

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША РАН

На правах рукописи

Таюрский Алексей Александрович

ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ НА ПРОЦЕССЫ В
ДВУХЖИДКОСТНОЙ КВАЗИНЕЙТРАЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

05.13.18 – “Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ”

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
к.ф.-м.н. Гавриков М.Б.

Москва – 2014

Оглавление

Введение.....	4
В1. Обзор гидродинамических моделей описания плазмы	4
В2. Цель исследования	13
В3. Содержание работы.....	14
Глава 1. Возбуждение несжимаемой плазмы под действием периодически меняющегося тока	24
1.1. Задача о возбуждении плазмы в цилиндрическом канале.....	25
1.2. Нахождение комплексных амплитуд	28
1.3. Анализ корней характеристического уравнения	32
1.4. Сравнение с классической МГД.....	37
1.5. Гидродинамический скин-эффект.....	39
1.6. Заключение	41
Глава 2. Стационарное течение несжимаемой плазмы в плоском канале	45
2.1. Установившиеся течения в плоском канале.....	46
2.2. Комплексификация системы уравнений.....	47
2.3. Качественное поведение течения и определяющие параметры.....	50
2.4. Гидродинамический “эффект Холла”	52
2.5. Случай подвижных и замагниченных стенок канала (течение Куэтта)....	53
2.6. Вычисление толщины погранслоя	54
2.7. Обсуждение результатов	56
Глава 3. Взаимодействие уединённых волн в сжимаемой плазме.....	61
3.1. Основные уравнения двухжидкостной электромагнитной гидродинамики (ЭМГД).....	62
3.2. Уравнения бегущих волн в холодной ЭМГД-плазме.....	63

3.3. Уединённые волны в покоящейся плазме	65
3.4. Методика численного моделирования уединенных волн.....	68
3.5. Результаты расчётов	73
3.6. Заключение	76
Глава 4. Затухание альфвеновских волн в диссипативной плазме	81
4.1. ЭМГД-уравнения.....	82
4.2. Альфвеновские волны в ЭМГД	85
4.3. Преобразование энергии в альфвеновской волне.....	87
4.4. Временное затухание альфвеновских волн	89
4.5. Решение уравнений для амплитуд в незамагниченной невязкой плазме .	91
4.6. Релаксация температур и поглощение альфвеновской волны	93
4.7. Релаксация температур и особые точки	95
4.8. Сравнение с линейной теорией.....	100
4.9. Постановка задачи о пространственном поглощении.....	101
4.10. Численный метод пространственного поглощения.....	104
4.11. Результаты расчётов	106
Заключение	113
Список литературы	114

Введение

В1. Обзор гидродинамических моделей описания плазмы

Уравнения гидродинамики плазмы являются одним из основных инструментов исследования её динамики.

Простейшая гидродинамическая модель динамики плазмы была предложена Х. Альфвеном [1] и составляет содержание теории классической магнитной гидродинамики (МГД):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}] \\ \frac{dp}{dt} + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{U} = (\gamma - 1) \frac{j^2}{\sigma}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{U}, \mathbf{H}] \end{aligned} \quad (1)$$

Согласно классической МГД-теории плазма является единой сжимаемой и проводящей электрической ток сплошной средой с параметрами ρ , p , \mathbf{U} и т.д., взаимодействующей с магнитным полем. При этом структура плазменного вещества – наличие электронов, ионов, нейтралов и пр. – не рассматривается. Система (1) выписана в предположении, что плазменная сплошная среда представляет собой идеальный политропный газ с показателем адиабаты γ , а проводимость плазменной среды равна σ .

Отказ от учёта структуры плазмы в классической МГД приводит к тому, что электрический ток \mathbf{j} никак не связан с движением заряженных частиц, а появляется в МГД-теории как ротация магнитного поля \mathbf{H} . Это приводит к ряду парадоксов [7]. Можно стандартным способом [30] обобщить уравнения классической МГД (1), учтя диссипативные процессы – гидродинамические вязкости электронов и ионов, а также их теплопроводности.

Попытка избавиться от недостатков МГД-теории привела к появлению холловской МГД [36]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{U} &= 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\nabla p_{\Sigma} + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}] \\
\frac{dp_i}{dt} + \gamma p_i \operatorname{div} \mathbf{U} &= 0, \quad \frac{dp_e}{dt} + \gamma p_e \operatorname{div} \mathbf{U} - \frac{m_i}{Ze} \rho^{\gamma-1} \mathbf{j} \nabla \left(\frac{p_e}{\rho^{\gamma}} \right) = (\gamma - 1) \frac{j^2}{\sigma} \\
\mathbf{E} &= \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{U}, \mathbf{H}] - \frac{m_i}{Zec\rho} [\mathbf{j}, \mathbf{H}] - \frac{m_i}{Zep} \nabla p_e \\
\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{U} = \mathbf{v}_i$, а джоулево тепло выделяется только в электронной компоненте, при этом $\rho = \rho_i$, $\mathbf{v}_e = \mathbf{U} - \frac{m_i}{Zep} \mathbf{j}$, $\rho_e = 0$. Таким образом, в холловской МГД восстанавливаются параметры электронов и ионов. Кроме того, в холловской МГД-теории появляется дисперсия, которая, однако, для течений под косым углом к магнитному полю имеет неправильный характер, поскольку одна из звуковых скоростей обращается в бесконечность. Поэтому наиболее успешные применения холловской МГД-теории относятся к течениям поперёк силовых линий магнитного поля.

В ряде задач, например, при исследовании короткоимпульсных сильноточных разрядов (быстрый пинч [49], сильноточный диод [6], плазменный фокус [46], вакуумная искра [26] и др.), определяющим является движение электронов, а ионы оказываются практически неподвижным фоном. В этом случае используется модель электронной магнитной гидродинамики (ЭМГ), где считается $v_i \cong 0$, $v_e = -\frac{\mathbf{j}}{en}$, а динамика магнитного поля описывается уравнением [25]:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \left[\frac{\mathbf{j}}{en}, \mathbf{H} \right] + c \operatorname{rot} \frac{\mathbf{j}}{\sigma} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} \tag{3}$$

В частности, при $\sigma = +\infty$ магнитное поле оказывается “вмороженным” в электронную (а не в ионную, как в классической МГД (1)) компоненту плазмы. Полная система уравнений ЭМГ-теории выписывается в каждой конкретной

задаче отдельно [25], но в любом случае она включает в себя соотношения (3). Недостатком ЭМГ-теории является феноменологичность уравнений и, как следствие, проблемы с выполнением законов сохранения на решении ЭМГ-уравнений.

В ряде задач используются полугидродинамические и полукинетические модели динамики плазмы, в которых ионы рассматриваются в кинетическом приближении, а электроны – в гидродинамическом. Такие модели пригодны, например, для исследования поздней стадии динамики перетяжек Z-пинчей и плазменного фокуса [21] или эволюции разлёта плазменного сгустка [9]. Впервые такие гибридные модели плазмы были предложены в [56] и коротко могут быть описаны так.

Пусть состояние ионов в каждый момент времени t задаётся функцией распределения $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, являющейся решением кинетического уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \mathbf{F}_{\Lambda} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = St_i = St_{ii} + St_{ie} \quad (4)$$

где $\mathbf{F}_{\Lambda} = \frac{Ze}{m_i} (\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}])$ - сила Лоренца

$$St_{ii} = 0 \quad (5)$$

$$St_{ie} = \operatorname{div}_{\mathbf{v}} \frac{f \mathbf{R}_i}{m_i n_i}, \quad \mathbf{R}_i = \eta n_i n_e (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) = \frac{Zen_i \mathbf{j}}{\sigma}, \quad \eta = \frac{Ze^2}{\sigma}$$

Таким образом, ионы друг с другом не сталкиваются $St_{ii} = 0$ и учитываются только их столкновения с электронами. При этом

$$\mathbf{v}_i = \frac{1}{n_i} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f d\mathbf{v}, \quad n_i = \int_{\mathbb{R}^3} f d\mathbf{v}$$

функции от (t, \mathbf{x}) . Легко проверить, что

$$-\mathbf{R}_i = \int_{\mathbb{R}^3} m_i \mathbf{v} St_{ie} d\mathbf{v}$$

Таким образом, кинетическое уравнение (4), (5) это частный случай приближения Фоккера-Планка [32] с вырожденной диффузией в скоростном

пространстве. Можно считать, что ионы образуют бесстолкновительный ансамбль частиц в поле $\mathbf{F} = \mathbf{F}_\Lambda - \frac{\mathbf{R}_i}{m_i n_i}$, поскольку уравнение (4) эквивалентно уравнению:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0 \quad (6)$$

Основное свойство поля \mathbf{F} : $\operatorname{div}_{\mathbf{v}} \mathbf{F} = 0$, $\mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \operatorname{div}_{\mathbf{v}}(f \mathbf{F})$.

Для электронов считается выполненным гидродинамическое приближение, в котором проигнорирована инерция электронов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \rho_e \operatorname{div} \mathbf{v}_e &= 0 \\ \rho_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} &= 0 = -\nabla p_e - en_e (\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e, \mathbf{H}]) - \mathbf{R}_e \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{dp_e}{dt} + \gamma p_e \operatorname{div} \mathbf{v}_e = -(\gamma - 1) \mathbf{R}_i \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e), \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_e \cdot \nabla$$

где $\mathbf{R}_e = -\mathbf{R}_i$ и электроны считаются идеальным политропным газом с показателем адиабаты γ . Таким образом, уравнение импульсов для электронов даёт обобщённый закон Ома, а уравнение неразрывности оказывается следствием кинетического уравнения (6) и условия квазинейтральности $en_e = Zen_i$. В итоге уравнения гибридной модели плазмы сводятся к системе:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0, \quad \mathbf{F} = \frac{Ze}{m_i} (\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] - \frac{\mathbf{j}}{\sigma})$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial t} + \mathbf{v}_e \cdot \nabla p_e + \gamma p_e \operatorname{div} \mathbf{v}_e = (\gamma - 1) \frac{j^2}{\sigma}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i, \mathbf{H}] + \frac{1}{Zec n_i} [\mathbf{j}, \mathbf{H}] - \frac{\nabla p_e}{Zen_i}$$

где $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_i - \frac{\mathbf{j}}{Zen_i}$, $n_e = Zn_i$, $p_e = n_e T_e$ (T_e в эргах)

$$\mathbf{v}_i = \frac{1}{n_i} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f d\mathbf{v}, \quad n_i = \int_{\mathbb{R}^3} f d\mathbf{v}$$

Наиболее полное гидродинамическое описание плазмы достигается, если постулировать комплект гидродинамических уравнений для каждой плазменной компоненты и замкнуть полученную систему полной системой уравнений электродинамики Максвелла. Для полностью ионизованной двухкомпонентной плазмы имеем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p \pm en(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}]) + \operatorname{Div} \Pi - \mathbf{R} \quad (8)$$

$$\rho T \frac{dS}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{tr}(\Pi D) \pm \frac{m_{\pm}}{m_{\Sigma}} \langle \mathbf{R}, \mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_- \rangle + Q$$

$$TdS = d\varepsilon + pd\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T), \quad p = p(\rho, T), \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

где $\rho = mn$ и каждое уравнение системы (8) являет собой набор двух уравнений для газов заряженных частиц с массами m_{\pm} и зарядами $\pm e_{\pm}$ ($e_{\pm} \geq 0$) и все величины в (8), за исключением \mathbf{E} и \mathbf{H} , имеют индексы " \pm ". Система (8) замыкается электродинамическими уравнениями:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi(e_+ n_+ - e_- n_-)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = e_+ n_+ \mathbf{v}_+ - e_- n_- \mathbf{v}_- \quad (9)$$

В системе (8), (9) $D = [D_{\alpha\beta}^{\pm}]$, $D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial v_{\pm}^{\alpha} / \partial x_{\beta} + \partial v_{\pm}^{\beta} / \partial x_{\alpha})$ – тензор деформаций,

$\Pi = 2\mu D + ((\nu - \frac{2}{3}\mu) \operatorname{tr} D) I_3$ – тензор вязких напряжений, $\mathbf{R}_{\pm} = \pm \eta n_+ n_- (\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-)$ –

объёмная сила трения между компонентами, $Q_{\pm} = \pm b(T_- - T_+)$ – тепло,

передаваемое компонентами плазмы друг другу при упругих столкновениях,

$\mathbf{q} = -\chi \nabla T$ – закон Фурье для потока тепла в каждой плазменной компоненте.

Строго говоря, система (8), (9) нефизична, поскольку её гидродинамическая часть (8) инвариантна относительно преобразований Галилея, а электродинамическая часть (9) – относительно преобразований Лоренца. От этого недостатка можно избавиться, если внести в гидродинамические уравнения (8) релятивистские поправки. Тогда возникает система уравнений релятивистской электромагнитной гидродинамики (РЭМГД) плазмы [42], которая здесь не выписывается. Для нас важно лишь то, что нерелятивистские плазменные процессы описываются системой уравнений, полученной в результате перехода к нерелятивистскому пределу в РЭМГД-уравнениях. Предельная система получается из (8), (9), если в ней опустить ток смещения $-c^{-1} \partial \mathbf{E} / \partial t$ и член $\text{div} \mathbf{E}$. Подробнее эта процедура рассмотрена в [10]. Указанная предельная система называется уравнениями электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) плазмы и получается, если систему (8) замкнуть уравнениями электродинамики Максвелла для квазистационарного электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad e_+ n_+ - e_- n_- = 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot} \mathbf{E} &= 0, \quad \text{div} \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = e_+ n_+ \mathbf{v}_+ - e_- n_- \mathbf{v}_- \end{aligned} \quad (10)$$

Итак, ЭМГД-система состоит из уравнений (8), (10). Традиционно считалось, что система (8), (10) непригодна для исследования плазменных процессов, поскольку с выбрасыванием в (9) тока смещения, казалось, исчезало уравнение для электрического поля \mathbf{E} . Однако, это не так, и уравнение для \mathbf{E} может быть получено преобразованием системы (8), (10) к следующей одножидкостной форме [10]: $\rho = \rho_+ + \rho_-$, $\mathbf{U} = (\rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-) / \rho$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{U} &= 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \text{Div} \boldsymbol{\pi} &= \text{Div} \boldsymbol{\Pi} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho S_{\pm}}{\partial t} + \operatorname{div} \rho S_{\pm} \mathbf{U} \pm \lambda_{\mp} \operatorname{div} (S_{\pm} \mathbf{j}) = \frac{\lambda}{\lambda_{\pm} T_{\pm}} \{ \operatorname{div} (\chi_{\pm} \nabla T_{\pm}) + \operatorname{tr} (\Pi_{\pm} \mathbf{D}_{\pm}) + \frac{m_{\mp} j^2}{m_{\Sigma} \sigma} \pm b(T_{-} - T_{+}) \}$$

$$\mathbf{E} + \frac{c^2 \lambda_{+} \lambda_{-}}{4\pi \rho} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{U}, \mathbf{H}] + \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} \mathbf{W} \quad (11)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}$$

$$T_{\pm} dS_{\pm} = d\varepsilon_{\pm} + p_{\pm} d\left(\frac{1}{\rho_{\pm}}\right), \quad \varepsilon_{\pm} = \varepsilon_{\pm}(\rho_{\pm}, T_{\pm}), \quad p_{\pm} = p_{\pm}(\rho_{\pm}, T_{\pm}), \quad \rho_{\pm} = \frac{\lambda_{\pm}}{\lambda} \rho$$

где $\lambda_{\pm} = m_{\pm}/e_{\pm}$, $\lambda = \lambda_{+} + \lambda_{-}$, а тензоры $\boldsymbol{\pi}$, Π , \mathbf{W} имеют вид:

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}^h + \boldsymbol{\pi}^p + \boldsymbol{\pi}^c, \quad \Pi = \Pi_{*}^c + \Pi^U$$

$$\mathbf{W} = (\lambda_{-} - \lambda_{+})(\boldsymbol{\pi}^p + \boldsymbol{\pi}^c) + (\lambda_{-} p_{+} - \lambda_{+} p_{-}) \mathbf{I}_3 + \lambda_{+} \lambda_{-} (\mathbf{j} \mathbf{U} + \mathbf{U} \mathbf{j}) - \Pi_{*}^U - \Pi^c$$

$$\boldsymbol{\pi}^h = \rho \mathbf{U} \mathbf{U} + p_{\Sigma} \mathbf{I}_3, \quad \boldsymbol{\pi}^p = \frac{H^2}{8\pi} \mathbf{I}_3 - \frac{\mathbf{H} \mathbf{H}}{4\pi}, \quad \boldsymbol{\pi}^c = \lambda_{+} \lambda_{-} \frac{\mathbf{j} \mathbf{j}}{\rho}$$

Тензоры Π_{*}^c , Π^c , Π_{*}^U , Π^U имеют вид

$$\Pi^U = 2\mu_{\Sigma} \mathbf{D}^U + (v_{\Sigma} - \frac{2}{3} \mu_{\Sigma}) \operatorname{tr} \mathbf{D}^U \mathbf{I}_3, \quad \Pi_{*}^U = 2\mu_{*} \mathbf{D}^U + (v_{*} - \frac{2}{3} \mu_{*}) \operatorname{tr} \mathbf{D}^U \mathbf{I}_3$$

$$\Pi^c = 2\mu^{*} \mathbf{D}^c + (v^{*} - \frac{2}{3} \mu^{*}) \operatorname{tr} \mathbf{D}^c \mathbf{I}_3, \quad \Pi_{*}^c = 2\mu_{*} \mathbf{D}^c + (v_{*} - \frac{2}{3} \mu_{*}) \operatorname{tr} \mathbf{D}^c \mathbf{I}_3$$

где $\mathbf{D}^U = \operatorname{def} \mathbf{U}$, $\mathbf{D}^c = \operatorname{def} (\mathbf{j} / \rho)$ – тензоры деформаций, $p_{\Sigma} = p_{+} + p_{-}$, $\mu_{\Sigma} = \mu_{+} + \mu_{-}$,

$v_{\Sigma} = v_{+} + v_{-}$, $m_{\Sigma} = m_{+} + m_{-}$, $\mu_{*} = \lambda_{-} \mu_{+} - \lambda_{+} \mu_{-}$, $\mu^{*} = \lambda_{-}^2 \mu_{+} + \lambda_{+}^2 \mu_{-}$, $v_{*} = \lambda_{-} v_{+} - \lambda_{+} v_{-}$,

$v^{*} = \lambda_{-}^2 v_{+} + \lambda_{+}^2 v_{-}$, $\sigma = \frac{e_{+} e_{-}}{\eta}$ – электропроводность плазмы, $\mu_m = \frac{c^2}{4\pi \sigma}$ – магнитная

вязкость.

Итак, уравнение на \mathbf{E} – это обобщённый закон Ома и по сравнению с уравнениями классической МГД (1) в уравнениях ЭМГД (11) появилось два существенных различия. Во-первых, в тензоре плотности потока импульса $\boldsymbol{\pi}$ появилась добавка $\boldsymbol{\pi}^c$, обусловленная током в плазме ($\boldsymbol{\pi}_{\text{МГД}} = \boldsymbol{\pi}_{\text{МГД}}^H = \boldsymbol{\pi}^h + \boldsymbol{\pi}^p$). Во-вторых, существенно изменился обобщённый закон Ома. Теперь поле \mathbf{E}

зависит от значений остальных параметров плазмы во всей области, занятой течением плазмы, а не в сколь угодно малой окрестности рассматриваемой точки, как это имеет место в МГД. В частности, для нахождения поля \mathbf{E} необходимо поставить и решить краевую задачу для некоторой эллиптической системы уравнений [10]. Эти различия определяют существенно иные свойства плазменной среды, чем те, которые предсказывались классической и холловской МГД-теориями и прочими, основанными на МГД теоретическими конструкциями (ЭМГ-уравнения, гибридные уравнения и пр.). Приведём некоторые примеры такого различия.

В ЭМГД-теории скорость установившегося потока несжимаемой плазмы в плоском канале отклоняется на конечный угол от направления антиградиента давления, вызывающего течение плазмы в канале (гидродинамический "эффект Холла"). В классической МГД указанное отклонение отсутствует.

В задаче об обтекании несжимаемой плазмой замагниченной поверхности толщина погранслоя, вычисленная по ЭМГД-теории, существенно больше толщины погранслоя, полученного по классической МГД-теории.

Наличие сильной дисперсии в ЭМГД-теории обуславливает появление уединённых волн, являющихся точными решениями ЭМГД-уравнений типа бегущих волн в случае плоской симметрии. В то же время в классической и холловской МГД таких волн нет.

ЭМГД-уравнения и уравнения классической МГД в бездиссипативном случае допускают частные решения, называемые плоскими альфвеновскими волнами и представляющие собой поперечные колебания однородной плазмы, в которых продольные величины и термодинамические параметры не возмущаются. Альфвеновские волны в ЭМГД-теории, в отличие от классической МГД, с разной скоростью распространяются вдоль и против магнитного поля (анизотропия замагниченной плазмы), а фазовая скорость альфвеновской волны зависит от её длины (дисперсия). Для длинных альфвеновских волн указанные различия ЭМГД- и МГД-теорий исчезают.

Как показано в [10], классическая и холловская МГД являются предельными случаями ЭМГД-уравнений. Точнее, решения уравнений классической МГД являются нулевым приближением, а решения уравнений холловской МГД – первым приближением по параметру $\xi = c/(\omega_p L_0)$ (ω_p – плазменная частота, L_0 – характерная длина) решений ЭМГД-уравнений. Таким образом, МГД предел состоит в выполнении условия $\xi \ll 1$, а предел холловской МГД – $\xi^2 \ll 1$.

Указанные выше примеры показывают, что в случаях, когда при $\xi \rightarrow 0$ существует непрерывно дифференцируемый предел решений ЭМГД-уравнений, последние переходят в решения уравнений классической МГД, которые совпадают с предельными значениями решений ЭМГД-уравнений.

Течение квазинейтрального потока вязкой электропроводной несжимаемой полностью ионизованной двухкомпонентной электрон-ионной плазмы с полным учётом инерции электронов согласно (11) подчиняется системе уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad \rho = \text{const}, \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} \boldsymbol{\pi} = \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} \boldsymbol{\Pi} \\ \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{4\pi\rho} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{U}, \mathbf{H}] + \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} \mathbf{W} \\ c^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Неизвестными в системе (12) после исключения \mathbf{j} являются \mathbf{U} , \mathbf{E} , \mathbf{H} , p_{\pm} и таким образом имеем 11 скалярных уравнений относительно 11 скалярных неизвестных. Заметим, что в (12) добавлено уравнение $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, которого не было в (11) что позволяет, с одной стороны, точно соблюсти условие квазинейтральности, а, с другой – сделать систему (12) определённой.

Кроме того, для несжимаемой плазмы упрощаются выражения для тензоров вязких напряжений:

$$\Pi^U = 2\mu_\Sigma \text{def } \mathbf{U}, \Pi_*^U = 2\mu_* \text{def } \mathbf{U}, \Pi^c = \frac{2\mu^*}{\rho} \text{def } \mathbf{j}, \Pi_*^c = \frac{2\mu_*}{\rho} \text{def } \mathbf{j}$$

Учитывая ток смещения, вместо системы уравнений (12) получаем:

$$\text{div } \mathbf{U} = 0, \quad \rho = \text{const}, \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \text{Div } \boldsymbol{\pi} = \frac{1}{\rho} \text{Div } P - \frac{1}{4\pi c \rho} \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \mathbf{H} \right] \quad (13)$$

$$\omega_p^{-2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \left(\frac{c}{\omega_p} \right)^2 \text{rot rot } \mathbf{E} + \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} - \frac{1}{c} [\mathbf{U}, \mathbf{H}] + \frac{1}{\rho} \text{Div } W + \frac{(\lambda_- - \lambda_+)}{4\pi c \rho} \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \mathbf{H} \right]$$

$$c^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \omega_p = \left(\frac{4\pi \rho}{\lambda_+ \lambda_-} \right)^{1/2}$$

$$\lambda_\pm = \frac{m_\pm}{e_\pm}, \quad 4\pi \mathbf{j} = c \text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Данная система крайне сложна для численных расчётов, но в некоторых случаях допускает аналитические решения.

В2. Цель исследования

Выяснение границ применимости классической МГД на примере решения конкретных задач в рамках ЭМГД-модели и исследование новых двухжидкостных ЭМГД-эффектов, возникновение и описание которых не возможно в рамках классической МГД.

Для достижения поставленной цели в рамках ЭМГД-модели потребовалось:

1. Решить следующие задачи: а) о возбуждении несжимаемой плазмы под действием периодического тока, б) о стационарном течении несжимаемой плазмы в плоском канале, в) о взаимодействии уединённых волн в сжимаемой плазме, г) о затухании альфвеновских волн (временном и пространственном) в диссипативной плазме.
2. Построить и реализовать численные и аналитические методы исследования поставленных задач.
3. Сравнить результаты, полученные в рамках ЭМГД-модели, с

результатами МГД-теории.

4. Провести анализ эффектов, выявленных при помощи ЭМГД.

В3. Содержание работы

Во введении приведён обзор существующих гидродинамических моделей плазмы. Представлены двухжидкостная и одножидкостная формы ЭМГД-уравнений. Первая состоит из уравнений Брагинского [7,17], замкнутых уравнениями электродинамики Максвелла для квазистационарного электромагнитного поля. Вторая получается из первой математическим преобразованием при переходе к новым гидродинамическим неизвестным $\rho = \rho_+ + \rho_-$, $\mathbf{U} = (\rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-)/\rho$ – суммарная плотность и массовая скорость плазмы. Здесь и ниже индексы “ \pm ” относятся к параметрам электронов и ионов. Указано отличие ЭМГД-уравнений от классической и холловской МГД: 1) появляется добавка $\Pi^c = \lambda_+ \lambda_- \mathbf{j}\mathbf{j}/\rho$ в тензоре плотности потока импульса; 2) термодинамика плазмы становится трёхпараметрической – определяется тремя параметрами ρ , ρ_+ , ρ_- ; 3) кардинально усложняется обобщённый закон Ома. Последнее отличие принципиальное. В ЭМГД электрическое поле в каждой точке пространства зависит от значений остальных параметров плазмы не в сколь угодно малой окрестности этой точки, как это имеет место в классической и холловской МГД, а во всей области, занятой течением. Математически это выражается в том, что для нахождения поля \mathbf{E} в ЭМГД надо поставить краевую задачу для некоторой вырожденной эллиптической системы уравнений на компоненты \mathbf{E} . Наконец, указан предельный переход от ЭМГД-теории к уравнениям классической и холловской МГД. Он состоит в стремлении $\xi \rightarrow 0$, где безразмерное число подобия $\xi = \frac{c}{\omega_p L_0} = \frac{c \lambda_+^{1/2} \lambda_-^{1/2}}{2\pi^{1/2} \rho_0^{1/2} L_0}$, а ω_p – плазменная частота, L_0 , ρ_0 – характерный масштаб длины и плотности, $\lambda_{\pm} = m_{\pm}/e_{\pm}$, m_{\pm} – массы электронов и ионов, e_{\pm} – их заряды. В тоже время

$\xi = \frac{0.532 \cdot 10^6}{L_0 \sqrt{n_e}}$ и, таким образом, обратно пропорционален корню из

характерного погонного числа электронов $n_e L_0^2$.

В конце введения представлены уравнения ЭМГД-теории для несжимаемой плазмы, позволяющие для квазинейтральных течений учесть ещё и ток смещения. Также сформулированы цель и задачи исследования. Приведено содержание работы.

Главы 1 и 2 посвящены исследованию задач течения несжимаемой плазмы посредством ЭМГД-модели. В первой главе рассмотрена задача о возбуждении плазмы под действием периодического тока. В разделе 1.1 приведена постановка задачи о возбуждении плазмы в цилиндрическом канале. Считается, что ток меняется по времени гармонически с частотой ω , а неизвестные величины являются периодическими по времени функциями с той же частотой и неизвестными амплитудами (модами):

$$(U_z, E_z, H_\phi, j_z) = (U_z(r), E_z(r), H_\phi(r), j_z(r)) e^{i\omega t}$$

В разделе 1.2 для поиска амплитуд колебаний получена система ОДУ, решение которой удалось найти аналитически. Это решение полностью определяется корнями кубического характеристического многочлена. В разделе 1.3 предложен метод численного исследования корней характеристического уравнения с комплексными коэффициентами, зависящим от ω , как от параметра. В разделе 1.4 проведено сравнение полученных результатов с классической МГД-теорией. Определяющим становится безразмерный

параметр $a = \frac{\rho r_0}{\lambda_+ + \lambda_-} \sqrt{\frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\mu_+} + \frac{1}{\mu_-} \right)}$, а МГД-предел получается условием

$a \rightarrow +\infty$, где σ – проводимость плазмы, μ_\pm – гидродинамические вязкости электронов и ионов, r_0 – радиус шнура, ρ – плотность плазмы. На Рис.1 приведены профили плотности тока $j_z(r)$ в зависимости от значений параметра a для частоты $\omega = 0$.

В разделе 1.5 приведены профили найденных амплитуд и показано, что с ростом частоты ω наблюдается скинирование плотности и других параметров плазмы вблизи границы плазменного шнура. В разделе 1.6 подведён итог проделанной работы.

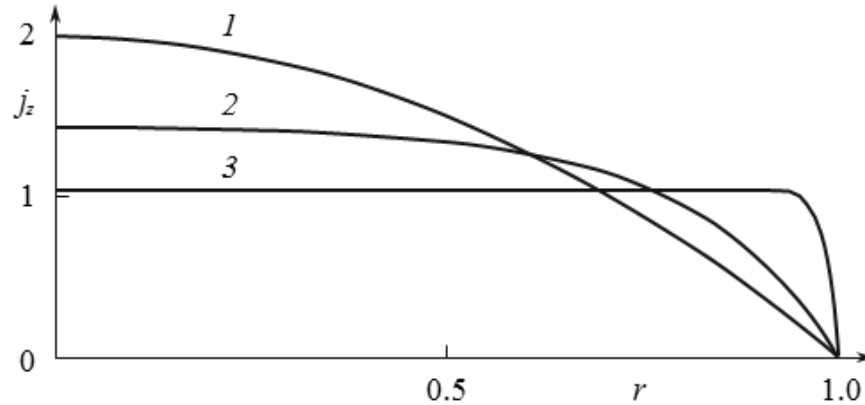


Рис.1. Предельный профиль $j_z(r)$ в единицах $J_0/(\pi r_0^2)$ при $\omega \rightarrow 0$ для различных значений параметра a : 1 – $a = 0.5954$, 2 – $a = 5.954$, 3 – $a = 59.54$

Во второй главе решена задача о стационарном течении несжимаемой плазмы в плоском канале ширины 2ℓ . В МГД-модели решением будет профиль Гартмана. В разделе 2.1 приведена ЭМГД-модель установившегося течения плазмы в плоском канале, сводящаяся к краевой задаче на отрезке $[-\ell, \ell]$ для системы ОДУ высокого (14-го!) порядка. В разделе 2.2 проведена комплексификация полученной системы ОДУ с целью понижения порядка системы, в результате чего порядок краевой задачи понизился до 4-го.

В классической МГД определяющим параметром задачи о течении несжимаемой плазмы в плоском канале является число Гартмана Na . В разделе 2.3 приведены определяющие параметры этой задачи в ЭМГД-теории. Оказалось, что их два: число Гартмана Na , а также новый безразмерный параметр Γ , содержащий плотность:

$$Na = \frac{H_0 \ell}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\mu_\Sigma}}, \quad \Gamma = \frac{H_0 \sigma \lambda}{c \rho}$$

где $\mu_\Sigma = \mu_+ + \mu_-$, $\lambda_\Sigma = \lambda_+ + \lambda_-$. Здесь же изучено качественное поведение

течения в зависимости от определяющих параметров Ha , Γ . В частности, исследован МГД-предел, отвечающий стремлению $\Gamma \rightarrow 0$. Показано, что при $\Gamma \rightarrow 0$ продольная скорость сходится равномерно на $[-\ell, \ell]$ к профилю Гартмана

$$U_\tau(x) \rightarrow U_{\text{МГД}}(x) = \frac{-i\ell^2}{\mu_\Sigma} \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \left(\frac{\text{ch } Ha - \text{ch } Hax/\ell}{Ha \text{sh } Ha} \right), \quad |x| \leq \ell$$

Но даже при $\Gamma \ll 1$ профиль Гартмана $U_{\text{МГД}}(x)$ не может реализоваться в чистом виде, а состоит из мелких зазубрин с пространственной частотой

$$\omega_* = \frac{Ha}{2\ell} \left(\sqrt{\frac{\mu_-}{\mu_+}} - \sqrt{\frac{\mu_+}{\mu_-}} \right).$$

В разделе 2.3 описан гидродинамический “эффект Холла”. В МГД плазма под действием перепада давления течёт вдоль антиградиента давления, т.е. туда, куда её толкает вызывающая течение сила. В ЭМГД согласно полученным результатам течение плазмы отклоняется от направления перепада давления. Для средней по сечению канала скорости предельный угол отклонения в сильно замагниченной плазме H_0 равен $\alpha_\infty = \text{arctg} \frac{\sqrt{\mu_-} - \sqrt{\mu_+}}{\sqrt{\mu_-} + \sqrt{\mu_+}}$. Для изотермической плазмы $\alpha_\infty \cong -\pi/4$, для сильно неизотермической плазмы, $T_e \gg T_i$, $\alpha_\infty \cong \pi/4$, в общем случае $|\alpha_\infty| \leq \pi/4$.

В разделе 2.5 выписано решение для случая подвижных и замагниченных стенок канала. В разделе 2.6 решена задача об обтекании несжимаемой плазмой замагниченной поверхности и определена толщина погранслоя

$$\Delta\ell = \frac{c}{H_0} \sqrt{\frac{\mu_\Sigma}{\sigma}} \max \frac{1}{\text{Re } f_\pm(\Gamma)}, \quad \text{где } f_\pm(\Gamma) = \frac{1}{\Lambda_* \Gamma} \left\{ \frac{1 + i\Lambda_0 \Gamma \pm \sqrt{1 + 2i\Lambda_0 \Gamma - \Gamma^2}}{2} \right\}^{1/2}$$

$$\Lambda_* = (\mu_+ \mu_-)^{1/2} / \mu_\Sigma, \quad \Lambda_0 = (\mu_- - \mu_+) / \mu_\Sigma$$

Полученное значение $\Delta\ell$ для толщины погранслоя при $\Gamma \rightarrow 0$ переходит в

известное выражение $\Delta\ell_{\text{МГД}} = \frac{c}{H_0} \sqrt{\frac{\mu_\Sigma}{\sigma}}$ для классической МГД. Для конечных Γ

учёт двухжидкостной структуры плазмы приводит к значительному увеличению толщины погранслоя $\Delta\ell_{\text{МГД}}/\Delta\ell$, как это следует из Рис.4.

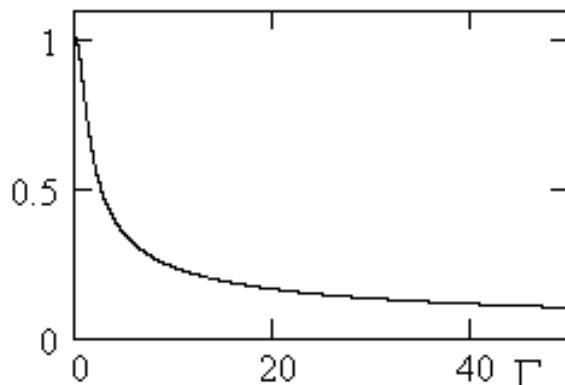


Рис.4. Зависимость отношения $\Delta\ell_{\text{МГД}}/\Delta\ell$ от Γ

В разделе 2.7 обсуждаются полученные результаты. В частности, отмечено, что условие $\Gamma \gg 1$ обычно выполняется для газовой плазмы, а противоположное условие $\Gamma \ll 1$ – для плазмы жидких металлов. Приведены типичные значения Γ для некоторых видов газовой плазмы. Отмечено, что локальное отклонение течения плазмы от антиградиента давления в конкретных точках может достигать 90 градусов.

В главах 3 и 4 рассмотрены ЭМГД-модели сжимаемой плазмы. В третьей главе исследуется взаимодействие уединённых волн в сжимаемой электрон-ионной бездиссипативной плазме на базе фундаментальных законов сохранения массы, импульса, энергии и законов электродинамики, а не модельных уравнений, как это обычно принято в теории плазмы. В разделе 3.1 приведены ЭМГД-уравнения для сжимаемой квазинейтральной плазмы с уравнениями энергии, записанными относительно давлений. Электроны и ионы для простоты считаются идеальными политропными газами с общим показателем адиабаты γ . В разделе 3.2 показано, что в случае холодной плазмы решения ЭМГД-уравнений типа плоских бегущих волн, то есть зависящих от t , \mathbf{r} в комбинации $\theta = \mathbf{r}\mathbf{k} - at$, где \mathbf{k} – единичный вектор, определяющий направление распространения волны, a – константа (фазовая скорость), удовлетворяют системе:

$$Ju + \frac{H_{\perp}^2}{8\pi} = D$$

$$\left(u - \frac{H_{\parallel}^2}{4\pi J} \right) \mathbf{H}_{\perp} - \frac{c^2 \lambda_i \lambda_e}{4\pi J} u \frac{d}{d\theta} \left(u \frac{d\mathbf{H}_{\perp}}{d\theta} \right) + \frac{cH_{\parallel}}{4\pi J} (\lambda_i - \lambda_e) u \left[\mathbf{k}, \frac{d\mathbf{H}_{\perp}}{d\theta} \right] + \mathbf{q} = 0, \quad (1')$$

где \mathbf{H}_{\perp} – поперечное магнитное поле, $u = U_{\parallel} - a$; $J \neq 0$, $D > 0$, H_{\parallel} , $\mathbf{q} \perp \mathbf{k}$ – произвольные константы.

В разделе 3.2 и ниже исследуются уединённые волны специального типа, являющихся решением системы (1') для произвольного магнитного поля $H_{\parallel} = 0$ вида $\mathbf{H}_{\perp}(\theta) = H(\theta)\mathbf{e}_0$, где $\mathbf{e}_0 \perp \mathbf{k}$ – единичный вектор, $\mathbf{q} = q\mathbf{e}_0$. Иными словами, рассматриваются только бегущие волны, в которых вектор магнитного поля \mathbf{H} меняется только по величине, имея при этом фиксированное направление в поперечной плоскости. Для таких волн, согласно системе (1'), функции $H(\theta)$, $u(\theta)$ ищутся из уравнений:

$$Ju + \frac{H^2}{8\pi} = D$$

$$Hu - \frac{c^2 \lambda_i \lambda_e}{4\pi J} u \frac{d}{d\theta} \left(u \frac{dH}{d\theta} \right) + q = 0 \quad (2')$$

где $J \neq 0$, $D > 0$, q – произвольные константы.

В разделе 3.3 выписаны решения системы уравнений (2') типа уединённой волны для покоящейся плазмы:

$$\theta = \pm \frac{\xi}{a} \left\{ \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - 1}} \ln \frac{2a^2 - 1 - H + \sqrt{a^2 - 1} \sqrt{4a^2 - (H + 1)^2}}{|a|(H - 1)} - \sqrt{4a^2 - (H + 1)^2} \right\}$$

Данное неявное выражение задаёт профиль уединённой волны $H(\theta)$. Далее это решение используется в качестве начального условия при численном исследовании взаимодействия уединённых волн.

Также найдена оценка зависимости ширины уединённой волны от фазовой скорости. В разделе 3.4 приведена методика численного моделирования взаимодействия уединённых волн. Рассмотрены следующие задачи:

1. Движение двух уединённых волн одинаковой амплитуды навстречу друг

- другу;
2. Движение двух уединённых волн разной амплитуды навстречу друг другу;
 3. Набегание уединённой волны с большей амплитудой на уединённую волну с меньшей амплитудой в предположении, что волны двигаются в одну сторону;
 4. Распад начального возмущения, локализованного в пространстве, в частности, может ли начальное возмущение порождать пакет уединённых волн.

Результаты в этих задачах получаются численным решением ЭМГД-уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_x}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial \rho U_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho U_x^2 + \frac{H_z^2}{8\pi} \right) &= 0 \\
 \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} &= 0 \\
 E_y - \frac{c^2 \lambda_i \lambda_e}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= \frac{U_x H_z}{c} - \frac{c \lambda_i \lambda_e}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(U_x \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{3`}$$

Численный метод решения системы (3`) включает двухшаговый метод Лакса-Вендроффа для гидродинамической части системы (3`) с решением на каждом шаге уравнений, полученных разностной аппроксимацией обобщённого закона Ома, методом прогонки. В разделе 3.5 приведены результаты расчётов.

В четвёртой главе исследован процесс затухания альфвеновских волн в сжимаемой ЭМГД-плазме вследствие диссипаций. Для простоты электроны и ионы считаются идеальными политропными газами с общим показателем адиабаты γ . В разделе 4.1 приведены ЭМГД-уравнения с учётом основных диссипативных факторов (магнитная и гидродинамические вязкости и теплопроводности электронов и ионов) и процесса релаксации температур электронов и ионов. Альфвеновские волны в двухжидкостной плазме это

плоские поперечные колебания плазмы, бегущие вдоль магнитного поля, являющиеся точным решением ЭМГД-уравнений при нулевых диссипациях, отсутствии релаксации температур и имеющие вид в неподвижной плазме:

$$U_{\perp} = u(t)e^{ikx}, H_{\perp} = h(t)e^{ikx}, E_{\perp} = e(t)e^{ikx}, T_{\pm} = \text{const}, \rho = \text{const}, U_x = 0 \quad (4')$$

Здесь использованы комплексные обозначения $U_{\perp} = U_y + iU_z$, $H_{\perp} = H_y + iH_z$, $E_{\perp} = E_y + iE_z$, причём $H_{\parallel} = \text{const}$.

В разделе 4.2 показано, что функции (4') являются решением ЭМГД-уравнений в случае плоской симметрии, если

$$u(t) = C_1 e^{i\omega_+ t} + C_2 e^{i\omega_- t}, h(t) = \frac{(4\pi\rho)^{1/2}}{\kappa v_A} \{C_1 \omega_+ e^{i\omega_+ t} + C_2 \omega_- e^{i\omega_- t}\} \quad (5')$$

$$e(t) = \frac{i}{1+r^2} \left\{ \left(\frac{H_x}{c} + \Lambda \sqrt{\lambda_+ \lambda_-} \omega_+ \right) C_1 e^{i\omega_+ t} + \left(\frac{H_x}{c} + \Lambda \sqrt{\lambda_+ \lambda_-} \omega_- \right) C_2 e^{i\omega_- t} \right\}$$

$$\omega_{\pm} = \frac{\kappa v_A}{2} \left\{ \frac{r\Lambda}{1+r^2} \pm \left[\frac{r^2 \Lambda^2}{(1+r^2)^2} + \frac{4}{1+r^2} \right]^{1/2} \right\}, r = \frac{\kappa c}{\omega_p}, v_A = \frac{H_{\parallel}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \omega_p = \sqrt{\lambda_+ \lambda_-}$$

В частности, альфвеновская волна есть суперпозиция бегущих волн вдоль и против магнитного поля, волн с разными частотами ω_{\pm} и фазовыми скоростями. В МГД-пределе $r \ll 1$ такие волны переходят в классические альфвеновские волны.

В разделе 4.3 обсужден вопрос о преобразовании энергий в альфвеновской волне и установлено появление дополнительного слагаемого в балансе полной энергии, равного кинетической энергии относительного движения электронов, которое отсутствует в МГД-теории.

В разделе 4.4 поставлена задача о временном затухании альфвеновской волны, которая математически состоит в поиске решений ЭМГД-уравнений в случае плоской симметрии вида

$$U_{\perp} = u(t)e^{ikx}, H_{\perp} = h(t)e^{ikx}, E_{\perp} = e(t)e^{ikx}, T_{\pm} = T_{\pm}(t), U_x \equiv 0, \rho \equiv \text{const}$$

Эта задача редуцируется к нахождению амплитуд $u(t)$, $h(t)$, $e(t)$, $T(t)$ из некоторой системы ОДУ. В разделе 4.5 полученная система ОДУ на

амплитуды аналитически решена в частном случае затухания альфвеновской волны в незамагниченной невязкой плазме. В разделе 4.6 рассмотрен вопрос о релаксации температур и поглощении альфвеновской волны в общем случае. Как показало численное исследование, поглощение альфвеновской волны распадается на два этапа. На первом происходит быстрое преобразование магнитной и в значительной мере кинетической энергий альфвеновской волны в тепловую энергию преимущественно электронов, на втором – в основном медленная релаксация температур, при этом остатки кинетической энергии волны переходят в тепловую энергию.

В разделе 4.7 обсужден вопрос о качественных закономерностях временного затухания альфвеновских волн и релаксации температур на больших временах, $t \rightarrow +\infty$. Математически задача сводится к нахождению особых точек и исследованию поведения интегральных кривых системы ОДУ на амплитуды в их окрестности. В данном случае система ОДУ для амплитуд имеет единственную особую точку $u = 0$, $h = 0$, $T = T_0$, где T_0 - температура релаксации. Применение теоремы Гробмана-Хартмана позволяет свести изучение поведения интегральных кривых в окрестности особой точки к исследованию поведения интегральных кривых линеаризованной в особой точке системы в окрестности нуля.

В разделе 4.8 проведено сравнение с линейной теорией и показано, что в линейной теории нельзя исследовать релаксацию температур, а затухание электромагнитных параметров происходит медленнее, чем по экспоненте.

Наряду с временным затуханием исследован процесс пространственного поглощения альфвеновской волны. В разделе 4.9 приведена постановка задачи о набегании альфвеновской волны на границу диссипативной плазмы, подчинённая ЭМГД-уравнениям в случае плоской симметрии.

В разделе 4.10 предложен метод численного исследования ЭМГД-системы с определёнными начальными и граничными условиями. Проведена дискретизация задачи, выписана разностная схема, условие устойчивости и

последовательность вычислений. В разделе 4.11 приведены результаты расчётов и сделан ряд важных выводов. В частности, как следует из расчётов, процесс поглощения альфвеновской волны происходит на длинах порядка скиновых, поэтому МГД-теория, применимая на длинах много больших скиновых, для исследования этого процесса в принципе не пригодна.

В заключении подытожены полученные в диссертации основные результаты и выводы. Отмечены новые конечные эффекты двухжидкостной плазмы.

Глава 1. Возбуждение несжимаемой плазмы под действием периодически меняющегося тока

Задача о нестационарном движении вязкой несжимаемой жидкости по цилиндрической трубе круглого сечения относится к классическим задачам гидромеханики. Ею занимались Гельмгольц [53] и И.С. Громека [16], а частные случаи были разобраны различными авторами [33-35,59]. В частности, в [35] рассмотрены вынужденные колебания вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе круглого сечения под действием гармонически изменяющегося со временем перепада давления вдоль оси трубы.

В диссертации решается аналогичная задача для трубы, заполненной вязкой несжимаемой плазмой, с учётом того, что вынужденные колебания плазмы могут вызываться и гармонически изменяющимся полным током, протекающим через трубу. Полученное решение применяется к анализу динамики плазменного шнура в установках типа z-пинч [3,22,47] на поздней стадии сжатия шнура, когда в результате развития неустойчивости возникают перетяжки – весьма плотные (концентрация числа ионов $n \approx 10^{22} \text{ см}^{-3}$) и горячие ($T_i \approx T_e \approx 6.5 \text{ Кэв}$) сгустки плазмы, приближённо имеющие форму круглых цилиндров малого радиуса $r_0 \approx 10^{-1} \text{ см}$. Хотя время жизни таких образований измеряется микросекундами, характер динамических процессов перетяжечной плазмы очень важен для понимания механизма разрушения перетяжки и в конечном итоге для выяснения условий термоядерного поджига плазмы в z-пинчах.

Внешнее вакуумное магнитное поле, грубо говоря, разворачивает по ларморовским окружностям набегающие на него электроны и ионы и отражает их снова в плазму. Если средняя глубина проникновения l_* и время пребывания τ_* электронов и ионов в вакуумном магнитном поле удовлетворяют условиям $l_* \ll r_0, \tau_* \ll \tau$ (τ – характерное время пинчевания), то на границе шнура приближенно выполнено гидродинамическое условие непротекания, а, значит, внешнее магнитное поле можно считать твёрдой

стенкой. В работе проведены расчёты для характерных параметров шнура, для которых указанные выше неравенства выполнены, и внешнее магнитное поле можно считать твёрдой стенкой.

Для рассматриваемых параметров также выполнено условия несжимаемости для электронов и ионов [29]: $v_{\pm}^2 \ll kT_{\pm}/m_{\pm}$, $\tau \gg 1(kT_{\pm}/m_{\pm})^{-1/2}$, где τ – характерное время процесса, l – характерная длина задачи.

В работе исследуются цилиндрически симметричные вынужденные колебания плазмы, заполняющей круглую трубу, вызванные гармонически изменяющимся со временем с частотой ω полным током. Такие осцилляции тока могут иметь либо паразитический характер (шум с малой амплитудой), либо специально создаваться за счёт конструктивных особенностей установки. Плазма считается двухкомпонентной полностью ионизованной вязкой электропроводной и несжимаемой, температуры электронов и ионов предполагаются постоянными, а масса электронов m_e и ток смещения всюду в уравнениях – конечными. Последнее обстоятельство особенно важно, поскольку, как показано ниже, учёт инерции электронов существенно изменяет получаемые результаты.

В этих предположениях в работе даётся полное математическое решение задачи о вынужденных колебаниях (предельный случай $\omega = 0$ разобран в [13]). Внешнее воздействие с частотой ω вызывает в плазме колебания во времени всех параметров (за исключением давлений) с той же частотой ω . Профили распределений по радиусу амплитуд колебаний параметров плазмы вычисляются в конечном виде через функции Бесселя мнимого аргумента. Численный анализ полученных формул приводит к ряду важных выводов.

1.1. Задача о возбуждении плазмы в цилиндрическом канале

Рассмотрим течение плазмы по бесконечной круглой цилиндрической трубе радиуса $r_0 > 0$, ось которой совпадает с осью z . Все параметры течения предполагаются цилиндрически симметричными ($\partial/\partial z = 0, \partial/\partial \phi = 0$). Тогда из

условий $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{U} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ следуют $H_r = 0$, $U_r = 0$, $E_r = 0$, из которых с учётом (13) вытекает равенство $j_r = 0$.

Найдём решения системы (13), для которых $U_\phi = 0$, $E_\phi = 0$, $H_z = 0$. Прямой подстановкой в уравнения (13) убеждаемся, что функции $E_z(t, r)$, $U_z(t, r)$, $H_\phi(t, r)$ удовлетворяют системе, не содержащей p_\pm :

$$\rho \frac{\partial U_z}{\partial t} - \mu_\Sigma \Delta U_z - \mu_* \frac{1}{\rho} \Delta j_z = 0$$

$$\omega_p^{-2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} - \left(\frac{c}{\omega_p} \right)^2 \Delta E_z + E_z = \frac{j_z}{\sigma} - \frac{\mu_*}{\rho} \Delta U_z - \frac{\mu^*}{\rho^2} \Delta j_z \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial H_\phi}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = 0, \quad j_z = \frac{c}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\phi) - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

$\omega_p^2 = 4\pi\rho(\lambda_+ \lambda_-)^{-1}$, а Δ – дифференциальный оператор

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

Давления $p_\pm(t, r, z)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(p_\Sigma + \frac{H_\phi^2}{8\pi} \right) + \frac{H_\phi^2}{4\pi r} - \frac{H_\phi}{4\pi c} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} (\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-) + \frac{\rho U_z H_\phi}{c} +$$

$$+ (\lambda_- - \lambda_+) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{H_\phi^2}{8\pi} \right) + \frac{H_\phi^2}{4\pi r} + \frac{(\lambda_- - \lambda_+)}{4\pi c \rho} H_\phi \frac{\partial E_z}{\partial t} \right] = 0 \quad (1.2)$$

представляющую линейную систему алгебраических уравнений относительно $\partial p_\pm / \partial r$.

Систему (1.1) необходимо дополнить начальными и граничными условиями на стенке трубы. Для решений (1.1) типа вынужденных колебаний (см. ниже) граничные условия, позволяющие выделить единственное решение системы (1.1) при $\mu_\pm \neq 0$ в каждый момент времени t , имеют вид:

$$r = r_0: \quad U_z = 0, \quad j_z = 0 \quad (1.3)$$

$$J_{\text{tot}}(t) = 2\pi \int_0^{r_0} r j_z(t, r) dr = J(t) \quad (1.4)$$

$$r = 0: \quad |H_\phi|, |E_z|, |U_z|, |j_z| < +\infty \quad (1.5)$$

где $J(t)$ – заданная функция, а $J_{\text{tot}}(t)$ – полный ток через поперечное сечение трубы.

Вследствие линейности системы (1.1), достаточно [14] рассмотреть случай, когда $J(t)$ изменяется гармонически с частотой ω . Учитывая вещественность коэффициентов системы (1.1), перейдем к комплексным величинам, считая

$$J(t) = J_0 e^{i\omega t} \quad (1.6)$$

где $J_0 \in \mathbb{C}$ – комплексная амплитуда, $\omega \in \mathbb{R}$ – частота колебаний. Ограничимся поиском решений системы (1.1) типа вынужденных колебаний, т.е. вида $f(r)e^{i\omega t}$. Тогда начальные условия теряют значение, а нахождение решения сводится к нахождению комплексных амплитуд (мод) $f(r)$.

Уточним также физическую постановку задачи о возбуждении колебаний применительно к перетяжке z-пинча. Считается, что цилиндрически симметричная перетяжка радиуса r_0 находится в стационарном состоянии, полный ток через перетяжку J_* не зависит от времени (перетяжки с постоянным полным током получены в [47]). Распределение полей и токов внутри перетяжки определяется системой (1.1) с $\partial/\partial t = 0$ и граничными условиями (1.3) – (1.5) с $J(t) \equiv J_*$. Решение этой задачи легко ищется методом раздела 1.2 и имеет вид:

$$E_z = \frac{J}{\pi r_0^2 \sigma}, \quad j_z = \frac{J}{\pi r_0^2} \left(1 - \frac{I_0(ar/r_0)}{I_0(a)} \right), \quad H_\phi = \frac{2r_0 J}{c} \left[\frac{r}{2r_0} - \frac{I_1(ar/r_0)}{I_0(a)a} \right]$$

$$U_z = -\frac{\mu_*}{\mu \rho} j_z, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad a = \frac{\rho r_0}{\lambda_\Sigma} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma \mu_+ \mu_-}}, \quad J = J_* \left(1 - \frac{2I_1(a)}{I_0(a)a} \right)^{-1}$$

где a – безразмерная константа, $I_0(z), I_1(z)$ – функции Бесселя мнимого аргумента порядка 0 и 1. Теперь рассмотрим вынужденные колебания,

возбуждаемые в стационарной перетяжке синусоидальным током (1.6), являющиеся решениями системы (1.1) с граничными условиями (1.3) – (1.5), где положено $J(t) = J_* + J_0 e^{i\omega t}$. Ввиду линейности (1.1), это решение есть сумма выписанного выше стационарного решения (“фона”), не зависящего от ω и t , и решения с полным током (1.6), которое найдено в разделе 1.2 и представляет основной интерес, поскольку полностью определяет зависимость от ω и t возбуждаемых колебаний. Учитывая сказанное, “фоновое” решение всюду ниже опущено.

1.2. Нахождение комплексных амплитуд

Итак, задача о вынужденных колебаниях плазмы в круглой трубе сводится к поиску решений системы (1.1), удовлетворяющих граничным условиям (1.3) – (1.5), вида:

$$(U_z, E_z, H_\phi, j_z) = (U_z(r), E_z(r), H_\phi(r), j_z(r)) e^{i\omega t} \quad (1.7)$$

где ω – произвольный вещественный параметр (частота внешнего воздействия). Подставляя функции (1.7) в систему (1.1), получим для нахождения комплексных амплитуд $U_z(r), E_z(r), j_z(r)$ однородную линейную систему из трёх обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$i\omega\rho U_z - \mu\Delta U_z - \mu_*\rho^{-1}\Delta j_z = 0$$

$$\left(1 - \frac{\lambda_+\lambda_-\omega^2}{4\pi\rho}\right) E_z - \frac{c^2\lambda_+\lambda_-}{4\pi\rho}\Delta E_z = \frac{1}{\sigma} j_z - \mu_*\frac{1}{\rho}\Delta U_z - \mu_*\frac{1}{\rho^2}\Delta j_z \quad (1.8)$$

$$j_z = \frac{c^2}{4\pi i\omega}\Delta E_z - \frac{i\omega}{4\pi} E_z, \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right)$$

где комплексная амплитуда $H_\phi(r)$ исключается из числа неизвестных посредством соотношения

$$H_\phi = \frac{c}{i\omega} \frac{dE_z}{dr} \quad (1.9)$$

Поскольку система (1.8) относительно дифференциального оператора Δ является системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с

постоянными коэффициентами, то решение однородной системы надо искать в виде линейных комбинаций собственных функций оператора Δ . Собственные функции оператора Δ , отвечающие собственному значению $\lambda \in \mathbb{C}$, это ограниченные в нуле решения уравнения $\Delta w = \lambda w$, которые имеют вид:

$$w(r) = R I_0(\sqrt{\lambda} r), \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad R \in \mathbb{C}$$

Подставляя искомые функции $U_z(r) = R_1 I_0(\sqrt{\lambda} r)$, $j_z(r) = R_2 I_0(\sqrt{\lambda} r)$, $E_z(r) = R_3 I_0(\sqrt{\lambda} r)$ в однородную систему (1.8), получим для нахождения R_1, R_2, R_3 линейную однородную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \left(i\omega - \frac{\mu}{\rho} \lambda \right) R_1 - \frac{\mu_*}{\rho^2} \lambda R_2 = 0, \quad R_2 + \left(\frac{i\omega}{4\pi} - \frac{c^2 \lambda}{4\pi i \omega} \right) R_3 = 0 \\ \frac{\mu_* \lambda}{\rho} R_1 + \left(\frac{\mu_* \lambda}{\rho^2} - \frac{1}{\sigma} \right) R_2 + \left(1 - \frac{\lambda_+ \lambda_- \omega^2}{4\pi \rho} - \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{4\pi \rho} \lambda \right) R_3 = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Условие нетривиальности решения $(R_1, R_2, R_3) \neq 0$ даёт кубическое уравнение для λ :

$$\begin{aligned} \lambda^3 \left[\frac{\mu_+ \mu_- \lambda_\Sigma^2}{\rho^3} \right] - \lambda^2 \left[\frac{\mu}{\rho \sigma} + \frac{i\omega \lambda_\Sigma (\lambda_- \mu_+ + \lambda_+ \mu_-)}{\rho^2} - \omega^2 \frac{\mu_+ \mu_- \lambda_\Sigma^2}{c^2 \rho^3} \right] + \\ + i\omega \lambda \left[\frac{1}{\sigma} + \frac{4\pi \mu}{\rho c^2} + i\omega \left(\frac{\lambda_+ \lambda_-}{\rho} + \frac{\mu}{\rho \sigma c^2} \right) - \omega^2 \frac{(\lambda_- \mu_+ + \lambda_+ \mu_-) \lambda_\Sigma}{c^2 \rho^2} \right] + \\ + \frac{4\pi \omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\lambda_+ \lambda_- \omega^2}{4\pi \rho} + \frac{i\omega}{4\pi \sigma} \lambda \right) = 0, \quad \mu = \mu_\Sigma = \mu_+ + \mu_-, \lambda_\Sigma = \lambda_+ + \lambda_- \end{aligned} \quad (1.11)$$

Если λ – корень уравнения (1.11), то вектор $(\Phi(\lambda), 1, \Psi(\lambda))$ лежит в пространстве решений системы (1.10), где

$$\Phi(\lambda) = \frac{\mu_* \lambda}{(i\omega - \mu \rho^{-1} \lambda) \rho^2}, \quad \Psi(\lambda) = \frac{4\pi i \omega}{\omega^2 + c^2 \lambda} \quad (1.12)$$

а функции $(U_z(r), j_z(r), E_z(r)) = C(\Phi(\lambda), 1, \Psi(\lambda)) I_0(\sqrt{\lambda} r)$ являются ограниченным в нуле решением однородной системы (1.8) для любой комплексной константы C . Поэтому если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – различные корни

уравнения (1.11), то общее решение системы (1.8), ограниченное в нуле, имеет вид:

$$\begin{aligned} U_z(r) &= \sum_{k=1}^3 C_k \Phi(\lambda_k) I_0(\sqrt{\lambda_k} r), & j_z(r) &= \sum_{k=1}^3 C_k I_0(\sqrt{\lambda_k} r) \\ E_z(r) &= \sum_{k=1}^3 C_k \Psi(\lambda_k) I_0(\sqrt{\lambda_k} r) \end{aligned} \quad (1.13)$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные комплексные константы.

Условия (1.3) дают два уравнения на три константы C_1, C_2, C_3 :

$$\sum_{k=1}^3 C_k \Phi(\lambda_k) I_0(\sqrt{\lambda_k} r_0) = 0, \quad \sum_{k=1}^3 C_k I_0(\sqrt{\lambda_k} r_0) = 0 \quad (1.14)$$

Третье уравнение получим, проведя вспомогательные вычисления с учётом выражений (1.9) и (1.13) и известных [31] тождеств для функций Бесселя мнимого аргумента $I_0'(z) = I_1(z)$, $(z I_1(z))' = z I_0(z)$, где $I_1(z)$ – функция Бесселя мнимого аргумента первого порядка. Имеем:

$$\begin{aligned} H_\phi(r) &= \frac{c}{i\omega} \frac{dE_z}{dr} = \frac{c}{i\omega} \sum_{k=1}^3 C_k \sqrt{\lambda_k} \Psi(\lambda_k) I_1(\sqrt{\lambda_k} r) \\ \int_0^{r_0} r E_z(r) dr &= \sum_{k=1}^3 C_k \Psi(\lambda_k) \int_0^{r_0} r I_0(\sqrt{\lambda_k} r) dr = \sum_{k=1}^3 \frac{C_k \Psi(\lambda_k) r_0 I_1(\sqrt{\lambda_k} r_0)}{\sqrt{\lambda_k}} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Вычислим полный ток $J_{\text{tot}}(t)$ с помощью четвёртого уравнения системы (1.1):

$$J_{\text{tot}}(t) = 2\pi \int_0^{r_0} r j_z dr = \frac{c r_0 H_\phi(t, r_0)}{2} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{r_0} r E_z dr$$

Подставляя в это равенство граничное условие для полного тока (1.4) и выражения для $H_\phi(t, r_0) = H_\phi(r_0) e^{i\omega t}$, $E_z(t, r) = E_z(r) e^{i\omega t}$, получим, с учётом (1.9), третье уравнение на константы C_1, C_2, C_3 :

$$\sum_{k=1}^3 C_k I_1(\sqrt{\lambda_k} r_0) \lambda_k^{-1/2} = \frac{J_0}{2\pi r_0} \quad (1.16)$$

Система трёх линейных уравнений (1.8), (1.10) позволяет найти константы

C_1, C_2, C_3

$$C_1 = D^{-1} \frac{J_0}{2\pi r_0} \frac{(\Phi(\lambda_2) - \Phi(\lambda_3))}{I_0(\sqrt{\lambda_1} r_0)}, \quad C_2 = D^{-1} \frac{J_0}{2\pi r_0} \frac{(\Phi(\lambda_3) - \Phi(\lambda_1))}{I_0(\sqrt{\lambda_2} r_0)}$$

$$C_3 = D^{-1} \frac{J_0}{2\pi r_0} \frac{(\Phi(\lambda_1) - \Phi(\lambda_2))}{I_0(\sqrt{\lambda_3} r_0)} \quad (1.17)$$

$$D = L_1(\Phi(\lambda_2) - \Phi(\lambda_3)) + L_2(\Phi(\lambda_3) - \Phi(\lambda_1)) + L_3(\Phi(\lambda_1) - \Phi(\lambda_2))$$

$$L_k = \frac{I_1(\sqrt{\lambda_k} r_0)}{I_0(\sqrt{\lambda_k} r_0)} \lambda_k^{-1/2}, \quad 1 \leq k \leq 3 \quad (1.18)$$

С учётом формул (1.17), (1.18), (1.10), (1.12) выражения (1.13) дают полное математическое решение задачи о вынужденных колебаниях плазмы в трубе в случае простых корней характеристического уравнения (1.11) (случай кратных корней рассмотрен в [14]).

Формулы (1.13) дают следующие распределения по радиусу трубы плотности тока, продольной скорости плазмы и продольного электрического поля:

$$j_z(r) = \frac{J_0}{2\pi r_0} D^{-1} \left\{ \frac{I_0(\sqrt{\lambda_1} r)}{I_0(\sqrt{\lambda_1} r_0)} (\lambda_2 - \lambda_3) \left(i\omega - \frac{\mu}{\rho} \lambda_1 \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{I_0(\sqrt{\lambda_2} r)}{I_0(\sqrt{\lambda_2} r_0)} (\lambda_3 - \lambda_1) \left(i\omega - \frac{\mu}{\rho} \lambda_2 \right) + \frac{I_0(\sqrt{\lambda_3} r)}{I_0(\sqrt{\lambda_3} r_0)} (\lambda_1 - \lambda_2) \left(i\omega - \frac{\mu}{\rho} \lambda_3 \right) \right\}$$

$$U_z(r) = \frac{J_0 \mu_*}{2\pi r_0 \rho^2} D^{-1} \left\{ \frac{I_0(\sqrt{\lambda_1} r)}{I_0(\sqrt{\lambda_1} r_0)} (\lambda_2 - \lambda_3) \lambda_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{I_0(\sqrt{\lambda_2} r)}{I_0(\sqrt{\lambda_2} r_0)} (\lambda_3 - \lambda_1) \lambda_2 + \frac{I_0(\sqrt{\lambda_3} r)}{I_0(\sqrt{\lambda_3} r_0)} (\lambda_1 - \lambda_2) \lambda_3 \right\} \quad (1.19)$$

$$E_z(r) = \frac{4\pi i \omega J_0}{2\pi r_0} D^{-1} \left\{ \frac{I_0(\sqrt{\lambda_1} r)}{I_0(\sqrt{\lambda_1} r_0)} (\lambda_2 - \lambda_3) \frac{i\omega - \mu \rho^{-1} \lambda_1}{c^2 \lambda_1 + \omega^2} + \right. \\ \left. + \frac{I_0(\sqrt{\lambda_2} r)}{I_0(\sqrt{\lambda_2} r_0)} (\lambda_3 - \lambda_1) \frac{i\omega - \mu \rho^{-1} \lambda_2}{c^2 \lambda_2 + \omega^2} + \frac{I_0(\sqrt{\lambda_3} r)}{I_0(\sqrt{\lambda_3} r_0)} (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{i\omega - \mu \rho^{-1} \lambda_3}{c^2 \lambda_3 + \omega^2} \right\} \\ D = L_1 (\lambda_2 - \lambda_3) \left(i\omega - \frac{\mu}{\rho} \lambda_1 \right) + L_2 (\lambda_3 - \lambda_1) \left(i\omega - \frac{\mu}{\rho} \lambda_2 \right) + \\ + L_3 (\lambda_1 - \lambda_2) \left(i\omega - \frac{\mu}{\rho} \lambda_3 \right)$$

где $L_k, 1 \leq k \leq 3$ вычисляются по формулам (1.18), а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – различные корни уравнения (1.11).

1.3. Анализ корней характеристического уравнения

Для анализа поведения характеристических чисел λ_k перепишем уравнение (1.11) в безразмерном виде. При этом в качестве характерной длины выберем радиус трубы r_0 , плотности – ρ , гидродинамической скорости v_0 – среднюю скорость движения границы шнура при его сжатии (типичные значения $v_0 \sim 10^7$ см/с [47]), время $t_0 = r_0/v_0$. Тогда характерный масштаб собственных чисел λ равен $1/r_0^2$, а частоты $\omega - t_0^{-1}$.

$$\lambda^3 \left[\frac{\xi^2}{R_+ R_-} \right] - \lambda^2 \left[\frac{1}{R_* R_m} + i\omega \xi^2 \left(\frac{1}{R_+} + \frac{1}{R_-} \right) - \frac{\omega^2 v^2 \xi^2}{R_+ R_-} \right] + \\ + i\omega \lambda \left[\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_*} + i\omega \left(\xi^2 + \frac{v^2}{R_* R_m} \right) - \omega^2 v^2 \xi^2 \left(\frac{1}{R_+} + \frac{1}{R_-} \right) \right] + \\ + \omega^2 \left(1 + i\omega \frac{v^2}{R_m} - \omega^2 v^2 \xi^2 \right) = 0 \quad (1.20)$$

$$R_*^{-1} = \left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-} \right) R_+^{-1} + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_\Sigma} \right) R_-^{-1}, \lambda_\pm = \frac{m_\pm}{e_\pm}, \lambda_\Sigma = \lambda_+ + \lambda_-$$

$$\xi = \frac{c}{r_0} \left(\frac{\lambda_+ \lambda_-}{4\pi \rho} \right)^{1/2} = \frac{c}{r_0 \omega \rho}, v = \frac{v_0}{c}, R_\pm^{-1} = \frac{\mu_\pm}{v_0 r_0 \rho_\pm}, R_m^{-1} = \frac{c^2}{4\pi \sigma v_0 r_0} \quad (1.21)$$

Иными словами, $R_{\pm} = Re_{\pm}$ – числа Рейнольдса электронов и ионов, $R_m = Re_m$ – магнитное число Рейнольдса, ξ – параметр обмена [37], v – релятивистский параметр.

Выпишем корни уравнения (1.20) в предельных случаях. В классической МГД ($v = 0, \xi = 0$) [27] $\lambda_1 = i\omega R_*, \lambda_2 = i\omega R_m$. В релятивистской МГД ($\xi = 0$) [54] $\lambda_1 = i\omega R_*, \lambda_2 = i\omega R_m - \omega^2 v^2$. Для невязкой плазмы с конечным омическим сопротивлением ($\mu_{\pm} = 0, R_{\pm} = +\infty$) уравнение (1.20) имеет единственный корень $\lambda_1 = -\omega^2 v^2 + i\omega(R_m^{-1} + i\omega\xi^2)^{-1}$. Для плазмы с невязкими электронами ($\mu_- = 0, R_- = +\infty$) уравнение (1.20) имеет два корня, которые с точностью до слагаемых $\sim \lambda_-/\lambda_{\Sigma} = Zm_e/(m_i + Zm_e) \ll 1$ имеют вид:

$$\lambda_1 = \frac{i\omega}{R_m^{-1} + i\omega\xi^2} - \omega^2 v^2, \quad \lambda_2 = i\omega R_*$$

Для анализа корней (1.20) перейдём к переменной $z = -i\omega/\lambda$:

$$\begin{aligned} & z^3 \left[1 + i\omega \frac{v^2}{R_m} - \omega^2 v^2 \xi^2 \right] + \\ & + z^2 \left[R_*^{-1} + R_m^{-1} + i\omega \left(\xi^2 + \frac{v^2}{R_* R_m} \right) - \omega^2 v^2 \xi^2 (R_+^{-1} + R_-^{-1}) \right] + \\ & + z \left[\frac{1}{R_* R_m} + i\omega \xi^2 (R_+^{-1} + R_-^{-1}) - \frac{\omega^2 v^2 \xi^2}{R_+ R_-} \right] + \frac{i\omega \xi^2}{R_+ R_-} = 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

Для $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ все три корня уравнения (1.22), в отличие от уравнения (1.20), простые (исключая вырожденные случаи $R_m = R_*$ или $R_+ = R_-$). При $\omega = 0$ корни (1.22) равны $z = 0, z = -R_m^{-1}, z = -R_*^{-1}$, а при $\omega = \infty$ это $z = 0, z = -R_+^{-1}, z = -R_-^{-1}$. Перепишем (1.22) в виде:

$$-is = F(z) - s^2 \left(\frac{v}{\xi} \right)^2 G(z), \quad s = \omega \xi^2 \quad (1.23)$$

$$F(z) = z(z + R_*^{-1})(z + R_m^{-1})/H(z), G(z) = z(z + R_+^{-1})(z + R_-^{-1})/H(z)$$

$$H(z) = (z + R_+^{-1})(z + R_-^{-1}) + \left(\frac{v}{\xi}\right)^2 \frac{z^2}{R_m} (z + R_*^{-1}) \quad (1.24)$$

Продифференцировав по s (1.23) вдоль его решения $z(s)$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка для нахождения комплексной функции $z(s)$:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{-i + 2s(v/\xi)^2 G(z)}{F'(z) - s^2(v/\xi)^2 G'(z)} \quad (1.25)$$

Решая три задачи Коши для уравнения (1.25) с начальными условиями $z_1(0) = 0, z_2(0) = -R_m^{-1}, z_3(0) = -R_*^{-1}$, получим три кривые $z_k(s)$ на комплексной плоскости, по которым легко восстанавливаются собственные числа $\lambda_k(s) = -is(\xi^2 z_k(s))^{-1}, 1 \leq k \leq 3, s = \omega \xi^2$. Поведение $\lambda_k(\omega)$ в окрестности $\omega = 0, \omega = \infty$ восстанавливаются сколь угодно точно при помощи разложения функций $z_k(s)$ в степенные ряды. Вычисления приводят к следующим разложениям:

$$\omega \ll 1$$

$$\lambda_1(\omega) = \frac{R_+ R_-}{R_* R_m} \frac{1}{\xi^2} + i\omega(R_+ + R_- - R_m - R_*) +$$

$$+ \xi^2 \frac{R_* R_m}{R_+ R_-} \omega^2 \left[R_+ R_- - R_* R_m + (R_* + R_m)(R_* + R_m - R_- - R_+) \right] + \dots$$

$$\lambda_2(\omega) = i\omega R_* + \frac{\xi^2 R_* (1 - R_* R_-^{-1})(1 - R_* R_+^{-1})}{R_*^{-1} - R_m^{-1}} \omega^2 + \dots \quad (1.26)$$

$$\lambda_3(\omega) = i\omega R_m + \left[\frac{\xi^2 R_m (1 - R_m R_-^{-1})(1 - R_m R_+^{-1})}{R_m^{-1} - R_*^{-1}} - v^2 \right] \omega^2 + \dots$$

$$\omega \gg 1$$

$$\lambda(\omega) = -\omega^2 v^2 + \frac{iR_+ R_-}{v^2 \xi^2 R_*} \frac{1}{\omega} + \frac{R_+ R_-}{v^4 \xi^2 R_*} (R_+ + R_- - R_*) \frac{1}{\omega^2} + \dots$$

$$\lambda(\omega) = iR_+\omega + \frac{R_+ \lambda_-}{R_m \lambda_\Sigma} \frac{1}{\xi^2} - \frac{iR_+ \lambda_-}{\xi^2 \lambda_\Sigma} \left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{\xi^2 R_m^2} \frac{\lambda_+ R_-}{\lambda_\Sigma R_+ - R_-} \right] \frac{1}{\omega} + \dots \quad (1.27)$$

$$\lambda(\omega) = iR_-\omega + \frac{R_- \lambda_+}{R_m \lambda_\Sigma} \frac{1}{\xi^2} - \frac{iR_- \lambda_+}{\xi^2 \lambda_\Sigma} \left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{\xi^2 R_m^2} \frac{\lambda_- R_+}{\lambda_\Sigma R_- - R_+} \right] \frac{1}{\omega} + \dots$$

Заранее, однако, нельзя сказать какая кривая $z_k(s)$, $1 \leq k \leq 3$ в какую из трёх точек $z=0$, $z=-R_+^{-1}$, $z=-R_-^{-1}$ входит при $s \rightarrow +\infty$. Это показывает только численное решение указанных выше трёх задач Коши. Оказывается, распределение кривых $z_k(s)$ по точкам входа на бесконечность зависит от значений величин v/ξ , R_\pm , R_m . Полный анализ этой зависимости выходит за рамки настоящей работы. Приведём полученные результаты для одного конкретного набора типичных в задаче о динамике z-пинчей значений параметров плазменного шнура в области перетяжки [3,22,47]: $n \approx 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $T = T_i = T_e = 10^8 \text{ }^\circ\text{K}$, $v_0 = 10^7 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$, $r_0 = 10^{-1} \text{ см}$, $J_0 = 10^6 \text{ а}$, $t_0 = 10^{-8} \text{ с}$. Проводимость плазмы σ и коэффициенты вязкости электронов и ионов μ_\pm вычисляются по формулам [43]:

$$\mu_+ = 0.96 \frac{3m_i^{1/2} T_i^{5/2}}{4\pi^{1/2} \Lambda e^4 Z^4}, \quad \mu_- = 0.733 \frac{3m_e^{1/2} T_e^{5/2}}{4(2\pi)^{1/2} \Lambda e^4 Z}$$

$$\sigma = \frac{3T_e^{1/2}}{4(4\pi m_e)^{1/2} \Lambda e^2 Z^4 0.5129}$$

где $\Lambda = 15$ – кулоновский логарифм, T_i, T_e – температуры электронов и ионов в эргах. Для изотермической ($T_i = T_e = T$) дейтериевой плазмы ($m_i = 2m_p$, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-24} \text{ г}$) $Z = 1$, и приходим к следующим значениям чисел подобия: $\xi^2 = 1.05 \cdot 10^{-5}$, $v^2 = 1.1 \cdot 10^{-7}$, $R_- = 4.9 \cdot 10^{-2}$, $R_+ = 1.6$, $R_* = 1.58589$, $R_m = 1.265 \cdot 10^5$, $(v/\xi)^2 = 1.06 \cdot 10^{-2}$. С учётом эффективного увеличения магнитной вязкости, вследствие турбулентности плазмы в z-пинчах [22], считаем $R_m = 1.265 \cdot 10^2$.

Внешнее магнитное поле можно считать твёрдой стенкой. Действительно,

как показано в [5], §4.5, $\ell_* \sim r_{ce}, \tau_* \leq \omega_{ci}^{-1}$, где r_{ce}, ω_{ci} – циклотронные радиус электронов и частота ионов. Поскольку граница шнура покоится [47], то при подсчёте r_{ce} надо использовать тепловую скорость электронов. В итоге для указанных выше параметров получим $\omega_{ci}^{-1} = \frac{m_i c}{e H_0} \sim 10^{-10} \text{ с}$, $r_{ce} = \sqrt{k T_0 / m_e} / \omega_{ce} =$
 $= c \sqrt{k T_0 m_e} / (e H_0) \sim 10^{-3} \text{ см}$, где $H_0 = 2 J_0 / (c r_0) = 2 \cdot 10^6 \text{ эс}$ характерное значение вакуумного магнитного поля. Для $\tau = 10^{-6} \text{ с}$, $r_0 = 10^{-1} \text{ см}$ получим $\ell_* \ll r_0, \tau_* \leq \omega_{ci}^{-1} \ll \tau$, что оправдывает приближение твёрдой стенки.

Отметим, что для рассматриваемых параметров выполнены также и условия несжимаемости, приведённые выше.

На Рис.1.1 приведено качественное поведение (топология) собственных чисел $\lambda_k(\omega)$ с учётом тока смещения ($v^2 = 1.1 \cdot 10^{-7} > 0$) и в квазистационарном случае ($v^2 = 0$), когда током смещения пренебрегают. (На Рис.1.1 указаны только половинки кривых $\lambda_k(\omega)$ для $\omega \geq 0$; для $\omega < 0$ они получаются зеркальным отражением изображённых кусков относительно вещественной оси.) На Рис.1.2 кривые $\lambda_k(\omega)$ для $v^2 = 1.1 \cdot 10^{-7} > 0$ даны в реальном масштабе по результатам расчёта. Из приведённых результатов хорошо видно, что учёт тока смещения кардинально меняет поведение $\lambda_k(\omega)$ (а значит и решения (1.19)) на высоких частотах. В частности, переход к высокочастотному пределу без учёта токов смещения приведёт к существенному искажению предельного результата. При этом понятие высокой частоты определяется параметром ξ . В разбираемом примере $\xi^2 \ll 1$ и возникает “быстрая” переменная ω и “медленная” s . Одноимённые кривые на Рис.1.1, как следует из вычислений, совпадают с точностью до трёх-четырёх знаков после запятой при $|s| \leq 0.1$. Поэтому ток смещения можно не учитывать для $|\omega| \leq \xi^{-2} \cdot 0.1 \cong 10^4$. В размерном виде это даёт $\omega \leq 10^{12} \text{ Гц} = 1 \text{ Терагерц}$. Значит, в данном конкретном случае под

высокими частотами надо понимать частоты $\omega > 1$ Терагерц. С другой стороны, при $\nu > 0$ меняются предельные точки $z_k(s)$ при $s \rightarrow +\infty$. При $\nu = 0$ кривые $z_1(s), z_2(s), z_3(s)$ входят на бесконечности в точки $\infty, -R_+^{-1}, -R_-^{-1}$ соответственно. При $\nu = 1.1 \cdot 10^{-7} > 0$ эти же кривые при $s \rightarrow +\infty$ стремятся соответственно к точкам $-R_-^{-1}, -R_+^{-1}, 0$. Таким образом, принципиально изменилось поведение на бесконечности кривых $z_1(s)$ и $z_3(s)$. Интересный, остающийся открытым вопрос, существует ли бифуркационное значение параметра $\nu \geq 0$, разделяющее эти два типа поведения собственных чисел на бесконечности? Заметим, что при $\nu = 0$ поведение корней характеристического многочлена на бесконечности задаётся разложениями:

$$\begin{aligned}\lambda(\omega) &= iR_+\omega - \frac{1}{\xi^2} \frac{R_+R_-}{R_mR_*} \cdot \frac{R_* + R_m - R_+}{R_+ - R_-} + O\left(\frac{1}{\omega}\right) \\ \lambda(\omega) &= iR_-\omega - \frac{1}{\xi^2} \frac{R_+R_-}{R_mR_*} \cdot \frac{R_* + R_m - R_-}{R_- - R_+} + O\left(\frac{1}{\omega}\right) \\ \lambda(\omega) &= \frac{1}{\xi^2} - \frac{i}{\xi^4} (R_+^{-1} + R_-^{-1} - R_*^{-1} - R_m^{-1}) \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\xi^6} \left[\frac{1}{R_+R_-} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{R_mR_*} - 2 \left(\frac{1}{R_+} + \frac{1}{R_-} \right) \left(\frac{1}{R_+} + \frac{1}{R_-} - \frac{1}{R_m} - \frac{1}{R_*} \right) \right] \frac{1}{\omega^2} + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right)\end{aligned}$$

Из этого разложения, а также разложений (1.26), (1.27) получаются

характерные точки на Рис.1.1: $x_0 = \frac{R_+R_-}{R_mR_*} \frac{1}{\xi^2}$, $x_1 = \frac{R_- \lambda_-}{R_m \lambda_\Sigma} \frac{1}{\xi^2}$, $x_2 = \frac{R_+ \lambda_+}{R_m \lambda_\Sigma} \frac{1}{\xi^2}$,

$$x_3 = \frac{R_+R_-}{R_mR_*} \frac{1}{\xi^2} \frac{R_* + R_m - R_-}{R_+ - R_-}, x_4 = -\frac{R_+R_-}{R_mR_*} \frac{1}{\xi^2} \frac{R_* + R_m - R_+}{R_+ - R_-}, x_5 = 1/\xi^2.$$

1.4. Сравнение с классической МГД

Рассмотрим решение задачи о вынужденных колебаниях плазмы в круглой трубе на основе классической МГД и выясним принципиальный вопрос, насколько необходим учёт инерции электронов.

Переход к классической МГД соответствует пределам $\xi \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow 0$.

Поэтому для перехода к МГД–уравнениям в системе (1.1) надо считать $\partial E_z / \partial t = 0$, $\partial^2 E_z / \partial t^2 = 0$ и опустить все те слагаемые, куда ρ входит в знаменателе:

$$\rho \frac{\partial U_z}{\partial t} - \mu_\Sigma \Delta U_z = 0, \quad E_z = \frac{j_z}{\sigma}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial H_\phi}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial r}, \quad j_z = \frac{c}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\phi)$$

Таким образом, гидродинамические и электродинамические переменные в МГД–теории разделяются и объединяет их только уравнение для радиального распределения давления

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(p_\Sigma + \frac{H_\phi^2}{8\pi} \right) + \frac{H_\phi^2}{8\pi r} = 0$$

Уравнения (1.8) на комплексные амплитуды в МГД сводятся к следующим:

$$\begin{aligned} i\omega U_z - \mu \rho^{-1} \Delta U_z &= 0, \quad \mu = \mu_\Sigma \\ E_z - \frac{c^2}{4\pi i \omega \sigma} \Delta E_z &= 0, \quad j_z = \sigma E_z, \quad H_\phi = \frac{c}{i\omega} \frac{dE_z}{dr} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Система (1.28) решается с граничными условиями (1.3) – (1.5) с учётом (1.6), из которых исключается условие прилипания для плотности тока $j_z(t, r_0) = 0$. Получаемое решение имеет вид:

$$U_z(r) = 0, \quad j_z(r) = \frac{J_0}{2\pi r_0^2} \frac{I_0(\sqrt{\lambda_2} r)}{I_1(\sqrt{\lambda_2})} \sqrt{\lambda_2}, \quad E_z(r) = \frac{j_z(r)}{\sigma} \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (1.29)$$

где $\lambda_1 = i\omega R_*$, $\lambda_2 = i\omega R_m$, т.е. в точности решения характеристического уравнения (1.20) для $\nu = 0$, $\xi = 0$. Сравним формулы (1.29) и (1.19) для $j_z(r)$. Очевидное кардинальное различие между ними состоит в невыполнении в МГД условия прилипания для тока j_z на границе шнура. Более глубокие различия обнаруживаются при рассмотрении низкочастотного предела, т.е. при разложении $j_z(r)$ в ряд по степеням ω . Достаточно сравнить нулевые коэффициенты разложений, т.е. пределы $j_z(r)$ при $\omega \rightarrow 0$ – в МГД это,

очевидно, $J_0/(\pi r_0^2)$, а формулы (1.19) с учётом разложений (1.26) дают:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} j_z(r) = \frac{J_0}{\pi r_0^2} \cdot \left(1 - \frac{I_0(ar)}{I_0(a)}\right) \left(1 - \frac{2I_1(a)}{aI_0(a)}\right)^{-1} = j_z^0(r), \quad a = \sqrt{\frac{R_+ R_-}{R_* R_m}} \frac{1}{\xi} \quad (1.30)$$

Функция $j_z^0(r)$ при $\xi \rightarrow 0$, т.е. в МГД – пределе, поточечно на интервале $0 \leq r < 1$ сходится к $J_0/(\pi r_0^2)$, причём сходимость равномерная на любой компактной части этого полуинтервала. Таким образом, при достаточно малых ξ функция $j_z^0(r)$ задаёт погранслоем в малой окрестности ($\sim \xi$) точки 1, а вне этой окрестности она почти совпадает с МГД решением $J_0/(\pi r_0^2)$. Однако для малых, но конечных ξ отличие $j_z^0(r)$ от $J_0/(\pi r_0^2)$ может быть значительным.

Определяющий параметр a равен:

$$a = \frac{\rho r_0}{\lambda_+ + \lambda_-} \sqrt{\frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\mu_+} + \frac{1}{\mu_-} \right)}$$

Для рассматриваемого в разделе 1.3 базового примера $a = 5.954$ и график $j_z^0(r)$, приведённый на Рис.1.3, демонстрирует значительное расхождение с МГД – теорией. Если не переходить к эффективной магнитной вязкости и рассматривать менее экстремальные плотности плазмы (скажем $n \approx 10^{20} \text{ см}^{-3}$), то параметр $a \ll 1$ и отличие МГД – решения от решения, полученного выше и учитывающего инерцию электронов, станет разительным (Рис.1.3).

Основной вывод из предыдущего рассуждения на примере задачи о вынужденных колебаниях плазмы состоит в непригодности МГД – теории для исследования процессов в z-пинчах и необходимости учёта инерции электронов для адекватного описания динамики плазмы при её исследовании.

1.5. Гидродинамический скин-эффект

Анализ профилей (1.19), изображённый на Рис.1.3-5, и зависимости их от частоты ω приводит к ряду важных выводов.

Во-первых, плотность тока j_z , массовая скорость U_z и скорости

компонент плазмы v_z^\pm осциллируют по радиусу с быстро нарастающей по мере приближения к границе трубы амплитудой. При этом частота пространственных колебаний растёт с увеличением частоты внешнего временного воздействия ω и стремится к 0 при $\omega \rightarrow 0$. В частности, движение плазмы в трубе распадается на несколько встречных потоков с чередующимся направлением течения.

Во-вторых, при увеличении частоты внешнего воздействия основные изменения профилей происходит во всё более узком пристеночном слое, толщина которого стремится к 0 при $\omega \rightarrow +\infty$. Вне этого слоя плотность тока j_z и гидродинамические скорости U_z, v_z^\pm имеют ничтожно малые по сравнению с пристеночными амплитуды колебаний, так что плазму вне слоя можно считать почти покоящейся. Таким образом, наблюдается ярко выраженное скинирование параметров течения вдоль поверхности плазменного шнура. На Рис.1.4 показаны профили плотности тока j_z для четырёх частот $\omega = \xi^{-2}s$, где s пробегает значения $10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$. Для максимальной размерной частоты $\omega = 10^{12}$ Гц, отвечающей $s = 10^{-1}$, наблюдается ярко выраженный скин-эффект – течение локализовано в слое $0.85 \leq r \leq 1$, составляющем $\approx 1/7$ часть радиуса шнура. Для минимальной размерной частоты $\omega = 10^9$ Гц, отвечающей $s = 10^{-4}$, скинирование пропадает. В пределе $\omega \rightarrow 0$ профиль j_z теряет колебательный характер и вырождается в параболовидную кривую, приведённую на Рис.1.3. Аналогично ведут себя и гидродинамические скорости U_z (Рис.1.4), v_z^\pm .

Как следует из разложений (1.27) и формулы (1.19) для моды $j_z(r)$, при $\omega \rightarrow +\infty$ амплитуда плотности тока растёт как $\omega^{1/2}$. В частности, ничтожно малые по амплитуде осцилляции полного тока достаточно высокой частоты (например, шум) приводят к сильным скинированным по границе шнура плазменным токам.

Наконец, временная эволюция физически наблюдаемого тока $j_z(t, r) = \text{Re } j_z(r) \cos \omega t - \text{Im } j_z(r) \sin \omega t$, приведённая на Рис.1.5, для двух характерных частот – “высокой” $\omega = 10^{12}$ Гц и “низкой” $\omega = 10^9$ Гц, показывает, что все отмеченные выше для “замороженного” времени t особенности вынужденных колебаний будут иметь место для всех t .

1.6. Заключение

Исследованы вынужденные колебания несжимаемой плазмы в круглой цилиндрической трубе, под действием гармонически изменяющегося с частотой ω полного тока. При этом в полном объёме учтены инерция электронов и ток смещения. Сравнение точных решений задачи о вынужденных колебаниях на основе классической несжимаемой МГД и двухжидкостной МГД с учётом инерции электронов приводит к заключению о необходимости учёта конечной массы электронов для анализа динамики перетяжечной плазмы.

Полученное математическое решение задачи показывает, что внешнее воздействие вызывает в каждой точке шнура гармонические колебания параметров плазмы с той же частотой ω , однако амплитуды и фазы этих колебаний меняются от точки к точке. При увеличении частоты внешнего воздействия ω , распределения параметров плазмы по радиусу приобретают осциллирующий характер с резко возрастающей по мере удаления от оси трубы амплитудой. В частности, течение плазмы в трубе расслаивается на встречные потоки с чередующимся направлением движения плазмы (но без тангенциальных разрывов скорости, что существенно при исследовании устойчивости течения). При достаточно высоких частотах наблюдается ярко выраженный скин-эффект, когда основное движение плазмы и электрического тока локализовано преимущественно в узком слое, примыкающем к стенке трубы, а вне этого слоя ток почти не течёт, а плазма практически неподвижна.

Проанализированная пространственно-временная структура вынужденных колебаний, в частности, наиболее важная особенность – скинирование параметров течения по границе шнура, проливает свет на возможный механизм

образования гетерогенных пинчей [22]. Последний в контексте проведённого исследования выглядит следующим образом.

В результате развития неустойчивости плазмы в установках типа z-пинч [3] или плазменный фокус [47] возникают перетяжки – сверхплотные и горячие плазменные сгустки цилиндрической формы с весьма малым радиусом, плазму в которых можно приближённо считать несжимаемой. Высокочастотные осцилляции полного тока (скажем, паразитического типа, которые присутствуют всегда) приводят к сильному скинированию плотности тока по границе перетяжки и, как следствие, крайне неравномерному нагреву плазмы за счёт джоулева тепла. В итоге возникают горячий тонкий приграничный слой плазмы и относительно холодный ствол оставшейся перетяжечной плазмы. Последующее расширение приграничного слоя приводит к гетерогенному пинчу – совместному существованию плотного и холодного неподвижного плазменного ствола и горячей разреженной плазменной короны. Разумеется, заключительные этапы представленного сценария не укладываются в модель несжимаемой плазмы. Для их математического анализа требуются более сложные уравнения.

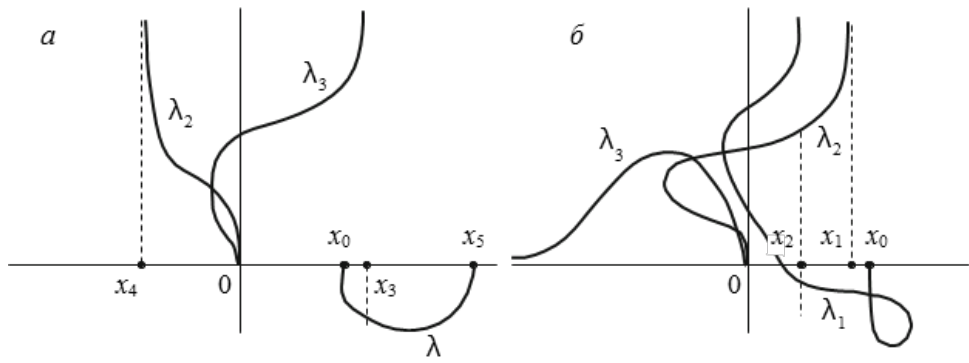


Рис.1.1. Качественное поведение собственных чисел $\lambda_k(\omega)$ на комплексной плоскости с учётом тока смещения: а $\nu^2 = 0$, б $\nu^2 = 1.1 \cdot 10^{-7}$ указаны характерные точки оси $x = \text{Re } \lambda$

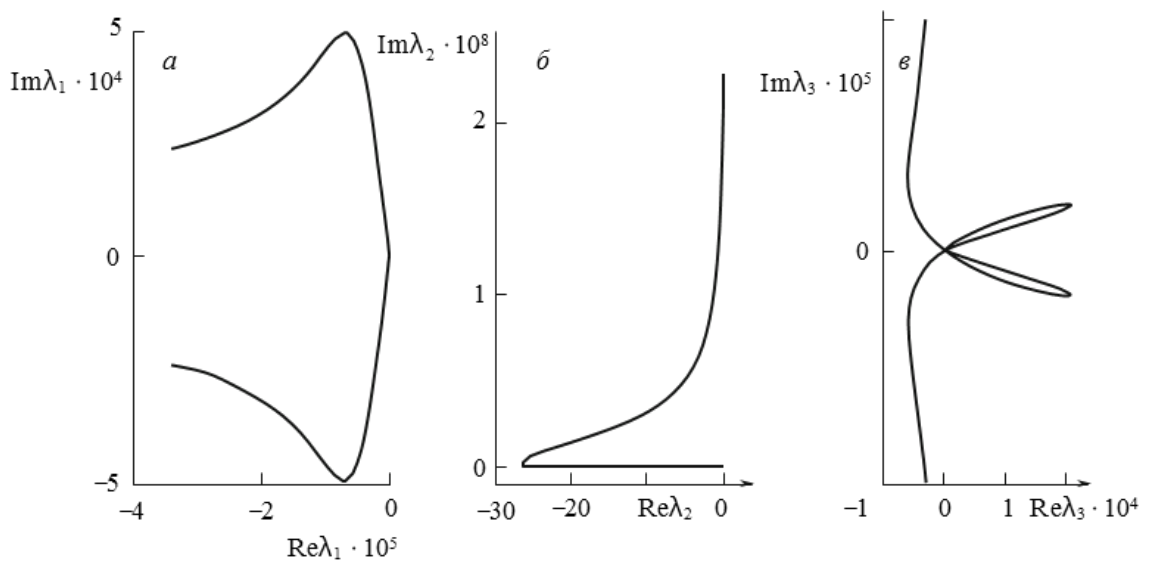


Рис.1.2. Собственные числа $\lambda_k(\omega)$ для $\nu^2 = 1.1 \cdot 10^{-7}$ на комплексной плоскости: а – $\lambda_1(\omega)$, б – $\lambda_2(\omega)$, в – $\lambda_3(\omega)$

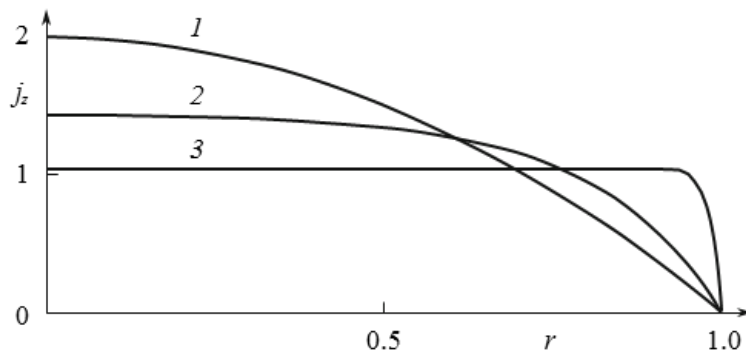


Рис.1.3. Предельный профиль $j_z(r)$ в единицах $J_0/(\pi r_0^2)$ при $\omega \rightarrow 0$ для различных значений параметра a : 1 – $a = 0.5954$, 2 – $a = 5.954$, 3 – $a = 59.54$

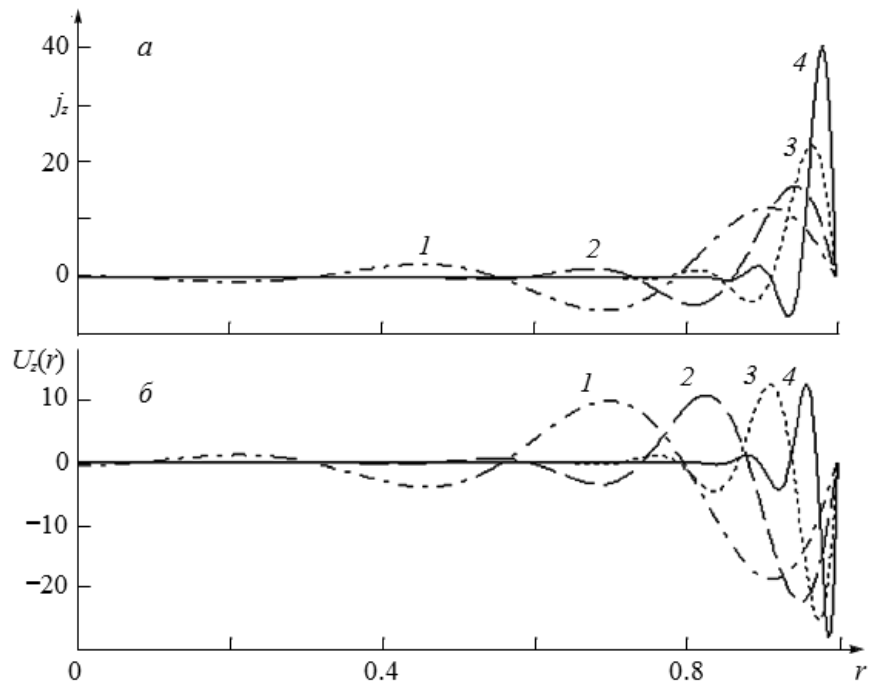


Рис.1.4. Скинирование плотности тока $j_z(r)$ в единицах $J_0/(\pi r_0^2)$ и массовой скорости $U_z(r)$ в единицах $J_0 \mu_* (2\pi r_0^3 \rho^2 v_0)^{-1}$ при $\omega \rightarrow +\infty$. Даны профили для четырёх характерных частот: 1 – ($\omega = 10^9$ Гц), 2 – ($\omega = 10^{10}$ Гц), 3 – ($\omega = 10^{11}$ Гц), 4 – ($\omega = 10^{12}$ Гц)

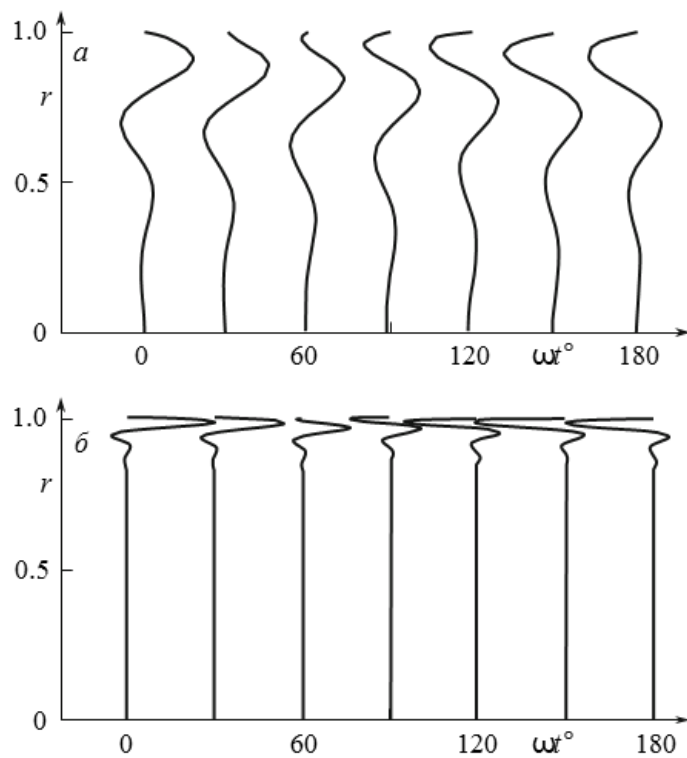


Рис.1.5. Эволюция реальных профилей плотности тока $j_z(t, r)$ в единицах $J_0/(\pi r_0^2)$ для двух характерных частот: (а) – ($\omega = 10^9$ Гц), (б) – ($\omega = 10^{12}$ Гц)

Глава 2. Стационарное течение несжимаемой плазмы в плоском канале

В этой главе рассмотрены ЭМГД-уравнения с учётом диссипаций и проанализирована роль двухжидкостных эффектов на примере решения известной классической задачи плазмодинамики об установившемся течении несжимаемой плазмы между двумя параллельными пластинами, помещёнными в постоянное поперечное магнитное поле. Как известно [27], в отсутствие магнитного поля, эпюра продольной скорости плазмы в плоском канале имеет параболический профиль (парабола Пуазейля). С появлением поперечного магнитного поля параболический профиль, согласно МГД-теории, продольной скорости становится всё более пологим и равномерно по сечению канала стремится к нулю с увеличением напряжённости магнитного поля. Таким образом, сильное магнитное поле “запирает” поток несжимаемой плазмы в плоском канале (эффект Гартмана) [27].

Как показано ниже, учёт двухжидкостной структуры плазмы существенно меняет эпюру продольной скорости, хотя эффект запираания потока остаётся. Во-первых, она становится пространственной и двухчастотной, а направление потока плазмы в канале отклоняется от направления антиградиента давления, принуждающего плазму к течению – своеобразный гидродинамический “эффект Холла“. Это отклонение нарастает с увеличением поперечного магнитного поля и стабилизируется в пределе сильного магнитного поля. Во-вторых, появляется ещё один, помимо числа Гартмана Na , определяющий безразмерный параметр задачи Γ , содержащий плотность плазмы. В-третьих, в случае подвижных и замагниченных стенок канала полученное решение позволяет подсчитать толщину погранслоя, которая даёт существенную поправку к известному МГД-результату [27]. В итоге, проведённое исследование показывает, что для газовой плазмы МГД-теория плоского канала оказывается непригодной и надо пользоваться ЭМГД-теорией. Обе теории практически совпадают применительно к жидкометаллической плазме.

2.1. Установившиеся течения в плоском канале

Система уравнений (12) в случае стационарных течений $\partial/\partial t = 0$ примет вид

$$\operatorname{div}\mathbf{U} = 0, \quad \operatorname{Div}\Pi = \operatorname{Div}P$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c}[\mathbf{U}, \mathbf{H}] + \frac{1}{\rho}\operatorname{Div}\mathbf{W} \quad (*)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{H}$$

Рассмотрим установившиеся течения несжимаемой плазмы в бесконечном плоском канале, стенки которого параллельны плоскости Oyz и задаются уравнениями $x = \pm\ell$. Ограничимся сначала изучением течений с плоской симметрией ($\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$), вызванных постоянным перепадом давления вдоль оси z , т.е. решений системы (*) вида

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(x), \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(x), \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}(x), \quad p_{\pm} = p_{\pm}(x, z) \quad (2.1)$$

удовлетворяющих граничным условиям:

$$\mathbf{U}(\pm\ell) = 0, \quad \mathbf{j}(\pm\ell) = 0, \quad \mathbf{H}(\pm\ell) = (H_0, 0, 0) \quad (2.2)$$

В частности, стенки канала считаются неподвижными. Более общие граничные условия рассмотрены в разделе 2.5. Из (*) следует $U_x = 0$, $j_x = 0$, $H_x = H_0$. Легко установить, что $\partial p_{\pm}/\partial z = A_{\pm} = \text{const}$ и $p_{\pm}(x, z) = A_{\pm}z + \varphi_{\pm}(x)$, где константы A_{\pm} задаются, а функции $\varphi_{\pm}(x)$ ищутся. Наконец, из (*) следует, что $\mathbf{E}(x) \equiv \text{const}$, причём E_x задаётся, а E_y , E_z подлежат нахождению из системы (*). Для нахождения неизвестных H_y , H_z , U_y , U_z подстановкой этих функций в соотношения (*) $\operatorname{Div}\Pi = \operatorname{Div}P$, $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$L(D)(H_y, H_z, U_y, U_z)^T = \frac{\partial p_{\pm}}{\partial z}(0, 1, 0, 0)^T, \quad D = \frac{d}{dx} \quad (2.3)$$

где $L(D) = [L_{ij}(D)]_{|i,j| \leq 4}$, $L_{ij}(D)$ – алгебраические многочлены степени не выше

4. Явный вид операторной матрицы $L(D)$:

$$L(D) = \begin{bmatrix} \alpha D & -\beta D^3 & \mu_{\Sigma} D^2 & 0 \\ \beta D^3 & \alpha D & 0 & \mu_{\Sigma} D^2 \\ D^2 \left(\frac{c\mu^*}{4\pi\rho^2} D^2 - \frac{c}{4\pi\sigma} \right) & \frac{(\chi_- - \chi_+)\alpha}{\rho} D^2 & -\frac{H_0}{c} D & \frac{\mu_*}{\rho} D^3 \\ \frac{(\chi_+ - \chi_-)\alpha}{\rho} D^2 & D^2 \left(\frac{c\mu^*}{4\pi\rho^2} D^2 - \frac{c}{4\pi\sigma} \right) & -\frac{\mu_*}{\rho} D^3 & -\frac{H_0}{c} D \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

где $\alpha = H_0/(4\pi)$, $\beta = c\mu^*/(4\pi\rho)$, $\chi_{\pm} = m_{\pm}/e_{\pm}$. После приведения системы (2.3) к каноническому виду получалась бы линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными вещественными коэффициентами 14-го порядка. Высокий порядок канонической системы серьёзно затрудняет её непосредственную интеграцию. Воспользуемся следующим искусственным приёмом, считая ниже $H_0(\mu_+ - \mu_-) \neq 0$ (невыврожденный случай).

2.2. Комплексификация системы уравнений

Рассмотрим вещественную плоскость как комплексную прямую: $a + ib = (a, b)$, тогда умножение комплексных чисел и умножение матрицы на вектор связаны известной формулой

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = (a + ib)(\xi + i\eta) \quad (2.5)$$

С другой стороны, 4x4-операторная матрица $L(D)$ в (2.4) разбивается на четыре 2x2-блока, каждый из которых имеет тип матрицы в (2.5). Поэтому, отождествляя поперечную плоскость Oyz с комплексной прямой ($y + iz = (y, z)$, $H_{\tau} = H_y + iH_z$, $U_{\tau} = U_y + iU_z$) и переходя к переменным $w = DH_{\tau}$, $u = DU_{\tau}$, сведём систему (2.3) к виду:

$$\begin{pmatrix} \alpha + i\beta D^2 & \mu_{\Sigma} D \\ \frac{c\mu^*}{4\pi\rho^2} D^3 - \left(\frac{c}{4\pi\sigma} + i\frac{\chi_- - \chi_+}{\rho} \right) D & -\frac{H_0}{c} - \frac{i\mu_*}{\rho} D^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\frac{\partial p_{\Sigma}}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Переписывая эту систему в скалярном виде

$$\alpha w + i\beta w'' + \mu_{\Sigma} u' = i \frac{\partial p_{\Sigma}}{\partial z}, \frac{c\mu^*}{4\pi\rho^2} w''' - \left(\frac{c}{4\pi\sigma} + i \frac{\chi_- - \chi_+}{\rho} \alpha \right) w' - \frac{H_0}{c} u - \frac{i\mu^*}{\rho} u'' = 0 \quad (2.6)$$

и выражая u' через w из первого уравнения (2.6) и подставляя полученное выражение во второе, найдём явный вид зависимости u от w :

$$u = \frac{\mu_+ \mu_- c^2 \chi^2}{4\pi\rho^2 \mu_{\Sigma} H_0} w''' - \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma H_0} + \frac{ic(\mu_- \chi_- - \mu_+ \chi_+)}{4\pi\rho \mu_{\Sigma}} \right) w'$$

Подставляя полученное выражение в первое уравнение (2.6), приходим к линейному неоднородному дифференциальному уравнению 4-го порядка относительно w :

$$\frac{c\mu_+ \mu_- \chi^2}{\rho^2} w^{(IV)} - \left[\frac{c\mu_{\Sigma}}{\sigma} + \frac{iH_0 \chi(\mu_- - \mu_+)}{\rho} \right] w'' + \frac{H_0^2}{c} w = \frac{4\pi i H_0}{c} \frac{\partial p_{\Sigma}}{\partial z} \quad (2.7)$$

Поскольку характеристический многочлен уравнения (2.7) биквадратный, то квадраты его корней λ_{\pm}^2 являются нулями квадратного уравнения

$$\frac{c\mu_+ \mu_- \chi^2}{\rho^2} \xi^2 - \left[\frac{c\mu_{\Sigma}}{\sigma} + \frac{iH_0 \chi(\mu_- - \mu_+)}{\rho} \right] \xi + \frac{H_0^2}{c} = 0$$

и которые с учётом условия невырожденности $H_0(\mu_+ - \mu_-) \neq 0$ заведомо невещественные. Общее решение уравнения (2.7) имеет вид

$$w(x) = C_1 e^{\lambda_+ x} + C_2 e^{-\lambda_+ x} + C_3 e^{\lambda_- x} + C_4 e^{-\lambda_- x} + \frac{4\pi i}{H_0} \frac{\partial p_{\Sigma}}{\partial z}$$

где C_i , $1 \leq i \leq 4$ произвольные комплексные константы. Поэтому общее решение системы (2.3) в комплексных обозначениях запишется в виде:

$$H_{\tau} = \frac{1}{\lambda_+} (C_1 e^{\lambda_+ x} - C_2 e^{-\lambda_+ x}) + \frac{1}{\lambda_-} (C_3 e^{\lambda_- x} - C_4 e^{-\lambda_- x}) + \frac{4\pi i}{H_0} \frac{\partial p_{\Sigma}}{\partial z} x + R_1 \quad (2.8)$$

$$U_{\tau} = -\frac{\alpha + i\beta\lambda_+^2}{\mu_{\Sigma}\lambda_+^2} (C_1 e^{\lambda_+ x} + C_2 e^{-\lambda_+ x}) - \frac{\alpha + i\beta\lambda_-^2}{\mu_{\Sigma}\lambda_-^2} (C_3 e^{\lambda_- x} + C_4 e^{-\lambda_- x}) + R_2$$

где C_i , R_j , $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 2$ – произвольные комплексные константы.

Комплексификация граничных условий (2.2) даёт

$$U_{\tau}(\pm\ell) = 0, \quad \frac{dH_{\tau}}{dx}(\pm\ell) = 0, \quad H_{\tau}(\pm\ell) = 0 \quad (2.9)$$

Шесть комплексных констант C_i , $1 \leq i \leq 4$, R_j , $1 \leq j \leq 2$ однозначно ищутся из шести условий (2.9) и приводят к следующим окончательным выражениям для H_τ , U_τ :

$$U_\tau = \frac{i \partial p_\Sigma / \partial z}{\mu_\Sigma (\kappa_- - \kappa_+)} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda_+^2} + \frac{i\beta}{\alpha} \right) (\kappa_- - 1) \left(\frac{\text{ch } \lambda_+ x}{\text{ch } \lambda_+ \ell} - 1 \right) - \left(\frac{1}{\lambda_-^2} + \frac{i\beta}{\alpha} \right) (\kappa_+ - 1) \left(\frac{\text{ch } \lambda_- x}{\text{ch } \lambda_- \ell} - 1 \right) \right\}$$

$$H_\tau(x) = \frac{i}{\alpha} \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \left\{ x + \frac{1}{\kappa_+ - \kappa_-} \left[\frac{\kappa_- - 1}{\lambda_+} \frac{\text{sh } \lambda_+ x}{\text{ch } \lambda_+ \ell} - \frac{\kappa_+ - 1}{\lambda_-} \frac{\text{sh } \lambda_- x}{\text{ch } \lambda_- \ell} \right] \right\} \quad (2.10)$$

$$|x| \leq \ell, \quad \kappa_\pm = \frac{\text{th } \lambda_\pm \ell}{\lambda_\pm \ell}$$

x -компоненты уравнений импульсов (*) с учётом $j_x = 0$ позволяют вычислить функции $\varphi_\pm(x)$, а значит и давления p_\pm с точностью до константы:

$$\varphi'_\pm(x) = \frac{1}{\chi} \left[-\chi_\mp \frac{d}{dx} \frac{|H_\tau|^2}{8\pi} \pm E_x \pm \frac{1}{c} \text{Im}(H_\tau \overline{U_\tau}) \right] \quad (2.11)$$

Формулы (2.10), (2.11) дают полное математическое решение поставленной задачи об установившемся течении несжимаемой плазмы в плоском канале с граничными условиями (2.2).

Производные величины теперь вычисляются по (2.10):

1) средняя по сечению канала скорость

$$\langle U_\tau \rangle = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} U_\tau dx = \frac{i}{\mu_\Sigma} \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \frac{(\kappa_- - 1)(\kappa_+ - 1)}{\kappa_- - \kappa_+} \left(\frac{1}{\lambda_+^2} - \frac{1}{\lambda_-^2} \right) \quad (2.12)$$

2) поперечное электрическое поле

$$E_\tau = E_y + iE_z = -\frac{c\mu_+ \mu_- \chi^2}{\mu_\Sigma H_0 \rho^2} A \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} + \frac{i\chi}{\mu_\Sigma \rho} \frac{\partial}{\partial z} (\mu_- p_+ - \mu_+ p_-) + \frac{iH_0}{c} \langle U_\tau \rangle$$

где $A = [\lambda_+^2 \kappa_+ (\kappa_- - 1) - \lambda_-^2 \kappa_- (\kappa_+ - 1)] / (\kappa_- - \kappa_+)$

3) силы трения электронов и ионов о стенки $x = \pm \ell$ канала, отнесённые к единице площади

$$F^\pm = -\frac{i\ell \mu_\pm}{\mu_\Sigma} \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \left[1 \mp \frac{ic\chi \mu_\mp}{H_0 \rho} A \right]$$

В частности, суммарная сила трения плазмы о стенки $F = F^+ + F^- = -il \partial p_\Sigma / \partial z$ совпадает с известным [29] в гидродинамике выражением. Заметим, что $\langle j_\tau \rangle = 0$, $\langle v_\tau^\pm \rangle = \langle U_\tau \rangle$.

2.3. Качественное поведение течения и определяющие параметры

В МГД-приближении установившееся течение несжимаемой плазмы в плоском канале задаётся формулой Гартмана [27] (см. (2.17)). Учёт двухжидкостной природы плазмы приводит к принципиально другому ответу. Как следует из (2.10), если $\lambda_\pm = R_\pm + i\omega_\pm$, $R_\pm > 0$, то продольная скорость U_τ является суперпозицией гармонических колебаний с частотами ω_\pm , промодулированными по амплитуде функциями $\text{ch } R_\pm x$, $\text{sh } R_\pm x$. Кроме того, из (2.10) вытекает, что эпюра скорости U_τ имеет пространственный характер и не лежит в какой-либо плоскости, как это имеет место в случае течения Гартмана в МГД.

Чтобы получить МГД и другие предельные переходы рассмотрим два безразмерных числа:

$$\text{Ha} = \frac{H_0 \ell}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\mu_\Sigma}}, \quad \Gamma = \frac{H_0 \sigma \chi}{c\rho} \quad (2.13)$$

Первая из величин (2.13) это известное число Гартмана [27], вторая – новый определяющий параметр, содержащий плотность плазмы. Из характеристического уравнения для (2.7) следует:

$$\lambda_\pm = R_\pm + i\omega_\pm = \text{Ha} f_\pm(\Gamma) / \ell, \quad f_\pm(\Gamma) = \frac{1}{\Lambda_* \Gamma} \left\{ \frac{1 + i\Lambda_0 \Gamma \pm \sqrt{1 + 2i\Lambda_0 \Gamma - \Gamma^2}}{2} \right\}^{1/2} \quad (2.14)$$

где \sqrt{z} – главная ветвь корня, $\Lambda_* = (\mu_+ \mu_-)^{1/2} / \mu_\Sigma$, $\Lambda_0 = (\mu_- - \mu_+) / \mu_\Sigma$. Ниже предполагается $\Lambda_0 < 0$ (примерно изотермическая плазма). Теперь легко выписать явную зависимость U_τ , H_τ от параметров Ha , Γ , которые полностью определяют поведение решения (2.10), (2.11). Например, для U_τ и $\langle U_\tau \rangle$ из

(2.10), (2.12) получим:

$$U_{\tau}(x) = \frac{i\ell^2 \partial p_{\Sigma} / \partial z}{\mu_{\Sigma} (\kappa_{-} - \kappa_{+}) \text{Ha}^2} \left\{ g_{+}(\Gamma) (\kappa_{-} - 1) \left[\frac{\text{ch} \frac{\text{Ha}x}{\ell} f_{+}(\Gamma)}{\text{ch} \text{Ha}f_{+}(\Gamma)} - 1 \right] - \right. \\ \left. - g_{-}(\Gamma) (\kappa_{+} - 1) \left[\frac{\text{ch} \frac{\text{Ha}x}{\ell} f_{-}(\Gamma)}{\text{ch} \text{Ha}f_{-}(\Gamma)} - 1 \right] \right\}, \quad \kappa_{\pm} = \frac{\text{th} \text{Ha}f_{\pm}(\Gamma)}{\text{Ha}f_{\pm}(\Gamma)} \quad (2.15)$$

$$\langle U_{\tau} \rangle = \frac{i\ell^2 \partial p_{\Sigma}}{\mu_{\Sigma} \partial z} \frac{(\kappa_{-} - 1)(\kappa_{+} - 1)}{(\kappa_{-} - \kappa_{+})} \frac{1}{\text{Ha}^2} \left(\frac{1}{f_{+}^2(\Gamma)} - \frac{1}{f_{-}^2(\Gamma)} \right)$$

$$g_{\pm}(\Gamma) = \frac{1}{f_{\pm}^2(\Gamma)} + i\Lambda_*^2 \Lambda^* \Gamma, \quad \Lambda^* = \left(\frac{\chi_{-}}{\mu_{-}} - \frac{\chi_{+}}{\mu_{+}} \right) \frac{\mu_{\Sigma}}{\chi}, \quad |x| \leq \ell$$

Графики частот $\omega_{\pm}(\Gamma)$ и параметров амплитудной модуляции $R_{\pm}(\Gamma)$ в единицах Ha/ℓ для дейтериевой плазмы, полученные численно, приведены на Рис.2.1. Асимптотика в нуле и на бесконечности легко получается разложением в ряд функций $f_{\pm}(\Gamma)$ в точках $\Gamma = 0$ и $\Gamma = \infty$. При $\Gamma \rightarrow \infty$ имеем:

$$R_{+}(\Gamma), -\omega_{+}(\Gamma) \sim \frac{\text{Ha}}{\ell} \Gamma^{-1/2} \left(\frac{\mu_{\Sigma}}{2\mu_{-}} \right)^{1/2}, \quad R_{-}(\Gamma), \omega_{-}(\Gamma) \sim \frac{\text{Ha}}{\ell} \Gamma^{-1/2} \left(\frac{\mu_{\Sigma}}{2\mu_{+}} \right)^{1/2}$$

При $\Gamma \rightarrow 0$ получим

$$R_{+}(\Gamma) \sim \frac{\text{Ha}}{\ell \Lambda_*^2} \frac{1}{\Gamma}, \quad \omega_{+}(\Gamma) \rightarrow \omega_{*}, \quad \omega_{*} = \frac{\text{Ha}}{2\ell} \left(\sqrt{\frac{\mu_{-}}{\mu_{+}}} - \sqrt{\frac{\mu_{+}}{\mu_{-}}} \right) \quad (2.16)$$

$$R_{-}(\Gamma) \rightarrow \frac{\text{Ha}}{\ell}, \quad \omega_{-}(\Gamma) \sim -\frac{\Lambda_0 \Gamma \text{Ha}}{2\ell}$$

Явная зависимость от определяющих параметров позволяет переходить к различным физически важным пределам: МГД-предел ($\Gamma \rightarrow 0$, $\text{Ha} = \text{const}$), предел слабого магнитного поля ($\Gamma \rightarrow 0$, $\text{Ha} \rightarrow 0$, $\Gamma/\text{Ha} = \text{const}$), предел сильного магнитного поля ($\Gamma, \text{Ha} \rightarrow +\infty$, $\Gamma/\text{Ha} = \text{const}$), предел узкого канала ($\text{Ha} \rightarrow 0$, $\Gamma = \text{const}$), предел идеально проводящей плазмы ($\Gamma, \text{Ha} \rightarrow +\infty$, $\Gamma/\text{Ha}^2 = \text{const}$) и т.д. Особенно принципиален МГД-предел. В этом случае при

$\Gamma \rightarrow 0$:

$$R_+(\Gamma) = \frac{\text{Ha}}{\ell \Lambda_* \Gamma} \left\{ 1 + \frac{\Lambda_0^2 - 1/2}{4} \Gamma^2 + O(\Gamma^4) \right\}, \quad \omega_+ = \omega_* \left\{ 1 - \frac{\Lambda_0^2 - 3/4}{4} \Gamma^2 + O(\Gamma^4) \right\}$$

Поэтому $f_+(\Gamma) \rightarrow \infty$, $f_-(\Gamma) \rightarrow 1$, $\kappa_+ \rightarrow 0$, $\kappa_- \rightarrow \text{th Ha}/\text{Ha}$, $g_+ \rightarrow 0$, $g_- \rightarrow 1$.

Учитывая эти соотношения, из выражения (2.15) для U_τ следует, что $U_\tau(x)$ равномерно на $[-\ell, \ell]$ сходится при $\Gamma \rightarrow 0$ к функции

$$U_\tau(x) \rightarrow U_{\text{МГД}}(x) = \frac{-il^2}{\mu_\Sigma} \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \left(\frac{\text{ch Ha} - \text{ch Ha}x/\ell}{\text{Ha sh Ha}} \right), \quad |x| \leq \ell \quad (2.17)$$

т.е. к известному из МГД выражению для продольной скорости. На языке частот и амплитуд МГД-переход выглядит так. При $\Gamma \rightarrow 0$ одна из частот ω_\pm имеет конечный предел, $\omega_+ \rightarrow \omega_*$, а соответствующая ей амплитуда равномерно сходится к 0 на $[-\ell, \ell]$. Другая частота ω_- сходится к 0, а соответствующая ей амплитуда равномерно сходится к профилю Гартмана $U_{\text{МГД}}(x)$. Отсюда следует, что даже при $\Gamma \ll 1$ профиль Гартмана $U_{\text{МГД}}(x)$ не может реализоваться в чистом виде, а состоит из мелких зазубрин с пространственной частотой ω_* , вычисляемой по (2.16).

2.4. Гидродинамический “эффект Холла”

МГД-плазма в плоском канале под действием перепада давлений, согласно (2.17), в каждой точке канала течёт вдоль антиградиента давления, который в комплексных обозначениях равен $-i \partial p_\Sigma / \partial z$. С учётом двухжидкостной структуры плазмы, как следует из полученных выше результатов, течение в плоском канале отклоняется от направления антиградиента давления. В этом состоит своеобразный гидродинамический “эффект Холла”. Оценим величину интегрального отклонения для сильного поперечного магнитного поля H_0 , когда $\Gamma, \text{Ha} \rightarrow +\infty$, $\text{Ha}/\Gamma = \text{const} = C_* = \rho \ell (\sigma \mu_\Sigma)^{-1/2} / \chi$. Разлагая среднюю скорость $\langle U_\tau \rangle$ из (2.15) по целым степеням $\Gamma^{-1/2}$, получим:

$$\langle U_\tau \rangle = \frac{a_1}{\Gamma^{1/2}} + \frac{a_2}{\Gamma} + \frac{a_3}{\Gamma^{3/2}} + \dots = -\frac{i\ell^2}{\mu_\Sigma} \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \frac{\Lambda_*}{C_*} \left\{ \frac{z_0}{\Gamma^{1/2}} - \frac{z_0}{z_0} \frac{1}{\Lambda_* C_*} \frac{1}{\Gamma} + O\left(\frac{1}{\Gamma^{3/2}}\right) \right\}, \text{ где}$$

$$z_0 = \left(\frac{\mu_\Sigma}{2}\right)^{1/2} \left\{ [(\min \mu_\pm)^{-1/2} + (\max \mu_\pm)^{-1/2}] + i\varepsilon [(\min \mu_\pm)^{-1/2} - (\max \mu_\pm)^{-1/2}] \right\}, \quad \varepsilon = \text{sgn } \Lambda_0$$

Главный член разложения равен

$$\langle U_\tau \rangle = \frac{\ell}{\mu_\Sigma} \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \left(\frac{c\chi}{2H_0\rho}\right)^{1/2} [\sqrt{\mu_-} - \sqrt{\mu_+} - i(\sqrt{\mu_-} + \sqrt{\mu_+})] + O\left(\frac{1}{H_0}\right)$$

Значит предельный угол отклонения ($H_0 \rightarrow +\infty$) α_∞ , отсчитываемый от отрицательной мнимой полуоси против часовой стрелки, равен

$$\alpha_\infty = \text{arctg} \frac{\sqrt{\mu_-} - \sqrt{\mu_+}}{\sqrt{\mu_-} + \sqrt{\mu_+}}$$

Для изотермической плазмы $\alpha_\infty \cong -\pi/4$, для сильно неизотермической плазмы, $T_e \gg T_i$, $\alpha_\infty \cong \pi/4$, в общем случае $|\alpha_\infty| \leq \pi/4$. Таким образом, в сильном поперечном магнитном поле имеет место значительное отклонение потока плазма от направления антиградиента давления.

2.5. Случай подвижных и замагниченных стенок канала (течение Куэтта)

В общем случае движение плазмы в плоском канале обусловлено не только перепадом давления, но и относительным продольным движением его стенок и их различной замагниченностью. Эти факторы меняют в данной выше постановке задачи только граничные условия (2.2), которые теперь примут вид:

$$\frac{dH_\tau}{dx}(\pm\ell) = 0, U_\tau(-\ell) = U_\tau^0, U_\tau(\ell) = U_\tau^1, H_\tau(-\ell) = H_\tau^0, H_\tau(\ell) = H_\tau^1 \quad (2.18)$$

где U_τ^0 , U_τ^1 – заданные продольные скорости стенок, H_τ^0 , H_τ^1 – заданные напряжённости продольного магнитного поля на стенках канала. Таким образом, в комплексных обозначениях ищется решение вида (2.8), удовлетворяющее граничным условиям (2.18). Это решение легко выписывается в явном виде:

$$\begin{aligned}
H_\tau = & H_\tau^0 + \frac{U_\tau^1 - U_\tau^0}{2\ell} \frac{\mu_\Sigma}{\alpha} \frac{1}{\lambda_+^{-2} - \lambda_-^{-2}} \left\{ \frac{1}{\kappa_+ \lambda_+^2} \left(1 - \frac{\text{ch} \lambda_+ x}{\text{ch} \lambda_+ \ell} \right) - \frac{1}{\kappa_- \lambda_-^2} \left(1 - \frac{\text{ch} \lambda_- x}{\text{ch} \lambda_- \ell} \right) \right\} \\
& + \frac{H_\tau^1 - H_\tau^0}{2(\kappa_+ - \kappa_-)} \left[\kappa_+ \left(1 + \frac{\text{sh} \lambda_+ x}{\text{sh} \lambda_+ \ell} \right) - \kappa_- \left(1 + \frac{\text{sh} \lambda_- x}{\text{sh} \lambda_- \ell} \right) \right] + \\
& + \frac{\ell i}{\alpha} \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \left\{ \frac{x}{\ell} + \left(\kappa_+ (\kappa_- - 1) \frac{\text{sh} \lambda_+ x}{\text{sh} \lambda_+ \ell} - \kappa_- (\kappa_+ - 1) \frac{\text{sh} \lambda_- x}{\text{sh} \lambda_- \ell} \right) \frac{1}{\kappa_+ - \kappa_-} \right\}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
U_\tau = & U_\tau^0 + \frac{U_\tau^1 - U_\tau^0}{2} \frac{1}{\lambda_+^{-2} - \lambda_-^{-2}} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda_+^2} + \frac{i\beta}{\alpha} \right) \left(\frac{\text{sh} \lambda_+ x}{\text{sh} \lambda_+ \ell} + 1 \right) - \left(\frac{1}{\lambda_-^2} + \frac{i\beta}{\alpha} \right) \left(\frac{\text{sh} \lambda_- x}{\text{sh} \lambda_- \ell} + 1 \right) \right\} \\
& + \frac{\alpha(H_\tau^1 - H_\tau^0)}{2\ell \mu_\Sigma (\kappa_+ - \kappa_-)} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda_+^2} + \frac{i\beta}{\alpha} \right) \left(\frac{\text{ch} \lambda_+ x}{\text{ch} \lambda_+ \ell} - 1 \right) - \left(\frac{1}{\lambda_-^2} + \frac{i\beta}{\alpha} \right) \left(\frac{\text{ch} \lambda_- x}{\text{ch} \lambda_- \ell} - 1 \right) \right\} \\
& + \frac{i}{\mu_\Sigma} \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \frac{1}{\kappa_- - \kappa_+} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{\lambda_+^2} + \frac{i\beta}{\alpha} \right) (\kappa_- - 1) \left(\frac{\text{ch} \lambda_+ x}{\text{ch} \lambda_+ \ell} - 1 \right) - \left(\frac{1}{\lambda_-^2} + \frac{i\beta}{\alpha} \right) (\kappa_+ - 1) \left(\frac{\text{ch} \lambda_- x}{\text{ch} \lambda_- \ell} - 1 \right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Как следует из формул (2.19), (2.20), выражения для U_τ , H_τ без учёта фоновых добавок U_τ^0 , H_τ^0 распадаются на три слагаемых, учитывающих вклад в продольные скорость и магнитное поле плазмы в канале трёх отмеченных выше факторов – относительную скорость стенок, разницу в замагниченности стенок и перепада гидродинамического давления. Формулы (4.10) являются частным случаем формул (2.19), (2.20) при $U_\tau^0 = U_\tau^1 = 0$, $H_\tau^0 = H_\tau^1 = 0$.

2.6. Вычисление толщины погранслоя

Простейшая модель погранслоя получается, если рассмотреть установившееся движение плазмы в плоском канале, одна из двух подвижных стенок которого удалена на бесконечность, а другая занимает положение $x = 0$, при этом перепад гидродинамического давления в продольном направлении отсутствует. Таким образом, движение плазмы в канале обусловлено движением стенок и магнитным полем на бесконечности. В частности, на бесконечно удалённой стенке заданы продольные скорость $U_\tau^\infty = u_\infty$ и

магнитное поле $H_\tau^\infty = H_\infty$, а на второй стенке ток равен нулю и задана продольная скорость самой стенки: $j_\tau = 0$, $U_\tau = u_0$. Поскольку решение H_τ , U_τ , вычисляемое по (2.8), должно быть ограниченным на полуоси $x \geq 0$, то $C_1 = C_3 = 0$ (считается $\text{Re}\lambda_\pm > 0$) и таким образом

$$H_\tau = -\frac{C_2}{\lambda_+} e^{-\lambda_+ x} - \frac{C_4}{\lambda_-} e^{-\lambda_- x} + R_1, \quad U_\tau = -\frac{\alpha + i\beta\lambda_+^2}{\mu_\Sigma \lambda_+^2} C_2 e^{-\lambda_+ x} - \frac{\alpha + i\beta\lambda_-^2}{\mu_\Sigma \lambda_-^2} C_4 e^{-\lambda_- x} + R_2$$

Четыре константы R_1 , R_2 , C_2 , C_4 ищутся из четырёх граничных условий: $x = 0$: $U_\tau = u_0$, $dH_\tau/dx = 0$, $x = \infty$: $U_\tau^\infty = u_\infty$, $H_\tau^\infty = H_\infty$. Из двух последних условий тут же находим $R_1 = H_\infty$, $R_2 = u_\infty$, а для нахождения констант C_2 , C_4 получается линейная система уравнений, решение которой приводит к окончательному ответу:

$$U_\tau(x) = u_\infty - \frac{u_\infty - u_0}{\lambda_+^{-2} - \lambda_-^{-2}} \frac{1}{\alpha} \left\{ \left(\frac{\alpha}{\lambda_+^2} + i\beta \right) e^{-\lambda_+ x} - \left(\frac{\alpha}{\lambda_-^2} + i\beta \right) e^{-\lambda_- x} \right\} \quad (2.21)$$

$$H_\tau(x) = H_\infty - \frac{\mu_\Sigma}{\alpha} \frac{u_\infty - u_0}{\lambda_+^{-2} - \lambda_-^{-2}} \left\{ \frac{e^{-\lambda_+ x}}{\lambda_+} - \frac{e^{-\lambda_- x}}{\lambda_-} \right\}, \quad x \geq 0$$

Формулы (2.21) позволяют вычислить магнитное поле на обтекаемой потоком плазмы стенке $x = 0$:

$$\begin{aligned} H_\tau(0) &= H_\infty - \frac{\mu_\Sigma}{\alpha} (u_\infty - u_0) \frac{\lambda_+ \lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-} = \\ &= H_\infty - \frac{\mu_\Sigma}{\alpha} (u_\infty - u_0) \frac{\text{Ha}}{\ell} \left(1 + 2 \frac{\sqrt{\mu_+ \mu_-}}{\mu_\Sigma} \Gamma + \frac{i(\mu_- - \mu_+)}{\mu_\Sigma} \Gamma \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

где Ha и Γ вычисляются по (2.13). С другой стороны из (2.21) следует формула для толщины погранслоя:

$$\Delta \ell = \max \left\{ \frac{1}{\text{Re}\lambda_\pm} \right\} = \frac{c}{H_0} \sqrt{\frac{\mu_\Sigma}{\sigma}} \max \frac{1}{\text{Re}f_\pm(\Gamma)}$$

В МГД-пределе, $\Gamma \rightarrow 0$, $\text{Ha} = \text{const}$, как было показано выше $f_-(\Gamma) \rightarrow 1$, $f_+(\Gamma) \rightarrow +\infty$ и $\Delta \ell \rightarrow \Delta \ell_{\text{МГД}} = (c/H_0)(\mu_\Sigma/\sigma)^{1/2}$, т.е. переходит в известное [27]

выражение для толщины погранслоя в МГД. Относительное различие $\Delta\ell/\Delta\ell_{\text{МГД}}$ может быть существенным. Например, из асимптотических оценок разделе 2.3 следует, что при $\Gamma \rightarrow +\infty$

$$\Delta\ell/\Delta\ell_{\text{МГД}} = \max \frac{1}{\text{Re } f_{\pm}(\Gamma)} \sim \Gamma^{1/2} (2 \max \mu_{\pm}/\mu_{\Sigma})^{1/2}$$

Как следует из Рис.2.1, и для конечных Γ учёт двухжидкостной структуры плазмы приводит к значительному увеличению толщины погранслоя.

2.7. Обсуждение результатов

Как отмечалось в ЭМГД-теории плоского канала, эпюра продольной скорости $U_{\tau} = (U_y, U_z)$ – пространственная кривая и поэтому характеризуется двумя профилями $U_y(\bar{x})$, $U_z(\bar{x})$, $\bar{x} = x/\ell$, $|\bar{x}| \leq 1$, ℓ – полуширина канала. На Рис.2.2 изображены U_z и U_y – эпюры (в единицах $\ell^2 \partial p_{\Sigma}/\partial z/\mu_{\Sigma}$) для фиксированного значения $\text{Na}=40$ и $\Gamma = 10^{-2}, 5, 20, 50, 200$. При $\Gamma = 10^{-2}$ U_z -эпюра практически совпадает с профилем Гартмана (2.17) для $\text{Na}=40$, а $U_y(\bar{x}) \cong 0$ (на Рис.2.2 U_y -эпюра для $\Gamma = 10^{-2}$ сливается с осью \bar{x}), что согласуется с МГД-пределом $\Gamma \rightarrow 0$, $\text{Na}=\text{const}$ из раздела 2.7. По мере увеличения Γ профиль $U_z(\bar{x})$ существенно меняется: формируются ($\Gamma = 5, 20$) пристеночные потоки, которые при дальнейшем увеличении ($\Gamma = 50$) разделяются “мёртвой” зоной $|\bar{x}| \leq 0.1$, где плазма практически не движется вдоль оси z , а затем, сливаясь ($\Gamma = 200$), они образуют новый поток, U_z -эпюра которого при ещё большем увеличении $\Gamma \rightarrow +\infty$ стремится к параболе Пуазейля $(\bar{x}^2 - 1)/2$, $|\bar{x}| \leq 1$, не зависящей от Na и Γ . Если фиксированное значение Na увеличивать, то при достаточно больших $\text{Na} \geq 100$ плазма в “мёртвой” зоне начинает двигаться в положительную сторону по оси z и таким образом в канале возникают встречные потоки – при этом существенно увеличивается ширина “мёртвой” зоны, становясь сопоставимой с полушириной канала, а скорость плазмы пристеночного потока резко возрастает.

Изображённая на Рис.2.2 U_y -эпюра фиксирует сильное (при подходящих Na , Γ) отклонение потока в канале от направления антиградиента давления. Например, угол отклонения $\alpha = \arctg(U_y/|U_z|)$ в “мёртвой” зоне ($\Gamma = 50$) достигает $-\pi/2$, а при больших Na , если возникают встречные потоки, превышает по модулю $\pi/2$. При малых ($\Gamma = 10^{-2}$) и больших $\Gamma \geq 200$ эпюра U_y практически нулевая и гидродинамический “эффект Холла” отсутствует.

Интересно, что отклонение средней скорости $\langle U_\tau \rangle$ потока от антиградиента давления заметно меньше. На Рис.2.3, где изображены линии уровня угла отклонения $\alpha = \arctg(\langle U_y \rangle / \langle |U_z| \rangle)$ для изотермической плазмы, следует, что угол отклонения не превосходит, с учётом (2.3), $\alpha_\infty = -0.69$ (см. раздел 2.8), что примерно в два раза меньше по модулю $\pi/2$. При этом вблизи осей $Na=0$ и $\Gamma = 0$ угол отклонения практически нулевой и резко нарастает по мере удаления от них, плавно переходя затем в обширное плато, где $\alpha \cong \alpha_\infty$, образованное значениями $Na \gg 1$, $\Gamma \gg 1$.

Заметим, что двухчастотная природа установившегося течения в плоском канале трудноуловима – эпюры на Рис.2.2 гладкие, а не спиралевидные кривые – и это не случайно. Как следует из Рис.2.1 и асимптотик (2.16), колебания профилей обнаруживают себя лишь в далёких знаках после запятой.

Итак, учёт двухжидкостной структуры плазмы привёл к качественно иной картине установившегося течения в плоском канале для значений $\Gamma \gg 1$. Ещё один убедительный пример – значительное занижение величины погранслоя, предсказываемое МГД-теорией. График отношения $\Delta \ell_{\text{МГД}} / \Delta \ell$, приведённый на Рис.2.4, показывает, что величина МГД-погранслоя в несколько раз меньше ЭМГД-погранслоя для $\Gamma \geq 2.6$ и в десятки раз меньше для $\Gamma \geq 51.9$, причём для больших Γ отношение погранслоёв приближённо равно $\Gamma^{-1/2} \mu_\Sigma^{1/2} (2\mu_+)^{-1/2} \cong (2\Gamma)^{-1/2}$.

Подчеркнём, что условие $\Gamma \gg 1$ обычно выполняется для газовой плазмы, а

противоположное условие $\Gamma \ll 1$ – для плазмы жидких металлов. Поэтому течение последней в плоском канале с большой точностью описывается решением Гартмана (2.17), а для газовой плазмы оно непригодно. Приведём для примера типичные значения $\Gamma = (H_0 T_e^{3/2} / n_i) \cdot 0.632 \cdot 10^6$ (H_0 в гауссах, T_e – в $^\circ K$) для некоторых видов газовой плазмы:

- Для перетяжки z-пинча и плазменного фокуса в дейтерии [22] $\rho \sim 10^{-4} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, $H_0 \sim 2.8 \cdot 10^6 \text{ гс}$, $T_e \sim 6.5 \text{ кэВ}$ имеем $\Gamma \sim 3.87 \cdot 10^4$
- Для стационарного плазменного двигателя (СПД), работающего на ксеноне [36] $n_i \sim 2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $H_0 \sim 2 \cdot 10^2 \text{ гс}$, $T_e \sim 20 \text{ эВ}$ имеем $\Gamma \sim 1.4 \cdot 10^3$
- Для плазмы солнечного ветра $\rho \sim 10^{-23} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, $H_0 \sim 10^{-4} \text{ гс}$, $T_e \sim 1 \text{ эВ}$ имеем $\Gamma \sim 1.32 \cdot 10^7$

Математическая причина существенного различия ЭМГД- и МГД-теорий плоского канала – это сложная структура тензора “холловских слагаемых” W , который в МГД равен нулю, что предопределяло простоту течения Гартмана, а в ЭМГД, как следует из (11), существенно ненулевой. Однако эффект “запирания” потока плазмы в пределе сильного магнитного поля остаётся – из (4.10) следует, что при $\Gamma \rightarrow \infty$, $Na \rightarrow \infty$, $\Gamma/Na = \text{const}$ справедливо $U_\tau \rightrightarrows 0$ на $[-\ell, \ell]$.

Наконец, заметим, что при $Na \ll 1$ различия ЭМГД- и МГД-теорий стираются. В этом случае решение Гартмана практически совпадает с параболой Пуазейля и то же верно при любом $\Gamma > 0$ и для ЭМГД-эпюр U_τ .

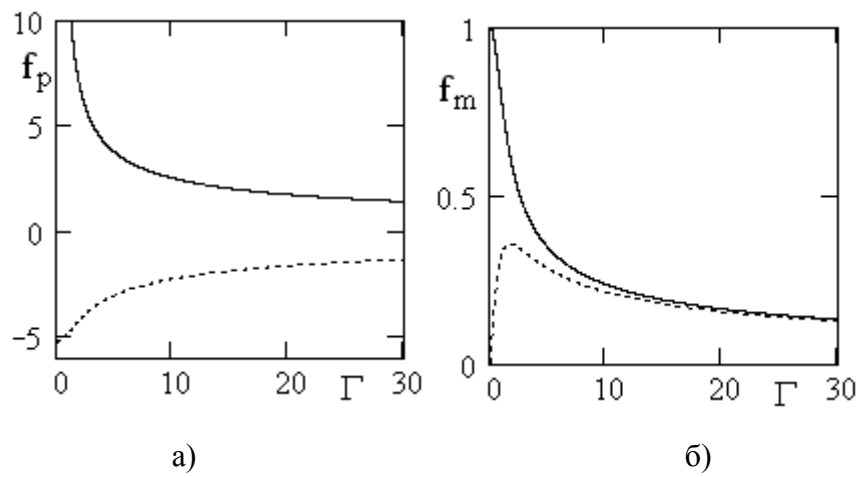


Рис.2.1. Графики частот $\omega_{\pm}(\Gamma)$ (“- - -”) и параметров амплитудной модуляции $R_{\pm}(\Gamma)$ (“—”). а) —; б) —

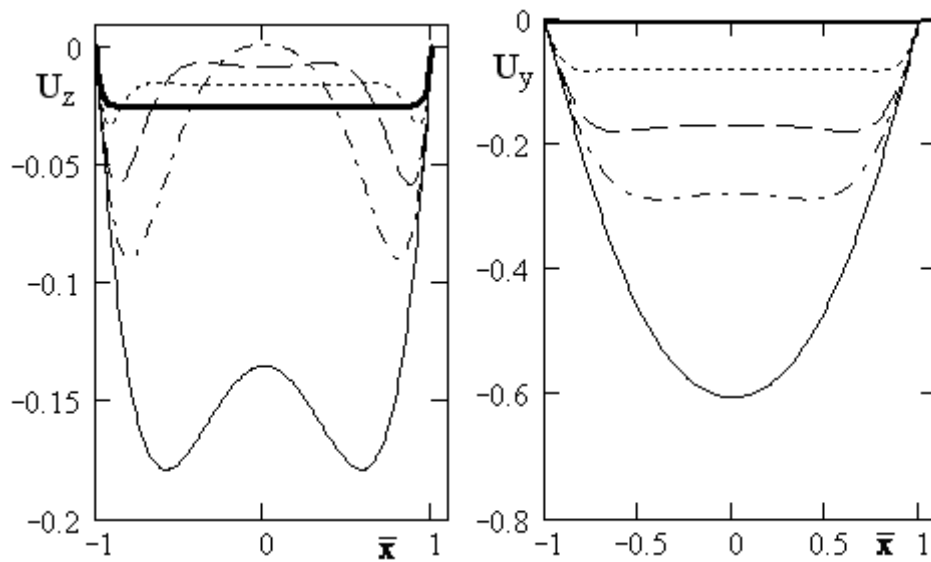


Рис.2.2. $\Gamma = 10^{-2}$ – жирная “—”; $\Gamma = 5$ – “- - -”; $\Gamma = 20$ – “- - -”; $\Gamma = 50$ – “- - -”; $\Gamma = 200$ – тонкая “—”.

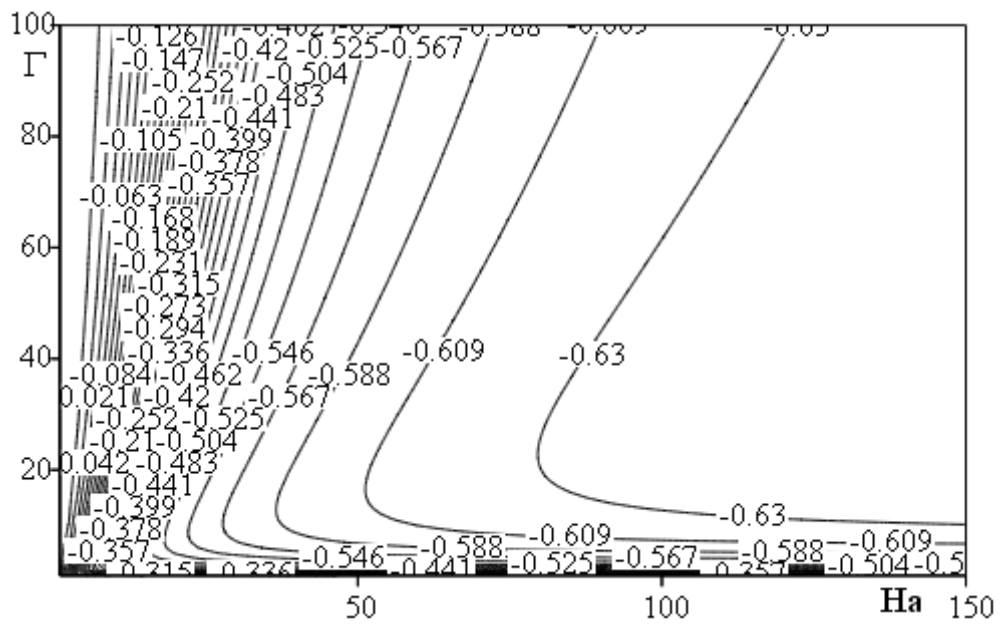


Рис.2.3. Линии уровня угла отклонения $\alpha = \arctg(\langle U_y \rangle / \langle U_z \rangle)$

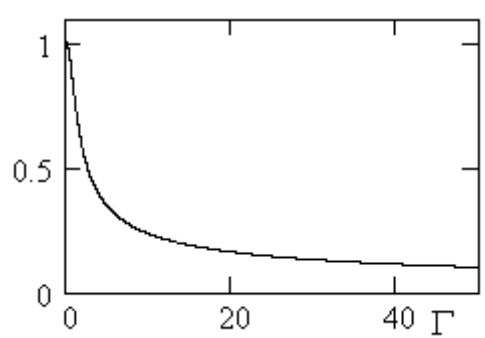


Рис.2.4 Зависимость отношения $\Delta \ell_{\text{МГД}} / \Delta \ell$ от Γ .

Глава 3. Взаимодействие уединённых волн в сжимаемой плазме

Исследование уединённых волн – актуальная задача механики сплошных сред, имеющая важные приложения. Для существования уединённых волн необходимо, чтобы тензор внутренних напряжений среды имел достаточно сложную структуру, гарантирующую помимо нелинейности уравнений динамики среды также наличие дисперсии. В плазменных сплошных средах кроме нелинейности и дисперсии для существования нелинейных волн необходима нелокальная зависимость электрического поля от других параметров плазмы, выражаемая обычно сложной формой обобщённого закона Ома.

Особый интерес представляют уединённые волны, называемые солитонами, которые при взаимодействии с другими уединёнными волнами сохраняют свои форму, скорость и другие характеристики.

Исследование солитонов традиционно базируется на модельных уравнениях [19,41,44], список которых возглавляют уравнение Кортевега-де-Фриза (КдФ), нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), синус-уравнение Гордона (СГ). Для плазменных сред этот перечень значительно расширился за счёт уравнений Захарова [18], Кадомцева-Петвиашвили [24], нелинейных альфвеновских и магнитозвуковых волн [55] и др.

В настоящей работе численно исследуются уединённые волны в двухжидкостной полностью ионизованной квазинейтральной плазме с полным учётом инерции электронов. Эти волны были впервые найдены в работе [51], в которой получены точные формулы для нелинейных бегущих волн в холодной плазме с учетом инерции электронов. Они характеризуются линейной поляризацией магнитного поля – вектор магнитного поля в волне всё время лежит в поперечной плоскости и меняется только по величине, сохраняя неизменным своё направление. Таким образом, точные уравнения двухжидкостной гидродинамики плазмы [7], выражающие фундаментальные законы сохранения массы, энергии, импульса электронов и ионов и законы

электродинамики служат и для нахождения уединённых волн, и для исследования их взаимодействия. В этом смысле приведённые в работе результаты являются полезными при анализе результатов, полученных другим путём.

Как показано в работе, уединённые волны с поляризацией магнитного поля являются солитонами – при столкновении уединённых волн, набегающих друг на друга, они подобно материальным частицам, сохраняют форму, скорость, амплитуду и т. д., при этом сам процесс столкновения имеет конечную длительность.

3.1. Основные уравнения двухжидкостной электромагнитной гидродинамики (ЭМГД)

Рассмотрим бездиссипативное квазинейтральное течение плазмы. Считаем электроны и ионы идеальными политропными газами с общим показателем адиабаты γ . Используя вместо уравнений для энтропий уравнения для давлений, ЭМГД-уравнения (11) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{U} = 0, \quad \frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{Div} \Pi = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{dp_e}{dt} + \gamma p_e \operatorname{div} \mathbf{U} = \lambda_i \rho^{\gamma-1} \mathbf{j} \nabla \left(\frac{p_e}{\rho^\gamma} \right), \quad \frac{dp_i}{dt} + \gamma p_i \operatorname{div} \mathbf{U} = -\lambda_e \rho^{\gamma-1} \mathbf{j} \nabla \left(\frac{p_i}{\rho^\gamma} \right) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{E} + \frac{c^2 \lambda_i \lambda_e}{4\pi \rho} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{U}, \mathbf{H}] + \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} \mathbf{W}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \quad (3.3)$$

где тензоры Π и \mathbf{W} вычисляются по формулам

$$\Pi = \Pi^h + \Pi^p + \Pi^c$$

$$\Pi^h = \rho \mathbf{U} \mathbf{U} + p \mathbf{I}_3, \quad \Pi^p = \frac{H^2}{8\pi} \mathbf{I}_3 - \frac{\mathbf{H} \mathbf{H}}{4\pi}, \quad \Pi^c = \lambda_i \lambda_e \frac{\mathbf{j} \mathbf{j}}{\rho} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{W} = (\lambda_e - \lambda_i) (\Pi^p + \Pi^c) + (\lambda_e p_i - \lambda_i p_e) \mathbf{I}_3 + \lambda_i \lambda_e (\mathbf{U} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{U})$$

$\lambda_e = m_e/e$, $\lambda_i = m_i/(Ze)$, где Z – кратность заряда ионов. Кроме того, для простоты предполагается, что электроны и ионы – идеальные политропные газы с общим показателем адиабаты γ . Система (3.1)-(3.4) замыкается

уравнениями электродинамики Максвелла для квазистационарного электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot} \mathbf{E} &= 0, \quad \text{div} \mathbf{H} = 0 \\ \text{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Таким образом, (3.1)-(3.5) – замкнутая система уравнений относительно величин ρ , p_i , p_e , \mathbf{U} , \mathbf{H} , \mathbf{E} . По её решению гидродинамические параметры электронов и ионов восстанавливаются по формулам:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{U} + \frac{\lambda_e}{\rho} \mathbf{j}, \quad \mathbf{v}_e = \mathbf{U} - \frac{\lambda_i}{\rho} \mathbf{j}, \quad \rho_i = \frac{\lambda_i}{\lambda} \rho, \quad \rho_e = \frac{\lambda_e}{\lambda} \rho, \quad \lambda = \lambda_e + \lambda_i \quad (3.6)$$

Уравнения динамики холодной плазмы получаются из (3.1)-(3.5) при $p_i = p_e = 0$. Тогда уравнения (3.2) выполнены тождественно и упрощаются выражения для тензоров Π^h и \mathbf{W} :

$$\Pi^h = \rho \mathbf{U} \mathbf{U}, \quad \mathbf{W} = (\lambda_e - \lambda_i) (\Pi^p + \Pi^c) + \lambda_e \lambda_i (\mathbf{U} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{U}) \quad (3.7)$$

3.2. Уравнения бегущих волн в холодной ЭМГД-плазме.

Рассмотрим решения ЭМГД-уравнений (3.1)-(3.5) в случае холодной плазмы, зависящие от t , \mathbf{r} в комбинации $\theta = \mathbf{r} \mathbf{k} - at$, где \mathbf{k} – единичный вектор, a – константа. Такие решения обычно называются плоскими бегущими волнами, a – фазовой скоростью волны, \mathbf{k} – направлением распространения волны. Нас интересует взаимодействие уединённых бегущих волн, все параметры которых имеют конечные и равные предельные значения при $\theta \rightarrow \pm\infty$. Параметры произвольной бегущей волны $\mathbf{U}(\theta)$, $\rho(\theta)$, $\mathbf{H}(\theta)$, $\mathbf{E}(\theta)$ при фиксированных \mathbf{k} и a находятся подстановкой в систему (3.1)-(3.5), где положено $p_i = p_e = 0$. После несложных преобразований получаются следующие уравнения на поперечное магнитное поле $\mathbf{H}_\perp(\theta)$ и продольную скорость $u(\theta) = U_\parallel(\theta) - a$ в системе отсчёта движущейся волны:

$$\begin{aligned}
Ju + \frac{H_{\perp}^2}{8\pi} &= D \\
\left(u - \frac{H_{\parallel}^2}{4\pi J} \right) \mathbf{H}_{\perp} - \frac{c^2 \lambda_i \lambda_e}{4\pi J} u \frac{d}{d\theta} (u \dot{\mathbf{H}}_{\perp}) + \frac{c H_{\parallel}}{4\pi J} (\lambda_i - \lambda_e) u [\mathbf{k}, \dot{\mathbf{H}}_{\perp}] + \mathbf{q} &= 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

где точка над буквой означает дифференцирование по θ , каждый вектор раскладывается вдоль (\parallel) и поперёк (\perp) направления распространения волны \mathbf{k} , а $J \neq 0$, $D > 0$, $\mathbf{q} \perp \mathbf{k}$ – произвольные константы интегрирования. Кроме того, в бегущей волне всегда $H_{\parallel}(\theta) = \text{const}$. Остальные параметры волны выражаются через $u(\theta)$, $\mathbf{H}_{\perp}(\theta)$ по формулам:

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{J}{u}, \quad U_{\parallel} = u + a, \quad U_{\perp} = \frac{\mathbf{q}_0}{J} + \frac{H_{\parallel}}{4\pi J} \mathbf{H}_{\perp} \\
\mathbf{E}_{\perp} &= \frac{1}{c} \left[\mathbf{k}, \mathbf{q} + \frac{H_{\parallel}}{J} \mathbf{q}_0 - a \mathbf{H}_{\perp} \right], \quad \mathbf{E}_{\parallel} = -\frac{1}{c} [\mathbf{U}_{\perp}, \mathbf{H}_{\perp}] - \frac{\lambda_i - \lambda_e}{8\pi\rho} \frac{dH_{\perp}^2}{d\theta} \mathbf{k} \\
j_{\parallel} &= 0, \quad j_{\perp} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{k}, \dot{\mathbf{H}}_{\perp}]
\end{aligned} \tag{3.9}$$

где $\mathbf{q}_0 \perp \mathbf{k}$ ещё одна константа интегрирования. Из $j_{\parallel} = 0$, в частности, следует, что в бегущей волне электроны и ионы вдоль направления волны \mathbf{k} двигаются с общей гидродинамической скоростью $U_{\parallel}(\theta)$, которая, как и поперечное электрическое поле $\mathbf{E}_{\perp}(\theta)$, зависит от фазовой скорости a . Система (3.8), очевидно, сводится к автономному дифференциальному уравнению 2-го порядка относительно $\mathbf{H}_{\perp}(\theta)$. В частном случае в двухжидкостной форме система (3.8) получена в [57], в общем случае – в работе [11].

В этой главе исследуются уединённые волны специального типа, являющихся решением системы (3.8) для $H_{\parallel} = 0$ вида $\mathbf{H}_{\perp}(\theta) = H(\theta) \mathbf{e}_0$, где $\mathbf{e}_0 \perp \mathbf{k}$ – единичный вектор, $\mathbf{q} = q \mathbf{e}_0$. Иными словами, ниже рассматриваются только бегущие волны, в которых вектор магнитного поля \mathbf{H} меняется только по величине, имея при этом фиксированное направление в поперечной плоскости. Для таких волн, согласно системе (3.8), функции $H(\theta)$, $u(\theta)$ ищутся из уравнений

$$\begin{aligned}
Ju + \frac{H^2}{8\pi} &= D \\
Hu - \frac{c^2 \lambda_i \lambda_e}{4\pi J} u \frac{d}{d\theta} \left(u \frac{dH}{d\theta} \right) + q &= 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

где q – произвольная константа.

3.3. Уединённые волны в покоящейся плазме

Найдём все уединённые волны, являющиеся решением системы (3.10). Не теряя общности, достаточно ограничиться волнами в покоящейся плазме. Обезразмерим систему (3.10), приняв за характерные величины магнитного поля и плотности их предельные значения на бесконечности в неизвестной пока уединённой волне: $H_0 = H_\infty$, $\rho_0 = \rho_\infty$. Примем альфвеновскую скорость $v_0 = H_\infty / \sqrt{4\pi\rho_\infty}$ за характерное значение скорости и считаем $t_0 = L_0 / v_0$, где L_0 – характерное значение длины. Тогда из (3.9), (3.10) имеем, учитывая неподвижность плазмы на бесконечности ($U_{\parallel\infty} = 0$):

$$u_\infty = -a, \quad J = \rho_\infty u_\infty = -\rho_0 a, \quad D = Ju_\infty + \frac{H_\infty^2}{8\pi} = \rho_0 a^2 + \frac{H_0^2}{8\pi}$$

Тогда в безразмерном виде система (3.10) перепишется так:

$$\begin{aligned}
u &= -\left(a + \frac{1}{2a} \right) + \frac{H^2}{8a} \\
\xi^2 u \frac{d}{d\theta} \left(u \frac{d}{d\theta} \right) + aHu + q &= 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

где $\xi = \frac{c\lambda_i^{1/2}\lambda_e^{1/2}}{\sqrt{4\pi\rho_0}L_0}$ – безразмерный параметр, a – безразмерная фазовая скорость,

q – безразмерное значение константы q из (3.10).

Поскольку величина $u(\theta) = J/\rho = -a\rho_0/\rho(\theta)$ сохраняет знак, то можно перейти к независимой переменной s , $d/ds = u(\theta)d/d\theta$ и свести систему (3.11) к автономному уравнению 2-го порядка на прямой

$$\xi^2 \frac{d^2 H}{ds^2} + q + \frac{H^3}{2} - H \left(a^2 + \frac{1}{2} \right) = 0 \tag{3.12}$$

Уравнение (3.12) несложно проинтегрировать [4]. Введём потенциальную функцию

$$U(H) = \int [q + \frac{H^3}{2} - H(a^2 + \frac{1}{2})] dH = qH + \frac{H^4}{8} - \frac{H^2}{4}(1 + 2a^2) \quad (3.13)$$

Тогда решение имеет формальный вид [4]:

$$s = \pm \xi \int \frac{dH}{\sqrt{2(\varepsilon - U(H))}} \quad (3.14)$$

где ε – произвольная константа. Фактически решение собирается из дуг, задаваемых формулами (3.14). Тип решения и правило “сборки” зависят от вида потенциальной ямы функции (3.13), содержащей решение. Уединённая волна получается, если один (и только один) из краёв потенциальной ямы является локальным максимумом. В принятой системе единиц, таким краем должна быть точка $H = 1$. Таким образом, должны быть выполнены условия:

$$\varepsilon = U(1), \quad U'(1) = 0, \quad U''(1) < 0$$

Отсюда находится константа $q = a^2$, получается неравенство $|a| > 1$ и вычисляется $\varepsilon = a^2/2 - 1/8 = \varepsilon_0$. Потенциальная функция $U(H)$ изображена на Рис.3.1.

При $\varepsilon = \varepsilon_0$ множество $U(H) \leq \varepsilon_0$ распадается на две потенциальные ямы с общим краем $H = 1$. Другие края этих ям обозначим через H_1, H_2 . В принципе каждая из этих ям может доставлять уединённые волны. Однако уединённые волны в левой яме $[H_1, 1]$ не годятся по физическим ограничениям. Действительно, для безразмерных величин $ru = -a$ и, значит,

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{u}{a} = \left(1 + \frac{1}{2a^2}\right) - \frac{H^2}{2a^2}.$$

Но плотность – положительная величина, так что для всех θ должно быть справедливо неравенство:

$$1 + \frac{1}{2a^2} - \frac{H^2(\theta)}{2a^2} > 0$$

Откуда $H(\theta) < H_{\max} = \sqrt{1 + 2a^2}$. Следовательно, необходимо выполнение условий $H_2 < H_{\max}$, $|H_1| < H_{\max}$. Величины H_1 , H_2 – это корни уравнения $U(H) = \varepsilon_0$, и они легко ищутся, учитывая что один двукратный корень $H = 1$ этого уравнения известен. Имеем:

$$U(H) - \varepsilon_0 = \frac{(H-1)^2}{8} [(H+1)^2 - 4a^2]$$

Отсюда $H_1 = -1 - 2|a|$, $H_2 = -1 + 2|a|$. Условие $H_2 < H_{\max}$ равносильно неравенству $|a| < 2$, а условие $|H_1| < H_{\max}$ всегда не выполняется. Итак, уединённая волна существует только при

$$1 < |a| < 2,$$

расположена в правой потенциальной яме $[1, H_2]$ и имеет амплитуду $H_2 - 1 = 2(|a| - 1)$. Явное выражение для уединённой волны получается вычислением интеграла (3.14). Удобнее сразу найти зависимость $\theta(H)$:

$$\begin{aligned} \theta &= \pm \xi \int \frac{u(H) dH}{\sqrt{2(\varepsilon_0 - U(H))}} = \mp 2\xi a \int \frac{\left[\left(1 + \frac{1}{2a^2} \right) - \frac{H^2}{2a^2} \right] dH}{(H-1)\sqrt{4a^2 - (H+1)^2}} = \\ &= \pm \frac{\xi}{a} \times \left\{ \sqrt{4a^2 - (H+1)^2} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - 1}} \ln \left| \frac{2a^2 - 1 - H + \sqrt{a^2 - 1} \sqrt{4a^2 - (H+1)^2}}{H-1} \right| \right\} + \\ &+ \text{const} \end{aligned}$$

Подберём const так, чтобы при $\theta = 0$ выполнялось равенство $H(\theta) = H(0) = H_2 = 2|a| - 1$. Легко найти значение $\text{const} = \xi a \ln a / \sqrt{a^2 - 1}$. Откуда получаем окончательное выражение:

$$\theta = \pm \frac{\xi}{a} \left\{ \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - 1}} \ln \frac{2a^2 - 1 - H + \sqrt{a^2 - 1} \sqrt{4a^2 - (H+1)^2}}{|a|(H-1)} - \sqrt{4a^2 - (H+1)^2} \right\} \quad (3.15)$$

Полученное выражение (3.15) для $\theta(H)$ позволяет найти ширину уединённой волны. Воспользуемся тем, что чётная функция $H(\theta)$ (Рис.3.2) имеет с точностью до знака единственную (см. ниже) точку перегиба $\theta_0 > 0$.

Проведём в точках перегиба $\pm\theta_0$ касательные к графику функции $H = H(\theta)$ до их пересечения с прямой $H = 1$, к которой при $\theta \rightarrow \pm\infty$ асимптотически приближается график $H = H(\theta)$. Тогда под шириной уединённой волны Δ естественно понимать длину отрезка, высекаемого из прямой $H = 1$ указанными касательными. Из этого определения, очевидно, следует формула для ширины:

$$\Delta = 2 \left(\frac{1 - H_0}{H'(\theta_0)} + \theta_0 \right) = 2((1 - H_0)\theta'(H_0) + \theta_0), \quad H_0 = H(\theta_0)$$

Точки перегиба ищутся из уравнения $H''(\theta) = 0$. В данном случае проще решить равносильное уравнение $\theta''(H) = 0$ и найти сначала H_0 . Дифференцируя выражения для

$$\theta'(H) = \pm \xi \frac{u(H)}{\sqrt{2(\varepsilon_0 - U(H))}}$$

и приравнявая его нулю, находим единственный корень $H_0 = (2a^2 + 1)/3$ (в частности, есть только одна, с точностью до знака, точка перегиба функции $H(\theta)$). Теперь из (3.15) находим $\theta_0 = \theta(H_0) > 0$:

$$H_0 = (2a^2 + 1)/3, \quad \theta_0 = \frac{\xi}{|a|} \left\{ \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - 1}} \ln \frac{2 + \sqrt{4 - a^2}}{|a|} - \frac{2}{3} \sqrt{(a^2 - 1)(4 - a^2)} \right\}$$

В итоге получается следующая явная зависимость ширины уединённой волны от фазовой скорости:

$$\Delta = 2((1 - H_0)\theta'(H_0) + \theta_0) = \frac{2\xi}{|a|\sqrt{a^2 - 1}} \left\{ \sqrt{4 - a^2} + a^2 \ln \frac{2 + \sqrt{4 - a^2}}{|a|} \right\} \quad (3.16)$$

В частности, $\Delta = \Delta(a)$ монотонно убывает от $+\infty$ при $|a| = 1$ до 0 при $|a| = 2$ и пропорциональна ξ .

3.4. Методика численного моделирования уединенных волн

Выше было установлено, что в покоящейся однородной с плотностью ρ_∞ плазме в однородном магнитном поле с напряжённостью $H_\infty \neq 0$ поперёк этого поля могут распространяться уединённые волны (3.15) с фазовой скоростью

av_A , где $v_A = H_\infty / \sqrt{4\pi\rho_\infty}$ – альфвеновская скорость, амплитудой $2(|a|-1)H_\infty$ и шириной $\Delta(a)$, вычисляемой по (3.16), для любого $1 < |a| < 2$. В частности, волны с большей амплитудой более узкие и двигаются быстрее более широких волн с меньшей амплитудой. В уединённых волнах продольное магнитное поле равно нулю, а поперечное меняется только по величине, сохраняя неизменным своё направление. Тогда, как следует из соотношений (3.9), поперечное электрическое поле будет тоже меняться только по величине, причём $\mathbf{E}_{\perp,\infty} = 0$, а поперечная скорость постоянна.

Рассмотрим четыре задачи о взаимодействии волн. Нас интересует, что происходит при:

1. Движении двух уединённых волн одинаковой амплитуды навстречу друг другу;
2. Движении двух уединённых волн разной амплитуды навстречу друг другу;
3. Набегании уединённой волны с большей амплитудой на уединённую волну с меньшей амплитудой в предположении, что волны двигаются в одну сторону;
4. Распаде начального возмущения, локализованного в пространстве, в частности, может ли начальное возмущение порождать пакет уединённых волн.

При этом принципиально важно, что взаимодействие уединённых волн определяется не модельными уравнениями (типа КдФ, НУШ, СГ и пр.), а полной системой уравнений двухжидкостной гидродинамики плазмы в ЭМГД-форме, выражающей фундаментальные законы сохранения массы, энергии, импульса электронов и ионов и законы электродинамики Максвелла. Для математического исследования взаимодействия уединённых волн ЭМГД-система решается численно.

Направим ось x вдоль направления распространения волны \mathbf{k} , ось z – вдоль направления поперечного магнитного поля \mathbf{e}_0 , тогда поперечное электрическое

поле направлено вдоль оси y , а функции U_x , H_z , E_y , ρ подчинены ЭМГД-уравнениям (3.1)-(3.5), которые с учётом плоской геометрии и приближения холодной плазмы примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_x}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho U_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho U_x^2 + \frac{H_z^2}{8\pi} \right) &= 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} &= 0 \\ E_y - \frac{c^2 \lambda_i \lambda_e}{4\pi \rho} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= \frac{U_x H_z}{c} - \frac{c \lambda_i \lambda_e}{4\pi \rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(U_x \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Система (3.17) решается на прямой $-\infty < x < +\infty$ для $t \geq 0$ с начальными условиями при $t = 0$, которые уточняются ниже, и граничными условиями:

$$\rho(\pm\infty) = \rho_\infty, \quad H_z(\pm\infty) = H_\infty, \quad E_y(\pm\infty) = 0, \quad U_x(\pm\infty) = 0 \quad (3.18)$$

Уравнения (3.10) можно получить более прямым путём, если искать решения системы (3.17), зависящие от t , x в комбинации $\theta = x - at$. Для существования в плазме нелинейных, в частности уединённых, волн необходимо наличие дисперсии, т. е. нелинейной связи между волновым числом k и частотой ω . В общем случае наличие дисперсии вытекает из дисперсионного соотношения для ЭМГД-системы (3.1)-(3.5), которое имеет вид [12]:

$$\begin{aligned} \left\{ 1 + \left(\frac{ck}{\omega_p} \right)^2 - \left[\frac{v_\perp^2 k^2}{\omega^2 - c_*^2 k^2} + \frac{v_\parallel^2 k^2}{\omega^2} \right] \right\} \left\{ 1 + \left(\frac{ck}{\omega_p} \right)^2 - \frac{v_\parallel^2 k^2}{\omega^2} \right\} - \left(\frac{ck}{\omega_p} \right)^2 \Lambda^2 \left(\frac{v_\parallel k}{\omega} \right)^2 &= 0 \\ \Lambda = (\lambda_i/\lambda_e)^{1/2} - (\lambda_e/\lambda_i)^{1/2}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi\rho_0}{\lambda_i\lambda_e}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_A = \frac{\mathbf{H}_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}} & \quad (3.19) \\ c_*^2 = \frac{\lambda_e c_e^2 + \lambda_i c_i^2}{\lambda_e + \lambda_i}, \quad c_e^2 = \frac{\gamma p_e^0}{\rho_e^0}, \quad c_i^2 = \frac{\gamma p_i^0}{\rho_i^0} & \end{aligned}$$

где p_e^0 , p_i^0 , $\rho_0 = \rho_e^0 + \rho_i^0$, \mathbf{H}_0 , $\mathbf{U}_0 = 0$ – невозмущённое однородное состояние плазмы, \mathbf{k} – направление распространения линейной волны $\sim \exp[i(\mathbf{r}\mathbf{k} - \omega t)]$ и все векторные величины раскладываются вдоль и поперёк \mathbf{k} . В частности, из

(3.19) с учётом приближения холодной плазмы $p_e^0 = p_i^0 = 0$ и поперечного характера волны $v_{||} = 0$ получается дисперсионное уравнение для системы (3.17):

$$1 + \left(\frac{ck}{\omega_p} \right)^2 - \left(\frac{v_A k}{\omega} \right)^2 = 0, \quad v_A^2 = \frac{H_\infty^2}{4\pi\rho_\infty}$$

которое приводит к нелинейной зависимости (т. е. к дисперсии) ω от k :

$$\omega(k) = \pm \frac{v_A k}{\sqrt{1 + (ck/\omega_p)^2}} \quad (3.20)$$

Отклонение от линейного закона $\omega(k) = \pm v_A k$, справедливого в МГД, определяется скинновой или дисперсионной длиной c/ω_p . Для длинноволновых возмущений $(ck/\omega_p)^2 \ll 1$ и дисперсией, как следует из (3.20), можно пренебречь. Заметим, что наличие дисперсии является необходимым, но не достаточным условием существования уединенных волн. Например, в холловской МГД [37] дисперсия есть, но плоских нелинейных волн нет, поскольку обобщённый закон Ома в холловской МГД определяет локальный характер зависимости электрического поля от остальных параметров плазмы.

Для численного решения задачи (3.17), (3.18) перепишем её в безразмерном виде (дополнительно полагая $E_0 = v_0 H_0 / c$ и обозначая $U_x = U$, $H_z = H$, $E_y = E$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u}, H)}{\partial x} &= 0 & \mathbf{u} &= (u_1, u_2) = (\rho, \rho U) \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} &= 0 & \mathbf{f} &= (u_2, u_2^2/u_1 + H^2/2) = (\rho U, \rho U^2 + H^2/2) \\ E - b(\mathbf{u}) \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= D(\mathbf{u}, H) & -\infty < x < \infty, t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

с граничными условиями

$$\rho(\pm\infty) = 1, \quad H(\pm\infty) = 1, \quad U(\pm\infty) = 0, \quad E(\pm\infty) = 0 \quad (3.22)$$

Здесь $b(u) = \xi^2/u_1 = \xi^2/\rho > 0$, а оператор $D(\mathbf{u}, H)$ равен:

$$D(\mathbf{u}, H) = u_2 H / u_1 - (\xi^2 / u_1) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_2}{u_1} \frac{\partial H}{\partial x} \right) = UH - \frac{\xi^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(U \frac{\partial H}{\partial x} \right)$$

В записи (3.21) исследуемая система распадается на “гидродинамическую” часть, записанную в дивергентном виде, и “электродинамическую” часть, содержащую обобщённый закон Ома и закон Фарадея. Рассмотрим численный метод решения системы (3.21), (3.22), основанный на двухшаговой схеме Лакса-Вендроффа [38] для гидродинамических уравнений. Выберем две равномерные разностные сетки на прямой с целыми $x_k = kh$, $-\infty < k < +\infty$ и дробными (полуцелыми) $x_{k+1/2} = (k + 1/2)h$, $-\infty < k < +\infty$ узлами, где $h > 0$ – шаг сетки, k – целое. Аппроксимируем значения неизвестных функций ρ , U , H , E в узлах целой сетки сеточными функциями, которые и подлежат нахождению в каждый момент дискретного времени. Переход с временного слоя $t = t_0$ на слой $t = t_0 + \tau$, $\{\rho_k^0, U_k^0, H_k^0, E_k^0\} \rightarrow \{\rho_k^1, U_k^1, H_k^1, E_k^1\}$ происходит в два этапа.

1) Вычисляем вспомогательные сеточные функции $\{\rho_{k+1/2}^{1/2}, U_{k+1/2}^{1/2}, H_{k+1/2}^{1/2}, E_{k+1/2}^{1/2}\}$, которые интерпретируются как приближённые значения неизвестных функций ρ , U , H , E в дробных узлах в момент времени $t_0 + \tau/2$:

$$\frac{\mathbf{u}_{k+1/2}^{1/2} - \mathbf{u}_{k+1/2}^0}{\tau/2} + \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}_{k+1}^0, H_{k+1}^0) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_k^0, H_k^0)}{h} = 0$$

$$\frac{H_{k+1/2}^{1/2} - H_{k+1/2}^0}{\tau/2} + \frac{E_{k+1}^0 - E_k^0}{h} = 0, \quad \mathbf{u}_{k+1/2}^0 = \frac{\mathbf{u}_k^0 + \mathbf{u}_{k+1}^0}{2}, \quad H_{k+1/2}^0 = \frac{H_k^0 + H_{k+1}^0}{2}$$

$$E_{k+1/2}^{1/2} - b(\mathbf{u}_{k+1/2}^{1/2}) \frac{E_{k+3/2}^{1/2} - 2E_{k+1/2}^{1/2} + E_{k-1/2}^{1/2}}{h^2} = D(\mathbf{u}^{1/2}, H^{1/2})_{k+1/2}$$

с простейшей аппроксимацией дифференциального оператора $D(\mathbf{u}^{1/2}, H^{1/2})$:

$$D(\mathbf{u}^{1/2}, H^{1/2})_{k+1/2} = U_{k+1/2}^{1/2} H_{k+1/2}^{1/2} - \frac{\xi^2}{\rho_{k+1/2}^{1/2} h} \left\{ \frac{U_{k+3/2}^{1/2} + U_{k+1/2}^{1/2}}{2} \frac{H_{k+3/2}^{1/2} - H_{k+1/2}^{1/2}}{h} - \frac{U_{k+1/2}^{1/2} + U_{k-1/2}^{1/2}}{2} \frac{H_{k+1/2}^{1/2} - H_{k-1/2}^{1/2}}{h} \right\}$$

2) Вычисляем искомые сеточные функции $\{\rho_k^1, U_k^1, H_k^1, E_k^1\}$, зная

вспомогательные сеточные функции, найденные на первом этапе:

$$\frac{\mathbf{u}_k^1 - \mathbf{u}_k^0}{\tau} + \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}_{k+1/2}^{1/2}, H_{k+1/2}^{1/2}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{k-1/2}^{1/2}, H_{k-1/2}^{1/2})}{h} = 0$$

$$\frac{H_k^1 - H_k^0}{\tau} + \frac{E_{k+1/2}^{1/2} - E_{k-1/2}^{1/2}}{h} = 0$$

$$E_k^1 - b(\mathbf{u}_k^1) \frac{E_{k+1}^1 - 2E_k^1 + E_{k-1}^1}{h^2} = D(\mathbf{u}^1, H^1)_k$$

с естественной аппроксимацией дифференциального оператора $D(\mathbf{u}^1, H^1)$

$$D(\mathbf{u}^1, H^1)_k = U_k^1 H_k^1 - \frac{\xi^2}{\rho_k^1} \frac{1}{h} \left\{ \frac{U_{k+1}^1 + U_k^1}{2} \frac{H_{k+1}^1 - H_k^1}{h} - \frac{U_k^1 + U_{k-1}^1}{2} \frac{H_k^1 - H_{k-1}^1}{h} \right\}$$

При этом $b(\mathbf{u}_{k+1/2}^{1/2}) = \xi^2 / \rho_{k+1/2}^{1/2}$, $b(\mathbf{u}_k^1) = \xi^2 / \rho_k^1$.

Реальный расчёт ведётся на конечной сетке в конечной области $[0, \ell]$ в целочисленных узлах $x_k = kh$, $h = \ell/N$, $N > 1$ – натуральное с учётом граничных условий (3.22). На первом этапе вспомогательные величины $\mathbf{u}^{1/2}$, $H^{1/2}$, $E^{1/2}$ вычисляются во внутренних дробных узлах $x_{k+1/2}$, $0 \leq k \leq N-1$. На втором этапе расчёт \mathbf{u}^1 , H^1 ведётся во всех целых узлах x_k , $0 \leq k \leq N$, а расчёт E^1 – во всех внутренних целых узлах x_k , $0 < k < N$. Недостающие (при расчёте $E^{1/2}$ на первом этапе и \mathbf{u}^1 , H^1 – на втором) значения $\rho^{1/2}$, $U^{1/2}$, $H^{1/2}$ в заграничных узлах считаются равными константам в соответствии с граничными условиями (3.22). Сеточные функции $E^{1/2}$ и E^1 ищутся прогонкой с нулевыми, согласно (3.22), условиями на границе: $E_{-1/2}^{1/2} = E_{N+1/2}^{1/2} = 0$, $E_0^1 = E_N^1 = 0$. Наконец, шаг по времени τ выбирается из условия Куранта:

$$\tau = k \frac{h}{\max_{0 \leq i \leq N} |v_{A,i}^0| + \varepsilon}$$

где $\varepsilon > 0$ – малая добавка, $0 < k \leq 1$ – коэффициент запаса, $v_{A,i}^0 = H_i^0 / \sqrt{4\pi\rho_i^0}$.

3.5. Результаты расчётов

Рассмотрим эволюцию двух солитонов равной амплитуды,двигающихся

навстречу друг другу с безразмерной скоростью $a = 1.5$. Для этого система (3.21), (3.22) (здесь и ниже $\xi = 1$) решается численно двухшаговым методом Лакса-Вендроффа с начальным условием для магнитного поля:

$$\begin{aligned} H(0, x) &= H_{1.5}(x - 45), \quad 0 \leq x \leq 75 \\ H(0, x) &= H_{-1.5}(x - 105), \quad 75 \leq x \leq 150 \end{aligned}$$

на отрезке $[0, \ell]$ с $\ell = 150$, где $H_a(x)$ – функция, получающаяся обращением \pm ветвей (3.15) и заданная для всех вещественных x . Начальные значения остальных параметров вычисляются по формулам раздела 2.3:

$$U = \frac{H^2 - 1}{2a}, \quad \rho = \left[\left(1 + \frac{1}{2a^2} \right) - \frac{H^2}{2a^2} \right]^{-1}, \quad E = a(H - 1) \quad (3.23)$$

На Рис.3.3 изображены результаты расчёта профилей напряжённости магнитного поля H в различные моменты времени. Как видно, сначала уединённые волны двигаются со скоростью $a = 1.5$ навстречу друг другу, не меняя форму ($t = t_0$ на Рис.3.3), затем начинается слияние двух волн в одну, в результате возникает единая волна с амплитудой большей, чем суммарная амплитуда уединённых волн до слияния (при $t = t_1$ на Рис.3.3 процесс слияния ещё не достиг своего пика – на горбе волны видна впадина). Далее образовавшаяся единая волна распадается и рождает два солитона, расходящиеся в противоположные стороны с теми же скоростями и амплитудами, что и до слияния ($t = t_2$ на Рис.3.3). Численно находится время взаимодействия двух волн $\tau_c = 0.36$. Как показал расчёт, в хвосте каждой из расходящихся уединённых волн возникают затухающие колебания малой амплитуды, заполняющие пространство между разбегающимися после столкновения солитонами.

Пусть навстречу друг другу двигаются уединённые волны с разными амплитудами и фазовыми скоростями – слева направо движется уединённая волна с амплитудой 1 и фазовой скоростью $a = 1.5$, справа налево – волна с амплитудой 0.2 и фазовой скоростью $a = -1.1$. Начальное магнитное поле

равно:

$$H(0, x) = H_{1.5}(x - 80), \quad |x - 80| \leq 35$$

$$H(0, x) = H_{-1.1}(x - 155), \quad |x - 155| \leq 35$$

и $H(0, x) = 1$ в остальных точках счётной области $[0, \ell]$ с $\ell = 300$. Начальные значения остальных параметров вычисляются по (3.23).

На Рис.3.4 изображены расчётные профили напряжённости магнитного поля H в различные моменты времени $t_0 < t_1 < t_2$. Как видно, основные закономерности взаимодействия уединённых волн такие же, как и в предыдущем случае равных амплитуд. Только уменьшились время столкновения $\tau_c = 0.23$ и амплитуды затухающих колебаний в хвосте каждой из расходящихся после взаимодействия уединённых волн. Однако, максимальная амплитуда при слиянии волн по-прежнему больше суммарной амплитуды волн до взаимодействия.

Далее рассмотрим случай, когда волна с большей амплитудой 1 догоняет волну с меньшей амплитудой 0.2. Тогда начальное условие для магнитного поля H имеет вид:

$$H(0, x) = H_{1.5}(x - 200), \quad |x - 200| \leq 25$$

$$H(0, x) = H_{1.1}(x - 250), \quad |x - 250| \leq 25$$

и $H(0, x) = 1$ в остальных точках счётной области $[0, \ell]$ с $\ell = 600$. Начальные значения ρ , U , E вычисляются по (3.23). На Рис.3.5 представлены профили напряжённости магнитного поля H в разные моменты времени. Отсюда следует, что уединённая волна с большей амплитудой догоняет ($t = t_0$ на Рис.3.5) волну с меньшей амплитудой и сливается с ней ($t = t_1$ на Рис.3.5), образуя единую волну с амплитудой меньшей, чем суммарная амплитуда уединённых волн до взаимодействия. Затем возникшая единая волна раздваивается и порождает две уединённые волны с такими же параметрами, которые были у волн до взаимодействия ($t = t_2$ на Рис.3.5). Однако теперь волна с большей амплитудой располагается правее волны с меньшей амплитудой.

Иными словами, волна с большей амплитудой обогнала волну с меньшей амплитудой. Как показал расчёт, затухающие колебания в хвосте уединённых волн после столкновения не возникают.

Наконец, рассмотрим случай, когда начальное возмущение магнитного поля имеет вид гауссовского распределения $H = H_0 \exp[-(x - x_0)^2/D] + 1$, для которого начальные возмущения U , E вычисляются по (3.23), а $\rho = 0.5a^2[(1 + 2a^2) - H^2]^{-1} + 0.75$ (хотя можно и ρ вычислять по (3.23)). На Рис.3.6 представлены расчётные профили магнитного поля в разные моменты времени для

$$H = 0.92 \exp\left[-\frac{(x-110)^2}{100}\right] + 1, \quad |x-110| \leq 50$$

и $H(0, x) = 1$ в остальных точках счётной области $[0, \ell]$ с $\ell = 300$, причём начальные условия для ρ , U , E вычисляются при $a = 1.5$.

Как следует из Рис.3.6, происходит рождение нескольких (в данном случае пяти) уединённых волн разной амплитуды, которые разлетаются вдоль оси x , так что расстояние между соседними уединёнными волнами увеличивается. Любопытно, что пики возникающих уединённых волн лежат на одной прямой. Из расчётов следует, что далеко не каждое начальное возмущение распадается на солитоны. Критерий подобного распада, по-видимому, отсутствует, и этот вопрос требует дальнейшего исследования.

Выше приведены расчётные профили только для магнитного поля H . Однако, аналогичная картина профилей имеет место и для остальных параметров плазмы.

3.6. Заключение

Общий качественный вывод проведённого исследования состоит в том, что рассмотренные в работе уединённые волны подобно материальным частицам могут взаимодействовать друг с другом, сохраняя после взаимодействия свои характеристики, а некоторые плазменные возмущения, локализованные в

пространстве, могут распадаться на уединённые волны.

Подобные эффекты типичны для решений модельных уравнений (КдФ, НУШ и т. д.) и обычно объясняются вполне интегрируемостью и наличием бесконечного числа первых интегралов уравнений [44] и последующим применением достаточно рафинированной математической техники (метод обратной задачи рассеяния, преобразования Бэклунда, уравнения Лакса, цепочки Тода и пр. [41, 44]).

Важно подчеркнуть, что аналогичные явления и ряд новых особенностей были обнаружены и в некоторых других гидродинамических моделях в физике плазмы. Это, например, ионно-звуковые волны [23,40], волны пространственного заряда [39,45]. Для попутных волн пространственного заряда с близкими скоростями взаимодействие упругое, но без образования одиночного пика. Встречные же волны всегда взаимодействуют не упруго, но с образованием одиночного пика. Обнаруженные в расчетах волн пространственного заряда осцилляции между расходящимися после взаимодействия встречными волнами наблюдались и экспериментально в [52].

Некоторые из этих особенностей (неупругие эффекты, образование одиночного пика для встречных волн) в настоящей работе обнаружены численно на основе полной системы уравнений двухжидкостной гидродинамики холодной плазмы, т.е. законов сохранения массы, импульса и уравнений Максвелла.

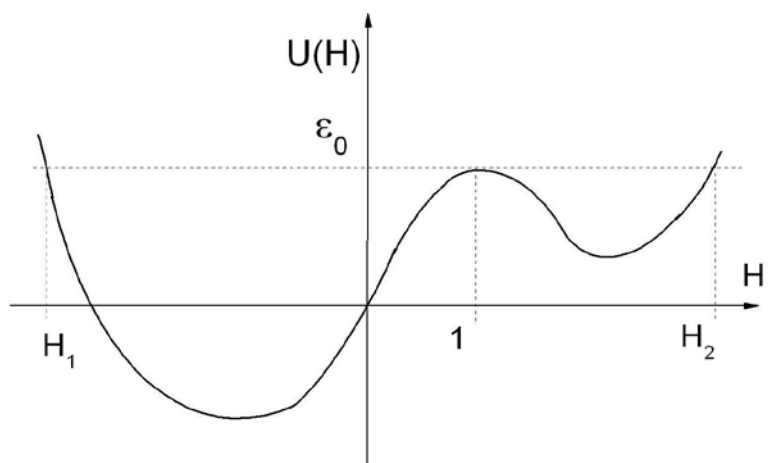


Рис.3.1. График потенциальной функции $U(H)$

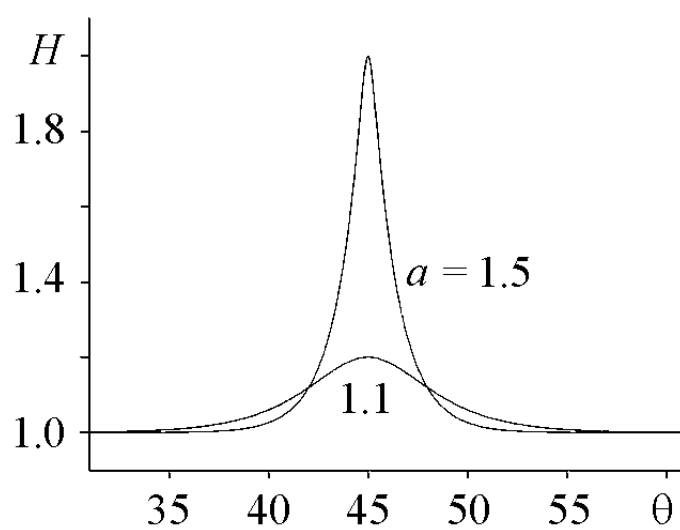


Рис.3.2. Зависимость $H(\theta)$ для различной фазовой скорости a

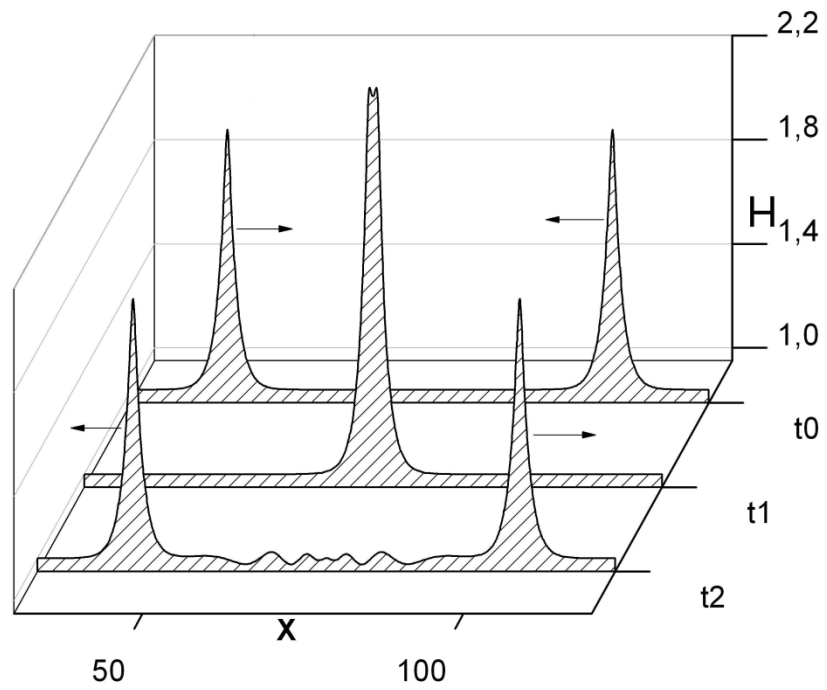


Рис.3.3. Взаимодействие уединённых волн с одинаковыми амплитудами и фазовыми скоростями: $a = 1.5$ и $a = -1.5$ в различные моменты времени: t_0 – до взаимодействия, t_1 – во время взаимодействия, t_2 – после взаимодействия

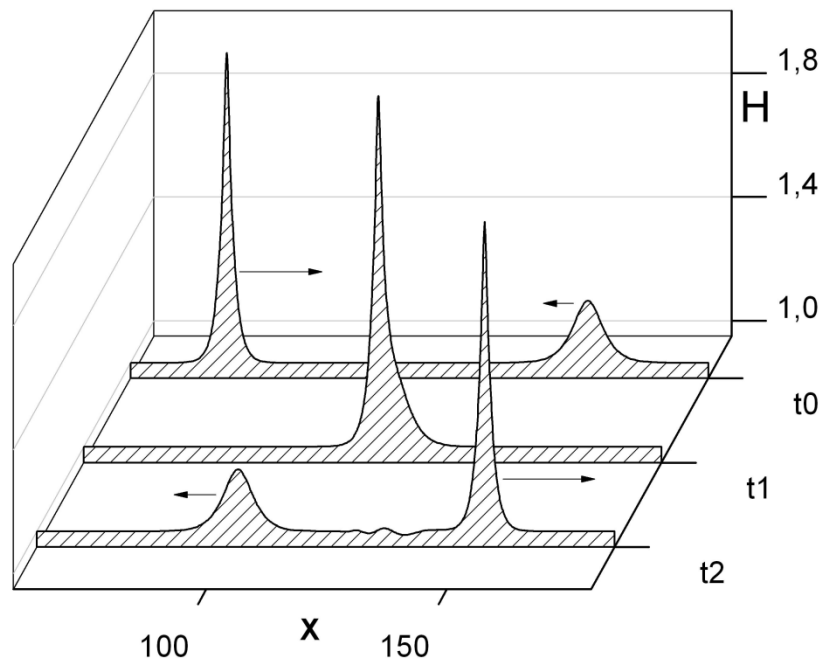


Рис.3.4. Волны с разными амплитудами и фазовыми скоростями: $a = 1.5$ и $a = -1.1$, движущиеся навстречу друг другу

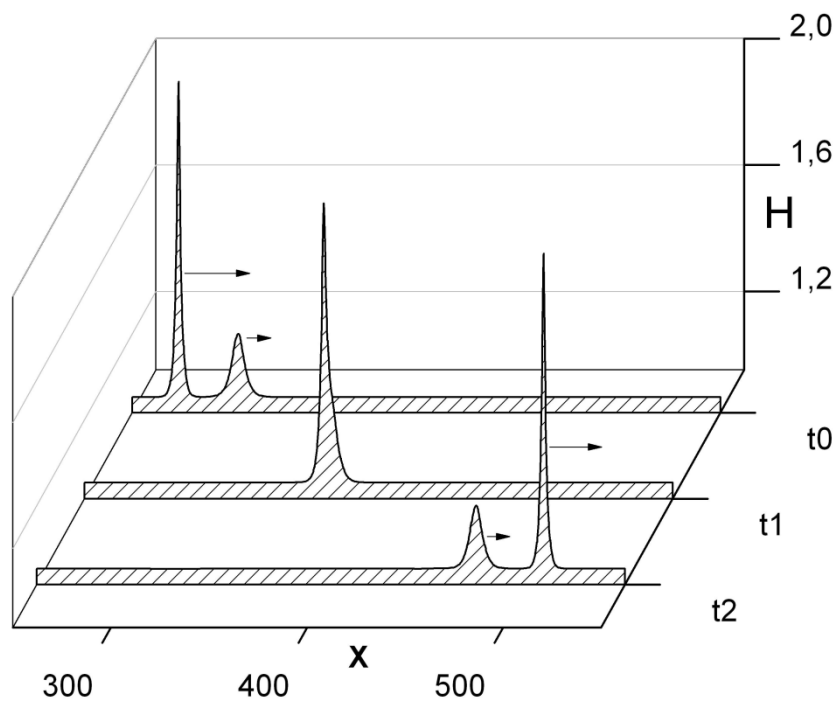


Рис.3.5. Волны с разными амплитудами и фазовыми скоростями: $a = 1.5$ и $a = 1.1$, движущиеся друг за другом

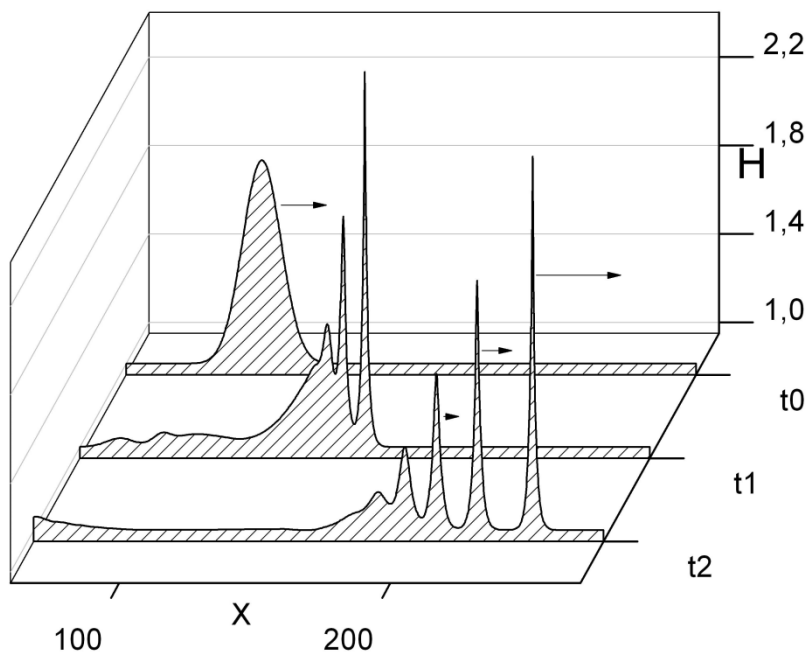


Рис.3.6. Эволюция начальных данных в виде гауссова импульса

Глава 4. Затухание альфвеновских волн

Актуальность исследования обусловлена предложенным рядом авторов в 2011 г. механизма разогрева солнечной короны и генерации солнечного ветра как результата затухания в плазме альфвеновских волн, генерируемых в нижних значительно более холодных солнечных слоях. Поскольку, как показали расчёты, поглощение альфвеновских волн происходит на длинах порядка скин-слоев, на которых уравнения классической МГД заведомо неприменимы, то в основу исследования положены уравнения двухжидкостной магнитной гидродинамики с полным учётом инерции электронов.

Как известно [2], магнитогидродинамическая плазма допускает поперечные синусоидальные колебания, распространяющиеся вдоль магнитного поля, в которых термодинамические параметры и продольные компоненты векторных величин не возмущаются. Такие волны впервые были обнаружены в 1942 г. Х. Альфвеном и названы альфвеновскими. Принципиально важно, что альфвеновские волны конечной амплитуды являются точными решениями уравнений классической магнитной гидродинамики МГД [30], что позволяет детально изучить их трансформацию вследствие различных физических факторов – диссипаций, неоднородностей плазмы и т. д.

Одним из приложений альфвеновских волн, инициировавших настоящее исследование, является предложенный в [58] механизм разогрева солнечной короны до температуры в несколько миллионов градусов и генерации солнечного ветра как результат затухания в плазме короны альфвеновских волн, генерируемых в нижних значительно более холодных солнечных слоях. В настоящей работе изучен механизм нелинейного поглощения альфвеновских волн вследствие плазменных диссипаций (омическое сопротивление плазмы, гидродинамические вязкости и теплопроводности электронов и ионов, обмен энергией между плазменными компонентами) на базе численного решения ЭМГД-уравнений, рассмотренных в разделе 4.2.

Альфвеновские волны в двухжидкостной плазме отличаются от классических альфвеновских волн в МГД прежде всего дисперсионным уравнением. В частности, частота альфвеновских волн, бегущих против магнитного поля, в отличие от МГД-теории, не превосходит электронную циклотронную частоту. Для низких частот ЭМГД- и МГД- альфвеновские волны практически совпадают.

Ниже приведены результаты исследования временного затухания альфвеновской волны, обусловленного диссипативными эффектами – проводимостью плазмы и гидродинамическими вязкостями электронов и ионов и взаимосвязанного с ним процесса релаксации температур электронов и ионов в альфвеновской волне.

Исследование основано не на линеаризованных уравнениях, как это обычно принято, а на точных законах сохранения массы, энергии, импульса для электронов и ионов и уравнениях электродинамики Максвелла, составляющих содержание ЭМГД-теории. Сопоставление полученных результатов с данными линейной теории показывает, что последняя грубо искажает процессы затухания и релаксации.

Далее ставится задача о поглощении альфвеновской волны диссипативной плазмой, заполняющей полупространство, причём альфвеновская волна набегаёт на границу полупространства с плазмой. Предложена одномерная неявная разностная схема для расчёта процесса поглощения, и изложены некоторые результаты расчётов.

Анализ результатов расчётов показывает, что они существенно зависят от коэффициентов переноса, в особенности от электронной вязкости и теплопроводности. В частности, из проведённых расчётов можно сделать вывод, что теоретическое значение для электронной вязкости [7, 43, 50] примерно на два-три порядка завышено.

4.1. ЭМГД-уравнения

ЭМГД-система с уравнениями энергии, записанными относительно

температур, имею вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{U} &= 0, \quad \frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{Div} \Pi = \operatorname{Div} \mathbf{P} \\
\frac{\partial T_{\pm}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla T_{\pm} + T_{\pm}(\gamma - 1) \operatorname{div} \mathbf{U} \pm \lambda_{\mp} \rho^{\gamma-2} \mathbf{j} \cdot \nabla \left(\frac{T_{\pm}}{\rho^{\gamma-1}} \right) &= \\
&= \frac{\lambda_{\Sigma} e_{\pm} (\gamma - 1)}{k \rho} \{ \operatorname{div}(\chi_{\pm} \nabla T_{\pm}) + \operatorname{tr}(\Pi_{\pm} \mathbf{D}_{\pm}) + \frac{m_{\mp} j^2}{m_{\Sigma} \sigma} \pm b(T_{-} - T_{+}) \} \\
\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} \\
\mathbf{E} + \frac{c^2 \lambda_{+} \lambda_{-}}{4\pi \rho} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{U}, \mathbf{H}] + \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} \mathbf{W}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где тензоры потока импульса Π , вязких напряжений \mathbf{P} и “холловских слагаемых” \mathbf{W} имеют вид:

$$\begin{aligned}
\Pi &= \Pi^h + \Pi^p + \Pi^c, \quad \mathbf{P} = \Pi_{*}^c + \Pi^U \\
\mathbf{W} &= (\lambda_{-} - \lambda_{+})(\Pi^p + \Pi^c) + (\lambda_{-} p_{+} - \lambda_{+} p_{-}) I_3 + \lambda_{+} \lambda_{-} (\mathbf{j} \mathbf{U} + \mathbf{U} \mathbf{j}) - \Pi_{*}^U - \Pi^c \\
\Pi^h &= \rho \mathbf{U} \mathbf{U} + p_{\Sigma} I_3, \quad \Pi^p = \frac{H^2}{8\pi} I_3 - \frac{\mathbf{H} \mathbf{H}}{4\pi}, \quad \Pi^c = \lambda_{+} \lambda_{-} \frac{\mathbf{j} \mathbf{j}}{\rho}
\end{aligned}$$

Напомним, индексы “ \pm ” относятся к параметрам электронов и ионов, $\lambda_{\pm} = m_{\pm} / e_{\pm}$, $\lambda_{\Sigma} = \lambda_{+} + \lambda_{-}$, $p_{\Sigma} = p_{+} + p_{-}$, $m_{\Sigma} = m_{+} + m_{-}$, $\rho = \rho_{+} + \rho_{-}$, $\mathbf{U} = (\rho_{+} \mathbf{v}_{+} + \rho_{-} \mathbf{v}_{-}) / \rho$, I_3 – единичный трёхмерный тензор, k – постоянная Больцмана, σ – проводимость плазмы, χ_{\pm} – теплопроводности электронов и ионов. Электроны и ионы для простоты считаются идеальными политропными газами с общим показателем адиабаты γ . Тензоры вязких напряжений, учитывая равенство нулю вторых вязкостей электронов и ионов [30], имеют вид:

$$\begin{aligned}
\Pi^U &= 2\mu_{\Sigma} \mathbf{D}^U - \frac{2}{3} \mu_{\Sigma} \operatorname{tr} \mathbf{D}^U I_3, \quad \Pi^c = 2\mu^{*} \mathbf{D}^c - \frac{2}{3} \mu^{*} \operatorname{tr} \mathbf{D}^c I_3 \\
\Pi_{*}^U &= 2\mu_{*} \mathbf{D}^U - \frac{2}{3} \mu_{*} \operatorname{tr} \mathbf{D}^U I_3, \quad \Pi_{*}^c = 2\mu_{*} \mathbf{D}^c - \frac{2}{3} \mu_{*} \operatorname{tr} \mathbf{D}^c I_3
\end{aligned}$$

$$\Pi_{\pm} = 2\mu_{\pm}D_{\pm} - \frac{2}{3}\mu_{\pm}\text{tr}D_{\pm}I_3$$

где $D^U = \text{def}\mathbf{U}$, $D^c = \text{def}(\mathbf{j}/\rho)$, $D_{\pm} = \text{def}\mathbf{v}_{\pm}$ – тензоры деформаций, $\mu_{\Sigma} = \mu_{+} + \mu_{-}$, $\mu_{*} = \lambda_{-}\mu_{+} - \lambda_{+}\mu_{-}$, $\mu^{*} = \lambda_{-}^2\mu_{+} + \lambda_{+}^2\mu_{-}$, μ_{\pm} – гидродинамические вязкости электронов и ионов.

На решении ЭМГД-уравнений (4.1) выполнен закон сохранения полной энергии [10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{U^2}{2} + \varepsilon + \frac{\lambda_{+}\lambda_{-}j^2}{2\rho^2} \right) + \frac{H^2}{8\pi} \right] + \text{div} \left[\rho \mathbf{U} \left(\frac{U^2}{2} + \varepsilon + \frac{p_{\Sigma}}{\rho} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\lambda_{+}\lambda_{-}j^2}{2\rho^2} \right) + \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] + A\mathbf{j} \right] = \text{div} \{ \chi_{+}\nabla T_{+} + \chi_{-}\nabla T_{-} + \Pi_{+}\mathbf{v}_{+} + \Pi_{-}\mathbf{v}_{-} \} \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\varepsilon = (\lambda_{+}\varepsilon_{+} + \lambda_{-}\varepsilon_{-})/\lambda_{\Sigma}$ – объёмная плотность внутренней энергии плазмы,

$$A = \lambda_{+}\lambda_{-} \frac{\langle \mathbf{U}, \mathbf{j} \rangle}{\rho} + \lambda_{+}\lambda_{-} \frac{(\lambda_{-} - \lambda_{+})j^2}{2\rho^2} + \frac{\lambda_{+}\lambda_{-}}{\lambda_{\Sigma}} (\varepsilon_{+} - \varepsilon_{-}) + \frac{\lambda_{-}p_{+} - \lambda_{+}p_{-}}{\rho}$$

В случае идеальных политропных электронов и ионов $\varepsilon = (\gamma - 1)^{-1} p/\rho$,

$$A = \lambda_{+}\lambda_{-} \frac{\langle \mathbf{U}, \mathbf{j} \rangle}{\rho} + \lambda_{+}\lambda_{-} \frac{(\lambda_{-} - \lambda_{+})j^2}{2\rho^2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\lambda_{-}p_{+} - \lambda_{+}p_{-}}{\rho}$$

Коэффициенты переноса μ_{\pm} , χ_{\pm} , σ , b получаются приближённым решением кинетических уравнений [7] и ниже считались равными [7, 20,28,43,50]:

$$\begin{aligned} \mu_{+} = 0.96 \cdot \frac{3m_i^{1/2}T_+^{5/2}}{4\pi^{1/2}e^4Z^4L}, \quad \mu_{-} = 0.733 \cdot \frac{3m_e^{1/2}T_-^{5/2}}{4(2\pi)^{1/2}e^4ZL} \\ \sigma = \frac{3T_-^{3/2}}{4(2\pi m_e)^{1/2}e^2ZL \cdot 0.5129}, \quad b = \frac{5m_e^{1/2}e^4Z^3\rho^2L}{m_i^3k^{1/2}T_-^{3/2}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\chi_{+} = D(kT_+)^{5/2}, \quad \chi_{-} = A(kT_-)^{5/2} \left/ \left(1 + F \frac{H^2}{\rho^2} (kT_-^3) \right) \right.$$

где Z – кратность заряда ионов, $e_{+} = Ze$, $e_{-} = e$, e – заряд электрона, L – кулоновский логарифм (ниже $L = 15$), температуры T_{\pm} измеряются в $^{\circ}K$.

Коэффициенты D , A , F вычисляются по формулам:

$$A = 1.9 \frac{k}{m^{1/2} e^2 L} f(Z), D = A \left(\frac{m_-}{m_+} \right)^{1/2} g(Z) / Z, F = 0.33 \frac{m_+^2}{m_- c^2 e^6 Z^4 L^2}$$

$$f(Z) = \frac{1 + 0.59Z^{-1}}{1 + 0.25Z + 0.34Z^{-1}}, g(Z) = \frac{13.56 + 7.29Z^{-1} + 0.43Z^{-2} + 1.75Z^{-3} + 0.59Z^{-4}}{1 + 0.59Z^{-1}} - \frac{3.34 + 13.56Z^{-1} + 4.55Z^{-2}}{0.25 + Z^{-1} + 0.34Z^{-2}}$$

Для случая $Z = 1$, который рассматривается ниже, $f(1) = 1$, $g(1) = 1.76$.

В системе (4.1) для простоты не учтены термосила и анизотропия замагниченной плазмы [7]. Кроме того, выражения для коэффициентов переноса носят теоретический характер и периодически корректируются. Как показало проведённое исследование, наиболее проблемным является значение для μ_- , которое должно быть на два-три порядка меньше теоретического, приведённого выше.

4.2. Альфвеновские волны в ЭМГД

Плоская альфвеновская волна является решением ЭМГД-уравнений (4.1) в бездиссипативном случае ($\mu_{\pm} = 0$, $b = 0$, $\chi_{\pm} = 0$, $\sigma = +\infty$) в предположении плоской симметрии ($\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$). С учётом диссипаций плоские течения двухжидкостной ЭМГД-плазмы подчиняются уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U_x) &= 0 \\ \frac{\partial \rho U_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho U_x^2 + p_{\Sigma} + \frac{|H_{\perp}|^2}{8\pi} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4}{3} \mu_{\Sigma} \frac{\partial U_x}{\partial x} \right), p_{\Sigma} = \frac{k\rho}{\lambda_{\Sigma} e} \left(\frac{T_+}{Z} + T_- \right) \\ \frac{\partial \rho U_{\perp}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho U_x U_{\perp} - \frac{H_x H_{\perp}}{4\pi} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{\Sigma} \frac{\partial U_{\perp}}{\partial x} + \mu_* \frac{\partial j_{\perp}}{\partial x \rho} \right) \\ \frac{\partial T_{\pm}}{\partial t} + U_x \frac{\partial T_{\pm}}{\partial x} + (\gamma - 1) T_{\pm} \frac{\partial U_x}{\partial x} &= \frac{Z_{\pm} \lambda_{\Sigma} e (\gamma - 1)}{k\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi_{\pm} \frac{\partial T_{\pm}}{\partial x} \right) + \frac{m_{\mp}}{m_{\Sigma}} \frac{|j_{\perp}|^2}{\sigma} \pm b(T_- - T_+) + \right. \\ &+ \mu_{\pm} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \right)^2 + \lambda_{\mp}^2 \left| \frac{\partial j_{\perp}}{\partial x \rho} \right|^2 \pm 2\lambda_{\mp} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial U_{\perp}}{\partial x} \overline{\frac{\partial j_{\perp}}{\partial x \rho}} \right) + \left| \frac{\partial U_{\perp}}{\partial x} \right|^2 \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial H_{\perp}}{\partial t} + i \frac{\partial E_{\perp}}{\partial x} &= 0, \quad j_{\perp} = \frac{ic}{4\pi} \partial H_{\perp} / \partial x, \quad H_x = \text{const} \\ E_{\perp} - \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 E_{\perp}}{\partial x^2} &= \\ &= \frac{j_{\perp}}{\sigma} + \frac{iH_x}{c} U_{\perp} - \frac{i}{c} U_x H_{\perp} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[(\lambda_+ - \lambda_-) \frac{H_x H_{\perp}}{4\pi} - \mu_* \frac{\partial U_{\perp}}{\partial x} - \mu_* \frac{\partial j_{\perp}}{\partial x \rho} \right] \\ E_x &= -\frac{1}{c} \text{Im}(\bar{U}_{\perp} H_{\perp}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \frac{|H_{\perp}|^2}{8\pi} - \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_* \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

где использованы комплексные обозначения для поперечных величин $U_{\perp} = U_y + iU_z$, $H_{\perp} = H_y + iH_z$, $E_{\perp} = E_y + iE_z$, $j_{\perp} = j_y + ij_z$, $Z_+ = Z$, $Z_- = 1$, черта означает комплексное сопряжение, Re , Im – вещественная и мнимая части комплексного числа.

Система (4.4) в бездиссипативном случае допускает частные решения, называемые плоскими альфвеновскими волнами, вида:

$$U_{\perp} = u(t)e^{ikx}, \quad H_{\perp} = h(t)e^{ikx}, \quad E_{\perp} = e(t)e^{ikx}, \quad T_{\pm} = \text{const}, \quad \rho = \text{const}, \quad U_x = 0 \quad (4.5)$$

где комплексные функции $u(t)$, $h(t)$, $e(t)$ удовлетворяют линейной системе ОДУ с постоянными коэффициентами, получающейся подстановкой (4.5) в (4.4):

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{ikH_x}{4\pi\rho} h, \quad \frac{1}{c} \frac{dh}{dt} = ke \\ e &= \left(\frac{iH_x}{c} u + \frac{ik\Lambda v_A}{\omega_p} h \right) / \left(1 + \left(\frac{k c}{\omega_p} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь $\Lambda = \sqrt{\lambda_+/\lambda_-} - \sqrt{\lambda_-/\lambda_+}$, $v_A = H_x / \sqrt{4\pi\rho}$ – альфвеновская скорость, $\omega_p = \sqrt{4\pi\rho/(\lambda_+\lambda_-)}$ – плазменная частота. Решение системы (4.6) имеет вид:

$$\begin{aligned} u(t) &= C_1 e^{i\omega_+ t} + C_2 e^{i\omega_- t} \\ h(t) &= \frac{(4\pi\rho)^{1/2}}{kv_A} \{ C_1 \omega_+ e^{i\omega_+ t} + C_2 \omega_- e^{i\omega_- t} \} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$e(t) = \frac{i}{1+r^2} \left\{ \left(\frac{H_x}{c} + \Lambda \sqrt{\lambda_+ \lambda_-} \omega_+ \right) C_1 e^{i\omega_+ t} + \left(\frac{H_x}{c} + \Lambda \sqrt{\lambda_+ \lambda_-} \omega_- \right) C_2 e^{i\omega_- t} \right\}$$

$$j(t) = -\frac{\kappa c}{4\pi} h(t)$$

где C_1, C_2 – произвольные комплексные константы, а частоты ω_{\pm} вычисляются по формуле:

$$\omega_{\pm} = \frac{\kappa v_A}{2} \left\{ \frac{r\Lambda}{1+r^2} \pm \left[\frac{r^2 \Lambda^2}{(1+r^2)^2} + \frac{4}{1+r^2} \right]^{1/2} \right\}, r = \frac{\kappa c}{\omega_p} \quad (4.8)$$

Подставляя (4.7) в (4.5), заключаем что плоские альфвеновские волны суть поперечные колебания однородной неподвижной плазмы, являющиеся суперпозицией синусоидальных бегущих вдоль и против магнитного поля волн с фазовыми скоростями $-\omega_{\pm}(\kappa)/\kappa$, зависящими от длины волны $\ell = 2\pi/\kappa$. Из (4.8) следует, что волна, бегущая против магнитного поля, имеет большую по абсолютной величине фазовую скорость. В МГД пределе $r \ll 1$ имеем $\omega_{\pm}(\kappa) \sim \pm \kappa v_A$ и полученное решение переходит в классическую альфвеновскую волну [8,30]. В коротковолновом пределе $r \gg 1$ имеем $\omega_{\pm} \cong \pm \omega_c^{\mp}$, где $\omega_c^{\pm} = H_x/(\lambda_{\pm} c)$ – циклотронные частоты, в частности, с уменьшением длины волны фазовые скорости альфвеновских бегущих волн стремятся к нулю с асимптотикой $\sim \mp \omega_c^{\mp}/\kappa$, $\kappa \rightarrow +\infty$.

На альфвеновской волне (4.5) условие квазинейтральности $\text{div}\mathbf{E} = \partial E_x/\partial x \equiv 0$ выполнено точно.

Таким образом, в двухжидкостной квазинейтральной плазме также как и в одножидкостной имеют место поперечные колебания плазменной среды, рассматриваемые в работе как обобщённые альфвеновские волны, которые в МГД-пределе $r \ll 1$ переходят в классические альфвеновские волны.

4.3. Преобразование энергии в альфвеновской волне

Рассмотрим преобразование в плазме друг в друга различных видов

энергии с объёмной плотностью: $\varepsilon_m = H^2/8\pi$ – энергия магнитного поля, $\varepsilon_{kin}^\pm = \rho_\pm v_\pm^2/2$ – кинетические энергии электронов и ионов, $\varepsilon_\pm = k\rho_\pm T_\pm/(m_\pm(\gamma-1))$ – тепловые энергии электронов и ионов, $\varepsilon_{kin} = \rho U^2/2$ – кинетическая энергия плазмы, движущейся как единое целое, $\varepsilon_{el} = \lambda_+ \lambda_- j^2/(2\rho) = (1 + Z m_-/m_+)^{-1} \rho_- (\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-)^2/2$ – с точностью до членов $\sim m_-/m_+$, кинетическая энергия относительного движения электронов. Заметим, что $\varepsilon_{kin}^+ + \varepsilon_{kin}^- = \varepsilon_{kin} + \varepsilon_{el}$. Поэтому полная энергия плазмы определяется объёмной плотностью $\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_{kin} + \varepsilon_{el} + \varepsilon_+ + \varepsilon_-$.

Для альфвеновской волны (4.5) $\varepsilon_\pm = \text{const}$, $\varepsilon_m = |h(t)|^2/8\pi$, $\varepsilon_{kin} = \rho |u(t)|^2/2$, $\varepsilon_{el} = r^2 \varepsilon_m$ – функции только времени и из закона сохранения полной энергии (2) следует $\varepsilon_m + \varepsilon_{kin} + \varepsilon_{el} = \text{const}$. С течением времени происходит двусторонний обмен кинетической энергии ε_{kin} с энергиями магнитного поля ε_m и кинетической энергией относительного движения электронов ε_{el} : $\varepsilon_{kin} \rightleftharpoons \varepsilon_m + \varepsilon_{el}$. Пусть в (4.7) $C_1 = R_1 e^{i\varphi}$, $C_2 = R_2 e^{i\psi}$, $|C_1| = R_1$, $|C_2| = R_2$. Тогда прямой подсчёт по формулам (4.7) даёт:

$$\varepsilon_{kin} = \frac{\rho}{2} \{ R_1^2 + R_2^2 + 2R_1 R_2 \cos[(\omega_+ - \omega_-)t + \varphi - \psi] \}$$

$$\varepsilon_m = \frac{\rho}{2} \left\{ \frac{\omega_+^2 R_1^2 + \omega_-^2 R_2^2}{\kappa^2 v_A^2} - \frac{2R_1 R_2}{1+r^2} \cos[(\omega_+ - \omega_-)t + \varphi - \psi] \right\}$$

Значит ε_{kin} и ε_m (и тем более $\varepsilon_{el} = r^2 \varepsilon_m$) совершают в противофазе гармонические колебания с частотой $\omega_+ - \omega_-$ и амплитудами $\rho R_1 R_2$, $\rho R_1 R_2/(1+r^2)$ соответственно вокруг значений $\rho(R_1^2 + R_2^2)/2$, $\rho(\omega_+^2 R_1^2 + \omega_-^2 R_2^2)/(2\kappa^2 v_A^2)$. Относительные амплитуды колебаний ε_{kin} и ε_m равны $2R_1 R_2/(R_1^2 + R_2^2)$ и $2R_1 R_2 \omega_+ |\omega_-|/(R_1^2 \omega_+^2 + R_2^2 \omega_-^2)$ соответственно. Интенсивность обмена энергией определяется частотой $\omega_+ - \omega_-$, которая в МГД-пределе $r \ll 1$

равна $\cong 2r\sqrt{\omega_c^+\omega_c^-} \ll 2\sqrt{\omega_c^+\omega_c^-}$, а в коротковолновом пределе $r \gg 1$ приближённо равна $\cong \omega_c^-$. В частности, интенсивность обмена энергией ε_{kin} с ε_m и ε_{el} для коротких альфвеновских волн, как минимум, на два порядка выше, чем для длинных. При $R_1=0$ или $R_2=0$, т.е. когда альфвеновская волна распространяется только вдоль или только против магнитного поля, амплитуды колебаний обращаются в нуль, и обмен энергией отсутствует: $\varepsilon_m = \text{const}$, $\varepsilon_{kin} = \text{const}$, $\varepsilon_{el} = \text{const}$.

В МГД-теории $\varepsilon_{el} \ll \varepsilon_m$ и закон сохранения полной энергии принимает вид $\varepsilon_{kin} + \varepsilon_m = \text{const}$, но для конечных r опущенное слагаемое ε_{el} существенно меняет баланс полной энергии, что не учитывается в МГД.

4.4. Временное затухание альфвеновских волн

Альфвеновская волна (4.5) может рассматриваться как решение задачи Коши на прямой для системы (4.4) с нулевыми диссипациями и начальными условиями вида:

$$\begin{aligned} U_{\perp}|_{t=0} = u_0 e^{ikx}, H_{\perp}|_{t=0} = h_0 e^{ikx}, E_{\perp}|_{t=0} = e_0 e^{ikx}, T_{\pm}|_{t=0} = T_{\pm}^0 = \text{const}, U_x|_{t=0} = 0 \\ \rho|_{t=0} = \text{const} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Константы C_1 , C_2 , T_{\pm} из (4.5), (4.7) и e_0 связаны с константами $u_0, h_0 \in \mathbb{C}$, $T_{\pm}^0 > 0$ соотношениями:

$$\begin{aligned} C_1 = \left(\frac{\kappa v_A}{\sqrt{4\pi\rho}} h_0 - \omega_- u_0 \right) (\omega_+ - \omega_-)^{-1}, C_2 = \left(\frac{\kappa v_A}{\sqrt{4\pi\rho}} h_0 - \omega_+ u_0 \right) (\omega_- - \omega_+)^{-1} \\ e = i \left(\frac{H_x}{c} u_0 + \frac{\kappa v_A}{\omega_p} \Lambda h_0 \right) / (1 + r^2)^{-1}, T_{\pm} = T_{\pm}^0 \end{aligned}$$

Тогда временное затухание альфвеновской волны (4.5), очевидно, задаётся решением задачи Коши на прямой для системы (4.4) с конечными диссипациями и теми же начальными условиями (4.9). Предполагая доказанной теорему единственности решения задачи Коши на прямой для системы (4.4), искомое решение легко угадывается и имеет вид:

$$U_{\perp} = u(t)e^{ikx}, H_{\perp} = h(t)e^{ikx}, E_{\perp} = e(t)e^{ikx}, T_{\pm} = T_{\pm}(t), U_x \equiv 0, \rho \equiv \text{const} \quad (4.10)$$

где комплексные функции $u(t)$, $h(t)$ и вещественные $T_{\pm}(t)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ, получающейся подстановкой функций (4.10) в систему (4.4):

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{\kappa^2 \mu_{\Sigma}}{\rho} u + \left(\frac{i\kappa H_x}{4\pi\rho} + \frac{c\kappa^3 \mu_*}{4\pi\rho^2} \right) h \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{\kappa c}{1 + (\kappa c / \omega_p)^2} \left\{ \left(\frac{iH_x}{c} + \frac{\kappa^2 \mu_*}{\rho} \right) u + \left(-\frac{c\kappa}{4\pi\sigma} + \frac{i\kappa \Lambda v_A}{\omega_p} - \frac{c\kappa^3 \mu_*}{4\pi\rho^2} \right) h \right\} \\ \frac{dT_{\pm}}{dt} &= Z_{\pm} a_* \left\{ \mu_{\pm} \kappa^2 \left[|u|^2 + \frac{c^2 \kappa^2 \lambda_{\mp}^2}{16\pi^2 \rho^2} |h|^2 \mp \frac{c\kappa \lambda_{\mp}}{4\pi\rho} (\bar{u}h + u\bar{h}) \right] + \frac{m_{\mp}}{m_{\Sigma}} \frac{c^2 \kappa^2}{16\pi^2 \sigma} |h|^2 \pm b(T_{-} - T_{+}) \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

с начальными условиями:

$$u(0) = u_0, \quad h(0) = h_0, \quad T_{\pm}(0) = T_{\pm}^0 \quad (4.12)$$

Здесь $a_* = \lambda_{\Sigma} e(\gamma - 1)/(k\rho)$, $r = \kappa c / \omega_p$. Комплексная амплитуда $e(t)$ явно выражается через $h(t)$, $u(t)$:

$$e(t) = \left\{ \left(\frac{iH_x}{c} + \frac{\kappa^2 \mu_*}{\rho} \right) u(t) + \left(-\frac{c\kappa}{4\pi\sigma} + \frac{i\kappa \Lambda v_A}{\omega_p} - \frac{c\kappa^3 \mu_*}{4\pi\rho^2} \right) h(t) \right\} / (1 + r^2)$$

Тем самым для исследования процесса временного затухания и релаксации температур электронов и ионов в альфвеновской волне не надо решать задачу Коши для системы (4.4) с начальным условием (4.9), а достаточно решить значительно более простую задачу Коши (4.11), (4.12) для системы ОДУ. Решение последней задачи упрощается, если учесть, что на решении (4.10) закон сохранения полной энергии (4.2) принимает вид:

$$\frac{\rho |u(t)|^2}{2} + (1 + r^2) \frac{|h(t)|^2}{8\pi} + \frac{T_{+}(t)}{Z a_*} + \frac{T_{-}(t)}{a_*} = C_0 = \text{const} \quad (4.13)$$

и позволяет в системе (4.11) исключить T_{+} из числа неизвестных.

Из (4.11), (4.12) следует, что временное поглощение альфвеновских волн не

зависит от теплопроводностей электронов и ионов, а условие квазинейтральности на решении (4.10) выполнено точно: $\text{div}\mathbf{E} = \partial E_x / \partial x \equiv 0$.

Система сильно нелинейная из-за зависимости коэффициентов переноса σ , b , μ_{\pm} , μ_* , μ^* от T_+ , T_- . Согласно (4.3):

$$\sigma = RT_-^{3/2}, b = R_0 T_-^{-3/2}, \mu_{\pm} = T_{\pm}^{5/2} / R_{\pm}, R = \frac{3k^{3/2}}{4(2\pi m_-)^{1/2} e^2 ZL \cdot 0.5129}$$

$$R_+ = \frac{4\pi^{1/2} e^4 Z^4 L}{0.96 \cdot 3m_+^{1/2} k^{5/2}}, R_- = \frac{4(2\pi)^{1/2} e^4 ZL}{0.733 \cdot 3m_-^{1/2} k^{5/2}}, R_0 = \frac{5m_-^{1/2} e^4 Z^3 L \rho^2}{m_+^3 k^{1/2}}$$

В частности, имеем:

$$\mu_* = (\lambda_- / R_+) T_+^{5/2} - (\lambda_+ / R_-) T_-^{5/2}, \mu^* = (\lambda_-^2 / R_+) T_+^{5/2} + (\lambda_+^2 / R_-) T_-^{5/2}$$

4.5. Решение уравнений для амплитуд в немагнитиченной невязкой плазме

В случае $H_x = 0$, $\mu_{\pm} = 0$ система (4.11) позволяет исследовать поглощение стационарной синусоидальной волны в однородной плазме вследствие омического сопротивления и обмена энергией между плазменными компонентами ($\sigma < +\infty$, $b > 0$). Практически эта ситуация встречается вероятно редко, но с методологической точки зрения этот случай представляет несомненный интерес. В этом случае из (4.11) следует $u(t) \equiv \text{const}$, а $h(t)$ можно считать вещественной положительной функцией. Исключая T_+ посредством интеграла энергии (4.13) приходим к автономной системе ОДУ на плоскости (h , $T = T_-$):

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\alpha_0 h}{T_-^{3/2}}, \quad \frac{dT_-}{dt} = \alpha_* \frac{h^2}{T_-^{3/2}} + \frac{\beta_*}{T_-^{3/2}} - \frac{\gamma_*}{T_-^{1/2}}, \quad h > 0, T_- > 0 \quad (4.14)$$

где константы $\alpha_* \in \mathbb{R}$, $\alpha_0, \beta_*, \gamma_* > 0$ имеют вид:

$$\alpha_0 = \frac{r^2 \omega_p^2}{4\pi R(1+r^2)}, \beta_* = R_0 Z a_*^2 C_0, \gamma_* = (1+Z) R_0 a_*, \alpha_* = a_* \left[\frac{m_+}{m_{\Sigma}} \frac{r^2 \omega_p^2}{16\pi^2 R} - \frac{R_0 Z a_* (1+r^2)}{8\pi} \right]$$

Система (4.14) легко интегрируется. Поскольку $dh/dt < 0$, то h можно взять в

качестве новой независимой переменной вместо времени t . Тогда для искомой функции $T(h)$ получим с учётом (4.14) линейное уравнение

$$\frac{dT}{dh} = \frac{\gamma_* T}{\alpha_0 h} - \frac{\alpha_* h^2 + \beta_*}{\alpha_0 h}, \text{ имеющее общее решение вида:}$$

$$T(h) = Ch^{\gamma_*/\alpha_0} + \frac{\beta_*}{\gamma_*} - \frac{\alpha_*}{2\alpha_0 - \gamma_*} h^2, \gamma_* \neq 2\alpha_0$$

$$T(h) = Ch^2 + \frac{\beta_*}{\gamma_*} - \frac{\alpha_*}{\alpha_0} h^2 \ln h, \gamma_* = 2\alpha_0$$
(4.15)

где $C \in \mathbb{R}$ – произвольная константа. После чего зависимость $h(t)$ ищется из первого уравнения (4.14) квадратурой:

$$-\alpha_0 t = \int \frac{T(h)^{3/2}}{h} dh$$
(4.16)

где $T(h)$ вычисляется по (4.15). Кроме того есть ещё одно решение, не охватываемое формулами (4.15), (4.16), получающееся интеграцией системы (4.14), где надо положить $h \equiv 0$:

$$-\frac{\beta_*}{\gamma_*} T^{1/2} - \frac{T^{3/2}}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_*}{\gamma_*} \right)^{3/2} \ln \left| \frac{\sqrt{\beta_*/\gamma_*} + T^{1/2}}{\sqrt{\beta_*/\gamma_*} - T^{1/2}} \right| = \frac{\gamma_*}{2} t + \text{const}$$
(4.17)

На основании (4.15), (4.16) легко построить интегральные кривые на плоскости ($h > 0, T > 0$) системы (4.14) и детально проанализировать их расположение в зависимости от констант $\alpha_*, \beta_*, \gamma_*, \alpha_0$ [15]. Основные выводы можно сформулировать так.

Пусть $\theta = 2\pi R R_0 a_* / \omega_p^2 = 3.66(\gamma - 1)(m_-/m_+)(1 + Z m_-/m_+) / \sqrt{2\pi}$. Тогда $\theta \ll 1$ (для $\gamma = 5/3$ и дейтерия $\theta = 0.00027$). Разобьём альфвеновские волны на диапазоны по их длине $\ell = 2\pi/k$: короткие волны $\ell \leq N_1 c/\omega_p$, средние – $N_1 c/\omega_p < \ell \leq N_2 c/\omega_p$, длинные – $N_2 c/\omega_p < \ell$, где $N_1 = 2\pi(\theta^{-1}(1+Z)^{-1} - 1)^{1/2}$, $N_2 = 2\pi(m_+ m_-^{-1} Z^{-1} \theta^{-1} - 1)^{1/2}$, c/ω_p – скиновья длина. Например, для $\gamma = 5/3$ и дейтерия границы диапазонов задаются $N_1 = 269$, $N_2 = 380$. Несложно

проверить, что короткие волны соответствуют условиям $\gamma_* \leq 2\alpha_0$, $\alpha_0 > 0$, средние – $\alpha_* \geq 0$, $\gamma_* > 2\alpha_0$, длинные – $\alpha_* < 0$, $\gamma_* > 2\alpha_0$. Интегральные кривые для коротких волн изображены на Рис.4.1(а), для средних – на Рис.4.1(б), (в) ((в) соответствует $\alpha_* = 0$), для длинных – на Рис.4.1(г). Пунктиром на этих рисунках обозначена парабола $T_*(h) = \beta_*/\gamma_* + h^2 \alpha_*/\gamma_*$, составленная из точек локального максимума или минимума функции $T(h)$. Для заданных начальных условий $T_{\pm}^0 > 0$, $h_0 > 0$ решение (4.14) задаётся интегральной кривой, начинающейся в точке (h_0, T_-^0) и входящей (за бесконечное время) в особую точку $(0, T_-^* = \beta_*/\gamma_*)$ системы (4.14). Начальное данное (h_0, T_-^0) лежит внутри криволинейного треугольника, ограниченного осями $h = 0$, $T_- = 0$ и кривой $T_{zp}(h) = a_* C_0 - (1 + r^2) a_* h^2 / (8\pi)$, на которой ионная температура обращается в нуль, где константа C_0 вычисляется по T_{\pm}^0 , h_0 посредством формулы (4.13) с $u(t) \equiv 0$. Несложно установить, что интегральная кривая, начинающаяся в точке (h_0, T_-^0) , при $t \geq 0$ всё время остаётся внутри криволинейного треугольника, в частности, в каждый момент времени температуры электронов и ионов положительные.

Как следует из Рис.4.1 при затухании альфвеновской волны энергия магнитного поля полностью переходит в тепловую энергию электронов и ионов, при этом изменение самих тепловых энергий электронов и ионов может иметь немонотонный характер, что свидетельствует об обмене энергией между плазменными компонентами.

4.6. Релаксация температур и поглощение альфвеновской волны

Поглощение альфвеновской волны состоит в трансформации её кинетической $\varepsilon_{kin} = \rho |u(t)|^2 / 2$ и полной (с учётом кинетической энергии относительного движения электронов) магнитной $\varepsilon_m = (1 + r^2) |h(t)|^2 / 8\pi$ энергий в тепловую энергию электронов и ионов $\varepsilon_- = T_- / a_*$, $\varepsilon_+ = T_+ / (Za_*)$. Этот процесс

налагается на релаксацию температур электронов ионов, определяемую коэффициентом b . Как показало численное решение задачи Коши (4.11), (4.12), поглощение альфвеновской волны распадается на два этапа. На первом происходит быстрое преобразование магнитной и в значительной мере кинетической энергий альфвеновской волны в тепловую энергию преимущественно электронов, на втором – в основном медленная релаксация температур, аппроксимируемая решением системы (4.11) с $h=0$, $u=0$, имеющая вид (4.17), при этом остатки кинетической энергии волны переходят в тепловую энергию. Особенности процесса поглощения на втором этапе рассмотрены в следующем пункте.

Равновесная температура T^0 ищется из закона сохранения энергии (4.13) и имеет вид:

$$T^0 = \frac{T_0^+ + ZT_0^-}{1+Z} + \frac{Z}{1+Z} \cdot \frac{\lambda_{\Sigma} e(\gamma-1)}{k} \left\{ \frac{|u_0|^2}{2} + \frac{|h_0|^2}{8\pi\rho} \left[1 + \left(\frac{\kappa c}{\omega_p} \right)^2 \right] \right\}, r = \frac{\kappa c}{\omega_p}$$

В частности, равновесная температура не зависит от замагниченности плазмы H_x , но зависит от её плотности и длины $\ell = 2\pi/\kappa$ альфвеновской волны. Отсюда следует, что поглощение коротких, $r \gg 1$, альфвеновских волн приводит к сильному разогреву плазмы. Скорость поглощения волны резко возрастает при учёте гидродинамических вязкостей электронов и ионов или уменьшении длины волны. С другой стороны, поглощение кинетической энергии существенно зависит от сдвига фаз начальных амплитуд u_0 и h_0 .

Из безразмерного вида системы (4.11) следует, что задача о временном поглощении альфвеновских волн имеет два определяющих безразмерных параметра, $\sim (\ell\rho)^{-1}$, $\sim \rho^{5/2}/H_x^4$

$$r = \frac{\kappa c}{\omega_p} = \frac{c\lambda_+ \lambda_-}{2\rho\ell}, \quad \zeta = 0.386LZ^3 \frac{ce^3}{m_+^2} \frac{(4\pi\rho)^{5/2}}{H_x^4} \left(1 + Z \frac{m_-}{m_+} \right)^{-3/2} \quad (4.18)$$

На Рис.4.2 приведены типичные зависимости от времени тепловых энергий электронов и ионов, магнитной и кинетической энергий для варианта $r = 0.1$,

$\zeta = 100$, $T_+^0 = 0.01$, $T_-^0 = 1$, $h_0 = 4$, $u_0 = 1$. При этом в качестве характерных масштабов плотности, напряжённости магнитного поля, скорости, длины времени, плотности энергии и температуры выбирались величины: $\rho_0 = \rho$, $H_0 = H_x$, $U_0 = v_A$, $L_0 = c/\omega_p$ (скиновая длина), $t_0 = (\omega_c^+ \omega_c^-)^{-1/2}$, $\varepsilon_0 = H_0^2/(8\pi)$, $T_0 = v_A^2 \lambda_{\Sigma} e/(2k)$. Как видно, поглощение магнитной энергии волны происходит значительно быстрее кинетической и сопровождается взаимным обменом кинетической и магнитной энергией (колебания на графиках, обусловленные преобразованием энергии в альфвеновской волне). Кроме того, поглощённая энергия альфвеновской волны преобразуется прежде всего в тепловую энергию электронов, которые затем отдают её ионам, благодаря механизму релаксации.

Графики на Рис.4.2 соответствуют $\mu_{\pm} = 0$. Если учесть гидродинамическую вязкость ионов, то процесс поглощения резко ускоряется, например, магнитная энергия поглощается за время $\sim (\omega_c^+ \omega_c^-)^{-1/2}$. При дополнительном учёте электронной вязкости, вычисляемой по (4.3), процесс поглощения ещё более ускоряется, занимая доли $(\omega_c^+ \omega_c^-)^{-1/2}$, а энергия магнитного поля поглощается за время $\sim 10^{-2} (\omega_c^+ \omega_c^-)^{-1/2}$.

Из безразмерного вида системы (4.11) следует, что для $\zeta \gg 1$ определяющим фактором поглощения альфвеновской волны является магнитная вязкость, а при $\zeta \ll 1$ – гидродинамические вязкости электронов и ионов, причём в этом случае их преобладающая роль в поглощении с увеличением температур электронов и ионов только возрастает, поскольку $\mu_{\pm} \sim T_{\pm}^{5/2}$, $\mu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \sim T_-^{3/2}$. Кроме того, короткие волны ($r \gg 1$) поглощаются намного быстрее длинных ($r \ll 1$). Детальный анализ этих закономерностей зависит от соотношения $r:\zeta$ и выходит за рамки настоящей работы.

4.7. Релаксация температур и особые точки

Математическая основа процесса релаксации – наличие особой точки у

системы (4.11), если исключить в ней из числа неизвестных температуру ионов T_+ посредством интеграла энергии (4.13). Эта единственная особая точка в безразмерных переменных имеет вид: $u = 0$, $h = 0$, $T = T^0 = Z(\gamma - 1)C_0/(1 + Z)$, где $C_0 = |u_0|^2 + |h_0|^2(1 + r^2) + T_+^0/(Z(\gamma - 1)) + T_-^0/(\gamma - 1)$ – значение безразмерного интеграла энергии, определяемого начальными условиями.

Безразмерный вид системы (4.11):

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= r \left(i + \frac{r^2}{\zeta} \alpha_1^0 \right) h + \frac{r^2}{\zeta} \beta_1^0 u \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{r}{1+r^2} \left\{ \left(i + \frac{r^2}{\zeta} \alpha_1^0 \right) u + \left(-\frac{\xi}{T_-^{3/2}} + i\Lambda + \frac{r^2}{\zeta} \beta_2^0 \right) h \right\} \\ \frac{dT_{\pm}}{dt} &= 2Z_{\pm}(\gamma - 1) \left\{ \frac{m_{\mp}}{m_{\Sigma}} r^2 \zeta \frac{|h|^2}{T_-^{3/2}} \pm \zeta \eta^0 \frac{(T_- - T_+)}{T_-^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_2^{\pm} \left[\frac{r^2}{\zeta} |u|^2 + \frac{r^4}{\zeta} \frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}} |h|^2 \mp \frac{r^3}{\zeta} \left(\frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}} \right)^{1/2} (\bar{u}h + u\bar{h}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.19)$$

где ζ – число подобия, вычисляемое по (4.18), величины α_1^0 , β_1^0 , β_2^0 , зависят от температур T_{\pm} и вычисляются по формулам:

$$\alpha_1^0 = \alpha_2^+ \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^{1/2} - \alpha_2^- \left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-} \right)^{1/2}, \beta_1^0 = -(\alpha_2^+ + \alpha_2^-), \beta_2^0 = \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \alpha_2^+ - \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \alpha_2^-, \alpha_2^{\pm} = \frac{T_{\pm}^{5/2}}{R_{\pm}}$$

Наконец, η^0 , R_{\pm} – универсальные константы:

$$\eta^0 = 1.46 \frac{m_-}{m_+} \left(1 + Z \frac{m_-}{m_+} \right), R_+ = 2.87 \left(\frac{m_-}{m_+} \right)^{1/2} Z^3 \left(1 + Z \frac{m_-}{m_+} \right)^{-1}, R_- = 5.313 \left(1 + Z \frac{m_-}{m_+} \right)^{-1}$$

Релаксация температур электронов и ионов на второй стадии поглощения аппроксимируется решением системы (4.19) в предположении $h = 0$, $u = 0$. Для более детального исследования релаксация и получения количественных оценок необходимо изучить поведение решений (4.19) в окрестности особой точки.

Матрица Якоби системы (4.19), в которой исключена ионная температура

$T_+ = Z(\gamma - 1)[C_0 - (1 + r^2)|h|^2 - |u|^2] - ZT_-$ в особой точке $(T^0, 0, 0, 0, 0)$ имеет вид:

$$J = \text{diag} \left\{ -\frac{2(\gamma - 1)\eta(1 + Z)}{(T^0)^{3/2}}, J^0 \right\}$$

где $J^0 = \|J_{js}^0\|$, $1 \leq j, s \leq 2$ – 2×2 -блочная матрица с 2×2 блоками:

$$J_{11}^0 = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{pmatrix}, J_{12}^0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -r \\ r & \alpha_1 \end{pmatrix}, J_{21}^0 = \frac{r}{1 + r^2} \begin{pmatrix} \alpha_2 & -1 \\ 1 & \alpha_2 \end{pmatrix}, J_{22}^0 = \frac{1}{1 + r^2} \begin{pmatrix} \beta_0 & -\Lambda r^2 \\ \Lambda r^2 & \beta_0 \end{pmatrix}$$

где $\beta_0 = r \left(\beta_2 - \frac{\zeta r}{(T^0)^{3/2}} \right)$, $\alpha_1 = \frac{r^3}{\zeta} \alpha_1^0$, $\beta_1 = \frac{r^2}{\zeta} \beta_1^0$, $\beta_2 = \frac{r^2}{\zeta} \beta_2^0$.

Очевидно, $\lambda_0 = -2(\gamma - 1)\eta(1 + Z)/(T^0)^{3/2}$ – собственное число J . Остальные собственные числа являются собственными числами J^0 . Прямое вычисление показывает:

$$\det(J^0 - \lambda I_4) = \frac{1}{(1 + r^2)^2} \{ [(\beta_1 - \lambda)(\beta_0 - \lambda(1 + r^2)) + r^2 - \alpha_1^2]^2 + [(\beta_1 - \lambda)\Lambda r^2 - 2\alpha_1 r]^2 \}$$

где I_4 – единичная матрица четвёртого порядка. Поэтому для нахождения собственных чисел J^0 имеем два квадратных уравнения:

$$\lambda^2(1 + r^2) - \lambda[\beta_0 + \beta_1(1 + r^2) \pm i\Lambda r^2] + \beta_1\beta_0 + r^2 - \alpha_1^2 \pm i(\beta_1\Lambda r^2 - 2\alpha_1 r) = 0 \quad (4.20)$$

Несложный анализ уравнения (4.20) показывает, что: а) каждое из уравнений (4.20) не имеет вещественных, сопряжённых или кратных корней, б) Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – корни (4.20) для верхнего знака, то $\bar{\lambda}_1 \neq \bar{\lambda}_2$ – корни (4.20) для нижнего знака, в) Все корни (4.20) имеют отрицательные вещественные части, г) Все собственные числа матрицы Якоби J однократные и имеют вид $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2\}$ и есть базис \mathbb{C}^5 , состоящий из собственных векторов матрицы Якоби.

В частности, единственная особая точка системы (4.19) – притягивающий, устойчивый многомерный узел и по теореме Гробмана-Хартмана [48] в некоторой окрестности особой точки топология интегральных кривых системы (4.19) и её линеаризации в особой точке совпадают. Таким образом,

качественная картина релаксации правильно описывается линеаризацией системы (4.19) в особой точке $(T^0, 0, 0, 0, 0)$, решения которой несложно получить в явном виде.

Рассмотрим линеаризованную систему

$$(\dot{T}, \dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{h}_1, \dot{h}_2)^* = J(T, u_1, u_2, h_1, h_2)^* \quad (4.21)$$

где * означает транспонирование, а точка – дифференцирование по t . Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – корни характеристического уравнения (4.20) для верхнего знака, $x_j + iy_j \neq 0$ – собственный вектор J , отвечающий значению λ_j , $j=1,2$. Тогда, как известно, линейная оболочка $V_j = [x_j, y_j]$ является двумерным инвариантом подпространства \mathbb{R}^5 для оператора J , причём если $\lambda_j = a_j + ib_j$, $j=1,2$, то

$$Jx_j = a_j x_j - b_j y_j, Jy_j = a_j y_j + b_j x_j, \quad j=1,2$$

Если $x_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$, то $V_0 = [x_0]$ – собственное подпространство, отвечающее значению λ_0 , а \mathbb{R}^5 распадается в прямую сумму $\mathbb{R}^5 = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$. В частности, $\{x_0, x_1, y_1, x_2, y_2\}$ – базис \mathbb{R}^5 , матрица оператора J в котором равна:

$$\text{diag} \left\{ 1, \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \right\}$$

Поэтому, если $(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$ – координаты вектора из \mathbb{R}^5 в базисе $\{x_0, x_1, y_1, x_2, y_2\}$, то линейная система (4.21) в этих координатах распадается на три независимые подсистемы:

$$\dot{z}_0 = \lambda_0 z_0, \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = a_1 z_1 + b_1 z_2 \\ \dot{z}_2 = -b_1 z_1 + a_1 z_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{z}_3 = a_2 z_3 + b_2 z_4 \\ \dot{z}_4 = -b_2 z_3 + a_2 z_4 \end{cases}$$

решение которых, очевидно, имеет вид:

$$\begin{aligned} z_0(t) &= D_0 e^{\lambda_0 t}, \quad (z_1(t), z_2(t)) = D_1 e^{a_1 t} (\cos(\varphi_1 - b_1 t), \sin(\varphi_1 - b_1 t)) \\ (z_3(t), z_4(t)) &= D_2 e^{a_2 t} (\cos(\varphi_2 - b_2 t), \sin(\varphi_2 - b_2 t)) \end{aligned} \quad (4.22)$$

где $D_0, D_1, D_2, \varphi_1, \varphi_2$ – произвольные вещественные константы. Выше отмечалось, что $\lambda_0, a_1, a_2 < 0$, поэтому из (4.22) следует, что проекция любого

решения линеаризованной системы (4.21) на двумерную плоскость V_j , $j=1,2$ есть спираль, наматывающаяся на точку 0 с угловой скоростью b_j и декрементом убывания расстояния от начала отсчёта $|a_j|$. Из (4.22) следует разложение

$$(u(t), h(t))^* = \sum_{j=1}^2 D_j e^{a_j t} (\cos(\varphi_j - b_j t) x_j + \sin(\varphi_j - b_j t) y_j)$$

В частности, декременты экспоненциального стремления к 0 величин $u(t)$, $h(t)$ равны $\min\{|a_1|, |a_2|\}$. Выпишем явные выражения для x_j , y_j , a_j , b_j .

Положим:

$$x_j = \left(0, \frac{r(\beta_1 - a_j) - \alpha_1 b_j}{(\beta_1 - a_j)^2 + b_j^2}, -\frac{r b_j + \alpha_1 (\beta_1 - a_j)}{(\beta_1 - a_j)^2 + b_j^2}, 0, 1 \right)$$

$$y_j = \left(0, \frac{r b_j + \alpha_1 (\beta_1 - a_j)}{(\beta_1 - a_j)^2 + b_j^2}, \frac{r(\beta_1 - a_j) - \alpha_1 b_j}{(\beta_1 - a_j)^2 + b_j^2}, -1, 0 \right)$$

Тогда легко проверить, что $x_j + i y_j$ – собственный вектор J для собственного значения $\lambda_j = a_j + i b_j$, $j=1,2$, причём $x_j \perp y_j$ и $\|x_j\| = \|y_j\| = \left(1 + \frac{\alpha_1^2 + r^2}{(\beta_1 - a_j)^2 + b_j^2} \right)^{1/2}$.

Решая квадратное уравнение (4.20) для верхнего знака и используя формулу для извлечения квадратного корня из комплексного числа, получим:

$$a_{1,2} = \frac{1}{2(1+r^2)} \left\{ \beta_0 + \beta_1(1+r^2) \pm \left[\frac{\sqrt{A^2 + B^2} + A}{2} \right]^{1/2} \right\}$$

$$b_{1,2} = \frac{1}{2(1+r^2)} \left\{ \Lambda r^2 \pm \operatorname{sgn} B \left[\frac{\sqrt{A^2 + B^2} - A}{2} \right]^{1/2} \right\}$$

где $A = [\beta_0 - \beta_1(1+r^2)]^2 - \Lambda^2 r^4 - 4(1+r^2)(r^2 - \alpha_1^2)$

$$B = 2[\Lambda r^2(\beta_0 + \beta_1(1+r^2)) - 2(1+r^2)(\beta_1 \Lambda r^2 - 2\alpha_1 r)]$$

Эти громоздкие формулы упрощаются в частных и предельных случаях.

При $r \gg 1$ (короткие волны) имеем асимптотику, считая $h_0 \neq 0$, $\mu_{\pm} \neq 0$:

$$a_{1,2} \sim \left(\frac{Z(\gamma-1)}{1+Z} \right)^{5/2} |h_0|^5 r^7 \frac{\lambda_{\Sigma}}{\lambda_{\pm}} \frac{1}{\zeta R_{\pm}} \quad (4.23)$$

$$b_{1,2} \sim \frac{1}{2} \left\{ \Lambda_{\pm} \pm \frac{\Lambda R^* - \Lambda R_{\Sigma} - 4R_*}{\lambda_{\Sigma}(\lambda_+^{-1}R_+^{-1} - \lambda_-^{-1}R_-^{-1})} \right\}$$

где $R^* = (\lambda_-/\lambda_+)R_+^{-1} + (\lambda_+/\lambda_-)R_-^{-1}$, $R_{\Sigma} = R_+^{-1} + R_-^{-1}$, $R_* = (\lambda_-/\lambda_+)^{1/2}R_+^{-1} + (\lambda_+/\lambda_-)^{1/2}R_-^{-1}$, причём верхние и нижние знаки в (4.23) соответствуют друг другу.

При $r \ll 1$ (длинные волны) имеем асимптотику:

$$a \sim -\frac{r^2 \zeta}{2A_0^{3/2}} [1 + R_{\Sigma} A_0^4], \quad A_0 = \frac{Z(\gamma-1)}{Z+1} \left[\frac{T_+^0}{Z(\gamma-1)} + \frac{T_-^0}{\gamma-1} + |h_0|^2 + |u_0|^2 \right]$$

$$b \sim \pm r$$

Формулы для a_j , b_j значительно упрощаются при $\mu_{\pm} = 0$ и в МГД-пределе [15].

4.8. Сравнение с линейной теорией

Пусть $\rho = \rho_0$, $U_x = 0$, $T_+ = T_- = T_0$, $H_{\perp} = 0$, $U_{\perp} = 0$, $E_{\perp} = 0$ – константное решение системы (4.4). Рассмотрим приближённое решение (4.4) вида:

$$\rho = \rho_0 + \rho e^{i(kx - \omega t)}, \quad U_x = U_x e^{i(kx - \omega t)}, \quad T_{\pm} = T_0 + T_{\pm} e^{i(kx - \omega t)}$$

$$H_{\perp} = H_{\perp} e^{i(kx - \omega t)}, \quad U_{\perp} = U_{\perp} e^{i(kx - \omega t)}, \quad E_{\perp} = E_{\perp} e^{i(kx - \omega t)} \quad (4.24)$$

где постоянные комплексные величины ρ , U_x , T_{\pm} , H_{\perp} , U_{\perp} , E_{\perp} в правых частях (4.24) (комплексные амплитуды) считаются малыми. Подставляя функции (4.24) в систему (4.4) и отбрасывая слагаемые выше первого порядка малости по комплексным амплитудам, получим линейную систему уравнений для нахождения комплексных амплитуд и дисперсионного соотношения между ω и k . В итоге получим

$$\rho = 0, \quad U_x = 0, \quad T_{\pm} = 0 \quad (4.25)$$

(соотношения между H_{\perp} , U_{\perp} , E_{\perp} более сложные, мы их не приводим), а комплексное ω ищется по k из квадратного дисперсионного уравнения

$$(1+r^2)\omega^2 + i\omega\kappa^2 \left\{ \mu_m + \frac{\mu_\Sigma}{\rho_0} + r^2 \frac{\lambda_\Sigma}{\rho_0} \left(\frac{\mu_+}{\lambda_+} + \frac{\mu_-}{\lambda_-} \right) - \frac{i\Lambda v_A c}{\omega_p} \right\} -$$

$$-\frac{\mu_\Sigma}{\rho_0} \kappa^4 \left\{ \mu_m + \frac{r^2}{\rho_0} \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \mu_+ + \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \mu_- \right) - \frac{i\Lambda v_A c}{\omega_p} \right\} + \frac{\kappa^2 c^2}{4\pi\rho_0} \left(\frac{iH_x}{c} + \frac{\mu_* \kappa^2}{\rho_0} \right)^2 = 0$$

В бездиссипативном случае это уравнение переходит в (4.8). Нетрудно проверить, что оба решения имеют отрицательные действительные части. Поэтому все параметры плазмы (4.24) затухают с одинаковыми скоростями. В частности, если $\omega = \omega_1 - i\omega_2$, $\omega_2 > 0$, то декремент затухания равен ω_2 и энергия магнитного поля $|H_\perp|^2 = |H_\perp|^2 e^{-2\omega_2 t}$ и кинетическая энергия $|U_\perp|^2 = |U_\perp|^2 e^{-2\omega_2 t}$ затухают одинаково. Это, однако, противоречит полученному результату. С другой стороны, из (4.25) следует, что релаксация температур не может быть исследована на базе линейной теории.

4.9. Постановка задачи о пространственном поглощении

Пусть плоская альфвеновская волна, бегущая против магнитного поля слева направо в области $x < 0$, набегает на границу $x = 0$ диссипативной плазмы, заполняющей полупространство $x > 0$. Дальнейшее распространение альфвеновской волны в области $x > 0$ сопряжено с её поглощением, которое и является предметом изучения. Значения параметров альфвеновской волны на границе $x = 0$ получаются из формул (4.5), (4.7), где надо положить $x = 0$, $C_2 = 0$, и считать $H_x < 0$:

$$U_\perp|_{x=0} = C_1 e^{i\omega_+ t}, H_\perp|_{x=0} = C_1 \frac{\sqrt{4\pi\rho}}{\kappa v_A} e^{i\omega_+ t}, U_x|_{x=0} = 0, T_\pm|_{x=0} = T_0$$

$$E_\perp|_{x=0} = \frac{iC_1}{1+r^2} \left(\frac{H_x}{c} + \Lambda \sqrt{\lambda_+ \lambda_-} \omega_+ \right) e^{i\omega_+ t}, j_\perp|_{x=0} = -\frac{\kappa c}{4\pi} H_\perp|_{x=0}$$
(4.26)

где $C_1 \in \mathbb{C}$ произвольное, ω_+ выражается через длину альфвеновской волны $\ell = 2\pi/\kappa$ и H_x по формуле (4.8).

В начальный момент в области $x > 0$ расположена однородная постоянная плазма:

$$U_{\perp}|_{t=0} = 0, U_x|_{t=0} = 0, T_{\pm}|_{t=0} = T_0, \rho|_{t=0} = \text{const}, H_{\perp}|_{t=0} = 0 \quad (4.27)$$

где константа для ρ такая же как и в области $x < 0$, откуда набегают альфвеновская волна. Замагниченность плазмы в области $x > 0$ совпадает с H_x . Ниже станет ясно, что поглощение альфвеновской волны диссипативной плазмой в области $x > 0$ происходит за время, значительно меньшее времени релаксации температур, поэтому в (4.27) можно было бы считать T_{\pm} различными.

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы (4.4) на полупрямой $x \geq 0$: найти функции $U_{\perp}(t, x)$, $U_x(t, x)$, $T_{\pm}(t, x)$, $\rho(t, x)$, $H_{\perp}(t, x)$, $E_{\perp}(t, x)$, удовлетворяющее для $x \geq 0$, $t \geq 0$ уравнениям системы (4.4), при $t = 0$ – начальным условиям (4.27) и в каждый момент времени $t \geq 0$ при $x = 0$ – граничным условиям (4.26), а при $x = +\infty$ – граничным условиям:

$$U_{\perp}|_{x=+\infty} = 0, U_x|_{x=+\infty} = 0, T_{\pm}|_{x=+\infty} = T_0, \rho|_{x=+\infty} = \text{const}, H_{\perp}|_{x=+\infty} = 0 \quad (4.28)$$

Тем самым предполагается неподвижной граница $x = 0$, на которую падает альфвеновская волна. Решение указанной начально-краевой задачи определяет процесс поглощения альфвеновской волны неподвижной и однородной фоновой плазмой в полупространстве $x > 0$.

Возьмём в качестве независимой переменной частоту $\omega = \omega_+$, временных осцилляций параметров плазмы на границе $x = 0$. Тогда из формулы (4.8):

$$\kappa(\omega) = \frac{\omega/v_A}{\left[1 + \Lambda \frac{c\omega}{\omega_p v_A} - \left(\frac{c\omega}{\omega_p v_A}\right)^2\right]^{1/2}}, \quad -\omega_c^- < \omega \leq 0$$

Обезразмерим поставленную задачу, полагая в качестве характерного масштаба напряжённости магнитного поля $H_0 = -H_x$, а в качестве характерных масштабов плотности, скорости, длины времени, температуры волны $\rho_0 = \rho$, $U_0 = v_A$, $L_0 = c/\omega_p$, $t_0 = (\omega_c^+ \omega_c^-)^{-1/2}$, $T_0 = v_A^2 \lambda_{\Sigma} e / (2k)$. Тогда выражения (4.26) в безразмерном виде дают при $x = 0$:

$$U_{\perp} = U_0 e^{i\omega t}, H_{\perp} = -U_0 \frac{\omega}{\kappa(\omega)} e^{i\omega t}, E_{\perp} = -iU_0(1 - \Lambda\omega - \omega^2), U_x = 0$$

$$j_{\perp} = U_0 \omega e^{i\omega t}, \kappa(\omega) = -\omega/[1 - \Lambda\omega - \omega^2]^{1/2}, T_{\pm} = T_0, -\sqrt{\frac{\lambda_{+}}{\lambda_{-}}} < \omega \leq 0$$
(4.29)

Система (4.4) в безразмерных переменных примет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho U_x = 0$$

$$\frac{\partial \rho U_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho U_x^2 + \rho \frac{T_+ + ZT_-}{Z} + \frac{|H|^2}{2} - \mu_{ef} \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho U_x U + H - \mu_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial x} - \mu_* \frac{\partial j}{\partial x \rho} \right) = 0$$
(4.30)

$$\frac{\partial T_{\pm}}{\partial t} + U_x \frac{\partial T_{\pm}}{\partial x} + T_{\pm}(\gamma - 1) \frac{\partial U_x}{\partial x} = 2Z_{\pm}(\gamma - 1) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi_{\pm} \frac{\partial T_{\pm}}{\partial x} \right) + \frac{m_{\mp}}{m_{\Sigma}} \frac{\zeta}{T_{\pm}^{3/2}} \left| \frac{\partial H}{\partial x} \right|^2 \pm \right.$$

$$\left. \pm \zeta \eta^0 \frac{T_- - T_+}{T_-^{3/2}} + \frac{\alpha_{\pm}}{\zeta} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \right)^2 + \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^2 + \frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}} \left| \frac{\partial j}{\partial x \rho} \right|^2 \pm 2 \sqrt{\frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}}} \text{Re} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \overline{\frac{\partial j}{\partial x \rho}} \right) \right] \right\}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + i \frac{\partial E}{\partial x} = 0, j = i \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$E - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\zeta}{T_-^{3/2}} j + iU - iU_x H - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[\Lambda H - \mu_* \frac{\partial U}{\partial x} - \mu_* \frac{\partial j}{\partial x \rho} \right]$$

где для простоты $U = U_{\perp}$, $H = H_{\perp}$, $E = E_{\perp}$, $j = j_{\perp}$, Re – вещественная часть, черта – комплексное сопряжение, число подобия ζ вычисляется по формуле

$$\zeta = 0.386 LZ^3 \frac{ce^3}{m_+^2} \frac{(4\pi\rho)^{5/2}}{H_x^4} \left(1 + Z \frac{m_-}{m_+} \right)^{-3/2}$$

$\mu_* = \alpha_1^0/\zeta$, $\mu^* = -\beta_2^0/\zeta$, $\mu_{\Sigma} = -\beta_1^0/\zeta$, $\mu_{ef} = \frac{4}{3}\mu_{\Sigma}$. Наконец, для $Z = 1$:

$$\chi_+ = \frac{1.437}{\zeta} T_+^{5/2} \left(\frac{m_+}{m_-} \right)^{1/2}, \chi_- = \frac{1.437}{\zeta} T_-^{5/2} \left(\frac{m_+}{m_-} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{0.006 m_+}{\zeta^2} \frac{|H|^2 + 1}{\rho^2} T_-^3 \right)^{-1}$$
(4.31)

Здесь $\alpha_1^0 = \alpha_2^+ \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^{1/2} - \alpha_2^- \left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-} \right)^{1/2}$, $\beta_1^0 = -(\alpha_2^+ + \alpha_2^-)$, $\beta_2^0 = \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \alpha_2^+ - \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \alpha_2^-$, $\alpha_2^\pm = \frac{T_\pm^{5/2}}{R_\pm}$.

Наконец, η^0 , R_\pm – универсальные константы:

$$\eta^0 = 1.46 \frac{m_-}{m_+} \left(1 + Z \frac{m_-}{m_+} \right), R_+ = 2.87 \left(\frac{m_-}{m_+} \right)^{1/2} Z^3 \left(1 + Z \frac{m_-}{m_+} \right)^{-1}, R_- = 5.313 \left(1 + Z \frac{m_-}{m_+} \right)^{-1}$$

Система (4.30) решается на полупрямой $[0, +\infty]$ с граничными условиями (4.29) при $x=0$ и $U_x=0$, $U=0$, $\rho=1$, $E=0$, $j=0$, $H=0$, $T_\pm=T_0$ – при $x=+\infty$. В начальный момент $\rho=1$, $U_x=0$, $U=0$, $H=0$, $T_\pm=T_0$.

4.10. Численный метод пространственного поглощения

Рассмотрим неявную разностную схему численного решения начально-краевой задачи для системы (4.30). Счётная область – отрезок $[0, L]$, в котором выбраны две сетки узлов $x_k = \kappa h$, $0 \leq \kappa \leq N$, $x_{\kappa+1/2} = (\kappa + 1/2)h$, $0 \leq \kappa < N$, $h = L/N$. В целых узлах аппроксимируются величины j , U , E , $Q = U\rho$, в дробных – ρ , H , T_\pm . Переход с нижнего на верхний слой T_\pm^0 , ρ^0 , Q^0 , U^0 , $H^0 \rightarrow T_\pm^1$, ρ^1 , Q^1 , U^1 , H^1 за время τ , $t \rightarrow t + \tau$, реализуется неявной разностной схемой, где для простоты считаем $Z = 1$:

$$1) \quad \frac{\rho_{\kappa+1/2}^1 - \rho_{\kappa+1/2}^0}{\tau} + \frac{Q_{\kappa+1}^1 - Q_\kappa^1}{h} = 0, \quad 0 \leq \kappa < N$$

$$2) \quad \frac{Q_\kappa^1 - Q_\kappa^0}{\tau} + L(Q^1)_\kappa - \frac{1}{h} \left[\mu_{ef, \kappa+1/2}^0 \frac{Q_{\kappa+1}^1 / \rho_{\kappa+1}^0 - Q_\kappa^1 / \rho_\kappa^0}{h} - \mu_{ef, \kappa-1/2}^0 \frac{Q_\kappa^1 / \rho_\kappa^0 - Q_{\kappa-1}^1 / \rho_{\kappa-1}^0}{h} \right] + \left(\rho_{\kappa+1/2}^0 \frac{T_{+, \kappa+1/2}^0 + T_{-, \kappa+1/2}^0}{2} - \rho_{\kappa-1/2}^0 \frac{T_{+, \kappa-1/2}^0 + T_{-, \kappa-1/2}^0}{2} \right) \frac{1}{h} + \frac{1}{2h} \left(|H_{\kappa+1/2}^0|^2 - |H_{\kappa-1/2}^0|^2 \right) = 0$$

$$0 < \kappa < N, \quad Q_0^1 = Q_N^1 = 0$$

$$3) \quad \frac{\rho_\kappa^1 U_\kappa^1 - \rho_\kappa^0 U_\kappa^0}{\tau} + L(U^1)_\kappa - \frac{1}{h} \left[\mu_{\Sigma, \kappa+1/2}^0 \frac{U_{\kappa+1}^1 - U_\kappa^1}{h} - \mu_{\Sigma, \kappa-1/2}^0 \frac{U_\kappa^1 - U_{\kappa-1}^1}{h} \right] +$$

$$+ \frac{H_{\kappa+1/2}^0 - H_{\kappa-1/2}^0}{h} - \frac{1}{h} \left(\mu_{*,\kappa+1/2}^0 \left(\frac{j_{\kappa+1}^0}{\rho_{\kappa+1}^0} - \frac{j_{\kappa}^0}{\rho_{\kappa}^0} \right) / h - \mu_{*,\kappa-1/2}^0 \left(\frac{j_{\kappa}^0}{\rho_{\kappa}^0} - \frac{j_{\kappa-1}^0}{\rho_{\kappa-1}^0} \right) / h \right) = 0$$

$$0 < \kappa < N, \quad U_N^1 = j_N^0 = 0, U_0^1 = U_0 e^{i\omega(t+\tau)}, j_0^0 = U_0 \omega e^{i\omega t}$$

$$4) \quad \frac{H_{\kappa+1/2}^1 - H_{\kappa+1/2}^0}{\tau} + i \frac{E_{\kappa+1} - E_{\kappa}}{h} = 0, \quad 0 \leq \kappa < N$$

$$E_{\kappa} - \frac{1}{\rho_{\kappa}} \frac{E_{\kappa+1} - 2E_{\kappa} + E_{\kappa-1}}{h^2} = \frac{i\zeta}{(T_{-, \kappa}^0)^{3/2}} \frac{H_{\kappa+1/2}^1 - H_{\kappa-1/2}^1}{h} - iU_{\kappa}^1 - i \frac{Q_{\kappa}^1}{\rho_{\kappa}^1} \frac{H_{\kappa+1/2}^0 + H_{\kappa-1/2}^0}{2}$$

$$- \frac{\Lambda}{\rho_{\kappa}^1} \frac{H_{\kappa+1/2}^1 - H_{\kappa-1/2}^1}{h} - \frac{1}{\rho_{\kappa}^1 h} \left[\mu_{*,\kappa+1/2}^0 \frac{U_{\kappa+1}^1 - U_{\kappa}^1}{h} - \mu_{*,\kappa-1/2}^0 \frac{U_{\kappa}^1 - U_{\kappa-1}^1}{h} \right] -$$

$$- \frac{1}{\rho_{\kappa}^1 h} \left[\mu_{\kappa+1/2}^{*0} \left(\frac{j_{\kappa+1}^0}{\rho_{\kappa+1}^0} - \frac{j_{\kappa}^0}{\rho_{\kappa}^0} \right) / h - \mu_{\kappa-1/2}^{*0} \left(\frac{j_{\kappa}^0}{\rho_{\kappa}^0} - \frac{j_{\kappa-1}^0}{\rho_{\kappa-1}^0} \right) / h \right]$$

$$0 < \kappa < N, \quad E_N = 0, E_0 = -iU_0(1 - \Lambda\omega - \omega^2)e^{i\omega t}$$

$$5) \quad \frac{T_{\pm, \kappa+1/2}^1 - T_{\pm, \kappa+1/2}^0}{\tau} + L(T_{\pm}^1)_{\kappa+1/2} + T_{\pm, \kappa+1/2}^0 (\gamma - 1) \left(\frac{Q_{\kappa+1}^1}{\rho_{\kappa+1}^1} - \frac{Q_{\kappa}^1}{\rho_{\kappa}^1} \right) / h =$$

$$= 2(\gamma - 1) \left\{ \frac{1}{h} \left[\chi_{\kappa+1}^{\pm} \frac{T_{\pm, \kappa+3/2}^1 - T_{\pm, \kappa+1/2}^1}{h} - \chi_{\kappa}^{\pm} \frac{T_{\pm, \kappa+1/2}^1 - T_{\pm, \kappa-1/2}^1}{h} \right] + \zeta \eta^0 \frac{T_{-, \kappa+1/2}^0 - T_{+, \kappa+1/2}^0}{(T_{-, \kappa+1/2}^0)^{3/2}} + \right.$$

$$+ \frac{m_{\mp}}{m_{\Sigma}} \frac{\zeta}{(T_{-, \kappa+1/2}^0)^{3/2}} \left| \frac{H_{\kappa+1}^1 - H_{\kappa}^1}{h} \right|^2 + \frac{(T_{\pm, \kappa+1/2}^0)^{5/2}}{\zeta R_{\pm}} \left[\frac{4}{3} \left(\left(\frac{Q_{\kappa+1}^1}{\rho_{\kappa+1}^1} - \frac{j_{\kappa}^1}{\rho_{\kappa}^1} \right) / h \right)^2 + \left| \frac{U_{\kappa+1}^1 - U_{\kappa}^1}{h} \right|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}} \left| \left(\frac{j_{\kappa+1}^1}{\rho_{\kappa+1}^1} - \frac{j_{\kappa}^1}{\rho_{\kappa}^1} \right) / h \right|^2 \pm 2 \sqrt{\lambda_{\mp}} \operatorname{Re} \left(\frac{U_{\kappa+1}^1 - U_{\kappa}^1}{h} \cdot \left(\frac{j_{\kappa+1}^1}{\rho_{\kappa+1}^1} - \frac{j_{\kappa}^1}{\rho_{\kappa}^1} \right) / h \right) \right]$$

$$0 \leq \kappa < N, \quad T_{\pm, -1/2}^1 = T_0, T_{\pm, N+1/2}^1 = T_0$$

Шаг τ выбирается из условия устойчивости:

$$\tau = \frac{kh}{U_{\varphi}}, \quad U_{\varphi} = \max \left(\left| \frac{Q_{\kappa}^0}{\rho_{\kappa}^0} \right| + \sqrt{\frac{|H_{\kappa}^0|^2}{\rho_{\kappa}^0} + T_{+, \kappa}^0 + T_{-, \kappa}^0} \right)$$

где $0 < k < 1$ – коэффициент запаса, подбираемый экспериментально. Порядок вычислений по схеме 1)-5) следующий. Сначала из 2) прогонкой определяется величина Q_{κ}^1 , $0 \leq \kappa \leq N$, затем из 1) по явным формулам находятся $\rho_{\kappa+1/2}^1$,

$0 \leq \kappa < N$ и далее из 3) прогонкой ищутся величины U_{κ}^1 , $0 \leq \kappa \leq N$. После этого по формулам 4) находятся $H_{\kappa+1/2}^1$, $0 \leq \kappa < N$, U_{κ}^1 , $0 \leq \kappa \leq N$. Для этого посредством первого равенства 4) исключается из числа неизвестных $H_{\kappa+1/2}^1 = H_{\kappa+1/2}^0 - \frac{i\tau}{h}(E_{\kappa+1} - E_{\kappa})$, $0 \leq \kappa < N$ и полученные выражения подставляются во второе равенство 4), откуда величины E_{κ} , $0 \leq \kappa \leq N$ ищутся прогонкой, после чего восстанавливаются значения $H_{\kappa+1/2}^1$, $0 \leq \kappa < N$. На завершающем этапе по формулам 5) прогонкой находятся $T_{\mp\kappa+1/2}^1$, $0 \leq \kappa < N$.

Выше $L(Q^1)_{\kappa}$, $L(U^1)_{\kappa}$, $L(T_{\pm}^1)_{\kappa+1/2}$ – это известные аппроксимации конвективных членов типа “разности против потока” [38]:

$$L(Q^1)_{\kappa} = \frac{1}{2h} \left\{ Q_{\kappa-1}^1 \left(|V_{\kappa-1/2}| + V_{\kappa-1/2} \right) + Q_{\kappa}^1 \left(|V_{\kappa-1/2}| + |V_{\kappa+1/2}| + V_{\kappa+1/2} - V_{\kappa-1/2} \right) - Q_{\kappa+1}^1 \left(|V_{\kappa+1/2}| - V_{\kappa+1/2} \right) \right\}, \quad 0 < \kappa < N$$

$$V_{\kappa+1/2} = \frac{Q_{\kappa}^0 + Q_{\kappa+1}^0}{2\rho_{\kappa+1/2}^0}, \quad V_{\kappa-1/2} = \frac{Q_{\kappa}^0 + Q_{\kappa-1}^0}{2\rho_{\kappa-1/2}^0}$$

Аналогично вычисляется $L(U^1)_{\kappa}$, но $V_{\kappa+1/2} = (Q_{\kappa}^0 + Q_{\kappa+1}^0)/2$, $V_{\kappa-1/2} = (Q_{\kappa}^0 + Q_{\kappa-1}^0)/2$.

Наконец,

$$L(T^1)_{\kappa+1/2} = \frac{V_{\kappa} + |V_{\kappa}|}{2} \frac{T_{\kappa+1/2}^1 - T_{\kappa-1/2}^1}{h} + \frac{V_{\kappa} - |V_{\kappa}|}{2} \frac{T_{\kappa+3/2}^1 - T_{\kappa+1/2}^1}{h}$$

где $V_{\kappa} = \frac{1}{2} \left(Q_{\kappa+1}^1 / \rho_{\kappa+1}^1 + Q_{\kappa}^1 / \rho_{\kappa}^1 \right)$ и использованы естественные интерполяции для подсчёта величин T_{κ}^{\pm} , ρ_{κ} , χ_{κ}^{\pm} (вычисляемые на нулевом слое), $\mu_{ef, \kappa+1/2}$, $\mu_{\Sigma, \kappa+1/2}$ и т.д.

4.11. Результаты расчётов

Рассмотрим процессы поглощения электромагнитного поля и кинетической энергии альфвеновской волны диссипативной плазмой и преобразования магнитной и кинетической энергий в тепловую. Для числа

подобия $\zeta = 0.1$, граничного условия $U_0 = 0.1$ и начального условия для температур $T_0 = 0.1$ ниже приведены зависимости от времени, пространственной координаты и частоты ω различных параметров поглощения волны.

Сначала рассмотрим варианты с нулевой электронной вязкостью $\mu_e = \mu_- = 0$. Электромагнитное поле и поперечная скорость затухают в диссипативной плазме синусоидальным образом (Рис.4.3) на глубину $\sim 35L_0$ за безразмерное время 0.7. Разогрев электронов и ионов зависит от теплопроводности электронов. В случае более высокой теплопроводности χ_- , вычисляемой по упрощённой формуле $\chi_- = A(kT_-)^{5/2}$, электроны прогреваются на примерно в 2 раза большее расстояние, чем глубина проникновения электромагнитного поля (Рис.4.4). В случае более низкой теплопроводности χ_- , вычисляемой по формуле (4.3), глубины прогрева электронов и проникновения электромагнитного поля совпадают (Рис.4.5); при этом электроны прогреваются в 3-4 раза сильнее, чем в случае более высокой теплопроводности. Прогрев ионов примерно одинаков для различных вариантов теплопроводностей и глубина прогрева примерно в 2 раза меньше чем для электронов. Как показали расчёты, картина затухания электромагнитных полей и поперечных скоростей практически не зависят от теплопроводности, кроме того плотность плазмы меняется незначительно, поэтому графики для импульса $Q = \rho U_x$ практически совпадают с графиками U_x и приведены на Рис.4.6.

Исследование зависимости поглощения альфвеновской волны от частоты ω показало, что наиболее интенсивно поглощение происходит на частоте, равной примерно половине электронной циклотронной частоте, в безразмерных единицах это соответствует $\omega \cong -30$. Для этой частоты расчёты демонстрируют максимальный прогрев электронов и ионов и максимальные амплитуды электромагнитных полей и поперечных скоростей. При малых частотах и

частотах, близких к электронной циклотронной частоте прогрев незначительный, а электромагнитное поле практически не проникает в плазму (Рис.4.7).

Учёт электронной вязкости показывает, что теоретическое значение $\mu_e = \mu_-$, вычисляемое по формуле (4.3), вероятно сильно завышено. Попытки проведения расчётов поглощения с теоретической электронной вязкостью привели к катастрофически быстрому аномальному росту температур и остальных параметров поглощенной волны. Уменьшение теоретической электронной вязкости в 1000 раз дало осмысленную картину параметров поглощения (Рис.4.8). Произошло увеличение, примерно на 5%, глубины прогрева электронов и, примерно на 20%, абсолютной величины электронной температуры, прогрев ионов изменился незначительно.

Полученные результаты позволяют оценить скорость проникновения альфвеновской волны в диссипативную плазму, которая по результатам Рис.4.3 в размерных единицах равна:

$$\frac{35L_0}{0.7(\omega_c^+ \omega_c^-)^{1/2}} = 50v_A$$

где $v_A = H_x(4\pi\rho)^{-1/2}$ – альфвеновская скорость.

Как следует из расчётов, процесс поглощения альфвеновской волны происходит на длинах $\sim L_0$, поэтому МГД-теория, применимая на длинах $\gg L_0$, для исследования этого процесса в принципе не пригодна (мы опускаем сравнение с соответствующим расчётом по МГД-теории).

С другой стороны, полученные результаты не укладываются в линейную теорию поглощения. Во-первых, детальный анализ амплитуд на Рис.4.3 показывает, что они затухают не по экспоненте, а более сложным образом. Во-вторых, согласно линейной теории, термодинамические параметры в затухающей альфвеновской волне не возмущаются [8,30], что противоречит электронному и ионному разогреву поглощённой волны, рассмотренному выше.

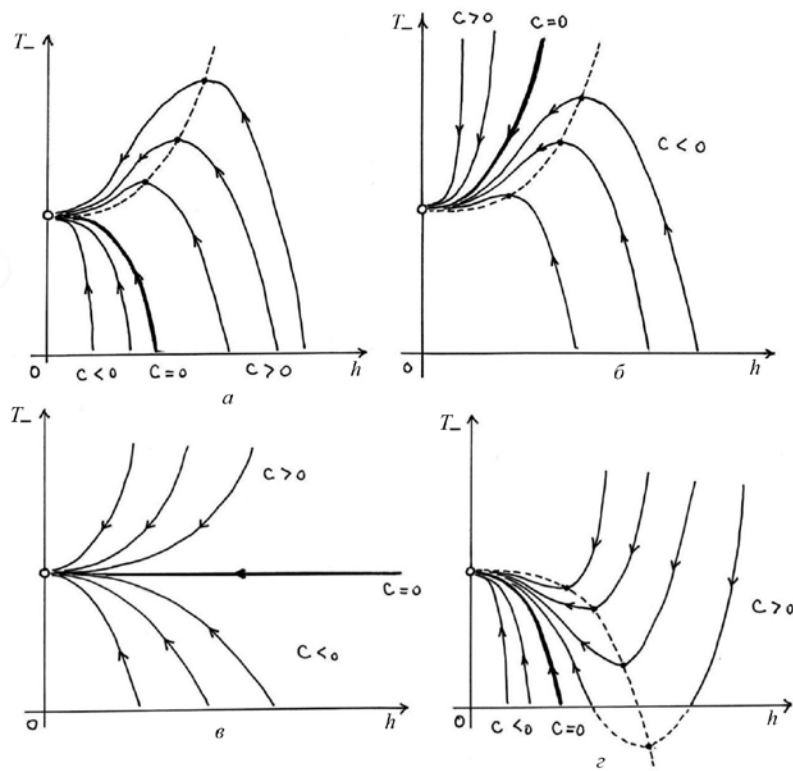


Рис.4.1. Интегральные кривые для коротких волн (а) ($\gamma_* \leq 2\alpha_0, \alpha_0 > 0$); средних волн (б) ($\gamma_* > 2\alpha_0, \alpha_* > 0$); средних волн (в) ($\gamma_* > 2\alpha_0, \alpha_* = 0$); длинных волн (г) ($\gamma_* > 2\alpha_0, \alpha_* < 0$)

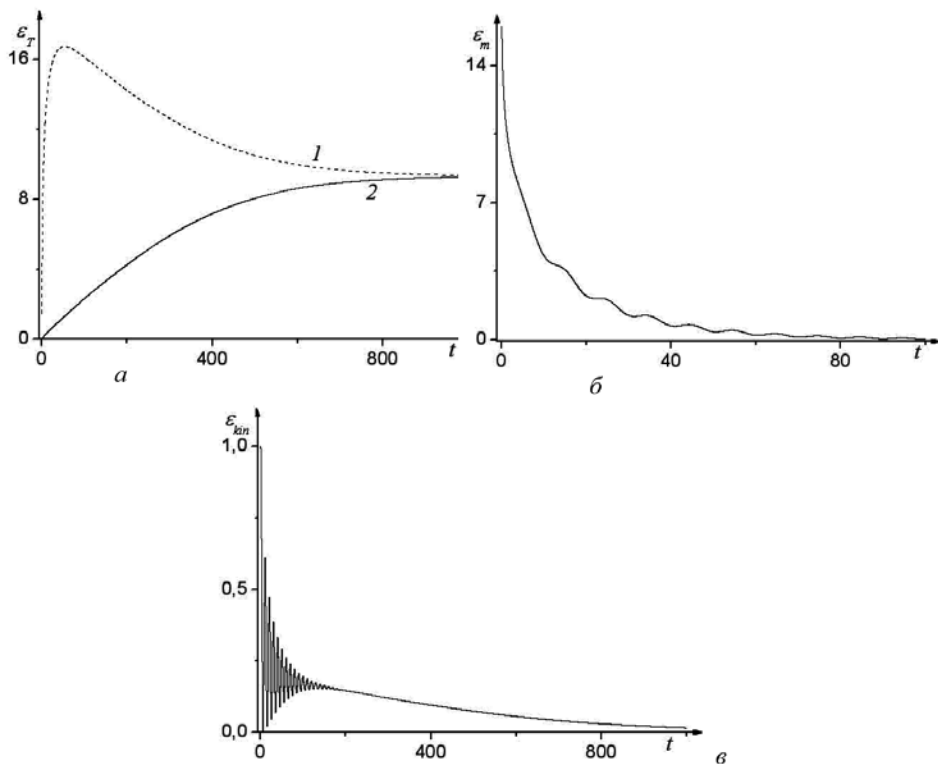


Рис.4.2. Зависимость от времени тепловой энергии электронов (1) и ионов (2) в альфвеновской волне (а), магнитной энергии альфвеновской волны (б) и кинетической энергии альфвеновской волны (в)

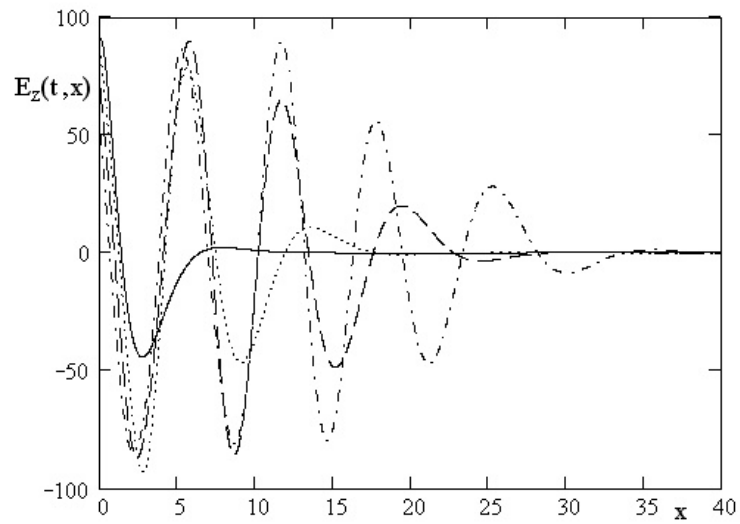


Рис.4.3. График напряжённости электрического поля в различные моменты времени: ”—”
 $t=0.1$; “...” $t=0.3$; “---” $t=0.5$; “-.-” $t=0.7$

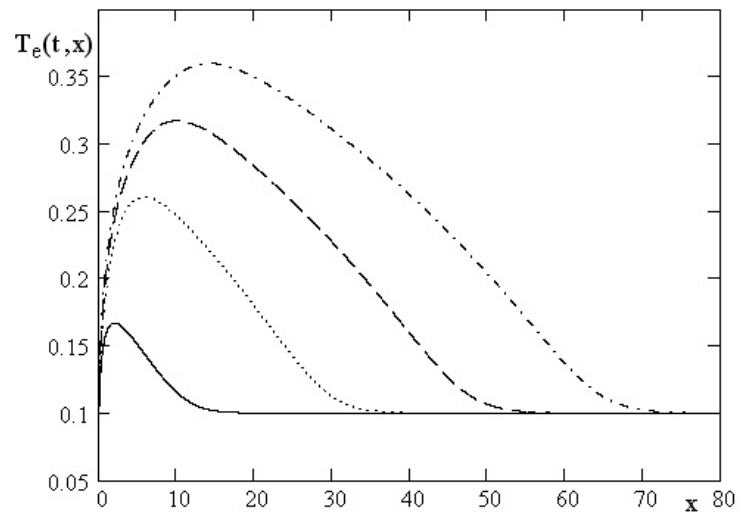


Рис.4.4. График температуры электронов в различные моменты времени (случай большей
 теплопроводности): ”—” $t=0.1$; “...” $t=0.3$; “---” $t=0.5$; “-.-” $t=0.7$

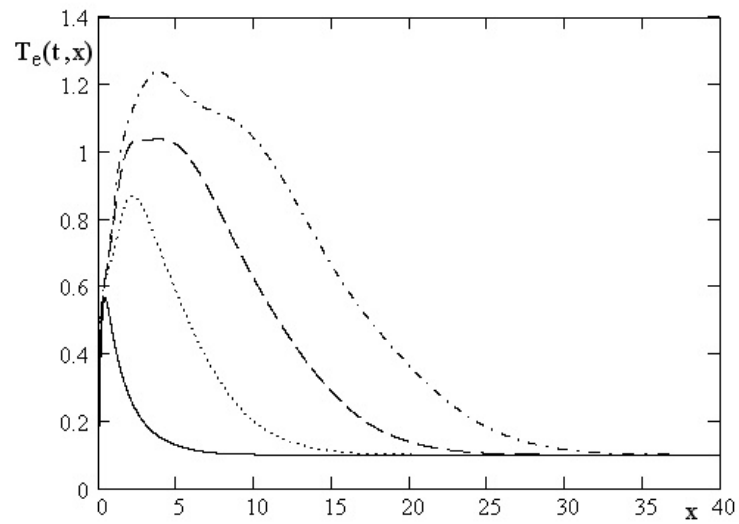


Рис.4.5. График температуры электронов в различные моменты времени (случай меньшей теплопроводности): "—" $t=0.1$; "... " $t=0.3$; "---" $t=0.5$; "-.-" $t=0.7$

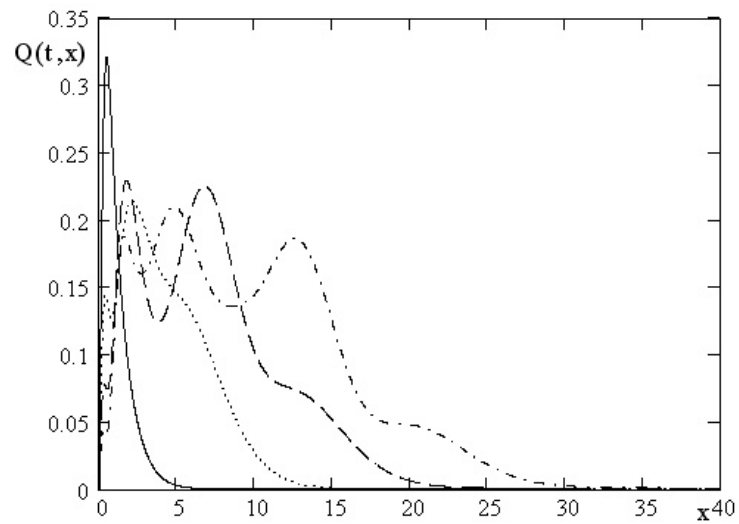


Рис.4.6. График импульса в различные моменты времени: "—" $t=0.1$; "... " $t=0.3$; "---" $t=0.5$; "-.-" $t=0.7$

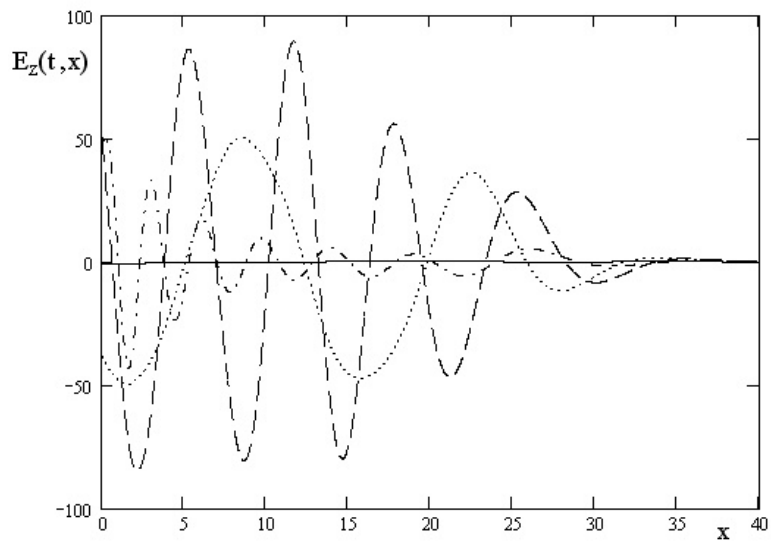


Рис.4.7. График напряжённости электрического поля при $t=0.7$ для разных частот ω : ”—” $\omega = -0.1$; “...” $\omega = -10$; “---“ $\omega = -30$; “-.-” $\omega = -50$

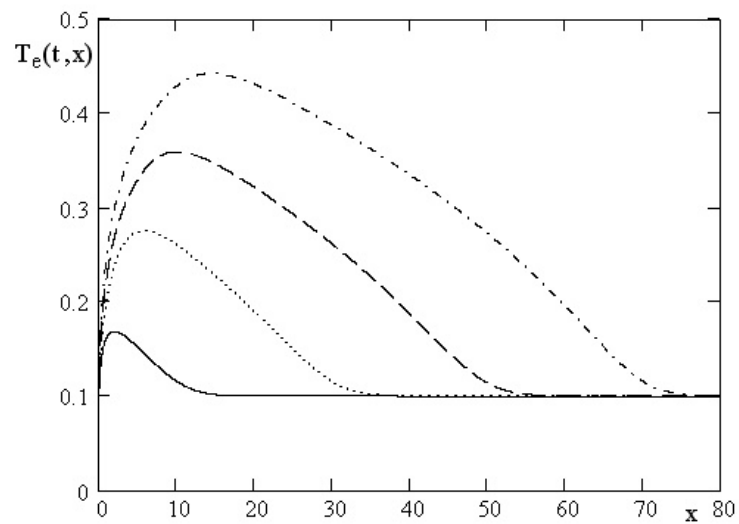


Рис.4.8. График температуры электронов в различные моменты времени: ”—” $t=0.1$; “...” $t=0.3$; “---“ $t=0.5$; “-.-” $t=0.7$

Заключение

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

Проведённые численные и аналитические исследования применительно к различным задачам динамики плазмы в диссертации показывают важность учёта инерции электронов. Выявлен ряд новых конечных эффектов, обусловленных двухжидкостной природой плазмы и отсутствующих в МГД-теории. К ним относятся:

1. В задаче о возбуждении несжимаемой плазмы в круглой трубе периодическим током – скинирование параметров плазмы при больших частотах тока и конечное отличие профилей плотности тока в МГД и ЭМГД
2. В задаче об установившемся течении несжимаемой плазмы в плоском канале – гидродинамический “эффект Холла”, двухпараметричность течения, выражающая значительное различие результатов ЭМГД- и МГД-теорий плоского канала для газовой плазмы.
3. В задаче об обтекании несжимаемой плазмой замагниченной поверхности – значительное увеличение по сравнению с МГД-теорией толщины погранслоя.
4. Наличие уединённых волн в двухжидкостной плазме и корпускулярный характер их взаимодействия с сохранением после взаимодействия своих амплитуд, скоростей и других характеристик.
5. Наличие в двухжидкостной плазме альфвеновских волн и их поглощение диссипативной плазмой на длинах порядка скиновых.

В диссертации разработаны математические и численные модели взаимодействия уединённых волн и временного и пространственного поглощения альфвеновских волн с использованием созданных методик. Определены основные закономерности затухания альфвеновских волн в диссипативной плазме.

Список литературы

1. Альфвен Х, Фельтхаммар К.-Г. Космическая электродинамика – М.: Мир, 1967. 260 с.
2. Альфвен Х. Космическая электродинамика. – М.: ИЛ, 1952.
3. Андрианов А.М., Базилевская О.А., Прохоров Ю.Г. Исследование импульсных разрядов в газах при силе тока 500 кА // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 2. С. 185-211.
4. Арнольд В.И., Обыкновенные дифференциальные уравнения // Ижевск: ИРТ. 2000.
5. Арцимович Л.А. Управляемые термоядерные реакции М.: Физматгиз, 1961. 468 с.
6. Бабыкин М.В. // Итоги науки и техники. Сер. Физика плазмы / Под ред. В.Ф. Шафранова. М.: Изд-во ВИНТИ, 1981. Т.1. Ч.2.
7. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183-272.
8. Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной гидродинамики – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009, 200 с.
9. Вшивков В.А., Дудникова Г.И., Захаров Ю.П., Оришич А.М. Генерация плазменных возмущений при бесстолкновительном взаимодействии сверхальфвеновских потоков. Препринт №20-87. – Новосибирск. Институт теоретической и прикладной механики СО АН СССР. – 1987. – 49 с.
10. Гавриков М.Б. Основные уравнения двухжидкостной магнитной гидродинамики. Часть I. Препринт №59. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2006. – 28 с.
11. Гавриков М.Б., Аперидические колебания холодной плазмы, Препринт №33. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1991, 28 с.
12. Гавриков М.Б., Линейные волны в нерелятивистской магнитной гидродинамике. Препринт №199. М.: ИПМ м.В. Келдыша АН СССР, 1988.

28 с.

13. Гавриков М.Б., Михайлова М.С. Установившиеся течения двухкомпонентной вязкой плазмы в цилиндрической трубе и цилиндрическом слое. Препринт №7. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2004. 23 с.
14. Гавриков М.Б., Сорокин Р.В. О вынужденных колебаниях плазмы в круглой цилиндрической трубе. Препринт №76. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2005. 19 с.
15. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Нелинейное поглощение альфвеновской волны в диссипативной плазме. Препринт № 68. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. 2011. 28 с.
16. Громека И.С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах // Учён. зап. Казан. ун-та, 1882. Соб. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1952. С. 149-171.
17. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы – М.: Наука, 1993, 336 с.
18. Захаров В.Е., Коллапс ленгмюровских волн // ЖЭТФ, 1972. Т. 62. С. 1745.
19. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л. П., Теория солитонов. Метод обратной задачи / Под ред. С.П. Новикова, М.: Наука, 1980.
20. Имшенник В.С. // Астрономический журнал, 1961, 38, с.652.
21. Имшенник В.С. Негидродинамическая модель плазменного фокуса // Двумерные численные модели плазмы / Под ред. К.В. Брушлинского. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. – 1979. – С. 120-149.
22. Имшенник В.С., Боброва Н.А. Динамика столкновительной плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1997. 319 с.
23. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме, М., Наука, 1988.
24. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И., Об устойчивости уединённых волн в слабодиспергирующих средах // Докл. АН СССР, 1970, Т192, С. 753.

25. Кингсеп А.С., Чукбар К.В., Яньков В.В. Электронная магнитная гидродинамика // Вопросы теории плазмы / Под ред. Б.Б. Кадомцева. – М.: Энергоатомиздат, 1987, Вып.16, с.209-250.
26. Короп Е.Д., Мейерович Б.Э., Сидельников Ю.В., Сухоруков С.Т. // Успехи физич. Наук. 1979. Т.129. С. 87-112.
27. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005. 328 с.
28. Ландау Л.Д. // ЖЭТФ, 1937, №7, с.203.
29. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
30. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.8. Электродинамика сплошных сред – М.: “Наука”, 1982. 623 с.
31. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.: Гостехиздат, 1953. 380 с.
32. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Т.10. Физическая кинетика. М.: Физматлит, 1979, 527 с.
33. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
34. Лурье А.И. Операционное исчисление в приложениях к задачам механики. М.;Л.: ОНТИ, 1938. 224с.
35. Лямбоси П. Вынужденные колебания несжимаемой вязкой жидкости в жёсткой горизонтальной трубе // Механика. Сб. перев. и обзоров иностр. период. лит., 1953. Вып. 3. С. 67-77.
36. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику – М.: Физматлит, 2008, 616 с.
37. Морозов А.Н., Соловьёв Л.С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле. // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1974. Вып. 8. С. 3-87.
38. Роуч П., Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
39. Рыскин Н.М. Уединенные волны пространственного заряда // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 84-92.
40. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: Наука, 2000, с.159.

41. Солитоны в действии / Сб. под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта, М.: Мир, 1981
42. Соловьев Л.С. К релятивистской гидродинамике. Препринт ИАЭ №3362/1. М.: 1980. В собр. трудов. М.: Наука, 2001, Т.2. С. 7-34.
43. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М.: Мир, 1965. 212 с.
44. Тахтаджян Л.А., Фадеев Л.Д., Гамильтонов подход в теории солитонов. / М.: Наука. Гл. ред. Физматлит., 1986.
45. Трубецков Д.И. Уединенные волны в электронном потоке и юбилей одного уравнения. Соросовский образовательный журнал, т.6, N 4, 2000, с. 103.
46. Филиппов Н.В. // Письма в ЖЭТФ. 1980. Т.31. С. 131-135.
47. Филиппов Н.В. Обзор экспериментальных работ, выполняемых в ИАЭ им. И.В. Курчатова, по исследованию плазменного фокуса // Физика плазмы. 1983. Т. 9 №1. С. 25-44.
48. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
49. Чернов А.А., Яньков В.В. // Физика плазмы. 1982. Т.8. С. 931-940.
50. Чэпмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. – М.: ИЛ, 1960.
51. Adlam J.H., Allen J.E. // Phil. Mag. 1958, V. 3, P. 448.
52. H. Ikezi, R.J. Taylor, R.D. Baker. Formation and interaction of ion-acoustic solitons // Phys. Rev. Lett. 1970, V. 25, No. 1. P. 11-14.
53. Helmholtz H. Uber electriche Grenzschichten // Ann. Phys. Chem., 1879. Bd. 7. S. 337-382.
54. Hoffman F., Teller E. Magnetohydrodynamic shocks // Phys. Rev., 1950. V. 80. N4. P. 692-703.
55. Mio K., Ogino T., Minamy K., Takeda S., Modified nonlinear Scrodinger equation for Alfven waves propagating along the magnetic field in cold plasma // J. Phys. Soc. Japan, 1976, V. 41, P. 265.
56. Potter D.E., Haines M.G., 4th Int. Conf. Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fus. Res. (Pr. C. Madison, 1971), 1, IAEA, Viena, 611, 1971.

- 57.Saffman P.G., Propagating of a solitary wave along a magnetic field in a cold collision-free plasma // J. Fluid Mech., 1961, V. 11, P. 16.
- 58.Scott W. McIntosh, Bart Pe Pontien, Marts Carlsson, Viggo Hansteen, Paul Boerner & Marsel Goossens. Alfvénic waves with sufficient energy to power the quiet solar corona and fast solar wind // Nature, 2011, v.475, p.478-480.
- 59.Szymanski P. Quelques solutions exactes des equations de l'hydrodynamique de fluide visqueux dans un tube cylindrique // J. Math., 1932. V. 11. P. 67-107.