствует координата  $x_3 + v_2 \Delta t$  соответственно. Высоты кластеров остаются постоянными. Правая граница медленного кластера совпадает с левой границей быстрого кластера, и движется со скоростью, удовлетворяющей условию, что сумма площадей прямоугольников остается постоянной. Пусть

$x_2 + \Delta x_2$  – координата точки на оси абсцисс, соответствующая этой границе в момент времени  $t + \Delta t$ .

Тогда для данной задачи имеем:

$$(x_2 + v_2 \Delta t - x_2 - \Delta x_2) y_2 = ((x_2 - x_1) - (x_2 + \Delta x_2 - x_1 - v_1 \Delta t)) y_1, \iff$$

$$(v_2 \Delta t - \Delta x_2) y_2 = (-\Delta x_2 + v_1 \Delta t) y_1, \iff$$

$$(v_2 y_2 - v_1 y_1) \Delta t = \Delta x_2 (y_2 - y_1), \iff$$

$$\dot{x}_2 = \frac{v_2 y_2 - v_1 y_1}{y_2 - y_1} \quad (2.2)$$

В результате получим скорости для каждой из точек взаимодействия двух кластеров:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1 = f(y_1) \\ \dot{x}_2 = \frac{v_2 y_2 - v_1 y_1}{y_2 - y_1} \\ \dot{x}_3 = v_2 = f(y_2) \end{cases}$$

Уравнение для  $x_2$  является аналогом уравнения **ударной волны Гюгонио-Ранкина** (Уильям Джон Ранкин, Пьер-Анри Гюгонио, [7], [8]) из гидродинамических моделей автотранспортных потоков, описывающего поведение частиц до и после ударной волны [9]:

$$\sigma(y_+, y_-) = \frac{q(y_+) - q(y_-)}{y_+ - y_-} \quad (2.3)$$

где  $\sigma$  – скорость движения разрыва плотностей.

1. При взаимодействии кластеров длина  $d$  может изменяться с течением времени и определяется из разности скоростей координат границ кластера:  $\Delta d = |\dot{x}_1 - \dot{x}_2|$ ;
2. Плотности  $y$  кластеров остаются постоянными;
3. Масса системы взаимодействующих кластеров сохраняется:  $M = m_1 + m_2 = const$ .

Пусть  $v_1 > v_2$ . Тогда кластер  $y_2$  будет медленным, а следующий за ним  $y_1$  будет быстрым:  $v_1 > v_2$

Система уравнений выводится аналогично предыдущей ситуации. Для каждой точки взаимодействия имеем:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1 = f(y_1) \\ \dot{x}_2 = \frac{v_2 y_2 - v_1 y_1}{y_2 - y_1} \\ \dot{x}_3 = v_2 = f(y_2) \end{cases}$$

**Свойства:**

1. Масса взаимодействующих кластеров сохраняется;
2. За конечный промежуток времени  $t$  ведомый кластер полностью трансформируется в ведущий, и далее движение будет совершать только ведущий кластер;

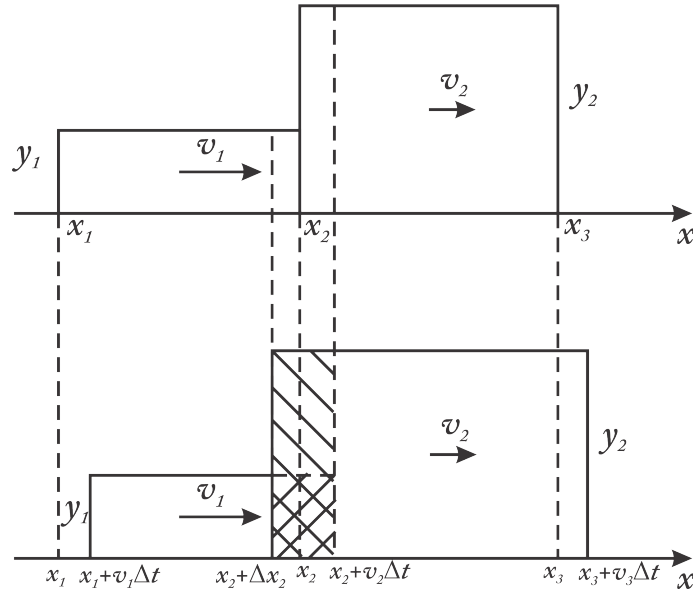


Рис. 46: Движение быстрого кластера за медленным

3. Длина результирующего кластера рассчитывается из условия:

$$D \cdot y_2 = M = m_1 + m_2$$

$$D \cdot y_2 = d_1 \cdot y_1 + d_2 \cdot y_2$$

$$D = \frac{d_1 \cdot y_1 + d_2 \cdot y_2}{y_2}$$

$$D = \frac{d_1 \cdot y_1}{y_2} + d_2$$

## 2.2 Модель цепочки $n$ кластеров на бесконечной прямой $\mathbf{R}$

### 2.2.1 Постановка задачи

Кластеры различной плотности  $y_i$ , длины  $d_i$  и скорости  $v_i$ ,  $i = 0..n$  совершают движение по бесконечной полосе  $\mathbf{R}$ . Поток движется без разрывов, то есть без кластеров нулевой плотности. Обозначим каждую координату взаимодействия частиц (координату, в которой границы двух соседних кластеров соединяются) за  $x_i$ . Тогда все координаты будут описывать взаимодействие кластеров, кроме координаты  $x_0$  конца кластера, движущегося в конце, и координаты  $x_n$  начала первого кластера.



Данное движение описывается следующей системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (NODE):

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = v_1 \\ \dot{x}_1 = \frac{v_2 y_2 - v_1 y_1}{y_2 - y_1} \\ \dot{x}_2 = \frac{v_3 y_3 - v_2 y_2}{y_3 - y_2} \\ \dot{x}_3 = \frac{v_4 y_4 - v_3 y_3}{y_4 - y_3} \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = \frac{v_n y_n - v_{n-1} y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \\ \dot{x}_n = v_n \end{cases} \quad (2.4)$$

Со следующими начальными условиями:

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \quad (2.5)$$

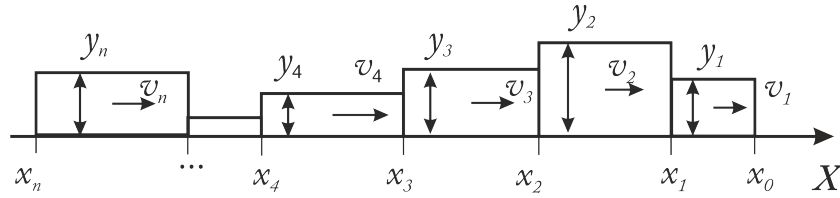


Рис. 47: Постановка задачи

После подсчетов мы получим значения скоростей для каждой из координат, в которых происходит соединение наших кластеров. В зависимости от входных данных, то есть от плотностей и скоростей соединяющихся частиц, скорости могут принимать самые различные значения, как отрицательные, так и положительные. При определенных условиях скорость может быть нулевой.

Данные значения обусловлены плотностями частиц относительно друг друга. Экспериментально доказано, что при соотношении:

$$y_i + y_{i-1} = y_{max} \quad (2.6)$$

скорость вычисляемой координаты будет равна нулю, а значит при моделировании, данная граница не будет двигаться относительно дороги.

В случае, когда:

$$y_i + y_{i-1} > y_{max} \quad (2.7)$$

скорость координаты будет отрицательной, а значит двигаться она будет против движения частиц относительно дороги.

В последнем возможном варианте:

$$y_i + y_{i-1} < y_{max} \quad (2.8)$$

скорость рассчитываемой координаты будет положительной и двигаться она будет по направлению движения потока [?].

Изобразим графики изменения координат взаимодействия  $x_i$  с течением времени  $t$ . Прямые линии, изображающие положение границ кластеров при взаимодействии, являются решением системы дифференциальных уравнений. Угол наклона  $\phi_i$  к оси ординат равен скорости  $\dot{x}_i$  (аналогично  $\sigma$  – скорость движения разрыва плотностей в уравнении Гюгонию-Ранкина). (Рис. 48)

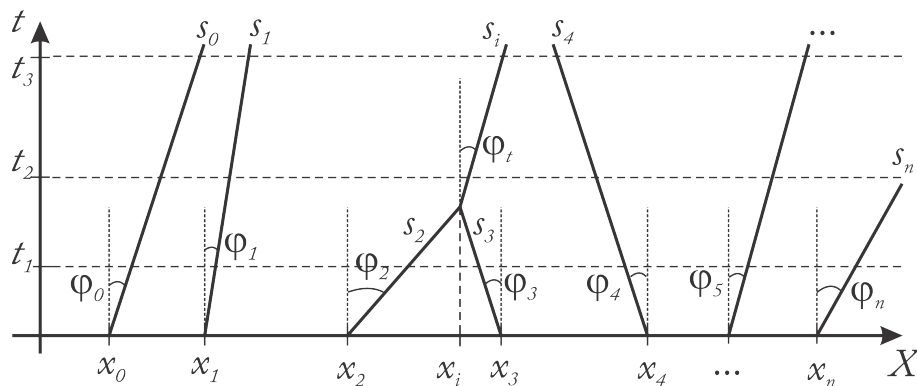


Рис. 48: Траектории движения границ взаимодействия

В момент исчезновения кластера количество уравнений уменьшается, количество кривых тоже уменьшается. Результирующая скорость и направление движения границы зависят от плотностей кластеров, вступивших во взаимодействие.

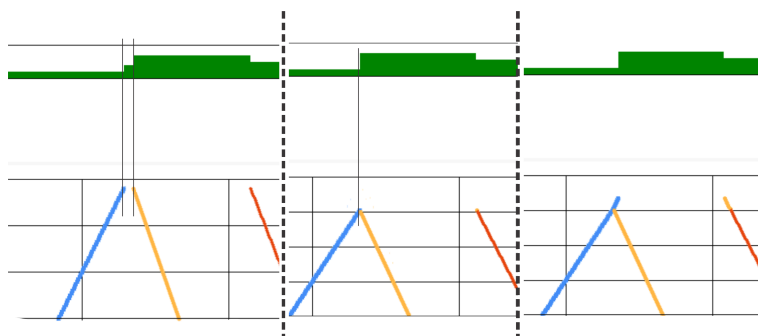


Рис. 49: Момент исчезновения кластера

На рисунке 50 показаны траектории решения системы уравнений для двух экспериментов на бесконечной прямой. На рисунках видно, что все траектории сходятся к той, что повторяет самую правую (ведущую) траекторию. Это значит, что все частицы в потоке при любых начальных условиях подстраиваются под режим движения ведущей частицы.

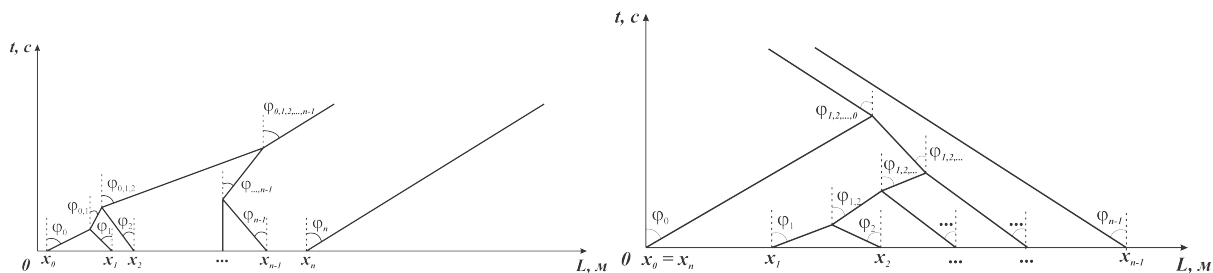


Рис. 50: Траектории движения границ взаимодействия

## 2.2.2 Качественные результаты

*Утверждение 1.* Количество кластеров не увеличивается.

*Доказательство.* Так как взаимодействующий поток является связным, то разрывов между кластерами не происходит, что препятствует появлению новых кластеров, то есть первоначальное количество кластеров не увеличивается.

*Утверждение 2.* За конечный интервал времени  $t$ , при любых начальных условиях движение будет совершать только один кластер, двигавшийся первым (лидер) с плотностью  $y_n$ .

*Доказательство.* Правая граница лидирующего кластера движется со скоростью  $v_n$ . Для того, что бы этот кластер исчез, необходимо чтобы его левая граница двигалась со скоростью  $v > v_n$ . Докажем, что это невозможно. Скорость левой границы  $v = \frac{v_n y_n - v_{n-1} y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ , тогда:

$$\frac{v_n y_n - v_{n-1} y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > v_n$$

$$\frac{y_n - \frac{v_{n-1}}{v_n} y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1$$

Если

$$1) y_n - y_{n-1} > 0, \tag{2.9}$$

тогда  $y_n - \frac{v_{n-1}}{v_n} y_{n-1} > y_n - y_{n-1}$

$$-\frac{v_{n-1}}{v_n} y_{n-1} > -y_{n-1}$$

$$\frac{v_{n-1}}{v_n} y_{n-1} < y_{n-1}$$

$$\frac{v_{n-1}}{v_n} < 1$$

$v_{n-1} < v_n$ , или если относительно плотностей:  $y_n < y_{n-1}$

$$y_n - y_{n-1} < 0,$$

что противоречит предположению 2.9.

$$2) y_n - y_{n-1} < 0, y_n - \frac{v_{n-1}}{v_n} y_{n-1} < y_n - y_{n-1} \tag{2.10}$$

$$-\frac{v_{n-1}}{v_n} y_{n-1} < -y_{n-1}$$

$$\frac{v_{n-1}}{v_n} > 1$$

$v_{n-1} > v_n$ , или если относительно плотностей:  $y_n > y_{n-1}$

$$y_n - y_{n-1} > 0,$$

что противоречит предположению 2.10.

*Утверждение 3.* Длина результирующего кластера:  $D = \frac{M}{y_n}$ , где  $M = \sum d_i \cdot y_i$ .

*Доказательство.* Очевидно из закона сохранения массы и утверждений 2 и 3.

Определим величины:

$$\Delta \dot{x}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}, i = 1..n,$$

скорость увеличения(+) или уменьшения(-) длины кластера с номером  $i$ . Для всех  $\Delta\dot{x}_i < 0$  пусть

$$t^{dis} = \min_{0 < i \leq n} \left( \frac{d_i}{|\Delta\dot{x}_i|} \right)$$

– минимальное время исчезновения кластера. Тогда через время  $t^{dis}(1)$  происходит исчезновение не менее одного кластера, через  $t^{dis}(k)$  –  $k$ -го кластера. То есть, за время  $t^{dis}$  гарантированно исчезнет один кластер. Каждый такой интервал происходит пере-конфигурация системы – количество кластеров уменьшается, уменьшается множество плотностей и длин кластеров.

*Утверждение 4.* Время достижения стационарного состояния:

$$t = \sum_{k=1}^{n-1} (t^{dis}(k)).$$

*Доказательство.* Так как по достижению стационарного состояния исчезают все кластеры, кроме кластера-лидера, то время, за которое достигается стационарный процесс складывается из суммы временных интервалов, каждый из которых характеризует время исчезновения одного кластера. После каждого такого исчезновения происходит пере-конфигурация начальных условий (уменьшается количество начальных параметров, изменяются скорости границ взаимодействия в месте исчезновения, изменяются длины кластеров). Тогда на каждом шаге, в течение которого происходит не менее одного исчезновения, необходимо вычислять минимальный интервал времени  $t_{dis}(i)$ , за который исчезнет один  $i$ -кластер, пока не останется только кластер-лидер. Полученные интервалы времени составляют время достижения стационарного состояния.

*Утверждение 5.* Характерное расстояние, на которое поток переместится за время взаимодействия:  $l^* = v_n \cdot t$ .

*Доказательство.* По условию утверждения 2 все кластеры трансформируются в кластер-лидер с начальным номером  $n$ , что означает, что правая граница лидера будет перемещаться со скоростью  $v_n$  в течение всего времени взаимодействия, так как не находится во взаимодействии с другими кластерами (по условию задачи), сам кластер не исчезнет. Тогда, за время взаимодействия весь поток пройдет расстояние, на которое переместится правая граница кластера-лидера:  $v_n \cdot t$ .

### 2.2.3 Численное исследование

Численное исследование транспортных потоков на основе кластерной модели осуществлялось с помощью разработанного программного обеспечения *NODE model*. Подробное описание программы приведено далее в работе. В результате использования программного пакета подтверждены сформулированные теоретические результаты.

*Пример 1.*  $y_1 = 30, d_1 = 100; y_2 = 60, d_2 = 100; y_3 = 90, d_3 = 100$ . Время достижения стационарного состояния  $t = 48$ . В результате взаимодействия вся группа кластеров трансформировалась в первый кластер.

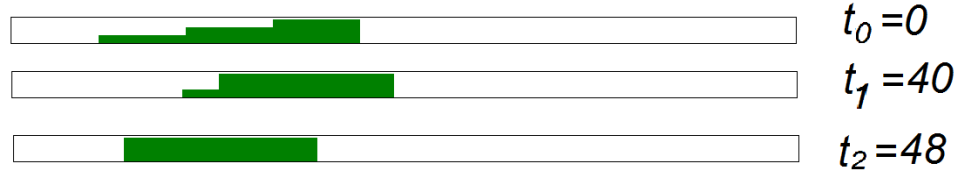


Рис. 51: Пример 1

*Пример 2.*  $y_1 = 20, d_1 = 30; y_2 = 70, d_2 = 40; y_3 = 30, d_3 = 40; y_4 = 20, d_4 = 50$ . Время достижения стационарного состояния  $t = 22$ . В результате взаимодействия, аналогично примеру 1, получен кластер-лидер.

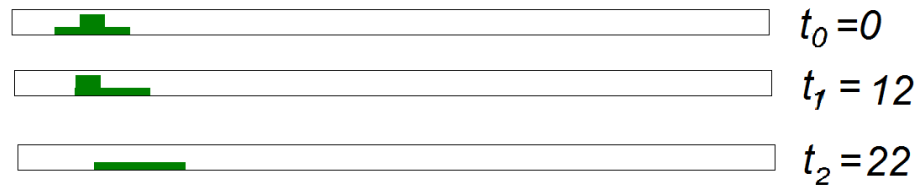


Рис. 52: Пример 2

## 2.3 Модель цепочки $n$ кластеров на кольце

### 2.3.1 Постановка задачи

Кластеры различной плотности  $y_i$ , длины  $d_i$  и скорости  $v_i, i = 0..n$  совершают движение по кольцу  $T$ . Поток движется без разрывов, то есть без кластеров нулевой плотности. Обозначим каждую координату взаимодействия частиц (координату, в которой границы двух соседних кластеров соединяются) за  $x_i$ . Так как движение потока кластеров происходит по кольцу, то первый кластер с номером  $n$  будет взаимодействовать не только с предшествующим кластером  $n - 1$  но и с последним кластером с номером 1. Система дифференциальных уравнений примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_0 = \frac{v_1 y_1 - v_n y_n}{y_1 - y_n} \\ \dot{x}_1 = \frac{v_2 y_2 - v_1 y_1}{y_2 - y_1} \\ \dot{x}_2 = \frac{v_3 y_3 - v_2 y_2}{y_3 - y_2} \\ \dot{x}_3 = \frac{v_4 y_4 - v_3 y_3}{y_4 - y_3} \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = \frac{v_n y_n - v_{n-1} y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \\ \dot{x}_n = \frac{v_1 y_1 - v_n y_n}{y_1 - y_n} \end{array} \right.$$

Вместе с начальными условиями:

$$x_{00} = x_0(0), x_{10} = x_1(0), \dots, x_{n0} = x_n(0)$$

данная система образует задачу Коши.

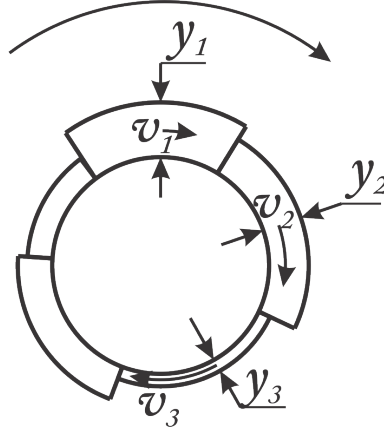


Рис. 53: Постановка задачи

Основная задача состоит в том, чтобы выяснить конечное состояние системы, возможны ли стационарные состояния системы и при каких начальных данных такие состояния возможны.

### 2.3.2 Качественные результаты

*Утверждение 1.* Количество кластеров не увеличивается.

*Доказательство.* Так как взаимодействующий поток является связным, то разрывов между кластерами не происходит, что препятствует появлению новых кластеров, то есть первоначальное количество кластеров не увеличивается.

*Утверждение 2.* При любой начальной конфигурации, за конечный интервал времени  $t$ , при условии, что все  $y_i$  различны, наступает стационарный процесс: *бегущая волна*, состоящая из двух кластеров с плотностями  $y_u$  и  $y_w$ ;  $u, w \in [1, 2, \dots, n]$ .

*Доказательство.* Для того, чтобы количество кластеров не изменялось, необходимо выполнение следующего условия:  $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = \dots = \dot{x}_n$ . Тогда

$$\dot{x}_i = \dot{x}_j$$

$$\frac{v_a y_a - v_b y_b}{y_a - y_b} = \frac{v_c y_c - v_d y_d}{y_c - y_d}$$

$$(v_a y_a - v_b y_b)(y_c - y_d) = (v_c y_c - v_d y_d)(y_a - y_b)$$

$$v_a y_a y_c - v_a y_a y_d - v_b y_b y_c + v_b y_b y_d = v_c y_c y_a - v_c y_c y_b - v_d y_d y_a + v_d y_d y_b$$

$$(v_d - v_a) y_d y_a + (v_a - v_c) y_a y_c + (v_c - v_b) y_b y_c + (v_b - v_d) y_b y_d = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v_d - v_a = 0 \\ v_a - v_c = 0 \\ v_c - v_b = 0 \\ v_b - v_d = 0 \end{cases}$$

Так как  $v_a \neq v_b, v_c \neq v_d \Rightarrow y_a \neq y_b, y_c \neq y_d$  (иначе взаимодействие невозможно), то пусть  $v_a = v_c, v_b = v_d \Rightarrow y_a = y_c, y_b = y_d$ . Тогда

$$(v_d - v_c)y_d y_c + (v_c - v_c)y_c y_c + (v_c - v_d)y_d y_c + (v_d - v_d)y_d y_d = 0$$

$$(v_d - v_c)y_d y_c - (v_d - v_c)y_d y_c = 0,$$

условие выполнено.

Пусть  $v_a = v_d, v_b = v_c \Rightarrow y_a = y_d, y_b = y_c$ . Тогда аналогично предыдущему:

$$(v_d - v_d)y_d y_d + (v_d - v_c)y_d y_c + (v_c - v_c)y_c y_c + (v_c - v_d)y_c y_d = 0$$

$$(v_d - v_c)y_d y_c - (v_d - v_c)y_c y_d = 0,$$

условие выполнено.

Теорема доказана.

*Утверждение 3.* Если среди множества плотностей  $y_i$  существуют  $k$  пар плотностей  $y_u$  и  $y_w$ ;  $u, w = 0..n$ , то наблюдается стационарный процесс движения  $2k$  кластеров с плотностями  $y_u$  и  $y_w$ .

*Доказательство.* Аналогично предыдущей теореме может существовать  $k$  пар  $y_a, y_b$ , если допускают начальные условия.

Рассматривая задачу в *общем положении* (все плотности различны), получить такой результат невозможно.

*Утверждение 4.* Время достижения стационарного состояния

$$t = \sum_{k=1}^{n-2} t^{dis}(k).$$

*Доказательство.* Аналогично утверждению 4 из предыдущего параграфа.

### 2.3.3 Численное исследование

Эксперименты проводились в программном пакете *NODE model* с целью подтверждения теоретических результатов и установления существования возможных стационарных состояний в результате взаимодействия для их последующего теоретического обоснования.

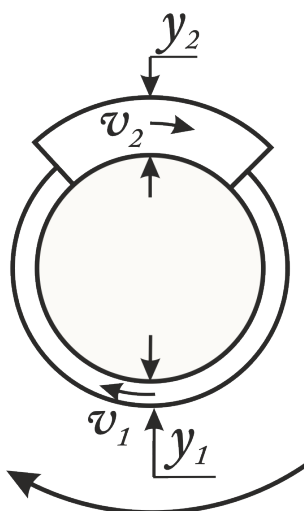


Рис. 54: Бегущая волна

*Пример 1.*  $y_1 = 50, d_1 = 150; y_2 = 20, d_2 = 150; y_3 = 70, d_3 = 150; y_4 = 30, d_4 = 150; y_5 = 60, d_5 = 150$ . Время достижения стационарного состояния  $t = 2107$  тактов. В результате взаимодействия получен стационарный процесс: *бегущая волна*.

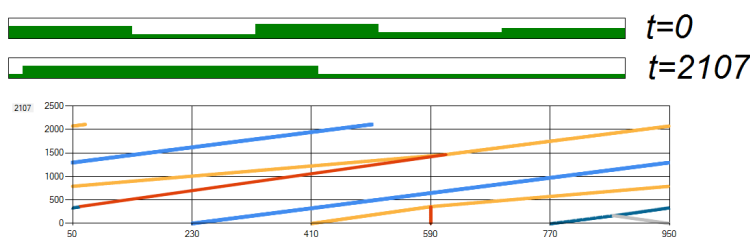


Рис. 55: Пример 1

*Пример 2.*  $y_1 = 30, d_1 = 200; y_2 = 60, d_2 = 100; y_3 = 20, d_3 = 150; y_4 = 70, d_4 = 250; y_5 = 40, d_5 = 200$ . Время достижения стационарного состояния  $t = 2157$  тактов. В результате получена бегущая волна.

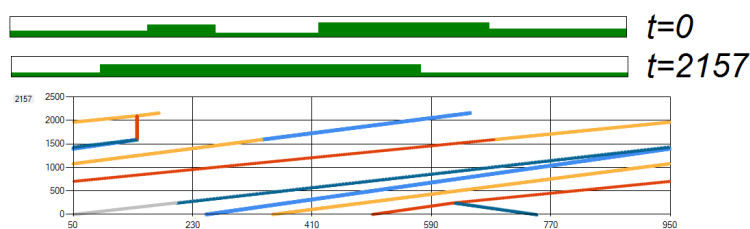


Рис. 56: Пример 2

*Пример 3.*  $y_1 = 30, d_1 = 150; y_2 = 60, d_2 = 150; y_3 = 90, d_3 = 150; y_4 = 30, d_4 = 150; y_5 = 60, d_5 = 150; y_6 = 90, d_6 = 150$ . Время достижения стационарного состояния  $t = 415$ . В данном случае начальные условия были подобраны так, чтобы получился стационарный процесс из двух пар кластеров, плотности которых чередуются. Рассматривая задачу в *общем положении* получить такой процесс невозможно.



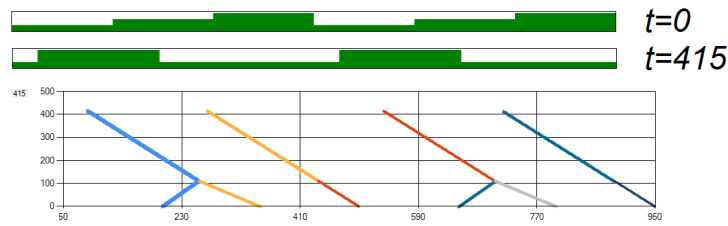


Рис. 57: Пример 3

## 2.4 Компьютерная реализация

Программа представляет собой модули, реализующие движение и взаимодействие кластеров на различных группах носителей. Реализовано приложение на языке *C#* в среде разработки *Microsoft Visual Studio 2010 Express*. В программе разработано три основных модуля: *Interaction*, *Multi-Lane* и *Cluster Net*. В данной главе используется модуль *Interaction* – модуль *взаимодействия*, реализует взаимодействие кластеров на бесконечном и замкнутом однополосных носителях. Задача модуля: проверка теоретических гипотез о наличии стационарных состояний, возникающих в результате взаимодействия кластеров, получение основных параметров взаимодействия (время достижения стационарного состояния, скорости движения границ).

Каждый модуль содержит набор классов и функций, реализующих поставленные задачи. В данном случае модуль *Interaction* содержит функции реализации взаимодействия кластеров. Помимо функций внутри модулей сама программа содержит функции, классы и структуры, отвечающие за хранение и реализацию данных и тех частей, которые используются в каждом модуле: информация о кластерах, их реализация, изображение и перемещение, реализация и данные о носителях, сохранение и загрузка состояний в программе, построение графиков.

Данные о кластерах хранятся в структурном массиве *TRoad*, представляющем собой структурированный набор базовых типов данных, используется как трехмерный массив, где  $i, j \in N$  – номер носителя,  $k \in N$  – количество полос. Каждый элемент структуры содержит следующие целочисленные массивы:

- $p[i]$  – высота кластера с номером  $i$ , изменяется от 1 до  $p[max] = 40$ , где  $p[max]$  – высота полосы на изображении;
- $y[i]$  – плотность кластера с номером  $i$ , изменяется от 1 до  $y[max] = 100$ , где  $y[max]$  – максимальная плотность;
- $v[i]$  – скорость кластера с номером  $i$ , вычисляется по формуле:  $v[i] = v[max] \cdot \left(\frac{y[max]-y[i]}{y[max]}\right)$ , где  $v[max] = 60$  – максимальная допустимая скорость;
- $v1[i]$  – скорость левой границы кластера.  $v1 = v$ , если левая граница не находится во взаимодействии (не является общей для двух кластеров) и  $\frac{v[j]y[j]-v[i]y[i]}{y[j]-y[i]}$ , если граница является общей для двух кластеров  $i$  и  $j$ ;

- $v2[i]$  – скорость правой границы кластера.  $v2 = v$ , если правая граница не находится во взаимодействии (не является общей для двух кластеров) и  $\frac{v[j]y[j]-v[i]y[i]}{y[j]-y[i]}$ , если граница является общей для кластеров  $i$  и  $j$ ;
- $d[i]$  – длина кластера с номером  $i$ , изменяется в пределах от 1 до  $d[max]$ ;
- $x1[i]$  – координата положения левой границы  $i$  кластера на полосе;
- $x2[i]$  – координата положения правой границы  $i$  кластера на полосе;
- $s[i]$  – площадь кластера, количество частиц, вычисляется по формуле:  $s[i] = y[i] \cdot [d[i]$ .

Помимо целочисленных массивов структура хранит следующие булевы массивы:

- $peres[i]$  – массив, определяющий перестроение кластера с номером  $i$ ;
- $glob[i]$  – массив, определяющий, является ли  $i$  кластер глобальным, иначе кластер является локальным. Локальные движутся только по своим носителям, которым принадлежат, глобальные кластеры могут перемещаться между носителями;
- $stop[i]$  – массив, определяющий принудительную остановку кластера с номером  $i$ , которая происходит, когда кластеру необходимо пропустить другой при проезде через узел.

Кроме массивов присутствуют дополнительные переменные в структуре:

- $n$  – текущее количество кластеров на носителе;
- $x$  – смещение кластеров относительно друг друга при расстановке;
- $x0$  – координата  $X$  положения носителя на изображении;
- $y0$  – координата  $Y$  положения носителя на изображении;
- $r$  – радиус носителя;
- $l1, l2, l3, l4$  – значения состояний узлов на носителе ("открыто" или "закрыто");
- $xl1, xl2, xl3, xl4$  – координаты положения узлов на носителе.

В программе используются классы и функции для реализации основных механик кластерной модели.

### Хранение данных о кластере

1. Кластер  $i = 1..n$  в программе задается с помощью трех параметров: плотность кластера  $y_{1..n}$ , длина кластера  $d_{1..n}$  и местоположение кластера на полосе  $x0_{1..n}$ ;
2. Данные о кластере нажатием на кнопку *Add* сохраняются в структурный одномерный массив *TRoad*. При каждом нажатии количество кластеров  $n$  увеличивается, компьютер добавляет кластер его в массив;

3. Каждый элемент массива хранит данные о количестве кластеров на полосе, длины, плотности, скорости и положение кластеров на полосе;
4. Скорость кластера рассчитывается автоматически по формуле:  $v_i = v_{max} \cdot (1 - \frac{y_i}{y_{max}})$ .

### Изображение кластеров и носителя в программе

1. Бесконечная полоса изображена в программе в виде прямоугольника с максимальной высотой  $y_{max}$  и длиной  $d_{max}$ ;
2. Кольцо изображено в программе в виде замкнутого прямоугольника, где последняя и первая координаты совпадают;
3. В массиве *TRoad* создается  $m$  элементов для носителя;
4. Оператор задает вручную или автоматически данные о кластерах;
5. Компьютер рисует кластер в виде закрашенного прямоугольника с высотой  $y$  и длиной  $d$ .

### Мануальная расстановка кластеров

1. Указав все данные о кластере и нажав на кнопку *Add*, компьютер добавит кластер в массив и нарисует его на носителе;
2. Местоположение кластера  $x_{1..n}$  определяется по формуле:  $x_i = x_{i-1} + d_i + x0_i$ . Если кластер первый, то  $x_i = x0_i$ ;
3. Чтобы кластеры не вышли за пределы полосы  $d_{max}$ , проверяется условие:  $(x_i + d_i) < d_{max}$ . Если оно не выполнено, кластер не будет добавлен в массив.

### Автоматическая расстановка кластеров

Требуется для автоматического распределения кластеров по полосам в каждом опыте на равном расстоянии друг от друга.

1. Для запуска расстановки компьютеру необходимо указать максимальные значения плотности, длины кластера и его возможного расположения:  $y_{up}$ ,  $d_{up}$ ,  $x0_{up}$ . Присутствует возможность зафиксировать каждое значение для ввода ограничений на начальные условия (одинаковая плотность или длина всех кластеров, фиксированное расположение друг относительно друга);
2. Нажатием на кнопку *Random* происходит запуск автоматической расстановки кластеров компьютером;
3. Для каждого  $i$  кластера компьютер автоматически задает плотность следующим образом:  $y_i = Random(0, y_{up})$ , либо  $y_i = y_{up}$  если величина  $y_{up}$  зафиксирована. Функция  $Random(a, b)$  возвращает случайное число между числами  $a$  и  $b$  при условии:  $a > b$ ;

4. Аналогично предыдущему пункту автоматически задается длина и начальное местоположение кластера. При выборе величины  $x_0$  компьютер учитывает условие:  $(x_i + d_i) < d_{max}$ . Если условие не выполнено, то происходит перезапуск выбора величины  $x_0$ .

### Динамика кластеров

1. Нажатие на кнопку *Start* производит запуск движения кластеров;
2. Происходит запуск Таймера, повторяющего следующее действие с интервалом в  $t_0$  миллисекунд:
  - (a) Координата положения  $i$  кластера  $x_i$  изменяется на величину  $v_i: x_i = x_i + v_i$ ;
  - (b) Если координата  $i$  находится во взаимодействии и принадлежит двум кластерам:  $x_i$  и  $x_j$ , то ее положение изменяется на величину  $\dot{x}_i: \frac{v_j y_j - v_i y_i}{y_j - y_i}$ ;
  - (c) Если  $x_i > d_0$ , то  $x_i = d_{max} - x_i$ ;
  - (d) Компьютер стирает изображение и рисует полосы и кластеры с новым местоположением заново;
3. Компьютер добавляет значения координат местоположения границ кластеров на график, если такая функция включена;
4. Если нажата кнопка *Stop*, Таймер останавливается.

### Сохранение и загрузка

1. При нажатии на кнопку меню *Save* программа запишет все данные из массива структуры *TRoad* в текстовый файл и сохранит его на компьютере в заданной директории;
2. При нажатии на кнопку меню *Load* программа загрузит все данные из файла в массив структуры *TRoad*.

### Реализация носителей

*Бесконечный носитель* реализован в виде отрезка прямой линий, крайние точки которой перемещаются вместе с кластерами. В программе задаются плотности, длины и расположение кластеров. Скорость границ рассчитывается автоматически. NODE model реализует взаимодействие кластеров на экране и строит траектории взаимодействия.

*Периодический носитель* (кольцо) реализовано в виде замкнутой полосы. Как только кластер достигает крайней правой точки полосы, его правая граница перестает двигаться, в то время как левая продолжает свое движение с заданной скоростью. В левом конце полосы появляется кластер аналогичной плотности, у которого левая граница не движется, а правая совершает движение с заданной скоростью. Как только с правой стороны кластер полностью исчезает, левая граница кластера с левой стороны начинает двигаться. В случае достижения кластером левой стороны, все происходит с точностью до наоборот.

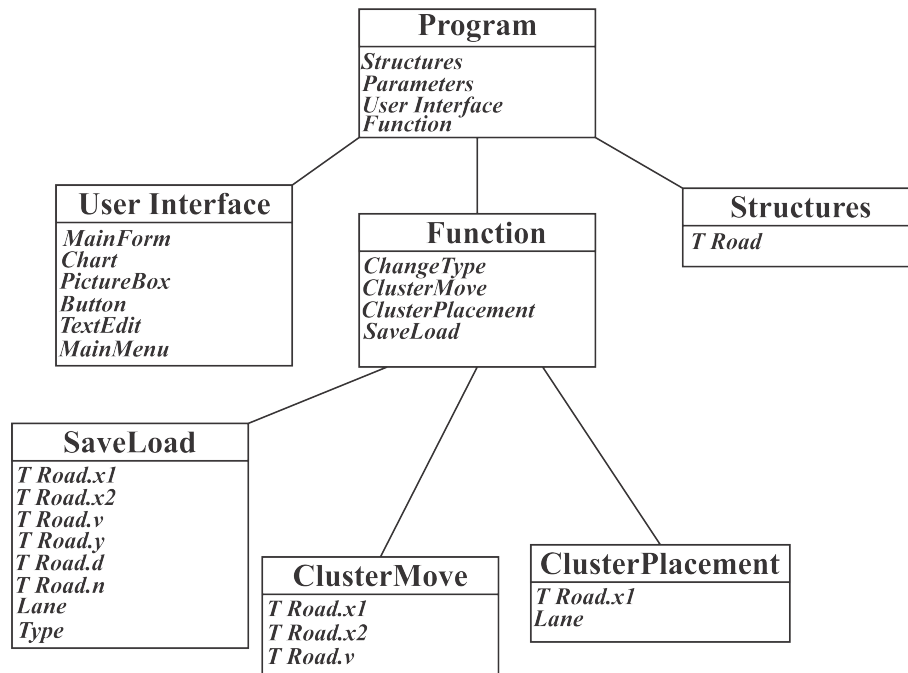


Рис. 58: Схема программы

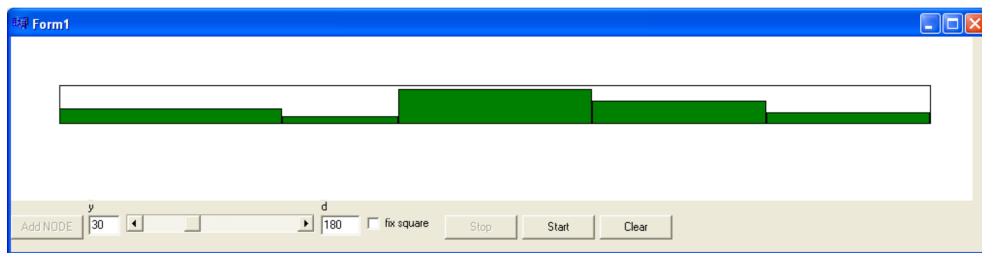


Рис. 59: Построение потока кластеров в программе

## 2.5 Исследование движения кластеров на носителе с элементом управления

### 2.5.1 Описание

Данная модель описывает движение частиц по однополосной дороге с наличием на ней управляющего элемента – светофора. Описываются свойства кластеров, подвергшихся изменениям в результате работы светофора, их характеристики и поведение.

В текущей модели главным элементом воспроизведения является светофор. Светофор имеет два положения – ”проезд открыт” (горит зеленый свет), и ”проезд закрыт” (горит красный свет). И при каждом состоянии светофора кластеры, достигшие зоны расположения светофора, начинают взаимодействовать с новыми кластерами, возникающими в результате работы светофора. В данном моделировании, в отличие от предыдущей модели, возможно увеличение числа кластеров.

### 2.5.2 Постановка задачи

Полный периодический кластер плотностью  $y_0$  перемещается по кольцу со скоростью  $v(y_0)$ :

$$v(y) = 1 - y, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.11)$$

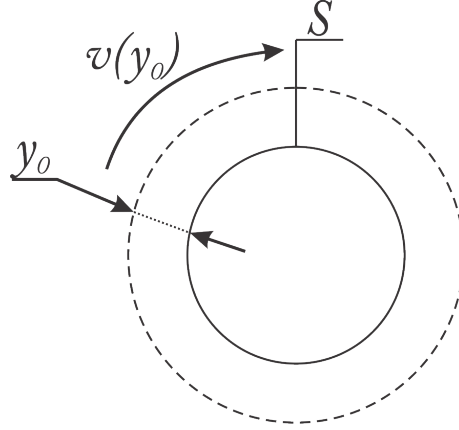


Рис. 60: Движение кластера по носителю с управлением

В момент времени  $t = 0$  на управляющем элементе  $S$  (светофор) включается запрет движения (красный сигнал) до момента времени  $t = T_R$ . В течение указанного промежутка времени поток разбивается на три фрагмента:

$$v(y) = 1 - y, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.12)$$

здесь  $[x_1, x_0]$  – затор перед светофором,  $[x_0, x_2]$  – нулевой кластер,  $[x_2, x_1]$  – исходный поток.

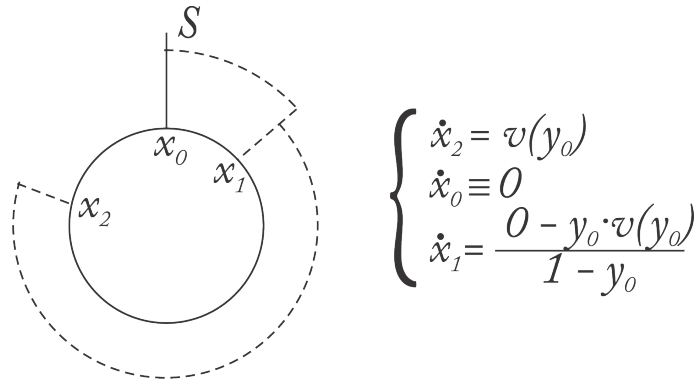


Рис. 61: Переключение светофора на запрещающий сигнал

В момент  $t = T_R$  светофор в точке  $S$  переключается на "разрешающий" сигнал, позволяя продолжить ранее запрещенное движение. Возможны разные сценарии выходящего потока. Пусть  $y_1 \in (0, 1)$  – плотность выходящего потока. Тогда при  $t > T_R$  первоначально выделяются четыре кластера. [2]

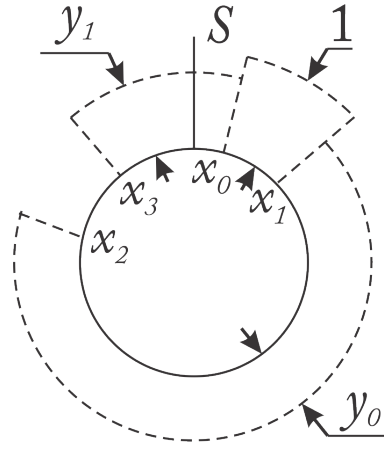


Рис. 62: Переключение светофора на разрешающий сигнал

В момент времени  $t = T_R + T_G$  в точке  $S$  "зеленый" сигнал светофора меняется на "красный". В результате появляется еще одна граница  $x_{-1}(T_R + T_G) = 0$ , то есть после  $T_R + T_G$  распадается на две

$$\dot{x}_1 = \frac{0 - y_1 \cdot v_1(y_1)}{1 - y_1} \quad (2.13)$$

$$\dot{x}_1 = \{0, T_R + T_G < t < 2T_R + T_G; v(y_2), t > 2T_R + T_G\} \quad (2.14)$$

Таким образом, в общем положении, когда "красный" свет включается во время движения кластера с ненулевой плотностью  $y_n$  через светофор  $S$ , появляются два кластера – максимальной плотности и нулевой плотности. При включении "зеленого" света образуется кластер плотности  $y_n$ .

В результате работы светофора в течение периода  $T_R + T_G$  на дороге может появиться до 4-х кластеров с плотностями:  $y_n, 0, 1, y_n$ . Значит при  $t \rightarrow \infty$  количество кластеров на дороге может существенно возрасти.

Основная задача состоит в исследовании образующихся кластеров во время работы светофора и исследования конечных состояний системы при  $t \rightarrow \infty$ , если таковые возможны.

### 2.5.3 Свойства

Установлены следующие свойства:

1. Количество кластеров может увеличиваться;
2. Плотности новых кластеров принадлежат множеству  $y_0, \dots, y_n, y_{max}$ ;

### 2.5.4 Компьютерная реализация

Для исследования данной задачи созданный отдельный модуль *Cluster Svet*, главная задача которого – воспроизведение работы светофора для исследования возникающего в результате его работы взаимодействия и характеристика возникающих стационарных процессов, если они существуют. (Рис. 63)

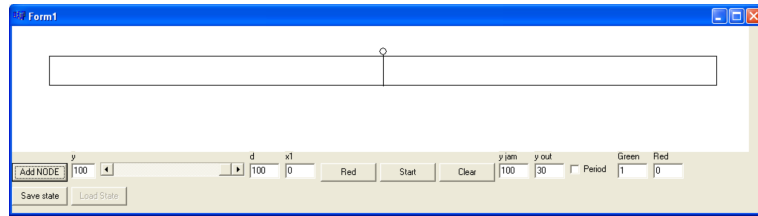


Рис. 63: Окно программы

#### 2.5.4.1 Описание

На экране изображен однополосный носитель, в центре которого размещен элемент управления. Размещение светофора выбирается из соображения удобства моделирования, и ни как не влияет на корректность отображения результатов работы алгоритма.

Для добавления кластеров на дорогу необходимо указать длину  $d$  и плотность  $y$  каждого кластера. (Рис. ??, 64)

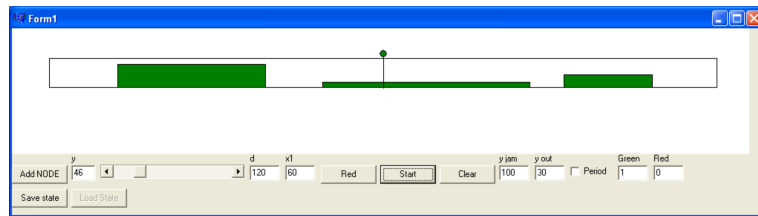


Рис. 64: Создание цепочки кластеров

Управление светофором производится как вручную нажатием переключателя во время моделирования, так и автоматически, с помощью заданных интервалов работы светофора в каждом из режимов. При зеленом сигнале светофора (изначально режим светофора установлен на зеленый свет) движение частиц через него происходит свободно, взаимодействие осуществляется по описанным ранее схемам. (Рис. 65)

При включении красного сигнала светофора поток, проходящий через светофор, должен прекратить движение. В результате такой остановки перед светофором возникает кластер-пробка - кластер максимальной плотности  $y_{max}$ . Скорость кластера равна нулю. (Рис. 66)

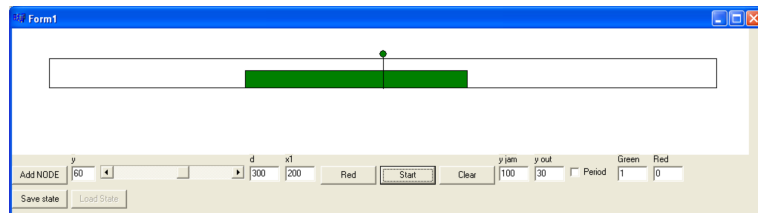


Рис. 65: Проезд светофора

Кластер, стоящий у светофора не будет двигаться, пока сигнал не сменится на зеленый свет и будет увеличиваться при взаимодействии с другими кластерами (Рис. 68).



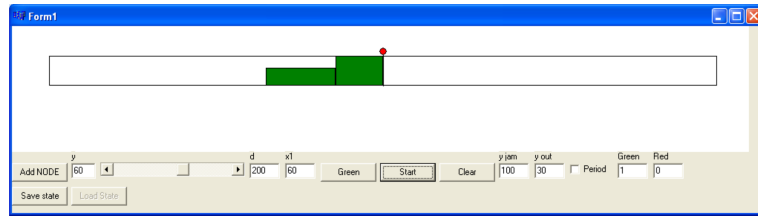


Рис. 66: Образование пробки перед светофором

Если во время переключения светофора на запрещающий сигнал, какой-либо из элементов проходил через него, то в результате переключения происходит его разделение на три кластера, два из которых будут иметь такую же плотность, как и у исходного кластера, до разделения, и кластер-пробка, перед светофором, с нулевой скоростью. (Рис. 67)

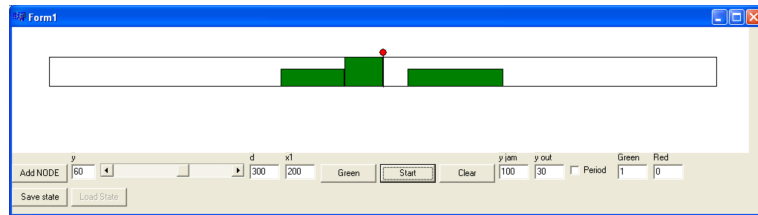


Рис. 67: Разделения кластера

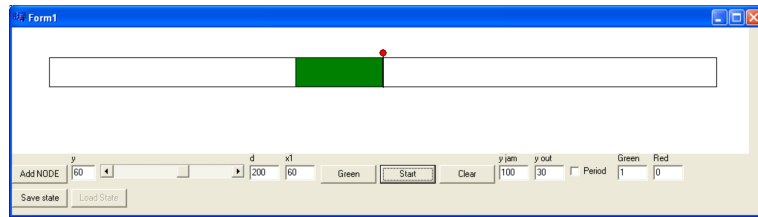


Рис. 68: Взаимодействие с кластером-пробкой

При переключении светофора на разрешающий сигнал поток начинает покидать зону светофора в виде с плотностью  $y < y_{max}$ , зависящей от плотности кластеров на носителе и устанавливаемой экспериментально. Новый кластер будет взаимодействовать с кластером-пробкой, скорость границы определяется следующим образом:

$$x = \frac{v \cdot y - 0}{y - y_{max}} = \frac{v}{1 - \frac{y_{max}}{y}} \quad (2.15)$$

где скорость  $v$  и плотность  $y$  - характеристики уходящего кластера.

Работая в автоматическом режиме в результате кластер разделяется на части, длина которых зависит от времени работы светофора. (Рис. 69)

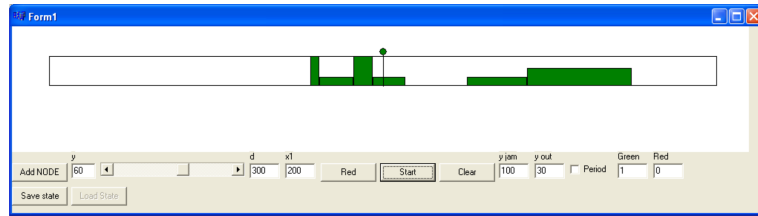


Рис. 69: Работа светофора с заданным интервалом

Задача на данный момент не исследована полностью, анализ модели и формулировка утверждений проводится в данный момент.

## 2.6 Выводы к главе 2

1. Сформулированы правила взаимодействия кластеров на бесконечном и замкнутом носителях, приведена система дифференциальных уравнений взаимодействия кластеров;
2. Сформулированы задачи взаимодействия кластеров на бесконечной и замкнутой полосах;
3. Проведено качественное исследование взаимодействия, получены результаты взаимодействия кластеров и оценка времени достижения и условия стационарного состояния;
4. Разработано программное обеспечение, с помощью которого проведено численное исследование поставленных задач, подтверждены результаты, полученные с помощью качественного исследования.

## Глава 3

# Кластерное моделирование транспортных потоков на многополосных сетях

### 3.1 Исследование взаимодействия кластеров на двух полосах

#### 3.1.1 Описание

Пусть существуют две полосы для движения  $X^{(1)}$  и  $X^{(2)}$  в одном направлении слева направо. По полосе  $X$  совершают движение два кластера:

1. Идущий позади кластер является быстрым или догоняющим, имеет плотность  $y_1$ , скорость  $v_1$  и длину  $d_1$ ;
2. Впереди движется медленный кластер плотности  $y_2$ , скорости  $v_2$  и длины  $d_2$ ;
3. Через время  $\Delta t$  быстрый кластер догонит медленный и координата  $x_2$  быстрого кластера станет равной координате  $x_3$  медленного кластера.

#### 3.1.2 Сценарии поведения

##### 3.1.2.1 Быстрый перестраивается на соседнюю полосу (Перестроение)

###### Последовательное перестроение

Полоса  $X^{(2)}$  свободна в данный момент времени  $t_0 + \Delta t$ . Быстрый кластер совершает перестроение на свободную полосу  $X^{(1)}$  для обхода медленного кластера. Взаимодействие между кластерами не осуществляется. Через промежуток времени  $\Delta t_1$ :

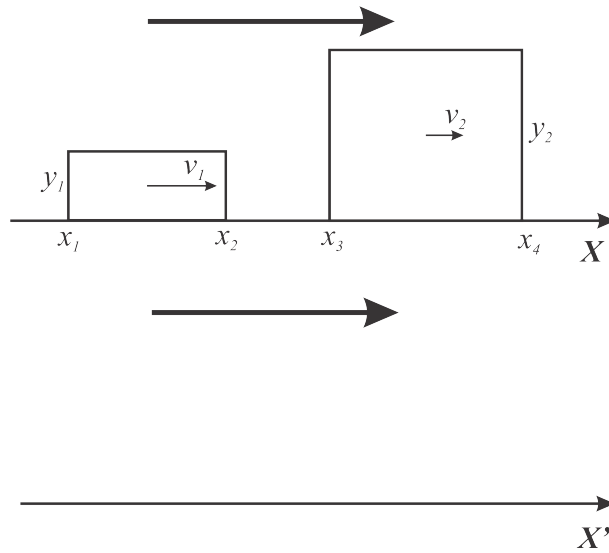


Рис. 70: Быстрый догоняет

1. Координата  $x_1$  быстрого кластера проходит расстояние  $v_1 \cdot \Delta t_1$ ;
2. Координата  $x_4$  медленного кластера перемещается на расстояние  $v_2 \cdot \Delta t_1$ ;
3. Координата  $x_3$  медленного кластера изменяется на величину  $v_2 \cdot \Delta t_1$ ;
4. Координата  $x_2 = x_3$  быстрого кластера изменяется на величину  $v_2 \cdot \Delta t_1$ .

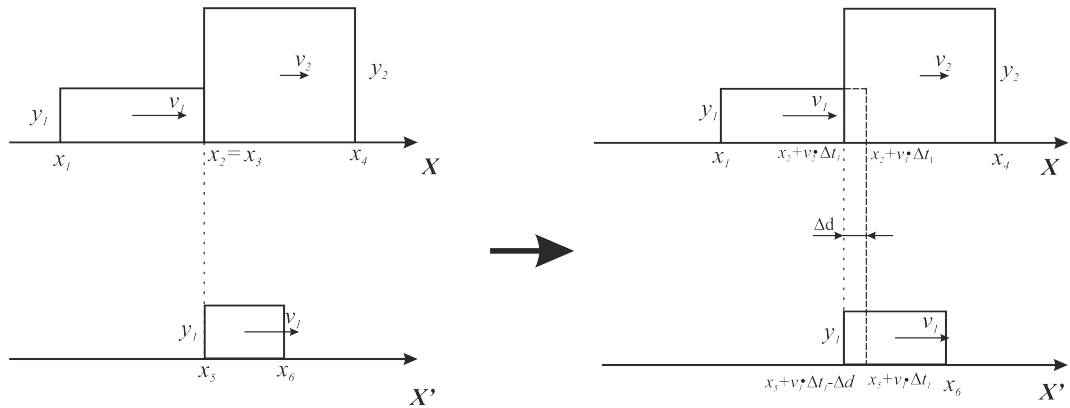


Рис. 71: Последовательное перестроение

До момента начала перестроения длина быстрого кластера  $d_1$  остается постоянной. В момент начала перестроения  $\Delta t$ :

1. Длина идущего позади кластера  $d_1^*$  начинает изменяться. Во время перестроения к моменту  $t_0 + \Delta t_1$  длина кластера изменится на величину  $\Delta d = |v_2 \cdot \Delta t_1 - v_1 \cdot \Delta t_1|$ . В общем случае с течением времени длина быстрого кластера, уходящего с полосы  $X$  выражается формулой:

$$d_1^* = d_1 - \Delta d$$

$$d_1^* = d_1 - |v_2 \cdot \Delta t_1 - v_1 \cdot \Delta t_1|$$

2. На свободной полосе  $X'$  появляется кластер плотности  $y_1$  и скорости  $v_1$ . Длина  $d_3$  появившегося кластера в результате перестроения изменяется начиная с момента начала перехода  $t_0 + \Delta t$  и к моменту  $t_0 + \Delta t_1$  изменится на значение  $\Delta d$ . В общем случае с течением времени длина образовавшегося кластера будет выражаться следующим образом:

$$d_3 = \Delta d$$

$$d_3 = |v_2 \cdot \Delta t_1 - v_1 \cdot \Delta t_1|$$

### Синхронное перестроение

1. Если соседняя полоса  $X^{(2)}$  свободна и координаты  $[x_1, x_2]$  на полосе  $X^{(2)}$  не заняты другими кластерами, то быстрый кластер целиком перестраивается на соседнюю полосу мгновенно и синхронно, как единое целое, и обходит медленный кластер, двигаясь с максимальной скоростью;
2. Если по соседней полосе  $X^{(2)}$  движется блокирующий кластер и занимает отрезок  $[x_1, x_2]$ , то быстрый кластер движется за медленным не взаимодействуя с ним со скоростью медленного кластера;
3. Как только полоса  $X^{(2)}$  будет свободна (блокирующий кластер покинет отрезок  $[x_1, x_2]$ ), быстрый кластер продолжит обгон медленного, совершив мгновенное перестроение на полосу  $X^{(2)}$ ;
4. В данном сценарии разделение быстрого кластера на части невозможно, переход на соседнюю полосу быстрый кластер осуществляет целиком и мгновенно.

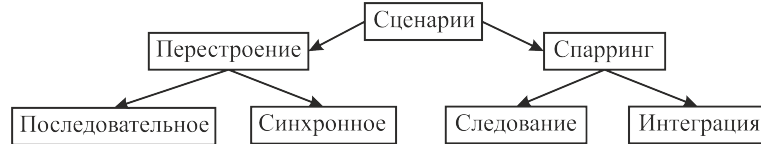


Рис. 72: Стратегии кластера на многополосном носителе

#### 3.1.2.2 Быстрый кластер преследует медленный (Спарринг)

##### Интеграция

Интеграция является стратегией *сжимаемого* кластера.

Полоса  $X'$  занята в момент времени  $t_0 + \Delta t$  другим кластером. В данной ситуации быстрый кластер не сможет начать перестроение, на соседнюю полосу  $X'$ . Он начнет взаимодействовать с медленным кластером, идущим перед ним. За время  $\Delta t_1$ :

1. Координата  $x_1$  быстрого кластера переместится на расстояние  $v_1 \cdot \Delta t_1$ ;
2. Координата  $x_2 = x_3$  взаимодействия кластеров будет проходить расстояние:

$$\frac{y_2 \cdot v_2 - y_1 \cdot v_1}{y_2 - y_1} \cdot \Delta t_1$$

3. Координата  $x_4$  медленного кластера переместится на расстояние  $v_2 \cdot \Delta t_1$

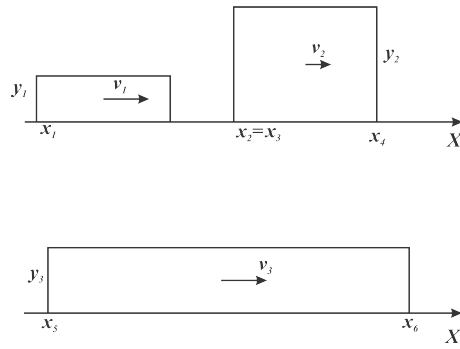


Рис. 73: Быстрый догоняет

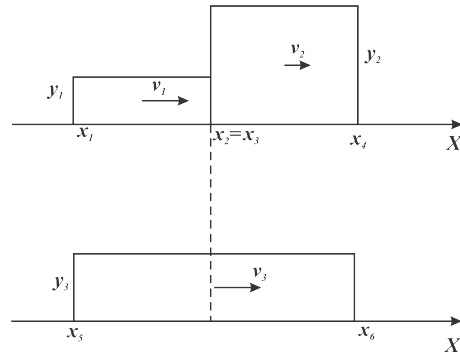


Рис. 74: Быстрый кластер до интеграции

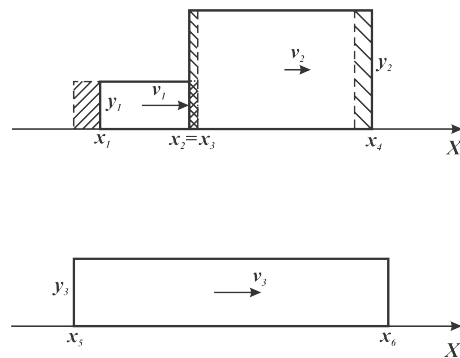


Рис. 75: Быстрый кластер интегрируется

### Следование

Следование является стратегией *несжимаемого* кластера.

Полоса  $X'$  занята в момент времени  $t_0 + \Delta t$  другим кластером. Быстрый кластер не сможет начать перестроение, на соседнюю полосу  $X'$ . Он будет "ждать пока на соседней полосе  $X'$  не появится возможность для перестроения и последующего обхода медленного кластера впереди. За время  $\Delta t_1$ :

1. Координата  $x_1$  быстрого кластера переместится на расстояние  $v_2 \cdot \Delta t_1$ ;
2. Координата  $x_2 = x_3$  будет двигаться со скоростью медленного кластера. Расстояние будет изменяться на величину:  $v_2 \cdot \Delta t_1$
3. Координата  $x_4$  медленного кластера переместится на расстояние  $v_2 \cdot \Delta t_1$

Быстрый кластер, имеющий плотность  $y_1$  будет двигаться со скоростью  $v_2$  медленного кластера, взаимодействия между кластерами не будет происходить, перестроения на соседнюю полосу не будет осуществляться, пока через промежуток времени  $\Delta t_2$  полоса  $X'$  не будет свободна. Далее быстрый кластер совершит обход медленного аналогично соответствующей ситуации.

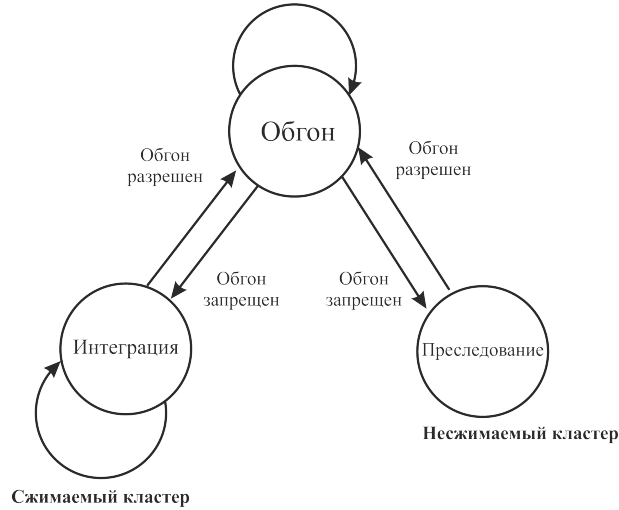


Рис. 76: Схема взаимодействия стратегий

## 3.2 Движение быстрого кластера в потоке медленных по двухполосному носителю

### 3.2.1 Общая постановка задачи

Имеется некоторая начальная конфигурация кластеров разной длины  $d_i$ , различной плотности  $y_i$  с координатами  $[a_i, b_i], i = 1, \dots, n$  на поясе, состоящим из нескольких полос  $X^{(k)}$ , каждая длины  $L$ . В процессе движения более быстрые кластеры догоняют медленных, идущих впереди. В этот момент запускается процесс взаимодействия кластеров в соответствии со схемой. Цель имитационного исследования состоит в определении установившегося режима и начальных условий, приводящих к стационарному состоянию, исследование числовых характеристик системы, таких как средняя скорость, спектр плотностей и количество быстрых кластеров.

### 3.2.2 Просачивание быстрого кластера в потоке медленных кластеров одной плотности. Последовательное перестроение

#### 3.2.2.1 Постановка задачи

По поясу из двух полос  $X_1$  и  $X_2$  совершают движение  $n_1$  1-кластеров плотности  $y_1$ , длины  $d_1$  и  $n_2 = 1$  2-кластер плотности  $y_2 < y_1$  с длиной  $d_2$ . Каждый  $i$  1-кластер располагается в координатах  $[a_{i,j}, b_{i,j}]$ , где  $j$  – номер полосы. Кластеры плотности  $y_1$  совершают движение по

обеим полосам  $X_1$  и  $X_2$ . Расстояние между 1-кластерами равно  $l_1$ . Кластер плотности  $y_2$  совершает движение по обеим полосам со скоростью  $v_2 > v_1$ . В данной задаче рассматривается *несжимаемый* тип кластеров, 2-кластер перестраивается *последовательно*, совершая обгон 1-кластеров. Необходимо установить наличие стационарных состояний системы и условия их возникновения, зависимость скорости 1-кластера от начальной конфигурации системы.

### 3.2.2.2 Результаты

Пусть существует функция  $Z(x, t)$  – количество пересечения 1-кластеров на двух соседних полосах длины  $L$ ,  $Z(x, t) \geq 0$ ,  $Z(x, t) : \forall x \in [0, L]$ ,  $Z(x, t) = \{1, x \in [a_{i,1}, b_{i,1}] \text{ и } x \in [a_{i,2}, b_{i,2}]; 0, x \notin [a_{i,1}, b_{i,1}] \text{ или } x \notin [a_{i,2}, b_{i,2}]\}$ , где  $i$  – порядковый номер кластера, 1, 2 – полосы.

*Утверждение 1.*

Если  $l_1 > d_1$  и  $Z(x, t) = 0$ , то 2-кластер движется с максимальной скоростью.

*Доказательство.*

Для свободного обгона 1-кластера  $i$ , движущегося в координатах  $[a_i, b_i]$  необходимы два условия: на соседней полосе в координатах  $[a_i, b_i]$  отсутствует кластер и расстояние между 1-кластерами  $l_1 > d_1$ , тогда 2-кластер может совершить обгон.

*Утверждение 2.*

Если  $l_1 \leq d_1$ , то 2-кластер *следует* за 1-кластером со скоростью  $v_1$ .

*Доказательство.*

Аналогично утверждению 1, если длина  $l_1 \leq d_1$ , то расстояния между 1-кластерами недостаточно для обгона. 2-кластер будет двигаться вслед за медленными со скоростью  $v_1$ .

*Утверждение 3.*

Если  $Z(x, t) \neq 0$ , то независимо от величин  $l_1$  и  $d_1$  2-кластер движется со скоростью  $v_1$ , следуя за 1-кластером.

*Доказательство.*

Так, как  $Z(x, t) \neq 0$ , то независимо от длин  $l_1$  и  $d_1$  начальная конфигурация 1-кластеров не позволяет совершить обгон 2-кластеру.

## 3.2.3 Просачивание быстрого кластера в потоке медленных кластеров одной плотности. Синхронное перестроение

### 3.2.3.1 Постановка задачи

Пусть в предыдущей постановке 2-кластер использует *синхронное* перестроение. Тогда для совершения обгона ему необходимо некоторое расстояние между 1-кластерами, равное его длине, так как переход осуществляется синхронно между полосами. *Делиться* 2-кластер в данной задаче *не может*. Необходимо наличие стационарных состояний в системе и условия их возникновения, скорость 2-кластеров и ее зависимость от начальной конфигурации 1-кластеров.



### 3.2.3.2 Результаты

Пусть существует функция  $Z(x, t)$  – количество пересечения 1-кластеров на двух соседних полосах,  $Z(x, t) \geq 0$ ,  $Z(x, t) : \forall x \in [0, L]$ ,  $Z(x, t) = \{1, x \in [a_{i,1}, b_{i,1}] \text{ и } x \in [a_{i,2}, b_{i,2}]; 0, x \ni [a_{i,1}, b_{i,1}] \text{ или } x \ni [a_{i,2}, b_{i,2}]\}$ , где  $i$  – порядковый номер кластера, 1, 2 – полосы.

*Утверждение 1.*

Если  $Z(x, t) = 0$  и  $\forall i b_{i,1} - a_{i+1,2} > d_2$  или  $\forall i b_{i,2} - a_{i+1,1} > d_2$ , тогда 2-кластер движется со скоростью  $v_2$ .

*Доказательство.*

Для синхронного перестроения необходимо и достаточно, чтобы кластеры на соседних полосах не пересекались координатами своего расположения и чтобы расстояние между соседними кластерами на разных полосах было не меньше длины 2-кластера (иначе он не сможет синхронно перестроиться на соседнюю полосу).

*Утверждение 2.*

Если  $Z(x, t) = 0$  и  $\forall i b_{i,1} - a_{i+1,2} \leq d_2$  или  $Z(x, t) \neq 0$ , то 2-кластер следует за 1-кластером со скоростью  $v_1$ .

*Доказательство.*

Если существует пара кластеров на разных полосах, для которых данное условие не выполнено, то 2-кластер не сможет совершить обгон и будет следовать за 1-кластером.

### 3.2.3.3 Численное исследование

Численное исследование проводилось с помощью модуля *Multi-Lane* разработанного программного пакета *NODE model*. Описание модуля приведено ниже. *Пример.*

Ниже приведена зависимость скорости (км/ч) 2-кластера от времени (сек) при различной длине (км), 2-кластер использует *последовательное* перестроение в потоке кластеров одной плотности. Параметры эксперимента:  $d_1 = 0.090$ ,  $l_1 = 0.180$ .

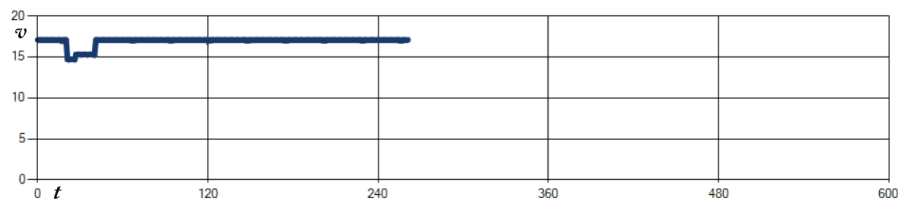


Рис. 77: Скорость 2-кластера,  $d_2 = 0.100$

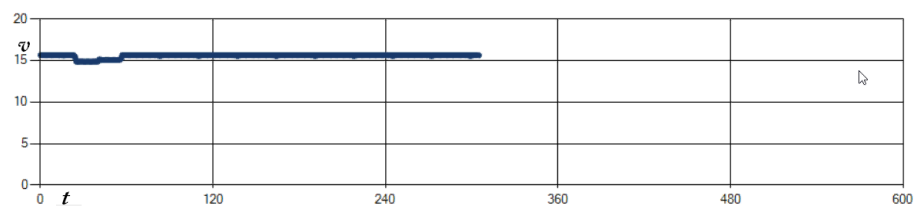


Рис. 78: Скорость 2-кластера,  $d_2 = 0.200$

### 3.2.4 Просачивание быстрого кластера в потоке медленных двух плотностей. Последовательное перестроение

#### 3.2.4.1 Постановка задачи

По двум полосам  $X^{(1)}$  и  $X^{(2)}$ , каждая длины  $L$ , совершают движение  $n_1$  1-кластеров со скоростью  $v_1$ , плотностью  $y_1$  и длиной  $d_1$ ,  $n_2$  2-кластеров со скоростью  $v_2 > v_1$ , плотностью  $y_2$  и длиной  $d_2$  и  $n_3$  3-кластеров со скоростью  $v_3 > v_2$ , плотностью  $y_3$  и длиной  $d_3$ . 1-кластеры совершают движение только по полосе  $X^{(1)}$  на расстоянии  $l_1$  друг от друга, 2-кластеры совершают движение только по полосе  $X^{(2)}$  на расстоянии  $l_2$  друг от друга. 3-кластер совершает движение по полосам  $X^{(1)}$  и  $X^{(2)}$ . Пусть  $n_3 = 1$  (движение опаздывающих автомобилей в потоке). В задаче рассматривается *несжимаемый* тип кластеров с *последовательным* перестроением (*кластер может делиться*). Необходимо определить скорость 3-кластера, ее зависимость от конфигурации 1- и 2-кластеров и их взаимного расположения, наличие стационарных состояний в системе и условия их возникновения.

#### 3.2.4.2 Результаты

Определим следующие величины: *Относительные скорости*:

$$\Delta v_1 = v_3 - v_1, \Delta v_2 = v_3 - v_2, \Delta v_3 = v_2 - v_1.$$

*Относительное расстояние*:

$$\Delta l = l_1 - d_2.$$

*Время прохождения относительного расстояния 3-кластером*:

$$t_1 = \frac{\Delta l}{\Delta v_3}.$$

*Время прохождения расстояния между 1- и 2-кластерами 3-кластером*:

$$t_2 = \frac{l_1}{\Delta v_1}.$$

*Утверждение 1.*

Если  $t_1 < t_2$ , то 3-кластер *следует* за 2-кластером, его скорость равна  $v_2$ .

*Доказательство.*

Так как  $t_1$  характеризует время, разрешающее обгон, а  $t_2$  – время, необходимое для совершения обгона, то очевидно, что на совершение обгона 3-кластеру не хватит времени. 3-кластер будет следовать за более быстрым 2-кластером со скоростью  $v_2$ .

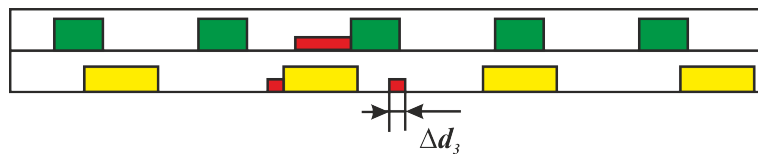


Рис. 79: Утверждение 1

*Утверждение 2.*

Если  $t_1 > t_2$ , тогда 3-кластер разделится на пачки длиной:

$$\Delta d_3 = v_1 \cdot (t_1 - t_2), \quad (3.1)$$

движущиеся со скоростью  $v_3$ . Наступает *синергия*.

*Доказательство.*

В данном случае время для совершения обгона  $t_1$  больше, чем требуемое время  $t_2$ , поэтому часть 3-кластера будет отделяться от общей группы и продолжать движение со своей скоростью  $v_3$ . Другая часть, не успевшая совершить обгон, длины  $\Delta d = d_3 - \Delta d_3$  будет по-прежнему оставаться на полосе  $X_{(1)}$  и ждать возможности возвращения на более быструю полосу  $X_{(2)}$ . В итоге 3-кластер разделится на группы длины  $\Delta d_3$ , имеющие возможность перестраиваться без помех.

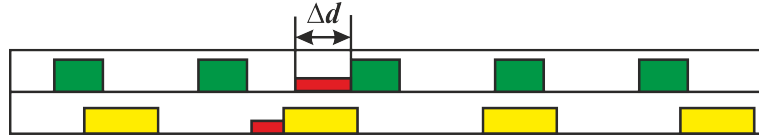


Рис. 80: Утверждение 2

### 3.2.5 Задача просачивания в потоке медленных кластеров двух плотностей. Синхронное перестроение

#### 3.2.5.1 Постановка задачи

Пусть в предыдущей задаче 3-кластеры руководствуются *синхронным перестроением*. Тогда 3-кластеру для обгона требуется пространство между кластерами величиной  $d_3$ . Сам кластер при это *не может разделяться* на части. Необходимо определить наличие стационарных состояний в системе и условия их возникновения, скорость 3-кластера и ее зависимость от расположения других кластеров.

#### 3.2.5.2 Результаты

*Утверждение 1.*

Пусть  $d_3 < \min(l_1, l_2)$ ,  $d_2 < l_1$ . Если выполнено следующее соотношение:

$$\frac{v_3}{v_2} > \frac{l_1}{l_1 - (d_2 + d_3)} > 0, \quad (3.2)$$

тогда 3-кластер движется со скоростью:  $v_3$ .

*Доказательство.*

Введем следующее обозначение:

$$t_1 = \frac{d_2 + d_3}{\Delta v}, t_2 = \frac{l_1 - (d_2 + d_3)}{v_2}, \quad (3.3)$$

где  $t_1$  – время, необходимое для совершения обгона 3-кластером 2-кластера,  $t_2$  – время, за которое 2-кластер блокирует полосу  $X^{(2)}$  для обгона. Тогда для того, чтобы 3-кластер успел совершить обгон 2-кластера, необходимо следующее:  $0 < t_1 < t_2$ . Подставим данное соотношение выражения для указанного времени  $t_1$  и  $t_2$ :

$$\begin{aligned}
\frac{d_2 + d_3}{\Delta v} &< \frac{l_1 - (d_2 + d_3)}{v_2} \\
\frac{d_2 + d_3}{l_1 - (d_2 + d_3)} &< \frac{\Delta v}{v_2} \\
-\frac{l_1 - (d_2 + d_3) - l_1}{l_1 - (d_2 + d_3)} &< \frac{v_3 - v_2}{v_2} \\
-1 + \frac{l_1}{l_1 - (d_2 + d_3)} &< \frac{v_3}{v_2} - 1 \\
\frac{l_1}{l_1 - (d_2 + d_3)} &< \frac{v_3}{v_2}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Утверждение доказано.

*Утверждение 2.*

Пусть  $d_3 > l_1$ ,  $d_3 < l_2$ , тогда независимо от длины 2-кластера 3-кластер движется со скоростью  $v_2$ .

*Доказательство.*

Так как 3-кластер не может перестроиться на полосу  $X^{(1)}$  для обгона 2-кластера (недостаточно места), то он будет следовать за ним со скоростью  $v_2$ .

*Утверждение 3.*

Пусть  $d_3 < l_1$ ,  $d_3 > l_2$ , тогда независимо от длины 2-кластера скорость 3-кластера равна  $v_1$ .

*Доказательство.*

Аналогично утверждению 2 3-кластер не может перестроиться на полосу  $X^{(2)}$  (недостаточно места) и будет следовать за 1-кластером.

*Утверждение 4.*

Пусть  $d_3 < l_1$ ,  $d_3 < l_2$ ,  $d_2 > l_1$ , тогда скорость 3-кластера  $v_2$ .

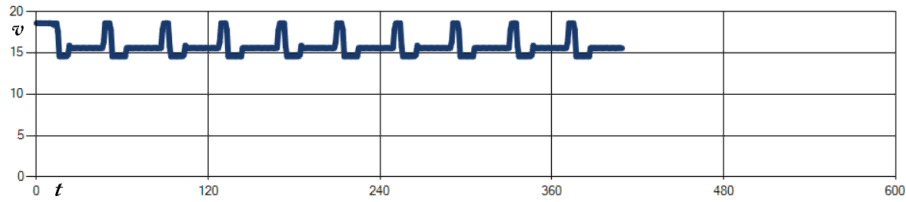
*Доказательство.*

В случае, когда  $d_2 > l_1$  3-кластер не успевает обогнать 2-кластер, соотношение [3.2] не выполнено.

### 3.2.5.3 Численное исследование

Для исследования использовался модуль *Multi-Lane*, описание которого приведено в конце главы. *Пример.*

Ниже приведена зависимость скорости (км/ч) 3-кластера от времени (сек) при различной длине (км), с использованием *последовательного* перестроения в потоке кластеров *двух плотностей*. Параметры эксперимента:  $d_1 = 0.080$ ,  $l_1 = 0.140$ ,  $d_2 = 0.120$ ,  $l_2 = 0.100$ .

Рис. 81: График скорости 3-кластера,  $d_3 = 0.060$ 

Колебания скорости обусловлены тем, что 3-кластер каждый раз пытается обогнать 2-кластер при появлении возможности обгона на полосе  $X^{(1)}$ . В этот момент 3-кластер движется со скоростью  $v_3$  (пик на графике). Так как условия заданы так, что он не успевает закончить обгон, то в результате манера часть 3-кластера, ушедшая на обгон, не успев его завершить, возвращается в след за 2-кластером на полосу  $X^{(2)}$ .

### 3.2.6 Задача просачивания потока кластеров на двухполосном носителе

#### 3.2.6.1 Постановка задачи

По двум полосам  $X^{(1)}$  и  $X^{(2)}$ , каждая длины  $L$ , совершают движение  $n_1$  1-кластеров со скоростью  $v_1$ , плотностью  $y_1$  и длиной  $d_1$ ,  $n_2$  2-кластеров со скоростью  $v_2 > v_1$ , плотностью  $y_2$  и длиной  $d_2$  и  $n_3$  3-кластеров со скоростью  $v_3 > v_2$ , плотностью  $y_3$  и длиной  $d_3$ . 1-кластеры совершают движение только по полосе  $X^{(1)}$  на расстоянии  $l_1$ , 2-кластеры совершают движение только по полосе  $X^{(2)}$  на расстоянии  $l_2$ . 3-кластеры совершают движение по обеим полосам  $X^{(1)}$  и  $X^{(2)}$ . В данной задаче  $n_2 = 1, n_3 > 1$ , то есть происходит просачивание потока 3-кластеров. В задаче рассматривается несжимаемый тип кластеров с синхронным перестроением. Необходимо определить среднюю скорость кластеров 3 типа, ее зависимость от расположения и длины других кластеров, окончательное количество 3-кластеров, наличие синергии в системе и условия ее возникновения.

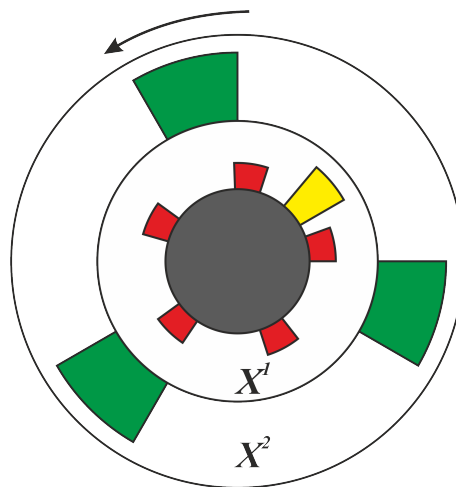


Рис. 82: Постановка задачи

### 3.2.6.2 Численные результаты

Результаты данной задачи получены с помощью численного исследования модели в разработанном модуле программного пакета *Multi-Lane*.

1. Существует число  $N_1$  кластеров 1 типа такое, что если  $n_1 < N_1$ , то средняя скорость 3-кластеров максимальна, в системе наблюдается *синергия*.
2. Если  $n_1 \geq N_1$ , тогда средняя скорость 3-кластеров минимальна.

#### Примеры

1. В примере использованы следующие параметры (км):  $d_3 = 0.08, d_1 = 0.06, d_2 = 0.07$ . На графике представлена зависимость скорости 3-кластеров от количества кластеров 1 типа. При 25 1-кластерах средняя скорость уменьшается. При  $n_1 < 25$  в системе наблюдается синергия.

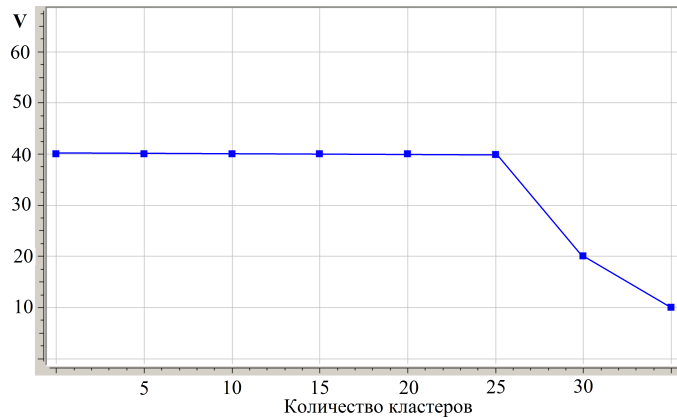


Рис. 83: График средней скорости 3-кластеров

2. В примере:  $d_3 = 0.08, d_1 = 0.09, d_2 = 0.07$ . В данном примере при  $n_1 < 20$  кластеров в системе синергия.

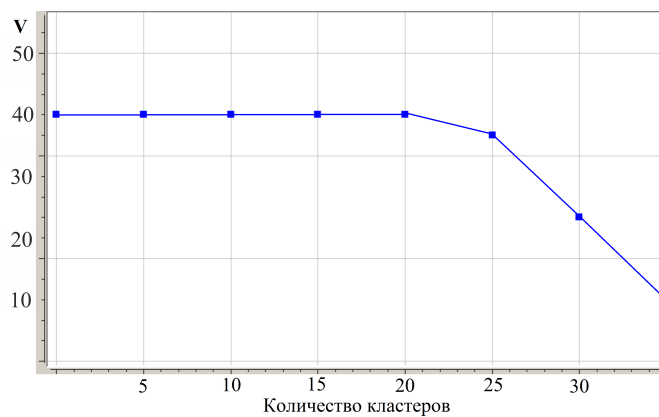


Рис. 84: График средней скорости в примере 2

3. В примере:  $d_3 = 0.08, d_1 = 0.12, d_2 = 0.07$ . При  $n_1 > 15$  синергии нет.

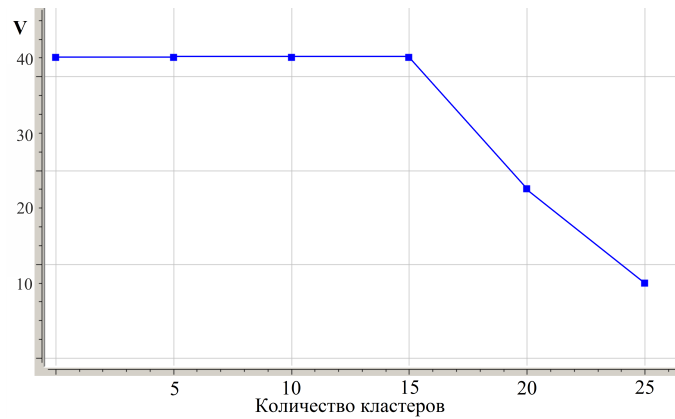


Рис. 85: График средней скорости в примере 3.5.1.3

### 3.2.7 Задача распределения потоков

#### 3.2.7.1 Постановка задачи

По поясу из двух полос  $X_1$  и  $X_2$  совершают движение  $n_1$  кластеров плотности  $y_1$  и длины  $d_1$  (тип  $C_1$ ),  $n_2$  кластеров плотности  $y_2 < y_1$  и длины  $d_2$  (тип  $C_2$ ). Цель движения состоит в том, чтобы все кластеры типа  $C_1$  оказались на  $X_1$ , типа  $C_2$  на  $X_2$ . При этом каждый кластер перестраивается на другую полосу не более одного раза, т.е. если изначально он оказался на своей полосе, то кластер продолжает двигаться по ней.

Через время  $T$  кластеры типа  $C_1$  будут двигаться по одной из полос, кластеры типа  $C_2$  - по другой.

*Необходимо определить:*

1. Существует ли данное решение, т. е. конечное время  $T$ , за которое условие задачи будет выполнено;
2. Среднее время  $T^*$  решения учитывая начальные условия;
3. Среднее расстояние  $L^*$ , которое пойдут кластеры до решения данной задачи.

### 3.3 Компьютерная реализация

В данной главе используется модуль *Multi-Lane* – модуль, реализующий движение кластеров по *многополосным* типам носителей. Задача модуля: выявление стационарных состояний в модели, определение основных характеристик кластеров (конфигурация, разбиение, скорость) и наличие зависимостей между ними, условия выхода на максимальную скорость.

Ниже приведено описание классов и функций, присутствующих в данном модуле.

#### Изображение кластеров и полос в программе

1. Полоса  $j = 1..m$  изображена в программе в виде прямоугольника с максимальной высотой  $y_{max}$  и длиной  $d_0$ . Количество полос  $m$  указывается в программе;
2. В массиве *TRoad* создается  $m$  элементов, по одному для каждой полосы;

3. Оператор задает вручную или автоматически данные о кластерах на каждой полосе;
4. Компьютер рисует кластер в виде закрашенного прямоугольника с высотой  $y$  и длиной  $d$ .

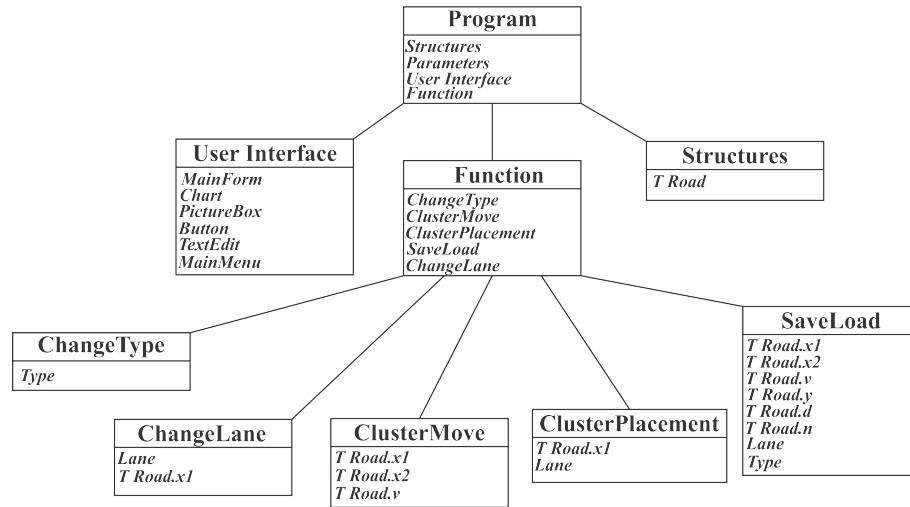


Рис. 86: Схема программы

### Последовательное перестроение кластеров

1. Во время движения кластеров проверяется следующее условие для каждого  $i$  кластера:  

$$x_i + d_i = x_{i+1};$$
2. Если условие не выполнено, то кластер движется дальше;
3. Если условие выполнено, то:
  - (a) Скорость кластера  $v_i = v_{i+1}$ ;
  - (b) При следующем такте Таймера на полосе  $j+1$  создается кластер  $k = n+1$  плотности  $y_k = y_i$ , длины  $d_k = v_i - v_{i+1}$  в координате  $x_k = x_{i+1}$ . Скорость кластера равна  $v_k = v_i$ ;
  - (c) Каждый такт длина кластера  $d_k$  будет увеличиваться на величину  $v_i - v_{i+1}$ , а длина кластера  $d_i$  будет уменьшаться на величину  $v_i - v_{i+1}$ ;
4. Если длина кластера  $i$   $d_i = 0$ , то кластер удаляется из массива, количество кластеров на  $j$  полосе уменьшается на 1.

### Синхронное перестроение кластеров

1. Во время движения кластеров проверяется следующее условие для каждого  $i$  кластера:  

$$x_i + d_i = x_{i+1};$$
2. Если условие не выполнено, то кластер движется дальше;
3. Если условие выполнено, то:



- (a) Скорость кластера  $v_i = v_{i+1}$ ;
  - (b) Если  $x_i + d_i$  не принадлежит ни одному из кластеров на соседней полосе, то на соседней полосе создается кластер с характеристиками  $y_i, d_i, x_i$ ;
  - (c) На текущей полосе кластер  $i$  полностью удаляется;
  - (d) Если условие не выполнено, то кластер движется со скоростью  $v_{i+1}$ ;
4. Если длина кластера  $i$   $d_i = 0$ , то кластер удаляется из массива, количество кластеров на  $j$  полосе уменьшается на 1.

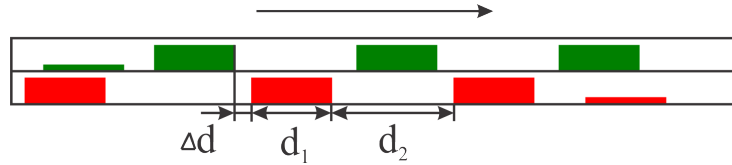


Рис. 87: Движение быстрого кластера в потоке медленных

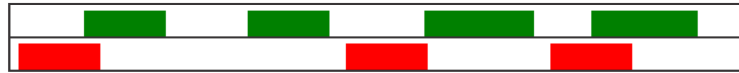


Рис. 88: Интеграция быстрого кластера

### 3.4 Выводы к главе 3

1. Сформулированы правила и сценарии поведения кластеров на многополосном носителе;
2. Рассмотрена задача с тремя типами кластеров на двухполосном носителе: на каждой из полос равномерно распределен поток соответствующего типа, потока 3 типа движется по обеим полосам. Исследованы задачи просачивания потока 3 типа с двумя типами перестроения;
3. Разработано программное обеспечение для численного исследования просачивания кластеров;
4. С помощью численного исследования подтверждены качественные результаты и получены численные оценки и графические зависимости скорости кластеров 3 типа.

## Глава 4

# Кластерное моделирование транспортных потоков на сетях

### 4.1 Поток кластеров на одномерных сетях

#### 4.1.1 Основные понятия и определения

Правило проезда узла.

1. Кластеры совершают движение через узел по правилу *FIFO* (First In First Out) (Рис. 89);
2. При одновременном подходе к узлу двух кластеров очередность прохода разыгрывается между кластерами с одинаковой вероятностью;
3. Каждый следующий кластер, приближающийся к уже занятому узлу, попадает в массив-очередь из ожидающих кластеров.

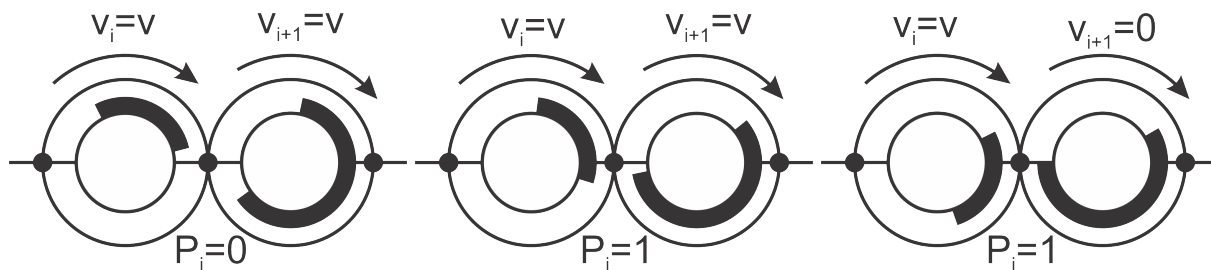


Рис. 89: Правило проезда узла

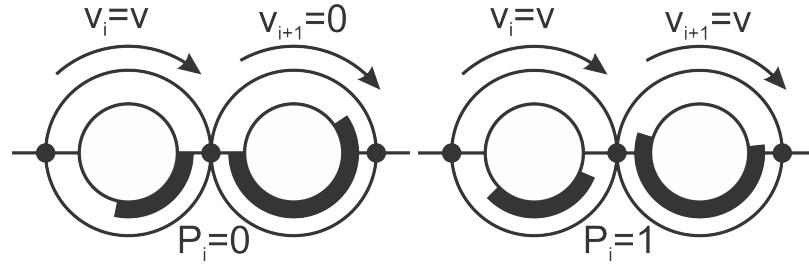


Рис. 90: Правило проезда узла

## 4.1.2 Исследование движения кластеров на регулярной сети

### 4.1.2.1 Постановка задачи

Существует замкнутая одномерная регулярная сеть из  $n$  колец. На каждом из колец, длины  $L = 2\pi$  совершает движение один кластер с заданными плотностью  $y_i$ , длиной  $d_i$  и скоростью  $v_i = f(y_i)$  с координатами  $[x1_i, x2_i]$ . Пусть  $y_1 = y_2 = y_3 = \dots = y_n$  - плотности кластеров,  $d_1 \neq d_2 \neq d_3 \neq \dots \neq d_n$  - их длины и  $v_1 = v_2 = v_3 = \dots = v_n$  - скорости. Каждое кольцо соединено с соседним в одной общей точке - узле  $P_i$ . Узлы располагаются в координатах  $\frac{\pi}{2}$  и  $\frac{3\pi}{2}$ . Кластеры совершают движение по своим кольцам без переходов. В задаче будем рассматривать случай *локального движения несжимаемых кластеров*. Необходимо установить зависимость средней скорости движения кластеров от их длины, наличие *синергии* и *коллапса* в системе и условия их возникновения.

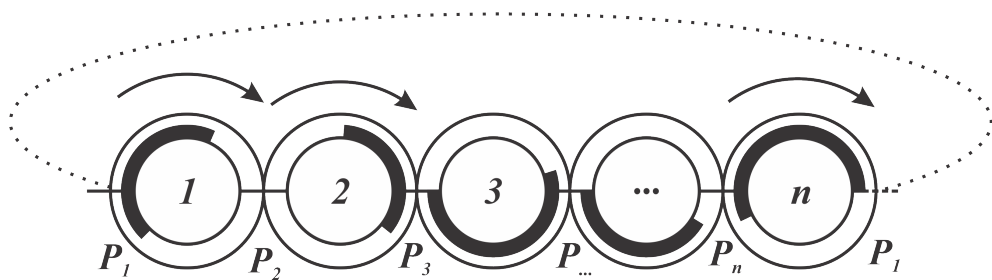


Рис. 91: Постановка задачи

### Исследуемые характеристики

1. Средняя скорость всех кластеров

$$V_{avg} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i}{n} \quad (4.1)$$

2. Функция

$$G_i(g_i(x), t) = \sum_{x=0}^{2\pi} g_i(x)$$

– количество пересечения кластеров на двух соседних кольцах,  $G_i(g_i(x), t) \geq 0$ , где  $g_i(x) : \forall x \in [0, 2\pi), g_i(x) = \{1, x \in [a_i, b_i] \text{ и } x \in [a_{i+1}, b_{i+1}]; 0, x \notin [a_i, b_i] \text{ или } x \notin [a_{i+1}, b_{i+1}]\}$ , где  $i, i+1$  – номера двух соседних колец, имеющих общий узел;

3. Длина каждого кластера  $d_i$ .

#### 4.1.2.2 Качественные результаты

##### Утверждение 1

Пусть справедливо  $\forall i, d_i + d_{i+1} < 2\pi$ , тогда за конечное время  $t$ , независимо от начальной конфигурации средняя скорость максимальна, в системе наступает *синергия*.

*Доказательство.*

Если функция  $G_i > 0$ , значит два кластера  $i$  и  $i + 1$  нельзя расположить на одном кольце из-за наличия пересечений в расположении, если  $G_i = 0$ , то такое расположение возможно. Так как длина кольца  $2\pi$ , то учитывая условие  $d_i + d_{i+1} < 2\pi$  такое расположение возможно. Значит независимо от начальной конфигурации, через конечный интервал времени  $t$   $G_i = 0$ , кластеры движутся без остановок, скорость кластеров максимальна.

##### Утверждение 2

Если справедливо  $\forall i, d_i + d_{i+1} \geq 2\pi$  и выполнено  $\forall i, d_i \geq \pi$ , то за конечное время  $t$ , независимо от начальной конфигурации средняя скорость равна 0, в системе наступает *коллапс*.

*Доказательство.*

В данном случае если  $d_i \geq \pi$ , то каждый кластер всегда будет перекрывать один из узлов. Если  $G_i > 0$  (выполнено в случае  $\forall i, d_i + d_{i+1} \geq 2\pi$ ), то движение всех кластеров будет невозможно.

#### 4.1.2.3 Численные результаты

Эксперименты проводились в модуле *Cluster Net* программного пакета *NODE model* с целью подтверждения теоретических результатов и установления существования возможных стационарных состояний в результате взаимодействия кластеров друг с другом на сети. Описание модуля приведено в конце главы.

С помощью программного обеспечения установлено следующее:

1. Если справедливо  $\forall i, d_i + d_{i+1} \geq 2\pi$ , а условие  $\forall i, d_i \geq \pi$  не выполнено, то за конечное время  $t$ , независимо от начальной конфигурации кластеров средняя скорость  $V_{max} > V_{avg} > 0$ .
2. Максимальное время достижения синергии:

$$t_{sm} = \sum_{i=1}^{n-1} d_i/v.$$

3. Максимальное время достижения коллапса:

$$t_{cm} = 2\pi/v.$$

##### Примеры.

В примерах изменяется только длина кластеров, плотность во всех экспериментах одинаковая.

1. Начальные условия:  $d = 170$  град. Через время  $t = 870$  сек. кластеры выходят на максимальную скорость, в системе *синергия*.

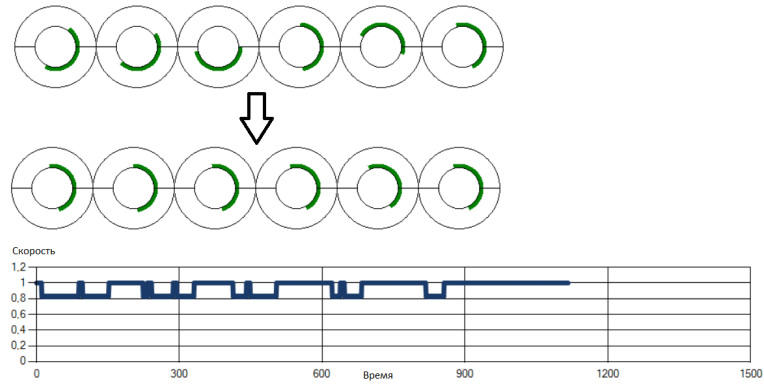


Рис. 92: Пример 1

2. Начальные условия:  $d = 220$  град. Через время  $t = 156$  сек. движение останавливается, получен *коллапс*.

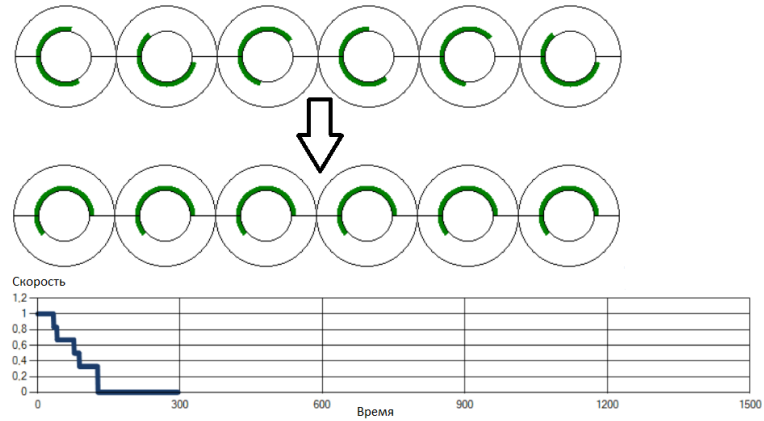


Рис. 93: Пример 2

### 4.1.3 Задача исследования потоков на нерегулярной сети

#### 4.1.3.1 Постановка задачи

Существует нелинейная замкнутая сеть из  $n$  колец. Каждое кольцо имеет общую точку с соседним кольцом – узел  $P_i$ . На каждом из колец совершает движение один кластер с заданными плотностью  $y_i$ , длиной  $d_i$ , координатами  $[x1_i, x2_i]$  и скоростью  $v_i$ , зависящей от заданной плотности. Пусть  $y_1 = y_2 = y_3 = \dots = y_n$  - плотности кластеров,  $d_1 \neq d_2 \neq d_3 \neq \dots \neq d_n$  - их длины и  $v_1 = f(y_1) = v_2 = f(y_2) = v_3 = f(y_3) = \dots = v_n = f(y_n)$  - скорости. Кластеры совершают движение по своим кольцам без переходов. В задаче будем рассматривать случай несжимаемых кластеров. Необходимо исследовать кластерную модель на заданном носителе, определить зависимость средней скорости движения кластеров от их длины и расположения, предельные оценки и наличие в системе стационарных состояний, синергии и коллапса.

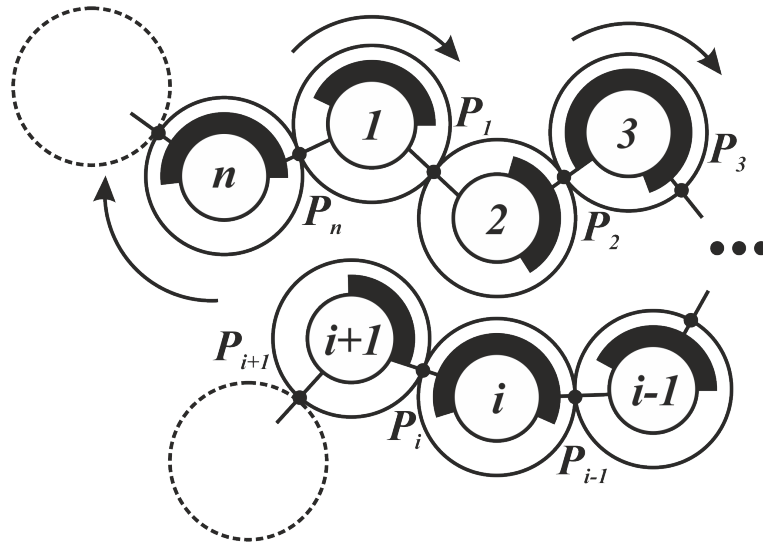


Рис. 94: Кластеры на нерегулярной сети

### Исследуемые характеристики

1. Средняя скорость всех кластеров

$$V_{avg} = \frac{\sum_n^i v_i}{n} \quad (4.2)$$

2. Максимальное расстояние между узлами  $P_{max} = \max(|P_i \sim P_{i+1}|, |P_{i+1} \sim P_i|)$ ;
3. Минимальное расстояние между узлами  $P_{min} = \min(|P_i \sim P_{i+1}|, |P_{i+1} \sim P_i|)$ ;
4. Длина каждого кластера  $d_i$ .

#### 4.1.3.2 Результаты

Исследование данной задачи проводилось при помощи программного пакета *NODE model*. 1. Если справедливо  $\forall i, d_i + d_{i+1} < 360$ , то за конечный промежуток времени  $t$ , не зависимо от расположения кластеров средняя скорость максимальна, в системе *синергия*.

2. Пусть справедливо  $\forall i, d_i + d_{i+1} \geq 360$ , тогда за конечное время  $t$ , не зависимо от расположения кластеров, средняя скорость равна 0, в системе *коллапс*.

*Примеры.* 1. Начальные условия:  $d = 310$  град. Время достижения стационарного состояния  $t = 70$ . В результате эксперимента получен *коллапс*, скорость кластеров равна 0.

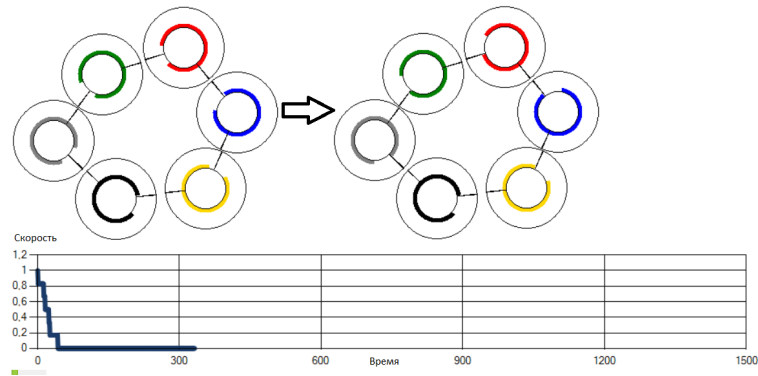


Рис. 95: Пример 1

2. Начальные условия:  $d = 84$  град. Время достижения стационарного состояния  $t = 542$ . В результате эксперимента получена *синергия*, кластеры вышли на максимальную скорость.

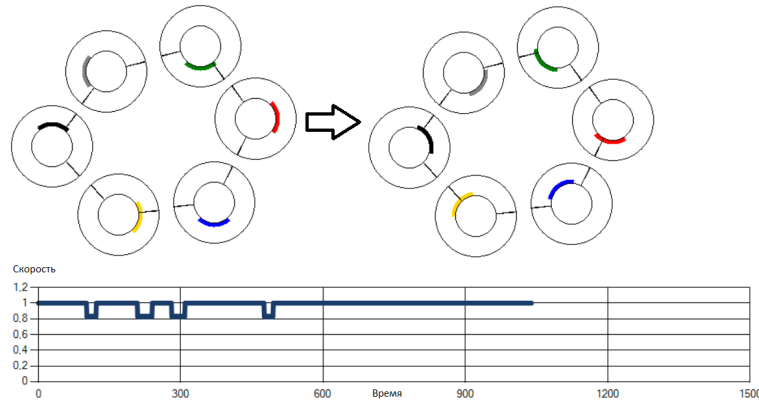


Рис. 96: Пример 2

## 4.2 Поток кластеров на двумерных сетях

### 4.2.1 Исследование движения кластеров на регулярной сети в случае сонаправленного движения

#### 4.2.1.1 Постановка задачи

Существует сеть из  $N \times M$  колец. На каждом из колец совершает движение один несжимаемый кластер с заданными плотностью  $y_i$ , длиной  $d_i$  и скоростью  $v_i$ , зависящей от заданной плотности. Пусть  $y_1 = y_2 = y_3 = \dots = y_n$  - плотности кластеров,  $d_1 = d_2 = d_3 = \dots = d_n$  - их длины и  $v_1 = f(y_1) = v_2 = f(y_2) = v_3 = f(y_3) = \dots = v_n = f(y_n)$  - скорости. Кластеры совершают движение по своим кольцам без переходов. Движение по сети сонаправлено. Через общие точки колец - узлы -  $P_{i,j}$  ( $i$  - номер кольца,  $j = (1, 2, 3, 4)$  - номер узла) проезд возможен только одного кластера. Необходимо исследовать кластерную модель на заданном носителе, определить зависимость средней скорости движения кластеров  $V_{avg}$  от их длины, выявить условия, при которых движение кластеров становится стационарным или прекращается.

## Исследуемые характеристики

1. Средняя скорость всех кластеров

$$V_{avg} = \frac{\sum_n^i v_i}{n}; \quad (4.3)$$

2. Длина каждого кластера  $d_i$ .

3. Начальная конфигурация.

### 4.2.1.2 Результаты

Все результаты получены с помощью численного исследования модели с помощью модуля *Cluster Net*.

*Утверждение 1.*

Если  $d_i < \frac{\pi}{2}$ , то за конечный промежуток времени  $t$  средняя скорость  $V_{avg} = v_i$  независимо от начальных условий.

*Доказательство.*

Так как  $d_i < \frac{\pi}{2}$ , то существует конечное расположение кластеров, при котором они не будут занимать ни один из узлов на кольце, то есть не будут создавать помех для других кластеров.

*Утверждение 2.*

Если  $d_i \geq \pi$ , то за конечное время  $t$  для любой начальной конфигурации средняя скорость  $V_{avg} = 0$ , движение на всех элементах отсутствует.

*Доказательство.*

Для наличия движения потока необходимо, чтобы на каждом элементе всегда было свободно не менее двух узлов. Если длины кластеров  $d_i > \pi$ , то в некоторые моменты времени  $t$  происходит перекрытие одновременно трех узлов, если такое перекрытие осуществляется на каждом из колец, то не существует такого расположения кластеров, при котором движение кластеров возможно осуществить хотя бы на одном элементе.

*Утверждение 3.*

Если  $\frac{\pi}{2} < d_i < \pi$ , то наблюдаются следующие периодические конструкции: динамический затор, частичное движение, частичный коллапс, тотальное движение.

*Примеры.* 1. Начальные условия:  $d_i = 75$ . Время достижения стационарного состояния  $t = 1235$  тактов. В результате эксперимента получен выход кластеров на максимальную скорость, в системе синергия.



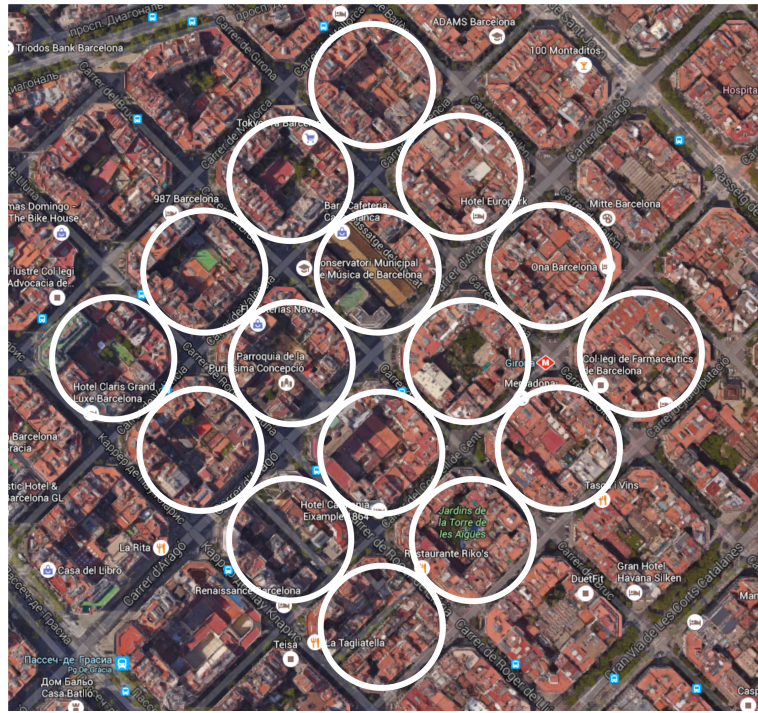


Рис. 97: Пример 1

2. Начальные условия:  $d_i = 124$ . Время достижения стационарного состояния  $t = 341$  такт.  
В результате эксперимента получен *частичный коллапс*.

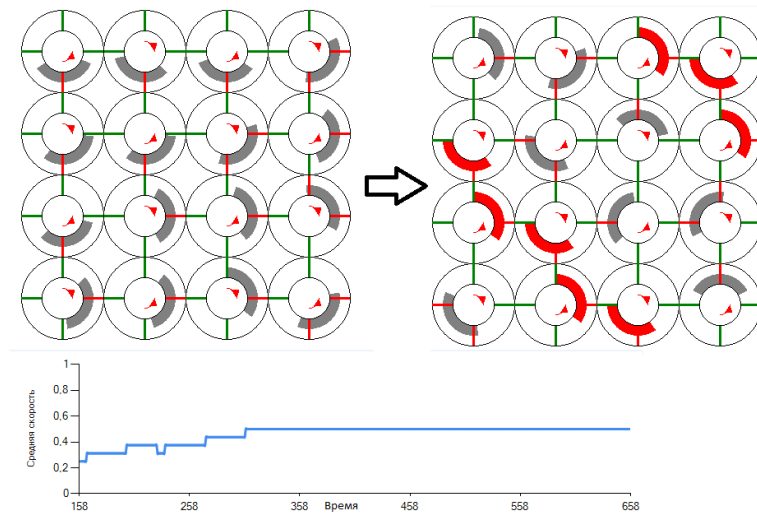


Рис. 98: Пример 2

3. Начальные условия:  $d_i = 162$ . Время достижения стационарного состояния  $t = 828$  тактов. В результате эксперимента получен *динамический затор*.

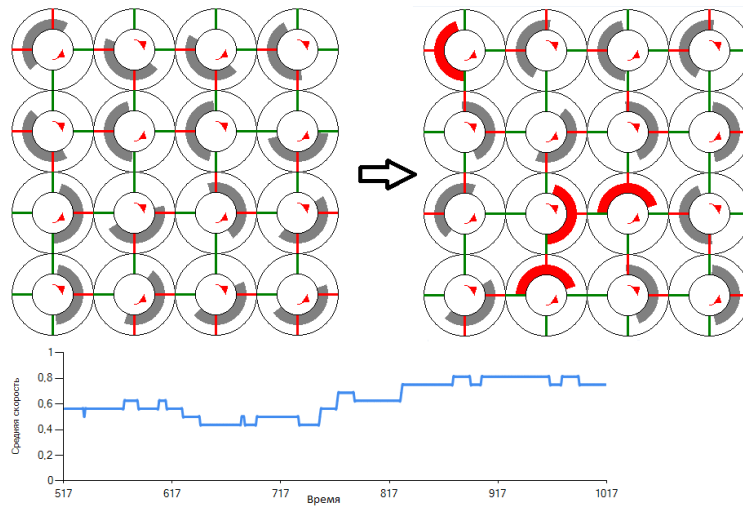


Рис. 99: Пример 3

4. Начальные условия:  $d_i = 195$ . Время достижения стационарного состояния  $t = 87$  тактов. В результате эксперимента движение останавливается, в системе *коллапс*.

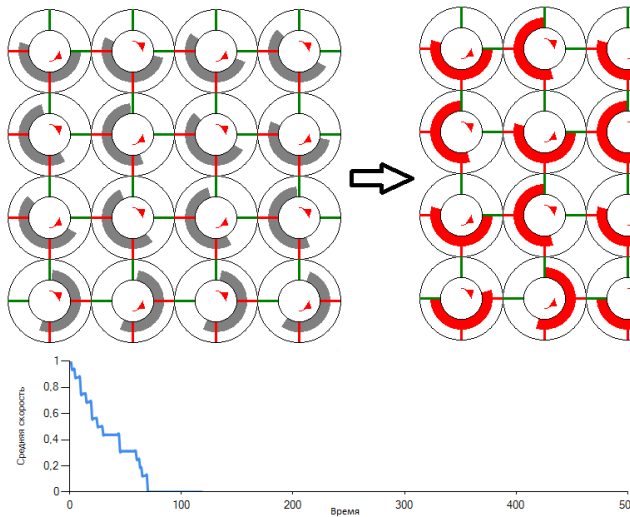


Рис. 100: Пример 4

## 4.2.2 Исследование движения кластеров на регулярной сети в случае однонаправленного движения

### 4.2.2.1 Постановка задачи

Существует сеть из  $N \times M$  колец. На каждом из колец совершает движение один несжимаемый кластер с заданными плотностью  $y_i$ , длиной  $d_i$  и скоростью  $v_i$ , зависящей от заданной плотности. Пусть  $y_1 = y_2 = y_3 = \dots = y_n$  - плотности кластеров,  $d_1 = d_2 = d_3 = \dots = d_n$  - их длины и  $v_1 = f(y_1) = v_2 = f(y_2) = v_3 = f(y_3) = \dots = v_n = f(y_n)$  - скорости. Кластеры совершают движение по своим кольцам без переходов. Движение по сети однонаправлено. Через общие точки колец - узлы -  $P_{i,j}$  ( $i$  - номер кольца,  $j = (1, 2, 3, 4)$  - номер узла) проезд возможен только одного кластера. Необходимо исследовать кластерную модель на заданном

носителе, определить зависимость средней скорости движения кластеров  $V_{avg}$  от их длины, выявить условия, при которых движение кластеров становится стационарным или прекращается.

### Исследуемые характеристики

1. Средняя скорость всех кластеров.

$$V_{avg} = \frac{\sum_n^i v_i}{n}. \quad (4.4)$$

2. Длина каждого кластера  $d_i$ .

#### 4.2.2.2 Результаты

Все результаты получены с помощью численного исследования модели с помощью модуля *Cluster Net*.

*Утверждение 1.*

Если  $d_i < \frac{\pi}{2}$ , то за конечный интервал времени  $t$  при любых начальных условиях средняя скорость  $V_{avg} = v_i$ .

*Доказательство.*

Утверждение доказывается аналогично утверждению 1 для сонаправленного движения.

*Утверждение 2.*

Если  $d_i \geq \pi$ , то за конечный промежуток времени  $t$  независимо от начальной конфигурации средняя скорость  $V_{avg} = 0$ , в системе отсутствует движение.

*Доказательство.*

Утверждение доказывается аналогично утверждению 2 для сонаправленного движения.

*Утверждение 3.*

Если  $\frac{\pi}{2} < d_i < \pi$ , то наблюдаются следующие периодические конструкции: динамический затор, частичный коллапс, частичное движение, тотальное движение.

*Примеры.* 1. Начальные условия:  $d_i = 71$ . Время достижения стационарного состояния  $t = 468$  тактов. В результате эксперимента кластеры выходят на максимальную скорость, в системе *синергия*.

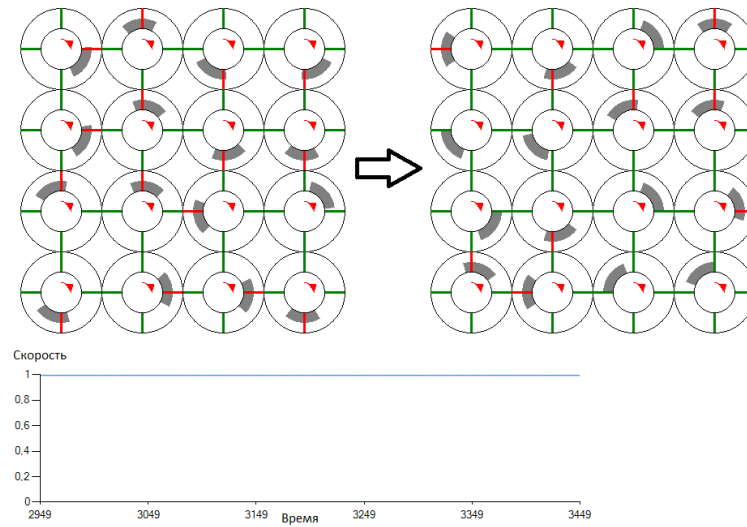


Рис. 101: Пример 1

2. Начальные условия:  $d_i = 195$ . Время достижения стационарного состояния  $t = 80$  тактов. В результате эксперимента все кластеры останавливаются, в системе *коллапс*.

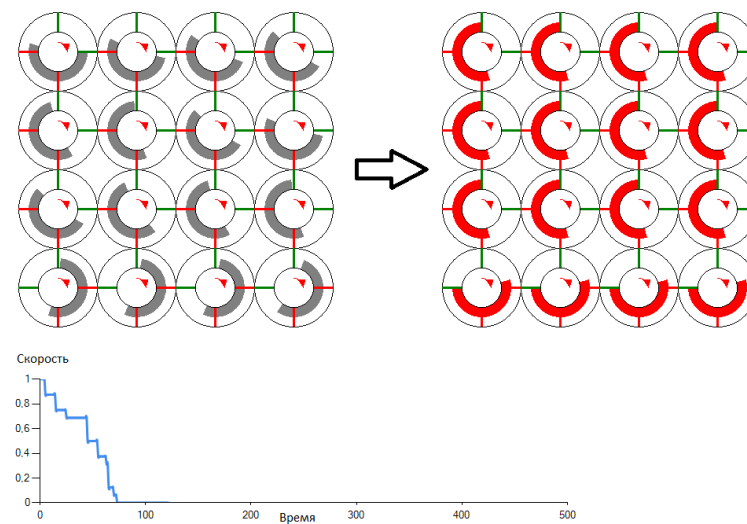


Рис. 102: Пример 2

3. Начальные условия:  $d_i = 160$ . Время достижения стационарного состояния  $t = 811$  тактов. В результате эксперимента получено *частичное движение*.

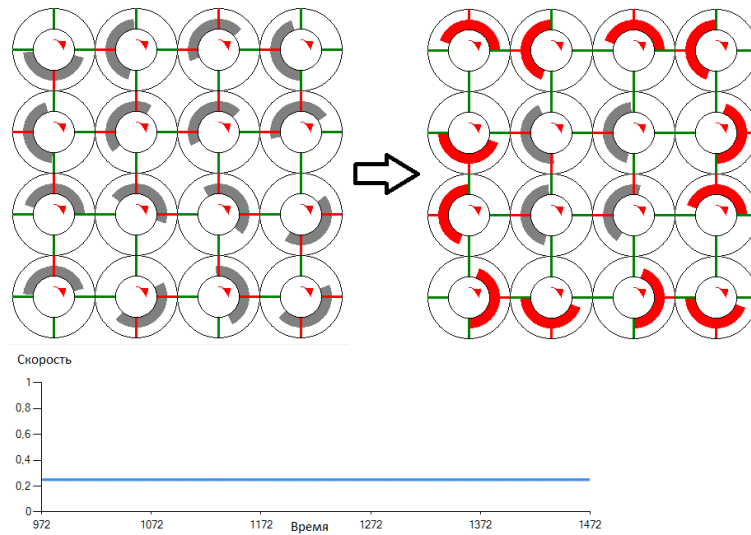


Рис. 103: Пример 3

4. Начальные условия:  $d_i = 140$ . Время достижения стационарного состояния  $t = 322$  тактов. В результате эксперимента получен *частичный коллапс*.

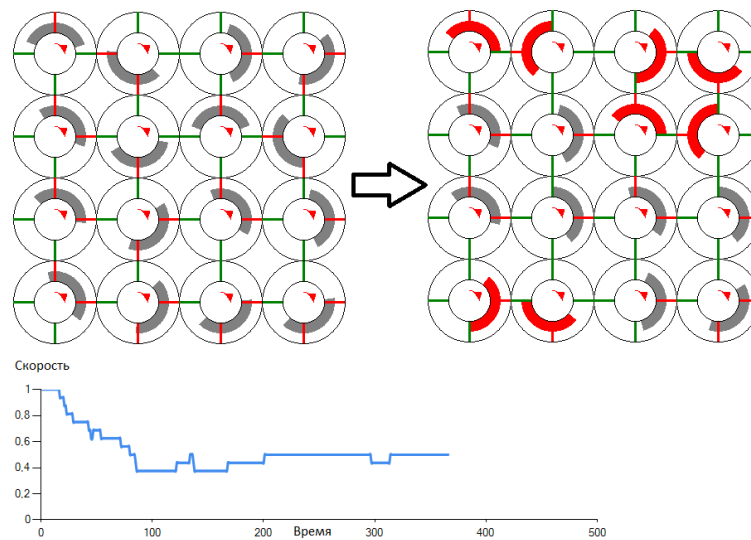


Рис. 104: Пример 4

Ниже приведен график зависимости средней скорости кластеров от их длины. На графике отмечены значения длины кластеров, при которых наступает синергия (90 градусов) и коллапс (180 градусов) в системе.

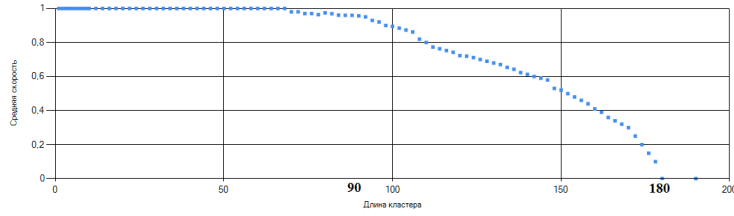


Рис. 105: График зависимости средней скорости от длины кластера

### 4.2.3 Исследование движения кластеров на регулярной сети в случае сжимаемых кластеров

#### 4.2.3.1 Постановка задачи

Существует сеть из  $N \times M$  колец. На каждом из колец совершает движение один сжимаемый кластер с заданными плотностью  $y_i$ , длиной  $d_i$  и скоростью  $v_i$ , зависящей от заданной плотности. Пусть  $y_1 = y_2 = y_3 = \dots = y_n$  - плотности кластеров,  $d_1 = d_2 = d_3 = \dots = d_n$  - их длины и  $v_1 = f(y_1) = v_2 = f(y_2) = v_3 = f(y_3) = \dots = v_n = f(y_n)$  - скорости. Кластеры совершают движение по своим кольцам без переходов. Движение по сети однонаправлено. Через общие точки колец - узлы -  $P_{i,j}$  ( $i$  - номер кольца,  $j = (1, 2, 3, 4)$  - номер узла) проезд возможен только одного кластера. Необходимо исследовать кластерную модель на заданном носителе, определить зависимость средней скорости движения кластеров  $V_{avg}$  от их длины, выявить условия, при которых движение кластеров становится стационарным или прекращается.

#### Исследуемые характеристики

1. Средняя скорость всех кластеров.

$$V_{avg} = \frac{\sum_n^i v_i}{n}. \quad (4.5)$$

2. Масса каждого кластера  $M_i = d_i \cdot y_i$ .

#### 4.2.3.2 Результаты

*Утверждение 1.* Если  $d_i < \frac{\pi}{2}$ , то за конечное время  $t$  для любых начальных условий средняя скорость  $V_{avg} = v_i$ , на сети присутствует тотальное движение.

*Доказательство.* Утверждение доказывается аналогично утверждению 1 для однонаправленного движения.

*Утверждение 2.* Если  $\frac{M_i}{y_{max}} \geq \pi$ , где  $y_{max}$  - плотность кластера-пробки, то за конечный интервал времени  $t$  при любых начальных условиях средняя скорость  $V_{avg} = 0$ , движение отсутствует на всех носителях.

*Доказательство.* Данное утверждение доказывается аналогично утверждению 2 для однонаправленного движения с одним дополнением: для того, чтобы сжимаемый кластер стал помехой для других, необходимо, чтобы длина кластера-пробки  $d_{max} \geq \pi$ , то есть чтобы  $\frac{M_i}{y_{max}} \geq \pi$ .

*Утверждение 3.* Если  $\frac{\pi}{2} < d_i < \pi$ , то наблюдаются следующие периодические конструкции:

динамический затор, частичный коллапс, тотальное движение.

*Примеры.* 1. Начальные условия:  $d_i = 80$ . Время достижения стационарного состояния  $t = 125$  тактов. В результате эксперимента получен выход кластеров на максимальную скорость, в системе *синергия*.



Рис. 106: Пример 1

2. Начальные условия:  $d_i = 200$ . Время достижения стационарного состояния  $t = 95$  тактов. В результате эксперимента скорость кластеров равна 0, в системе *коллапс*.

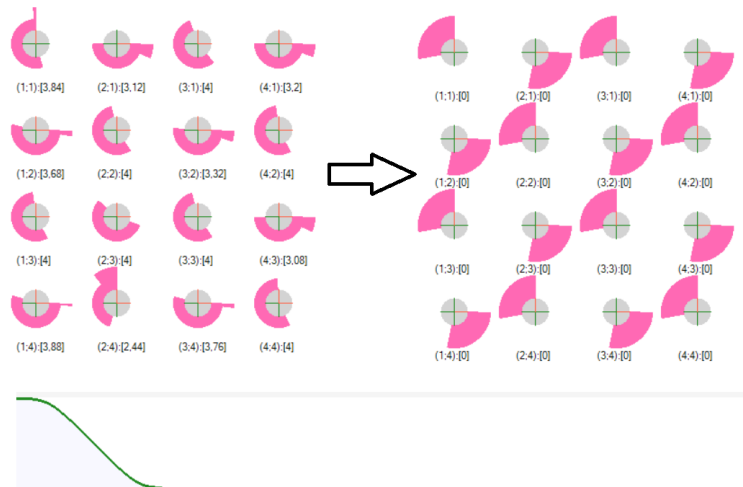


Рис. 107: Пример 2

3. Начальные условия:  $d_1 = 200$ . Время достижения стационарного состояния  $t = 560$  тактов. В результате моделирования получено *частичное движение*.

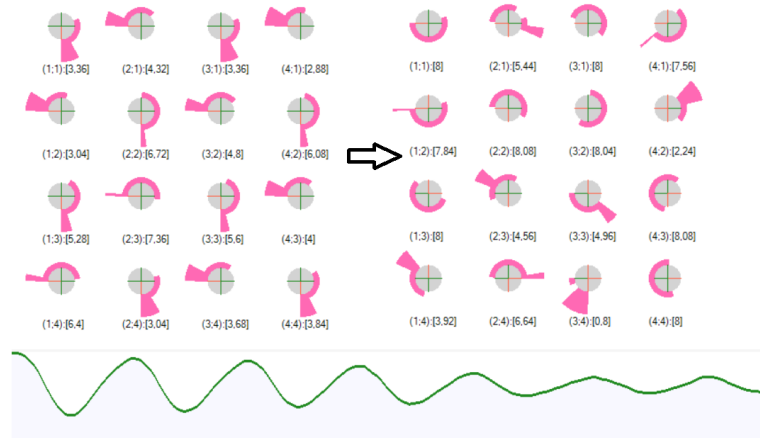


Рис. 108: Пример 3

#### 4.2.4 Исследование движения кластеров на квази-регулярной сети

##### 4.2.4.1 Постановка задачи

Существует сеть из  $n \times m$  колец. На каждом из колец совершает движение один кластер с заданными плотностью  $y_i$ , длиной  $d_i$  и скоростью  $v_i$ , зависящей от заданной плотности. Пусть  $y_1 = y_2 = y_3 = \dots = y_n$  - плотности кластеров,  $d_1 = d_2 = d_3 = \dots = d_n$  - их длины и  $v_1 = f(y_1) = v_2 = f(y_2) = v_3 = f(y_3) = \dots = v_n = f(y_n)$  - скорости. Кластеры совершают движение по своим кольцам без переходов. Через общие точки колец (узлы)  $P_{i,j}$  ( $i$  - номер кольца,  $j = (1, 2, 3, 4)$  - номер перекрестка для маленьких колец и  $j = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$  для больших колец) проезд возможен только одного кластера. Необходимо исследовать кластерную модель на заданном носителе, определить зависимость скорости от длины, выявить условия, при которых движение кластеров становится стационарным или прекращается.

##### 4.2.4.2 Результаты

Результаты в данной задаче получены с помощью численного исследования модели в программном обеспечении *NODE model*. 1. Если выполнено условие:  $d \leq \frac{\pi}{4}$  для каждого кольца, то средняя скорость максимальна:  $V_{avg} = v$ , в системе *синергия*;  
2. Если выполнено условие:  $d \geq \pi$  для каждого кольца, то средняя скорость  $V_{avg} = 0$ , в системе *коллапс*.

##### Примеры.

1. Начальные условия:  $d_i = 40$ . Время достижения стационарного состояния  $t = 1311$  тактов. В результате эксперимента кластеры выходят на максимальную скорость, в системе *синергия*.



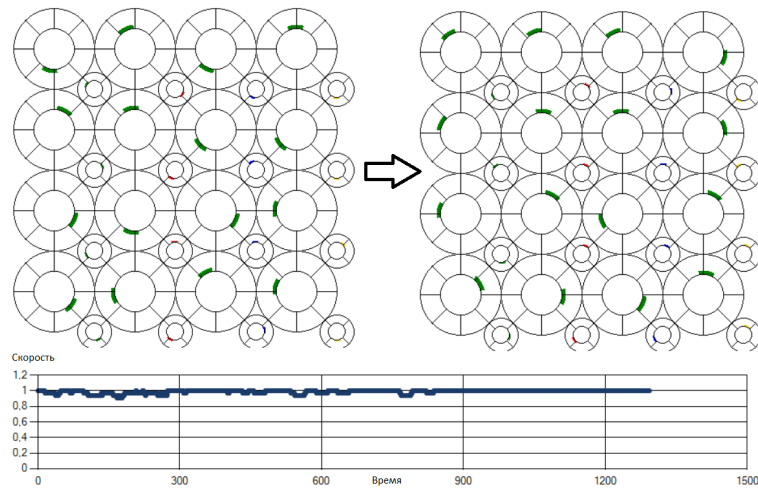


Рис. 109: Пример 1

2. Начальные условия:  $d_i = 200$ . Время достижения стационарного состояния  $t = 54$  тактов. В результате эксперимента движение останавливается, в системе *коллапс*.

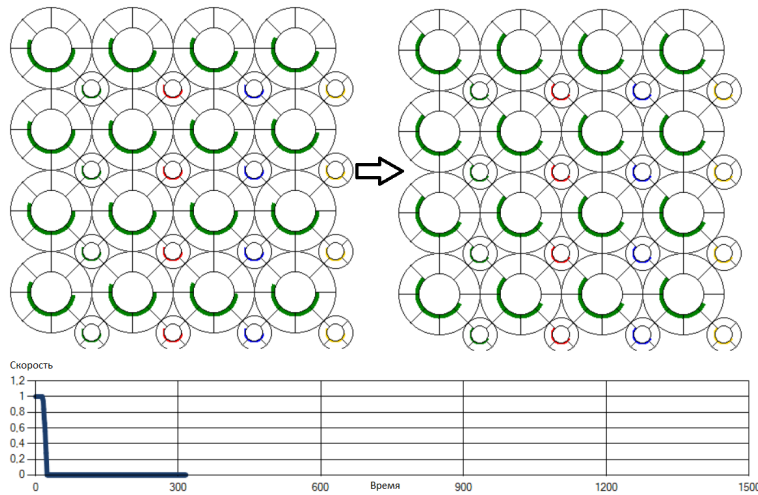


Рис. 110: Пример 2

3. Начальные условия:  $d_i = 140$ . Время достижения стационарного состояния  $t = 1457$  тактов. В результате эксперимента получен *частичный коллапс*.

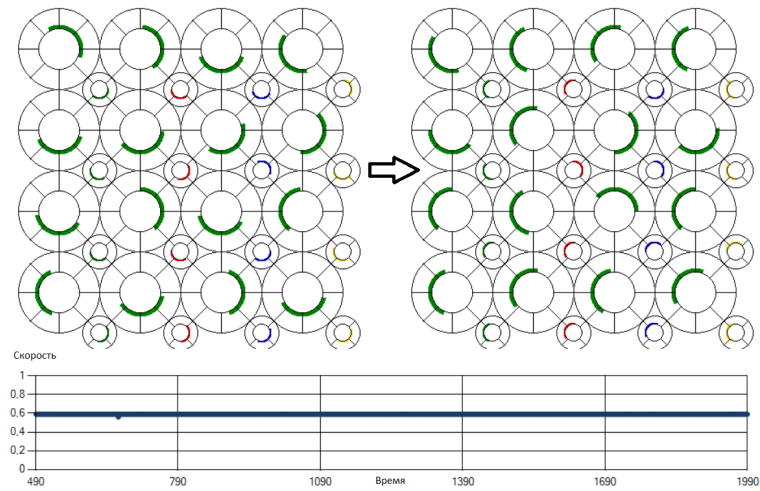


Рис. 111: Пример 3

### 4.3 Компьютерная реализация

В данной главе используется модуль *Cluster Net* – модуль, реализующий движение кластеров по *сетевым* носителям. Задача модуля: определение стационарных состояний кластерной модели на сети, определение скорости кластеров и ее зависимости от массы потока на сети, условия перемещения кластеров с максимальной скоростью.

Ниже приведено описание классов и функций, присутствующих в данном модуле.

#### Изображение кластеров и носителя в программе

1. Каждая полоса изображена в программе в виде кольца с максимальной высотой  $y_{max}$  и длиной  $d_0$ ;
2. Каждый четный ряд колец имеет меньший радиус и располагается так, чтобы иметь общие точки только с большими кольцами;
3. Узел  $P_{a,b}$  обозначается на кольце в виде отмеченной линией координатой, которая пересекает два соседних кольца;
4. В массиве *TRoad* создается  $m$  элементов для каждого кольца;
5. Пользователь задает вручную или автоматически данные о кластерах;
6. Компьютер рисует кластер в виде закрашенного прямоугольника с высотой  $y$  и длиной  $d$ .

#### Расстановка колец

1. При щелчке левой кнопкой мыши координаты  $X$  и  $Y$  передаются программе и сохраняются в структуру, после чего программа автоматически рисует кольцо с центром в данной точке, количество колец  $n = n + 1$ ;
2. Если  $n = 1$ , то на кольце отсутствуют узлы;

3. Если  $n \neq 1$ , то происходит вычисление длины вектора  $d_{row}$ , соединяющего текущее кольцо и предыдущее и угла наклона данного вектора;
4. Радиус текущего кольца равен  $r$  если  $n = 1$ , иначе  $d_{row} - r_{i-1}$ ,  $r$  - базовый радиус,  $r_{i-1}$  - радиус предыдущего кольца;
5. Перекресток  $P_{a,b}$  располагается в точке, определяемой с помощью угла наклона вектора, соединяющего центры колец;
6. Если  $n \neq 1$ , то автоматически вычисляется длина и угол наклона вектора, соединяющего центры первого и последнего колец для расстановки второго перекрестка.

### Автоматическая расстановка кластеров

Требуется для равномерного распределения кластеров по полосам в каждом опыте.

1. Для запуска расстановки компьютеру необходимо указать максимальные значения плотности, длины кластера и его возможного расположения:  $y_{up}$ ,  $d_{up}$ ,  $x0_{up}$ . Есть возможность зафиксировать каждое значение для ввода ограничений на начальные условия (одинаковая плотность или длина всех кластеров, фиксированное расположение друг относительно друга);
2. Нажатием на кнопку *Random* происходит запуск автоматической расстановки кластеров компьютером;
3. Для каждого  $i$  кластера компьютер автоматически задает плотность следующим образом:  $y_i = Random(0, y_{up})$ , либо  $y_i = y_{up}$  если величина  $y_{up}$  зафиксирована. Функция  $Random(a, b)$  возвращает случайное число между числами  $a$  и  $b$  при условии:  $a > b$ ;
4. Если при расстановке  $x0_i < P_{a,b}$  and  $x0_i + d_i > P_{a,b}$ , то  $P_{a,b} = 1$ , иначе  $P_{a,b} = 0$ ;
5. Если при расстановке  $x0_i < P_{a,b}$  and  $x0_i + d_i > P_{a,b}$  and  $P_{a,b} = 1$ , происходит повторный выбор случайного значения для  $x0_i$ .

### Прохождение кластерами узла

1. Узлы  $P_{a,b}$  хранятся в программе в массиве структуры *TRoad*, каждый  $a$  элемент массива отвечает за  $b$  узлы на соответствующем кольце Ожерелья;
2. Каждый узел принадлежит двум кольцам, через которые он проходит, связь узлов хранится в элементах структуры;
3. Если  $P_{a,b} > x_i$  and  $P_{a,b} < x_i + d_i$ , то  $P_{a,b} = 1$ , иначе  $P_{a,b} = 0$ ;
4. Если граница кластера:  $x_i + d_i = P_{a,b}$  and  $P_{a,b} = 1$ , то скорость кластера  $v_i = 0$ , иначе  $v_i \neq 0$ .

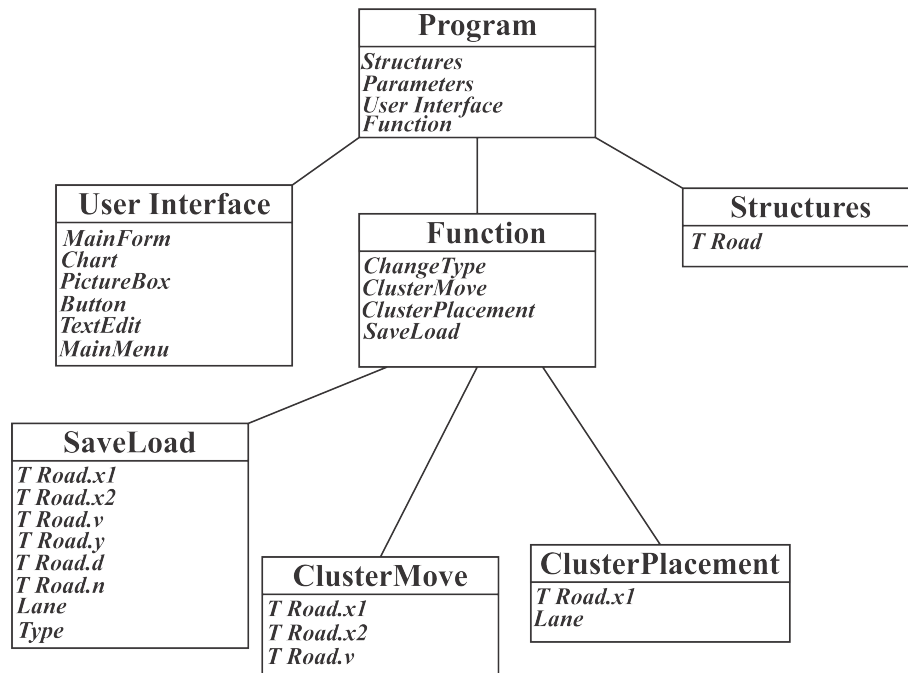


Рис. 112: Схема программы

#### 4.4 Выводы к главе 4

1. Сформулированы правила поведения кластеров на одномерных и двумерных сетях;
2. Исследована кластерная модель на одномерных регулярных и нерегулярных сетях, двумерных регулярных и квази-регулярных сетях, получены теоретические результаты для регулярных сетей, условия появления синергии и коллапса в системе;
3. Разработано программное обеспечение для аналитического исследования кластерной модели на сетях;
4. Проведено аналитическое исследование поставленных задач, подтверждены качественные и получены численные результаты для нерегулярных сетей, условия возникновения синергии и численные значения скорости кластеров.

## Глава 5

# Применение кластерной модели для оптимизации транспортных потоков на городских улично-дорожных сетях

### 5.1 Основные компоненты модели на улично-дорожной сети

#### 5.1.1 Кластеры автомобилей на улично-дорожной сети

Каждый кластер образует группу автомобилей, движущихся с одинаковой скоростью на равном расстоянии друг от друга. Кластер имеет длину  $d$  (м), плотность  $y$  (авт/м) и скорость  $v$  (м/с).



Рис. 113: Группы автомобилей в виде кластеров

Сбор данных о состоянии транспортного потока осуществляется с помощью средств интеллектуального мониторинга на базе мобильных лабораторий кафедры «Высшая математика» МАДИ: «ОТРОК» и «МУДРец».

*МУДРец* – «Мобильный Улично-Дорожный РЕЦептор» – мобильная лаборатория, созданная на базе автомобиля ГАЗ-2705, приобретенного за счет средств гранта РФФИ<sup>123</sup>,

<sup>1</sup>Отчет "Мобильная лаборатория по приему, обработке и передаче информации с улично-дорожных сетей мегаполисов". Грант РФФИ N07-07-05016-6 - МТУСИ, 2007

<sup>2</sup>Отчет "Методические рекомендации по повышению качества инженерно-геологических изысканий при проектировании строительства (реконструкции) автомобильных дорог общего пользования с применением подповерхностного зондирования". Проект по ГК-УД 47203 от 17.07.2007. Заказчик - Росавтодор. - МАДИ, 2009

<sup>3</sup>Отчет "Система интеллектуального мониторинга потоков на сетях". Грант РФФИ N09-07-05012-6 - МТУСИ, 2009

оборудованная устройствами для сбора и передачи данных с улично-дорожных сетей мегаполисов [47]. Лаборатория содержит:

1. георадар «ОКО-2», представляющий из себя два экранированных антенных блока без оптической развязки, предназначенный для обследования автомобильных дорог, железно-дорожных насыпей, аэродромов;
2. малогабаритный переносной датчик зондирования различных сред «РАСКАН», предназначенный для неразрушающего контроля строительных конструкций с целью обнаружения скрытых предметов, пустот, а так же получения изображения внутренней структуры исследуемого объекта;
3. GPS-приемник высокой точности «GISmore», необходимый для определения местоположения мобильной лаборатории на карте и нанесения отметок о результатах проведенных исследований;
4. фотокамера «Canon EOS 40D» для получения графической информации о состоянии улично-дорожной сети;
5. видеокамера «Sony» для получения видео-информации о состоянии улично-дорожной сети;
6. персональный компьютер с операционной системой «Windows XP SP2», необходимый для непосредственной обработки поступающей с остальных устройств информации и передачи ее на удаленный сервер в режиме реального времени.

*ОТРОК* – мобильная лаборатория мониторинга трафика «Оборудование для Телематики и Распознавания Образов на Колесах» – мобильная лаборатория на базе автомобиля VOLSWAGEN TRANSPORTER T5, приобретенного за счет средств гранта РФФИ N08-01-01802-Э\_б [48]. Основной особенностью лаборатории является универсальность как со стороны технической подготовки и оснащенность. В состав лаборатории входят:

1. лазерный датчик расстояния «dimetrix DLS-C30», предназначенный для измерения расстояния до дорожного покрытия с целью построения его профиля и определения размеров и расположения неровностей на дороге (колеи, ямы и т.д.);
2. сетевая камера «AXIS 214 PTZ» для получения фото- и видео- информации о транспортном потоке и состоянии дорожного покрытия;
3. фотоаппарат «Canon EOS 40D» в качестве дополнительного мобильного устройства сбора фото- и видео- информации;
4. портативный персональный компьютер «Sony VAIO VGN-UX1XRN» для обработки информации, поступающей с друг устройств лаборатории;
5. GPS-приемник высокой точности «GISmore», необходимый для определения местоположения мобильной лаборатории на карте и нанесения отметок о результатах проведенных исследований.



Рис. 114: Мобильные лаборатории ОММ кафедры "Высшая математика" МАДИ: "ОТРОК" и "МУДРЕЦ"

С помощью видео-камеры производится сбор графической информации. Анализ видеоряда производится средствами автоматической обработки изображений, разработанными в отделе математического моделирования (ОММ) МАДИ [45], [46]. На видео определяется фоновое изображение, в программе сохраняется матрица цвета. Автомобиль регистрируется при значительном изменении в матрице цвета (порог задается изначально). Интенсивность – количество автомобилей, переместившись через отметку на видео за единицу времени, скорость – отношение расстояния между двумя отметками ко времени, за которое автомобиль их проехал. Длина кластера вычисляется с помощью количества автомобилей ( $m$ ) в нем:  $d = \frac{m}{y}$ .

При исследовании многополосных носителей кластеры разделяются на типы: грузовые или медленные и легковые или быстрые, состоящие соответственно из грузовых и легковых транспортных средств. Медленные грузовые кластеры перемещаются преимущественно по крайним правым полосам, быстрые легковые по крайним левым.

На сетях поток подразделяется на местный (локальный) и транзитный (сквозной). Соответствующие кластеры могут либо перемещаться только по своему кольцу (местные кластеры), либо по кольцам всей сети с возможностью перемещения между ними.

### 5.1.2 Взаимодействие кластеров

Взаимодействие кластеров автомобилей продемонстрировано на примере регулируемого перекрестка. Один кластер (кластер-пробка, лидер) – группа автомобилей, уже остановившаяся перед пересечением и ожидающая возможности проезда. Другой кластер (догоняющий, аутсайдер) – группа автомобилей, приближающаяся к пересечению.





Рис. 115: Взаимодействие групп автомобилей разных плотностей

Приближаясь к перекрестку, скорость автомобилей и расстояние между ними уменьшается постепенно, что является аналогом *локального распространения информации* в кластере. Ближе к пробке автомобили останавливаются, трансформируясь из догоняющего кластера в кластер-пробку, аналогично результату взаимодействия двух и более кластеров на прямой.

В случае разделения потоков на типы (местный и транзитный или грузовой и легковой) кластеры разных типов не взаимодействуют друг с другом. В этом случае они ведут себя аналогично несжимаемым кластерам.

### 5.1.3 Базовые носители

Любой замкнутый участок дороги аппроксимируется в виде кольца, где общая протяженность дороги будет составлять его длину. Масса потока на кольце разбивается на кластеры в зависимости от скорости (интенсивности или плотности) потока.

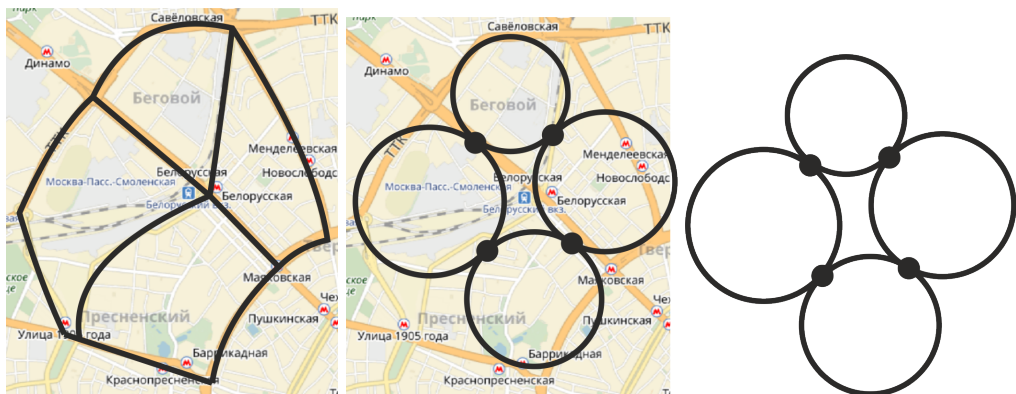


Рис. 116: Участок УДС в центре Москвы в виде одномерной сети

В одномерной сети, рассматриваемой на примере городской УДС, учитываются размеры колец и расположение узлов. Общие точки (узлы) на сети являются точками конфликта потоков разных колец. На УДС города такие точки обозначают регулируемые и не регулируемые перекрестки, прямолинейные участки дороги, общие для двух колец, круговые развязки и места соединения разветвления дорог.



Многополосные носители являются аппроксимацией замкнутых участков дороги с двумя и более полосами для движения в одном направлении. На многополосных носителях кластеры не только взаимодействуют друг с другом, но и обгоняют более медленные и плотные кластеры.

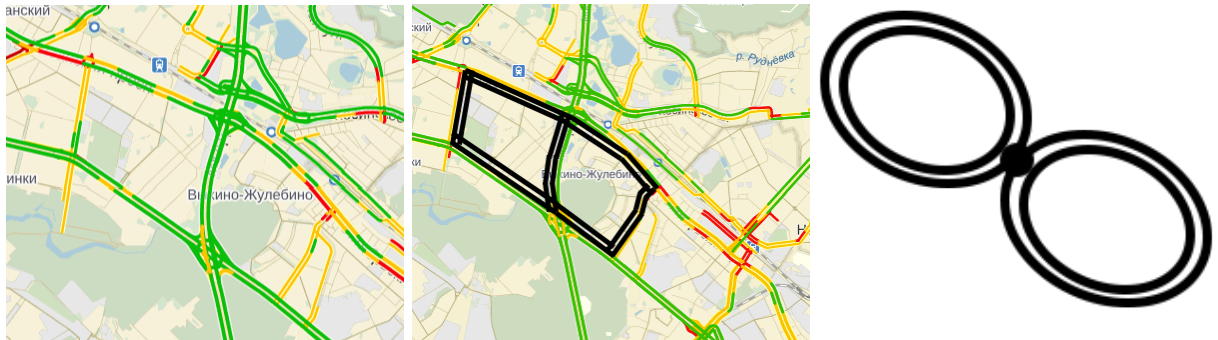


Рис. 117: Участок многополосной УДС и аналогичный базовый носитель

Регулярные двумерные сети позволяют рассматривать большие участки городской сети и всю сеть в виде регулярной замкнутой координатной сетки. Применить данный метод позволяет, например, городская дорожная сеть Барселоны (Испания), где большие районы города построены в виде регулярных замкнутых кварталов.

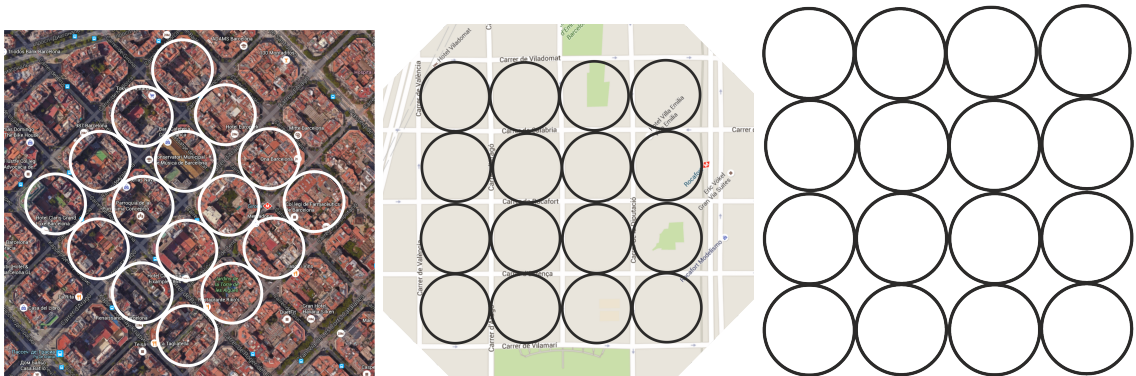


Рис. 118: УДС Барселоны в виде регулярной прямоугольной сети

Квази-регулярная сеть позволяет рассматривать нерегулярное расположение районов или улиц города, когда улично-дорожная сеть города не позволяет равномерно расположить кольцо в виде прямоугольной регулярной сети. Она позволяет рассматривать некоторые узлы и пересечения дорог в виде отдельных носителей меньшего размера с собственным потоком, например, участки с круговым движением, заменяющие перекрестки или регулируемые перекрестки со сложной системой регулирования.

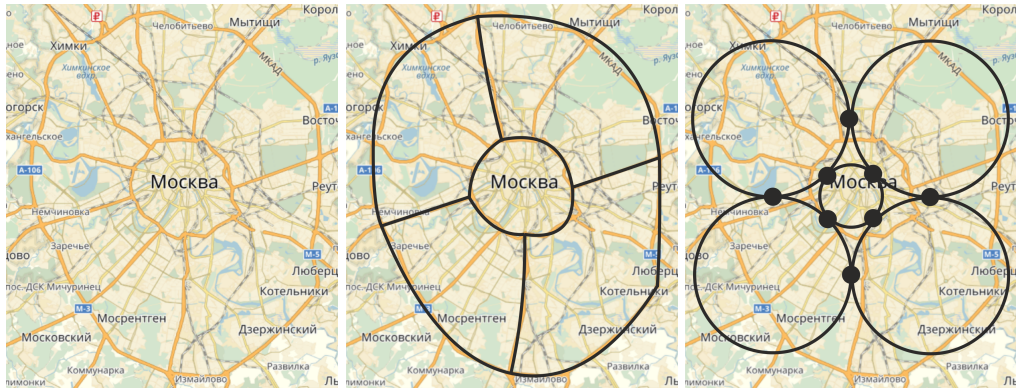


Рис. 119: УДС Москвы в виде квази-регулярной сети

## 5.2 Исследование взаимодействия транспортных потоков на примере городских УДС

### 5.2.1 Одномерная сеть

В параграфе рассматриваются примеры компьютерного исследования транспортных потоков на основе реальных данных. В примере исследованы две одномерных сети из 3-х и 4-х колец с одинаковой массой потока 14400 транспортных средств. Поток разбит на кластеры одинаковой плотности. Длина каждого кольца 900 метров.

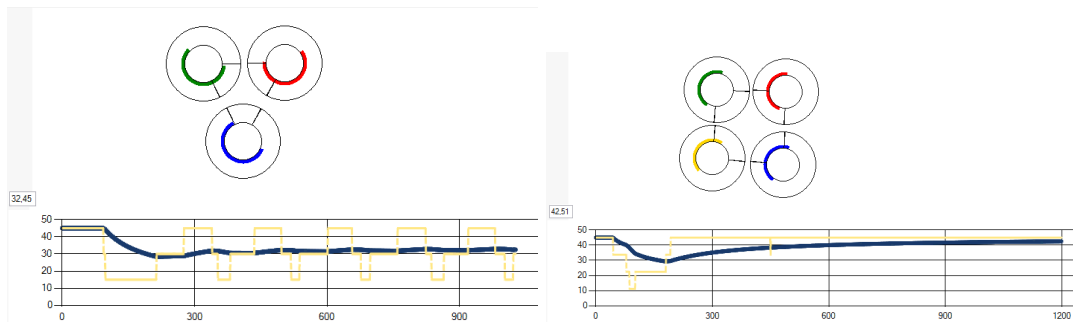


Рис. 120: Кластерная модель на одномерной замкнутой сети из 3-х и 4-х колец

Моделирование проведено с помощью модуля созданного программного обеспечения Non-linear Net. В результате моделирования получены численные данные о средней скорости потока на всей сети. В первом случае длина кластеров больше 450 метров, во втором меньше. В результате анализа выявлено увеличение скорости транспортного потока *на 30 %* при движении на 4-х кольцах (скорость максимальна), что является подтверждением качественных результатов, ранее полученных в диссертации в соответствующей главе.

### 5.2.2 Многополосная сеть

В примере исследуются два простых варианта многополосных сетей: двух-полосная и трех-полосная. На каждой сети равномерно распределен поток транспортных средств с одинаковой массой 68200 автомобилей. Поток разделен на два типа кластеров: местные и транзитные. Местные передвигаются только по своим кольцам преимущественно по внутренним

полосам. Транзитные перемещаются только по крайней внешней полосе и меняют кольцо при приближении к перекрестку.

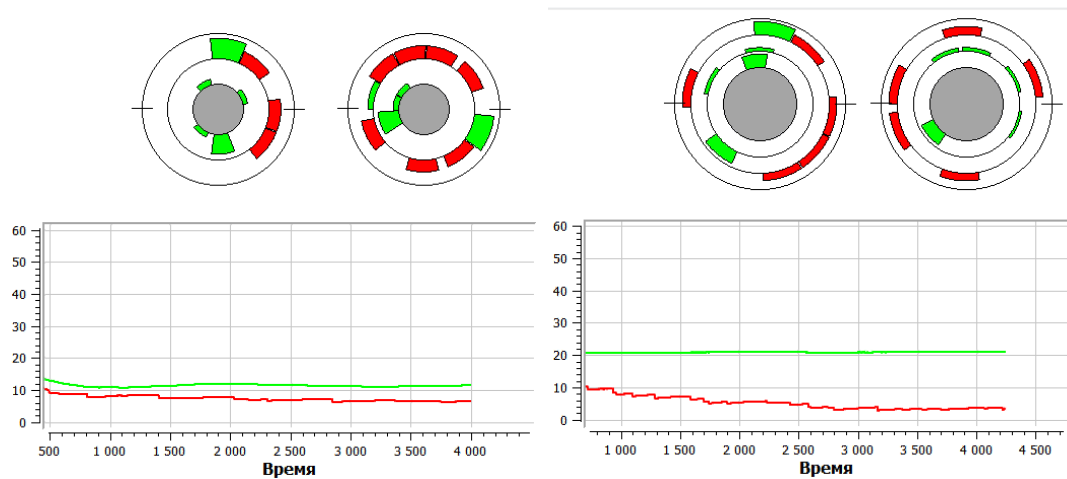


Рис. 121: Модель местного и сквозного потоков на многополосной сети из двух колец

В результате компьютерного моделирования получены средние скорости местного и транзитного потоков. Проведено сравнение полученных результатов: скорость местного потока во втором случае *возросла на 90 %*, транзитного *на 40 %*.

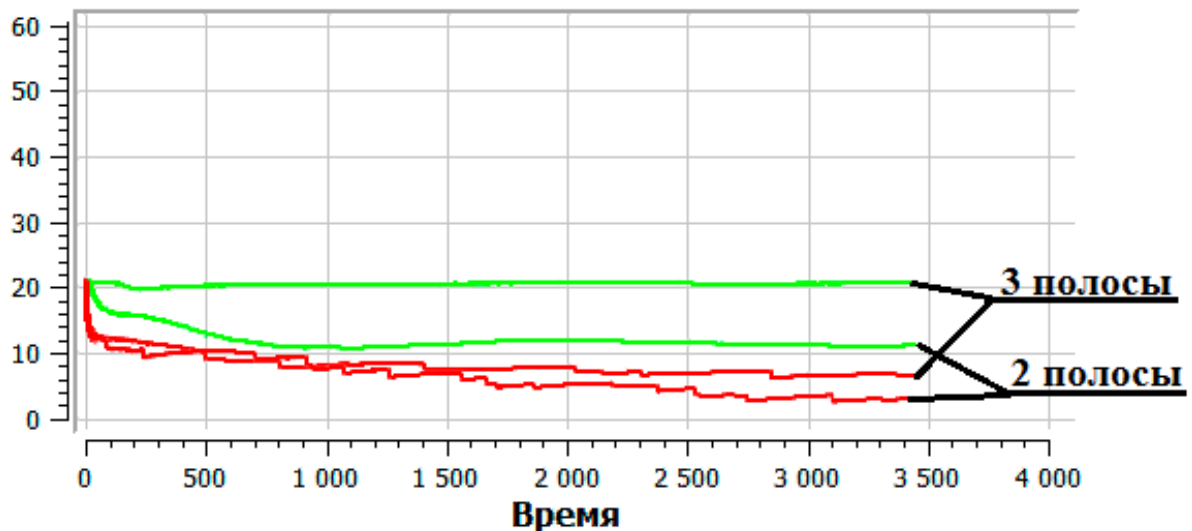


Рис. 122: Сравнение средней скорости двух типов потока на 2-х и 3-х полосах

### 5.2.3 Соответствие программных данных реальным

Для проверки адекватности работы модели получена таблица 8 сравнения изменения скорости транспортного потока в периоды с 11 до 12 и с 14 до 15 часов, в которой содержатся реальные данные, отобранные с помощью сервиса Яндекс-пробки, и данные, полученные с помощью разработанного программного пакета *NODEmodel*.

	Скорость каждые 15 минут, км/ч			
Реальные данные, 11:00 - 12:00	30	26	22	15
Программные данные, 11:00 - 12:00	34	27	22	15
Реальные данные, 14:00 - 15:00	45	27	23	18
Программные данные, 14:00 - 15:00	45	27	26	20

Таблица 8: Сравнение средней скорости потока, полученной в программе *NODE model* с реальными данными.

Погрешность в вычислении между наборами данных составляет *не более 6 %*, что позволяет судить об удовлетворительной точности, полученных с помощью программы, результатов.

### 5.3 Сравнительный анализ представленной работы с диссертацией А.М. Ярошенко

В таблице 9 проведен сравнительный анализ результатов и исследований данной работы и работы к.т.н. Ярошенко А.М., где используется иной подход к моделированию транспортных потоков на городских сетях.

	Диссертация Ярошенко А.М.	Диссертация Струсинского П.М.
<b>Подход к моделированию</b>	Вариант случайного блуждания	Синтез модели следования за лидером и волновой модели
<b>Истоки развития</b>	Модель клеточных автоматов Нагеля-Шрекенберга (Nagel K., Schreckenberg M. A cellular automation model for freeway traffic, Phys. I France, v.2, 1992.)	Предельное состояние модели следования за лидером (Bugaev A.S, Buslaev A.P., Kozlov V.V., Yashina M.V., Distributed problems of monitoring and modern approaches to traffic modeling, 14th International IEEE conference on intelligent transportation systems (ITSC-2011), Washington, USA, 2011, pp 477-481.)
<b>Время</b>	Дискретное	Непрерывное
<b>Скорость</b>	Скорость потока стохастическая, зависит от вероятности перемещения частицы	Скорость потока зависит от его <i>плотности, физическая величина</i>
<b>Проведено исследование на следующих носителях</b>	1) Замкнутый контур; 2) Правильные регулярные одномерные сети; 3) Правильные регулярные двумерные сети.	1) Замкнутое кольцо; 2) <i>Бесконечное кольцо</i> ; 3) Правильные регулярные одномерные сети; 4) <i>Неправильные одномерные сети</i> ; 5) Правильные регулярные двумерные сети; 6) <i>Правильные квази-регулярные двумерные сети</i> ; 7) <i>Многополосный носитель с двумя типами перестроения.</i>
<b>Локальное взаимодействие потоков с различными характеристиками</b>	Локальное взаимодействие отсутствует	<i>Присутствует исследование локального взаимодействия кластеров различной плотности и длины</i>
<b>Качественный анализ, аналитические результаты</b>	Отсутствует	Присутствует
<b>Программное обеспечение</b>	Присутствует	Присутствует

Таблица 9: Сравнительный анализ результатов и исследований данной работы и работы к.т.н. Ярошенко А.М.

# Заключение

В процессе исследования получены следующие результаты и выводы, свидетельствующие от о достижении установленной ранее цели и решении поставленных задач:

1. Разработана и исследована кластерная модель транспортных потоков, совмещающая свойства классических подходов к описанию трафика и современных агентных моделей.
2. Сформулированы условия возникновения стационарного состояния в потоке кластеров на замкнутом контуре и бесконечной прямой, получена оценка времени достижения стационарного процесса. Рассмотрены базовые задачи для потоков на многополосных периодических носителях. Получены точные утверждения о свойствах модели для линейных сетей.
3. Разработан компьютерный алгоритм кластерной модели, реализующий взаимодействие кластеров, описываемое системой кусочно-линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с *переменной архитектурой*. На основе разработанного алгоритма с помощью современных средств объектно-ориентированного программирования (многопоточная обработка данных, структурные динамические массивы и тд.) создано и протестировано программное обеспечение *NODE model* кластерной модели потоков для сетей различной архитектуры и тотально-связных потоков.
4. Проведено исследование свойств транспортных потоков на нерегулярной линейной сети, однородной правильной решетке, квази-регулярной сети – системах, которые не поддаются аналитическому решению. Исследовано поведение системы в зависимости от загрузки сети.

# Библиографический список

1. Buslaev A.P., Tatashev A.G., Yashina M.V., On properties of the NODE System Connected with Cluster Traffic Model, International Conference on Applied Mathematics and Approximation Theory, Turkey, 2012.
2. Gazis D.C., Traffic science. N.Y. Wiley, 1975, 293 p.
3. Бабков В.Ф., Дорожные условия и безопасность дорожного движения, М. Транспорт, 1993, 271 с.
4. Greenshields B.D., The photographic Method of Studying Traffic Behaviour. Proc. US Highway Res. Board, V. 13, 1933.
5. Greenshields B.D., A study of Traffic Capacity. Proc. US Highway Res. Board, V. 14, 1934, pp. 448-494.
6. Kozlov V.V., Buslaev A.P., Tatashev A.G., Monotonic random walks and clusters flows on networks. Models and traffic applications, Lambert Academic Publishing, 2013, 300 p.
7. Hugoniot P.-H., Sur la propagation du mouvement dans les corps et specialement dans les gaz parfaits, Journal: Ecole Polytechnique, V. 157, pp. 3-98.
8. Rankine W.,J.,M., A manual applied mechanics, 6<sup>th</sup> Ed., London:Charles Griffin and Company, 1872, 648p.
9. Buslaev A.P., Gasnikov A.V., Yashina M.V., Selected mathematical problems of traffic flow theory, International journal of computer mathematics, V. 89, N. 3, 2012, pp. 409-432.
10. Treiterer J., TR PB 246 094, Ohio state university, Columbus, 1975.
11. Lighthill M.J., Whitham G.B. On kinematic waves I: Flood movement in long rivers, Proc. R. Soc. London, Ser. A., 1955, p. 281.
12. Lighthill M.J., Whitham G.B. On kinematic waves II: Theory of traffic flow on long crowded roads, Proc. R. Soc. London, Ser. A., 1955, pp. 317-345.
13. Nagel K., Schreckenberg M. A cellular automation model for freeway traffic, Phys. I France,v.2, 1992.
14. Prigogine I., Herman R., Kinetic theory of vehicular traffic, N.Y.: Elsevier, 1971.

15. Ярошенко А.М., Исследование транспортных потоков на улично-дорожной сети мегаполиса с использованием современных моделей потоков на графах, диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук, Москва, 2015, 185 с.
16. Городничев М.Г., Информационные и математические аспекты модели следования за лидером, диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук, Москва, 2015, 125 с.
17. Buslaev A.P., Strusinskiy P.M., Computer simulation analysis of cluster model of totally-connected flows on the chain mail, *New results in dependability and computer systems*, Springer, 8<sup>th</sup> DepCoS-RELCOMEX 2013, 2013, pp 63-71.
18. Buslaev A.P., Strusinskiy P.M., On qualitative properties of incompressible cluster flow on the ring network, 2014 AASRI Conference on Sports Engineering and Computer Science (SECS 2014), AASRI Procedia, 2014, 8 p.
19. Strusinskiy P.M., On cluster flow models on multi-lane supporters, *Proceedings of the 14th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering*, CMMSE 14, 2014, pp. 1208-1218.
20. Струсинский П.М., Кластерная модель трафика на многополосных сетях, *Вестник МАДИ*, В. 3(38), 2014, стр. 98-106.
21. Buslaev A.P., Yashina M.V., Strusinskiy P.M., Sokolov P.A., On Qualitative Properties of Cluster Model for Flows on Regular Networks–Composites, *New Challenges for the Greening of Transport*, Springer-ECCOMAS, CM3 ECCOMAS Thematic Conference, 2015, pp. 24-27.
22. Strusinskiy P.M., Cluster flow modelling on multi-lane supporters, *Recent advances in mathematics*, *Proceedings of the 19<sup>th</sup> International Conference on Circuits, Systems, Communications and Computers*, CSCC 2015, 2015, pp. 37-41.
23. Струсинский П.М., О кластерной модели потоков в транспортных системах городов, *Международная научная конференция Искусственный интеллект. Интеллектуальные транспортные системы*, Ve-Safe 2016, 2016.
24. Буслаев А.П., Яшина М.В., Леоненко И.Ю., Струсинский П.М., Зернов А.В., Программный комплекс "Cluster Flow Model Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016617918, 2016.
25. Helbing D., *Traffic and related self-driven many-particle systems.*, *Reviews of modern physics.*, V. 73, 2001.
26. McLean J.R., *Transportation studies: Two-Lane highway traffic operations. Theory and practice*, Gordon and Bleach Science Publishers, Volume 11, 1989, p. 419.
27. Drew D.R., Meserolo T.C., Buhr J.H., *Digital simulation of freeway merging operation: Rep.*, 1967.



28. Иносэ Х., Хамада Т., Управление дорожным движением. М.: Транспорт, 1983. 248с.
29. Kozlov V.V., Buslaev A.P., Metropolis traffic modeling: from intelligent monitoring through physical representation to mathematical problems, International conference on computational and mathematical methods in science and engineering, Murcia, Spain, Vol. 1, 2012, pp 750-756.
30. Kerner B.S., The physics of traffic, Springer, 2004, 683 p.
31. Bugaev A.S, Buslaev A.P., Kozlov V.V., Yashina M.V., Distributed problems of monitoring and modern approaches to traffic modeling, 14th International IEEE conference on intelligent transportation systems (ITSC-2011), Washington, USA, 2011, pp 477-481.
32. Buslaev A.P., Cluster flow model with direct controll, International Conference on Applied Mathematics and Approximation Theory, Turkey, 2012.
33. Buslaev A.P., Tatashev A.G., Cluster flow models and properties of appropriate dynamic systems, Journal of Concrete and Applicable Mathematics (JCAM).
34. Буслаев А.П., Таташев А.Г., О модификации LW-модели потоков, 2011.
35. Луканин В.Н., Буслаев А.П., Трофименко Ю.В., Яшина М.В., Автотранспортные потоки и окружающая среда, Москва, 1998.
36. Carlos F. Daganzo, Problem Sets: Fundamentals of Transportation and Traffic Operations, Institute of Transportation Studies, University of California at Berkeley, 1998.
37. Бугаев А.С., Буслаев А.П., Козлов В.В., Яшина М.В. Некоторые математические и информационные системы моделирования трафика, Т-Comm. Телекоммуникации и транспорт, 2011, No. 4, 29-31.
38. Сильянов В.В., Теория транспортных потоков в проектировании дорог и организации движения, Транспорт, 1977, 303 с.
39. Поспелов П.И., Самодурова Т.В., Малофеев А.Г., Основы автоматизированного проектирования автомобильных дорог (на базе программного комплекса CREDO), МАДИ, 2007, 215 с.
40. Дубелир Г.Д., Планировка городов, Санкт-Петербург, 1910.
41. Бабков В.Ф., Андреев О.В., Проектирование автомобильных дорог, ч.1, Транспорт, 1987.
42. Kozlov V.V., Buslaev A.P., On a system of nonlinear differential equations for the model of totally-connected traffic, Journal of Concrete and Applicable Mathematics, Eudoxus Press, LLC, Vol. 12, Num's 1-2, 2014, pp. 86-93.
43. Kolmogorov A.N., Selected works. In 6 volumes. Volume 1: Mathematics and mechanics. Nauka, Moscow, 1985, pp 14-69 (In Russia) (Tikhomirov V.M. and Magaril-Пыаев G.G., Inequalities for derevatives, pp. 387-389).

44. Буслаев А.П., Яшина М.В., Лебедев. А.А., Моделирование потоков на графах. Теоретические и вычислительные аспекты. Часть 1. NODE-модель трафика, МАДИ, 2011, 105 с.
45. Буслаев А.П., Яшина М.В., Кузьмин Д.М., Компьютерные методы обработки информации и распознавание образов в задачах транспорта и связи. Часть 2. Алгоритмы обработки цифровых изображений в применении к задачам распознавания образов, МТУСИ, 2008, 57 с.
46. Буслаев А.П., Яшина М.В., Кузьмин Д.М., Компьютерные методы обработки информации и распознавание образов в задачах транспорта и связи. Часть 4. Учебные и научно-практические задачи, М.:Техполиграфцентр, 2008, 61 с.
47. Буслаев А.П., Кузьмин Д.М., Нгуен С.К., Яшина М.В., Мобильный Улично-Дорожный РЕЦептор МУДРец, М:МАДИ, 2008, 51 с.
48. Тихонов А.В., Нигматулин А.Н., Технология автоматического захвата информации о параметрах распределенных динамических систем. Мобильная лаборатория интеллектуального мониторинга ОТРОК, М.:Техполиграфцентр, 2012, 73 с.
49. Долматовский Ю.А., Автомобиль за 100 лет, М.: Знание, 1986, 240 с.
50. Автостат[Электронный ресурс]: [веб-сайт] – Общее количество машин в России. Режим доступа: <http://www.autostat.ru/> (Дата обращения: 19.05.15).
51. European Automobile Manufacturers Association[Электронный ресурс]: [веб-сайт] – Статистика продаж автомобилей в Мире в 2013 году. Режим доступа: <http://www.acea.be/> (Дата обращения: 19.05.15).
52. Министерство транспорта Российской Федерации[Электронный ресурс]: [веб-сайт] – Стоимость одного километра дорог в России и зарубежом. Режим доступа: <http://www.mintrans.ru> (Дата обращения: 12.10.15).
53. Statinfo[Электронный ресурс]: [веб-сайт] – Плотность автомобильных дорог. Режим доступа: <http://www.statinfo.biz/Geomap.aspx> (Дата обращения: 12.10.15).
54. Правительство Российской Федерации[Электронный ресурс]: [веб-сайт] – Постановление Правительства РФ "О нормативах денежных затрат на содержание и ремонт автомобильных дорог федерального значения и правилах их расчета. Режим доступа: <http://government.ru/> (Дата обращения: 12.10.15).
55. Росстат[Электронный ресурс]: [веб-сайт] – Численность населения России. Режим доступа: <http://www.gks.ru> (Дата обращения: 12.10.15).
56. Системы имитационного моделирования PTV VISSUM и PTV VISSIM[Электронный ресурс]. Разработчик: PTV VISION, дистрибьютор в РФ: А+С Консалт, описание: <http://www.ptv-vision.ru>.

57. Система имитационного моделирования TSS AIMSUN[Электронный ресурс]. Разработчик: TSS(Transport Simulation Systems), описание: [https://www.aimsun.com/wp/?page\\_id=21](https://www.aimsun.com/wp/?page_id=21).