

ИНСТИТУТ ХИМИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ИМ. Н.Н.СЕМЕНОВА
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

На правах рукописи

Тухватуллина Рузана Рамилевна

**Физико-математические модели
двухфазного неизотермического двухскоростного течения
пузырьковой среды**

Специальность 01.02.05 —

«Механика жидкости, газа и плазмы»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Фролов С.М.

Москва — 2018

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Обзор литературы	12
1.1 Физико-математические модели двухфазных двухскоростных течений	12
1.2 Ударные волны в пузырьковых средах	17
1.3 Пузырьковая детонация	20
Глава 2. Физико-математическая модель двухфазного невязкого течения пузырьковой среды	23
2.1 Корректность задачи Коши для систем линейных уравнений с частными производными	23
2.2 Осреднение	25
2.3 Изотермическая двухфазная невязкая модель	29
2.3.1 Корректность задачи Коши	36
2.4 Неизотермическая двухфазная невязкая модель	39
2.4.1 Корректность задачи Коши	41
2.5 Расширение области корректности за счет учета фазовых переходов	44
Глава 3. Физико-математическая модель двухфазного вязкого течения пузырьковой среды	47
3.1 Математическая модель	47
3.1.1 Корректность задачи Коши	48
3.2 Течение пузырьковой среды в сопле	52
3.3 Влияние межфазного давления на структуру течения	54

3.4	Исследования распространения ударной волны в пузырьковой среде	57
3.4.1	Экспериментальная установка и методология	57
3.4.2	Измерение скорости ударной волны	61
3.4.3	Измерение скоростей фаз	65
3.4.4	Передача импульса от ударной волны к пузырьковой среде	69
3.5	Численное моделирование передачи импульса от ударной волны к пузырьковой среде	73
Глава 4. Физико-математическая модель двухскоростного течения пузырьковой среды с учетом динамики колебаний газовых пузырьков		
4.1	Математическая модель	83
4.1.1	Корректность задачи Коши	85
4.1.2	Согласованность модели со вторым законом термодинамики	88
4.2	Численный метод	90
4.3	Сравнение с экспериментальными данными	93
Глава 5. Физико-математическая модель двухскоростного течения пузырьковой среды с учетом динамики колебаний реакционноспособных газовых пузырьков . .		
5.1	Математическая модель	102
5.1.1	Кинетика в газовом пузырьке	106
5.2	Пузырьковая детонация	109
Основные результаты и выводы		116
Список принятых обозначений		117
Приложение А.		118

Приложение Б.	119
Приложение В.	120
Список литературы	122

Введение

В настоящее время появился интерес к разработке силовых установок нового типа для надводных и подводных аппаратов и транспортных средств различного назначения — гидрореактивного водометного движителя (ГРД), работающего в режиме импульсной или непрерывной детонации [1;2]. Это связано с тем, что термодинамический цикл с детонационным горением топливной смеси более энергоэффективен, чем все другие известные термодинамические циклы с дефлаграционным сжиганием топлива [3]. Кроме того, ожидается [4], что при детонационном горении топлива эмиссия вредных веществ (СО, сажа, оксиды азота и др.) будет существенно ниже, чем в традиционном цикле со сжиганием топлива при постоянном давлении (цикл Брайтона).

Импульсно-детонационный ГРД представляет собой водовод — профилированный канал — и погруженную в него детонационную трубку. В таком ГРД тяга создается путем периодического вытеснения забортной воды из водовода под действием бегущей ударной волны, порожденной детонацией в трубке, и расширяющихся продуктов детонации топливной смеси. Поскольку забортная вода в водоводе барботируется газообразными продуктами горения и детонацией, в канале образуется сжимаемая двухфазная пузырьковая среда. Именно этот фактор — использование в водоводе сжимаемой двухфазной пузырьковой среды — является ключевым в принципе работы импульсно-детонационного ГРД. Для оценки эффективности таких ГРД и для их проектирования необходимо уметь предсказывать передачу количества движения от ударной волны к пузырьковой жидкости, используя численное моделирование.

Кроме указанной выше практической задачи, понимание особенностей сжимаемых двухфазных пузырьковых течений важно для множества других задач, в частности задач пожаро- и взрывобезопасности в химических технологиях.

На сегодняшний день существует несколько физико-математических моделей, описывающих течения пузырьковых сред. Выбор той или иной модели для решения конкретной задачи до сих пор остается предметом научных дискуссий.

Во-первых, при выборе модели необходимо иметь в виду проблему корректности задачи Коши для уравнений движения многофазных сред. Математические модели, описывающие многофазные течения, как правило, получают в результате пространственного, временного или статистического осреднения законов сохранения для течений составляющих фаз. В 1970-х годах при первых попытках получить численные решения многофазных уравнений, возникли неожиданные трудности, связанные с устойчивостью решения. Дальнейший анализ показал, что задача Коши для этих уравнений сформулирована некорректно (по Петровскому). Некорректность в таких задачах обычно связывают с недостаточно полным описанием межфазного взаимодействия. В общем случае межфазное взаимодействие зависит от топологии течения, типа имеющихся фаз и физических процессов, происходящих на межфазной поверхности, например, кавитации, трения, межфазного теплообмена и др. Поэтому в литературе предлагаются различные подходы к регуляризации дифференциальных уравнений в зависимости от типа решаемой задачи.

Во-вторых, численные результаты, полученные на основе выбранной математической модели, должны качественно и количественно описывать экспериментальные данные.

Таким образом, разработка корректной физико-математической модели для моделирования течений пузырьковой среды — актуальная задача.

Цель диссертационной работы — разработать корректные физико-математические модели неизотермического двухфазного течения в системе «жидкость – пузырьки газа» и проверить их применимость к расчетам распространения ударных и детонационных волн в пузырьковых средах на основе сравнения результатов расчетов с экспериментальными данными.

Научная новизна. Ниже перечислены новые научные результаты, полученные в работе:

1. Предложены четыре новые корректные физико-математические модели двухфазного двухскоростного неизотермического течения пузырьковой среды, которые последовательно (от простого к сложному) дополняются уравнениями, описывающими сопутствующие физические (колебания пузырьков, вязкость фаз, межфазный обмен количеством движения и энергией) и химические (глобальные и детальные кинетические механизмы химических реакций, энерговыделение в газе) процессы.
2. Для предложенных физико-математических моделей двухфазного двухскоростного неизотермического течения пузырьковой среды разработаны и отлажены новые численные алгоритмы.
3. Проведена верификация предложенных физико-математических моделей двухфазного двухскоростного неизотермического течения пузырьковой среды на основе сравнения результатов численных расчетов с литературными экспериментальными данными, а также с новыми данными экспериментов о передаче количества движения от ударной волны к пузырьковой жидкости, полученных с участием диссертанта.
4. Численно и экспериментально доказано существование оптимального начального газосодержания жидкости для достижения наиболее эффективной передачи количества движения от ударной волны к пузырьковой среде.

Теоретическая и практическая ценность диссертационной работы состоит в разработке и верификации иерархии из четырех корректных физико-математических моделей двухфазного двухскоростного неизотермического течения пузырьковой среды, отличающихся разным уровнем детализации сопутствующих физико-химических процессов, применительно к задачам распространения волн давления в пузырьковых средах.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Физико-математические модели двухфазного двухскоростного неизо-термического течения пузырьковой среды, которые последовательно (от простого к сложному) дополняются уравнениями, описывающими сопутствующие физические (колебания пузырьков, вязкость фаз, меж-фазный обмен количеством движения и энергией) и химические (гло-бальные и детальные кинетические механизмы химических реакций, энерговыделение в газе) процессы.
2. Численные алгоритмы для предложенных математических моделей.
3. Результаты сравнения численных расчетов с литературными экспери-ментальными данными, а также с новыми данными экспериментов, проведенных с участием диссертанта, о передаче количества движения от ударной волны к пузырьковой жидкости с пузырьками химически инертного газа.
4. Численное и экспериментальное доказательство существования опти-мального начального газосодержания жидкости для достижения наи-более эффективной передачи количества движения от ударной волны к пузырьковой среде.

Достоверность и обоснованность результатов подтверждаются их сравнением с опубликованными в литературе и собственными эксперименталь-ными, а также с известными расчетными данными.

Апробация работы и публикации. Основные результаты диссертаци-онной работы докладывались на следующих научных семинарах и конферен-циях:

1. На конференциях отдела горения и взрыва ИХФ РАН, 2015 и 2016 года, г. Москва.
2. На научной сессии НИЯУ МИФИ, 2015 год, г. Москва.

3. На конференции «X Международный коллоквиум по импульсной и непрерывной детонации ICPCD», 2016 год, г. Санкт-Петербург, Россия.
4. На 7-ом Международном симпозиуме по «Неравновесным процессам, плазме, горению и атмосферным явлениям», 2016 год, г. Сочи, Россия.
5. На Всероссийской конференции «Теплофизика и физическая гидродинамика – 2016» с элементами школы для молодых ученых, 2016 год, г. Ялта.
6. На ежегодных Всероссийских научно-практических конференциях Министерства образования и науки Российской Федерации (2014, 2015 и 2016 гг.).
7. На заседаниях кафедры вычислительной механики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 14 печатных работ. Статей, опубликованных в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК – 3. Статей, планируемых выйти в печать в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК – 1.

Личный вклад. Соискатель принимал непосредственное участие в постановке задач, разработке вычислительных программ, планировании и проведении эксперимента, обработке экспериментальных данных, а также в подготовке статей и представлении докладов на конференциях.

Структура и объем диссертации. Полный объем диссертации составляет 129 страниц с 39 рисунками и 8 таблицами. Список литературы содержит 69 наименований.

Список публикаций.

1. Авдеев К.А., Аксенов В.С., Борисов А. А., Тухватуллина Р.Р., Фролов С.М., Фролов Ф.С., Численное моделирование передачи импульса от ударной волны к пузырьковой среде// Химическая физика. – 2015. – Т. 34. – № 5. – С. 34–46.
2. Frolov S.M., Avdeev K. A., Aksenov V.S., Borisov A. A., Frolov F.S., Shamshin I. O. , Tukhvatullina R.R., Basara B., Edelbauer W. , Pachler K. Experimental and computational studies of shock wave-to-bubbly water momentum transfer// International Journal of Multiphase Flow – 2017. – V.92. – P. 20–38.
3. Авдеев К. А., Аксёнов В. С., Борисов А. А., Севастополева Д. Г., Тухватуллина Р. Р., Фролов С. М., Фролов Ф. С., Шамшин И.О. , Басара Б., Эдельбауэр У., Пахлер К. Расчет распространения ударной волны в воде с пузырьками реакционноспособного газа// Химическая физика. – 2017. – Т. 36. – № 4. – С. 1–11.
4. Tukhvatullina R.R., Frolov S.M. Well-posed Euler model of shock-induced two-phase flow in bubbly liquid// International Journal of Shock Waves. – 2017. – Online first: DOI 10.1007/s00193-017-0731-y.
5. Лидский Б.В., Посвянский В.С., Семенов И.В., Тухватуллина Р.Р., Фролов С.М. Корректность смешанной эволюционно-краевой задачи и ее дискретного аналога для многофазных течений// Горение и взрыв. – 2013. – Вып. 6. – С. 137–144.
6. Тухватуллина Р. Р. Исследование корректности задачи Коши для двухскоростного вязкого двухфазного течения (жидкость–газ)// Горение и взрыв. – 2015. – Т.8. – № 2. – С. 38–44.
7. Авдеев К.А., Аксенов В.С., Борисов А. А., Тухватуллина Р.Р., Фролов С.М., Фролов Ф.С. Численное моделирование воздействия ударной волны на пузырьковую среду// Горение и взрыв. – 2015. – Т. 8. – №2. – С. 45–56.

8. Авдеев К.А., Аксенов В.С., Борисов А. А., Тухватуллина Р.Р., Фролов С.М., Фролов Ф.С. Численное моделирование передачи импульса от ударной волны к пузырьковой среде// Горение и взрыв. – 2015. – Т. 8. – №2. – С. 57–67.
9. Tukhvatullina R.R., Frolov S.M. Well-posed Euler Model of Shock and Detonation Induced Two-phase Flow in Bubbly Liquid// Progress in Detonation Physics. Ed. by S.M.Frolov, G.D. Roy. – Torus Press, Moscow, 2016. – P. 106–120.
10. Frolov S.M., Avdeev K. A., Aksenov V.S., Borisov A. A., Frolov F.S., Shamshin I. O., Tukhvatullina R.R., Basara B., Edelbauer W. , Pachler K. Experimental and Computational Investigation of Shock Wave-to-Bubbly Water Momentum Transfer// Progress in Detonation Physics. Ed. by S.M.Frolov, G.D. Roy. – Torus Press, Moscow, 2016. – P. 199–219.
11. Frolov S.M., Avdeev K. A., Aksenov V.S., Frolov F.S., Sadykov I.A., Shamshin I. O., Tukhvatullina R.R. Direct conversion of fuel chemical energy into the energy of water motion// Nonequilibrium processes in physics and chemistry, Vol.2: Combustion and Detonation. Ed. by A. M. Starik and S. M. Frolov. – Moscow, Torus Press, 2016. – P. 251 – 262
12. Тухватуллина Р.Р., Фролов С.М. Корректность неизотермической модели Эйлера для двухфазных течений// Горение и взрыв. – 2016. – Т. 9. – №4. – С. 26–36.
13. Авдеев К.А., Аксенов В.С., Борисов А. А., Севастополева Д.Г., Тухватуллина Р.Р., Фролов С.М. , Фролов Ф.С. Ударные волны в воде с пузырьками реакционноспособного газа: расчет// Горение и взрыв. – 2016. – Т. 9. – №4. – С. 48–64.
14. Тухватуллина Р. Р., Фролов С.М. Ударные волны в жидкости, содержащей инертные и реакционноспособные газовые пузырьки// Горение и взрыв. – 2017. – Т.10. – №2. – С. 52–61.

Глава 1. Обзор литературы

1.1 Физико-математические модели двухфазных двухскоростных течений

Рассмотрим простейшую двухскоростную двухфазную физико-математическую модель, которая описывает течение жидкости с пузырьками газа. В этой модели двухфазная среда (жидкость — пузырьки газа) описывается как совокупность двух континуумов, каждый из которых характеризуется своим давлением, скоростью потока и температурой. Для каждого континуума (фазы) записываются законы сохранения массы, количества движения и энергии:

$$\frac{\partial \rho_i \alpha_i}{\partial t} + \nabla_k \alpha_i \rho_i u_i^k = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \alpha_i \rho_i u_i^j}{\partial t} + \nabla_k (\alpha_i \rho_i u_i^j u_i^k) + \nabla_j (\alpha_i p_i) = \hat{p}_I \nabla_j \alpha_i + F_{i,m}^j \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \alpha_i \rho_i E_i}{\partial t} + \nabla_k \alpha_i u_i^k (\rho_i E_i + p_i) = -\nabla_k \alpha_i q_i^k - \hat{p}_I \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + Q_{i,m} \quad (1.3)$$

где индекс i обозначает жидкость (l) или газ (g); $m = l, g$ и $m \neq i$; $p_i, \rho_i, \alpha_i, \mathbf{u}_i, E_i$ — давление, плотность, объемная доля, скорость и полная энергия i -ой фазы, \hat{p}_I — межфазное давление. Слагаемые $\hat{p}_I \nabla_j \alpha_i$ и $\hat{p}_I \frac{\partial \alpha_i}{\partial t}$ описывают силы, действующие на межфазной поверхности, члены $F_{i,m}^j, Q_{i,m}$ описывают межфазный обмен импульсом и энергией соответственно и не содержат дифференциальных операторов. Система уравнений дополняется соотношением, связывающим объемные доли:

$$\alpha_g + \alpha_l = 1 \quad (1.4)$$

а также уравнениями, определяющими межфазное давление и связь давлений в газе и жидкости:

$$p_g = p_l = \hat{p}_\Gamma \quad (1.5)$$

Для того, чтобы система уравнений (1.1)—(1.5) стала замкнутой, необходимо определить уравнения состояния.

В 1970-х годах при первых попытках получить численные решения на основе модели (1.1)—(1.5) возникли неожиданные трудности, связанные с неустойчивостью решения. Дальнейший анализ [5–8] показал, что для системы определяющих уравнений происходит потеря гиперболичности, т.е. задача Коши для такой модели поставлена некорректно по Петровскому (см. ниже Определение 1) и ее нельзя использовать при численном моделировании без дополнительной регуляризации.

Некорректность обычно связывают с недостаточно полным описанием межфазного взаимодействия, так как при осреднении исходных уравнений наличие межфазной поверхности приводит к возникновению слагаемых $\hat{p}_\Gamma \nabla_j \alpha_i$ и $\hat{p}_\Gamma \frac{\partial \alpha_i}{\partial t}$, содержащих дифференциальные операторы, т.е. влияющих на тип уравнения. Поэтому регуляризация обычно сводится к определению давления \hat{p}_Γ на межфазной поверхности. Определение этой величины, как функции от кинематических и термодинамических параметров фаз, зависит от топологии течения, типа имеющихся фаз и физических процессов, происходящих на межфазной поверхности, например, кавитации, трения, межфазного теплообмена и др.

Наиболее распространенным выбором определения межфазного давления является соотношение [9]:

$$\hat{p}_\Gamma = p - \delta \frac{\alpha_g \alpha_l \rho_g \rho_l}{\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g} \mathbf{u}_{1g}^2 \quad (1.6)$$

где $\delta = \text{const}$, \mathbf{u}_{lg} — скорость проскальзывания фаз. Фазовые давления предполагаются равными:

$$p_l = p_g = p \quad (1.7)$$

В работе [9] в предположении, что обе фазы несжимаемые, получено, что система уравнений (1.1)—(1.4) с соотношениями (1.6) и (1.7) корректна, если выполнены следующие условия:

$$\delta > 1, \quad \rho_i = \text{const} \quad (i = l, g) \quad (1.8)$$

Регуляризация типа (1.6)—(1.7) часто переносится на течения, где по крайней мере одна фаза (газ) является сжимаемой [10–12]. В этом случае условия корректности (1.8) переписываются в виде:

$$\delta > 1, \quad |\mathbf{u}_{lg}| \ll c_g \quad (1.9)$$

где c_g — скорость звука в газе. Второе условие возникает в результате того, что анализ собственных значений проводится методом возмущения малого параметра $\varepsilon = |\mathbf{u}_{lg}|/c_g$ (см., например, [13]). В работе [14] численно показано, что, например, при $\varepsilon = 0.1$ задача становится некорректной. Кроме того, так как межфазное давление (1.6) не является физически обоснованным, то в литературе можно встретить различные δ .

В работе [10] численно исследовалось влияние межфазного давления на структуру решения задачи Римана о распаде разрыва. Численные расчеты проводились при $\delta = 1, 2$ и 5 . Получено, что межфазное давление почти не влияет на распространение «быстрых» возмущений (ударных волн и волн разрежения), но может значительно влиять на распространение «слабых» возмущений (контактных разрывов).

Физически обоснованная регуляризация этой задачи рассматривалась в работах [15; 16], где предлагалось вводить разные давления фаз, учитывающие

силу поверхностного натяжения на искривленной поверхности раздела фаз. Согласно уравнению Лапласа-Янга разность давлений можно определить следующим образом:

$$p_g - p_l = \sigma k \quad (1.10)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, k — средняя кривизна поверхности. В работе [15] показано, что $k \sim \Delta \alpha_g$, где α_g — объемное газосодержание, Δ — оператор Лапласа. Такая регуляризация позволяет сделать задачу корректной во всей области, однако ее физическое обоснование получено только для стратифицированного потока.

Другая физически обоснованная регуляризация предложена в работе [9] для пузырьковых течений, где межфазное давление определялось как добавочное давление у поверхности газового пузырька, обусловленное его движением в сплошной среде:

$$\hat{p}_l = p_l + \xi \rho_l u_{lg}^2 \quad (1.11)$$

где коэффициент $\xi = -0.17$ определяется в результате осреднения местного коэффициента давления по поверхности сферического пузырька для течения с большими числами Рейнольдса ($Re > 1000$, где $Re = 2R\rho_l |\mathbf{u}_{lg}| / \mu_l$, μ_l — вязкость жидкости, R — радиус пузырька). Давления в газе и жидкости предполагаются равными (1.7). В работе [9] получено, что система уравнений (1.1)–(1.4) с соотношениями (1.7) и (1.11) корректна, если выполнены следующие условия:

$$0 < \alpha_g < 0.17, \quad \rho_i = \text{const} \quad (i = l, g) \quad (1.12)$$

т.е. условия корректности (1.12) также получены в предположении, что жидкость и газ несжимаемые. Из условий видно, что такая регуляризация применима к течениям с малой концентрацией газовых пузырьков в жидкости (максимальное газосодержание $\alpha_g = 0.17$). Для того, чтобы использовать ее при

больших газосодержаниях, в [9] предложено учесть «неодиночность» газовых пузырьков, т.е. ввести зависимость коэффициента ξ от газосодержания.

Помимо подходов к регуляризации модели (1.1)—(1.5), связанных с введением межфазного давления, учет вязких напряжений позволяет сделать задачу корректной во всей области [17]. Однако вязкие напряжения описывают трение внутри фазы, поэтому их отсутствие не являются истиной причиной некорректности двухфазных задач. Понимание истиной причины позволит более правильно описывать физические явления, связанные с двухфазными процессами, тем не менее, такую модель можно использовать при численном моделировании.

Обсуждаемая модель пузырьковых течений (1.1)—(1.5) с регуляризацией основывалась на 6-ти основных уравнениях: законах сохранения массы, количества движения и энергии, выписанных для каждой фазы, которые дополняются соотношениями, связывающими фазовые и межфазные давления. Стоит отметить наличие модели [18; 19], состоящей из 7-ми уравнений: законов сохранения массы, количества движения и энергии, записанных для каждой фазы, а также уравнения компактирования (уравнение, описывающее эволюцию объемного газосодержания). В этой модели [18; 19] обе фазы предполагаются сжимаемыми, иначе система уравнений вырождается. Задача Коши для нее поставлена корректно во всей области, однако также необходимо определить межфазное давление и скорость межфазной поверхности $\hat{\mathbf{u}}_I$. В работе [18] для двухфазных течений (газ — твердые частицы) соотношения на межфазной поверхности выбираются таким образом, чтобы выполнялся второй закон термодинамики. В работе [19] выбор соотношений на межфазной поверхности определяется следующим образом:

$$\hat{p}_I = \alpha_g p_g + \alpha_l p_l, \quad \hat{\mathbf{u}}_I = \frac{\alpha_g \rho_g \mathbf{u}_g + \alpha_l \rho_l \mathbf{u}_l}{\alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_l} \quad (1.13)$$

1.2 Ударные волны в пузырьковых средах

В литературе свойства ударных волн (УВ), проникающих в пузырьковую среду, как правило, изучают в вертикальной гидроударной трубе (см., например, [20–26]), состоящей из камеры высокого давления (КВД), отделенной от камеры низкого давления (КНД) диафрагмой, и измерительной секции (ИС), заполненной жидкостью с пузырьками газа при нормальных условиях. КВД и КНД заполнены газом. После разрыва диафрагмы формируется УВ, которая распространяется по КНД и затем проникает в пузырьковую жидкость. Скорость и другие характеристики ударной волны измеряют с помощью датчиков давления, установленных в ИС, и высокоскоростной видеокамеры.

В работе [25] КВД и КНД заполнены воздухом при комнатной температуре и давление 4 и 1 атм соответственно. ИС содержит воду с воздушными пузырьками со средним диаметром 2 мм и начальным газосодержанием от 0.01 до 0.2. В эксперименте [25] получено, что средняя скорость УВ в пузырьковой жидкости при начальном газосодержании от 0.01 до 0.04 варьируется от 300 до 100 м/с, что значительно меньше чем скорость звука в воде (1500 м/с) и в воздухе (340 м/с). При начальном газосодержании от 0.08 до 0.2 скорость УВ изменяется в диапазоне от 70 до 50 м/с, т.е. практически не зависит от газосодержания.

В экспериментах [21] давление в КВД варьируется от 1.2 до 4 атм. КНД заполнена воздухом при нормальных условиях. ИС содержит водный раствор глицерина (кинематическая вязкость $2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$) с воздушными пузырьками со средним диаметром 2 мм и начальным газосодержанием $\alpha_g = 0.01, 0.02$ и 0.05 при нормальных условиях. Средняя скорость УВ, распространяющейся в пузырьковой среде, растет с увеличением давления в КВД и падает с увеличением начального газосодержания. Скорость УВ при газосодержании $\alpha_g = 0.05$ варьируется в диапазоне от 50 до 70 м/с.

Стоит отметить, что в зависимости от свойств пузырьковой среды (вязкости, температуропроводности, размеров пузырьков и т.д.) УВ в пузырьковой среде имеют различные профили давления: монотонные или осцилляторные [27–29]. Теоретическое доказательство существования осцилляторной УВ в пузырьковой среде приведено в работе [29] на основе уравнения Кортевега—де Вриза—Бюргерса (КдВБ) для слабых УВ. Было получено [29], что если кинематическая вязкость жидкости ниже некоторого критического значения $\nu < \nu_{cr}$, то волна имеет осцилляторную структуру, иначе монотонную, где $\nu_{cr} = \sqrt{\frac{R_0^2 c_0^2 \delta p (\gamma + 1)}{3\alpha_g^0 p_0 2\gamma}}$, δp — амплитуда падающей УВ, p_0 — начальное давление, c_0 — изоэнтропическая скорость звука, R_0 — начальный радиус пузырька, γ — показатель адиабаты. В экспериментальных исследованиях [29] УВ распространяется в воде с пузырьками воздуха различных размеров (0.69, 0.48 или 0.1 мм) при одинаковых газосодержаниях $\alpha_g \approx 0.08$. С помощью датчиков давления было получено, что частота осцилляций давления за УВ падает для больших пузырьков (0.69 мм) и возрастает для маленьких пузырьков (0.1 мм).

В работах [23; 24] численно и экспериментально исследовали распространения слабых УВ в пузырьковой среде (амплитуда падающей УВ 50–100 кПа) с малым начальным газосодержанием $\alpha_g \approx 0.0015 - 0.0024$. Пузырьковая среда представляла собой силиконовое масло (кинематическая вязкость $50 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$) с пузырьками азота или шестифтористой серы. Средний размер пузырьков 0.6 мм. Численные и экспериментальные исследования показали, что на декремент затухания осцилляций давления в значительной степени могут влиять межфазный обмен энергией, вязкость и сжимаемость несущей жидкости: чем больше межфазный обмен энергией, вязкость и сжимаемость несущей жидкости, тем быстрее затухают осцилляции пузырьков.

Простейшая модель пузырьковых течений [29; 30], которая позволяет учитывать колебания газовых пузырьков в жидкости, основывается на односкоростной двухфазной модели (т.е. на модели в которой законы сохранения массы

и количества движения записываются для среды в целом). Давление газового пузырька и давление среды связаны уравнением Рэлея-Ламба. Давление в газовом пузырьке определяется через его объем (адиабатическое сжатие газа). Эта модель разработана при следующих предположениях: (i) газосодержание мало; (ii) пузырьковая среда изотермическая; (iii) газ в пузырьках подчиняется уравнению состояния идеального газа, а жидкость несжимаемая; (iv) пузырьки газа сохраняют сферическую форму, не дробятся и не слипаются; (v) жидкость и газ движутся с одной скоростью.

В работе [31] было установлено, что межфазный теплообмен в значительной степени влияет на динамику колебаний газового пузырька, т.е. предположение (ii) может быть не выполнено. Поэтому в [31] была предложена более подробная модель распространения УВ в пузырьковых жидкостях. В этой модели, также основанной на уравнениях сохранения, выписанных для среды в целом, межфазный обмен энергией между пузырьками и жидкостью был учтен.

В задачах о распространении УВ в пузырьковых средах в непосредственной близости за УВ скорости пузырьков газа и жидкости могут сильно различаться, тогда предположение (v) не выполняется. В свою очередь, скорость проскальзывания в значительной степени влияет на декремент затухания осцилляций давления в УВ: чем больше скорость проскальзывания, тем больше декремент затухания. Это связано, по-видимому, с тем, что чем выше скорость проскальзывания, тем быстрее газовые пузырьки подводятся к новым участкам холодной жидкости, т.е. происходят интенсификация теплообмена. В работе [32] предложена модель двухскоростного двухфазного течения, которая основывается на законах сохранения массы, количества движения и энтропии. Предложенная двухскоростная модель является корректной во всей области, но используемое межфазное давление не является физически обоснованным.

1.3 Пузырьковая детонация

При прохождении достаточно интенсивной УВ через пузырьковую жидкость, содержащую реакционноспособные газовые пузырьки, последние адиабатически взрываются под воздействием волны сжатия. В определенном диапазоне концентрации пузырьков наблюдается формирование пузырьковой детонации [33–38], когда затухание УВ при прохождении через пузырьковую среду компенсируется за счет увеличения внутренней энергии пузырьков. Следуя [34], дадим определение пузырьковой детонации как самоподдерживающейся детонационноподобной волны давления, распространяющейся квазистационарно со сверхзвуковой скоростью.

Пузырьковая детонация впервые наблюдалась в экспериментах [33], направленных на изучение безопасности атомных электростанций, в охлаждающей системе которых при экстремально высоких температурах могут образовываться пузырьки, содержащие химически активный газ. В экспериментах [33] исследовалось прохождение УВ через столб жидкого глицерина с цепочкой пузырьков реакционноспособного газа ($30\%(2\text{H}_2 + \text{O}_2) + 70\%\text{Ar}$) в вертикальной трубе квадратного сечения $50 \times 50 \text{ мм}^2$ длиной 1985 мм. Длина цепочки 670 мм, средний диаметр пузырьков 10 мм.

Позже, в [34–36; 39] проведены систематические экспериментальные исследования пузырьковой детонации в системе инертная жидкость — пузырьки реакционно способного газа. Экспериментальная установка представляла собой вертикальную ударную трубу длиной 4 м и внутренним диаметром 35 мм. Средний диаметр пузырьков 2 – 4 мм. В этих экспериментах пузырьковую детонацию инициировали УВ, генерируемой в газе и падающей на поверхность раздела газ — пузырьковая жидкость с начальным объемным газосодержанием в диапазоне от 0.005 до 0.1. Пузырьковая детонация возникала при начальном газосодержании, меньшем 0.06 (верхний предел газосодержания) и большем 0.005 (нижний

предел газосодержания). При газосодержании, большем 0.06, инициирующая УВ сильно затухает из-за высокого газосодержания; при газосодержании, меньшем 0.005, удельного энерговыделения недостаточно для поддержания детонации.

В [39] было впервые обнаружено существование уединенной самоподдерживающейся детонационной волны в системе инертная жидкость — реакционноспособные газовые пузырьки. Также в [39] показано, что пузырьковая детонация может существовать в системе, когда горючее и окислитель находятся в разных фазах. Основное отличие такой системы заключается в том, что детонации должно предшествовать испарение жидкости внутрь пузырька.

В [38] проведена серия экспериментов, в которых, в частности, исследовалось влияние вязкости несущей жидкости на скорость и пределы существования пузырьковой детонации по начальному объемному газосодержанию. Эксперименты проводились в условиях, схожих с условиями [34–36]. В экспериментах скорость детонации увеличивалась при повышении вязкости несущей жидкости за счёт добавления в воду глицерина до 70%. Также показано, что повышение вязкости позволяет инициировать пузырьковую детонацию при меньшей амплитуде инициирующей УВ (17 атм вместо 40 – 50 атм в [34–36]). При этом отмечено влияние вязкости жидкости на пределы детонации по начальному объемному газосодержанию. Так, при добавлении в воду глицерина до 25% инициировать пузырьковую детонацию УВ с амплитудой 17 атм удавалось только при начальном газосодержании 0.01. Увеличение начального газосодержания до 0.06 требовало повышения амплитуды УВ до 60 атм.

В работах [33–38] отмечены основные особенности пузырьковой детонации. Во-первых, скорость ее распространения всегда выше скорости распространения УВ в жидкости с пузырьками химически инертного газа в схожих условиях и заведомо выше скорости звука в пузырьковой жидкости. Например, в [35] при начальном газосодержании 0.02 скорость пузырьковой детонации составила 560 м/с, скорость УВ 425 м/с, а равновесная скорость звука 85 м/с.

Во-вторых, процесс распространения пузырьковой детонации самоподдерживающийся [35], тогда как УВ в жидкости с пузырьками химически инертного газа постепенно затухает.

Впоследствии для анализа пузырьковой детонации был разработан ряд математических моделей [40–45]. Как правило, в них предполагается, что (i) газ подчиняется уравнению состояния идеального газа; (ii) жидкость несжимаемая и изотермическая; (iii) пузырьки газа сохраняют сферическую форму, не взаимодействуют и не дробятся; (iv) пульсации в газе и жидкости описываются уравнением Рэля-Ламба; (v) жидкость и газ движутся с одной скоростью; а также используются (vi) приближенные модели химической кинетики.

В работе [45] предложена математическая модель с учетом межфазного теплообмена, основанная на двухфазных односкоростных уравнениях [46]. На основе предложенных уравнений аналитически и численно показано, что существует решение типа уединенной волны (стоит отметить, что модель, например, в работе [47] не допускает такого решения). Для описания химических превращений использовалась схема мгновенного воспламенения. Физически это означает, что задержка самовоспламенения значительно меньше характерного времени пульсации пузырька.

В [40] для описания течения пузырьковой жидкости используется односкоростная модель [48], учитывающая сжимаемость и вязкость жидкости. Пузырьковая детонация описывается приближенной моделью химической кинетики газа [49; 50], в которой использовано уравнение изэнтропии химически равновесного газа с учетом сдвига химического равновесия продуктов реакции в пузырьке без традиционного используемого постоянного показателя адиабаты.

В работе [41] для исследования пузырьковой детонации используется стационарная двухскоростная модель движения пузырьковой среды [31]. Отметим, что для стационарной системы уравнений задача Коши не ставится, т.е. вопрос корректности для нее не рассматривается.

Глава 2. Физико-математическая модель двухфазного невязкого течения пузырьковой среды

2.1 Корректность задачи Коши для систем линейных уравнений с частными производными

Введем основные определения и теоремы, которые будут использоваться в настоящей работе. Все приведенные в данном параграфе определения и теоремы сформулированы и доказаны в работе И.Г. Петровского [51] для систем более общего вида. В настоящей работе ограничимся рассмотрением систем вида:

$$\frac{\partial u_i(t, \vec{x})}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^3 A_{ij}^{(k)} \frac{\partial u_j(t, \vec{x})}{\partial x_k} + \sum_{k,l=1}^3 B_{ij}^{(k,l)} \frac{\partial^2 u_j(t, \vec{x})}{\partial x_k \partial x_l} + C_{ij} u_j(t, \vec{x}) \right) \quad (2.1)$$

где $i = \overline{1, N}$, $0 \leq t_0 < t \leq T$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $A_{ij}^{(k)}, B_{ij}^{(k,l)}, C_{ij} \in \mathbb{R}$, $u_i: \mathbb{R}^3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$.

Определение 1. *Задача Коши для системы (2.1) поставлена равномерно корректно, если*

1. *Для всякой системы функций $\phi_i(\vec{x})$ ($i = \overline{1, N}$), ограниченных на всей плоскости \mathbb{R}^3 вместе со всеми их частными производными до некоторого конечного порядка L , всегда существует одна и только одна система функций u_i , ограниченных вместе со всеми их частными производными, достаточно высоких порядков, которые при всяком t из интервала $0 \leq t_0 < t \leq T$ удовлетворяют этой системе и при $t = t_0$ принимают значения функций ϕ_i .*

2. *Для каждого t_0 из интервала $[0, T]$ и любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ можно указать такое независящее от t_0 число δ , что когда функции ϕ_i и все*

их частные производные до L -го порядка изменяются меньше чем на $\delta > 0$, то функции u_i всюду при $t_0 < t \leq T$ изменяются меньше чем на ε .

Теорема 1. *Задача Коши для системы (2.1) поставлена равномерно корректно тогда и только тогда, когда при всевозможных действительных параметрах ξ_s действительные части всех корней λ детерминанта матрицы*

$$\left(\sum_{k=1}^3 A^{(k)}(i\xi_k) - \sum_{k,l=1}^3 B^{(k,l)}\xi_k\xi_l + C - \lambda E \right)$$

должны быть ограничены сверху, т.е. $\operatorname{Re}[\lambda(\xi_1, \xi_2, \xi_3)] \leq M \quad \forall \xi_s \in \mathbb{R}, s = \overline{1,3}$.

Выделим отдельно гиперболические системы уравнений для которых И. Г. Петровский доказал корректность в смысле Определения (1). Введем матрицу P , которая связана с матрицами коэффициентов системы уравнений (2.1) формулой:

$$P(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{k=1}^3 A^{(k)}\xi_k$$

где $\xi_k \in \mathbb{R}$.

Определение 2. Система (2.1) (пусть все элементы матриц $B^{(k,l)}$ равны нулю) называется гиперболической, если характеристические корни матрицы $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ для $\forall \xi_s \in \mathbb{R} : \sum_{s=1}^3 \xi_s^2 = 1$ вещественны и различны.

Обратно, если хотя бы при одном выборе действительных ξ_s матрица P имеет хотя бы один недействительный корень, тогда задача Коши для нее не была поставлена корректно.

Если все собственные значения вещественны, но хотя бы при одном выборе действительных ξ_s матрица P имеет одинаковые собственные значения, то задача Коши для нее может быть поставлена как корректно, так и некорректно (см. Гиперболические системы в обобщенном смысле [51]).

2.2 Осреднение

В настоящей главе получены уравнения сохранения массы, количества движения и энергии двухфазной среды (жидкость с пузырьками газа) методом пространственного осреднения соответствующих уравнений однофазных сред с учетом граничных условий на межфазной поверхности в рамках подхода взаимопроницающих континуумов.

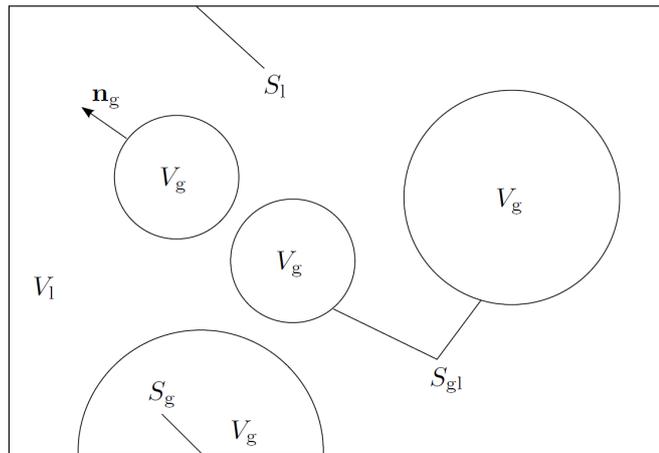


Рисунок 2.1 — Схематическое представление элементарного объема $V = V_g + V_l$, содержащего жидкость с пузырьками газа

Рассмотрим течение жидкости с газовыми пузырьками. Для перехода к осредненным переменным введем вокруг произвольной точки пространства фиксированный элементарный объем V , ограниченный поверхностью S , для которого эта точка является геометрическим центром (см. рис. 2.1). Линейный размер элементарного объема V во много раз превосходит неоднородности среды (диаметры пузырьков), но много меньше характерного линейного размера задачи (например, длина сопла). Рассматриваемый объем содержит в себе движущуюся двухфазную смесь, так что $V = V_l(t) + V_g(t) = \text{const}$, где индекс l (g) обозначает жидкость (газ), $V_i(t)$ — объем занятый фазой i в момент времени t , ограниченный поверхностью S_i , так что $S = S_l(t) + S_g(t) = \text{const}$, обозначим S_{lg} межфазную поверхность находящуюся внутри объема V . Предполагается, что для каждой фазы i однофазные уравнения сохранения массы, количества

движения и энергии действительны в любой внутренней точке V_i :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla_k (\rho_i u_i^k) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho_i u_i^j}{\partial t} + \nabla_k (\rho_i u_i^j u_i^k) = \nabla_k (P_i^{jk}) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i E_i) + \nabla_k (\rho_i E_i u_i^k) = \nabla_k (P_i^{jk} u_{j,i}) - \nabla_k q_i^k \quad (2.4)$$

для всех индексов, кроме i , используются стандартные правила суммирования, i обозначает фазу и нигде в дальнейшем по этому индексу суммирования не будет, ρ_i — плотность, $\mathbf{u}_i = u_i^k \mathbf{e}_k = u_{j,i} \mathbf{e}^j$ — скорость, \mathbf{e}_k — ковариантные векторы базиса евклидова пространства, \mathbf{e}^k — контравариантные векторы базиса, $P_i^{jk} = -p_i \delta^{jk} + \tau_i^{jk}$ — компоненты тензора напряжений, p_i — давление, δ^{jk} — символ Кронекера, τ_i^{jk} — компоненты тензора вязких напряжений, $q_i^k = \varkappa_i \nabla_k T_i$ — компоненты вектора потока энергии, T_i — температура, \varkappa_i — коэффициент теплопроводности, $E_i = \varepsilon_i + \frac{\mathbf{u}_i^2}{2}$ — массовая плотность энергии, ε_i — массовая плотность внутренней энергии.

Геометрическому центру элементарного объема V отнесем объемную концентрацию фаз $\alpha_i = V_i/V$ и величины, вводимые с помощью осреднения по фазовому объему V_i или межфазной поверхности S_{lg} :

$$\langle \Phi_i \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_i} \Phi_i(\mathbf{r}, t) dV \quad (2.5)$$

$$\langle \Phi_i \rangle^i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \Phi_i(\mathbf{r}, t) dV \quad (2.6)$$

$$\bar{\Phi}_i = \frac{\int_{V_i} \Phi_i(\mathbf{r}, t) \rho_i dV}{\int_{V_i} \rho_i dV} = \frac{\langle \rho_i \Phi_i \rangle^i}{\langle \rho_i \rangle^i} \quad (2.7)$$

$$\langle \Phi_i \rangle = \alpha_i \langle \Phi_i \rangle^i \quad (2.8)$$

$$\langle \Phi_i \rangle^s = \frac{1}{S_{lg}} \int_{S_{lg}} \Phi_i(\mathbf{r}, t) dS \quad (2.9)$$

Условия, накладываемые на величины Φ_i (скалярная, векторная или тензорная функция, определенная на V_i), чтобы осреднение имело смысл и приводило к образованию новых макрополей $\langle \Phi_i \rangle^i$, подробно разбираются в [31].

Для любой дифференцируемой скалярной, векторной или тензорной функции Φ_i справедливо следующее равенство [31]:

$$\alpha_i \left\langle \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \right\rangle^i = \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_i \langle \Phi_i \rangle^i) - \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \Phi_i(\mathbf{u}_I, \mathbf{n}_i) dS \quad (2.10)$$

где \mathbf{u}_I — скорость межфазной поверхности, \mathbf{n}_i — внешняя нормаль межфазной поверхности по отношению к i -ой фазе (см. рис. 2.1).

Для любой дифференцируемой скалярной, векторной и тензорной функции Φ_i соответственно верны формулы [31]:

$$\alpha_i \langle \nabla \Phi_i \rangle^i = \nabla \alpha_i \langle \Phi_i \rangle^i + \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \Phi_i \mathbf{n}_i dS \quad (2.11)$$

$$\alpha_i \langle \nabla_k \Phi_i^k \rangle^i = \nabla_k \alpha_i \langle \Phi_i^k \rangle^i + \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} (\Phi_i, \mathbf{n}_i) dS \quad (2.12)$$

$$\alpha_i \left\langle \left(\nabla_k \Phi_i^{jk} \right) \mathbf{e}_j \right\rangle^i = \left(\nabla_k \alpha_i \langle \Phi_i^{jk} \rangle^i \right) \mathbf{e}_j + \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \Phi_i^{jk} n_{k,i} \mathbf{e}_j dS \quad (2.13)$$

Подставив $\Phi_i = 1$ в (2.10) и (2.11), получим следующие соотношения, которые также понадобятся в дальнейшем:

$$\nabla \alpha_i = -\frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \mathbf{n}_i dS \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} = \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} (\mathbf{u}_I, \mathbf{n}_i) dS \quad (2.15)$$

Если проинтегрируем уравнения сохранения (2.2)—(2.4) по объему V_i и используем формулы (2.10)—(2.13), то получим осредненные уравнения в общем виде:

$$\frac{\partial \alpha_i \langle \rho_i \rangle^i}{\partial t} + \nabla_k \alpha_i \langle \rho_i u_i^k \rangle^i = M_{i,m} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \alpha_i \langle \rho_i u_i^j \rangle^i}{\partial t} + \nabla_k \alpha_i \langle \rho_i u_i^j u_i^k \rangle^i = \nabla_k \alpha_i \langle P_i^{jk} \rangle^i + M_{i,m} u_{i,m}^j + R_{i,m}^j \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_i \langle \rho_i E_i \rangle^i}{\partial t} + \nabla_k \alpha_i \langle \rho_i E_i u_i^k \rangle^i &= M_{i,m} E_{i,m} - \nabla_k \alpha_i \langle q_i^k \rangle^i + W_{i,m} + \\ &+ \nabla_k \alpha_i \langle P_i^{jk} u_{j,i} \rangle^i + Q_{i,m} \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $M_{i,m} \equiv \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \rho_i (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_i, \mathbf{n}_i) dS$ — интенсивность перехода массы из фазы m в i в единице объема и в единицу времени за счет фазового перехода, $M_{i,m} u_{i,m}^j \equiv \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \rho_i u_i^j (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_i, \mathbf{n}_i) dS$ — интенсивность межфазного обмена импульсом за счет фазового перехода, $\mathbf{u}_{i,m}$ — скорость фазы i на границе с фазой m , при этом предполагается, что $\mathbf{u}_{i,m} = \mathbf{u}_{m,i}$, $R_{i,m}^j = \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} P^{jk} n_{k,i} dS$ — сила (ее компоненты), действующая на межфазной поверхности из-за сил трения, давления, сцепления между фазами и т.д., $M_{i,m} E_{i,m} \equiv \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \rho_i E_i (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_i, \mathbf{n}_i) dS$ — интенсивность межфазного обмена энергией за счет фазового перехода, $E_{i,m}$ — энергия i -ой фазы, находящейся на границе с m -ой фазой, $W_{i,m} \equiv \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} P_i^{jk} u_{j,i} n_{k,i} dS$ — приток энергии в i -ую фазу за счет работы межфазных сил, $Q_{i,m} \equiv -\frac{1}{V} \int_{S_{lg}} (\mathbf{q}_i, \mathbf{n}_i) dS$ — теплопередача на границе между i -ой и m -ой фазами.

Система уравнений (2.16)–(2.18) дополняется граничными условиями, действующими на межфазной поверхности [31]:

$$\begin{aligned} M_{1,g} + M_{g,1} &= 0 \\ \mathbf{P}_{1,g} + \mathbf{P}_{g,1} &= 0 \\ S_{1,g} + S_{g,1} &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $\mathbf{P}_{i,m} = \mathbf{R}_{i,m} + M_{i,m} \mathbf{u}_{i,m}$, $S_{i,m} \equiv M_{i,m} E_{i,m} + Q_{i,m} + W_{i,m}$.

2.3 Изотермическая двухфазная невязкая модель

Рассмотрим подробнее законы сохранения массы и количества движения соответственно (2.16), (2.17). Основным интерес в этих уравнениях представляет описание сил, действующих на межфазной поверхности жидкости с газовыми пузырьками. В дальнейшем будет предполагаться, что (i) газ подчиняется уравнению состояния идеального газа; (ii) жидкость несжимаемая; (iii) гетерогенная среда идеальная, т.е. $P_i^{jk} = -p_i \delta^{jk}$; (iv) пузырьки газа сохраняют сферическую форму, не взаимодействуют и не дробятся; (v) фазовые переходы отсутствуют; (vi) течение ламинарное.

Определим флуктуации величин, вводимых с помощью осреднения:

$$\mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{u}}_i + \delta \mathbf{u}_i \quad (2.20)$$

$$\Phi_i = \langle \Phi_i \rangle^i + \tilde{\Phi}_i \quad (2.21)$$

где Φ_i — давление p_i или плотность ρ_i i -ой фазы, $\tilde{\Phi}_i$ и $\delta \mathbf{u}_i$ — отклонения от средних значений. Подставим (2.20), (2.21) в (2.16), (2.17), тогда осредненные уравнения примут вид:

$$\frac{\partial \langle \rho_i \rangle^i \alpha_i}{\partial t} + \nabla_k \alpha_i \langle \rho_i \rangle^i \bar{u}_i^k = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \alpha_i \langle \rho_i \rangle^i \bar{u}_i^j}{\partial t} + \nabla_k (\alpha_i \langle \rho_i \rangle^i \bar{u}_i^j \bar{u}_i^k) + \nabla_j (\alpha_i \langle p_i \rangle^i) = \nabla_k (\alpha_i \langle T_i^{jk} \rangle^i) - \frac{1}{V} \int_{S_{\text{lg}}} p_i n_i^j dS \quad (2.23)$$

где $\langle T_i^{jk} \rangle^i = -\langle \rho_i \delta u_i^j \delta u_i^k \rangle^i$ — компоненты тензора пульсационных напряжений i -ой фазы. В нашем случае тензор пульсационных напряжений нулевой, т.к. течение ламинарное (см. предположение (vi)).

Для того, чтобы определить силы, действующие на межфазной поверхности жидкости с газовыми пузырьками, рассмотрим задачу о движении твердой сферы в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости. Распределение давления вдоль поверхности твердой сферы радиуса R в отсутствие внешних массовых сил, было получено в работе [52]:

$$p_1(\theta) = p_{1,\infty} + \frac{1}{2} \rho_1 R \frac{dU_z}{dt} \cos(\theta) + \frac{1}{8} \rho_1 U_z^2 (9 \cos^2(\theta) - 5) \quad (2.24)$$

где сфера движется вдоль оси $0z$ (так выбираем эту ось) со скоростью $\mathbf{U} = U_z \mathbf{e}_z$, $p_{1,\infty}$ — давление на бесконечности, θ — угол измеряемый относительно оси $0z$ и радиус-вектором, соединяющим точку со сферы с ее центром.

При относительно больших числах Рейнольдса ($\text{Re} \gg 24$) разрушается симметрия относительно направления движения [53], при относительно малых числах Рейнольдса ($\text{Re} \ll 24$) преобладает вязкость, которая не учитывается при выводе формулы (2.24), где $\text{Re} = 2R\rho_1 U_z / \mu_1$, μ_1 — динамическая вязкость жидкости. Чтобы учесть эти эффекты, в [9] предложено ввести эмпирическую функцию $F(\theta)$, т.е. переписать уравнение (2.24) в виде:

$$p_1(\theta) = p_{1,\infty} + \frac{1}{2} \rho_1 R \frac{dU_z}{dt} \cos(\theta) + \frac{1}{2} \rho_1 \mathbf{U}^2 F(\theta) \quad (2.25)$$

Из соотношения (2.25) сразу следует, что $F(\theta) = C_p(\theta)$, где $C_p(\theta)$ — местный коэффициент давления, который определяется следующим образом:

$$C_p(\theta) = \frac{p_1(\theta) - p_{1,\infty}}{\frac{1}{2}\rho_1 \mathbf{U}^2}$$

В задачах об обтекании твердой сферы потоком жидкости местный коэффициент давления $C_p(\theta)$ получают как экспериментально, так и численно (см., например, [54]). С учетом предположений (iv) и (v) распределение давления (2.25) у поверхности твердой сферы также справедливо для газового пузырька. В работе [55] местный коэффициент давления $C_p(\theta)$ рассчитывается в задаче о всплытии газового пузырька с постоянной скоростью в жидкостях разного сорта.

Если концентрация газовых пузырьков в элементарном объеме V мала, тогда каждый газовый пузырек можно рассматривать независимо от других и $p_{1,\infty} \approx \langle p_1 \rangle^1$, т.е. давление на большом расстоянии от пузырька равно среднему давлению в жидкости. Пусть газовые пузырьки в рассматриваемом элементарном объеме движутся относительно жидкости со средней скоростью $\bar{\mathbf{u}}_{\text{gl}} = \bar{\mathbf{u}}_g - \bar{\mathbf{u}}_l$, тогда среднее межфазное давление в рассматриваемом объеме равно давлению, осредненному по поверхности одного пузырька. Осредним уравнение (2.25) по поверхности пузырька и определим флуктуации давления $p_1 = \langle p_1 \rangle^s + p'_1$, p'_1 — отклонение от среднего значения:

$$\langle p_1 \rangle^s = p_{1,\infty} + \frac{1}{2}\rho_1 \bar{\mathbf{u}}_{\text{lg}}^2 \langle C_p(\theta) \rangle^s \quad (2.26)$$

$$p'_1(\theta) = \frac{1}{2}\rho_1 R \frac{dU_z}{dt} \cos(\theta) + \frac{1}{2}\rho_1 \bar{\mathbf{u}}_{\text{lg}}^2 C'_p(\theta) \quad (2.27)$$

где $C'_p(\theta) = C_p(\theta) - \langle C_p(\theta) \rangle^s$.

Рассмотрим силу в уравнении (2.23), действующую на жидкость со стороны пузырьков газа:

$$R_{\text{lg}}^j = -\frac{1}{V} \int_{S_{\text{lg}}} p_1 n_1^j dS = -\frac{1}{V} \int_{S_{\text{lg}}} \langle p_1 \rangle^s n_1^j dS - \frac{1}{V} \int_{S_{\text{lg}}} p_1' n_1^j dS \quad (2.28)$$

Для первого слагаемого в правой части с учетом (2.14) получим:

$$-\frac{1}{V} \int_{S_{\text{lg}}} \langle p_1 \rangle^s \mathbf{n}_1 dS = \langle p_1 \rangle^s \nabla \alpha_1$$

Второе слагаемое в правой части (2.28) (из-за мелкомасштабных пульсаций p_1') в общем случае должно включать такие составляющие как сила присоединенных масс при ускоренном движении одной фазы относительно другой, сила Магнуса при вращении частиц в жидкости и др. Многие из этих сил, выраженных через средние кинематические параметры, представлены в работе [31].

Запишем силу, действующую на межфазной поверхности, с учетом граничных условий (2.19) в виде двух составляющих:

$$\mathbf{R}_{i,m} = \langle p_1 \rangle^s \nabla \alpha_i + \mathbf{F}_{i,m}$$

Для того, чтобы определить силу $\langle p_1 \rangle^s \nabla \alpha_i$, осталось задать $\langle C_p(\theta) \rangle^s$ в уравнении (2.26). Коэффициент $\langle C_p(\theta) \rangle^s$ в общем случае зависит от числа Рейнольдса, формы пузырька, массообмена с поверхности пузырька и др. Для нашего случая коэффициент давления, осредненный по поверхности сферического газового пузырька, имеет вид:

$$C_s \equiv \langle C_p(\theta) \rangle^s = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{-\pi}^{\pi} R^2 d\phi \int_0^{\pi} \sin(\theta) C_p(\theta) d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin(\theta) C_p(\theta) d\theta \quad (2.29)$$

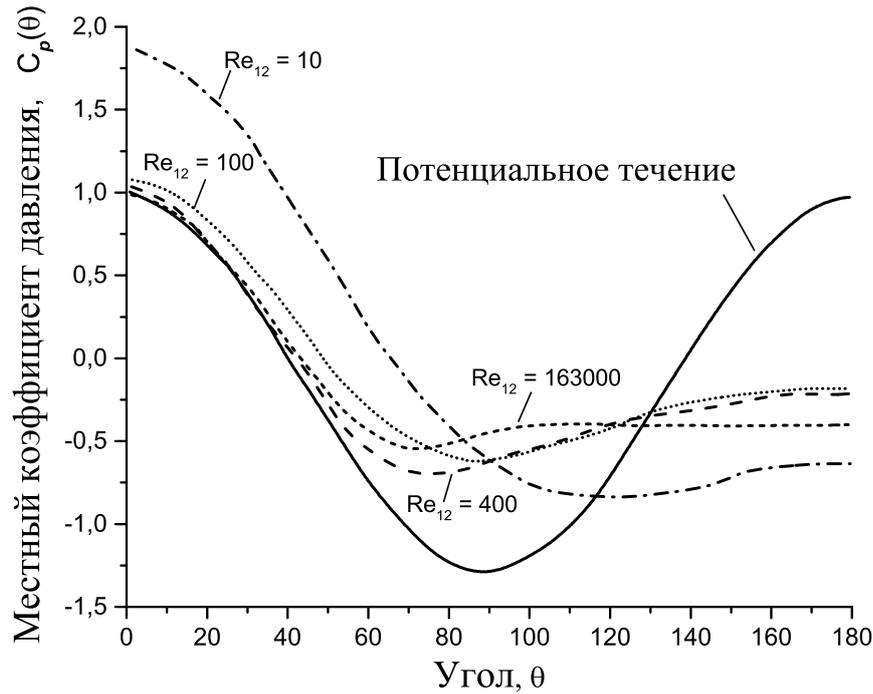


Рисунок 2.2 — Местный коэффициент давления для различных Re [54].

На рис. 2.2 представлено распределение местного коэффициента давления по поверхности твердой сферы для различных чисел Re , где $C_p(\theta)$ — результат численного моделирования [54]. В настоящей работе предлагается рассчитывать C_s напрямую в зависимости от Re , т.е. задавать функцию $C_s = C_s(Re)$. Результат подстановки функции $C_p(\theta)$ в интеграл (2.29) для расчета C_s представлен в таблице 2.1. При больших числах Re функция C_s выходит на насыщение.

Таблица 2.1

Коэффициенты C_s , C_{dp} и β для различных чисел Re

Re	C_s	β	C_{dp}	$C_{dp}(b)$
10	-0.19	-0.13	1.5	1.52
100	-0.25	-0.52	0.48	0.51
400	-0.3	-0.96	0.32	0.32
1000	-0.32	-0.74	0.43	0.438
163000	-0.32	-0.74	0.43	0.438

При больших объемных газосодержаниях необходимо учесть «коллективные» эффекты, т.е. задать зависимость $C_s = C_s(\alpha_g, Re)$.

Коэффициент гидродинамического сопротивления C_d состоит из двух частей:

$$C_d = C_{dp} + C_{df}$$

где C_{df} — коэффициент вязкого сопротивления, C_{dp} — коэффициент сопротивления «формы», который определяется следующим образом:

$$C_{dp} = 2 \int_0^\pi C_p(\theta) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta \quad (2.30)$$

В работе [9] C_s связывают с коэффициентом сопротивления «формы» C_{dp} при очень больших числах Рейнольдса: $C_s = \beta C_{dp}$ при $Re = 163000$ и $\beta = -0.74$. Коэффициент пропорциональности β очевидно зависит от Re , т.к. $C_s = C_s(Re)$ — осредненная функция $C_p(\theta)$, а $C_{dp} = C_{dp}(Re)$ — осредненная функция $C_p(\theta)$ в проекции на направление движения. Коэффициент C_{dp} (см. таблицу 2.1) рассчитывается в результате подстановки $C_p(\theta)$ в интеграл (2.30). Коэффициент пропорциональности β (см. таблицу 2.1) рассчитывается из соотношения $\beta = \frac{C_s}{C_{dp}}$. Дополнительно, для проверки, в последнем столбце, отмеченном как $C_{dp}(b)$, представлены значения C_{dp} , взятые из сводной таблицы [54].

Для учета «коллективных» эффектов введем функцию C_{dp}^{coll} следующим образом [9]:

$$C_{dp}^{coll}(\alpha_g, Re) = C_{dp}(Re)(1 - \alpha_g)^{-2.7} \quad (2.31)$$

а функцию C_s перепишем в виде:

$$C_s(\alpha_g, Re) = \beta(Re)C_{dp}^{coll}(\alpha_g, Re) \quad (2.32)$$

Выпишем модель двухфазного невязкого изотермического течения с учетом полученных соотношений (2.26), (2.31) и (2.32):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle \rho_i \rangle^i \alpha_i}{\partial t} + \nabla_k \alpha_i \langle \rho_i \rangle^i \bar{u}_i^k &= 0 \\
\frac{\partial \alpha_i \langle \rho_i \rangle^i \bar{u}_i^j}{\partial t} + \nabla_k (\alpha_i \langle \rho_i \rangle^i \bar{u}_i^j \bar{u}_i^k) + \nabla_j (\alpha_i \langle p_i \rangle^i) &= \langle p_l \rangle^s \nabla_j \alpha_i + F_{i,m}^j \\
\langle p_g \rangle^g &= \langle p_l \rangle^l, \quad \langle p_l \rangle^s = \langle p_l \rangle^l + \frac{1}{2} C_s(\alpha_g, \text{Re}) \rho_l \bar{\mathbf{u}}_{lg}^2 \\
C_s(\alpha_g, \text{Re}) &= \beta(\text{Re}) C_{dp}(\text{Re}) (1 - \alpha_g)^{-2.7} \\
\alpha_g + \alpha_l &= 1
\end{aligned} \tag{2.33}$$

где $i = l, g$, $m = l, g$ и $m \neq i$. Функции $\beta(\text{Re})$ и $C_{dp}(\text{Re})$ интерполируются по значениям, представленным в таблице 2.1, $\text{Re} = 2R\rho_l |\mathbf{u}_{lg}| / \mu_l$ — число Рейнольдса относительного движения фаз. Для того, чтобы выписанная система уравнений была замкнутой, ее необходимо дополнить уравнениями состояния и определить силу $\mathbf{F}_{i,m}$. Сила $\mathbf{F}_{i,m}$ в общем случае зависит от физических процессов, происходящих на межфазной поверхности, и даже может зависеть от дифференциальных операторов. Однако, как правило, слагаемое $\mathbf{F}_{i,m}$ описывает силу сопротивления и является алгебраическим членом (см. ниже (3.3)).

Выпишем уравнения состояния согласно предположениям (i) и (ii):

$$\rho_l = \rho_l^0 = \text{const}, \quad \rho_g = \frac{p_g}{\gamma c_g^2} \tag{2.34}$$

где c_g — изотермическая скорость звука в газе, γ — показатель адиабаты.

2.3.1 Корректность задачи Коши

Утверждение 1. *Задача Коши для системы уравнений (2.33) с уравнениями состояния (2.34) поставлена корректно (по Петровскому) в линейном приближении, если выполнены условия: $\frac{1}{2}C_s(\alpha_g, Re) < -\alpha_g$ и $\hat{p}_I > 0$*

Доказательство. Введем обозначение $\mathbf{w} = (\alpha_g, p, u_g^1, u_g^2, u_1^1, u_1^2)$ — вектор неизвестных относительно которого решается задача. Доказательство проводится в двумерном случае, т.е. $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. В дальнейшем обозначения средних величин опускаются.

Линеаризуем систему уравнений (2.33) в окрестности произвольного решения $\mathbf{w}^0(t, \vec{x})$:

$$\mathbf{w}(t, \vec{x}) = \mathbf{w}^0(t, \vec{x}) + \mathbf{w}'(t, \vec{x}) \quad (2.35)$$

Подставим (2.35) в (2.33), предполагая, что возмущение \mathbf{w}' по всем параметрам малы, пренебрежем величинами второго порядка малости и приведем систему к каноническому виду. Эта система уравнений примет вид:

$$E \frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial t} + \sum_{k=1}^2 A^{(k)} \frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial x_k} + C \mathbf{w}' = 0 \quad (2.36)$$

Коэффициенты матриц $A^{(k)}$ и C в (2.36) являются функциями \vec{x} и t . Рассмотрим малую область изменения \vec{x} и t , в которой перечисленные коэффициенты матриц допустимо считать постоянными, тогда получим систему уравнений с постоянными коэффициентами.

Исследуем собственные значения матрицы $M(\xi_1, \xi_2) = \sum_{k=1}^2 A^{(k)} \xi_k$, где $\xi_k \in \mathbb{R} : \xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$ (матрица M выписана ниже, см. Приложение А).

Для удобства введем обозначения $\chi_i = \xi_1 u_i^1 + \xi_2 u_i^2$. Матрица имеет два тривиальных вещественных собственных значения:

$$\lambda_1 = \chi_g, \quad \lambda_2 = \chi_1$$

а другие его корни удовлетворяют следующему алгебраическому уравнению четвертого порядка (см. Приложение А):

$$P_1(\lambda) = P_2(\lambda) \tag{2.37}$$

где $P_1(\lambda)$ — многочлен четвертого порядка с корнями:

$$\lambda_{1,2}^{(1)} = \chi_1 \pm \sqrt{\frac{\left(\alpha_1 \rho_g - \frac{1}{2} C_s \rho_1 u_{1g}^2 \dot{\rho}_g \alpha_g\right)}{\dot{\rho}_g \alpha_g \rho_1}}, \quad \lambda_{3,4}^{(1)} = \chi_g$$

$P_2(\lambda)$ — многочлен второго порядка с корнями:

$$\lambda_{1,2}^{(2)} = \chi_1 \pm \sqrt{\frac{-\frac{1}{2} C_s u_{1g}^2}{\alpha_g}}$$

Из рис. 2.3 видно, если корни уравнения удовлетворяют неравенствам: $\lambda_1^{(1)} < \lambda_1^{(2)} < \lambda_3^{(1)} = \lambda_4^{(1)} < \lambda_2^{(2)} < \lambda_2^{(1)}$, то многочлены $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$ будут иметь 4 точки пересечения, а следовательно все собственные значения матрицы M вещественные и различные.

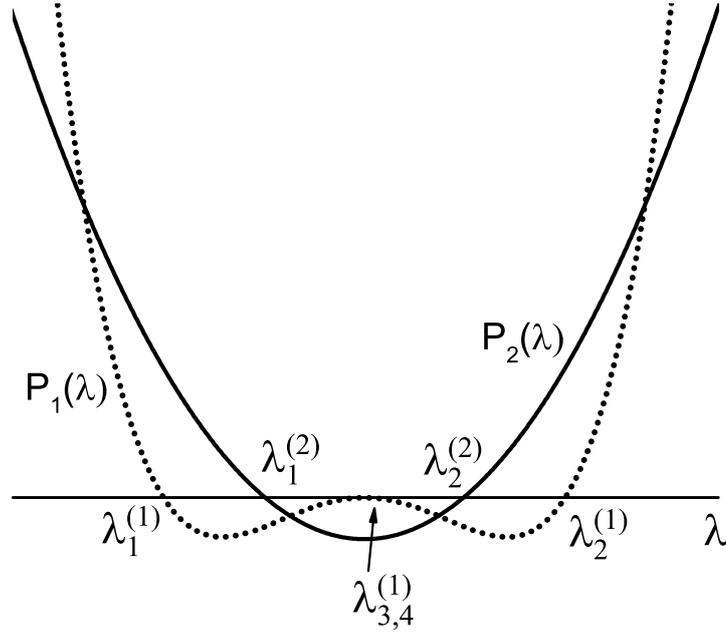


Рисунок 2.3 — Схематическое расположение корней многочленов $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$

Условия для расположения корней многочленов можно переписать в эквивалентной форме:

$$\begin{cases} |\chi_g - \chi_l| \leq \sqrt{\frac{-\frac{1}{2}C_s u_{lg}^2}{\alpha_g}} \\ -\frac{1}{2}C_s u_{lg}^2 \rho_l < \alpha_l p - \frac{1}{2}C_s \rho_l u_{lg}^2 \alpha_g \end{cases} \quad (2.38)$$

Первое неравенство выполнено, если $-\frac{1}{2}C_s > \alpha_g$, а второе — если $\hat{p}_I > 0$. \square

Если положить $C_s = 0$, то система уравнений (2.33) перейдет в простейшую двухскоростную модель с общим давлением фаз и графики на рис. 2.3 будут иметь только две точки пересечения. Следовательно M имеет комплексные собственные значения и задача Коши для такой системы уравнений будет поставлена некорректно.

2.4 Неизотермическая двухфазная невязкая модель

Рассмотрим подробнее закон сохранения энергии (2.18), пренебрегая притоком энергии за счет фазовых переходов и работой вязких сил (см. предположения (iii) и (v)):

$$\frac{\partial \alpha_i \langle \rho_i E_i \rangle^i}{\partial t} + \nabla_k \alpha_i \langle \rho_i E_i u_i^k \rangle^i = -\nabla_k \alpha_i \langle q_i^k \rangle^i + W_{i,m} - \nabla_k \alpha_i \langle p_i u_i^k \rangle^i + Q_{i,m} \quad (2.39)$$

Здесь $W_{i,m} = \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} p_i u_i^k n_{k,i} dS$ — приток энергии в i фазу за счет работы межфазных сил, $Q_{i,m} = -\frac{1}{V} \int_{S_{lg}} (\mathbf{q}_i, \mathbf{n}_i) dS$ — теплопередача на границе между i и m фазами.

Определим флуктуации полной энергии, вводимые с помощью средних величин (2.7):

$$E_i = \bar{E}_i + \delta E_i \quad (2.40)$$

где δE_i — отклонение от среднего значения. Подставим (2.40) в (2.39), тогда уравнение примет вид:

$$\frac{\partial \alpha_i \langle \rho_i \rangle^i \bar{E}_i}{\partial t} + \nabla_k \alpha_i (\langle \rho_i \rangle^i \bar{E}_i \bar{u}_i^k + \langle p_i \rangle^i \bar{u}_i^k) = -\nabla_k \alpha_i \langle q_i^{k,T} \rangle^i - \nabla_k \alpha_i \langle q_i^k \rangle^i + W_{i,m} + Q_{i,m}$$

где $\langle q_i^{k,T} \rangle^i = -\langle \rho_i \delta u_i^k \delta E_i \rangle^i - \langle p_i \delta u_i^k \rangle^i$ — компоненты вектора турбулентного теплового потока. В нашем случае турбулентный тепловой поток нулевой, т.к. течение ламинарное (см. предположение (vi)).

Приток энергии в жидкую фазу за счет работы межфазных сил $W_{1,g}$ имеет следующий вид:

$$W_{1,g} = -\frac{1}{V} \int_{S_{lg}} p_1 u_1^k n_{k,1} dS = -\langle p_1 \rangle^s \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} u_1^k n_{k,1} dS - \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} p_1' u_1^k n_{k,1} dS \quad (2.41)$$

Скорость жидкости и межфазной поверхности в отсутствие фазовых переходов одинаковые, т.е. на межфазной поверхности выполнено $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_I$. Тогда первое слагаемое в правой части (2.41) с учетом соотношения (2.15) примет вид:

$$-\langle p_1 \rangle^s \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} u_I^k n_{k,1} dS = -\langle p_1 \rangle^s \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \quad (2.42)$$

Второе слагаемое в правой части (2.41) описывает приток энергии за счет работы межфазных сил из-за мелкомасштабных пульсаций. Введем для него обозначение:

$$X_{i,m} \equiv -\frac{1}{V} \int_{S_{lg}} p_1' u_1^k n_{k,1} dS$$

Закон сохранения энергии с учетом граничных условий (2.19) переписывается в виде:

$$\frac{\partial \alpha_i \langle \rho_i \rangle^i \bar{E}_i}{\partial t} + \nabla_k \alpha_i \bar{u}_i^k (\langle \rho_i \rangle^i \bar{E}_i + \langle p_i \rangle^i) = -\nabla_k \alpha_i \langle q_i^k \rangle^i - \langle p_1 \rangle^s \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + X_{i,m} + Q_{i,m} \quad (2.43)$$

Выпишем **модель двухфазного невязкого неизотермического течения**, дополнив систему уравнений (2.33) законом сохранения энергии (2.43):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \rho_i \rangle^i \alpha_i}{\partial t} + \nabla_k \alpha_i \langle \rho_i \rangle^i \bar{u}_i^k &= 0 \\ \frac{\partial \alpha_i \langle \rho_i \rangle^i \bar{u}_i^j}{\partial t} + \nabla_k (\alpha_i \langle \rho_i \rangle^i \bar{u}_i^j \bar{u}_i^k) + \nabla_j (\alpha_i \langle p_i \rangle^i) &= \langle p_1 \rangle^s \nabla_j \alpha_i + F_{i,m}^j \\ \frac{\partial \alpha_i \langle \rho_i \rangle^i \bar{E}_i}{\partial t} + \nabla_k \alpha_i \bar{u}_i^k (\langle \rho_i \rangle^i \bar{E}_i + \langle p_i \rangle^i) &= -\nabla_k \alpha_i \langle q_i^k \rangle^i - \langle p_1 \rangle^s \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + X_{i,m} + Q_{i,m} \\ \langle p_g \rangle^g &= \langle p_1 \rangle^l, \quad \langle p_1 \rangle^s = \langle p_1 \rangle^l + \frac{1}{2} C_s(\alpha_g, \text{Re}) \rho_1 \bar{\mathbf{u}}_{lg}^2 \\ C_s(\alpha_g, \text{Re}) &= \beta(\text{Re}) C_{dp}(\text{Re}) (1 - \alpha_g)^{-2.7} \\ \alpha_g + \alpha_1 &= 1 \end{aligned} \quad (2.44)$$

где $i = 1, g$; $m = 1, g$ и $m \neq i$. Функции $\beta(\text{Re})$ и $C_{dp}(\text{Re})$ интерполируются по значениям, представленным в таблице 2.1. Для того, чтобы выписанная система

уравнений была замкнутой, ее необходимо дополнить уравнениями состояния и определить слагаемые $\mathbf{F}_{i,m}$, $Q_{i,m}$ и $X_{i,m}$. Как правило, слагаемое $\mathbf{F}_{i,m}$ описывает силу сопротивления, $X_{i,m}$ — диссипацию за счет работы сил сопротивления (из-за межфазной скоростной неравновесности), а $Q_{i,m}$ — теплопередачу на межфазной поверхности. И эти слагаемые ($\mathbf{F}_{i,m}$, $Q_{i,m}$ и $X_{i,m}$) не зависят от дифференциальных операторов.

2.4.1 Корректность задачи Коши

Вместо закона сохранения полной энергии можно использовать закон сохранения полной энтальпии. Выпишем систему определяющих уравнения, опустив в дальнейшем обозначения средних величин:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_i \rho_i}{\partial t} + \nabla_k (\alpha_i \rho_i u_i^k) &= 0 \\
\frac{\partial \alpha_i \rho_i u_i^j}{\partial t} + \nabla_k (\alpha_i \rho_i u_i^k u_i^j + p_i \alpha_i \delta^{jk}) - \hat{p}_I \nabla_j \alpha_i &= F_{i,m}^j \\
\frac{\partial \alpha_i \rho_i H_i}{\partial t} + \nabla_k (\alpha_i \rho_i H_i u_i^k) &= \frac{\partial \alpha_i p_i}{\partial t} - \hat{p}_I \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + Q_{i,m} + X_{i,m} \\
p_l = p_g = p, \quad \hat{p}_I &= p_l + \frac{1}{2} C_s(\alpha_g, \text{Re}) \rho_l \mathbf{u}_{lg}^2 \\
\alpha_g + \alpha_l &= 1
\end{aligned} \tag{2.45}$$

где $H_i = h_i + \frac{\mathbf{u}_i^2}{2}$ — массовая плотность полной энтальпии i -ой фазы, h_i — массовая плотность энтальпии i -ой фазы.

Уравнения состояния несжимаемой жидкости и идеального газа:

$$\begin{aligned}
\rho_l = \rho_l^0 = \text{const}, \quad \rho_g &= \frac{p_g}{R_g T_g} \\
h_i &= c_{p,i}(T_i - T_i^0) + h_i^0
\end{aligned} \tag{2.46}$$

где $i = 1, g$, R_g — газовая постоянная, T_i — температура i -ой фазы, $c_{p,i} = \text{const}$ — теплоемкость i -ой фазы при постоянном давлении.

Утверждение 2. *Задача Коши для системы уравнений (2.45) с уравнениями состояния (2.46) поставлена корректно (по Петровскому) в линейном приближении, если выполнены условия: $\frac{1}{2}C_s(\alpha_g, Re) < -\alpha_g$ и $\hat{p}_1 > 0$*

Доказательство. Введем обозначение $\mathbf{w} = (\alpha_g, p, u_g, u_1, H_g, H_1)^T$ — вектор неизвестных относительно которого решается задача. Доказательство проводится в одномерном случае.

Линеаризуем систему уравнений (2.45) в окрестности произвольного решения $\mathbf{w}^0(t, x)$:

$$\mathbf{w}(t, x) = \mathbf{w}^0(t, x) + \mathbf{w}'(t, x) \quad (2.47)$$

Подставим (2.47) в (2.45), предполагая, что возмущение \mathbf{w}' по всем параметрам малы, пренебрежем величинами второго порядка малости и приведем систему к каноническому виду. Эта система уравнений примет вид:

$$E \frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial x} + C \mathbf{w}' = 0 \quad (2.48)$$

Коэффициенты матриц A и C в (2.48) являются функциями x и t . Рассмотрим малую область изменения x и t , в которой перечисленные коэффициенты матриц допустимо считать постоянными, тогда получим систему уравнений с постоянными коэффициентами. Матрица A выписана ниже (см. Приложение Б). Исследуем собственные значения матрицы A .

Характеристический многочлен матрицы A имеет два тривиальных корня $\lambda_1 = u_g$, $\lambda = u_1$, четыре оставшихся удовлетворяют алгебраическому уравнению четвертого порядка:

$$P_1(\lambda) = P_2(\lambda)$$

где $P_1(\lambda)$ — многочлен четвертого порядка:

$$P_1(\lambda) = \rho_g(\lambda - u_g)^2 \left((\alpha_g - 1)\rho_g + \rho_1\alpha_g \frac{\partial \rho_g}{\partial p} ((\lambda - u_1)^2 + \frac{1}{2}C_s \mathbf{u}_{1g}^2) \right)$$

для которого коэффициент при старшей степени равен $a^{(1)} = \rho_g \rho_1 \alpha_g \frac{\partial \rho_g}{\partial p}$, а корни:

$$\lambda_{1,2}^{(1)} = u_1 \pm \sqrt{D}, \quad \lambda_{3,4}^{(1)} = u_g$$

где $D = \left(\frac{\alpha_1 \rho_g}{\rho_1 \alpha_g \frac{\partial \rho_g}{\partial p}} - \frac{1}{2}C_s \mathbf{u}_{1g}^2 \right)$. При этом, используя выражение $p = \frac{\rho_g}{\partial \rho_g / \partial p}$ и условия $\frac{1}{2}C_s < -\alpha_g$ и $\hat{p}_I > 0$, можно показать, что $u_1 - \sqrt{D} < u_g < u_1 + \sqrt{D}$.

Многочлен $P_2(\lambda)$ — многочлен четвертого порядка:

$$P_2(\lambda) = \left(\frac{1}{2}C_s u_{1g}^2 + (\lambda - u_1)^2 \alpha_g \right) \left[(u_g - \lambda) \left(\frac{\partial \rho_g}{\partial u_g} + \frac{\partial \rho_g}{\partial H_g} \lambda \right) + \rho_g \right]$$

с двумя действительными корнями $\lambda_{1,2}^{(2)} = u_1 \pm \sqrt{\frac{-C_s}{2\alpha_g} u_{1g}}$ и двумя комплексными корнями, так как $\left[(u_g - \lambda) \left(\frac{\partial \rho_g}{\partial u_g} + \frac{\partial \rho_g}{\partial H_g} \lambda \right) + \rho_g \right] = \rho_g \left[\frac{1}{H_g} (\lambda - u_g)^2 + 1 \right]$; коэффициент при старшей степени равен $a^{(2)} = \frac{\rho_g \rho_1 \alpha_g}{H_g}$.

Если корни многочлена $P_2(\lambda)$ располагаются между корнями многочлена $P_1(\lambda)$, как показано на рис. 2.3, и многочлен $P_1(\lambda)$ возрастает быстрее чем $P_2(\lambda)$, то этого достаточно, чтобы многочлены имели четыре точки пересечения на вещественной плоскости. Следовательно, в этом случае соответствующий характеристический многочлен имеет четыре вещественных корня. Многочлен P_1 возрастает быстрее чем P_2 , если $a^{(1)} > a^{(2)} \Leftrightarrow \frac{c_{p,g}}{R_g} > 1$, что всегда выполнено для идеального газа. Расположение корней $\lambda_1^{(1)} < \lambda_1^{(2)} < \lambda_3^{(1)} = \lambda_4^{(1)} < \lambda_2^{(2)} < \lambda_2^{(1)}$, если $\frac{1}{2}C_s < -\alpha_g$ и $\hat{p}_I > 0$. \square

2.5 Расширение области корректности за счет учета фазовых переходов

Рассмотрим подробнее условия корректности, которые накладывают ограничения на область применимости модели (2.44):

$$\frac{1}{2}C_s(\alpha_g, Re) < -\alpha_g, \quad \hat{p}_I > 0$$

Функция $C_s(\alpha_g, Re)$ по построению всегда удовлетворяет первому неравенству, однако второе неравенство $\hat{p}_I > 0$ может не выполняться, так как $C_s < 0$. Случай $\hat{p}_I \leq 0$ соответствует кавитации, действительно, при падении давления \hat{p}_I ниже давления насыщения на поверхности газового пузырька происходят фазовые переходы — из жидкости начинает образовываться паровая фаза. Для того, чтобы межфазное давление в модели (2.44) не становилось ниже давления насыщения, необходимо дополнить ее источником, описывающим кавитацию.

Для учета кавитации газовую фазу будем считать состоящей из двух компонент. Первая является паром жидкой фазы (индекс v), может претерпевать фазовые переходы, вторая (индекс p) — пассивный газ, не претерпевающий фазовые переходы. Такую двухкомпонентную смесь можно представить как совокупность континуумов, заполняющих один и тот же объем, занятый смесью. Геометрическому центру элементарного объема V (см. рис. 2.1) отнесем массовую концентрацию s -го компонента газа $Y_s = M_s/M$, где M и M_s — масса газовой смеси и масса s -го компонента газовой смеси соответственно, содержащихся в объеме V ($s = v, p$).

Массовые концентрации газа связаны соотношением:

$$Y_v + Y_p = 1 \tag{2.49}$$

Уравнения состояния газа и жидкости:

$$\begin{aligned}\rho_g &= \frac{p_g W}{RT_g} \quad \rho_l = \text{const} \\ e_i &= \int_{T_i^0}^{T_i} c_{v,i}(T) dT\end{aligned}\tag{2.50}$$

где $i = l, g$, $c_{v,i}(T)$ — теплоемкость i -ой фазы при постоянном объеме (заданная функция температуры), средняя молекулярная масса смеси W определяется из соотношения:

$$\frac{1}{W} = \sum_{s=v,p} \frac{Y_s}{W_s}$$

где W_s — молекулярная масса s -го компонента газовой смеси. Объемная доля s -го компонента и массовая концентрация связаны соотношением:

$$X_s = \frac{W Y_s}{W_s}\tag{2.51}$$

Плотность пара:

$$\rho_v = Y_v \rho_g\tag{2.52}$$

Выпишем законы сохранения в предположении, что все компоненты газа движутся с одинаковой скоростью, равной скорости газа \mathbf{u}_g , т.е. диффузия не учитывается:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_i \rho_i}{\partial t} + \nabla_k (\alpha_i \rho_i u_i^k) &= M_{i,m} \\ \frac{\partial \alpha_g Y_v \rho_g}{\partial t} + \nabla_k (Y_v \alpha_g \rho_g u_g^k) &= M_{g,l} \\ \frac{\partial \alpha_i \rho_i u_i^j}{\partial t} + \nabla_k (\alpha_i \rho_i u_i^k u_i^j) + \nabla_j (p_i \alpha_i) &= \hat{p}_I \nabla_j \alpha_i + F_{i,m}^j + M_{i,m} \hat{u}_I \\ \frac{\partial \alpha_i \rho_i E_i}{\partial t} + \nabla_k (\alpha_i \rho_i u_i^k E_i + \alpha_i p_i u_i^k) + \hat{p}_I \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} &= Q_{i,m} + M_{i,m} \hat{E}_I \\ p_g = p_l, \quad \hat{p}_I &= p_l + \frac{1}{2} C_s(\alpha_g, \text{Re}) \rho_l u_{lg}^2\end{aligned}\tag{2.53}$$

где $i = 1, g$; $m = 1, g$ и $m \neq i$, $M_{i,m}$ — интенсивность перехода массы из m фазы в i в единице объема и в единицу времени за счет кавитации, которая определяется, например, следующим образом:

$$M_{1,g} = -M_{g,1} = -\rho_v N_d 4\pi R_d^2 \frac{dR_d}{dt}$$

Здесь R_d — радиус дисперсных частиц, N_d — число центров активации на единицу объема, рассчитывается из уравнения переноса частиц:

$$\frac{\partial N_d}{\partial t} + u_1^k \nabla_k N_d = 0 \quad (2.54)$$

$\frac{dR_d}{dt}$ оценивается из уравнения Рэлея-Ламба в пренебрежении инерционных слагаемых (линейная модель кавитации), для радиуса используется формула $\alpha_d = \frac{4}{3}\pi R_d^3 N_d$, где α_d — объемная доля дисперсных частиц оценивается из соотношения $\alpha_d = \alpha_g X_v$. В итоге получим:

$$M_{1,g} = -A_c \rho_v N_d^{\frac{1}{3}} \alpha_d^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{\hat{p}_I - p_{\text{sat}}(T_I)}{\rho_l}} \quad (2.55)$$

где $A_c = 3.95$ — постоянный коэффициент.

Глава 3. Физико-математическая модель двухфазного вязкого течения пузырьковой среды

3.1 Математическая модель

Модель двухскоростного вязкого течения двухфазной смеси (жидкость — газ) получается из модели (2.44) путем учета вязких напряжений для обеих фаз. Выпишем полную систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_i \rho_i}{\partial t} + \nabla_k (\alpha_i \rho_i u_i^k) &= 0 \\
\frac{\partial \alpha_i \rho_i u_i^j}{\partial t} + \nabla_k (\alpha_i \rho_i u_i^k u_i^j + p_i \alpha_i \delta^{jk}) - \hat{p}_I \nabla_j \alpha_i - \nabla_k \alpha_i \tau_i^{jk} &= F_{i,m}^j \\
\frac{\partial \alpha_i \rho_i E_i}{\partial t} + \nabla_k (\alpha_i u_i^k (\rho_i E_i + p_i)) + \hat{p}_I \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} - \nabla_k \alpha_i \tau_i^{jk} u_{j,i} &= Q_{i,m} \quad (3.1) \\
p_l = p_g = p, \quad \hat{p}_I &= p_l + \frac{1}{2} C_s(\alpha_g, \text{Re}) \rho_l u_{lg}^2 \\
C_s(\alpha_g, \text{Re}) &= \beta(\text{Re}) C_{dp}(\text{Re}) (1 - \alpha_g)^{-2.7}
\end{aligned}$$

где $i = l, g$; $m = l, g$ и $m \neq i$. Функции $\beta(\text{Re})$ и $C_{dp}(\text{Re})$ интерполируются по значениям, представленным в таблице 2.1, τ_i^{jk} — компоненты тензора вязких напряжений имеют следующий вид:

$$\tau_i^{jk} = \mu_i \left[(\nabla_k u_i^j + \nabla_j u_i^k) - \frac{2}{3} \nabla_k u_i^k \right]$$

где μ_i — вязкость i -ой фазы.

Уравнения состояния для жидкости и газа:

$$\begin{aligned}
\rho_l = \rho_l^0 = \text{const}, \quad \rho_g &= \frac{p_g}{R_g T_g} \\
e_i = e_i^0 + \int_{T_{i,0}}^{T_i} c_{v,i}(T) dT & \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Межфазный обмен импульсом и энергией имеют следующий вид соответственно:

$$\mathbf{F}_{g,l} = C_d \frac{A \rho_l |\mathbf{u}_{lg}| \mathbf{u}_{lg}}{8} \quad (3.3)$$

$$Q_{g,l} = \text{Nu}_l \frac{\kappa_l A (T_l - T_g)}{d} \quad (3.4)$$

где $A = \frac{3\alpha_g}{R}$ — межфазная поверхность в элементарном объеме, R — средний радиус пузырьков в элементарном объеме предполагается постоянным, $\text{Nu}_l = 2$ — число Нуссельта для жидкой фазы [31], κ_l — коэффициент теплопроводности, C_d — гидродинамический коэффициент сопротивления:

$$C_d(\text{Re}) = \begin{cases} \frac{24}{\text{Re}} (1 + 0.15 \text{Re}^{0.687}) & \text{Re} \leq 1000 \\ 0.438 & \text{Re} > 1000 \end{cases} \quad (3.5)$$

3.1.1 Корректность задачи Коши

Утверждение 3. *Задача Коши для системы уравнений (3.1) с уравнениями состояния (3.2) поставлена корректно (по Петровскому) в линейном приближении.*

Доказательство. Доказательство проводится в трехмерном изотермическом случае. Введем обозначение $\mathbf{w} = (\alpha_g, p, u_g^1, u_g^2, u_g^3, u_1^1, u_1^2, u_1^3)$ — вектор неизвестных относительно которого решается задача. Все компоненты \mathbf{w} определены для всех действительных $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и $\forall t : t_0 \leq t \leq T$.

Линеаризуем систему уравнений (3.1) в окрестности произвольного решения $\mathbf{w}^0(t, \vec{x})$:

$$\mathbf{w}(t, \vec{x}) = \mathbf{w}^0(t, \vec{x}) + \mathbf{w}'(t, \vec{x}) \quad (3.6)$$

Подставим (3.6) в (3.1), предполагая, что возмущение \mathbf{w}' по всем параметрам малы, пренебрежем величинами второго порядка малости и приведем систему к каноническому виду. Эта система уравнений примет вид (для нашего случая матрицы выписаны ниже см. Приложение В):

$$E \frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 A^{(k)} \frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial x_k} + \sum_{k,l=1}^3 B^{(k,l)} \frac{\partial^2 \mathbf{w}'}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^3 C^{(k)} \mathbf{w}' \quad (3.7)$$

Коэффициенты матриц $A^{(k)}$, $B^{(k,l)}$, $C^{(k)}$ в (3.7) являются функциями \vec{x} и t . Рассмотрим малую область изменения \vec{x} и t , в которой перечисленные коэффициенты матриц допустимо считать постоянными, тогда получим систему уравнений с постоянными коэффициентами. Задача Коши системы уравнений (3.7) с постоянными коэффициентами поставлена корректно по Теореме (1), если действительная часть собственных значений матрицы

$$M(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left(\sum_{k=1}^3 A^{(k)}(i\xi_k) - \sum_{k,l=1}^3 B^{(k,l)} \xi_k \xi_l + \sum_{k=1}^3 C^{(k)} \right)$$

ограничена сверху для любых значений параметров ξ_s , т.е.

$$\operatorname{Re}[\lambda(\xi_1, \xi_2, \xi_3)] \leq M \quad \forall \xi_s \in \mathbb{R} \quad s = \overline{1,3}$$

.

Введем обозначение $R^2 = \sum_{s=1}^3 \xi_s^2$, так как для любого конечного R собственные значения λ матрицы M ограничены, то интерес представляет случай когда $R \rightarrow \pm\infty$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\bar{M} &= \frac{M}{R^2} \\ \xi_1 &= R \sin(\theta) \cos(\chi) \\ \xi_2 &= R \sin(\theta) \sin(\chi) \\ \xi_3 &= R \cos(\theta)\end{aligned}\tag{3.8}$$

и перейдем к переменным $(\frac{1}{R}, \theta, \chi)$, теперь $\bar{\lambda}$ — собственное значение матрицы $\bar{M}(\frac{1}{R}, \theta, \chi)$. Так как необходимо проверить ограниченность $\lambda = \bar{\lambda}(\frac{1}{R}, \theta, \chi) R^2$ при $R \rightarrow \pm\infty$, разложим $\bar{\lambda}$ по малому параметру $\varepsilon = \frac{1}{R}$: $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0 + \bar{\lambda}_1\varepsilon + \bar{\lambda}_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3)$, где $\bar{\lambda}_0$ — собственное значение матрицы $\bar{M}_0 = \bar{M}(0, \theta, \chi)$.

Теперь можно переписать условие корректности в виде:

Задача Коши уравнений (3.1) поставлена корректна, если для всех собственных значений матрицы \bar{M} верно одно из условий:

- 1) $\operatorname{Re}[\bar{\lambda}_0] < 0$
- 2) $\operatorname{Re}[\bar{\lambda}_0] = 0$ и $\operatorname{Re}[\bar{\lambda}_1] = 0$

В нашем случае для матрицы \bar{M}_0 получаем шесть отрицательных вещественных значений: $\bar{\lambda}_0^{(1,2)} = -\frac{\mu_g}{\rho_g}$, $\bar{\lambda}_0^{(3)} = -\frac{4\mu_g}{3\rho_g}$, $\bar{\lambda}_0^{(4,5)} = -\frac{\mu_1}{\rho_1}$, $\bar{\lambda}_0^{(6)} = -\frac{4\mu_1}{3\rho_1}$, которые удовлетворяют условию корректности, и двойной корень $\bar{\lambda}_0^{(7,8)} = 0$ для которого необходимо исследовать следующий член разложения $\bar{\lambda}_1^{(7,8)}$. Собственное значение $\bar{\lambda}(\varepsilon, \theta, \chi)$ является недифференцируемой функцией параметра ε в точке $\varepsilon_0 = 0$. Возмутим параметр ε в окрестности ε_0 и воспользуемся следующей теоремой [56]:

Пусть $\bar{\lambda}_0$ — полупростое¹ двукратное собственное значение матрицы \bar{M}_0 . Тогда бифуркация $\bar{\lambda}_0$ при возмущении параметра ε описывается

¹Собственное значение называется полупростым, если его алгебраическая кратность совпадает с геометрической кратностью.

асимптотической формулой

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0 + \varepsilon \bar{\lambda}_1 + \varepsilon^2 \bar{\lambda}_2 + o(\varepsilon^2)$$

где два значения $\bar{\lambda}_1$ являются собственными значениями матрицы:

$$\begin{pmatrix} v_1^T \frac{\partial M(\varepsilon, \theta, \chi)}{\partial \varepsilon} u_1 & v_1^T \frac{\partial M(\varepsilon, \theta, \chi)}{\partial \varepsilon} u_2 \\ v_2^T \frac{\partial M(\varepsilon, \theta, \chi)}{\partial \varepsilon} u_1 & v_2^T \frac{\partial M(\varepsilon, \theta, \chi)}{\partial \varepsilon} u_2 \end{pmatrix}$$

производные вычисляются при $\varepsilon = 0$, $u_1, u_2 (v_1^T, v_2^T)$ — правые (левые) линейно независимые собственные вектора, отвечающие собственному значению λ_0 и удовлетворяющие условию нормировки: $v_i^T u_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$.

В нашем случае в результате бифуркации λ в окрестности $\varepsilon_0 = 0$ распадается на два собственных значения:

$$\bar{\lambda}^{(7)} = i (u_g^3 \cos(\theta) + \sin(\theta)(u_g^1 \cos(\chi) + u_g^2 \sin(\chi))) \varepsilon + o(\varepsilon^2)$$

$$\bar{\lambda}^{(8)} = i (u_1^3 \cos(\theta) + \sin(\theta)(u_1^1 \cos(\chi) + u_1^2 \sin(\chi))) \varepsilon + o(\varepsilon^2)$$

Таким образом, $\text{Re}[\bar{\lambda}_1^{(7,8)}] = 0$, следовательно, учет вязких напряжений — переход от уравнений Эйлера к уравнениям Навье-Стокса — позволяет сделать задачу (3.1) корректной во всей области. \square

Из доказательства, в частности, следует, что если положить $C_s = 0$, то система уравнений (3.1) останется корректной, т.е. двухскоростная вязкая модель с общим давлением корректна даже без учета межфазного давления.

3.2 Течение пузырьковой среды в сопле

Для проверки применимости модели (3.1)—(3.5) к решению конкретных физических задач, систему определяющих уравнений решали численно в трехмерном случае. Расчеты проводились на коммерческой программе AVL FIRE [57] после предварительного учета в ней межфазного давления. В качестве конкретной задачи рассмотрели задачу о течении пузырьковой среды в сопле [58]. В работе [58] экспериментально исследовалось дозвуковое течение пузырьковой среды в трубке переменного сечения. На рис. 3.1а представлена установка, используемая в эксперименте. На вход в сопло подавали воду с пузырьками азота с заданными массовыми расходами $\dot{m}_l = 2.22$ кг/с и $\dot{m}_g = 1.93 \cdot 10^{-4}$ кг/с соответственно. Другие экспериментальные данные на входе: $p_{in} = 1.8$ атм, $\rho_l = 998$ кг/м³, $\alpha_g = 0.04$. Начальное распределение радиусов пузырьков варьировалось от 0.1 до 0.4 мм.

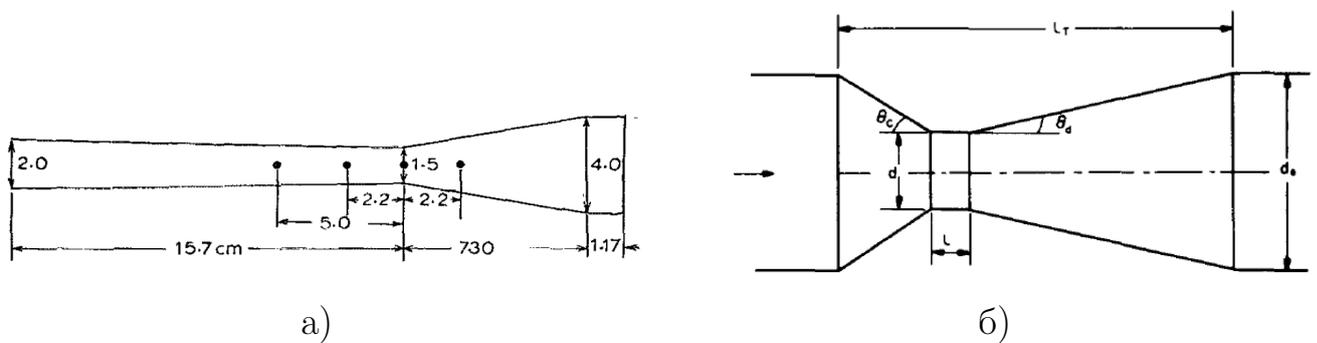


Рисунок 3.1 — Схемы экспериментальных установок а) [58] сопло имеет прямоугольное поперечное сечение с равномерной глубиной 1.27 см, б) [59] сопло имеет круглое поперечное сечение.

В эксперименте [58] измеряли скорость газовых пузырьков с помощью стробоскопической фотографии при двойном экспонировании и давление с помощью датчиков давления, установленных на стенке сопла. Из этих данных (скорость газа и давление) рассчитывались среднее газосодержание $\bar{\alpha}_g$ и средняя скорость жидкости \bar{u}_l на основе законов сохранения массы $\bar{\alpha}_i \bar{\rho}_i \bar{u}_i S = \text{const}$

($i = l, g$) в предположении однородности потока в поперечном сечении сопла, S — площадь поперечного сечения сопла.

Для получения стационарного решения устанавливались следующие краевые условия:

- на входе задавались массовые расходы жидкости и газа, а также начальное газосодержание
- на выходе подбиралось давление таким образом, чтобы на входе установилось давление равное p_{in}
- на всех стенках задавалось условие прилипания

На рис. 3.2 представлены результаты сравнения численных расчетов с экспериментальными данными [58], а также показана чувствительность задачи к начальному среднему радиусу газовых пузырьков. Видно, что численные расчеты хорошо согласуются с экспериментальными данными: ошибка для расчета с $R = 0.2$ мм не превышает 10%. Давление и скорость жидкости не чувствительны к начальному среднему радиусу газовых пузырьков в отличие от скорости газа и газосодержания. В модели (3.1)—(3.5) реализуется подход, когда уравнение на число дисперсных частиц не решается, а радиус пузырьков входит только в силу сопротивления (3.3) и остается неизменным на протяжении всего расчета $\left(F_{g,l} \sim A = \frac{3\alpha_g}{R}\right)$. Увеличение радиуса пузырька (при неизменном газосодержании α_g) приводит к уменьшению силы сопротивления, а следовательно к увеличению скорости газовых пузырьков (см. критическое сечение для рис. 3.2в). Скорость газа выше скорости жидкости в критическом сечении, так как газовые пузырьки быстрее ускоряются по сравнению с жидкостью (как более легкая фаза).

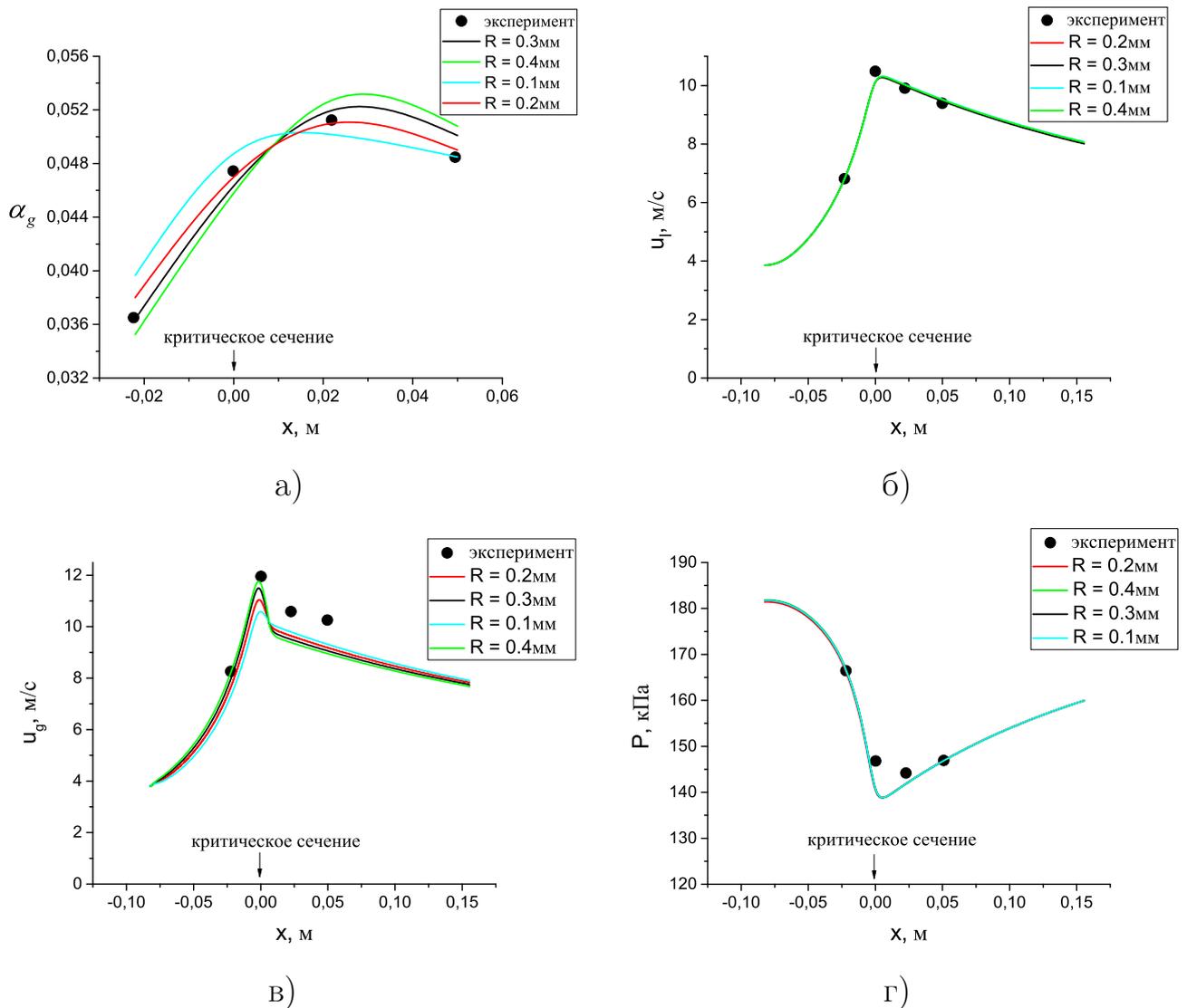


Рисунок 3.2 — Измеренные [58] (символы) и рассчитанные (сплошные кривые) свойства течения вдоль оси сопла: а) средняя объемная доля газа, б) средняя скорость жидкости, в) скорость газа, и г) давление

3.3 Влияние межфазного давления на структуру течения

В работе [10] численно исследовалось влияние межфазного давления на структуру решения задачи Римана о распаде разрыва. Получено, что межфазное давление почти не оказывает эффекта на распространение «быстрых» возмущений (ударных волн и волн разрежения), но может значительно влиять на распространение «слабых» возмущений (контактных разрывов). Для установления влияния межфазного давления на структуру течения в сопле проведем

два численных расчета. Первый расчет проводится для системы определяющих уравнений (3.1)—(3.5) (расчет 1), второй расчет проводится для этой же системы (3.1)—(3.5), но в предположении, что $C_s = 0$ (расчет 2). Как было отмечено выше, обе эти модели являются корректными.

На рис. 3.1б представлена геометрия расчетной области, где $d = 28.57$ мм, $l = 14.29$ мм, $L_T = 147.64$ мм, $d_0 = 50.8$ мм, $\theta_c = 14.04^\circ$, $\theta_d = 7.12^\circ$. Сопло имеет круглое поперечное сечение, поэтому расчеты проводились в двумерном приближении в предположении осевой симметрии. На вход в сопло подавали воду с пузырьками воздуха с заданными массовыми расходами $\dot{m}_l = 4.131$ кг/с и $\dot{m}_g = 1.49 \cdot 10^{-3}$ кг/с соответственно. Газосодержание и давление на входе: $\alpha_g = 0.21$, $p_{in} = 1.27$ атм. Распределение радиусов пузырьков варьировалось от 2 до 4 мм. Краевые условия для получения стационарного решения для обоих расчетов устанавливались как в предыдущей задаче, с той разницей, что на центральной оси сопла устанавливались условия симметрии по всем переменным. Расчеты проводились на коммерческой программе AVL FIRE [57] после предварительного учета в ней межфазного давления.

На рис. 3.3 представлены результаты численного эксперимента. Видно, что структура течения принципиально отличается для двух расчетов в расширяющейся части сопла. Так для расчета 2 у стенки сопла наблюдается обратное течение (см. рис 3.3г), т.е. образуется вихрь внутри которого концентрируется газ, а в окрестности вихря газосодержание почти нулевое 3.3б. Вихрь отрывается от стенки сопла и сносится потоком, через некоторое время зарождается новый вихрь. Для расчета 1, напротив, наблюдается потенциальное течение. И после прохождения потоком расширяющейся части сопла, газ концентрируется вдоль центральной оси (см. 3.3б). Таким образом, межфазное давление может оказывать значительный эффект на структуру течения.

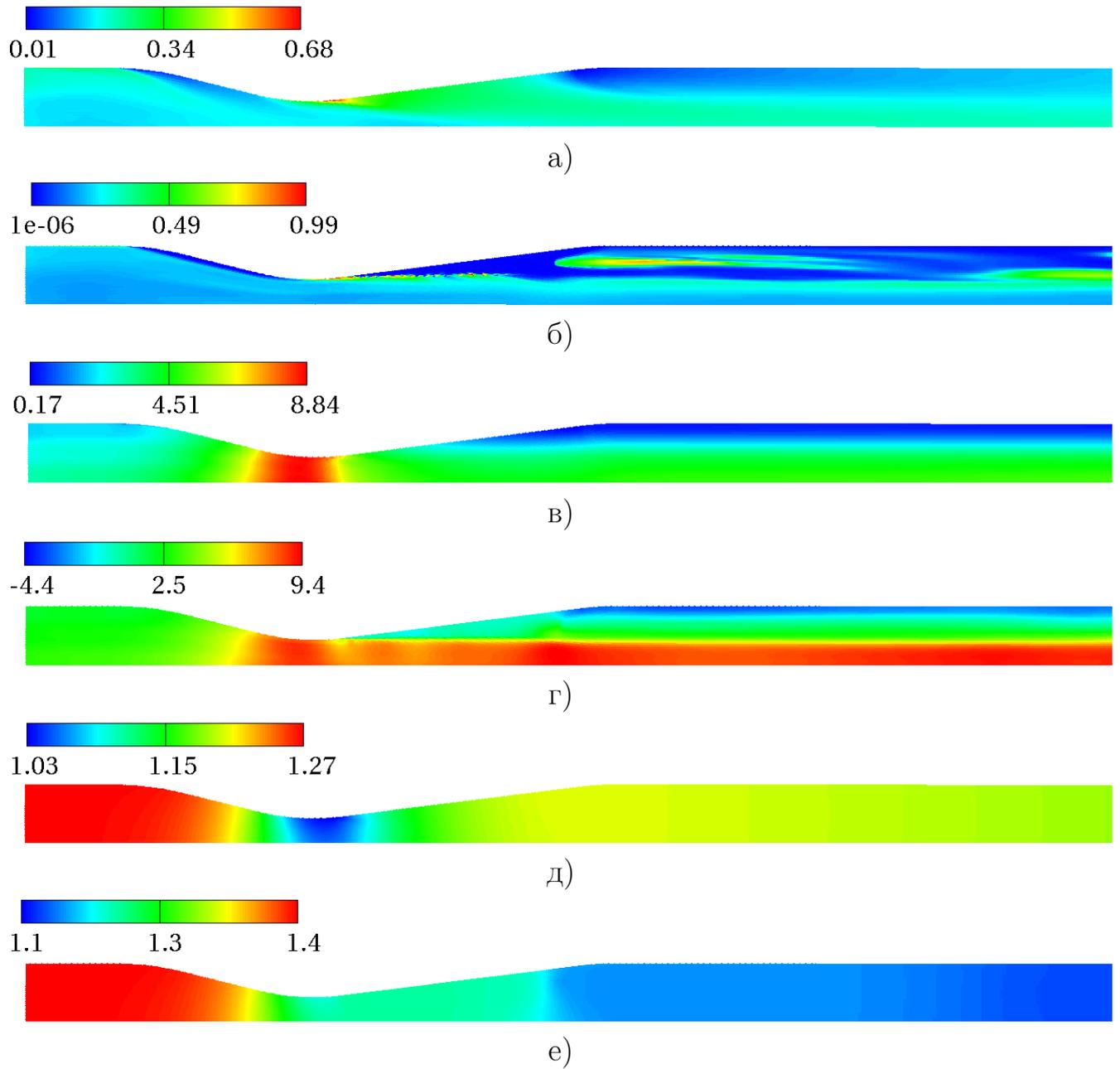


Рисунок 3.3 — Результаты численного эксперимента а), в) и д) — расчет 1; б), г) и е) — расчет 2; а) и б) — объемное газосодержание, в) и г) — скорость газа (м/с), д) и е) — давление (атм)

3.4 Исследования распространения ударной волны в пузырьковой среде

3.4.1 Экспериментальная установка и методология

Эксперименты проведены на вертикальной гидроударной трубе (ГУТ) постоянного прямоугольного сечения 50×100 мм² длиной 1980 мм (рис. 3.4). ГУТ составлена из КВД, отделенной от КНД диафрагмой с мембранным узлом, и ИС, заполненной водой с пузырьками воздуха. Давление в КВД измерялось с помощью дифференциального датчика давления пьезокерамического типа (датчик P1 на рис. 3.4) и с помощью датчика абсолютного давления (датчик P8 на рис. 3.4). Первый использовался для определения амплитуд волн давления, а второй — для измерения начального абсолютного давления в КВД и давления в КВД перед моментом разрыва мембраны. КНД установки ГУТ соединена с атмосферой напрямую при помощи переходного устройства и в ходе проведения экспериментов всегда заполнена воздухом до момента разрыва диафрагмы. В КНД с помощью датчиков давления P2 и P3 определялись основные параметры воздушной УВ, формируемые в ходе разрыва мембраны: ее амплитуда, длительность и скорость распространения. В ИС предусмотрены четыре оптических окна и четыре датчика давления.

Экспериментальная установка также включает систему смешивания горючих газов, их подачу в КВД, зажигание и генератор пузырьков, установленный в нижнем конце ИС в форме плиты с регулярными трубками-капиллярами (171 шт.), выполненными из медицинских игл с внутренним диаметром 0.16 мм. Объемная доля газа в пузырьковой жидкости контролировалась по изменению уровня жидкости (оптическое окно №1 в ИС с нанесенными рисками рис. 3.5)

и по перепаду уровней жидкости в дифференциальном жидкостном манометре (рис. 3.4).

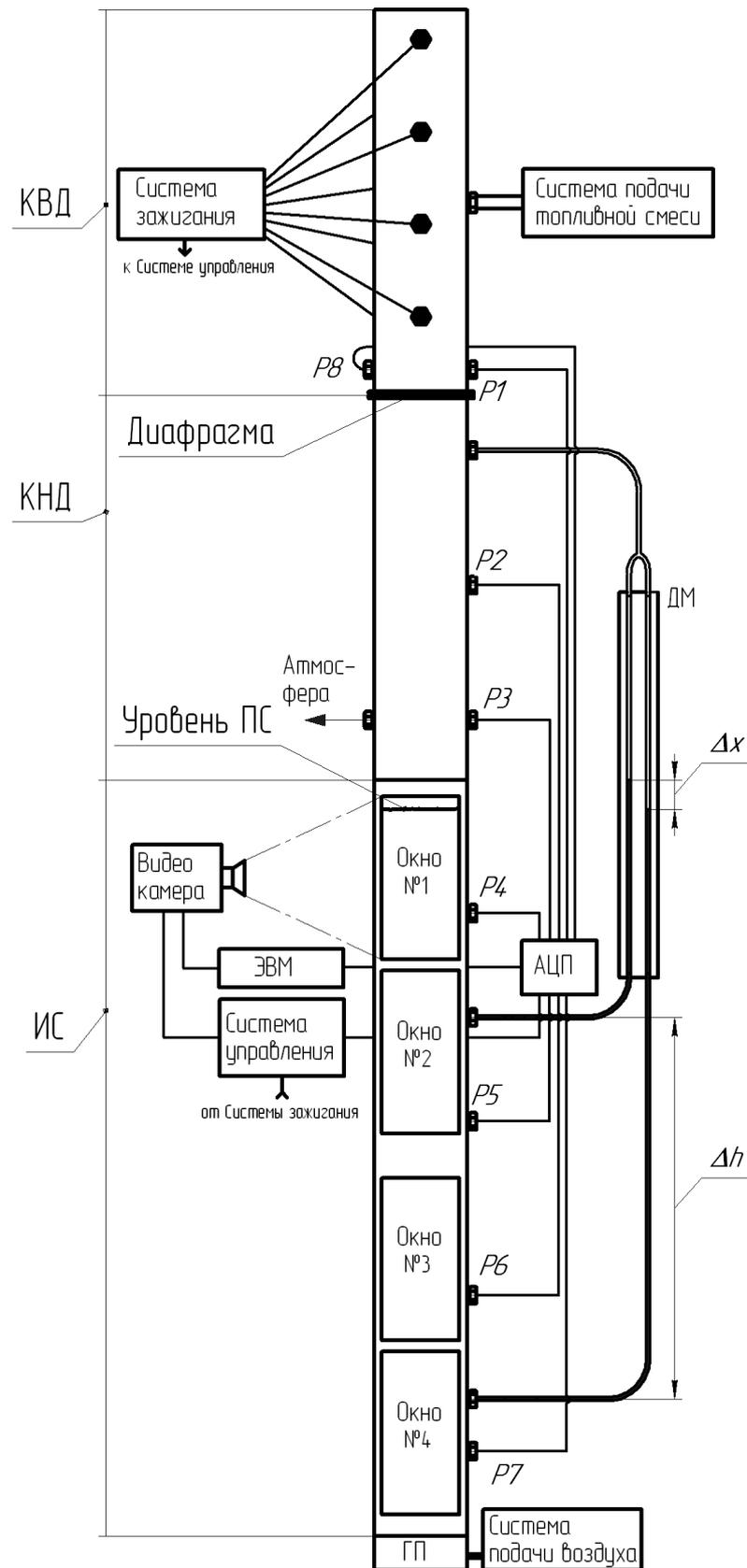
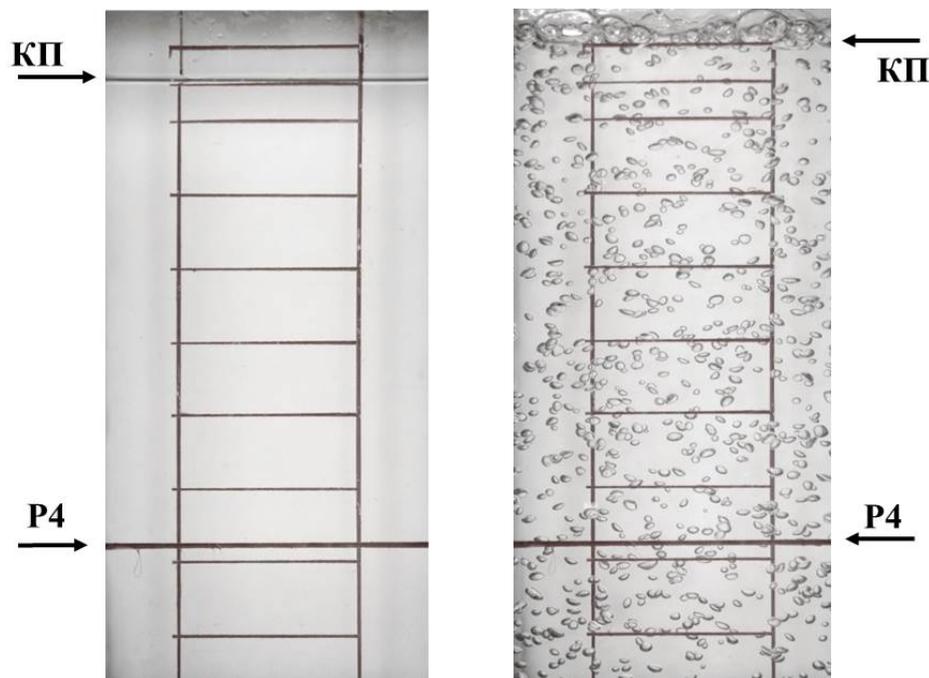


Рисунок 3.4 — Схема ГУТ



а) Уровень жидкости без
пузырьков

б) Уровень жидкости с
пузырьками

Рисунок 3.5 — Пример фотографии (окно №1) пузырьковой среды со свободной поверхностью; КП – контактная поверхность пузырьковой среды с воздухом; Р4 – положение датчика Р4

Опыты проводились при одинаковой высоте столба пузырьковой среды, равной 943 мм. Процедура опыта состояла в следующем. Зная высоту столба пузырьковой среды $h = 943$ мм и необходимое начальное газосодержание α_g^0 , определяли эквивалентную высоту столба газа $h_g = \alpha_g^0 \cdot h$. Затем в секцию КНД наливали воду до отметки $(h - h_g)$ и включали подачу воздуха, приводя расход воздуха к такому значению, чтобы уровень жидкости установился на отметке $h = 943$ мм. Ввиду того, что на поверхности пузырьковой жидкости всегда присутствует некоторое количество пузырьков, которые образуют тонкий слой «пены», определение точного положения границы пузырьковой жидкости не представляется возможным, особенно при большом газосодержании, когда объемная доля газа в пузырьковой жидкости превышает 0.08. Таким образом, начальное газосодержание при $\alpha_g^0 > 0.08$ определяли с помощью дифференциального водяного манометра. Начальное газосодержание в этом случае

рассчитывается по формуле:

$$\alpha_g^0 = \frac{\Delta x}{\Delta h}$$

где Δh — разность высот, на которых производится отбор давления ($\Delta h = 496$ мм) и Δx — разность показаний высот водяных столбов. Минимальное значение Δx , которое может быть измерено с точностью 5% по показаниям дифференциального манометра, равно 10 мм. Таким образом, нижняя граница по объемному газосодержанию для измерений по водяному манометру находится в районе отметки $\alpha_g^0 = 0.02$. Для получения меньших значений α_g^0 использовались только измерения высоты столба жидкости.

Давление вдоль ударной трубы измерялось с помощью 8 датчиков давления, расположенных, как показано на рис. 3.4. Координаты датчиков в системе отсчета, связанной с положением диафрагмы ГУТ, приведены в таблице 3.1. Поскольку далее речь пойдет в основном о взаимодействии УВ с контактной поверхностью (КП) пузырьковой среды и воздуха и о распространении УВ в такой среде, удобно ввести систему координат с началом в точке отсчета, отвечающей положению этой контактной поверхности в начальный момент времени, т.е. положение датчиков — это их глубина. Данные координаты также приведены в таблице 3.1. Для определения скорости УВ необходимо знать расстояние между датчиками давления и время пробега волны от одного датчика до другого. Для удобства и дальнейших ссылок значения всех измерительных баз приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.1

Расстояния от диафрагмы до датчиков давления и глубина датчиков — расстояние от свободной поверхности пузырьковой жидкости до осевой линии датчика.

Датчик	P1, P8	P2	P3	P4	P5	P6	P7
Координата, мм	-32	247	422	673	943	1168	1347
Глубина, мм	—	—	—	135	405	630	833

Таблица 3.2

Расстояние между датчиками – измерительные базы для вычисления средних скоростей УВ.

База	P2 – P3	P3 – P4	P4 – P5	P5 – P6	P6 – P7
Расстояние, мм	175	251	270	225	179

3.4.2 Измерение скорости ударной волны

Экспериментальные исследования взаимодействия УВ с пузырьковой средой проведены для относительно слабых и сильных УВ. В экспериментах с относительно слабыми УВ использовали диафрагму толщиной 25 мкм. Давление в КВД ($p_{\text{квд}} \approx 0.3$ МПа в момент разрыва диафрагмы) получали за счёт подачи в КВД сжатого воздуха. В экспериментах с сильными УВ использовали диафрагму толщиной 150 мкм, а давление газа в КВД на уровне $p_{\text{квд}} \approx 1.5$ МПа в момент разрыва диафрагмы получали за счёт быстрого сжигания пропано-воздушной смеси. Во всех экспериментах КНД заполняли воздухом при атмосферном давлении, а в ИС размещали столб воды высотой ≈ 943 мм с пузырьками воздуха со средним диаметром $d = 2.5$ мм и начальной объемной долей газовой фазы α_g^0 от 0.005 до 0.3. Температура воздуха и воды комнатная.

На рис. 3.6 показан пример фотографии, используемой для определения функции распределения воздушных пузырьков по размерам в одном из экспериментов. В данном опыте средний диаметр пузырьков – 2.5 мм, а диаметры пузырьков мелкой и крупной фракций равны соответственно 1.6 и 4 мм. Следует отметить, что с увеличением объемного газосодержания средний диаметр пузырьков увеличивается, а их форма становится тем более искривленной, чем меньше расстояние между пузырьками.

На рис. 3.7–3.8 представлены типичные осциллограммы датчиков давления P2 – P7, используемые для измерения скорости УВ на базах P2 – P3, P3 – P4, P4 – P5, P5 – P6 и P6 – P7:

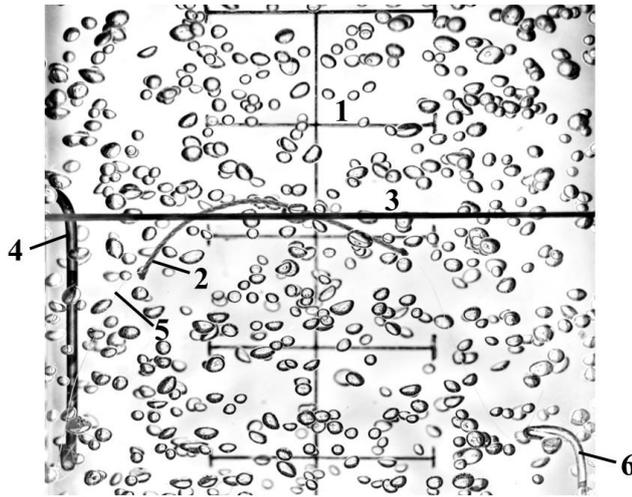


Рисунок 3.6 — Пример фотографии (окно №2) с полиэтиленовой нитью, используемой для измерения скорости жидкости: 1 — горизонтальные маркеры с шагом 20 мм, 2 — полиэтиленовая нить, 3 — линия равноудаленная от датчиков P4 и P5, 4, 6 — держатели нити, 5 — фтороуглеродная леска;

$$\alpha_g^0 = 0.01$$

$$D_{i,j} = \frac{(X_j - X_i)}{(\tau_j - \tau_i)} \quad (3.9)$$

где i, j — номера датчиков давления (рисунок 3.4), X_k — координата датчика Pk (таблица 3.1), τ_k — время прихода УВ на датчик Pk. Время прихода определяется по точке перегиба фронтальной части графика давления.

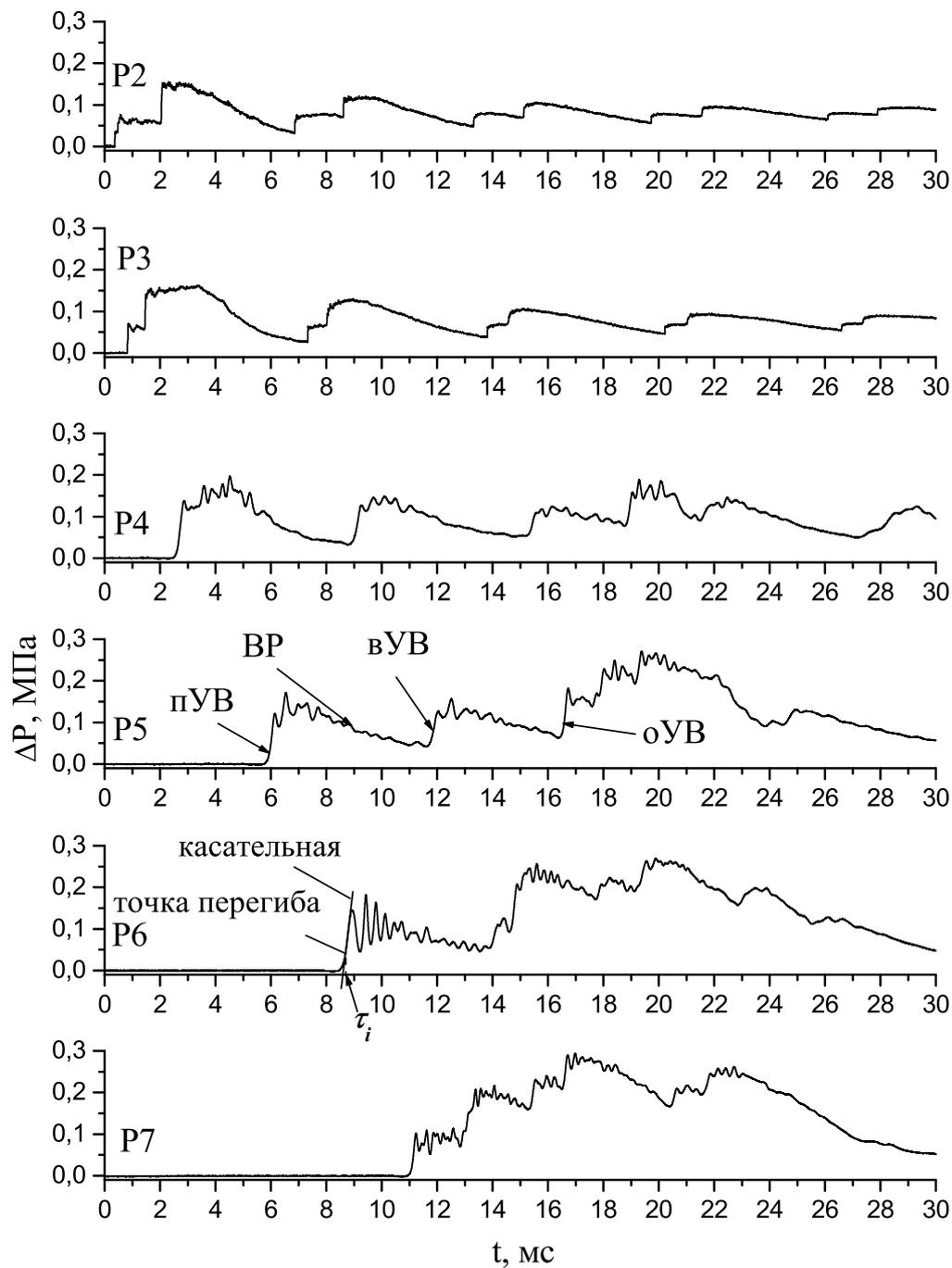


Рисунок 3.7 — Осциллограммы давления «слабой» УВ ($\Delta P \approx 0.05$ МПа) с датчиков P2 – P3, установленных в газе, и P4 – P7, установленных в пузырьковой среде с начальным газосодержание $\alpha_g^0 = 0.04$; пУВ — первичная УВ, вУВ — вторичная УВ, ВР — волна разрежения, оУВ — отраженная (от нижней части трубы) УВ

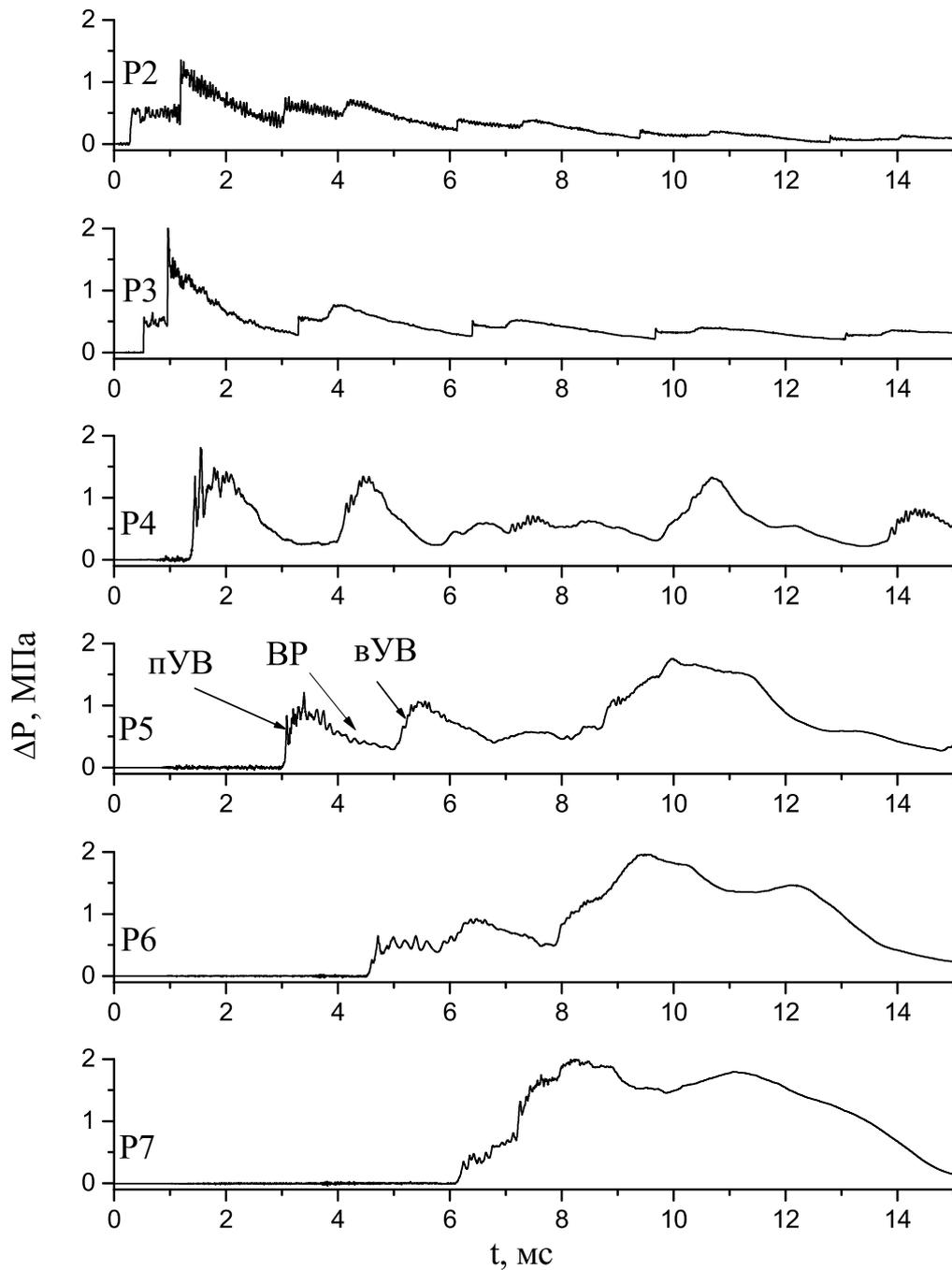


Рисунок 3.8 — Осциллограммы давления «сильной» УВ ($\Delta P \approx 0.5$ МПа) с датчиков P2 – P3, установленных в газе, и P4 – P7, установленных в пузырьковой среде с начальным газосодержание $\alpha_g^0 = 0.04$; пУВ — первичная УВ, вУВ — вторичная УВ, ВР — волна разрежения, оУВ — отраженная (от нижней части трубы) УВ

Как видно из рис. 3.7—3.8 УВ, распространяющаяся в пузырьковой среде, имеет осцилляторную структуру. Такие осцилляторные волны давления часто наблюдаются в экспериментах с распространением УВ в пузырьковых средах (см., например, [27], [28], [29]) и связывают их с нелинейностью и дисперсностью пузырьковой среды. Видно (см. рис. 3.7—3.8), что осцилляции присутствуют не только в первичной УВ, а также в волне разрежения, вторичной УВ и в УВ, отраженной от нижней части трубы. При определенных условиях эксперимента может наблюдать и монотонную структуру УВ в пузырьковой среде [60].

3.4.3 Измерение скоростей фаз

В эксперименте измерялась скорость газа за УВ по скорости газовых пузырьков и скорость жидкости по скорости КП и маркированной полиэтиленовой нитки, т.к. плотности нитки и жидкости приблизительно одинаковые. Скорость газовых пузырьков, КП и маркированной нитки определялась по видеозаписям, сделанным скоростной видеокамерой Phantom Miro LC310, с помощью программного обеспечения Phantom Camera Control. Данное программное обеспечение позволяет проводить измерения расстояний и скоростей выбранных точек видеокадров после предварительной калибровки – установления масштабной связи между изображением и физическим объектом.

На рис. 3.9 представлено перемещение одиночного пробного газового пузырька в разные моменты времени, разделенные 1–2 мс интервалом. На основе этих изображений получены $x - t$ (перемещение от времени) и $v - t$ (скорость от времени) диаграммы движения пробного пузырька (рис. 3.10). Необходимо отметить, что, после того как УВ достигает пузырька, последний начинает вовлекаться в движение и пульсировать. Эти пульсации продолжаются в течение некоторого периода времени, который зависит от размеров пузырька, интен-

сивности УВ и других параметров, а затем пузырек дробится на более мелкие составляющие. Поэтому при движении пузырька в начале процесса отслеживается движение одиночного пузырька, тогда как на последних стадиях процесса отслеживается движение результирующего кластера из более мелких пузырьков.

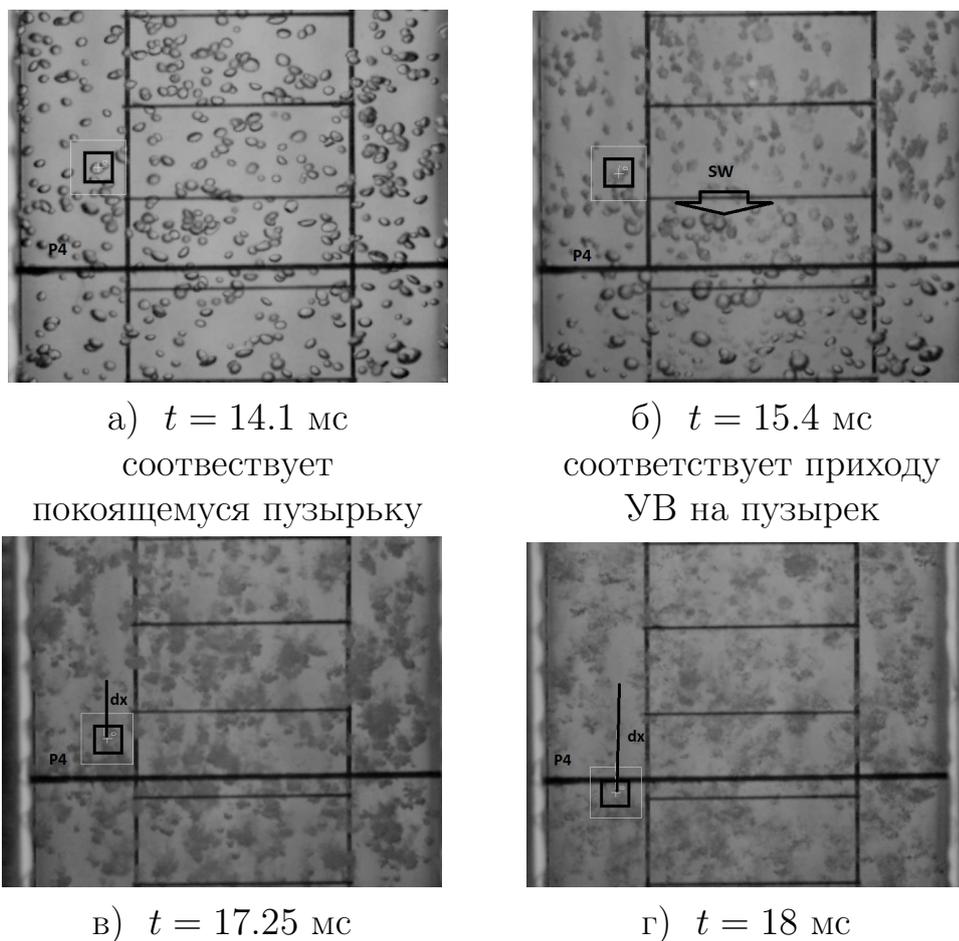


Рисунок 3.9 — Видеокадры перемещения индивидуального пузырька (отмечен квадратом) за «сильной» УВ, распространяющейся в пузырьковой среде с начальным газосодержанием $\alpha_g^0 = 0.01$; dx — перемещение пузырька, P4 — расположение датчика P4, стрелка указывает расположение и направление распространения УВ; разрешение по времени 10000 кадров/с

На рис. 3.11 представлено перемещение контактной поверхности между воздухом и пузырьковой средой с начальным газосодержанием $\alpha_g^0 = 0.01$ за «сильной» УВ в разные моменты времени, разделенные 2 мс интервалом. На основе этих изображений построены $x - t$ и $v - t$ диаграммы перемещения кон-

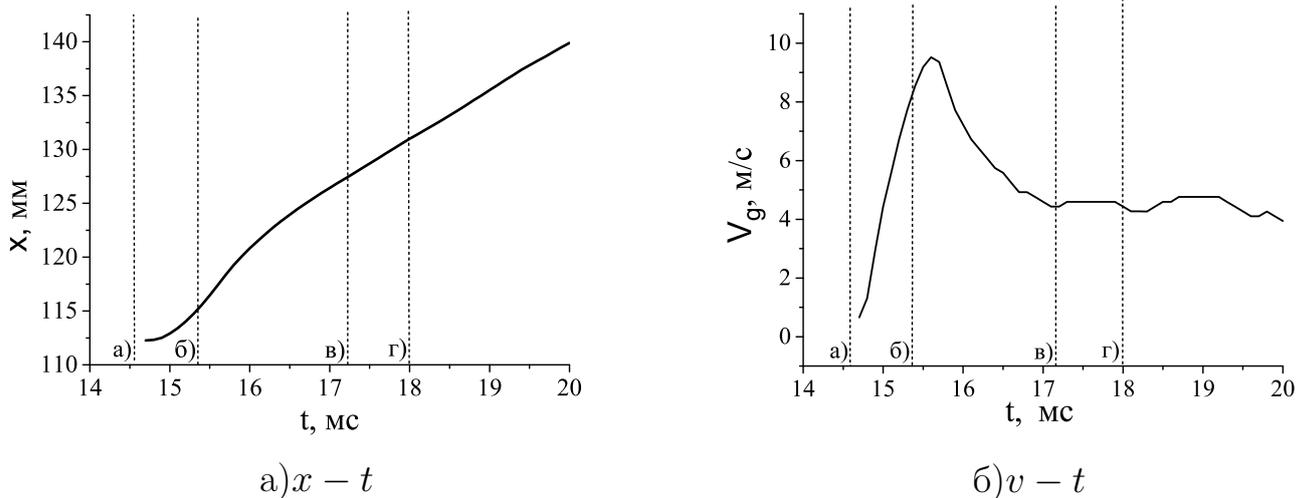
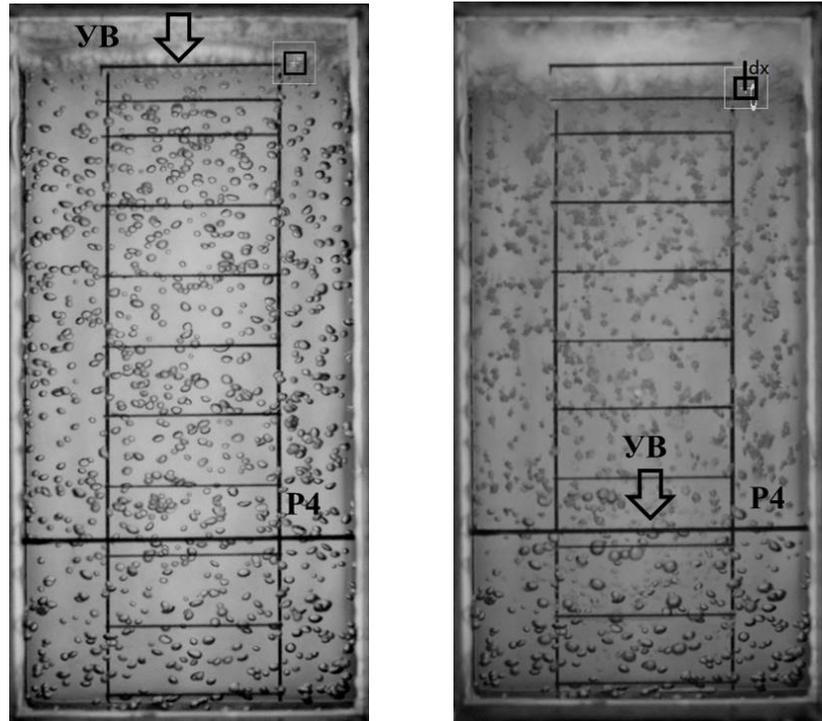


Рисунок 3.10 — $x - t$ и $v - t$ диаграммы перемещения выбранного пузырька.

Вертикальные линии соответствуют видеокадрам на рис. 3.11а – 3.9г

тактной границы (рис. 3.12). Ошибка измерения скорости контактной границе составляет приблизительно $\pm 25\%$.

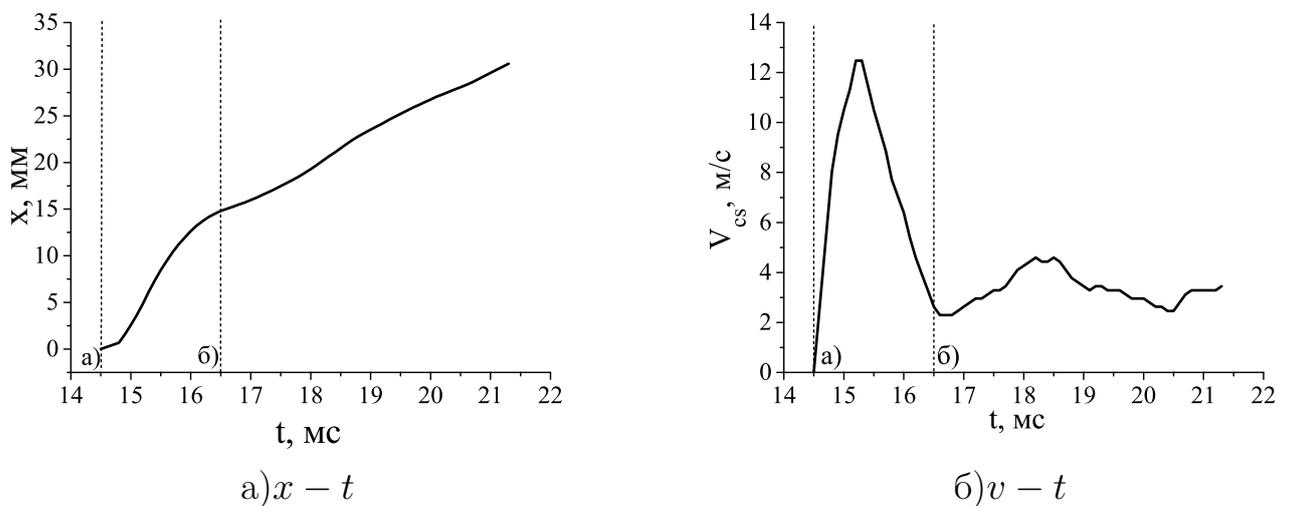
Аналогичным образом получены $x - t$ и $v - t$ диаграммы движения маркированной полиэтиленовой нитки с тем отличием, что для нитки прослеживался ее геометрический центр, расположенный в начальный момент на глубине ≈ 270 мм (см. рис. 3.5). Ошибка измерения скорости полиэтиленовой нитки составляет приблизительно $\pm 15\%$.



а) $t = 14.5$ мс –
приход УВ на КП

б) $t = 16.5$ мс –
приход УВ на
датчик Р4

Рисунок 3.11 – Видеокадры перемещения контактной поверхности за «сильной» УВ, распространяющейся в пузырьковой среде с начальным газосодержанием $\alpha_g^0 = 0.01$; dx – перемещения контактной поверхности, Р4 – расположение датчика Р4, стрелка указывает расположение и направление распространения УВ; разрешение по времени 10000 кадров/с



а) $x - t$

б) $v - t$

Рисунок 3.12 – $x - t$ и $v - t$ диаграммы перемещения КП. Вертикальные линии соответствуют видеокадрам на рис. 3.11

3.4.4 Передача импульса от ударной волны к пузырьковой среде

Как уже отмечалось выше (см. Введение), в настоящее время появился интерес к разработке силовых установок нового типа для надводных и подводных аппаратов и транспортных средств различного назначения — ГРД, работающего в режиме импульсной или непрерывной детонации [1; 2].

Импульсно-детонационный ГРД представляет собой водовод — профилированный канал — и погруженную в него детонационную трубку. В таком ГРД тяга создается путем периодического вытеснения забортной воды из водовода под действием бегущей УВ, порожденной детонацией в трубке, и расширяющихся продуктов детонации топливной смеси. Поскольку забортная вода в водоводе барботируется газообразными продуктами горения и детонацией, в канале образуется сжимаемая двухфазная пузырьковая среда. Именно этот фактор — использование в водоводе сжимаемой двухфазной пузырьковой среды — является ключевым в принципе работы импульсно-детонационного ГРД. Для оценки эффективности таких ГРД и для их проектирования необходимо уметь предсказывать передачу количества движения от УВ к пузырьковой жидкости.

Определим количество движения (импульс) в пузырьковой среде за УВ следующим образом:

$$I = \alpha_1 \rho_1 \bar{u}_1 \quad (3.10)$$

где ρ_1 — плотность воды (1000 кг/м³) и \bar{u}_1 — средняя (или максимальная) скорость жидкости за УВ. Поскольку плотность газа много меньше плотности жидкости, то вкладом газовой фазы в импульс можно пренебречь.

Средняя скорость жидкости \bar{u}_1 за УВ в эксперименте рассчитывается на основе $x - t$ диаграмм перемещения КП (см. рис. 3.12). Среднюю скорость КП \bar{V}_{cs} определяли следующим образом:

$$\bar{V}_{cs} = \frac{S}{(\tau_4 - \tau_{cs})} \quad (3.11)$$

где τ_{cs} и τ_4 — время прихода УВ на КП и датчик давления Р4 соответственно, S — расстояние которое проходит КП за время $(\tau_4 - \tau_{cs})$.

Численные расчеты в этом параграфе проводились на основе модели (3.1)—(3.5) с $C_s = 0$ в условиях эксперимента. Рассчитанная скорость жидкости получена путем добавления в модель лагранжевой частицы вблизи КП, которая движется со скоростью жидкости, и отслеживания ее движения. Среднее значение расчетной скорости жидкости было также получено по формуле (3.11).

На рис. 3.13 представлено сравнение рассчитанных (кривые) и измеренных (символы с ошибками) средних скоростей жидкости за «слабыми» (рис. 3.13а) и «сильными» (рис. 3.13б) УВ в пузырьковой среде с различными начальными объемными газосодержаниями. Как видно из рис. 3.13, модель удовлетворительно согласуется с измеренной экспериментальной скоростью КП, по крайней мере до $\alpha_g^0 = 0.3$. Как и ожидалось, при очень низких значениях $\alpha_g^0 \approx 0$ скорость жидкости стремится к нулю. Как в экспериментах, так и в расчетах, скорость жидкости возрастает с начальным объемным газосодержанием, достигая при $\alpha_g^0 = 0.3$ величины 5–6 м/с в «слабых» УВ и 20–30 м/с в «сильных» УВ.

Стоит отметить, что экспериментальные измерения скоростей КП плохо воспроизводятся, в частности для «сильных» УВ, например, разброс экспериментальных данных на рис. 3.13б составляет от 5 до 10 м/с для $\alpha_g^0 = 0.02$, от 6 до 12 м/с для $\alpha_g^0 = 0.08$ и от 8 до 16 м/с для $\alpha_g^0 = 0.16$, т.е. достигает $\approx 100\%$. Одной из возможных причин такого разброса является эффект нерегулярного разрыва диафрагмы, поскольку длина КНД довольно короткая (495 мм). В таких условиях УВ, генерируемая разрывом диафрагмы, может достигать КП в виде волнового пакета сложной формы с поперечными волнами, а не плос-

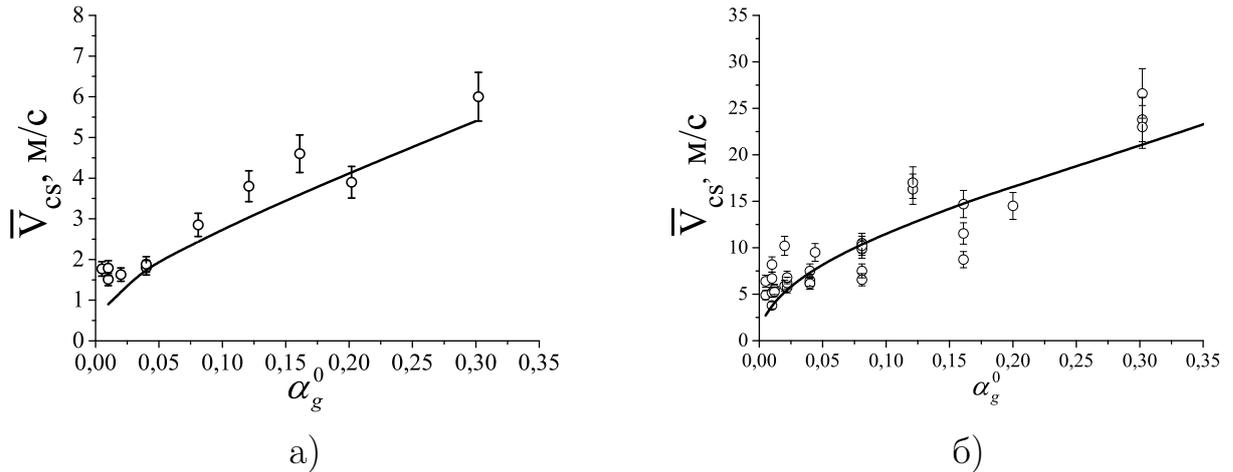


Рисунок 3.13 — Рассчитанные (кривые) и измеренные (символы с ошибками) зависимости скорости жидкости от начального объемного газосодержания пузырьковой воды для а) «слабой» и б) «сильной» УВ

кого газодинамического разрыва. Другая возможная причина — нерегулярное распределение пузырьков по размеру.

На рис. 3.14 представлены результаты измеренного (символы с ошибками) и рассчитанного (кривые) по формуле (3.10) импульса пузырьковой среды для «слабых» и «сильных» УВ. Следует отметить, что значения импульса, передаваемого пузырьковой среде как «слабыми», так и «сильными» УВ, имеют тенденцию выходить на насыщение при начальном объемном газосодержании 0.3, т.е. при дальнейшем увеличении α_g^0 импульс увеличивается незначительно. Максимальные значения импульса в «слабых» и «сильных» УВ соответственно составляют ≈ 3.7 и 15 т/(м²с).

Рассмотрим физический механизм переноса импульса от УВ к пузырьковой среде. Падающая УВ при достижении КП распадается на отраженную УВ и УВ, проникающую в пузырьковую среду и вовлекающую ее тем самым в движение со скоростью \bar{u}_1 , создавая при этом избыточное давление $\Delta p_{g,ref}$ определенной продолжительности. Поэтому естественно определить эффективность передачи импульса от УВ к пузырьковой среде следующим образом:

$$\beta = \frac{I\bar{u}_1}{\Delta p_{g,ref}}$$

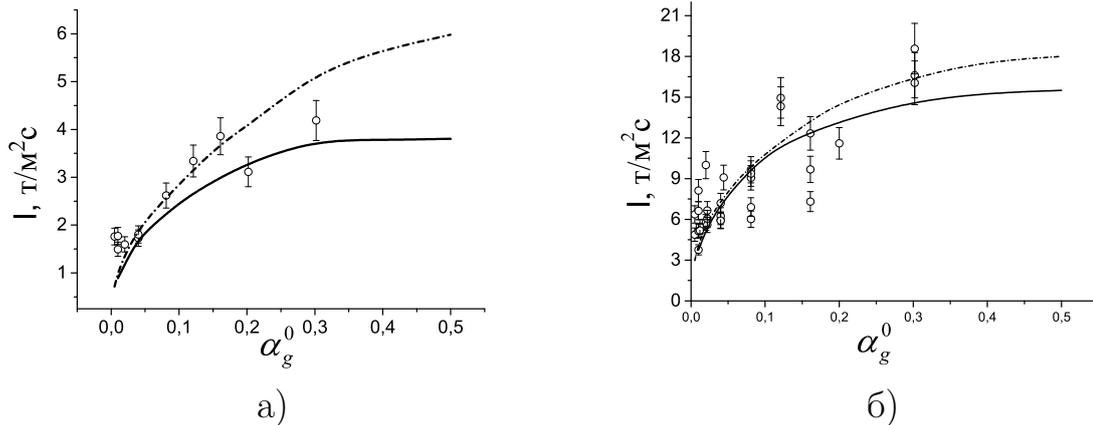


Рисунок 3.14 — Рассчитанные (кривые) и измеренные (символы с ошибками) зависимости количества движения от начального объемного газосодержания пузырьковой воды для а) «слабой» и б) «сильной» UV; сплошная кривая получена на основе средней скорости жидкости за UV, штрихпунктирная кривая — на основе максимальной скорости жидкости за UV

Таким образом, смысл коэффициента β — часть избыточного давления $\Delta p_{g,\text{ref}}$, полученного пузырьковой средой в виде ударно-индуцированного движения.

На рис. 3.15 показаны зависимости β от начального газосодержания для «слабых» (рис. 3.15а) и «сильных» (рис. 3.15б) UV, полученных на основе измеренных (символы с ошибками) и рассчитанных (кривые) скоростей жидкости за UV. Видно, что как измеренная, так и рассчитанная эффективность передачи импульса возрастает приблизительно линейно в зависимости от начального объемного газосодержания по крайней мере до $\alpha_g^0 = 0.3$, достигая значений $\beta \approx 12\% - 15\%$ для «слабых» UV и $\beta \approx 20\%$ для «сильных» UV. Принимая во внимание, что импульс, передаваемый пузырьковой жидкости, достигает своего предельного значения при $\alpha_g^0 \approx 0.3$ (см. 3.14), эту эффективность можно считать оптимальной.

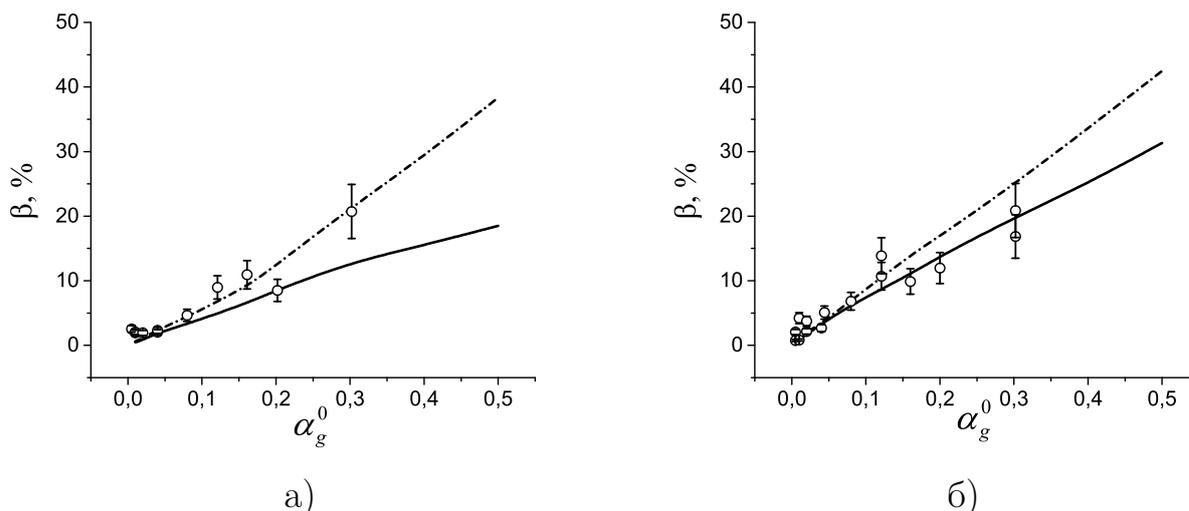


Рисунок 3.15 — Рассчитанные (кривые) и измеренные (символы с ошибками) зависимости эффективности передачи количества движения от начального объемного газосодержания пузырьковой воды для а) «слабой» и б) «сильной» УВ; сплошная кривая получена на основе средней скорости жидкости за УВ, штрихпунктирная кривая — на основе максимальной скорости жидкости за УВ

3.5 Численное моделирование передачи импульса от ударной волны к пузырьковой среде

Рассмотрим схему модельного устройства на рис. 3.16. Устройство состоит из водовода (широкого прямого канала постоянного сечения длиной 850 мм и шириной 100 мм с двумя открытыми концами) и из вложенного в водовод генератора УВ (газового канала шириной 50 мм с КВД и КНД, разделенными диафрагмой), причем один конец канала открыт и сообщается с водоводом. Предположим, что все устройство погружено в сплошную неподвижную воду, КВД заполнена продуктами горения при высоких значениях давления и температуры газов, КНД заполнена воздухом при нормальных условиях, а примыкающие к ней части водовода (области I, II и III на рис. 3.16) могут быть заполнены водой с пузырьками воздуха. Отличием гидростатического давления в разных точках расчетной области пренебрегаем. На рис. 3.16 показаны все размеры мо-

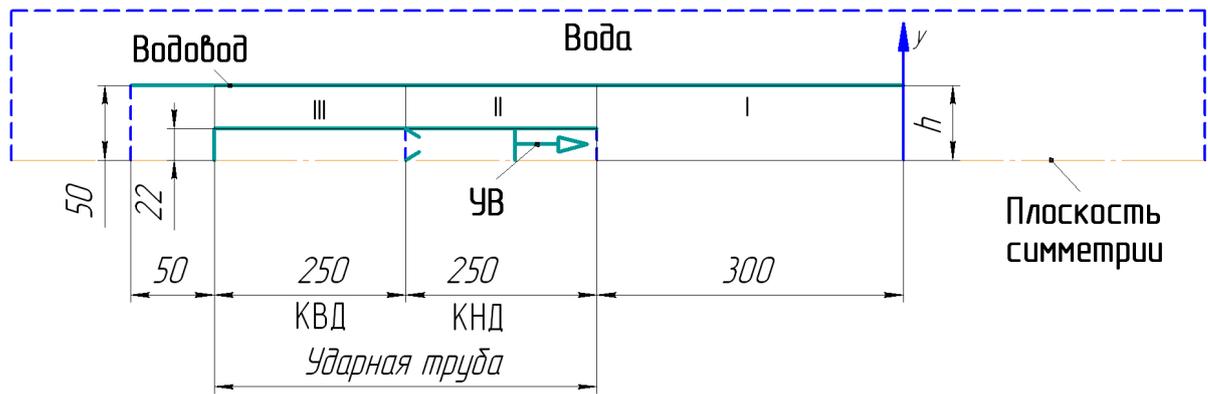


Рисунок 3.16 — Схема модельного устройства

дельного устройства, а в табл. 3.3 — все параметры задачи, использованные в расчетах. Для сокращения вычислительных затрат задачу о передаче импульса от УВ к пузырьковой жидкости решали для половины водовода, так что расчетная область была снизу ограничена плоскостью симметрии, как показано на рис. 3.16. Три другие границы расчетной области (левая, правая и верхняя) были удалены от водовода на достаточно большое расстояние, чтобы они не оказывали влияние на течение в водоводе и в его ближайшей окрестности. Численные расчеты в этом параграфе проводились на основе модели (3.1)—(3.5) с $C_s = 0$.

Таблица 3.3

Параметры задачи о передаче импульса от УВ к пузырьковой жидкости

Параметры	Значение
$L_{\text{КНД}}$, мм	250
$L_{\text{КВД}}$, мм	250
$L_{\text{ВД}}$, мм	850
Давление в КВД, атм	15.5
Температура в КВД, атм	3957
Давление воздуха в КНД, атм	1
Температура воздуха в КНД, К	293.15
Температура воды, К	293.15
Объемная доля газа в водяном заряде α_g	0, 0.03, 0.06, 0.1 и 0.2

Проведены две серии расчетов. В первой серии расчетов пузырьки воздуха вводились только в область I водовода, примыкающей к выходному сечению

генератора УВ. Начальная объемная доля воды в этой области изменялась от $\alpha_1^0 = 1$ до 0.97, 0.94, 0.9 и 0.8. Во второй серии расчетов пузырьки воздуха вводились либо в область I водовода, либо в области I и II, либо в области I, II и III, а начальная объемная доля воды в пузырьковом заряде была одинаковой и равной $\alpha_1^0 = 0.9$. Во всех расчетах в начальный момент времени все среды (газ в КВД, газ в КНД, вода в водоводе и за его пределами, а также пузырьковая жидкость в водоводе) находились в состоянии покоя. Движение начиналось после мгновенного открытия диафрагмы, разделяющей КВД и КНД: в КНД формировалась воздушная УВ, которая по истечении короткого времени сначала проникала в пузырьковую жидкость, а затем выходила в сплошную воду в водоводе и за его пределами, претерпевая отражения и дифракцию.

На рис. 3.16 представлены пространственные распределения объемной доли воды α_1 в расчетной области в разные моменты времени после открытия диафрагмы в генераторе УВ (через 1, 5, 10, 15 и 20 мс) для двух случаев: с пузырьковым водяным зарядом ($\alpha_1 = 0.9$, слева) и со сплошным водяным зарядом ($\alpha_1 = 1$, справа). При сравнении распределений слева и справа отчетливо видны различия между ними, начиная с момента времени 5 мс. При выходе УВ из пузырькового водяного заряда в окрестности правой кромки стенки водовода быстро образуется зона с повышенным газосодержанием, которая впоследствии сливается с газовым зарядом, поступающим из генератора УВ. К моменту времени 20 мс размеры газового пузыря на выходе из водовода для двух рассмотренных случаев существенно отличаются.

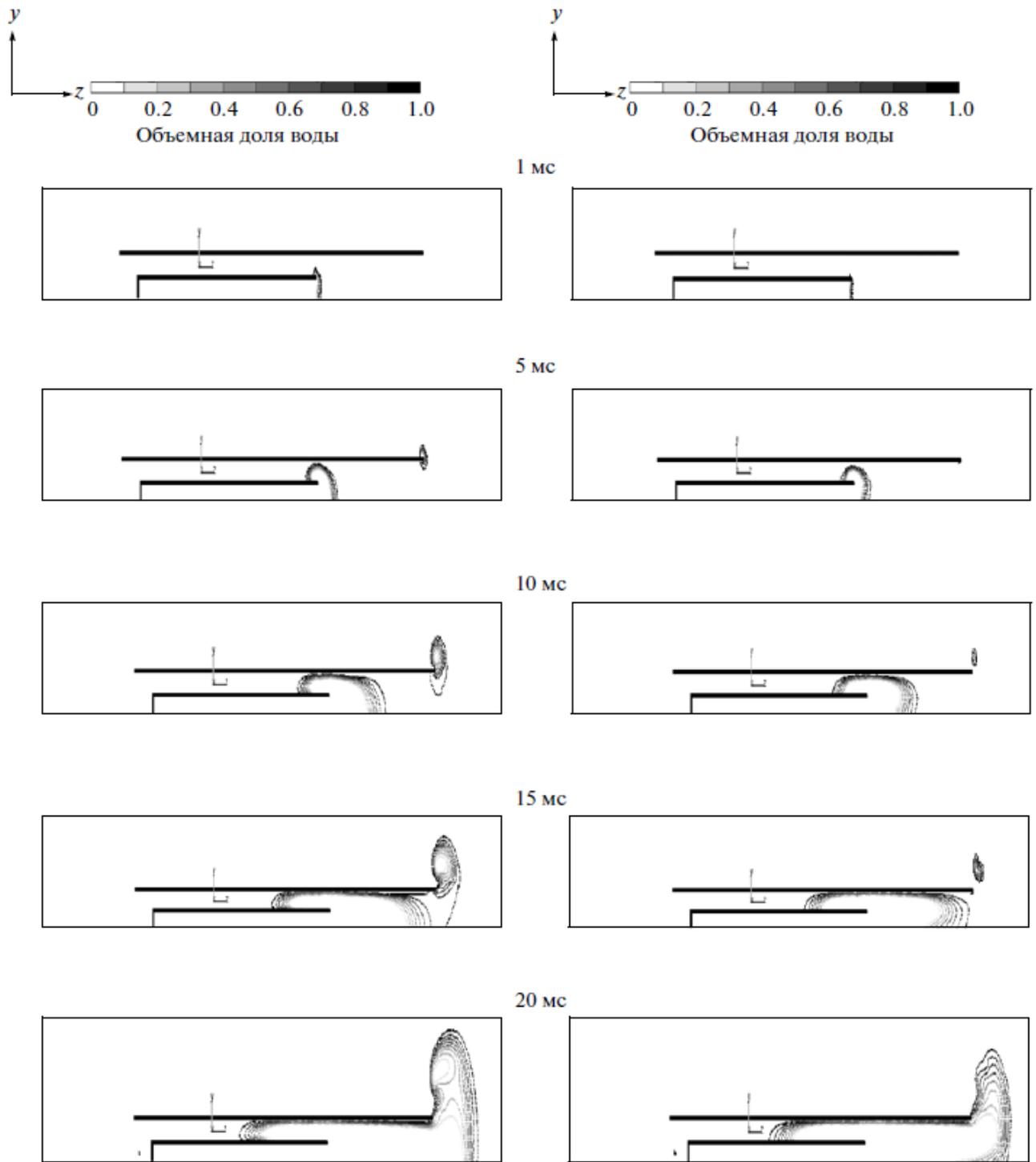


Рисунок 3.17 — Расчетные изолинии объемной доли воды α_1 в разные моменты времени после открытия диафрагмы в генераторе УВ (построены с шагом 0.1). Слева — пузырьковый водяной заряд с $\alpha_1 = 0.9$, справа — сплошной водяной заряд с $\alpha_1 = 1$

Расчеты позволяют определить мгновенную силу, действующую на устройство, используя формулу:

$$F(t) = I_{\text{in}}(t) - I_{\text{out}}(t)$$

где

$$\begin{aligned} I_{\text{in}}(t) &= \int_0^h [p_{\text{in}}(t,y) + \rho_{\text{in}}(t,y)u_{\text{in}}^2]dy \\ I_{\text{out}}(t) &= \int_0^h [p_{\text{out}}(t,y) + \rho_{\text{out}}(t,y)u_{\text{out}}^2]dy \end{aligned} \quad (3.12)$$

индексы in и out соответствуют левому и правому сечениям водовода полушириной $h = 50$ мм, а y — поперечная координата (см. рис. 3.16 и 3.17). Сила считается положительной, если она направлена справа налево на рис. 3.16 и 3.17.

На рис. 3.18 приведены результаты расчетов мгновенной силы F для двух случаев, рассмотренных на рис. 3.17, в виде зависимостей от времени на протяжении всего расчета (рис. 3.18а) и на протяжении 20 мс (фрагмент на рис. 3.18б). В обоих случаях весь процесс передачи импульса от УВ к жидкости (и сплошной, и пузырьковой) можно разделить на четыре стадии. На первой стадии доминирующую роль играет волновое воздействие УВ на жидкость в водоводе. На второй стадии волновое воздействие сменяется поршневым действием газов высокого давления на жидкость в водоводе. На третьей стадии поршневое воздействие уменьшается вследствие выхода газового пузыря через правый конец водовода. Наконец, на четвертой стадии давления жидкости и газа в водоводе выравниваются, и процесс передачи импульса завершается.

Из рис. 3.18 видно, что на первой стадии процесса наблюдаются кратковременные пики положительной и отрицательной мгновенной силы, вызванные отражениями УВ и волны разрежения, возникающей в газовом канале, а также в стратифицированной среде и в полуограниченном объеме, причем для пузырькового заряда наибольший пик положительной мгновенной силы наблюдается

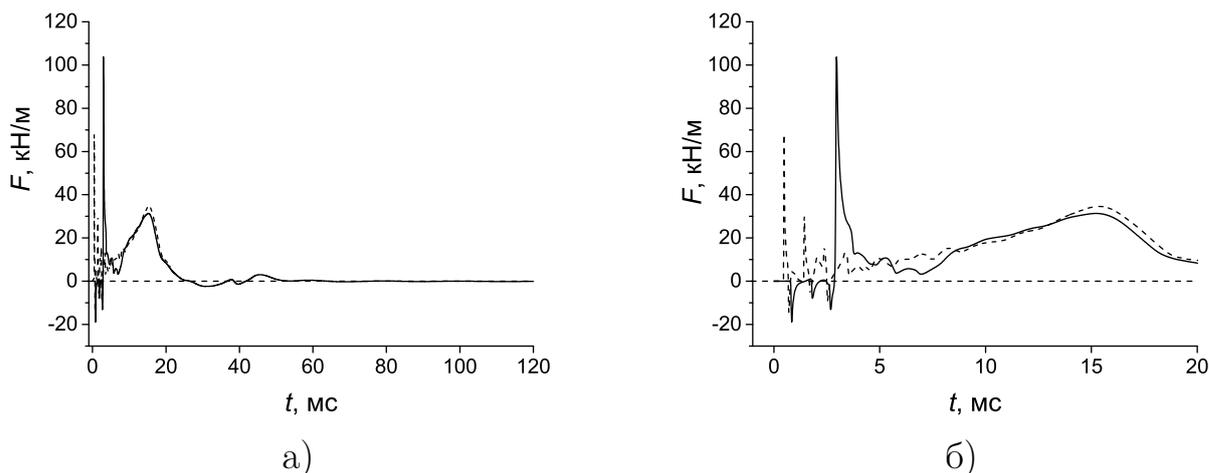


Рисунок 3.18 — Расчетные зависимости мгновенной силы, действующей на устройство, от времени при передаче импульса от УВ к пузырьковому водяному заряду с $\alpha_1 = 0.9$ (сплошная кривая) и к сплошному водяному заряду с $\alpha_1 = 1$ (штриховая кривая): (а) продолжительность 120 мс, (б) фрагмент продолжительностью 20 мс.

в момент времени 3 мс, а для сплошного водяного заряда — в момент времени 0.5 мс, т.е. в моменты выхода УВ через правый конец водовода с выталкиванием порции вещества через него. Далее, на второй стадии, до момента времени 15–16 мс в обоих случаях идет медленное нарастание мгновенной силы, вызванное прогрессирующим ускорением вещества расширяющимся газовым пузырем из генератора УВ. Последующее уменьшение силы F (третья стадия) связано со снижением давления газов в водоводе вследствие выхода газового пузыря через правый конец водовода, а также вследствие выталкивания жидкости через левый конец водовода. В целом из рис. 3.18 видно, что в обоих случаях мгновенная сила F , действующая на устройство, почти всегда положительна в течение 50–60 мс после открытия диафрагмы, а в дальнейшем спадает до нуля (четвертая стадия). Как и следовало ожидать, интегралы под кривыми на рис. 3.18а, определяющие работу расширяющихся газов, оказались практически одинаковыми с точностью до 2–3%. Вид кривых на начальных стадиях процесса (см. рис. 3.18б) показывает, что при использовании в водоводе пузырькового водяного заряда можно получить большее значение максимальной мгновенной силы,

чем при использовании сплошного водяного заряда. В первом случае пиковое значение мгновенной силы, действующей на устройство, достигает 100 кН/м, тогда как во втором случае пиковое значение мгновенной силы не превышает 70 кН/м. Кроме того, в первом случае больше и продолжительность пика: 1 мс вместо 0.2 мс. Более детально этот эффект отражен на рис. 3.19.

Из рис. 3.18 видно, что на первой стадии процесса наблюдаются кратковременные пики положительной и отрицательной мгновенной силы, вызванные отражениями УВ и волны разрежения, возникающей в газовом канале, а также в стратифицированной среде и в полуограниченном объеме, причем для пузырькового заряда наибольший пик положительной мгновенной силы наблюдается в момент времени 3 мс, а для сплошного водяного заряда — в момент времени 0.5 мс, т.е. в моменты выхода УВ через правый конец водовода с выталкиванием порции вещества через него. Далее, на второй стадии, до момента времени 15–16 мс в обоих случаях идет медленное нарастание мгновенной силы, вызванное прогрессирующим ускорением вещества расширяющимся газовым пузырем из генератора УВ. Последующее уменьшение силы F (третья стадия) связано со снижением давления газов в водоводе вследствие выхода газового пузыря через правый конец водовода, а также вследствие выталкивания жидкости через левый конец водовода. В целом из рис. 3.18 видно, что в обоих случаях мгновенная сила F , действующая на устройство, почти всегда положительна в течение 50–60 мс после открытия диафрагмы, а в дальнейшем спадает до нуля (четвертая стадия). Как и следовало ожидать, интегралы под кривыми на рис. 3.18а, определяющие работу расширяющихся газов, оказались практически одинаковыми с точностью до 2-3%. Вид кривых на начальных стадиях процесса (см. рис. 3.18б) показывает, что при использовании в водоводе пузырькового водяного заряда можно получить большее значение максимальной мгновенной силы, чем при использовании сплошного водяного заряда. В первом случае пиковое значение мгновенной силы, действующей на устройство, достигает 100 кН/м, тогда как во втором случае пиковое значение мгновенной силы не превышает

70 кН/м. Кроме того, в первом случае больше и продолжительность пика: 1 мс вместо 0.2 мс. Более детально этот эффект отражен на рис. 3.19.

На рис. 3.19 показаны зависимости средней силы $\bar{F}(t)$, действующей на устройство, от времени для пяти значений $\alpha_1^0 = 1, 0.97, 0.94, 0.9$ и 0.8 (первая серия расчетов). Средняя сила определена по формуле:

$$\bar{F}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t F(t) dt$$

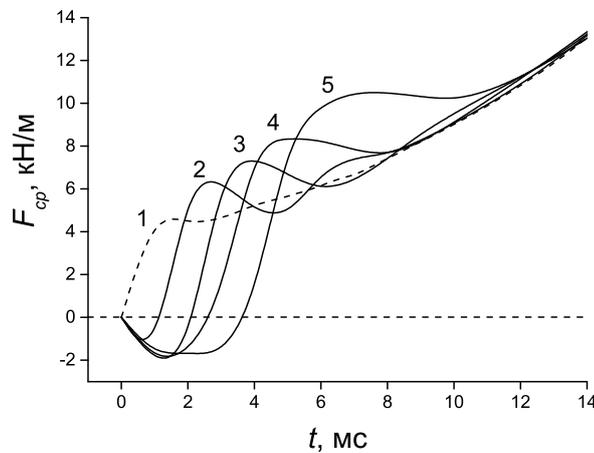


Рисунок 3.19 — Расчетные зависимости средней силы, действующей на устройство, от времени при передаче импульса от УВ к сплошному водяному заряду с $\alpha_1 = 1$ (штриховая кривая 1) и к пузырьковому водяному заряду с $\alpha_1 = 0.97$ (сплошная кривая 2), 0.94 (3), 0.9 (4) и 0.8 (5).

Из рис. 3.19 видно, что увеличение начальной объемной доли газа в пузырьковом заряде, с одной стороны, приводит к увеличению пикового значения положительной средней силы $\bar{F}(t)$ по отношению к ее пиковому значению в сплошном водяном заряде (штриховая кривая), а с другой стороны — к увеличению продолжительности пикового значения отрицательной средней силы $\bar{F}(t)$ в начале процесса, причем на кривой $\bar{F}(t)$ для сплошного водяного заряда участок с отрицательной средней силой вообще отсутствует. По истечении времени 12–14 мс средняя сила $\bar{F}(t)$ перестает зависеть от начального газосодержания водяного заряда в водоводе.

Появление отрицательных значений средней силы для пузырьковых водяных зарядов связано с тем, что скорости волн давления, проникающих в пузырьковую и в сплошную жидкость после прихода УВ из газа на границу раздела с пузырьковой жидкостью, сильно отличаются друг от друга: в пузырьковой жидкости волна давления распространяется значительно медленнее, чем в сплошной жидкости. Поэтому волна давления, бегущая по сплошной жидкости влево по водоводу, приводит к более раннему выталкиванию воды через левый конец водовода, чем через правый. Этот факт подтверждается данными на рис. 3.20.

На рис. 3.20 показаны зависимости средней силы $\bar{F}(t)$, действующей на устройство, от времени для трех вариантов заполнения водовода пузырьковой жидкостью с $\alpha_1 = 0.9$ (вторая серия расчетов). Кривая 1 соответствует варианту с заполнением только области I на рис. 3.16, кривая 2 – областей I и II, и кривая 3 – областей I, II и III. Видно, что дополнительное заполнение водовода пузырьковой жидкостью (кривые 2 и 3 на рис. 3.20) позволяет исключить начальный участок с отрицательной средней силой, обеспечивая при этом значение средней силы, превышающее соответствующее значение для сплошного водяного заряда (см. рис. 3.19) на временах до 6–7 мс.

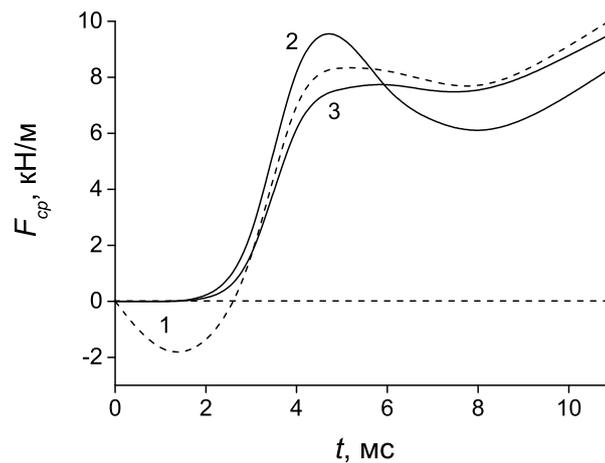


Рисунок 3.20 — Расчетные зависимости средней силы, действующей на устройство, от времени для трех вариантов заполнения водовода пузырьковой жидкостью с $\alpha_1 = 0.9$. Штриховая кривая 1 соответствует варианту с заполнением только области I на рис. 3.16, сплошная кривая 2 – областей I и II, и сплошная кривая 3 – областей I, II и III

Глава 4. Физико-математическая модель двухскоростного течения пузырьковой среды с учетом динамики колебаний газовых пузырьков

4.1 Математическая модель

В экспериментах о распространении УВ в пузырьковых средах часто наблюдается осцилляторная структура волн давления. Теоретическое доказательство существования осцилляторной УВ в пузырьковой жидкости приведено в работе [29] на основе уравнения КдВБ. Осцилляторная структура УВ связана с нелинейностью и дисперсностью пузырьковой среды. Для учета этого эффекта вместо условия равенства давлений в систему определяющих уравнений (2.44) вводится уравнение Рэлея-Ламба, связывающее давление в газовом пузырьке и давление в жидкости. Выпишем законы сохранения массы, количества движения и энергии:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \alpha_i \rho_i}{\partial t} + \nabla_k (\alpha_i \rho_i u_i^k) &= 0 \\
 \frac{\partial \alpha_i \rho_i u_i^j}{\partial t} + \nabla_k (\alpha_i \rho_i u_i^k u_i^j + p_i \alpha_i \delta^{jk}) - \hat{p}_1 \nabla_j \alpha_i &= F_{i,m}^j \\
 \frac{\partial \alpha_g \rho_g E_g}{\partial t} + \nabla_k (\alpha_g u_g^k (\rho_g E_g + p_g)) + \hat{p}_1 \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} &= Q_{g,1} \\
 \hat{p}_1 &= p_1 + \frac{1}{2} C_s(\alpha_g, \text{Re}) \rho_1 u_{1g}^2 \\
 \alpha_g + \alpha_1 &= 1
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $i = 1, g$; $m = 1, g$ и $m \neq i$. Фазовые давления p_1 и p_g связаны уравнением Рэлея-Ламба, учитывающим инерцию присоединенной массы, различие фазо-

вых давлений и вязкую диссипацию:

$$\begin{aligned} \frac{d_g R}{dt} &= \omega_b \\ \rho_1 R \frac{d_g \omega_b}{dt} + \rho_1 \frac{3}{2} \omega_b^2 &= p_g - \frac{4\mu_l \omega_b}{R} - \frac{2\sigma}{R} - p_l \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\frac{d_g}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_g^k \nabla_k$ обозначает субстанциональную производную, R — средний радиус газовых пузырьков в элементарном объеме, ω_b — скорость пульсаций газовых пузырьков, μ_l — вязкость жидкости, σ — коэффициент поверхностного натяжения. Средний радиус газовых пузырьков и объемная доля газа связаны соотношением:

$$\alpha_g = \frac{4}{3} \pi R^3 N \quad (4.3)$$

где $N = \text{const}$ — число газовых пузырьков в элементарном объеме V .

Межфазный обмен импульсом рассчитывается по формуле (3.3). Межфазный обмен энергией определим следующим образом [61]:

$$H_{g,l} = \text{Nu}_g \kappa_g \frac{A(T_l - T_g)}{d} \quad (4.4)$$

где $A = \frac{6\alpha_g}{d}$ — межфазная поверхность, содержащаяся в элементарном объеме, κ_g — теплопроводность газа, Nu_g — число Нуссельта газовой фазы имеет следующий вид [31]:

$$\text{Nu}_g = \begin{cases} \sqrt{\text{Pe}_g}, & \text{Pe}_g \geq 100 \\ 10, & \text{Pe}_g < 100 \end{cases}$$

где число Пекле газовой фазы Pe_g определяется по формуле:

$$\text{Pe}_g = 12(\gamma_g - 1) \frac{T_l R |\omega_b|}{|T_g - T_l| \nu_g}$$

Здесь $\kappa_g = \frac{\kappa_g}{\rho_g c_{p,g}}$ — температуропроводность газа, $c_{p,g}(T_g)$ — теплоемкость при постоянном давлении (заданная функция температуры), γ_g — показатель адиабаты.

Уравнения состояния:

$$\begin{aligned} \rho_1 = \rho_1^0 = \text{const}, \quad \rho_g = \frac{p_g}{(\gamma_g - 1)e_g} \\ e_g(T_g) = \int_{T_g^0}^{T_g} c_{v,g}(T)dT, \quad T_1 = T_1^0 = \text{const} \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $e_g = E_g - \frac{\mathbf{u}_g^2}{2}$ — внутренняя энергия газа, $c_{v,g}(T_g)$ — теплоемкость при постоянном объеме (заданная функция температуры [62]).

4.1.1 Корректность задачи Коши

Утверждение 4. *Задача Коши для системы уравнений (4.1)–(4.4) с уравнениями состояния (4.5) поставлена корректно (по Петровскому) в линейном приближении, если выполнены условия: $\frac{1}{2}C_s < -\alpha_g$ и $\hat{p}_1 > 0$.*

Доказательство. При доказательстве не учитываются алгебраические источники $(F_{i,m}^j = 0$ и $H_{g,1} = 0)$ в (4.1), сила поверхностного натяжения и вязкие силы, т.е. $\sigma = 0$ и $\mu_1 = 0$ в (4.2). Для удобства, радиус R переписан относительно α_g с помощью уравнения (4.3). Введем обозначение $\mathbf{w} = (\alpha_g, p_g, p_1, u_g, u_1, \rho_g, w_b)^T$ — вектор неизвестных относительно которых решается задача.

Линеаризуем систему уравнений (4.1) – (4.4) в окрестности произвольного решения $\mathbf{w}^0(t, x)$:

$$\mathbf{w}(t, x) = \mathbf{w}^0(t, x) + \mathbf{w}'(t, x) \quad (4.6)$$

Подставим (4.6) в (4.1) – (4.4), предполагая, что возмущения \mathbf{w}' по всем параметрам малы, пренебрежем величинами второго порядка малости и приведем систему к каноническому виду. Эта система уравнений примет вид:

$$T \frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial x} + C \mathbf{w}' = 0 \quad (4.7)$$

Коэффициенты матриц T , A и C в (4.7) являются функциями x и t . Рассмотрим малую область изменения x и t , в которой перечисленные коэффициенты матриц допустимо считать постоянными, тогда получим систему уравнений с постоянными коэффициентами.

Исследуем корни $\omega(\xi)$ многочлена:

$$\det |i\xi A + C - \omega T| = 0 \quad (4.8)$$

Система уравнений с постоянными коэффициентами (4.7) корректна тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re}[\omega(\xi)] \leq M \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$ (см. Определение 1). Разделим (4.8) на $i\xi$ и введем обозначение $\lambda = -\frac{i\omega}{\xi}$. Перепишем многочлен (4.8) в виде:

$$\det \left| A - \frac{iC}{\xi} - \lambda T \right| = 0 \quad (4.9)$$

Многочлен (4.9) имеет одно тривиальное вещественное собственное значение: $\lambda = u_g$, а другие его корни удовлетворяют следующему алгебраическому уравнению четвертого порядка:

$$P_1(\lambda) = P_2(\lambda)$$

Здесь многочлены $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$ имеют следующий вид:

$$P_1(\lambda) = \rho_g (\varkappa \rho_1 (\lambda - u_1)^2 \alpha_g + \frac{1}{2} C_s \varkappa \rho_1 u_{1g}^2 + \alpha_g \alpha_1 (\lambda - u_g)^2) ((\lambda - u_g)^2 - c_g^2)$$

$$P_2(\lambda) = \varkappa \rho_g (\lambda - u_g)^2 \gamma \hat{p}_I \alpha_1$$

где $c_g^2 = \frac{p_g \gamma}{\rho_g}$, $\varkappa = \frac{3\alpha_g}{(R\xi)^2 \rho_1}$. Таким образом $P_1(\lambda)$ — многочлен четвертой степени с корнями:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}^{(1)} &= u_g \pm c_g \\ \lambda_{3,4}^{(1)} &= u_g + \frac{u_{1g}(\alpha_g \pm f(\delta))}{(\delta\alpha_1 + \alpha_g)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $\delta = \frac{(R\xi)^2}{3}$, $f(\delta) = \sqrt{-\frac{1}{2}C_s\alpha_g - \delta\alpha_1 \left(\frac{1}{2}C_s + \alpha_g\right)}$. Если $\frac{1}{2}C_s < -\alpha_g$, тогда выражение под корнем $f(\delta)$ неотрицательно. При этом $P_1(\lambda) \rightarrow +\infty$, если $\lambda \rightarrow \pm\infty$. $P_2(\lambda)$ — многочлен второго порядка с корнями $\lambda_{1,2}^{(2)} = u_g$. Если $\hat{p}_I > 0$, тогда $P_2(\lambda) \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow \pm\infty$.

Из рис. 4.1 видно, если корни многочленов удовлетворяют неравенствам: $\lambda_3^{(1)} < \lambda_{1,2}^{(2)} < \lambda_4^{(1)}$, то многочлены $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$ будут иметь 4 точки пересечения, а следовательно все корни (4.9) вещественные.

Покажем, что кратный корень $\lambda_{1,2}^{(2)} = u_g$ многочлена $P_2(\lambda)$ расположен между корнями многочлена $P_1(\lambda)$ так, как это показано на рис. 4.1, т.е. $\lambda_3^{(1)} < \lambda_{1,2}^{(2)} < \lambda_4^{(1)}$. В этом случае многочлены $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$ будут иметь 4 точки пересечения, а следовательно все корни (4.9) вещественные.

Пусть $\psi_1(\delta) = \frac{(\alpha_g - f(\delta))}{(\delta\alpha_1 + \alpha_g)}$ и $\psi_2(\delta) = \frac{(\alpha_g + f(\delta))}{(\delta\alpha_1 + \alpha_g)}$. Если $u_{1g} > 0$, тогда достаточно показать $u_g + u_{1g}\psi_1(\delta) < u_g < u_g + u_{1g}\psi_2(\delta)$. По определению $\psi_2(\delta) > 0$. Неравенство $\psi_1(\delta) < 0$ выполняется, если $\frac{1}{2}C_s < -\alpha_g$. Случай $u_{1g} < 0$ может быть рассмотрен аналогичным образом с той разницей, что $u_g + u_{1g}\psi_2(\delta) < u_g < u_g + u_{1g}\psi_1(\delta)$.

Так как все корни (4.9) вещественные, следовательно $\text{Re}[\omega(\xi)] = 0 \quad \forall \xi$.

□

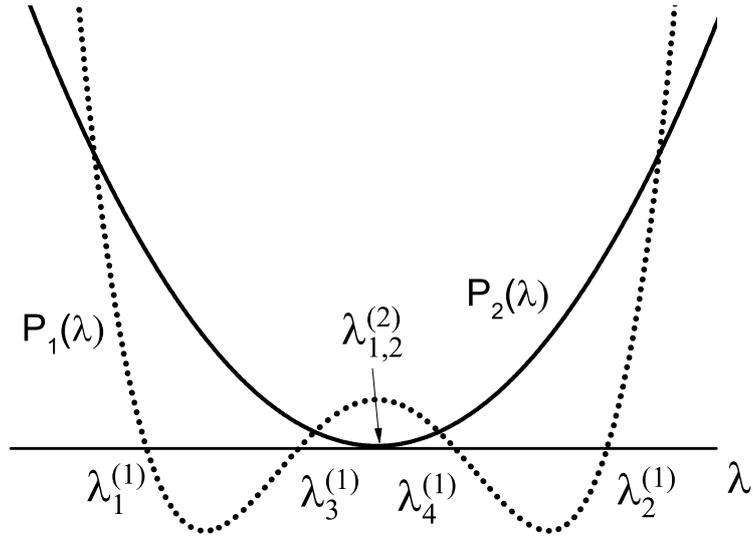


Рисунок 4.1 — Схематическое расположение корней многочленов $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$

4.1.2 Согласованность модели со вторым законом термодинамики

Одно из важных требований к моделям, описывающим двухфазные течения — это их согласованность со вторым законом термодинамики. Согласно второму закону термодинамики, полное производство энтропии в замкнутой адиабатической термодинамической системе должно быть неотрицательным. Локальное производство энтропии для системы определяющих уравнений (4.1)–(4.4) имеет следующий вид:

$$\sum_i \alpha_i \rho_i \frac{d_i s_i}{dt} = \sum_i \frac{1}{T_i} \left[Q_{i,m} - F_{i,m}^j u_{i,j} - \frac{d_i \alpha_i}{dt} (\hat{p}_1 - p_i) \right] \quad (4.11)$$

где s_i — энтропия i -ой фазы, $\frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i^k \nabla_k$ обозначает субстанциональную производную.

Для проверки неравенства производства энтропии проведен численный эксперимент. Рассмотрим УВ, распространяющуюся в трубке с адиабатически-

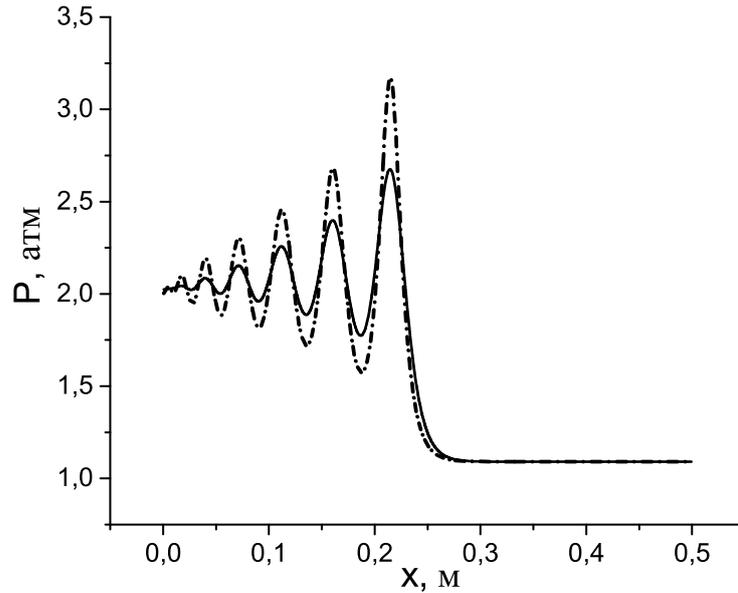


Рисунок 4.2 — Начальное распределение давления в газе (штрихпунктирная линия) и жидкости (сплошная линия)

ми торцевыми стенками, заполненной пузырьковой средой. Начальные распределения давлений для обеих фаз показаны на рис. 4.2. Эти распределения были взяты из численных решений, обсуждаемых ниже. В такой системе неравенство $\frac{dS(t)}{dt} \geq 0$ должно выполняться для всех $t \geq 0$, где $\frac{dS(t)}{dt}$ — полное производное энтропии в системе:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \int_0^L \sum_i \alpha_i \rho_i \frac{d_i s_i}{dt} dx \quad (4.12)$$

где L — длина трубки. Рис. 4.3 показывает производство энтропии в системе с течением времени: она положительна, поэтому полная энтропия системы только растёт со временем. Это означает, что система уравнений (4.1)—(4.4) согласована со вторым законом термодинамики.

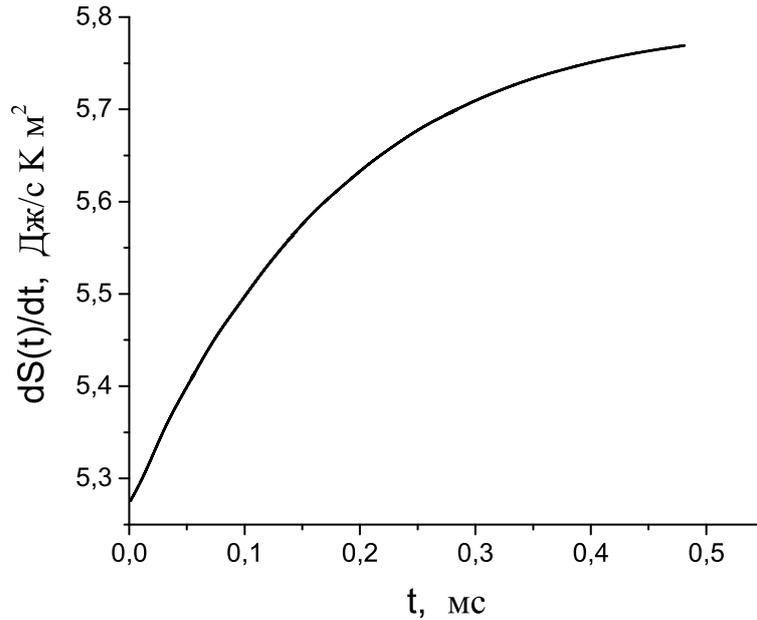


Рисунок 4.3 — Полное производство энтропии в замкнутой системе

4.2 Численный метод

Алгоритм численного решения системы уравнений (4.1) – (4.4) основан на методе предложенном в [23], но модифицированном для двухскоростной модели. Основная идея метода заключается в нахождении фазовых давлений p_i ($i = 1, g$), обеспечивающих равенство функций $U_i(p_i) = \bar{U}_i(p_i)$, где $U_i \equiv \alpha_i \rho_i$ рассчитывается на основе законов сохранения массы, энергии и количества движения (4.1), а функция $\bar{U}_i \equiv \bar{\alpha}_i \rho_i$ рассчитывается на основе уравнения Рэлея-Ламба (4.2), так как $\bar{\alpha}_i$ получается из (4.3) по R , рассчитаному из (4.2).

Система уравнений (4.1)–(4.3) дискретизировалась на равномерной «разнесенной» сетке в одномерном случае методом ICE (Implicit Continuous Eulerian) [65] первого порядка по времени и пространству. Переменные p_i , α_i , E_i , R , U_i , \bar{U}_i и $W_i \equiv \alpha_i \rho_i E_i$ определялись в центрах расчетных ячеек, а u_i с переменной $V_i \equiv \alpha_i \rho_i u_i$ — на гранях ячеек. Закон сохранения массы дискретизировался следующим образом:

$$U_{i,k}^{n+1} = U_{i,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(V_{i,k+\frac{1}{2}}^{n+1} - V_{i,k-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) \quad (4.13)$$

где Δt — шаг интегрирования по времени, Δx — длина расчетной ячейки, индекс k обозначает центр ячейки, а индекс $k \pm \frac{1}{2}$ — грань ячейки.

Неявные потоки массы $V_{i,k\pm\frac{1}{2}}^{n+1}$ рассчитываются из закона сохранения количества движения неявно по давлению:

$$\begin{aligned} V_{i,k+\frac{1}{2}}^{n+1} = & V_{i,k+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(\alpha_i^n p_i^{n+1})_{k+1} - (\alpha_i^n p_i^{n+1})_k \right] \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(\alpha_i \rho_i u_i^2)_{k+1}^n - (\alpha_i \rho_i u_i^2)_k^n \right] - \frac{\Delta t}{\Delta x} \hat{p}_{1,k+\frac{1}{2}}^n \left(\alpha_{i,k+1}^n - \alpha_{i,k}^n \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

где центральная разность конвективных слагаемых оценивается методом направленной разности. Например, если $(u_{i,k+\frac{1}{2}} + u_{i,k-\frac{1}{2}}) > 0$ тогда $(u_i^2)_k = u_{i,k-\frac{1}{2}}^2$.

Закон сохранения энергии дискретизируется следующим образом:

$$\begin{aligned} W_{i,k}^{n+1} = & W_{i,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(\alpha_i^n p_i^{n+1} u_i^n)_{k+\frac{1}{2}} - (\alpha_i^n p_i^{n+1} u_i^n)_{k-\frac{1}{2}} \right] \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(\alpha_i \rho_i u_i E_i)_{k+\frac{1}{2}}^n - (\alpha_i \rho_i u_i E_i)_{k-\frac{1}{2}}^n \right] - \hat{p}_{1,k}^n \left(\alpha_{i,k}^{n+1} - \alpha_{i,k}^n \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

где слагаемые, определенные на гранях ячейки, аппроксимируются методом направленной разности. Например, если $u_{i,k+\frac{1}{2}} \geq 0$, тогда $(\zeta_i)_{k+\frac{1}{2}} = \zeta_{i,k}$, где $\zeta_i = \rho_i \alpha_i E_i$ или $\alpha_i p_i$.

Уравнение (4.2) дискретизируется неявно по давлению (газа и жидкости) следующим образом:

$$\begin{aligned} R_k^{n+1} = & R_k^n - \Delta t \left(u_g \frac{\partial R}{\partial x} \right)_k^n + \Delta t w_{b,k}^{n+1} \\ w_{b,k}^{n+1} = & w_{b,k}^n - \Delta t \left(u_g \frac{\partial w_b}{\partial x} \right)_k^n - 1.5 \Delta t \frac{(w_{b,k}^n)^2}{R_k^n} - \Delta t \frac{4\mu_1 w_{b,k}^n}{\rho_1 (R_k^n)^2} \\ & + \Delta t \frac{p_{g,k}^{n+1} - p_{1,k}^{n+1} - 2\sigma/R_k^n}{\rho_1 R_k^n} \end{aligned} \quad (4.16)$$

где конвективные слагаемые также аппроксимируются стандартным методом направленной разности. Полученный по (4.16) R_k^{n+1} подставляется в (4.3):

$$\bar{\alpha}_{g,k}^{n+1} = \frac{4}{3}\pi \left(R_k^{n+1}\right)^3 N \quad (4.17)$$

Необходимо обеспечить, чтобы $\Psi_{i,k}^{n+1} \equiv \bar{\alpha}_{i,k}^{n+1} \rho_i^{n+1} - U_i^{n+1} = 0$. Предполагается, что $\Psi_{i,k}^{n+1}$ зависит только от параметров k -ой ячейки, тогда может быть получена система двух нелинейных уравнений для k -ой ячейки:

$$\begin{aligned} U_{1,k}^{n+1}(p_{1,k}^{n+1}) - (1 - \bar{\alpha}_{g,k}^{n+1}(p_{1,k}^{n+1}, p_{g,k}^{n+1}))\rho_1 &= 0 \\ U_{g,k}^{n+1}(p_{g,k}^{n+1}) - \bar{\alpha}_{g,k}^{n+1}(p_{1,k}^{n+1}, p_{g,k}^{n+1})\rho_g(p_{g,k}^{n+1}, e_{g,k}^{n+1}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Нелинейная система уравнений (4.18) решается методом Ньютона:

$$\left. \frac{\partial \Psi_i}{\partial p_{1,k}^{n+1}} \right|^s \left(p_{1,k}^{s+1} - p_{1,k}^s \right) + \left. \frac{\partial \Psi_i}{\partial p_{g,k}^{n+1}} \right|^s \left(p_{g,k}^{s+1} - p_{g,k}^s \right) = -\Psi_{i,k}^s \quad (4.19)$$

где s обозначает нелинейные итерации, $i = 1, g$. Выпишем явно производные для метода Ньютона:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial p_{1,k}^{n+1}} \right|^s &= -2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (1 - \alpha_{g,k}^n) - 4\pi N (R_k^s)^2 \frac{\Delta t^2}{R_k^n} \\ \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial p_{g,k}^{n+1}} \right|^s &= 4\pi N (R_k^s)^2 \frac{\Delta t^2}{R_k^n} \\ \left. \frac{\partial \Psi_g}{\partial p_{g,k}^{n+1}} \right|^s &= -2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \alpha_{g,k}^n - \left(\frac{\rho_{g,k}^s}{\rho_{1,k}} 4\pi N (R_k^s)^2 \frac{\Delta t^2}{R_k^n} + \bar{\alpha}_{g,k}^s \frac{\partial \rho_{g,k}}{\partial p_{g,k}} \right) \\ \left. \frac{\partial \Psi_g}{\partial p_{1,k}^{n+1}} \right|^s &= 4\pi N (R_k^s)^2 \frac{\Delta t^2}{R_k^n} \frac{\rho_{g,k}^s}{\rho_{1,k}} \end{aligned}$$

Для решения уравнений (4.1) – (4.4) реализуется следующий алгоритм:

1. Потоки импульса $V_{i,k \pm \frac{1}{2}}^{n+1}$ оцениваются из уравнения (4.14).

2. Члены $U_{i,k}^{n+1}$ и $W_{i,k}^{n+1}$ рассчитываются соответственно по формулам (4.13) и (4.15).
3. Радиус R_k^{n+1} оценивается из соотношения (4.16), объемная доля газа $\bar{\alpha}_{g,k}^{n+1}$ из (4.17).
4. Нелинейная система уравнений (4.18) решается методом Ньютона относительно фазовых давлений для каждой k -ой ячейки.
5. Относительная ошибка оценивается с использованием равномерной нормы $\varepsilon = \max_k \left| \frac{p_{i,k}^{s+1} - p_{i,k}^s}{p_{i,k}^s} \right|$
6. Если $\varepsilon < 10^{-4}$, тогда алгоритм сошелся.
7. Переменные на s -ой итерации обновляются с $(s + 1)$ -ой итерации.
8. Алгоритм 1 – 7 повторяется до тех пор, пока не сойдется.

Для полученных результатов размер сетки составлял $\Delta x \approx 2.5$ мм, а временной шаг оценивался следующим образом:

$$\Delta t = \frac{\text{cfl} \cdot \Delta x}{c}$$

где $c = \sqrt{\frac{p_{\text{КВД}}}{\alpha_1^0 \alpha_g^0 \rho_l}}$ — изотермическая скорость звука в пузырьковой среде [23], число cfl задавалось равным 0.05, $p_{\text{КВД}}$ — давление в КВД.

4.3 Сравнение с экспериментальными данными

Для проверки предсказательной способности математической модели (4.1)–(4.4) использовались результаты собственных экспериментальных данных (см. эксперимент 3.4), а также результаты экспериментов [23] и [25].

В работе [25] измерялась средняя скорость УВ на вертикальной ударной трубе. КВД и КНД заполняли воздухом при нормальной температуре и под давлением 4 и 1 атм соответственно, столб воды в ИС насыщали воздушными пу-

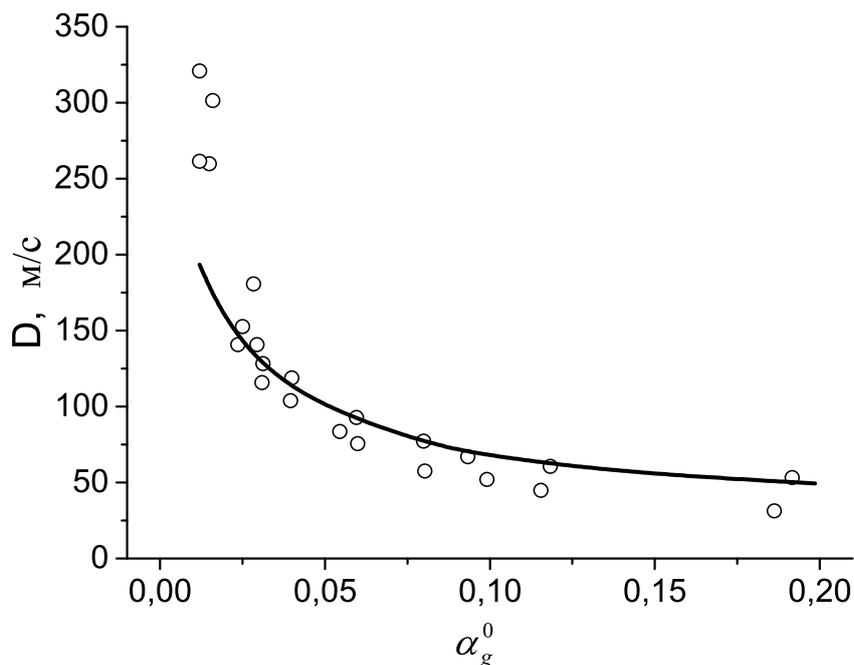


Рисунок 4.4 — Рассчитанная (кривая) и измеренная [25](символы) зависимость скорости УВ, распространяющейся в пузырьковой среде, от начального газосодержания

зырьками со средним начальным диаметром $d \approx 2$ мм и начальным объемным газосодержанием от 0.01 до 0.2. Скорость УВ рассчитывалась по формуле (3.9) на основе датчиков давления, установленных на расстоянии 950 и 1750 мм (от контактной поверхности). На рис. 4.4 приведено сравнение результатов численных расчетов с экспериментальными данными в виде зависимости скорости УВ в пузырьковой среде от начального газосодержания α_g^0 . Из рис. 4.4 видно, что измеренные экспериментально и рассчитанные данные хорошо согласуются при $\alpha_g^0 > 0.02$, тогда как при меньших значениях наблюдается большое расхождение результатов. Последнее, по-видимому, связано с нарушением допущения о «сплошности» дисперсного компонента пузырьковой среды при малых начальных газосодержаниях α_g^0 : в таких условиях количество пузырьков в воде относительно мало и они удалены друг от друга на относительно большие расстояния, так что УВ фактически взаимодействует с одиночными пузырьками. Также видно, что скорость УВ, распространяющейся в пузырьковой среде, ва-

рывается в диапазоне от 50 до 200 м/с, что в значительной степени меньше, чем скорость звука в воде (1500 м/с) и воздухе (340 м/с).

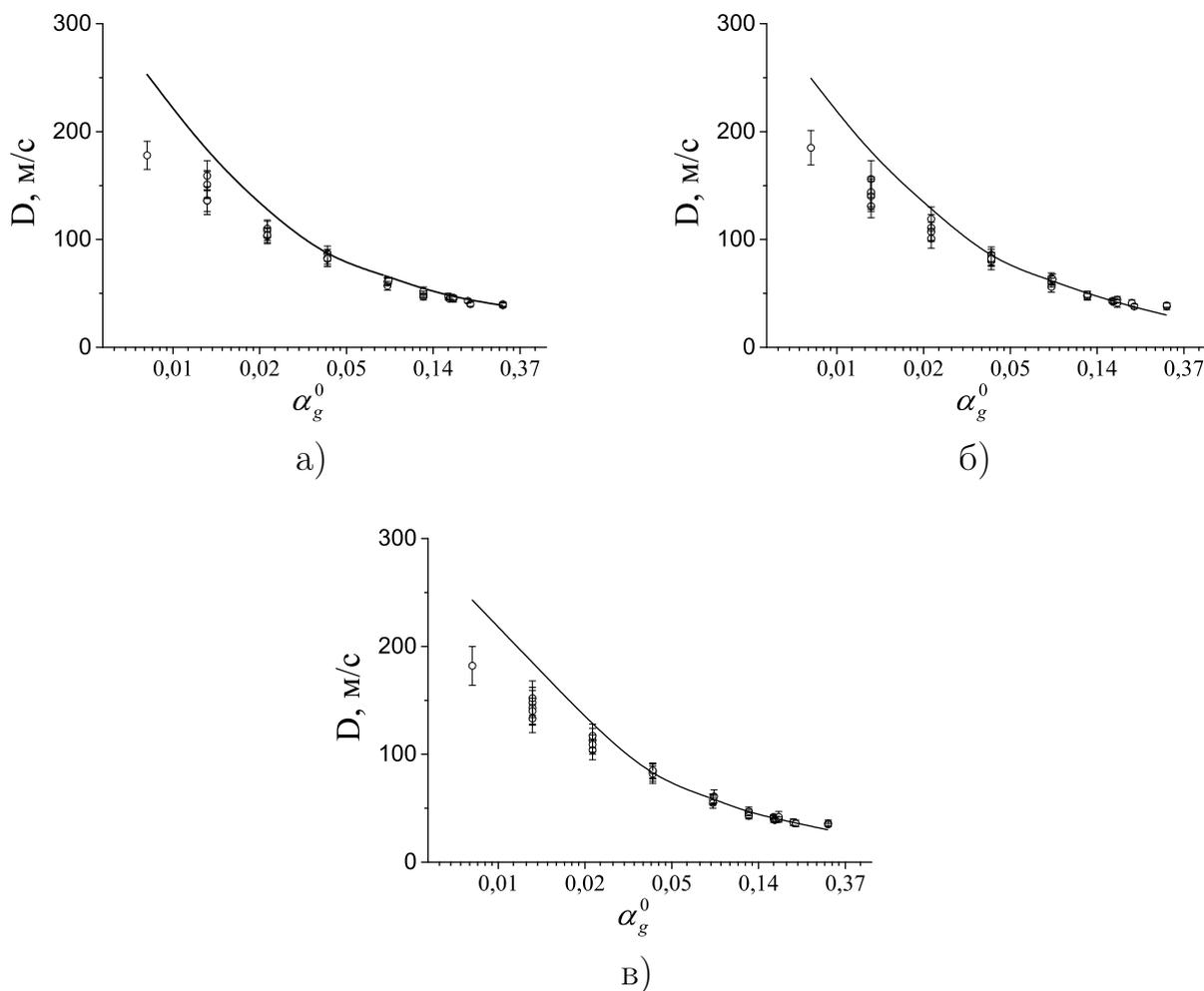


Рисунок 4.5 — Рассчитанные (кривые) и измеренные в эксперименте 3.4 (символы с ошибками) зависимости скорости УВ, распространяющейся в пузырьковой среде, от начального газосодержания на измерительных секциях а) P4 — P5 б) P5 — P6 в) P6 — P7 (см. таблицы 3.1 и 3.2)

На рис. 4.5 представлены рассчитанные (кривые) и измеренные в эксперименте 3.4 (символы с ошибками) данные в виде зависимости скорости УВ в пузырьковой среде от начального газосодержания для «слабых» УВ. Скорость УВ рассчитывается по формуле (3.9) на основе датчиков давления (см. таблицы 3.1 и 3.2). Различия рассчитанных и экспериментально измеренных скоростей УВ лежат в рамках погрешности эксперимента при $\alpha_g^0 > 0.01$. Как и в предыдущем эксперименте при малых газосодержаниях наблюдается значительное

расхождение с экспериментом. На рис. 4.5а—4.5в видно, что УВ, распространяющаяся в пузырьковой среде, почти не затухает по длине трубы (длина ИС ≈ 2 м).

В эксперименте 3.4 также измерялась скорость контактной поверхности за УВ. Средняя скорость контактной поверхности, \bar{V}_{cs} , рассчитывается на основе $x - t$ диаграмм (см. рис. 3.12) по формуле (3.11). На рис. 4.6а представлены результаты сравнения численных расчетов с экспериментальными данными в виде зависимости средней скорости контактной поверхности от начального газосодержания для «слабых» УВ.

Средняя скорость индивидуального газового пузырька, \bar{V}_g , за УВ определяется по $x - t$ диаграмме (см. рис. 3.10) следующим образом:

$$\bar{V}_g = \frac{S}{\tau} \quad (4.20)$$

где $\tau = 3$ мс и S — перемещение газового пузырька за время τ . Заданный временной интервал (3 мс) был выбран для того, чтобы избежать влияния волны разрежения на движение пузырька.

Рассчитанная скорость газового пузырька была получена путем добавления в модель лагранжевой частицы, которая движется со скоростью газа, и отслеживания ее движения. Среднее значение расчетной скорости пузырька было также получено по формуле (4.20).

На рис. 4.6б представлены результаты сравнения численных расчетов с экспериментальными данными в виде зависимости средней скорости газового пузырька от начального газосодержания. Начальные данные выбранных газовых пузырьков в эксперименте 3.4 представлены в таблице 4.1, где x_b^0 — начальное положение газового пузырька, рассчитанное от контактной поверхности, $p_{квд}$ — давление в КВД, D_g — скорость УВ в КНД. Численные расчеты были проведены при условиях близких к экспериментальным, а именно $x_b^{0,calc} = 199$ мм, $p_{квд}^{calc} = 0.283$ МПа и $D_g^{calc} = 426$ м/с.

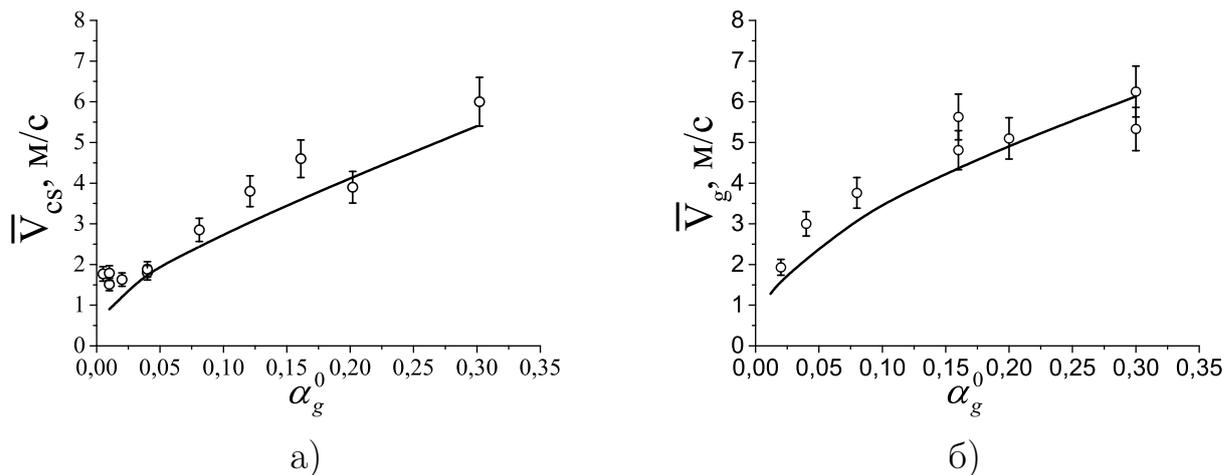


Рисунок 4.6 — Рассчитанные (кривые) и измеренные в эксперименте 3.4 (символы с ошибками) зависимости а) средней скорости контактной поверхности от начального газосодержания б) средней скорости газового пузырька от начального газосодержания

Таблица 4.1

Начальные данные индивидуальных газовых пузырьков в эксперименте 3.4

α_g^0	x_b^0 , мм	$p_{квд}$, МПа	D_g , м/с
0.01	135	0.265	420
0.02	138	0.262	407
0.04	181	0.291	432
0.08	160	0.3	410
0.16(1)	100	0.309	421
0.16(2)	116	0.309	421
0.2	109	0.291	384
0.3 (1)	33	0.273	414
0.3 (2)	99	0.273	414

Плотность воды и маркированной полиэтиленовой нитки, используемой в эксперименте 3.4, приблизительно одинаковые. Таким образом, скорость жидкости должна быть близка к скорости маркированной нитки при малых газосодержаниях. На рис. 4.7а – 4.7в представлены результаты сравнения численно рассчитанных скоростей жидкости ($v - t$ диаграммы лагранжевой частицы, перемещающейся со скоростью жидкости) и экспериментально измеренных скоростей маркированной нитки ($v - t$ диаграммы), расположенных в начальный

момент времени на расстоянии $x^0 \approx 270$ мм от контактной поверхности. Видно, что рассчитанные и экспериментальные данные хорошо согласуются.

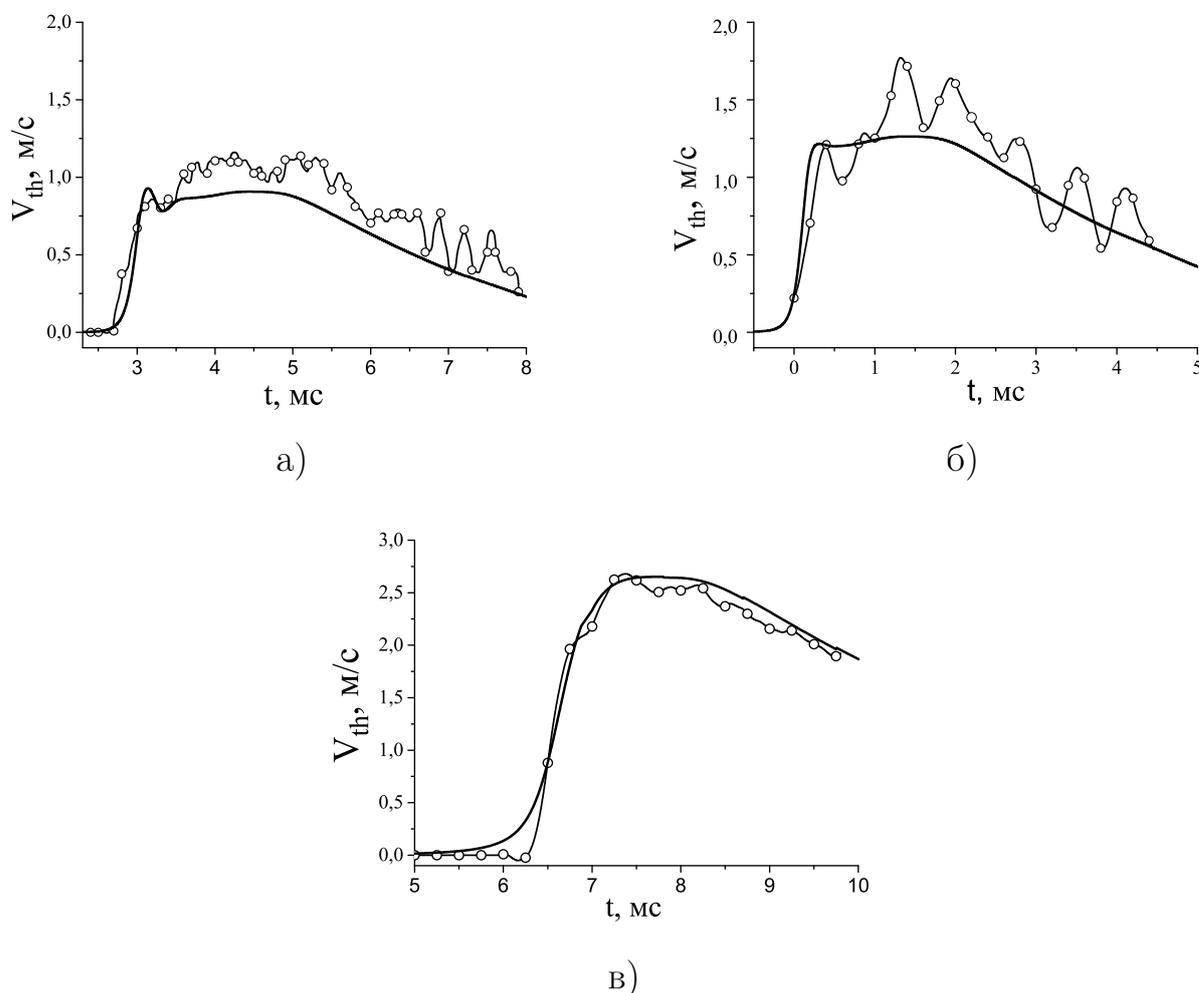


Рисунок 4.7 — Рассчитанные (кривые) и измеренные в эксперименте 3.4 (символы с ошибками) $v - t$ диаграммы движения маркированной нитки с начальным газосодержанием а) 0.01, б) 0.02 и в) 0.12 соответственно

На рис. 4.8а – 4.8в представлено сравнение рассчитанных и измеренных экспериментально (эксперимент 3.4) профилей давления в УВ, распространяющихся в пузырьковой жидкости. Видно, что численные расчеты воспроизводят средние профили давления. Осцилляции в экспериментальных данных могут возникать по причине существования поперечных волн давления в канале, т.к. в эксперименте сложно добиться плоской падающей УВ.

В [23; 24] численно и экспериментально исследовали структуру УВ. Эксперименты проводились в вертикальной ударной трубе, состоящей из

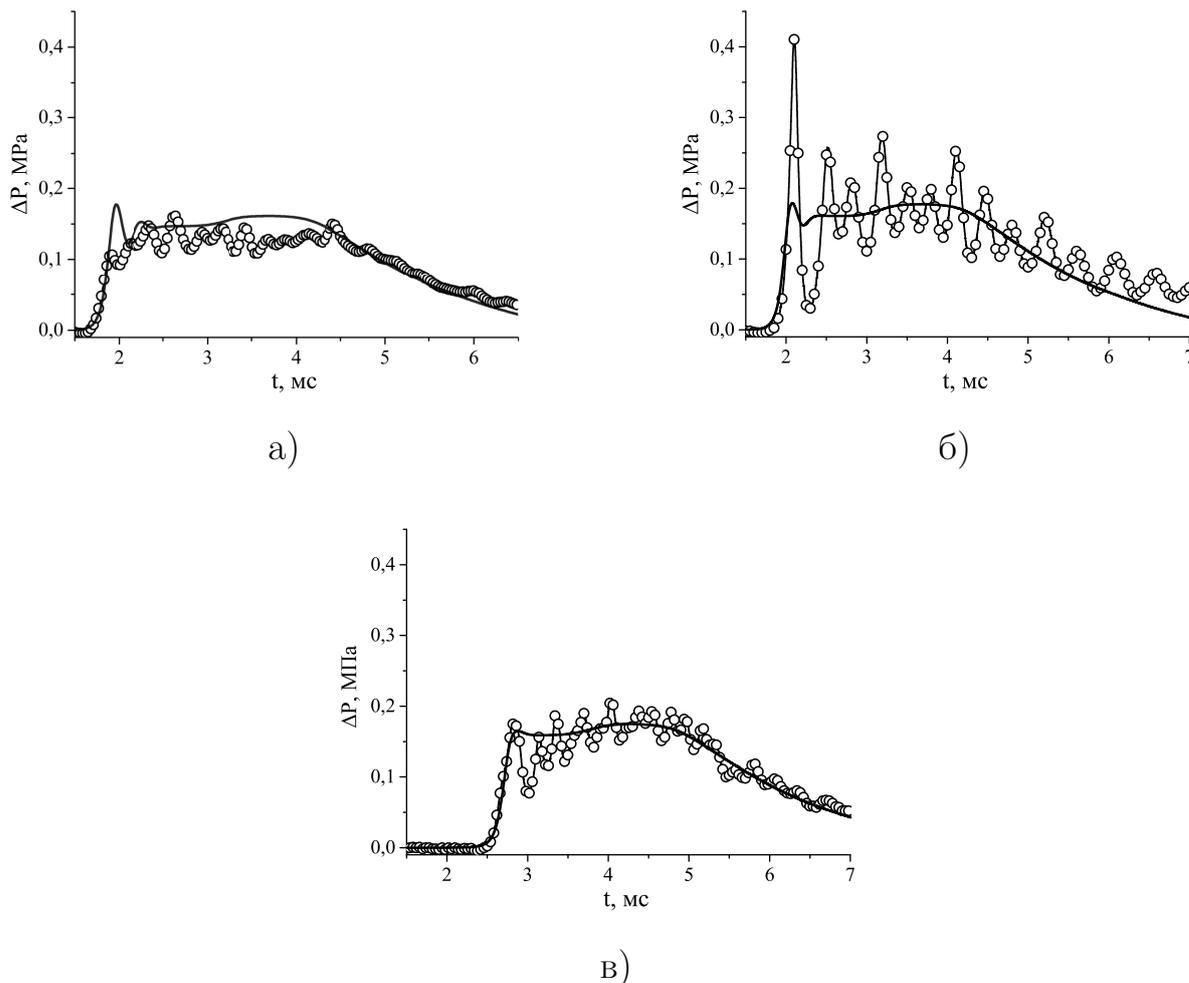


Рисунок 4.8 — Сравнение численных результатов (сплошные линии) с экспериментальными данными (эксперимент 3.4, символы): профили давления в УВ с начальным газосодержанием и средним размером пузырьков
 а) $\alpha_g = 0.005$, $d = 2.5$ мм б) $\alpha_g = 0.01$, $d = 3.5$ мм и в) $\alpha_g = 0.02$, $d = 2.5$ мм

КВД (1600 мм), КНД (1800 мм) и ИС (2000 мм). ИС заполнена силиконовым маслом (Shinetsu Chemical Co. KF96-50) с пузырьками азота или шестифтористой серы при нормальных условиях. Вязкость несущей жидкости ($50 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}$) достаточно высокая, чтобы пузырьки сохраняли сферическую форму во время всего эксперимента. Низкое давление насыщения несущей жидкости позволяет предполагать, что фазовые переходы отсутствуют. Условия при которых проводились эксперименты представлены в таблице 4.2, где δP — амплитуда падающей УВ, z — расстояние от КП на котором установлен датчик давления. Эксперименты из [24] (Case 3 и 4) имеют более регулярную структуру

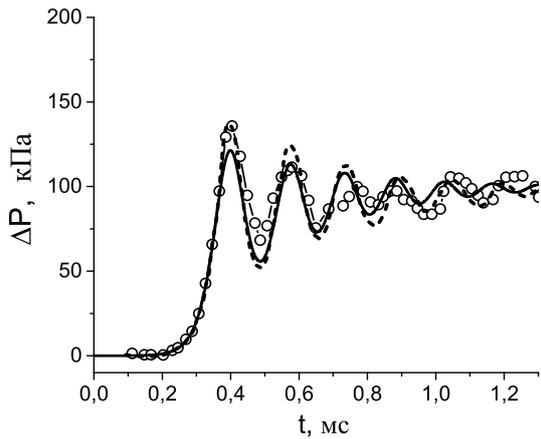
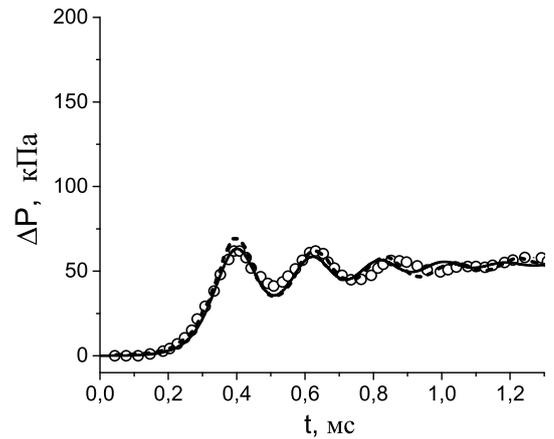
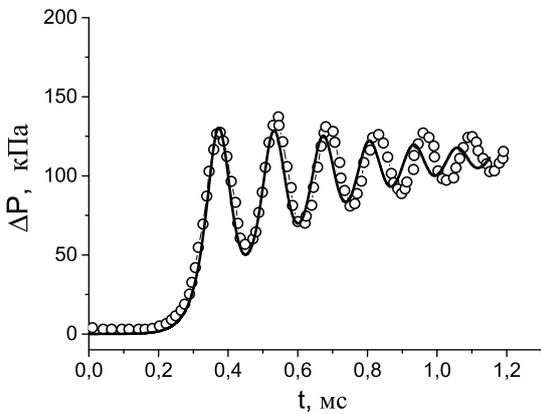
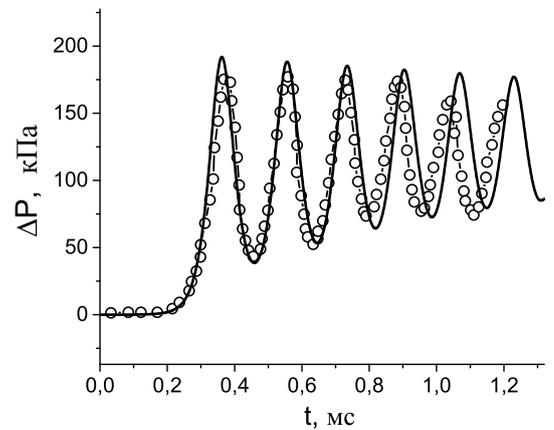
а) Case 1, частота ≈ 6.25 кГц,б) Case 2, частота ≈ 4.91 кГцв) Case 3, частота ≈ 6.56 кГцг) Case 4, частота ≈ 5.81 кГц

Рисунок 4.9 — Сравнение численных результатов (сплошные линии) с экспериментальными данными (символы): профили давления в УВ а)—б) эксперимент [23] и в)—г) эксперимент [24]; штриховые линии — результаты численных расчетов, полученных на основе математической модели из [23]

УВ по сравнению с экспериментами из [23] (см. рис. 4.9). Это связано с тем, что в [24] авторы добивались в эксперименте равномерного распределения газовых пузырьков в объеме. На рис. 4.9 представлено сравнение результатов численных расчетов с экспериментальными данными [23; 24], а также с расчетами из работы [23] (синяя сплошная линия). Из рис. 4.9 видно, что численные расчеты хорошо согласуются с экспериментом. Частота колебаний давления в УВ для численных экспериментов составляет Case 1 ≈ 6.25 кГц и Case 2 ≈ 4.91 кГц, т.е. чем больше амплитуда падающей УВ, тем выше частота колебаний.

Таблица 4.2

Экспериментальные данные [23] и [24]

Case	α_g^0	R^0 , мм	P^0 , кПа	δP , кПа	z , м	пузырьки газа
1	0.0015	0.601	101.2	101.2	0.311	N ₂
2	0.0015	0.591	100.1	55.6	0.314	N ₂
3	0.0018	0.582	109.1	115	0.912	N ₂
4	0.0024	0.613	112.9	130.6	1.462	SF ₆

Отметим, что в работе [32] предложена модель двухскоростного двухфазного течения, которая основывается на законах сохранения массы, количества движения и энтропии. Для проверки предсказательной способности этой модели в работе [32] также проводятся сравнения численных результатов и экспериментальных данных [24]. Для этой цели в работе [32] предполагается, что фазы приходят в равновесие моментально, т.е. алгебраические источники, описывающие межфазный обмен энергией и импульсом устанавливаются очень большими. Если мы делаем такие же предположения, мы получаем результаты представленные на рис. 4.9г.

Глава 5. Физико-математическая модель двухскоростного течения пузырьковой среды с учетом динамики колебаний реакционноспособных газовых пузырьков

5.1 Математическая модель

Выпишем систему уравнений, описывающую пузырьковую детонацию, на основе двухскоростных двухфазных (жидкость — газовые пузырьки) уравнений (2.44), где газовая фаза представляет собой гомогенный многокомпонентный газ. В отличие от гетерогенных сред, когда фаза занимает лишь часть объема, компонент гомогенной смеси может рассматриваться как занимающий весь объем смеси. Геометрическому центру элементарного объема V (см. рис. 2.1) отнесем также массовую концентрацию l -го компонента газа $Y_l = M_l/M$, где M и M_l — масса газовой смеси и масса l -го компонента газовой смеси соответственно, содержащихся в объеме V .

Массовые доли газа связаны соотношением:

$$\sum_{l=1}^L Y_l = 1 \quad (5.1)$$

где L — общее число компонентов.

Газ в пузырьках подчиняется уравнению состояния идеального газа:

$$\rho_g = \frac{p_g W}{RT_g} \quad (5.2)$$

где R — универсальная газовая постоянная, средняя молекулярная масса смеси W определяется из соотношения:

$$\frac{1}{W} = \sum_{l=1}^L \frac{Y_l}{W_l}$$

где W_l — молекулярная масса l -го компонента газовой смеси.

Жидкость рассматривается несжимаемой и изотермической, т.е.:

$$\begin{aligned} \rho_l &= \text{const} \\ T_l &= \text{const} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Выпишем законы сохранения массы, компонент газа, количества движения и энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_i \rho_i}{\partial t} + \nabla_k (\alpha_i \rho_i u_i^k) &= 0 \\ \frac{\partial \alpha_i \rho_i u_i^j}{\partial t} + \nabla_k (\alpha_i \rho_i u_i^k u_i^j + p_i \alpha_i \delta^{jk}) - \hat{p}_l \nabla_j \alpha_i &= F_i^j \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g Y_l}{\partial t} + \nabla_k (\alpha_g \rho_g u_g^k Y_l) &= \alpha_g \dot{\omega}_l \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g E_g}{\partial t} + \nabla_k (\alpha_g u_g^k (\rho_g E_g + p_g)) + \hat{p}_l \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} &= \alpha_g \dot{\omega} + H_g \\ \hat{p}_l &= p_l + \frac{1}{2} C_s(\alpha_g, \text{Re}) \rho_l \mathbf{u}_{lg}^2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $i = 1, g$ и $l = \overline{1, L-1}$. Функция $C_s(\alpha_g, \text{Re})$ определена следующим образом:

$$C_s(\alpha_g, \text{Re}) = \beta(\text{Re}) C_{dp}^{\text{coll}}(\alpha_g, \text{Re}) \quad (5.5)$$

где C_{dp}^{coll} — коэффициент сопротивления «формы», учитывающий коллективные эффекты:

$$C_{dp}^{\text{coll}}(\alpha_g, \text{Re}) = C_{dp}(\text{Re}) (1 - \alpha_g)^{-2.7} \quad (5.6)$$

Коэффициент $\beta(\text{Re})$ в (5.5) и функция $C_{\text{др}}(\text{Re})$ в (5.6) линейно интерполируются по значениям, представленным в таблице 2.1.

Алгебраические источники \mathbf{F}_i и H_g описывают межфазный обмен импульсом и энергией (5.12), $\dot{\omega}_i$, $\dot{\omega}$ — химические источники в газе (5.9) для l -го компонента и скорость энерговыделения в результате химических реакций (5.11), соответственно. Система уравнений (5.4) дополняется соотношением, связывающим фазовые давления (5.7).

Фазовые давления p_l и p_g связаны уравнением Рэлея-Ламба, описывающим пульсации газового пузырька в жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{d_g R}{dt} &= \omega_b \\ \rho_l R \frac{d_g \omega_b}{dt} + \rho_l \frac{3}{2} \omega_b^2 &= p_g - p_l - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu_l \omega_b}{R} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Средний радиус газовых пузырьков и объемная доля газа связаны соотношением:

$$\alpha_g = \frac{4}{3} \pi R^3 N \quad (5.8)$$

где $N = \text{const}$ — число газовых пузырьков в элементарном объеме V .

Химические источники в газе $\dot{\omega}_i$ определяются стандартным образом [68]:

$$\dot{\omega}_i = W_i \sum_{k=1}^M (\nu_{i,k}'' - \nu_{i,k}') f_k \quad (5.9)$$

Здесь M — полное число химических реакций, $\nu_{i,k}''$ ($\nu_{i,k}'$) — стехиометрический коэффициент компонента i , являющегося продуктом (реагентом) в k -ой реакции,

$$f_k = A_k T_g^{\eta_k} e^{-\frac{E_k}{RT_g}} \prod_{i=1}^L \left(\frac{Y_i \rho_g}{W_i} \right)^{m_{i,k}} \quad (5.10)$$

где A_k и η_k — константы k -ой реакции, E_k — энергия активации k -ой реакции и, если не отмечено отдельно, то $m_{i,k} = \nu_{i,k}'$.

Скорость энерговыделения в результате химических реакций в газе определяется как:

$$\dot{\omega} = - \sum_{i=1}^L \Delta e_{g,i}^0 \dot{\omega}_i \quad (5.11)$$

где $\Delta e_{g,i}^0$ — стандартные энергии образования химических компонентов.

Соотношения описывающие межфазный обмен энергией и импульсом имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} F_g^j = -F_1^j &= C_d(\text{Re}) \frac{A \rho_1 (u_1^j - u_g^j) |u_1^j - u_g^j|}{8} \\ H_g &= \text{Nu}_g \lambda_g \frac{A(T_1 - T_g)}{d} \end{aligned} \quad (5.12)$$

где C_d — гидродинамический коэффициент сопротивления единичного газового пузырька.

Для относительно малых чисел Рейнольдса ($\text{Re} < 100$) газовый пузырек имеет сферическую форму, а коэффициент сопротивления совпадает с коэффициентом сопротивления твердой сферы. При умеренных числах Рейнольдса начинает сказываться деформация газового пузырька, который принимает форму эллипсоида вращения, сплющенного в направлении обтекания. Диапазон чисел Рейнольдса такого пузырька, вообще говоря, зависит от типа несущей жидкости. В представленных расчетах C_d для эллипсоидного режима аппроксимировался по значениям, измеренным экспериментально для воды [63]. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса газовый пузырек принимает форму сегмента, коэффициент сопротивления которой не зависит от его размера и равен постоянному значению $C_d = 2.6$. Отметим, что деформация пузырька учтена только в коэффициенте C_d , а эффективная межфазная поверхность в (5.12) для простоты рассчитывается в предположении, что пузырек имеет сферическую форму.

Число Нуссельта газовой фазы, Nu_g , определяется следующим образом [61]:

$$\text{Nu}_g = \begin{cases} \sqrt{\text{Pe}_g}, & \text{Pe}_g \geq 100 \\ 10, & \text{Pe}_g < 100 \end{cases} \quad (5.13)$$

$\text{Pe}_g = 12(\gamma_g - 1) \frac{T_1 R |w_b|}{|T_g - T_1| \kappa_g}$, где $\kappa_g = \frac{\lambda_g}{\rho_g c_{p,g}}$ — температуропроводность газа, γ_g , $c_{p,g}$ и λ_g — показатель адиабаты, теплоемкость при постоянном давлении и теплопроводность газа соответственно и задаются в виде известных функций от температуры газа T_g [62].

Температура несущей жидкости $T_1 = T_1^0 = \text{const}$, а T_g определяется из калорического уравнения состояния:

$$e_g = \int_{T_g^0}^{T_g} c_{v,g}(T_g) dT_g$$

где $c_{v,g}(T_g)$ — теплоемкость газа при постоянном объеме [62].

Применимость системы уравнений (5.4)–(5.13) для моделирования распространения УВ в жидкости с реакционноспособными пузырьками проверяется на экспериментах [35; 38], в которых в качестве инертной жидкости используется вода или смесь воды с глицерином, а в качестве активного газа используется ацетилено-кислородная смесь.

5.1.1 Кинетика в газовом пузырьке

Для моделирования химических превращений ацетилено-кислородной смеси в газовом пузырьке применяется глобальный кинетический механизм. Константы реакций глобального механизма подбирались по задержкам самовоспламенения ацетилено-кислородной смеси в интересующем диапазоне тем-

ператур и давлений (см. рис. 5.1) на основе расчетов по детальному кинетическому механизму [62].

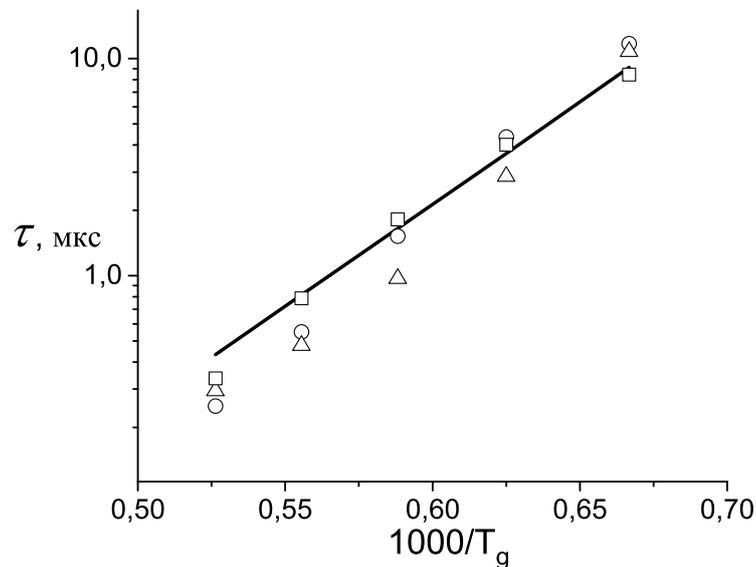


Рисунок 5.1 — Задержки самовоспламенения ацетилено-кислородной стехиометрической смеси; значки — детальный механизм, кривая — глобальный механизм; треугольники — $p_g^0 = 30$ атм, круги — $p_g^0 = 70$ атм, квадраты — $p_g^0 = 150$ атм; стехиометрическая смесь

В качестве детального механизма была выбрана проверенная и признанная модель горения углеводородных топлив GRI-Mech [62], состоящая из 325-ти химических реакций и 53-ех веществ. Применимость детального механизма [62] для моделирования ацетилено-кислородной смеси проверяется на экспериментальных данных [64] по задержкам воспламенения τ , измеренных методом отраженных УВ. Экспериментальные данные представлены в таблице 5.1 при начальном давлении газа ≈ 667 Па. Результаты сравнения численных расчетов на основе детального механизма GRI-Mech с экспериментальными данными представлены на рис. 5.2. Видно, что расчеты удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

Экспериментальные данные [64]

T_g , К	$[O_2] \cdot 10^5$, моль/л	$[C_2H_2] \cdot 10^5$, моль/л	$[Ar] \cdot 10^3$, моль/л	τ , мкс
1650	3.22	3.21	1.81	266
1790	3.29	1.02	1.85	181
1800	1.76	1.76	1.87	276
2115	1.85	0.57	1.94	119
2190	1.85	1.85	1.95	73

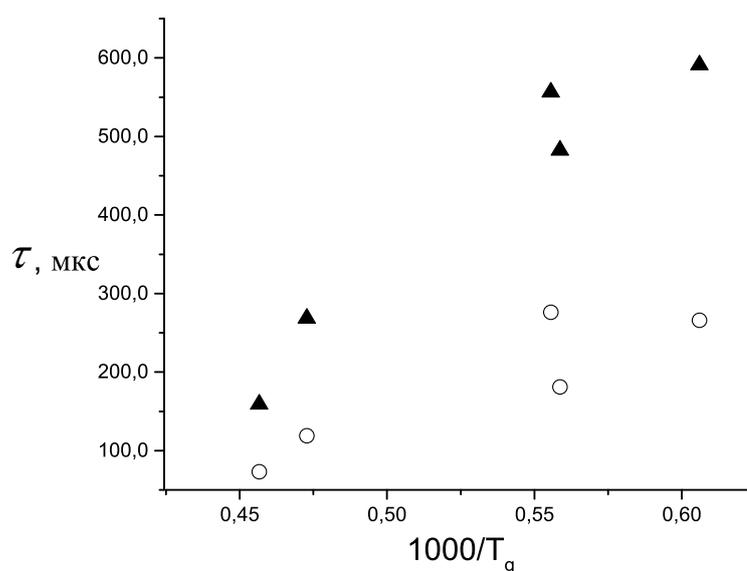


Рисунок 5.2 — Задержки самовоспламенения ацетилено-кислородной стехиометрической смеси; круги — расчет GRI-Mech, треугольники — эксперимент [64]

Численный расчет с использованием детального механизма может быть достаточно трудоемким, поэтому в данной работе предлагается глобальный механизм химических превращений ацетилено-кислородной смеси, состоящий из трех химических реакций и 9-ти веществ (см. табл. 5.2). Реакции диссоциации

воды и углекислого газа позволяют более правильно описать конечный состав продуктов реакции.

Таблица 5.2

Константы реакций глобального механизма для начального давления $30 \text{ атм} < p_g^0 < 150 \text{ атм}$ и начальной температуры $1500 \text{ К} < T_g^0 < 2500 \text{ К}$, стехиометрическая смесь

Реакция	A , м-моль-с	η	E , кДж/моль
$\text{C}_2\text{H}_2 + 2.5\text{O}_2 \longrightarrow 2\text{CO} + \text{H}_2\text{O}^1$	10^{11}	0	55.4
$\text{CO} + 0.5\text{O}_2 = \text{CO}_2$	$2 \cdot 10^9$	0	12
$\text{H}_2\text{O} + \text{M} = \text{H} + \text{OH} + \text{M}$	$1.6 \cdot 10^{27}$	-3.0	124

5.2 Пузырьковая детонация

На рис. 5.3 представлены типичные осциллограммы распространения детонационной волны (ДВ) [42] в инертной жидкости с реакционноспособными газовыми пузырьками. В эксперименте [42] пузырьковую детонацию инициировали УВ, генерируемой в газе и падающей на поверхность раздела газ – пузырьковая жидкость. В пузырьковой среде формируется своеобразное волновое возмущение: от инициирующей УВ отходит короткая уединенная волна 1, а за ней следуют основная УВ 2 и УВ 3, отраженная от торца КВД (см. записи 2-го, 3-го и 4-го датчиков на рис. 5.3). Воспламенение имеет место лишь в волне 1, тогда как в волнах 2 и 3 воспламенение отсутствует. Анализ движения уединенной волны показал, что со временем (зависящим от условий эксперимента) уединенная волна выходит на квазистационарный режим и движется со скоростью, значительно превышающей равновесную (низкочастотную [29]) скорость

¹ $m_{\text{C}_2\text{H}_2} = 0.5, m_{\text{O}_2} = 0.5$

звука в пузырьковой среде, а основная УВ, следующая за ней, в свою очередь затухает вследствие диссипации энергии. Такой стационарный сверхзвуковой самоподдерживающийся фронт реакции с быстрым и полным выгоранием горючего в лидирующей УВ называют пузырьковой детонацией.

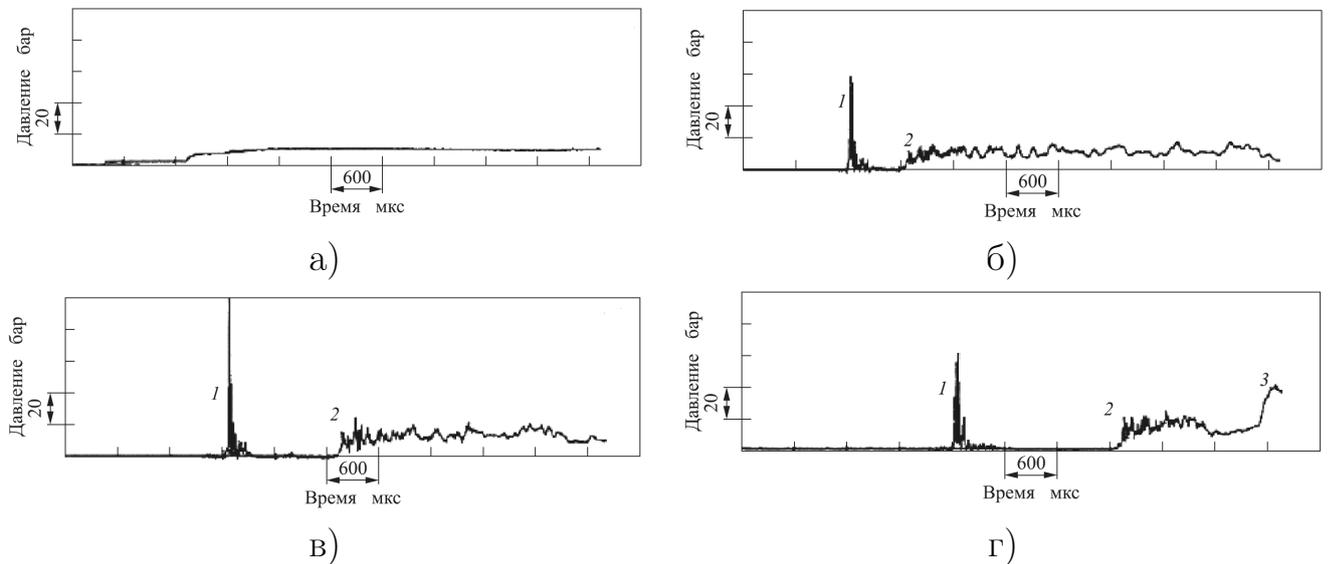


Рисунок 5.3 — Осциллограммы профилей давления [42], 1-ый датчик (5.3а) установлен в газе, 2-ой датчик (5.3б) установлен на расстоянии 285 мм, 3-ий (5.3в) — 815 мм, 4-ый (5.3г) — 1345 мм (расстояния отсчитываются от поверхности раздела газ — пузырьковая жидкость); $\alpha_g^0 = 0.0035$, $d^0 = 2.8$ мм, пузырьки газа — $30\%(2\text{H}_2 + \text{O}_2) + 70\%\text{Ar}$, несущая жидкость — вода

По мнению авторов [37] механизм формирования пузырьковой детонации может быть следующим. Известно, что в пузырьковой среде с инертными газовыми пузырьками существуют УВ с осцилляторной структурой. Осцилляторная УВ может распадаться на последовательность уединенных УВ — солитонов, скорость которых пропорциональна их амплитудам. Наличие химических реакций приводит к повышению давления в лидирующей УВ, и, следовательно, к резкому возрастанию ее скорости.

Для проверки нашей модели проведено сравнение численных расчетов с экспериментальными данными [35] по скорости распространения и структуре пузырьковой детонации в воде с пузырьками ацетилено-кислородной смеси (си-

стема I), а также в смеси воды и глицерина (50 % об./50 % об.) с пузырьками ацетилено-кислородной смеси (система II).

Алгоритм численного решения системы уравнений (5.4)–(5.13) основан на методе расщепления по физическим процессам. Сначала BDF — методом (Backward Differentiation Formula) решаются кинетические уравнения для химических реакций при постоянном объеме с использованием внутреннего шага интегрирования [69]. Далее методом, описанным в Главе 4.2, решается система уравнений (5.4)–(5.13) без химических источников в одномерном приближении.

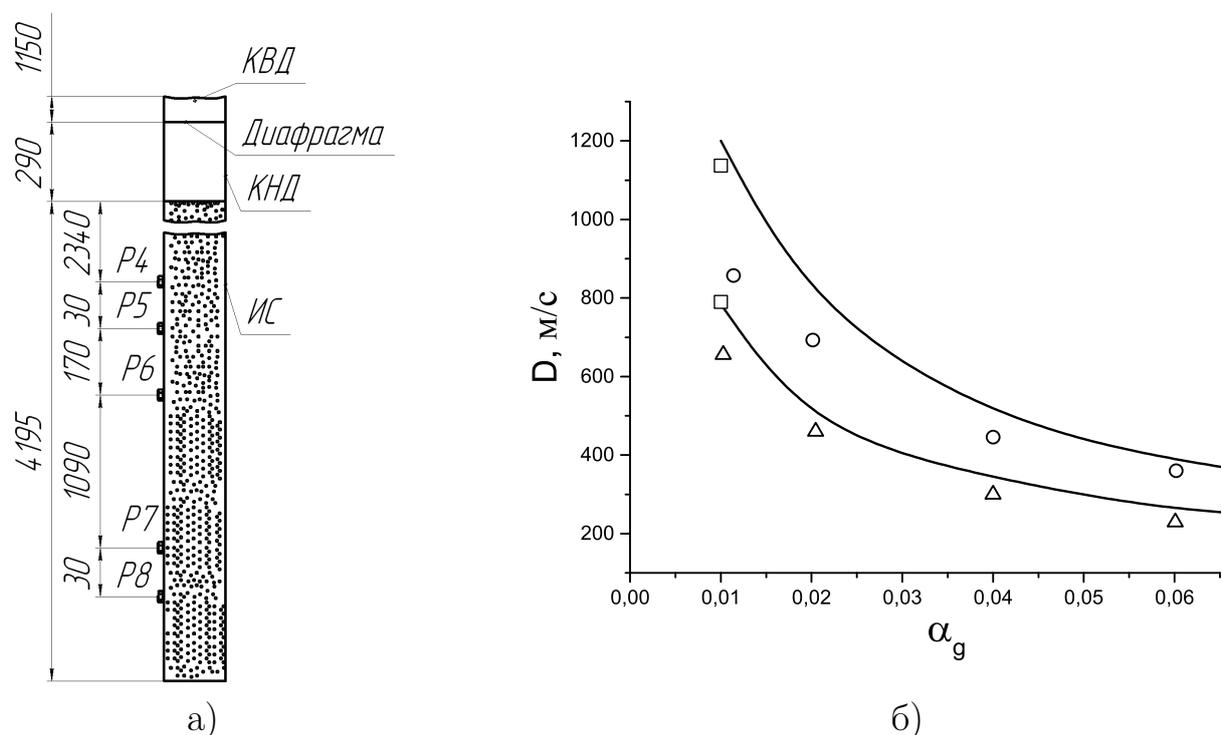


Рисунок 5.4 — 5.4а Схема экспериментальной установки [35] (размеры указаны в миллиметрах); 5.4б Система I, Эксперимент [35]: круги — скорость уединенной УВ, треугольники — скорость основной УВ; сплошные кривые — расчетные скорости уединенной УВ 1 и основной УВ 2; квадраты — расчетные скорости УВ 1 и основной УВ 2 на основе детального кинетического механизма [62]

Эксперименты [35] выполнены в вертикальной гидроударной трубе (рис. 5.4а) с внутренним диаметром 35 мм. Начальное давление и температуру (62.94 атм и 4278 К) в камере высокого давления (КВД) создавали за счёт сжигания стехиометрической ацетилено-кислородной смеси. Камеру низ-

кого давления (КНД) заполняли воздухом при нормальных условиях (1 атм и 293 К). В измерительной секции (ИС) создавали столб жидкости с газовыми пузырьками (система I или II) с начальным объёмным газосодержанием α_g^0 от 0,01 до 0,1 при среднем размере пузырьков реакционноспособного газа $d^0 = 3.5 - 4.0$ мм (массовые доли C_2H_2 и O_2 равны 0.245 и 0.755, соответственно). Начальная температура систем I и II была комнатной.

На рис. 5.5 представлены рассчитанные профили давления жидкости для условий эксперимента [35]. Так же как и в эксперименте в расчете наблюдается образование уединенной 1 и ударной 2 волн. На рис. 5.4б показаны символами экспериментальные значения средней скорости уединенной УВ 1 и основной УВ 2 волн в системе I в зависимости от начального газосодержания. Значения средних скоростей получены по записям давления на датчиках P7 и P8 (см. рис. 5.4а). Отметим, что пузырьковая детонация в [35] со свечением продуктов горения ацетилено-кислородной смеси наблюдалась при α_g^0 от 0,02 до 0,06, тогда как при $\alpha_g^0 > 0,06$ свечение продуктов горения ацетилена не регистрировалось, т.е. по утверждению авторов [35] детонация отсутствовала. Из рис. 5.4б видно, что результаты, полученные на основе модели в целом согласуются с экспериментом.

При всех начальных газосодержаниях и измеренные, и рассчитанные скорости уединенной УВ существенно превышают равновесную скорость звука в воде с пузырьками газа. Равновесная скорость звука c_e оценивается по формуле:

$$c_e^2 = \frac{\gamma p_1^0}{\rho_1 \alpha_1^0 \alpha_g^0} \quad (5.14)$$

где $\gamma = 1,33$ (для смеси $C_2H_2 + 2.5O_2$), в условиях экспериментов [35] скорость звука составляла приблизительно 82 м/с при $\alpha_g^0 = 0,02$ и 48 м/с при $\alpha_g^0 = 0,06$, т.е. в этих условиях уединенные волны распространялись с числом Маха, равным 9,4 и 8 соответственно.

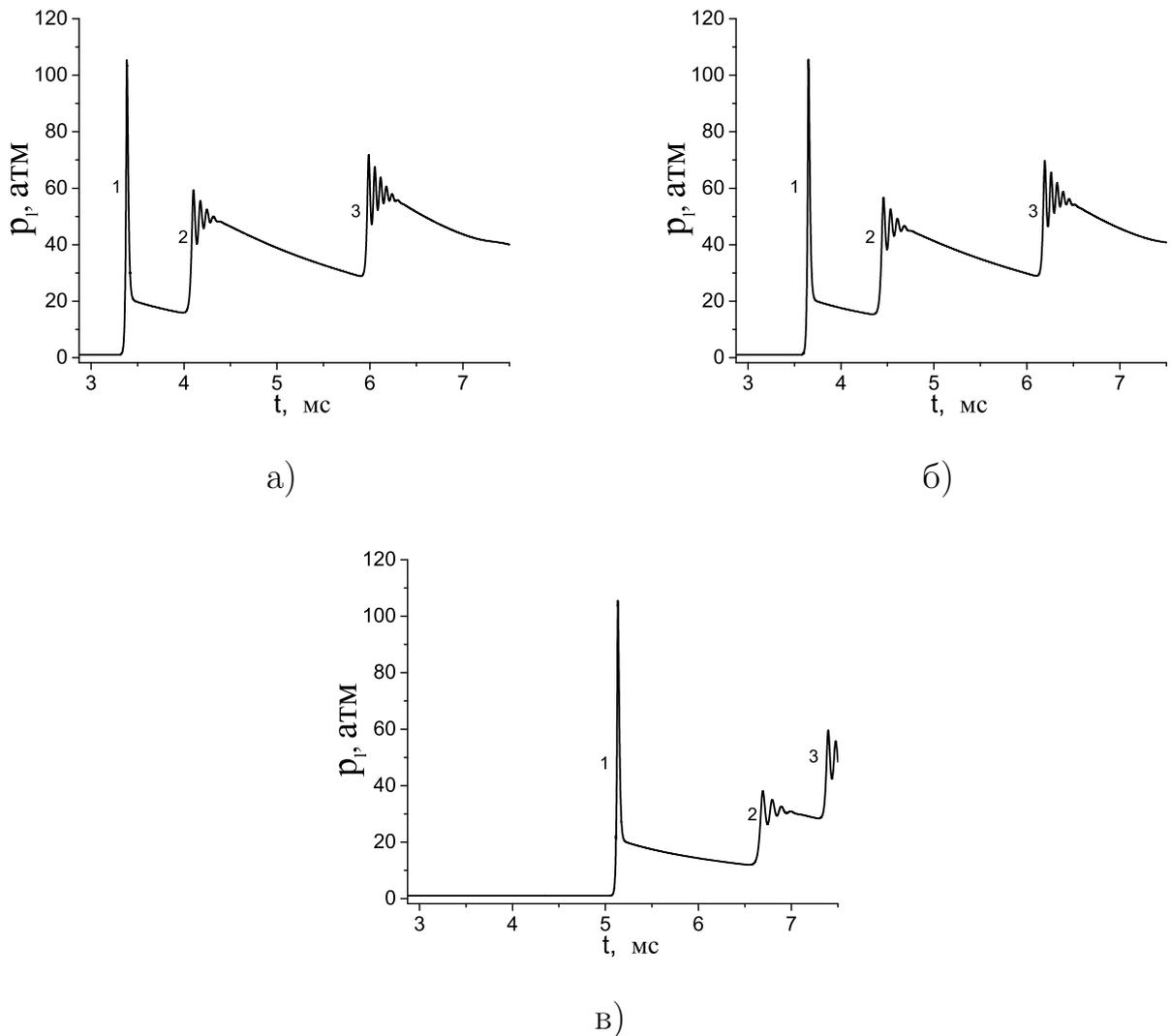


Рисунок 5.5 — Рассчитанные профили давления. Датчик P4 (5.5а) установлен на расстоянии 2340 мм, P6 (5.5б) — 2540 мм, P10 (5.5в)— 3730 мм (см. рис. 5.4а), $\alpha_g^0 = 0.01$, $d^0 = 3.5$ мм, система I; 1 — уединенная волна, 2 — УВ, 3 — отраженная волна

В работе [38] исследовалось влияние вязкости несущей жидкости на скорость уединенной УВ 1. Показано, что при увеличении вязкости несущей жидкости (разбавление воды глицерином) скорость уединенной УВ 1 в пузырьковой среде возрастает (см. экспериментальные данные на рис. 5.6). Этот эффект можно объяснить следующим образом. При прохождении уединенной УВ через газовый пузырек последний деформируется с образованием кумулятивной струйки, пронизывающей его насквозь. При увеличении вязкости несущей жидкости поверхность пузырька становится более устойчивой к внешним воз-

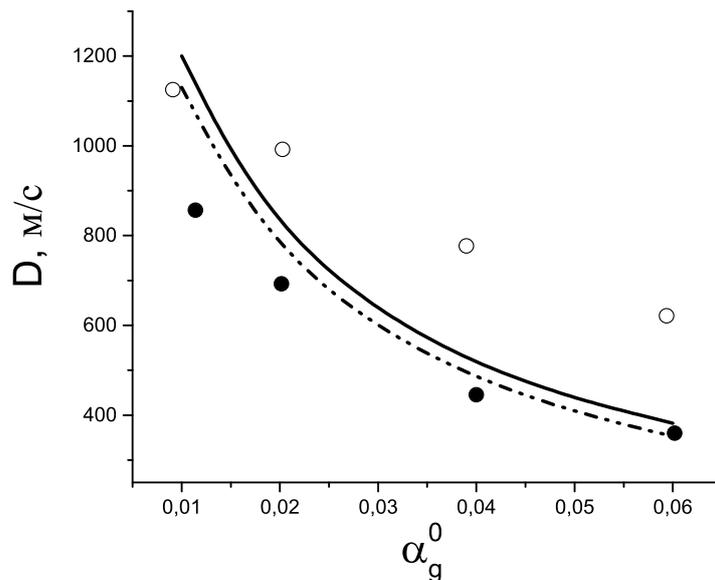


Рисунок 5.6 — Символы — эксперимент [38]: черные круги — скорость уединенной УВ 1 в системе I, круги — скорость уединенной УВ 1 в системе II; сплошные кривые — расчетные кривые: сплошная кривая — скорость уединенной УВ 1 в системе I, штрих-пунктирная кривая — скорость уединенной УВ 1 в системе II

мущениям, т.е. площадь соприкосновения пузырька с жидкостью уменьшается, и следовательно, уменьшаются теплопотери пузырька, нагретого в результате сжатия и химических превращений, через межфазную поверхность [38]. Однако в результатах, полученных на основе предложенной модели, наблюдается обратный эффект: при увеличении вязкости скорость уединенной УВ 1 снижается (см. рис.5.6). По-видимому, это происходит вследствие того, что в модели не учитываются такие эффекты как дробление и/или деформация пузырьков.

На рис. 5.7 приведено сравнение измеренного и расчетного профилей уединенной УВ, распространяющейся квазистационарно в системе II при $\alpha_g^0 = 0,01$, $D \approx 1130$ м/с, $p_1^0 = 1$ атм. Видно, что в эксперименте и в расчете полуширина волны давления одинаковые и составляют около 30 мкс. В работе [66] сделан вывод о том, что длина уединенной волны должна совпадать с протяженностью зоны реакции, что не подтверждается экспериментально.

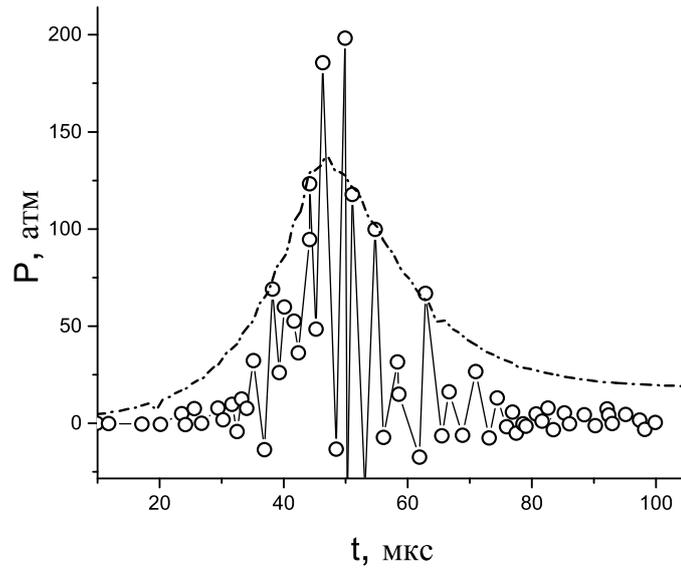


Рисунок 5.7 — Измеренный [37] и рассчитанный профили давления в уединенной волне пузырьковой детонации (система II, $\alpha_g^0 = 0.01$, $D \approx 1130$ м/с, $p_1^0 = 1$ атм)

Основные результаты и выводы

1. Предложены корректные физико-математические модели двухфазного двухскоростного неизотермического течения пузырьковой среды, которые последовательно (от простого к сложному) дополняются уравнениями, описывающими сопутствующие физические (колебания пузырьков, вязкость фаз, межфазный обмен количеством движения и энергией) и химические (глобальные и детальные кинетические механизмы химических реакций, энерговыделение в газе) процессы.
2. Для предложенных физико-математических моделей двухфазного двухскоростного неизотермического течения пузырьковой среды разработаны и отлажены новые численные алгоритмы.
3. Проведена верификация предложенных физико-математических моделей двухфазного двухскоростного неизотермического течения пузырьковой среды на основе сравнения результатов численных расчетов с литературными экспериментальными данными, а также с новыми данными экспериментов о передаче количества движения от ударной волны к пузырьковой жидкости, полученных с участием диссертанта.
4. Численно и экспериментально на основе новых собственных экспериментальных данных о передаче количества движения ударной волны к пузырьковой жидкости доказано существование оптимального начального газосодержания жидкости для достижения наиболее эффективной передачи количества движения от ударной волны к пузырьковой среде.

Список принятых обозначений

В настоящей диссертации применяются следующие обозначения и сокращения:

ГУТ — вертикальная гидроударная труба

ГРД — гидрореактивный водометный движитель

УВ — ударная волна

КВД — камера высокого давления

КНД — камера низкого давления

ИС — измерительная секция

КдВБ — уравнение Кортевега–де Вриза–Бюргерса

КП — контактная поверхность

ДВ — детонационная волна

Приложение А

Матрица $M(\xi_1, \xi_2)$ имеет следующий вид:

$$M(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} \chi_l & 0 & 0 & 0 & -\xi_1 \alpha_l & -\xi_2 \alpha_l \\ \frac{\rho_g(\chi_g - \chi_l)}{\alpha_g \dot{\rho}_g} & \chi_g & \frac{\xi_1 \rho_g}{\dot{\rho}_g} & \frac{\xi_2 \rho_g}{\dot{\rho}_g} & \frac{\xi_1 \alpha_l \rho_g}{\alpha_g \dot{\rho}_g} & \frac{\xi_2 \alpha_l \rho_g}{\alpha_g \dot{\rho}_g} \\ -\frac{f \xi_1}{\alpha_g \rho_g} & \frac{\xi_1}{\rho_g} & \chi_g & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{f \xi_2}{\alpha_g \rho_g} & \frac{\xi_2}{\rho_g} & 0 & \chi_g & 0 & 0 \\ \frac{f \xi_1}{\rho_l \alpha_l} & \frac{\xi_1}{\rho_l} & 0 & 0 & \chi_l & 0 \\ \frac{f \xi_2}{\rho_l \alpha_l} & \frac{\xi_2}{\rho_l} & 0 & 0 & 0 & \chi_l \end{pmatrix}$$

где $f = \frac{1}{2} C_s \rho_l u_{lg}^2$. Выпишем характеристический многочлен $M(\xi_1, \xi_2)$ с учетом соотношения $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$:

$$\frac{(\lambda - \chi_g)(\lambda - \chi_l)}{\phi \dot{\rho}_g \rho_l} (P_1(\lambda) - P_2(\lambda)) = 0$$

$$P_1(\lambda) = -\alpha_l \rho_g (\lambda - \chi_g)^2 + \dot{\rho}_g \alpha_g (\lambda - \chi_g)^2 \left(\rho_l (\lambda - \chi_l)^2 + \frac{1}{2} C_s \rho_l u_{lg}^2 \right)$$

$$P_2(\lambda) = \alpha_g \rho_l (\lambda - \chi_l)^2 + \frac{1}{2} C_s \rho_l u_{lg}^2$$

Приложение Б

$$\rho_g = \frac{p_g}{R_g T_g(H_g, u_g)}, \text{ т.к. } H_g = c_{p,g}(T_g - T_g^0) + h_g^0 + \frac{u_g^2}{2}, \text{ матрица } A = T^{-1}X,$$

где

$$T = \begin{pmatrix} \rho_g & \alpha_g \frac{\partial \rho_g}{\partial p_g} & \alpha_g \frac{\partial \rho_g}{\partial u_g} & 0 & \alpha_g \frac{\partial \rho_g}{\partial H_g} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_g \alpha_g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_1 \alpha_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} C_s \rho_1 u_{g1}^2 & -\alpha_g & 0 & 0 & \rho_g \alpha_g & 0 \\ -\frac{1}{2} C_s \rho_1 u_{g1}^2 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \rho_g u_g & \frac{\partial \rho_g}{\partial p_g} u_g \alpha_g & \left(\rho_g \alpha_g + \frac{\partial \rho_g}{\partial u_g} u_g \alpha_g \right) & 0 & \frac{\partial \rho_g}{\partial H_g} \alpha_g u_g & 0 \\ -u_1 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} C_s \rho_1 u_{g1}^2 & \alpha_g & \rho_g \alpha_g u_g & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} C_s \rho_1 u_{g1}^2 & \alpha_1 & 0 & \rho_1 u_1 \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_g u_g \alpha_g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 u_1 \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Приложение В

Для более компактной записи введем обозначения ($i = 1, g$):

$$\kappa_i = \frac{\mu_i}{3\rho_i}$$

$$\psi_i = 0.5\kappa_i(6 \cos^2(\theta) + (7 + \cos(2\chi)) \sin^2(\theta))$$

$$l_i = 0.5\kappa_i(7 + \cos(2\theta))$$

$$\varsigma^{(1)} = \cos(\chi) \sin^2(\theta) \sin(\chi)$$

$$\varsigma^{(2)} = \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\chi)$$

$$\varsigma^{(3)} = \cos(\theta) \sin(\theta) \sin(\chi)$$

тогда матрица $\overline{M}(0, \theta, \chi)$ примет вид:

$$\overline{M}(0, \theta, \chi) = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_g & \kappa_g \varsigma^{(1)} & \kappa_g \varsigma^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_g \varsigma^{(1)} & \psi_g & \kappa_g \varsigma^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_g \varsigma^{(2)} & \kappa_g \varsigma^{(3)} & l_g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_l & \kappa_l \varsigma^{(1)} & \kappa_l \varsigma^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_l \varsigma^{(1)} & \psi_l & \kappa_l \varsigma^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_l \varsigma^{(2)} & \kappa_l \varsigma^{(3)} & l_l \end{pmatrix}$$

Для матрицы $\hat{M}(\theta, \chi) = \left. \frac{\partial \bar{M}(\varepsilon, \theta, \chi)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$ будут использоваться обозначения:

$$\begin{aligned}
\eta &= -\frac{1}{2} C_s \rho_l u_{lg}^2 \\
\varrho_i &= (u_i^3 \cos(\theta) + \sin(\theta)(u_i^1 \cos(\chi) + u_i^2 \sin(\chi))) \\
\tau &= ((u_g^3 - u_l^3) \cos(\theta) + \sin(\theta)((u_g^1 - u_l^1) \cos(\chi) + (u_g^2 - u_l^2) \sin(\chi))) \\
\gamma &= \frac{\rho_g}{\dot{\rho}_g} \\
\sigma^1 &= \cos(\chi) \sin(\theta) \\
\sigma^2 &= \sin(\chi) \sin(\theta) \\
m_i^{(1)} &= -\frac{\cos(\theta) \tau_i^{xz} - \sin(\theta) (\cos(\psi) (\eta - \tau_i^{xx}) - \tau_i^{xy} \sin(\psi))}{\alpha_i \rho_i} \\
m_i^{(2)} &= \frac{\sin(\theta) \sin(\psi) (\tau_i^{yy} - \eta) + \sin(\theta) \tau_i^{yx} \cos(\psi) + \cos(\theta) \tau_i^{yz}}{\alpha_i \rho_i} \\
m_i^{(3)} &= -\frac{(\cos(\theta) (\tau_i^{zz} - \eta) + \sin(\theta) \tau_i^{zx} \cos(\psi) + \sin(\theta) \tau_i^{zy} \sin(\psi))}{\alpha_i \rho_i}
\end{aligned} \tag{B.1}$$

тогда матрица $\hat{M}(\theta, \chi)$ примет вид:

$$\hat{M} = -i \begin{pmatrix}
\varrho_l & 0 & 0 & 0 & 0 & (\phi - 1)\sigma^1 & (\phi - 1)\sigma^2 & (\phi - 1)\cos(\theta) \\
\frac{\tau\gamma}{\phi} & \varrho_g & \gamma\sigma^1 & \gamma\sigma^2 & \gamma\cos(\theta) & \gamma\sigma^1 \frac{1-\phi}{\phi} & \gamma\sigma^2 \frac{1-\phi}{\phi} & \gamma\cos(\theta) \frac{1-\phi}{\phi} \\
m_g^{(1)} & \frac{\sigma^1}{\rho_g} & \varrho_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m_g^{(2)} & \frac{\sigma^2}{\rho_g} & 0 & \varrho_g & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m_g^{(3)} & \frac{\cos(\theta)}{\rho_g} & 0 & 0 & \varrho_g & 0 & 0 & 0 \\
m_l^{(1)} & \frac{\sigma^1}{\rho_l} & 0 & 0 & 0 & \varrho_l & 0 & 0 \\
m_l^{(2)} & \frac{\sigma^2}{\rho_l} & 0 & 0 & 0 & 0 & \varrho_l & 0 \\
m_l^{(3)} & \frac{\cos(\theta)}{\rho_l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varrho_l
\end{pmatrix}$$

Список литературы

1. Фролов С.М., Фролов Ф.С., Аксенов В.С., Авдеев К.А. Водометный импульсный детонационный двигатель (варианты) и способ создания гидро-реактивной тяги. Заявка РСТ/RU2013/001148 от 23.12.2013. – <http://www.idgcenter.ru/patentРСТ-RU2013-001148.htm>
2. Авдеев К.А., Аксёнов В.С., Борисов А.А., Тухватуллина Р.Р., Фролов С.М., Фролов Ф.С. Численное моделирование передачи импульса от ударной волны к пузырьковой среде// Химическая физика. – 2015. – Т. 34. – №5. – С. 34–46.
3. Зельдович Я.Б. К вопросу об энергетическом использовании детонационного горения// ЖТФ. – 1940. – Т. 10. – №17. – С. 1453–1461.
4. Frolov S.M. Natural-gas-fueled pulse-detonation combustor// Journal of Propulsion and Power. – 2014. – Vol. 30. – №1. – P. 41–46.
5. Gidaspow D. Modeling of two phase flow// International heat transfer conference (Tokyo, 3 Sep. 1974). – Washington, 1974. – P. 125–128.
6. Wijngaarden L. Some problems in the formulation of the equations for gas/liquid flows// Theoretical and Applied Mechanics. – 1976. – P. 249–260.
7. Lyczkowski R. W., Gidaspow D., Solbrig C. W., Hughes E. D. Characteristics and stability analyses of transient one-dimensional two-phase flow equations and their finite difference approximations// Nuclear Science and Engineering. – 1978. – Vol. 66. – №3. – P. 378–396.
8. Klebanov L. A., Kroshilin A. E., Nigmatulin B. I., Nigmatulin R. I. On the hyperbolicity, stability and correctness of the Cauchy problem for the system

- of equations of two-speed motion of two-phase media// Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1982. – Vol. 46. – №1. – P. 66–74.
9. Stuhmiller J. H. The influence of interfacial pressure forces on the character of two-phase flow model equations //International Journal of Multiphase Flow. – 1977. – Vol. 3. – №6. – P. 551–560.
 10. Paillere H., Corre C., Garcia Cascales J.R. On the extension of the AUSM+ scheme to compressible two-fluid models// Computers & Fluids. – 2003. –Vol. 32. – №6. – P. 891–916.
 11. Haimovich O., Frankel S. H. Numerical simulations of compressible multicomponent and multiphase flow using a high-order targeted ENO (TEN0) finite-volume method// Computers & Fluids. –2017. – Vol. 146. – P. 105–116.
 12. Yeom G.S., Chang K.S. Two-dimensional two-fluid two-phase flow simulation using an approximate Jacobian matrix for HLL scheme// Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals. – 2010. – Vol. 56. – №5. – P. 372–392.
 13. Toumi I., Kumbaro A., Paillere H. Approximate Riemann solvers and flux vector splitting schemes for two-phase flow// CEA Saclay, Direction de l'information scientifique et technique. – 1999. – http://www.iaea.org/inis/collection/NCLCollectionStore/_Public/31/020/31020943.pdf.
 14. Liou M.S., Nguyen L., Chang C.H., Sushchikh S., Nourgaliev R., Theofanous T. Hyperbolicity, discontinuities, and numerics of two-fluid models// Proceedings of the Fourth International Conference on Computational Fluid Dynamics (Belgium, 10-14 July 2006). – Computational Fluid Dynamics. – 2006. – P. 625–630.
 15. Radvogin Yu.B., Non-Hyperbolicity of the two-phase flow equations and Kelvin-Helmholtz instability//Preprints of the Keldysh Institute of Applied mathematics. – 1995. – №125. – 6 c.

16. Ramshaw J.D., Trapp J.A. Characteristics, stability, and short-wavelength phenomena in two-phase flow equation systems// Nuclear Science and Engineering. – 1978. – Vol. 66. – №1. – P. 93–102.
17. Travis J.R., Harlow F.H., Amsden A.A. Numerical calculation of two-phase flows// Nuclear science and engineering. – 1976. – Vol. 61. – №1. – P. 1–10.
18. Baer M.R., Nunziato J.W. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials// International journal of multiphase flow. – 1986. – Vol. 12. – №6. – P. 861–889.
19. Saurel R., Lemetayer O. A multiphase model for compressible flows with interfaces, shocks, detonation waves and cavitation// Journal of Fluid Mechanics. – 2011. – Vol. 431. – P. 239–271.
20. Gelfand B.E., Gubin S.A., Kogarko B.S., Kogarko S.M. Investigations of compression waves in a mixture of liquid with gas bubbles// Soviet Physics Doklady. – 1974. – Vol. 18. – P. 787.
21. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р., Кузнецов В.В., Малых, Н.В. Волновые процессы в двухфазных системах/Под ред. Кутателадзе С.С. — Новосибирск: Институт теплофизики СО АН СССР, 1975 – 54 с.
22. Kalra S.P., Zvirin Y. Shock wave-induced bubble motion// International Journal of Multiphase Flow. –1981. –Vol. 7. №1. – P. 115–127.
23. Kameda M., Matsumoto Y. Shock waves in a liquid containing small gas bubbles// Physics of Fluids. – 1996. – Vol. 8. – №2. – P. 322–335.
24. Kameda M., Shimaura N., Higashino F., Matsumoto Y. Shock waves in a uniform bubbly flow// Physics of Fluids. – 1998. – Vol. 10. – №10. – P. 2661–2668.

25. Mori J., Hijikata K., Komine A. Propagation of pressure waves in two-phase flow//International Journal of Multiphase Flow. – 1975. – Vol. 2. – №2. – P. 139–152.
26. Borisov A. A., Gelfand B.E., Timofeev E.I. Shock waves in liquids containing gas bubbles// International Journal of Multiphase Flow. – 1983. – Vol. 9. – №5. – P. 531–543.
27. Бурдуков А.П., Кузнецов В.В., Кутателадзе С.С., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Ударные волны в газожидкостной среде// ПМТФ. – 1973. – №3. – С. 65–69.
28. Noordzij L. Shock waves in bubble-liquid mixtures// Phys. Commun. – 1971. – Vol. 3. – №1.
29. Кутателадзе С.С., Накоряков В.Е. Теплообмен и волны в газожидкостных системах. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1984. – 302 с.
30. Van Wijngaarden L. On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles// Journal of Fluid Mechanics. – 1968. – Vol. 33. – №3. – P. 465–474.
31. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред, часть 1. – Москва: Наука, 1987. – 464 с.
32. Gavrilyuk S., Saurel R. Mathematical and numerical modeling of two-phase compressible flows with micro-inertia// Journal of Computational Physics. – 2002. – Vol. 175. – №1. – P. 326–360.
33. Hasegawa T., Fujiwara T. Detonation in oxyhydrogen bubbled liquids// Symposium (International) on Combustion. – 1982. – Vol. 19. – №1. – P. 675–683.
34. Сычев А.И. Воспламенение систем жидкость — пузырьки газа ударной волной//ФГВ. – 1985. – Т. 21. – №2. – С. 130–134.

35. Сычев А.И. Волна детонации в системе жидкость — пузырьки газа// ФГВ. — 1985. — Т. 21. — №3. — С. 103–110.
36. Сычев А.И., Пинаев А. В. Самоподдерживающаяся детонация в жидкостях с пузырьками взрывчатого газа// ПМТФ. — 1986. — Т. 27. — №1. — С. 133–138.
37. Пинаев А.В., Сычев А.И. Структура и свойства детонации в системах жидкость — пузырьки газа// ФГВ. — 1986. — Т. 22. — №3. — С. 109–118.
38. Пинаев А.В., Сычев А.И. Влияние физикохимических свойств газа и жидкости на параметры и условия существования волны детонации в системах жидкость—пузырьки газа// ФГВ. — 1987. — Т. 23. — №6. — С. 76–84.
39. Сычев А. И., Пинаев А.В. Волна детонации в системах жидкость — пузырьки газа // 1-ый Всесоюз. симп. по макроскопической кинетике и химической газодинамике (Алма-Ата, 1984). —Т. 1. — ч. 2. — С. 54–55.
40. Троцюк А.В., Фомин П.А. Модель пузырьковой детонации// ФГВ. — 1992. — Т. 28. — №4. — С. 129–136.
41. Шагапов В.Ш., Абдрашитов Д.В. Структура волн детонации в пузырьковой жидкости// ФГВ. — 1992. — №6. — С. 89–95.
42. Beylich A. E., Gülhan A. Waves in reactive bubbly liquids// IUTAM Simposiom (Göttingen, 28 August 1989). — Adiabatic waves in liquid-vapor systems. — Springer, Berlin, Heidelberg, 1990. — P. 39–48.
43. Kedrinskii V.K. The Iordansky–Kogarko–van Wijngaarden Model: Shock and Rarefaction Wave Interactions in Bubbly Media// Applied scientific research. — 1997. — Vol. 58. — № 1–4. — P. 115–130.
44. Красный Ю.П., Михо В.В. Самоподдерживающаяся нелинейная волна детонации в жидкости с пузырьками горючего газа// ФГВ. — 1989. — Vol. 25. — №2. — С. 75–81.

45. Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К. Волны в пузырьковой системе при наличии химических реакций в газовой фазе// ФГВ. – 1989. – Vol. 25. – №6. – С. 14–22.
46. Губайдуллин А. А., Ивандаев А. К, Нигматуллин Р. И. Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры// ПМТФ. – 1978. – №2. – С. 78–86.
47. Замараев Ф.Н., Кедринский В.К, Мейдер Ч. Волны в химически активной пузырьковой среде // ПМТФ. – 1990. – №2. – С. 20–26.
48. Иорданский С.В. Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа// ПМТФ. – 1960. – №3. – С. 102–110.
49. Николаев Ю. А., Фомин П. А. Приближенное уравнение кинетики в гетерогенных системах типа газ-конденсированная фаза// Физика горения и взрыва. – 1983. – Т. 19. – №6. – С. 49–58.
50. Николаев Ю. А., Зак Д. В. Согласование моделей химических реакций в газах со вторым началом термодинамики// Физика горения и взрыва. – 1988. – Т. 24. – №4. – С. 87.
51. Петровский И. Г. О проблеме Cauchy для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций// Бюллетень МГУ, Математика и механика. – Москва, 1938. – 39 с.
52. Ламб Г. Гидродинамика. – Москва: Гостехиздат, 1947. – 929 с.
53. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – Москва: Наука, 1974. – 712 с.
54. Clift R., Grace J. R., Weber M. E. Bubbles, drops, and particles. – New York: Academic Press, Inc, 1978. – 380 с.

55. Magnaudet J., Rivero M., Fabre J. Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. Part 1. Steady straining flow// Journal of fluid mechanics. – 1995. – Vol. 284. – P. 97–135.
56. Майлыбаев А. А., Сейранян А. П. Многопараметрические задачи устойчивости: Теория и приложения в механике. – Москва: Физматлит, 2009. – 395 с.
57. Computational fluid dynamics for conventional and alternative powertrain development. – <https://www.avl.com/>
58. Ishii R., Umeda Y., Murata S., Shishido N. Bubbly flows through a converging–diverging nozzle// Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. – 1993. – Vol. 5. – №7. – С. 1630–1643.
59. Thang N.T., Davis M. R. The structure of bubbly flow through venturis// International Journal of Multiphase Flow. – 1979. – Vol 5. – №1. – С. 17–37.
60. Campbell I.J., Pitcher A.S. Shock waves in a liquid containing gas bubbles// In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 1958. – Vol. 243. – №1235. – P. 534–545.
61. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред, часть 2. – Москва: Наука, 1987. – 359 с.
62. Smith G. P., Golden D. M., Frenklach M., Eiteener B., Goldenberg M., Bowman C. T., Hanson R. K., Gardiner W. C., Lissianski V. V., Qin Z. W. GRI-Mech 3.0. – http://www.me.berkeley.edu/gri_mech/.
63. Haberman W.L., Morton R.K. An experimental investigation of the drag and shape of air bubbles rising in various liquids, DTIC Document. – 1953. – <http://www.dtic.mil/get-tr-doc/pdf?AD=AD0019377>.

64. Glass G. P., Kistiakowsky G. B., Michael J. V., Niki H. Mechanism of the acetylene—oxygen reaction in shock waves// The Journal of Chemical Physics. – 1965. – Vol. 42 – №2. – С. 608–621.
65. Harlow F.H., Amsden A.A. A numerical fluid dynamics calculation method for all flow speeds// Journal of Computational physics. – 1971. – Vol. 8. – №2. – С. 197–213.
66. Борисов А.А., Шарыпов О.В. О формировании волны пузырьковой детонации // Изв. СО АН СССР. Серия техн. наук. – 1990. – Вып. 2. – С. 50–59.
67. Когарко Б.С. Об одной модели кавитирующей жидкости// Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 137. – №6. – С. 1331–1333.
68. Вильямс Ф. А. Теория горения. – Москва: Наука, 1971. – 616 с.
69. David G. Goodwin, Harry K. Moffat, Raymond L. Speth, Cantera: An Object-oriented Software Toolkit for Chemical Kinetics, Thermodynamics, and Transport Processes, 2017, Version 2.3.0. – <http://www.cantera.org>.