

Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Российской академии наук»

На правах рукописи

Цветкова Валерия Олеговна

Динамическая адаптация подвижной неструктурированной сетки для моделирования течений газа вблизи движущихся тел произвольной конфигурации

Специальность 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
главный научный сотрудник
Козубская Татьяна Константиновна

Научный консультант:
кандидат физико-математических наук,
научный сотрудник ФИЦ ИУ РАН
Кудрявцева Людмила Николаевна

Москва – 2023

Оглавление	
Введение.....	3
Глава 1 Методика моделирования аэродинамики подвижных тел сложной формы на неструктурированных сетках	24
1.1 Математическая модель для задач внешнего обтекания.....	24
1.2 Описание обтекаемого тела методом погруженных границ в односвязной области.....	26
1.3 Конечно-объемный численный метод повышенной точности на неструктурированных сетках	27
1.4 Проблема обеспечения требуемого сеточного разрешения в приграничной области	28
1.5 Модель для описания тела.....	28
Глава 2 Метод анизотропной адаптации подвижной неструктурированной сетки к поверхности тел произвольной формы	30
2.1 Вариационный подход к сеточной адаптации.....	30
2.2 Построение управляющей метрики	32
2.3 Интерполяция сеточной адаптации на временных слоях для повышения эффективности.....	37
Глава 3 Гибридная геометрическая модель тела	40
3.1 Задачи геометрической модели.....	40
3.2 Фоновая декартовая сетка структуры восьмеричного дерева для хранения геометрических параметров тела.....	40
3.3 Гибридная структура модели	43
3.4 Подготовка геометрической модели тела перед началом расчета	43
3.5 Задание полей параметров поверхности тела.....	45
3.6 Метрическая интерполяция	47
Глава 4 Программный модуль динамической адаптации	48
4.1 Программный модуль в составе комплекса NOISEtte	48
4.2 Модуль предварительной подготовки геометрии	51
4.3 Параллельная реализация	55
4.4 Исследование эффективности вычислительного алгоритма	56
Глава 5 Тестирование, верификация и валидация	59
5.1 Задача обтекания двумерного цилиндра, движущегося под действием внешней гармонической силы	59

5.2	Задача обтекания сферы, движущейся под действием внешней гармонической силы	62
5.3	Тестирование анизотропной адаптации на эллипсоиде	65
5.4	Тестирование адаптации на геометрии фюзеляжа вертолета	67
Глава 6	Численное моделирование тонального шума изолированного винта квадрокоптера	72
6.1	Постановка задачи	72
6.2	Двумерная постановка	75
6.2.1	Сеточная адаптация к поверхности тела	75
6.2.2	Численные результаты.....	83
6.3	Трёхмерная постановка.....	90
6.3.1	Сеточная адаптация к поверхности тела	90
6.3.2	Численные результаты.....	96
	Заключение	103
	Публикации автора по теме диссертации	105
	Список литературы	107

Введение

Актуальность темы исследования

Понимание и предсказание турбулентных течений востребовано в многих отраслях промышленности и является объектом постоянного исследовательского интереса. Численное воспроизведение турбулентных течений играет ключевое значение как в медицине и биологии, например, в вопросах моделирования работы внутренних органов человека, так и при решении задач авиационной промышленности, например, с целью оптимизации конфигурации летательного аппарата и обеспечения его лучших аэродинамических и акустических характеристик.

Задача обтекания подвижных тел имеет исключительно важное значение для современной вычислительной аэродинамики. Особый интерес сегодня представляют задачи, где присутствуют один или несколько подвижных обтекаемых объектов, или объекты с подвижными/отделяемыми частями. Тела могут двигаться как по заранее заданным законам, так и под действием аэродинамических сил. Рассмотрение подобных задач стимулирует развитие методов моделирования и техники соответствующей работы с геометрией.

В диссертационной работе представлена новая методика моделирования задач внешнего обтекания движущихся тел сложной формы на неструктурированных сетках в односвязных расчетных областях. Методика строится на основе сочетания метода погруженных границ с разработанной автором анизотропной адаптацией подвижной сетки, использующей гибридную явно-неявную модель описания тела.

Степень научной разработанности темы

Классические подходы к решению задач обтекания тел подразумевают наличие согласованной с телом сетки, а именно сетки, граничные узлы которой лежат на поверхности обтекаемого объекта. Существует ряд подходов, которые адаптируют классический для моделирования обтекания подвижных

тел. В некоторых случаях это малые изменения в уравнениях, например, турбулентный поток около вращающегося тела можно рассчитать, используя переход в неинерциальную систему отсчета глобально [11] или локально [12] в цилиндрической области, внутрь которого помещено подвижное тело.

Более сложные типы движения можно учитывать за счет различных сеточных технологий.

Очевидным является подход с локальным [13] или глобальным [14] **перестроением** сетки при каждом сдвиге тела. Из-за низкой эффективности и высокой сложности реализации, особенно если не предполагается использование внешних программ, данный подход не будет здесь подробно рассмотрен.

Метод Химеры, предложенный еще в 1983 году [15], подразумевает наличие двух или нескольких наложенных сеток. Тело движется вместе с сеткой, его описывающей, а глобальное решение получается с использованием обмена данными между всеми сетками. Особенности такого подхода являются:

- возможность *использования простых сеточных генераторов*. Каждая сетка, кроме фоновой, описывает только одно тело и может быть сгенерирована каким-то внешним автоматическим сеткопостроителем или используя относительно простые алгоритмы с возможностью задания пограничных слоев,
- при необходимости *локального повышения разрешения* сетки достаточно добавить дополнительную подробную подсетку [16],
- метод наложенных сеток может использоваться как аналог генератора сетки для стационарных задач [17], так и как подход к геометрическому описанию подвижных или деформируемых объектов,
- если сетки движутся, есть вероятность возникновения пустот, не покрытых никакими сетками. Для отслеживания таких ситуаций в алгоритме обычно предусмотрена технология коррекции фоновой сетки,

когда ячейки удаляются внутри твердых тел, и добавляются после смещения тел для предотвращения образования пустот [18] (Рис. 1),

- трудности построение консервативных схем расчета. Одним из направлений решения проблемы является локальное перестроение сетки для достижения конформности [19],
- постоянные перестроения усложняют задачу эффективной параллельной реализации,
- обмены между сетками могут быть весьма трудоемкими, учитывая использования перестроений и интерполяции высокого порядка [20].

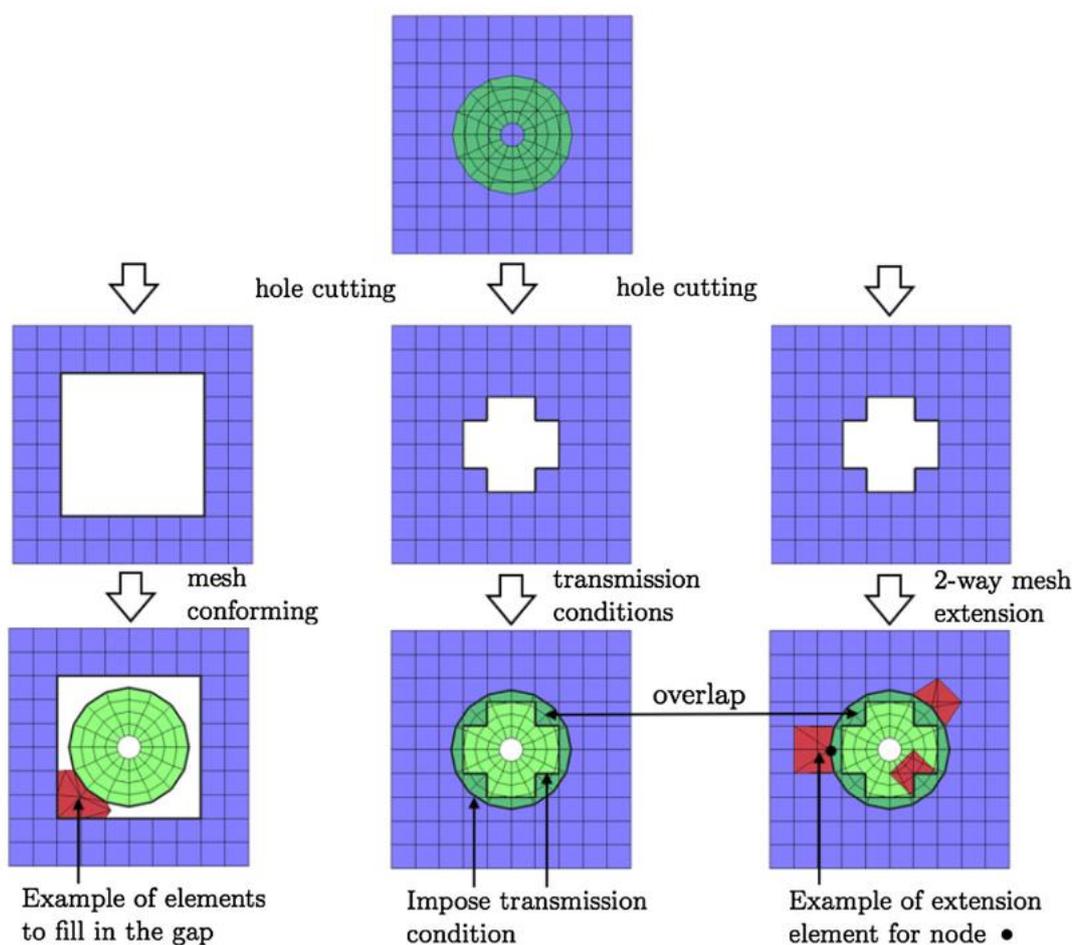


Рисунок 1. Схема некоторых алгоритмов типа «Химера» [18].

Несмотря на все преимущества метода наложенных сеток, существует множество недостатков, преодоление которых требует решения нетривиальных задач.

Другой подход, обеспечивающий геометрическое описание подвижных тел, основан на использовании **деформации** сетки. Как правило, начальная сетка строится один раз с соблюдением требуемого качества и с пограничными слоями, если требуется, и подвергается деформации по мере движения тела без изменения топологии [21]. Такой подход как правило является наиболее эффективным в смысле затраченных вычислительных ресурсов среди рассматриваемых. Например, в [5] используется фоновая регулярная сетка, покрывающая область деформации. Деформация фоновой сетки влечет деформацию расчетной, причем алгоритм деформации сводится к набору одномерных задач перераспределения узлов вдоль направляющих линий регулярной сетки. Однако, подход тоже имеет ряд недостатков и ограничений. В частности сильные деформации могут существенно ухудшать качество сеточных элементов, даже приводить к «разрывам» и перепутываниям и влиять на точность расчета, и потому часто применяется в задачах с малыми смещениями тела. Часто область деформации отодвигают от границ тела, чтобы сохранить качественный пограничный слой. Например, на рисунке 2 тело помещено в «капсулу» вместе с погранслоями, а движется сетка в отдалении от границы.

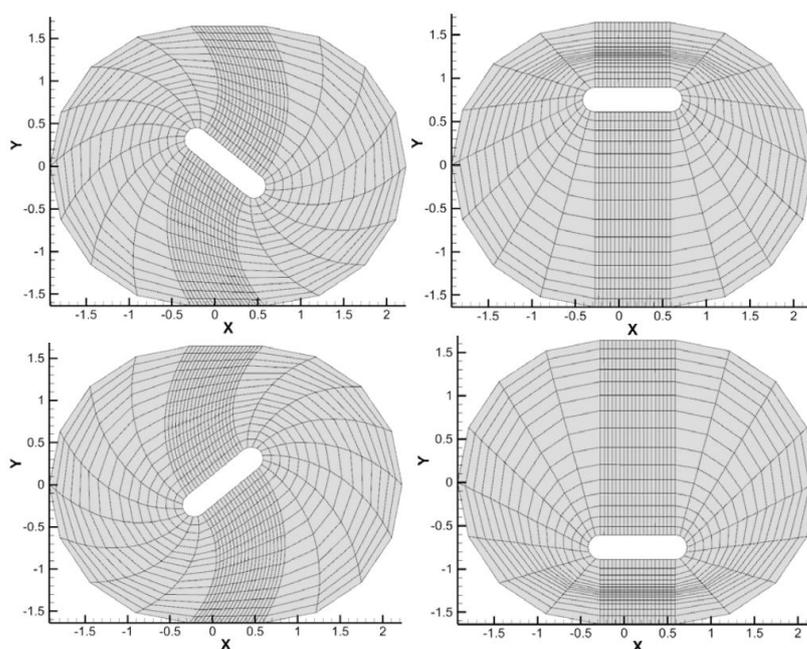


Рисунок 2. Деформация фоновой сетки в [22].

Существуют подходы к моделированию взаимодействия рабочей среды с обтекаемым телом, позволяющие покрывать области сложной формы односвязными расчетными сетками. Речь идет о **методе погруженных границ** (Immersed boundary method – IBM, Immersed boundary condition – IBC). При таком подходе сеточные узлы не требуется точно выставлять на поверхность тела. В первый раз метод был представлен в 1972 в [22], позволив избежать построения расчетной сетки, конформной по отношению к сложной геометрии сердца. Часто используется стационарная регулярная или неструктурированная сетка, покрывающая всю расчетную область, а счет проводится в том числе внутри тела. Условие прилипания на границе достигается внесением изменений в расчетные уравнения. Требуется лишь разметка для сеточных узлов по принципу принадлежности телу. В данной работе используется метод штрафных функций Бринкмана [23], в рамках которого наличие границы тела моделируется внесением дополнительных источников членов в расчетные уравнения. Источники определяют тело как среду с высокой степенью непроницаемости, их величины отличны от нуля только в точках, лежащих внутри движущегося объекта.

Метод погруженных границ позволяет моделировать взаимодействие среды с подвижными и деформируемыми телами в том числе достаточно сложной формы, не зависит от типа движения тела и не является столь ресурсоемким. Перемаркировка вершин в процессе движения границ тела может влиять на выбор числа Куранта при счете.

Существенным недостатком метода является то, что получение качественного численного результата сопряжено с использованием очень подробных сеток. Если сетка равномерная изотропная, для разрешения пограничного слоя размер ее элементов во всей области возможного движения тела не должен превышать $y^+ = 1$. y^+ – безразмерное расстояние до стенки, заданное как

$y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu}$, где $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_\omega}{\rho}}$ – динамическая скорость, τ_ω – касательное напряжение на стенке, y – абсолютное расстояние, а ν – кинематический коэффициент вязкости.

Особенно проблематично использовать IBM для высокорейнольдсовых расчетов, поскольку разрешение пограничного слоя может потребовать многомиллионных сеток.

В данной работе метод погруженных границ будет браться за основу, а дополнительные техники работы с сеткой позволят расширить границы применения метода. Если считать, что тело задано функцией расстояния, то можно предположить, что сетку и ее разрешение можно адаптировать к нулевой изолинии функции расстояния по тому же принципу, как исследователи адаптируют сетку к градиенту скорости или другим полям физическим величин. Адаптация сетки к поверхности движущегося тела позволяет использовать достаточно грубые начальные сетки и достигать при этом хорошей точности численного решения. Далее будут рассмотрены методы сеточной адаптации.

Подходы к сеточной адаптации

Обычно адаптацию разделяют по следующим типам:

- разбиение, часто в комбинации с разгрублением,
- перераспределение сеточных вершин,
- повышение степени полинома.

При использовании алгоритма *разбиения* [24,25] расчет обычно начинается с относительно грубой сетки, а ее элементы рекурсивно разбиваются, пока не будет выполнен некоторый критерий точности решения. Важнейшим концептом для данного подхода, обеспечивающим качество сетки, является отслеживание уровня вложенности. Обычно не допускается разница уровня разбиения более чем на один между соседними ячейками, чтобы не допустить сильных перепадов размера. Разбиение может создавать анизотропные ячейки

[24] и таким образом достаточно экономно расходовать ресурсы. Если задача нестационарная, вместе с измельчением используется алгоритм разгрубления [25], чтобы ликвидировать избыточное разрешение там, где оно больше не требуется. Численные подходы, которые используются при решении задач, представленных в данной работе, не предполагают резких перепадов сеточного размеров и «висячих» узлов, поэтому данный подход не будет рассматриваться далее.

В методе конечных элементов возможно локальное повышение степени полинома базисной функции. Такие подходы тоже часто относят к алгоритмам адаптации, но они не входят в область интересов данной работы.

Наконец, подход, который будет рассмотрен в представленной работе, основывается на перераспределении сеточных узлов без изменения связности. Далее будет более подробно рассмотрен именно этот метод.

Следует также заметить, что перечисленные виды адаптации могут применяться в комбинации. Выбор меры ошибки для оценки качества сетки играет ключевую роль в любом из подходов, и может зависеть как от физических величин, так и от мер качества сеточных элементов, в первую очередь мер скошенности ячеек.

Подходы к адаптации подвижных сеток

Между генерацией сетки и сеточной адаптацией много общего. Ключевое отличие адаптации заключается в зависимости от решения уравнений в частных производных, поскольку направлена на улучшение соответствия между сеткой и решением

Обозначим расчетную область в \mathbb{R}^d через Ω_c , будем считать ее простой и выпуклой, например, единичным кубом размерности d . Область Ω_c заполнена равномерной сеткой. Рассмотрим отображение (рис. 3) (для простоты в двумерном случае):

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)^T \in \Omega_c; \mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))^T : \Omega_c \rightarrow \Omega$$

Это отображение переводит вершины параметрической декартовой сетки в вершины в физической области Ω , формируя неравномерную адаптивную сетку.

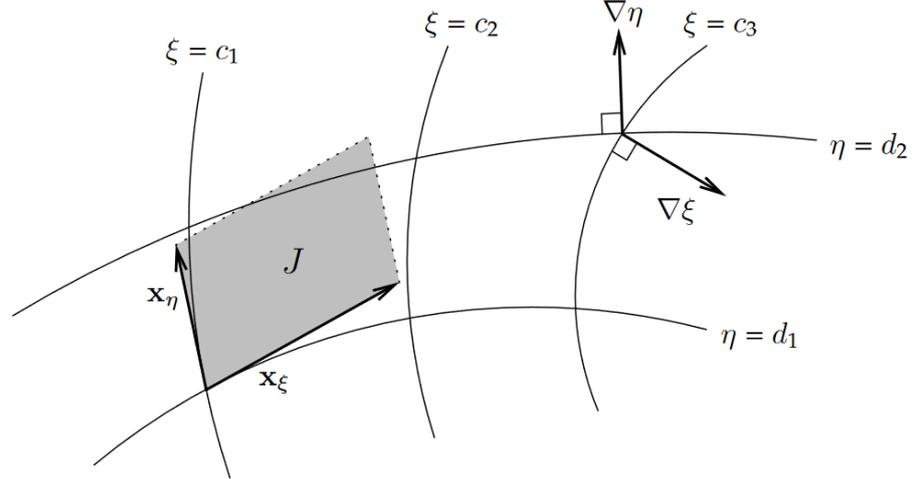


Рисунок 3. Иллюстрация отображения в криволинейных координатах на плоскости.

[26]

Отображение $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) : \Omega_c \rightarrow \Omega$ называется биекцией, если для любой точки $\mathbf{z} \in \Omega$ существует единственный прообраз $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{z}) \in \Omega_c$.

Биективность является необходимым требованием для рассматриваемого отображения. Будем требовать, чтобы отображение было непрерывно дифференцируемым, а детерминант матрицы Якоби был бы строго положительным во всех точках области.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix}; \quad J = \det(\mathbf{J}) > 0$$

Обратному отображению $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ соответствует матрица Якоби \mathbf{J}^{-1} с детерминантом $1/J$. Некоторые методы используют именно обратное отображение, так как в случае выпуклости Ω_c и при довольно слабых ограничениях на

Ω в двумерном случае существуют теоретические обоснования существования обратимости такого отображения.

Принцип равномерного распределения

Важным понятием для задачи адаптации сетки является принцип равномерного распределения, который обычно приписывают работе де Бура 1974 года [27], хотя сама идея была ранее сформулирована П. Л. Чебышевым (альтернанс Чебышева). Как показал де Бур в одномерном случае можно ввести специальную весовую функцию ω , которая, например, является локальной мерой ошибки дискретизации, то можно построить отображение, которое задает сетку с минимальной ошибкой

$$\xi(x) = \frac{\int_{a_1}^x \omega(s) ds}{\int_{a_1}^{b_1} \omega(s) ds}.$$

Продифференцируем по x и преобразуем:

$$\xi_x = \frac{\omega}{c} \rightarrow \omega x_\xi = c, \quad (0.1)$$

где $c = \int_{a_1}^{b_1} \omega(s) ds$. Тогда в дискретной форме (0.1) запишется как $\omega_j \Delta x_j = c$, $j = 0, \dots, N - 1$. Здесь ω_j – некоторая аппроксимация весовой функции $\omega(x(\xi))$ для ячейки. Из этой формы записи очевидно, что чем больше вес, тем меньше размер ячейки.

Продифференцируем уравнение (0.1) по ξ :

$$(\omega x_\xi)_\xi = 0 \quad (0.2)$$

Из (0.2) при условии обратимости $x(\xi)$ следует

$$\left(\frac{\xi}{\omega} \right)_x = 0 \quad (0.3)$$

Обобщение принципа равномерности является предметом активных исследований.

Гармонические отображения

Одним из способов построения обратимого отображения является использование гармонического отображения.

Вектор-функция $\xi(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется гармоническим отображением, если ее компоненты $\xi_i(\mathbf{x})$ удовлетворяют уравнению Лапласа: $-\Delta \xi_i = 0$. Гармонические функции бесконечно дифференцируемы и удовлетворяют принципу максимума. В двумерном случае теорема Радо указывает достаточные условия обратимости гармонического отображения. Обратимость в пространстве размерности больше двух не гарантирована.

Математические основы теории гармонических отображений стали активно развиваться в 1950-е. Для адаптации гармонические отображения были впервые применены Двинским в 1991 году [32].

Решение уравнения Лапласа для физических координат:

$$\Delta_{\xi} x = 0, \Delta_{\xi} y = 0,$$

где Δ_{ξ} – оператор Лапласа в переменных ξ дает явную зависимость для физических координат от ξ , но в случае произвольной невыпуклой области Ω , такое отображение не является обратимым и может привести к «схлопыванию» ячеек. Поэтому чаще рассматривают обратное отображение $\xi(\mathbf{x}): \Omega \rightarrow \Omega_c$, которое получается за счет решения уравнения (0.4), задающего гармоническое отображение на выпуклую область.

В 1966 году Винслоу [28] использовал уравнение Лапласа для получения «эквипотенциальной сетки» путем замены зависимых и независимых переменных в уравнении

$$\Delta \xi = 0, \Delta \eta = 0 \tag{0.4}$$

Тогда координаты прямого отображения $\mathbf{x}(\xi) : \Omega_c \rightarrow \Omega$ должны удовлетворять системе квазилинейных уравнений

$$\begin{aligned} g_{22}x_{\xi\xi} - 2g_{12}x_{\xi\eta} + g_{11}x_{\eta\eta} &= 0, \\ g_{22}y_{\xi\xi} - 2g_{12}y_{\xi\eta} + g_{11}y_{\eta\eta} &= 0, \end{aligned} \quad (0.5)$$

где $g_{ij} = \mathbf{x}_{\xi_i}^T \mathbf{x}_{\xi_j}$ – коэффициенты метрического тензора.

В 1981 году Винслоу исследовал адаптивный аналог [30] вышеописанного метода.

$$\nabla(D\nabla\xi) = 0, \quad \nabla(D\nabla\eta) = 0, \quad (0.6)$$

В данной постановке коэффициент «диффузии» $D > 0$ может выступать как решение некоторого физического уравнения. В одномерном случае метод совпадает с равномерным, где $D = 1/\omega$. Преобразуем (0.6):

$$\begin{aligned} \nabla^2\xi &= -\nabla\xi \frac{\nabla D}{D}, \\ \nabla^2\eta &= -\nabla\eta \frac{\nabla D}{D} \end{aligned} \quad (0.7)$$

В обратной форме метод Винслоу запишется как

$$\begin{aligned} g_{22}x_{\xi\xi} - 2g_{12}x_{\xi\eta} + g_{11}x_{\eta\eta} &= (D_\xi y_\eta - D_\eta y_\xi) \frac{J}{D}, \\ g_{22}y_{\xi\xi} - 2g_{12}y_{\xi\eta} + g_{11}y_{\eta\eta} &= (D_\xi x_\eta - D_\eta x_\xi) \frac{J}{D}. \end{aligned} \quad (0.8)$$

Заметим, что ранее эта идея в более общей постановке была сформулирована в работе Годунова, Прокопова 1972 года [29].

Вариационная формулировка

Расчетная сетка строится в результате минимизации некоторого функционала. Например, метод Винслоу может быть получен в результате минимизации функционала:

$$I_s = \int_{\Omega} \left((\nabla \xi)^2 + (\nabla \eta)^2 \right) dx. \quad (0.9)$$

Вариационная формулировка привлекательна тем, что позволяет добавить дополнительные критерии для сеточной адаптации, что позволяет достичь ортогональности сетки или улучшить другие качества сеточных элементов. Например, в 1982 году был предложен метод [31], использующий комбинацию функционалов

$$I_{BS} = I_s + \lambda_v I_v + \lambda_o I_o, \quad (0.10)$$

где к функционалу (0.9) добавляются функционалы $I_o = \int_{\Omega} (\nabla \xi^T \nabla \eta)^2 J^3 dx$ и $I_v = \int_{\Omega} \omega J dx$, отвечающие, соответственно, за контроль ортогональности и площади ячеек, взятые с некоторыми весовыми коэффициентами.

Можно рассмотреть более общую постановку задачи (0.9).

Отображение является гармоническим, если на нем достигается экстремум функционала энергии

$$I_{hm} = \int_{\Omega} \left[(\nabla \xi)^T G^{-1} (\nabla \xi) + (\nabla \eta)^T G^{-1} (\nabla \eta) \right] \sqrt{g} dx \quad (0.11)$$

Минимизация функционала даст необходимое отображение. Выбирая метрический тензор $G(x)$, в физической области можно строить адаптивные сетки.

Подход Huang, Ren, Russell

В 1994 группа авторов предложила для одномерного случая метод адаптивных подвижных сеток [33], основанный на решении уравнений в частных производных для достижения условия равномерности (moving mesh PDE, MMPDE). Позже они обобщили этот подход на двумерный случай в работе [34], используя теорию гармонических преобразований.

В подходе MMPDE сеточное отображение явно зависит от времени, $x(\xi, t)$. Наиболее похожий на принцип равномерности MMPDE5 определяется уравнением

$$\dot{x} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\omega \frac{\partial x}{\partial \xi} \right),$$

где τ - параметр релаксации по времени, необходимый для адаптации скорости движения сетки к физической временной шкале. Можно заметить, что вершины сетки будут сконцентрированы в большей степени в зонах с большим ω , а скорость вершин обнуляется при достижении условия равномерности.

Для многомерной формулировки функционал обобщается до

$$I = \int_{\Omega} \left[(\nabla \xi)^T G_1^{-1} (\nabla \xi) + (\nabla \eta)^T G_2^{-1} (\nabla \eta) \right] dx,$$

где симметрические положительно определенные матрицы G_1 и G_2 являются мониторинговыми функциями. Можно заметить, что при $G_1 = G_2 = G / \sqrt{g}$ функционал приводится к виду (0.11). Далее можно записать уравнения Эйлера-Лагранжа и вывести уравнения движения вершин.

Квазиизометрические отображения

В представленной работе будет использоваться адаптация сетки, разработанная В.А. Гаранжой и описанная в [35]. Подход основан на минимизации функционала для поиска квазиизометрического отображения. Авторы отсылаются к идеям, предложенным в работах С.К. Годунова, в частности к работе [36], где используются конформные отображения для построения параметризации криволинейного четырехугольника. В [37] эти идеи развиваются для построения квазиизометрических отображений в многомерных пространствах. В работе [38] для решения задачи «распутывания» формулируется функционал

на основе теории гиперэластичности. Впервые такой подход для генерации сеток был предложен в [39]. Лагранжевы координаты ξ ассоциированы с упругим материалом, а для поиска упругой деформации $\mathbf{x}(\xi)$ решается задача минимизации функционала

$$F(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{J}) d\xi, \quad (0.12)$$

где $\Phi(\mathbf{J})$ – мера искажения. В качестве $\Phi(\mathbf{J})$ используется взвешенная сумма меры искажения формы и меры искажения объема

$$\Phi(\mathbf{J}) = (1 - \theta) \frac{\left(\frac{1}{d} \text{tr}(\mathbf{J}^T \mathbf{J}) \right)}{\det \mathbf{J}^{2/d}} + \frac{1}{2} \theta \left(\frac{1}{\det \mathbf{J}} + \det \mathbf{J} \right). \quad (0.13)$$

В работе [35] вариационный подход сформулирован также для отображений, зависящих от времени $\mathbf{x}(\xi, t)$.

В данной работе используется комбинация метода погруженных границ и сеточной адаптации. Далее в тексте метод будет обозначаться аббревиатурой DMR-IBM (Dynamic Mesh Redistribution – Immersed Boundary Method). Такой подход уже тестировался на простых конфигурациях и использовался при численном решении двумерных задач внешнего обтекания подвижных тел [24, 40]. Решение же задач вычислительной газовой динамики в трехмерной постановке потребовало дальнейшего развития разрабатываемого подхода. Дело в том, что изотропный характер предложенной адаптации, определяемой лишь расстоянием до поверхности тела, не давал возможности построения сильно анизотропных сеток вдоль поверхности обтекаемого тела, что приводило к построению сеток чрезмерно большой размерности даже в двумерном случае и неприемлемо большой размерности – в трехмерном. Это обстоятельство потребовало учета в данной работе анизотропии геометрии. Для качественной реализации анизотропной адаптации для тел сложной формы, особенно в трехмерной постановке, помимо функции расстояния, нужно учитывать информа-

цию высоких порядков для входящей геометрии. В настоящей работе описывается методика учета кривизны для построения управляющей метрики адаптации. Кривизна рассчитывается для триангулированной поверхности подвижного тела, далее ее значения записываются в вершины восьмеричного дерева. При адаптации эта информация используется для настройки управляющих параметров метрики.

Постановка задачи адаптации для функции расстояния с учетом специфических требований к качеству сеточных ячеек не представлена широко в литературе. Однако, существуют работы по подбору метрики для анизотропных сеток как в контексте генерации или доразбиения сетки [24], так и для подвижных адаптивных сеток [41]. Как правило, представленные в литературе алгоритмы подразумевают оценку апостериорной ошибки, на основе которой строится метрический тензор. Для приближения к форме тела и последующего решения задач моделирования течения вокруг подвижного объекта, сеточная адаптация должна удовлетворять ряду критериев. В первую очередь, она должна сохранять заданное заранее на стадии препроцессинга требуемое сгущение в нормальном направлении и не допускать чрезмерно быстрого роста размеров сеточных элементов. Желательно, не превышать разницу между соседними ячейками в 1.2 раза. Указанные условия при этом требуется выполнять, используя имеющееся в исходной сетке ограниченное количество сеточных узлов. Перечисленные требования существенным образом влияют на выбор управляющих параметров адаптации.

Цели диссертационной работы

1. Разработка методики моделирования аэродинамики подвижных тел сложной формы на неструктурированных сетках
2. Реализация предложенных методов и вычислительных технологий в рамках программного комплекса NOISEtte
3. Верификация и валидация разработанных алгоритмов и реализующих их программных модулей

4. С использованием разработанной методики и программных модулей проведение расчета реальной прикладной задачи, в конфигурации которой присутствуют подвижные тела.

Методы исследования научной проблемы. Для проведения численных экспериментов в работе рассматривается математическая модель сжимаемого газа. Решаются уравнения Навье-Стокса или усредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса (RANS). В качестве турбулентной модели выбирается модель Спаларта-Аллмараса (SA). Расчеты проводятся на неструктурированных сетках в рамках вершинно-центрированного подхода и с использованием метода конечных объемов. Для аппроксимации вязких членов используется метод конечных элементов. Вычислительный алгоритм строится на основе EBR (Edge-Based Reconstruction) схемы повышенной точности. Для интегрирования по времени используется неявная схема второго порядка. Сеточная адаптация основана на вариационном подходе. Программные модули разрабатывались на языке C++. Параллельность осуществлялась на основе протокола MPI.

Достоверность результатов обеспечивается проведением тестирования и верификации всех этапов разработки алгоритма, сравнением численных результатов моделирования двух- и трехмерных задач относительно друг друга и иных валидированных подходов, а также сравнением с имеющимися экспериментальными данными.

Научная новизна работы заключается в разработке и программной реализации метода моделирования течений вблизи движущихся тел сложной формы на основе гибридного подхода, сочетающего метод погруженных границ и динамическую адаптацию подвижной неструктурированной сетки. В рамках исследуемой методики был предложен новый алгоритм задания управления анизотропной адаптации подвижной неструктурированной сетки, учитывающий особенностей формы обтекаемого объекта. Впервые была разработана и реализована эффективная гибридная явно-неявная модель задания тела,

основанная на использовании фоновых декартовых решеток и поисковых структур, включающая в себя этап предварительной подготовки и обработки геометрии и методы быстрого доступа к значениям расстояния, градиентов функции расстояния и различных параметров поверхности тела.

Положения, выносимые на защиту

1. Методика моделирования аэродинамики подвижных тел сложной формы на основе метода погруженных границ и адаптации подвижной неструктурированной сетки
2. Метод анизотропной адаптации подвижной неструктурированной сетки к поверхности тел произвольной формы
3. Гибридная геометрическая модель задания движущегося тела на основе декартовых сеток вида восьмеричного дерева и поисковых структур.
4. Программная реализация разработанной методики моделирования течений вблизи подвижных тел и геометрической модели в виде модулей в составе программного комплекса NOISEtte
5. Верификация и валидация разработанной методики и ее программной реализации
6. Результаты численного моделирования тонального шума изолированного винта квадрокоптера, полученные с использованием разработанной методики

Теоретическая значимость работы заключается в разработке алгоритма задания управляющей метрики анизотропной адаптации подвижной сетки для использования ее в комбинации с методом погруженных границ на односвязных расчетных сетках в задачах внешнего турбулентного обтекания подвижных тел.

Практическая значимость работы заключается в программной реализации разработанной методики моделирования аэродинамики подвижных тел

сложной формы на неструктурированных сетках в рамках программного комплекса NOISEtte, что, в частности, потребовало создания новых модулей поэтапной обработки геометрии тела и задания анизотропного управления адаптацией сетки к поверхности тел произвольной конфигурации. Комбинация разработанных в диссертации и реализованных в программном комплексе NOISEtte сеточных технологий с методом погруженных границ позволяет проводить расчеты востребованных авиационной промышленностью задач обтекания подвижных препятствий.

Апробация результатов. Результаты работы были представлены на следующих научных конференциях и семинарах:

1) 9th International Young Scientist Conference in Computer Science, 5-13 сентябрь, 2020,

2) VI ECCOMAS Young Investigators Conference (YIC2021), 7-9 июля 2021,

3) Восьмая российская конференция «Вычислительный эксперимент в аэроакустике и аэродинамике», 20-25 сентября 2021,

4) Всероссийская научная конференция «Теоретические основы конструирования численных алгоритмов и решение задач математической физики», посвященная памяти К.И. Бабенко, 26 августа, 2022,

5) Девятая российская конференция «Вычислительный эксперимент в аэроакустике и аэродинамике», сентябрь, 2022,

6) научный семинар 15-го отдела ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Публикации. Материалы диссертации представлены в 10 печатных работах [1–10]: из них 9 [1–8, 10] – статьи в рецензируемых изданиях, индексируемых в международных базах данных Scopus и/или Web of Science, 8 [1, 3–6, 8–10] – в рекомендованных изданиях перечня ВАК.

На программный модуль, реализующий результаты диссертации, получено свидетельство РИД: Свидетельство о государственной регистрации про-

граммы для ЭВМ № 2020665711 от 24 ноября 2020 года «Программный модуль MUnMAdapt адаптации подвижной неструктурированной сетки к поверхности тела при использовании метода погруженных границ», авторы: Кудрявцева Л.Н., Козубская Т.К., Гаранжа В.А., Цветкова В.О., Жданова Н.С., правообладатель: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Личный вклад автора состоит в разработке и программной реализации гибридной геометрической модели задания подвижного тела, построении и реализации алгоритма управления анизотропной сеточной адаптацией с учетом особенностей формы тела, проведении расчетов и анализе полученных результатов.

Автор выражает особую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. Козубской Татьяне Константиновне и научному консультанту к.ф.-м.н. Кудрявцевой Людмиле Николаевне за огромную помощь в ведении научной деятельности.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации состоит 112 страниц, включая 74 рисунка и 5 таблиц. Список литературы содержит 62 наименования.

Первая глава описывает методику моделирования аэродинамики подвижных тел сложной формы на неструктурированных сетках. Описываются используемые математические модели, подходящие для рассматриваемых задач. В частности, для моделирования турбулентных сжимаемых течений вблизи тела используются модели на основе уравнений Навье-Стокса. Для математического описания обтекаемого тела представлен метод погруженных границ на основе метода штрафных функций Бринкмана. В главе рассматриваются используемые численные методы. Также обсуждается целесообразность включения сеточной адаптации в методику.

Вторая глава описывает принципы построения метода анизотропной адаптации подвижной неструктурированной сетки к поверхности тел произвольной формы. Представляется алгоритм сеточной адаптации на основе вариационного исчисления и приводятся особенности его численной реализации. Описывается методика задания управляющих метрик с использованием параметров поверхности для построения оптимальной анизотропной адаптации к телам с различными особенностями геометрии. В главе также рассматривается техника интерполяции на временных слоях для сеточной адаптации для повышения эффективности алгоритма.

В третьей главе вводится понятие гибридной геометрической модели тела. Модель позволяет задавать тело в односвязной области и удовлетворяет потребности адаптации по входным данным, связанным с формой тела. Описываются сеточные структуры, в том числе поисковые деревья, лежащие в основе модели и формирующие ее гибридную особенность, когда тело может быть задано явно и/или неявно. В главе приводятся детали этапов подготовки и обработки геометрии.

Четвертая глава посвящена программной реализации модулей, связанных с построением алгоритма адаптации. Приводится схема взаимодействия модулей внутри программного комплекса NOISEtte и с внешними библиотеками. Описывается программная реализация этапа подготовки геометрии, описанного в главе 3.

В пятой главе приводятся результаты тестовых и верификационных расчетов. В частности, метод анизотропной адаптации тестируется применительно к телам сложной формы. Дается анализ сравнения расчетов модельных задач об обтекании колеблющегося цилиндра в двумерной постановке и, аналогично, сферы, движущихся под воздействием внешней гармонической силы, выполненных с помощью представленной методики и с использованием классических подходов. Представлено также сравнение с экспериментальными данными.

Шестая глава содержит основные численные результаты по моделированию тонального шума изолированного винта квадрокоптера. Задача разделена на несколько этапов. Сначала рассматривается двумерная постановка, где тестируются возможности сеточной адаптации отслеживать особенности формы такого сложного объекта, которым является винт квадрокоптера, а также метод моделирования в целом на возможность получения корректных результатов по аэродинамике. Для трехмерной постановки представлены численные результаты по тональной акустике и аэродинамическим силам. Сравнение проводится с аналогичными результатами, полученными с использованием неинерциальной системы отсчёта на классической сетке, где граница согласована с телом.

Поддержка работы

Диссертационная работа выполнена при поддержке гранта РФФИ «Аспирант» № 20–31–90052. Выполнение отдельных исследований, включенных в работу, частично поддерживалось средствами грантов РФФИ 16–11–10350, 19–11–00299, 20–41–09018.

Глава 1

Методика моделирования аэродинамики подвижных тел сложной формы на неструктурированных сетках

1.1 Математическая модель для задач внешнего обтекания

В реальных авиационных приложениях требуется решать задачи, характеризующиеся столь большими числами Рейнольдса, что корректное численное решение системы уравнений Навье-Стокса требует не достижимого пока сеточного разрешения по пространству и времени. Поэтому для расчета задач внешнего обтекания потоком газа используется система осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса для вязкого сжимаемого газа, где тензор рейнольдсовых напряжений определяется посредством гипотезы Буссинеска, а значение коэффициента эффективной или турбулентной вязкости задаётся моделью турбулентности. В данной работе в качестве замыкания этой системы будем использовать модель турбулентности Спаларта-Аллмараса [42] на основе одного дифференциального уравнения.

Для записи системы осреднённых уравнений Навье-Стокса в виде законов сохранения введем вектор консервативных переменных

$$\mathbf{Q} = (\rho, \rho \mathbf{u}, E, \rho \tilde{\nu})^T$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор скорости, ρ – плотность, $E = \rho \mathbf{u}^2 / 2 + \rho \varepsilon$ – полная энергия, ε – удельная внутренняя энергия, связанная с давлением p уравнением состояния совершенного газа – $p = \rho \varepsilon (\gamma - 1)$, $\gamma = 1.4$ – показатель адиабаты. Величина $\tilde{\nu}$ – эволюционная переменная, через которую, согласно модели Спаларта-Аллмараса, определяется коэффициент турбулентной вязкости μ_T :

$$\mu_T = \rho \tilde{\nu} \frac{\chi^3}{\chi^3 + 357.911}, \quad \chi = \frac{\rho \tilde{\nu}}{\mu},$$

где μ – коэффициент динамической молекулярной вязкости.

Тогда систему осреднённых уравнений Навье-Стокса можно записать в следующем векторном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{F}^C(\mathbf{Q}) - \mathcal{F}^D(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q})) = S(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}). \quad (1.1)$$

В системе (1) введены составные вектора \mathcal{F}^C , \mathcal{F}^D , каждая компонента которых \mathbf{F}_i^C и \mathbf{F}_i^D в координатном направлении $x_i (i = 1, 2, 3)$ представляет собой вектор потока конвективного переноса и вектор потока диффузии, соответственно.

Оператор $(\nabla \cdot)$ есть оператор взятия дивергенции по каждой компоненте составного вектора.

Вектор потоков конвективного переноса задается как функция физических переменных $\rho, \mathbf{u}, p, \tilde{\nu}$ следующим образом:

$$\mathbf{F}_i^C(\mathbf{Q}) = (\rho u_i, \rho u_i \mathbf{u} + p \mathbf{I}, (E + p)u_i, \rho \tilde{\nu} u_i)^T, \quad (1.2)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица. Вектор потоков диффузии определяется как функция физических переменных и их градиентов по формуле:

$$\mathbf{F}_i^D(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) = \left(0, \tau_{i1}, \tau_{i2}, \tau_{i3}, \tau_{ij} u_j + q_i, \frac{3}{2} (\mu + \rho \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \right)^T, \quad (1.3)$$

где компоненты вязкого тензора вязких напряжений τ_{ij} и вектора теплового потока q_i имеют вид:

$$\tau_{ij} = (\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right), \quad q_i = \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_T}{\text{Pr}_T} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \quad (1.4)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $Pr = 0.72$ – молекулярное число Прандтля, $Pr_T = 1$ – турбулентное число Прандтля.

Вектор $\mathbf{S}(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q})$ представляет собой источниковый член, описывающий влияние внешних сил, не связанных с процессами переноса искомым переменных \mathbf{Q} :

$$\mathbf{S}(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) = (0, 0, 0, P_\nu(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) - Y_\nu(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) + 0.992 \nabla \tilde{\nu} \cdot \nabla \tilde{\nu})^T. \quad (1.5)$$

Вид членов $P_\nu(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q})$, $Y_\nu(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q})$, описывающих, соответственно, генерацию и дисперсию турбулентности, приведены в статье [42].

Пусть расчётная область решения системы (1.1) есть объединение области занятой твердым телом Ω_B с границей $\partial\Omega_B$ и области течения Ω_f . На границе твердого тела Ω_B ставится условие прилипания:

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega_B} = \mathbf{u}_B. \quad (1.6)$$

1.2 Описание обтекаемого тела методом погруженных границ в односвязной области

В настоящей работе выполнение условия (1.6) на границе твердого тела реализуется методом погруженных границ за счет применения метода штрафных функций Бринкмана. При использовании этого метода для этого система дифференциальных уравнений решается во всей расчётной области $\Omega_f(t) \cup \overline{\Omega_B(t)}$, включая область твёрдого тела, граница которого погружена в область течения. Для такого описания погруженной границы модифицируется математическую модель путем добавления дополнительных источниковых членов в осредненные уравнения Навье-Стокса, которые действуют только в области расположения обтекаемого твердого тела. Модифицированный вектор источниковых членов согласно методу Бринкмана выглядит следующим образом

$$\mathbf{S}^{penal}(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) = \left(0, \frac{\chi}{\eta} \rho (\mathbf{u} - \mathbf{u}_B), \frac{\chi}{\eta} \rho \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_B), \frac{\chi}{\eta} \rho \nu \right), \quad (1.7)$$

где \mathbf{u}_B – скорость движения твёрдого тела, а характеристическая функция $\chi(t)$ задаёт положение тела в каждый момент времени:

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \overline{\Omega_B}(t) \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_f(t). \end{cases} \quad (1.8)$$

Малый параметр η (параметр пенализации) определяет скорость релаксации скорости потока к скорости движущегося тела \mathbf{u}_B . В представленных задачах параметр пенализации был равен 10^{-4} .

Тогда система уравнений (1.1) с учетом погруженных границ запишется в виде

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{F}^C(\mathbf{Q}) - \mathcal{F}^D(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q})) = \mathcal{S}(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) + \mathbf{S}^{penal}(\mathbf{Q}) \quad (1.9)$$

1.3 Конечно-объемный численный метод повышенной точности на неструктурированных сетках

Численный метод решения системы (1.1) или модифицированной системы (1.9) основан на следующих методах. Конвективные потоки аппроксимированы при помощи EBR (Edge-Based Reconstruction) схемы, основанной на квазиодномерной реконструкции переменных на расширенном, ориентированном вдоль сеточного ребра шаблоне [43-45]. EBR схема относится к вершинно-центрированным методам, предполагающих, что неизвестные физические и консервативные переменные определены в вершинах сетки, вокруг которой построены расчетные ячейки дуальной сетки. Для аппроксимации конвективных потоков в уравнении Навье-Стокса используется метод конечных объёмов, где в качестве конечных объёмов выступают ячейки дуальной сетки. Вязкие члены аппроксимированы с помощью конечно-элементного метода с линейными базисными функциями. Градиенты искомых переменных $(\nabla \mathbf{Q})_i$ в источниковом члене $\mathcal{S}(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q})$ аппроксимируются дискретными «узловыми»

градиентами, определенными как взвешенная сумма градиентов по элементам сетки, имеющим общую вершину в узле i , а сами переменные в источнике задаются непосредственно в узле. Для интегрирования по времени применяется неявная трёхслойная схема второго порядка. Для решения полученной нелинейной системы дискретных уравнений используется метод Ньютона для нахождения вектора неизвестных переменных на новом слое по времени в каждой точке дискретного пространства. На каждой ньютоновской итерации соответствующая система линейных уравнений решается с помощью стабилизированного метода бисопряжённых градиентов.

1.4 Проблема обеспечения требуемого сеточного разрешения в приграничной области

Для корректной работы метода погруженной границы сетка должна иметь хорошее разрешение, аналогичное разрешению в пограничном слое для согласованных с границей сеток, во всех тех областях, где потенциально может располагаться граница твёрдого тела. Применение адаптации в комбинации с этим требованием позволяет уменьшить размер исходной односвязной сетки, но сохранить разрешение достаточное для моделирования пограничного слоя вблизи погруженной границы тела. Если адаптация не позволяет сделать соответствующее сгущение, например, для очень больших чисел Рейнольдса, то для корректного моделирования пристеночных течений можно применить метод пристеночных функций. Совместное использование адаптивной сетки и метода пристеночных функций позволит добиться корректного учёта влияния пристеночного течения на общее решение задачи обтекания, решаемого методом погруженной границы, при оптимальном размере сетки.

1.5 Модель для описания тела

Для работы метода погруженной границы требуется разграничить узлы сетки по признаку принадлежности либо обтекаемому объекту, либо внешней

среде. При движении тела и узлы сетки могут менять свою принадлежность. Соответственно, на каждом шаге по времени требуется перестраивать маску узлов для расчетной сетки. При расчете с использованием турбулентной модели требуется не просто характеристическая функция положения тела, а полноценная функция расстояния до поверхности тела. Таким образом, есть необходимость в быстром алгоритме расчета функции расстояния до тела со знаком.

Идея задания функции расстояния строится на использовании интерполяционных адаптивных решеток. На этапе подготовки геометрии строятся фоновые сетки, в узлах которых хранится точное расстояние до поверхности и нормали. Дополнительно там могут храниться параметры поверхности, такие как главные кривизны и главные направления.

Глава 2

Метод анизотропной адаптации подвижной неструктурированной сетки к поверхности тел произвольной формы

2.1 Вариационный подход к сеточной адаптации

Расчетная сетка рассматривается как упругий материал, который подвергается сжатию вблизи границы движущегося тела. Упругая деформация, зависящая от времени, задается d -мерным отображением $\mathbf{x}(\xi, t) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Пусть $\mathbf{x}^n(\xi)$ - отображение исходной сетки в сетку на момент времени t^n .

Рассмотрим отображение тетраэдра T_i с координатами вершин $\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$ в лагранжевой системе координат в области Ω_ξ на треугольник с координатами вершин $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ в эйлеровой системе координат в области Ω_x . Эйлеровы координаты представляют собой желаемые координаты в расчетной области. В текущей постановке Ω_ξ – некоторая область, состоящая из тетраэдров, причем $vol(\Omega_\xi) = vol(\Omega_x)$. На момент времени t для каждой вершины тетраэдра матрица Якоби этого отображения можно записать в виде $\nabla_\xi \mathbf{x}(\xi, t) \mathbf{H}^{-1}$, где $\nabla_\xi \mathbf{x}(\xi, t) = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0)$, а $\mathbf{H} = (\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_0, \mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_0, \mathbf{h}_3 - \mathbf{h}_0)$.

Для отслеживания движения тела сеткой вводится метрика в эйлеровых координатах, которая зависит от геометрии тела и времени. Пусть $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ задает метрический тензор, а $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ – некоторая матрица, задающая его факторизацию:

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, t), \det \mathbf{Q} > 0.$$

Чтобы сформулировать вариационную задачу для сеточной адаптации на дифференциальном уровне, нужно ввести предположение, что $\mathbf{x}^n(\xi)$ – квазиизометрический диффеоморфизм. Деформация на момент времени t^{n+1} определяется решением вариационной задачи [35]

$$F(\mathbf{x}(\xi, t), \mathbf{x}^n(\xi)) = \int_{\Omega_\xi} W(\mathbf{Q}(\mathbf{x}^n, t) \nabla_\xi \mathbf{x}(\xi, t) \mathbf{H}(\xi)^{-1}) \det \mathbf{H} d\xi, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{C} = \mathbf{Q} \nabla_\xi \mathbf{x}(\xi, t) \mathbf{H}^{-1}$ обозначает матрицу Якоби отображения правильного тетраэдра T_i на i -ый тетраэдр в метрическом пространстве. В функционале (2.1) функция $W(\mathbf{C})$ обозначает поливыпуклый упругий потенциал (внутреннюю энергию), которая является взвешенной суммой меры искажения формы и меры искажения объема отображения:

$$W(\mathbf{C}) = (1 - \theta) \frac{\left(\frac{1}{d} \text{tr}(\mathbf{C}^T \mathbf{C}) \right)}{\det \mathbf{C}^{2/d}} + \frac{1}{2} \theta \left(\frac{1}{\det \mathbf{C}} + \det \mathbf{C} \right). \quad (2.2)$$

В расчетах используется значение $\theta = 4/5$. Упругий потенциал достигает минимума, когда деформация изометрична, то есть, когда допустимы только поворот и параллельный перенос.

Пусть граница подвижного деформируемого тела в момент времени t задается как нулевая изоповерхность скалярной функции $u(\mathbf{x}, t)$. Предполагается, что $u(\mathbf{x}, t)$ близка к функции расстояния со знаком от границы тела, поскольку в реальных задачах вычисление точной функции расстояния, как правило, не имеет смысла, а используется ее различные приближенные варианты.

К функционалу (2.1) применяется стандартная конечно-элементная дискретизация. Метрический тензор $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ хранится в узлах сетки, что критично для вычислительной устойчивости тонких и сильно сжатых сеточных слоев. Для решения задачи оптимизации на каждом шаге по времени применяется техника градиентного спуска с предобуславливателем [46], где направление минимизации определяется приближенным решением линейной системы с

усеченной матрицей Гессе функционала (2.1), в которой отброшены члены, потенциально приводящие к потере положительной определенности. Итоговое смещение вдоль направления минимизации находится одномерным поиском.

2.2 Построение управляющей метрики

Метрический тензор $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ может быть записан как $\mathbf{G} = \mathbf{U}\Sigma^2\mathbf{U}^T$, где столбцы \mathbf{U} являются собственными векторами \mathbf{G} , а Σ^2 – диагональная матрица с элементами на диагонали σ_i^2 , т.е. собственными значениями \mathbf{G} . В каждой точке расчетной области можно задать локально оптимальные координаты с помощью аффинного преобразования с матрицей $\mathbf{Q} = \Sigma\mathbf{U}^T$. Говорят, что расчетная сетка оптимальна (изометрична), если после применения данного аффинного преобразование к ячейкам полученной сетки, получится начальная сетка, или

$$\mathbf{Q}\nabla_{\xi}\mathbf{x}\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{V},$$

где \mathbf{V} – произвольная ортогональная матрица.

Метрика адаптации \mathbf{G} требует задания нормального и тангенциального направлений в каждой точке \mathbf{p} (столбцы матрицы \mathbf{U}), которые в свою очередь определяются изоповерхностью функции $u(\mathbf{x}, t)$, проходящей через \mathbf{p} , а также коэффициентов растяжения σ_i вдоль этих направлений. Чем больше значение σ_i , тем меньше размер ячейки в направлении столбца u_i . Соотношение $\max_{i,j} \sigma_i/\sigma_j - 1$ определяет степень анизотропии. Функция $\sigma_1 = \sigma_{normal}(\mathbf{x}, t)$ определяет растяжение сетки вдоль направления нормального к телу, а $\sigma_2 = \sigma_{tangential}(\mathbf{x}, t)$ ($\sigma_{2,3}$ в 3D) определяет пространственное распределение анизотропии. В узком слое на границе тела анизотропия максимальна и стремится к нулю вдали от тела.

Очень часто некорректно построенная метрика может приводить к резкому росту константы квазиизометрии, скачкам размеров ячеек и визуальным «разрывам» в сетке. Оптимальная метрика, которая дает наименьшую константу квазиизометрии, не известна даже для простых тел. В данной работе используются некоторые эвристические правила задания метрики, когда растяжение σ_1 принимается константой в слое на границе тела и убывает по гиперболическому закону при отдалении от него, а тангенциальное растяжение определяется кривизной поверхности и постепенно уменьшает свое влияние вдали от границы. Для тела задается некоторое пятно радиуса D , за пределами которого метрика \mathbf{G} равна единичной матрице.

Метрика изотропной адаптации определяется соотношением

$$\mathbf{G} = \sigma_1^2 \mathbf{I} \quad (2.3)$$

где $\sigma_1(\mathbf{x}, t) = \phi(u(\mathbf{x}, t))$ – сеточная плотность. В данном случае степень анизотропии равна нулю. Одномерная функция $\phi(\cdot): \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ представляет собой гиперболу и определяет сеточную плотность как показано на рисунке 5(а). На рисунке 5(б) показано вспомогательное одномерное отображение из лагранжеских координат в эйлеровы, которое задает плавное разрежение расчетной сетки в переходной зоне, гарантирующее что нормальный размер соседних ячеек отличается примерно в 1.2 раза.

Использование изотропной метрики во всей расчетной области возможно только для небольших значений σ_1 , так как решением вариационной задачи в этом случае является отображение, при котором прообраз тела почти в σ_1 раз больше размера тела в эйлеровой системе координат. Это приводит к стягиванию внутрь тела большого числа точек расчетной области.

Анизотропная версия метрического тензора определяется соотношением

$$\mathbf{G} = \sigma_1^2 \mathbf{I} + (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \nabla_{\mathbf{x}} u \nabla_{\mathbf{x}} u^T \frac{1}{|\nabla_{\mathbf{x}} u|^2} \quad (2.4)$$

На участках большой кривизны границы или около острых углов задается соотношение $\sigma_2 = \sigma_1$, в остальной части границы задано соотношение $\sigma_2 = \sigma_1/K$, где $K > 1$ степень анизотропии, заданная пользователем. При отдалении от тела σ_2 приближается к σ_1 , а дальше они оба стремятся к единице.

Каждой точке границы двумерного или трехмерного тела можно приписать некоторый минимальный масштаб. Это может быть минимальный радиус кривизны, который локально описывает форму поверхности, либо минимальное расстояние до некоторого подмножества медиальных осей, которое описывает локальный параметр толщины тела или поведение вблизи негладкого участка границы.

При задании сжатия в тангенциальном направлении требуется учет как кривизны границы тела, так и расстояния до медиальной оси. Использование только кривизны может приводить к резким переходам степени сжатия и, потенциально, к сеточным разрывам, особенно на внутренних углах (рис. 4). Если расстояние до медиальной оси меньше, чем толщина пограничного слоя в параметрической области, σ_2 на границе тела увеличивается, чтобы избежать «разрыва» сетки внутри тела. Увеличение σ_2 приводит к увеличению прообраза пограничного слоя в лагранжевых координатах, что приводит к увеличению числа вершин адаптивной сетки внутри области и около ее границы.

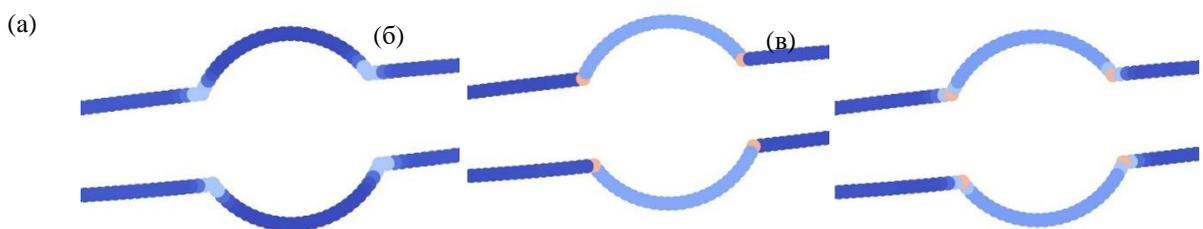


Рисунок 4. Распределение σ_2 на границе тела, определяемое медиальными осями (а), кривизной (б) и комбинацией этих значений (в).

Рассмотрим алгоритм вычисления σ_1 , т.е. сжатия в нормальном направлении, где d – значение функции расстояния без знака до границы тела, нормированное на L – величину по нормали адаптивной зоны:

$$\sigma_1(d) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{A} + \frac{c_e}{h}(d - \delta)}, & d \in [\delta, D] \\ A, & 0 \leq d \leq \delta \\ \frac{1}{\frac{1}{A} + \frac{c_e}{h}(D - \delta)}, & 1 \geq d \geq D \end{cases}$$

Здесь D – толщина переходного участка пограничного слоя, δ – размер области по нормали, где сохраняется максимальное сгущение, A – максимальная степень сжатия по нормали, c_e – относительное приращение толщины двух соседних ячеек. Как правило, c_e берется равным 0.2, чтобы не превышать рост сеточных элементов в нормальном направлении более, чем в 1.2 раза. Функция $d(\xi)$ на рис. 5(б) показывает отображение из лагранжевых координат в эйлеровы в одномерном случае, а $\sigma_1(d) = \xi'(d)$, что показано на рис. 5(а).

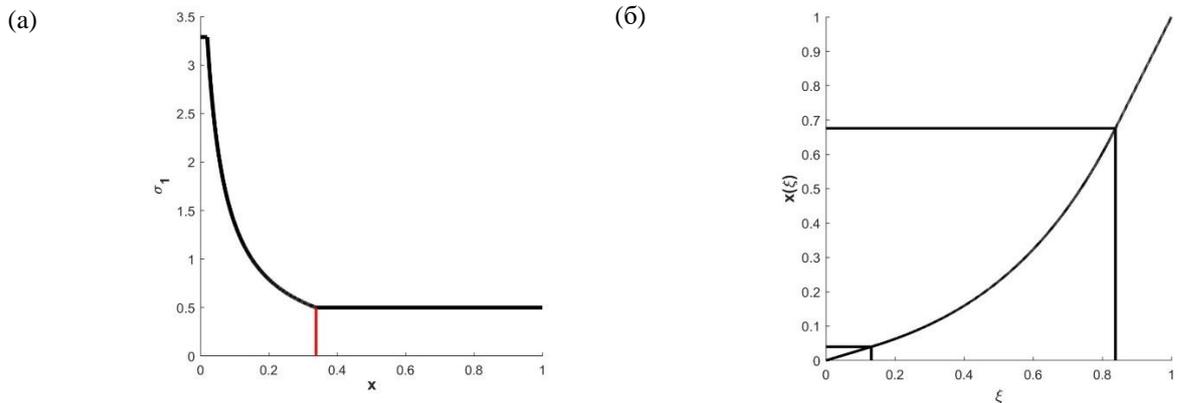


Рисунок 5. (а) распределение σ_1 вдоль нормального направления. На рисунке также показаны значения D - толщина переходного участка. (б) функция обратного размера $d(\xi)$ и значения $d(\xi_\delta) = \delta$, $d(\xi_D) = D$.

Для задания σ_2 выполняются следующие вычисления.

Рассмотрим функцию для произвольного R

$$\tilde{\sigma}_2(d, R) = \frac{\frac{R}{L} + \xi(d)}{\frac{R}{L} + d}, \quad (2.5)$$

где L – размер по нормали адаптивной зоны, то есть области, где узлы подвижны. Рис. 6 иллюстрирует связь параметров из формулы (2.5), а именно,

$$\tilde{\sigma}_2(x, R) = \frac{l_\xi}{l_x}.$$

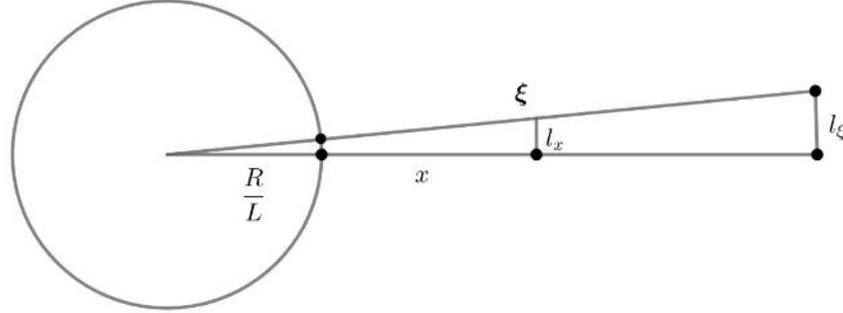


Рисунок 6. Геометрическая иллюстрация параметров, используемых для расчета σ_2

Функция (2.5) имеет максимум не на границе. Чтобы это исправить, находим d_{\max} такое, что $\tilde{\sigma}_2(d_{\max}) = \max \tilde{\sigma}_2(d, R)$. Корректируем формулу (2.5):

$$\sigma_2(d, R) = \begin{cases} \frac{R}{L} + \xi \\ \frac{R}{L} + d \\ \tilde{\sigma}_2(d_{\max}), d < d_{\max} \end{cases}, d \geq d_{\max} \quad (2.6)$$

Считаем σ_{2c} и σ_{2m} : $\sigma_{2c} = \sigma_2(0, R_c)$, где R_c – радиус кривизны. Пусть d_m есть расстояние от вершины контура до медиальной оси, а $\xi_m = \xi(d_m)$ – расстояние от вершины до медиальной оси в лагранжевых переменных. Если

$\xi_m < \xi_D$, то $\sigma_{2m} = \frac{\xi_D}{\xi_m} \sigma_{1.\min}$. Если $\xi_m \geq \xi_D$, то $\sigma_{2m} = \sigma_{1.\min}$. Из двух значений σ_{2c} и

σ_{2m} выбираем максимальное. $\sigma_{2\max} = \max(\sigma_{2c}, \sigma_{2m})$ – значение на границе тела.

Далее находим значение R так, чтобы формула (2.6) была справедлива для найденного $\sigma_{2\max}$. Иллюстрация вспомогательной функции $\tilde{\sigma}_2(d, R)$ и функции после корректировки $\sigma_2(d, R)$ для различных значений R приведена на рисунке 7.

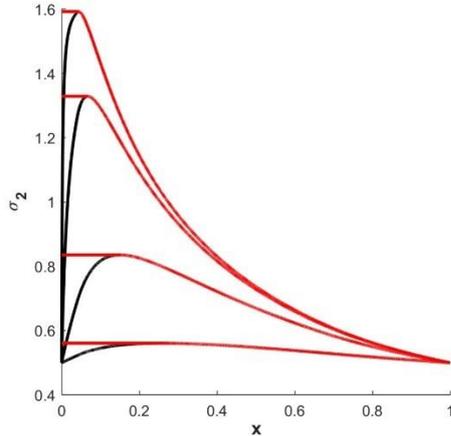


Рисунок 7. Корректировка гиперболических функций для задания σ_2 .

В трехмерной постановке добавляется параметр σ_3 . Тогда построение σ_2 и σ_3 происходит аналогично, используя для задания R значения главных кривизн.

2.3 Интерполяция сеточной адаптации на временных слоях для повышения эффективности

Использование сеточной адаптации существенно увеличивает вычислительную нагрузку расчета. В поисках путей повышения эффективности алгоритма и снижения ресурсозатратности было обнаружено, что поиск адаптивной сетки с помощью минимизации функционала не обязательно делать на каждом шаге по времени.

Предположим, что метрика $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ задана функцией расстояния со знаком $d(\mathbf{x}, t)$. Граничная поверхность тела на момент времени t задана как нулевая изоповерхность d , то есть $\partial\Omega_B(t) = \{\mathbf{x} : d(\mathbf{x}, t) = 0\}$ в момент времени $t = t_n$. Пусть \mathbf{p}_n - направление деформации такое, что смещение $\mathbf{x}(t_n) + s\mathbf{p}_n$ сохраняет сетку невырожденной для всех $0 < s < 1$. Значение $s = 1$ соответствует большому шагу по времени ΔT_n , такому что $\mathbf{x}(t_n + \Delta T_n) = \mathbf{x}(t_n) + \mathbf{p}_n$. Тогда для всех моментов времени $t_{k+1} \leq t_n + \Delta T_n$, для всех $k = n, n+1, n+2, \dots$ можно вычислить

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{x}(t_k) + \frac{\Delta t_k}{\Delta T_n} \mathbf{p}_n.$$

Чтобы задать шаг по времени ΔT_n , подходящий для предсказания положения узлов, требуется вычислить минимальный линейный размер сеточных элементов вблизи границы тела. С учетом заданного управления наименьший размер соответствует $h_1 = \frac{h_0}{\sigma_{\max}}$, где h_0 – размер элементов равномерной

начальной сетки, а σ_{\max} – максимальная степень сжатия в нормальном направлении. σ_{\max} можно вычислить как квадратный корень из максимального собственного значения метрического тензора \mathbf{G} на поверхности тела. Тогда

$$\Delta T_n = \frac{h_1}{\max V_n},$$

где V_n – абсолютное значение нормальной скорости тела вдоль поверхности. Максимум ищется среди вершин, расположенных вблизи границы тела.

Предполагается, что Δt_n не превышает шага предсказания ΔT_n . Можно выделить следующие критерии, которые будут сигнализировать, что сетка меняется слишком быстро для успешного применения интерполяции.

1. Накопленное смещение границы превышает два минимальных сеточных размера h_1 :

$$\int_{t_n}^{t_{k+1}} V_n(t) dt > 2h_1$$

2. $\max \left| d_k \left(x^i(t_k), t_n + \Delta T_n \right) - d_{k+1} \left(x^i(t_k), t_n + \Delta T_n \right) \right| > 0.25h_1$, где

$d_k \left(x^i(t_k), t_n + \Delta T_n \right)$ – предсказанное расстояние до тела в i -ой вершине сетки, которая была вычислена после завершения k -го шага. На этот момент все координаты $x(t_k)$ заданы. $d_{k+1} \left(x^i(t_k), t_n + \Delta T_n \right)$ – предсказанное расстояние до тела i -ой вершины сетки, вычисленное до начала $(k+1)$ -го шага. Эти значения могут различаться, если характер движения тела существенно меняется. Максимум берется по всем вершинам сетки.

В обоих случаях нужно заново вычислять предсказание для нового ΔT_n , заново решая задачу деформации сетки.

Глава 3

Гибридная геометрическая модель тела

3.1 Задачи геометрической модели

При моделировании течений вблизи тела на основе метода погруженных границ в любой момент времени необходимо иметь возможность проверять принадлежность телу каждой вершины расчетной сетки. Параметром всего вычислительного алгоритма является поле функции разметки или функции расстояния со знаком. В общем же случае, когда форма тела произвольна, существует ряд подходов для эффективного поиска приближенного расстояния до поверхности тела. Заметим, что для задания тела в модели на основе метода погруженных границ достаточно только функции Хэвисайда относительно области занимаемой телом, однако, даже сравнительно простая изотропная адаптация к поверхности потребует более полного задания геометрии. В частности, для построения алгоритма анизотропной адаптации нужна функция, возвращающая значение расстояния и градиента функции расстояния (2.4) для любой точки расчетной области с требуемой точностью вблизи границы.

3.2 Фоновая декартовая сетка структуры восьмеричного дерева для хранения геометрических параметров тела

Для задания тела в концепции разрабатываемого в диссертационной работе гибридного метода DMR-IBM ранее был предложен подход [47, 48], использующий фоновую декартовую сетку структуры восьмеричного дерева, вершины которого хранят точные значения функции расстояния и ее приближенные градиенты. Фоновая сетка является атрибутом тела, движется вместе с ним (Рис. 9), а быстрый поиск расстояний для точек расчетной области обеспечивается интерполяцией в ячейках этого дерева. В диссертационной работе

этот подход расширяется для задания функции управления анизотропной сеточной адаптацией. Новая реализация геометрической модели тела позволяет, помимо расстояний, рассчитывать, хранить и интерполировать различные параметры, определяемые формой тела. Геометрическая модель подается на вход алгоритму сеточной адаптации и должна обеспечивать быстрый доступ ко всем требующимся данным тела. Управление адаптацией, описанное в главе 2 использует значения расстояния, градиента расстояния, главных кривизн, их соответствующих направлений, расстояния до внешних и внутренних медиальных осей. Причем все эти параметры заданы в виде полей величин, определенных во всей расчётной области. Чтобы построить поля параметров, исходно заданных на поверхности тела, проводится их экстраполяция на трехмерную (или двумерную) расчетную область.

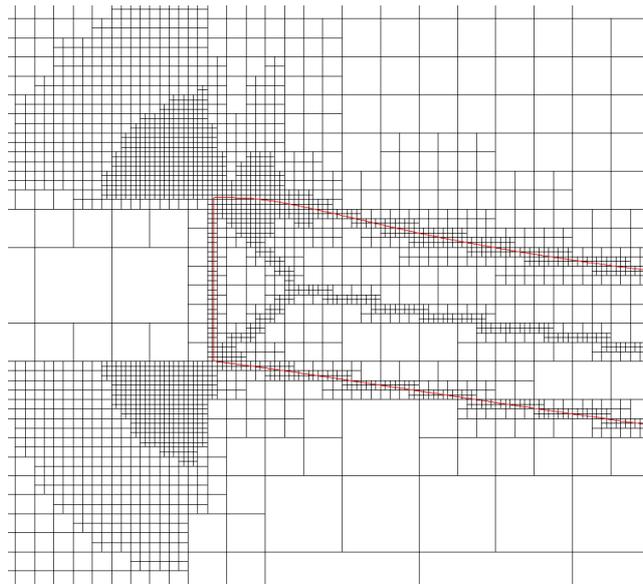


Рисунок 8. Фрагмент четверичного дерева на плоскости, контур тела выделен красным.

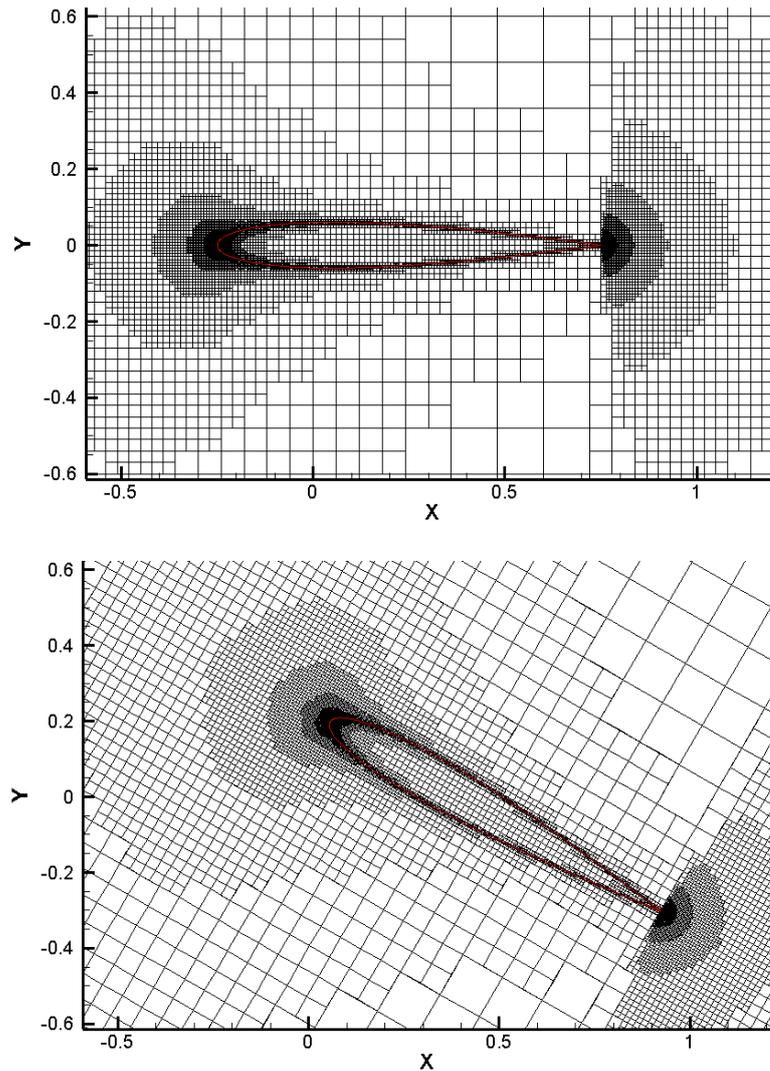


Рисунок 9. Красным выделено положение тела. Фоновая сетка движется вместе с телом.

Фоновая сетка (рис. 8) строится и заполняется значениями геометрических параметров на этапе предварительной подготовки геометрии на основе заданной подробной поверхностной триангуляции поверхности тела. Такое заполненное восьмеричное дерево является атрибутом, вообще говоря, движущегося тела в процессе расчета и позволяет быстро воспроизводить все необходимые геометрические параметры на основной расчетной сетке путем интерполяции с него. Следует отметить, что при использовании изначально определенной фоновой сетки, кроме отмеченного преимущества, имеет и очевидный недостаток. Для нестационарной задачи внешнего турбулентного об-

текания предсказать требуемый минимальный размер разбиения, вообще говоря, проблематично, а строить глубокие восьмеричные деревья весьма затратно по времени и ухудшает эффективность алгоритма поиска по нему.

3.3 Гибридная структура модели

Для построения эффективной геометрической модели, помимо восьми-дерева, используется дополнительная поисковая структура вида k-d дерева. Восьмидерево позволяет получать приближенные значения, используя интерполяцию, а k-d дерево отвечает за эффективное вычисление точных значений геометрических параметров. Гибкая комбинация фоновой сетки восьмеричной структуры и k-d дерева определяет *гибридность* предложенной в работе геометрической модели тела.

3.4 Подготовка геометрической модели тела перед началом расчета

Предварительную подготовку геометрии тела можно разбить на следующие последовательные этапы.

1. В качестве исходных данных вход алгоритма подается подробная триангуляция граничной поверхности тела (рис. 10.а).
2. Вычисляются приближенные величины главных кривизн поверхности тела (рис. 10.б, 10.в) и их соответствующие направления. Зачастую, геометрия тела, на основе которой строилась триангуляция, имеет изъяны, например, неконформные стыки между поверхностями. Чтобы снизить влияние этих изъянов, иногда требуется сглаживание.
3. Находятся приближенные медиальные оси тела, вычисляется расстояние до них от каждой вершины триангуляции (рис. 10.г).
4. Формируется поисковое k-d дерево для быстрого поиска точного расстояния от произвольной точки в области течения до поверхности тела.

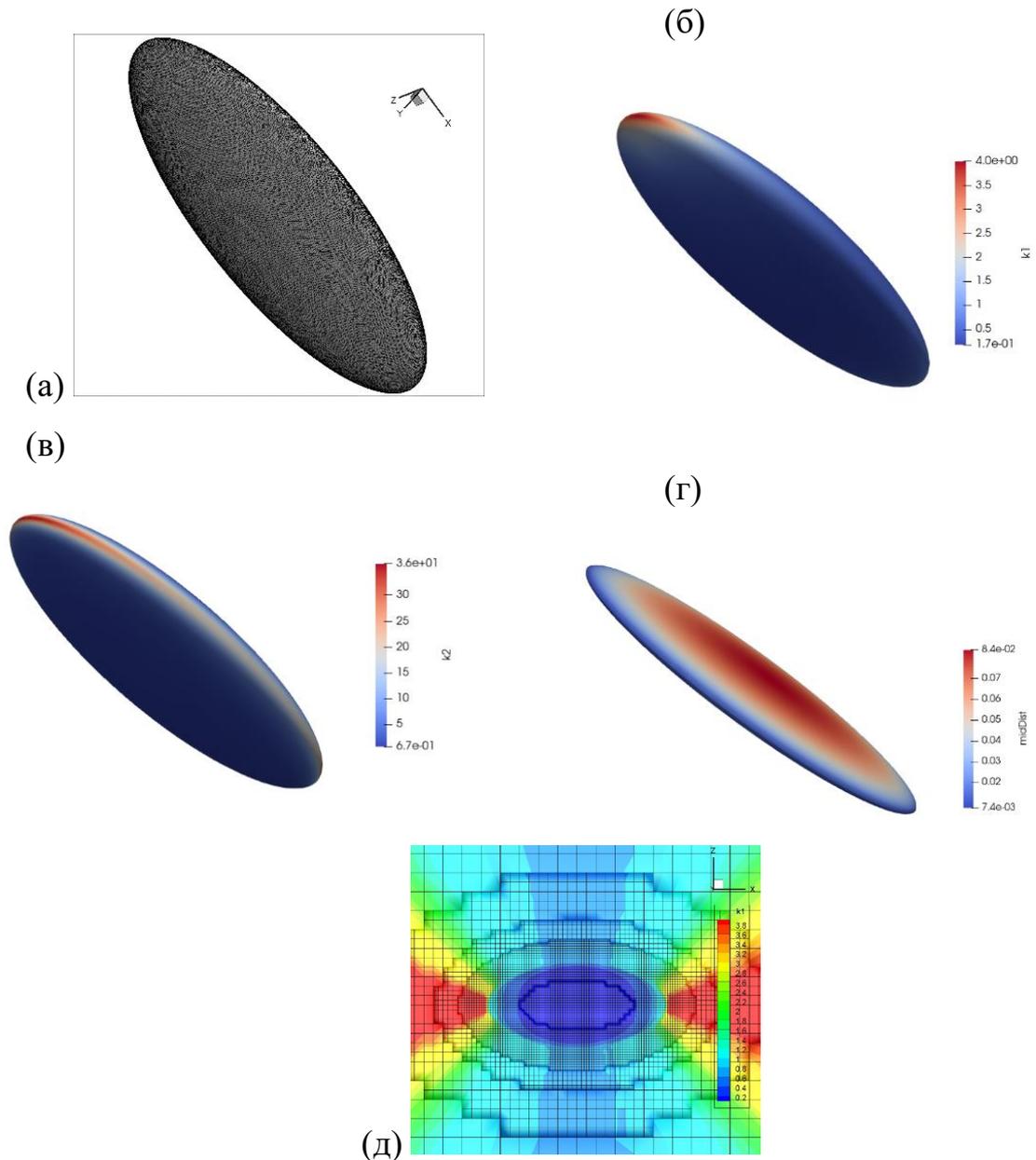


Рисунок 10. Визуализация этапов подготовки геометрии. (а) – триангуляция поверхности, (б) и (в) – главные кривизны, (г) – расстояния до медиальных осей, (д) – экстраполяция одной из главных кривизн в вершины восьмеричного дерева.

5. С использованием k-d дерева строится интерполяционная решетка вида восьмеричного дерева, выступающая в роли атрибута тела, или носителя его геометрии.

6. Для всех вершин восьмеричного дерева вычисляются экстраполированные значения параметров поверхности (рис. 10.д и рис. 11). Каждой вершине фонового восьмеричного дерева приписывается значение, взятое

с поверхности в ближайшей к данной вершине точке граничного контура/поверхности (рис. 11).

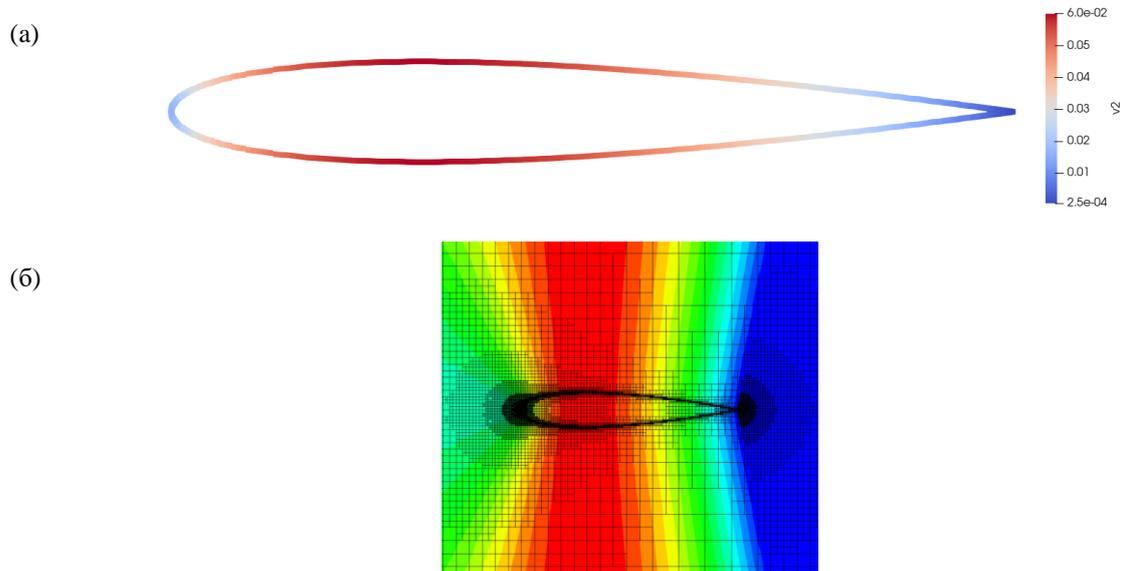


Рисунок 11. Распределение значений радиуса кривизны для профиля NACA0016 и соответствующее распределение на восьмеричном дереве.

3.5 Задание полей параметров поверхности тела

Поскольку аналитическая функция задания поверхности не всегда доступна, то для учета общего случая используется подробная триангуляция поверхности подвижного тела. Для вычисления характерного размера структур на поверхности используется аппарат медиальных осей. Как известно, медиальные оси — это совокупность центров шаров касающихся границы области не менее чем в двух точках. В каждой точке границы тела можно определить расстояние до медиальной оси. На линиях излома или в конических вершинах это расстояние будет равно нулю, т. е. медиальные оси подходят непосредственно к поверхности. На практике медиальные оси аппроксимируются ребрами и гранями Вороного в предположении, что граница тела задается достаточно густым облаком точек, как предложено в известной работе Нины Аменты [49]. В данной работе для построения медиальных осей используется оригинальная версия алгоритма PowerCrust Нины Аменты. Хорошо известно,

что этот алгоритм недостаточно устойчив и может порождать паразитные компоненты медиальных осей. Выбор устойчивой версии алгоритма построения медиальных осей применительно к задаче построения адаптивной метрики требует дополнительных исследований. Другие характерные масштабы на поверхности задаются радиусами главных кривизн на поверхности. Для тел общего вида используется приближенный алгоритм вычисления кривизны на триангулированной поверхности, в версии, предложенной Рао Гаримелла [50]. В этой работе в каждой вершине триангулированной поверхности приближенно вычисляется соприкасающийся параболоид при помощи нелинейного метода наименьших квадратов и подгонки локальной системы координат. Таким образом, в каждой вершине триангуляции оказываются известны главные направления кривизн и главные радиусы кривизны, а также расстояния до медиальных осей.

Все найденные параметры записываются в вершины восьмигранника. Для каждой вершины находится ближайшая точка на поверхности и ее барицентрические координаты в некотором поверхностном треугольнике. Эти координаты далее используются для интерполяции поверхностных параметров в ближайшей точке, а получившееся значение записывается в вершину восьмигранника.

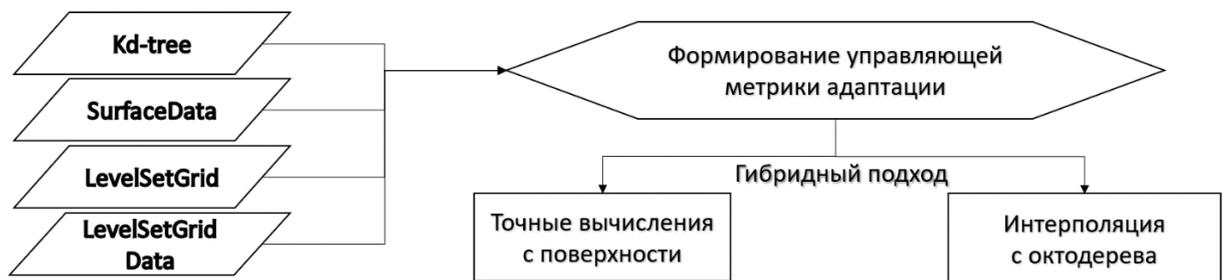


Рисунок 12. Схема гибридного подхода к формированию управляющей метрики.

В рамках представленной геометрической модели можно считать параметры формы тела как точно, находя проекции на триангуляцию с помощью поискового k-d дерева, так и пользоваться исключительно фоновой сеткой и интерполяцией по ней. На практике же комбинация этих подходов (рис. 12)

позволяет быстро и с хорошей точностью формировать управляющую метрику. В большей части расчетной области параметры интерполируются, но вблизи тела, когда мелкость разбиения октодеревя не удовлетворяет требованиям адаптации, параметры вычисляются точно.

3.6 Метрическая интерполяция

Поскольку восьмеричное дерево хранит не только скалярные величины, но и векторные, остро стоит вопрос корректной интерполяции. В частности, пары векторов, соответствующих главным направлениям кривизн, должны сохранять ортогональность. Эту проблему удалось избежать путем перехода к интерполяции непосредственно метрического тензора. В каждой вершине восьмеричного фонового дерева формируется управляющий метрический тензор. Для интерполяции в вершинах расчетной сетки используется линейная интерполяция матриц в логарифмическом пространстве [51].

В работе вводятся понятия метрических логарифма и экспоненты, коммутативной операции сложения и операции умножения на константу. Оперируя в пространстве метрических тензоров, задается интерполяция, которая обладает свойством коммутативности, то есть не зависит от порядка применения метрик.

Глава 4

Программный модуль динамической адаптации

4.1 Программный модуль в адаптации составе комплекса NOISEtte

Модули, отвечающие за движение сетки и задания тела, реализованы внутри программного комплекса NOISEtte [52]. Комплекс предназначен для решения задач аэродинамики и акустики, и имеет модульную структуру. NOISEtte имеет интерфейс для использования различных алгоритмов деформации сетки без изменения топологии. В случае, когда узлы сетки не стационарны, после сдвига требуется перерасчет контрольных объемов, нормалей к контрольным поверхностям, проверка качества сетки, расчет скоростей сеточных узлов и коррекция шага по времени с учетом этой скорости. Таким образом, работа алгоритма сеточной адаптации или деформации изолирована от работы основного кода и вносит изменения только в сетку, а интерфейс производит перерасчеты для корректной работы расчетного кода.

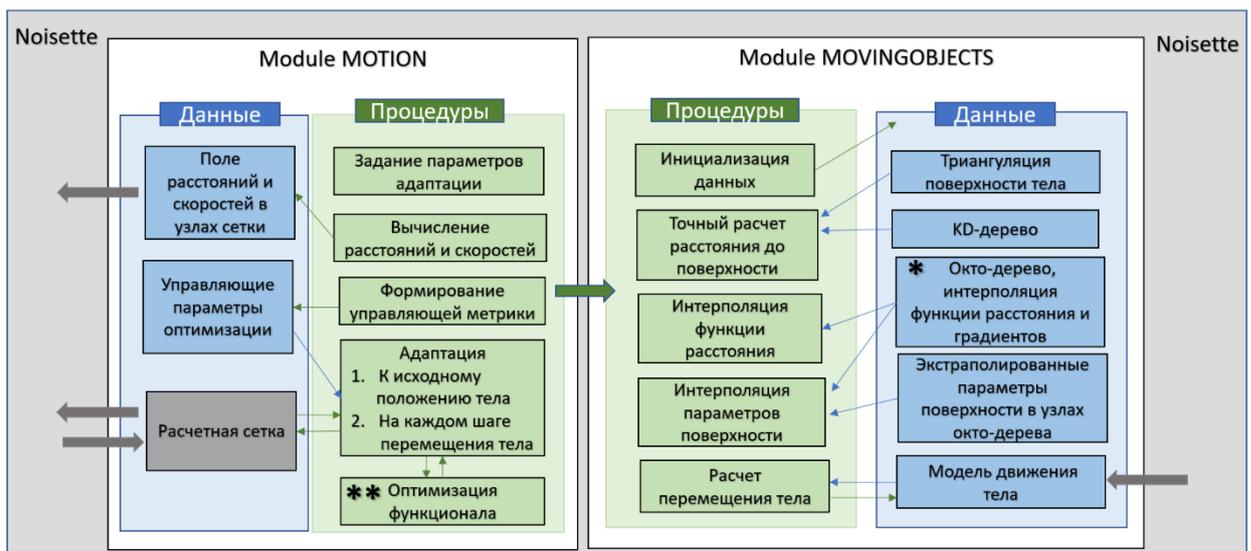


Рисунок 13. Схема взаимодействия модулей и внешнего кода.

Работа алгоритма адаптации обеспечивается двумя модулями: MOTION и MOVINGOBJECTS. Модуль MOTION обеспечивает следующий основной функционал:

- 1) чтение параметров адаптации, переданных пользователем,
- 2) формирование управляющей метрики в заданной точке расчетной области,
- 3) «стационарная» (то есть предварительная адаптация к покоящемуся телу перед началом расчета) адаптация,
- 4) динамическая адаптация на шаге по времени при сдвиге тела.

Модуль MOVINGOBJECTS обеспечивает следующий основной функционал:

- 1) чтение и инициализация геометрической модели,
- 2) задание положения тела,
- 3) формирование данных для обеспечения работы метода погруженных границ: задание маски принадлежности вершин телу и скорости вершин, согласованных с законом движения,
- 4) поиск приближенных и точных расстояний при новом положении тела.

Рисунок 13 демонстрирует схему взаимодействия модулей и основного кода. Блоки, помеченные звездочками, используют внешние библиотеки. В частности, оптимизация функционала осуществляется библиотекой оптимизации двумерных и трехмерных расчетных сеток Гаранжи В.А. (opti2d и prismatic_qi3d_poly), которые были модифицированы и пополнены в процессе работы для решения задач адаптации.

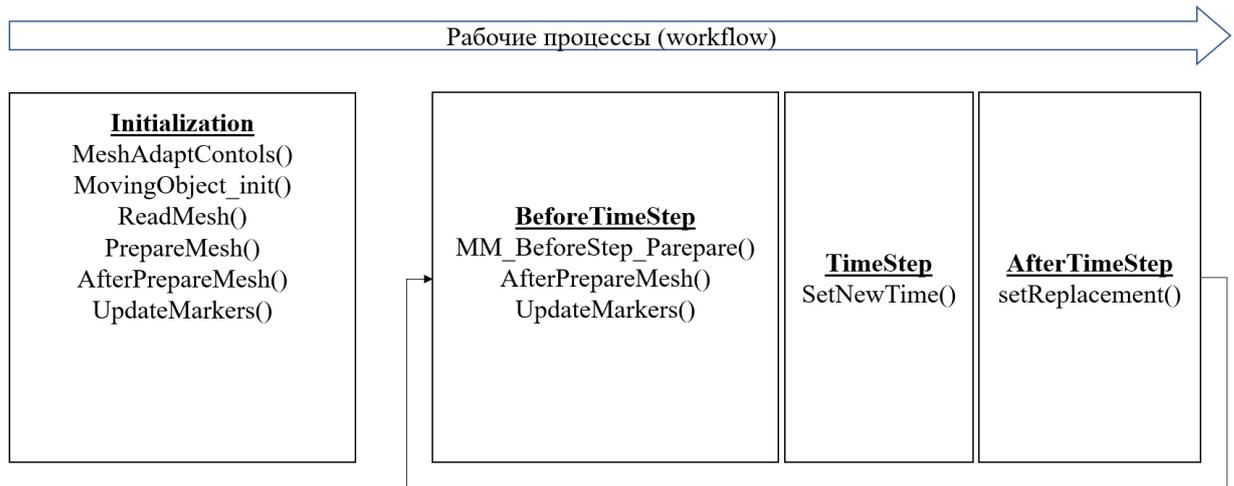


Рисунок 14. Схема последовательности работы модулей, связанных с адаптацией, относительно основных процессов.

На Рисунке 14 представлен порядок выполнения основных функций, обеспечивающие работу адаптации, и показывает, где модули «врезаются» в основной код. На этапе инициализации происходят следующие важные шаги.

1. В `MeshAdaptContols()` считывается файл с параметрами адаптации, заданными пользователем: `maxIter` – количество итераций стационарной предварительной адаптации, `gMax` – максимальное сгущение начальной сетки, которое должно достигаться на границе тела в нормальном направлении, `dMin` – расстояние от поверхности тела, где должно сохраняться максимальное сгущение, `rOut` – расстояние от поверхности, которое задает область работы адаптации, `decay` – желаемая скорость роста линейного размера сеточных элементов.
2. `MovingObject_init()` инициализирует объект подвижного тела на основе считанных из файла параметров и типа движения тела, если оно задано внешне формулой. Тело может задаваться аналитически или геометрической моделью. В первом случае в файле указывается аналитическая форма из доступных и соответствующие параметры, необходимые для ее задания. Например, сфера задается по имени объекта `sphere` с радиусом `radius` и центром `centerVector`. Если тело задано геометрической моделью, требуется считать все файлы ее определяющие. Геометрические

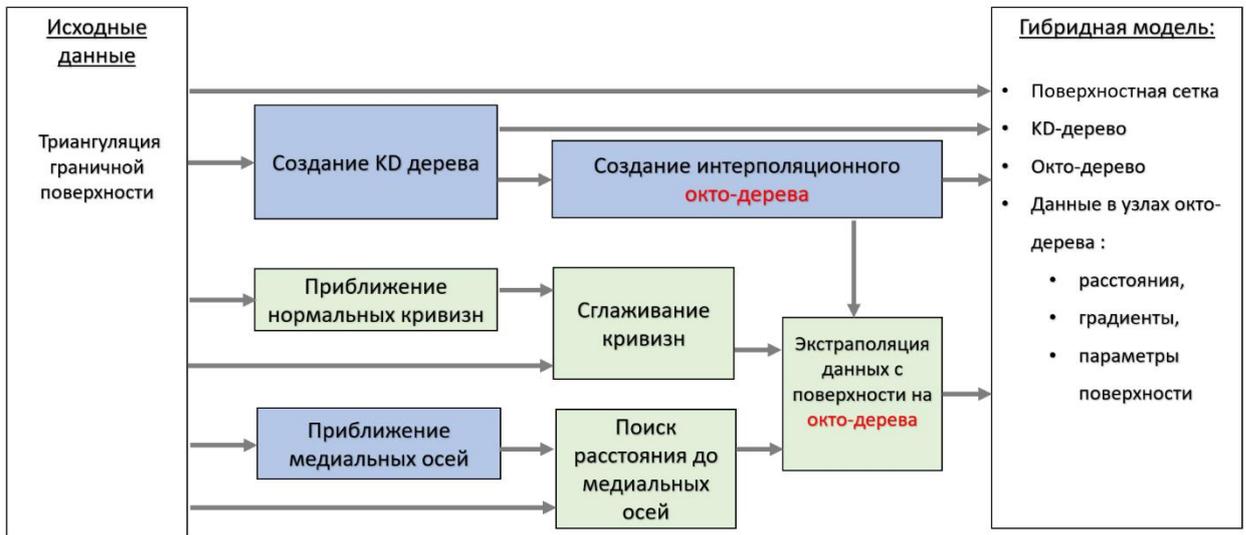
модели разделены на следующие типы: `DistFunOnGrid`, `DistFunOnKdTree`, `DistFunHybrid`, где расстояние (а также другие параметры) определяются интерполяцией на фоновой сетке, точным поиском до триангулированной поверхности или комбинацией методов, соответственно.

3. После считывания сетки `ReadMesh()` проходит предварительная адаптация `PrepareMesh()` к начальному положению тела. Проводится `maxIter` итераций минимизации функционала для достижения заданного ранее сгущения. Для сетки с новыми координатами `AfterPrepareMesh()` пересчитывает контрольные объемы.
4. `UpdateMarkers()` переопределяет массив маркеров принадлежности вершины сетки телу и пересчитывает расстояния. Маркеры далее используются в модуле `IBC`.
5. На каждом шаге по времени проходит один шаг адаптации `MM_BeforeStep_Prepare()`, пересчет контрольных объемов и маркировка вершин. А после перехода на новый временной слой рассчитывает новое положение тела в соответствии с законом движения.

4.2 Модуль предварительной подготовки геометрии

Модуль состоит из набора утилит, которые путем поэтапного применения ко входным данным, создают набор поисковых структур и данных, которые формируют гибридную геометрическую модель. На стороне расчетного кода добавлен интерфейс для чтения и использования геометрической модели. В качестве исходных данных в трехмерном случае принимается подробная триангуляция поверхности тела, то есть набор вершин и треугольников, составленных из этих вершин. В двумерной постановке аналогично принимается набор сегментов контура. Схема подготовки геометрии приведена на рисунке 15. Некоторые этапы далее рассматриваются более подробно. Как итог, гео-

метрическая модель сформирована двумя структурами: k-d дерево и восьмигранное дерево, обе из которых сохранены отдельными файлами. Данные также хранятся отдельно: все поверхностные параметры на исходной поверхностной сетке записаны в формате vtk, а данные в вершинах октодерева записаны в



своем локальном виде.

Рисунок 15. Схема обработки геометрии и формирования геометрической модели.

Поисковое k-d дерево

Для быстрого поиска по элементам триангулированной поверхности используется k-d дерево [48, 53]. K-d дерево представляет собой разновидность двоичного дерева поиска. Принцип построения k-d дерева состоит в рекурсивной бисекции расчетной области плоскостями, перпендикулярными осям координат. Триангуляция погружается в параллелепипед, ребра которого параллельны координатным осям. Охватывающий параллелепипед принимается за область построения k-d дерева и становится его корнем. Ориентация и положением плоскостей разбиения узлов дерева выбираются таким образом, чтобы появляющиеся в результате декомпозиции потомки содержали равное число вершин триангуляции. Рекурсивная бисекция узлов продолжается до достижения заданного числа вершин, либо прерывается по ограничению на максимальную глубину дерева. В финале процедуры для листьев составляются

списки принадлежащих им треугольников. Треугольник относится к узлу дерева, если частично или полностью находится внутри ассоциированного с этим узлом параллелепипеда. Элементы триангуляции, пересекающиеся с гранями параллелепипедов нескольких узлов, включается в списки каждого из них.

Для приведенных в работе исследуемых тел, как правило, строилось дерево поиска не выше 14 уровней разбиения, причем число вершин в подобластях отличалось не более, чем на 10%. На рисунке 16 приведена визуализация подобластей 7-го уровня разбиения из 12 итоговых для триангуляции поверхности фюзеляжа.



Рисунок 16. Границы подобластей 7-го уровня разбиения для триангуляции поверхности фюзеляжа.

Код авторства Сергея Сукова интегрирован в NOISEtte в виде библиотеки.

Вычисление кривизн

В формате утилиты был реализован алгоритм [50] поиска приближенных кривизн.

Алгоритм поиска кривизны в вершине включает следующие этапы.

1. Задание начальной нормали в точке. Например, можно взять средневзвешенную нормаль по инцидентным треугольникам.
2. Переход в локальную систему координат, где одна из осей совпадает с нормалью, а две другие лежат в тангенциальной плоскости.
3. Формирование списка из вершин 1-го и 2-го уровня соседства.

4. Нахождение коэффициентов квадратичной формы вида $Z' = aX'^2 + bX'Y' + cY'^2 + dX' + fY'$ в локальной системе координат методом наименьших квадратов.

5. Задание новой нормали в соответствии с найденной квадратичной формой.

Алгоритм работает в цикле, пока нормаль не сойдется. Для итоговой квадратичной формы вычисляются главные кривизны и направления главных кривизн.

Зачастую, исследуемая геометрия имеет дефекты, например неконформные соединения поверхностей исходной геометрии могут приводить к наличию особенностей геометрии не характерных для реального тела. Для иллюстрации на рисунке 17 приводится исходная геометрия винта, где лопасть сформирована несколькими поверхностями, а кривизна триангулированной поверхности чувствительна к дефектам. Как правило, применяется сглаживание по Лапласу, однако универсального алгоритма пока не было разработано.

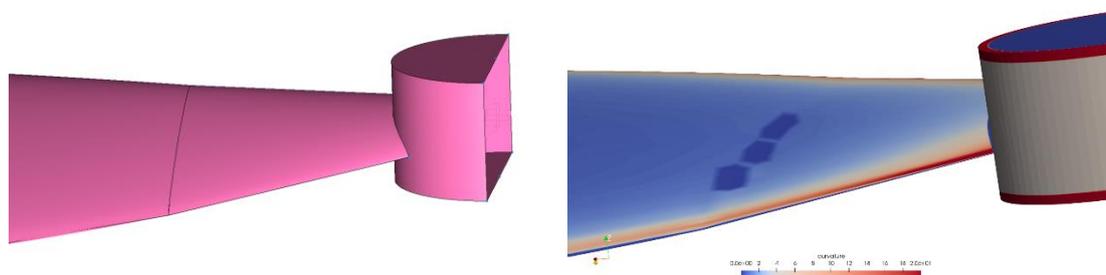


Рисунок 17. Распределение кривизны на фрагменте винта.

Приближение медиальных осей

Для вычисления медиальных осей используется сторонняя программа PowerCrust [49], которая аппроксимирует медиальные оси гранями Вороного. Для корректного нахождения как внутренних, так и внешних медиальных осей исходная триангуляция помещается внутрь триангулированного параллелепи-

педа, стенки которого расположены достаточно далеко от поверхности. Полученное приближение медиальных осей может быть зашумлено и требовать фильтрации. Подход не является оптимальным с точки зрения автоматизации.

Для всех вершин поверхностной триангуляции тела находится расстояние до медиальных осей. Для этого формируется дерево поиска, аналогичное k-d дереву описанному ранее, но в данном случае на основе элементов приближенных медиальных осей.

Экстраполяция данных с поверхности на дерево

В качестве входных данных утилита принимает файл с восьмеричным фоновым деревом и `vtk` с поверхностными параметрами. На выходе формируется файл с данными в вершинах фоновой сетки.

Для каждой вершины восьмидерева ищется ближайшая точка на поверхности триангуляции в виде барицентрических координат внутри треугольника, содержащего эту точку. Используя интерполяцию на основе барицентрических координат, вычисляются поверхностные параметры в ближайшей точке и переносятся в вершину восьмидерева.

4.3 Параллельная реализация

Все модули и утилиты, отвечающие за подготовку геометрии, вызываются один раз для каждого тела и работают в последовательном режиме.

Алгоритм адаптации реализован [62] в рамках программного комплекса NOISEtte, который распараллелен с использованием MPI+OpenMP [52]. Динамическая сеточная адаптация следует модели распараллеливания MPI. Параллельный алгоритм использует декомпозицию пространственной сетки (рис. 18). Расчетная область разбивается на связанные подобласти, состоящие из ячеек сетки. Вершины сетки, принадлежащие границам между подобластями, распределяются между подобластями. Используется параллельный итерационный солвер на основе BiCGStab с предобуславливателем ILU2 [46].

Практика показала, что одной итерации минимизации функционала достаточно для сохранения заданного сгущения сетки при смещении тела при условии, что это смещение не превышает двух сеточных элементов.

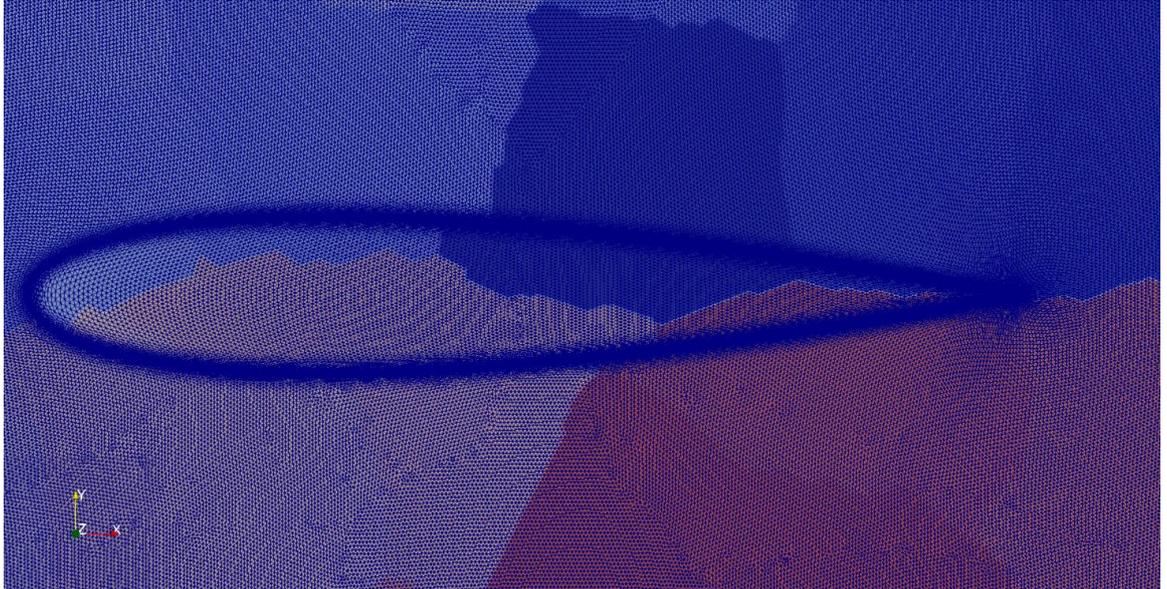


Рисунок 18. Декомпозиция расчетной сетки.

4.4 Исследование эффективности вычислительного алгоритма

В главе 2 было показано, что адапционный алгоритм может прогнозировать деформацию сетки на шаге по времени, превышающим шаг решателя CFD. В этом случае на промежуточных временных шагах сетка получается методом интерполяции без каких-либо высоконагрузочных операций. Интерполяция существенно повышает вычислительную эффективность решателя деформации сетки. Однако выгода такого подхода может сильно меняться для разных постановок. Например, рассматривались следующие задачи: гармонические колебания цилиндра, сферы (постановки описаны в главе 5) и профиля NASA0012, вращение двумерного винта (постановка приведена в главе 6). На рисунке 19 приводится соотношение затрат по времени на адаптацию относительно всего шага. На шагах, где работает решатель сеточной адаптации, соотношение достигает 85%, но суммарный вклад адаптации во все время расчета снижен до 20-40% в зависимости от задачи.

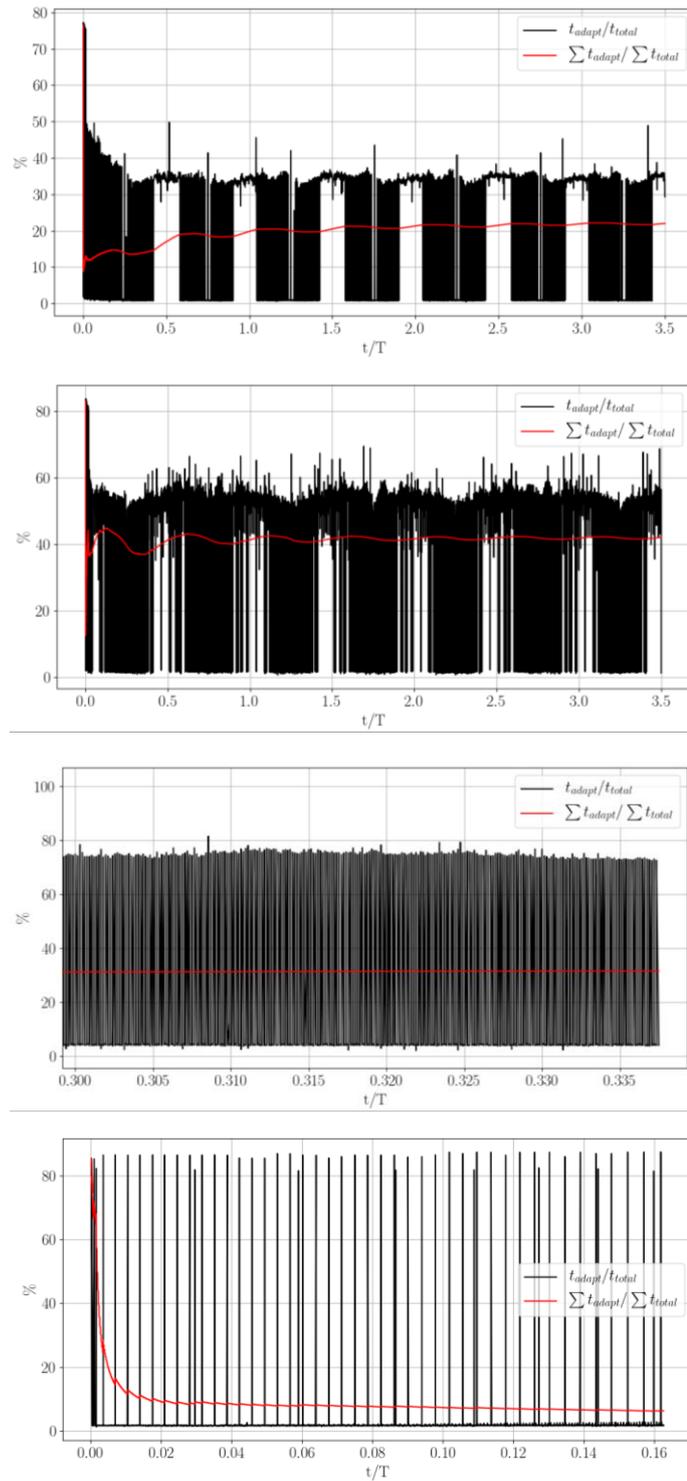


Рисунок 19. Черным: отношение времени адаптации к общему времени, которое требуется для расчета одного шага по времени, красным: отношение суммарного времени, которое занимает адаптация от общего шага по времени. Рисунки соответствуют задачам о цилиндре, профиле NASA0012, двумерном винте и о сфере.

Однако, в задачах, где минимизация функционала требуется на каждом шаге по времени, адаптация существенно увеличивает нагрузку расчета. В данной работе часто сравниваются результаты моделирования на адаптивных сетках с аналогичными результатами на классических стационарных сетках, когда это возможно. Можно провести аналогичное сравнение с точки зрения эффективности. Затраты ресурсов для метода DMR-IBM в 8,7 раз выше, чем у классического подхода, использующего согласованные с границей сетки, подхода на сетках одинакового размера с тем же шагом по времени. В первую очередь, достаточно низкая эффективность связана с неоптимальностью распараллеливания солвера адаптации в настоящее время и, в частности, отсутствия в модели распараллеливания возможностей параллелизма для систем с общей памятью.

Глава 5

Тестирование, верификация и валидация

5.1 Задача обтекания двумерного цилиндра, движущегося под действием внешней гармонической силы

В качестве простейшей задачи для верификации описанной методики была выбрана проблема обтекания подвижного двумерного цилиндра. Цилиндр совершает гармонические колебания в стационарной среде [54]. Расчет подобной задачи с использованием метода погруженной границы описан в работе [55].

Цилиндр совершает вынужденные колебания по закону $x_c(t) = -A \sin(2\pi ft)$, где A – амплитуда колебаний, а f – частота. Для дальнейшего сравнения с экспериментальными данными число Рейнольдса и число Келегана — Карпентера выбираются как

$$Re = U_{\max} \frac{D}{\nu} = 100; KC = \frac{1}{f} \frac{U_{\max}}{D} = 5;$$

На рисунке 20 приведены фрагменты сеток, используемых для расчетов. Подробная сетка насчитывает 200 тысяч узлов, а грубая в 10 раз меньше. Расчеты проводились на подробной сетке без адаптации и на грубой с адаптацией. Параметры адаптации задавались таким образом, чтобы ячейки, лежащие на границе цилиндра, были примерно одного размера с ячейками подробной сетки.

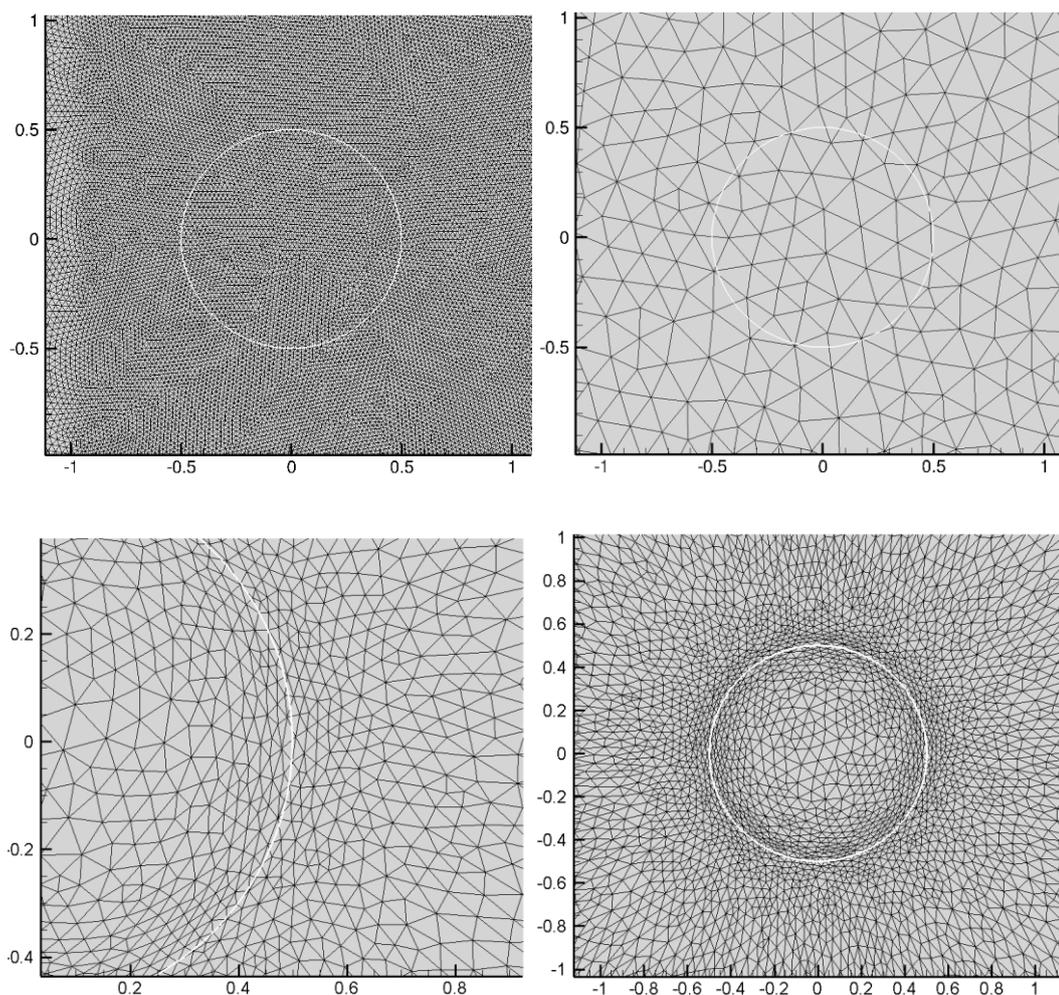


Рисунок 20. Фрагменты сеток для численных расчетов: сетка высокого разрешения, грубая сетка и два фрагмента адаптивной сетки, полученной на начальной грубой.

На рисунке 21 приведены распределения продольной и поперечной компонент скорости, полученные в расчётах на статической и адаптивной сетках в сечениях $x = 6$, $x = 0$, $x = 12$ в моменты времени, соответствующие двум различным фазам колебания. Можно видеть хорошее согласование результатов расчёта с использованием обоих подходов с экспериментальными данными.

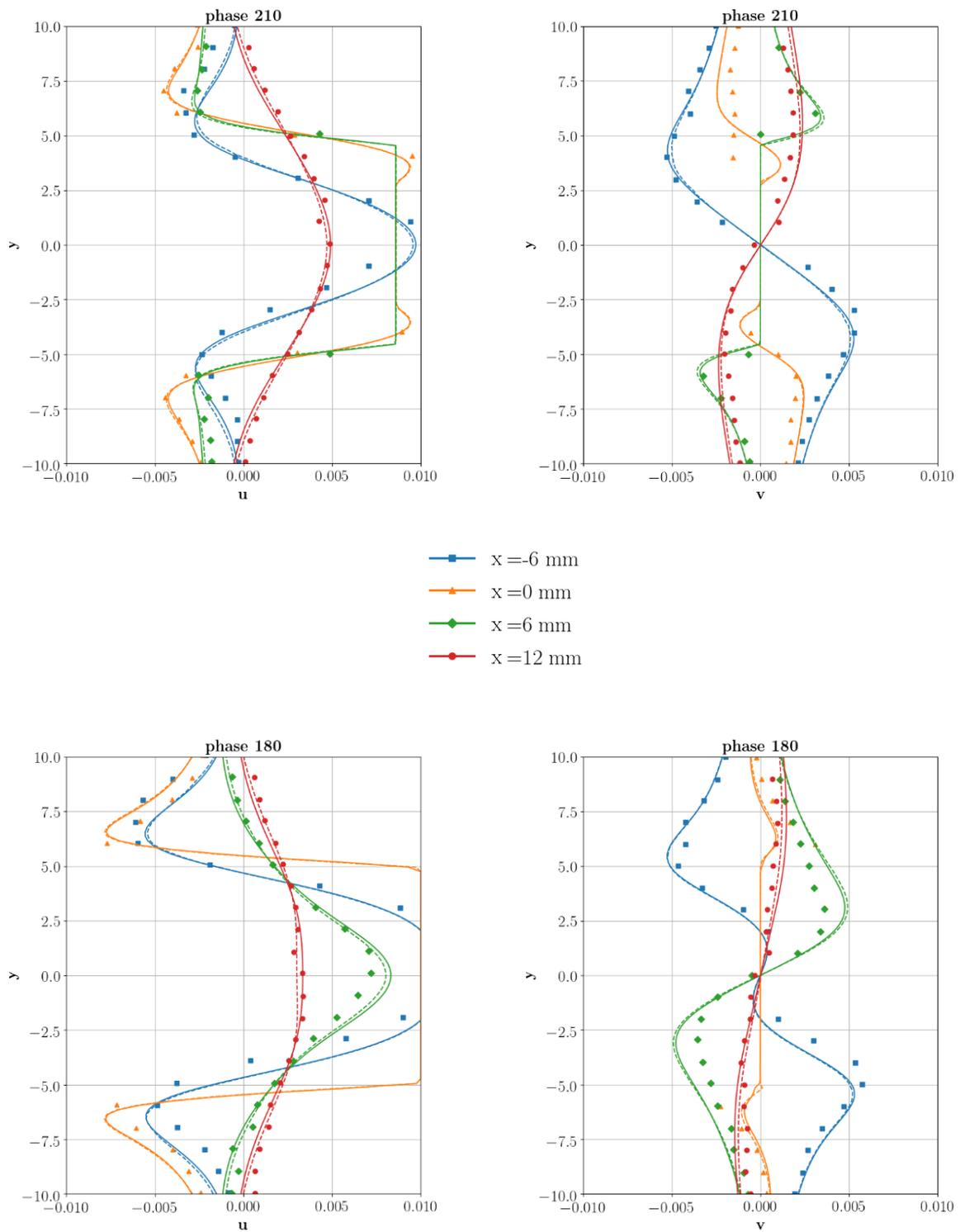


Рисунок 21. Распределения продольной (слева) и поперечной (справа) компонент скорости, соответствующие двум различным фазам колебания – 210° (сверху) и 180° (снизу). Сплошные линии соответствуют расчету на подробной статической сетке, пунктирные – расчету на динамически адаптивной сетке, маркеры – эксперименту.

5.2 Задача обтекания сферы, движущейся под действием внешней гармонической силы

Для иллюстрации работы метода погруженной границы в комбинации с сеточной адаптацией в трехмерной постановке рассмотрена задача моделирования течения, создаваемого вынужденными колебаниями сферы. Сфера диаметром $D=1$ совершает движения по закону $y = A\sin(2\pi ft)$, где $A=0.2$, а $f=0.15$ в вязкой сжимаемой жидкости. Число Рейнольдса, посчитанное по максимальной скорости $U_{\max} = 2\pi fA$ и диаметру цилиндра, полагалось равным $Re=318.3$. Число Маха набегающего потока $M=0.05$. Схематическое описание задачи приведено на рисунке 22.

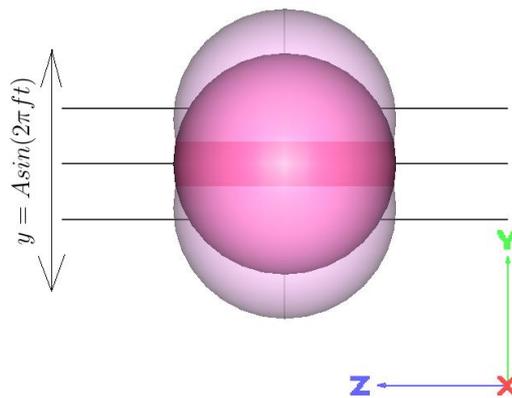


Рисунок 22. Схема течения и движения сферы

Задача решалась в двух постановках: на неподвижной согласованной с границей сетке, где движение сферы моделировалось в неинерциальной системе координат, связанной со сферой и на односвязной сетке, где форма тела определялась методом погруженной границы, а граница разрешалась с помощью адаптации. В первой постановке в уравнение для продольного импульса в системе уравнений Навье-Стокса был добавлен источниковый член, соответствующий изменению скорости движения тела.

Согласованная с границей сетка имела размер 350 тыс. узлов, адаптированная сетка – 1 миллион узлов. Фрагменты сеток представлены на рисунке 23.

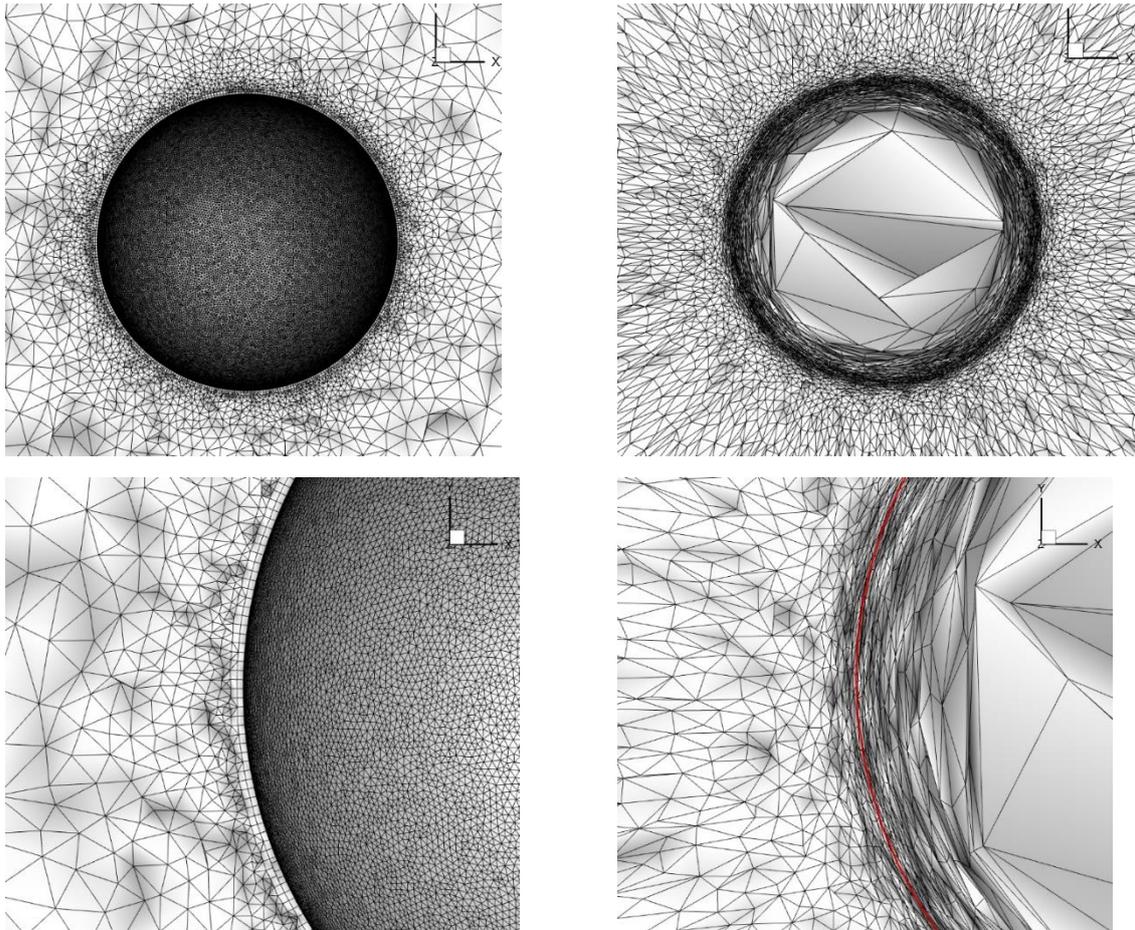


Рисунок 23. Фрагменты сетки, согласованной с телом (слева), фрагменты адаптивной сетки (справа).

Сопоставление двух методик расчета проводилось путем сравнения профилей скоростей v и w и вдоль оси x в трех сечениях, определяемых координатами $z = 0$, $y_1 = -0.25$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0.25$, $-1 \leq x \leq 1$ (Рисунок 24). Профили указанных переменных приведены на момент времени, соответствующий первой четверти периода, то есть в момент максимального отклонения сферы от начального положения.

Как показывает рисунок 24 моделирование малых движений с помощью сеточной адаптации может давать просадки в амплитуде компонент скорости. Предположительно, это связано с тем, что размер первой пристеночной ячейки адаптированной сетки в 1.5-2 раза больше размера ячейки на согласованной с границей сетке. Достижение аналогичного размера пристеночной ячейки требует адаптивную сетку значительно большего размера.

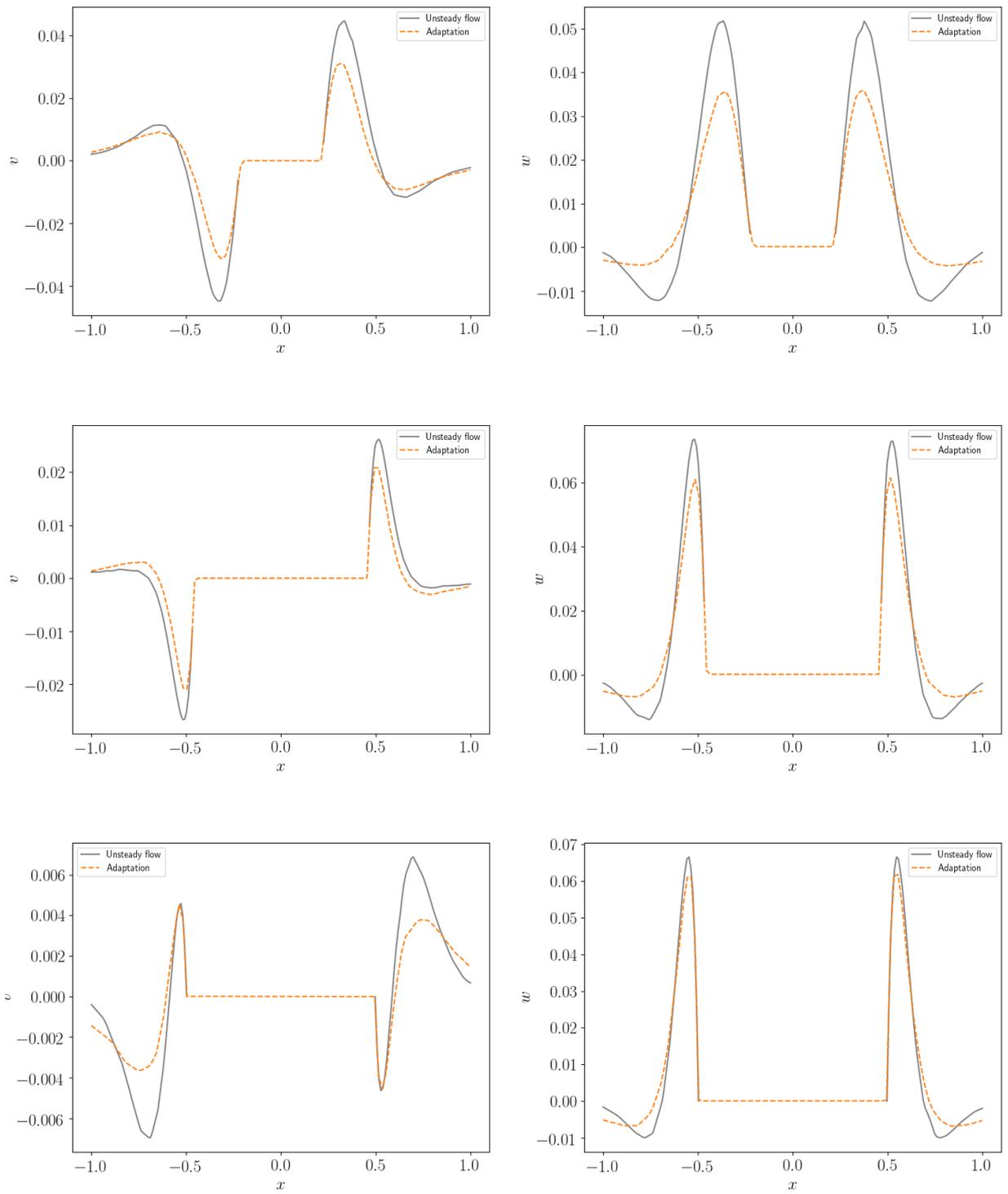


Рисунок 24. Компоненты скорости v (слева) и w (справа) в сечениях $y = -0.25$ (сверху), $y = 0$ (в середине), $y = 0.25$ (снизу) в момент времени $t = T/4$

5.3 Тестирование анизотропной адаптации на эллипсоиде

Для тестирования анизотропной адаптации выбирался эллипсоид с полуосями $a=0.5$, $b=0.25$, $c=0.075$. Требуется сгустить сеточные элементы вдоль сильно скривленных кромок эллипсоида.

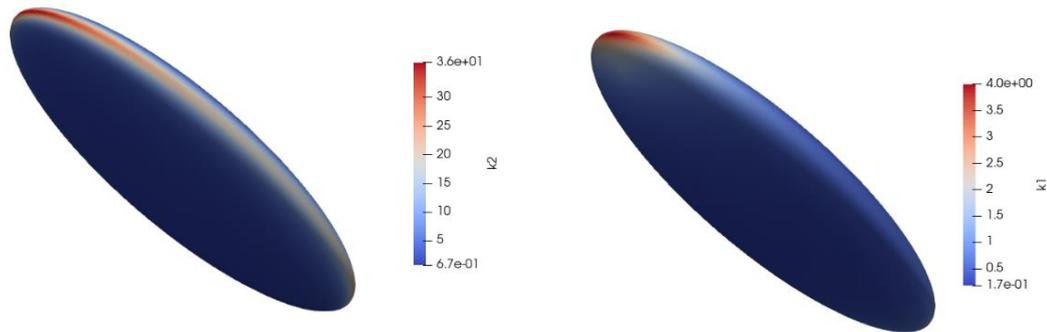


Рисунок 25. Главные кривизны для эллипсоида с тремя разными полуосями.

На рис. 26(а) показаны поверхности, составленные из граней адаптивной сетки, на которых значение функции расстояния минимально. Метод, основанный на использовании кривизны (рис. 25), обеспечивает эффективное разрешение острых кромок эллипсоида, как показано на рисунке 26(б).

(а)

(б)

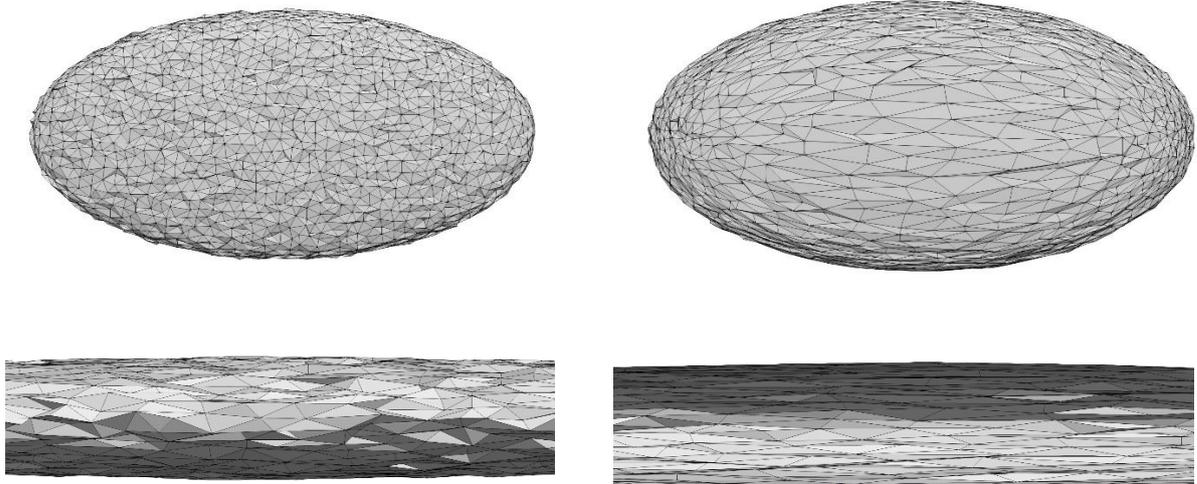


Рисунок 26. “Поверхностная сетка” эллипсоида, полученная адаптацией без учета кривизны (а) и с учетом кривизны (б).

В процессе тестирования адаптации к трехмерным телам сложной формы обнаружилось, что алгоритм распределяет узлы сетки сильно неравномерно по объему расчетной области. На рисунке 27 показано заданное управление размером по нормали на адаптированной сетке и в параметрической области. Рисунок 28 демонстрирует сгущение в 39 раз относительно начального среднего сеточного размера. В сечении сетки (рис. 28) для эллипсоида можно наблюдать повышение изотропии сеточных ячеек при приближении к участкам высокой кривизны.

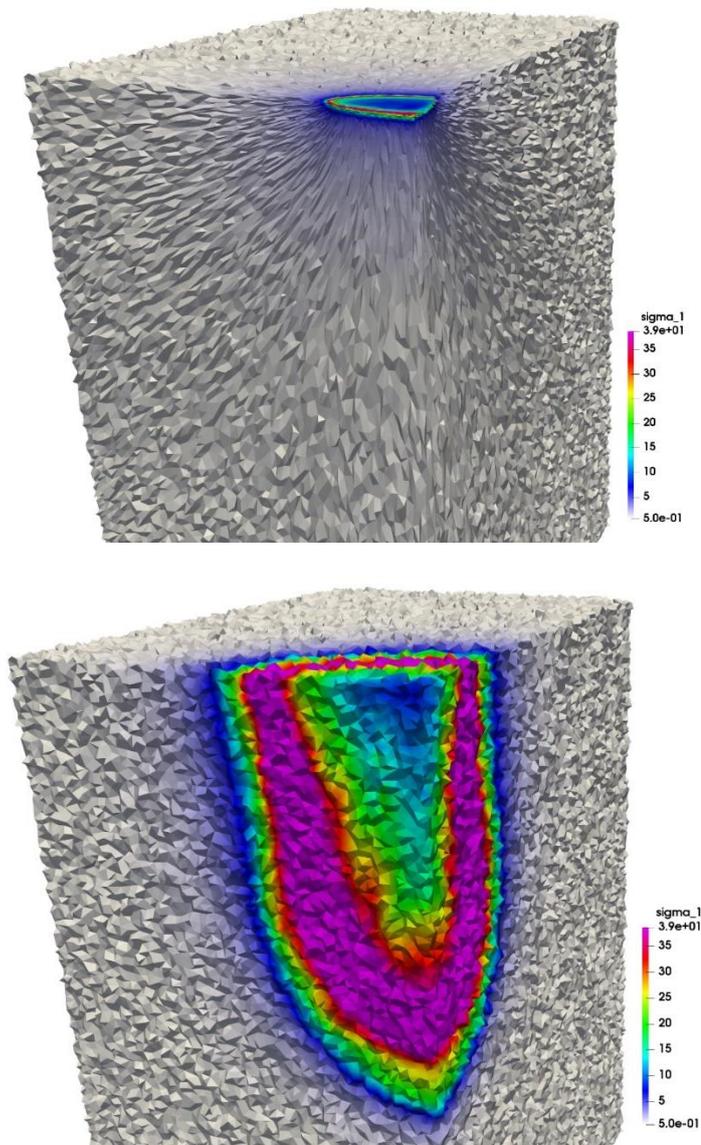


Рисунок 27. След эллипсоида в адаптивной сетке и его праобраз в параметрической области при сильном сгущении.

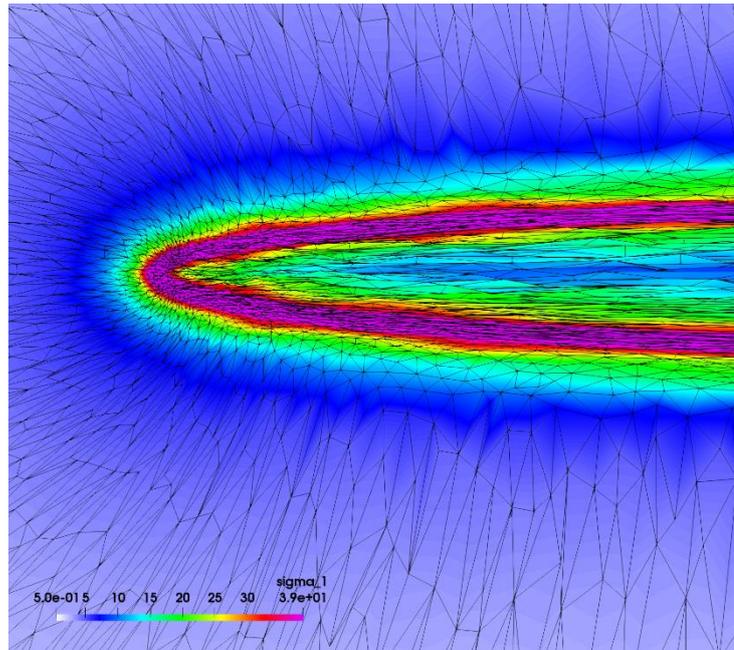


Рисунок 28. Фрагмент слоя эллипсоида при сгущении в 39 раз.

5.4 Тестирование адаптации на геометрии фюзеляжа вертолета

В качестве задачи для тестирования адаптации рассматривалась геометрия фюзеляжа ROBIN [56] (Рис. 29).

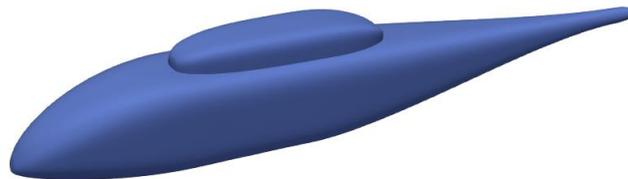


Рисунок 29. Фюзеляж вертолета ROBIN

Перед построением сетки проходила подготовка геометрии и расчет необходимых параметров на поверхности. Были посчитаны примерные главные кривизны (Рис. 30) и найдены медиальные оси (Рис. 31). Для каждой вершины поверхностной триангуляции были рассчитаны расстояния до внутренних и до внешних медиальных осей (Рис.32). Поверхностные параметры далее были записаны на интерполяционную решетку, приведённую на рисунке 33.

Адаптация для поверхности фюзеляжа строилась на равномерной тетраэдральной сетке размером 4.4 миллиона узлов. Удалось достичь сгущения в нормальном направлении в 60 раз относительно начальной сетки (Рис. 34). Попытки сгустить сильнее приводили к «разрывам» сетки внутри тела и ухудшению качества сетки в тангенциальных направлениях. На рисунке 35 приводится визуализация управляющих параметров адаптации в поперечном сечении фюзеляжа. σ_1 держит ровный слой вдоль границы тела, а σ_2 и σ_3 максимальны в области острой кромки и минимальны вдоль участков близких к плоскости.

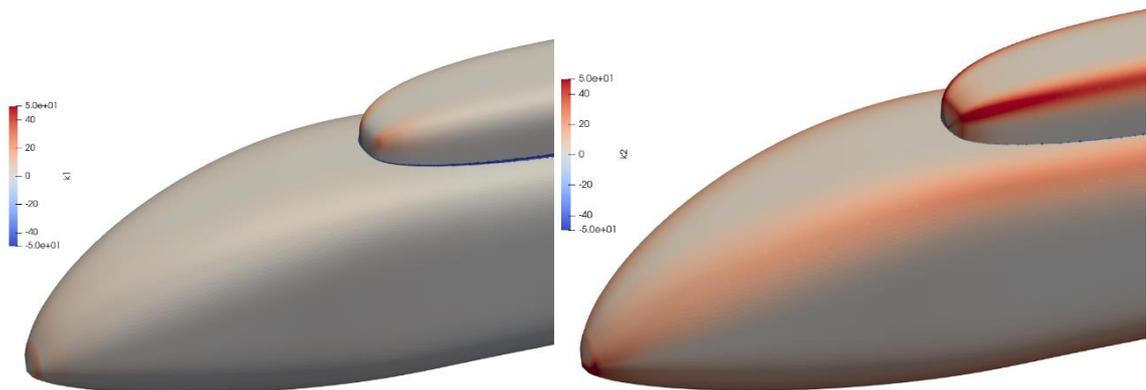


Рисунок 30. Главные кривизны построенные для поверхностной триангуляции фюзеляжа.

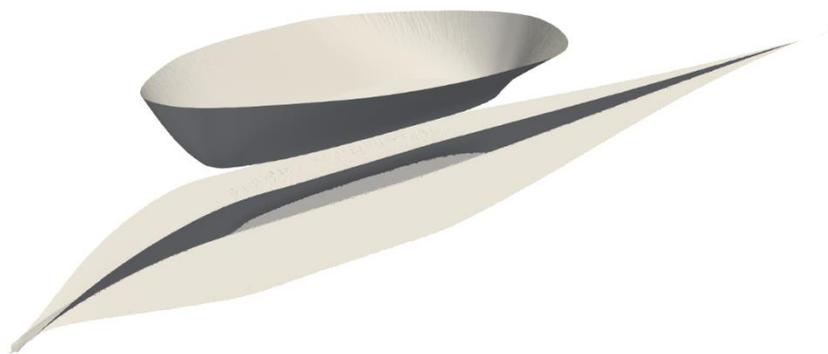


Рисунок 31. Медиальные оси фюзеляжа.

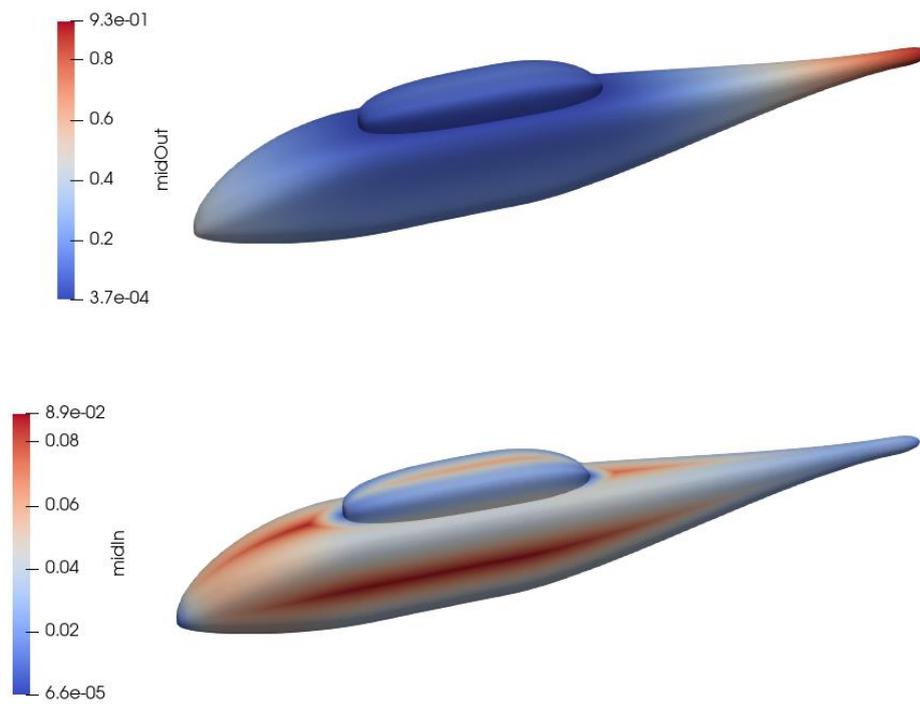


Рисунок 32. Расстояния для точек поверхности до внутренних и внешних медиальных осей.

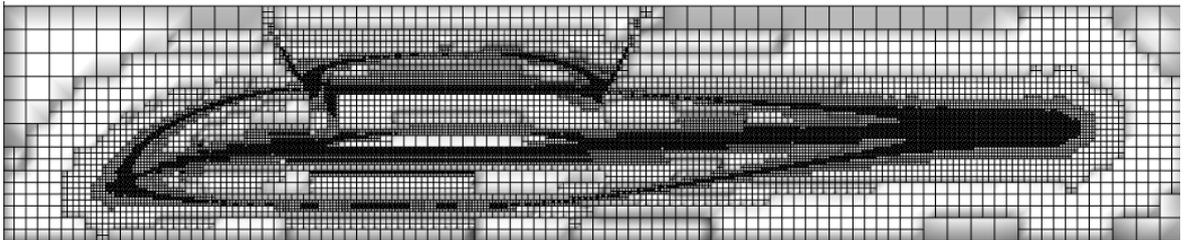


Рисунок 33. Фрагмент фоновой сетки для поверхности фюзеляжа.

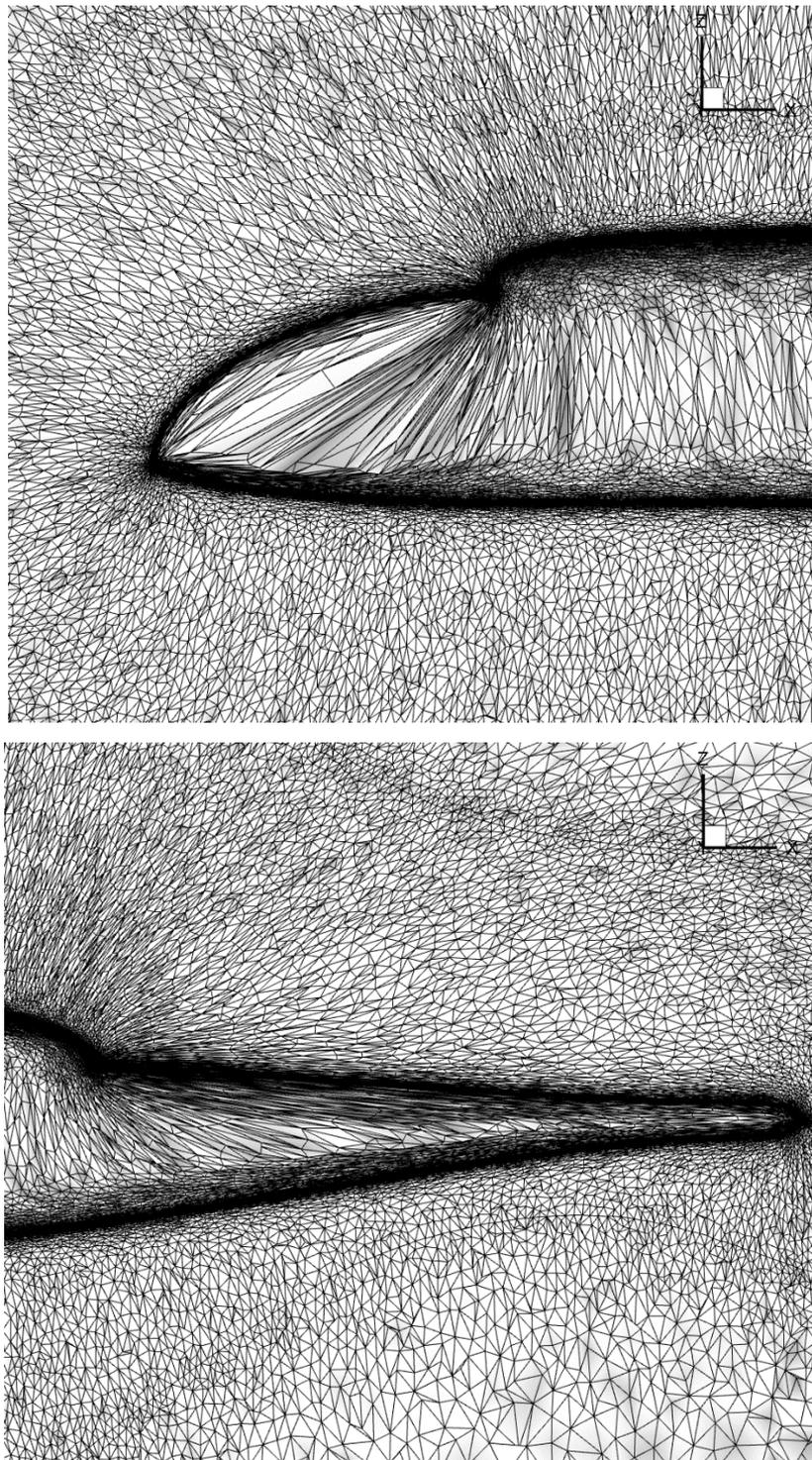


Рисунок 34. Фрагменты расчетной сетки, адаптированной к форме фюзеляжа.

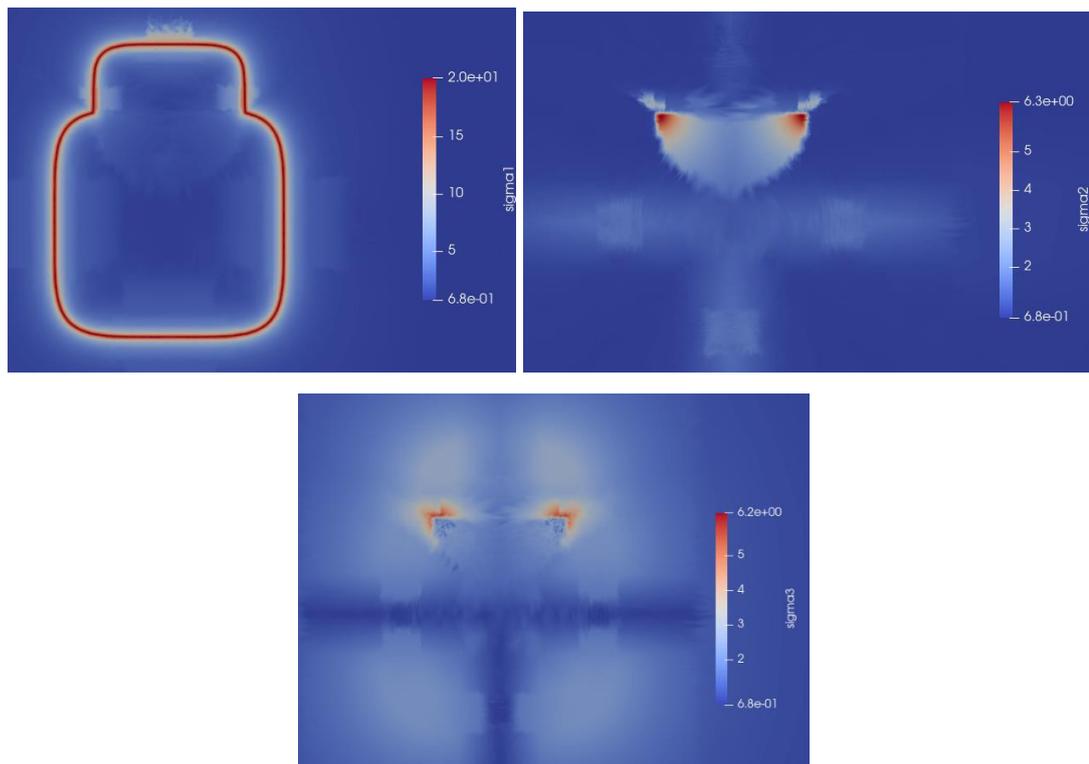


Рисунок 35. Промежуточные значения σ_1 , σ_2 , σ_3 управляющих параметров для адаптации в поперечном сечении фюзеляжа.

Глава 6

Численное моделирование тонального шума изолированного винта квадрокоптера

6.1 Постановка задачи

Задача, рассматриваемая в данной работе, аналогична задаче о APC Slow Flyer 10x4.7, о маломасштабном винте дрона, представленной в [57]. Аналогично, авторы работы [58] рассматривают задачу о винте радиуса $R = 0.127\text{ м}$ и с хабом радиуса $r = 0.0127\text{ м}$. Лопатка винта основана на профиле Eppler E63 (внутренняя часть лопатки) и на профиле Clark-Y (вблизи конца лопасти) с нелинейным распределением крутки и хорды по размаху (Рисунок 36). Винт предназначен для режимов 2,000–20,000 оборотов в минуту (RPM, rotations per minute). Будет рассматриваться режим в 4,000 RPM, когда скорость конца лопасти составляет $V_{tip} = 53.2\text{ м/с}$. В численной постановке размер винта нормирован на размер максимальной хорды лопасти $b = 0.0287\text{ м}$. Число Рейнольдса, полученное используя скорость конца лопасти и максимальный размер хорды, составляет $Re = \rho_0 V_{tip} b / \mu_0 \approx 1.0135 \times 10^5$, где параметры $\rho_0 = 1.204\text{ кг/м}^3$ и $\mu_0 = 1.815 \times 10^{-5}\text{ Па}\cdot\text{с}$ определены для температуры 20°C . Число Маха $M = U_{\max} / \sqrt{\gamma \mathcal{R} T_0} \approx 0.156$.

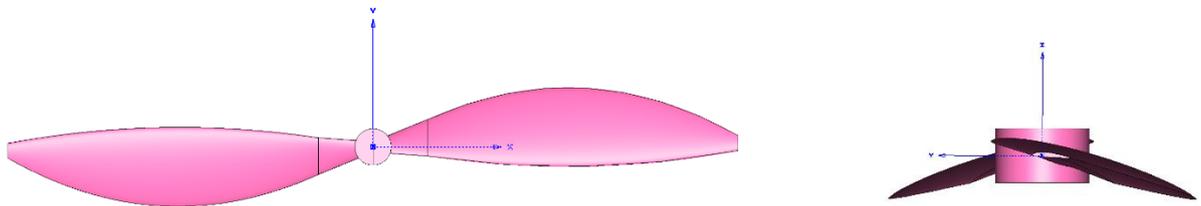


Рисунок 36. Геометрия винта дрона.

Следует отметить, что трехмерная конфигурация винта квадрокоптера довольно сложна для применения описанного метода. Отчасти из-за этого данная задача была взята в качестве задачи для испытания построенного метода. Трехмерный винт отличается круткой и исключительно тонкими задними кромками.

В процессе разработки и тестирования метода задача решалась поэтапно, в частности, рассматривалось несколько двумерных постановок.

Рассматриваемая в работе задача о моделировании течения около винта в двумерной постановке носит модельный характер. Основной целью ее решения является отладка методики численного моделирования, разработанной на основе метода погруженных границ и адаптации подвижной неструктурированной сетки, для ее дальнейшего применения к подобным трехмерным задачам. В трехмерной постановке реальный винт имеет сложную форму лопастей из-за наличия переходов от узких участков к широким и зон высокой кривизны. Аналогичные сложности сохраняются для двумерной геометрии, поэтому разработанные приемы адаптации для двумерного винта могут быть использованы и для трехмерной постановки.

В качестве двумерной геометрии взята проекция трехмерного винта на плоскость $z = 0$. Решение работать с проекцией, а не с сечением обусловлено тем, что проекция сохраняет больше геометрических особенностей исходного винта. Постановка в 2D немного отличается от оригинальной, что не повлияло на результаты тестирования. Рассматривается винт радиуса $R = 0.254$ м с диаметром центрального тела 0.0254 м. В проекции на плоскость размеры лопастей винта сохраняются. Форма винта приведена на рисунке 37.

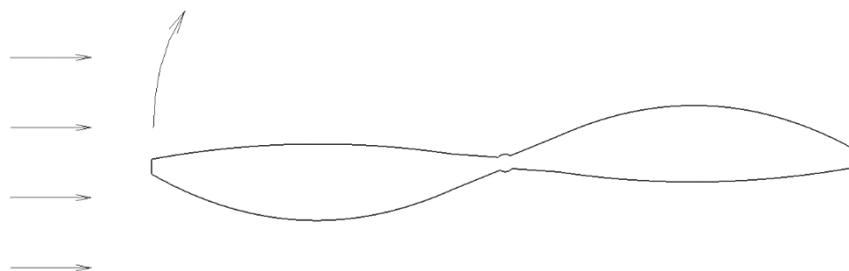


Рисунок 37. Форма винта в двумерной постановке.

Винт совершает 3000 оборотов в минуту, что соответствует концевой скорости лопасти $U_{BL} = 79.8$ м/с. Скорость внешнего потока $U_0 = 10$ м/с.

В качестве характерных параметров обезразмеривания выбираются концевая скорость лопасти U_{BL} , радиус винта R , плотность ρ_0 и динамическая вязкость воздуха μ_0 невозмущённого потока при температуре $T_0 = 20^\circ\text{C}$ – $\rho_0 = 1.293$ кг/м³, $\mu_0 = 1.717 \cdot 10^{-5}$ Н·с/м².

При таких значениях характерных параметров число Рейнольдса $Re = \rho_0 U_{BL} R / \mu_0$, определяющее вязкое течение, принимало значение $1.341 \cdot 10^6$. В данной задаче можно выделить два числа Маха – число Маха внешнего потока $M_0 = U_0 / \sqrt{\gamma \mathcal{R} T_0}$ и число Маха, рассчитанного по концевой скорости лопасти (число Маха, характерное для этого типа течения) – $M_{BL} = U_{BL} / \sqrt{\gamma \mathcal{R} T_0}$, где \mathcal{R} – газовая постоянная для воздуха. При указанных скоростях эти числа Маха принимают следующие числовые значения – $M_{BL} = 0.23$ и $M_0 = 0.029$.

Заметим, что безразмерный радиус винта $\tilde{R} = 1$, и в дальнейшем все линейные размеры приводятся в радиусах винта. Безразмерная концевая скорость лопасти $\tilde{U}_{BL} = 1$. Из значений этих безразмерных параметров также следует, что безразмерная абсолютная величина угловой скорости $|\tilde{\omega}|$ равна единице.

Для верификации разработанной методики и ее технических составляющих численное моделирование двумерной задачи предварялось решением трех вспомогательных задач в следующих постановках.

1. Винт неподвижен, фиксирован положении 45 градусов, обдувается внешним потоком с числами Маха равными $M = M_{BL}$. Скорости набегающего потока соответствует скорости вращению винта.

2. Винт неподвижен, фиксирован в положении 45 градусов, обдувается внешним потоком с числами Маха равными $M = M_0$. Скорость набегающего потока соответствует набегающему потоку исходной двумерной задачи.

3. Винт вращается в вязкой среде без внешнего обтекания ($M_0 = 0$).

Как для моделирования трехмерной задачи, так и для двумерной постановки решалась система RANS с замыканием SA, приведенные в главе 1. Численный метод также описывается в главе 1. В качестве контрольных данных для верификации полученного численного решения были выбраны результаты решения задачи в той же постановке, но в которой поверхность твердого тела определяется сеткой, согласованной с этой поверхностью. В этом случае в качестве математической модели использовалась система осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, записанная в неинерциальной вращающейся системе координат. Для методики на основе погруженных граничных условий применялось обозначение IBM (Immersed Boundary Method), а для методики, применяющей согласованные с границей сетки, – BFM (Body Fitted Method).

При определении местоположения вращающегося винта с помощью погруженных граничных условий Бринкмана условие прилипания приводит к заданию скорости \mathbf{u}_B в источниковом члене (1.7) тела в виде $\mathbf{u}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (-\omega y, \omega x)$, где \mathbf{r} – радиус-вектор точек лежащих на винте. Для неподвижного винта $\mathbf{u}_B = 0$.

6.2 Двумерная постановка

6.2.1 Сеточная адаптация к поверхности тела

Расчётная область выбиралась в виде круга радиуса $1000\tilde{R}$. Ось вращения винта совпадала с центром координат.

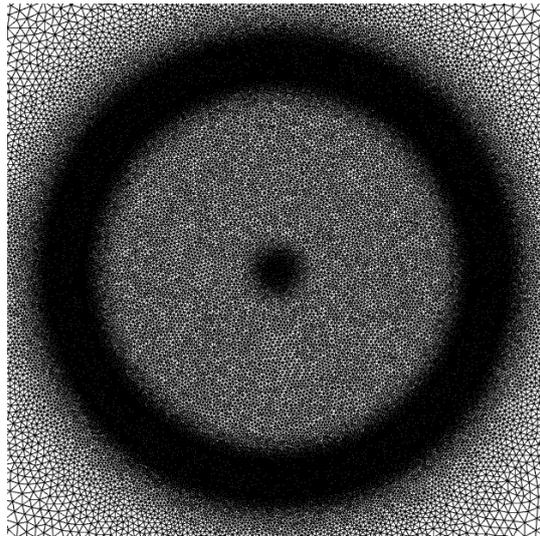


Рисунок 38. Начальная сетка с дополнительным сгущением в зоне движения кромки лопасти и вблизи центрального тела.

Рассматривая особенности сеточной адаптации подвижной неструктурированной сетки к поверхности вращающегося винта, имеется в виду, что реальные конфигурации летательных аппаратов (квадрокоптеров в частности) включают несколько винтов, которые могут быть расположены в непосредственной близости друг от друга. В связи с этим было принято решение о запрете передвижения сеточных узлов за пределами заданного круга с радиусом, лишь немного превышающим длину лопасти винта в радиальном направлении. Можно отметить, что аналогом круга в трехмерной постановке будет короткий цилиндр («шайба»). Предполагается, что радиус окружности, ограничивающей зону сеточной адаптации, превышает радиус винта на 10%. Соответственно, несколько винтов могут располагаться рядом друг с другом на расстоянии не меньше 20% радиуса винта. При этом метод сеточной адаптации будет работать в каждом круге независимо и таким образом не будет создаваться конфликтных ситуаций, потенциально приводящих к разрыву сетки.

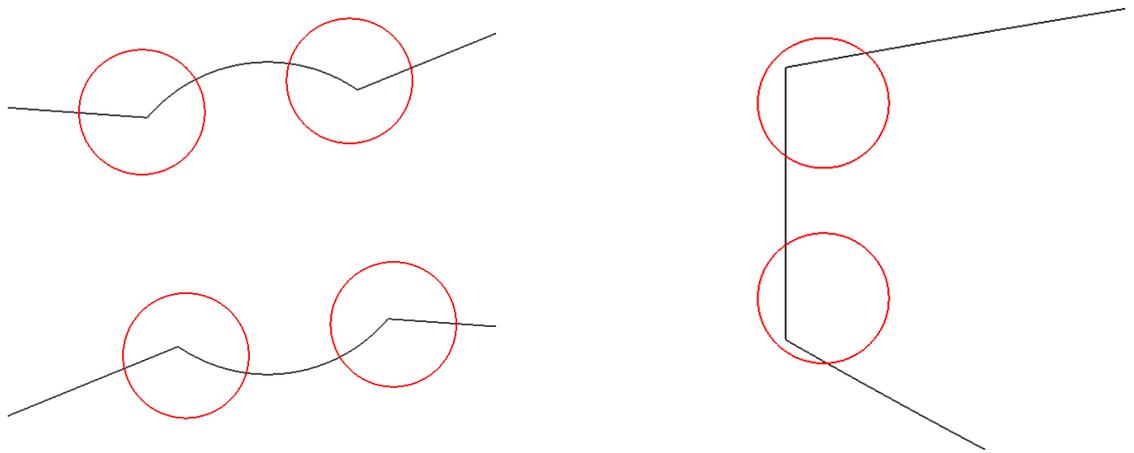
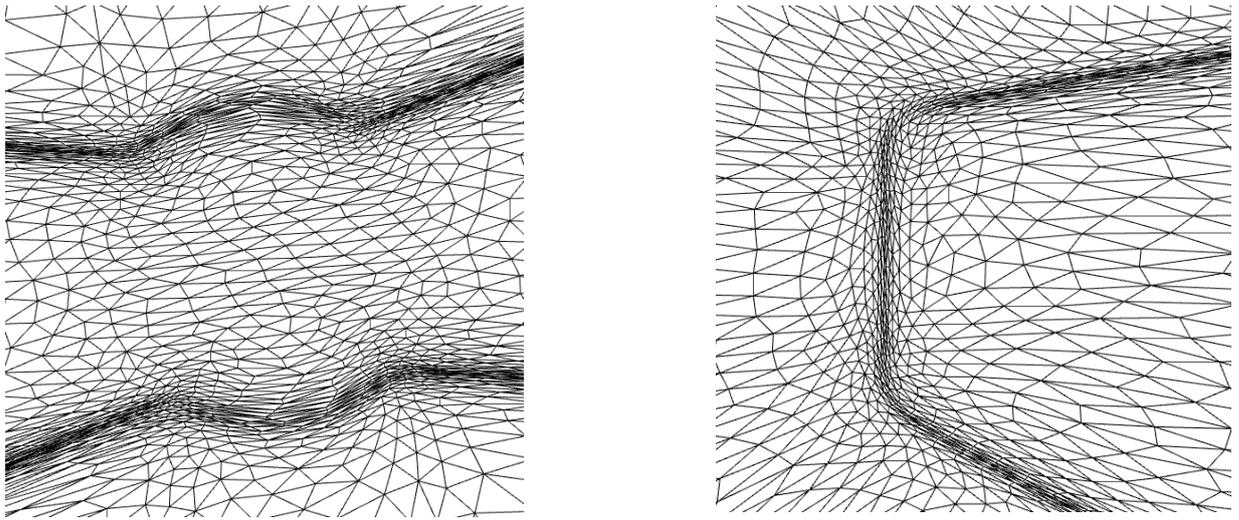


Рисунок 39. Верхний ряд – фрагменты расчетной сетки на проблемных участках. Нижний ряд – соответствующая геометрия с окружностями, обозначающими зоны изотропной адаптации.

Из-за малого размера области сетки, доступной для перераспределения узлов в процессе адаптации, возникает проблема недостатка узлов для достижения существенного сгущения к поверхности лопастей. В данной задаче крайне сложно достичь желаемого сгущения к поверхности, стартуя с квазиравномерной сетки. Для решения данной проблемы в качестве исходной сетки было предложено использовать сетку с неравномерным распределением узлов, где дополнительные вершины распределены вдоль кромки винта и в области центрального тела (Рис. 38). Области сеточного сгущения покрывают

зоны, соответствующие законцовкам лопастей и их стыку с центральным телом, которые имеют наиболее сложную форму и требуют большего числа узлов для разрешения.

На участках высокой кривизны сильно анизотропные ячейки могут существенно исказить аппроксимацию границы. На рисунке 39 окружностями показаны участки, где адаптация имеет изотропный характер.

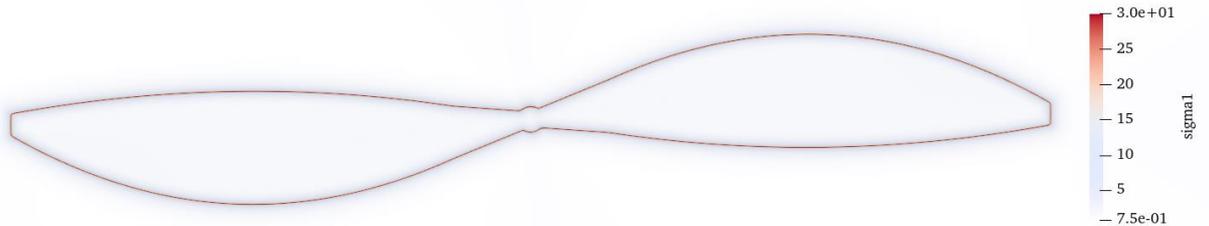


Рисунок 40. Распределение управляющего параметра σ_1 .

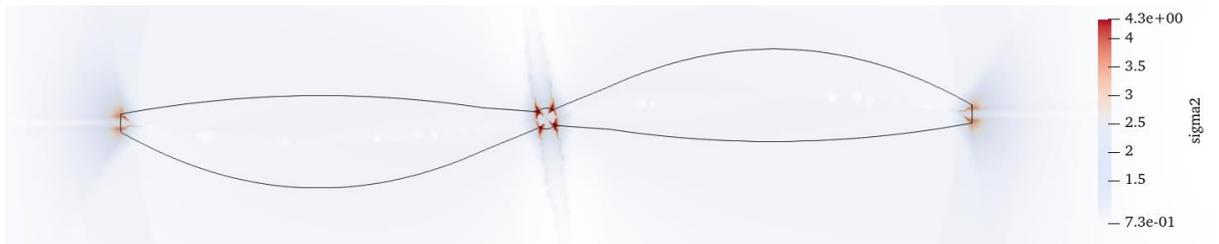


Рисунок 41. Распределение управляющего параметра σ_2 .



Рисунок 42. Распределение анизотропии.

Иллюстрация процесса управления адаптацией представлена на рисунках 40 и 41. Управляющая адаптацией величина σ_1 распределена равномерно

вдоль границы и убывает при отдалении от нее, а величина σ_2 достигает максимума в зонах особенностей геометрии. На нижнем рисунке приведено распределение коэффициента анизотропии, которая фактически получилась при использовании адаптации. Под коэффициентом анизотропии здесь понимается отношение сжатия исходного сеточного размера в нормальном направлении к сжатию в продольном. Из рисунка 42 видно, что при сгущении в нормальном направлении в 30 раз максимальное значение коэффициента анизотропии достигает 92 на прямолинейных участках.

При адаптации к поверхностям лопастей винта также необходимо найти разумный баланс между приемлемым числом расчетных узлов и возможной степенью сгущения. Рассматриваемые в работе задачи в двумерной постановке считались на сетке размером 87 тысяч узлов, а ячейки вблизи поверхности лопасти при этом сжимались в 30 раз относительно начального размера.

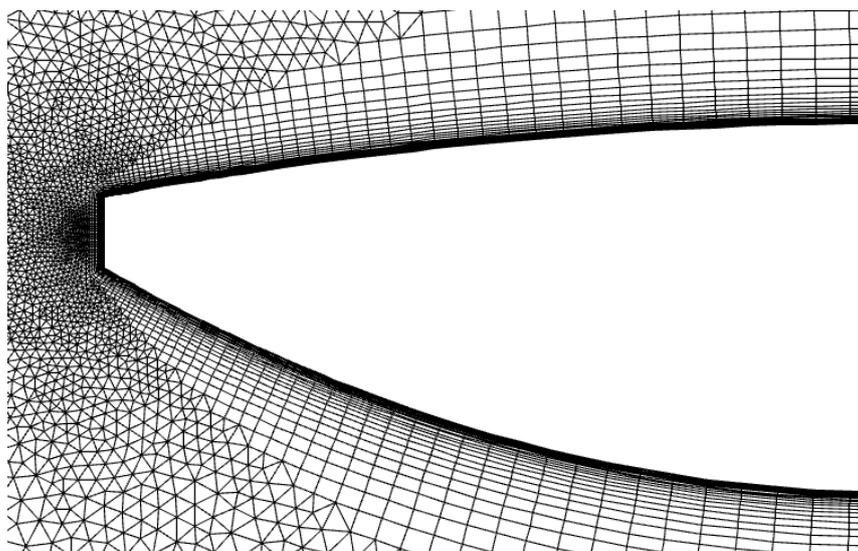


Рисунок 43. Фрагмент сетки с согласованной границей

Для верификации разработанной методики на основе метода погруженных границ и адаптации подвижной сетки сравнение проводилось с численными результатами, полученными на близкой к идеальной, согласованной с поверхностью лопасти сетке с требуемым пристеночным разрешением (рис.

43). На согласованной с границей сетке расчет проводился в неинерциальной системе координат, связанной с вращающимся винтом.

На рисунках 44 и 45 показаны фрагменты адаптированной сетки вблизи лопасти винта в начальный момент и после десяти оборотов винта. Уже после первого оборота сетка немного изменяется относительно начальной стационарной адаптации, но дальнейших изменений сетки не происходит в течение всех последующих оборотов сетка сохраняет вид, представленный на рисунке 45. Важно отметить, что средний размер первых пристеночных ячеек по нормали к телу остается неизменным в процессе вращения.

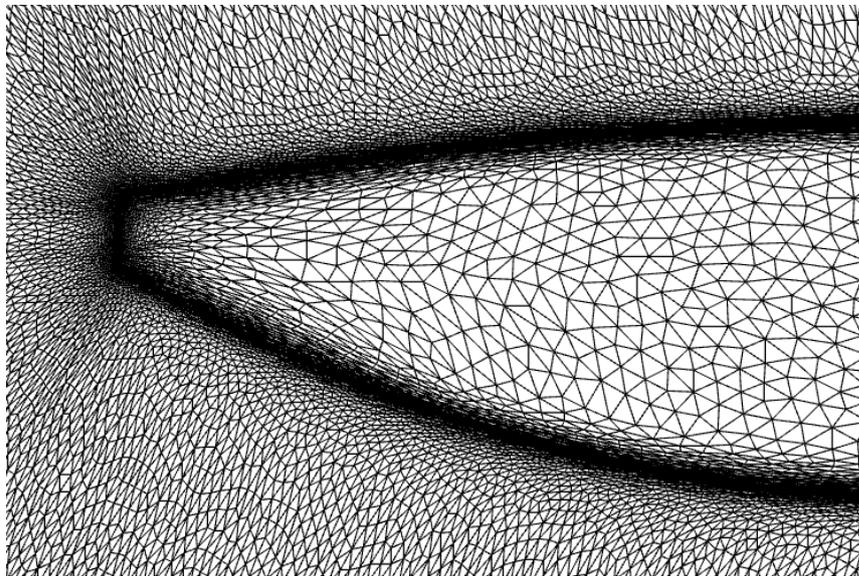


Рисунок 44. Фрагмент адаптивной сетки после стационарной адаптации перед стартом расчета

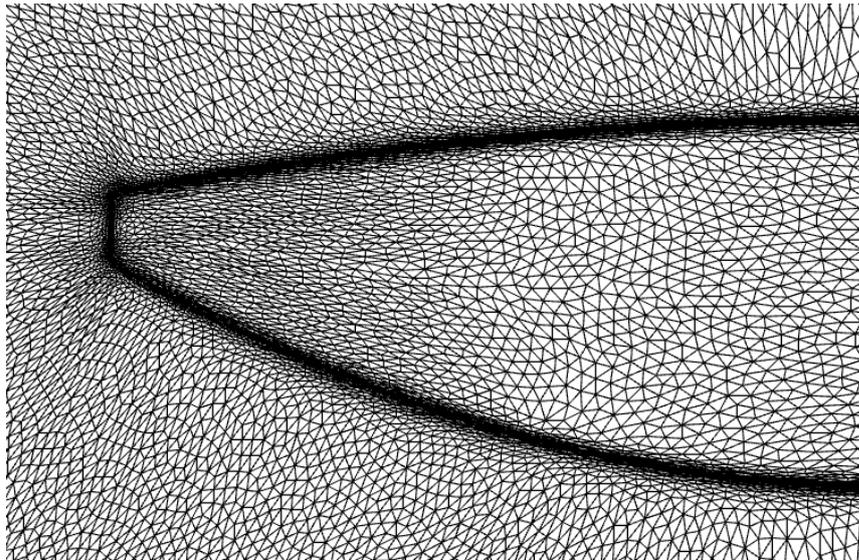


Рисунок 45. Фрагмент адаптивной сетки после 10 оборотов.

Рассматривается обтекание неподвижного винта для нескольких значений скорости набегающего потока, определяемых следующими числами Маха: $M = 0.23$ и $M = 0.029$. Поток набегаёт слева направо параллельно оси Ox , винт установлен под углом -45° к этой оси, как показано на Рисунке 46а.

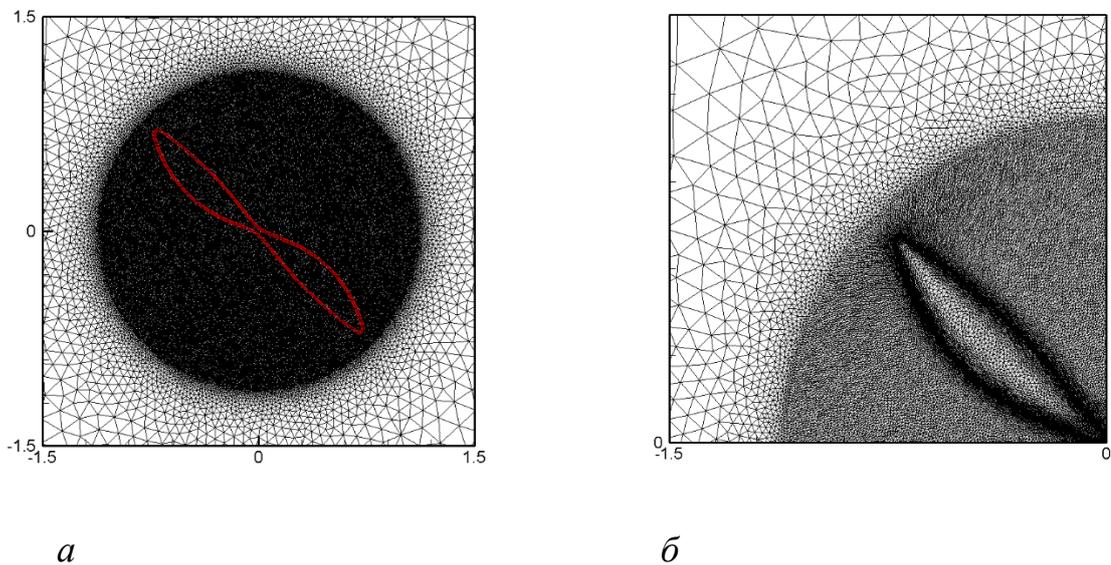


Рисунок 46. Фрагменты расчетной сетки вблизи винта: *а* – исходная равномерная сетка, *б* – адаптированная сетка

Для численного решения в расчетной области построена неструктурированная треугольная сетка с числом узлов – $N \approx 6.9 \cdot 10^4$. В ней круг с радиусом $R = 1.1$ покрыт равномерной сеткой с характерным числом элементов $h \approx 0.01$

(Рисунок 46а), который увеличивается в направлении к внешним границам до $h \approx 6$. Перед началом первого расчетного шага выполняется адаптация расчетной сетки, реализующая сгущение расчетной сетки вблизи поверхности винта с минимальный размером ячейки равным $7 \cdot 10^{-3}$. Фрагмент адаптированной таким образом сетки приведен на рисунке 46б.

Сечение трехмерного винта

Рассмотрение сечения винта выступает как еще один этап отладки алгоритма адаптации. В геометрии трехмерного винта присутствуют тонкие участки, где расстояние между противоположными стенками очень маленькое. Такие особенности могли усложнить процесс адаптации сетки и требовали отдельного тестирования в двумерном случае. На рисунке 47 приводится форма сечения винта. Адаптация строилась с использованием значений кривизны (рис. 48) и расстояний до медиальных осей. Удалось добиться сгущения в 30 раз, как и в случае с проекцией. Фрагменты сетки на рисунке 49 демонстрируют качество приближения сложных участков границы.

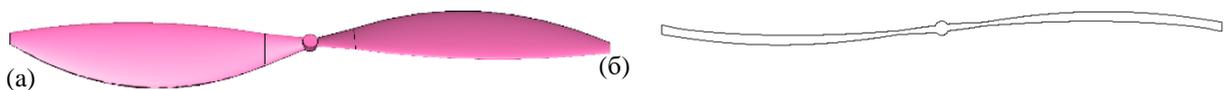


Рисунок 47. Трехмерный винт (а) и его сечение в горизонтальной плоскости (б).

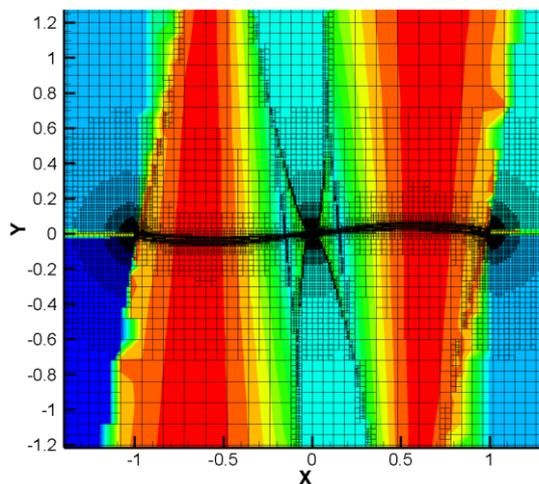


Рисунок 48. Распределение радиуса кривизны в расчетной области.

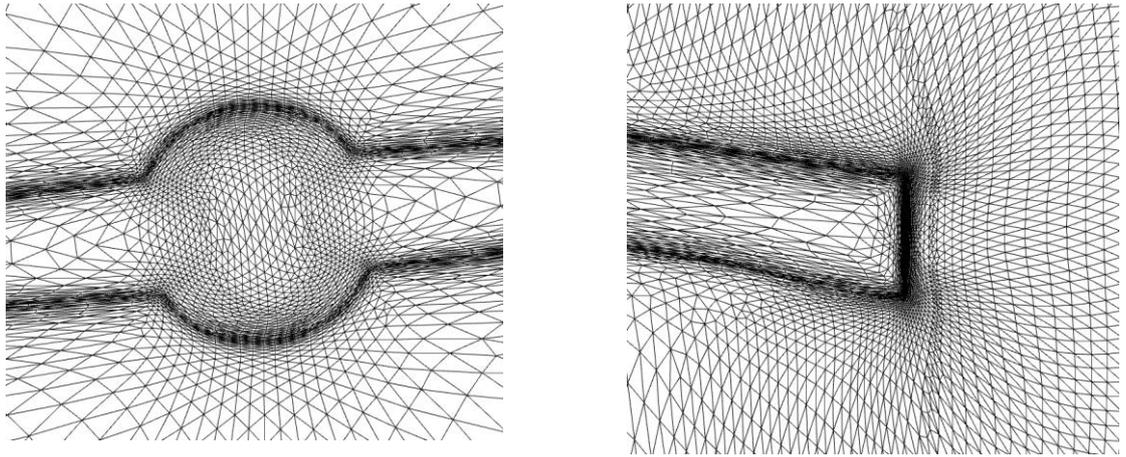


Рисунок 49. Фрагменты адаптивной сетки вблизи сложных участков.

6.2.2 Численные результаты

Численное решение задачи с помощью IBM и VFM подходов для различных скоростей набегающего потока ($M = 0.23$ и $M = 0.029$) показало, что во всех случаях, начиная со времени $t \approx 70$, моделируемое течение, приобретает квазистационарный характер, определяемый поочередным сходом вихрей с концевых областей винта.

На рисунке 50 представлены зависимости от времени интегральных характеристик течения – коэффициента сопротивления и подъемной силы винта для потока с числом $M = 0.23$. На рисунке 51 показаны временные распределения давления и компонент скорости течения в точках с координатами $(1.5, 0)$ и $(0, 1.5)$ соответственно. Для всех величин, рассчитанных методом IBM наблюдается хорошее согласование с данными моделирования с применением VFM метода (контрольными данными). Небольшое расхождение по фазе скорее всего вызвано различным временем установления периодического решения в IBM и VFM подходах.

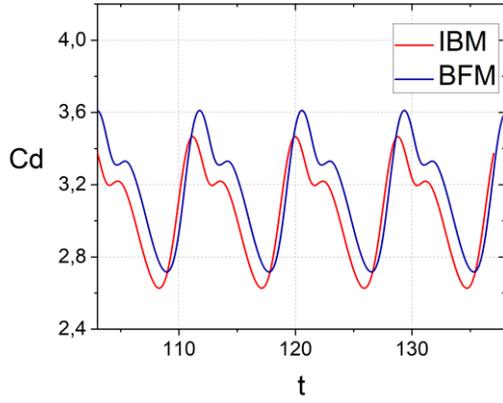
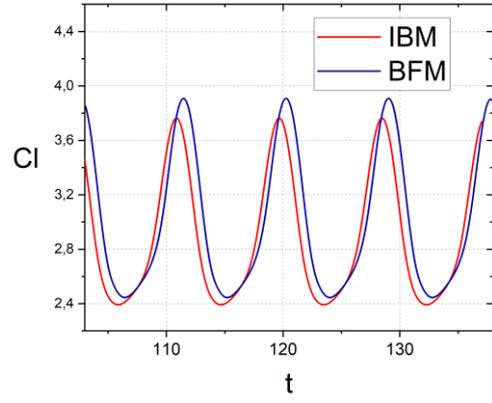
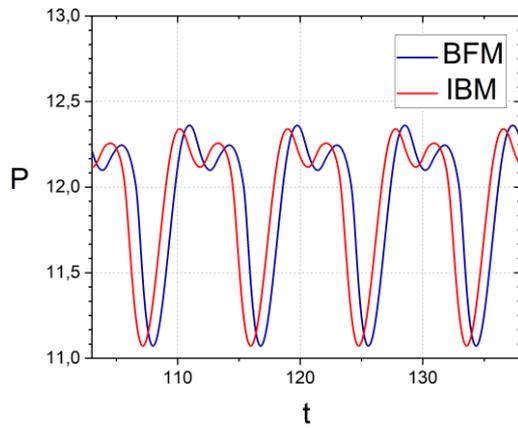
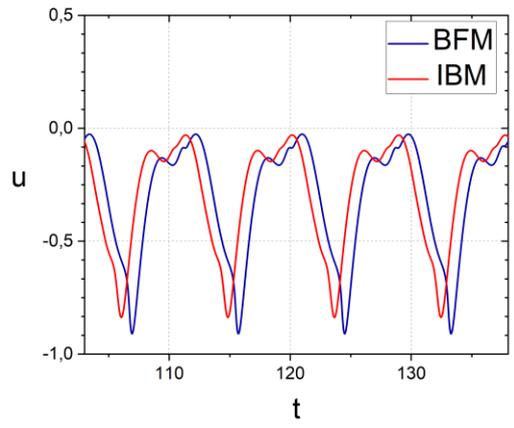
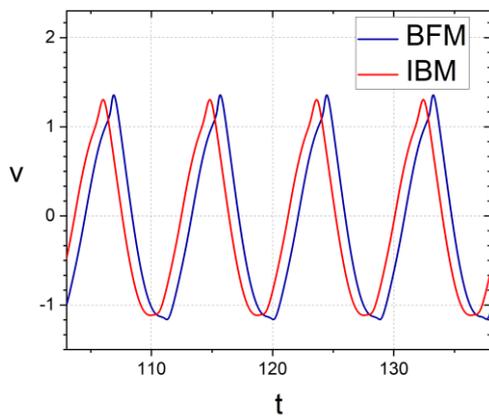
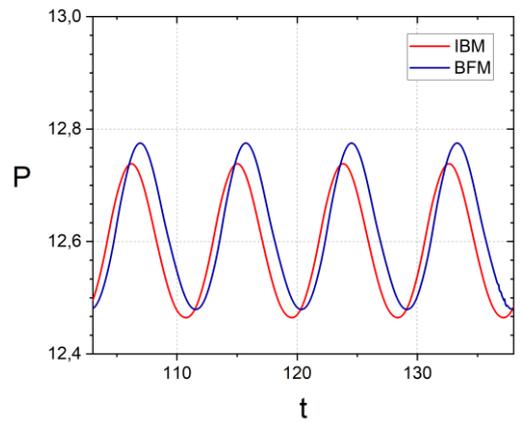
*a**б*

Рисунок 50. Зависимость от времени коэффициента сопротивления (*a*) и подъемной силы (*б*) винта ($M = 0.23$)

*a**б**в**z*

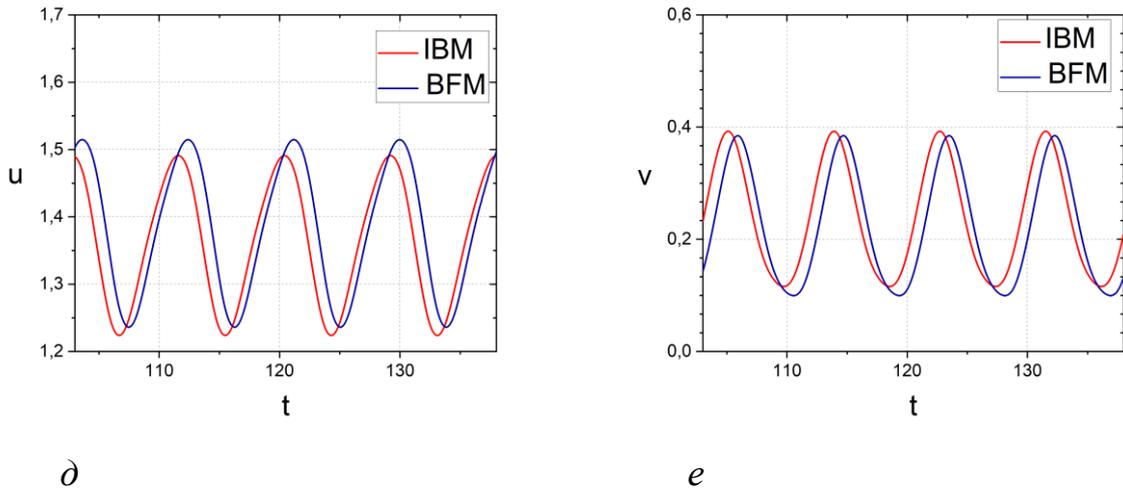


Рисунок 51. Зависимость от времени давления, продольной и поперечной компонент скорости: *a*, *б*, *в* – в точке (1.5,0), *г*, *д*, *е* – в точке (0, 1.5)

В результате численного моделирования обтекания при числе $M = 0.029$ получены характеристики течения, определяющие зависимости, качественно схожие с приведенными выше, поэтому они будут представлены далее лишь в виде количественных оценок.

В Таблице 1 суммированы средние интегральные характеристики и число Струхала (посчитанное по C_L), в Таблицах 2 и 3 – средние значения физических величин в контрольных точках, полученные из численного решения рассматриваемой задачи методами IBM и BFM. Видно хорошее согласование результатов, полученных в расчёте по IBM с референсными данными, что позволяет судить о корректности численного решения задачи обтекания винта в фиксированном положении с помощью представленной методики.

		\bar{C}_D	\bar{C}_L	St
M = 0.23	IBM	3.063	2.925	0.114
	BFM	3.167	2.994	0.114
M = 0.029	IBM	0.054	0.050	0.012
	BFM	0.058	0.053	0.009

Таблица 1. Средние интегральные характеристики течения и число Струхала

		\bar{p}	\bar{u}	\bar{v}
M = 0.23	IBM	11.91	-0.290	-0.0903
	BFM	11.92	-0.307	-0.0995
M = 0.029	IBM	13.02	-0.023	-0.0158
	BFM	13.02	-0.026	-0.0113

Таблица 2. Средние значения давления и скоростей в точке (1.5,0)

		\bar{p}	\bar{u}	\bar{v}
M = 0.23	IBM	12.59	1.364	0.239
	BFM	12.62	1.382	0.225
M = 0.029	IBM	13.04	0.167	0.031
	BFM	13.04	0.165	0.025

Таблица 3. Средние значения давления и скоростей в точке (0,1.5)

Далее рассматривается вращение двумерного винта в невозмущенном потоке. Используется неструктурированная сетка с числом узлов порядка 10^5 . В круге радиуса $R = 1.1$ задается сгущение до размеров расчетной ячейки $h \approx 0.01$ в областях, показанных на Рис. 18. Вне этого круга размер ячейки линейно увеличивается в радиальном направлении до $h = 10$.

В процессе расчета сетка динамически адаптируется к поверхности винта.

Расчеты показали, что в обоих случаях (BFM и IBM) значения коэффициентов подъемной силы и сопротивления близки 0. Это объясняется тем, что в силу симметрии геометрической формы винта и отсутствия набегающего потока, наблюдается симметричность поля течения вблизи винта, которая определяет зануление этих характеристик.

Анализ полученных полей течения проведен путём сравнения временных зависимостей физических переменных в контрольных точках.

Прежде чем приступить к анализу, сделаем следующее наблюдение. Вращающийся винт создает нестационарный вихрь с циркуляцией $\Gamma(t)$, который определяет гидродинамические поля в области $r = x^2 + y^2 > R$, где R – радиус винта. Следовательно, осреднённое по времени решение определяется вихрём со средней циркуляцией $\bar{\Gamma} = \overline{\Gamma(t)}$. При $r > R$ численно рассчитываемые средние поля течения можно приблизить (чем больше радиус r , тем точнее приближение) *вихревым* стационарным решением, зависящим от средней циркуляции $\bar{\Gamma}_R$, рассчитанной по окружности радиуса R . Так компоненты вектора скорости вихревого решения определяются по формуле [59]

$$u = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (6.1)$$

Далее, в соответствии с формулами (6.1), оценим расхождения в средних величинах полей следующим образом

$$E_V = \left| \frac{|\bar{\mathbf{u}}|_{IBM}}{|\bar{\mathbf{u}}|_{BFM}} - 1 \right| = \left| \frac{\bar{\Gamma}_{R,IBM} - \bar{\Gamma}_{R,BFM}}{\bar{\Gamma}_{R,BFM}} \right| = |-1 + \varepsilon|, \quad \varepsilon = \frac{\bar{\Gamma}_{R,BM}}{\bar{\Gamma}_{R,BFM}}.$$

В таблице 4 приведены средние значения скоростей и избыточного среднего давления $\Delta \bar{p} = \bar{p} - p_0$ в точках (0,1.5), (1.5,0), а также величина расхождения E_V .

Точка	\bar{u}	\bar{v}	E_V	$\Delta \bar{p}$
(0,1.5)	IBM: 0.259	IBM: 4.08e-5	0.112	IBM: -0.014
	BFM: 0.233	BFM: 4.45e-5		BFM: -0.014
(1.5,0)	IBM: -7.67e-5	IBM: -0.262	0.114	IBM: -0.015
	BFM: -4.25e-4	BFM: -0.235		BFM: -0.014

Таблица 4. Средние величины продольной и поперечной скоростей и значения их расхождений в точках (1.5,0) (0,1.5)

Из таблицы 4 можно видеть, что в точке с координатой $x=0$ скорость $v \approx 0$, а в точке с координатой $y=0$ скорость $u \approx 0$, что соответствует формулам (6.1). Величины расхождений E_V в точках $(0,1.5)$, $(1.5,0)$ близки друг к другу. Из этого следует, что разница в результатах расчёта в точках, лежащих вне области вращения винта, зависит от величины циркуляции $\Gamma_R(t)$, создаваемой винтом по траектории прохождения конца лопасти, и которая различна при моделировании с использованием IBM и BFM. Разница в величинах циркуляции Γ_R может быть связана с разным разрешением сетки вблизи поверхности лопасти, что не оказывает заметного влияния при обтекании неподвижного винта, но становится существенным при его вращении. Но величины пульсаций давления близки друг к другу, что можно видеть на рисунке 52, где показано их распределение во времени, а также из таблицы 4, где приводятся их средние значения.

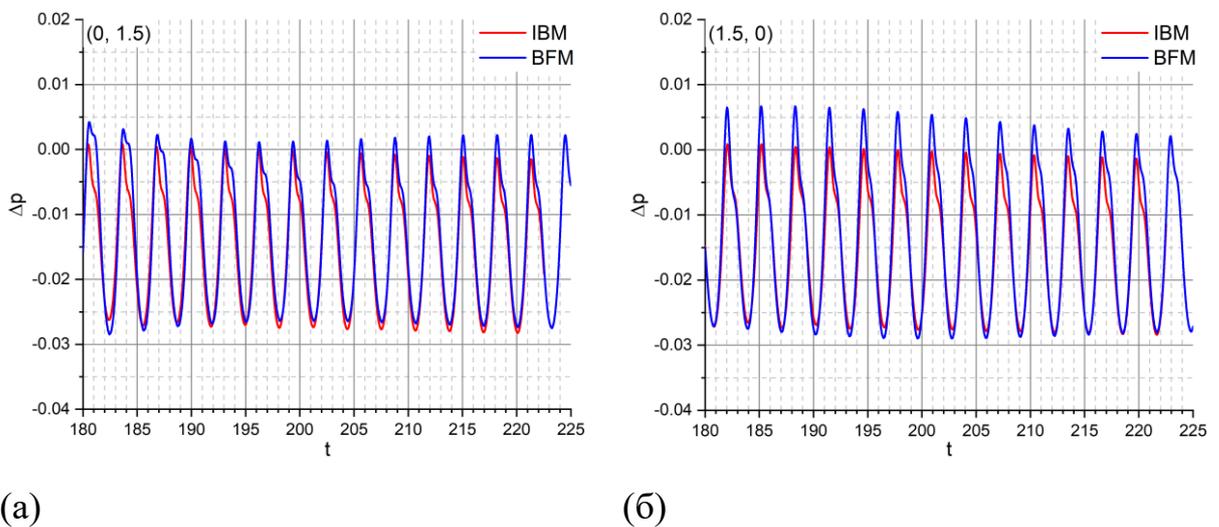


Рисунок 52. Зависимость от времени избыточного давления: (а) – в контрольной точке $(0,1.5)$, (б) – в контрольной точке $(1.5,0)$

Наконец, рассматривается вращение винта в набегающем потоке. Постановка задачи аналогична и модифицируется добавлением движения внешней среды слева направо вдоль оси Ox . Скорость движения определяется числом Маха: $M = 0.029$.

При проведении численного расчета использована неструктурированная треугольная расчетная сетка. Применяется динамическая сеточная адаптация с теми же параметрами сгущения.

Здесь, так же, как и для предыдущих задач, при анализе численных результатов, полученных методикой IBM, использованы результаты расчетов с помощью согласованных с границей сеток (BFM).

Результаты численного расчета задачи показали, что наличие набегающего потока существенно усложняет картину течения. На Рисунке 53 приведено мгновенное поле течения в виде пространственного распределения модуля завихренности. Распространяющиеся в радиальном направлении волновые структуры, генерируемые вращением винта, под действием набегающего потока сносятся в область вращения винта и взаимодействуют с ним. По-видимому, это взаимодействие существенно затягивает формирование квазипериодических областей течения.

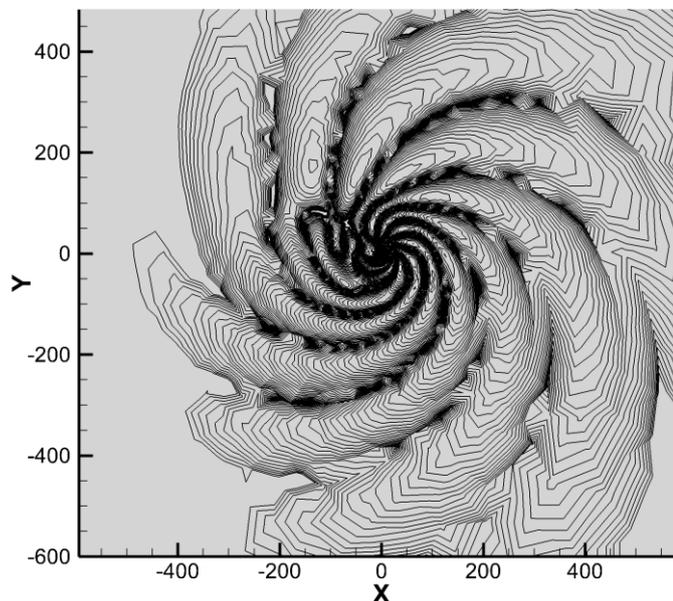
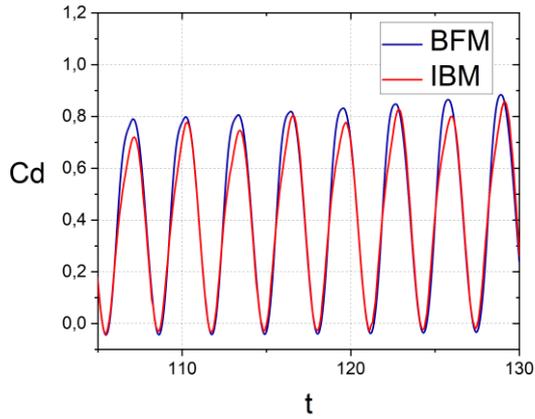
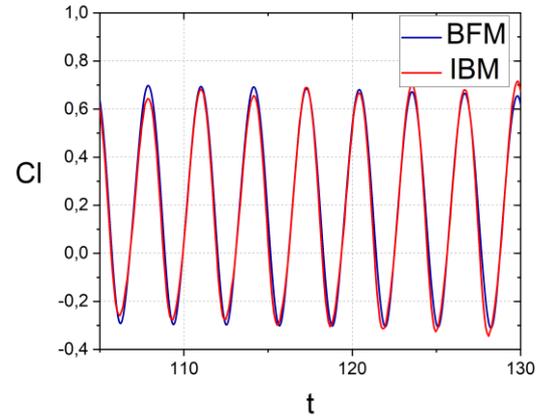


Рисунок 53. Мгновенное поле модуля завихренности вращающегося винта в набегающем потоке

Тем не менее временная зависимость коэффициента сопротивления и подъемной силы носит периодический характер. Как видно из графиков на Рисунке 54 их значения хорошо согласуются с контрольными данными (BFM).



(a)



(б)

Рисунок 54. Зависимость от времени коэффициента сопротивления (а) и подъемной силы (б) вращающегося винта в набегающем потоке

6.3 Трехмерная постановка

6.3.1 Сеточная адаптация к поверхности тела

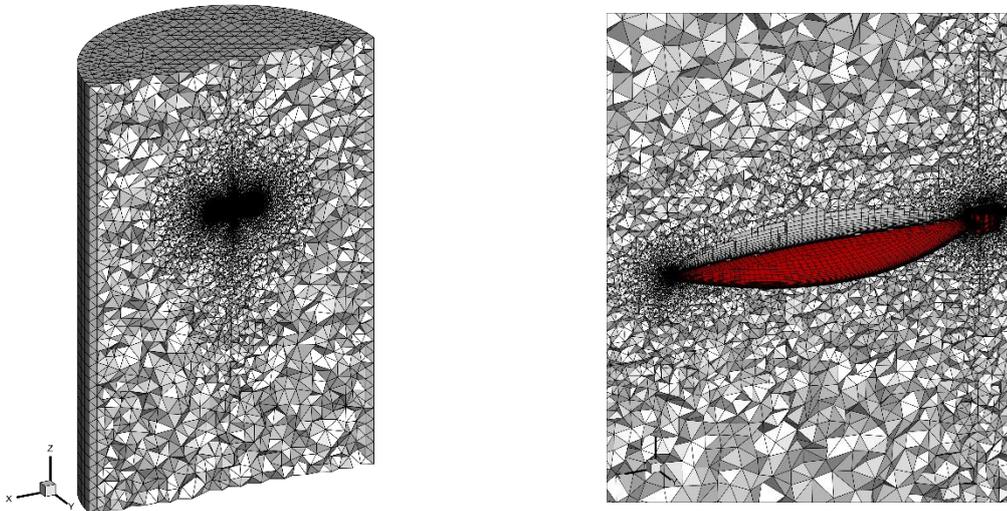


Рисунок 55. Сетка для ВФ подхода

Приведем сначала расчетную сетку, согласованную с телом, расчет на которой будет референсным для данной задачи. Расчетная сетка для ВФМ подхода построена в цилиндре радиуса $10R$ и высотой $30R$ (Рис. 55), где R – радиус винта. Внутри этой области винт помещен еще в плоский цилиндр, в котором задано вращение. Сетка вблизи границы тела сформирована призматическими

элементами для разрешения пограничного слоя. Высота элементов на границе тела выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие $y^+ < 1$ при численном расчете, что значит, что погранслоем разрешен.

Работа адаптации локализована в области формы шайбы, плоского цилиндра, куда помещен винт. Вершины на границе «шайбы» фиксированы. Для того, чтобы достичь существенного сгущения по всей поверхности винта и обеспечить плавный переход сеточного размера через фиксированную границу, начальная сетка задана с некоторой деформацией. Вершины в «шайбе» немного перераспределены таким образом (см. Рис. 56), чтобы создать большую концентрацию в зонах, где могут находиться наиболее сложные участки геометрии: область рядом с центральным телом и зона, где проходит конец лопасти во время вращения. Неравномерность начальной сетки учитывается в управлении адаптацией с помощью фоновой метрики. Фоновая метрика представляет собой сферический метрический тензор, собственные значения которой заданы как кубический корень отношения среднего объема инцидентных сеточных элементов в логическом пространстве (на начальной сетке) к соответствующему объему в физическом пространстве. Таким образом, есть две метрики: фоновая и управляющая $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$. Для их сложения используется механизм, описанный в разделе 3.6.

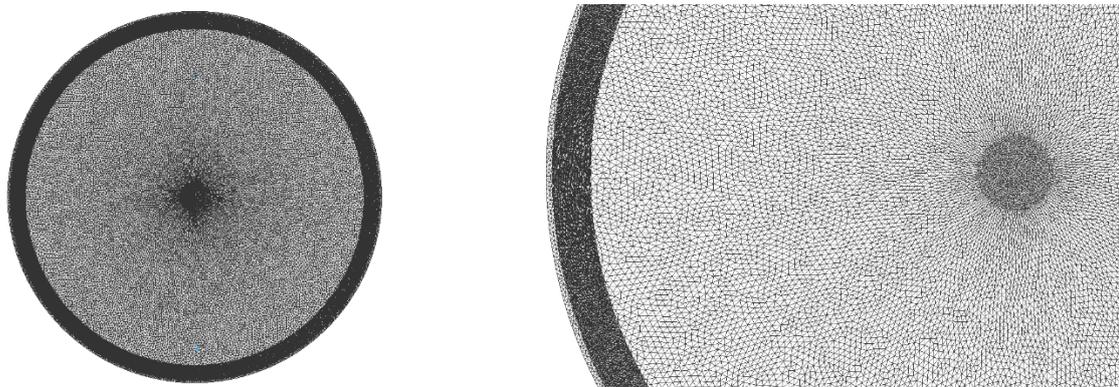


Рисунок 56. Начальная сетка в «шайбе» перед стартом адаптации

Для построения адаптации к форме винта требуется провести предварительную подготовку и обработку геометрии. На основе подробной триангуляции тела строится k-d дерево и интерполяционное восьмеричное дерево, чтобы точно или приближенной находить расстояние со знаком. Когда возможно, расстояние считается приближенно, однако вблизи границы вычисления проводятся точно, чтобы воспроизвести все особенности этой сложной геометрии. Помимо расстояния с поисковых деревьев можно извлекать различные параметры, определенные формой винта, такие как главные кривизны, направления главных кривизн, расстояния до внешних (Рис. 58, 60) и внутренних (Рис. 57, 59) медиальных осей. Эти параметры вычислены в вершинах триангулированной поверхности и перенесены на интерполяционную решетку, как описывается в разделе 3.4.



Рисунок 57. Приближенные внутренние медиальные оси

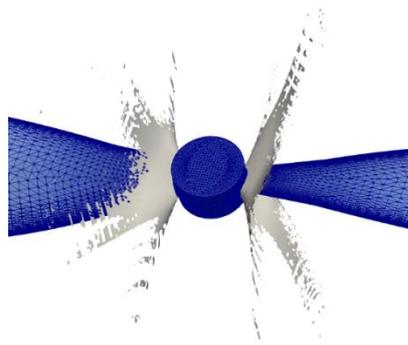


Рисунок 58. Приближенные внешние медиальные оси

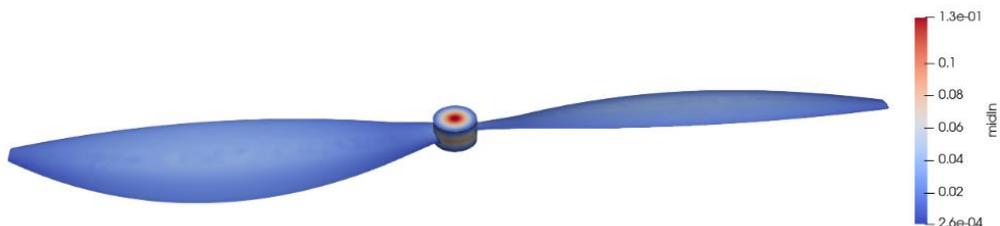


Рисунок 59. Расстояние до приближенных внутренних медиальных осей

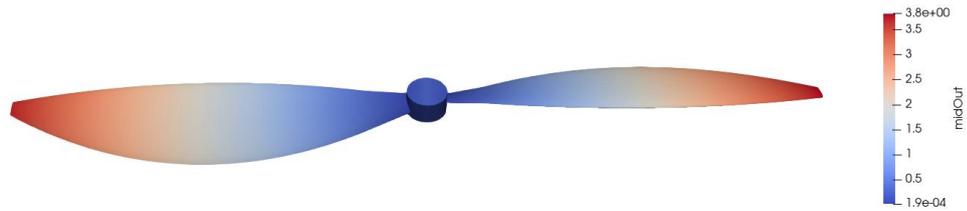


Рисунок 60. Расстояние до приближенных внешних медиальных осей

Начальная тетраэдральная сетка построена в цилиндрической области такого же размера, как и в сетке для ВФ подхода. Сетка насчитывает 4.4 миллиона вершин, причем большая их часть сосредоточена в плоском цилиндре вблизи винта. Рисунок 61 приводит для фрагмента винта элементы сетки, у которых хотя бы одна вершина принадлежит телу. Несмотря на высокую концентрацию вершин в области расположения винта, тонкая лопасть плохо воспроизводится на начальной сетке.

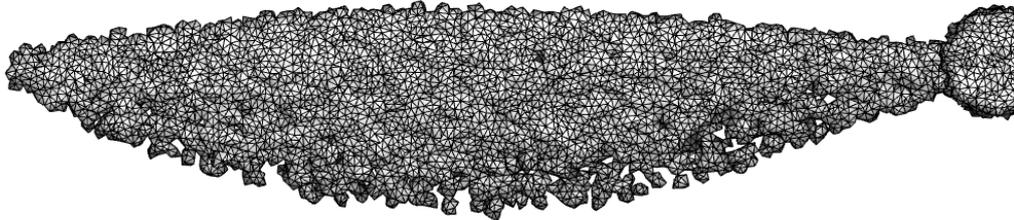


Рисунок 61. Для фрагмента винта отображены ячейки начальной сетки, где хотя бы одна вершина принадлежит телу

Метод адаптации позволяет добиться лучшего разрешения границы тела. Элементы начальной сетки вблизи границы сжаты примерно в 10 раз по нормальному направлению от тела. Рисунки 61 и 62 приводят фрагменты сетки в сечении XZ и более приближенные фрагменты сетки вблизи сложных участков граничной поверхности: вблизи центрального тела и на конце лопасти. На предложенных рисунках точки, принадлежащие телу, обведены красной линией. Можно видеть, что сетка более изотропна вблизи углов и участков

большой кривизны. Рисунки 63, 65 приводят поперечное сечение и XY сечение для адаптивной сетки. Рисунок 64 показывает форму винта, воспроизведенную на адаптивной сетке.

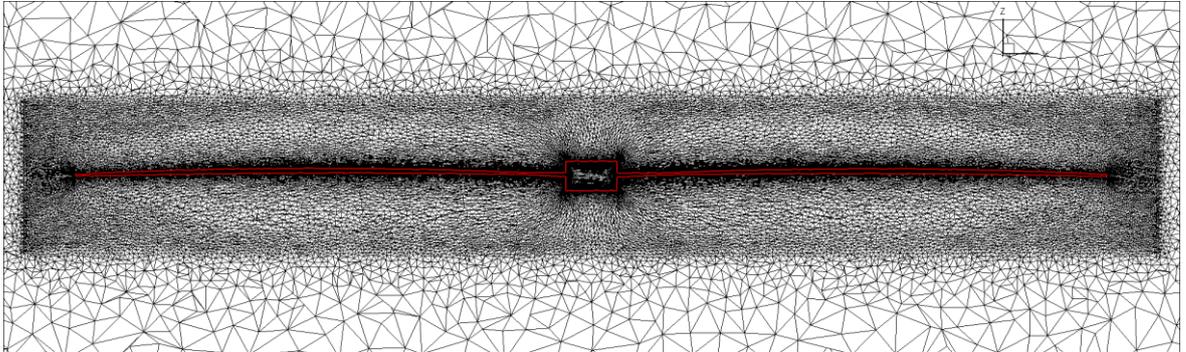


Рисунок 61. Сечение в плоскости XZ адаптивной сетки вблизи винта

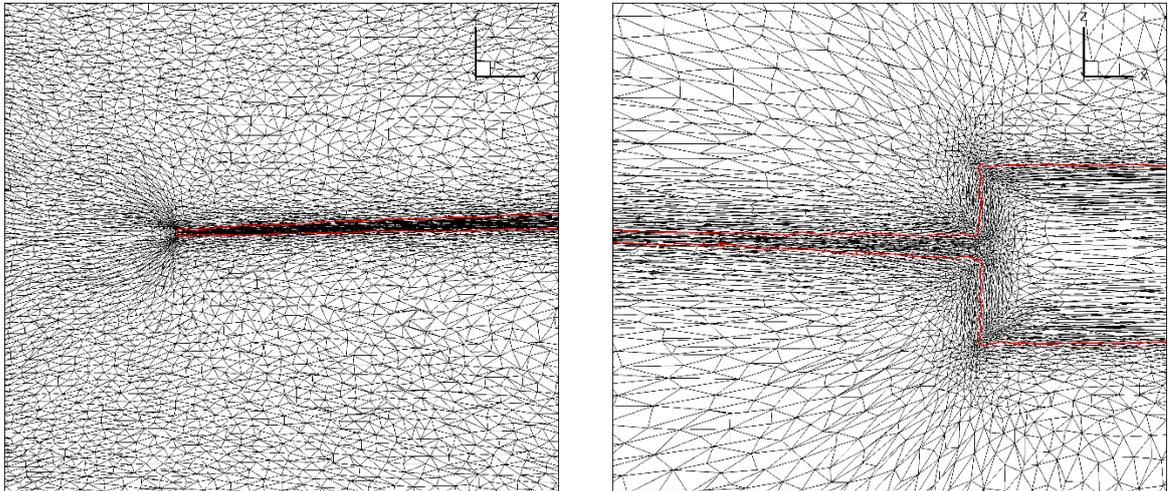


Рисунок 62. Сечение в плоскости XZ адаптивной сетки вблизи центрального тела и конца лопасти

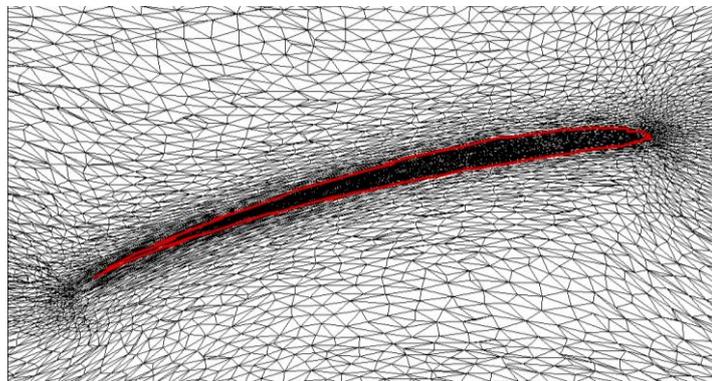


Рисунок 63. Адаптивная сетка в поперечном сечении лопасти

Применение адаптации существенно осложнено наличием тонких стенок лопастей. Расстояние между стенками очень маленькое, а острые углы на стыке этих стенок (рис. 64), сложно разрешить в рамках используемой методики. Адаптация к таким телам требует разработки дополнительных алгоритмов, однако в представленной работе проблема была частично решена использованием начальной сетки слегка анизотропной в направлении оси OZ .

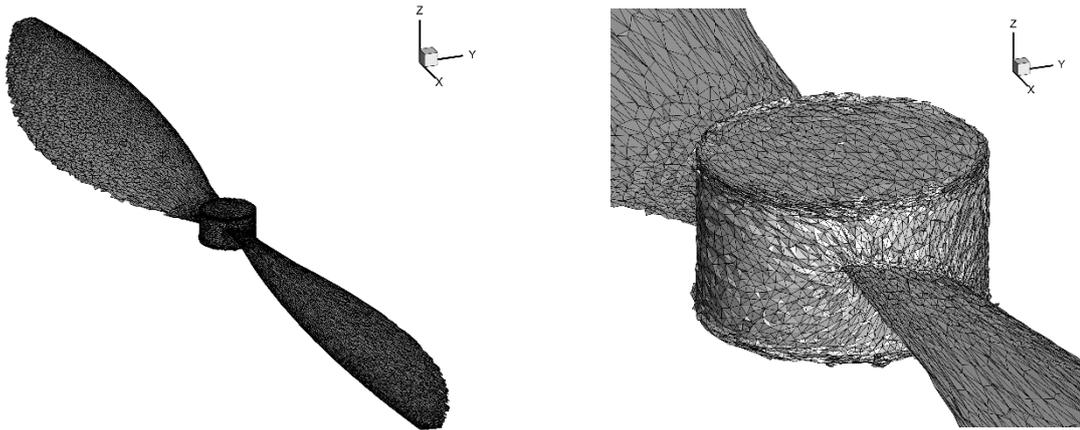


Рисунок 64. Форма пропеллера в рамках DMR-IBM подхода (отображены элементы сетки, у которых все вершины лежат внутри тела)

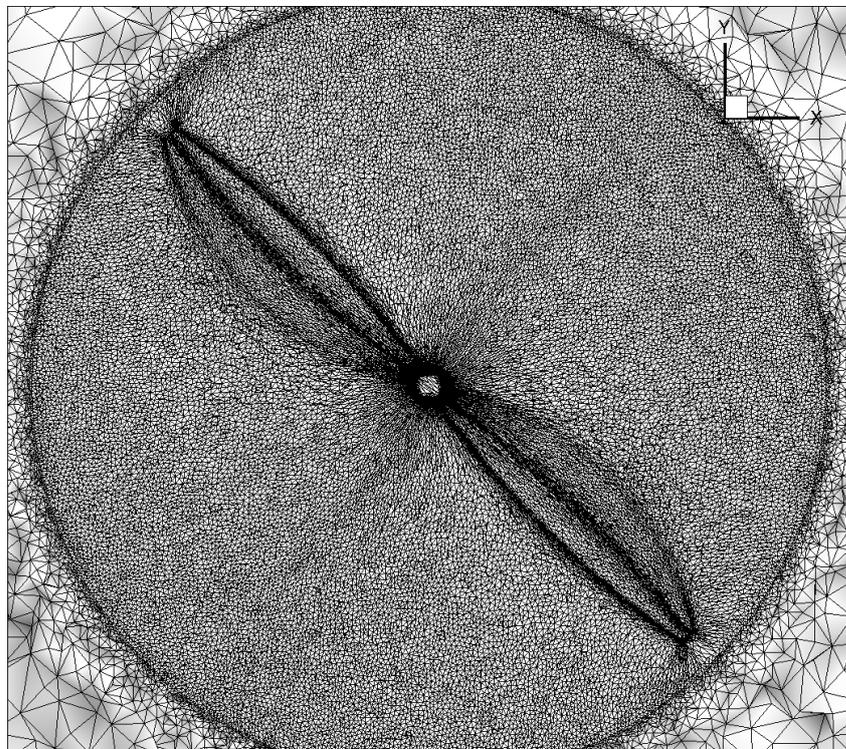


Рисунок 65. Сечение XY адаптивной сетки

6.3.2 Численные результаты

Для расчета акустических характеристик в ближнем поле винта используется следующий набор контрольных точек (рис. 66). Контрольные точки расположены по вдоль окружностей в плоскостях XY (плоскость вращения) и XZ с шагом в 10° . Плоскость YZ не рассматривается, потому что в следствие симметрии задачи она эквивалентна плоскости XZ.

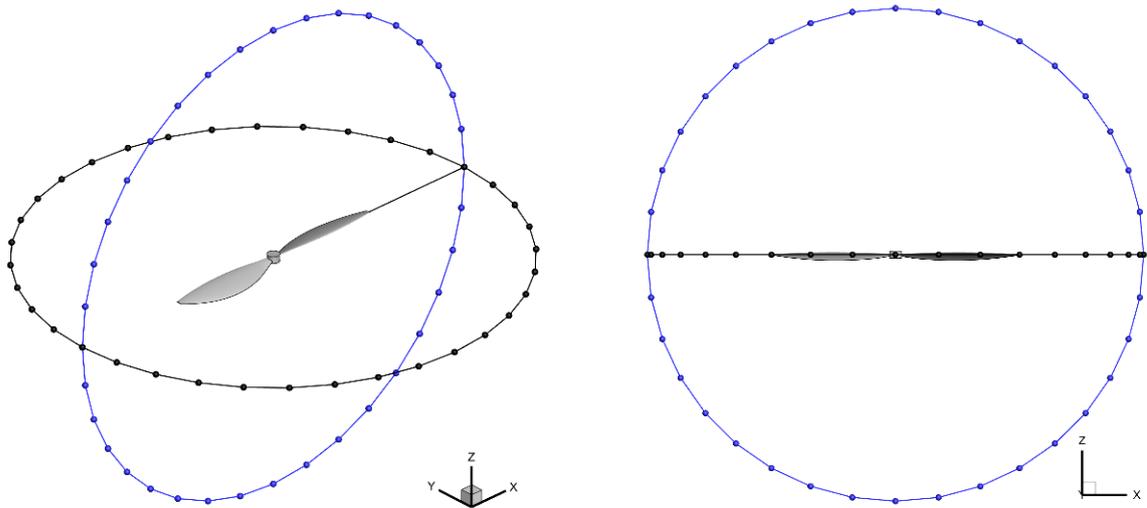


Рисунок 66. Контрольные точки для акустических измерений: в плоскости XY (черным) и в плоскости XZ (синим)

В итоге, используется следующие четыре набора контрольных точек: : в плоскостях XY и XZ на расстоянии $2R$ и $3R$ от центра винта. Азимутальный угол в плоскости XZ измеряется от оси OX: положительные значения угла соответствуют верхней полусфере, а отрицательные – нижней.

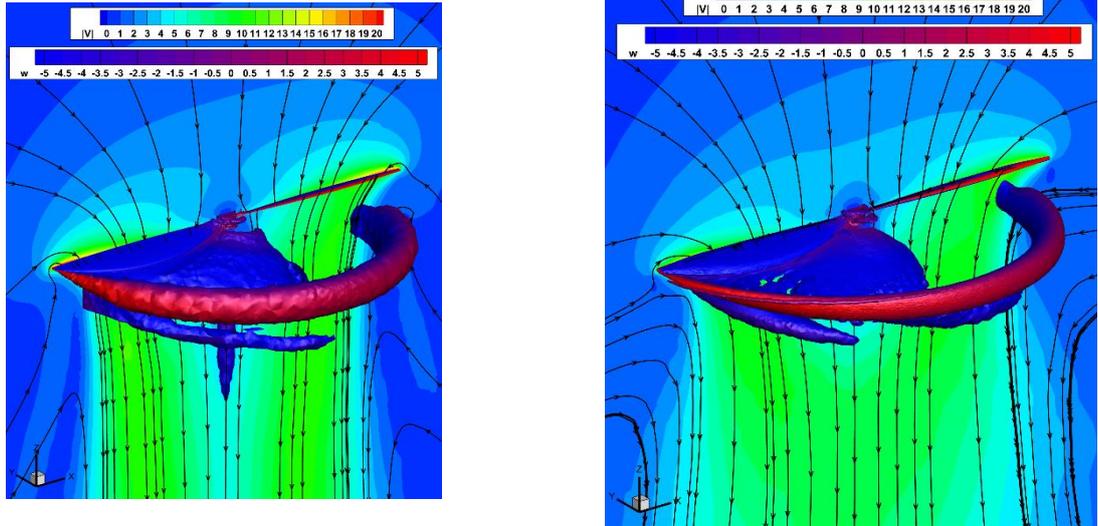


Рисунок 67. Поле течения: модуль скорости, линии тока в сечении ZX и изоповерхности Q -критерия для BFM (слева) и DRM-IBM (справа).

Поле течения в расчетах, выполненных согласно DMR-IBM и BF подходам выглядят схоже (Рис. 67). За винтом возникает струйное течение, вызванное вращением, с максимальной скоростью у конца лопатки. Концевые вихри хорошо разрешаются до 1.5 оборотов. Причем, так как сетка в DMR-IBM подходе хорошо разрешает область под винтом, концевые вихри также лучше разрешены.

Для обоих расчетов BF и DMR-IBM коэффициент тяги c_t и коэффициент мощности c_p сравниваются с экспериментальными данными [58].

	Эксперимент	BF	δ , %	DMR-IBM	δ , %
Коэффициент тяги c_t	0.1158	0.1178	1.7	0.0947	-18.3
Коэффициент мощности c_p	0.0466	0.0465	-0.2	0.0451	-3.2

Таблица 5. Сравнение аэродинамических коэффициентов с экспериментальными данными.

Результат сравнения аэродинамических коэффициентов с экспериментальными данными приведена в таблице, где относительная разница рассчитана как $\delta = (c_{t|p} - c_{t|p}^{ref}) / c_{t|p}^{ref} \cdot 100\%$. Как следует из таблицы, в подходе DMR-

IBM аэродинамические коэффициенты существенно отличаются от референса. Предположительно, это результат недостаточного разрешения пограничного слоя. Разрешение погранслоя в адаптивной сетке достигает $y^+ \sim 100$, что соответствует логарифмическому подслою. Для таких значений y^+ в дальнейшем возможно использовать пристеночные функции [1,4,60]. Другая возможная причина заключается в том, что в методе штрафных функций Бринкмана не учитывалась Лагранжева конвекция.

Основной интерес численного моделирования данной задачи – воспроизвести и сравнить акустику в ближнем поле двух подходов BF и DMR-IBM.

Помимо акустических характеристик рассматривается также спектр пульсаций давления и диаграммы направленности пульсаций давления, полученные в контрольных точках, описанных выше.

Рисунок 68 показывает спектр пульсаций давления в двух контрольных точках – одна в плоскости XY с азимутальным углом 0° и в плоскости XZ с азимутальным углом 40° . Представленные спектры построены с частотой дискретизации 6.65 Гц.

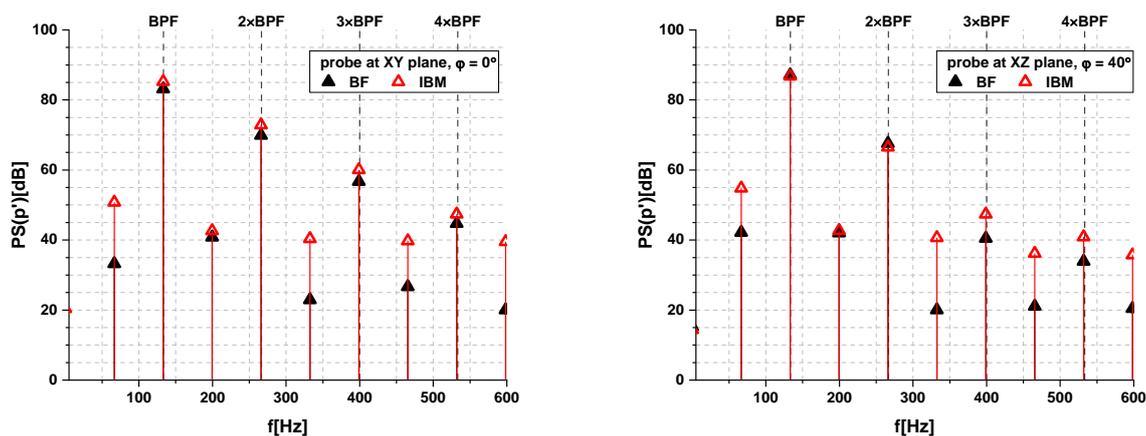


Рисунок 68. Спектр пульсаций давления в контрольной точке в плоскости XY с азимутальным углом 0° (слева) и в плоскости XZ с азимутальным углом 40° (справа)

Как и ожидалось спектральный максимум для обоих подходов достигается на частоте следования лопастей и кратных ей гармониках. Разница между результатами BF и DMR-IBM подходов для амплитуды частоты следования

лопастей составляет примерно 2.1 дБ для первой контрольной точки и 1 дБ для второй. Можно заметить, что амплитуды гармоник кратных частоте следования лопастей, полученные методом DMR-IBM, особенно близки к результату BF подхода.

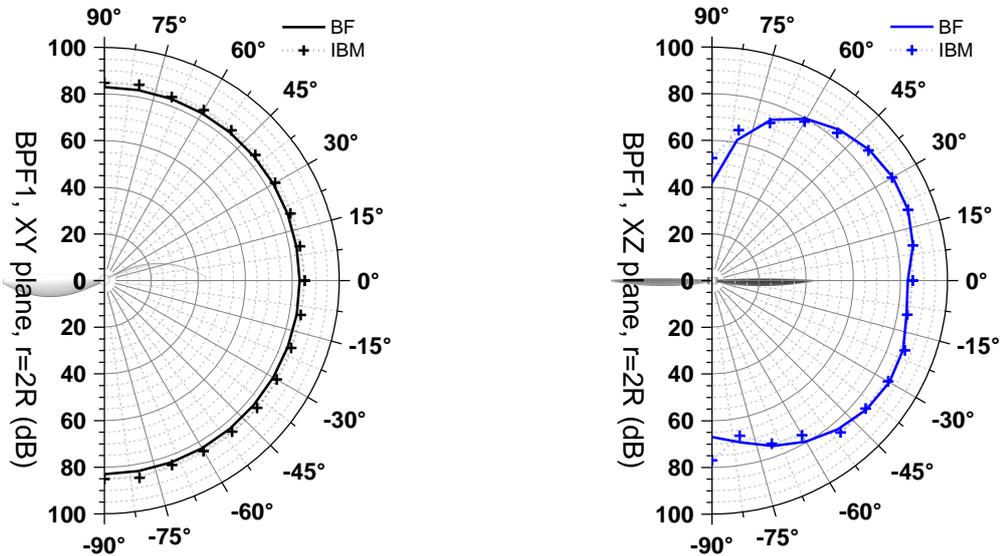


Рисунок 69. Диаграмма направленности для точек на расстоянии $2R$.

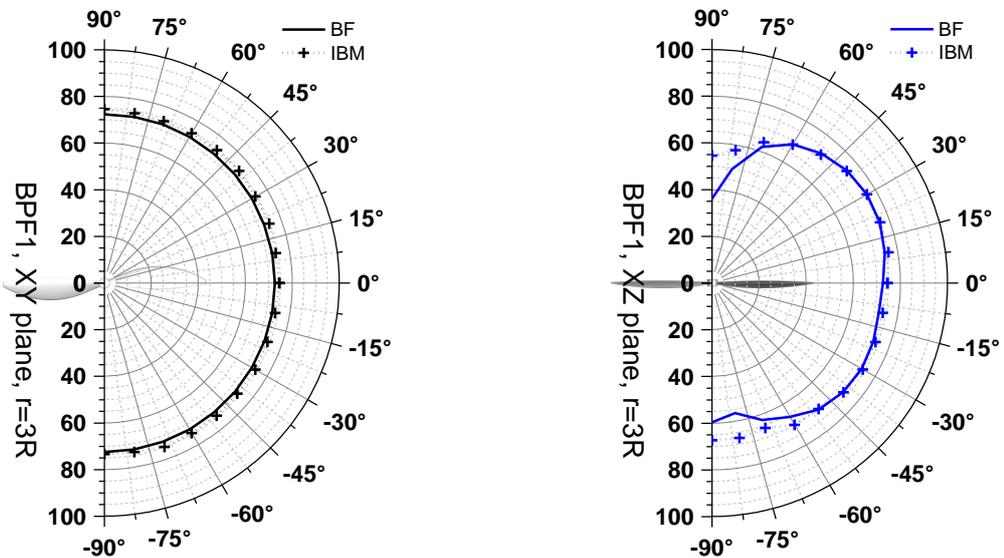


Рисунок 70. Диаграмма направленности для точек на расстоянии $3R$.

В рисунках 69 и 70 диаграммы направленности частоты следования лопастей для плоскостей XY и XZ на расстояниях $2R$ и $3R$. Можно заметить, что в плоскости вращения максимальная разница между исследуемыми подходами меньше 2.9 дБ для $2R$ и 2.2 дБ для $3R$. В плоскости XZ для точек с азимутом $-75^\circ < \varphi < 75^\circ$ наибольшая разница составляет менее 2 дБ для обоих

расстояний. Следует сказать, что пульсации давления полученные на оси вращения теоретически должны быть равны нулю. В данной задаче это не так (составляет около 40-60 дБ) из-за несимметричности постановки. Этот факт подтвержден численным расчетом [61] винта с периодическим условием в азимутальном направлении, где ноль действительно достигается. Также несимметричность в случае DMR-IBM моделирования обусловлена малыми изменениями геометрии винта в процессе движения.

Изначально, идея применения метода DMR-IBM была в моделировании нескольких винтов, расположенных близко друг к другу в присутствии неподвижного тела. После расчетов для одиночного ротора был проведен ряд пробных расчетов для нескольких тел.

Рассматривалась та же геометрия винта. Винты совершают 4000 оборотов в минуту. Число Рейнольдса в задаче $Re=10^5$, число Маха $M=0.156$. Считать полноценную задачу с 4 винтами оказалось крайне вычислительно затратно. Было принято решение рассмотреть симметричную постановку, когда расчетная сетка представляет собой четверть цилиндра, а на границах $x=1.25R$ и $y=-1.25R$ стоит условие симметрии (рис. 71). При такой формулировке 4-х винтовая система работает в режиме висения, а адаптация применяется к одному винту. Направление вращения винтов при такой постановке полностью соответствует реальным компоновкам квадрокоптеров. Полученное в расчете течение соответствует физике процесса (рис. 72): наблюдаются концевые вихри, сходящие с лопастей и взаимодействующие струйные течения, индуцированные четырьмя винтами.

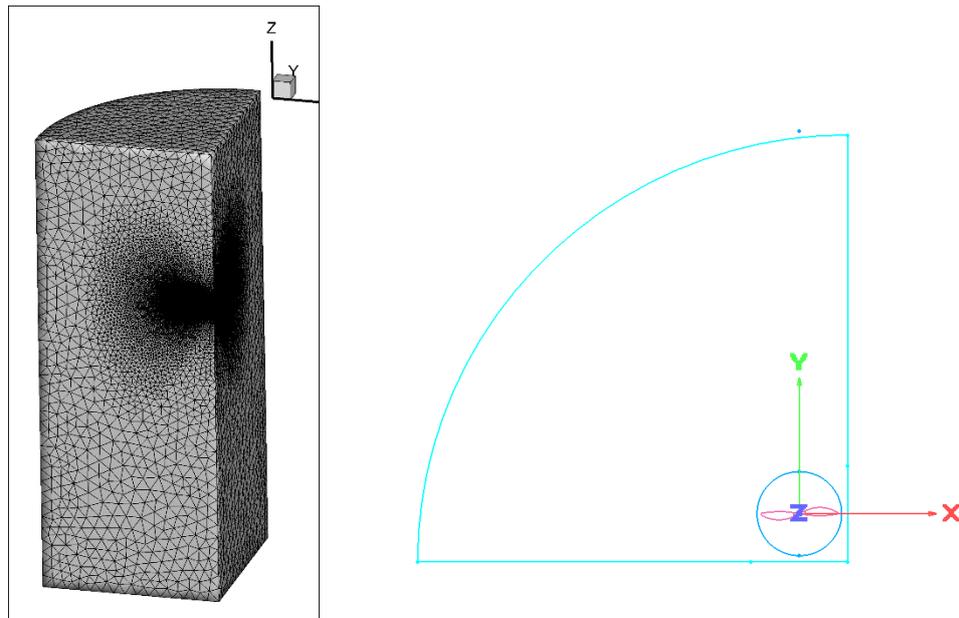


Рисунок 71. Расчетная сетка для моделирования шума системы из 4 винтов и схема расположения винта относительно симметричных граничных условий.

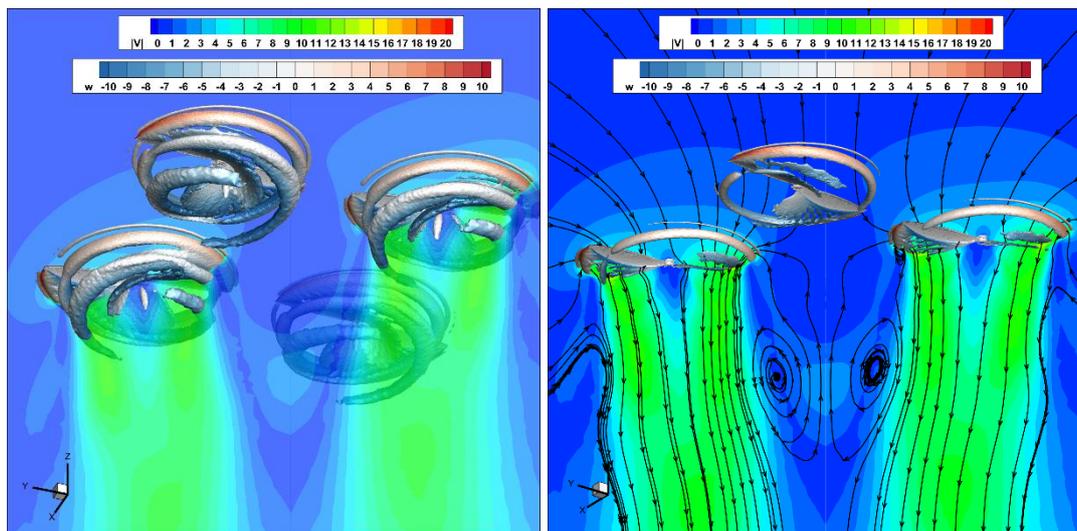


Рисунок 72. Течение формируемое четырьмя винтами: поле модуля скорости с линиями тока в диагональном сечении и вихревые структуры (изоповерхности Q-критерия)

Рассматривалась также постановка, где под винтами расположен некоторый аналог фюзеляжа. Осевое обтекание четырёх винтов квадрокоптера моделировалось обтеканием одного винта с симметричным по двум плоскостям замыканием. Для сохранения такой постановки в расчет был включен симметричный по двум плоскостям фюзеляж квадрокоптера (рис. 73). Параметры вращения винтов были те же: скорость вращения 4000 оборотов в минуту, число

Рейнольдса $Re=10^5$, число Маха $M=0.156$. В результате расчета было получено течение, соответствующее физике процесса (рис. 74): наблюдаются концевые вихри, сходящиеся с лопастей и взаимодействующие с поверхностью фюзеляжа.

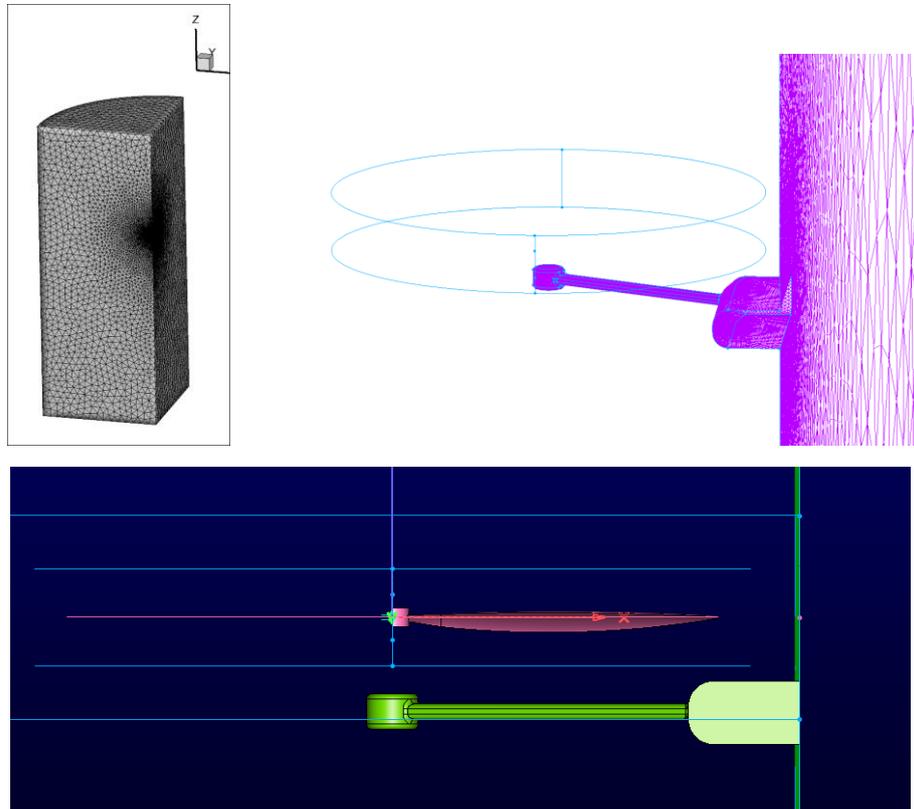


Рисунок 73. Расчетная сетка для моделирования шума вращающегося винта в присутствии фюзеляжа и схема расположения фюзеляжа относительно винта.

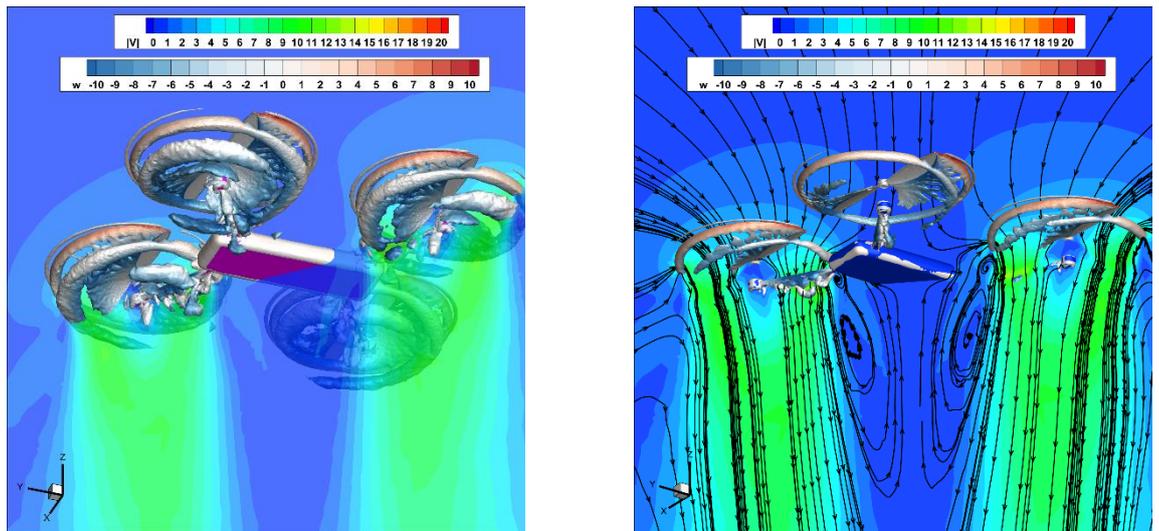


Рисунок 74. Течение формируемое четырьмя винтами в присутствии фюзеляжа: поле модуля скорости с линиями тока в диагональном сечении и вихревые структуры (изоповерхности Q-критерия)

Заключение

В Заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы.

1. Разработана новая **методика моделирования аэродинамики подвижных тел сложной формы** на неструктурированных сетках. Подход основан на использовании метода погруженных границ, позволяющего определять задачу внешнего обтекания в односвязной области. Сгущение неструктурированной сетки к поверхности тела осуществляется путем ее динамической адаптации без изменения исходной топологии.
2. Разработан метод **анизотропной адаптации подвижной неструктурированной сетки к поверхности тел произвольной формы**. Управляющая метрика строится как функция геометрической модели тела. Она обеспечивает сеточное сгущение в нормальном направлении к поверхности, а в тангенциальном направлении сгущает сетку лишь по мере необходимости.
3. Предложена **гибридная геометрическая модель тела**, обеспечивающая корректную работу алгоритма адаптации подвижной неструктурированной сетки к его поверхности. Гибридный способ задания положения тела и его геометрической конфигурации основан на использовании декартовой сетки структуры восьмеричного дерева как носителя геометрии с возможностью точного расчета расстояния вблизи поверхности.
4. В рамках исследовательского программного комплекса NOISEtte создан **программный модуль**, реализующий разработанную методику и обеспечивающий расчеты на высокопроизводительных вычислительных системах с распределенной памятью. Получено свидетельство на РИД. Проведена **верификация** на модельных задачах в двумерной и трехмерной постановках и **валидация** с использованием экспериментальных данных.

5. Численное моделирование *тонального шума изолированного винта квадрокоптера* продемонстрировало работоспособность разработанной методики при решении задач турбулентного обтекания движущихся объектов произвольной геометрии.

Публикации автора по теме диссертации

1. И.В. Абалакин, А.П. Дубень, В.О. Цветкова, Эффективная методика задания граничных условий на твердых стенках для расчета сложных турбулентных течений, Матем. моделирование, 32:11, 2020; Math. Models Comput. Simul., 2021, 13(4), 591–603
2. V. Tsvetkova, T. Kozubskaya, L. Kudryavtseva, N. Zhdanova. On mesh adaptation for supercomputer simulation of flows around solid bodies defined by immersed boundary method, Procedia Computer Science, 2020, 178, p. 404-413
3. П. В. Родионов, А. П. Дубень, Т. К. Козубская, В. О. Цветкова. EBR схемы с криволинейными реконструкциями переменных вблизи обтекаемых тел, Журнал вычислительной математики и математической физики, 2020; Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2021, 61(1) 3-19
4. С. М. Босняков, А. В. Волков, А. П. Дубень, В. И. Запрягаев, Т. К. Козубская, С. В. Михайлов, А. И. Трошин, В. О. Цветкова, Сравнение двух вихреразрешающих методик повышенной точности на неструктурированных сетках применительно к моделированию струйного течения из двухконтурного сопла, Матем. моделирование, 31:10 (2019), 130–144; Math. Models Comput. Simul., 12:3 (2020), 368–377
5. В. Г. Бобков, В. О. Вершков, Т. К. Козубская, В. О. Цветкова, Методика деформации неструктурированных сеток в задачах определения аэродинамических характеристик тел при малых перемещениях, Матем. моделирование, 33:3 (2021), 109–132; Math. Models Comput. Simul., 2021, 13(6), 986–1001
6. В. О. Цветкова, И. В. Абалакин, В. Г. Бобков, Н. С. Жданова, Т. К. Козубская, Л. Н. Кудрявцева, Моделирование обтекания винта, заданного методом погруженных границ, на адаптивной неструктурированной сетке, Матем. моделирование, 33:8 (2021), 59–82; Math. Models Comput. Simul., 2022, 14(2), 224–240

7. T. Kozubskaya, L. Kudryavtseva and V. Tsvetkova, Unstructured Mesh Adaptation for Moving Bodies in Immersed Boundary Methods, in: WCCM-EC-COMAS2020.URL https://www.scipedia.com/public/Kozubskaya_et_al_2021a
8. Т. К. Козубская, Л. Н. Кудрявцева, В. О. Цветкова, Анизотропная адаптация подвижной неструктурированной сетки к телам сложной формы, заданным интерполяционным 8-деревом, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 62:10 (2022) 1620–1631; Comput. Math. Math. Phys., 2022, 62(10), pp. 1590–1601
9. Цветкова В.О., Численное моделирование турбулентного обтекания неподвижного винта дрона с использованием метода погруженных границ, Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 56, 2022
10. Bobkov, V. G., Kozubskaya, T. K., Kudryavtseva, L. N., Tsvetkova, V. O. (2022). Hybrid Dynamic Mesh Redistribution – Immersed Boundary Method for Acoustic Simulation of Flow Around a Propeller. Supercomputing Frontiers and Innovations, 9(4), 69–84

Список литературы

11. Abalakin, I.V., Anikin, V.A., Bakhvalov, P.A., Bobkov, V.G., Kozubskaya, T.K. Numerical Investigation of the Aerodynamic and Acoustical Properties of a Shrouded Rotor // *Fluid Dyn.*, 51(3), pp. 419-433 (2016).
DOI: 10.1134/S0015462816030145
12. I.A. Abalakin, V.G. Bobkov, T.K. Kozubskaya. Numerical Study of Fuselage Impact on Acoustic Characteristics of a Helicopter Rotor // *Supercomputing Frontiers and Innovations*, 2022, 9(4), 100–113.
13. Löhner, R. Three-dimensional fluid-structure interaction using a finite element solver and adaptive remeshing // *Computing Systems in Engineering*, (1990) 1(2-4), 257–272
14. Zheng, J., Chen, J., Zheng, Y., Yao, Y., Li, S., & Xiao, Z. An improved local remeshing algorithm for moving boundary problems // *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, (2016) 10(1), 403–426
15. Steger J, Benek FDJ. A chimera grid scheme // *Advances in Grid Generation* 1983; 5:59–69.
16. Chattot J, Wang Y. Improvement treatment of intersecting bodies with the chimera method and validation with a simple fast flow solver // *Computer & Fluids* 1998; 27:721–740.
17. Kao KH, Liou MS, Chow CY. Grid adaptation using chimera composite overlapping meshes // *AIAA Journal* 1994; 32(5):942–949
18. Houzeaux, G., Eguzkitza, B., Aubry, R., Owen, H., & Vázquez, M., A Chimera method for the incompressible Navier-Stokes equations // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, (2014) 75(3), 155–183.
19. Jung M.S., Kwon O.J. A Conservative Overset Mesh Scheme via Inter-grid Boundary Reconnection on Unstructured Meshes // *AIAA Paper*, 2009-3536.
20. Hahn S., Iaccarino G., Ananthan S., Baeder D. Extension of CHIMPS for Unstructured Overset Simulation and Higher-Order Interpolation // *AIAA Paper*, 2009-3999.

21. Chai J.Z., Han X.L., Che H.L. A Fast Grid Deformation Algorithm and It's Application // 26th Congress of Int. Council of the Aeronautical Sci. 14-19 September 2008, Anchorage, Alaska, USA. Paper ICAS2008-P2.4.

22. Peskin, C. S. 1972. Flow patterns around heart valves: A digital computer method for solving the equations of motion // Ph.D. thesis, Albert Einstein College of Medicine, 211 pp.

23. Abgrall, R., Beaugendre, H., Dobrzynski, C. (2014), An immersed boundary method using unstructured anisotropic mesh adaptation combined with level-sets and penalization techniques // *Journal of Computational Physics* 257 (A): 83–101

24. Leicht T., Hartmann R. Error estimation and anisotropic mesh refinement for 3d laminar aerodynamic flow simulations // *Journal of Computational Physics*, Vol. 229, Iss.19, 2010, P. 7344-7360

25. Barros, G.F., Grave, M., Viguierie, A. et al. Dynamic mode decomposition in adaptive mesh refinement and coarsening simulations // *Engineering with Computers* 38, 4241–4268 (2022)

26. A. van Dam, Go with the flow: moving meshes and solution monitoring for compressible flow simulation // Ph.D. Thesis, Technical report, Utrecht University, 2009.

27. C. de Boor. Good approximation by splines with variable knots. II. // In G.A. Watson, editor, *Conference on the Numerical Solution of Differential Equations*, vol. 363 of *Lecture Notes in Mathematics*, pp 12–20, 1974

28. Alan M. Winslow. Numerical Solution of the Quasilinear Poisson Equation in a Nonuniform Triangle Mesh // *J. Comput. Phys.*, 1(2):149–172, 1966

29. С. К. Годунов, Г. П. Прокопов. О расчетах конформных отображений и построений разностных сеток // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 7:5 (1967), 1031–1059; *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 7:5 (1967), 89–124

30. A.M. Winslow. Adaptive-mesh zoning by the equipotential method // *Technical Report UCID-19062*, Lawrence Livermore Laboratory, 1981

31. J.U. Brackbill and J.S. Saltzman. Adaptive Zoning for Singular Problems in Two Dimensions // *J. Comput. Phys.*, 46:342–368, 198
32. Arkady S. Dvinsky. Adaptive grid generation from harmonic maps on Riemannian manifolds // *J. Comput. Phys.*, 95(2):450–476, 1991
33. W. Huang, Y. Ren, R. D. Russell. Moving mesh partial differential equations (MMPDES) based on the equidistribution principle // *SIAM J. Numer. Anal.*, 31(3):709–730, 1994
34. W. Huang and R.D. Russell. A high dimensional moving mesh strategy // *Appl. Numer. Math.*, 26(1):63–76, 1997
35. V. Garanzha, L. Kudryavtseva, Hypoelastic Stabilization of Variational Algorithm for Construction of Moving Deforming Meshes // In: Evtushenko Y., Jacimovic M., Khachay M., Kochetov Y., Malkova V., Posypkin M. (eds) Optimization and Applications. OPTIMA 2018. Communications in Computer and Information Science, 974 (2019) 497-511.
36. С. К. Годунов, В. М. Гордиенко, Г. А. Чумаков, Квазиизометрическая параметризация криволинейного четырехугольника и метрика постоянной кривизны // *Тр. Ин-та математики СО РАН*, 1994, том 26, 3–19
37. Garanzha, V.A.: The barrier method for constructing quasi-isometric grids // *Comput. Math. Math. Phys.* 40(11), 1617–1637 (2000)
38. Garanzha, V.A., Kudryavtseva, L.N., Utyzhnikov, S.V.: Untangling and optimization of spatial meshes // *J. Comput. Appl. Math.* 269, 24–41 (2014)
39. Jacquotte, O.-P. A mechanical model for a new grid generation method in computational fluid dynamics // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (1988), 66(3), 323–338.
40. Abalakin I.V., Bahvalov P.A., Doronina O.A., Zhdanova N.S., Kozubskaya T.K.: Simulating Aerodynamics of a Moving Body Specified by Immersed Boundaries on Dynamically Adaptive Unstructured Meshes // *Math. Models Comput. Simul.*, 11(1), pp. 35-45 (2019)
41. Chiappa A. S., Micheletti S., Peli R., Perotto S., Mesh adaptation-aided

image segmentation // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 74, 2019, P. 147-166

42. P. R. Spalart, S. R. Allmaras, A one-equation turbulence model for aerodynamic flows, 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit // *Aerospace Sciences Meetings*. — AIAA Paper 1992-0439.

43. I. Abalakin, P. Bakhvalov, T. Kozubskaya, Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 81(6) (2016) 331-356.

44. Bakhvalov, P.A., Kozubskaya, T.K.: Construction of edge-based 1-exact schemes for solving the Euler equations on hybrid unstructured meshes // *Comput. Math. Math. Phys.*, 57(4), pp. 680–697 (2017).

45. Bakhvalov, P., Kozubskaya, T.: EBR-WENO scheme for solving gas dynamics problems with discontinuities on unstructured meshes // *Comput. Fluids*, vol. 157, pp. 312–324 (2017).

46. I.E. Kapurin, O.Yu. Milyukova, MPI+OpenMP implementation of the BiCGStab method with explicit preconditioning for the numerical solution of sparse linear systems // *Numerical methods and programming*, 20 (2019) 516-527

47. Abalakin I.V., Duben A.P., Zhdanova N.S., Kozubskaya T.K., Kudryavtseva L.N.: Immersed Boundary Method on Deformable Unstructured Meshes for Airfoil Aeroacoustic Simulation // *Comput. Math. and Math. Phys.*, 59(12), pp. 2046-2059 (2019)

48. Суков С.А., Комбинированный алгоритм вычисления расстояния со знаком для задач численного моделирования физических процессов и визуализации движения твердых тел // *Научная визуализация*, 2020, том 12, номер 5, стр. 86–101

49. Nina Amenta, Sunghee Choi, Ravi Krishna Kolluri, The power crust, unions of balls, and the medial axis transform // *Computational Geometry*, Vol. 19, Iss. 2–3, 2001, pp. 127-153

50. Garimella R., Swartz B. Curvature Estimation for Unstructured Triangulations of Surfaces // *Technical Report LA-UR-03-8240*, Los Alamos National

Lab, 2003

51. Frazza, L., 3D anisotropic mesh adaptation for Reynolds Averaged Navier-Stokes simulations // Modeling and Simulation. Sorbonne Université, thesis (2018)

52. Gorobets, A.V.: Parallel Algorithm of the NOISEtte Code for CFD and CAA Simulations // Lobachevskii Journal of Mathematics 39(4), 524–532 (2018)

53. Bentley J.L. Multidimensional binary search trees used for associative searching // Communications of the ACM. 1975, 18 (9): 509–517

54. Dütsch, H., Durst, F., Becker, S., Lienhart, H. (1998), Low-Reynolds-number flow around an oscillating circular cylinder at low Keulegan-Carpenter numbers // Journal of Fluid Mechanics 360: 249–271.

55. Abalakin, I.V., Kozubskaya, T.K., Zhdanova, N.S. (2018), Immersed boundary penalty method for compressible flows over moving obstacles // ECCM 6/ECFD 7 1797

56. N. Bettschart, A. Desopper, R. Hanotel and R. Languier. Experimental and theoretical studies of helicopter rotor-fuselage interaction // ICAS, 1992, 4.8.1., pp. 1637-1646.

57. Brandt, B.: Small-scale propeller performance at low speed // Master thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2005

58. Brandt, J.B., Selig, M.S.: Propeller performance data at low Reynolds numbers // AIAA Paper 2011-1255 (2011)

59. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа // 7-е изд., испр. — М.: Дрофа, 2003. — 840 с.

60. Н.С. Жданова, И.В. Абалакин, О.В. Васильев Расширение метода штрафных функций Бринкмана для сжимаемых течений вокруг подвижных твердых тел // Матем. моделирование, 2022, Т. 34, №2, С. 41-57

61. Abalakin, I.V., Anikin, V.A., Bakhvalov, P.A., et al.: Numerical Investigation of the Aerodynamic and Acoustical Properties of a Shrouded Rotor // Fluid Dyn. 51(3), 419-433 (2016).

62. Свидетельство РИД. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020665711 от 24 ноября 2020 года «**Программный модуль MUnMAdapt** адаптации подвижной неструктурированной сетки к поверхности тела при использовании метода погруженных границ»
Авторы: Кудрявцева Л.Н., Козубская Т.К., Гаранжа В.А., Цветкова В.О., Жданова Н.С. Правообладатель: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН