

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-
ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»**

На правах рукописи

Свительман Валентина Семеновна

**РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И
МЕТОДОВ ОПИСАНИЯ МИКРОСТРУКТУРЫ ГОРНЫХ
ПОРОД СРЕДСТВАМИ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ**

**Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ**

**Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

**Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
Савельева Е.А.**

Москва 2014

Оглавление

Введение	5
Научная новизна и актуальность исследования	5
Научная и практическая значимость.....	6
Цели и задачи исследования.....	6
Основные положения, выносимые на защиту	7
Апробация диссертации.....	7
Публикации	8
Структура и объем диссертации.....	8
1 Обзор литературы.....	9
1.1 Исходные данные: Обзор литературы по микротомографии и ее применениям	9
1.1.1 <i>Различные методы получения трехмерных изображений внутреннего строения материалов.....</i>	9
1.1.2 <i>История и приложения рентгеновской микротомографии</i>	11
1.1.3 <i>Принципы рентгеновской микротомографии.....</i>	13
1.2 Предмет исследования: Обзор современных подходов к анализу и моделированию микроструктуры.....	16
1.2.1 <i>Анализ микроструктуры с использованием упрощенных моделей</i>	16
1.2.2 <i>Подходы к анализу микроструктуры с точки зрения теории статистических выводов.....</i>	16
1.2.3 <i>Геостатистика и стохастическое моделирование</i>	17
1.3 Инструменты: Обзор математических методов, применяемых в работе.....	21
1.3.1 <i>Теория случайных полей.....</i>	21
1.3.2 <i>Разложение по сферическим гармоникам для анализа сложных полей..</i>	22

1.3.3	<i>Представление анизотропии эллипсоидом анизотропии и индексами анизотропии</i>	23
1.3.4	<i>Спектральный анализ сигналов</i>	23
2	Корреляционные функции для микротомографической модели	25
2.1	Микротомографическая модель как случайное поле.....	25
2.2	Поле вариограммы	27
2.3	Поле ковариации.....	30
3	Анализ анизотропии методом разложения поля вариограммы.....	33
3.1	Разложение по сферическим гармоникам	33
3.2	Эллипсоид анизотропии и индексы анизотропии	35
4	Метод спектральной плотности.....	39
4.1	Спектральное представление ковариации	39
4.2	Разложение спектральной плотности по экспонентам	43
4.3	Разложение спектральной плотности по функциям Гаусса	44
4.4	Разложение спектральной плотности по экспонентам для случайно-периодической структуры.....	45
4.5	Оценка эффективной корреляционной длины для произвольного спектра ..	46
5	Результаты применения методики	47
5.1	Описание образцов и последовательности вычислений.....	47
5.2	Вариограмма и ковариация для исследуемых образцов.....	55
5.3	Индексы анизотропии для исследуемых образцов	58
5.4	Спектральный анализ исследуемых образцов.....	63
	Заключение.....	68

Список цитируемой литературы	70
Список публикаций.....	78
Статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК.....	78
Другие статьи	78
Тезисы докладов на конференциях	78

Введение

Научная новизна и актуальность исследования

В последнее время происходит активное развитие исследований микроструктуры естественных и искусственных материалов на основе рентгеновской микротомографии. В частности, современные микротомографы позволяют создавать трехмерные микромоделли горных пород с высоким разрешением, которые активно используются в петрофизических исследованиях.

При этом из-за сравнительной новизны метода трехмерные микромоделли горных пород представляют собой большой объем новой информации, для которой требуются новые научно обоснованные методы обработки. В первую очередь, остро стоит задача систематизации и анализа микротомографической информации о морфологии и минеральном составе пород на микроуровне. В настоящее время методы для такой систематизации и анализа находятся в начальной стадии развития.

Так как микротомограммы горных пород могут быть интерпретированы как трехмерные стохастические объекты (то есть случайные поля), полагается, что применимы геостатистические методы, в частности, моделирование структуры полей корреляционных функций. Использование такого подхода позволяет выявить важные для систематизации образцов пород характеристики (наличие или отсутствие анизотропии на различных масштабах, характерный размер неоднородностей), и может рассматриваться как существенный шаг в направлении практического использования микротомографической информации, в частности для геологического моделирования.

В данной работе методика анализа полей корреляционных функций впервые адаптируется и реализуется для получения информации о микроструктуре горных пород на основании их микротомограмм.

Научная и практическая значимость

Информация о микроструктуре среды используется в качестве исходных данных для многих исследований. Например, гидродинамическому моделированию в различных отраслях (моделирование нефтяных и газовых месторождений, процессов геофильтрации и геомиграции подземных вод) предшествует построение геологической модели. Также широко применяются методы прогноза различных макроскопических физико-механических параметров горных пород посредством моделирования соответствующих физических процессов на микроуровне.

Представительность такого рода расчетов ключевым образом зависит от того, насколько типичны используемые микромоделю образцов среды по отношению к литотипам рассматриваемого геологического объекта. В настоящей работе разрабатываются математические методы для требуемой типизации и систематизации реальной структуры горных пород на микроуровне.

Цели и задачи исследования

Цель настоящей работы – на основе данных рентгеновской микротомографии и методов теории случайных полей смоделировать структурные свойства микромоделей пород, необходимые для типизации и систематизации реальной микроструктуры горных пород и генерации искусственных микромоделей, статистически идентичных реальным.

Основная задача работы состоит в адаптации геостатистических методов к анализу рентгеновских микромоделей горных пород для моделирования свойств модели микроструктуры, таких как анизотропия и характерные масштабы неоднородностей.

Решение задачи проводится на основе моделирования и анализа полей функций пространственной корреляции (вариограммы и ковариации), построенных для трехмерного объекта. Для этого используются два метода, модифицированных и адаптированных под задачу. Первый состоит в разложении

поля вариограммы по сферическим гармоникам, что позволяет выявить наличие и тип анизотропии пространственной корреляции свойств микромоделей. Сферические гармоники играют большую роль в исследованиях сложных полей различной природы, но в данной работе их использование получило абсолютно новое направление – исследование свойств полей корреляционных функций. Второй метод состоит в использовании спектрального представления ковариации, что позволяет оценить спектр корреляционных длин, которые, в свою очередь, определяют масштабы неоднородностей модели микроструктуры.

Основные положения, выносимые на защиту

- Методология применения теории случайных полей и геостатистического анализа к 3D-моделям микроструктуры горных пород, полученных посредством рентгеновской микротомографии;
- Метод выявления анизотропии объекта и определения типа анизотропии на основе разложения поля пространственной корреляции по сферическим гармоникам;
- Метод определения масштабов микронеоднородностей с помощью моделирования спектра корреляционных длин для поля пространственной корреляции;
- Программная реализация методики в виде пакета программ на языке С (в том числе с использованием параллельных вычислений на кластере из видеопроцессоров) и в вычислительной среде MATLAB.

Апробация диссертации

Материалы работы были представлены на следующих конференциях:

- 53-я конференция МФТИ (Долгопрудный, 24-29 ноября 2010 года);
- XII Школа молодых ученых ИБРАЭ РАН (Москва, 28-29 апреля 2011);

- 54-я конференция МФТИ (Долгопрудный, 25-26 ноября 2011 года);
- «IAMG-2011» conference (Salzburg, September, 5-9, 2011);
- XIII Школа молодых ученых ИБРАЭ РАН (Москва, 26-27 апреля 2012);
- 2-я Международная научно-практическая конференция ЕАГО «Сочи - 2012» (Сочи, 2-6 мая 2012).

Публикации

По материалам диссертации опубликовано 4 статьи, из них 3 статьи в журналах, рекомендованных ВАК, а также 6 тезисов докладов на научных конференциях.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка цитируемой литературы. Работа изложена на 79 листах, содержит 19 рисунков и 5 таблиц. Список литературы включает 77 источников.

1 Обзор литературы

1.1 Исходные данные: Обзор литературы по микротомографии и ее применениям

1.1.1 Различные методы получения трехмерных изображений внутреннего строения материалов

В силу того, что науки о Земле основываются на непосредственном наблюдении и измерении природных систем, прорывы в понимании часто происходят после того, как очередной виток технологического прогресса открывает новые возможности для исследования, характеристики и анализа природных материалов. Технологии получения трехмерных изображений геоматериалов, в частности, рентгеновская компьютерная томография (X-ray computed tomography, ХСТ), нейтронная компьютерная томография (neutron computed tomography, NCT) и магнитно-резонансная томография (magnetic resonance imaging, MRI), в настоящее время стимулируют новые исследования и отвечают на старые вопросы. Это обусловлено тем, что они позволяют быстро и не деструктивно визуализировать и измерять характеристики внутреннего строения оптически непрозрачных объектов. Обзор перечисленных методов приводится по статье [1].

Рентгеновская компьютерная томография (ХСТ), нейтронная компьютерная томография (NCT) и магнитно-резонансная томография (MRI) – взаимодополняющие методы. В каждом из них используется качественно различное воздействие на образец и поэтому они чувствительны к разным аспектам физического или химического строения образца. В рентгеновской и нейтронной томографии измеряется ослабление входящего пучка при прохождении через образец множеством различных путей. В рентгеновской микротомографии образец облучается рентгеновскими фотонами, которые взаимодействуют с электронами вещества образца. Таким образом, контраст рентгеновских томограмм достигается за счет локальных различий плотности и

атомных чисел веществ, составляющих образец. В нейтронной томографии образец облучается пучком нейтронов, которые взаимодействуют с атомными ядрами вещества, и контраст нейтронных томограмм обусловлен локальными различиями нейтронного поглощения и рассеяния, что отражает элементный и изотопный состав. Магнитно-резонансная томография – это спектрометрическая техника, которая существенно отличается от рентгеновской и нейтронной томографии: исследуемый образец помещается в импульсный градиент магнитного поля, который дает информацию о локальных различиях в концентрации ядер с определенным ненулевым значением спина.

Область применения каждого из методов определяется характеристиками образцов, к которым они более чувствительны. Разнообразие приложений рентгеновской томографии в науках о Земле обусловлено ее чувствительностью к свойствам образцов (плотность, состав), которые обычно отличаются в разных видах геологических образцов. Для сравнения, нейтронная томография чувствительна к наличию элементов, поглощение которыми рентгеновского излучения незначительно. Там, где рентгеновское поглощение увеличивается гладко и монотонно с увеличением атомного числа, нейтронное поглощение меняется менее систематично. Например, из элементов, встречающихся в породообразующих минералах, повышенное сечение рассеяния нейтронов наблюдается для протонов (ядер водорода), благодаря чему нейтронная томография хорошо подходит для исследования водосодержащих минералов и водородосодержащих жидкостей. ЯМР-отклик в большинстве геологических изображений максимален у атомов водорода в жидкой и подвижной фазах, что делает магнитно-резонансную томографию идеальным инструментом для исследования водородосодержащих жидкостей и газов.

Все три методики позволяют получать трехмерные наборы данных, в которых образец представлен в виде массива элементов объема (вокселей), каждому из которых соответствует значение измеряемой характеристики в этой точке. И в рентгеновской, и в нейтронной томографии измерения коэффициента пропускания вдоль различных прямолинейных траекторий внутри образца

реконструируются методом обратного проецирования в значения линейного поглощения в каждой точке образца. Яркость каждого вокселя на трехмерном изображении меняется в зависимости от линейного коэффициента поглощения в этой области. Магнитно-резонансная томография, напротив, дает информацию о пространственном избирательном возбуждении спинов в градиенте магнитного поля, и реконструкция обычно заключается в Фурье-преобразовании, извлекающем интенсивность ЯМР-сигнала, который зависит преимущественно от спиновой плотности в данном вокселе. Яркость каждого вокселя пропорциональна интенсивности ЯМР-сигнала.

Интерпретация трехмерных массивов данных, получаемых любым из перечисленных методов, включает в себя коррекцию и увеличение четкости изображения, визуализацию и извлечение количественных значений интересующих характеристик исследуемого объекта.

В данной работе в качестве образцов будут использоваться данные, полученные методом рентгеновской микротомографии, однако математический аппарат при необходимости может быть адаптирован для трехмерных изображений, полученных другими методами.

1.1.2 История и приложения рентгеновской микротомографии

Рентгеновские микротомографические системы (μ СТ) – высокоразрешающий аналог медицинских рентгеновских томографов, появившиеся на чуть более чем на десять лет позже. Рентгеновская микротомография развивалась медленнее медицинской томографии в силу очевидных экономических причин: дорогие системы более рентабельны в больницах, чем в науке. Количество микротомографических систем возрастает в середине-конце 1990-х, примерно в тот период, когда начинают развиваться молекулярно-генетические методы исследования мелких животных для изучения человеческих заболеваний, а стоимость коммерческих микротомографов стала ниже, чем стоимость многих электронных микроскопов.

Теоретические основы компьютерной томографии были разработаны еще И. Радоном в 1917 [2], который доказал, что n -мерный объект может быть реконструирован из его $(n-1)$ -мерных проекций. Но реальное развитие начинается с изобретения Г. Хаунсфилдом первого рентгеновского томографа [3], которое, в свою очередь основывалось на математических и экспериментальных методах А. Кормака – в его работах [4], [5] была продемонстрирована возможность использования рентгеновского излучения и конечного числа направлений наблюдения для восстановления распределения абсорбционной способности внутри объекта. В 1979 году Кормака и Хаунсфилда были удостоены Нобелевской премии по физиологии и медицине «за разработку компьютерной томографии».

Промышленная рентгеновская томография также заработала признание, однако вытеснять рентгеновскую радиографию она стала только в тех областях, в которых это давало экономическое преимущество (разработка новых материалов, управление технологическим процессом, бесконтактная метрология, предварительная оценка характеристик и анализ дефектов материалов) [6].

Как и с любым другим методом визуализации, новые применения требовали более высокой разрешающей способности. Первая реализация рентгеновской микротомографии появилась в 1982 [7], вскоре после этого была предложена и реализована модификация метода с использованием синхротронного источника рентгеновского излучения [8] – [10]. В течение следующих нескольких лет сразу несколько групп ученых продемонстрировало результаты применения микротомографии как с использованием в качестве источника рентгеновской трубки [11] – [14], так и синхротронного излучения [15] – [21].

Очень быстро стало понятно, что в силу простоты процедуры анализа, оперативности исследований и отсутствия необходимости подготовки образцов микротомография является интересным и востребованным методом в науках о земле. Ранние приложения включают в себя исследования в таких областях, как почвоведение [23], [24], метеоритика [25], нефтегазовая геология [1], [26], [27], палеонтология [28], геотектоника [29] и седиментология [30]. Подробно эти и другие приложения рассматриваются в обзорных статьях [31] – [33].

Изначально микротомографические исследования горных пород были направлены на визуализацию структуры пор и трещин [34], [35]. Микротомографические данные о форме, размерах и пространственном распределении минеральных фаз или пор позволило существенно дополнить информацию, получаемую при помощи двумерной петрографии [32], [36] – [38].

С ростом разрешения получаемых изображений стало возможно использование методики не только для качественной визуализации, но и для количественных исследований, таких как оценка плотности и пористости породы, определение процентного соотношения минеральных фаз [37], [39].

Другое важное применение рентгеновской микротомографии в геологических и петрофизических исследованиях – при расчете макроскопических петрофизических свойств для различных типов однофазного и многофазного насыщения: абсолютной и фазовых проницаемостей, капиллярного давления, электрического сопротивления, теплопроводности, ЯМР-отклика, упругих и прочностных свойств и т. д. [40], [41].

1.1.3 Принципы рентгеновской микротомографии

Метод получения изображений в рентгеновской микротомографии основан на том, что интенсивность рентгеновского излучения ослабляется при прохождении через объект. Если I_0 – интенсивность входящего рентгеновского пучка, то интенсивность ослабленного пучка (для однородного объекта и определенной длины волны) определяется законом Бера (в русскоязычной литературе он известен, как закон Бугера-Ламберта-Бера) [42].

$$I = I_0 e^{-\mu s}, \quad (1.1)$$

где μ – линейный показатель поглощения, s – толщина объекта. Интенсивность ослабленного пучка I регистрируется плоским детектором. Путем вращения объекта вокруг своей оси на прецизионном поворотном предметном столике накапливаются серии проекций для углов от 0 до 360°. Эти проекции

отражают информацию о распределении показателя поглощения внутри объекта. Схема работы микротомографа условно изображена на Рис. 1.

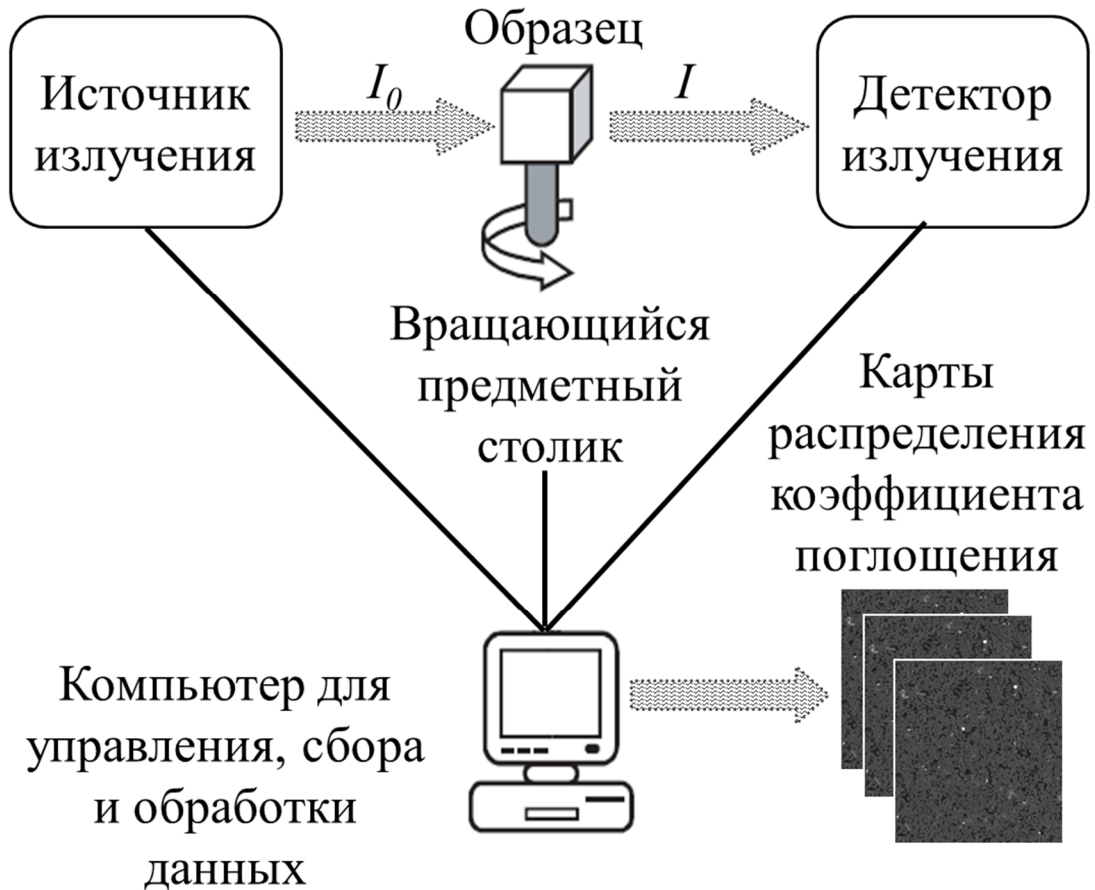


Рис. 1. Схема работы рентгеновского микротомографа

Из набора проекций при помощи алгоритма обратного проецирования с фильтрацией [43] реконструируются двумерные виртуальные срезы объекта, из которых в свою очередь «склеивается» трехмерная модель объекта (Рис. 2).

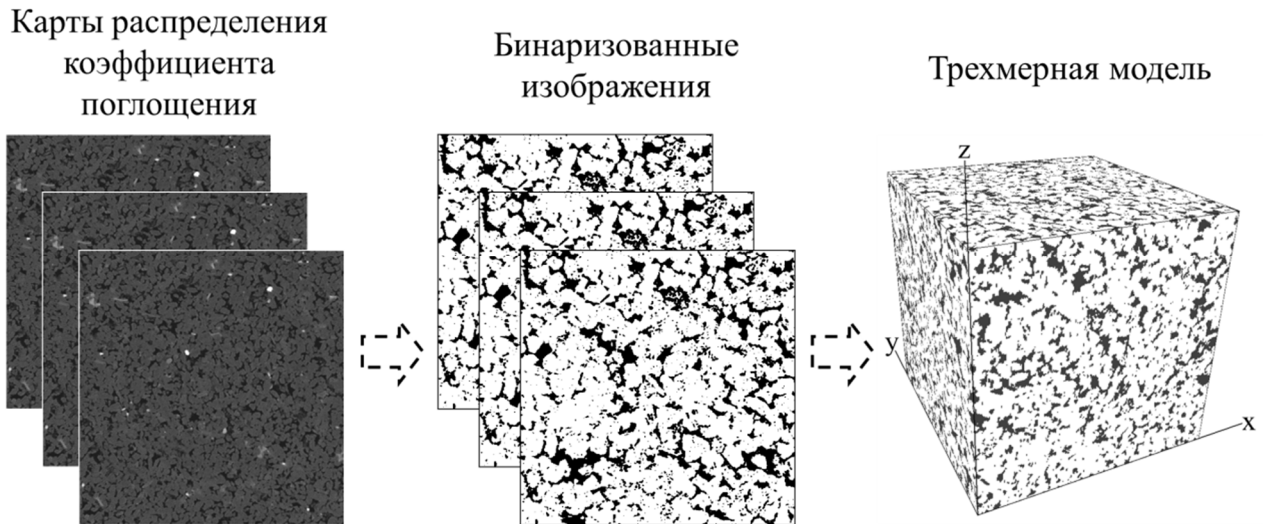


Рис. 2. Получение трехмерной модели из набора карт распределения коэффициента поглощения

Современные рентгеновские микротомографы позволяют создавать трехмерные модели объектов с характерным разрешением 500 нм – 10 мк и количеством вокселей $512^3 - 4096^3$. Геометрические размеры объектов исследования лежат в пределах от нескольких миллиметров до нескольких дециметров [1], [43], а цели исследования определяются природой объектов и интересами соответствующей отрасли: медицины, материаловедения, нефтяной и газовой промышленности, микроэлектроники и других.

1.2 Предмет исследования: Обзор современных подходов к анализу и моделированию микроструктуры

Задача классификации и типизации микроструктуры состоит в описании вероятностной меры объекта на основе возможно большого, но конечного числа томографических исследований в заданном классе объектов (в случае исследования микроструктуры горных пород – петрофизическом классе). Если задача классификации и типизации микроструктуры будет решена, то возможна численная генерация реализаций микроструктуры методами стохастического моделирования, каждая из которых будет статистически идентична реальной микроструктуре. В свою очередь это позволит при расчете макроскопических свойств получать доверительные интервалы и вероятные значения.

1.2.1 Анализ микроструктуры с использованием упрощенных моделей

В ряде работ задача классификации и типизации микроструктуры рассматривалась для различных упрощенных моделей: например, случайных структур, составленных из геометрически регулярных элементов (шаров, эллипсоидов, кубов и т.д.) [45], [46], или моделей сети каналов и пор [47]. Но в силу того, что современные технологии дают возможность для анализа непосредственно трехмерных микротомографических изображений, больший интерес представляет общая математическая формулировка этой задачи, не связанная с какими-либо упрощающими предположениями.

1.2.2 Подходы к анализу микроструктуры с точки зрения теории статистических выводов

Так как в силу своего происхождения горные породы являются стохастическими объектами, для анализа их микроструктуры логично использовать методы теории статистических выводов. Одним из возможных подходов является метод минимальных достаточных статистик, позволяющий характеризовать меру изучаемого объекта (в нашем случае – микроструктуры)

минимальным набором измерительных процедур [48]. Однако сложность применения этого подхода к задаче типизации микроструктуры состоит в том, что минимальные достаточные статистики могут быть найдены для параметрических классов вероятностных мер, в то время как для микроструктуры горных пород параметрические классы надежно не установлены.

Альтернативным методом теории статистических выводов является непараметрическое оценивание, не требующее априорной параметрической зависимости для вероятностной меры [49]. Неадекватность этого подхода состоит в огромном количестве элементарных событий, подлежащих статистическому анализу. Так, для бинарной дискретной задачи число возможных конфигураций в кубе со стороной 100 ячеек составляет величину $2^{10^6} \sim 10^{3 \cdot 10^5}$, которая слишком велика для современных компьютеров.

1.2.3 Геостатистика и стохастическое моделирование

Другой класс методов, широко применяемых для работы с пространственно распределенными данными, которые могут быть интерпретированы как случайные поля, это геостатистическое (стохастическое) моделирование.

Центральная идея геостатистики состоит в использовании знаний о пространственной корреляции экспериментальных данных для построения пространственных оценок и интерполяций. Классическим подходом является описание корреляционной структуры при помощи двухточечных распределений с произвольным расположением точек. Принимается, что, начиная с определенного количества точек, высшие функции распределения могут быть вычислены из низших.

Но если корреляция определяется более чем парами точек, то двухточечная корреляционная функция не может полностью охарактеризовать такую структуру. В связи с этим могут вводиться трехточечные и более функции, но, в любом случае, в силу технических ограничений на объем информации количество рассматриваемых точек невелико. И, хотя в теории достоверно нельзя сказать,

какое минимальное количество точек достаточно для полной характеристики статистических свойств случайного поля, на практике часто ограничиваются двухточечными функциями без специального обоснования.

Более современным методом геостатистического моделирования является многоточечная геостатистика, основанная на следующих предположениях [50]:

1. Совместное вероятностное распределение случайных величин, зависящее от пространственного вектора, который пробегает фиксированное конечное множество точек T (тренировочный образ), инвариантно относительно пространственных сдвигов (статистическая однородность случайного поля). Также часто предполагается инвариантность относительно поворотов (статистическая изотропность случайного поля), но последнее не принципиально для данного метода.
2. Совместное вероятностное распределение случайных величин для произвольных наборов пространственных точек B могут быть получены из распределения для T :
 - а) посредством редукции последнего, когда B конгруэнтно некоторому подмножеству T (так называемому шаблону);
 - б) посредством алгебраических операций с исходным и редуцированными распределениями, когда возможна декомпозиция B в объединение подмножеств, конгруэнтных шаблонам из T .

Найденное распределение может быть использовано для численной генерации статистически эквивалентных реализаций случайного поля [50].

Однако проблемный элемент многоточечной геостатистики, как и классических методов, состоит в предположении 2, т.е. в достаточной представительности шаблона для характеристики пространственных корреляций поля. Выбор определенного шаблона предполагает:

- а) пренебрежение нетривиальными многоточечными корреляциями, когда число точек превышает число точек в шаблоне;
- б) пренебрежение нетривиальными корреляциями, когда расстояние между точками больше геометрических размеров шаблона.

Допустимость этих предположений требует отдельного обоснования, однако при практическом применении многоточечной геостатистики подобное обоснование обычно опускается.

Задачи, для которых изначально разрабатывались геостатистические методы (например, оценить значение в точке, где измерение не проводилось, оценить значение переменной, по которой мало измерений, используя значения коррелированной с ней переменной, по которой измерений много) [51], несколько отличаются от типичных задач, возникающих при анализе микроструктуры. Однако многие геостатистические методы могут быть адаптированы и для задач классификации и типизации микроструктур.

Например, в работе [52] представлены алгоритмы восстановления и генерации изотропной микроструктуры с помощью двухточечных корреляционных функций.

В работе [53] применяются методы многоточечной геостатистики для генерации трехмерных реализаций микроструктуры горной породы с использованием поперечных срезов, предполагаемых изотропными, в качестве тренировочного образа.

Также геостатистические методы могут быть направлены на не моделирование микроструктур, статистически идентичных реальным, а на характеризацию микроструктуры.

Так, в работе [54] предпринималась попытка получать двухточечную корреляционную функцию микроструктуры на основании двумерных тонких шлифов и затем использовать ее в качестве универсального дескриптора строения. Однако на тот момент был сделан вывод, что для такой цели двухточечные функции недостаточно точны – как уже было сказано, двухточечная корреляционная функция не всегда может полностью охарактеризовать микроструктуру.

Здесь следует отметить, что для практических приложений может требоваться лишь адекватность характеристики микроструктуры в узком диапазоне литологии и минерального состава, представительного для данного

типа продуктивных отложений месторождения жидких углеводородов. В такой постановке двухточечная корреляционная функция может оказаться достаточно эффективным дескриптором.

Другое ограничение, возникшее в геостатистических исследованиях двумерных тонких шлифов – это то, что изучение двумерной части трехмерного объекта не могло предоставить достоверную оценку, например, трехмерной анизотропии. Чтобы обойти это ограничение для извлечения структурных свойств анизотропных пород применялись трехмерные реконструкции из серий различно ориентированных двумерных срезов [55]. Такой подход не получил развития в силу очевидных ограничений: статистические флуктуации могут скрывать свойства микроструктур, в которых есть минеральные зерна сложной трехмерной формы, а также может иметь место дисторсия при восстановлении трехмерных геометрических свойств из двумерных данных [56].

Поэтому развитие микротомографии открыло возможность геостатистического анализа трехмерных структурных свойств пород на основании более надежных данных. Например, в работе [57] параметры корреляционных функций, построенных для отдельных направлений и на разных масштабах, используются для получения информации о пространственном строении и наличии анизотропии.

В данной работе не будут использоваться предположения о достаточности какой-либо функции или шаблона для характеристики всех свойств случайного поля, а также о изотропности исследуемого объекта. Поля двухточечных корреляционных функций (вариограммы и ковариации) будут использованы для моделирования и анализа таких свойств, как анизотропия и характерный масштаб неоднородностей микромоделей. Для того чтобы не ограничивать анализ только определенными направлениями или только определенными масштабами, будет использоваться математический аппарат, описываемый в следующем подразделе.

1.3 Инструменты: Обзор математических методов, применяемых в работе

1.3.1 Теория случайных полей

Математический аппарат современной геостатистики включает множество теорий и техник. Среди них обширный комплекс методов представлен обобщенной теорией пространственно-временных случайных полей.

Теория случайных полей [58],[59] появилась как естественное развитие теории случайных процессов и анализа временных рядов. Историческая перспектива этого развития подробно изложена, например, в [60]. Обсуждение существенных различий между анализом временных рядов и теорией случайных полей приводится в [61].

Основные классы моделей случайных полей, используемых в современной пространственно-временной геостатистике [62] показаны в виде диаграммы на Рис. 3. Такая классификация делает различия между обыкновенными случайными полями и обобщенными. Модели обыкновенных случайных полей включают в себя однородные стационарные поля и неоднородные нестационарные. Обобщенные модели включают в себя пространственно-временные, вейвлетные и фрактальные поля.

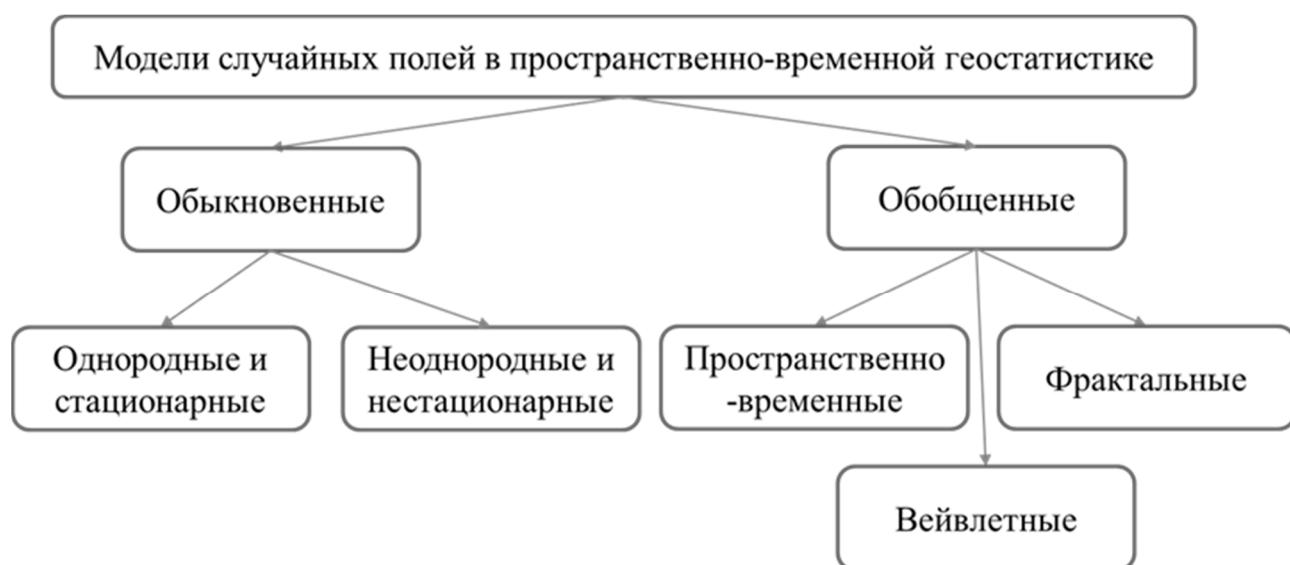


Рис. 3. Классификация моделей случайных полей

Спектр приложений теории случайных полей включает в себя явления, для которых прямое (детерминистическое) изучение невозможно или неэффективно [60], [63]: процессы переноса в пористой среде, пространственно-временные концентрации атмосферных загрязнений, пространственное распределение гидрологических данных, обработка изображений и дистанционное зондирование, оценка запасов руды и характеристика нефтяных месторождений и многие другие.

1.3.2 Разложение по сферическим гармоникам для анализа сложных полей

Сферические гармоники – это аналоги тригонометрических функций для разложения Фурье на сфере, широко используемые в различных областях для анализа свойств, зависящих от направления. Обзор приводится по книге Фридена и Шрайнера [64].

Сферические гармоники (или мультиполи в их оригинальном физическом смысле) были введены в 1780-х для изучения гравитационной теории в работах П. С. Лапласа и А. М. Лежандра, а в последующие годы получили развитие в работах Р. Клебша, Дж. Дж. Сильвестра, Э. Гейне, Ф. Неймана, Дж. К. Максвелла.

В настоящее время разложение по мультиполям (по сферическим гармоникам) – широко используемая в различных задачах наук о Земле методика, в частности, для представления электрических и магнитных полей, полей механических напряжений, космического излучения, рельефа, других полей, заданных в виде карты на сферической поверхности. Для описания поля в трехмерном пространстве коэффициенты мультипольного разложения могут быть записаны как функции от расстояния [65].

Особенность такого подхода состоит в том, что каждая сферическая функция в силу полиномиальной природы характеризуется своим порядком, или, на языке обработки сигналов, определенной частотой. Таким образом, мультипольное разложение выражается как суперпозиция термов (гармоник) с последовательно усиливающейся зависимостью от угла: нулевая гармоника

(монополюный момент) не зависит от угла, меняется в зависимости от углов, высшие гармоники (квадрупольный, октупольный моменты) меняются в зависимости от угла быстрее, чем первая гармоника (дипольный момент). Более старшие гармоники в разложении содержат больше осцилляций с тенденцией к уменьшению амплитуды.

1.3.3 Представление анизотропии эллипсоидом анизотропии и индексами анизотропии

Визуализации информации о локальной анизотропии какого-либо поля с помощью эллипсоида анизотропии основывается на том факте, что любая симметричная и положительно определенная квадратичная форма может быть представлена в виде эллипсоида (см., например, [66]). Этот прием широко используется в различных областях: для характеристики анизотропии магнитной восприимчивости [67], для визуализации тканей головного мозга на основе диффузионной тензорной магнитно-резонансной томографии [68], [69], а также в задачах компьютерного зрения [70].

1.3.4 Спектральный анализ сигналов

Спектральный подход приобретает все большее значение в задачах анализа пространственно-распределенных данных. В задачах анализа временных рядов спектральный подход давно является общепринятым [71] - [73]. И хотя представление случайных полей как в пространственном, так и в частотном домене детально обсуждается еще в 1980-х [60], спектральный анализ пространственно распределенных данных начал распространяться относительно недавно [74].

Спектральное представление случайных полей может показаться на первый взгляд излишним из-за того, что математические операции в частотном домене могут потребовать операций с комплекснозначными переменными, а интерпретация спектра не сразу очевидна. Тем не менее, есть ряд причин, в силу

которых значимость спектральных методов для анализа пространственно распределенных данных возрастает [74]:

- математические доказательства и выкладки часто упрощаются в частотном домене;
- функция спектральной плотности и ковариация – различающиеся, но взаимодополняющие представления свойств второго порядка случайного поля – они образуют пару преобразований Фурье, поэтому методы анализа свойств второго порядка случайного поля с использованием ковариации и спектральной плотности могут рассматриваться как эквивалентные;
- ковариация делает акцент на пространственной корреляции в точках, разделенных некоторым вектором как функции этого вектора, тогда как спектральная плотность – на связи компонентов variability с волновыми числами;
- на практике часто довольно сложно распознать различные структуры ковариации по их математической форме или графику функции, т.к. графики существенно различающихся по статистическим свойствам процессов могут быть сильно похожи, а спектральная плотность может усилить и акцентировать существенные различия в структурах второго порядка лучше, чем ковариация.

2 Корреляционные функции для микротомографической модели

В этой главе описывается интерпретация микротомографической модели в виде случайного поля, а также приводятся определения и методы вычисления корреляционных функций случайных полей, анализ которых будут проводиться в следующих двух главах.

2.1 Микротомографическая модель как случайное поле

Объектом исследования являются микротомографические модели, представленные в виде трехмерных случайных полей, поэтому рассматриваются функции от трехмерного вектора \mathbf{x} . Этот вектор может пробегать ограниченную область в евклидовом пространстве \mathbf{R}^3 при непрерывном описании или конечное подмножество трехмерной решетки \mathbf{Z}^3 при дискретном описании. Объект задается конечным набором признаков $i=1, \dots, M$, каждый из которых характеризуется в пространственной точке \mathbf{x} некоторой действительной величиной $\chi_i(\mathbf{x})$.

Например, при $M=1$ это может быть нормализованный локальный коэффициент поглощения рентгеновского излучения для заданной длины волны. При томографии в M различных участках рентгеновского диапазона $\chi_i(\mathbf{x})$ может представлять набор соответствующих локальных коэффициентов поглощения.

Другой пример, который и будет использоваться в настоящей работе, связан с возможной идентификацией локального минералогического состава, когда величина $0 \leq \chi_i(\mathbf{x}) \leq 1$ характеризует локальное объемное заполнение пространства флюидом или минералом. При этом имеет место нормировка

$$\sum_{i=1}^M \chi_i(\mathbf{x}) = 1 \quad (2.1)$$

Простейший вариант последнего примера – так называемая бинарная модель, когда $M=2$, и величина $\chi_i(\mathbf{x})$ может принимать значения 1 или 0.

Значение 1 для $i=1$ соответствует наличию в точке \mathbf{x} пустотности (поры), а значение 0 – наличию твердой фазы.

Пусть в общем случае $(i_\alpha, \mathbf{x}_\alpha), \alpha \in \Theta$ произвольный набор значений индексов и пространственных точек, который может быть конечным или бесконечным. Этому набору соответствует множество случайных величин $\xi_\alpha = \chi_{i_\alpha}(\mathbf{x}_\alpha), \alpha \in \Theta$. Возможные совокупности значений величин ξ_α для всевозможных наборов индексов и точек образуют пространство событий Ω с некоторой вероятностной мерой \mathbf{P} .

2.2 Поле вариограммы

В геостатистике для описания пространственной корреляции поля чаще всего используются такие моменты второго порядка, как вариограмма и ковариация.

Вариограмма случайного поля $\chi_i(\mathbf{x})$ – это вариация разности значений в двух точках как функция индексов и координат [75], [51]:

$$2\gamma_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle (\chi_i(\mathbf{x}_1) - \chi_i(\mathbf{x}_2)) (\chi_j(\mathbf{x}_1) - \chi_j(\mathbf{x}_2)) \rangle. \quad (2.2)$$

Для статистически однородных полей пространственная зависимость сводится к зависимости от одного вектора $\gamma_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \gamma_{ij}(\mathbf{h})$, где вектор $\mathbf{h} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ называется лэгом.

На Рис. 4 изображена идеализированная вариограмма для одномерной функции и ее параметры [75]:

- порог – значение, к которому вариограмма асимптотически приближается с увеличением лэга;
- эффект самородков – величина, к которой стремятся значения вариограммы для лэгов вблизи нуля (непосредственно в нулевой точке вариограмма равна нулю);
- радиус корреляции (корреляционная длина) – величина лэга, при которой вариограмма выходит на пороговое значение, то есть значения случайной функции (поля) больше не коррелированы. Таким образом, корреляционная длина характеризует размер неоднородностей структуры;

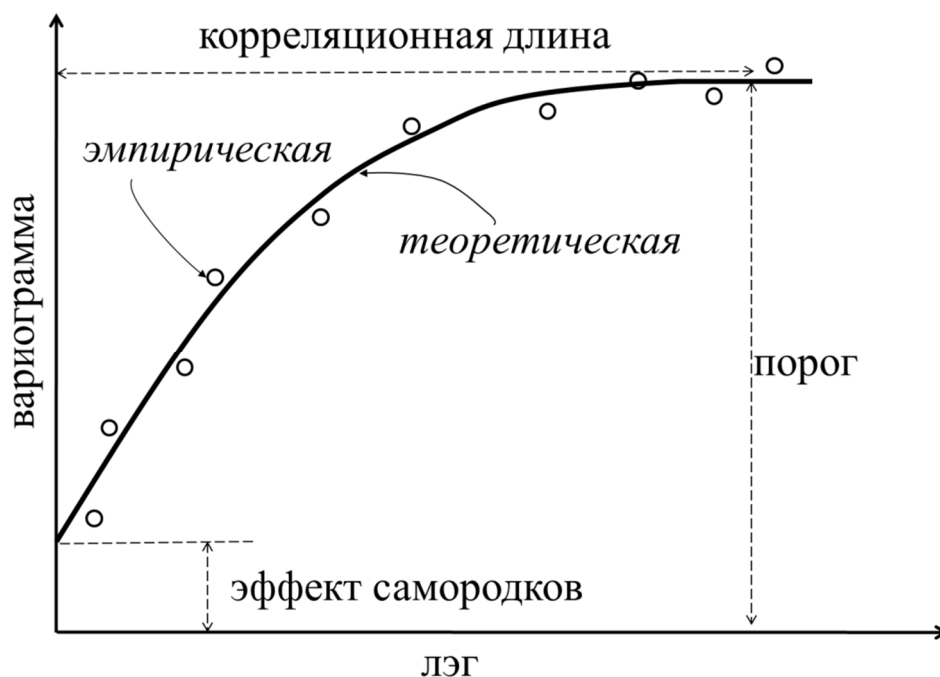


Рис. 4. Вариограмма для одномерной случайной функции

Вариограмма обладает рядом важных свойств. Так, по определению, очевидно, что вариограмма удовлетворяет условиям симметрии относительно инверсии:

$$\gamma_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \gamma_{ji}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \gamma_{ij}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1). \quad (2.3)$$

Кроме того, для произвольного набора действительных чисел α_i справедливо неравенство

$$\sum_{i,j=1}^M \alpha_i \alpha_j \gamma_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{2} \left\langle \left(\sum_{i=1}^M \alpha_i (\chi_i(\mathbf{x}_1) - \chi_i(\mathbf{x}_2)) \right)^2 \right\rangle \geq 0 \quad (2.4)$$

Если рассматриваемое статистически однородное случайное поле удовлетворяет условию (2.1), то выполняется тождество

$$\sum_{i=1}^M \gamma_{ij}(\mathbf{h}) \equiv 0. \quad (2.5)$$

В частности, для бинарной модели имеется только одна независимая функция:

$$\gamma(\mathbf{h}) \equiv \gamma_{11}(\mathbf{h}) = -\gamma_{12}(\mathbf{h}) = \gamma_{22}(\mathbf{h}). \quad (2.6)$$

Для больших расстояний $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \rightarrow +\infty$ характеристики микроструктуры горных пород становятся независимыми

$$\langle \chi_i(\mathbf{x}_1) \chi_j(\mathbf{x}_2) \rangle - \langle \chi_i(\mathbf{x}_1) \rangle \langle \chi_j(\mathbf{x}_2) \rangle \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

Поэтому для статистически однородных полей имеет место предел

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} \gamma_{ij}(\mathbf{h}) = \varphi_{ij} - \varphi_i \varphi_j, \quad (2.8)$$

где $\varphi_{ij} = \langle \chi_i(\mathbf{h}) \chi_j(\mathbf{h}) \rangle$, $\varphi_i = \langle \chi_i(\mathbf{h}) \rangle$. В частности, для бинарной модели имеется полезная асимптотика, связывающая поведение вариограммы при больших лэгах с пористостью $\varphi = \langle \chi_1(\mathbf{h}) \rangle$

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} \gamma(\mathbf{h}) = \varphi(1 - \varphi) \quad (2.9)$$

Приближение к асимптотикам (2.8), (2.9) связано с величинами $\|\mathbf{h}\|$, превосходящими характерную корреляционную длину микроструктуры. Физический смысл этой величины – это характерный масштаб неоднородностей случайного поля. Поэтому формулы (2.8), (2.9) могут быть использованы одновременно для оценки ожидаемой пористости и масштаба неоднородности микроструктуры.

Процедура практического вычисления вариограмм для рентгеновских микротомограмм горных пород состоит в следующем. В качестве исходной информации имеем объект (Рис. 8 и Рис. 10), характеризующий трехмерное распределение пустотности. Эмпирическая вариограмма рассчитывается, как [51]:

$$\gamma_{эмт}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (\chi_1(\mathbf{x}_i) - \chi_1(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}))^2 \quad (2.10)$$

где N – количество точек. В результате поле вариограммы представляет собой трехмерный массив значений, зависящих от вектора лэга $\mathbf{h} \in (-\mathbf{x}_{\max}; \mathbf{x}_{\max})$.

Заполнение этого массива значениями происходит путем перебора всех значений \mathbf{x} и вычисления для них выражения (2.10) с учетом упрощающих ограничений:

$$\gamma_{эмт}(0) = 0, \quad \gamma_{эмт}(\mathbf{h}) = \gamma_{эмт}(-\mathbf{h}).$$

2.3 Поле ковариации

Помимо вариограммы для анализа случайных полей используется функция ковариации [53], [51]:

$$C_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \text{cov}(\chi_i(\mathbf{x}_1), \chi_j(\mathbf{x}_2)) = \left\langle \left(\chi_i(\mathbf{x}_1) - \langle \chi_i(\mathbf{x}_1) \rangle \right) \left(\chi_j(\mathbf{x}_2) - \langle \chi_j(\mathbf{x}_2) \rangle \right) \right\rangle, \quad (2.11)$$

которая, очевидно, приводится к следующему эквивалентному виду

$$C_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle \chi_i(\mathbf{x}_1) \chi_j(\mathbf{x}_2) \rangle - \langle \chi_i(\mathbf{x}_1) \rangle \langle \chi_j(\mathbf{x}_2) \rangle \quad (2.12)$$

На *Рис. 5* изображены идеализированные вариограмма и ковариация для одномерной случайной функции.

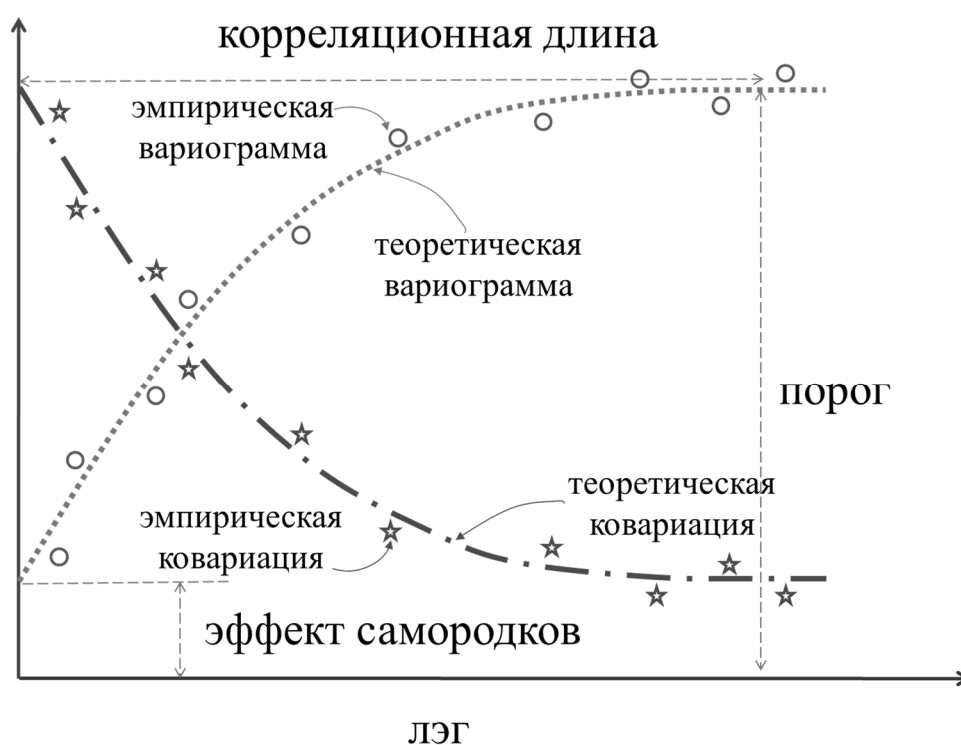


Рис. 5. Вариограмма и ковариация для одномерной случайной функции

Ковариация обладает рядом свойств, которые во многом взаимосвязаны со свойствами вариограммы. Имеет место соотношение симметрии:

$C_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = C_{ji}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$. Для полей, удовлетворяющих соотношению (2.2), выполняется тождество

$$\sum_{i=1}^M C_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0 \quad (2.13)$$

Далее, аналогично соотношению (2.4) для произвольного набора действительных чисел α_i и для произвольной действительной функции $\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \psi(\mathbf{h})$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^M \alpha_i \alpha_j \int C_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) \psi(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 = \\ & = \left\langle \left(\sum_{i=1}^M \alpha_i \int (\chi_i(\mathbf{h}) - \langle \chi_i(\mathbf{h}) \rangle) \psi(\mathbf{h}) d\mathbf{h} \right)^2 \right\rangle \geq 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Если для больших расстояний $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \rightarrow +\infty$ выполняется условие (2.7), то соответствующий предел ковариации равен нулю:

$$\lim_{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \rightarrow +\infty} C_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0. \quad (2.15)$$

В случае, когда среднее значение поля $\langle \chi_i(\mathbf{h}) \rangle$ не зависит от координаты (например, для статистически однородного поля), то вариограмма связана с ковариацией простым соотношением

$$2\gamma_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = C_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) + C_{ij}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) - C_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - C_{ij}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \quad (2.16)$$

Для однородного поля выполняются соотношения, которые могут быть полезны при дальнейшем анализе. Так, $C_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = C_{ij}(\mathbf{h})$, $\mathbf{h} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. При этом

$$C_{ij}(\mathbf{h}) = C_{ji}(-\mathbf{h}) \quad (2.17)$$

Имеются аналоги уравнений (2.13)-(2.15) соответственно:

$$\sum_{i=1}^M C_{ij}(\mathbf{h}) \equiv 0; \quad (2.18)$$

$$\sum_{i,j=1}^M \alpha_i \alpha_j \int C_{ij}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) \psi(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \geq 0; \quad (2.19)$$

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} C_{ij}(\mathbf{h}) = 0. \quad (2.20)$$

Для бинарной модели, вследствие (2.18), достаточно использовать одну функцию ковариации $C(\mathbf{h}) \equiv C_{11}(\mathbf{h}) = -C_{12}(\mathbf{h}) = C_{22}(\mathbf{h}) = C(-\mathbf{h})$, причем аналоги соотношений (2.19), (2.20) имеют следующий вид:

$$\int C(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) \psi(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \geq 0 \quad (2.21)$$

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} C(\mathbf{h}) = 0 \quad (2.22)$$

Также через поле ковариации может быть выражена эффективная корреляционная длина [44]:

$$l_{\text{эфф}} = \frac{1}{C(0)} \int_0^{\infty} C(h) dh. \quad (2.23)$$

Эмпирическая ковариация рассчитывается, как [51]:

$$C_{\text{эмп}}(\mathbf{h}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_1(\mathbf{x}_i) \chi_1(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}) - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_1(\mathbf{x}_i) \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_1(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}) \right) \quad (2.24)$$

где N – количество точек. Кроме того, поле ковариации может быть получено из поля вариограммы с учетом соотношения (2.16).

3 Анализ анизотропии методом разложения поля вариограммы

В этой главе адаптируется и модифицируется методика разложения по сферическим гармоникам для моделирования структуры поля вариограммы. Нулевая гармоника задает изотропную составляющую поля, а следующие гармоники обладают последовательно усиливающейся зависимостью от угла. Для удобства интерпретации этой информации вводятся индексы анизотропии.

3.1 Разложение по сферическим гармоникам

Для изучения эффектов анизотропии микроструктуры можно использовать разложение поля вариограммы по сферическим гармоникам. Сферические гармоники представляют собой собственные функции оператора Лапласа на единичной сфере, которые имеют вид [56], [76]:

$$Y_l^m = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad (3.1)$$

где $P_l^m(\cos\theta)$ – присоединенные полиномы Лежандра, θ , ϕ – сферические координаты, параметр l пробегает неотрицательные целые числа, $m = -l, -(l-1), \dots, l$. Эти функции образуют ортонормированный базис в пространстве функций на единичной сфере, интегрируемых в квадрате.

Таким образом, для скалярного произведения в этом функциональном пространстве

$$(f_1, f_2) = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} f_1^* f_2 \sin\theta d\phi d\theta, \quad (3.2)$$

выполнены соотношения $(Y_l^m, Y_{l'}^{m'}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$, где $\delta_{ll'}$ – символ Кронекера.

Кроме того, для нечетных значений параметра l имеет место соотношение

$$Y_l^m(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \phi), \quad (3.3)$$

что легко проверяется подстановкой соответствующих значений в определение (3.1).

Применимость сферических гармоник (3.1) для анализа анизотропии обусловлена тем фактом, что при фиксированном параметре l эти функции образуют базис $(2l+1)$ -мерного неприводимого представления группы вращений в пространстве функций на единичной сфере [76]. Представляя вариограмму бинарной модели как функцию радиуса и точки на сфере $\gamma(\mathbf{h}) = \gamma(r, \theta, \phi)$, $h^1 = r \sin \theta \cos \phi$, $h^2 = r \sin \theta \sin \phi$, $h^3 = r \cos \theta$, можно разложить ее по компонентам неприводимых представлений группы вращений

$$\gamma(\mathbf{h}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l f_l^m(r) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (3.4)$$

где $f_l^m(r) = (Y_l^m, \gamma)$.

В силу соотношения (3.3) и симметрии вариограммы относительно инверсии (2.3) соответствующие нечетным значениям параметра l функции $f_l^m(r)$ тождественно равны нулю. Таким образом, представляют интерес слагаемые с четными значениями l , в первую очередь, $l=0$ и $l=2$.

3.2 Эллипсоид анизотропии и индексы анизотропии

Оставляя в разложении (3.4) только слагаемые с $l=0$ и $l=2$, можно переписать его в виде квадратичной формы на сфере. Для этого необходимо воспользоваться выражениями, связывающими декартовы координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 и сферические координаты θ, ϕ на единичной сфере:

$$(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + (\xi_3)^2 = 1; \quad (3.5)$$

$$\sin \theta = \sqrt{(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2}; \quad (3.6)$$

$$\cos \theta = \xi_3; \quad (3.7)$$

$$\sin \phi = \frac{\xi_2}{\sqrt{(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2}}; \quad (3.8)$$

$$\cos \phi = \frac{\xi_1}{\sqrt{(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2}}. \quad (3.9)$$

Тогда сферические гармоники с $l=0$ и $l=2$ представляются в следующем виде:

$$Y_0^0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left((\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + (\xi_3)^2 \right); \quad (3.10)$$

$$Y_2^{-2} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\phi} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \left((\xi_1)^2 - (\xi_2)^2 - 2i\xi_1\xi_2 \right); \quad (3.11)$$

$$Y_2^{-1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-i\phi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (\xi_1 - i\xi_2) \xi_3; \quad (3.12)$$

$$Y_2^0 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \left(2(\xi_3)^2 - (\xi_1)^2 - (\xi_2)^2 \right); \quad (3.13)$$

$$Y_2^1 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-i\phi} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (\xi_1 + i\xi_2) \xi_3; \quad (3.14)$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \left((\xi_1)^2 + 2i\xi_1\xi_2 - (\xi_2)^2 \right). \quad (3.15)$$

Соответственно, разложение (3.4) преобразуется в квадратичную форму:

$$\gamma(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = Y_0^0 \sum_{m=-2}^{m=2} A_2^m Y_2^m = \sum_{i,j=1}^3 C_{ij} \xi_i \xi_j, \quad (3.16)$$

где

$$C_{ij} = \frac{\sqrt{15}}{4\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} A_2^{-2} - \sqrt{\frac{3}{2}} A_2^0 + A_2^2 & -iA_2^{-2} + iA_2^2 & A_2^{-1} - A_2^1 \\ -iA_2^{-2} + iA_2^2 & -A_2^{-2} - \sqrt{\frac{3}{2}} A_2^0 - A_2^2 & -iA_2^{-1} - iA_2^1 \\ A_2^{-1} - A_2^1 & -iA_2^{-1} - iA_2^1 & 2\sqrt{\frac{3}{2}} A_2^0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} A_0^0 & 0 & 0 \\ 0 & A_0^0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0^0 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

С любой квадратичной формой можно связать центральную поверхность 2-го порядка [66]. В силу симметричности и положительности C_{ij} в рассматриваемом случае это будет эллипсоид. Тогда собственные векторы \mathbf{e}_i ($i=1, 2, 3$) квадратичной формы C_{ij} будут задавать оси эллипсоида, а собственные числа $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$ – квадраты длин полуосей эллипсоида:

$$C_{ij} \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T. \quad (3.18)$$

Для определенных соотношений между собственными числами вводится классификация типов анизотропии [68]. Выделяются три основных случая.

Линейный случай соответствует рангу матрицы, равному 1, для которого $\lambda_1 \gg \lambda_2 \approx \lambda_3$. Поле в области этого типа направлено вдоль одного направления, это направление собственного вектора соответствующего ненулевому собственному числу.

$$C_{ij} \approx \lambda_1 C_l = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T. \quad (3.19)$$

Планарный случай соответствует рангу матрицы, равному 2, для которого $\lambda_1 \approx \lambda_2 \gg \lambda_3$. Поле в области этого типа ограничено плоскостями, задаваемыми двумя собственными векторами, которые соответствуют ненулевым собственным числам:

$$C_{ij} \approx \lambda_1 C_p = \lambda_1 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T). \quad (3.20)$$

Сферический случай соответствует рангу матрицы, равному 3, для которого $\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \lambda_3$.

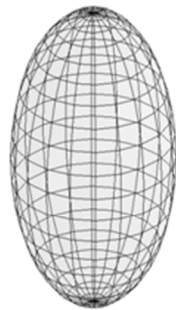
$$C_{ij} \approx \lambda_1 C_s = \lambda_1 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T). \quad (3.21)$$

Разложение C_{ij} по базису из этих случаев дает:

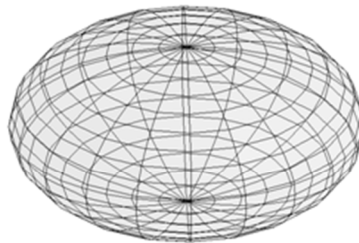
$$C_{ij} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T = (\lambda_1 - \lambda_2) C_l + (\lambda_2 - \lambda_3) C_p + \lambda_3 C_s, \quad (3.22)$$

где $(\lambda_1 - \lambda_2)$, $(\lambda_2 - \lambda_3)$ и λ_3 – координаты C_{ij} в базисе $\{C_l, C_p, C_s\}$.

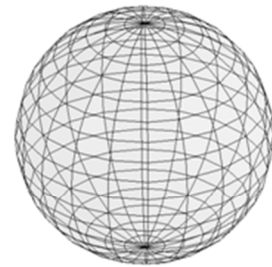
Как сказано выше, соотношения между собственными числами тензора можно использовать для классификации квадратичных форм по геометрически значимому критерию. Используя координаты квадратичной формы в нашем новом базисе, можно определить меру того, насколько она близка к основным случаям (прямой, плоскости или сфере – Рис. 6).



Линейный
случай



Планарный
случай



Сферический
случай

Рис. 6. Эллипсоиды анизотропии для трех базисных случаев

Так как важна не величина C_{ij} в этом базисе, а только соответствующая форма, удобнее нормировать полученные координаты. Например, в качестве нормировки можно использовать след – сумму собственных значений. Тогда получим следующие три величины.

Мера линейной анизотропии:

$$c_l = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}. \quad (3.23)$$

Мера планарной анизотропии:

$$c_p = \frac{2(\lambda_2 - \lambda_3)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}. \quad (3.24)$$

Мера изотропии:

$$c_s = \frac{3\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}. \quad (3.25)$$

Для планарного и сферического случаев коэффициенты 2 и 3 были добавлены для того, чтобы каждый из них независимо лежал в интервале $[0,1]$ и их сумма равнялась единице:

$$c_l + c_p + c_s = 1. \quad (3.26)$$

Мера анизотропии, описывающая отклонение от изотропного случая, независимо от того, это линейная или планарная анизотропия, запишется так:

$$c_a = c_l + c_p = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = 1 - c_s. \quad (3.27)$$

4 Метод спектральной плотности

В этой главе для получения информации о корреляционных длинах будет использоваться спектральное представление поля ковариации. Это связано с тем, что функция спектральной плотности и корреляционная функция стационарного случайного процесса тесно связаны между собой, и анализ случайного поля с помощью ковариационной функции эквивалентен анализу с помощью спектральной плотности, тогда как математическая теория в частотном домене существенно упрощается.

4.1 Спектральное представление ковариации

Как известно, прямое и обратное преобразование Фурье для функции одной переменной $g(x)$ определяется формулами:

$$g_{WH}(k) = \int \exp(-2\pi ikx) g(x) dx, \quad (4.1)$$

$$g(x) = \int \exp(2\pi ikx) g_{WH}(k) dk. \quad (4.2)$$

Соответственно определяется преобразование Фурье для функции нескольких переменных $g(\mathbf{x})$:

$$g_{WH}(\mathbf{k}) = \int \exp(-2\pi i\mathbf{k}\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (4.3)$$

$$g(\mathbf{x}) = \int \exp(2\pi i\mathbf{k}\mathbf{x}) g_{WH}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (4.4)$$

Теорема Винера-Хинчина [44] говорит, что результатом преобразования Фурье ковариации однородного случайного поля $C_{ij}(\mathbf{h}) = C_{ij}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ (также называемого преобразованием Винера-Хинчина) является функция, называемая спектральной плотностью поля:

$$C_{ijWH}(\mathbf{k}) = \int \exp(-2\pi i\mathbf{k}\mathbf{h}) C_{ij}(\mathbf{h}) d\mathbf{h}. \quad (4.5)$$

Спектральная плотность оказывается удобным инструментом для анализа случайного поля и обладает рядом полезных свойств:

$$C_{ijWH}(\mathbf{k}) = C_{ijWH}(-\mathbf{k})^* \quad (\text{следствие действительности } C_{ij}(\mathbf{h})), \quad (4.6)$$

$$C_{ijWH}(\mathbf{k}) = C_{jiWH}(-\mathbf{k}) \text{ (следствие (2.17)).} \quad (4.7)$$

Условие положительной определенности (2.19) можно преобразовать в условие для спектральной плотности:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i,j=1}^M \alpha_i \alpha_j \int C_{ij}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) \psi(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 = \\ &= \sum_{i,j=1}^M \alpha_i \alpha_j \int \exp(2\pi i \mathbf{k}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)) C_{ijWH}(\mathbf{k}) \psi(\mathbf{x}_1) \psi(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{k} = \\ &= \sum_{i,j=1}^M \alpha_i \alpha_j \int C_{ijWH}(\mathbf{k}) |\psi_{WH}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

В силу произвольности функции $\psi(\mathbf{x})$ в (4.8) это неравенство эквивалентно более простому неравенству для спектральной плотности

$$\sum_{i,j=1}^M \alpha_i \alpha_j C_{ijWH}(\mathbf{k}) \geq 0. \quad (4.9)$$

В частности, для спектральной плотности бинарной модели имеет место условие положительной определенности:

$$C_{WH}(\mathbf{k}) \geq 0. \quad (4.10)$$

Так как задание ковариации $C_{ij}(\mathbf{h})$ равносильно заданию его спектральной плотности $C_{ijWH}(\mathbf{k})$, то ясно, что любая величина, выражающаяся через функцию $C_{ij}(\mathbf{h})$, может быть выражена также и через $C_{ijWH}(\mathbf{k})$. Поэтому эффективная корреляционная длина (2.23) может быть представлена в виде

$$l_{\phi\phi} = \frac{\pi C_{ijWH}(0)}{C_{ij}(0)} = \frac{\pi C_{ijWH}(0)}{2 \int_0^{\infty} C_{ij}(h) dh}. \quad (4.11)$$

Кроме спектральной плотности (4.5) также удобно использовать спектральную плотность вдоль направления

$$C_{ijWH}^n(k) = \int \exp(-2\pi i k \xi) C_{ij}(\xi \mathbf{n}) d\xi, \quad (4.12)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор. Если в неравенство (4.8) подставить функции вида $\psi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{n}\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - (\mathbf{n}\mathbf{x})\mathbf{n})$, где δ – функция Дирака и $\phi(\xi)$ – произвольная функция, то получится соотношение

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{i,j=1}^M \alpha_i \alpha_j \int C_{ij}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) \psi(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 = \\
&= \sum_{i,j=1}^M \alpha_i \alpha_j \int C_{ijWH}^n(k) |\phi_{WH}(k)|^2 dk.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

В силу произвольности функции $\phi(\xi)$ в (4.13) это неравенство эквивалентно более простому неравенству для спектральной плотности вдоль направления

$$\sum_{i,j=1}^M \alpha_i \alpha_j C_{ijWH}^n(k) \geq 0. \tag{4.14}$$

В частности, в случае бинарной модели спектральная плотность вдоль направления удовлетворяет простому условию положительной определенности:

$$C_{WH}^n(k) \geq 0. \tag{4.15}$$

Можно определить спектральные плотности вдоль координатных осей:

$$C_{WH}^1(k) = \int \exp(-2\pi i k h^1) C(h^1, 0, 0) dh^1, \tag{4.16}$$

$$C_{WH}^2(k) = \int \exp(-2\pi i k h^2) C(0, h^2, 0) dh^2, \tag{4.17}$$

$$C_{WH}^3(k) = \int \exp(-2\pi i k h^3) C(0, 0, h^3) dh^3, \tag{4.18}$$

которые также удовлетворяют условию положительной определенности:

$$C_{WH}^1(k) \geq 0, C_{WH}^2(k) \geq 0, C_{WH}^3(k) \geq 0 \tag{4.19}$$

Полезное свойство может быть получено, если рассмотреть сферическую составляющую ковариации (первый член разложения ковариации в ряд по сферическим гармоникам)

$$C_{ij}^0(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int C_{ij}(\xi \mathbf{n}) d\mathbf{n}. \tag{4.20}$$

Как легко видеть, преобразование Винера-Хинчина от функции (4.20) получено усреднением по единичной сфере спектральных плотностей по направлениям:

$$C_{ijWH}^0(k) = \frac{1}{4\pi} \int \exp(-2\pi i k \xi) C_{ij}(\xi \mathbf{n}) d\xi d\mathbf{n} = \frac{1}{4\pi} \int C_{ijWH}^n(k) d\mathbf{n} \quad (4.21).$$

Поэтому, как следствие неравенства (4.14), имеет место условие положительной определенности для функции (4.21)

$$\sum_{i,j=1}^M \alpha_i \alpha_j C_{ijWH}^0(k) \geq 0. \quad (4.22)$$

В частном случае бинарной модели справедливо неравенство

$$C_{WH}^0(k) \geq 0. \quad (4.23)$$

Спектральная плотность может быть использована для определения спектра корреляционных длин или оценки характерной корреляционной длины. Это будет продемонстрировано в трех следующих подразделах на примере функции $C_{WH}^0(k)$.

4.2 Разложение спектральной плотности по экспонентам

Для решения задачи определения спектра корреляционных длин потребуется рассмотреть разложение функции $C_{WH}^0(k)$ по элементарным функциям.

Пусть функция $C^0(\xi)$ разлагается в интеграл экспонент:

$$C^0(\xi) = \int A(l_c) l_c^{-1} \exp(-|\xi|/l_c) dl_c. \quad (4.24)$$

Тогда прямым вычислением можно получить

$$C_{WH}^0(k) = 2 \int \frac{A(l_c)}{1 + (2\pi k l_c)^2} dl_c. \quad (4.25)$$

Как легко видеть, спектр корреляционных длин связан со скачком функции (4.25) на мнимой оси

$$A(l_c) = \frac{1}{2\pi^2 l_c} \left(C_{WH}^0\left(\frac{i}{2\pi l_c} + \varepsilon\right) - C_{WH}^0\left(\frac{i}{2\pi l_c} - \varepsilon\right) \right) \quad (4.26)$$

где ε – бесконечно малое положительное число.

В случае одной длины корреляции l_* выражение (4.26) упрощается:

$$A(l_c) = a_* \delta(l_c - l_*) \quad (4.27)$$

$$C_{WH}^0(k) = \frac{2a_*}{1 + (2\pi k l_*)^2} \quad (4.28)$$

и величина l_* может быть оценена по двум различным параметрам:

- $k_0 = \pm \frac{i}{2\pi l_*}$ – нуль функции $\frac{1}{C_{WH}^0(k)}$;
- $k_1 = \frac{1}{2\pi l_*}$ – точка, в которой функции $C_{WH}^0(k)$ принимает значение, равное половине максимального.

4.3 Разложение спектральной плотности по функциям Гаусса

Пусть функция $C^0(\xi)$ разлагается в интеграл Гауссианов:

$$C^0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{A(l_c)}{l_c^{-1}} \exp\left(-\xi^2 / (2l_c^2)\right) dl_c \quad (4.29)$$

$$C_{WH}^0(k) = \int A(l_c) \exp(-2\pi^2 k^2 l_c^2) dl_c \quad (4.30)$$

В случае одной длины корреляции l_* :

$$A(l_c) = a_* \delta(l_c - l_*) \quad (4.31)$$

$$f_{WH}(k) = a_* \exp(-2\pi^2 k^2 l_*^2) \quad (4.32)$$

и величина l_* может быть оценена по следующему параметру:

$$k_2 = \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{2\pi l_*} \approx \frac{1,18}{2\pi l_*} - \text{точка, в которой функция } C_{WH}^0(k) \text{ принимает значение,}$$

равное половине максимального.

4.4 Разложение спектральной плотности по экспонентам для случайно-периодичной структуры

При наличии периода λ в случайной среде функция $C(\xi \mathbf{n})$ может быть представлена в следующем виде:

$$C(\xi \mathbf{n}) = \cos(2\pi\xi/\lambda) \int A(l_c) l_c^{-1} \exp(-|\xi|/l_c) dl_c. \quad (4.33)$$

Легко вычисляется соответствующая спектральная плотность:

$$C_{WH}^n(k) = \int A(l_c) dl_c \left[\frac{1}{1 + (2\pi(k + \lambda^{-1})l_c)^2} + \frac{1}{1 + (2\pi(k - \lambda^{-1})l_c)^2} \right]. \quad (4.34)$$

В случае одной длины корреляции l_* :

$$A(l_c) = a_* \delta(l_c - l_*). \quad (4.35)$$

$$C_{WH}^n(k) = a_* \left[\frac{1}{1 + (2\pi(k + \lambda^{-1})l_*)^2} + \frac{1}{1 + (2\pi(k - \lambda^{-1})l_*)^2} \right], \quad (4.36)$$

и спектральная плотность имеет два пика (вместо одного, как в примерах в п. 4.2 и 4.3).

4.5 Оценка эффективной корреляционной длины для произвольного спектра

На практике часто используется оценка эффективной корреляционной длины, основанная на характеристиках спектральной плотности. Реальная кривая спектральной плотности $C_{WH}(k)$ заменяется прямоугольником с высотой, равной максимуму $C_{WH}(k)$ и площадью, равной площади под кривой [77]. Основание такого прямоугольника – эффективная ширина энергетического спектра $\Delta k_{эфф}$ (Рис. 7). А эффективная корреляционная длина определяется через $\Delta k_{эфф}$ [77]:

$$l_{эфф} = \frac{C_{WH}(0)}{4C_{WHmax} \cdot \Delta k_{эфф}}. \quad (4.37)$$

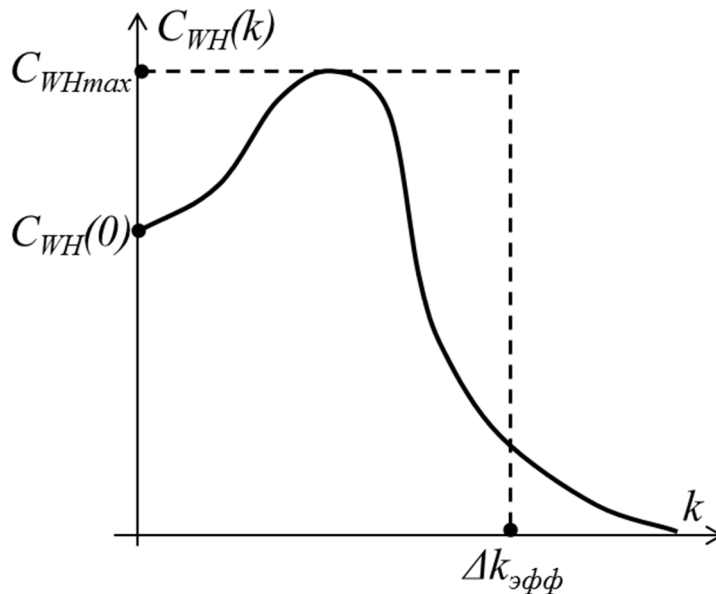


Рис. 7. Эффективная ширина энергетического спектра

5 Результаты применения методики

5.1 Описание образцов

В качестве иллюстрации методов характеристики свойств микроструктуры рассматриваются 2 группы образцов. Первая группа, используемая для валидации и верификации методики – это три синтетических образца, сгенерированных с особенностями:

- Образец 1: Искусственный слоистый образец (анизотропный);
- Образец 2: Искусственный образец со сферическими порами (изотропный);
- Образец 3: Искусственный образец с эллиптическими порами (анизотропный на масштабах порядка размера пор).

Вторая группа, демонстрирующая практический анализ – это четыре естественных образца:

- Образец 4: Берейский песчаник: мелкозернистый, зерна состоят из кварца, сцементированы кремнеземом;
- Образец 5: Аркозовый песчаник: грубозернистый, зерна состоят из кварца и существенной доли (более 25%) полевого шпата, с небольшим количеством цемента гидрослюдисто-хлоритового состава;
- Образец 6: Слабоуплотненный песчаник: слабосцементированные зерна, состоящие преимущественно из кварца;
- Образец 7: Слабоуплотненный песчаник, центральная часть образца 6.

Во всех образцах ось Z параллельна плоскости напластования. Внешний вид и поровое пространство для искусственных образцов изображены на Рис. 8. Микротомографические изображения двумерных срезов берейского, аркозового и слабоуплотненного песчаника приведены на Рис. 9. Внешний вид и поровое пространство для реальных образцов на Рис. 10. Свойства этих образцов приведены в **Таблице 1** и **Таблице 2**.

Таблица 1. Параметры искусственных образцов

№ образца	1	2	3
Описание образца	Искусственный слоистый образец	Искусственный образец со сферическими порами	Искусственный образец с эллиптическими порами
Размер (вокс.)	1024 ³	1024 ³	1024 ³
Пористость по изображению (%)	22.69	6.62	3.38

Таблица 2. Параметры реальных образцов

№ образца	4	5	6	7
Описание образца	Берейский песчаник	Аркозовый песчаник	Слабо-уплотненный песчаник	Слабо-уплотненный песчаник, часть образца 6
Размер (вокс.)	1024 ³	1024 ³	2048 ³	1024 ³
Разрешение сканирования (мк/вокс.)	2.5	2.32	2.41	2.41
Пористость по изображению (%)	22.02	9.89	6.87	8.6
Оценка пористости по асимптотике (%)	22.02	9.6	6.6	–
Относительное отклонение оценки пористости (%)	0	2.9	3.9	–

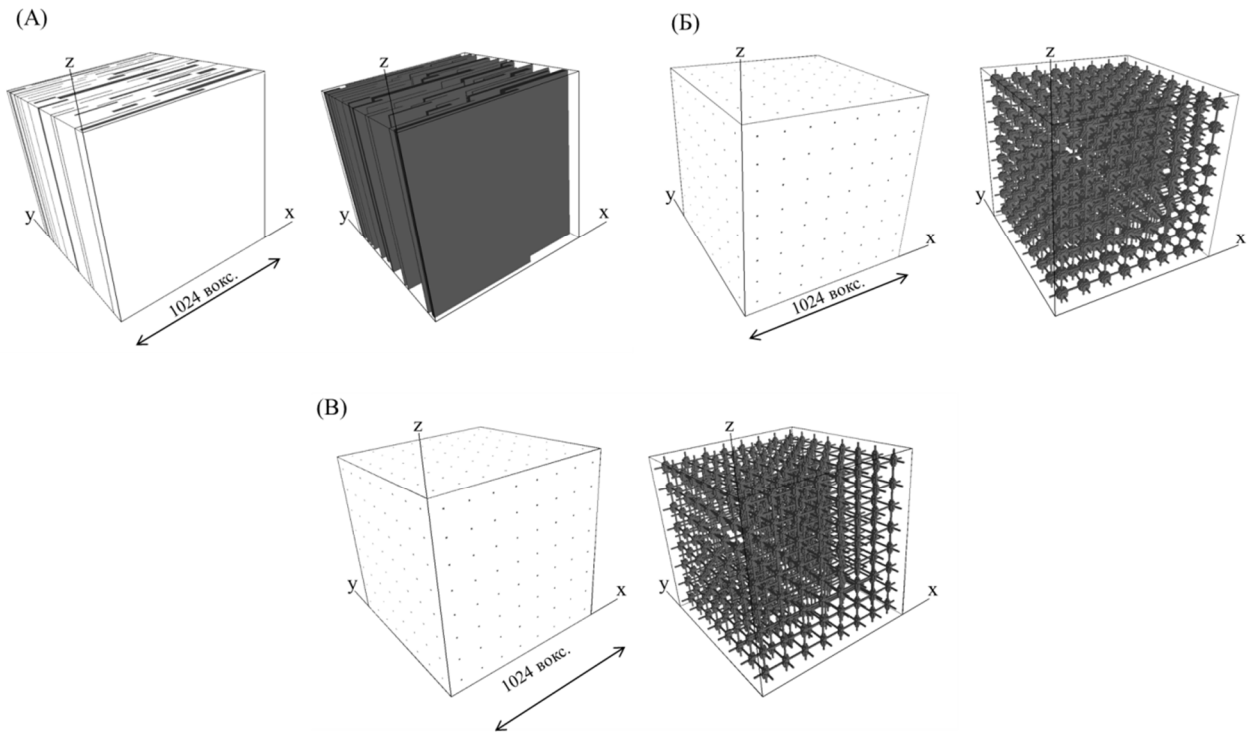


Рис. 8. Внешний вид и поровое пространство искусственных образцов: слоистый образец (А); образец со сферическими порами (Б); образец с эллиптическими порами (В)

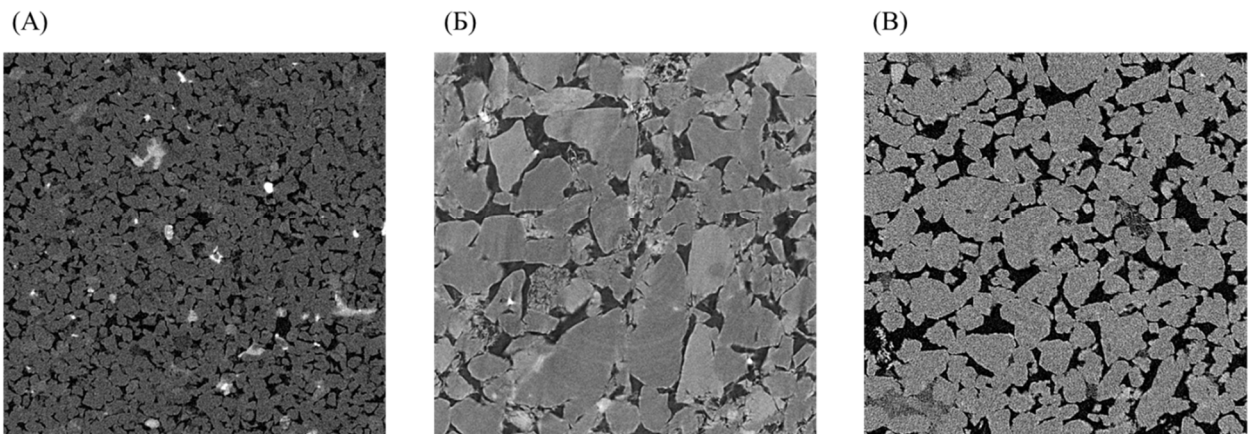


Рис. 9. Микротомографические изображения двумерных срезов берейского песчаника (А), аркозового песчаника (Б) и слабоуплотненного песчаника (В).

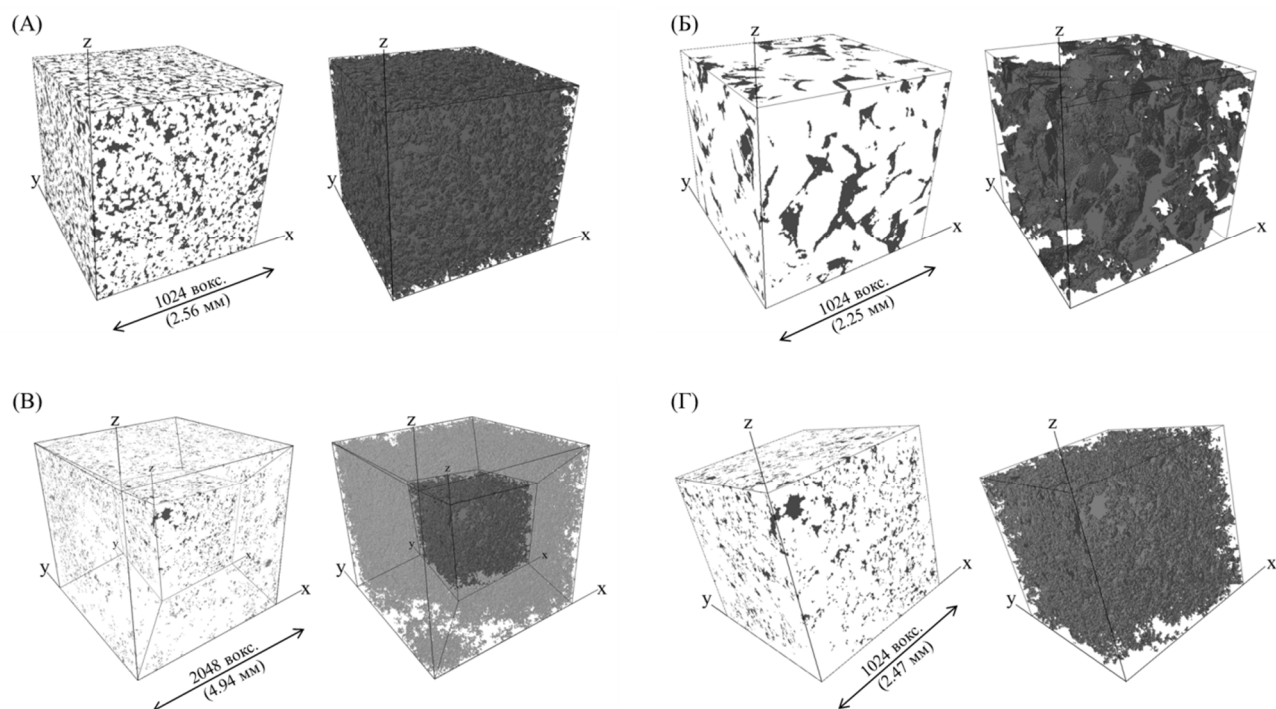


Рис. 10. Внешний вид и поровое пространство естественных образцов: берейский песчаник (А); арковский песчаник (Б); слабоуплотненный песчаник (В); слабоуплотненный песчаник, центральная часть (Г).

5.2 Описание методики вычислений

Последовательность вычислений, производимых для каждого из образцов, схематично приведена на Рис. 11. Она реализована в виде комплекса программ, состоящего из следующих модулей (см. Таблицу 3).

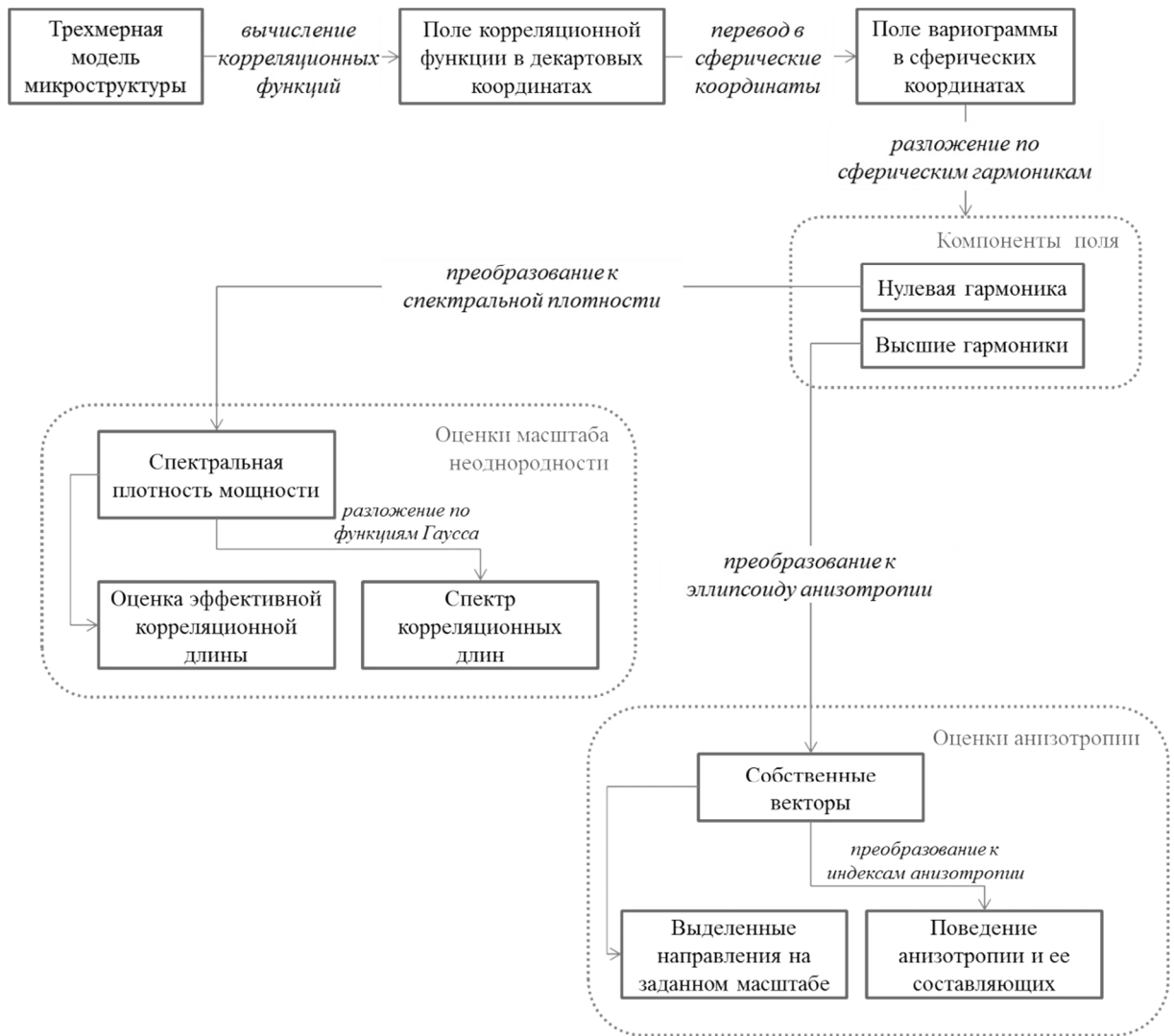


Рис. 11. Схема последовательности вычислений

Модули препроцессинга и вычисления корреляционных функций реализованы на языке С. Модуль препроцессинга представляет собой сборку из бинаризованных изображений (файлов в формате .bmp) трехмерной модели, задаваемой индикаторной функцией на сетке (x, y, z) :

$$I(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{если в } \{x, y, z\} \text{ пора} \\ 0, & \text{если в } \{x, y, z\} \text{ порода} \end{cases}. \quad (5.1)$$

Модуль вычисления корреляционных функций содержит функции вычисления полей вариограммы и ковариации, описанные в разделах 2.2. и 2.3 и

функции вычисления компонент разложения поля по сферическим гармоникам (раздел 3.1).

Для больших образцов (более 256^3 ячеек) в модуле вычисления корреляционных функций используются параллельные вычисления на кластере из видеопроцессоров.

Дальнейшие вычисления (модули анализа масштаба неоднородности и модуль анализа анизотропии) производились в среде MATLAB. Модуль анализа анизотропии содержит функции вычисления индексов анизотропии, описанные в разделе 3.2, модуль анализа масштаба неоднородностей микромоделей – метод спектральной плотности, описанный в главе 4.

Таблица 3. Состав программной реализации

Модуль	Средство разработки	Входные данные	Выходные данные
Препроцессинг			
Сборка 3D модели из изображений	C	Набор изображений в формате (.bmp)	Сжатая 3D-модель микроструктуры (.bin)
Модуль вычисления корреляционных функций			
Вычисление вариограммы/ковариации	C	Сжатая 3D-модель микроструктуры (.bin)	Сжатая 3D-модель вариограммы (.bin)
Перевод в сферические координаты и разложение по сферическим гармоникам	C	Сжатая 3D-модель вариограммы (.bin)	Набор файлов гармоник вариограммы в зависимости от масштаба (.dat)
Модуль анализа анизотропии			
Преобразование	MATLAB	Набор файлов	Набор файлов

высших гармоник к собственным векторам и собственным числам		гармоник вариограммы в зависимости от масштаба (.dat)	собственных векторов и чисел в зависимости от масштаба (.dat)
Преобразование собственных векторов к индексам анизотропии	MATLAB	Набор файлов собственных векторов и чисел в зависимости от масштаба (.dat)	Набор индексов анизотропии в зависимости от масштаба (.dat)
Модуль анализа масштаба неоднородности			
Преобразование нулевой гармоники к спектральной плотности	MATLAB	Файл нулевой гармоники ковариации в зависимости от масштаба (.dat)	Файл спектральной плотности в зависимости от масштаба (.dat)

5.3 Вариограмма и ковариация для исследуемых образцов

На Рис. 12 и Рис. 13 изображены нулевые гармоники вариограммы и ковариации для искусственных и реальных образцов, соответственно. Как уже было отмечено, выход вариограммы на асимптотику задает характерную корреляционную длину, поэтому эти графики позволяют сделать качественную оценку масштаба неоднородности микроструктуры образцов. Более строго спектр корреляционных длин будет получен в разделе 5.5.

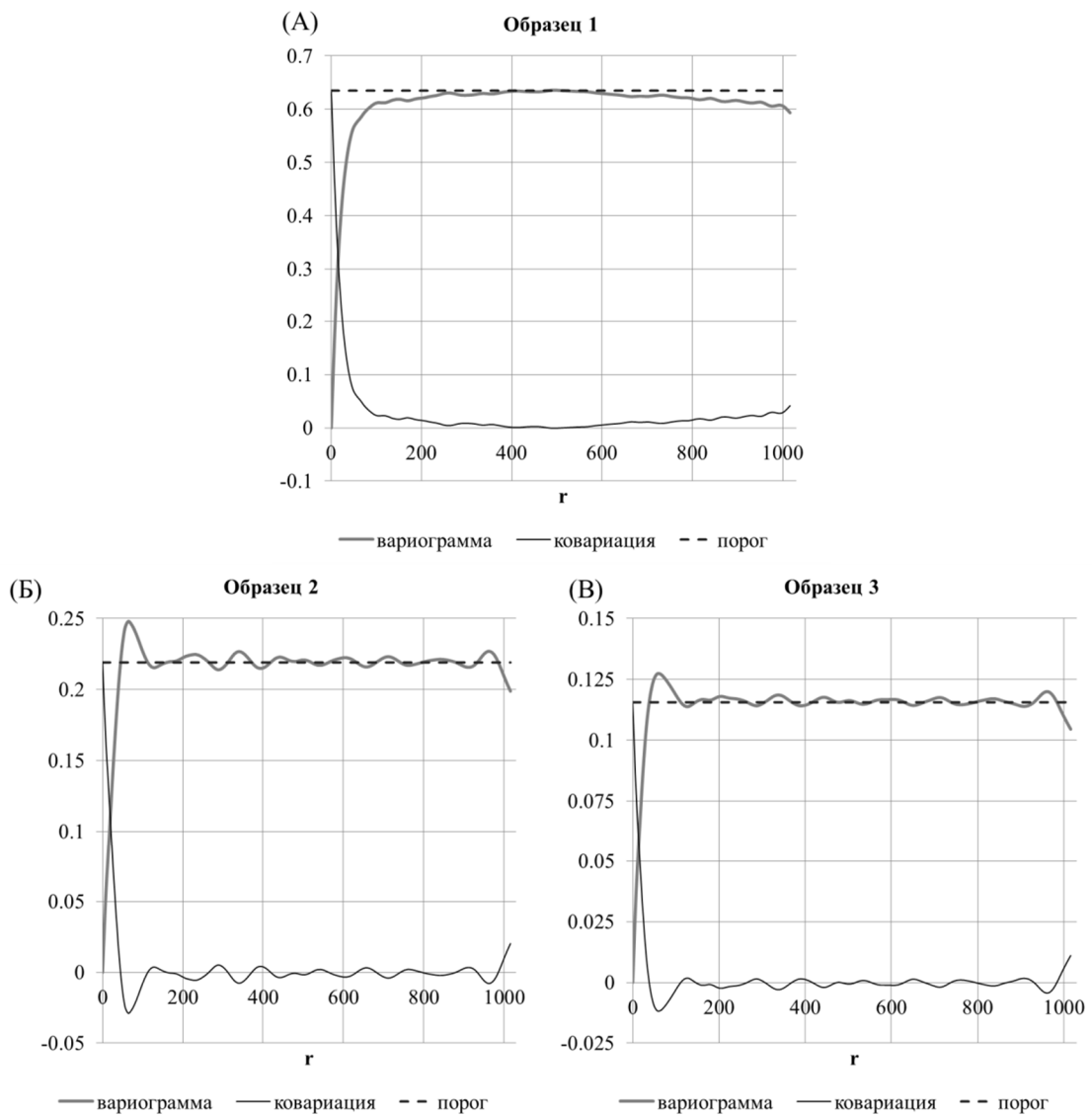


Рис. 12. Графики нулевой гармоники вариограммы и ковариации для искусственных образцов

На Рис. 12А видно, что график нулевой гармоники для Образца 1 сначала поднимается через несколько псевдопорогов, затем так же опускается – это говорит о многомасштабности и о том, что корреляционная длина, определяющая масштаб неоднородности, превосходит размер образца.

Эти эффекты качественно наблюдаются на графиках для Образцов 2 и 3, которые изображены на Рис. 12Б и Рис. 12В соответственно: здесь псевдопороги появляются на расстояниях, кратных периоду структуры образцов.

Для Образца 4 виден один порог на малых масштабах (увеличение на Рис. 13А) и один порог на больших масштабах. Для Образца 5 (Рис. 13Б) и Образца 6 (Рис. 13В) вариограмма ведет себя таким же образом, как и для слоистого искусственного образца, только более плавно. Это говорит о наличии нескольких корреляционных длин и, соответственно, масштабов неоднородности.

Вариограмма для Образца 7, который является частью Образца 6, вырезанной из геометрического центра, не выходит на асимптотику. Это говорит о том, что размер Образца 7 меньше репрезентативного объема.

Также из Рис. 13А и Таблицы 2 можно увидеть, что оценка пористости по асимптотике для Образца 4 соответствует пористости, вычисленной по изображению. Для Образца 5 и Образца 6 относительное отклонение оценки пористости составляет от 2 до 4%.

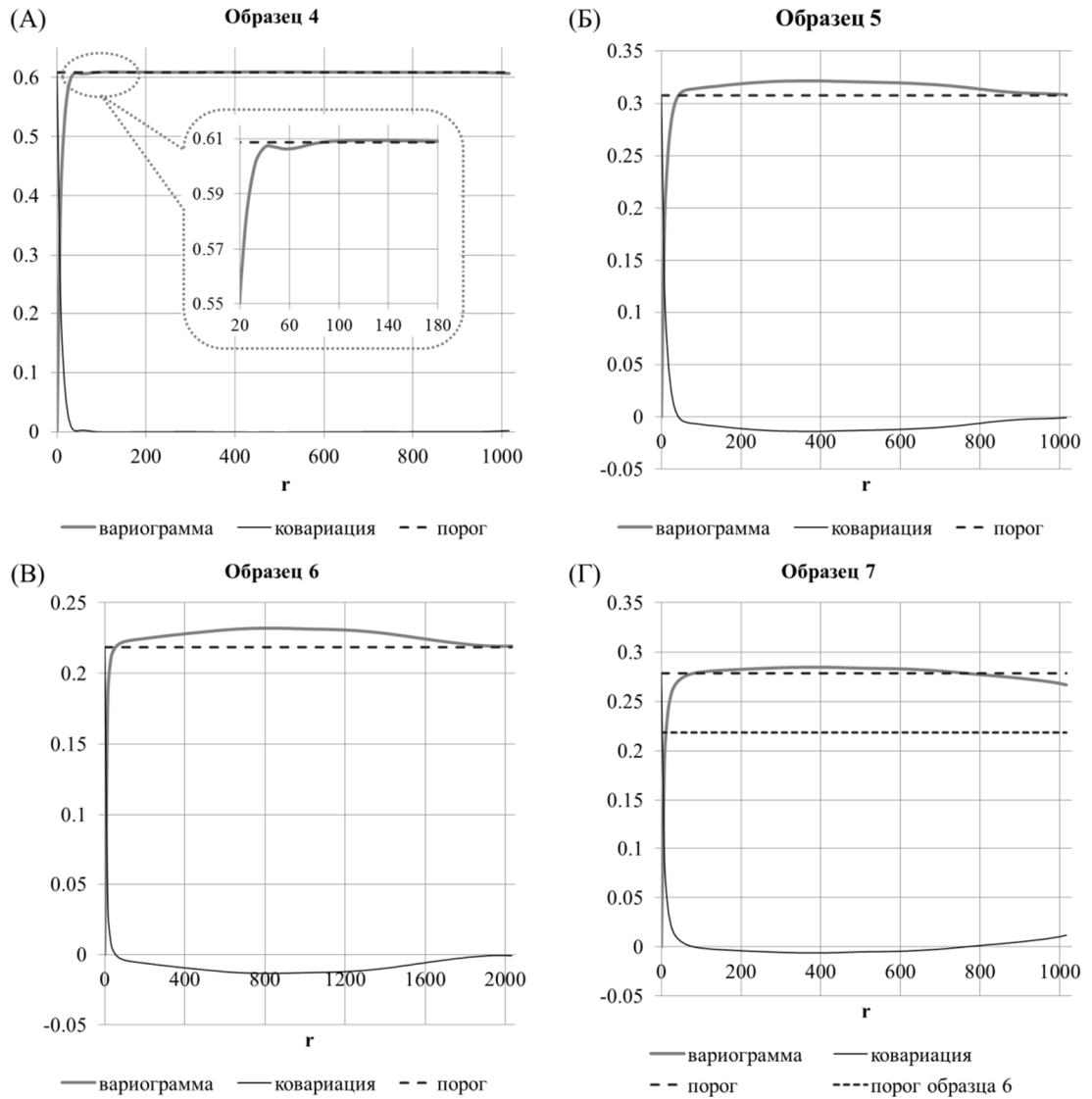


Рис. 13. Графики нулевой гармоники вариограммы и ковариации для естественных образцов

5.4 Индексы анизотропии для исследуемых образцов

На Рис. 14 изображены индексы анизотропии в зависимости от масштаба r для искусственно сгенерированных образцов, для которых можно предполагать наличие или отсутствие анизотропии на разных масштабах. Как и ожидалось, Образец 1 анизотропен, Образец 2 изотропен, а Образец 3 изотропен на больших масштабах, но анизотропен на масштабах порядка размеров пор. Таким образом, на валидационных образцах методика работает корректно, поэтому возможно применение к реальным данным.

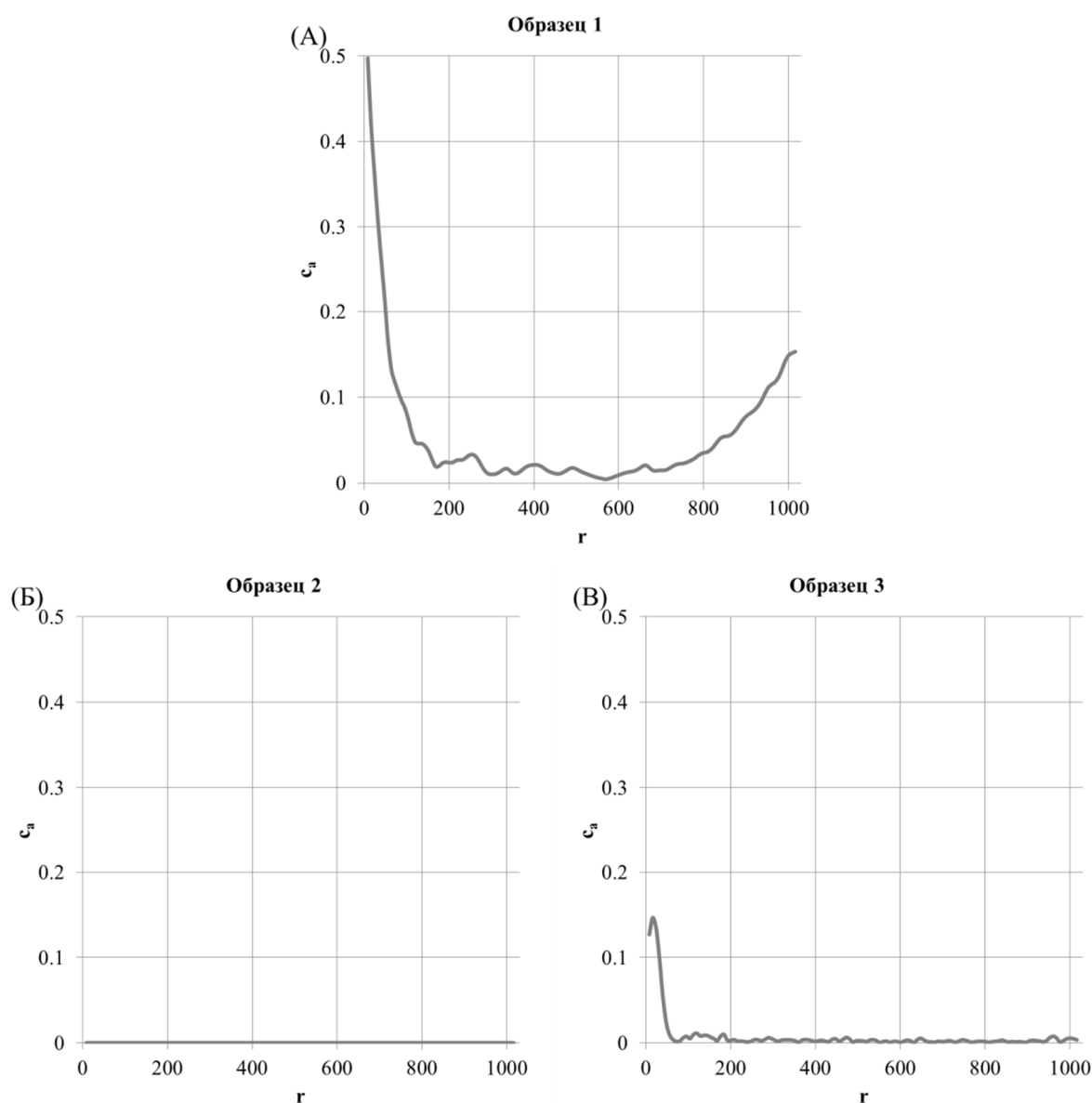


Рис. 14. Графики индекса анизотропии для искусственных образцов

На Рис. 15 изображены индексы анизотропии в зависимости от масштаба r для естественных образцов. Следует обратить внимание, что выбранный масштаб отличается от масштаба на Рис. 14, так как для реальных образцов эффекты не так явно выражены, как для валидационных. Можно считать, что Образец 4 практически изотропен в середине диапазона значений r , однако присутствует слабо выраженная анизотропия на масштабах порядка размера пор и на масштабах, сравнимых с размером образца. Для Образцов 5, 6 и 7 анизотропия присутствует на всех интервалах масштабов и увеличивается на масштабах, сопоставимых с размером образца.

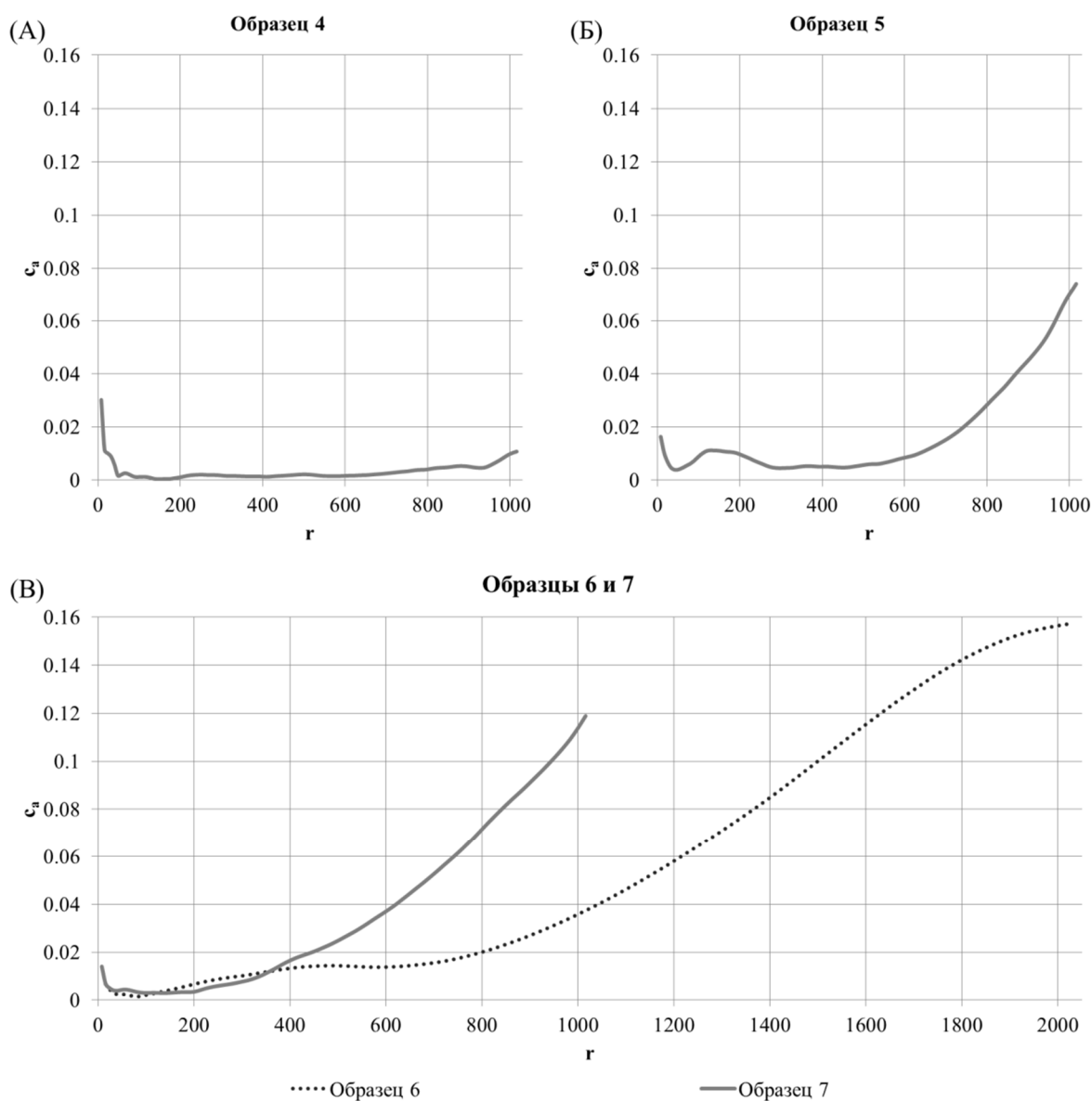


Рис. 15. Графики индекса анизотропии для реальных образцов

На Рис. 16 изображены компоненты анизотропии для искусственных валидационных образцов, за исключением Образца 2, который был заведомо сгенерирован изотропным.

Можно видеть, что для Образца 1 на масштабах до 200 вокселей присутствует и планарная, и линейная составляющая, а на больших масштабах, как и следовало ожидать, преобладает планарная анизотропия. Для Образца 3, как уже было отмечено, анизотропия присутствует только на масштабах, сравнимых с размером пор, и на этих масштабах присутствует как линейная, так и планарная составляющие.

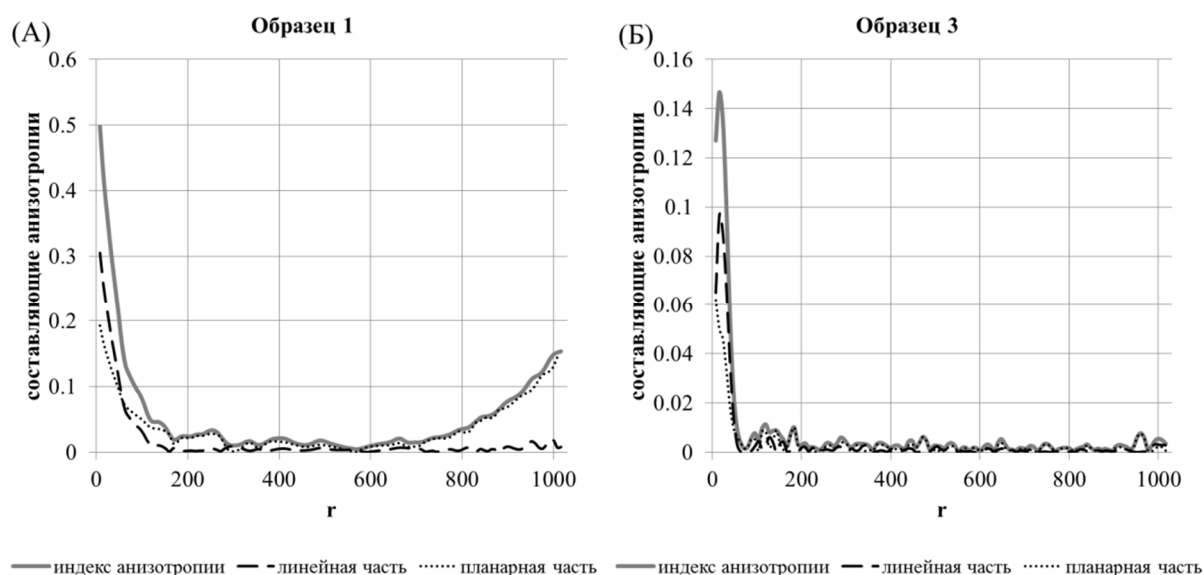


Рис. 16. Составляющие анизотропии для искусственных образцов

На Рис. 17 изображены компоненты анизотропии для естественных образцов. По ним можно сделать следующие выводы:

- У Образца 4 на масштабах порядка размера пор ($r < 50$ вокс.) преобладает планарная анизотропия, на масштабах порядка размера образца – присутствуют обе компоненты, в середине диапазона анизотропия незначительна.
- Для Образца 5 в диапазоне масштабов $r < 2000$ вокс. преобладает планарная анизотропия, на масштабах $500 < r < 700$ вокс. – линейная

анизотропия, а на масштабах порядка размера образца присутствуют обе составляющие.

Интересно сравнить поведение компонент анизотропии для Образца 6 и его части, Образца 7. Видно, что на масштабах порядка размера пор ($r < 50$ вокс.) для обоих образцов присутствует преимущественно планарная компонента анизотропии. Однако на больших масштабах при увеличении общем увеличении индекса анизотропии для Образца 7 продолжает преобладать планарная составляющая, тогда как для Образца 6 вклад линейной анизотропии становится также существенным. Это подтверждает вывод о том, что в данном случае центральная часть не является репрезентативным объемом для оценивания свойств всего образца.

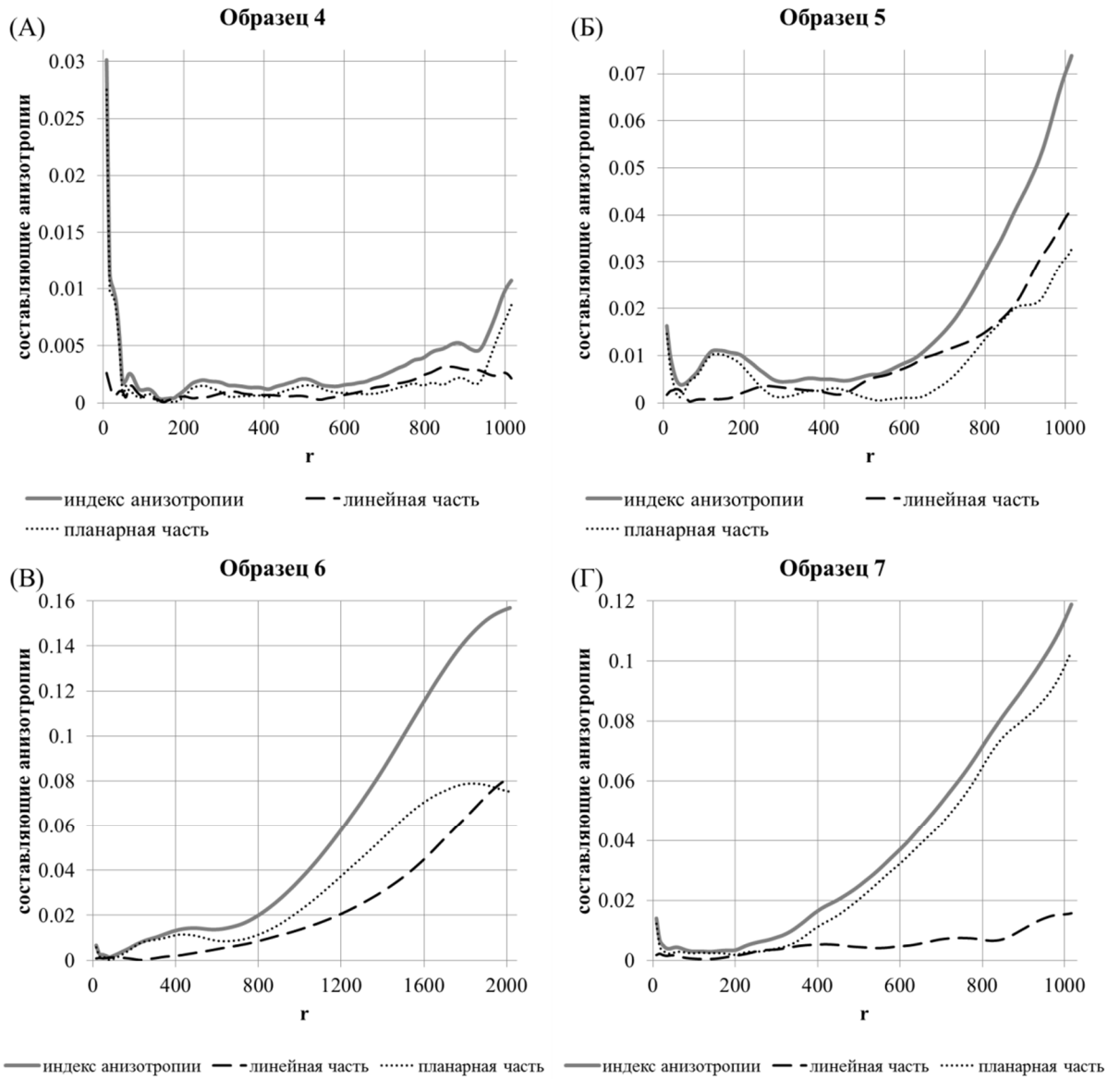


Рис. 17. Составляющие анизотропии для реальных образцов

5.5 Спектральный анализ исследуемых образцов

На Рис. 18 и Рис. 19 изображены графики нулевой гармоники спектральной плотности для валидационных и естественных образцов. Для Образца 1 можно наблюдать один очень узкий пик. Это говорит о том, что корреляционная длина этого образца велика (в данном случае – больше его размеров). Для Образца 2 и Образца 3, как и ожидалось, видны не один, а два пика.

Также по этим графикам, используя формулу (4.37), можно оценить эффективную корреляционную длину образцов. Результаты такой оценки приведены в **Таблице 4**.

Таблица 4. Эффективные корреляционные длины

№ образца	Описание образца	$l_{эфф.}(вокс.)$
1	Искусственный слоистый образец	2603.61
2	Искусственный образец со сферическими порами	40.87
3	Искусственный образец с эллиптическими порами	40.82
4	Берейский песчаник	26.19
5	Аркозовый песчаник	57.77
6	Слабоуплотненный песчаник	180.94
7	Слабоуплотненный песчанник, часть образца 6	11.32

Как было сказано в п. 5.3, для исследуемых естественных образцов можно предположить несколько корреляционных длин, поэтому имеет смысл применить методику получения спектра корреляционных длин разложением спектральной плотности по функциям Гаусса, изложенную в п. 4.3. Соответствующие результаты приведены в **Таблице 5**.

Видно, что для Образца 4 обе корреляционных длины меньше 100 вокселей, причем их значения хорошо согласуются с выходами на пороговые значения на

Рис. 13А. Для Образца 5 меньшие корреляционные длины такого же порядка, как для Образца 4, но есть и существенно большая корреляционная длина. Это соответствует наличию более крупных неоднородностей, которые можно визуально (и качественно) можно наблюдать на изображении порового пространства образца (Рис. 10Б).

Опять же, интересно сравнение Образца 6 и его центральной части, Образца 7. Видно, что для Образца 7 присутствует корреляционная длина, которая больше размера самого образца. Это ни в коем случае не является ошибкой, а говорит о том, что в исследуемой микроструктуре существуют неоднородности, масштаб которых больше размера образца, и, соответственно, для извлечения представительной информации необходим образец большего размера. Подтверждением этому является то, что для Образца 6 наибольшая корреляционная длина больше размера Образца 7, но не превышает размеров самого Образца 6. Таким образом, Образец 7 не является репрезентативным для данной микроструктуры, а Образец 6 – является. Это означает, что предложенная методика может применяться как способ оценки минимального размера микромоделей, необходимых при последующей стохастической генерации множеств реализаций, статистически идентичных исходным объектам.

Таблица 5. Спектр корреляционных длин для реальных образцов при разложении по функциям Гаусса

№ образца	Описание образца	Аппроксимация спектральной плотности $f(u)$	l_* (вокс.)
4	Берейский песчаник	$4.939 \exp\left(-\left(\frac{x}{0.1211}\right)^2\right) + 12.28 \exp\left(-\left(\frac{x}{0.03783}\right)^2\right)$	18.35
			58.7
5	Аркозовый песчаник	$5.66 \exp\left(-\left(\frac{x}{0.1107}\right)^2\right) + 20.2 \exp\left(-\left(\frac{x}{0.002889}\right)^2\right) + 14.89 \exp\left(-\left(\frac{x}{0.299}\right)^2\right)$	20.06
			74.29
			768.93
6	Слабо-уплотненный песчаник	$8.471 \exp\left(-\left(\frac{x}{0.01726}\right)^2\right) + 32.85 \exp\left(-\left(\frac{x}{0.001449}\right)^2\right) + 14.42 \exp\left(-\left(\frac{x}{0.59}\right)^2\right)$	37.65
			128.7
			1533.08
7	Слабо-уплотненный песчаник, часть образца 6	$7.189 \exp\left(-\left(\frac{x}{0.1071}\right)^2\right) + 9.388 \cdot 10^9 \exp\left(-\left(\frac{x}{0.0004394}\right)^2\right) + 10.94 \exp\left(-\left(\frac{x}{0.2527}\right)^2\right)$	20.74
			87.9
			5055.62

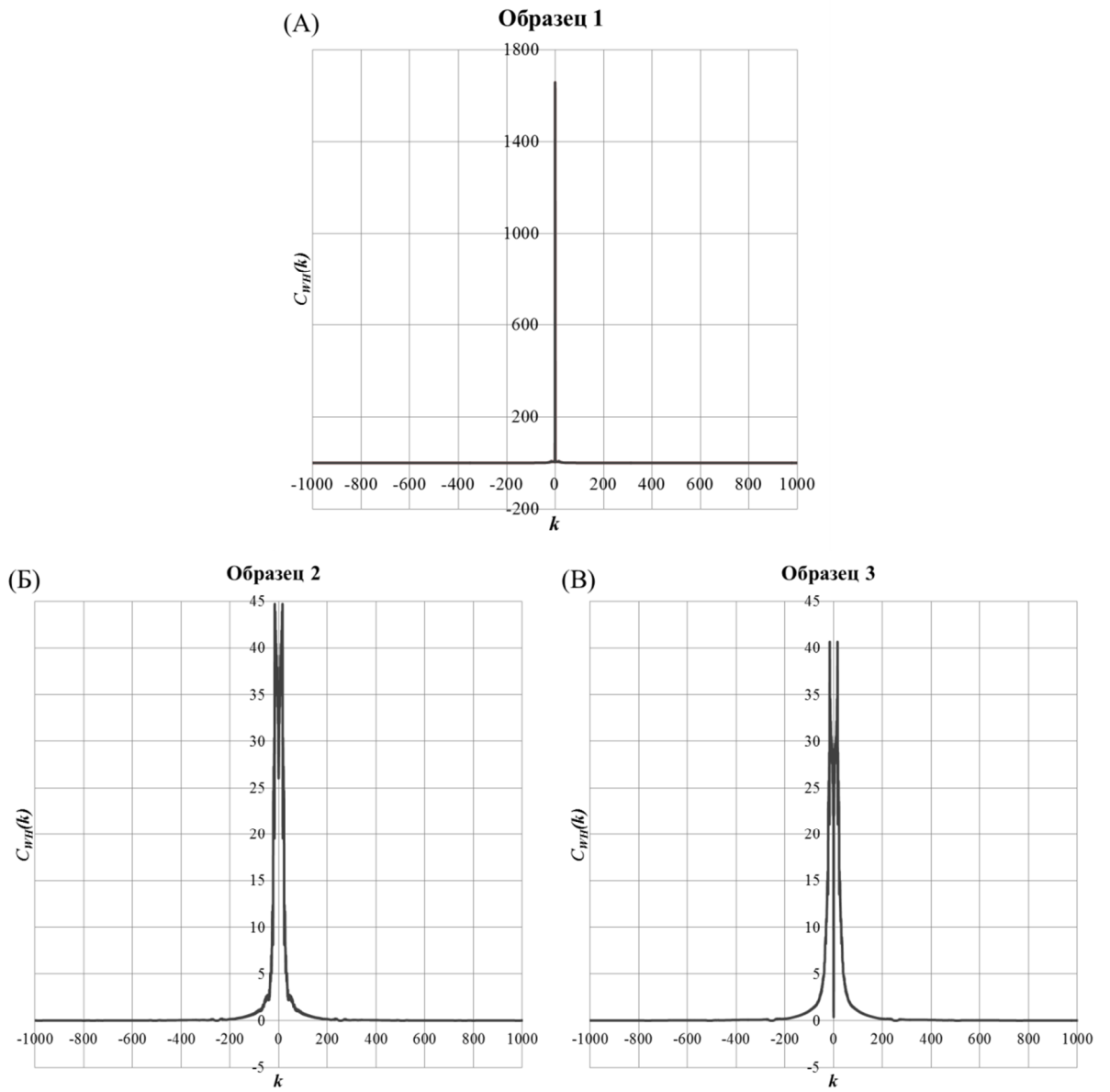


Рис. 18. Графики спектральной плотности нулевой гармоники для искусственных образцов

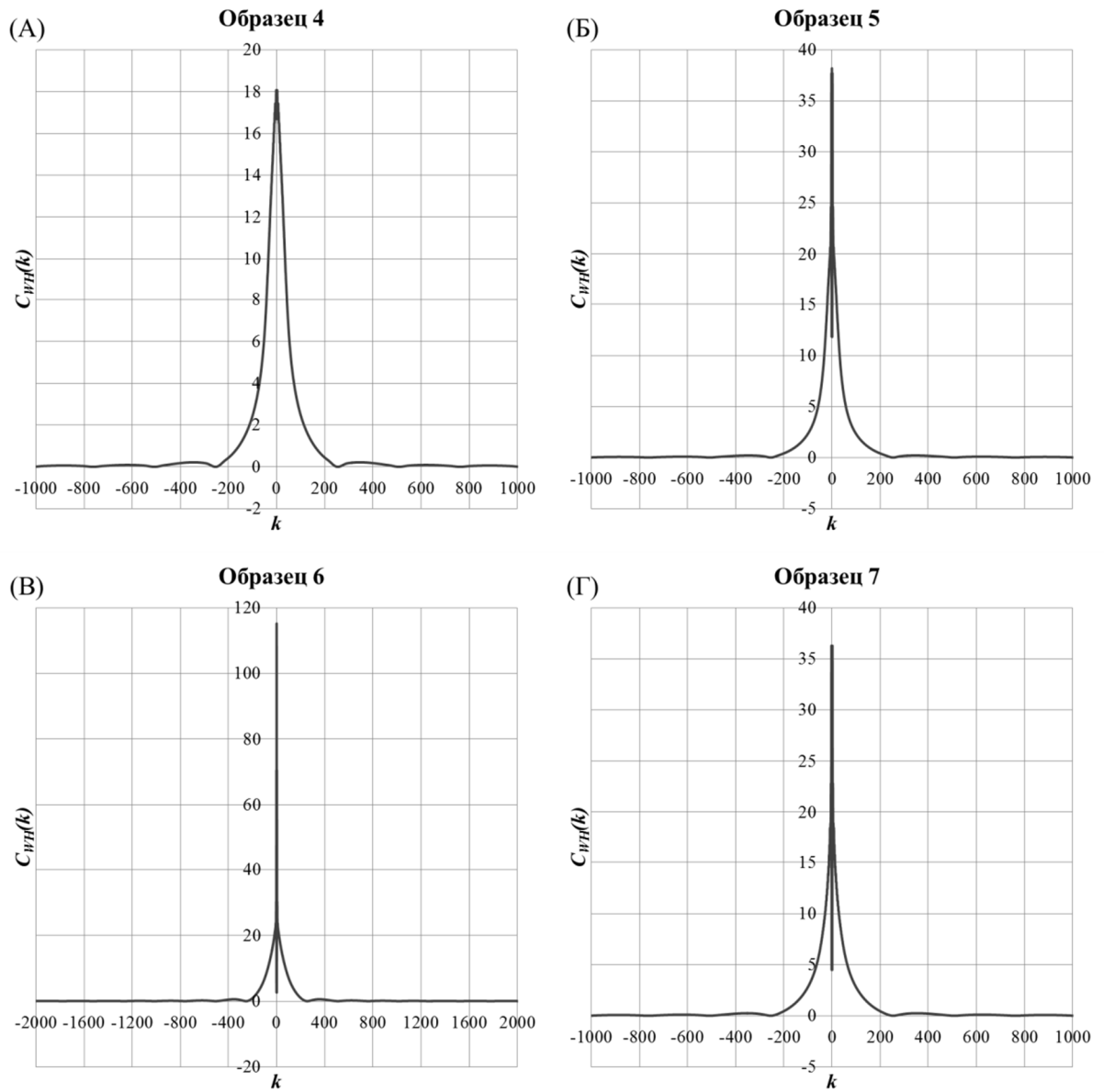


Рис. 19. Графики спектральной плотности нулевой гармоники для естественных образцов

Заключение

В данной работе продемонстрировано использование методики адаптации геостатистических методов для решения задач анализа микроструктурных свойств горных пород на основании данных рентгеновской микротомографии.

Было показано, что эмпирические поля корреляционных функций микротомографических моделей горных пород содержат информацию о структурных свойствах пород, в частности, об анизотропии на различных масштабах, а также о масштабах неоднородностей. Для применения методов геостатистического анализа к задачам классификации и типизации трехмерных микротомографических моделей использовались:

- метод разложения поля вариограммы по сферическим гармоникам, что позволило оценить и геометрически классифицировать анизотропию на различных масштабах;
- метод спектрального представления ковариации, что позволило выявить масштабы неоднородностей и оценить корреляционные длины.

Эти инструменты анализа были реализованы в виде пакета программ на языке С (в том числе с использованием параллельных вычислений на кластере из видеопроцессоров) и в вычислительной среде MATLAB. Для образцов большого размера в модуле вычисления корреляционных функций использовались параллельные вычисления на кластере из видеопроцессоров.

Валидация описанных методов производилась на искусственно сгенерированных образцах с различными характерными особенностями (анизотропный слоистый образец; изотропный образец со сферическими порами; анизотропный на масштабах порядка размера пор образец с эллиптическими порами).

Метод разложения поля вариограммы корректно выявляет наличие/отсутствие анизотропии, а также позволил оценить ее типы на различных масштабах.

Метод спектрального представления ковариации корректно обнаруживает периодическую структуру образцов со сферическими и эллиптическими порами и тот факт, что масштаб неоднородности слоистого образца превышает его размер.

После валидации перечисленные методы были применены к микротомограммам реальных песчаников, различных по свойствам. Их поля вариограмм также позволили получить индексы анизотропии и отдельно их планарные и линейные компоненты. По полям ковариации были получены спектры корреляционных длин образцов.

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что разработанная в данной работе методика является перспективным инструментом для анализа и систематизации микротомографической информации о строении горных пород с возможностью перехода в дальнейшем к стохастической генерации множеств реализаций, статистически идентичных исходным объектам.

Список цитируемой литературы

- [1] Carlson W.D. Three-dimensional imaging of earth and planetary materials / W.D. Carlson // *Earth and Planetary Science Letters*. – 2006. – Vol. 249. – № 3–4. – P. 133-147.
- [2] Radon J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten / J. Radon // *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse*. – Leipzig: Weidmannsche Buchhandlung, 1917. – Vol. 69. – P. 262-277.
- [3] Hounsfield G.N. Computerized transverse axial scanning (tomography): Part 1. Description of system / G.N. Hounsfield // *British Journal of Radiology*. – 1973. – Vol. 46. – Computerized transverse axial scanning (tomography). – № 552. – P. 1016-1022.
- [4] Cormack A.M. Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications / A.M. Cormack // *Journal of Applied Physics*. – 1963. – Vol. 34. – № 9. – P. 2722-2727.
- [5] Cormack A.M. Representation of a function by its line integrals, with some radiological Applications. II / A.M. Cormack // *Journal of Applied Physics*. – 1964. – Vol. 35. – № 10. – P. 2908-2913.
- [6] Baruchel J. X-Ray Tomography in Material Science / J. Baruchel, J.-Y. Buffière, É. Maire. – Paris: Hermès science publications, 2000. – 210 p.
- [7] Elliott J.C. X-ray microtomography / J.C. Elliott, S.D. Dover // *Journal of Microscopy*. – 1982. – Vol. 126. – № 2. – P. 211–213.
- [8] Grodzins L. Optimum energies for x-ray transmission tomography of small samples: Applications of synchrotron radiation to computerized tomography I / L. Grodzins // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*. – 1983. – Vol. 206. – Optimum energies for x-ray transmission tomography of small samples. – № 3. – P. 541-545.

- [9] Grodzins L. Critical absorption tomography of small samples: Proposed applications of synchrotron radiation to computerized tomography II / L. Grodzins // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. – 1983. – Vol. 206. – Critical absorption tomography of small samples. – № 3. – P. 547-552.
- [10] Computed tomography using synchrotron radiation / A.C. Thompson [et al.] // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. – 1984. – Vol. 222. – № 1–2. – P. 319-323.
- [11] The largest and smallest X-ray computed tomography systems / P. Burstein [et al.] // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. – 1984. – Vol. 221. – Proceedings of the International Workshop on X- and γ -Ray Imaging Techniques. – P. 207-212.
- [12] Feldkamp L.A. 3-D X-ray computed tomography / L.A. Feldkamp, G. Jesion // Proceedings of the Twelfth Annual Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation. Williamsburg, June 23-28, 1985. – New York: Plenum Press, 1986. – Vol. 5A. – P. 555-565.
- [13] X-ray computed tomography with 50- μm resolution / F.H. Seguin [et al.] // Applied Optics. – 1985. – Vol. 24. – № 23. – P. 4117-4123.
- [14] Feldkamp L.A. Practical cone-beam algorithm / L.A. Feldkamp, L.C. Davis, J.W. Kress // Journal of the Optical Society of America A. – 1984. – Vol. 1. – № 6. – P. 612-619.
- [15] High resolution tomography with chemical specificity / U. Bonse [et al.] // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. – 1986. – Vol. 246. – № 1-3. – P. 644-648.
- [16] Flannery B.P. Observational strategies for three-dimensional synchrotron microtomography / B.P. Flannery, W.G. Roberge // Journal of Applied Physics. – 1987. – Vol. 62. – № 12. – P. 4668-4674.
- [17] Three-dimensional X-ray microtomography / B.P. Flannery [et al.] // Science. – 1987. – Vol. 237. – № 4821. – P. 1439-1444.

- [18] Hirano T. High resolution monochromatic tomography with x-ray sensing pickup tube / T. Hirano, K. Usami, K. Sakamoto // Review of Scientific Instruments. – 1989. – Vol. 60. – № 7. – P. 2482-2485.
- [19] Spanne P. Computerized microtomography using synchrotron radiation from the NSLS / P. Spanne, M.L. Rivers // Proceeding of the Ninth International Conference on the Application of Accelerators in Research and Industry Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms. – 1987. – Vols. 24–25, Part 2. – P. 1063-1067.
- [20] Improvement of spatial resolution of monochromatic X-ray CT using synchrotron radiation / K. Sakamoto [et al.] // Japanese Journal of Applied Physics. – 1988. – Vol. 27, Part 1. – № 1. – P. 127-132.
- [21] X-Ray computerized tomography using monochromated synchrotron radiation / Y. Suzuki [et al.] // Japanese Journal of Applied Physics. – 1988. – Vol. 27, Part 2. – № 3. – P. L461-L464.
- [22] A system for dual energy microtomography of bones / K. Engelke [et al.] // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. – 1989. – Vol. 274. – № 1-2. – P. 380-389.
- [23] Petrovic A.M. Soil bulk density analysis in three dimensions by computed tomographic Scanning / A.M. Petrovic, J.E. Siebert, P.E. Rieke // Soil Science Society of America Journal. – 1982. – Vol. 46. – № 3. – P. 445-450.
- [24] Hainsworth J.M. The use of computer assisted tomography to determine spatial distribution of soil water content / J.M. Hainsworth, L.A.G. Aylmore // Australian Journal of Soil Research. – 1983. – Vol. 21. – № 4. – P. 435-443.
- [25] Computed Tomographic Analysis of Meteorite Inclusions / J.R. Arnold [et al.] // Science. – 1983. – Vol. 219. – № 4583. – P. 383-384.
- [26] Vinegar H.J. X-Ray CT and NMR Imaging of Rocks / H.J. Vinegar // Journal of Petroleum Technology. – 1986. – Vol. 38. – № 3.

- [27] Vinegar H.J. Tomographic imaging of three-phase flow experiments / H.J. Vinegar, S.L. Wellington // *Review of Scientific Instruments*. – 1987. – Vol. 58. – № 1. – P. 96-107.
- [28] Computed tomography of Archaeopteryx / B. Haubitz [et al.] // *Paleobiology*. – 1988. – Vol. 14. – № 2. – P. 206-213.
- [29] Analysis of the internal structure of rocks and characterization of mechanical deformation by a non-destructive method: X-ray tomodensitometry / S. Raynaud [et al.] // *Tectonophysics*. – 1989. – Vol. 159. – № 1–2. – P. 149-159.
- [30] Renter J.A.M. Applications of computerized tomography in sedimentology / J.A.M. Renter // *Marine Geotechnology*. – 1989. – Vol. 8. – № 3. – P. 201-211.
- [31] Dului O.G. Computer axial tomography in geosciences: an overview / O.G. Dului // *Earth-Science Reviews*. – 1999. – Vol. 48. – № 4. – P. 265-281.
- [32] Ketcham R.A. Acquisition, optimization and interpretation of X-ray computed tomographic imagery: applications to the geosciences / R.A. Ketcham, W.D. Carlson // *Computers & Geosciences*. – 2001. – Vol. 27. – № 4. – P. 381–400.
- [33] Applications of X-ray computed tomography in the geosciences: Geological Society, London, Special Publications / F. Mees [et al.] // *Applications of X-ray computed tomography in the geosciences*. – 2003. – Vol. 215. – P. 1-6.
- [34] Pore level imaging of fluid transport using synchrotron X-ray microtomography / M. Coles [et al.] // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. – 1998. – Vol. 19. – № 1–2. – P. 55-63.
- [35] Bertels S.P. Measurement of aperture distribution, capillary pressure, relative permeability, and in situ saturation in a rock fracture using computed tomography scanning / S.P. Bertels, D.A. Dicarolo, M.J. Blunt // *Water Resources Research*. – 2001. – Vol. 37. – № 3. – P. 649–662.
- [36] Kalukin A.R. Principal components analysis of multienergy X-ray computed tomography of mineral samples / A.R. Kalukin, M. Van Geet, R. Swennen //

- IEEE Transactions on Nuclear Science. – 2000. – Vol. 47. – № 5. – P. 1729-1736.
- [37] Remeysen K. Application of microfocus computed tomography in carbonate reservoir characterization: Possibilities and limitations / K. Remeysen, R. Swennen // *Marine and Petroleum Geology*. – 2008. – Vol. 25. – № 6. – P. 486-499.
- [38] Gualda G.A.R. Quantitative 3D petrography using x-ray tomography: Application to Bishop Tuff pumice clasts / G.A.R. Gualda, M. Rivers // *Journal of Volcanology and Geothermal Research*. – 2006. – Vol. 154. – № 1–2. – P. 48-62.
- [39] Geet M. Van. Towards 3-D petrography: application of microfocus computer tomography in geological science / M. Van Geet, R. Swennen, M. Wevers // *Computers & Geosciences*. – 2001. – Vol. 27. – № 9. – P. 1091-1099.
- [40] Демьянов А.Ю. Основы метода функционала плотности в гидродинамике / А.Ю. Демьянов, О.Ю. Динариев, Н.В. Евсеев. – М.: Физматлит, 2009. – 312 с.
- [41] Demianov A. Density functional modelling in multiphase compositional hydrodynamics / A. Demianov, O. Dinariev, N. Evseev // *The Canadian Journal of Chemical Engineering*. – 2011. – Vol. 89. – № 2. – P. 206–226.
- [42] Wellington S.L. X-Ray Computerized Tomography / S.L. Wellington, H.J. Vinegar // *Journal of Petroleum Technology*. – 1987. – Vol. 39. – № 8.
- [43] Stock S.R. MicroComputed Tomography: Methodology and Applications. *MicroComputed Tomography* / S.R. Stock. – Boca Raton: CRC Press, 2010. – 366 p.
- [44] Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций: с примерами из метеорологии / А.М. Яглом. – М.: Гидрометеоиздат, 1981. – 288 с.
- [45] Ohser J. Statistical analysis of microstructures in materials science / J. Ohser, F. Mücklich. – Chichester: John Wiley & Sons, 2000. – 381 p.

- [46] Torquato S. Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties / S. Torquato. – New York: Springer-Verlag, 2002. – 730 p.
- [47] Efficient extraction of networks from three-dimensional porous media / Z. Jiang [et al.] // Water Resources Research. – 2007. – Vol. 43. – № 12. – W12S03.
- [48] Закс Ш. Теория статистических выводов / Ш. Закс. – М.: Мир, 1975. – 776 с.
- [49] Sheskin D.J. Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures: Third Edition. Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures / D.J. Sheskin. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2003. – 1230 p.
- [50] Strebelle S. Conditional Simulation of Complex Geological Structures Using Multiple-Point Statistics / S. Strebelle // Mathematical Geology. – 2002. – Vol. 34. – № 1. – P. 1-21.
- [51] Демьянов В.В. Геостатистика: теория и практика / В.В. Демьянов. – М.: Наука, 2010. – 327 с.
- [52] Jiao Y. Modeling heterogeneous materials via two-point correlation functions: Basic principles / Y. Jiao, F.H. Stillinger, S. Torquato // Physical Review E. – 2007. – Vol. 76. – № 3. – P. 031110.
- [53] Okabe H. Pore space reconstruction of vuggy carbonates using microtomography and multiple-point statistics / H. Okabe, M.J. Blunt // Water Resources Research. – 2007. – Vol. 43. – № 12. – W12S02.
- [54] Lin C. Microgeometry I: Autocorrelation and rock microstructure / C. Lin // Journal of the International Association for Mathematical Geology. – 1982. – Vol. 14. – № 4. – P. 343-360.
- [55] Bryon D.N. The interpretation of granitic textures from serial thin sectioning, image analysis and three-dimensional reconstruction / D.N. Bryon, M.P. Atherton, R.H. Hunter // Mineralogical Magazine. – 1995. – Vol. 59. – № 2. – P. 203-211.

- [56] Häder D.P. Image analysis: methods and applications / D.P. Häder. – Boca Raton: CRC Press, 2000.
- [57] Vogel J.R. Geostatistics and the representative elementary volume of gamma ray tomography attenuation in rock cores: Geological Society, London, Special Publications / J.R. Vogel, G.O. Brown // Applications of X-ray computed tomography in the geosciences. – 2003. – Vol. 215. – P. 81-93.
- [58] Adler R.J. The Geometry of Random Fields: Classics in Applied Mathematics. Vol. 62 / R.J. Adler. – Chichester: John Wiley & Sons, 1981. – 280 p.
- [59] Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. В двух частях. Часть 2. Случайные поля / С.М. Рытов, Кравцов Ю.А., В.И. Татарский. – М.: Наука, 1978. – 466 с.
- [60] VanMarcke E. Random Fields: Analysis and Synthesis / E. VanMarcke. – Singapore: World Scientific Publishing Company, 2010. – 363 p.
- [61] Ripley B.D. Statistical Inference for Spatial Processes / B.D. Ripley. – New York: Cambridge University Press, 1991. – 162 p.
- [62] Christakos G. Modern Spatiotemporal Geostatistics / G. Christakos. – New York: Oxford University Press, 2000. – 310 p.
- [63] Christakos G. Random Field Models in Earth Sciences / G. Christakos. – New York: Academic Press, 1992. – 512 p.
- [64] Freeden W. Spherical Functions of Mathematical Geosciences: A Scalar, Vectorial, and Tensorial Setup / W. Freeden, M. Schreiner. – Berlin: Springer-Verlag, 2008. – 618 p.
- [65] Edmonds A.R. Angular Momentum in Quantum Mechanics / A.R. Edmonds. – Princeton: Princeton University Press, 1996. – 166 p.
- [66] Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу / Б.Е. Победря. – М.: Издательство МГУ, 1974. – 206 с.
- [67] Sagnotti L. Magnetic Anisotropy / L. Sagnotti // Encyclopedia of Solid Earth Geophysics ed. H. Gupta. – Dordrecht: Springer, 2011. – P. 717-729.

- [68] Processing and visualization for diffusion tensor MRI / C.-F. Westin [et al.] // Medical Image Analysis. – 2002. – Vol. 6. – № 2. – P. 93-108.
- [69] Weickert J. Visualization and Processing of Tensor Fields / J. Weickert, H. Hagen. – Berlin: Springer, 2006. – 477 p.
- [70] Granlund G.H. Signal Processing for Computer Vision / G.H. Granlund, H. Knutsson. – Boston: Springer, 2010. – 450 p
- [71] Priestley M.B. Spectral Analysis and Time Series: Univariate series. Vol. 1 / M.B. Priestley. – New York: Academic Press, 1982. – 968 p.
- [72] Bloomfield P. Fourier analysis of time series: an introduction. Fourier analysis of time series / P. Bloomfield. – New York: Wiley-Interscience, 2000. – 261 p.
- [73] Chatfield C. The Analysis of Time Series: An Introduction. The Analysis of Time Series / C. Chatfield. – London: Chapman & Hall/CRC, 2003. – 345 p.
- [74] Schabenberger O. Statistical Methods for Spatial Data Analysis / O. Schabenberger, C.A. Gotway. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2005. – 584 p.
- [75] Chilès J.P. Geostatistics: modeling spatial uncertainty / J.P. Chilès, P. Delfiner. – New York: John Wiley & Sons, 1999. – 695 p.
- [76] И Гельфанд И.М. Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения / И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро. – М.: Наука, 1958. – 368 с.
- [77] Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко. – СПб: Питер, 2002. – 608 с.

Список публикаций

Статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК

1. Свительман В.С. Геостатистический анализ микроструктуры горных пород с использованием метода разложения по сферическим гармоникам / В.С. Свительман, О.Ю. Динариев // Труды Московского физико-технического института. – 2012. – Т. 4. – № 3(5). – С. 211-219.
2. Динариев О.Ю. Геостатистический анализ микротомограмм горных пород: некоторые новые подходы и результаты / О.Ю. Динариев, В.С. Свительман // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2013. – Геостатистический анализ микротомограмм горных пород. – № 2. – С. 16-21.
3. Svitelman V. Geostatistical approach to the anisotropy analysis of 3D rock microtomographic models / V. Svitelman, O. Dinariev // Computers & Geosciences. – 2013. – Vol. 57. – P. 116-123. doi: 10.1016/j.cageo.2013.04.007

Другие статьи

1. Савельева Е.А. Использование вариограмм, ковариаций и спектральной плотности при геостатистическом анализе микроструктуры горных пород / Е.А. Савельева, О.Ю. Динариев, В.С. Свительман. // Препринт ИБРАЭ РАН № ИБРАЭ-2013-02 – М.: ИБРАЭ РАН, 2013. – 32 С.

Тезисы докладов на конференциях

1. Свительман В.С, Динариев О.Ю. Геостатистический анализ микромоделей горных пород» // Труды 53-й Научной конференции МФТИ, М.: МФТИ, 2010 – часть 3, том II, с. 132-133

2. Свительман В.С, Динариев О.Ю. Исследование статистической однородности и изотропности микроструктуры горных пород с использованием вариограммного анализа» // Сборник трудов XII научной школы молодых учёных ИБРАЭ РАН, Москва, 2011.
3. Svitelman V., Dinariev O., 2011. The method of spherical harmonics in rock microstructural geostatistics In: Marschallinger, R., Zobl, F. (Eds.), Mathematical Geosciences at the Crossroads of Theory and Practice, Proceedings of the IAMG2011 conference, September 5–9 2011, Salzburg, Austria, 460–469. doi:10.5242/iamg.2011.0048.
4. Свительман В.С, Динариев О.Ю. Применение геостатистических методов для анализа микротомограмм горных пород // Труды 54-й Научной конференции МФТИ, М.: МФТИ, 2011 – с. 97-98
5. Свительман В.С, Динариев О.Ю. Геостатистический анализ анизотропии микротомограмм горных пород // Сборник трудов XIII научной школы молодых учёных ИБРАЭ РАН, Москва, 2012.
6. Свительман В.С, Динариев О.Ю. Исследование анизотропии микроструктуры горных пород с использованием вариограммного анализа // Материалы конференции «Сочи 2012. Проблемы геологии и геофизики нефтегазовых бассейнов и резервуаров», ISBN 978-5-904807-13-9 – с. 105-108